Berechnung der Entfernung des Sonnen-Apogaeums

EINE BERECHNUNG

DER

ENTFERNUNG DES SONNEN-APOGAEUMS

VON DEM

FRÜHLINGSPUNKTE BEI ALBÎRÛNÎ.

MIT DREI FIGUREN.

MITGETHEILT VON

PROF. ED. SACHAU,

CORRESP. MITGLIED DER KAIS. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN,

UND

DR. JOH. HOLETSCHEK,

ASSISTENT DER K. K. UNIVERSITÄTS-STERNWARTE IN WIEN.

WIEN, 1876.

IN COMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN

BUCHHÄNDLER DER KAIS. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Aus dem Februarhefte des Jahrganges 1876 der Sitzungsberichte der phil.-hist. Classe der kais. Akademie der Wissenschaften (LXXXII. Bd., S. 243) besonders abgedruckt.

Druck von Adolf Holzhausen in Wien
k. k. Universitäts-Buchdruckerei.

In dem Werke über die Chronologie des Orients, von dem bereits im 73. Bande dieser Sitzungsberichte (S. 479 ff.) die Rede gewesen und ein auf die älteste Geschichtstradition des Landes Khwârizm bezüglicher Abschnitt mitgetheilt worden ist, befolgt der Verfasser Albîrûnî die Methode, dass er zuweilen den Faden seiner Auseinandersetzung durch Abschweifungen auf verwandte Wissensgebiete unterbricht. Ueber die Absicht, die ihn dabei leitete, sagt er selbst an einer Stelle: ‚Nur deshalb vertiefe ich mich in Dinge, die dem Plane dieses Werkes fremd sind, damit der Leser in meinem Werke gleichsam wie zwischen den Gärten der Weisheit umherwandle, wodurch verhindert werden soll, dass nicht etwa (in Folge der langen Beschäftigung mit einem und demselben Gegenstande) sich seines Geistes und Auges ein Widerwille bemächtige'.

Eine dieser Episoden mathematischer Art habe ich in der Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft Bd. 29, S. 148 ff. mitgetheilt; eine zweite über eine astronomische Frage ist der Gegenstand dieser Publication.

Mitten in einem ausführlichen Capitel über jüdische Chronologie, speciell bei der Behandlung der Teḳûfôth, bricht der Verfasser plötzlich ab und wendet sich einem astronomischen Problem zu, der Berechnung der Entfernung des Apogaeums vom Frühlingspunkte. Er kennt drei Methoden der Berechnung:

I. Die Methode der Gelehrten des Alterthums, speciell des Ptolemaeus, richtiger: des Hipparchus.

II. Die Methode der ‚neueren‘ Astronomen, d. h. der arabischen Astronomen seit den ersten Zeiten des ʿAbbâsidischen Chalifats bis zur Zeit Albîrûnî's A. D. 752—1000.[1] Von dieser Methode gibt der Verfasser nur das Princip an, während die Durchführung derselben sich nicht in der Chronologie findet, wohl aber in seinem grösseren Werke über Astronomie, Astrologie, Chronologie und Geographie (Canon Masudicus).

III. Die Methode seines Lehrers 'Abû Naṣr Manṣûr ben ʿAlî ben ʿIrâḳ, von der der Verfasser ebenfalls nur kurz das Princip angibt, wonach man aber schliessen möchte, dass sie verwandt oder gar identisch ist mit derjenigen, die Delambre, Histoire de l'astronomie ancienne II, 121 ff. ausführt.

Während Albîrûnî der letzteren dieser drei Methoden den Vorzug zuerkennt, theilt er ausführlich nur die erstere mit, die Berechnung des Ptolemaeus, die aus B. 3, Cap. 4 Περὶ τῆς τοῦ ἡλίου φαινομένης ἀνωμαλίας seiner Σύνταξις μαθηματική (Halma I, 183) geschöpft, aber allerdings nach einer Richtung hin eigenartig variirt und erweitert ist. Eine Darstellung dieser Methode geben Delambre a. a. O. S. 117 (De l'anomalie ou inégalité apparente du Soleil) und J. Narrien, Historical Account of the origin and progress of astronomy, London 1850, S. 230.

Die handschriftliche Ueberlieferung des Textes dieser Episode ist im Grunde so schlecht, dass sie gar nicht schlechter sein könnte. Der Abschnitt ist erstens nicht lückenfrei; ferner finden sich falsche Zahlen und Confusion unter den Buchstaben, welche sich auf die dazu gehörige Zeichnung beziehen. Diese Kreisfigur findet sich ausserdem nur in einer einzigen Handschrift (in P, Handschrift der Bibliothèque Nationale, Paris). Wenn es trotz dieser Schwierigkeiten bis zu einem gewissen

[1] Die Bestimmung des Sonnen-Apogaeums von einigen der ‚neueren‘ Astronomen gibt Sédillot, Prolégomènes des Tables Astronomiques d'Olough-Beg, tom. I. Introduction p. 20 (von den Söhnen des Mûsâ ben Shâkir), p. 43 (von Ibn-Al'aʿlam). Unter den speciellen Verdiensten der arabischen Astronomie nennt Sédillot a. a. O. S. 134 auch die genauere Bestimmung der Bewegung des Sonnen-Apogaeums.

Grade gelungen sein sollte, den Worten Albîrûnî's gerecht zu werden, so ist das Hauptverdienst daran meinem Mitarbeiter Herrn Dr. Holetschek zuzuschreiben, der in liebenswürdiger Weise den astronomischen Theil dieser Arbeit übernommen und erst durch seine Nachrechnung den Boden für eine philologische Behandlung des Textes gelegt hat.

I. Text.

وامّا مُدَدُ ما بين التقوفات عند محصِّليهم فانّها كما عند بطلميوس اعنى انّ من تقوفةِ تشرى الى تقوفة طيبث ثمانية وثمانين يوما وثُمْنا ومنها[1] الى تقوفة نيسن تسعين يوما وثمنا ومنها الى تقوفة تمّز اربعة وتسعين يوما ونصفا[1] ومنها الى تقوفة تشرى اثنين وتسعين يوما ونصفا فتكون الجملةُ ثلثَمائة وخمسة وستّين يوما وربعا، ولا يدقّقون فى كمّيّة السنة عند عمل التقوفات وقد قدّمنا انّهم اذا دقّقوا كانت سنة الشمس ثلثَمائة وخمسة وستّين يوما وخمس ساعات وثلثة آلاف وسبعمائة واحدا وتسعين جُزْءا من اربعة آلاف ومائة واربعة اجزاء من ساعة ، ومتى كانت ايّام أَرْباع السنة معلومةً فانّ موضع أَوْج فلك الشمس يكون معلوما فاذا اردنا معرفة الاوج فى زمان أَرْصادهم احتجنا الى تحصيل حركة الشمس الوسطى ليوم فضربنا اجزاء اليوم بليلته وهى ٩٨٤٩٩ ويسمّونها دور الشمس فى ثلثمائة وستّين فقسمنا المجتمِعَ من الضرب على مقدار سنة الشمس بعد التجنيس وهى ٣٥٩٧٥٣٥١ ويسمّونه الاصل فيَخْرُجُ بهذا العمل على ما ذكروه[2] حركة الشمس

[1] Von وتسعين يوما ونصفا bis ومنها الى تقوفة نيسن fehlt in allen drei Handschriften. Ich habe die Stelle ergänzt mit Hilfe der vorhandenen Reste und Ptolemaeus, Μαθηματικὴ σύνταξις (ed. Halma) III, 4, S. 184.

[2] Die Worte على ماذكروه stehen in L (Hds. des Brittischen Museums) am Rande.

الوسطى ليوم بليلته ٠ نط ح يز ز مو[1] بالتقريب وذلك لانّ نسبة
اليوم الواحد[2] الى ايّام سنة الشمس كنسبة حِصّة اليوم[2] من
دَرَج الفلك الى الدور كلّه ، ثمّ لنُدِرْ دائرةَ ابجد لفلك
الشمس الممثَّل بفلك البروج على مركز ه وَلْيكُنْ نقطةُ آ اوّلَ
الحَمَل وبَ اوّلَ السَّرَطان وجَ اوّل الميزان ودَ اوّل الجدى ونُخْرِجُ
قُطْرَىْ اهج به د، وقد تقدّم من حكايتنا لقولهم انّ الشمس
تَقْطَعُ رُبْعَ اب فى زمانٍ اعظمَ ممّا تقطع فيه سائرَ الأَرْباع
فواجبٌ من ذلك انّ مركز الفلك الخارج المركز فى هذا الربع
وليكن نقطةَ ح فنُدير عليها دائرةً مُماسّةً للفلك الممثّل
لتكون شبيهة[3] الفلك الخارج المركز وهى دائرةُ صطفن ونقطَةُ
التَّماسّ ط ونَصِلُ طح ونُجيز على نقطة[4] ح قطرَ رحم ك
موازيًا لقطرِ اهج ونصفَ قطرِ لح موازيا لقطرِ به د ونُخْرجه
على استقامة الى س، فلانّ الشمس تَقْطَعُ بمَسِيرها الاوسط
نصفَ دائرة ابج الذى هو مجموعُ الربع الربيعىِّ والصيفىِّ فى مائة
وسبعة وثمانين يوما تكون قطعة صفن من الفلك الخارج
المركز قفد يح نب مج يب فاذا نَقَصْنا منها نصفَ دائرة
رط فك وهى مائة وثمانون درجة بَقِىَ مجموعُ صر كن وهو
د يح نب مج يب ولكنّهما متساويان لتَوازِى القطرين فلاجلِ
ذلك يكونُ كلّ واحدٍ من صر كن ب ط كو كا لو[5] وجَيْبُه خطُّ
حس يكون بالمقدار الذى به نصفُ قطرِ لح درجةً واحدة
٠ ب يه ل نز، ولانّها تَقْطَعُ ربعَ اب فى اربعة وتسعين يوما

---

[1] Alle drei Handschriften überliefern diese Zahl in folgender Weise:
٠ نط در ر مو ح

[2] Von الواحد bis اليوم fehlt in R (Hds. Sir Henry Rawlinson's).

[3] P (Hds. der Pariser Bibliothèque nationale) liest شبهة für شبيهة

[4] Alle drei Hdss. lesen قطر für نقطة

[5] Alle drei Hdss. überliefern: ط كو كا لو ohne ب

ونصفِ يوم تكونُ قطعةُ صطف من الفلكِ الخارجِ المركزِ
صج ح لد لح مد ولانّ صل هو مجموعُ صر المعلومِ ورل الذى
هو ربعِ دائرةٍ فانّا اذا نَقَصْنا صل من صف بقى لف [1]
٠ نط ح يزح وجيبُه بذلك المقدار ٠ ا ا نه له وهو خطُّ حم
المساوى لسه ففى مثلّثِ حس ه القائمِ الزاويةِ ضِلْعَا حس س ه
معلومان والضلعُ الاطولُ مجهولٌ فنَضْرِبُ كلَّ واحدٍ من ضلعَىْ
حس س ه [2] فى مثله ونَجْمَعُ مُرَبَّعَيْهِما فيكونُ ۲۸۷۷۰۴۴۶۶۶۷۴ [3]
ثوامن وناخذُ جَذْرَها فيكونُ ٠ ب كح نط م [4] وهو بُعْدُ ما
بين المركزين المساوِى لجيبِ التعديلِ الاعظمِ فاذا قَوَّسْناه
فى جداولِ الجيوب خَرَجَ قَوْسُه ب كب يط يب يو وهو التعديلُ
الاعظمُ درجة [5] واحدة، وذلك لانّ نصفَ ه ح بالمقدار الذى
به حط درجة واحدة الى حط، [5] فاذا اردنا معرفةَ خطِّ ح ه

---

[1] Die Hdss. überliefern اب für لف

[2] Die Hdss. überliefern س س ه für حس س ه

[3] Die Hdss. überliefern ۱۸۷۷۰۴۶۶۷۴

[4] Die Hdss. überliefern م, nicht ما

[5] Die Worte von درجة واحدة bis الى حط sind ein gänzlicher Torso. Was ursprünglich in dieser Lücke gestanden, lässt sich aus dem Zusammenhange mit einiger Sicherheit erkennen. Während Bîrûnî in dem unmittelbar folgenden erklärt, wie sich *hx* zu *ht* als zu 1 Grad verhält, wird er in dieser Stelle, wie die Reste klar andeuten, das Verhältniss von *hx* zu *xt* besprochen haben. Nach der Analogie des folgenden nehme ich an, dass ursprünglich etwa diese beiden Sätze standen:

[فاذا اردنا معرفة خطّ ه ح بالمقدار الذى به حط درجة
واحدة ضربنا الحز] درجة واحدة وذلك لانّ نصف ه ح
بالمقدار الذى به حط درجة واحدة الى حط [كنسبة الحز]

Am Schlusse fehlt der zweite Theil der Gleichung.

Der erste Satz bestimmte das Maass von *hx*, wenn es mit *xt* als

بالمقدار الذى به خطّ ه ح ط درجةٌ واحدةٌ ضربنا ح ه[1] فى
درجة واحدة وقسمنا المجتمعَ على مجموعِ ه ح[2] ودرجةٍ واحدةٍ
فيخرج ح ه بالمقدار الذى به طه درجةٌ واحدةٌ، وذلك لانّ
نسبةَ ه ح[3] بالمقدار الذى به ه ط[4] درجةٌ واحدةٌ الى حط
كنسبةِ ه ح بالمقدار الذى به ح ط[5] درجةٌ واحدةٌ الى مجموعِ
ه ح[6] ودرجةٍ واحدةٍ اعنى ح ط[7] فيصير بذلك بُعْدُ ما بين
المركزَيْن معلومَ النسبةِ الى كلِّ واحدٍ من قطرَىْ[8] الفلك الممثّل
والخارجِ المركزِ، ثمّ نُخْرِجُ طع قائمًا على قطرِ اهج فيكونُ
مثلّثَا طع ه ح سه متشابهان مُتناسِبَا الأَضْلاعِ وقد تَبيّن لمن
نظر فى الهندسة انّ نسبة الضلع الى الضلع فى المثلّث كنسبةِ
جَيْبِ الزاويةِ المقابِلةِ للضلع المنسوب الى جيبِ الزاويةِ
المقابلةِ للضلع المنسوب اليه فلذلك تكون نسبةُ ه ح المعلومِ
الى ح س المعلومِ كنسبة جيبِ زاويةِ ح س ه القائمةِ وهو ه ط
الجيبُ كلّه الى جيبِ زاويةِ سهح وهو طع المطلوبُ، فنستخرجه
استخراجَ العددِ المجهولِ من الأَعْدادِ الاربعةِ المتناسبةِ فيَخْرُجُ

Einheit gemessen wird; der zweite Satz enthielt die Proportion, die dieser Messung zu Grunde liegt.

Es ist zu bemerken, dass die Worte وذلك لانّ نصف ه ح in allen Handschriften gleich überliefert werden.

[1] Hdss. حط

[2] Hdss. مط

[3] R طه

[4] R ه ح, L ح ط

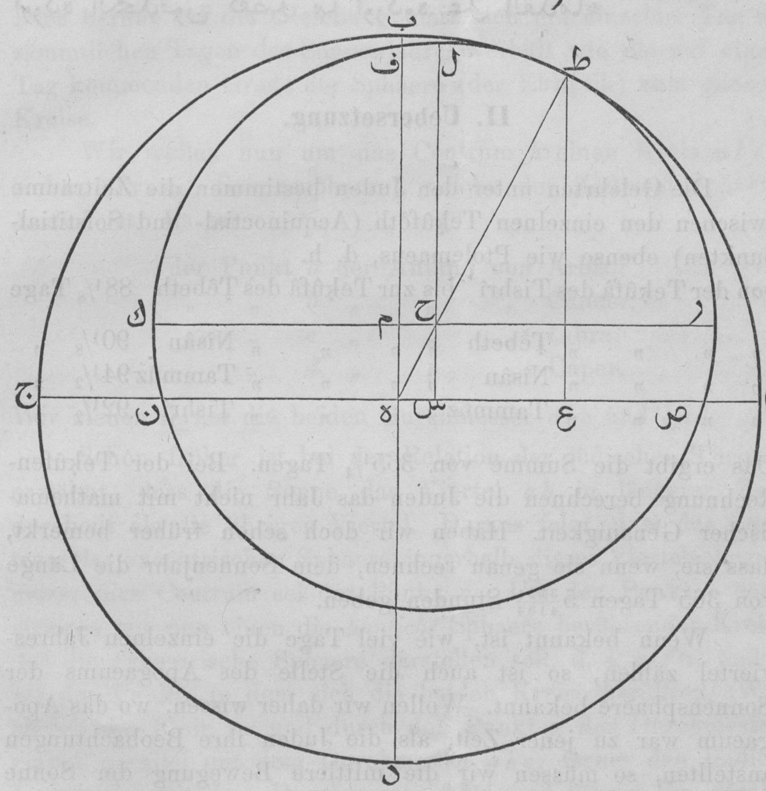
[5] ه ط in LP. Fehlt in R.

[6] R هط

[7] R هط

[8] Vielleicht ist in den Handschriften نصف (oder نِصْفَىْ) vor قطرى ausgefallen.

نَد لَد يَط مَح لَ وقَوْسُه سَه كَو كَط لَب[1] وهو اَط الذى هو بُعْدُ الاوج عن الاعتدال الربيعىّ وذلك ما اردنا ان نُبيّن وهذا شكلُ الدائرة



وهذه طريقة القدماء فى استخراج الاوج وامّا المُحْدَثون فانّهم لمّا علموا انّ الوقوف على اوقاتِ الانقلابَيْنِ صَعْب جدّا وشِبْهُ الممتنِع آثروا فى أَرْصادِهم لنُقَطِ اَ بَ جَ دَ أَوْساطَ الأَرْباع اعنى أَنْصافَ البروجِ الثوابتِ، واستخراج استاذى ابى نَصْر منصور ابن علىّ بن عِراقٍ مولى امير المؤمنين طريقةً لاستخراج ما

[1] So alle drei Hdss.

تَقدّم ذكرهُ يَحْتاج الى رَصَدِ ثلثِ نُقَطٍ من فلك البروج كيف
اتّفقت بعدَ تحصيلِ مقدارِ سنةِ الشمس وقد ثبّتُّ فى كتاب
الاستشهاد باختلاف الأَرْصاد انّ فَضْلَ هذه الطريقةِ على ما
أَوْرَدَه المحدَثون كفضلِ ما اوردوه على القدماءِ

II. Uebersetzung.

Die Gelehrten unter den Juden bestimmen die Zeiträume zwischen den einzelnen Teḳûfôth (Aequinoctial- und Solstitialpunkten) ebenso wie Ptolemaeus, d. h.

von der Teḳûfâ des	Tishrî	bis zur Teḳûfâ des	Ṭêbeth	$88^1/_8$ Tage
„ „ „ „	Ṭêbeth	„ „ „ „	Nîsân	$90^1/_8$ „
„ „ „ „	Nîsân	„ „ „ „	Tammûz	$94^1/_2$ „
„ „ „ „	Tammûz	„ „ „ „	Tishrî	$92^1/_2$ „

Das ergibt die Summe von $365^1/_4$ Tagen. Bei der Teḳûfen-Rechnung berechnen die Juden das Jahr nicht mit mathematischer Genauigkeit. Haben wir doch schon früher bemerkt, dass sie, wenn sie genau rechnen, dem Sonnenjahr die Länge von 365 Tagen $5\frac{3791}{4104}$ Stunden geben.

Wenn bekannt ist, wie viel Tage die einzelnen Jahresviertel zählen, so ist auch die Stelle des Apogaeums der Sonnensphaere bekannt. Wollen wir daher wissen, wo das Apogaeum war zu jener Zeit, als die Juden ihre Beobachtungen anstellten, so müssen wir die mittlere Bewegung der Sonne für einen Tag ermitteln. Wir multipliciren also die Theile eines Tages (Nychthemeron), d. i.

98,496 ($= 24 \times 4104$),

welche die Juden einen Sonnenkreis nennen, mit 360. Das Product dieser Multiplication dividiren wir durch das Maass des Sonnenjahres, nachdem es in die betreffenden Brüche verwandelt worden ist, d. i.

35,975,351 (= 365 Tage $5\frac{3791}{4104}$ Stunden, umgerechnet in 4104[tel] Theile einer Stunde), welche Zahl sie die Basis nennen. Durch diese Rechnung ergibt sich nach ihrer Ueberlieferung als die mittlere Bewegung für ein Nychthemeron annähernd

$$0^0\ 59'\ 8''\ 17'''\ 7^{IV}\ 46^{V}.$$

Dies beruht auf der Gleichung, dass sich ein einzelner Tag zu sämmtlichen Tagen des Sonnenjahres verhält wie die auf einen Tag kommenden Grade der Sphaere (der Ekliptik) zum ganzen Kreise.

Wir wollen nun um das Centrum h einen Kreis $abcd$ ziehen für die Sonnensphaere, welche der Zodiacal-Sphaere *ähnlich* ist. Es sei

der Punkt a der Anfang von Aries,
„ „ b „ „ „ Cancer,
„ „ c „ „ „ Libra,
„ „ d „ „ „ Caper.

Wir ziehen ferner die beiden Durchmesser ahc und bhd.

Schon früher ist bei der Relation der jüdischen Theorie erwähnt, dass die Sonne das Viertel ab in längerer Zeit durcheilt als die übrigen Viertel. Daraus folgt, dass das Centrum der excentrischen Sphaere innerhalb dieses Viertels liegen muss; dies Centrum sei der Punkt x. Um den Punkt x construiren wir nun einen die *ähnliche* Sphaere berührenden Kreis, der die excentrische Sphaere darstellen soll, d. i. $ztfn$, und t sei der Punkt, in dem sich die beiden Kreise berühren. Wir ziehen die Linie tx und durch den Punkt x den Durchmesser $rxmk$ parallel mit dem Durchmesser ahc; ferner den Radius lx parallel mit dem Durchmesser bhd und führen ihn geradlinig fort bis zum Punkte s.

Weil nun die Sonne den Halbkreis abc, d. i. die Summe des Frühlings- und Sommerviertels, in ihrer mittleren Bewegung in 187 Tagen durchmisst, so beträgt der Kreisbogen zfn der excentrischen Sphaere

$$184^0\ 18'\ 52''\ 43'''\ 12^{IV}.$$

Subtrahiren wir hiervon den Halbkreis $rtfk$, d. i. 180 Grad, so bleibt übrig die Summe von $zr + kn$, d. i.

$$4^0\ 18'\ 52''\ 43'''\ 12^{IV}.$$

Nun aber sind zr und kn einander gleich, weil die beiden Durchmesser mit einander parallel sind. Deshalb ist jedes von ihnen, zr und kn, gleich

$$2^0\ 9'\ 26''\ 21'''\ 36^{IV},$$

und der Sinus von jedem einzelnen, die Linie xs, beträgt nach dem Maasse, nach dem der Radius lx ein Grad ist,

$$0^0\ 2'\ 15''\ 30'''\ 57^{IV}.$$

Weil die Sonne das Viertel ab in $94^1/_2$ Tagen durchmisst, so beträgt der Kreisbogen ztf der excentrischen Sphaere

$$93^0\ 8'\ 34''\ 38'''\ 44^{IV}.$$

Und weil zl die Summe ist von zr, welches bekannt ist, plus rl, welches das Viertel eines Kreises ist, so bekommen wir, wenn wir zl subtrahiren von zf, als Rest $lf =$

$$0^0\ 59'\ 8''\ 17'''\ 8^{IV}.$$

Der Sinus davon beträgt nach demselben Maasse

$$0^0\ 1'\ 1''\ 55'''\ 35^{IV}.$$

Und dies ist die Linie xm, welche gleich der Linie sh ist.

Es sind also in dem rechtwinkligen Dreieck xsh die beiden Schenkel xs und sh bekannt, während der längere Schenkel unbekannt ist. Wir multipliciren nun jeden der beiden Schenkel xs und sh mit sich selbst und addiren ihre Quadrate, das ergibt

287,704,466,674 Octaven.

Ziehen wir daraus die Quadratwurzel, so bekommen wir

$$0^0\ 2'\ 28''\ 59'''\ 40^{IV}.$$

Und dies ist die Entfernung zwischen den beiden Centren, welche gleich ist dem Sinus der grössten Ausgleichung. Suchen wir zu diesem Sinus in den Sinustabellen den entsprechenden Bogen, so bekommen wir als den Bogen davon

$$2^0\ 22'\ 19''\ 12'''\ 16^{IV}.$$

Das ist die grösste Ausgleichung — *(Lücke)*.

— ein Grad. Dies beruht auf der Gleichung, dass sich die Hälfte von hx nach dem Maasse, nach dem xt einen Grad darstellt, verhält zu xt *(Lücke)*.

Wollen wir nun wissen, wie gross die Linie hx ist nach dem Maasse, nach dem hxt einen Grad darstellt, so multipliciren wir hx mit 1 Grad und dividiren das Product durch die Summe von hx plus 1 Grad. Dadurch finden wir hx nach dem Maasse, nach dem th 1 Grad ist.

Dies beruht auf der Gleichung, dass sich hx nach dem Maasse, nach dem $ht = 1$ Grad ist, zu xt verhält, wie sich hx nach dem Maasse, nach dem $xt = 1$ Grad ist, verhält zu der Summe von hx plus 1 Grad, d. i. zu xt. Auf diese Weise wird die Entfernung zwischen den beiden Centren bekannt in ihrer Beziehung zu jedem einzelnen der beiden Durchmesser (!), desjenigen der ‚*ähnlichen*‘ Sphaere und desjenigen der excentrischen Sphaere.

Ferner ziehen wir die Linie tu senkrecht auf den Durchmesser ahc. Dann sind die beiden Dreiecke tuh und xsh einander ähnlich und ihre (gleichliegenden) Schenkel mit einander proportionirt. Wer nun Geometrie kennt, weiss, dass sich im Dreieck der Schenkel a zu Schenkel b verhält wie der Sinus des dem Schenkel a gegenüberliegenden Winkels zu dem Sinus des dem Schenkel b gegenüberliegenden Winkels. Deshalb verhält sich hx, das bekannt ist, zu xs, das auch bekannt ist, wie sich der Sinus des Winkels xsh — d. i. ht der Sinus totus — verhält zu dem Sinus des Winkels shx, d. i. tu, was gesucht wurde.

Wir berechnen also tu nach der Art, wie man die unbekannte Zahl aus vier zu einander in Relation stehenden Zahlen berechnet. So ergibt sich

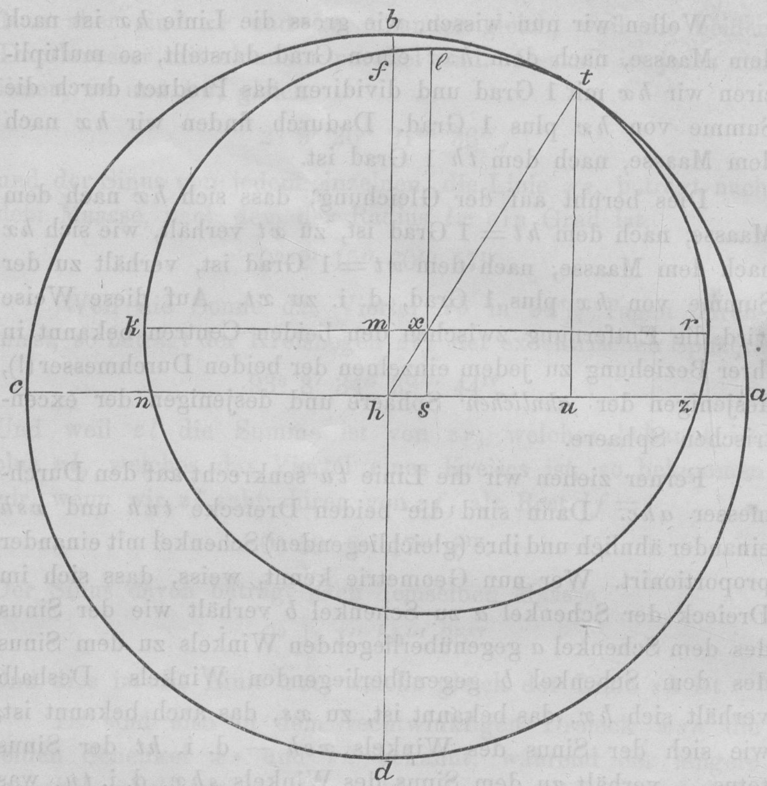
$$0^0\ 54'\ 34''\ 19'''\ 48^{IV}\ 30^{V}.$$

Und der Bogen davon ist

$$65^0\ 26'\ 29''\ 32'''.$$

Dies ist die Linie at, welche die Entfernung des Apogaeums vom Frühlings-Aequinoctium darstellt. Und das war es, was wir darthun wollten.

[Auf der nächstfolgenden Seite befindet sich die betreffende Kreisfigur.]



Dies ist die Methode der Gelehrten des Alterthums für die Berechnung des Apogaeums. Die neueren Astronomen haben aber, nachdem sie eingesehen, dass es sehr schwer und so gut wie unmöglich ist, die Zeitpunkte der Solstitien zu eruiren, bei ihren Beobachtungen für die Punkte *abcd* den Mittelpunkten der Jahresviertel, d. h. den Mittelpunkten der feststehenden Thierkreisbilder den Vorzug gegeben.

Mein Lehrer 'Abû-Naṣr Manṣûr b. 'Alî b. 'Irâḳ, der Freigelassene des Fürsten der Gläubigen, hat eine (neue) Methode für die Berechnung des vorstehenden Problems erfunden, bei der man drei beliebige Punkte der Ekliptik durch Beobachtung bestimmen muss, nachdem man vorher die Länge des Sonnenjahres ermittelt. Ich habe in meinem *Kitâb-alistishhâd bikhtilâf-al'arṣâd* erklärt, dass diese Methode die Methode der neueren Astronomen eben so weit übertrifft, als die letzteren diejenigen der Astronomen des Alterthums.

III. Anmerkungen.

1. Die S. 250, Zl. 17 genannte Länge des Sonnenjahres zu 365 d $5\frac{3791}{4104}$ h ist eine der beiden Arten des Sonnenjahres, deren sich die jüdische Chronologie bedient, das Jahr des R. 'Addâ bar 'Ahabâ; denn die Umrechnung dieser Angabe in jüdische Maasse ergibt

365 d 5 h 997 chl 48 reg.

d. i. die Division der von den Juden adoptirten, 235 Hipparchische synodische Monate umfassenden Enneadecateris des Meton (6939 d 16 h 595 chl) durch 19.

2. Mit dem Ausdruck ‚*ähnliche Sphaere*' (S. 251, Zl. 22) habe ich den Terminus technicus الفلك المُمَثِّل wiederzugeben gesucht. Es ist ein Name für die Sonnensphaere, dessen Inhalt von dem Dictionary of the technical terms (Calcutta, II, 1136, Zl. 3 v. u.) in folgender Weise dargelegt wird:

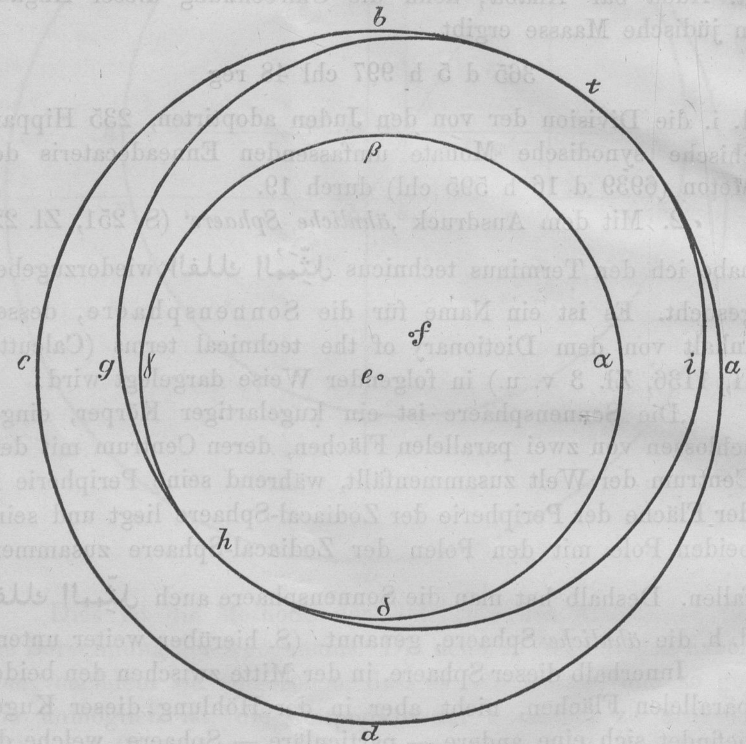
‚Die Sonnensphaere ist ein kugelartiger Körper, eingeschlossen von zwei parallelen Flächen, deren Centrum mit dem Centrum der Welt zusammenfällt, während seine Peripherie in der Fläche der Peripherie der Zodiacal-Sphaere liegt und seine beiden Pole mit den Polen der Zodiacal-Sphaere zusammenfallen. Deshalb hat man die Sonnensphaere auch الفلك الممثّل d. h. die *ähnliche* Sphaere, genannt. (S. hierüber weiter unten.)

Innerhalb dieser Sphaere, in der Mitte zwischen den beiden parallelen Flächen, nicht aber in der Höhlung dieser Kugel, befindet sich eine andere — particuläre — Sphaere, welche die excentrische oder auch die Apogaeums-Sphaere genannt wird. Das ist ein kugelartiger, die Erde in sich enthaltender Körper, der von zwei parallelen Flächen eingeschlossen ist, deren Centrum nicht zusammenfällt mit dem Centrum der Welt.

Die convexe Seite der beiden Flächen dieser Sphaere berührt die convexe Seite der beiden Flächen der ersten Sphaere, welche die *ähnliche* genannt wird, in einem Punkte, der den Peripherien dieser beiden Sphaeren gemeinsam ist. Dieser Punkt heisst Apogaeum.

Die concave Seite der beiden Flächen der (inneren) Sphaere berührt die concave Seite der beiden Flächen der ersten Sphaere in einem Punkte, der den Peripherien der beiden Sphaeren gemeinsam ist, dem Apogaeum gegenüberliegend. Dieser Punkt heisst Perigaeum.'

Zur Erläuterung des Gesagten geben wir nachstehende Zeichnung.



abcd	=	äussere Fläche der Sonnensphaere.
αβγδ	=	innere „ „ „
e	=	Centrum der Sonnensphaere.
f	=	„ „ excentrischen Sphaere.
tghi	=	äussere Fläche der excentrischen Sphaere.
αβγ*h*δ	=	innere Fläche „ „ „
t	=	Apogaeum.
h	=	Perigaeum.

Lexikalisch erklärt, bedeutet das Wort مُمَثِّل, dessen active Aussprache Dictionary II, 1345 vorgeschrieben wird, ‚ein Bild, Gleichniss (مثال) von einer Sache gebend', d. h. die

Sonnensphaere, welche eine Aehnlichkeit mit der Zodiacal-Sphaere, ein Bild von ihr gewährt. فلك الشمسِ الممثِّلُ فلكَ البروج. An einer anderen Stelle ist geschrieben فلك الشمس الممثّل بفلك البروج, was ich — die Richtigkeit der handschriftlichen Lesart vorausgesetzt — in folgender Weise umschreiben möchte:

فلك الشمس الممثِّل قُطْبَيْه ومِحْوَره ومَرْكَزَه بفلك البروج

d. h. die Sonnensphaere, welche ihre beiden Pole, ihre Axe und ihr Centrum denselben Dingen der Zodiacal-Sphaere assimilirt. Und damit ist der sachliche Grund dieser Benennung gegeben, nämlich der Umstand, dass ‚Sonnensphaere und Zodiacal-Sphaere dieselben zwei Pole, dieselbe Axe und dasselbe Centrum haben'. Vgl. a. a. O. II, 1345. Sédillot (Prolégomènes d'Olough-Beg II, p. 132 Anm.) übersetzt diesen Terminus ‚Sphaere homocentrique'.

3. Der Ausdruck ‚die feststehenden Thierkreisbilder' S. 254, Zl. 6 ist mit Hilfe von Dictionary I, 112 zu erklären. Delambre a. a. O. II, 544. 547 nennt sie signes fermes, signes solides.

Der Zodiacus wird nach den vier Jahreszeiten in vier Viertel getheilt.

Das erste Zeichen jedes Viertels heisst البرج المنقلب ‚das sich wendende Zeichen', weil die Jahreszeit, wenn die Sonne in einem solchen Zeichen steht, sich von einem Viertel zu einem anderen gewendet hat.

Das zweite Zeichen von jedem Viertel heisst البرج الثابت ‚das feststehende Zeichen', weil der Charakter der Jahreszeit am beständigsten ist, wenn die Sonne in diesem Zeichen weilt.

Das dritte Zeichen von jedem Viertel heisst ذو جَسَدَيْن d. h. zweigestaltig, weil die Witterung aus den Witterungen zweier Jahreszeiten gemischt ist, wenn die Sonne in diesem Zeichen weilt.

Die ‚feststehenden (beständigen) Thierkreisbilder' sind demnach:

Taurus, Leo, Scorpio, Amphora.

Vgl. O. Loth, Al-Kindî als Astrolog S. 299, Anm. 2.

4. Das Wort قَوَّسَ S. 247, Zl. 9 bedeutet ‚zu einem gegebenen Sinus den entsprechenden Bogen finden‘, während جَيَّبَ umgekehrt bedeutet ‚zu einem gegebenen Bogen den entsprechenden Sinus finden‘. Eine vollständige Sinus-Tabelle findet sich in Bîrûnî's Canon Masudicus (MS. Elliot Bl. 56^b-59^a), in der die Bogen von 15 zu 15 Minuten fortschreiten und in der neben dem Sinus zwei weitere Rubriken erscheinen, eine für die تعاديل ‚Ausgleichungen‘ und eine andere für die فضول ‚Ueberschüsse‘. Um die Einrichtung dieser Tabelle bekannt zu machen, theile ich in Folgendem den Anfang derselben von $0^0\ 15'$ bis $3^0\ 0'$ mit.

Grade	Minuten	Sinus				Ausgleichungen				Ueberschüsse		
Grösse der Bogen		Minuten	Secunden	Terzen	Quarten	Minuten	Secunden	Terzen	Quarten	Secunden	Terzen	Quarten
0	15	0	15	42	28	1	2	49	52	15	42	28
0	30	0	31	24	56	1	2	49	40	15	42	25
0	45	0	47	7	21	1	2	49	28	15	42	22
1	0	1	2	49	43	1	2	49	12	15	42	18
1	15	1	18	32	1	1	2	48	48	15	42	12
1	30	1	34	14	13	1	2	48	24	15	42	6
1	45	1	49	56	19	1	2	47	52	15	41	58
2	0	2	5	38	17	1	2	47	20	15	41	50
2	15	2	21	20	7	1	2	46	40	15	41	40
2	30	2	37	1	47	1	2	46	0	15	41	30
2	45	2	52	43	17	1	2	45	8	15	41	17
3	0	3	8	24	34	1	2	44	20	15	41	5

Ed. Sachau.

Diese Berechnung des Sonnen-Apogaeums unterscheidet sich von der im Almagest (lib. III, cap. IV) enthaltenen nur dadurch, dass statt der bei den Alten gebräuchlichen Sehne (Chorde) bereits der Sinus eingeführt ist nach der bekannten Relation: Der Sinus eines Winkels ist die halbe Sehne des doppelten Winkels.

Der Kreis wird in 360 Grade eingetheilt; die Unterabtheilungen des Grades, dessen Werth hier als Einheit angenommen wird, sind nach der bei den Mathematikern des Alterthums und Mittelalters üblichen Sexagesimaltheilung Minuten (′) $\left(\frac{1}{60}\right)$, Secunden (″) $\left(\frac{1}{60^2}\right)$, Tertien (‴) $\left(\frac{1}{60^3}\right)$, Quarten ($^{\text{IV}}$) $\left(\frac{1}{60^4}\right)$, Quinten ($^{\text{V}}$) $\left(\frac{1}{60^5}\right)$ u. s. w.; jede dieser Einheiten ist somit der 60. Theil der zunächst vorhergehenden. Der Sinus wird so angegeben, dass man den Radius des Kreises als einen Grad nimmt. Demnach wird auch der Sinus in Minuten, Secunden, Tertien u. s. w. ausgedrückt, und der grösste Werth, den derselbe erreichen kann (sinus totus), ist ein Grad.

Um nun die Stelle des Apogaeums zu berechnen, müssen aus den Beobachtungen folgende Angaben bekannt sein:

1. Die Länge des tropischen Jahres, oder, was hier auf dasselbe hinauskommt, die mittlere tägliche Bewegung der Sonne.

2. Die genaue Länge von zwei unmittelbar aufeinander folgenden Jahreszeiten; im vorliegenden Falle die Dauer des Frühlings und des Sommers.

Mit Hilfe dieser drei Grössen berechnet man vorerst die Entfernung zwischen den Mittelpunkten der Welt (Erde) und der Sonnenbahn, hierauf das Apogaeum selbst. Bezeichnet man die tägliche Bewegung der Sonne mit μ, die Dauer der einen Jahreszeit (in Tagen) mit a, die der anderen mit b, und setzt man

$$\mu a = \alpha$$
$$\mu b = \beta,$$

so hat man für die Distanz der beiden Centra (D):

$$D = \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha + \beta - 180^0}{2} + \sin^2 \left(\alpha - \frac{\alpha + \beta - 180^0}{2} - 90^0\right)}.$$

Dadurch erhält man den Abstand ausgedrückt in Theilen des Halbmessers jenes Kreises, dessen Radius man bei der Bestimmung des Sinus als Einheit genommen hat (hier des excentrischen Kreises, der die wirkliche Sonnenbahn darstellt).

Nach dieser Formel ist die Berechnung ausgeführt; wir könnten natürlich dafür schreiben:

$$D = \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} + \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}},$$

wodurch der Ausdruck symmetrisch wird, was indess für die numerische Rechnung keinen wesentlichen Vortheil gewährt, da die Ausführung ohnedies höchst einfach ist.

Ist der Abstand der beiden Centra gefunden, so ergibt sich das Apogaeum als

$$\text{arc. sin} \frac{\sin \frac{\alpha + \beta - 180^0}{2}}{D}.$$

Der dadurch erhaltene Bogen gibt die Stelle des Apogaeums, gemessen von dem Anfangspunkte der ersten unter den zu Grunde gelegten Jahreszeiten. Da aber aus dem Sinus ein doppelter Bogen folgt, so hat man zur Bestimmung des Quadranten zu beachten, dass das Apogaeum immer in jenes Viertel fällt, welches die Sonne in längerer Zeit als die übrigen durcheilt; also kurz: das Apogaeum fällt in die längste Jahreszeit.

Specielle Bemerkungen.

S. 251, Zl. 4. Die mittlere tägliche Bewegung der Sonne ($0^0\ 59'\ 8''\ 17'''\ 7^{IV}\ 46^{V}$) ergibt sich ganz streng aus $\frac{98496 \times 360^0}{35975351}$; für die weitere Rechnung ist aber nicht dieser Werth benützt, sondern: $0^0\ 59'\ 8''\ 18'''\ 11^{IV}(12)$. Dividirt man nämlich die Bögen *zfn* und *ztf*, nachdem sie in Einheiten von der kleinsten Benennung (Quarten) aufgelöst sind, durch 187 bez. $94^1/_2$, so hat man

$$2388717792^{IV} : 187 \quad = 12773892^{IV}$$
$$1207132724^{IV} : 94^1/_2 = 12773891$$

eine ganz befriedigende Uebereinstimmung.

Diese Verschiedenheit in der Annahme der täglichen Bewegung der Sonne zeigt sich besonders auffällig im Canon Masudicus (VI. Buch, 7. Cap.), wo Albîrûnî die ihm bekannten Berechnungen des Sonnen-Apogaeums aufzählt. Wenn er auch dort in mehreren Fällen auf die Zeitgleichung Rücksicht nimmt, so kann dieser Umstand auf die vorliegende Rechnung doch keine Anwendung finden, weil er hier einerseits die ‚ausgeglichene Zeit‘ gar nicht erwähnt, andererseits die Zahlen 187 und $94^1/_2$ Tage ohne jede weitere Bemerkung gibt.

S. 252, Zl. 12 v. u. Bei der Bestimmung der Hypotenuse aus den beiden Katheten handelt es sich um die Quadrate zweier Sinus, von denen jeder in Quarten ausgedrückt ist. Nun ist das ‚Quadrat einer Quart‘ ($^{\mathrm{IV}^2}$) eine Grösse, für die es eigentlich keine einfache Benennung gibt; im Text aber ist sie bezeichnet mit Octave ($=\frac{1}{60}$ Septime). Diese Bezeichnung ist in den Eigenthümlichkeiten der Sexagesimalrechnung begründet. Hat man ganz allgemein zwei benannte Sexagesimalgrössen, $\frac{1}{60^m}$ und $\frac{1}{60^n}$, mit einander zu multipliciren, so bekommt man $\frac{1}{60^{m+n}}$; das Product erhält demnach jene Benennung, die sich aus der Summe der Benennungen beider Factoren ergibt, wenn man dieselben als Zahlen betrachtet. Multiplicirt man also z. B. Quarten mit Tertien, so bekommt man Septimen; denn $\frac{1}{60^4} \times \frac{1}{60^3} = \frac{1}{60^7}$. Um unserem Falle näher zu kommen, wähle ich als Beispiel das Product zweier gleicher Factoren: $(2^0\,16')^2 = 5^0\,8'\,16''$ (Almagest lib. III, cap. IV), da nämlich, wenn der Grad als Einheit genommen wird, $2^0\,16' = 2 + \frac{16}{60}$ ist, so findet man nach dem binomischen Lehrsatze

$$\left(2+\frac{16}{60}\right)^2 = 4 + \frac{64}{60} + \frac{256}{60^2} = 4 + \left(1 + \frac{4}{60}\right) + \left(\frac{4}{60} + \frac{16}{60^2}\right) = \\ 5 + \frac{8}{60} + \frac{16}{60^2} = 5^0\,8'\,16''.$$

Für die praktische Rechnung ist es aber überflüssig, den Nenner 60 jedesmal anzuschreiben, da schon die Bezeichnung ($^{0\,\prime\,\prime\prime}\ldots$) den Fingerzeig zur Bestimmung des Werthes für die einzelnen Zahlen im Product gibt, ebenso wie man bei unseren Decimalbrüchen den Nenner 10 nicht zu schreiben braucht, weil der Werth jeder einzelnen Ziffer durch ihre Stelle gegeben ist. Was also in der Sexagesimalrechnung die Bezeichnung der Gradunterabtheilung, das ist in der Decimalrechnung die Stellenzahl; und die Zahl 60 spielt dort ganz dieselbe Rolle wie hier 10.

In dem obigen Beispiele hätte man natürlich gleich anfangs den ganzen Ausdruck auf die niedrigste Benennung bringen können, um erst dann zum Quadrat zu erheben: $(2^0\ 16')^2 = \frac{136^2}{60^2} = \frac{18496}{60^2} = 18496$ Secunden, die, auf die nächsthöheren Benennungen gebracht, wieder $5^0\ 8'\ 16''$ geben.

Man ersieht nun schon, dass das Quadrat einer Minute mit Secunde, $\left(\frac{1}{60}\right)^2 = \frac{1}{60^2}$, einer Secunde mit Quart, $\left(\frac{1}{60^2}\right)^2 = \frac{1}{60^4}$, einer Terz mit Sext, $\left(\frac{1}{60^3}\right)^2 = \frac{1}{60^6}$, u. s. w. bezeichnet wird, da allgemein $\left(\frac{1}{60^m}\right)^2 = \frac{1}{60^{2m}}$ ist.

Ebenso ist auch, um auf den Text zurückzukommen, in unserem Falle:

$$0^0\ 2'\ 15''\ 30'''\ 57^{IV} = 487857^{IV} = \frac{487857}{60^4}$$

$$0^0\ 1'\ \ 1''\ 55'''\ 35^{IV} = 222935^{IV} = \frac{222935}{60^4},$$

demnach ist die Summe der Quadrate beider Katheten

$$\frac{238004452449}{60^8} + \frac{49700014225}{60^8} = \frac{287704466674}{60^8} = 287704466674 \text{ Octaven.}$$

S. 252, Zl. 8 v. u. Unter Ausgleichung (Mittelpunktsgleichung) versteht man den Winkel, den die von h und x zu irgend einem Punkte der Sonnenbahn gezogenen Geraden mit einander bilden; dies ist die Differenz zwischen dem mittleren (von x aus gesehenen) und dem wahren (von der Erde h aus wirklich beobachteten) Sonnenorte. Dieser Winkel ist Null im Apogaeum und Perigaeum, weil hier beide Gerade übereinander fallen, und erreicht sein Maximum (grösste Ausgleichung) in jenen zwei Fällen, in denen die von der Sonne nach h gezogene Gerade auf hx senkrecht steht.

S. 252, Zl. 2 v. u. Der Ausdruck ‚Hälfte von hx‘ ist auffallend und kann hier nicht wörtlich genommen werden; denn es ist weder im Gange der Rechnung geboten, die Hälfte der Geraden hx einzuführen, noch ist die Mitte der Linie ausdrücklich durch einen Buchstaben bezeichnet; auch ist durch keine Andeutung auf eine solche Auffassung hingewiesen. Das Wort ‚Hälfte‘ kann, wenn man den Sinn der Stelle ins Auge fasst, nichts anderes bedeuten als etwa ‚Länge, Grösse, Werth, Betrag‘.

Eine Analogie zu dieser Auslegung findet sich auch im Canon Masudicus (a. a. O.). Der unvollständige Satz mag in seiner ursprünglichen Gestalt wohl folgende Bedeutung gehabt haben: ‚Dies (dass wir hx in Bezug auf einen Grad ausdrücken) beruht darauf, dass sich die Grösse von hx verhält zu xt wie $0^0\,2'\,28''\,59'''\,40^{IV}$ zu 1^0‘.

S. 253, 1. u. 2. Absatz. Die Entfernung zwischen den beiden Centren, hx, (Sinus der grössten Ausgleichung) ist in der Weise bestimmt worden, dass der Radius des excentrischen Kreises, xt, als Einheit (ein Grad) genommen wird; nun kann man auch daraus hx in Bezug auf den Radius des ähnlichen Kreises, ht, berechnen. Die Frage lautet also: hx ist gegeben in Theilen von xt; wie viele Theile enthält es von ht? Bezeichnet man den Werth von hx für diesen Fall (wenn ht die Einheit ist) mit (hx), wo natürlich (hx) kleiner als hx sein muss, so hat man die Proportion

$$\underbrace{hx : ht}_{\substack{\text{im 2. Fall} \\ (ht = 1^0)}} = \underbrace{hx : ht}_{\substack{\text{im 1. Fall} \\ (xt = 1^0)}}$$

$$\text{d. h. } (hx) : 1^0 = hx : (hx + 1^0)$$

und man findet $(hx) = \frac{hx \times 1^0}{hx + 1^0} = \frac{hx \times xt}{hx + xt}$ wie im Text.

Die hier aufgestellte Proportion, die man, da nach der ersten Bestimmung $xt = 1^0$ ist, auch so schreiben kann: $(hx) : xt = hx : (hx + xt)$, ist in den Handschriften durch Worte ausgedrückt, aber in keiner ganz richtig.

R: ‚Dies beruht darauf, dass th nach dem Maasse, nach dem $xt = 1$ Grad ist, sich verhält zu xt, wie sich hx nach dem Maasse, nach dem [Lücke] $= 1$ Grad ist, verhält zu der Summe von ht plus 1 Grad, ich meine ht‘.

Hier herrscht unter den Buchstaben eine solche Verwirrung, dass jede weitere Bemerkung überflüssig ist.

L: ‚Dies beruht darauf, dass xh nach dem Maasse, nach dem $xt = 1$ Grad ist, sich verhält zu xt, wie sich hx nach dem Maasse, nach dem $ht = 1$ Grad ist, verhält zu der Summe von hx plus 1 Grad, ich meine: xt‘.

In dieser Fassung der Proportion ist ein äusseres und ein inneres Glied mit einander verwechselt. Die Stelle ist somit gleichfalls fehlerhaft, denn es würde daraus folgen, dass (hx) grösser ist als hx. Dies kann aber nicht sein; denn je grösser die Maasseinheit, desto kleiner die gemessene Gerade.

Nur wenn man dieses verkehrte Verhältniss nicht beachtet, scheint die Proportion in dieser Form beim ersten Anblick natürlicher zu sein. Sie steht überdies auch in Widerspruch mit der unmittelbar vorhergehenden Anleitung zur Berechnung von (hx).

P: ‚Dies beruht darauf, dass hx nach dem Maasse, nach dem $ht = 1$ Grad ist, sich verhält zu xt, wie sich hx nach dem Maasse, nach dem $ht = 1$ Grad ist, verhält zu der Summe von hx plus 1 Grad, ich meine xt'.

Hier braucht man nur mehr im dritten Glied xt statt ht zu setzen, um die Proportion ganz richtig zu haben.

Die Proportion hat also zu lauten: ‚Dies beruht darauf, dass hx nach dem Maasse, nach dem $ht = 1$ Grad ist, sich verhält zu xt, wie sich hx nach dem Maasse, nach dem $xt = 1$ Grad ist, verhält zu der Summe von hx plus 1 Grad'.

Zu den letzten Worten aller drei Handschriften ‚hx plus 1 Grad, ich meine ht (xt)' sei noch bemerkt, dass xt zu setzen ist, wenn man sich nur auf ‚1 Grad' bezieht, und ht, wenn man den ganzen Ausdruck ‚hx plus 1 Grad' meint; bezeichnender ist aber die letztere Auffassung.

Das numerische Resultat dieser hier nur algebraisch durchgeführten Rechnung ist übrigens in den Handschriften nicht enthalten; man findet $(hx) = 0^0\ 2'\ 23''\ 4'''\ 23^{IV}$. Für die folgende Bestimmung des Apogaeumwinkels als arc. sin $\frac{xs}{hx}$ ist es ohnehin ganz gleichgiltig, ob man hx in Bezug auf xt oder ht nimmt, weil sich in ganz demselben Verhältnisse auch xs ändert.

Was den Grad der Genauigkeit in der ganzen Rechnung betrifft, so können sich alle diesbezüglichen Bemerkungen auf die Bestimmung des Sinus aus dem Bogen und umgekehrt beschränken. Für die kleinen Winkel, bei denen der Sinus bis auf Quarten angegeben ist, kann man dieselbe Genauigkeit noch mit siebenstelligen Logarithmen erreichen; um ganz sicher zu gehen, habe ich überall zehnstellige Tafeln benützt. Es zeigen sich nur in den Quarten unbedeutende Differenzen; der Sinus von $2^0\ 9'\ 26''\ 21'''\ 36^{IV}$ beträgt $0^0\ 2'\ 15''\ 30'''\ 59^{IV}$ (statt 57^{IV}); bei den zwei anderen kleinen Winkeln ist die Abweichung noch geringer, fast Null. In der Zahl $hx = 0^0\ 2'\ 28''\ 59'''\ 40^{IV}$ findet man eigentlich $40{\cdot}9^{IV}$, so dass richtiger 41^{IV} gesetzt werden könnte.

Ein grösserer Unterschied tritt nur bei dem Winkel auf, der das Apogaeum darstellt (S. 253, Zl. 6 v. u.). Aus dem Quotienten

$$\frac{xs}{hx} = \frac{0^0\ 2'\ 15''\ 30'''\ 57^{IV}}{0\ \ 2\ \ 28\ \ 59\ \ 40}$$

folgt ganz genau der Sinus wie im Text, nämlich $0^0\ 54'\ 34''\ 19'''\ 48^{IV}\ 30^{V}$, aber der Bogen dazu ist übereinstimmend nach unseren logarithmisch-trigonometrischen Tafeln und nach der Sinus-Tabelle von Albîrûnî $65^0\ 26'\ 28''\ 47'''$ (statt $65^0\ 26'\ 29''\ 32'''$). Wie bedeutungslos übrigens auch diese Abweichung ist, sieht man daraus, dass die andere Formel für das Apogaeum, arc. tang $\left(\frac{xs}{hs} = \frac{0^0\ 2'\ 15''\ 30'''\ 57^{IV}}{0\ \ 1\ \ 1\ \ 55\ \ 35}\right)$, den Bogen $65^0\ 26'\ 28''\ 2'''$ ergeben würde; man braucht also nur eine der drei Seiten des rechtwinkligen Dreieckes hxs ganz geringfügig in den Quarten zu ändern, um schon einen beträchtlich verschiedenen Winkel für die Länge des Apogaeums zu erhalten.

Ptolemaeus, welcher die mittlere tägliche Bewegung der Sonne zu $0^0\ 59'\ 8''\ 17'''\ 13^{IV}\ 12^{V}\ 31^{VI}$ bestimmte, fand mit Zugrundelegung derselben Dauer von Frühling und Sommer wie hier ($94\frac{1}{2}$ und $92\frac{1}{2}$ Tage) für die Länge des Apogaeums $65^0\ 30'$. Diese Uebereinstimmung ist von vornherein zu erwarten. Sind ja doch bei Ptolemaeus und bei Albîrûnî dieselben Frühlings- und Sommerlängen benützt, während gleichzeitig die mittlere tägliche Bewegung der Sonne nur sehr wenig verschieden ist. Denn maassgebend für den Ort des Apogaeums ist nicht die Länge des tropischen Jahres, die sich im Laufe der Zeiten nur unerheblich ändert, sondern einen Beweis für die ununterbrochene Drehung der Apsidenlinie geben die verschiedenen Längen der einzelnen Jahresviertel. Diese sind entscheidend. Leider aber ist eine genaue Bestimmung gerade dieser Grössen mit Schwierigkeiten verbunden und mit erforderlicher Schärfe eigentlich gar nicht durchzuführen.

Für den nicht-astronomischen Leser sei hier kurz gesagt, worin diese auch im Text (S. 254, Zl. 3 u. 4) erwähnten Schwierigkeiten, die Zeitpunkte der Solstitien genau festzustellen, eigentlich bestehen. Das Solstitium findet in dem Augenblicke statt, in dem die Sonne ihre grösste Declination erreicht hat. Da sich aber in der Nähe des Solstitiums die Declination nur sehr langsam ändert, ja sogar einige Zeit hindurch constant zu bleiben scheint, so ist man auch bei fortwährend angestellten Messungen nicht im Stande, den Zeitpunkt, in dem die Declination ihr Maximum erreicht hat, sicher anzugeben. Die Sache wird natürlich um so schwieriger, je unvollkommener das Messinstrument getheilt ist. Zur Erläuterung sei ein numerisches Beispiel angeführt. Zwölf Stunden vor und nach dem Solstitium ist die Declination der Sonne nur um etwa $3^1/_2''$ kleiner als im Augenblicke des Solstitiums selbst. Kann man also mit einem Instrumente solche Winkel, die kleiner als dieser Betrag sind, nicht mehr mit Sicherheit messen — und das gilt von den Instrumenten der Alten — so bleibt die Bestimmung des Zeitpunktes, in dem das Solstitium stattfand, um einen vollen Tag unsicher. Auf diese Grösse kommt aber bei der Berechnung des Apogaeums Alles an, und man sieht also, dass gerade die wichtigste und einzig entscheidende Grösse, die man in die Rechnung einführt, die ungenaueste ist.

Zu Anfang der hier mitgetheilten Episode (S. 250, Zl. 20—22) wird gesprochen von ‚jener Zeit, in der die Juden ihre Beobachtungen anstellten'. Es ist aber höchst wahrscheinlich, dass die jüdischen Gelehrten die Zeiträume zwischen den einzelnen Tekûfôth — und nur solche Beobachtungen können hier gemeint sein — nicht selbst bestimmt, sondern einfach von Hipparchus entlehnt haben, ebenso wie Ptolemaeus, der im Almagest a. a. O. ausdrücklich erklärt, dass diese Zahlen von Hipparchus gefunden wurden.

Zu der für die drei ersten Grade mitgetheilten Sinus-Tabelle sei bemerkt, dass die ‚Ueberschüsse' die ersten Differenzen zwischen je zwei aufeinander folgenden Sinus sind, während die ‚Ausgleichungen' die vierfachen Ueberschüsse, also die Aenderung des Sinus für einen ganzen Grad darstellen und zur Interpolation dienen. Die in der Sinus-Tabelle mit ‚Ausgleichungen' bezeichnete Rubrik hat also mit der bereits oben erklärten ‚Ausgleichung' bei der Sonnenbahn gar nichts gemein.

Die Berechnung des Apogaeums aus den Mittelpunkten der Jahresviertel findet sich im Canon Masudicus, VI. Buch, 7. Cap. Das Princip ist genau dasselbe wie hier, man hat nur den Anfangspunkt der Zählung um 45 Grade der Natur der Beobachtungen entsprechend zu verschieben.

J. Holetschek.