Behâ ed-Dîn.

A Monsieur le Dr Henri Thorbecke
B. Boncompagni

KHOLÂÇAT AL HISSÂB,

OU

QUINTESSENCE DU CALCUL

PAR

BEHÂ-EDDÎN AL AAMOULÎ,

TRADUIT ET ANNOTÉ

PAR

ARISTIDE MARRE

Professeur, Officier de l'Instruction publique

DEUXIÈME ÉDITION

revue, corrigée et augmentée de nouvelles notes.

ROME
IMPRIMERIE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES
1864

KHOLÂÇAT AL HISSÂB,

OU

QUINTESSENCE DU CALCUL

PAR

BEHÂ-EDDÎN AL AAMOULÎ,

TRADUIT ET ANNOTÉ

PAR

ARISTIDE MARRE

Professeur, Officier de l'Instruction publique

DEUXIÈME ÉDITION

revue, corrigée et augmentée de nouvelles notes.

ROME

IMPRIMERIE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES

1864

KHOLÂÇAT AL HISSÂB,

OU

QUINTESSENCE DU CALCUL

PAR

BEHÂ-EDDÎN AL AAMOULÎ,

TRADUIT ET ANNOTÉ

PAR

ARISTIDE MARRE

Professeur, Officier de l'Instruction publique

DEUXIÈME ÉDITION

revue, corrigée et augmentée de nouvelles notes.

ROME

IMPRIMERIE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES

1864

A Monsieur le Prince

Don Balthasar Boncompagni,

l'investigateur infatigable,
le savant auteur d'éminents travaux sur l'histoire des mathématiques,
le protecteur vraîment libéral et dévoué
de toutes les recherches relatives à ce nouveau genre d'études historiques,

Hommage
de respect et de reconnaissance

de

Son humble serviteur,
ARISTIDE MARRE.

AVERTISSEMENT

La traduction du *Kholâçat al hissâb* en français parut pour la première fois en 1846, dans le recueil périodique de MM. Terquem et Gérono, intitulé: « Nouvelles annales de mathématiques, tome V, chez Carilian Gœury et V^{or}. Dalmont, à Paris ». A cette époque j'exprimais dans la préface une opinion radicalement erronée, en supposant que le *Kholâçat al hissâb* pouvait donner la mesure de l'étendue des connaissances des Arabes dans la science du calcul. Depuis lors de précieux documents mis au jours par M. le Prince Boncompagni, de savants travaux publiés, spécialement ceux du regrettable M. Woepcke, et mes recherches personnelles, s'il m'est permis de les mentionner ici après de telles autorités, m'ont démontré surabondamment la grave erreur dans laquelle j'étais tombé, erreur que je confesse tout d'abord, et que je veux rectifier dès le début de cet avertissement. Ce sera une première amélioration, et la plus importante peut-être au point de vue de l' histoire des mathématiques, que présentera cette seconde édition du *Kholâçat al hissâb* comparée à son aînée. La traduction du texte n' a pas subi de notables changements, mais les notes remaniées et corrigées ont été considérablement accrues, puisqu'elles forment un nombre de pages à peu près égal à celui des pages du texte. Les principales additions à signaler ici, ont eu surtout pour objet d'établir un parallèle entre l' ouvrage de Behâ-Eddin (fin du XVI^{e} siècle) et celui de Mohammed ben Moussa Al Khowarezmi (commencement du IX^{e}), et de mettre en relief le cachet d'origine hindoue que portent les œuvres des arithméticiens arabes.

Deux points demeurent incontestablement acquis aujourd'hui à la critique historique; ils peuvent être formulés ainsi : 1.º Ni le « *Kitâb al mokhtesser fy hissâb algebr ou'almokabalak* » d'Al Khowarezmi, ni le *Kholâçat al hissâb* de Behâ Eddin, ne peuvent servir à tracer les limites des connaissances qu'ont pu posséder les Arabes dans la science du calcul.— L'ouvrage d'Al Khowarezmi est, comme il le dit lui-même, une sorte de petit traité populaire, de manuel élémentaire, et le *Kholâçat al hissâb* n'a pas davantage la prétention de marquer le point apogée de la science du calcul chez les Arabes.— 2.° Contrairement à l'opinion professée par l'illustre Colebrooke, cette science ne resta pas stationnaire de Mohammed ben Moussa à Behâ-Eddin, c'est-à-dire du IX^e siècle au XVI^e, entre les mains d'un peuple qui écrivit sur toutes les branches des connaissances humaines et posséda tous les genres de gloire. Pour se faire une juste idée du degré de perfection qu'atteignit cette science, il ne faudrait pas se borner à consulter des traités essentiellement élémentaires, il faudrait connaître les travaux spéciaux sur la matière composés par une foule innombrable de mathématiciens arabes, parmi lesquels nous citerons seulement: *Al Kendi*, placé par Cardan au rang des douze plus puissants génies qui aient paru depuis l'origine des sciences, auteur d'un traité sur l'arithmétique hindoue; *Al Sarakhsi*, l'élève d'*Al Kendi*, précepteur et confident du Khalife Almohtaded; *Daoud al Deïnâwari*, mort en 903 de l'ère chrétienne, quatre ans après *Al Sarakhsi*; *Al Amrani*; *Abou'lwafa al Bouzdjâni*; *Abou'lcassem Almogetabi*, auteur d'un ample traité sur l'arithmétique hindoue, mort en 986; *Alhaçan Albasri*, qui écrivit sur la quadrature de la parabole et sur « les principes du calcul »; *Abou Beqr Mohammed al Qarkhî*, l'auteur du traité intitulé « al Fakhrî » en l'honneur du vizir Abou Ghâleb Fakhr al Moulq, qui mourut en 1016 de notre ère; *Al Karabisi*; *Abou'l Iadl*, auteur d'une arithmétique universelle en six tomes, d'un traité des « propriétés des nombres » et d'un livre sur les « inventions ingénieuses » en arithmétique; *Mouaffek al Bagdâdi* l'auteur du « Kitâb algebr ou'al hissâb al hindi »; *Ibn Albannâ*, originaire de Grenade, habitant de Maroc, l'éminent professeur contemporain de Léonard de Pise, l'auteur du « Talkhys amâli al hissâb »; *Nassr'Eddin al Thoussi*, le savant astronome et calculateur; etc, etc, voire même *Abou Mohammed Abdallah*, surnommé *Ibn Yasmîn* (fils du Jasmin), originaire de Fez, habitant de Séville, qui vivait en 600 de l'hégire, et composa sur le calcul par gebr et mokabalah un poëme maintes fois commenté et qualifié par l'historien arabe de « poema nobilissimum quod omnium manibus teritur ». Tous ces ouvrages sont antérieurs au XIV^e siècle de notre ère. Parmi cette pléiade d'arithméticiens algébristes cités par don Michaël Casiri dans sa « Bibliotheca Escurialensis », quels sont ceux que l'Europe savante connaît aujourd'hui ? Il serait bien facile de les compter. Et de tous les chefs-d'œuvre sortis des écoles d'Alexandrie, de Bagdad, de Cordoue, de Séville, de Grenade, de Samarcande, de Maroc et de Fez, combien sont inconnus ? combien sont à jamais perdus ? C'est ce que personne ne saurait dire. Quoiqu'il en soit, depuis quelques années *Abou'lwafa al Bouzdjâni* et *Abou Beqr Mohammed al Qarkhî* ont été étudiés, d'importants extraits de leurs œuvres ont été traduits en français, et nous avons ainsi appris quelle distance énorme sépare ces dernières des traités purement élémentaires de Mohammed ben Moussa et de Behâ Eddin. Nous ne doutons plus maintenant qu'il existât une notation algébrique très-développée chez les Arabes, notation presque aussi complète qu'elle pouvait l'être, tant que l'algèbre elle-même restait numérique. Pour ne parler que du calcul proprement dit, ou de l'arithmétique, nous savons que dans le *Talkhys* d'Ibn Albannâ, composé vers l'an 1222 de notre ère, manuscrit arabe encore inédit, on rencontre au chapitre de l'addition, la sommation des carrés et des cubes de la suite naturelle des nombres entiers, de la suite des nombres pairs et des nombres impairs. Le fragment de l'*Ayoun al hissâb* de Mohammed Bâkir, reproduit en partie dans les notes de cette deuxième édition du *Kholâçat al hissâb*, prouve qu'avant Briggs et Newton les Arabes connaissaient la règle pour engendrer les coëfficients des termes du développement d'une puissance entière et positive du binôme, successivement les uns des autres et indépendamment de ceux de toute autre puissance.

De riches filons ont été découverts dans la mine si longtemps inexplorée ; espérons que les laborieux ouvriers de la science y recueilleront des diamants qui ne le céderont point en beauté à la perle qui nous a été offerte par Behâ-Eddin, et qu'il a nommée le *Kholâçat al hissâb*.

Ar. Marre.

TABLE DES MATIÈRES:

CHAPITRE IV.

CHAPITRE V.

CHAPITRE VI.

Géométrie.

CHAPITRE VII.

Sur l'application de la géométrie au nivellement usité pour l' exécution des aqueducs, et à la recherche de la hauteur des objets élevés, de la largeur des rivières et de la profondeur des puits.

CHAPITRE VIII.

Recherche des inconnues par la méthode de l'Algèbre.

CHAPITRE IX.

CHAPITRE X.

CONCLUSION.

PRÉFACE.

Le *Kholâçat al hissâb* (Quintessence du Calcul) fut composé vers la fin du XVI.[e] siècle de notre ère, par un Savant dont le nom, digne d'être conservé dans la mémoire des hommes, ne figure encore daus aucune de nos biographies universelles, *Behâ Eddin Mohammed ben al Hosseïn al Aamoulí*, né l'an 953 de l'hégire, ou 1547 de notre ère, dans la ville d'Aamoul, pachalik de Damas, et mort à Ispahan en 1622.

Nizâm-Eddin Ahmed, dans son recueil biographique intitulé : Soulâfat al'asr, le fait naître à Baalbek, l'ancienne Héliopolis, ville du pachalik d'Acre.

D'après l'Orientaliste anglais Strachey, de Calcutta, et son ami Maulawi Rouschen Ali, savant mathématicien de Djohonpoor, traducteur et commentateur en langue persane du Kholâçat al hissâb, Behâ-Eddin est encore l'auteur d'un grand nombre d'ouvrages sur la religion, les lois, la grammaire, l'astronomie. Il commença un ouvrage mathématique, le Bâhr al hissâb (Océan du Calcul), qui devait être beaucoup plus étendu que le Kholâçat al hissâb, mais qui, selon toute vraisemblance, ne fut jamais complétement terminé, car il est demeuré inconnu jusqu'à présent, et les commentateurs s'accordent à reconnaître qu'il n'existe point. Cet important traité que l'on regarde comme n'existant plus aujourd'hui, contenait d'après la déclaration formelle de Behâ Eddin lui-même, les démonstrations des théorèmes de géométrie élémentaire dont le Kholâçat donne simplement les énoncés (voy. chap. VI. 3e section), et aussi les démonstrations des procédés seulement indiqués dans le Kholâçat pour mesurer la hauteur des objets élevés (voy. chap. VII, 2e section). Bien plus, à propos des diverses méthodes à employer pour la résolution du neuvième problême (Chap. X), Behâ Eddin renvoie le lecteur du Kholâçat à son livre plus étendu, le Bâhr al hissâb, pour l'achèvement duquel il prie Dieu de lui venir en aide. Il semble résulter de ce passage qu'une partie au moins du Bâhr al hissâb se trouvait alors entre les mains des étudiants musulmans.

Le Kholâçat al hissâb est une sorte de manuel élémentaire fort intéressant pour les mathématiciens et les Orientalistes de l'Europe, et très répandu sur le continent asiatique notamment dans la Perse et dans l'Inde. Puisse la traduction que nous en donnons aujourd'hui, trouver bon accueil auprès des amis de la Science du calcul et de l'histoire des mathématiques!

AU NOM DE DIEU, CLÉMENT ET MISÉRICORDIEUX !

Nous te bénissons Toi, dont aucun nombre ne limite la somme des gracês et dont les divisions répétées sans fin ne conduisent à aucune fin ! Nous prions pour notre Seigneur Mohammed, l'Elu, et pour sa famille, principalement pour les quatre membres liés entre eux comme les quatre termes d'une proportion, pour eux qui possèdent le manteau de Souveraineté [1]). Cela fait, alors osera parler celui qui est pauvre en comparaison de Dieu le riche, *Behâ-Eddin Mohammed, fils de Hosseïn, d'Aamoul*; puisse Dieu le très-Haut ne lui laisser dire que ce qui sera vrai au jour où compte sera rendu !

Il dit : Quant à l'Arithmétique, on sait combien sa substance est sublime, combien son rang est éminent, combien ses problêmes sont élégants, ses démonstrations solides; on sait que beaucoup de sciences ont besoin d'elle, et que dans une multitude innombrable d'affaires on en fait usage. Ceci est un manuel qui embrasse les éléments les plus nécessaires de l'Arithmétique, et réunit dans ses chapitres et sections ce qu'elle a de plus important. Il renferme en outre d'élégants artifices choisis parmi ceux qui constituent l'essence des ouvrages des auteurs anciens; élaboré d'après ces bases distinguées, il servira de direction aux auteurs à venir. Je lui ai donné le nom de Quintessence du calcul, et l'ai partagé en une introduction et dix chapitres [2]).

INTRODUCTION

L'arithmétique est une science qui apprend à trouver des nombres inconnus en vertu de connaissances spéciales; son objet est le nombre; et, attendu que le nombre, comme on le dit, se manifeste dans la matière; par ce motif on compte l'arithmétique parmi les sciences abstraites. Toutefois les opinions sont partagées là dessus. Suivant les uns, le nombre est une collection qui peut se réduire à l'unité, ainsi qu'à ce qui est composé avec cette dernière; d'après cette définition l'unité est comprise dans le nombre. Suivant d'autres le nombre est la demi-somme de ses deux limites ; alors l'unité est exclue; on s'est efforcé cependant de l'y introduire, en prenant pour limite inférieure une fraction. La vérité est que l'unité n'est pas un nombre, bien que les nombres soient formés avec elle; de même que la substance simple, conformément à ceux qui admettent une telle substance, n'est nullement un corps, bien que les corps soient formés avec elle.

Le nombre est absolu, et alors il se nomme nombre entier; ou bien il se rapporte à une unité de convention, auquel cas il se nomme fraction, et cette unité se nomme son dénominateur. Si le nombre absolu est exprimable avec les neuf chiffres, ou s'il a une racine carrée, on l'appelle articulé; sinon, muet ou inarticulé [3]).

Si le nombre articulé est égal à la somme de ses diviseurs, il s'appelle parfait [4]); s'il est plus petit, il s'appelle *surabondant*; s'il est plus grand, il s'appelle *défectueux*.

Le nombre a trois ordres primitifs; unités, dixaines et centaines; les nombres plus élevés qui dépassent ces limites, et il y en a une infinité, peuvent néanmoins se ramener a ces ordres primitifs. Les savants hindous ont, à cet effet, inventé les neuf caractères connus [5]).

CHAPITRE 1er.

CALCUL DES NOMBRES ENTIERS.

Joindre un nombre à un autre, s'appelle *additionner*; l'en retrancher, *soustraire*; le répéter une fois, *doubler*; et plusieurs fois, suivant le nombre d'unités contenues dans un autre nombre, *multiplier*; le partager en deux parties égales, *demidier*; en plusieurs parties égales, suivant le nombre d'unités contenues dans un autre nombre, *diviser*; trouver le nombre par le moyen duquel un carré s'est formé, s'appelle *extraire la racine carrée*.

Nous distribuons ces opérations dans des sections distinctes.

PREMIÈRE SECTION.

ADDITION.

Ecris les deux nombres l'un sous l'autre, et commence, à partir de la main droite, à ajouter chaque chiffre à son correspondant; en résulte-t-il un nombre plus petit que dix, alors écris-le au dessous; si c'est un nombre plus grand, son excès; si c'est dix, un zéro; dans ces deux derniers cas, pour la dixaine retiens dans ta pensée une unité, afin de l'ajouter aux nombres de l'ordre suivant; ou bien écris-la à côté de l'ordre précédent, si ces nombres n'existent pas, ou dans cet ordre même. Tout chiffre qui n'a pas de correspondant, place-le tel qu'il est dans le rang de la somme.

Voici le tableau :

$$\begin{array}{r} 20372 \\ 7656 \\ \hline 28028 \end{array}$$

Mais s'il y a plusieurs rangs de nombres, écris-les les uns sous les autres, ordre par ordre, et commence par la droite, en retenant dans ta pensée, pour chaque dixaine, une unité, ainsi que tu l'as appris.

Voici le tableau :

72373
3318
514
76205

Apprends que la *duplication* est proprement l'addition de deux nombres égaux; seulement, tu n'as pas besoin d'écrire deux fois le même nombre, mais tu ajoutes chaque chiffre à lui-même, comme tu ferais de son correspondant.

Voici le tableau :

252073
504146

Tu peux, dans ces opérations, commencer aussi par la gauche; seulement il te faut ensuite biffer, corriger et tirer des lignes; ce qui est une complication sans utilité. Le tableau serait comme ci-dessous :

Addition de deux nombres.

5	2	5	3	7
2	7	9	4	2
7	9	4	7	9
8	0			

Addition de plusieurs nombres.

5	3	7	3	2
	4	1	7	9
		1	0	5
5	7	9	0	6
	8	0	1	

Duplication.

2	5	0	6	7
4	0	0	2	4
5		1	3	

Sache que l'on appelle *balance* [6]) d'un nombre, ce qui reste quand on en ôte neuf autant de fois que possible. Alors la preuve de l'addition et de la duplication consiste en ceci, que l'on additionne les *balances* des nombres additionnés, et que l'on double la *balance* du nombre doublé; puis l'on prend la *balance* de la somme. Maintenant y a-t-il différence avec la *balance* du résultat, c'est que le calcul est faux.

DEUXIÈME SECTION.

DEMIDIATION.

Commence par la gauche, et au dessous de chaque chiffre pose sa moitié, s'il est pair, et le nombre entier compris dans sa moitié s'il est impair, en même temps que pour la fraction tu retiens cinq dans ta pensée, pour l'ajouter à la moitié du chiffre précédent, si c'est un nombre différent de l'unité; mais si c'est *un* ou *zéro*, alors tu poses le cinq au-dessous. Si, après avoir parcouru le rang, il te reste une fraction, alors pour l'indiquer écris un demi, ainsi qu'il suit:

$$\begin{array}{l} 8730313 \\ 4365156\,\begin{smallmatrix}0\\ \frac{1}{2}\end{smallmatrix} \end{array}$$

Tu peux également commencer par la droite, en écrivant entre des lignes, comme ci-dessous :

1	3	6	5	4
	1	3	2	2
	6	8		7

La preuve consiste en ceci, que l'on double la *balance* de la moitié, et que de ce résultat on prend encore la *balance*; si elle diffère de la *balance* du nombre demidié, c'est que le calcul est faux.

TROISIÈME SECTION.

SOUSTRACTION.

Ordonne les deux nombres comme précédemment, commence par la droite, soustrais chaque chiffre de celui placé au-dessus, et pose le reste sous la ligne horizontale. N'y a-t-il aucun reste ? mets un zéro. La soustraction n'est-elle pas possible ? alors prends une des dixaines voisines, fais la soustraction et écris le reste. Mais si la place des dixaines est vide, alors tu prends aux centaines une unité qui, par rapport aux dixaines, signifie dix; tu en laisses neuf à cette place, tu procèdes avec l'unité, comme tu l'as appris, et tu pousses l'opération jusqu'au bout; ainsi :

$$\begin{array}{r} 270753 \\ 29872 \\ \hline 240881 \end{array}$$

Tu peux encore commencer par la gauche; ainsi :

9	2	6	3
6	2	7	4.
3	0	9	9
2	9	8	

La preuve consiste en ceci, que l'on retranche la *balance* du nombre à soustraire de la *balance* du nombre dont on soustrait, si cela est possible; si non, l'on ajoute neuf à ce dernier nombre, et l'on soustrait. Si ce reste diffère de la *balance* du reste, c'est que le calcul est faux.

QUATRIÈME SECTION.

MULTIPLICATION.

Ceci est la recherche d'un nombre tel, que son rapport à l'un des facteurs soit le même que celui qui existe entre l'autre facteur et l'unité; d'où il suit que l'unité n'a aucune influence dans la multiplication. Il se présente ici trois cas: ou c'est un *nombre simple* à multiplier par un *nombre simple*, ou un *simple* par un *composé*, ou un *composé* par un *composé* [7]).

Dans le premier cas, on a : soit des *unités* par des *unités*, soit des *unités* par des *non-unités*, ou des *non-unités* par des *non-unités*. Ce qui concerne la première subdivision parle de soi-même. Dans les deux autres, au contraire, réduis les non-unités en unités de même nom. Ensuite multiplie ces unités entre elles et retiens le produit; puis additionne les nombres qui représentent les ordres des deux facteurs, retranche *un* de la somme, et élève le produit à l'ordre marqué par ce reste. Si tu dois, par exemple, multiplier 30 par 40, alors tu places 12 à l'ordre des centaines, puisque le nombre des ordres est quatre, et que le troisième ordre est l'ordre des centaines. As-tu 40 à multiplier par 500 ? Alors tu places 20 à l'ordre des mille, car la somme des nombres des ordres est cinq [8]).

Les deuxième et troisième cas se ramènent au premier, si l'on décompose le nombre composé en ses simples. Multiplie ensuite les nombres simples chacun à chacun et additionne les résultats.

Il y a des règles élégantes pour la multiplication, qui conduisent à la solution de problèmes intéressants.

Règle pour deux nombres entre cinq et dix : Prends l'un des facteurs dix fois, et du résultat retranche le produit de ce facteur par le complément à dix de l'autre facteur. Soit à multiplier 8 par 9; nous retranchons de 90 le produit de 9 par 2; le reste est 72.

Autre règle : additionne les deux facteurs et considère comme dixaines l'excès de cette somme sur dix; au résultat ajoute le produit des compléments à dix de chaque facteur. Soit à multiplier 8 par 7; nous ajoutons à 50 le produit de 2 par 3. [9])

Règle pour la multiplication d'unités par un nombre compris entre dix et vingt : Additionne les deux facteurs, considère comme dixaines l'excès de la somme sur dix; de ce résultat retranche le produit des différences avec dix, des deux nombres proposés. Soit à multiplier 8 par 14, nous retranchons de 120 le produit de 2 par 4.

Règle pour la multiplication de deux nombres compris l'un et l'autre entre dix et vingt : Ajoute les unités de l'un avec l'autre tout entier, considère la somme comme des dixaines; à ceci ajoute le produit des unités par les unités. Par exemple, pour multiplier 12 par 13, nous ajoutons à 150 six unités.

Règle : S'il te faut multiplier un nombre quelconque par 5, ou 50, ou 500, prends sa moitié dix fois, ou cent fois, ou mille fois, et prends pour la fraction la moitié de ce que tu as pris pour le nombre entier. Par exemple 16 multiplié par 5 donne 80, ou 17 par 50 donne 850.

Règle pour la multiplication d'un nombre entre dix et vingt par un nombre composé entre vingt et cent : Multiplie les unités du plus petit par les dixaines du plus grand, ajoute au produit le plus grand nombre, considère la somme comme des dixaines, et à ce résultat ajoute le produit des unités par les unités. Soit à multiplier 12 par 26; tu ajoutes 4 à 26, tu considères 30 comme autant de dizaines, tu finis l'opération et il vient 312.

Règle : S'il te faut multiplier un nombre quelconque par 15, ou 150, ou 1500, augmente-le de sa moitié, et prends le résultat dix fois, ou cent fois, ou mille fois, et pour la fraction prends la moitié de ce que tu as pris pour le nombre entier. Ainsi 24 multiplié par 15 donne 360; 25 multiplié par 150 donne 3750.

Règle pour la multiplication de deux nombres entre vingt et cent, ayant même chiffre de dixaines : Ajoute à l'un des facteurs les unités de l'autre, multiplie la somme par le chiffre des dixaines, considère le produit comme des dixaines, et augmente-le du produit des unités par les unités. Exemple : pour multiplier 23 par 25, tu multiplies 28 par 2, tu appelles le produit 56 dixaines, tu finis d'appliquer la règle, et alors il vient 575.

Règle pour deux nombres entre vingt et cent avec des dixaines en nombre différent: Multiplie les dixaines du plus petit nombre par le plus grand tout entier, ajoute au résultat le produit des unités du plus petit nombre par les dixaines du plus grand, considère cette somme comme autant de dixaines, et augmente-la du produit des unités par les unités. Par exemple, pour multiplier 23 par 34, ajoute à 68 neuf, et à 770 douze.

Règle pour deux nombres inégaux, dont la demi-somme est un nombre entier : Additionne-les, multiplie leur demi-somme par elle-même et retranche du résultat le carré de leur demi-différence. Soit à multiplier 24 par 36; de 900 retranche le carré de la demi-différence des nombres, lequel est 36, alors il reste 864. [10])

Règle : Quelquefois la multiplication devient plus facile, si tu divises l'un des facteurs par le plus petit nombre de l'ordre supérieur, si tu multiplies l'autre facteur par le quotient, et si tu répètes le résultat ainsi obtenu un nombre de fois indiqué par le diviseur adopté, afin de donner à la fraction sa valeur. Ainsi, soit à multiplier 25 par 12: divise le premier nombre par 100, le quotient est $\frac{1}{4}$; maintenant prends $^1/_4$ de 12 et multiplie-le par 100, le résultat est 300. Si c'est 25 par 13, le résultat est en plus $^1/_4$ multiplié par 100, c'est-à-dire 325.

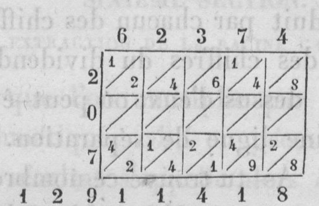
Règle : Quelquefois la multiplication devient plus facile, si tu doubles un des facteurs une ou plusieurs fois, si tu demidies l'autre de la même manière, et si tu multiplies l'un par l'autre les deux résultats. Soit 25 à multiplier par 16: si tu doubles le premier nombre deux fois de suite, et si tu demidies le second le même nombre de fois, cela se réduit alors à multiplier 4 par 100. Cela est tout à fait évident.

Eclaircissement.– Mais si les chiffres sont nombreux et que l'opération devienne difficile, tâche alors de t'aider de l'écriture. Dois–tu, par exemple, multiplier un nombre simple par un nombre composé, écris–les; ensuite multiplie par le chiffre du nombre simple le nombre du premier rang, et pose au–dessous les unités du produit; quant aux dixaines, conserve–les comme autant d'unités dans ta pensée, pour les ajouter au produit du rang suivant, si toutefois il s'y trouve un nombre. Si, au contraire, il s'y trouve un zéro, alors écris ce nombre de dizaines au–dessous. Obtiens–tu un produit n'ayant pas d'unités ? mets un zéro, et pour chaque dizaine retiens une unité dans ta pensée; procède avec elles comme tu as appris. Enfin, s'il y a des zéros à la suite du nombre simple, écris–les à droite à la suite du produit. Exemple: soit 5 à multiplier par le nombre 62043, le tableau de l'opération est comme ci–dessous :

$$\begin{array}{r} 5 \\ 62043 \\ 310215 \end{array}$$

Et si c'eût été 500, alors tu aurais dû, à la droite du produit, écrire deux zéros, ainsi : 31021500.

Mais si tu as un nombre composé à multiplier par un nombre composé, il y a d'autres méthodes, telles que celles du *réseau*, de la *ceinture*, du *vis-à-vis* et autres; mais la plus connue est celle du *réseau*. Trace un rectangle et divise–le en carrés, et chaque carré en deux triangles, un supérieur et un inférieur, par le moyen de diagonales, comme tu le verras tout d'abord; ensuite place l'un des facteurs au–dessus de la figure, chaque chiffre au–dessus d'un carré; et l'autre facteur à la gauche, les unités en bas, au–dessus d'elles les dizaines, ensuite les centaines, et ainsi de suite. Après cela, multiplie les chiffres séparément, chacun à chacun, et pose le produit dans le carré; s'il s'y rencontre deux chiffres, les unités dans le triangle inférieur, les dixaines dans le supérieur; laisse vides les carrés auprès desquels est placé un zéro. Maintenant tout étant rempli, mets sous la figure, sans y rien changer, ce qui se trouve dans le premier triangle en bas à droite; s'il est vide, mets un zéro; c'est là le premier chiffre du produit; ensuite additionne ce qui se trouve compris entre deux transversales et pose le résultat à gauche du précédent; si l'espace est vide, mets un zéro, absolument comme dans l'addition. Par exemple; si nous voulons multiplier 62374 par 207, voici le tableau de l'opération [11]:



La preuve consiste en ceci, que l'on multiplie les *balances* des deux facteurs l'une par l'autre; si la *balance* de ce produit diffère de celle du résultat obtenu, c'est que le calcul est faux.

CINQUIÈME SECTION.

DIVISION

Ceci est la recherche d'un nombre qui ait avec l'unité le même rapport que le dividende avec le diviseur; ainsi, c'est l'inverse de la multiplication. L'affaire ici consiste donc en ce que l'on cherche un nombre dont le produit par le diviseur soit égal au dividende, ou moindre que celui-ci d'un nombre plus petit que n'est le diviseur.

Si le produit mentionné est égal au dividende, alors le nombre trouvé se nomme le quotient; et s'il est plus petit, de la manière énoncée, donne à la différence le diviseur pour dénominateur, alors cette fraction, jointe au nombre entier, est le quotient.

Si les nombres sont grands, trace une table avec autant de bandes que le dividende a de chiffres; mets ceux-ci entre les lignes, le diviseur en bas, de telle sorte que les chiffres de l'ordre le plus élevé soient placés l'un sous l'autre, si le diviseur n'est pas plus grand que (le nombre formé par) les chiffres du dividende qui lui correspondent; s'il en est ainsi, mets le diviseur au dessous; s'il en est autrement, mets-le de façon qu'il soit placé sous l'avant-dernier chiffre du dividende [12]). Ensuite cherche parmi les unités le plus grand nombre dont le produit par chacun des chiffres du diviseur puisse se soustraire des chiffres du dividende qui se trouvent précisément au dessus d'eux, ou peut-être à gauche, et pose le reste sous une ligne de séparation.

	1	8	4	1	0
9	7	5	7	4	1
5	3				
4	4				
4	0				
	4				
	2	4			
	2	1			
	2	0			
		1			
		1	2		
			5	4	
			5	3	
				1	
				5	3
			5	3	
		5	3		
	5	3			
5	3				

As-tu trouvé ce nombre? Alors mets-le au-dessus de la table, à la place qui correspond au premier chiffre du diviseur, et procède avec lui comme tu as appris. Ensuite avance le diviseur d'un rang à droite, ou ce qui reste du dividende d'un rang à gauche, après que tu as tiré une ligne horizontale. Ensuite cherche de nouveau le plus grand nombre, comme auparavant, pose-le à droite du premier et procède avec lui comme tu as appris. Ne peut-il se trouver aucun nombre de cette espèce, alors pose un zéro et avance à droite, comme précédemment, successivement d'un rang jusqu'à ce qu'enfin l'ordre le plus faible du diviseur soit placé sous l'ordre le plus faible du dividende, ensuite c'est ce qui est placé au-dessus de la table qui est le quotient. S'il reste quelque chose du dividende, alors c'est une fraction dont le dénominateur est le diviseur. Par exemple le nombre 975741 doit-il être divisé par le nombre 53 ? Alors le quotient est 18410, comme nombre entier, et 11 de 53 parties, si 53 est pris comme unité. Le tableau est ci-contre.

La preuve consiste en ceci, que l'on multiplie la balance du quotient par la balance du diviseur, et qu'à cela on ajoute la balance du reste, s'il en existe un; la balance de cette somme diffère-t-elle de la balance du dividende ? C'est qu'alors le calcul est erroné.

SIXIÈME SECTION.

EXTRACTION DE LA RACINE CARRÉE.

La quantité que l'on multiplie par elle-même s'appelle *racine* en arithmétique, *côté* en géomètrie, et *chaï* (chose) en algèbre; le résultat s'appelle alors carré.

Si le nombre est petit, la recherche de la racine carrée n'exige aucun effort d'esprit, quand il est rationnel; mais s'il est irrationnel, retranches-en le carré qui en approche le plus, et donne au reste, pour dénominateur, le double de la racine du carré soustrait augmenté de l'unité; c'est la racine du carré soustrait augmentée de cette fraction qui est la racine carrée par approximation du nombre donné [13]).

Mais s'il est grand, alors place-le au-dedans d'une table, comme le dividende, et marque ses chiffres l'un après l'autre; ensuite cherche le plus grand nombre parmi les unités, de sorte que, si tu soustrais son carré du chiffre situé au-dessous de la première marque et de celui qui le précède (situé à gauche), il y ait un reste nul ou moindre que le carré soustrait [14]). As-tu trouvé un tel nombre? alors place-le en haut et en bas à une distance déterminée; multiplie ensuite le supérieur par l'inférieur, et mets le produit sous le nombre

	.3		.5		.8
1	2	8	1	7	2
	9				
	3				
	3	0			
		8			
		2	5		
		5	6		
		5	6	6	4
					8
			7	1	7
			7	0	8
		6	.5		
	.3				

dont on demande la racine carrée, de sorte que ses unités soient placées sous le multiplicateur; soustrais le produit de ce qui se trouve au-dessus et à gauche, et écris le reste au-dessous, après que tu as tiré une ligne de séparation. Après cela, additionne le nombre d'en haut avec celui d'en bas, et écris la somme en bas en avançant d'un rang à droite. Alors cherche de nouveau le plus grand nombre, tel que, si tu l'as écrit en haut, à la seconde marque, et aussi en bas, son produit par tout le nombre inférieur, puisse se soustraire de celui qui se trouve au-dessus et à gauche. Ce nombre est-il trouvé ? Alors procède avec lui comme tu as appris, additionne le nombre d'en haut avec celui d'en bas, et avance ce qui se trouve en bas d'un rang à droite. Mais un semblable nombre ne peut-il se trouver ? alors pose en haut à la marque, et en bas, un zéro, et avance d'un rang. Procède de même jusqu'à ce que tu sois à la fin, alors ce qui est écrit en haut est la racine carrée, et s'il n'est demeuré aucun reste sous les lignes de séparation, le nombre est un carré rationnel; mais s'il y a un reste, alors il est carré irrationnel, et ce reste est une fraction dont on trouve le dénominateur en additionnant avec ce qui est en bas, ce qui est en haut à la dernière marque augmenté de l'unité. Exemple : nous voulons extraire la racine carrée de ce nombre 128172; nous opérons comme nous avons dit, et alors c'est comme ci-dessus. Sous les lignes de séparation il reste 8, et c'est une fraction dont le dénominateur est formé, si l'on additionne avec ce qui est en bas, ce qui est en haut à la dernière marque, augmenté de l'unité, et c'est 717.

La preuve consiste en ceci, que l'on carre la balance du résultat, et qu'on lui ajoute la balance du reste, s'il y en a un. Maintenant si la balance de cette somme diffère de la balance du nombre donné, alors le calcul est faux.

CHAPITRE DEUXIÈME.

CALCUL DES FRACTIONS,

contenant trois préliminaires et six sections.

PREMIER PRÉLIMINAIRE.

Si deux nombres autres que l'unité sont égaux entre eux, on les nomme *identiques*; si ce n'est pas le cas, mais que le plus petit mesure le plus grand, alors ils sont *aliquotes*; si ce n'est pas encore le cas, mais qu'un troisième nombre les mesure tous les deux, alors ils sont *congruents*, et la fraction dont le dénominateur est ce troisième nombre, s'appelle leur *congruence*; mais si cela n'a pas lieu, alors ils sont *hétérogènes*. L'identité est chose évidente; on reconnaît les autres états de corrélation, si l'on divise le plus grand nombre par le plus petit; s'il n'y a pas de reste, alors ils sont *aliquotes*; s'il y a un reste, nous divisons le diviseur par le reste, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus aucun reste; alors les nombres sont *congruents*, et le dernier diviseur est leur plus grande commune mesure, mais si l'on parvient à l'unité comme reste, alors ils sont *hétérogènes*.

De plus la fraction est ou bien *articulée* [15]), et ce sont les neuf (premières) fractions connues, ou bien *muette*, qu'il n'est possible d'exprimer qu'à l'aide d'une circonlocution. De plus chacune d'elles est, ou *simple*, comme un tiers, un onzième; ou *multiple*, comme deux tiers, deux onzièmes; ou *dépendante*, comme la moitié d'un sixième, un onzième d'un treizième; ou *composée*, comme un demi et un tiers, un onzième et un treizième.

Si tu veux écrire une fraction, quand elle est jointe à un nombre entier, écris–la ainsi: celui–ci en haut, et la fraction au dessous, le numérateur sur le dénominateur; dans le cas contraire, mets un zéro à sa place. On unit les fractions *composées* avec le mot *et*, les fractions *dépendantes* avec le mot *de*. En conséquence l'on écrit un et deux tiers ainsi : $\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}$; la moitié de cinq sixièmes, ainsi : $\begin{smallmatrix}0\\1\\2\\5\\6\end{smallmatrix}$; deux cinquièmes et trois quarts, ainsi : $\begin{smallmatrix}0\\2\\5\end{smallmatrix}$ et $\begin{smallmatrix}0\\3\\4\end{smallmatrix}$; un onzième d'un treizième ainsi : $\begin{smallmatrix}0\\1\\11\end{smallmatrix}$ de $\begin{smallmatrix}0\\1\\13\end{smallmatrix}$.

SECOND PRÉLIMINAIRE.

Le dénominateur d'une fraction est le plus petit nombre qui en fasse un nombre entier. Le dénominateur de la fraction simple frappe les yeux, et il n'en est pas autrement du dénominateur de la fraction multiple. Le dénominateur de la fraction dépendante est le produit des dénominateurs de ses fractions simples. Quant à la fraction composée, compare les dénominateurs de ses deux fractions; s'ils sont des nombres hétérogènes, alors multiplie–les l'un par l'autre; s'ils sont congruents, alors multiplie la congruence de l'un d'eux par l'autre; s'ils sont aliquotes, alors contente-toi du plus grand; ensuite compare le résultat avec le dénominateur de la troisième fraction, et procède comme tu as appris, et ainsi de suite; le résultat est le dénominateur cherché. Veux–tu par exemple trouver le dénominateur des neuf (premières) fractions? Alors multiplie 2 par 3, parce qu'ils sont hétérogènes; le résultat par la moitié de 4, parce qu'il y a congruence; le résultat par 5 à cause de l'hétérogénéité; mais 6 se trouve dans le résultat, contente-toi donc de celui-ci, et multiplie-le par 7 à cause de l'hétérogénéité, et le résultat par un quart de 8, puis celui-là par un tiers de 9, à cause de la congruence; 10 se trouve dans le résultat, qui est 2520; sois-en donc satisfait; c'est en effet le dénominateur cherché.

Remarque supplémentaire. – Tu peux encore comparer entre eux les dénominateurs des fractions simples. Ceux-là parmi eux, qui sont compris dans un autre, rejette-les, et contente-toi du plus grand; pour ceux qui sont congruents, substitue leur congruence et procède de même avec la congruence, jusqu'à ce que les dénominateurs soient réduits à l'hétérogénéité; alors multiplie-les les uns par les autres, c'est le produit qui est le dénominateur cherché. Dans l'exemple, rejette 2, 3, 4 et 5, parce qu'ils se trouvent dans les dénominateurs suivants; 6 est congruent avec 8 suivant un demi, en conséquence substitue-lui sa moitié, et comme cette moitié se trouve dans 9, alors rejette-la; 8 est congruent avec 10 suivant un demi; en conséquence multiplie 5 par 8, le produit par 7, et celui-ci par 9, alors tu as le dénominateur cherché.

Facétie. [16]) – On obtient le dénominateur des neuf fractions, si l'on multiplie les jours du mois par le nombre des mois, et ce produit par les jours de la semaine. Ou encore si l'on forme un produit de ceux de ces dénominateurs, dans lesquels se rencontre le lettre *Aïn*. Le maître des fidèles, Ali, (salut à lui !) fut interrogé là-dessus; il répondit : Multiplie les jours de la semaine par les jours de l'année.

TROISIÈME PRÉLIMINAIRE.

Transformation des fractions mélangées en fractions impures et réciproquement.

La transformation d'une fraction mélangée en une impure consiste en ceci, que l'on fait d'un nombre entier une fraction avec le dénominateur d'une fraction donnée, et l'opération est celle-ci : si la réunion d' un nombre entier et d' une fraction est donnée, on multiplie le nombre entier par le dénominateur de la fraction, et à cela l'on ajoute le numérateur. Ainsi la transformation de $2\,{}^1/_4$ donne ${}^9/_4$; la conversion de $6\,\frac{3}{5}$ égale $\frac{33}{5}$ et la conversion de $4\,\frac{1}{21}$ égale $\frac{85}{21}$.

La transformation d'une fraction impure en un mélangée consiste en ceci, que l'on fait d'une fraction un nombre entier. Si nous avons en effet une fraction dont le numérateur est plus grand que le dénominateur, nous le divisons par le dénominateur; alors le quotient est un nombre entier, et le reste une fraction avec le même dénominateur. Ainsi la résolution de quinze quarts est trois et trois quarts.

PREMIÈRE SECTION.

ADDITION ET DUPLICATION DES FRACTIONS.

On prend la somme ou le double, après la réduction au même dénominateur, et c'est par celui-ci que l'on divise le numérateur, si ce dernier est plus grand; s'il est plus petit, on écrit le dénominateur au-dessous; s'il lui est égal, le résultat est une unité. Ainsi un demi, un tiers et un quart égalent un et un douzième; un sixième et un tiers, c'est un demi; un tiers et un sixième c'est une unité; et le double de trois cinquièmes est l'unité et un cinquième.

DEUXIÈME SECTION.

DEMIDIATION ET SOUSTRACTION DES FRACTIONS.

Demidiation. — Si le numérateur est un nombre pair, prends-en la moitié; si c'est un nombre impair, double le dénominateur et écris-le sous le numérateur. Cela est évident.

Soustraction. — Soustrais un numérateur de l'autre, après qu'ils ont été réduits au même dénominateur, et sous le reste écris ce dénominateur. Si tu soustrais ainsi un quart d'un tiers, alors il reste un douzième.

TROISIÈME SECTION.

MULTIPLICATION DES FRACTIONS.

Si d'un côté seulement il y a une fraction, avec ou sans nombre entier, multiplie la fraction impure ou simplement le numérateur par le nombre entier; puis divise le produit par le dénominateur, ou écris celui-ci au dessous. Si l'on a ainsi à multiplier deux et trois cinquièmes par quatre, alors nous divisons le produit de la fraction impure et du nombre entier, c'est-à-dire 52, par 5; il sort de là $10\frac{2}{5}$. Et si nous avons à multiplier $\frac{3}{4}$ par 7, alors nous divisons 21 par 4; il sort de là $5\,{}^1/_4$, et c'est la quantité cherchée.

Mais si des deux côtés il y a une fraction, et avec chacune d'elles, ou avec une seule, ou avec aucune, un nombre entier, multiplie les fractions impures l'une par l'autre, ou la fraction impure par le numérateur de l'autre, ou numérateur par numérateur, et que ce soit là le premier résultat. Ensuite multiplie dénominateur par dénominateur, et que ce soit là le second résultat. Alors divise le premier par celui-ci, ou bien écris ce dernier comme dénominateur sous le premier, le résultat est la quantité cherchée. Ainsi le produit de $2\,{}^1/_2$ par $3\,{}^1/_3$ est $8\frac{1}{3}$; le produit de $2\,{}^1/_4$ par $\frac{5}{6}$ est $1\,{}^7/_8$; et de $\frac{3}{4}$ par $\frac{5}{7}$, c'est ${}^1/_2$ plus ${}^1/_{28}$ $(=\frac{15}{28})$.

QUATRIÈME SECTION.

DIVISION DES FRACTIONS.

Ici se présentent huit cas, comme la réflexion le montre. Le procédé consiste en ceci, que tu multiplies le dividende et le diviseur par le dénominateur commun, si des deux côtés il y a des fractions; ou par le dénominateur existant, si d'un côté seulement se trouve une fraction; alors tu divises le produit du dividende par le produit du diviseur, ou bien tu écris celui-ci comme dénominateur au-dessous. C'est ainsi que si l'on divise $5\,{}^{1}/_{4}$ par 3, le quotient est $1\,{}^{3}/_{4}$; et si l'on fait la division inverse, $\frac{4}{7}$; et $\frac{2}{6}$ par $\frac{1}{6}$ donne 2, comme le montre la règle de la division ci-dessus enseignée. Au reste, c'est à toi de rechercher les autres exemples.

CINQUIÈME SECTION.

EXTRACTION DE LA RACINE CARRÉE DES FRACTIONS.

Si la fraction est jointe à un nombre entier, arrange-la de manière que le tout devienne une fraction. Alors si le numérateur et le dénominateur sont *articulés*, divise la racine du numérateur par la racine du dénominateur, ou donne celle-ci pour dénominateur à celle-là. Ainsi la racine carrée de $6\,{}^{1}/_{4}$ égale $2\,{}^{1}/_{2}$, et la racine carrée de $\frac{4}{9}$ égale $\frac{2}{3}$. Mais s'ils ne sont pas *articulés*, alors multiplie le numérateur par le dénominateur, extrais approximativement la racine carrée du produit et divise-la par le dénominateur. Veux-tu, par exemple, extraire la racine de $3\,{}^{1}/_{2}$, multiplie 7 par 2, extrais approximativement la racine du produit; elle est $3\,\frac{5}{7}$; alors divise-la par 2, il en résulte $1\,\frac{6}{7}$.

SIXIÈME SECTION.

RÉDUCTION D'UNE FRACTION À UN DÉNOMINATEUR DONNÉ.

Multiplie le numérateur de la fraction par le dénominateur auquel il faut la réduire, et divise le produit par le dénominateur (primitif), c'est le quotient qui est le numérateur pour le dénominateur donné. Ainsi l'on demande combien de huitièmes font $\frac{5}{7}$? Divise 40 par 7, il en résulte $5\,\frac{5}{7}$ huitièmes. Et si l'on demande combien de sixièmes ? Alors la réponse est $4\,\frac{2}{7}$ sixièmes.

CHAPITRE TROISIÈME.

RECHERCHE DES INCONNUES PAR LE MOYEN DE LA PROPORTION.

Ici le premier terme se comporte avec le second, comme le troisième avec le quatrième, et le produit des termes externes doit être égal au produit des internes, ainsi qu'on le démontre. L'un des termes externes étant inconnu, divise le produit des termes internes par l'externe connu; mais si c'est l'un des internes qui est inconnu, divise le produit des termes externes par l'interne connu; le quotient est la quantité cherchée. Les problêmes sont relatifs soit à la somme et à la différence, soit à des affaires de commerce et choses analogues.

Premièrement, l'on demande : Quel est le nombre qui, si on lui ajoute un quart de sa valeur, devient trois ? Solution: prends le dénominateur de la fraction, et nomme-le *Supposition*, opère avec ce nombre selon la teneur de la question, et ce qui en résulte, nomme-le *Moyen*; alors tu as trois quantités connues, savoir : la *supposition*, le *moyen* et la *connue*, c'est-à-dire ce qui a été donné par celui qui a posé le problême, quand il a dit : devient tel ou tel nombre. Maintenant la *Supposition*, comme premier terme, se comporte avec le *moyen* comme second, de même que l'inconnue, comme troisième, se comporte avec la *connue*, comme quatrième. Multiplie donc la supposition par la connue, et divise le produit par le moyen, delà résulte l'inconnue qui, dans l'exemple, est $2\frac{2}{5}$.

Secondement, si l'on posait cette question : 5 livres pour 3 dirhems, 2 livres pour combien? 5 livres, c'est l'objet évalué; 3 la valeur; les 2 livres l'achat, et la quantité demandée est le prix. L'objet évalué est à la valeur, comme l'achat est au prix. Ainsi l'inconnue est le quatrième terme; c'est pourquoi divise le produit des termes internes, c'est-à-dire 6, par le premier terme, 5. Mais si l'on demandait : combien de livres pour 2 dirhems ? Alors l'inconnue serait l'achat, et en même temps le troisième terme; c'est pourquoi tu devrais diviser le produit des termes externes, c'est-à-dire 10, par le second, 3. – De là on déduit cette règle ; multiplie la dernière donnée de la question par son hétérogène, et divise le produit par son homogène. Ce chapitre est d'une grande utilité. Retiens-le ! Il est celui dont le secours sera sollicité [18]).

CHAPITRE QUATRIÈME.

RECHERCHE DES INCONNUES PAR LE MOYEN DE DEUX FAUSSES POSITIONS.

Prends pour l'inconnue tel nombre que tu voudras, nomme-le *première supposition*, et opère conformément à l'énoncé du problème; s'il le vérifie, c'est lui, l'inconnue. Mais s'il en dévie de l'un ou de l'autre côté (en plus ou en moins), nomme cette différence, *première déviation*. Alors prends un autre nombre, et nomme-le : *seconde supposition*; s'il dévie, il en résulte alors la *seconde déviation*. Après cela, multiplie la première supposition par la seconde déviation, et nomme le produit: *premier résultat*; puis la seconde supposition par la première déviation, et c'est là le *second résultat*. Si les deux déviations sont en même temps positives ou négatives, alors divise la différence des deux résultats par la différence des deux déviations; s'il en est autrement, divise la somme des deux résultats par la somme des déviations, le quotient est le nombre cherché.

On voudrait savoir quel est le nombre qui, augmenté des deux tiers de sa valeur et de 1, devient égal à 10. Voici: Si tu prends 9, le première déviation est 6; si tu prends 6, la seconde déviation est 1; d'où le premier résultat est 9, le second 36, et le quotient que tu obtiens, si tu divises la différence des résultats par la différence des déviations, est $5\frac{2}{5}$; et c'est là le nombre cherché.

Et si l'on demandait : quel est le nombre tel que, si on lui ajoute un quart de sa valeur, si à cette somme on ajoute ses trois cinquièmes, et si de cette dernière somme on retranche 5, on reproduise ce nombre même ? Si tu prends 4, la déviation est 1 par défaut; si tu prends 8, c'est 3 par excès. Si l'on divise la somme des résultats par la somme des déviations, le quotient est 5, et c'est la quantité cherchée.

CHAPITRE CINQUIÈME.

RECHERCHE DE L'INCONNUE PAR L'OPÉRATION DE L'INVERSION.

Ce procédé consiste en ceci, que l'on fait l'inverse de ce que l'interrogateur a établi; s'il a doublé, prends la moitié; s'il a additionné, soustrais ; s'il a multiplié, divise; s'il a extrait la racine carrée, élève au carré; s'il a employé l'inversion, procède inversement en commençant par la dernière partie du problême : alors tu obtiens la solution.

L'on demande par exemple : quel est le nombre tel, que, si on le multiplie par lui-même, si au produit on ajoute 2, si au double de cette somme on ajoute 3, et si le résultat divisé par 5 est ensuite multiplié par 10, on arrive au résultat final 50 ? Divise ce nombre par 10, multiplie le quotient 5 par lui-même, soustrais 3; de la moitié de 22 soustrais

2, et prends la racine carrée de 9; c'est cette racine de 9, qui est la solution.

On demande: quel est le nombre tel, que si on l'augmente de sa moitié et de 4, et si l'on opère de même avec le résultat, l'on trouve 20? Soustrais 4, puis de 16 son tiers, puisque au nombre cherché on a ajouté sa moitié, il reste ainsi $10\frac{2}{3}$; maintenant de ce nombre retranche 4, et du reste soustrais son tiers, il vient alors $4\frac{4}{9}$, et c'est là la solution. Dieu connaît mieux la vérité [19]).

CHAPITRE SIXIÈME.

GÉOMÉTRIE.

COMPOSÉ D'UNE INTRODUCTION ET DE TROIS SECTIONS.

La géométrie recherche combien de fois dans la grandeur continue de l'espace, l'unité linéaire ou ses divisions ou ces deux mesures ensemble sont comprises, si c'est une ligne; ou combien de fois l'unité carrée, si c'est une surface; ou l'unité cubique, si c'est un corps.

La ligne est la grandeur à une dimension; on la divise en ligne droite, qui est la plus courte des lignes qui joignent deux points, et en même temps celle que l'on choisit, quand on a le libre choix; ses dix noms sont connus [20]); avec une de ses pareilles elle ne renferme aucun espace; et en ligne courbe que l'on distingue encore en ligne circulaire, laquelle est connue, et en courbe non circulaire, dont nous n'aurons pas à nous occuper ici [21]).

La surface est la grandeur qui n'a pas plus de deux dimensions; c'est un plan, si les lignes droites qui sont tirées sur elle, coïncident avec elle en chaque point. Si elle est limitée par une ligne circulaire unique, alors elle s'appelle cercle; la ligne qui la divise en deux parties égales, s'appelle diamètre; celle qui ne la divise pas en deux parties égales s'appelle corde par rapport aux deux arcs, et base par rapport aux deux segments; si elle est limitée par un arc et deux demi-diamètres qui se coupent au centre [22]), alors c'est un *secteur*, et à vrai dire, il y en a un grand et un petit. Si elle est limitée par deux arcs dont la convexité est tournée d'un même côté et tous deux plus petits que le demi cercle, c'est une *lune*, s'ils sont plus grands, alors c'est un *fer à cheval*; si les deux arcs sont convexes de côtés différents, égaux entre eux et plus petits que le demi-cercle, alors c'est un *myrobolan*; s'ils sont plus grands, alors c'est un *navet*. Si le plan est limité par trois lignes droites, il en résulte un *triangle*, qui est équilatéral, isocèle ou scalène; rectangle, obtusangle, ou acutangle; s'il est limité par quatre lignes égales, c'est un *carré*, pourvu qu'elles soient mutuellement perpendiculaires, si non, un *losange*; si elles sont inégales, avec égalité de celles situées vis-à-vis l'une de l'autre, c'est un *rectangle* quand elles sont perpendiculaires, autrement un *parallélogramme*; si aucune de ces conditions n'a lieu, alors naissent les *trapèzes*, à quelques-uns desquels conviennent parfois des noms particuliers, tels que: *trapèzes à une pointe*, *trapèzes à deux pointes*, et *concombres* [23]). Si le plan est limité par plus de quatre côtés, il s'appelle alors un *polygône*; et si les côtés sont égaux, on dit un *pentagone*, un *hexagone* et ainsi de suite; s'ils sont inégaux, alors on dit une figure de cinq côtés, de six côtés, et ainsi de suite jusqu'à dix, dans les deux espèces; à partir de là, on dit : figure à onze bases, à douze bases, et ainsi de suite dans les deux espèces ; quelquefois aussi certains noms particuliers conviennent, tels que *figure du gradin*, *figure du tambour*, *figure à pointes* [24]).

Le corps est la grandeur à trois dimensions; si les droites allant de son intérieur à la surface qui le limite sont égales entre elles, alors c'est une *sphère*; les cercles qui la demi-dient, s'appellent *grands cercles*; les autres, *petits cercles*. S'il est limité par six carrés égaux, alors c'est un *cube*. S'il est limité par deux cercles égaux entre eux et parallèles, et par une surface qui les unit l'un à l' autre de telle sorte qu'une ligne droite, joignant les périphéries et tournant tout autour, coïncide avec cette surface en chaque point pendant tout son parcours, alors c'est un *cylindre*; les deux cercles sont ses *bases*, et la ligne qui joint leurs centres, son *axe*; si celui-ci se tient perpendiculaire à la base, alors le cylindre est *droit*, autrement *oblique*. Si le corps est limité par un cercle, et par une surface convexe piniforme qui, partant de la périphérie va se réduire en un point, de telle sorte qu'une ligne droite de jonction glissant sur la périphérie coïncide dans tout son parcours avec cette surface même, alors c'est un *cône*, lequel est droit ou oblique; le *cercle* est sa *base*, la ligne qui joint son centre avec le point, son *axe*. S'il est coupé par un plan parallèle à la base, alors la portion sous-jacente est un *cône tronqué*. Si la base du cône et du cylindre est une figure angulaire, ils deviennent tous deux de cette manière des corps angulaires [25]).

Tels sont la plupart des termes techniques employés dans cette science.

PREMIÈRE SECTION.

MESURE DES FIGURES RECTILIGNES.

En ce qui concerne le triangle, rectangle à la vérité, multiplie l'un des côtés de l'angle droit par la moitié de l'autre. Dans l'obtusangle, multiplie la perpendiculaire abaissée de l'angle obtus sur le côté opposé, par la moitié de ce côté, ou inversement. Dans l'acutangle, fais la même multiplication avec la perpendiculaire partant d'un angle quelconque et le côté opposé. On apprend à laquelle de ces trois classes un triangle appartient, si on élève au carré son plus grand côté; ce carré est-il égal aux deux carrés des autres côtés, alors c'est un triangle rectangle; est-il plus grand, il est obtusangle; est-il plus petit, il est acutangle [27]). On trouve la hauteur ainsi qu'il suit : l'on prend le plus grand côté comme base, on multiplie la somme des deux plus petits par leur différence, on divise le produit par la base, et l'on retranche le quotient de cette même base; alors la moitié du reste est la distance du pied de la hauteur à l'extrémité du plus petit côté [27]). Tire de là une ligne au sommet, voilà quelle est la hauteur; multiplie-la par la moitié de la base, il en résulte l'étendue de la surface. Parmi les méthodes pour trouver l'aire d'un triangle équilatéral, retiens celle-ci : tu multiplies par 3 le carré de la quatrième partie du carré d'un côté indistinctement; c'est la racine carrée du produit qui est la réponse [28]).

Dans le carré, multiplie un côté par lui-même; dans le rectangle, par son adjacent; dans le losange, la moitié d'une diagonale par l'autre tout entière. Les autres quadrilatères, partage-les en deux triangles, alors la somme des deux aires est égale à l'aire de la somme. Pour quelques-uns d'entre eux il y a des méthodes particulières, mais qui ne sont pas propres à entrer dans ce manuel.

Pour ce qui concerne les polygônes, multiplie, dans l'hexagone, l'octogone et tous les autres d'un nombre pair de côtés, le demi-diamètre par la demi-somme des côtés, le produit est la réponse : or, le diamètre est la ligne qui joint les points milieux de deux côtés opposés [29]). Tous les autres seront partagés en triangles et mesurés; et cela est vrai à l'égard de tous sans distinction; mais pour quelques-uns on a des méthodes comme pour les quadrilatères.

DEUXIÈME SECTION.

MESURE DES AUTRES SURFACES.

En ce qui regarde le cercle, pose un fil autour de sa périphérie, et multiplie le demi-diamètre par la moitié de ce fil. Ou bien retranche du carré du diamètre son septième et son demi-septième, ou multiplie le carré du diamètre par 11, et divise le produit par 14. [30]). Si tu multiplies le diamètre par $3\frac{1}{7}$, alors tu obtiens la périphérie, et si tu divises la périphérie par ce même nombre, tu obtiens le diamètre. A l'égard des deux secteurs, multiplie le demi-diamètre par le demi-arc [31]). A l'égard des deux segments, marque le centre et achève les deux secteurs, alors il se forme là un triangle; retranche-le du plus petit secteur, il en résulte le plus petit segment, ou ajoute-le au plus grand, il en résulte le plus grand segment [32]). Quant à la *lune* et au *fer à cheval*, joins leurs points extrêmes par une ligne droite et retranche le plus petit segment du plus grand. Partage le *Myrobolan* et le *Navet* en deux segments.

Pour la surface de la *Sphère*, multiplie le diamètre par la périphérie du plus grand cercle; ou bien le carré du diamètre par quatre, et retranche de ce produit ses trois quatorzièmes. L'aire de la surface du *segment sphérique* est égale à l'aire d'un cercle dont le diamètre est égal à la ligne qui joint le pôle du *segment* avec la périphérie de la base.

Pour la surface du *cylindre droit*, multiplie la ligne parallèle à l'axe qui joint les deux bases, par la périphérie de la base.

Pour la surface du *cône droit*, multiplie la ligne qui joint le sommet à la périphérie de la base par cette demi-périphérie.

Pour les surfaces qui ne sont pas mentionnées ici, on tâche de s'aider de celles qui ont été mentionnées.

TROISIÈME SECTION.

MESURE DES CORPS.

Dans la Sphère, multiplie son demi-diamètre par un tiers de sa superficie; ou bien retranche du cube du diamètre ses trois quatorzièmes, du reste de même, et du reste de même [33].

Pour le secteur sphérique, multiplie le demi-diamètre de la sphère par un tiers de la surface du secteur.

Pour les cylindres et prismes de chaque espèce, multiplie la hauteur par la surface plane de la base.

Pour les cônes entiers et les pyramides de toute espèce, multiplie la hauteur par un tiers de la superficie de la base.

Pour le cône tronqué, multiplie le diamètre de la plus grande base par la hauteur, et divise le produit par la différence des diamètres des deux bases, il en résulte la hauteur du cône, comme s'il était entier. La différence entre la hauteur du cône entier et celle du cône tronqué est la hauteur du petit cône, qui complète ce dernier; multiplies-en le tiers par la plus petite base, tu obtiens ainsi le volume du petit cône; retranche-le du cône entier.

Pour la pyramide tronquée, multiplie un côté de la plus grande base par la hauteur, et divise le produit par la différence entre un côté de cette base et un de la plus petite, tu obtiens ainsi la hauteur de la pyramide entière, et alors mène l'opération à fin.

Les démonstrations de toutes ces opérations sont expliquées dans mon livre plus étendu, qui a pour titre: *Océan du calcul*; puisse Dieu le Très-Haut me donner assistance pour son entier achèvement !

CHAPITRE SEPTIÈME.

SUR L'APPLICATION DE LA GÉOMÉTRIE AU NIVELLEMENT USITÉ POUR L'EXÉCUTION DES AQUEDUCS, ET À LA RECHERCHE DE LA HAUTEUR DES OBJETS ÉLEVÉS, DE LA LARGEUR DES RIVIÈRES ET DE LA PROFONDEUR DES PUITS.

COMPOSÉ DE TROIS SECTIONS.

PREMIÈRE SECTION.

NIVELLEMENT DU SOL, EN USAGE POUR L'EXÉCUTION D'AQUEDUCS.

Fais une tablette d'airain ou de semblable matière en forme de triangle isocèle, mets entre les extrémités de sa base deux anneaux et au pied de la hauteur un cordon portant un poids; ensuite fais-la glisser au milieu d'un cordeau, et place les deux bouts de celui-ci sur deux piquets de bois, droits, égaux et fixés verticalement par le moyen du fil à plomb avec l'aide de deux hommes, qui se tiennent distants l'un de l'autre de la longueur du cordeau; et il est d'usage à la vérité que le cordeau soit long de quinze coudées [34]), et chacun des deux piquets de bois de cinq empans. Maintenant observe le cordon à poids, s'il rencontre la pointe de la tablette, alors les deux lieux sont de niveau l'un avec l'autre; s'il ne la rencontre pas, descends le cordeau du sommet de l'un des piquets, jusqu'à ce que le cordon à poids atteigne l'angle; alors la mesure de la descente est l'excès. Ensuite fais circuler un des deux hommes du côté où tu veux niveler, et retiens une à une, chaque déviation positive et négative, et retranche toujours la plus petite de la plus grande; le reste est la différence des deux lieux. S'ils sont d'égal niveau, alors l'eau coule difficilement; si non elle coule aisément ou pas du tout. — Si tu veux, fais un tuyau, adapte-le au cordeau, et expérimente avec l'eau, alors tu n'as nul besoin du fil à plomb et de la tablette.

Une autre méthode. Poste-toi au premier puits et place la règle de l'astrolabe horizontale; alors qu'un autre prenne une perche d'une longueur égale à la profondeur du puits, qu'il se dirige du côté vers lequel tu veux amener l'eau, et qu'il la tienne toujours dressée jusqu'à ce que tu en voies la pointe à travers le dioptre; en cet endroit-là l'eau coule sur le sol. — Si l'éloignement est si grand, que tu ne puisses pas voir la pointe de la perche, alors mets-y une lumière est opère pendant la nuit. *Et Lui le sait mieux* !

DEUXIÈME SECTION.

RECHERCHE DE LA HAUTEUR DES OBJETS ÉLEVÉS.

S'il est possible de parvenir au pied de la hauteur et si le terrain est plan, dresse un bâton verticalement et place-toi de manière que les rayons de ton œil passent par la pointe du bâton et vers le sommet de la hauteur; alors mesure à partir de ta station jusqu'au pied de la hauteur, multiplie le résultat par l'excès du bâton sur ta taille, divise le produit par la distance de ta station au pied du bâton et ajoute au quotient ta taille; c'est là la quantité cherchée.

Une autre méthode. Mets à terre un miroir, de sorte que tu puisses voir dedans le sommet de l'objet élevé; multiplie la distance du miroir au pied de la hauteur par ta taille, et divise le produit par la distance du miroir à ta station; c'est le quotient qui est la hauteur.

Une autre méthode. Dresse un bâton et cherche le rapport de son ombre à sa longueur, ce rapport est exactement celui de l'ombre de la hauteur à la hauteur elle-même.

Une autre méthode. Cherche la longueur de l'ombre au moment où la hauteur du soleil est à 45°., elle est égale à la mesure de la hauteur.

Une autre méthode. Mets la règle de l'Astrolabe à 45°., et place-toi de telle sorte que tu voies par le dioptre le sommet de la hauteur; mesure alors depuis ta station jusqu' au pied de la hauteur, et ajoute ta taille au résultat; c'est la somme qui est la quantité cherchée.

Les démonstrations de ces manières de procéder sont exposées dans mon grand ouvrage. J'ai aussi une élégante démonstration de la dernière méthode, pour laquelle personne ne m'a devancé, et que j'ai communiquée dans ma glose marginale à l'ouvrage : *Fârseyyat al Âstorlâb* [35]).

Mais si l'on ne peut pas parvenir au pied de la hauteur, par exemple d'une montagne, alors vise son sommet par le dioptre, observe sur quelle ligne d'ombre se trouve l'extrémité inférieure de la règle, et marque ta station. Ensuite fais tourner la règle sur une ligne d'ombre en avant ou en arrière, puis avance ou recule jusqu'à ce que tu voies de nouveau le sommet de la hauteur. Mesure maintenant la distance entre les deux stations, et multiplie-la par 7 on par 12, selon le mode de division de l'instrument [36]).

TROISIÈME SECTION.

RECHERCHE DE LA LARGEUR DES RIVIÈRES ET DE LA PROFONDEUR DES PUITS.

Premièrement. Place-toi au bord de la rivière et observe son autre bord par la règle dioptrique, puis retourne-toi de manière à voir par la même règle dioptrique un endroit du terrain, durant que l'Astrolabe reste à sa place; maintenant la distance entre ta station et cet endroit du terrain est égale à la largeur de la rivière.

Secondement. Mets sur le puits quelque chose qui représente le diamètre de son contour, et laisse tomber en bas du milieu du diamètre, après que tu en auras marqué la place, quelque chose de lourd et de brillant, qui puisse en vertu de sa nature parvenir au fond du puits. Ensuite vise l'objet brillant par le dioptre, de sorte que ta ligne de vision donne un point de section avec le diamètre. Maintenant multiplie la distance entre la marque et le point de section par ta taille, et divise le produit par la distance de ce point à celui de ta station; c'est le quotient qui est la profondeur du puits [37]).

CHAPITRE HUITIÈME.

RECHERCHE DES INCONNUES PAR LA MÉTHODE DE L'ALGÈBRE.

COMPOSÉ DE DEUX SECTIONS.

PREMIÈRE SECTION.

PRÉLIMINAIRES.

On nomme l'inconnue *chaï* (chose), son produit par elle-même : *mâl* (possession); par ce dernier : *kâb* (cube); par ce dernier : *mâl-mâl*; par ce dernier: *mâl-kâb*; par ce dernier *kâb-kâb*, et ainsi de suite indéfiniment: d'abord viennent deux *mâl*, puis l'un d'eux devient un *kâb*, puis tous les deux; ainsi la septième puissance est *mâl-mâl-kâb*, la huitième *mâl-kâb-kâb*, la neuvième *kâb-kâb-kâb*, et ainsi de suite. Toutes ces puissances forment une progression croissante et décroissante; ainsi *mâl-mâl* est à *kâb* comme *kâb* est à *mâl*, comme *mâl* est à *chaï*, comme *chaï* est à l'unité, comme l'unité est à un divisé par *chaï*, comme un divisé par *chaï* est à un divisé par *mâl* [38]).

Si tu veux multiplier une puissance par une autre, additionne leurs exposants, si elles sont toutes deux d'un même côté de l'unité; le produit est alors de même dénomination que cette somme; par exemple *mâl–kâb* par *mâl–mâl–kâb*; la première est du cinquième degré, la seconde du septième; en conséquence le produit est *kâb-kâb-kâb-kâb*, quatre fois, et véritablement c'est la douzième puissance [39]). Si elles sont de côtés différents, alors le produit est du degré de l'excès, et du côté qui fournit l'excès; par exemple *un sur mâl–mâl* par *mâl–kâb* donne pour produit *chaï*, et *un sur kâb–kâb–kâb* par *mâl–mâl–kâb* donne *un sur mâl*. Si l'on ne trouve aucun excès, alors le produit est du même nom que l'unité. L'explication plus exacte des méthodes de la division, de l'extraction des racines et des autres Opérations est réservée pour mon plus grand traité. Les opérations algébriques que les savants sont parvenus à découvrir, se bornent absolument à six, et leur exécution ne s'étend qu'au nombre, à *chaï* et à *mâl*. La table suivante sert à trouver les résultats de la multiplication et de la division de ces quantités, je l'ai admise ici pour plus de commodité et de brièveté; voici quelle est sa composition :

Multiplicande

Dividende						Multiplicateur
	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	1	x	x^2	
x^2	1.	x	x^2	x^3	x^4	x^2
x	$\frac{1}{x}$	1	x	x^2	x^3	x
1.	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	1.	x	x^2	1.
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^3}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	1	x	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^4}$	$\frac{1}{x^3}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	1.	$\frac{1}{x^2}$
	x^2	x	1.	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	

Diviseur

Multiplie les coëfficients des deux puissances l'un par l'autre, le résultat est le coëfficient du produit dont le degré est celui qui se trouve là où les deux facteurs se rencontrent.

S'il se présente une soustraction, alors la quantité dont on retranche quelque chose s'appelle positive, par contre la quantité que l'on retranche s'appelle négative. La multiplication d'une quantité positive par sa pareille, et d'une négative par sa pareille donne un produit positif; la multiplication de quantités dissemblables donne un produit négatif. Multiplie les termes chacun à chacun, et retranche les négatifs des positifs. Par exemple : $10 + x$ multiplié par $10 - x$ donne $100 - x^2$; et $5 - x$ par $7 - x$ donne $35 + x^2 - 12x$; et $4x^2 + 6 - 2x$ par $3x - 5$ donne $12x^3 + 28x - (26x^2 + 30)$.

Dans la division, cherche ce qui, si tu le multiplies par le diviseur, devient égal au dividende; pour cet effet divise le coëfficient du dividende par le coëfficient du diviseur, c'est là le coëfficient du quotient, dont le degré est celui qui se trouve là où le dividende et le diviseur se rencontrent [40]).

DEUXIÈME SECTION.

SUR LES SIX (FORMES) ALGÉBRIQUES. [41])

La recherche des grandeurs inconnues par le moyen de l'Algèbre demande un coup d'œil pénétrant, une prudence sagace, de la contention d'esprit pour réfléchir sur ce que l'interrogateur a donné, et une vue claire des moyens qui font trouver plus facilement la quantité cherchée. Pose pour le nombre cherché : x, et opère avec x, comme le prescrit le problème, en procédant de manière à parvenir à une égalité. Le côté qui contient une négation est complété, et l'égale de celle-ci est ajoutée de l'autre côté, et cela s'appelle *Algèbre*; les termes de même espèce et de même valeur dans les deux côtés sont rejetés de l'un et de l'autre, et cela s'appelle *al-mokabalah* [42]). Alors l'égalité a lieu, soit entre un terme et un terme, et elle a trois formes qui sont nommées simples; soit entre un terme et deux termes, et elle a également trois formes qui s'appellent composées.

La première des formes simples. Un nombre connu est égal à un certain nombre de chaï (x). Divise celui-là par le coëfficient de celui-ci, alors le résultat est la quantité inconnue. Ex : Quelqu'un a promis à Zaïd 1000 et la moitié de ce qu'il a promis à Amrou, et à Amrou 1000 moins la moitié de ce qu'il a promis à Zaïd. Pose l'inconnue x, alors Amrou a $1000 - \frac{1}{2}x$, par suite Zaïd a $1000 + 500 - \frac{1}{4}x$, et cela est égal à x. Après *algèbr* 1500 est égal à $(1 + \frac{1}{4})x$, ainsi Zaïd a 1200 et Amrou 400.

La seconde. Des chaï (x) sont égaux à des mâl (x^2). Divise le coëfficient des chaï (x) par le coëfficient des mâl (x^2), le quotient est la quantité inconnue.

Exemple. Des enfants se sont approprié la succession de leur père, qui consistait en un certain nombre de dinars, de sorte que le premier a eu un dinar, le second deux, le troisième trois et ainsi de suite chacun un de plus. Le juge redemanda ce qu'ils avaient pris, et le partagea entre eux en portions égales; alors chacun d'eux en particulier en toucha sept. Combien d'enfants et combien de dinars ? Pose le nombre des enfants x, prends les deux termes extrêmes, c'est-à-dire 1 et x; et multiplie par $^1/_2\, x$, alors il vient $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$, et c'est là le nombre des dinars; car le produit de la somme de l'unité et d'un nombre quelconque par la moitié de ce nombre, est égal à la somme des nombres naturels depuis 1 jusqu'à ce nombre. Maintenant divise le nombre des dinars par x, qui est le nombre des enfants, il doit en résulter 7, comme l'a dit celui qui a posé le problême. Alors multiplie 7 par x, le diviseur, il en résulte $7x = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$, et après *algèbr* et *al mokabalah* $x^2 = 13x$, d'où x est égal à 13, et c'est là le nombre des enfants; multiplie-le par 7, et il y a 91 dinars. — Tu peux encore résoudre ce problême et ceux du même genre, par le moyen de deux fausses positions; si tu poses, par exemple, pour le nombre des enfants, 5, il y a une première déviation de 4, par défaut; puis 9, alors il y a une seconde déviation de 2, pareillement par défaut; le premier résultat est 10, le second 36, leur différence 26 et la différence des déviations 2. — Mais il y a un autre chemin plus facile et plus court, à savoir, que l'on double le quotient, et que le résultat diminué de 1 est le nombre des enfants [43]).

La troisième. Un nombre est égal à des mâl (x^2). Divise le nombre par le coëfficient de mâl (x^2), la racine carrée du quotient est le nombre inconnu. *Exemple* : On a promis à Zaïd la plus grande de deux sommes d'argent, dont le total est 20 et dont le produit est 96. Pose pour l'une des deux $10 + x$, pour l'autre $10 - x$, leur produit est $100 - x^2$, et cela est égal à 96. Après *algèbr* et *al mokabalah*, x^2 est égal à 4 et x est égal à 2; ainsi l'une des sommes est 8, l'autre 12, et c'est celle-ci la somme cherchée, celle qui lui a été promise [44]).

La première des formes composées [45]). Un nombre est égal à des chaï (x) et à des mâl (x^2). Complète la quantité des mâl (x^2) de manière à être un entier, si elle est plus petite, et réduis-la à un seul, si elle est plus grande; modifie le nombre et les chaï (x) dans le même rapport, en divisant tous les termes par le coëfficient du mâl (x^2). Alors élève au carré la moitié du coëfficient de chaï (x), ajoute à cela le nombre, puis retranche de la racine carrée de cette somme la moitié du coëfficient de chaï (x); c'est le reste qui est le nombre inconnu. *Exemple*. On a promis à Zaïd une partie de 10, telle que la somme de son carré et de son produit par la moitié de l'autre partie fasse 12. Pose x, son carré est x^2, et la moitié de l' autre partie $5 - \frac{1}{2} x$; le produit de cette quantité par x est $5x - \frac{1}{2} x^2$; d'où $\frac{1}{2} x^2 + 5x = 12$ et par conséquent $x^2 + 10x = 24$. Nous retranchons la moitié du coëfficient de x, de la racine carrée de la somme faite du carré de la moitié du coëfficient de x et du nombre; il reste 2, et c'est là la partie cherchée, qui lui était promise [46]).

La seconde. Des chaï (x) égalent un nombre et des mâl (x^2). Après avoir complété ou réduit, retranche le nombre du carré de la moitié du coëfficient de x, et ajoute la racine carrée du reste à la moitié du coëfficient, ou retranche-la, le résultat est le nombre cherché. *Exemple* : Un nombre est multiplié par sa moitié, et au produit l'on ajoute 12, et il en résulte le quintuple du nombre. Multiplie x par sa moitié, alors $\frac{1}{2} x^2 + 12$ est égal à $5x$, d'où $x^2 + 24$ est égal à $10x$; soustrais 24 du carré de 5, il reste 1, dont la racine carrée est encore 1; si tu l'ajoutes à 5 ou si tu l'en retranches, il en résulte le nombre cherché [47]).

La troisième. Des mâl (x^2) égalent un nombre et des chaï (x). Après avoir complété ou réduit, ajoute le carré de la moitié du coëfficient de x au nombre, et la racine carrée de la somme à la moitié du coëfficient de x, cette somme est alors le nombre cherché. *Exemple* : Quel est le nombre tel, que si on le soustrait de son carré, et si on ajoute le reste à ce même carré, l'on trouve 10 ? Nous retranchons x de x^2, et nous faisons encore ce qui est prescrit, il en résulte que $2x^2 - x$ égalent 10. Apres *algèbr* et *almokabalah* x^2 devient égal à $5 + \frac{1}{2} x$. Le carré de la moitié du coëfficient de x, ajouté à 5, donne 5 et $^1/_2$ huitième dont la racine est $2^1/_4$, ajoute-lui $^1/_4$, il en résulte $2\,^1/_2$, et c'est là le nombre cherché [48]).

CHAPITRE NEUVIÈME.

RÈGLES INSIGNES ET ARTIFICES SUBTILS, QUE LE CALCULATEUR NE PEUT ÉVITER ET DONT IL LUI EST IMPOSSIBLE DE SE PASSER.

Je me suis borné à douze dans ce compendium [49].

Le première (une de celles mises au jour par ma faible intelligence). Si tu cherches le produit d'un nombre par lui-même et par la somme de tous ceux qui précèdent, ajoute-lui l'unité, et multiplie la somme par le carré de ce nombre; la moitié de ce produit est le nombre cherché. *Exemple*: Nous cherchons le produit de 9 de la manière mentionnée; nous multiplions 10 par 81, et c'est 405 la quantité cherchée.

Le seconde. Si tu cherches la somme des nombres impairs dans leur ordre naturel, ajoute 1 au dernier nombre impair, et carre la moitié de cette somme. *Exemple*: la somme des nombres impairs depuis 1 jusqu'à 9 est 25.

La troisième: La somme des nombres pairs à l'exclusion des impairs; tu multiplies la moitié du dernier nombre pair par le nombre qui la dépasse de 1. *Exemple* : depuis 2 jusqu'à 10; nous multiplions 5 par 6.

La quatrième. La somme des carrés d'après l'ordre de succession: ajoute 1 au double du dernier nombre, et multiplie un tiers de la somme par la somme de ces nombres. *Exemple* : Les carrés de 1 à 6; nous ajoutons au double de 6 l'unité; un tiers de la somme est $4\,{}^{1}/_{3}$; multiplie ceci par la somme des nombres eux-mêmes, c'est-à-dire par 21, le résultat est 91.

La cinquième. La somme des cubes d'après l'ordre de succession: Carre la somme des nombres eux-mêmes dans l'ordre de succession à partir de 1. *Exemple*: Les cubes de 1 à 6; nous carrons 21, c'est 441 le réponse.

La sixième. Si tu cherches le produit des racines carrées de deux nombres qui sont, ou tous deux rationnels, ou tous deux irrationnels, ou bien d'espèce différente, multiplie les nombres l'un par l'autre, alors la racine carrée du résultat est la quantité cherchée. *Exemple*: Le produit des racines carrées de 5 et de 20 est la racine carrée de 100.

La septième. Si tu veux diviser la racine carrée d'un nombre par la racine carrée d'un autre, divise les nombres l'un par l'autre, alors la racine carrée du quotient est la quantité cherchée. *Exemple*. La racine de 100 divisée par la racine de 25 donne la racine de 4.

La huitième. Si tu veux trouver un nombre parfait, c'est-à-dire tel qu'il soit égal à la somme de ses diviseurs, additionne les nombres croissants par voie de duplication à partir de l'unité; alors si la somme n'est mesurée par aucun nombre autre que l'unité, multiplie-la par le dernier des nombres additionnés; le produit est un nombre parfait. *Exemple*: nous additionnons 1, 2 et 4, et nous multiplions 7 par 4, 28 est un nombre parfait.

La neuvième. Si tu veux trouver un nombre carré, qui soit avec sa racine, comme un nombre donné est à un autre nombre donné, divise le premier par le second, alors le carré du quotient est la quantité cherchée. *Exemple* : Un carré qui soit avec sa racine, comme 12 est à 4; le résultat, après que tu as divisé 12 par 4, est 9. Si l'on eût dit : comme 12 est à 9; alors la réponse eût été : $1\,{}^{7}/_{9}$, puisque la racine de cette quantité est $1\,{}^{1}/_{3}$.

La dixième. Si l'on multiplie un nombre quelconque par un autre, et si on le divise par cet autre, après cela si l'on multiplie le produit par le quotient, alors le résultat est égal au carré du premier nombre. *Exemple*: Nous multiplions le produit de 9 par 3 par le quotient qui provient de la division du premier de ces nombres par le second, il en résulte 81.

La onzième; La différence entre deux carrés est égale au produit de la somme des racines par la différence des racines. *Exemple* : La différence entre 16 et 36 est 20 ; leurs racines additionnées font 10 et leur différence est 2.

La douzième. Si l'on divise deux nombres quelconques chacun l'un par l'autre, et que l'on multiplie les quotients entre eux, le produit est toujours l'unité. *Exemple*: Si l'on divise 12 par 8, le quotient est $1\,{}^1/_2$, et l'inverse $\frac{2}{3}$; le produit des deux est 1.

Et qu' Il soit mon aide pour l'achévement !

CHAPITRE DIXIÈME.

PROBLÈMES DÉTACHÉS D'APRÈS DIFFÉRENTES MÉTHODES, QUI AIGUISENT L'INTELLIGENCE DE L'ÉTUDIANT ET LE FORTIFIENT DANS LA RECHERCHE DES INCONNUES.

PREMIER PROBLÈME.

Un nombre est doublé, à cela on ajoute 1, la somme est multipliée par 3, à cela on ajoute 2, cette somme est multipliée par 4, et à cela ou ajoute 3; il en résulte 95.

Par algèbre. Nous faisons ce qui est prescrit, et il vient $24x + 23$ égalent 95. Après l'expulsion de la partie commune, les $24x$ égalent 72; et c'est la première des formes simples; le quotient est 3, et c'est le nombre cherché [50]).

Par fausse position. Nous prenons 2; alors nous dévions de 24 par défaut; ensuite 5, alors nous dévions de 48 par excès. Le premier résultat est 96, le second 120; nous divisons leur somme par la somme des déviations; le quotient est 3.

Par inversion. Nous retranchons 3 de 95, et nous menons l'opération à ce point, que nous divisons 21 par 3, de 7 nous retranchons 1 et nous prenons la moitié du reste.

DEUXIÈME PROBLÊME.

Si l'on dit : partage 10 en deux parties, dont la différence soit 5.

Par algèbre. Pose la plus petite, x; alors la plus grande est $x + 5$, et leur somme $2x + 5$ est égale à 10; après *mokabalah,* x est égal à $2\,{}^1/_2$.

Par fausse position. Nous prenons pour la plus petite, 3, alors la première déviation est 1 par excès; ensuite 4, alors la seconde déviation est 3 par excès; la différence des résultats est 5, et celle des déviations 2.

Par inversion. Comme la différence entre les deux parties d'un nombre est deux fois aussi grande que la différence entre la moitié du nombre et l'une des parties, il s'ensuit que si tu ajoutes la moitié de cette différence à la moitié du nombre, tu obtiens $7\,{}^1/_2$, et que si tu l'en retranches, il reste $2\,{}^1/_2$. [51])

TROISIÈME PROBLÊME.

Nous ajoutons à une somme d'argent son cinquième et cinq dirhems, et nous retranchons de ce qui en résulte son tiers et cinq dirhems, et alors il ne reste rien.

Par algèbre. Pose la somme d'argent x, et retranche de $1\,{}^1/_5\,x + 5$ un tiers de cette somme, il reste ainsi $\frac{4}{5}\,x + 3\,{}^1/_3$; si de cela 5 est retranché, il ne reste rien; cela est donc égal à 5. Après expulsion de la quantité commune, $\frac{4}{5}\,x = 1\,\frac{2}{3}$. Divise $1\,\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$, le quotient est $2\,{}^{1}/_{12}$, et c'est là le nombre cherché [52]).

Par fausse position. Si nous prenons 5, la première déviation est $2\,\frac{1}{3}$ par excès; si nous prenons 2, la seconde déviation est $\frac{1}{15}$ par défaut; d'où le premier résultat est $\frac{1}{3}$, et le second $4\,\frac{2}{3}$. Si nous divisons leur somme par la somme des déviations, c'est-à-dire par $2\,\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$, ce qui est $2\,\frac{2}{5}$, le quotient est alors $2\,\frac{1}{12}$.

Par inversion. Prends le 5 après la soustraction duquel il n'y a plus aucun reste, et ajoute-lui sa moitié, puisque c'était le tiers que l'on retranchait ; alors soustrais de la somme 5, et de ce reste son sixième, puisque c'était le cinquième que l'on ajoutait.

QUATRIÈME PROBLÈME.

Quatre tuyaux conduisent dans un vase, l'un d'eux le remplit en un jour, et chacun des suivants en un jour de plus. En combien de temps est-il rempli ?

Par proportion. Il est hors de doute que les quatre tuyaux, dans un jour, remplissent deux vases égaux au précédent, et en outre encore $\frac{1}{12}$. Ces quantités (1 jour et 2 vases + $\frac{1}{12}$) sont entre elles comme le temps cherché est au vase. L'inconnue est ainsi un des termes moyens; divise donc 1 par $2\,\frac{1}{12}$, le quotient est $\frac{2}{5} + \frac{2}{25}$ $(= \frac{12}{25})$, puisque le diviseur est $\frac{25}{12}$ et le dividende $\frac{12}{12}$.

D'une autre manière. Les quatre remplissent en un jour un vase, qui contient 25 parties, le premier vase contient 12 de ces parties, et chaque partie est remplie en une même partie du jour; d'où il suit que le premier vase est rempli en 12 des 25 parties d'un jour.

Si l'on disait en outre : et en même temps est ouvert en bas un tuyau, qui le vide en 8 jours, il n'y a pas de doute alors que le quatrième tuyau remplit aprésent en un jour $\frac{1}{8}$ du vase; les quatre tuyaux remplissent ainsi en un jour un vase égal au premier et ses $\frac{23}{24}$. Un jour est à ce nombre ($1\,\frac{23}{24}$) comme le temps cherché est au vase. Divise le produit des termes externes par le terme moyen, le quotient est $\frac{24}{47}$.

De l'autre manière. Les quatre remplissent en un jour un vase, qui a 47 parties, dont 24 entrent dans le premier vase. Le reste est clair.

CINQUIÈME PROBLÈME.

Un tiers d'un poisson est enfoncé dans la vase et un quart dans l'eau, et il ressort de l'eau d'une longueur de trois empans; de combien d'empans est-il long ?

Par proportion. Retranche les deux dénominateurs de leur dénominateur commun, il reste 5; et 12 est à 5 comme l'inconnue est à 3; et le quotient, si l'on divise le produit des termes externes par le terme moyen, est $7\,{}^{1}/_{5}$, et c'est-là la quantité cherchée.

Par algèbre c'est clair ; car tu poses x moins ${}^{1}/_{3}\,x$ et moins $\frac{1}{4}\,x$, ce qui est $\frac{1}{4}\,x$ et $\frac{1}{6}\,x$ égal à 3; alors divise 3 par la fraction, et il s'ensuit le résultat précédent.

Par fausse position c'est tout-à-fait clair; car tu poses 12, ensuite 24, alors la différence des résultats est 36 et la différence des déviations 5.

Par inversion, Ajoute à 3 son égal et ses $\frac{2}{5}$, puisque $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ de tout nombre est égal à ce qui reste encore, et aux $\frac{2}{5}$ de ce reste [53]).

Compare avec ceci les problèmes semblables, en considérant le rapport entre les fractions soustraites et ce qui reste du dénominateur général, et ajoute au nombre que celui qui a posé le problème a donné, ce que ce rapport exige. Ce dernier procédé appartient aux particularités de ce Manuel.

SIXIÈME PROBLÈME.

Deux hommes assistaient à la vente d'un cheval. L'un d'eux dit à l'autre : ajoute à ce que j'ai un tiers de ce que tu as, alors j'ai le prix (du cheval); l'autre répondit: ajoute à ce que j'ai un quart de ce que tu as, et alors j'ai le prix. Combien avait chacun d'eux et à combien s'élevait le prix ?

Par algèbre. Pose ce qu'a le premier, x; ce qu'a le second, 3 à cause du tiers; si maintenant le premier prend 1 de ce nombre, il a $x+1$, et c'est là le prix; mais si le second obtient ce qu'il a demandé, il a : $3+\frac{1}{4}x$, et cela est égal à $x+1$. Après *mokabalah* 2 devient égal à $\frac{3}{4}x$ et x égale $2\frac{2}{3}$; le second avait 3, comme il a été dit; le prix est ainsi $3\frac{2}{3}$. Si au lieu des fractions tu prends les nombres entiers, alors le premier a 8, le second 9, et le prix est 11.

Ce problème est indéterminé; pour le résoudre ainsi que ceux analogues, il y a une méthode facile, qui n'appartient pas aux méthodes connues; elle consiste en ceci que, dans chaque cas, tu soustrais 1 du produit des dénominateurs des deux fractions; alors ce qui reste est le prix de l'animal; puis l'un des dénominateurs, et ce qui reste est ce qu'a le premier; ensuite l'autre dénominateur, et ce qui reste est ce qu'a le second. Dans l'exemple soustrais de 12, premièrement 1, puis 4, ensuite 3, les restes sont les trois nombres cherchés [54]).

SEPTIÈME PROBLÈME.

Trois coupes sont remplies, l'une de 4 livres de miel, une autre de 5 livres de vinaigre, une troisième de 9 livres d'eau. Les trois substances sont versées dans un vase et mélangées pour faire de l'oximel; alors on en remplit de nouveau les coupes; l'on demande combien dans chaque coupe il y aura de chaque sorte de substance.

Additionne les poids, et retiens bien la somme; alors multiplie le nombre de livres qui se trouve dans chaque coupe, par chacun des trois poids, et divise le produit par la somme conservée dans ta pensée; le quotient est le poids de ce qui se trouve dans la coupe, de même sorte que le multiplicateur. C'est pourquoi multiplie 4 par lui-même, et divise le produit, comme il est dit ci-dessus, il y a alors dans la coupe de quatre livres $^8/_9$ de livre de miel; ensuite multiplie 4 par 5, etc., et dans cette même coupe il y a 1 livre $^1/_9$ de vinaigre; ensuite par 9, etc., et dans cette même coupe il y a 2 livres d'eau, et le tout ensemble fait 4 livres. Après cela multiplie 5 par lui-même, par 4 et par 9, et fais comme il est enseigné, alors il se trouve dans la coupe de cinq livres, 1 livre $\frac{7}{18}$ de vinaigre, 1 livre $\frac{1}{9}$ de miel, et 2 livres $\frac{1}{2}$ d'eau, ensemble 5 livres. Enfin procède de même avec le 9, et alors il se trouve dans la coupe de neuf livres, 2 livres de miel, 2 livres $^1/_2$ de vinaigre et 4 livres $^1/_2$ d'eau , ensemble 9 livres [55]).

HUITIÈME PROBLÈME.

On demandait à quelqu'un combien il s'était écoulé de la nuit. Il répondit : un tiers du temps écoulé est égal à un quart de celui qui reste encore. Combien s'était-il écoulé de temps et combien en restait-il encore ?

Par algèbre. Pose le temps écoulé x, le reste est $12-x$; d'où $^1/_3$ du temps écoulé est égal à $3-{}^1/_4\,x$. Après application d'*algèbre* $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ du temps écoulé égale 3. Le quotient est $5\,^1/_7$, et c'est là le nombre des heures écoulées; le reste s'élève par suite à 6 heures $\frac{6}{7}$. [56])

Par proportion. Pose le temps écoulé x, le reste 4 heures à cause du quart; alors $^1/_3\, x$ égale 1 heure, d'où x égale 3 heures, et la somme 7. Maintenant 3 est avec 7 dans le même rapport que le nombre inconnu avec 12. Divise donc le produit des termes externes par le terme moyen, alors le quotient est $5\ ^1/_7$.

NEUVIÈME PROBLÊME

Une perche est enfoncée debout dans un étang et ressort de l'eau de cinq coudées. Son bout inférieur restant solidement fixé, elle s'incline jusqu'à ce que sa pointe supérieure touche la surface de l'eau; la distance entre l'endroit, où elle ressortait de l'eau, et l'endroit où sa pointe touche l'eau, est de dix coudées. Quelle est la longueur de la perche ?

Par algèbre. Pose la partie cachée dans l'eau x, alors la perche est $5 + x$; et il est clair qu'après son inclinaison elle est l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dont un côté de l'angle droit est 10 coudées, et dont l'autre est la mesure de la partie enfoncée dans l'eau, c'est-à-dire x. Par conséquent le carré de la perche, c'est-à-dire $25 + x^2 + 10x$, est égal aux carrés de 10 et de x, c'est-à-dire à $100 + x^2$, en vertu de la *figure de la fiancée*. Après l'expulsion de ce qui est commun il reste $10x$ égalent 75, et le quotient est $7^1/_2$, et c'est là la mesure de la partie enfoncée dans l'eau. La perche est donc longue de 12 coudées $^1/_2$. (57)

Pour la résolution de ce problême et des problêmes analogues, il y a encore d'autres méthodes, que tu peux chercher avec leurs démonstrations dans mon livre plus étendu, pour l'achévement duquel puisse Dieu le très-haut me venir en aide ! (58)

CONCLUSION.

Les savants qui sont forts dans cette doctrine, ont rencontré certains problêmes, dont la résolution a fixé leurs méditations, et dont la recherche a attiré leurs regards; ils ont entrepris par toutes sortes d'artifices de soulever le voile, et ont tenté par tous les moyens d'arracher le rideau; mais ils n'ont pu découvrir aucun chemin, ni trouver personne pour leur indiquer la route, personne pour les conduire. Depuis les temps anciens ces problêmes sont demeurés comme insolubles, se montrant rebelles contre tous les génies jusqu'à cette époque. Les savants compétents en ont mentionné quelques-uns dans leurs écrits, et en ont proposé une partie dans leurs recueils, pour prouver que cette science contient des difficultés capables de rebuter, pour réduire au silence ceux-là qui prétendent qu'en matière de calcul il n'est absolument rien qu'ils ne puissent effectuer, pour prévenir les calculateurs de ne pas prendre la peine de chercher la solution, si quelques questions de ce genre leur étaient proposées, et pour exciter à les résoudre et à les dévoiler ceux qui sont doués de brillantes facultés. Aussi je produis dans ce manuel sept de ces problêmes comme modèle, afin de suivre les vestiges de ces hommes d'élite et de marcher sur leurs traces. Ce sont les suivants: (59)

1. — Diviser 10 en deux parties, de telle sorte que si l'on ajoute à chacune d'elles sa racine carrée, et si l'on multiplie les deux sommes l'une par l'autre, il en résulte un nombre donné.

2. — Si l'on ajoute 10 à un carré, alors la somme doit avoir une racine carrée, et si l'on en retranche 10, le reste doit de même avoir une racine carrée.

3. — A Zaïd l' on promet 10 moins la racine carrée de la part d'Amrou, et à Amrou 5 moins la racine carrée de la part promise à Zaïd.

4. — Un nombre cube doit être partagé en deux parties, qui soient aussi des nombres cubes.

5. — 10 est partagé en deux parties. Si nous divisons chacune d'elles par l'autre, et si nous additionnons les quotients, alors la somme est égale à une des deux parties de 10.

6. — Trois carrés en proportion continue, dont la somme soit un carré.

7. — Si à un carré on ajoute sa racine et 2, si ensuite de ce même carré on retranche sa racine et 2, alors on doit pouvoir extraire la racine carrée de la somme et du reste.

Eh bien donc, sache, ô Frère dont le noble cœur aspire après la précieuse richesse des problèmes, que réellement je t' offre dans ce manuel petit à la vérité, mais perle rare des bijoux nuptiaux du Calcul, ce qui n'a été réuni jusqu'à présent ni dans un manuel ni dans un Traité; (60) reconnais donc sa valeur et n'amoindris pas son présent de noces; protège cette œuvre contre chacun de ceux qui n'appartiennent pas à sa famille, et ne l'envoie à personne autre qu'à celui qui souhaite de devenir son époux; ne la donne pas à un vil prétendant, afin que tu n' attaches pas des perles au cou des chiens. Vraiment, le plus grand nombre de ces problèmes sont dignes de conservation et de soin, ils méritent qu' on les cache à la plupart des hommes de ce temps-ci. Garde fermement mon legs avec toi, Dieu te gardera de même. Louanges au Seigneur, qui en a favorisé l'achèvement et m'a fait la grâce d'arriver à la Conclusion.

Fin.

3. — A *Zaïd* l'on promet 10 moins la racine carrée de la part d'Amrou, et à Amrou 5 moins la racine carrée de la part promise à *Zaïd*.

4. — Un nombre cube doit être partagé en deux parties, qui soient aussi des nombres cubes.

5. — 10 est partagé en deux parties. Si nous divisons chacune d'elles par l'autre, et si nous additionnons les quotients, alors la somme est égale à une des deux parties de 10.

6. — Trois carrés en proportion continue, dont la somme soit un carré.

7. — Si à un carré on ajoute sa racine et 2, si ensuite de ce même carré on retranche sa racine et 2, alors on doit pouvoir extraire la racine carrée de la somme et du reste.

Eh bien donc, sache, ô Frère dont le noble cœur aspire après la précieuse richesse des problèmes, que réellement je t'offre dans ce manuel, petit à la vérité, mais perle rare des bijoux nuptiaux du Calcul, ce qui n'a été réuni jusqu'à présent ni dans un manuel ni dans un Traité; (60) reconnais donc sa valeur et n'amoindris pas son présent de noces; protège cette œuvre contre chacun de ceux qui n'appartiennent pas à sa famille, et ne l'envoie à personne autre qu'à celui qui souhaite de devenir son époux; ne la donne pas à un vil prétendant, afin que tu n'attaches pas des perles au cou des chiens. Vraiment, le plus grand nombre de ces problèmes sont dignes de conservation et de soin, ils méritent qu'on les cache à la plupart des hommes de ce temps-ci. Garde fermement mon legs avec toi. Dieu te gardera de même. Louanges au Seigneur, qui en a favorisé l'achèvement et m'a fait la grâce d'arriver à la Conclusion.

Fin.

NOTES.

1) Ces quatre parents du prophète sont : sa fille Fâtime avec son époux Alì, et leurs deux fils Hassan et Hosaïn. On sait que le Persans reconnaissent Alì pour légitime successeur de Mohammed, et sont appelé Chyites ou schismatiques par les Turcs. Behâ-Eddin qui vécut en Perse et mourut à Ispahan, était très-vraisemblablement de la secte des Chyites.

2) Le lecteur du *Kholâçat al hissâb* sera curieux peut-être de trouver ici la préface écrite par Mohammed ben Moussa al Khowarezmî, en tête de son manuel élémentaire d'algèbre, composé dans les premières années du IX.e siècle de notre ère. La voici, d'après la version anglaise de Rosen, faite sur le manuscrit arabe d'Oxford :

« Au nom de Dieu clément et miséricordieux ! Ceci est un ouvrage » écrit par Mohammed ben Moussa de Khowarezm. Il commence ainsi ; bénis- » sons dignement Dieu pour ses bienfaits ! Que des actions de grâces lui soient » rendues pour les faveurs qu'il a réparties sur nous ! En lui offrant nos remer- » ciements, selon ce qu'il a prescrit aux créatures qui l'adorent, nous nous mon- » trons dignes de voir ses faveurs demeurer sur nous ; en reconnaissant son pou- » voir, en nous humiliant devant sa puissance, en révérant sa grandeur, nous » nous préservons de tout abaissement. Il envoya Mohammed (que la bénédiction » de Dieu soit sur lui !) avec la mission d'un prophéte, alors que nul messager » d'en haut n'était depuis long temps apparu, alors que la justice était tombée » dans l'oubli des hommes et que l'on eût vainement cherché parmi eux la vé- » ritable voie de la vie. Par lui il guérit l'aveuglement, par lui il sauva de la » perdition, par lui il fit grand ce qui auparavant était petit, par lui il ras- » sembla ce qui auparavant était dispersé. Louanges à Dieu notre maître ! Que » sa gloire s'étende ! Que tous ses noms soient sanctifiés ! Hors lui il n'y a pas » de Dieu. Que sa bénédiction demeure sur Mohammed le prophète et sur ses » descendants !

» Les savants dans des temps qui sont passés et parmi des nations qui ont » cessé d'exister, étaient constamment employés à écrire des traités sur les dif- » férentes parties de la science, et sur les diverses branches des connaissances » humaines ; ils songeaient à ceux qui devaient venir après eux et ils espéraient » une récompense proportionnée à leur mérite, assurés qu' ils étaient que leurs » efforts seraient reconnus, remarqués et conservés dans la mémoire. Un léger » éloge les contentait, léger en comparaison des peines souffertes et des difficultés » rencontrées dans la révélation des secrets et l'éclaircissement des obscurités de » la science.

» Quelques-uns s'appliquaient à acquérir des connaissances ignorées avant eux, » et les transmettaient à la postérité; d'autres commentaient les passages difficiles des ouvrages laissés par leurs prédécesseurs, en déterminaient le meilleur » sens, ou bien en rendaient l'abord plus facile en les mettant davantage à la » portée des intelligences; d'autres encore découvraient des erreurs dans des ouvrages publiés, mettaient de l' ordre là où il y avait de la confusion, ou » disposaient avec art ce qui était sans règle, corrigeaient enfin les fautes de » leurs frères d'étude, sans montrer d'arrogance à leur égard, sans tirer vanité » de ce qu'ils faisaient eux-mêmes.

» Cet amour pour la science par lequel Dieu a distingué l'Imam Al Mamoun, » le Commandeur des Fidèles (outre le Khalifat qu'il lui transmit par succession » légitime, et dont il lui posa la robe en même temps qu' il le para de tous » les honneurs qui y sont attachés), cette affabilité, cette condescendance qu'Al » Mamoun montre pour les savants, ce zèle empressé qu'il met à les aider, à » les assister quand il faut éclaircir une obscurité, lever une difficulté, m'ont encouragé à composer un petit ouvrage sur le *calcul par gebr et mokabalah*, » dans lequel je me borne à donner ce qu'il y a de plus aisé et de plus utile » dans le calcul, ce dont les hommes ont constamment besoin dans les cas d'héritage, de donation, de partage, de procès, de négoce, dans toutes leurs relations » mutuelles, lorsqu'il s'agit de mesurer les terres, de creuser des canaux, etc. etc.

» Me reposant sur la bonté de mon intention, j'espère que les savants me » récompenseront en obtenant pour moi par leurs prières l'excellence de la merci » divine ; en reconnaissance de quoi je demande à Dieu de répandre sur eux » l'essence de ses bénédictions et les flots de sa libéralité. Ma force est en Dieu; » en ceci comme en toute chose, c'est en Lui que je mets ma confiance. Il est » le maître du Sublime Trône. Puisse sa bénédiction descendre sur tous les Pro- » phètes et Messagers célestes ! . »

3) Les Grecs disaient λογοὶ et ἀλογοὶ, effables et ineffables, ou si l'on veut exprimables et inexprimables. Comme λογος signifie en même temps raison, les Latins ont traduit par *rationnels* et *irrationnels* et nous leur aurons emprunté ces deux dénominations. — Voir l'origine des expressions *rationnel* et *irrationnel*, expliquée par Kepler (tome I, page 101 du Journal de Mathématiques de M. Liouville).

4) On sait que les Anciens comptaient avec les doigts de la main gauche jusqu'à 99, et avec ceux de la main droite les nombres au dessus de 100. On lit dans le 37.e livre *de hieroglyphicis* de Pierio Valeriano, l'auteur qui paraît avoir le mieux traité cette matière, que pour marquer le nombre 6, les anciens pliaient le quatrième doigt, le *medicus* des Latins, celui que nous appelons annulaire, et étendaient les autres. Macrobe, au livre VI.e chapitre 13.e des Saturnales, recherchant pour quelle raison l' anneau se met dans ce doigt medicus, plutôt que dans tout autre doigt de la main, entre autres causes donne celle-ci : « *C'est,* » dit-il, *parce que les anciens figuraient avec ce doigt le nombre* 6 ; *que* 6 » *est le premier des nombres parfaits*, *et que les nombres parfaits* étant grandement célébrés pour les propriétés excellentes et singulières qu' on trouvait » en eux à l'exclusion des autres nombres, on récompensa le doigt qui dénote

» un nombre si excellent, en le couronnant avec l' anneau. » Cette note est extraite d'un passage d'un ouvrage fort curieux de Juan Perez de Moya, imprimé à Alcala de Henarez, eu 1573, et intitulé: *Tratado de Mathematicas*. L'auteur espagnol, parlant de l'algèbre ou plutôt du calcul algébrique, s' exprime ainsi, livre II, chap. 1. : « La arithmetica practica dividese en *Arte mayor* y en me- » nor. *Arte mayor dizen a la regla de la Cosa o Algebra.* Arte menor dizen » a las reglas necessarias a la contratacion de la humana vida. »

5) Non seulement Behâ-Eddin, mais tous les auteurs, arabes et persans, qui ont écrit sur la science du calcul, regardent les Hindous comme les inventeurs des figures numérales de l'échelle décimale. Le passage suivant a été extrait par M. Strachey, (Asiatic Researches, T. XII) d'un traité d'arithmétique persan: « Les sages de l'Inde voulant représenter convenablement les nombres, inventè- » rent les neuf figures connues. Quand une figure occupe la première place à » droite, elle est regardée par eux comme exprimant les unités; la deuxième, les » dixaines; la troisième, les centaines; la quatrième, les mille; ainsi après le troi- » sième rang, la première figure qui suit immédiatement représente les unités de » mille, la deuxième les dixaines de mille, la troisième les centaines de mille » et ainsi de suite. En conséquence, toute figure au premier rang vaut le nom- » bre d'unités qu'elle exprime, toute figure au second rang vaut le nombre de » dixaines que sa forme indique, au troisième rang le nombre des centaines, et » ainsi de suite. Quand une figure est vacante à l'un des rangs, l'on écrit un » chiffre semblable à un petit cercle, pour conserver sa place. »

A cause de la similitude du chiffre cinq et du petit cercle choisi primitivement par les Hindous, comme symbole du vide, les Arabes, les Persans, les Malays, etc. marquent le zéro par un point. Bien que les figures numérales tracées primitivement par les Hindous, transmises aux Arabes et adoptées ensuite par les nations de l'Europe, aient subi de grandes altérations dans les temps et dans les lieux, quelques-unes d'entre elles sont encore aisément reconnaissables, particulièrement 1, 2, 3, 9. La transformation du 6, qu'on était exposé à confondre parfois avec le 9, s'explique et se justifie également bien. Mais là où nous constaterons une analogie frappante et décisive, c'est dans la numération parlée, c'est dans le tableau des dix premiers noms de nombre, dans les langues sanscrite, grecque, latine, espagnole, française, anglaise, allemande et russe:

1. Ana - Eis, Enos - Unus - Uno - Un - One - Eins - Od - Ine.
2. Dvi, - Duo - Duo - Dos - Deux - Two - Zwei - Dva.
3. Tri, - Treis - Tres - Tres - Trois - Three - Drei - Tri.
4. Tchatour, - Tessares - Quatuor - Quatro - Quatre - Four - Vier - Tchetyre.
5. Pantchan, - Pente - Quinque - Cinco - Cinq - Five - Funf - Piat'.
6. Schasch, - (S) Ex - Sex - Seis - Six - Six - Sechs - Schest'.
7. Saptan, - Epta - Septem - Siete - Sept - Seven - Sieben - Cem'.
8. Aschtan, - Octo, - Octo, - Ocho - Huit - Eight - Acht - Vocem'.
9. Navan, - Ennéa - Novem - Nueve - Neuf - Nine - Neun - Deviat'.
10. Dasan, - Déca - Decem - Dies - Dix - Ten - Zehn - Deciat'.

6) *Balance* est la traduction littérale du mot arabe *myzân* qui se trouve dans le texte. Nous avons préféré ce mot au mot *norm* adopté par le docteur Nessel-

mann. M. Taylor de Bombay dit positivement que les Arabes appellent *balance*, la preuve par 9 qu'ils appliquent aux règles de l'arithmétique, (Voyez histoire de l'astronomie ancienne de Delambre, dernier chapitre). Il est vrai que selon lui le terme technique est *taràzou* et non *myzân*, mais taràzou est plutôt persan qu'arabe.

7) L'auteur appelle *nombre simple*, non seulement le nombre qui n'a qu'un chiffre, mais encore le produit d'un nombre d'un chiffre par une puissance quelconque de 10, tandis que le *nombre composé* est celui qui est formé de plusieurs chiffres significatifs.

8) M. Strachey trouvait cette règle remarquable en ce que son application a quelque point de ressemblance avec l'usage des tables de logarithmes; mais selon Delambre, ce n'est rien autre chose que la méthode des fonds substitués aux analogues, qu'il a expliquée dans son arithmétique de Grecs.

9) Ces deux règles curieuses d'invention et d'application facile supposent que la table de multiplication n'a pas été apprise préalablement par cœur, ou tout au moins qu'on n'a pas appris les produits de deux nombres d'un seul chiffre, quand ces nombres sont compris l'un et l'autre entre 5 et 10. Nous devons remarquer ici que cette table n'est point figurée dans le texte arabe, elle existe seulement dans la traduction persane avec commentaires qui a été faite du Kholâçat al hissâb, par Maulawi Rouschen Ali, et imprimée à Calcutta, en 1812, par P. Pereira, à la presse hindoustâni. La voici, telle qu'on l'y rencontre, nos chiffres européens substitués aux chiffres arabes ou persans.

							2	
						3	4	2
					4	9	6	3
				5	16	12	8	4
			6	25	20	15	10	5
		7	36	30	24	18	12	6
	8	49	42	35	28	21	14	7
9.	64	56	48	40	32	24	16	8
81	72	63	54	45	36	27	18	9

10) Cette règle qui peut être utile dans la pratique, pour le calcul de tête, est fondée sur l'égalité :

$$a \times b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

11) On observera que l'inspection du *chabakah* (réseau ou filet) suffit pour montrer que le nombre des chiffres d'un produit de deux nombres entiers, a pour maximum la somme des nombres de chiffres des deux facteurs, et pour minimum cette somme diminuée de 1. L'usage de cette table ressemble à celui des bâtons de Neper. Suivant M. Taylor de Bombay, cette méthode est enseignée

dans toutes les écoles de l'Inde. On en rencontre un spécimen dans le commentaire sur le Lilavâti de Bhascara-Acharya, composé par le géomètre hindou Ganésa. On la retrouve dans la plupart des anciens ouvrages d'arithmétique français, italiens, espagnols, etc.

12) Pour nous qui écrivons de gauche à droite, c'est le second chiffre au lieu de l'avant-dernier, ceci doit être observé une fois pour toutes.

13) Cette règle mérite d'être remarquée. Elle suppose l'égalité approximative

$$\sqrt{a^2+\varepsilon} = a + \frac{\varepsilon}{2a+1},$$

d'où

$$a^2+\varepsilon = a^2+\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2a+1}\left(1-\frac{\varepsilon}{2a+1}\right).$$

Or, dans la pratique, $\varepsilon < 2a+1$; d'où il suit que l'on obtient pour la racine cherchée, une erreur toujours par défaut. Le maximum d'approximation a lieu pour $\varepsilon = 1$ et $\varepsilon = 2a$; dans ces deux cas, la valeur trouvée pour le carré est trop petite de $\frac{2a}{(2a+1)^2}$. Plus ε s'écarte de ces deux limites, et plus l'erreur est grande. Nous devons observer qu'elle sera toujours la même, soit que l'on pose

$$\varepsilon = 1+n \quad \text{ou} \quad \varepsilon = 2a - n.$$

Le commentateur et traducteur Maulawi Rouschen Ali donne une seconde formule

$$\sqrt{a^2+\varepsilon} = a + \frac{\varepsilon}{2a}$$

qui fournit une approximation toujours par excès. Si nous employons simultanément ces deux formules à la recherche de la racine carrée de 37 par exemple, nous voyons que $\sqrt{37}$ sera comprise entre $6+\frac{1}{13}$, approximation par défaut fournie par la première, et $6+\frac{1}{12}$, approximation par excès fournie par la seconde.

14) Ici il y a erreur, car il peut fort bien arriver que le reste soit égal et même supérieur au carré soustrait. Supposons par exemple que la dernière tranche, à gauche du nombre proposé soit 8. Le carré que l'on en devra soustraire est 4, et le reste sera également 4. Voilà donc un cas qui prouve que le reste peut égaler le carré soustrait. Si maintenant nous supposons que la dernière tranche à gauche soit 3, *le plus grand nombre cherché sera* 1, et nous aurons alors un reste double du carré soustrait. Ce qui prouve, en second lieu, que le reste peut surpasser en valeur le carré soustrait. Il serait juste d'ajouter pourtant, en ce qui concerne ce second cas, si l'on voulait prendre la défense de Behâ Eddin, qu'il a déclaré formellement dans son Introduction que « l'unité n'est pas un » nombre ».

15) La langue arabe n'a de noms simples que pour les fractions dont le dénominateur ne contient que les nombres entiers depuis 2 jusqu'à 10. De là, pour cette classe de fractions, le nom de *fractions articulées*. Quant aux autres fractions, qui portent le nom de *muettes*, elles doivent s'exprimer à l'aide des *ar-*

ticulées. Les premières, si je puis parler ainsi, jouent le rôle des voyelles, et les secondes, le rôle des consonnes.

Quand un dénominateur a une valeur plus grande que 10, les Arabes le décomposent en facteurs tous moindres que 11, si cela est possible. Quand cela n'est pas praticable, ils décomposent néanmoins le dénominateur en ses facteurs quelconques, et lisent l'expression qui en résulte, de la même manière que ce que nous appelons fractions de fractions.

16) Ce paragraphe suppose l'année de 360 jours, le mois de 30 jours et la semaine de 7. Cette année n'existe pas chez les Arabes, qui ont l'année lunaire de 354 et 355 jours, mais bien chez les Persans, en faisant abstraction toutefois de leurs cinq jours supplémentaires pour compléter l'année solaire. On sait que notre auteur vécut et mourut en Perse.

La lettre *aïn* de l'alphabet arabe se rencontre dans les noms arabes des nombres 4, 7, 9 et 10, qui sont ; arb*á*h, seb*á*a, tess*á*ah, *á*cherah.

17) Le dirhem ou derhem est le même mot que dragme ou drachme. Mais il y avait différentes sortes de dirhems chez les Arabes, de même qu'il existait différentes sortes de drachmes chez les Grecs: on ne saurait donc établir ici le rapport du dirhem dont il s'agit à toute autre unité monétaire.

18) Mohammed ben Moussa Alkhowarezmî, dans le chapitre de son algèbre intitulé : *des transactions mercantiles*, débute ainsi : « vous savez que toutes les » transactions mercantiles, telles que ventes, achats, échanges et louages compren- » nent toujours deux notions et quatre nombres qui sont établis par l'enquéreur, » savoir : mesure, prix ; quantité, somme ou valeur. » Puis il fait voir que ces quatre nombres peuvent toujours être considérés comme les quatre termes d'une proportion, dont trois seront connus, le quatrième étant à déterminer. Le premier des exemples qu'il propose, est énoncé ainsi qu'il suit ; « Si l' on vous dit 10 » pour 6, combien pour 4 ? » On remarquera que le troisième et dernier exemple donné par Behâ Eddin n'est autre que celui de Mohammed ben Moussa, ou plus exactement que la proportion $5 : 3 :: x : 2$ de Behâ Eddin n'est autre que celle de Mohammed ben Moussa $10 : 6 :: X : 4$ à laquelle elle devient identique, quand tous ses termes sont doublés.

19) La suite des opérations à effectuer, indiquées par l'auteur dans cette dernière question, a besoin d'une courte explication.

Le problème mis en équation donne :

$$\left(x + \frac{x}{2} + 4\right) + \frac{1}{2}\left(x + \frac{x}{2} + 4\right) + 4 = 20$$

ou

$$\frac{3}{2}\left(x + \frac{x}{2} + 4\right) = 16$$

$$x + \frac{x}{2} + 4 = 10\,\frac{2}{3}, \quad \frac{3}{2}\,x = 6\,\frac{2}{3}$$

$$x = 6\,\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\left(6\,\frac{2}{3}\right) = 4\,\frac{4}{9}.$$

Le docteur Nesselmann s'est trompé par mégarde en mettant ce problème en équation. Aussi arrive-t-il à l'équation $\frac{1}{2}x + 4 = 10\frac{2}{3}$ qui lui aurait donné la valeur $x = 13\frac{1}{3}$ au lieu de $x = 4\frac{4}{9}$, s'il en avait dégagé l'inconnue.

20) Ces dix noms de la ligne droite sont d'après le scholiaste : 1.° le côté (du carré, ou racine, latus primum), 2.° la jambe, 3.° la chute de la pierre (verticale), 4.° la hauteur, 5.° la base, 6.° le côté (proprement dit), 7.° le diamètre ou diagonale, 8.° la corde, 9.° le flèche, 10.° l'élévation ou hauteur (seulement dans la stéréométrie).

21) Behâ Eddin divise la ligne courbe en ligne circulaire qui est connue, et en courbe non circulaire dont il n'a point à s'occuper dans son *Kholâçat al hissâb*. Il est à remarquer qu'il ne définit point la circonférence, et que Mohammed ben Moussa, dans la partie géométrique de son algèbre, s'en abstient également. Dans les ouvrages des mathématiciens hindous, Brahmagupta et Bhascara-Acharya, que six siècles environ séparent l'un de l'autre, on ne voit pas de définition du cercle, et Ganésa le commentateur de Bhascara explique cette absence de définition, en disant que le cercle et l'arc n'ont pas besoin d'être définis.

22) Ni Mohammed ben Moussa, ni Behâ Eddin n'emploient de mot unique équivalent à notre mot *rayon*. Ils mentionnent toujours le diamètre, et pour exprimer le rayon, ils disent invariablement demi-diamètre. Les Hindous ont un mot, *carcata*, ouverture de compas, littéralement écrevisse, pour désigner le rayon (p. 90 du Lilavâti de Bhascara Acharya, traduit par Colebrooke).

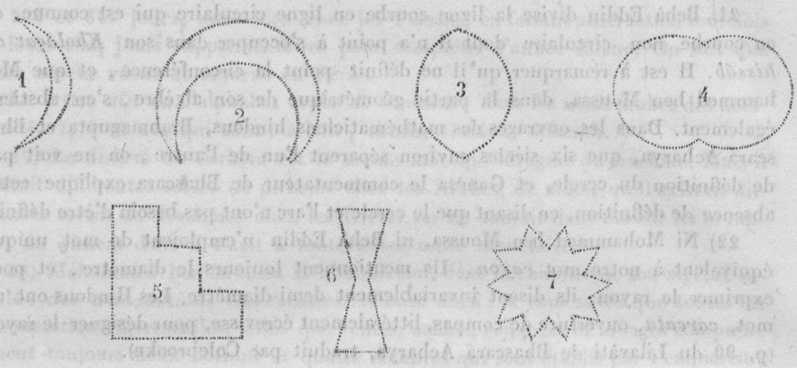
23) Pour Behâ Eddin le trapèze est un quadrilatère avec angles et côtés inégaux. Le célèbre commentateur d'Euclide, Nasr'Eddin parle aussi de trapèzes, et ces quadrilatères n'ont point de côtés parallèles. Le mot trapèze, qui répond à la dénomination sanscrite *rischama chatourasra* s'applique chez les Hindous au tétragone qui a ses quatre côtés inégaux. C'est la signification que lui donne aussi Euclide (définition 34.e du 1.er livre); c'est celle que lui ont toujours conservée les Anglais. Le mot trapèze a pris la signification qu'il a aujourd'hui en France seulement vers la fin du XVIII.e siècle; jusque là, parmi nous, il avait eu celle que lui donne Euclide.

Suivant Maulawi Rouschen Ali, le *trapèze à une pointe* est le trapèze à bases parallèles avec deux angles droits, et le *trapèze à deux pointes* n'est autre que le trapèze à bases parallèles, avec deux angles obtus adjacents à l'une d'elles et deux angles aigus adjacents à l'autre. A l'égard du trapèze, gratifié du nom de *Concombre*, Maulawi Rouschen Ali s'exprime ainsi: « on ne trouvera dans aucun » livre une description de cette sorte de trapèze, pour éclaircir ce point; Dieu » peut-être le fera connaître dans un temps à venir. » Le docteur Nesselmann avoue n'être pas mieux instruit que Rouschen Ali sur la nature du Concombre, et je dois confesser à mon tour ma complète ignorance à cet égard.

24) Nous trouvons de même chez les Hindous les figures suivantes citées par Srid'hara, Souryadassa et Gangad'hara. On peut en faire le curieux rapprochement avec les figures planes de Behâ Eddin : le *gadja-danta* ou dent d'éléphant, que l'on peut traiter comme un triangle; le *balendou*, ou le croissant, qui peut être considéré comme composé de deux triangles; le *yava*, ou grain d'orge, (len-

tille convexe), traité comme consistant soit en deux triangles, soit en deux segments; le *némi* ou jante de roue, considéré comme un quadrilatère; la *vadja* ou la foudre, traitée comme comprenant deux triangles, suivant Souryadasa, ou un quadrilatère avec deux segments ou deux trapèzes, suivant Gangad'hara, ou bien encore deux quadrilatères, suivant Srid'hara; la *sanch'ha* ou conque; le *mridanga* ou grand tambour, et beaucoup d'autres encore.

Voici d'ailleurs, d'après Maulawi Rouschen Ali, quelles sont les figures de la lune, du fer à cheval, du myrobolan, du navet, du gradin, du tambour et de la figure à pointes :



25) Behâ Eddin regarde la pyramide comme dérivant du cône, et le prisme comme dérivant du cylindre; par la seule hypothèse que la base, de circulaire qu'elle était, devient polygonale, ces deux corps ronds deviennent des corps angulaires. Cette assimilation a encore un caractère plus frappant chez les Hindous, qui, pour désigner le cylindre et le prisme, emploient la dénomination de *sama-châta* (solide régulier, à côtés égaux), et rangent les pyramides en même temps que les cônes sous le nom commun de Souchî-châta (solides aigus). Stance 217 du Lilavâti de Bhascara Acharya.

26) Mohammed ben Moussa et Behâ Eddin ne définissent ni l'un ni l'autre le triangle dont ils reconnaissent trois espèces : triangle rectangle, triangle obtusangle, triangle acutangle; ils énoncent la propriété caractéristique qui distingue chacune de ces espèces de triangles, en donnant la valeur du carré du côté opposé à l'angle droit, à l'angle obtus, puis à l'angle aigu.

Ganésa, le commentateur déjà cité du Lilavâti, énonce la définition générale du triangle ainsi qu'il suit : « le triangle est une figure qui contient trois angles » et consiste en autant de côtés. » Ce même géomètre hindou donne une démonstration directe et bien simple du théorème qui exprime la surface du triangle en fonction de sa base et de sa hauteur. Il trace un rectangle qui a même base que le triangle, et pour hauteur la moitié de la hauteur du triangle. L'inspection de la figure fait reconnaître tout d'abord que la surface du triangle est équivalente à celle du rectangle, d'où, l'on conclut que l'aire du triangle est égale au produit de sa base par la moitié de sa hauteur.

27) Appelons a la base, b le côté moyen et c le plus petit côté. Nous aurons alors :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a.x$$

$$2ax = a^2 + c^2 - b^2$$

$$x = \frac{a}{2} - \frac{b^2 - c^2}{2a}.$$

Or

$$b^2 - c^2 = (b+c)(b-c),$$

donc

$$x = \frac{a}{2} - \frac{(b+c)(b-c)}{2a}.$$

Si, dans cette formule, on fait $b = c$, auquel cas le triangle est isocèle, on voit immédiatement que $x = \frac{a}{2}$.

28) Si l'on appelle la base a et la hauteur x, l'aire du triangle est $\frac{ax}{2}$.

Mais

$$x^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4},$$

d'où

$$x = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$$

donc

$$\frac{ax}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^4}{16}}, \text{ c. q. f. d.}$$

Dans la partie géométrique de son algèbre, Mohammed ben Moussa n'a point donné la formule particulière qui convient à la surface du triangle équilatéral. Il s'est contenté de donner le moyen général de mesurer un triangle quelconque (le produit de la hauteur par la moitié de la base), quoiqu'il connût non seulement la formule $S = \sqrt{\frac{3a^4}{16}}$, mais encore celle de la surface d'un triangle quelconque en fonction de ses trois côtés, qu'employaient les mathématiciens hindous. Une règle unique, applicable à tous les cas, lui parut sans doute suffisante pour une sorte de manuel abrégé, qu'il composait non point en vue des géomètres, mais en vue d'un public peu versé dans les sciences.

29) Mohammed ben Moussa énonce ainsi la mesure de tout quadrangle équilatéral : le produit d'un des deux diamètres par la moitié de l'autre est égal à l'aire du quadrangle équilatéral. Nous venons de voir que Behâ Eddin, quand il donne la mesure du polygône régulier d'un nombre pair de côtés, a soin d'ajouter ces mots : « or, le diamètre est la ligne qui joint les points milieux de deux côtés opposés. » Pour Behâ Eddin c'est le diamètre du cercle inscrit au polygône; pour Mohammed ben Moussa, diamètre est synonime de diagonale. Nous avons vu en effet que les Arabes n'avaient qu'un seul et même mot pour désigner le

diamètre et la diagonale, et que ce mot était l'un des dix noms attribués à la ligne droite (note 2).

30) Formuler la mesure de la surface du cercle, en disant qu'il faut retrancher du carré du diamètre son septième et son demi-septième, cela revient à dire que la surface du cercle est égale à $\frac{11}{14}$ D² ou $\frac{22}{7}$ R².

Mohammed Ben Moussa énonce la même règle à peu près dans les mêmes termes : « Si vous multipliez, dit-il, le diamètre d'un cercle par lui-même, et » que vous retranchiez du produit un septième et un demi-septième de ce même » produit, alors le reste est égal à l'aire du cercle. » Mais il ne se borne pas à cette règle, comme Behâ Eddin, il en donne deux autres empruntées des Hindous. Voici comment il s'exprime : « Dans un cercle, le produit de son diamètre par » $3\frac{1}{7}$ sera égal à la circonférence. C'est la règle généralement employée dans les » usages de la vie pratique, quoiqu'elle ne soit pas tout à fait exacte. Les ma- » thématiciens hindous ont deux autres méthodes. Une d'elles consiste en ceci, » que vous multipliez le diamètre par lui-même, puis par 10, et qu'enfin vous » prenez la racine du produit. Cette racine sera la circonférence. Les astronomes » se servent de l'autre méthode. La voici: Vous multipliez le diamètre par 62832 » et divisez le produit par 20000; le quotient est la circonférence. Les deux mé- » thodes conduisent à très peu près au même résultat. »

Ainsi nous avons, d'après Mohammed ben Moussa, trois valeurs distinctes du rapport de la circonférence au diamètre, trois formules différentes. La première donne $\pi = \frac{22}{7}$, c'est le rapport d'Archimède. La seconde donne $\pi = \sqrt{10}$, et la troisième, celle en usage parmi les astronomes et la plus exacte des trois, donne $\pi = \frac{62832}{20000}$; ces trois valeurs sont en décimales :

1.° 3, 1428 . .

2.° 3, 16227 . . .

3.° 3, 14160 . . . .

Pour obtenir une plus grande approximation que cette dernière, il faut se servir du rapport $\pi = 3,\ 1415926 \ldots\ldots$ La première et la troisième formule se trouvent dans le Lilavâti de Bhaschara Acharya. Cet auteur donne la première comme bonne dans la pratique, quand on n'a pas besoin d'une grande approximation, et la dernière est présentée par lui, sous la forme plus simple à laquelle elle est réductible, en divisant par 16 les deux termes du rapport,

$$\text{Circ} = \frac{3927}{1250}\,D.$$

Quant à la seconde formule circ $= \sqrt{10 D^2}$, elle se trouve dans le Ganita d'hyaya de Brahmagupta, §. 40. Nous croyons devoir rectifier à cette occasion l'erreur que commet M. Rosen, quand il dit dans sa traduction de l'algèbre de Mohammed ben Moussa, que cette seconde formule se rencontre dans le Vija Ganita, p. 308 et 309. Pour le lecteur qui n'aurait pas l'ouvrage de l'illustre Colebrooke entre les mains, et ne pourrait se porter aux pages désignées, cette erreur ne serait pas indifférente, car elle ferait croire que c'est Bhascara, l'auteur du Vija Ganita, qui emploie cette formule, tandis que c'est Brahmagupta, antérieur de près de 600 ans, et qui ne paraît pas en avoir employé de plus approchée.

On lit aussi les lignes suivantes, à la page 446 du savant et précieux ouvrage de M. Chasles, intitulé *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géometrie*, « Il paraît, d'après le texte anglais. que Brahmegupta a » regardé cette expression ($\sqrt{10}$), comme étant le rapport *exact* de la circonfé- » rence au diamètre. Chaturveda, dans ses notes, semble le croire ainsi. Cela » ne nous étonne point de la part de ce scoliaste ; mais il est difficile de pen- » ser qu'un géomètre qui a été capable d'écrire sur la théorie du quadrilatère » inscrit au cercle, et de résoudre les questions que nous avons trouvées dans » l'ouvrage de Brahmegupta, ait commis cette faute. Il est vrai que la quadra- » ture du cercle a été aussi l'écueil d'un grand nombre de géomètres modernes, » qu'elle a entraînés dans des erreurs semblables, quoique plusieurs d'entre eux » eussent donné des preuves d'un véritable et profond savoir en mathématiques. » Il nous suffira de citer Oronce Finée et Grégoire de S.t Vincent. L'expression » $\sqrt{10}$ est précisément le rapport que J. Scaliger disait avoir trouvé le premier, » et croyait avoir démontré géométriquement ; mais on connaissait depuis long » temps en Europe cette expression, qu'on savait n'être qu'approchée. On l'at- » tribuait aux Arabes ou aux Indiens, et l'on supposait que ces peuples l'avaient » regardée comme exacte. »

La présence simultanée des trois valeurs de π et le langage de Mohammed ben Moussa prouvent suffisamment que les Arabes ne regardaient point $\sqrt{10}$ comme la valeur exacte du rapport. Voici une note marginale du manuscrit d'Oxford, faite sur le passage qui nous occupe (voy. la traduction de l'algèbre de Mohammed ben Moussa par Rosen, p. 200) : « Cela est une approximation, » non pas l'exacte vérité; personne ne peut fixer l'exacte vérité de ceci, et trouver » la circonférence réelle, excepté Celui qui sait tout : car la ligne n'est pas droite » de manière à ce que son exacte longueur puisse être trouvée. Cela est appelé » une approximation, de la même manière que l'on dit des racines carrées des » nombres irrationnels, qu'elles sont une approximation et non pas l'exacte vé- » rité; car Dieu seul sait quelle est la racine exacte. Le meilleure méthode ici » donnée, c'est de multiplier le diamètre par 3 et $\frac{1}{7}$: car elle est la plus aisée » et la plus expéditive. Dieu sait mieux ! »

Quant aux Hindous, croyaient-ils $\sqrt{10}$, le rapport exact ? Du temps de Bhascara évidemment non, car des trois valeurs du rapport, la valeur $\sqrt{10}$ seule, n'est pas mentionnée par Bhascara, bien qu'elle se rencontre dans Brahmagupta. Arya-Bhatta le plus ancien algébriste hindou connu, à peu près contemporain de Diophante, se servait de la valeur $\sqrt{10}$ et de la valeur plus approchée $\pi = \frac{22}{7}$, que l'on ne rencontre pas dans Brahmagupta, mais qui fut adoptée plus tard par Bhascara. Au temps d'Arya Bhatta, comme au temps de Bhascara, c'est-à-dire avant et après l'époque où vécut Brahmagupta, les Hindous ne crurent donc pas posséder dans $\sqrt{10}$ le rapport exact de la circonférence au diamètre. Pour donner en passant une idée des connaissances algébriques d'Arya Bhatta, il suffit de dire qu'il résolut l'équation du premier degré à deux inconnues, en nombres entiers, par une méthode semblable à celle de Bachet de Meziriac, qui a paru en Europe pour la première fois en 1624. Ce qui a fait pencher à croire que Brahmagupta regardait peut-être $\sqrt{10}$ comme la valeur exacte du rapport de la circonférence au diamètre, c'est l'expression anglaise *neat value*, appliquée à ce rapport, et que l'on a traduite à tort par *valeur exacte*, *vraie*, car ce n'est point là sa signification. Probablement même il s'est glissé dans ce mot *neat* une erreur typographique, et c'est *near value* (valeur approchée) qu'il faudrait lire.

31) Mohammed ben Moussa donne la même mesure du secteur circulaire, mais il indique en outre le moyen de trouver le diamètre d'un cercle dont on connaît un arc, ainsi qu'il suit : « Multipliez la moitié de la corde par elle-même, divisez par la flèche, et ajoutez la quotient à la flèche ; la somme est le diamètre du cercle auquel cet arc appartient. » Pour trouver le diamètre, il suffit évidemment de déterminer ce qu'Arya Bhatta appelle le grande flèche, et pour cela faire, d'appliquer le théorème que ce savant hindou énonce ainsi : « dans un cercle, le produit des flèches est égal au carré de la demi-corde des deux arcs. » Si f désigne la petite flèche et c la demi-corde, $\frac{c^2}{f}$ sera la valeur de la grande flèche, et $\frac{c^2}{f}+f$ sera la valeur du diamètre. Brahmagupta, dans la 41.e stance de son Ganita d'hyaya s'exprime ainsi : « le carré de la corde, divisé par quatre fois la flèche, et ajouté à la flèche, est le diamètre. » Bhascara donne le même énoncé que Mohammed ben Moussa : « le carré de la demi-corde étant divisé par la flèche, le quotient ajouté à la flèche est *prononcé* le diamètre du cercle. » Le commentateur Ganésa observe que *prononcé* signifie : *ainsi déclaré par les anciens*. Arya Bhatta et Brahmagupta sont considérés comme des anciens par les commentateurs de Bhascara. Nous rapporterons encore ici la règle suivante, citée par Ganésa, d'après Arya Bhatta, pour trouver la valeur de l'arc lui-même en fonction de sa corde et de sa flèche : « Six fois le carré de la flèche étant ajouté au carré de la corde, la racine carrée de la somme est l'arc. »

32) Mohammed Ben Moussa mesure la surface du segment circulaire, ou comme il dit, l'aire de l'arc, de la même manière que Behâ Eddin. Les mathématiciens hindous, outre la méthode de nos deux auteurs arabes, en emploient d'autres encore. Colebrooke, dans la traduction du Lilavâti, page 96, reproduit la règle formulée dans le Ganita Sâra (traité analytique dela flèche) de Vichnou, telle qu'elle est rapportée par Gangadhara et enseignée par Césava, père du commentateur Ganésa, dans les termes suivants : « La flèche étant multipliée par la demi-somme de la corde et de la flèche, et $\frac{1}{20}$ du produit étant ajouté à ce produit, la somme est l'aire du segment. » Cette règle peut donc se traduire par la formule :

$$\text{Segment} = \frac{21}{20} f \left(\frac{c+f}{2}\right)$$

f désignant la flèche et c la corde du segment du cercle à mesurer. Cette formule, pour le cas particulier $f = \text{R}$, où le segment devient égal au demi-cercle, donne la valeur $\frac{63}{40}\text{R}^2$, ou pour le cercle entier la valeur $\frac{63}{20}\text{R}^2$. Il est permis de supposer que $\frac{63}{20}$ n'est que la forme abrégée de la valeur $\pi = \frac{62832}{20000}$, employée par les astronomes hindous, comme nous l'avons vu précédemment.

Ganésa cite une autre formule qu' il emprunte à Srid'hara, et qui ne diffère de celle ci-dessus que par le coëfficient numérique $\frac{\sqrt{10}}{3}$ au lieu de $\frac{21}{20}$. Dans le cas particulier de $f = \mathrm{R}$, on obtient ainsi par cette formule cercle $= \mathrm{R}^2 \sqrt{10}$ on $\pi = \sqrt{10}$, c'est-à-dire la seconde des trois valeurs mentionnées dans la note 30.

33) Ici il y a confusion dans les termes de l'énoncé de la règle à suivre pour trouver le volume de la sphère. Il convient de le rectifier ainsi qu'il suit : *retranche du cube du diamètre ses trois quatorzièmes*, puis *du reste le tiers de ce reste lui-même*. Cette règle coïncidera parfaitement alors avec la formule

$$\text{Vol. sphériq.} = \frac{1}{6}\,\pi.\mathrm{D}^3,$$

dans l'hypothèse de $\pi = \frac{22}{7}$ valeur adoptée, comme on l'a vu, par notre auteur.

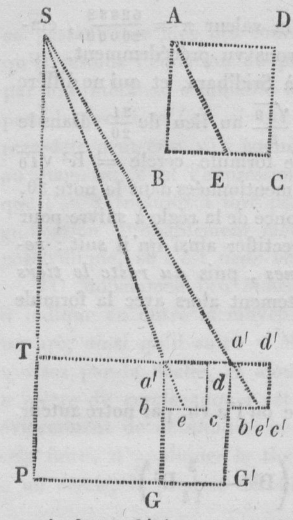
En effet

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^3 - \frac{3}{14}\mathrm{D}^3 - \frac{1}{3}\left(\mathrm{D}^3 - \frac{3}{14}\mathrm{D}^3\right) &= \frac{2}{3}\left(\mathrm{D}^3 - \frac{3}{14}\mathrm{D}^3\right) \\ &= \frac{11}{14}\mathrm{D}^3 \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{22}{7}\mathrm{D}^3 \times \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

34) La dénomination arabe est *derâa' el yed* (coudée-main) ; c'est un terme technique dont la signification n'est pas bien connue de Maulawi Rouschen Ali et des autres commentateurs. Les Arabes, comme les Hindous, avaient sans doute plusieurs sortes de coudées. Dans les définitions des termes techniques données par Bhascara Acharya, p. 2. du Lilavâti, on rencontre cette même mesure sous le nom de *cara* (avant-bras). Dans la cinquième stance, il dit : « huit largeurs d'un grain » d'orge sont ici un doigt; quatre fois six doigts, une coudée; quatre coudées un » bâton, etc. » Suivant le commentateur Ganésa, ceci s' applique à la coudée pratique adoptée par les artisans et vulgairement appelée *gadj*. Quant au bâton (denda), selon Manou, il doit être coupé à peu près de la taille d'un homme.

35) Maulawi Rouschen Ali dit n'avoir jamais vu la glose dont il est ici question, et il pense que Behâ Eddin a voulu parler du traité en 20 chapitres composé par Mohakkik al Thoussi.

36) Je ne puis faire mieux que d'emprunter au docteur Nesselmann ses propres paroles sur le procédé énoncé d'une manière si elliptique par Behâ Eddin, pour mesurer la hauteur d'une montagne. « Ici, dit-il, l'auteur est inintelligible, et j'avoue que je n'ai pu me tirer de ce labyrinthe qu'à l'aide du commentaire qui commence ainsi: « Sache que plusieurs divisent l'instrument en douze parties égales et d'autres en sept. Dans le premier cas, chaque ligne d'ombre (de division) reçoit le nom de *doigt* ; dans le second cas, on l' appelle *pied*. » Cette explication comparée avec la règle énoncée par l' auteur donne l' idée suivante de la construction de l'instrument.



Soit le carré ABCD, l' alidade tournée autour du point fixe A, et si le côté BC est divisé en 12 ou en 7 parties égales, les lignes qui vont de A en E (point de division) se nomment lignes d' ombre. Voici maintenant le procédé qui n'est pas complétement expliqué dans l'auteur. Soit SP la hauteur à mesurer, on se place avec l' instrument *abcd* en G, de sorte que le rayon S*a* rencontre un point de division *e*, ensuite on amène l'alidade sur la division voisine *e'*, et l' on marche vers G', jusqu' à ce que l'alidade S*a'* passe per *e'*.

Supposons que le nombre des divisions soit représenté par n, on a les proportions suivantes

$$eb : ba :: a\mathrm{T} : \mathrm{TS}$$
$$e'b' : b'a' :: a'\mathrm{T} : \mathrm{TS}$$

mais $ba = b'a'$, on a donc $eb : e'b' :: a\mathrm{T} : a'\mathrm{T}$

d'où $$eb : e'b' - eb :: a\mathrm{T} : \mathrm{GG'}.$$

Donc

$$a\mathrm{T} = \frac{eb \times \mathrm{GG'}}{e'b' - eb}$$

d'où il suit que

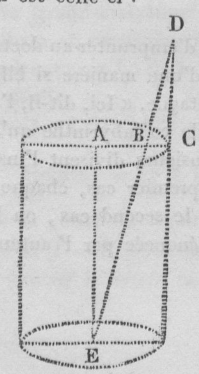
$$\mathrm{TS} = \frac{ba \times \mathrm{GG'}}{e'b' - eb}.$$

Le dénominateur $= \frac{b}{n}$; par suite $\mathrm{TS} = n.\mathrm{GG'}$. Ce qui est la règle de Behâ Eddin.

Le commentateur observe qu' il faut ajouter à ce résultat la taille de l' observateur, c'est-à-dire G*a* ou PT, pour avoir la hauteur totale.

37) L'impossibilité d'obtenir des résultats exacts par l'une ou l'autre de ces deux opérations est assez évidente. La première est fondée sur ce principe que, sur une surface plane, deux points sont à égale distance du pied de la hauteur donnée de l'œil de l'observateur, quand les lignes de vision passant respectivement par ces points, sont également inclinées à l'horizon.

La seconde opération est celle-ci :



Laissez tomber le corps de A en E, placez-vous en CD par exemple, et observez le corps suivant la ligne DE qui coupe AC en B. Alors vous avez la proportion :

$$\mathrm{BC} : \mathrm{CD} :: \mathrm{AB} : \mathrm{AE}$$

d'où AE ou $x = \frac{\mathrm{AB} \times \mathrm{CD}}{\mathrm{BC}}$.

38) Nous allons dire un mot des dénominations *chaï*, *mâl* et *kâb* employées par les algébristes arabes, dénominations que nous avons cru devoir conserver ainsi que les noms des puissances de degrés supérieurs.

Les Arabes appellaient l' inconnue *chaï*, et ce mot a été littéralement traduit par *res*, *cosa*, *coss*, *chose*; de là, ce nom si souvent donné à l'algèbre, de règle de la chose, regla de la cosa o algebra chez les Espagnols, regola della cosa chez les Italiens, règle de coss, pratique cossique, etc.

Mâl a été rendu par *census*, *censo*, qui lui correspondent exactement. En français on aurait pu le traduire aussi par *cense*.

Kâb est devenu cubus, cubo, cube.

D'après nos notations algébriques, un *chaï* s'écrit x, un *mâl* x^2, un *kâb* x^3.

Le *chaï* dans un problême, c'est l'inconnue, c'est l'x, c'est la chose à trouver. La signification du mot arabe *chaï* fournit la seule explication à donner du mot latin *res*. Nous croyons qu' on peut faire une observation analogue en ce qui touche l'origine d'un autre terme technique, du Sinus. Suivant Lacaille, *semisces inscriptœ* a fourni le mot *sinus*, et voici par quelle opération: on extrait l'initiale *s* du premier de ces deux mots, les deux premières lettres *in* du second mot, on rapproche ces trois lettres, on leur donne la terminaison en *us*, et voilà le mot *Sinus* fabriqué. Pour nous, nous aimons mieux croire que la ligne trigonométrique dont il s' agit, et que les Arabes nous ont fait connaître les premiers, sous le nom de *djib*, qui signifie pli, a été simplement traduit en latin par le mot équivalent *sinus* (pli). Un sinus en effet n'est autre chose que la corde de l'arc double pliée en deux. Il serait possible que le mot arabe lui-même vînt du sanscrit *djya* car l' on sait que dès le règne d' Al Mansour, la traduction par Al Fazâry des Tables astronomiques des Hindous, répandit chez les Arabes l'usage du sinus droit, en sanscrit *lamba-djya*, du sinus-verse *outcrama-djya*, et du cosinus *coti-djya*. On sait que Mohammed ben Moussa fit lui-même à la requête d' Al Mamoun, mais avant l' avènement de ce prince au Khalifat, un abrégé du Sidd'hanta traduit par Mohammed ben Ibrahim al Fazâry, d' après l' ouvrage d'un astronome hindou qui visita la cour d' Almansour l'an 773 de notre ère. (Ebn al Adami, préf. à ses Tabl. astr. — Casiri I, 427-28. — Colebrooke, misc. essays. 504).

La signification propre de *mâl* est possession, biens terriers. *Census* signifie de même biens, revenus. Le *Censualis liber* était à Rome le registre terrier, les matrices de rôle ; le *Censitor* était l' arpenteur ou expert. *Census* se définit (STEPH. *Thes.*) *quicquid fortunarum quis habet*. En mathématiques, *mâl* comme *census* signifie naturellement la superficie unité, c' est-à-dire le carré. La cense, le fee-farm des Anglais, était un fief dont on jouissait à perpétuité en payant une certaine rente. Perez de Moya, dit expressément page 433 de son Tratado de Mathematicas: « es entendido el censo en esta arte de algebra, por » lo que en geometria la superficie. »

Les Arabes adoptèrent pour la troisième puissance de l'inconnue le mot *kâb* (dé ou cube). Le cube est pour les grandeurs qui réunissent les trois dimensions, ce que le carré est pour les surfaces. Le cube est le corps régulier, le solide par exemple, l' unité de volume. « Tomase aqui por lo que en Geometria el » Cuerpo », dit Perez de Moya.

39) Bien que Behâ Eddin n' en parle pas dans son *Kholâçat al hissâb* , il connaissait sans nul doute la règle pour engendrer les coëfficients des termes du développement d'une puissance entière et positive d' un binôme, successivement les uns des autres et indépendamment de ceux de toute autre puissance. Cette règle se trouve dans deux ouvrages élémentaires, le *Meftâh al hissâb*, Clef du calcul, composé par Djoumchîd ben Moussaoud , sous le règne de Oulough Beg petit-fils de Timour, et dans l'*Ayoun al hissâb*, Règles du calcul, composé par Mohammed Bâkir, sous le règne de Schah Abbas 1er, vers l'an 1600. Ces deux ouvrages sont peu ou point connus des Européens, M. John Tytler qui, le premier, a révélé leur existence, n'a pu se procurer dans l'Inde qu' un simple extrait de chacun d' eux , et il n'a fait connaître que le fragment de l'*Ayoun al hissâb* , qui donne la règle de la formation des coëfficients d' une puissance entière et positive du binôme, antérieurement à Newton. Dans ce fragment , Mohammed Bâkir forme les coëfficients de la douzième puissance d'un nombre composé de deux parties, $\frac{12}{1}$, $\frac{12\,(12-1)}{1.\ 2}$, $\frac{12\,(12-1)\ (12-2)}{1.\ 2.\ 3.}$, etc. il effectue les calculs au fur et à mesure, puis range dans une colonne verticale les nombres qui en résultent; après quoi il formule sa conclusion en ces termes : « Il suit de là que la douzième puissance de tout nombre est égale à la somme des douzièmes puissances de ses deux parties, et 12 fois chacune de ces parties multipliée par la 11.e puissance de l' autre , et 66 fois le carré de chacune d' elles par la 10e puissance de l' autre , et 220 fois le cube de chacune d'elles par la 9.e puissance de l'autre, et 495 fois la 4.e puissance de chacune d'elles par la 8.e puissance de l' autre, et 792 fois la 5.e puissance de chacune d'elles par la 7.e puissance de l'autre, et 924 fois la 6.e puissance de l'une d'elles par la 6.e puissance de l'autre; et ainsi des autres cas.

Le théorême du binôme de Newton, c'est ainsi qu' on le dénomme ordinairement , n' appartient pas exclusivement à Newton. Hutton a émis cette vérité aujourd'hui reconnue, dans son Introduction à ses Tables mathématiques. Avant Newton , l' illustre italien Luca de Burgo , l' allemand Stifel , l' anglais Briggs et deux hommes de génie français, Viète et Pascal, avaient ouvert la voie. Dans sa notice sur Newton, tome 31, p. 132 de la Biographie universelle, Biot reconnaît que Pascal, avant Newton, avait donné une règle pour former *directement* un terme quelconque du développement des puissances binomiales , dans le cas où l'exposant de la puissance est un nombre entier.

M. Ed. Biot, fils, a montré (Journal des Savants, 1835) que la formation des coëfficients des diverses puissances du binôme exprimées en nombres entiers, était connue des Chinois au moins en 1593, puisque le Souan Fa Tong Tsong (principes de l' art du calcul) qui donne la loi de formation de ces coëfficients fut imprimé en cette année-là même. Dans le Souan Fa Tong Tsong on rencontre de fréquents emprunts fait aux Hindous , et selon toute vraisemblance les mathématiciens de l'Inde qui ont poussé très-loin leurs investigations dans la science des nombres, ne durent pas ignorer un théorême connu des Chinois et des Arabes. Un Empereur de la Chine disait: « On nomme chez nous le Roi de l'Inde, le Roi de la Sagesse , parce que la sagesse tire son origine des Hindous. » Il aurait pu le dire de la science du calcul avec non moins de vérité.

On trouve dans le 2.e volume, appendix n.o 5, des *Asiatic Researches*, de Calcutta, deux spécimens précieux de la science arithmétique des Hindous, l'un et l'autre traduits du sanscrit par M. Reuben Burrow. C'est d'abord une règle pratique pour calculer la somme des permutations d'un nombre dont tous les chiffres sont différents, puis un problème sur les combinaisons extrait du Lilavâti de Bhascara Acharya. Voici l'énoncé de la règle que Delambre qualifiait de règle curieuse (Histoire de l'astronomie ancienne, fin du Tome I.)

« Place au dessus des chiffres du nombre donné une progression arithmétique » commençant par 1, au rang des unités, et allant en croissant d'une unité; divise » le produit des termes de cette progression par le nombre des chiffres du nombre » proposé; multiplie la somme des chiffres de ce même nombre par le quotient » ainsi obtenu, et ce produit, écris-le autant de fois qu'il y a de chiffres dans le » nombre donné, en le reculant successivement d'un rang vers la droite; la som- » me de ces lignes est la somme de toutes les permutations. » Ex: Soit à trouver la somme de toutes les permutations du nombre 1864. — Le tableau ci-dessous des opérations indiquées par l'énoncé, servira à éclaircir l'énoncé lui-même:

$$\begin{array}{c} 4.\ 3.\ 2\ 1 \\ 1864 \end{array} \qquad \frac{1.\ 2.\ 3.\ 4}{4}\,(1+8+6+4) = 114.$$

$$\begin{array}{l} 114 \\ 114 \\ 114 \\ 114 \\ \hline 126.654 \end{array}$$

est la somme des permutations.

Voici maintenant l'énoncé et la solution du problème. « Le palais d'un Radja » a huit portes. Ces portes peuvent être ouvertes une à une, ou deux à la fois, » ou trois à la fois, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'enfin toutes soient ouvertes » en même temps. On demande de dire les nombres de fois que cela peut être » fait. »

« Ecris le nombre des portes, et avance en ordre, en diminuant successive- » ment de 1, jusqu'à l'unité, et alors dans l'ordre inverse comme il suit :

$$\begin{array}{cccccccc} 8 & 7 & 6 & 5. & 4 & 3 & 2 & 1. \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8. \end{array}$$

Divise le premier nombre *huit* par l'unité qui est au dessous, et le quotient 8 montre le nombre de fois que les portes peuvent être ouvertes une à une. Multiplie ce dernier *huit* par le terme voisin *sept* et divise le produit par le *deux* qui est au dessous, le résultat 28 est le nombre de fois que deux portes différentes peuvent être ouvertes simultanément; multiplie le dernier nombre trouvé 28 par la figure suivante, *six*, divise le produit par le *trois* au dessous, et le quotient 56 montre le nombre des fois que trois portes différentes peuvent être ouvertes ensemble. Et encore ce nombre 56 multiplié par le *cinq* suivant et divisé par le *quatre* au dessous est 70, nombre de fois que quatre portes différentes peuvent être ouvertes. De même, 56 est le nombre de fois que cinq peuvent être ouvertes; 28 le nombre de fois que six peuvent être ouvertes; 8 le nombre de fois que sept peuvent être ouvertes, et enfin 1 est le nombre de fois que toutes peuvent être ouvertes ensemble; et la somme de toutes les différentes fois est 255. »

M. Reuben Burrow a vu dans ce problème la preuve évidente que les Hindous connaissaient le théorème du binôme de Newton, dans le cas de l'exposant entier et positif, tout aussi bien que Briggs et beaucoup mieux que Pascal. Ce sont les propres termes du savant traducteur.

40) Mohammed ben Moussa al Khowarezmî traite un peu plus longuement que Behâ Eddin, de ce que nous appelons aujourd'hui calcul algébrique, avant d'arriver à la résolution des équations. Pour l'addition et la soustraction des polynômes, il prend d'abord les deux exemples purement numériques :

$$(20-\sqrt{200})+(\sqrt{200}-10)$$
$$(20-\sqrt{200})-(\sqrt{200}-10)$$

et fait voir à l'aide d'une figure géométrique que la première expression se réduit à 10, et la seconde à $30-\sqrt{800}$

$$(20-\sqrt{200})+(\sqrt{200}-10)=10$$
$$(20-\sqrt{200})-(\sqrt{200}-10)=30-\sqrt{800};$$

puis il pose et démontre les deux égalités :

$$(100+x^2-20x)+(50+10x-2x^2)=150-x^2-10x$$
$$(100+x^2-20x)-(50+10x-2x^2)=50+3x^2-30x$$

non plus, comme dans les deux exemples purement numériques, par une figure géométrique, mais bien par la transposition des termes et par l'évanouissement de ceux qui sont égaux et de signes contraires dans le premier membre. En effet, dit Mohammed ben Moussa, « ces opérations n'admettent aucune figure, » parce qu'elles se font sur trois espèces de grandeurs différentes, savoir: des mâl, » des chaî et des nombres, et que ces trois espèces différentes de grandeurs n'ont » rien de correspondant propre à les représenter. A la vérité, ajoute-t-il, nous » avions imaginé de construire une figure aussi pour ce cas, mais elle n'était » pas suffisamment claire. »

Ensuite, il expose deux règles que nous pouvons représenter par les deux égalités

$$\sqrt{K}\times n=\sqrt{Kn^2}$$
$$\frac{\sqrt{K}}{n}=\sqrt{\frac{K}{n^2}},$$

et il termine ainsi : « vous procéderez de cette manière avec toute racine po- » sitive ou négative, connue ou inconnue. »

Le chapitre consacré par Mohammed ben Moussa à la multiplication algébrique, nous paraît mériter d'être reproduit in extenso.

SUR LA MULTIPLICATION.

Je vais vous enseigner maintenant comment on multiplie entre eux les nombres inconnus, c'est-à-dire les *chaï*, lorsqu' ils sont seuls, ou lorsque des nombres leur sont ajoutés, ou lorsque des nombres en sont retranchés, ou bien lorsqu' ils sont eux-mêmes soustraits des nombres ; je parlerai également du cas où les facteurs sont des *chaï* additionnés entre eux ou soustraits les uns des autres.

Toutes les fois que l'on a un nombre à multiplier par un autre, il faut le répéter autant de fois qu'il y a d'unités dans cet autre.

Si des nombres d'ordre supérieur sont joints à des unités par voie d'addition ou de soustraction, alors quatre multiplications sont nécessaires, savoir: les nombres supérieurs par les nombres supérieurs, les nombres supérieurs par les unités, les unités par les nombres supérieurs, et les unités par les unités. Si les unités jointes aux nombres d' ordre supérieur sont positives, alors la dernière multiplication est positive; si elles sont négatives en même temps, alors la quatrième multiplication est encore positive. Mais si les unes sont positives, tandis que les autres sont négatives, alors la quatrième multiplication est négative. Par exemple (10 et 1) à multiplier par (10 et 2) : 10 fois 10 c' est 100, 1 fois 10 est 10 positif, 2 fois 10 est 20 positif, et 1 fois 2 est 2 positif. Cela tout ensemble fait 132.

$$(10+2)\,(10+2) = 100+10+20+2 = 132.$$

Mais si l'exemple est (10—1) à multiplier par (10—1), alors 10 fois 10 c' est 100, le 1 négatif par 10 est 10 négatif, l' autre 1 négatif par 10 est pareillement 10 négatif, de sorte que l'on arrive à 80; mais le 1 négatif par le 1 négatif est 1 positif, ce qui fait le résultat égal à 81.

$$(10-1)\,(10-1) = 100-10-10+1 = 81.$$

Si l'exemple est (10 et 2) à multiplier par (10—1), alors 10 fois 10, 100; le 1 négatif par 10, 10 négatif; le 2 positif par 10 est 20 positif; cela ensemble est 110; le 2 positif par le 1 négatif donne 2 négatif. Le produit devient 108.

$$(10+2)\,(10-1) = 100-10+20-2 = 110-2 = 108.$$

J'ai donné ces explications comme pouvant servir d'introduction à la multiplication des *chaï* augmentés ou diminués des nombres, ou soustraits eux-mêmes de nombres connus.

Exemple : (10 — *chaï*) à multiplier par 10. Vous commencez par prendre 10 fois 10, ce qui est 100; — *chaï* par 10 est 10 *chaï* négatifs; le produit est donc: 100—10 *chaï*.

$$(10-x) \times 10 = 10 \times 10 - 10x = 100 - x.$$

Si l'exemple est (10 et x) à multiplier par 10, alors vous prenez 10 fois 10, ce qui est 100; *chaï* par 10 c'est 10 *chaï* positifs, de sorte que le produit est 100 et 10 *chaï*.

$$(10+x) \times 10 = 100 + 10x$$

Si l'exemple est (dix et *chaï*) à multiplier par lui-même, alors 10 fois 10 c'est 100, et 10 fois *chaï* est 10 *chaï*, et encore 10 fois *chaï* est 10 *chaï*, et *chaï* multiplié par *chaï* est 1 *mâl* positif; de sorte que le produit total est 100 *dirhems* et 20 *chaï* et 1 *mâl* positif.

$$(10 + x)\,(10 + x) = 100 + 10x + 10x + x^2 = 100 + 20x + x^2.$$

Si l'exemple est (10—*chaï*) à multiplier par (10—*chaï*), alors 10 fois 10 est 100; moins *chaï* par 10 c' est moins 10 *chaï* ; et encore moins *chaï* par 10 , c' est moins 10 *chaï* ; mais moins *chaï* « multiplié par moins *chaï* » est 1 *mâl* positif. Le produit est en conséquence 100 et 1 *mâl* moins 20 *chaï*.

$$(10 - x)\,(10 - x) = 100 - 10x - 10x + x^2 = 100 + x^2 - 20x.$$

De même si la question suivante nous est proposée : « un dirhem moins son si- » xième à multiplier par un dirhem moins son sixième, » c'est-à-dire $\frac{5}{6}$ de dirhem par $\frac{5}{6}$ de dirhem, le produit est 25 parties d'un dirhem divisé en 36 parties égales, ou bien $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{6}$ de $\frac{1}{6}$.

Calcul : Vous multipliez 1 dirhem par 1 dirhem, le produit est 1 dirhem ; puis 1 dirhem par $-\frac{1}{6}$, c'est $\frac{1}{6}$ négatif : et encore 1 dirhem par $-\frac{1}{6}$, c'est $\frac{1}{6}$ négatif : ainsi , jusques là , le résultat est $\frac{2}{3}$ de 1 dirhem, mais il y a encore $-\frac{1}{6}$ à multiplier par $-\frac{1}{6}$, ce qui est $\frac{1}{6}$ de $\frac{1}{6}$ positif. Le produit est en conséquence $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{6}$ de $\frac{1}{6}$.

$$\left(1 - \tfrac{1}{6}\right)\left(1 - \tfrac{1}{6}\right) = 1 - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} \text{ de } \tfrac{1}{6} = \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{6} \text{ de } \tfrac{1}{6}.$$

Si l'exemple est « 10 moins *chaï* » à multiplier par « dix et *chaï* » alors vous dites : 10 fois 10 c'est 100 ; moins *chaï* par 10, c' est 10 *chaï* négatifs ; *chaï* per 10, c' est 10 *chaï* positifs ; moins *chaï* par *chaï*, c' est 1 *mâl* négatif. En conséquenee le produit est 100 dirhems moins 1 *mâl*.

$$(10 - x)\,(10 + x) = 100 - 10x + 10x - x^2 = 100 - x^2.$$

Si l' exemple est « 10 moins *chaï* » à multiplier par *chaï* , alors vous dites : 10 multiplié par *chaï*, c'est 10 *chaï*; moins *chaï* par *chaï*, c' est 1 *mâl* négatif ; donc le produit est 10 *chaï* moins 1 *mâl*.

$$(10 - x)x = 10x - x^2.$$

Si l'exemple est « dix et *chaï* » à multiplier par « *chaï* moins dix », alors vous dites : *chaï* multiplié par 10, c'est 10 *chaï* positifs; *chaï* par *chaï*, c'est 1 *mâl* positif; — 10 par 10, c'est 100 dirhems négatifs; — 10 par *chaï*, c'est 10 *chaï* négatifs. Vous répondez donc : 1 *mâl* moins 100 dirhems; car, après avoir fait la réduction, c'est-à-dire après avoir fait disparaître les 10 *chaï* positifs par les 10 *chaï* négatifs, il reste 1 *mâl* moins 100 dirhems.

$$(10 + x)\,(x - 10) = 10x + x^2 - 100 - 10x = x^2 - 100.$$

Si l'exemple est « 10 dirhems et $^1/_2$ *chaï* » à multiplier par « $^1/_2$ dirhem moins » 5 *chaï* », alors vous dites : $^1/_2$ dirhem par 10, c'est 5 dirhems positifs; $\frac{1}{2}$ dirhem par $\frac{1}{2}$ *chaï*, c'est $^1/_4$ de *chaï* positif ; moins 5 *chaï* par 10 dirhems, c' est 50 *chaï* négatifs. Cela tout ensemble fait 5 dirhems moins 49 *chaï* et $\frac{3}{4}$ de *chaï*. Ensuite vous multipliez 5 *chaï* négatifs par $^1/_2$ *chaï* positif, c'est 2 *mâl* et $^1/_2$ *mâl* négatifs. En conséquence le produit est 5 dirhems moins 2 $^1/_2$ *mâl* moins 49 $\frac{3}{4}$ *chaï*.

$$\begin{aligned}(10 + \tfrac{1}{2}x)\,(\tfrac{1}{2} - 5x) &= 5 + \tfrac{x}{4} - 50x - 2\,{}^1/_2\, x^2 \\ &= 5 - 2\,{}^1/_2\, x^2 - (49\,\tfrac{3}{4})x.\end{aligned}$$

Si l' exemple est « dix et *chaï* » à multiplier par « *chaï* moins dix » il est exactement le même que « *chaï* et dix » par « *chaï* moins dix ». Vous dites donc : *chaï* multiplié par *chaï* est 1 *mâl* positif; 10 par *chaï* c'est 10 *chaï* positifs ; et moins 10 par *chaï*, c' est 10 *chaï* négatifs. Maintenant vous chassez les positifs par les négatifs, et il reste seulement alors 1 *mâl* ; — 10 multiplié par 10, c'est 100 à retrancher du *mâl*. Donc enfin on a 1 *mâl* moins 100 dirhems.

$$\begin{aligned}(10 + x)\,(x - 10) &= (x + 10)\,(x - 10) \\ &= x^2 + 10x - 10x - 100 \\ &= x^2 - 100.\end{aligned}$$

Toutes les fois qu'un facteur positif et un facteur négatif, tels que « *chaï* po- » sitif » et « moins *chaï* » se rencontrent dans une multiplication, la dernière multiplication donne toujours un produit négatif. Gardez cela dans votre mémoire.

41) L'algébriste italien Pacioli déclare formellement qu'en dehors des six opérations ou formes algébriques, que nous trouvons traitées dans le *Kholâçat al hissâb* et dans l'algèbre de Mohammed ben Moussa, et reproduites dans les ouvrages des algébristes de l'Europe chrétienne, il n'y a pas d'équation possible : « altramente che in questi 6 discorsi modi non e possibile alcuna loro equatione. »

42) Il est assez curieux que les Grecs n'aient pas dans leur langue un mot pour désigner cette partie des mathématiques, et que pour en faire le nom de la science elle-même les Européens aient pris aux Arabes un terme qui, pour ceux-ci, exprimait simplement une des deux opérations essentielles à la résolution d'une équation. En effet, l'opération qui consiste à restaurer, à compléter, s'appelle *gebr*, ou avec l'article défini *al gebr*; elle a lieu lorsque dans un membre d'une équation, une quantité positive est précédée ou suivie d'une quantité négative. La seconde opération essentielle qui consiste à supprimer les valeurs égales de chaque côté, est appelée par les Arabes *mokâbalah*, et avec l'article *al mokâbalah*. C' est pourquoi le traité populaire de Mohammed ben Moussa a pour titre : Kitâb al mokht'esser fy *hissâb algebr oua'l mokâbalah*, c'est-à-dire, Livre abrégé sur le calcul par gebr et mokabalah. De là, ce titre donné par Gosselin à un ouvrage in 8° qu'il publia en 1577: *De arte magnâ, seu de occultâ parte numeroram quæ et algebra et almucabala vulgò dicitur*. De là, par abréviation, notre nom d'algèbre, adopté par les modernes et admis aujourd'hui chez les Musulmans d'Asie et d'Afrique, qui reçoivent de nous ce que leurs ancêtres ont transmis aux nôtres.

43) Soit x le nombre des enfants ; $\frac{(x+1)x}{2}$ sera le nombre total des dinârs; $\frac{(x+1)\frac{x}{2}}{x}$ sera la part de chacun d'eux, mais d'après l'énoncé du problème, cette valeur est égale à 7, nous aurons donc l' équation $\frac{x+1}{2} = 7$; d'où $x = 13$. Plus généralement, soit n la part rectifiée, le nombre des dinârs sera nx; mais d'après le partage primitif, la totalité des dinârs était $\frac{(x+1)x}{2}$. Il en résulte que

$$\frac{(x+1)x}{2} = nx$$

ou $x = 2n - 1$.

44) Soit $(10 + x)$ l' un de ces nombres, $(10 - x)$ l'autre ; leur produit $(10 + x)(10 - x)$ ou $(100 - x^2)$ devant égaler 96, nous avons

$$100 - x^2 = 96$$

L'opération appelée *gebr* donne

$$100 = 96 + x^2$$

L'opération appelée *mokâbalah* fait que

$$96 + 4 = 96 + x^2$$

devient

$$4 = x^2$$

d'où $x = 2$

Ainsi l'un des nombres est 8 et l'autre 12, et c'est ce dernier nombre qui est la quantité demandée. Cet exemple est résolu avec une certaine élégance, et il fait voir clairement ce qu'est *gebr* et ce qu'est *mokâbalah* dans la pratique.

45) Mohammed ben Moussa al Khowarezmî distingue six cas ou six formes algébriques, trois simples et trois composées. Voici le tableau comparatif de l'ordre suivi par Mohammed ben Moussa et par Behâ Eddin, dans l'examen des trois formes simples :

Mohammed ben Moussa		Behâ Eddin.	
1.°	$ax^2 = bx$	1.°	$bx = n$
2.°	$ax^2 = n$	2.°	$ax^2 = bx$
3.°	$bx = n$	3.°	$ax^2 = n$

Behâ Eddin suit exactement le même ordre que Mohammed ben Moussa, dans l'exposition des trois formes composées, savoir :

1.° $ax^2 + bx = n$

2.° $ax^2 + n = bx$

3.° $ax^2 = bx + n$.

Le traité d' algorisme de Jean Hispalensis (de Séville), auteur du XII^e siècle, contient un chapitre sur l' algèbre, intitulé; Excerptiones de libro qui dicitur *gebra et muchabala*. Des trois équations que cet algébriste résout comme exemples des trois formes composées, deux sont précisément celles choisies par Mohammed ben Moussa.

46) Behâ Eddin ne donne qu' un exemple pour le premier cas des formes composées.

$$x^2 + x\left(5 - \frac{x}{2}\right) = 12$$

$$x^2 + 5x - \frac{x^2}{2} = 12$$

$$\frac{x^2}{2} + 5x = 12$$

$$x^2 + 10x = 24$$

$$x = -5 + \sqrt{25+24}$$

$$x = 7 - 5 = 2.$$

Mohammed ben Moussa en donne plusieurs autres :

(1°) $$x^2 + 10x = 39$$

ou $$x^2 + 2x \,.\, 5 + 5^2 = 39 + 5^2 = 64 \qquad \text{d'où } x = 3;$$

2° $$2x^2 + 10x = 48$$

ou $$(x + 2\,{}^1\!/_2)^2 = 30\,{}^1\!/_4 \quad \text{d'où } x = 3$$

3° $$\frac{x^2}{2} + 5x = 28$$

ou $$(x + 5)^2 = 81 \quad \text{d'où } x = 4.$$

Procédez de cette manière toutes les fois que vous rencontrerez des *mâl* et des *chaï* égaux à des nombres, dit Mohammed ben Moussa, et vous aurez toujours une réponse.

47) Mohammed ben Moussa ne donne pour ce cas qu'un seul exemple, ainsi que Behâ-Eddin.

L'équation résolue par Behâ-Eddin est la suivante

$$\frac{x^2}{2} + 12 = 5x$$

ou $$x^2 + 24 = 10x$$

$$x = 5 \pm \sqrt{25 - 24} = 5 \pm 1 \,.\; (x' = 6\,,\; x'' = 4)$$

L' équation résolue par Mohammed ben Moussa offre les transformations successives :

$$x^2 + 21 = 10\,x$$
$$x^2 + 5^2 = 2x \times 5 + 5^2 - 21$$
$$x^2 + 5^2 = 2\,x \times 5 + 4$$
$$(x - 5)^2 = 4$$
$$x - 5 = \pm 2 \quad \text{d'où} \quad [x' = 7.\ x'' = 3]$$

Le cas actuel se traduit généralement d'après nos notations algébriques par l'équation

$$x^2 - px + q = 0$$

qui fournit la double racine

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

dont les valeurs distinctes x' et x'' peuvent être positives toutes deux à la fois, ainsi que le fait observer Mohammed ben Moussa. « Sachez encore, ajoute-t-il, que dans une question rentrant dans ce cas, lorsque vous avez pris la moitié du nombre des *chaï*, et multiplié cette moitié par elle-même, si le produit est moindre que le nombre des dirhems (la quantité connue), alors l'exemple est impossible; mais si le produit est égal aux dirhems seulement, alors la réponse, c'est la moitié du nombre des *chaï* seulement, sans addition ni soustraction. »

48) Voici les exemples donnés par nos deux auteurs pour la résolution des équations de la 3.e forme composée.

Behâ Eddin prend pour exemple :

$$(x^2 - x) + x^2 = 10$$

ou

$$2x^2 = x + 10$$

$$x^2 = \frac{x}{2} + 5$$

$$x = \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} + 5} = \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{81}{16}}$$

$$= \frac{1}{4} + 2\,{}^1\!/_4 = 2\,{}^1\!/_2$$

Mohammed ben Moussa choisit l'exemple suivant :

$$x^2 = 3\,x + 4$$

$$x^2 - 1\,{}^1\!/_2\,x \times 2 + (1\,{}^1\!/_2)^2 = 6\,{}^1\!/_4$$

d'où

$$x = \sqrt{6\,{}^1\!/_4} + 1\,{}^1\!/_2 = 2\,{}^1\!/_2 + 1\,{}^1\!/_2 = 4$$

49) Parmi ces douze règles, nous distinguerons surtout la quatrième et la cinquième qui donnent : 1.° la somme des carrés des n premiers nombres entiers; 2.° la somme des cubes des mêmes n premiers nombres entiers, à l'aide des deux formules :

$$S_2 = S_1 \times \frac{2n + 1}{3}$$

$$S_3 = (S_1)^2$$

traduites en langage ordinaire.

La première règle n'est autre chose que le produit par n, de la somme des n premiers nombres entiers :

$$S_1 \times n = \frac{n(n+1)}{2} \times n = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

Nous ne lui accordons ici une mention spéciale que parce que Behâ Eddin la donne comme une de celles *mises au jour par sa faible intelligence*.

La douzième et dernière règle se trouve sous forme de remarque faite en passant, dans le chapitre de l'Algèbre de Mohammed ben Moussa, intitulé : *Questions diverses*.

50) Le premier problème mis en équation, donne :

$$[(2x+1)\,3+2] \times 4+3 = 95$$
$$24\,x + 23 = 95$$
$$24\,x = 72$$
$$x = 3$$

51) x représentant la plus petite partie de 10, $(x+5)$ sera l'autre partie, et l'on aura :

$$x + (x+5) = 10$$
$$2x = 5$$
$$x = 2^1/_2$$

Voyons maintenant comment cette même question est résolue par la méthode dite méthode par inversion. Soient x et y les deux parties d'un nombre a, alors

$$x = a - y$$
$$x - y = a - 2y$$
$$x - y = 2\left(\frac{1}{2}a - y\right)$$

telle est l'égalité sur laquelle l'auteur s'appuie.

Si $x - y = 5$ on a donc $\frac{5}{2} = \frac{1}{2}a - y$.

Si actuellement, on ajoute la moitié du nombre, l'on a :

$$\frac{5}{2} + 5 = a - y = x$$

d'où
$$x = 7^1/_2 \quad \text{et} \quad y = 2^1/_2$$

52) Voici le tableau des transformations indiquées :

$$\left(x + \frac{x}{5} + 5\right) - \frac{1}{3}\left(x + \frac{x}{5} + 5\right) - 5 = 0$$

$$\frac{4}{5}\,x + 3^1/_3 = 5$$

d'où
$$\frac{4}{5}\,x = 1\,\frac{2}{3} \quad \text{et par suite} \quad x = 2\,\frac{1}{12}.$$

53) Le cinquième problème mis en équation, donne

$$x - \frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 3$$

Behâ Eddin passe de cette équation directement à celle-ci, qu'il lui substitue:

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{6}x = 3.$$

d'où $$x = 3 : \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) = 3 : \frac{5}{12} = 7^{1}/_{5}$$

Quand il emploie la méthode par inversion pour résoudre ce même problème, il pose en principe que « $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ de tout nombre est égal à ce qui reste encore » et aux $\frac{2}{5}$ de ce reste », c'est-à-dire, en d'autres termes, que

$$\frac{7}{12} = \frac{5}{12} + \frac{2}{5} \text{ de } \frac{5}{12}$$

54) Ce sixième problème conduit l'auteur à l'équation

$$3 + \frac{x}{4} = x + 1$$

en appelant x ce qu'a le premier, et 3 ce qu'a le second.

d'où $$\frac{3}{4}x = 2 \quad \text{et} \quad x = 2 : \frac{3}{4} = 2\frac{2}{3}$$

Mais ainsi que Behâ Eddin le fait observer, ce problème est indéterminé, et pour le résoudre, en même temps que tous ceux analogues, il y a une méthode facile que notre auteur applique à la question particulière dont il s' occupe, et dont je crois devoir donner ici la démonstration : soit x ce qu'a le premier témoin de la vente, y ce qu'a le second, P le prix du cheval, $\frac{1}{m}$ et $\frac{1}{n}$ les fractions générales substituées à $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$. On a alors:

$$P = x + \frac{1}{m}y$$

et $$P = y + \frac{1}{n}x$$

d'où $$x + \frac{1}{m}y = y + \frac{1}{n}x$$

ou bien $$x\left(1 - \frac{1}{n}\right) = y\left(1 - \frac{1}{m}\right)$$

$$\frac{x}{y} = \frac{mn - n}{mn - m}$$

Si l'on pose $x = mn - n$ et $y = mn - m$, il en résulte

$$P = mn - 1$$

55) Soient a, b, c, les nombres de livres de miel, de vinaigre et d' eau. Le mélange contient $(a + b + c)$ livres. De ces $(a + b + c)$ livres, on prend l livres, je suppose, et l'on veut trouver dans quelle proportion, pour chaque coupe, le miel, le vinaigre et l'eau auront concouru à former ces l livres de mélange.

Pour la première substance, on aura $x = \dfrac{la}{a + b + c}$, pour la seconde $\dfrac{lb}{a + b + c}$, et pour la troisième $\dfrac{lc}{a + b + c}$.

56) En supposant la nuit de 12 heures, Behâ Eddin pose l'équation

$$\frac{x}{3} = \frac{12 - x}{4}$$

ou

$$\frac{x}{3} = 3 - \frac{x}{4}$$

après l'application d'algebr: $\dfrac{1}{3}\,x + \dfrac{1}{4}\,x = 3$. d'où $x = 5\dfrac{1}{7}$. Tel est le nombre des heures écoulées, et par conséquent le nombre des heures non encore écoulées est égal à $6\,\dfrac{6}{7}$.

57) Parmi les problèmes donnés par Bhascara Acharya nous citerons le suivant, à cause de son analogie avec celui de Behâ Eddin: « Un bambou haut de » dix-huit coudées a été brisé par le vent ; le sommet touche la terre à six » coudées de la racine : dites la longueur des segments du bambou. » Ce problème fournit l' équation $(18 - x)^2 = x^2 + 36$. Les segments du bambou sont 8 et 10 coudées, et le triangle rectangle qui en résulte a pour base 6 coudées, pour hauteur 8 coudées et pour hypoténuse 10 coudées.

Passons au problème de Behâ Eddin :

Soit x la partie de la perche cachée dans l'eau, la longueur totale de la perche sera $x + 5$, et l'on aura :

$$(x + 5)^2 = 100 + x^2$$

$$x^2 + 10\,x + 25 = 100 + x^2$$

$$10\,x = 75$$

$$x = 7^1/_2$$

d'où il suit que la longueur de la perche est de 12 coudées $^1/_2$. Le théorème si connu du carré de l'hypothénuse sur lequel s'appuie en cette circonstance Behâ Eddin, est appelé par lui *figure de la fiancée*. D'où a pu provenir cette singulière désignation ? C'est ce qui, jusqu' à ce jour, n'a pu être expliqué. En attendant que cette explication soit donnée, nous nous bornerons, ne pouvant faire mieux, à reproduire deux passages du *Livre des conquêtes des pays*, par Ahmed ben

Yahya surnommé Beladori, précepteur à la cour d'Almotavakkel, Khalife de Bagdâd, mort en 892 de J. C. Nous extrayons ces passages du volume de fragments arabes et persans inédits, relatifs à l'Inde antérieurement au XI^e siècle de notre ère, recueillis, traduits et publiés par l'un de nos plus illustres Orientalistes, M. Reinaud de l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres. Voici le premier passage : « Mohammed, fils de Cassem, quitta Armâyl ayant avec lui Djehem, » fils de Zakhar Aldjofy ; il arriva un vendredi devant Daybal ; des navires lui » amenèrent en cet endroit des hommes, des armes et des machines. Aussitôt » il creusa un fossé autour de son camp. Les approches du fossé étaient défendues » par des hommes armés de lances, et les étendards étaient tenus déployés. Cha» que troupe de guerriers était rangée autour de son étendard; en même temps, » *Mohammed fit dresser la machine de guerre nommée la fiancée, laquelle* » *était de la force de cinq cents hommes*. Or, il y avait à Daybal un grand » Bodd surmonté d'un grand mât ; sur le mât était un drapeau rouge qui, lors» que le vent soufflait, se déployait sur la ville. » Le *Bodd*, dit M. Reinaud, est un temple probablement consacré à Bouddha.

Le second passage est tiré d'une lettre du fameux Hadjadj, gouverneur musulman de l'Irac, à son lieutenant Mohammed (celui dont il est question dans le premier passage) campé aux portes de Daybal. « *Dresse la fiancée et rac*» *courcis-lui une des jambes*; tu placeras la machine du côté de l'Orient; en» suite tu appelleras l'homme chargé de la faire mouvoir, et tu lui ordonneras » de viser le mât dont tu m'as fait la description. »

Les Arabes, aussi bien que les Hindous, disent *jambe* ou côté d'un triangle. Parmi les termes techniques communs à la géométrie et à la balistique, nous avions déjà l'*arc*, la *corde*, la *flèche*; les deux passages qui précèdent montrent qu'à ces termes il convient d'ajouter désormais celui de *fiancée*: mais malheureusement nous ne savons pas quelle était la forme de cette *fiancée*.

58) Comme on le voit par ces quelques mots, Behâ Eddin n'avait pas encore achevé son grand ouvrage, l'Océan du Calcul (*Bâr al hissâb*), lorsqu'il arrivait à la conclusion de son *Kholâçat al hissâb*.

Avant de clore ce neuvième et dernier chapître, nous transcrirons ici quelques équations traitées par Mohammed ben Moussa.

1° $(10 - x)\,x = 21$

2° $(10 - x)^2 - x^2 = 40$

3° $(10 - x)^2 + x^2 + (10 - 2x) = 54$

4° $\dfrac{10 - x}{x} + \dfrac{x}{10 - x} = 2\,\dfrac{1}{6}$

5° $\dfrac{2x + \frac{1}{2}x}{10 - x} - 50 - 5x$

6° $(10 - x)^2 = 81\,x$

7° $x^2 \times 3\,x = 5x^2$

8° $\left(x^2 - \dfrac{1}{3}x^2\right) 3x = x^2.$

59) Ces sept questions proposées par Behâ Eddin offrent au point de vue de l'histoire de la science un intérêt tout particulier, aussi ont-elles été l'objet d'un examen approfondi de la part du savant Angelo Genocchi dans ses « Note ana- » litiche sopra tre scritti inediti di Leonardo Pisano pubblicati da Baldassarre » Boncompagni, Roma, 1855 », (p. 85—92). Nous renvoyons le lecteur du *Kholâçat al hissâb* à ce mémoire remarquable, avec d'autant plus de confiance que personnellement, nous lui devons la rectification d'une erreur commise en 1846. Nous nous bornerons à dire dans cette note, d'accord avec l' habile analyste italien,

1.° que la première question se traduit par le système d'équations

$$x + y = 10$$
$$(x + \sqrt{x})\ (y + \sqrt{y}) = n$$

et que dans l'hypothèse $n = 24$, le problême est possible et admet la solution

$$x = 1 \qquad y = 9;$$

2.° que la seconde question

$$x^2 + 10 = y^2$$
$$x^2 - 10 = z^2$$

est impossible ;

3.° que la troisième

$$x = 10 - \sqrt{y}$$
$$y = 5 - \sqrt{x}$$

n' admet pas de racines rationnelles ;

4.° que la quatrième

$$x^3 = y^3 + z^3$$

est la plus digne de remarque de celles mises en réserve par Behâ Eddin, parce que son impossibilité fut énoncée par Fermat en 1657, et démontrée plus tard par Euler;

5.° que la cinquième

$$x + y = 10$$
$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = y$$

fournit une équation du 3e degré $x^2 - (10 - x)^2\ (x - 1) = 0$ laquelle n'admet pas de racines rationnelles ;

6.° que la sixième est impossible, ainsi qu'il résulte de l'examen de l'équation $x^4 + x^2y^2 + y^4 = z^2$ à laquelle elle donne lieu ;

7.° enfin que la septième et dernière question

$$x^2 + x + 2 = y^2$$
$$x^2 - x - 2 = z^2$$

admet la solution rationnelle et positive

$$x = \frac{34}{15} \qquad y = \frac{46}{15} \qquad z = \frac{14}{15}.$$

60) Dans la curieuse péroraison de Behâ Eddin, nous ne relèverons qu'un trait, parce qu'il est propre à faire ressortir l'intérêt particulier qui s'attache à son œuvre, unique peut-être dans son genre, et remarquable d'ailleurs sous plus d'un rapport: « Eh bien, donc, ô Frère, sache que je t'offre dans ce petit mais pré-
» cieux ouvrage, *ce qui n'a été réuni jusqu'à présent, ni dans un simple ma-*
» *nuel, ni dans un Traité proprement dit.* » On trouve en effet dans le *Kholâçat al hissâb* ce qu'on chercherait vainement dans un autre Manuel auquel nous avons fait de nombreux emprunts, nous voulons dire dans le *précis du calcul par gèbr et mokâbalah* de Mohammed ben Moussa al Khowarezmî.

L'éminent géomètre M. Chasles, dans son Aperçu historique p. 491 a formulé cette vérité si peu connue encore et si digne de l'être: « pour comprendre ce que
» nous devons à Mohammed ben Moussa, il suffit de rappeler que c'est dans
» son ouvrage que nous avons puisé nos premières connaissances algébriques,
» qu'il est notre véritable instituteur dans cette branche principale des sciences
» mathématiques; avant de juger son œuvre, il faut mûrement réfléchir sur ce
» fait, qu'un *traité d'algèbre regardé comme élémentaire au IXe siècle de*
» *notre ère chez les Arabes*, et en quelque sorte comme manuel pratique à
» l'usage du peuple, *est devenu sept cents ans après, l'ars magna des Eu-*
» *ropéens, la base et l'origine de leurs grandes découvertes dans les sciences.* »

Le *Kholâçat al hissâb* que *Behâ Eddin* aime avec toute la tendresse anxieuse d'un bon père, a été accueilli en France et en Italie avec une flatteuse bienveillance par les savants et les aspirants à la science. En vérité *Behâ Eddin d'Aamoul*, s'il se trouvait en l'an de grâce 1864, à Paris, ou à Rome, au milieu de la noble famille des lettrés et des savants, reconnaîtrait avec joie que les hommes de ce temps-ci sont dignes de recevoir et d'apprécier son legs. Ils le garderont fidèlement. Dieu veuille les garder de même!

FIN.

IMPRIMATUR — Fr. Hier. Gigli Ord. Praed. S. P. A. Mag.
IMPRIMATUR — P. De Villanova Castellacci Archiep. Petrae Vicesg.

IMPRIMATUR — Fr. Hier. Gigli Ord. Praed. S. P. A. Mag.
IMPRIMATUR — P. De Villanova Castellacci Archiep. Petrae Vicesg.