

Summen reziproker Eigenwerte

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
Doctor rerum naturalium

vorgelegt dem Fachbereich Mathematik und Informatik der
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät der
Martin-Luther-Universität Halle - Wittenberg

von

Maren Hantke
geboren am 03.12.1977 in Magdeburg

Halle, der 29.03.2006

Gutachter/Gutachterin

1. Prof. Dr. Bodo Dittmar, Martin-Luther-Universität Halle - Wittenberg
2. Prof. Dr. Catherine Bandle, Universität Basel

verteidigt und genehmigt am 29.06.2006

urn:nbn:de:gbv:3-000010421

[<http://nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=nbn%3Ade%3Agbv%3A3-000010421>]

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bedanken, zuerst für die an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg genossene Ausbildung und damit verbunden den Mitarbeitern, insbesondere des Fachbereiches Mathematik und Informatik, aber auch der wirtschaftlichen Fakultät.

Weiterhin gilt mein Dank Herrn Professor Dr. B. Dittmar für die Vergabe des interessanten Dissertationsthemas und die Betreuung während meiner Arbeit sowie im Verlaufe meines Studiums.

Mein besonderer Dank gilt meiner Familie, allen voran meinem Lebenspartner Stefan Reißmann sowie meinen Eltern und Schwiegereltern für die fortwährende Unterstützung, aber auch meinen Söhnen Nils und Clemens für jede Ablenkung von dieser Arbeit.

Besonderer Dank gilt dem Land Sachsen-Anhalt, welches durch ein Graduiertenstipendium die Anfertigung dieser Arbeit überhaupt erst ermöglichte.

Inhaltsverzeichnis**Tabellenverzeichnis**

VI

Abbildungsverzeichnis

VII

1	Einleitung	1
2	Das Stekloffsche Eigenwertproblem im einfach zusammenhängenden Gebiet	4
2.1	Das Eigenwertproblem	4
2.2	Die Neumannsche Funktion	6
2.3	Eine endliche Summe	8
2.3.1	Variationscharakterisierung der Eigenwerte	8
2.3.2	Einige Bezeichnungen	10
2.3.3	Beweis der Ungleichung	11
2.3.4	Zusatz für symmetrische Gebiete	17
2.4	Eine unendliche Summe	17
2.4.1	Herleitung einer Formel zur Berechnung von $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$	17
2.4.2	Abbildung des Einheitskreises in sich	20
2.5	Numerische Resultate	21
2.5.1	Die Joukowski-Abbildung.	21
2.5.2	Abbildung auf das Äußere einer Ellipse	23
2.5.3	Abbildung auf das Innere eines regulären n -Ecks.	25
2.5.4	Abbildung auf das Äußere eines regulären n -Ecks	27
3	Das Stekloffsche Eigenwertproblem im zweifach zusammenhängenden Gebiet	29
3.1	Das Eigenwertproblem	29
3.2	Der Kreisring	29
3.2.1	Eigenschaften der Eigenwerte des Kreisringes	30
3.2.2	Eine unendliche Summe für den Kreisring	33
3.3	Eine endliche Summe	35
3.3.1	Die Neumannsche Funktion	35
3.3.2	Variationscharakterisierung der Eigenwerte	36
3.3.3	Einige Bezeichnungen	37
3.3.4	Beweis der Ungleichung	37
3.3.5	Ergänzende Bemerkungen	41
4	Das Problem der festen Membran im einfach zusammenhängenden Gebiet	43
4.1	Das Eigenwertproblem	43
4.2	Eine endliche Summe - alternativer Beweis	45
4.2.1	Die Greensche Funktion im Einheitskreis	45
4.2.2	Variationscharakterisierung der Eigenwerte	46

4.2.3	Bezeichnungen und Definitionen	47
4.2.4	Beweis der Ungleichung	47
4.3	Eine unendliche Summe	48
4.3.1	Vorbetrachtung	48
4.3.2	Herleitung einer Formel zur Berechnung von $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$	50
4.3.3	Der Einheitskreis	54
4.3.4	Entwicklung der Abbildungsfunktion	55
4.3.5	Ein exakt zu berechnendes Beispiel: Abbildung auf eine Kardioide und verwandte Abbildungen	55
4.3.6	Ein numerisches Beispiel: Abbildung auf ein reguläres n -Eck	61
4.4	Eine weitere unendliche Summe	68
4.4.1	Vorbetrachtung	68
4.4.2	Bestimmung von $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^{(0)4}}$	69
5	Das Problem der festen Membran im zweifach zusammenhängenden Ge- biet	73
5.1	Das Eigenwertproblem	73
5.2	Eine endliche Summe	73
5.2.1	Die Greensche Funktion im Kreisring	74
5.2.2	Variationscharakterisierung der Eigenwerte	74
5.2.3	Bezeichnungen und Definitionen	75
5.2.4	Beweis der Ungleichung	75
6	Gemischte Stekloffprobleme im zweifach zusammenhängenden Gebiet	78
6.1	Die Eigenwertprobleme	78
6.2	Das Problem (6.1) im Kreisring und die Robinsche Funktion	79
6.3	Das Problem (6.2) im Kreisring und die zugehörige Neumannsche Funktion	79
6.4	Eine endliche Summe für (6.1)	80
6.4.1	Variationscharakterisierung der Eigenwerte	80
6.4.2	Einige Bezeichnungen	81
6.4.3	Beweis der Ungleichung	81
6.5	Eine endliche Summe für (6.2)	83
6.5.1	Die Neumannsche Funktion zum Problem (6.2)	83
6.5.2	Variationscharakterisierung der Eigenwerte	83
6.5.3	Einige Bezeichnungen	84
6.5.4	Beweis der Ungleichung	85
6.6	Eine unendliche Summe für (6.1)	86
6.7	Numerische Resultate für (6.1) und (6.2)	87
6.7.1	Numerische Resultate im Kreisring	87
6.7.2	Abbildung auf eine geschlitzte Ellipse	89
6.7.3	Abbildung auf einen Ellipsenring	92
6.7.4	Abbildung durch $\frac{z-x}{1-zx}$	96
6.7.5	Abbildung durch $\frac{zx-R}{Rx-z}$	100

7	Ein Membranproblem mit gemischten Randbedingungen im zweifach zusammenhängenden Gebiet	103
7.1	Das Eigenwertproblem	103
7.2	Die Robinsche Funktion	103
7.3	Die Eigenwerte und Eigenfunktionen im Kreisring	104
7.4	Eine endliche Summe	104
7.4.1	Variationscharakterisierung der Eigenwerte	104
7.4.2	Bezeichnungen und Definitionen	105
7.4.3	Beweis der Ungleichung	106
8	Gemischte Stekloffprobleme im einfach zusammenhängenden Gebiet	108
8.1	Die Eigenwertprobleme	108
8.2	Endliche Summen	108
8.2.1	Problematik	108
8.2.2	Ein Lösungssystem für (8.2)	109
8.2.3	Die Neumannsche Funktion im Halbkreis zum Eigenwertproblem (8.2)	110
8.2.4	Variationscharakterisierung der Eigenwerte zu (8.1) und (8.2)	111
8.2.5	Einige Bezeichnungen	113
8.2.6	Beweis einer Ungleichung	114
8.2.7	Eine Fragestellung	116
8.2.8	Weitere Lösungssysteme	117
8.2.9	Weitere Gebietsklassen	118
8.3	Unendliche Summen	120
8.3.1	Eine unendliche Summe für (8.1)	120
8.3.2	Eine unendliche Summe für (8.2)	121
8.3.3	Abbildung des Halbkreises in sich	122
8.4	Numerische Resultate	123
8.4.1	Halbkreisabbildung	123
8.4.2	Abbildung auf die untere Halbebene	125
8.4.3	Abbildung auf den geschlitzten Einheitskreis	126
8.5	Weitere Resultate	127
9	Ein Membranproblem mit gemischten Randbedingungen im einfach zusammenhängenden Gebiet	129
9.1	Das Eigenwertproblem	129
9.2	Das Problem (9.1) im Halbkreis H	129
9.3	Eine endliche Summe	129
9.3.1	Variationscharakterisierung der Eigenwerte	130
9.3.2	Eine Ungleichung	131
9.3.3	Ein Beispiel	131
10	Bezeichnungen und Abkürzungen	134
	Literatur	VIII

Tabellenverzeichnis

Numerische Resultate für $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$ für das Stekloffproblem im einfach zusammenhängenden Gebiet

Tabelle 1: Das Äußere einer Ellipse	24
Tabelle 2: Das Innere eines regulären n -Ecks	26
Tabelle 3: Das Äußere eines regulären n -Ecks	27

Numerische Resultate für $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$ für das Stekloffproblem im zweifach zusammenhängenden Gebiet am Beispiel des Kreisringes

Tabelle 4: Der Kreisring, $11/10 \leq R \leq 30/10$	34
--	----

Numerische (und exakte) Resultate für $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$ für das Problem der festen Membran im einfach zusammenhängenden Gebiet

Tabelle 5: Abbildung auf Kardioide und verwandte Abbildungen durch $f_n, n = 2, \dots, 20$	57
Tabelle 6: Abbildung auf Kardioide und verwandte Abbildungen durch $\tilde{f}_n, n = 2, \dots, 20$	60
Tabelle 7: Abbildung auf ein reguläres n -Eck	67

Numerische Resultate für $\sum_j^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$ für zwei gemischte Stekloffprobleme im zweifach zusammenhängenden Gebiet

Tabelle 8: Der Kreisring, $11/10 \leq R \leq 20/10$	88
Tabelle 9: Der Kreisring, $1/10 \leq R \leq 9/10$	89
Tabelle 10: Abbildung auf eine geschlitzte Ellipse, $\frac{11}{10} \leq R \leq \frac{20}{10}$	92
Tabelle 11: Abbildung auf einen Ellipsenring	93
Tabelle 12: Abbildung auf einen Ellipsenring, $C(r) = 1/r$	93
Tabelle 13: Abbildung auf einen Ellipsenring	95
Tabelle 14: Abbildung auf einen Ellipsenring, $C(R) = 1/(Rr)$	95
Tabelle 15: Abbildung durch \tilde{f}_x mit $0 \leq x \leq \frac{9}{20}$ und $\frac{6}{5} \leq R \leq 2$	97
Tabelle 16: Abbildung durch \tilde{f}_x mit $\frac{11}{20} \leq x \leq \frac{19}{20}$ und $\frac{6}{5} \leq R \leq 2$ mit $Rx > 1$	99
Tabelle 17: Abbildung durch g_x mit $\frac{1}{20} \leq x \leq \frac{19}{20}$ und $\frac{6}{5} \leq R \leq 2$	101

Numerische Resultate für $\sum_j^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$ für zwei gemischte Stekloffprobleme im einfach zusammenhängenden Gebiet

Tabelle 18: Abbildung auf den geschlitzten Einheitskreis, $-9/10 \leq x \leq 9/10$	126
---	-----

Abbildungsverzeichnis

Abb. 1: Abbildung des Einheitskreises durch f_n für $n = 2$, $n = 5$ und $n = 10$	56
Abb. 2: Abbildung des Einheitskreises durch f_6 für $t = 7/8$, $t = 6/8$ und $t = 5/8$	57
Abb. 3: Abbildung des Kreisringes $A(1, R)$ durch f_x mit $x = 0$, $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{3}$ und $x = \frac{1}{2}$ für $R = 2$	97
Abb. 4: Abbildung des Kreisringes $A(1, R)$ durch f_x für $x = \frac{2}{3}$ und $x = \frac{3}{4}$ für $R = 2$	99
Abb. 5: Beispiele für die beschriebenen Gebietsklassen des Satzes 8.8 . . .	120

1 Einleitung

Im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit stehen Summen reziproker Eigenwerte klassischer Eigenwertprobleme. Behandelt werden das Stekloffsche Eigenwertproblem in den Kapiteln 2 und 3, das Problem der festen Membran in den Kapiteln 4 und 5 sowie verschiedene gemischte Probleme in den Kapiteln 6, 7, 8 und 9.

Nur in einigen wenigen Fällen ist es möglich, das vollständige System der Eigenfunktionen mit den zugehörigen Eigenwerten eines Eigenwertproblems explizit anzugeben. Dennoch sind insbesondere die ersten (nichttrivialen) Eigenwerte solcher Differentialgleichungssysteme von Bedeutung, z.B. als optimale Konstanten in a priori Abschätzungen bzw. isoperimetrischen Ungleichungen oder zur beidseitigen Einschließung konformer Gebietsgrößen [13], [8].

Genannt seien hier die Friedrichsche Ungleichung

$$\int_G v^2 dx \leq C_1 \int_G \nabla^2 v dx \quad v \in H_0^1(G) \quad (1.1)$$

oder das Spurtheorem

$$\int_{\partial G} v^2 ds \leq C_2 \left(\int_G v^2 dx + \int_G \nabla^2 v dx \right) \quad v \in H^1(G), \quad (1.2)$$

wobei H^m wie üblich den Sobolev-Raum mit verallgemeinerten Ableitungen bis zur Ordnung m bezeichnet.

Eigenwerte spielen eine bedeutende Rolle in der Variationsrechnung und in der mathematischen Physik.

Die Berechnung einzelner Eigenwerte erfordert im allgemeinen aufwendige numerische Verfahren. Jedoch ist es möglich, isoperimetrische Ungleichungen für einzelne oder mehrere Eigenwerte anzugeben. Eine der bekanntesten solchen Ungleichungen ist die Rayleigh-Faber-Krahn-Ungleichung für den ersten Eigenwert der festen Membran [2], siehe auch Kapitel 4.1.

Den Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit bildet das folgende interessante, 1954 von Pólya und Schiffer erzielte Resultat für die Eigenwerte der festen Membran im einfach zusammenhängenden Gebiet D , siehe auch Kapitel 4.

Für beliebiges n gilt

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \geq R^2 \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j^{(0)}}, \quad (1.3)$$

wobei $\lambda_j^{(0)}$ die Eigenwerte des Einheitskreises bezeichne und R den maximalen konformen Radius des Gebietes D . Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn D ein Kreis ist.

In diesem Sinne ist der Kreis ein Extremalgebiet.

Eine in der folgenden Arbeit behandelte Fragestellung bildet die Übertragung des genannten Resultats auf andere Eigenwertprobleme. Ausgehend vom Stekloffschen Eigenwertproblem im einfach zusammenhängenden Gebiet wird eine Methode entwickelt, welche

eine **einheitliche** Behandlung aller bearbeiteten Eigenwertprobleme ermöglicht. In dieser Einheitlichkeit liegt der Vorteil gegenüber bereits bekannten Resultaten von Hersch, Payne und Schiffer bzw. Laugesen und Morpugo, vgl. Kapitel 2 und 4. Selbstverständlich ergeben sich für verschiedene Eigenwerte auch Unterschiede und damit verbundene Schwierigkeiten.

Einen weiteren Hauptgegenstand dieser Arbeit bilden neben den genannten endlichen Summen unendliche Summen reziproker Eigenwerte der Form $\sum_j^\infty \frac{1}{\lambda_j^2}$ in den Kapiteln 2, 3, 4, 6 und 8 bzw. die Herleitung von Formeln zur Berechnung solcher Summen für verschiedene Gebiete in den Kapiteln 2, 4, 6 und 8.

Ferner enthält diese Arbeit zahlreiche numerische Resultate zu den verschiedenen Eigenwertproblemen.

In allen Kapiteln werden zunächst die Eigenwertprobleme vorgestellt und anschließend Variationscharakterisierungen für die Eigenwerte angegeben. Die Variationscharakterisierung der Eigenwerte erfolgt mit der jeweiligen Fundamentalfunktion des Eigenwertproblems, also z.B. im Falle des Stekloffschen Eigenwertproblems mit der Neumannschen Funktion auf dem Rand des Gebietes.

Zwar wären auch andere Variationscharakterisierungen denkbar, jedoch wird bewusst die Charakterisierung durch die Fundamentalfunktionen gewählt, um hier ebenfalls die Einheitlichkeit im Zugang zu den endlichen und unendlichen Summen zu gewährleisten.

Aufbauend auf diese Variationscharakterisierungen wird in Kapitel 2 eine Methode entwickelt, welche zu einem interessanten Zwischenergebnis für die Summe endlich vieler Eigenwerte führt und sich auf die übrigen Eigenwertprobleme übertragen lässt und übertragen wird.

Die Weiterbehandlung dieses Zwischenergebnisses birgt je nach Eigenwertproblem unterschiedliche Schwierigkeiten. Während sich im Falle des Stekloffschen Eigenwertproblems im einfach zusammenhängenden Gebiet relativ einfache Abschätzungen ergeben, welche eine geometrische Interpretation zulassen, sind die Rechnungen für den zweifach zusammenhängenden Fall aufgrund des Zerfalls des Randes in zwei Komponenten ungleich aufwendiger.

Insbesondere bei der Behandlung der gemischten Probleme im einfach zusammenhängenden Gebiet stellen sich zahlreiche Schwierigkeiten ein, so z.B. schon bei der Frage nach einem möglichen Extremalgebiet. Dies wird im Abschnitt 8.2.1 ausführlich dargestellt.

Eine Behandlung des Problems der freien Membran erfolgt nicht, da dies bereits ausführlich durch Dittmar in [9] geschah.

Neben den genannten endlichen Summen ist es möglich, Aussagen über die Gesamtheit aller Eigenwerte eines Eigenwertproblems zu treffen. So gilt z.B. nach Bergmann und Schiffer im Falle des Stekloffproblems für die Eigenwerte des einfach zusammenhängenden

Gebietes D

$$\int_{\partial U} \int_{\partial U} N_D^2(z, \zeta) |f'(z)| |f'(\zeta)| ds_z ds_\zeta = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2},$$

wobei U den Einheitskreis bezeichnet und $N_D(z, \zeta)$ die in den Einheitskreis überpflanzte Neumannsche Funktion des Gebietes D . Ferner bezeichnet f die Abbildung des Einheitskreises auf das Gebiet D .

Ausgehend von dieser Formel wird mittels Fourierentwicklung der Neumannschen Funktion sowie der Abbildungsfunktion eine Formel zur Berechnung von $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$ für beliebige einfach zusammenhängende Gebiete hergeleitet. Diese Formel wird am Beispiel des Einheitskreises „getestet“ und anschließend auf andere Gebiete angewendet.

Entsprechende Berechnungen sind auch für andere Eigenwertprobleme möglich und werden in den Kapiteln 2, 4, 6 und 8 durchgeführt. Im Unterschied zum Stekloffschen Eigenwertproblem sind dabei für das Problem der festen Membran Gebietsintegrale auszuwerten, so dass sich die Rechnungen wesentlich komplizierter und umfangreicher gestalten. Dies gilt auch für weiterführende numerische Rechnungen. Jedoch können im Fall der festen Membran für die Kardioide und verwandte Gebiete exakte Resultate angegeben werden, diese finden sich in Abschnitt 4.3.5.

Auf die hergeleiteten Formeln aufbauende umfangreiche numerische Resultate finden sich jeweils am Ende der Kapitel 2, 3, 4, 6 und 8. Derartige numerische Resultate finden sich in der Literatur bislang nicht. Darüber hinaus enthalten die genannten Kapitel auch zahlreiche Monotonieergebnisse, vor allem Kapitel 8.

Weitere interessante Ergebnisse zu den verschiedenen Eigenwertproblemen finden sich in den jeweiligen Kapiteln.

2 Das Stekloffsche Eigenwertproblem im einfach zusammenhängenden Gebiet

2.1 Das Eigenwertproblem

Sei D ein einfach zusammenhängendes Gebiet in der Ebene mit beschränkter Länge der Randkurve ∂D . Die Randkurve sei hinreichend glatt, d.h., sie sei stückweise analytisch und besitze keine Nullwinkel. Es gelte:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & \text{in } D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \lambda \sigma u & \text{auf } \partial D. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Dabei bezeichne λ den Eigenwertparameter und $\frac{\partial}{\partial n}$ die Außennormale. $\sigma \geq 0$ ist die spezifische Masse auf dem Rand und sei eine gegebene stückweise stetige Funktion. Das Problem (2.1) kann als Membranproblem interpretiert werden, wobei sich die gesamte Masse auf dem Rand konzentriert.

Das Problem (2.1) heißt Stekloffsches Eigenwertproblem im einfach zusammenhängenden Gebiet und besitzt die Eigenwerte $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ endlicher Vielfachheit mit den zugehörigen Eigenfunktionen $u_1 \equiv \text{const}, u_2, u_3, \dots$ [2]. Das System der Eigenfunktionen ist vollständig und orthonormiert mit

$$\int_{\partial D} \sigma u_i u_j ds = \delta_{ij}, \quad (2.2)$$

δ_{ij} sei das Kroneckersymbol. Ist $D = U$ der Einheitskreis und $\sigma \equiv 1$, so sind die Eigenwerte und Eigenfunktionen durch $\lambda_1^{(0)} = 0$, $u_1^{(0)} \equiv 1/\sqrt{2\pi}$ und $\lambda_{2n}^{(0)} = \lambda_{2n+1}^{(0)} = n$, $u_{2n}^{(0)}(r, \phi) = 1/\sqrt{\pi} r^n \cos n\phi$ sowie $u_{2n+1}^{(0)}(r, \phi) = 1/\sqrt{\pi} r^n \sin n\phi$ für $n = 1, 2, 3, \dots$ gegeben.

Zu unterscheiden sind die Probleme des Innen- und des Außengebietes. Für den Fall des Kreises mit $\sigma \equiv 1$ besitzen das innere und das äußere Problem die gleichen Eigenwerte. I.a. sind die Eigenwerte des Innen- und des Außengebietes jedoch verschieden, was in der Literatur bislang nur wenig behandelt wurde [8].

Für ein beliebiges Gebiet D kann i.a. kein Lösungssystem von Eigenwerten und Eigenfunktionen angegeben werden, jedoch sind zahlreiche isoperimetrische Ergebnisse für die Eigenwerte des Problems (2.1) bekannt.

So gilt für beliebiges D

$$\lambda_2 \leq \frac{2\pi}{M},$$

wobei $M = \int_{\partial D} \sigma ds$ die totale Masse bezeichnet. Für $\sigma \equiv 1$ gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn D ein Kreis ist. Damit besitzt bei konstanter Massenverteilung unter allen Gebieten mit gleicher Länge der Randkurve der Kreis den größten ersten nichttrivialen Eigenwert.

Dieses auf Weinstock zurückgehende Resultat [55] konnte von Hersch und Payne noch verschärft werden [5]:

$$\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} \geq \frac{M}{\pi}. \quad (2.3)$$

Hersch, Payne und Schiffer zeigten [5], [2]

$$\lambda_2 \lambda_3 \leq \frac{4\pi}{M^2}. \quad (2.4)$$

Ferner gilt nach Hersch, Payne und Schiffer für Gebiete mit gerader Symmetrieordnung q bei entsprechender Periodizität von σ [2]

$$\lambda_q \lambda_{q+1} \leq \frac{\pi^2 q^2}{M^2}. \quad (2.5)$$

Unter einem Gebiet der Symmetrieordnung q wird dabei ein Gebiet verstanden, das bei Drehung um den Winkel $2\pi/q$ in sich selbst übergeht. Auch in (2.3), (2.4) und (2.5) steht das Gleichheitszeichen im Falle des Kreises bei konstantem σ .

Schließlich gilt ebenfalls nach Hersch, Payne und Schiffer mit $\sigma \equiv 1$

$$\sum_{j=2}^n \frac{1}{\lambda_j} \geq \frac{L}{2\pi} \sum_{j=2}^n \frac{1}{\lambda_j^{(0)}} \quad (2.6)$$

für beliebiges $n \geq 2$, wobei L die Länge der Randkurve des Gebietes bezeichnet, [33].

J. Edward bewies

$$\sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{L^2}{4\pi^2} \lambda_j^2 - \lambda_j^{(0)^2} \right) \geq 0$$

[20] für konstantes σ mit $L = |\partial D|$ Länge der Randkurve des Gebietes D .

Ist D ein symmetrisches Gebiet der Symmetrieordnung q bei gleicher Periodizität der Massenbelegung, dann gilt für die Eigenwerte $\lambda_2, \dots, \lambda_q$ von D

$$\lambda_{2n} \leq \frac{2\pi n}{M} \quad \text{und} \quad \lambda_{2n+1} \leq \frac{2\pi n}{M}. \quad (2.7)$$

Dieses Ergebnis von C. Bandle [3] liefert in Abhängigkeit von der Symmetrieordnung q eine obere Schranke für die ersten $q - 1$ nichttrivialen Eigenwerte von (2.1).

Ein asymptotisches Resultat bewies Shamma [10]. Es gilt

$$\lambda_{2n} = \frac{2\pi n}{M} + \varepsilon_n, \quad \lambda_{2n+1} = \frac{2\pi n}{M} + \varepsilon'_n,$$

wobei $\varepsilon_n, \varepsilon'_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Während nach Payne [5] für den ersten nichttrivialen Eigenwert eines analytisch berandeten, konvexen Gebietes für $\sigma \equiv 1$ gilt

$$\lambda_{2(i)} \geq \min k(s),$$

gilt für den ersten nichttrivialen Eigenwert eines Außengebietes mit äußerem konformen Radius 1, dessen Komplement konvex ist,

$$\lambda_{2(a)} > \frac{1}{2}.$$

Ferner gilt die scharfe Abschätzung zwischen den Stekloffschen Eigenwerten des Innen- bzw. Außengebietes und dem ersten nichttrivialen Fredholmschen Eigenwert λ

$$\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \leq \frac{\lambda_{2(a)}}{\lambda_{2(i)}} \leq \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}$$

für $\sigma \equiv 1$ [8]. (Dies war schon Gegenstand eines Gesprächs zwischen M. Schiffer und C. Bandle, vgl. eine Fußnote in [8], S. 150.)

Im folgenden sei stets $\sigma \equiv 1$.

2.2 Die Neumannsche Funktion

Sei D ein einfach zusammenhängendes beschränktes Gebiet mit hinreichend glattem Rand und beschränkter Länge der Randkurve, dann existiert die Neumannsche Funktion $N_D(\xi, \eta)$ des Gebietes D mit

$$N_D(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\xi - \eta|} + w(\xi, \eta), \quad (2.8)$$

wobei w eine in ξ harmonische Funktion ist. Die Neumannsche Funktion von D ist eine normierte Fundamentallösung bzw. Fundamentalfunktion [30], vgl. auch [43], welche den Bedingungen

$$\frac{\partial N_D(\xi, \eta)}{\partial n_\xi} = -\frac{1}{L}, \quad (2.9)$$

wobei $L = |\partial D|$ die Länge der Randkurve von D und $\frac{\partial}{\partial n_\xi}$ die Außennormale bzgl. ξ bezeichnet, sowie

$$\int_{\partial D} N_D(\xi, \eta) ds_\eta = 0, \quad \forall \xi \in \partial D \quad (2.10)$$

genügt.

Die Stekloffschen Eigenfunktionen $\{u_j\}_2^\infty$ sind die Eigenfunktionen der Neumannschen Funktion auf dem Rand

$$u_j(\xi) = \lambda_j \int_{\partial D} N_D(\xi, \eta) u_j(\eta) ds_\eta, \quad \xi \in \partial D, \quad j = 2, 3, \dots \quad (2.11)$$

[11]. Im Unterschied zum Eigenwertproblem (2.1) ist $u_1 = \text{const}$ keine Eigenfunktion der Neumannschen Funktion. Dies ergibt sich unmittelbar aus (2.10). Entsprechend ist $\lambda_1 = 0$ kein Eigenwert von $N_D(\xi, \eta)$ bzw. der Integralgleichung (2.11), vgl. auch [41].

Sei f diejenige konforme Abbildung, die den Einheitskreis U konform auf das Gebiet D abbildet mit $f(z) = \xi$ und $f(\zeta) = \eta$. Überpflanzt in den Einheitskreis genügt die Neumannsche Funktion von D der Darstellung

$$N_D(f(z), f(\zeta)) = N_U(z, \zeta) + H(z) + H(\zeta) + \text{const}. \quad (2.12)$$

Dabei ist $N_U(z, \zeta) = \sum_{j=2}^\infty \frac{u_j^{(0)}(z) u_j^{(0)}(\zeta)}{\lambda_j^{(0)}}$ die Neumannsche Funktion des Einheitskreises und const eine geeignete Konstante. Die Funktion H läßt sich nach den Eigenfunktionen des

Einheitskreises entwickeln und besitzt die Darstellung $H(z) = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{c_j u_j^{(0)}(z)}{\lambda_j^{(0)}}$ mit den noch zu ermittelnden Koeffizienten c_j . Die Summation beginnt aus oben genannten Gründen jeweils erst bei $j = 2$.

Mit $|f'(z)|_{|z|=1} \sim f_0 + \sum_{j=2}^{\infty} f_j u_j^{(0)}(\phi)$ ¹ und $C = \{z : |z| = 1\}$ ergibt sich wegen $\int_{\partial D} N_D(\xi, \eta) ds_\xi = 0$ und

$$\begin{aligned} & \int_{\partial D} N_D(\xi, \eta) ds_\xi \\ &= \int_{\partial U} (N_U(z, \zeta) + H(z) + H(\zeta) + const) |f'(z)| ds_z \\ &= \sum_{j=2}^{\infty} \frac{f_j u_j^{(0)}(\zeta)}{\lambda_j^{(0)}} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{c_j f_j}{\lambda_j^{(0)}} + L \sum_{j=2}^{\infty} \frac{c_j u_j^{(0)}(\zeta)}{\lambda_j^{(0)}} + L \cdot const \quad , \end{aligned}$$

$c_j = -\frac{f_j}{L}$ und $const = \frac{1}{L^2} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{f_j^2}{\lambda_j^{(0)}}$. Damit besitzt N_D die folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} N_D(z, \zeta) &= \sum_{j=2}^{\infty} \frac{u_j^{(0)}(z) u_j^{(0)}(\zeta)}{\lambda_j^{(0)}} - \frac{1}{L} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{f_j u_j^{(0)}(z)}{\lambda_j^{(0)}} - \frac{1}{L} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{f_j u_j^{(0)}(\zeta)}{\lambda_j^{(0)}} + \frac{1}{L^2} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{f_j^2}{\lambda_j^{(0)}} \\ &= \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\left(u_j^{(0)}(z) - \frac{f_j}{L}\right) \left(u_j^{(0)}(\zeta) - \frac{f_j}{L}\right)}{\lambda_j^{(0)}} \quad \text{bzw.} \end{aligned}$$

Satz 2.1 Sei D ein einfach zusammenhängendes beschränktes Gebiet mit hinreichend glattem Rand und beschränkter Länge der Randkurve. Die Neumannsche Funktion des Gebietes D besitzt auf dem Rand des Einheitskreises U die Darstellung

$$\begin{aligned} N_D(\phi, \theta) &= \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\left(u_j^{(0)}(\theta) - \frac{f_j}{L}\right) \left(u_j^{(0)}(\phi) - \frac{f_j}{L}\right)}{\lambda_j^{(0)}} \\ &= \sum_{j=2}^{\infty} \frac{w_j(\theta) \cdot w_j(\phi)}{\lambda_j^{(0)}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

mit $w_j(\phi) = u_j^{(0)}(\phi) - \frac{f_j}{L}$. Dabei bezeichnen die Koeffizienten f_j die Fourierkoeffizienten des Betrages der Ableitung der Abbildungsfunktion des Einheitskreises U auf das Gebiet D auf dem Rand des Einheitskreises. Es ist $|f'(\phi)| \sim f_0 + \sum_{j=2}^{\infty} f_j u_j^{(0)}(\phi)$.

Bemerkung 2.1 Ist D ein unbeschränktes Gebiet (Außengebiet), so bezeichnet f die Abbildung des Äußeren des Einheitskreises auf D . Anstelle der Neumannschen Funktion des Einheitskreises steht die Neumannsche Funktion des Äußeren des Einheitskreises. Diese

¹Zur Vereinfachung sei $u_j^{(0)}(z)$ für $|z| = 1$ mit $u_j^{(0)}(\phi)$ bezeichnet sowie $|f'(z)|_{|z|=1}$ mit $|f'(\phi)|$. Weiterhin sei im folgenden die in den Einheitskreis überpflanzte Neumannsche Funktion des Gebietes D mit $N_D(z, \zeta)$ bezeichnet und auf dem Rand entsprechend mit $N_D(\phi, \theta)$. Es sei $z = re^{i\phi}$ und $\zeta = se^{i\theta}$.

stimmen auf dem Rand von U überein. Damit gilt auch für einfach zusammenhängende Außengebiete mit hinreichend glattem Rand und beschränkter Länge der Randkurve die Darstellung (2.13).

2.3 Eine endliche Summe

Ziel dieses Abschnittes ist es, eine Ungleichung analog zum Resultat von Pólya und Schiffer, vgl. Satz 4.3, herzuleiten. Dazu werden zunächst Variationscharakterisierungen für die Eigenwerte des Problems (2.1) angegeben und einige Bezeichnungen eingeführt.

Die dabei vorgestellte Methode wird in den folgenden Kapiteln auf andere Eigenwertprobleme übertragen.

2.3.1 Variationscharakterisierung der Eigenwerte

Es sei $z = re^{i\phi}$ und $\zeta = se^{i\theta}$. Mit Hilfe der Neumannschen Funktion lassen sich dann die Eigenwerte des Problems (2.1) in folgender Weise charakterisieren, vgl. [7], [2] sowie [9]:

Hilfssatz 2.1 *Gegeben sei das Problem (2.1) mit $\sigma \equiv 1$. Sei f diejenige konforme Abbildung, die das Innere (Äußere) des Einheitskreises konform auf D abbildet. Dann gilt für den k -ten Eigenwert von (2.1)*

$$\frac{1}{\lambda_k} = \max_h \int_{\partial U} \int_{\partial U} N_D(z, \zeta) |f'(z)| |f'(\zeta)| h(z) h(\zeta) ds_z ds_\zeta \quad (2.14)$$

mit $h \in L_2(\partial U)$ und den Nebenbedingungen $\int_{\partial U} |f'(z)| h^2(z) ds_z = 1$, $\int_{\partial U} |f'(z)| h(z) ds_z = 0$ sowie $\int_{\partial U} |f'(z)| h(z) \cdot u_j(z) ds_z = 0$, $j = 2, 3, \dots, k-1$; wobei $k \geq 2$. Mit u_j seien die in den Einheitskreis (in das Äußere des Einheitskreises) überpflanzten Eigenfunktionen des Gebietes D bezeichnet.

Beweis. Sei h eine Funktion, welche den Bedingungen von Hilfssatz 2.1 genügt. Ferner seien u_j die in den Einheitskreis (in das Äußere des Einheitskreises) überpflanzten Eigenfunktionen. Es gilt

$$N_D(z, \zeta) |f'(z)| |f'(\zeta)| = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{u_j(z) |f'(z)| u_j(\zeta) |f'(\zeta)|}{\lambda_j},$$

wobei die Reihe im Mittel konvergiert. Daher kann Integration und Summation vertauscht werden. Mit Hilfe der Besselschen Ungleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} & \int_{\partial U} \int_{\partial U} N_D(z, \zeta) |f'(z)| h(z) |f'(\zeta)| h(\zeta) ds_z ds_\zeta \\ &= \sum_{j=k}^{\infty} \frac{(\int_{\partial U} u_j(z) |f'(z)| h(z) ds_z)^2}{\lambda_j} \leq \frac{\int_{\partial U} h^2(z) |f'(z)| ds_z}{\lambda_k} = \frac{1}{\lambda_k}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Das Gleichheitszeichen wird angenommen für $h(z) = u_k(z)$. □

Im Folgenden wird eine Variationscharakterisierung angegeben, die ganz unabhängig von den überpflanzten Eigenfunktionen des Gebietes D ist.

Hilfssatz 2.2 Für die Eigenwerte des Problems (2.1) gilt:

$$\frac{1}{\lambda_k} = \max_{L_{k-1}} \min \int_{\partial U} \int_{\partial U} N_D(z, \zeta) |f'(z)| |h(z)| |f'(\zeta)| |h(\zeta)| ds_z ds_\zeta,$$

wobei das Maximum über alle $(k-1)$ -dimensionalen Unterräume $L_{k-1} \subset L_2(\partial U)$ gebildet wird. Für jede Funktion $v \in L_{k-1}$ gelte $\int_{\partial U} v(z) |f'(z)| ds_z = 0$. Das Minimum wird über alle Funktionen $h \in L_{k-1}$, welche der Nebenbedingung $\int_{\partial U} h^2(z) |f'(z)| ds_z = 1$ genügen, gebildet.

Beweis. Es wird definiert

$$\Lambda_k = \max_{L_{k-1}} \min \int_{\partial U} \int_{\partial U} N_D(z, \zeta) |f'(z)| |h(z)| |f'(\zeta)| |h(\zeta)| ds_z ds_\zeta$$

unter den Bedingungen von Hilfssatz 2.2. In jedem Unterraum L_{k-1} existiert eine Funktion h mit $\int_{\partial U} u_j(z) |f'(z)| |h(z)| ds_z = 0$ für $j = 2, \dots, k-1$ und $\int_{\partial U} h^2(z) |f'(z)| ds_z = 1$. Unter Zuhilfenahme von Hilfssatz 2.1 erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_k} &\geq \int_{\partial U} \int_{\partial U} N_D(z, \zeta) |f'(z)| |h(z)| |f'(\zeta)| |h(\zeta)| ds_z ds_\zeta \\ &\geq \min \int_{\partial U} \int_{\partial U} N_D(z, \zeta) |f'(z)| |h(z)| |f'(\zeta)| |h(\zeta)| ds_z ds_\zeta \end{aligned}$$

und damit $\Lambda_k \leq \frac{1}{\lambda_k}$.

Wählt man den Unterraum $L_{k-1} = \text{span}\{u_2(z), \dots, u_k(z)\}$, dann erhält man andererseits

$$\Lambda_k \geq \int_{\partial U} \int_{\partial U} N_D(z, \zeta) |f'(z)| |h(z)| |f'(\zeta)| |h(\zeta)| ds_z ds_\zeta = \frac{1}{\lambda_k},$$

wobei das Minimum wiederum über alle Funktionen $h \in L_{k-1}$ mit $\int_{\partial U} h^2(z) |f'(z)| ds_z = 1$ gebildet wird.

Insgesamt ergibt sich $\Lambda_k = \frac{1}{\lambda_k}$ und damit die Behauptung des Hilfssatzes 2.2. \square

Für die Summe der Reziproken der ersten $n-1$ nichttrivialen Eigenwerte erhält man folgenden

Satz 2.2 Für die Eigenwerte des Problems (2.1) gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^n \frac{1}{\lambda_j} &\geq \sum_{j=2}^n \int_{\partial U} \int_{\partial U} N_D(z, \zeta) |f'(z)| |f'(\zeta)| v_j(z) v_j(\zeta) ds_z ds_\zeta \\ &= \sum_{j=2}^n \int_{\partial U} \int_{\partial U} N_U(z, \zeta) |f'(z)| |f'(\zeta)| v_j(z) v_j(\zeta) ds_z ds_\zeta \end{aligned} \quad (2.16)$$

mit den Nebenbedingungen $\int_{\partial U} |f'(z)| v_j(z) ds_z = 0$ sowie $\int_{\partial U} |f'(z)| v_i(z) v_j(z) ds_z = \delta_{ij}$, $i, j = 2, \dots, n$, $v_j \in L_2(\partial U)$.

Beweis. In jedem $n-1$ -dimensionalen Unterraum $L_{n-1} \subset L_2(\partial U)$, wobei für jede Funktion $v \in L_{n-1}$ wiederum $\int_{\partial U} v(z)|f'(z)| ds_z = 0$ gelte, existiert eine Funktionenfolge $\{v_j\}_{j=2}^n$ mit $\int_{\partial U} v_i(z)v_j(z)|f'(z)| ds_z = \delta_{ij}$ und $\int_{\partial U} v_k(z)u_j(z)|f'(z)| ds_z = 0$ für $i, j = 2, \dots, n$ und $k = j+1, \dots, n$. Die Anwendung von Hilfssatz 2.1 liefert

$$\frac{1}{\lambda_j} \geq \int_{\partial U} \int_{\partial U} N_D(z, \zeta) |f'(z)| v_j(z) |f'(\zeta)| v_j(\zeta) ds_z ds_\zeta.$$

Aufgrund der Bedingung $\int_{\partial U} v(z)|f'(z)| ds_z = 0$ vereinfacht sich dies zu

$$\int_{\partial U} \int_{\partial U} N_U(z, \zeta) |f'(z)| |f'(\zeta)| v_j(z) v_j(\zeta) ds_z ds_\zeta,$$

vgl. 2.2. Durch Summation erhält man die Aussage des Satzes 2.2. \square

Um nun eine Formel analog zu Satz 4.3 herzuleiten, muss eine geeignete Abschätzung der rechten Seite der Ungleichung (2.16) gefunden werden.

2.3.2 Einige Bezeichnungen

Die Abbildungsfunktion. Mit f wird die Abbildung des Inneren bzw. Äußeren des Einheitskreises auf das Gebiet D bezeichnet. Im Folgenden wird für den Betrag der Ableitung der Abbildungsfunktion auf dem Rand von U die nunmehr zweckmäßigere Fourierdarstellung

$$|f'(z)|_{|z|=1} \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j \cos j\phi + \beta_j \sin j\phi) =: |f'(\phi)| \quad (2.17)$$

mit den Fourierkoeffizienten α_j und β_j verwendet.

Die Koeffizienten $b_{j,k}$. Betrachtet wird die rechte Seite der Ungleichung (2.16). Es ist

$$\begin{aligned} & \int_{\partial U} \int_{\partial U} N_D(z, \zeta) |f'(z)| |f'(\zeta)| v_j(z) v_j(\zeta) ds_z ds_\zeta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{w_k(\theta) w_k(\phi)}{\lambda_k^{(0)}} |f'(\theta)| |f'(\phi)| v_j(\theta) v_j(\phi) d\theta d\phi \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{b_{j,k}^2}{\lambda_k^{(0)}} \quad \text{mit} \\ b_{j,k} &= \int_0^{2\pi} w_k(\phi) v_j(\phi) |f'(\phi)| d\phi, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$j \geq 2$ und geeignet zu wählenden Ansatzfunktionen v_j , vgl. Satz 2.2. Gliedweise Integration ist hier natürlich möglich, da die Reihe, welche die Neumannsche Funktion darstellt, im Mittel konvergent ist [41].

Die Ansatzfunktionen v_n . Sei $L_2^f(\partial U) = \{v \in L_2(\partial U) : \int_0^{2\pi} v(\phi)|f'(\phi)|d\phi = 0\}$. Da die Funktionen $\{w_j\}_{j=2}^\infty$ in $L_2^f(\partial U)$ eine (nichtorthonormierte) Basis bilden, lassen sich die Ansatzfunktionen v_n nach den w_j entwickeln. Die v_n werden so gewählt, dass gilt

$$v_n(\phi) = \sum_{j=2}^n c_{n,j} \cdot w_j(\phi), \quad n \geq 2. \quad (2.19)$$

Dabei müssen die v_n den Bedingungen

$$\int_0^{2\pi} |f'(\phi)|v_i(\phi)v_j(\phi)d\phi = \delta_{ij} \quad (2.20)$$

genügen, vgl. Satz 2.2.

(2.19) und (2.20) liefern Gleichungssysteme für die Koeffizienten $c_{n,j}$. Diese sind mit der zusätzlichen Forderung $c_{n,n} > 0$ eindeutig lösbar, denn die Lösungsvektoren $\{c_{n,j}\}_{j=2}^n$ entsprechen bis auf das Vorzeichen denen, die man durch die Anwendung des Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens mit dem in (2.20) erklärten Skalarprodukt erhält.

D.h., das System $\{v_n\}$ ist das im Sinne des Skalarproduktes (2.20) zu $\{w_n\}$ gehörende orthonormierte System.

Die Koeffizienten $d_{i,j}$. Zur Vereinfachung der weiteren Betrachtungen sei Folgendes erklärt

$$d_{i,j} = \int_0^{2\pi} |f'(\phi)|w_i(\phi)w_j(\phi)d\phi. \quad (2.21)$$

Offensichtlich gilt $d_{i,j} = d_{j,i}$.

2.3.3 Beweis der Ungleichung

In einem ersten Schritt zum Beweis der angestrebten Ungleichung ist nun folgende Behauptung zu beweisen:

Hilfssatz 2.3 *Mit den unter 2.3.2 gewählten Bezeichnungen gilt*

$$\sum_{j=2}^k b_{j,k}^2 = d_{k,k}. \quad (2.22)$$

Beweis. Nach Definition der Ansatzfunktionen v_j gilt $v_j = \sum_{m=2}^j c_{j,m} \cdot w_m$. Betrachtet man die ersten $(n-1)$ Ansatzfunktionen, erhält man in Matrixschreibweise die Gleichung $\vec{v} = C \cdot \vec{w}$ mit den Vektoren

$$\vec{v} = \{v_j\}_{j=2}^n \quad \text{und} \quad \vec{w} = \{w_j\}_{j=2}^n$$

und der Matrix

$$C = \{c_{j,m}\}_{j,m=2}^n \quad .$$

Nach Definition der v_j ist C eine LU-Dreiecksmatrix und ist wegen $c_{j,j} > 0$ regulär. Somit existiert die Inverse Matrix C^{-1} und es gilt $\vec{w} = C^{-1} \cdot \vec{v} = G \cdot \vec{v}$. Die Matrix G ist wiederum eine LU-Dreiecksmatrix. Es ist $w_k = \sum_{m=2}^n g_{k,m} v_m$. Für die Koeffizienten $b_{j,k}$ folgt

$$\begin{aligned} b_{j,k} &= \int_0^{2\pi} |f'(\phi)| v_j(\phi) w_k(\phi) d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} |f'(\phi)| v_j(\phi) \sum_{m=2}^k g_{k,m} v_m(\phi) d\phi \\ &= g_{k,j} \end{aligned}$$

aufgrund der Orthonormalitätsbedingung an die Ansatzfunktionen v_j . Also gilt:

$$\sum_{j=2}^k b_{j,k}^2 = \sum_{j=2}^k g_{k,j}^2 \quad . \quad (2.23)$$

Weiterhin gilt

$$\int_0^{2\pi} |f'(\phi)| w_k(\phi) w_k(\phi) d\phi = d_{k,k} \quad .$$

Mit Hilfe von

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |f'(\phi)| w_k(\phi) w_k(\phi) d\phi &= \int_0^{2\pi} |f'(\phi)| \sum_{j=2}^k g_{k,j} v_j(\phi) \sum_{j=2}^k g_{k,j} v_j(\phi) d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} |f'(\phi)| \sum_{j=2}^k g_{k,j}^2 v_j^2(\phi) d\phi \\ &= \sum_{j=2}^k g_{k,j}^2 \end{aligned} \quad (2.24)$$

und (2.23) ist somit gezeigt

$$d_{k,k} = \sum_{j=2}^k g_{k,j}^2 = \sum_{j=2}^k b_{j,k}^2 \quad . \quad (2.25)$$

□

Sei nun zunächst n ungerade, $n = 2m + 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^n \frac{1}{\lambda_j} &\geq \sum_{j=2}^n \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} N_D(\theta, \phi) |f'(\theta)| |f'(\phi)| v_j(\theta) v_j(\phi) d\theta d\phi \\ &= \sum_{j=2}^n \sum_{k=2}^{\infty} \frac{b_{j,k}^2}{\lambda_k^{(0)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \sum_{j=2}^n \sum_{k=2}^n \frac{b_{j,k}^2}{\lambda_k^{(0)}} \\
&= \sum_{k=2}^n \frac{d_{k,k}}{\lambda_k^{(0)}} = \sum_{k=2}^{2m+1} \frac{d_{k,k}}{\lambda_k^{(0)}} \\
&= \sum_{k=1}^m \frac{d_{2k,2k} + d_{2k+1,2k+1}}{k} .
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Paarweise Addition ergibt

$$\begin{aligned}
d_{2k,2k} + d_{2k+1,2k+1} &= \int_0^{2\pi} |f'(\phi)| (w_{2k}^2(\phi) + w_{2k+1}^2(\phi)) d\phi \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f'(\phi)| \cdot \left[\left(\cos k\phi - \frac{\alpha_k}{\alpha_0} \right)^2 + \left(\sin k\phi - \frac{\beta_k}{\alpha_0} \right)^2 \right] d\phi \\
&= \alpha_0 - \frac{\alpha_k^2 + \beta_k^2}{\alpha_0} .
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Für die ersten $(n-1)$ nichttrivialen Eigenwerte des Problems (2.1) erhält man

$$\begin{aligned}
\sum_{j=2}^{2m+1} \frac{1}{\lambda_j} &\geq \frac{\alpha_0}{2} \cdot \sum_{j=2}^{2m+1} \frac{1}{\lambda_j^{(0)}} - \frac{1}{\alpha_0} \cdot \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_k^2 + \beta_k^2}{k} \\
&= \frac{2L}{2\pi} \cdot \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \frac{\pi}{L} \cdot \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_k^2 + \beta_k^2}{k} .
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Zur weiteren Abschätzung von (2.28) bzw. (2.27) wird nun folgende Aussage bewiesen:

Hilfssatz 2.4 Sei R_0 der konforme Radius von D bzgl. $w = f(0)$ und L die Länge der Randkurve von D . Dann gilt mit den Bezeichnungen gemäß 2.3.2

$$\frac{2L}{2\pi} - \frac{\pi}{L} \cdot (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \geq 2R_0 \tag{2.29}$$

für beliebiges $k \geq 1$. Genau dann, wenn $w = f(z) \equiv a_0 + R_0 \cdot e^{i\psi} z$, gilt das Gleichheitszeichen, d.h., D ist ein Kreis mit dem Radius R_0 und dem Mittelpunkt in $w = a_0$.

Beweis. Sei zunächst $f(z) \in \mathcal{S}$, damit ist $R_0 = 1$, $a_0 = 0$ und

$$\begin{aligned}
f(z) &= z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \\
f'(z) &= 1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots \\
\sqrt{f'(z)} &= 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \\
\sqrt{f'(z)}|_{|z|=1} &= \sqrt{f'(\phi)} = 1 + c_1 e^{i\phi} + c_2 e^{2i\phi} + \dots \\
\overline{\sqrt{f'(\phi)}} &= 1 + \overline{c_1} e^{-i\phi} + \overline{c_2} e^{-2i\phi} + \dots \\
|f'(\phi)| &= \sqrt{f'(\phi)} \cdot \overline{\sqrt{f'(\phi)}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j \cos j\phi + \beta_j \sin j\phi) \\
&= 1 + |c_1|^2 + |c_2|^2 + \dots \\
&\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \left[e^{ji\phi} (c_j + \sum_{n=j+1}^{\infty} c_n \bar{c}_{n-j}) + e^{-ji\phi} (\bar{c}_j + \sum_{n=j+1}^{\infty} \bar{c}_n c_{n-j}) \right] .
\end{aligned}$$

Die Fourierkoeffizienten von $|f'(\phi)|$ genügen folglich der Darstellung

$$\begin{aligned}
\frac{L}{2\pi} &= \frac{\alpha_0}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \\
\alpha_j &= 2\Re(c_j + \sum_{n=j+1}^{\infty} c_n \bar{c}_{n-j}) \quad j \geq 1 \\
\beta_j &= 2\Im(c_j + \sum_{n=j+1}^{\infty} c_n \bar{c}_{n-j}) \quad j \geq 1 .
\end{aligned} \tag{2.30}$$

(2.30) eingesetzt in (2.27) ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{2L}{2\pi} - \frac{\pi}{L} \cdot (\alpha_k^2 + \beta_k^2) &= \alpha_0 - \frac{1}{\alpha_0} \cdot (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \\
&= 2(1 + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2) - \frac{1}{\alpha_0} \cdot 4 \cdot |c_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} c_n \bar{c}_{n-k}|^2 \\
&= 2(1 + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2) - \frac{4}{\alpha_0} \cdot |c_k + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n+k} \bar{c}_n|^2 \\
&= 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 - \frac{4}{\alpha_0} \cdot |\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k} \bar{c}_n|^2 \quad (c_0 = 1) \\
&\geq 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 - \frac{4}{\alpha_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |c_{n+k}|^2
\end{aligned} \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 - \frac{4}{\alpha_0} \cdot \frac{\alpha_0}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |c_{n+k}|^2 \\
&= 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 - 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |c_{n+k}|^2 \\
&= 2 \cdot \sum_{n=0}^{k-1} |c_n|^2 \\
&\geq 2
\end{aligned} \tag{2.32}$$

mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung in (2.31).

Für die Funktionen der Abbildungsklasse \mathcal{S} ist also gezeigt: $\frac{2L}{2\pi} - \frac{\pi}{L} \cdot (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \geq 2$. Für die Abbildungsfunktionen der Klasse Σ verläuft der Beweis ganz analog.

Sei f nun eine beliebige schlicht konforme Abbildung des Inneren bzw. Äußeren des Einheitskreises. Dann ist $\tilde{f} = \frac{f-a_0}{a_1}$ Element der Abbildungsklasse \mathcal{S} bzw. Σ . Für f ergibt sich mit $|a_1| = R_0$

$$\begin{aligned} \frac{2L}{2\pi} - \frac{\pi}{L}(\alpha_k^2 + \beta_k^2) &= \frac{2\tilde{L}R_0}{2\pi} - \frac{\pi}{\tilde{L}R_0}(R_0^2\tilde{\alpha}_k^2 + R_0^2\tilde{\beta}_k^2) \\ &= R_0 \left(\frac{2\tilde{L}}{2\pi} - \frac{\pi}{\tilde{L}}(\tilde{\alpha}_k^2 + \tilde{\beta}_k^2) \right) \geq 2R_0 \quad . \end{aligned} \quad (2.33)$$

Gleichheit in (2.31) und damit in (2.32) bzw. (2.33) sowie in (2.29) gilt genau dann, wenn $c_0 = 1$ und $c_j = 0$ für $j \geq 1$, d.h., wenn $|f'(\phi)| \equiv 1$ bzw. $f(z) = a_0 + e^{i\psi}z$. Damit ist Hilfssatz 2.4 bewiesen. \square

Mit Hilfe von (2.29) ergibt sich aus (2.28)

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{2m+1} \frac{1}{\lambda_j} &\geq \frac{2L}{2\pi} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \frac{\pi}{L} \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_k^2 + \beta_k^2}{k} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \left(\frac{2L}{2\pi} - \frac{\pi}{L} \cdot (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \right) \\ &\geq 2R_0 \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \\ &= R_0 \sum_{j=2}^{2m+1} \frac{1}{\lambda_j^{(0)}} \end{aligned} \quad (2.34)$$

für beliebiges m .

Wegen (2.29) gilt aber auch

$$\max \{d_{2k,2k}, d_{2k+1,2k+1}\} \geq R_0. \quad (2.35)$$

Die bestmögliche Konstante in (2.34) und (2.35) ist der maximale konforme Radius bzw. der äußere konforme Radius R von D .

Daraus erhält man mit (2.26) (n nun beliebig) und (2.34) bei geeigneter Nummerierung der Eigenwerte des Einheitskreises folgenden Satz:

Satz 2.3 Für die Eigenwerte des Problems (2.1) gilt

$$\sum_{j=2}^n \frac{1}{\lambda_j} \geq R \sum_{j=2}^n \frac{1}{\lambda_j^{(0)}} \quad (2.36)$$

für beliebiges $n \geq 2$. Dabei bezeichnet $\lambda_j^{(0)}$ die Eigenwerte des Einheitskreises und R den maximalen konformen Radius bzw. den äußeren konformen Radius von D . Das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn D ein Kreis ist.

Das Resultat (2.36) aus Satz 2.3 ist scharf, jedoch wegen $R_0 \leq \frac{L}{2\pi}$ etwas schwächer als (2.6) von Hersch, Payne und Schiffer. Die Ursache liegt wohl darin, dass das Vorgehen dort sehr speziell auf das Problem zugeschnitten wurde. Hier wird nun eine allgemeinere Methode vorgeführt, die jedoch auf unterschiedliche Probleme anwendbar ist.

Zur Diskussion des Gleichheitszeichens. Da in (2.29) das Gleichheitszeichen nur für $f(z) = a_0 + a_1z$, d.h. eine Ähnlichkeitsabbildung angenommen wird, kann in (2.36) höchstens dann ein Gleichheitszeichen stehen, wenn D ein Kreis ist. Die Eigenwerte sind dann $\lambda_j = \frac{\lambda_j^{(0)}}{R}$; damit wird das Gleichheitszeichen in (2.36) natürlich angenommen. Mit $N_D = N_U$, $|f'(\phi)| \equiv R$ und $v_j = \frac{u_j^{(0)}}{\sqrt{R}}$ ergibt sich das Gleichheitszeichen auch in der Rechnung

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^n \frac{1}{\lambda_j} &= \max_{L_{n-1}} \sum_{j=2}^n \int_{\partial U} \int_{\partial U} N_D(z, \zeta) |f'(z)| |f'(\zeta)| v_j(z) v_j(\zeta) ds_z ds_\zeta \\ &= \sum_{j=2}^n \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} N_U(\theta, \phi) \cdot R \cdot R \cdot \frac{u_j^{(0)}(\theta) u_j^{(0)}(\phi)}{R} d\theta d\phi \\ &= R \sum_{j=2}^n \frac{1}{\lambda_j^{(0)}} \quad . \end{aligned} \tag{2.37}$$

□

Ferner gilt auch folgender

Satz 2.4 Sei $\Phi(x)$ für $x \geq 0$ eine konvexe, monoton wachsende Funktion. Dann gilt für die Eigenwerte des Problems (2.1)

$$\sum_{j=2}^n \Phi\left(\frac{1}{\lambda_j}\right) \geq \sum_{j=2}^n \Phi\left(R \frac{1}{\lambda_j^{(0)}}\right) \tag{2.38}$$

für beliebiges $n \geq 2$. Dabei bezeichnet $\lambda_j^{(0)}$ die Eigenwerte des Einheitskreises und R den maximalen konformen Radius bzw. den äußeren konformen Radius von D . Das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn D ein Kreis ist.

Speziell gelten Ungleichungen folgenden Typs:

$$\sum_{j=2}^n \frac{1}{\lambda_j^s} \geq R^s \sum_{j=2}^n \frac{1}{\lambda_j^{(0)s}}$$

für $s \geq 1$, vgl. auch Satz 4.4. Dies folgt aus (2.36) mittels eines Satzes von Schur, Hardy, Littlewood und Pólya [29], siehe auch bei [40] bzw. [38].

2.3.4 Zusatz für symmetrische Gebiete

Für Gebiete der Symmetrieordnung q gilt $\lambda_j \leq \frac{2\pi}{L} \lambda_j^{(0)}$ für $j \leq q$, vgl. (2.7) bzw. [3]. Daraus ergibt sich für $n \leq q$

$$\sum_{j=2}^n \frac{1}{\lambda_j} \geq \frac{L}{2\pi} \sum_{j=2}^n \frac{1}{\lambda_j^{(0)}}. \quad (2.39)$$

Der Einheitskreis kann mit Hilfe einer Abbildungsfunktion f mit

$$|f'(\phi)| = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_{q \cdot j} \cos(q \cdot j)\phi + \beta_{q \cdot j} \sin(q \cdot j)\phi)$$

auf das Gebiet D abgebildet werden. Alle übrigen Fourierkoeffizienten verschwinden aufgrund der Symmetrie des Gebietes. Damit gilt (2.39) auch für $n \leq 2q - 1$.

Ist D kein Kreis, so ist $L/2\pi > R$. Damit besteht für die ersten $2q - 2$ nichttrivialen Eigenwerte eines symmetrischen Gebietes eine schärfere Ungleichung als (2.36).

2.4 Eine unendliche Summe

2.4.1 Herleitung einer Formel zur Berechnung von $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$

Betrachtet wird weiterhin das Problem (2.1). Ziel ist es, eine Formel zur Berechnung der Summe $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$ zu bestimmen. Für die Eigenwerte von (2.1) gilt [6]

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2} &= \int_{\partial D} \int_{\partial D} N_D^2(\xi, \eta) ds_{\xi} ds_{\eta} \\ &= \int_{\partial U} \int_{\partial U} N_D^2(z, \zeta) |f'(z)| |f'(\zeta)| ds_z ds_{\zeta} \\ &= \int_{\partial U} \int_{\partial U} N_D(z, \zeta) (N_U(z, \zeta) + H(z) + H(\zeta) + const) |f'(z)| |f'(\zeta)| ds_z ds_{\zeta} \\ &= \int_{\partial U} \int_{\partial U} N_D(z, \zeta) N_U(z, \zeta) |f'(z)| |f'(\zeta)| ds_z ds_{\zeta} \\ &= \int_{\partial U} \int_{\partial U} N_U(z, \zeta) (N_U(z, \zeta) + H(z) + H(\zeta) + const) |f'(z)| |f'(\zeta)| ds_z ds_{\zeta} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (N_U^2(\theta, \phi) + 2N_U(\theta, \phi)H(\phi) + N_U(\theta, \phi) \cdot const) |f'(\theta)| |f'(\phi)| d\theta d\phi, \end{aligned} \quad (2.40)$$

vgl. 2.2 mit den Bezeichnungen gemäß (2.11) und 2.3.2. Zur Auswertung dieses Doppelintegrals wird der Integrand in eine Fourierreihe entwickelt.

Betrachtet wird der erste Summand in (2.40):

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} N_U^2(\theta, \phi) |f'(\theta)| |f'(\phi)| d\theta d\phi$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos j\theta \cos j\phi + \sin j\theta \sin j\phi}{j} \right)^2 \left(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j \cos j\phi + \beta_j \sin j\phi) \right) \\
&\quad \left(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j \cos j\theta + \beta_j \sin j\theta) \right) d\theta d\phi \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos j\phi \cos j\theta}{j} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos j\phi \cos j\theta}{j} + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos j\phi \cos j\theta}{j} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin j\phi \sin j\theta}{j} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin j\phi \sin j\theta}{j} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin j\phi \sin j\theta}{j} \right) \left(\frac{\alpha_0^2}{4} + \alpha_0 \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \cos j\phi + \alpha_0 \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \sin j\phi \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \cos j\phi \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \cos j\theta + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \cos j\phi \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \sin j\theta \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \sin j\theta \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \sin j\phi \right) d\theta d\phi \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos j\theta \cos j\phi}{j} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos j\theta \cos j\phi}{j} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin j\theta \sin j\phi}{j} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin j\theta \sin j\phi}{j} \right) \right. \\
&\quad \left(\alpha_0 \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \cos j\phi + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \cos j\theta \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \cos j\phi \right) + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos j\theta \cos j\phi}{j} \cdot \\
&\quad \left. \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin j\theta \sin j\phi}{j} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \sin j\theta \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \sin j\phi \right) d\theta d\phi + \frac{\pi^2 \alpha_0^2}{12} \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos j\theta \cos j\phi}{j} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos j\theta \cos j\phi}{j} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin j\theta \sin j\phi}{j} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin j\theta \sin j\phi}{j} \right) \right. \\
&\quad \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \cos j\theta \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \cos j\phi + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos j\theta \cos j\phi}{j} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin j\theta \sin j\phi}{j} \cdot \\
&\quad \left. \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \sin j\theta \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \sin j\phi \right) d\theta d\phi + \frac{\pi^2 \alpha_0^2}{12} \\
&= \frac{\pi^2 \alpha_0^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot (\alpha_k^2 + \beta_k^2) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \cdot (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \tag{2.41}
\end{aligned}$$

unter Zuhilfenahme der Beziehungen

$$\cos x \cos y \cos z = \frac{1}{4} (\cos(x+y-z) + \cos(x-y+z) + \cos(-x+y+z) + \cos(x+y+z))$$

$$\begin{aligned}
\sin x \sin y \cos z &= \frac{1}{4} (-\cos(x+y-z) + \cos(x-y+z) + \cos(-x+y+z) - \cos(x+y+z)) \\
\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{j+m}^2}{j \cdot m} &= \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\alpha_k^2}{j(k-j)} = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{2}{k} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \right) \alpha_k^2 \\
\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^2}{j(j+k)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \right) \alpha_k^2 \quad . \tag{2.42}
\end{aligned}$$

Für den zweiten Summanden in (2.40) gilt

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} 2N_U(\theta, \phi) H(\phi) |f'(\theta)| |f'(\phi)| d\theta d\phi \\
&= -\frac{2}{\pi^2 \alpha_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta \cos n\phi + \sin n\theta \sin n\phi}{n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \cos n\phi + \beta_n \sin n\phi}{n} \\
&\quad \cdot \left(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) \right) \left(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\phi + \beta_n \sin n\phi) \right) d\theta d\phi \\
&= -\frac{2}{\pi \alpha_0} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \cos n\phi + \beta_n \sin n\phi}{n} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \cos n\phi + \beta_n \sin n\phi}{n} \\
&\quad \cdot \left(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\phi + \beta_n \sin n\phi) \right) d\phi \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 + \beta_n^2}{n^2} \\
&\quad - \frac{2}{\pi \alpha_0} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \cos n\phi + \beta_n \sin n\phi}{n} \right)^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\phi + \beta_n \sin n\phi) d\phi \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 + \beta_n^2}{n^2} - \frac{2}{\alpha_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \alpha_m \alpha_{n+m}}{m \cdot n} + \frac{2}{\alpha_0} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{m+n} \beta_m \beta_n}{m \cdot n} \\
&\quad - \frac{4}{\alpha_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \beta_m \beta_{n+m}}{n \cdot m}. \tag{2.43}
\end{aligned}$$

Schließlich erhält man für den dritten Summanden in (2.40)

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} N_U(\theta, \phi) \cdot \text{const} \cdot |f'(\theta)| |f'(\phi)| d\theta d\phi \\
&= \frac{1}{\pi^2 \alpha_0^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 + \beta_n^2}{n} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta \cos n\phi + \sin n\theta \sin n\phi}{n} \\
&\quad \cdot \left(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) \right) \left(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\phi + \beta_n \sin n\phi) \right) d\theta d\phi
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\alpha_0^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 + \beta_n^2}{n} \right)^2 . \quad (2.44)$$

Insgesamt ergibt sich aus (2.41) bis (2.43) die gesuchte Formel. Man erhält

Satz 2.5 Für die Eigenwerte des Problems (2.1) gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2} &= \frac{L^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n (\alpha_n^2 + \beta_n^2) + \frac{1}{\alpha_0^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2 + \beta_n^2}{n} \right)^2 \\ &\quad - \frac{2}{\alpha_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \alpha_m \alpha_{n+m}}{n \cdot m} + \frac{2}{\alpha_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n+m} \beta_n \beta_m}{n \cdot m} - \frac{4}{\alpha_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \beta_m \beta_{n+m}}{n \cdot m} \end{aligned} \quad (2.45)$$

mit den Bezeichnungen $B_1 = 0$ und $B_j = \frac{2}{j} \sum_{m=1}^{j-1} \frac{1}{m}$ für $j = 2, 3, \dots$ und α_j, β_j Fourierkoeffizienten gemäß 2.3.2.

Für die Eigenwerte des Einheitskreises erhält man

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^{(0)^2}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{j^2} = \frac{L^2}{12} = \frac{\pi^2}{3} , \quad (2.46)$$

wobei $\lambda_{2j}^{(0)} = \lambda_{2j+1}^{(0)} = j$ für $j = 1, 2, \dots$.

2.4.2 Abbildung des Einheitskreises in sich

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$. Dann bildet $f(z) = \frac{z-x}{1-zx}$ den Einheitskreis schlicht konform in sich selbst ab.

Hilfssatz 2.5 Für die genannte Abbildung gilt auf dem Rand des Einheitskreises

$$|f'(\phi)| = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos n\phi . \quad (2.47)$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1-x^2}{(1-zx)^2} \quad \text{und} \\ |f'(z)|_{|z|=1} &= |f'(\phi)| = \frac{1-x^2}{(1-xe^{i\phi})(1-xe^{-i\phi})} = \frac{1-x^2}{1-2x \cos \phi + x^2} . \end{aligned} \quad (2.48)$$

Andererseits gilt auch

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos n\phi &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos n\phi + i \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin n\phi + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos n\phi - i \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin n\phi \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n e^{in\phi} + \sum_{n=1}^{\infty} x^n e^{-in\phi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{xe^{i\phi}}{1 - xe^{i\phi}} + \frac{xe^{-i\phi}}{1 - xe^{-i\phi}} \\
&= \frac{1 - xe^{i\phi} - xe^{-i\phi} + x^2 + xe^{i\pi} - x^2 + xe^{-i\phi} - x^2}{1 - xe^{i\phi} - xe^{-i\phi} + x^2} \\
&= \frac{1 - x^2}{1 - 2x \cos \phi + x^2} \quad . \quad (2.49)
\end{aligned}$$

Mit (2.48) und (2.49) folgt die Behauptung des Hilfssatzes 2.5. \square

Anwendung von Satz 2.5 liefert für die Eigenwerte des Einheitskreises

$$\begin{aligned}
\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^{(0)^2}} &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \cdot 4x^{2n} + \frac{1}{4} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4x^{2n}}{n} \right)^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8x^{2n+2m}}{n \cdot m} \\
&= \frac{\pi^2}{3} + 4 \ln^2(1 - x^2) + 4 \ln^2(1 - x^2) - 8 \ln^2(1 - x^2) \\
&= \frac{\pi^2}{3} \quad . \quad (2.50)
\end{aligned}$$

Dieses Resultat ist nicht neu, kann jedoch als „Test“ für die Gültigkeit oben hergeleiteter Formel betrachtet werden.

2.5 Numerische Resultate

2.5.1 Die Joukowski-Abbildung.

$g(z) = z + \frac{1}{z}$ bildet das Innere bzw. das Äußere des Einheitskreises schlicht konform auf das Äußere des Schlitzes von -2 bis 2 ab [28]. Dies ist der Grenzfall der Abbildung auf das Äußere einer Ellipse. Die Länge der Randkurve des Bildgebietes beträgt 8, da der Schlitz doppelt zu zählen ist. Es ist

$$|g'(z)|_{|z|=1} = 2|\sin \phi| \sim \frac{4}{\pi} - \frac{8}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos 2j\phi}{(2j-1)(2j+1)} =: |g'(\phi)| \quad . \quad (2.51)$$

Für die normierte Funktion $f(z) = \frac{2\pi}{8} \cdot g(z)$ gilt

$$|f'(\phi)| = 1 - 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos 2j\phi}{(2j-1)(2j+1)} \quad (2.52)$$

mit $\alpha_0 = 2$ und $\alpha_{2j} = 2/((2j-1)(2j+1))$. Eingesetzt in (2.45) ergibt sich für die Summe der reziproken Eigenwerte im Falle des Schlitzes der Länge 2π

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2} = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{j=1}^{\infty} B_{2j} \frac{4}{(2j-1)^2(2j+1)^2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(2k-1)^2(2k+1)^2} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)(2m-1)(2m+1)(2n+2m-1)(2n+2m+1) \cdot n \cdot m} \\
& = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{j=1}^J B_{2j} \frac{4}{(2j-1)^2(2j+1)^2} + (3-4\ln 2)^2 \\
& + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \frac{2}{(2n-1)(2n+1)(2m-1)(2m+1)(2n+2m-1)(2n+2m+1) \cdot n \cdot m} \\
& + \Delta(J, N, M). \tag{2.53}
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten B_j sind für $j \geq 2$ offensichtlich positiv und wegen

$$\begin{aligned}
B_j - B_{j+1} & = \frac{2}{j} \sum_{m=1}^{j-1} \frac{1}{m} - \frac{2}{j+1} \sum_{m=1}^j \frac{1}{m} \\
& = \left(\frac{2}{j} - \frac{2}{j+1} \right) \sum_{m=1}^{j-1} \frac{1}{m} - \frac{2}{(j+1)j} \\
& = \frac{2}{j(j+1)} \sum_{m=1}^{j-1} \frac{1}{m} - \frac{2}{(j+1)j} \\
& = \frac{2}{j(j+1)} \sum_{m=2}^{j-1} \frac{1}{m} > 0 \quad \text{für } j \geq 2 \tag{2.54}
\end{aligned}$$

monoton fallend, für $j \geq 3$ streng monoton fallend.

Es ergibt sich die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned}
\Delta(J, N, M) & = \sum_{j=J+1}^{\infty} B_{2j} \frac{4}{(2j-1)^2(2j+1)^2} \\
& + \sum_{n=1}^N \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{2}{(4n^2-1)(4m^2-1)(2n+2m-1)(2n+2m+1) \cdot n \cdot m} \\
& + \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{(4n^2-1)(4m^2-1)(2n+2m-1)(2n+2m+1) \cdot n \cdot m} \\
& \leq B_{2J+2} \sum_{j=J+1}^{\infty} \frac{4}{(2j-1)^2(2j+1)^2} \\
& + \sum_{n=1}^N \frac{2}{n(2n-1)(2n+1)} \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{1}{m(2m-1)(2m+1)(2m+3)} \\
& + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2}{n(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(2m-1)(2m+1)} \\
& \leq 1.42837 \cdot 10^{-9} \quad \text{für } J = N = M = 100 \quad . \tag{2.55}
\end{aligned}$$

Für die Summe der reziproken Eigenwerte im Falle des Schlitzes der Länge 2π erhält man

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2} \approx 3.82234254_{35}^{20} \quad . \quad (2.56)$$

2.5.2 Abbildung auf das Äußere einer Ellipse

$g_r(z) = rz + \frac{1}{rz}$ bildet das Innere bzw. Äußere des Einheitskreises schlicht konform auf das Äußere einer Ellipse mit den Halbachsen $r - \frac{1}{r}$, $r + \frac{1}{r}$ und dem Umfang $U(r)$ ab, $r \geq 1$. Die zugehörige normierte Abbildungsfunktion $f_r(z) = \frac{2\pi}{U(r)} \left(rz + \frac{1}{rz}\right)$ bildet auf das Äußere einer Ellipse mit Umfang 2π und dem Halbachsenverhältnis $HV = \left(r - \frac{1}{r}\right) : \left(r + \frac{1}{r}\right)$, $0 \leq HV < 1$ ab.

Die Fourierkoeffizienten von $|f_r'(\phi)|$ berechnen sich aus

$$\alpha_{2j}(r) = \frac{1}{\pi} \frac{2\pi}{U(r)} \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \frac{1}{r^2} - 2 \cos 2\phi \cos 2j\phi} d\phi \quad (2.57)$$

für $j \geq 1$. Ferner ist $\alpha_0 = 2$. Alle übrigen Fourierkoeffizienten sind aus Symmetriegründen 0. Es gilt für $j \geq 1$ $\alpha_{2j}(r) < 0$; $|\alpha_{2j}(r)|$ ist streng monoton fallend für wachsendes j bei festem r und streng monoton fallend für wachsendes r bei festem j , [28].

Aus dieser Eigenschaft der Fourierkoeffizienten ergibt sich mit (2.45) unmittelbar:

Satz 2.6 *Sei D das Äußere einer Ellipse mit Umfang 2π und dem Halbachsenverhältnis $0 \leq HV \leq 1$. Dann gilt für die Stekloffschen Eigenwerte von D : Für wachsendes Halbachsenverhältnis ist $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2(HV)}$ streng monoton fallend.*

$HV = 1$ wird für den Einheitskreis angenommen und ergibt sich mit $r \rightarrow \infty$. Eine Fehlerabschätzung für die numerische Berechnung von $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2(HV)}$ erhält man in einfacher Weise mit (2.55) und

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2(HV)} &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{j=2}^J B_{2j} \alpha_{2j} + \left(\sum_{k=1}^K \frac{\alpha_{2k}^2}{2k} \right)^2 - \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \frac{\alpha_{2n} \alpha_{2m} \alpha_{2n+2m}}{2n \cdot 2m} \\ &\quad + \Delta_r(J, K, N, M). \end{aligned}$$

Dabei gilt

$$\Delta_r(J, K, N, M) \leq \Delta(J, N, M) + \Delta_r(K)$$

$$\begin{aligned} \Delta_r(K) &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{2k}^2}{2k} \right)^2 - \left(\sum_{k=1}^K \frac{\alpha_{2k}^2}{2k} \right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^K \frac{\alpha_{2k}^2}{2k} \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{\alpha_{2k}^2}{2k} + \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{\alpha_{2k}^2}{2k} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{2k}^2}{2k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2 \sum_{k=1}^K \frac{2}{k(2k-1)^2(2k+1)^2} \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{2}{k(2k-1)^2(2k+1)^2} \\
&\quad + \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{2}{k(2k-1)^2(2k+1)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(2k-1)^2(2k+1)^2}.
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Dies ist eine sehr grobe, aber einfache Abschätzung, die bereits für $J = N = M = 100$ und kleine K gute Ergebnisse liefert.

In der folgenden Tabelle sind einige numerische Resultate für verschiedene r bzw. HV und $J = K = N = M = 100$ zusammengefaßt. Die dritte Spalte enthält numerische Werte für Ellipsen mit Länge der Randkurve $L = 2\pi$. Eine einheitliche Fehlerschranke ist $1.7 \cdot 10^{-9}$, die vierte Spalte enthält numerische Werte für Ellipsen mit äußerem konformen Radius 1. Eine einheitliche Fehlerschranke ist hier $2.8 \cdot 10^{-9}$.

Zum Vergleich: Der numerische Wert für die Eigenwerte des Einheitskreises beträgt

$$\frac{\pi^2}{3} \approx 3.28986813_4^3 .$$

Die strenge Monotonie der Werte in Spalte drei ist bereits nachgewiesen worden, vgl. Satz 2.6. Auch für Ellipsen mit äußerem konformen Radius 1 deuten die Werte in Spalte vier auf Monotonie in Abhängigkeit vom Halbachsenverhältnis hin.

r	HV	$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$ für $L = 2\pi$	$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$ für $R = 1$
$\frac{11}{10}$	0.095023	3.7607996_{903}^{885}	5.23482518_{91}^{62}
$\frac{12}{10}$	0.180328	3.66905525_{55}^{37}	4.64154251_{79}^{50}
$\frac{13}{10}$	0.256506	3.58703410_{71}^{53}	4.25896350_{89}^{60}
$\frac{14}{10}$	0.324324	3.52156474_{66}^{48}	4.0033488_{128}^{99}
$\frac{15}{10}$	0.384615	3.47123979_{94}^{76}	3.82722457_{71}^{42}
$\frac{16}{10}$	0.438202	3.43296542_{98}^{80}	3.70257441_{41}^{12}
$\frac{17}{10}$	0.485861	3.40382947_{88}^{70}	3.61227906_{94}^{65}
$\frac{18}{10}$	0.528302	3.3815133_{816}^{798}	3.54549859_{62}^{33}
$\frac{19}{10}$	0.566161	3.36427548_{92}^{74}	3.4952334_{610}^{581}
$\frac{20}{10}$	0.6	3.35083494_{58}^{40}	3.4567887_{100}^{971}
$\frac{21}{10}$	0.630314	3.34025477_{65}^{47}	3.42696605_{48}^{19}

Tabelle 1: Das Äußere einer Ellipse

r	HV	$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$ für $L = 2\pi$	$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$ für $R = 1$
$\frac{22}{10}$	0.657534	3.3318480_{211}^{193}	3.40353687_{67}^{38}
$\frac{23}{10}$	0.682035	3.32510798_{47}^{29}	3.38491911_{29}^{30}
$\frac{24}{10}$	0.704142	3.31965798_{32}^{14}	3.36997075_{44}^{15}
$\frac{25}{10}$	0.724138	3.31521553_{81}^{63}	3.3578548_{615}^{586}
$\frac{26}{10}$	0.742268	3.31156690_{75}^{57}	3.3479496_{113}^{084}
$\frac{27}{10}$	0.758745	3.3085489_{900}^{082}	3.33978717_{44}^{15}
$\frac{28}{10}$	0.773756	3.30603587_{41}^{23}	3.3330115_{200}^{171}
$\frac{29}{10}$	0.78746	3.30393019_{98}^{80}	3.32734882_{55}^{26}
$\frac{30}{10}$	0.8	3.30215547_{55}^{37}	3.32258643_{43}^{14}

Tabelle 1: (Fortsetzung) Das Äußere einer Ellipse

Bezeichne $\tilde{f}_r(z) = z + \frac{1}{r^2 z}$ die Abbildung auf das Äußere einer Ellipse mit Äußerem konformen Radius 1 und dem Halbachsenverhältnis $HV = (1 - r) : (1 + r)$ und $\tilde{\alpha}_{2j}(r) = \frac{1}{\pi r} \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \frac{1}{r^2} - 2 \cos 2\phi \cos 2j\phi} d\phi$ sowie $\frac{\tilde{\alpha}_0(r)}{2} = \frac{1}{\pi r} \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \frac{1}{r^2} - 2 \cos 2\phi} d\phi$ die Fourierkoeffizienten von $|\tilde{f}'_r(\phi)|$.

Da $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \frac{1}{r^2} - 2 \cos 2\phi \cos 2j\phi} d\phi < 0$ und $|\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \frac{1}{r^2} - 2 \cos 2\phi \cos 2j\phi} d\phi|$ streng monoton fallend, gilt dies offensichtlich auch für $\tilde{\alpha}_{2j}(r)$, vgl. dazu die Resultate in [28].

Aus der Darstellung

$$\sqrt{1 + \frac{1}{r^2} - 2 \cos 2\phi} = \sqrt{1 + \frac{1}{r^2}} - \frac{2 \cos 2\phi}{2\sqrt{1 + \frac{1}{r^2}}} - \frac{(2 \cos 2\phi)^2}{8(1 + \frac{1}{r^2})\sqrt{1 + \frac{1}{r^2}}} - \frac{(2 \cos 2\phi)^3}{16(1 + \frac{1}{r^2})^2\sqrt{1 + \frac{1}{r^2}}} - \dots$$

lässt sich unmittelbar ablesen, dass auch $\frac{\tilde{\alpha}_0(r)}{2}$ in r streng monoton fällt. Mit (2.45) folgt

Satz 2.7 Sei D das Äußere einer Ellipse mit äußerem konformen Radius 1 und dem Halbachsenverhältnis $0 \leq HV \leq 1$. Dann gilt für die Stekloffschen Eigenwerte von D : Für wachsendes Halbachsenverhältnis ist $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2(HV)}$ streng monoton fallend.

2.5.3 Abbildung auf das Innere eines regulären n -Ecks.

Mit Hilfe der Schwarz-Christoffelschen-Formel kann das Innere des Einheitskreises konform auf das Innere eines Polygons abgebildet werden. Speziell liefert

$$f_n(z) = \int_0^z \frac{1}{(1 - z^n)^{\frac{2}{n}}} dz$$

die Abbildung auf das Innere eines regulären n -Ecks mit maximalem konformen Radius 1. Die Fourierkoeffizienten des Betrages der Ableitung der Abbildungsfunktion auf dem Rand des Einheitskreises berechnen sich mit

$$\alpha_{nj}^{(n)} = \frac{4}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2j\phi}{(2 \sin \phi)^{\frac{2}{n}}} d\phi \quad . \quad (2.59)$$

Die nachfolgende Tabelle enthält für verschiedene n untere Schranken für $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$ eines regulären n -Ecks mit maximalem konformen Radius 1 in Spalte zwei und in der dritten Spalte zugehörige Fehlerschranken. Spalte vier und fünf enthalten die entsprechenden Werte für reguläre n -Ecke mit Länge der Randkurve $L = 2\pi$.

n	$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$ für $R = 1$	Δ	$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$ für $L = 2\pi$	Δ
4	5.78498	0.5434	4.14229	0.3901
5	4.42178	0.0596	3.66311	0.0494
6	3.94136	0.0131	3.48964	0.0124
7	3.71441	0.0050	3.41074	0.0046
8	3.58869	0.0025	3.36915	0.0023
9	3.51162	0.0015	3.34495	0.0014
10	3.46093	0.0010	3.32984	0.0009
11	3.42581	0.0009	3.31987	0.0009
12	3.40046	0.0009	3.31301	0.0009
13	3.38158	0.0009	3.30813	0.0009
14	3.36713	0.0009	3.30455	0.0009
15	3.35583	0.0009	3.30186	0.0009
16	3.34684	0.0009	3.29980	0.0009
17	3.33955	0.0009	3.29819	0.0009
18	3.33358	0.0009	3.29692	0.0009
19	3.32861	0.0009	3.29590	0.0009
20	3.32445	0.0009	3.29507	0.0009

Tabelle 2: Das Innere eines regulären n -Ecks

Die numerischen Werte in den Spalten 2 und 4 deuten auf Monotonie der Summe in Abhängigkeit von der Eckenzahl n sowohl für maximalen konformen Radius $R = 1$ als auch für konstante Länge der Randkurve $L = 2\pi$ hin.

Auffallend sind die hohen Fehlerschranken. Dies ist auf die geringe Regularität des Betrages der Ableitung der Abbildungsfunktion zurückzuführen. Insbesondere für $n = 3$ und $n = 4$ ist $|f'_n(z)|_{|z|=1}$ keine L_2 -Funktion. Speziell für $n = 3$ liefern die numerischen

Rechnungen kein sinnvolles Ergebnis; man erhält eine Fehlerschranke, welche größer als die numerische Näherung ist.

Auf ausführliche Rechnungen zur Bestimmung der Fehlerschranken sei hier verzichtet.

2.5.4 Abbildung auf das Äußere eines regulären n -Ecks

Auf ausführliche Rechnungen zur Bestimmung der Fehlerschranken sei ebenfalls für den Fall der Abbildung des Äußeren des Einheitskreises auf das Äußere eines regulären n -Ecks verzichtet. Die Abbildung erfolgt durch

$$f_n(z) = \int_1^z \frac{(1 - z^n)^{\frac{2}{n}}}{z^2} dz \quad .$$

Der äußere konforme Radius hierbei ist $R = 1$. Die für die Berechnungen erforderlichen Fourierkoeffizienten ergeben sich für $n \geq 3$ und $j = 1, 2, \dots$ aus

$$\alpha_{nj}^{(n)} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin \phi)^{\frac{n}{2}} \cos 2j\phi d\phi \quad .$$

Die numerischen Werte für die Summen der reziproken Eigenwerte zu verschiedenen n sind für äußeren konformen Radius $R = 1$ in Spalte 2 sowie für konstante Länge der Randkurve $L = 2\pi$ in Spalte 4 der Tabelle 3 zusammengestellt. Die Spalten 3 und 5 enthalten die zugehörigen Fehlerschranken.

n	$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$ für $R = 1$	Δ	$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$ für $L = 2\pi$	Δ
3	4.571611	0.00043	3.567013	0.00034
4	4.019829	0.00027	3.454634	0.00023
5	3.760826	0.00020	3.395219	0.00018
6	3.618474	0.00015	3.361313	0.00014
7	3.531895	0.00013	3.340612	0.00012
8	3.475360	0.00011	3.327259	0.00010
9	3.436438	0.00009	3.318252	0.00009
10	3.408523	0.00008	3.311951	0.00008
11	3.383734	0.00008	3.307405	0.00008
12	3.372086	0.00008	3.304041	0.00008
13	3.359826	0.00008	3.301495	0.00008
14	3.350098	0.00008	3.299531	0.00008
15	3.342255	0.00008	3.297992	0.00008

Tabelle 3: Das Äußere eines regulären n -Ecks

n	$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$ für $R = 1$	Δ	$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$ für $L = 2\pi$	Δ
16	3.335839	0.00008	3.296767	0.00008
17	3.330526	0.00008	3.295779	0.00008
18	3.326078	0.00008	3.294974	0.00008
19	3.322318	0.00008	3.294311	0.00008
20	3.319110	0.00008	3.293767	0.00008

Tabelle 3: (Fortsetzung) Das Äußere eines regulären n -Ecks

3 Das Stekloffsche Eigenwertproblem im zweifach zusammenhängenden Gebiet

3.1 Das Eigenwertproblem

Sei nun D ein zweifach zusammenhängendes Gebiet in der Ebene mit den beiden Randkomponenten C_1 und C_2 . Die Ränder von D seien hinreichend glatt, d.h., sie seien stückweise analytisch und besitzen keine Nullwinkel. Betrachtet wird das Stekloffsche Eigenwertproblem im zweifach zusammenhängenden Gebiet

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & \text{in } D \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \lambda u & \text{auf } \partial D = C_1 \cup C_2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

mit λ als Eigenwertparameter, $\frac{\partial u}{\partial n}$ Außennormale und konstanter spezifischer Masse $\sigma \equiv 1$ auf dem Rand, vgl. 2.1.

Ganz analog zum Stekloffschen Problem im einfach zusammenhängenden Gebiet besitzt (3.1) die Eigenwerte $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ endlicher Vielfachheit mit den zugehörigen Eigenfunktionen $u_1 \equiv \text{const}, u_2, u_3, \dots$. Das System der Eigenfunktionen ist vollständig und orthonormiert mit

$$\int_{C_1 \cup C_2} u_i u_j ds = \delta_{ij}.$$

3.2 Der Kreisring

Sei $A(1, R)$ ein Kreisring mit den Radien $r_1 = 1$ und $1 < r_2 = R < \infty$. In diesem Fall lassen sich die Eigenwerte und Eigenfunktionen zu (3.1) leicht angeben.

Neben $u_1 \equiv \text{const}$ existiert genau eine radiale Eigenfunktion. Dies ergibt sich unmittelbar aus der folgenden Differentialgleichung

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\phi\phi} + \frac{1}{r} u_r = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r = 0$$

und den zugehörigen Randbedingungen. Es gilt

$$0 = r(u_{rr} + \frac{u_r}{r}) = (ru_r + \text{const})'$$

und folglich erhält man als $u_{rad} = c_2(\ln r + c_1)$. Der zugehörige Eigenwert ergibt sich in einfacher Weise aus den Randbedingungen

$$\begin{aligned} r = 1 : \quad -u_r &= -\frac{1}{r} = -1 = \lambda u = \lambda c_2(\ln r + c_1) = \lambda c_2 c_1 \\ r = R : \quad u_r &= \frac{1}{R} = \lambda u = \lambda c_2(\ln R + c_1) \quad . \end{aligned} \quad (3.2)$$

Man erhält $\lambda_{rad}(R) = \frac{1+R}{R \ln R}$.

Ferner ist mit jeder Eigenfunktion $(A_n r^n + A_{-n} r^{-n}) \cos n\phi$ auch $(A_n r^n + A_{-n} r^{-n}) \sin n\phi$ Eigenfunktion des Kreisringes $A(1, R)$ mit $z = r e^{i\phi}$, [12]. Aus den Randbedingungen

$$r = 1 : \quad -n \cdot A_n + n \cdot A_{-n} = \lambda (A_n + A_{-n}) \quad (3.3)$$

$$r = R : \quad n \cdot A_n R^{n-1} - n \cdot A_{-n} R^{-n-1} = \lambda (A_n R^n + A_{-n} R^{-n}) \quad . \quad (3.4)$$

ergibt sich $A_n = A_{-n} \cdot \frac{n-\lambda}{n+\lambda}$ sowie

$$\lambda^2 - \lambda \cdot n \cdot \frac{R+1}{R} \cdot \frac{R^{2n}+1}{R^{2n}-1} + \frac{n^2}{R} = 0 \quad . \quad (3.5)$$

D.h., für jedes n existieren zwei verschieden Eigenwerte $\lambda_1(n, R) < \lambda_2(n, R)$; diese treten jeweils doppelt auf, zum Sinus bzw. zum Kosinus.

Dies sind sämtliche Eigenwerte.

Für $R \rightarrow \infty$ ergibt sich aus (3.5)

$$\lambda^2 - \lambda n = 0 \quad .$$

Man erhält den trivialen Eigenwert sowie wiederum jeweils doppelt auftretend $\lambda_{2n} = \lambda_{2n+1} = n$ die Eigenwerte des Äußeren des Einheitskreises. Im Grenzfall ergibt sich also ein einfach zusammenhängendes Gebiet.

3.2.1 Eigenschaften der Eigenwerte des Kreisringes

Für die Eigenwerte des Kreisringes $A(1, R)$ gilt [12]

Hilfssatz 3.1 *Die Folge $\lambda_1(n, R)$ ist streng monoton wachsend in n .*

Beweis. Für $\lambda_1(n, R)$ gilt mit (3.5)

$$\begin{aligned} \lambda_1(n, R) &= n \cdot \frac{R+1}{2R} \cdot \frac{R^{2n}+1}{R^{2n}-1} - \sqrt{\left(n \cdot \frac{R+1}{2R} \cdot \frac{R^{2n}+1}{R^{2n}-1}\right)^2 - \frac{n^2}{R}} \\ &= \frac{\frac{n}{R}}{\frac{R+1}{2R} \cdot \frac{R^{2n}+1}{R^{2n}-1} + \sqrt{\left(\frac{R+1}{2R} \cdot \frac{R^{2n}+1}{R^{2n}-1}\right)^2 - \frac{1}{R}}} \quad . \end{aligned} \quad (3.6)$$

Aus (3.6) lässt sich die Behauptung des Hilfssatzes 3.1 unmittelbar ablesen, da $\frac{R^{2n}+1}{R^{2n}-1}$ streng monoton fallend. \square

Weiterhin gilt

Hilfssatz 3.2 *Die Folge $\lambda_2(n, R)$ ist streng monoton wachsend in n bei festem R .*

Für den **Beweis** des Hilfssatzes 3.2 werden $\lambda_1(n, R)$, $\lambda_2(n, r)$ als Funktionen in n aufgefasst. Diese sind differenzierbar.

Da $\lambda_1(n, R)$ streng monoton wachsend ist, genügt es zu zeigen, dass $\frac{\partial}{\partial n} \lambda_1(R, n) \cdot \frac{\partial}{\partial n} \lambda_2(R, n) > 0$.

Abkürzend wird zunächst bezeichnet $f(n) = n \cdot \frac{R+1}{2R} \cdot \frac{R^{2n}+1}{R^{2n}-1}$. Damit ist $\lambda_1(R, n) = f(n) - \sqrt{f^2(n) - \frac{n^2}{R}}$ und $\lambda_2(R, n) = f(n) + \sqrt{f^2(n) - \frac{n^2}{R}}$.

Es ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial n} \lambda_1(n, R) \cdot \frac{\partial}{\partial n} \lambda_2(n, R) = \frac{\frac{2n}{R} f(n) f'(n) - \frac{n^2}{R} f'^2(n) - \frac{n^2}{R^2}}{f^2(n) - \frac{n^2}{R}} \quad . \quad (3.7)$$

Da der Nenner positiv ist, genügt es, den Zähler von (3.7) zu betrachten. Wiedereinsetzen von f und f' liefert

$$\begin{aligned} & \frac{2n^2}{R} \left(\frac{R+1}{2R} \right)^2 \frac{R^{2n}+1}{(R^{2n}-1)^3} (R^{4n}-1-2R^{2n} \ln R^{2n}) \\ & - \frac{n^2}{R} \left(\frac{R+1}{2R} \right)^2 \frac{(R^{4n}-1-2R^{2n} \ln R^{2n})^2}{(R^{2n}-1)^4} - \frac{n^2}{R} \\ = & \frac{n^2}{4R^3} \frac{1}{(R^{2n}-1)^4} \left(2(R+1)^2 (R^{2n}+1) (R^{2n}-1) (R^{4n}-1-2R^{2n} \ln R^{2n}) \right. \\ & \left. - (R+1)^2 (R^{4n}-1-2R^{2n} \ln R^{2n})^2 - 4R (R^{2n}-1)^4 \right) \\ = & \frac{n^2}{4R^3} \frac{1}{(R^{2n}-1)^4} \left((R+1)^2 ((R^{4n}-1)^2 - 4R^{4n} \ln^2 R^{2n}) \right. \\ & \left. - 4R ((R^{4n}-1)^2 - 4(R^{2n}-1)^2 R^{2n}) \right) \\ & \text{wegen } (R^{4n}-1)^2 - 4R^{4n} \ln^2 R^{2n} > 0 \quad (\text{siehe unten}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\text{und } (R+1)^2 > 4R \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} & \geq \frac{n^2}{4R^3} \frac{1}{(R^{2n}-1)^4} \cdot 4R \cdot ((R^{4n}-1)^2 - 4R^{4n} \ln^2 R^{2n} - (R^{4n}-1)^2 + 4(R^{2n}-1)^2 R^{2n}) \\ = & \frac{n^2}{4R^3} \frac{1}{(R^{2n}-1)^4} \cdot 4R \cdot (4R^{2n}((R^{2n}-1)^2 - R^{2n} \ln^2 R^{2n})) > 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Zur Gültigkeit von (3.8). Setzt man $x = R^{4n}$, so erhält man die Hilfsfunktion

$$\begin{aligned} h_1(x) &= (R^{4n}-1)^2 - 4R^{4n} \ln^2 R^{2n} = (R^{4n}-1)^2 - R^{4n} \ln^2 R^{4n} \\ &= (x-1)^2 - x \ln^2 x \quad . \end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} h_1(1) &= 0 \\ h_1'(x) &= 2(x-1) - \ln^2 x - 2 \ln x & h_1'(1) &= 0 \\ h_1''(x) &= \frac{2}{x}(x - \ln x - 1) & h_1''(1) &= 0 \\ h_2(x) &= x - \ln x - 1 & h_2'(x) &= 1 - \frac{1}{x} > 0 \quad \text{für } x > 1 \quad . \end{aligned}$$

Damit folgt $h_1''(x) > 0$ für $x > 1$, $h_1'(x) > 0$ für $x > 1$, $h_1(x) > 0$ für $x > 0$ und somit auch (3.8). Die Gültigkeit von (3.9) ist offensichtlich; (3.10) wird gezeigt wie (3.8) mit $x = R^{2n}$. Mit (3.8), (3.9) und (3.10) folgt die Behauptung: $\lambda_2(n, R)$ ist streng monoton wachsend in n . \square

Hilfssatz 3.3 Für den radialen Eigenwert gilt $\lambda_1(1, R) < \lambda_{rad}(R)$.

Beweis. Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} \lambda_1(R, 1) &= \frac{\frac{1}{R}}{\frac{\frac{R+1}{2R} \cdot \frac{R^2+1}{R^2-1} + \sqrt{\left(\frac{R+1}{2R} \cdot \frac{R^2+1}{R^2-1}\right)^2 - \frac{1}{R}}}} \\ &< \frac{2}{R+1} \cdot \frac{R^2-1}{R^2+1} = \frac{2(R-1)}{R^2+1} \quad . \end{aligned}$$

Bleibt zu zeigen

$$\frac{2(R-1)}{R^2+1} < \frac{1+R}{R \ln R} = \lambda_{rad}(R) \quad . \quad (3.11)$$

Von der Gültigkeit von (3.11) kann man sich überzeugen, indem man für die Hilfsfunktion $h(R) = (R^2+1)(R+1) - 2R \ln R(R-1)$ zeigt: $h(R) > 0$ für $R = 1$, $h'(R) > 0$ für $R = 1$, $h''(R) > 0$ für $R = 1$ sowie $(h''(R) \cdot R)' > 0$ für $R \geq 1$. Damit erhält man $h''(R) \cdot R > 0$ für $R \geq 1$, $h''(R) > 0$ für $R \geq 1$, $h'(R) > 0$ für $R \geq 1$ und schließlich $h(R) > 0$ für $R = 1$. Mit $h(R) > 0$ für $R = 1$ folgt die Gültigkeit von Hilfssatz 3.3. \square

Weiterhin gelten

Hilfssatz 3.4 Der radiale Eigenwert genügt der Ungleichung $\lambda_2(1, R) > \lambda_{rad}(R)$.

und

Hilfssatz 3.5 Der radiale Eigenwert genügt der Ungleichung $\lambda_{rad}(R) > \lambda_1(3, R)$.

Der **Beweis** von Hilfssatz 3.4 erfolgt durch den Nachweis von $(\lambda_2(1, R) - \lambda_{rad}(R)) \cdot (\lambda_{rad}(R) - \lambda_1(1, R)) > 0$. Hilfssatz 3.5 ergibt sich durch den Nachweis von $(\lambda_2(3, R) - \lambda_{rad}(R)) \cdot (\lambda_{rad}(R) - \lambda_1(3, R)) > 0$. Die Nachweise sind einfach, aber aufwendig und werden deshalb hier nicht angegeben. Sie erfolgen auf die oben dargestellte Weise.

Für $R \rightarrow 1$ wird $\lambda_{rad}(R)$ beliebig groß, während $\lambda_1(n, R)$ und $\lambda_2(n, R)$ für festes n gegen 0 streben, so dass $\lambda_{rad}(R)$ eine beliebig große Eigenwertnummer besitzen kann. Vergleiche dazu das Courantsche Knotenlinientheorem [4]: Die Knotenlinien der n -ten Eigenfunktion teilen das Gebiet in höchstens n Teilgebiete. Die radiale Eigenfunktion im Kreisring besitzt genau eine Knotenlinie bzw. teilt den Kreisring in zwei Teilgebiete, jedoch kann sie eine beliebig hohe Ordnungszahl besitzen. Andererseits gilt aber folgender

Satz 3.1 *Die Eigenwertnummer des radialen Eigenwertes des Kreisringes $A(1, R)$ beträgt mindestens 8.*

Beweis. Da die nichttrivialen Eigenwerte zu den nichtradialen Eigenfunktionen mindestens doppelt auftreten, kann Satz 3.1 unmittelbar aus Hilfssatz 3.5 gefolgert werden. \square

Die Eigenwertnummer des radialen Eigenwertes kann also nicht beliebig klein werden. Z.B. beträgt für $R = 3$ die Nummer des radialen Eigenwertes 8; 8 wird also als Eigenwertnummer angenommen. Für $R = 2$ ist die Eigenwertnummer 10, für $R = 11/10$ bereits 52.

Da die Eigenwerte bei festem n stetige Funktionen in R darstellen, fallen bei geeignetem R gewisse $\lambda_1(n, R)$ bzw. $\lambda_2(n, R)$ mit dem radialen Eigenwert zusammen.

3.2.2 Eine unendliche Summe für den Kreisring

Es ist

$$\begin{aligned} \lambda(R, n) &= \frac{1}{\frac{R+1}{2n} \cdot \frac{R^{2n}+1}{R^{2n}-1} \pm \sqrt{\left(\frac{R+1}{2n} \cdot \frac{R^{2n}+1}{R^{2n}-1}\right)^2 - \frac{R}{n^2}}} \quad \text{und} \\ \frac{1}{\lambda_1^2(R, n)} + \frac{1}{\lambda_2^2(R, n)} &= 2 \left(\left(\frac{R+1}{2n} \cdot \frac{R^{2n}+1}{R^{2n}-1}\right)^2 + \left(\left(\frac{R+1}{2n} \cdot \frac{R^{2n}+1}{R^{2n}-1}\right)^2 - \frac{R}{n^2}\right) \right) \\ &= \frac{(R+1)^2}{n^2} \cdot \left(\frac{R^{2n}+1}{R^{2n}-1}\right)^2 - \frac{2R}{n^2}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Weil $\lambda_1(R, n)$ und $\lambda_2(R, n)$ jeweils doppelt auftreten und unter Berücksichtigung des radialen Eigenwertes ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2(R)} &= \left(\frac{R \ln R}{1+R}\right)^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(R+1)^2}{n^2} \cdot \left(\frac{R^{2n}+1}{R^{2n}-1}\right)^2 - 4R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\ &= \left(\frac{R \ln R}{1+R}\right)^2 - \frac{2R\pi^2}{3} + 2(R+1)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{R^{2n}+1}{R^{2n}-1}\right)^2 \\ &= \left(\frac{R \ln R}{1+R}\right)^2 - \frac{2R\pi^2}{3} + 2(R+1)^2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \left(\frac{R^{2n}+1}{R^{2n}-1}\right)^2 \\ &\quad + 2(R+1)^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \Delta(N, R) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Man erhält die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned}
\Delta(N, R) &= 2(R+1)^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\left(\frac{R^{2n}+1}{R^{2n}-1} \right)^2 - 1 \right) \\
&< 2(R+1)^2 \left(\left(\frac{R^{2N+2}+1}{R^{2N+2}-1} \right)^2 - 1 \right) \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{8R^{2N+2}(R+1)^2}{(R^{2N+2}-1)^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \right). \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Mit Hilfe von (3.13) bzw. (3.14) wurden zur Bestimmung von $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2(R)}$ für verschiedene R numerische Rechnungen durchgeführt, deren Resultate in der folgenden Tabelle zusammengefasst sind.

Man erhält bereits für kleine Werte von N eine hohe Genauigkeit für die gesuchte Summe. Der jeweils verwendete Wert für N ist in der zweiten Spalte angegeben, die zugehörige Fehlerschranke in der vierten Spalte.

R	N	$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2(R)}$	$\Delta(N, R)$
$\frac{11}{10}$	110	1053.5042403915	$2.07 \cdot 10^{-10}$
$\frac{12}{10}$	60	318.3269815968	$1.40 \cdot 10^{-10}$
$\frac{13}{10}$	60	170.0764948210	$8.78 \cdot 10^{-15}$
$\frac{14}{10}$	35	114.4920546468	$3.91 \cdot 10^{-11}$
$\frac{15}{10}$	35	87.3558972466	$2.95 \cdot 10^{-13}$
$\frac{16}{10}$	35	72.0723948383	$3.06 \cdot 10^{-15}$
$\frac{17}{10}$	35	62.7071183490	$4.20 \cdot 10^{-17}$
$\frac{18}{10}$	35	56.6793366013	$7.37 \cdot 10^{-19}$
$\frac{19}{10}$	35	52.7079616485	$1.61 \cdot 10^{-20}$
$\frac{20}{10}$	35	50.0930089925	$4.29 \cdot 10^{-22}$
$\frac{21}{10}$	15	48.4230659418	$2.42 \cdot 10^{-10}$
$\frac{22}{10}$	15	47.4420415884	$5.83 \cdot 10^{-11}$
$\frac{23}{10}$	15	46.9829619366	$1.49 \cdot 10^{-11}$

Tabelle 4: Der Kreisring, $\frac{11}{10} \leq R \leq \frac{30}{10}$

R	N	$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2(R)}$	$\Delta(N, R)$
$\frac{24}{10}$	15	46.9327129625	$4.06 \cdot 10^{-12}$
$\frac{25}{10}$	15	47.2121677807	$1.17 \cdot 10^{-12}$
$\frac{26}{10}$	15	47.7644418755	$3.52 \cdot 10^{-13}$
$\frac{27}{10}$	15	48.5476671283	$1.11 \cdot 10^{-13}$
$\frac{28}{10}$	15	49.5303906902	$3.66 \cdot 10^{-14}$
$\frac{29}{10}$	15	50.6885555505	$1.25 \cdot 10^{-14}$
$\frac{30}{10}$	15	52.0034666784	$4.45 \cdot 10^{-15}$

Tabelle 4: (Fortsetzung) Der Kreisring, $\frac{11}{10} \leq R \leq \frac{30}{10}$

3.3 Eine endliche Summe

Ziel dieses Abschnittes ist es, eine Ungleichung analog zu (2.36) in 2.3.3 herzuleiten. Dazu wird zunächst die Neumannsche Funktion betrachtet.

3.3.1 Die Neumannsche Funktion

Die Definition der Neumannschen Funktion im zweifach zusammenhängenden Gebiet erfolgt ganz analog zum einfach zusammenhängenden Fall, d.h., (2.8) bis (2.11) bleiben bestehen. Ist D ein zweifach zusammenhängendes Gebiet mit hinreichend glattem Rand und beschränkter Länge der Randkurven, dann ist die Existenz der Neumannschen Funktion des Gebietes D gesichert, [30].

Es gilt

Satz 3.2 *Sei D ein zweifach zusammenhängendes Gebiet mit hinreichend glattem Rand. Sei f diejenige konforme Abbildung, die das Gebiet D schlicht konform auf den Kreisring $A(1, R)$ abbildet. Die Neumannsche Funktion des Gebietes D besitzt auf dem Rand von $A(1, R)$ die Darstellung*

$$\begin{aligned}
 N_D(s, \theta; r, \phi) &= \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\left(u_j^{(0)}(s, \theta) - \frac{f_j}{L}\right) \left(u_j^{(0)}(r, \phi) - \frac{f_j}{L}\right)}{\lambda_j^{(0)}} \\
 &= \sum_{j=2}^{\infty} \frac{w_j(s, \theta) w_j(r, \phi)}{\lambda_j}
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

mit $r, s = 1, r, s = R$ bzw. $r = 1, s = R$ und $r = R, s = 1$ und $w_j(r, \phi) = u_j^{(0)}(r, \phi) - \frac{f_j}{L}$. Dabei bezeichnet $u_j^{(0)}$ die Eigenfunktionen des Kreisringes mit den zugehörigen Eigenwerten $\lambda_j^{(0)}$, $L = |C_1| + |C_2| = \int_{C_1 \cup C_2} |f'| ds = \int_{\partial A(1, R)} |f'| ds$ sowie $f_j = \int_{\partial A(1, R)} |f'| u_j^{(0)} ds$.

Die Koeffizienten f_j ergeben sich aus der Forderung $\int_{\partial D} N_D(\xi, \eta) ds_\eta = 0$ für beliebiges $\xi \in \partial D$.

Die Reihe (3.15) konvergiert im Mittel, es gilt $\lambda_j \sim j$.

3.3.2 Variationscharakterisierung der Eigenwerte

Zur Herleitung der gewünschten Ungleichung erfolgt zunächst eine Variationscharakterisierung der Eigenwerte von (3.1). Dies geschieht ganz analog zum einfach zusammenhängenden Fall. Die Hilfssätze 2.1 und 2.2 sowie Satz 2.2 übertragen sich:

Hilfssatz 3.6 *Gegeben sei das Problem (3.1) mit $\sigma \equiv 1$. Sei f diejenige konforme Abbildung, die das Innere des Kreisringes schlicht konform auf D abbildet. Dann gilt für den k -ten Eigenwert von (3.1)*

$$\frac{1}{\lambda_k} = \max_h \int_{\partial A(1,R)} \int_{\partial A(1,R)} N_D(z, \zeta) |f'(z)| |f'(\zeta)| h(z) h(\zeta) ds_z ds_\zeta \quad (3.16)$$

mit $h \in L_2(\partial A(1, R))$ und den Nebenbedingungen $\int_{\partial A(1,R)} |f'(z)| h^2(z) ds_z = 1$ und $\int_{\partial A(1,R)} |f'(z)| h(z) ds_z = 0$ sowie $\int_{\partial A(1,R)} |f'(z)| h(z) \cdot u_j(z) ds_z = 0$, $j = 2, 3, \dots, k-1$; wobei $k \geq 2$. Mit u_j seien die in den Kreisring $A(1, R)$ überpflanzten Eigenfunktionen des Gebietes D bezeichnet.

Ferner gilt eine von den Eigenfunktionen unabhängige Variationscharakterisierung:

Hilfssatz 3.7 *Für die Eigenwerte des Problems 3.1 gilt:*

$$\frac{1}{\lambda_k} = \max_{L_{k-1}} \min \int_{\partial A(1,R)} \int_{\partial A(1,R)} N_D(z, \zeta) |f'(z)| h(z) |f'(\zeta)| h(\zeta) ds_z ds_\zeta,$$

wobei das Maximum über alle $(k-1)$ -dimensionalen Unterräume $L_{k-1} \subset L_2(\partial A(1, R))$ gebildet wird. Für jede Funktion $v \in L_{k-1}$ gelte $\int_{\partial A(1,R)} v(z) |f'(z)| ds_z = 0$. Das Minimum wird über alle Funktionen $h \in L_{k-1}$, welche der Nebenbedingung $\int_{\partial A(1,R)} h^2(z) |f'(z)| ds_z = 1$ genügen, gebildet.

Schließlich gilt für die Summe der Reziproken der ersten $n-1$ nichttrivialen Eigenwerte des Problems (3.1):

Satz 3.3 *Für die Eigenwerte des Problems (3.1) gilt*

$$\sum_{j=2}^n \frac{1}{\lambda_j} \geq \sum_{j=2}^n \int_{\partial A(1,R)} \int_{\partial A(1,R)} N_D(z, \zeta) |f'(z)| |f'(\zeta)| v_j(z) v_j(\zeta) ds_z ds_\zeta \quad (3.17)$$

mit den Nebenbedingungen $\int_{\partial A(1,R)} |f'(z)| v_j(z) ds_z = 0$ sowie $\int_{\partial A(1,R)} |f'(z)| v_i(z) v_j(z) ds_z = \delta_{ij}$, $i, j = 2, \dots, n$, $v_j \in L_2(\partial A(1, R))$.

3.3.3 Einige Bezeichnungen

Die Abbildungsfunktion. Im zweifach zusammenhängenden Fall muss die Abbildungsfunktion auf beiden Randkomponenten des Kreisringes betrachtet werden. Es gelten die Bezeichnungen

$$|f'(z)|_{|z|=1} \sim \frac{\alpha_0^{(1)}}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j^{(1)} \cos j\phi + \beta_j^{(1)} \sin j\phi) =: |f_1'(\phi)| \quad (3.18)$$

$$|f'(z)|_{|z|=R} \sim \frac{\alpha_0^{(R)}}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j^{(R)} \cos j\phi + \beta_j^{(R)} \sin j\phi) =: |f_R'(\phi)| \quad . \quad (3.19)$$

Des weiteren seien $L_1 = \pi\alpha_0^{(1)}$ und $L_2 = \pi R\alpha_0^{(R)}$ die Längen der beiden Randkurven von D .

Die Koeffizienten $b_{j,k}$. Die $b_{j,k}$ werden wiederum so gewählt, dass gilt

$$b_{j,k} = \int_{\partial A(1,R)} w_k v_j |f'| ds$$

mit $j \geq 2$ und geeignet zu wählenden Funktionen v_j .

Die Ansatzfunktionen v_n . Die Wahl der Ansatzfunktionen erfolgt ebenfalls ganz analog zu 2.3.2. Es gelte

$$v_n = \sum_{j=2}^n c_{n,j} \cdot w_j, \quad n \geq 2$$

unter den Nebenbedingungen

$$\int_{\partial A(1,R)} |f'| v_i v_j ds = \delta_{i,j} \quad .$$

Die Koeffizienten $d_{i,j}$. Mit $d_{i,j}$ sei bezeichnet

$$d_{i,j} = \int_{\partial A(1,R)} |f'| w_i w_j ds \quad .$$

3.3.4 Beweis der Ungleichung

In gleicher Weise wie in 2.3.3 erhält man

Hilfssatz 3.8 *Mit den unter 3.3.3 gewählten Bezeichnungen gilt*

$$\sum_{j=2}^k b_{j,k}^2 = d_{k,k} \quad .$$

Damit gilt ganz analog zum einfach zusammenhängenden Fall das Zwischenergebnis

$$\sum_{j=2}^n \frac{1}{\lambda_j} \geq \sum_{j=2}^n \frac{d_{j,j}}{\lambda_j^{(0)}} \quad ,$$

vgl. (2.26).

Zum **Beweis** der angestrebten Ungleichung wird zunächst angenommen, $u_j^{(0)}$ sei die radiale Eigenfunktion. Dann gilt

$$\begin{aligned} u_j^{(0)}(r) &= \sqrt{\frac{R+1}{2\pi R}} \cdot \frac{1}{\ln R} \left(\ln r - \frac{R \ln R}{1+R} \right) = u(r) \\ w_j(z) &= u_j^{(0)}(z) - \frac{\int_{\partial A} |f'(z)| u(z) ds_z}{L_1 + L_2} \\ d_{j,j} &= \int_{\partial A} |f'(z)| u_j^{(0)2}(z) ds_z - \frac{\left(\int_{\partial A} |f'(z)| u_j^{(0)}(z) ds_z \right)^2}{L_1 + L_2} \\ &= u^2(1)L_1 + u^2(R)L_2 - \frac{(u(1)L_1 + u(R)L_2)^2}{L_1 + L_2} \\ &= \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} (u(R) - u(1))^2 \\ &= \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \cdot \frac{R+1}{2\pi R} \\ &= \frac{\pi \alpha_0^{(1)} \pi R \alpha_0^{(R)}}{\pi \alpha_0^{(1)} + \pi R \alpha_0^{(R)}} \cdot \frac{R+1}{2\pi R} \\ &\geq \min \left\{ \frac{\alpha_0^{(1)}}{2}, \frac{\alpha_0^{(R)}}{2} \right\} \quad . \end{aligned} \tag{3.20}$$

Sei nun $u_j^{(0)}$ eine nichtradiale Eigenfunktion und $u_{j+1}^{(0)}$ die zum selben Eigenwert gehörende radiale Eigenfunktion.

In 2.3.3 wurde gezeigt, für $f \in \mathcal{S}$ bzw. $f \in \Sigma$ gilt $\alpha_0 - \frac{1}{\alpha_0}(\alpha_k^2 + \beta_k^2) \geq 2$, wenn α_j, β_j die Fourierkoeffizienten von $|f'(z)|$ für $|z|=1$ sind. Man überzeugt sich leicht von der Gültigkeit von

Hilfssatz 3.9 Für $f \in \mathcal{S}$ bzw. $f \in \Sigma$ gilt

$$\alpha_0^{(R)} - \frac{1}{\alpha_0^{(R)}}(\alpha_k^{(R)2} + \beta_k^{(R)2}) \geq 2 \tag{3.21}$$

mit einem beliebigen $R > 0$.

Damit gilt

$$L_1^2 - (\alpha_j^{(1)2} + \beta_j^{(1)2})\pi^2 \geq 2\pi L_1 \tag{3.22}$$

$$L_2^2 - (\alpha_j^{(R)2} + \beta_j^{(R)2})\pi^2 R^2 \geq 2\pi R L_2 \tag{3.23}$$

und man erhält

$$\begin{aligned}
& d_{j,j} + d_{j+1,j+1} \\
&= \int_{\partial A} |f'(z)| (u_j^{(0)^2}(z) + u_{j+1}^{(0)^2}(z)) ds_z \\
&\quad \frac{(\int_{\partial A} |f'(z)| u_j^{(0)}(z) ds_z)^2 + (\int_{\partial A} |f'(z)| u_{j+1}^{(0)}(z) ds_z)^2}{L_1 + L_2} \\
&= L_1(A_n + B_n)^2 + L_2(A_n R^n + B_n R^{-n})^2 \\
&\quad \frac{\pi^2(\alpha_n^{(1)^2} + \beta_n^{(1)^2})(A_n + B_n)^2 + \pi^2 R^2(\alpha_n^{(R)^2} + \beta_n^{(R)^2})(A_n R^n + B_n R^{-n})^2}{L_1 + L_2} \\
&\quad \frac{2\pi^2 R(\alpha_n^{(1)} \alpha_n^{(R)} + \beta_n^{(1)} \beta_n^{(R)})(A_n + B_n)(A_n R^n + B_n R^{-n})}{L_1 + L_2} \\
&= \frac{(L_1^2 - \pi^2(\alpha_n^{(1)^2} + \beta_n^{(1)^2}))(A_n + B_n)^2 + (L_2^2 - \pi^2 R^2(\alpha_n^{(R)^2} + \beta_n^{(R)^2}))(A_n R^n + B_n R^{-n})^2}{L_1 + L_2} \\
&\quad + \frac{L_1 L_2((A_n + B_n)^2 + (A_n R^n + B_n R^{-n})^2)}{L_1 + L_2} \\
&\quad \frac{2\pi^2 R(\alpha_n^{(1)} \alpha_n^{(R)} + \beta_n^{(1)} \beta_n^{(R)})(A_n + B_n)(A_n R^n + B_n R^{-n})}{L_1 + L_2} \\
&\geq \frac{2\pi L_1(A_n + B_n)^2 + 2\pi R L_2(A_n R^n + B_n R^{-n})}{L_1 + L_2} \\
&\quad + \frac{2\pi R L_1(A_n + B_n)^2 + 2\pi L_2(A_n R^n + B_n R^{-n})^2}{L_1 + L_2} \tag{3.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{\pi \alpha_{\min}(2\pi(A_n + B_n)^2 + 2\pi R(A_n R^n + B_n R^{-n})^2)}{\pi \alpha_{\max} + \pi R \alpha_{\max}} \\
&\quad + \frac{\pi R \alpha_{\min}(2\pi(A_n + B_n)^2 + 2\pi R(A_n R^n + B_n R^{-n})^2)}{\pi \alpha_{\max} + \pi R \alpha_{\max}} \\
&= \frac{2\pi \alpha_{\min}(1 + R)}{\pi \alpha_{\max}(1 + R)} \tag{3.25}
\end{aligned}$$

$$= \frac{2\alpha_{\min}}{\alpha_{\max}} \tag{3.26}$$

Die Gültigkeit von (3.24) folgt zum einen aus (3.22) und (3.23). Bleibt zu zeigen:

$$\frac{L_1 L_2((A_n + B_n)^2 + (A_n R^n + B_n R^{-n})^2)}{L_1 + L_2}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2\pi^2 R(\alpha_n^{(1)}\alpha_n^{(R)} + \beta_n^{(1)}\beta_n^{(R)})(A_n + B_n)(A_n R^n + B_n R^{-n})}{L_1 + L_2} \\
& \geq \frac{2\pi R L_1 (A_n + B_n)^2 + 2\pi L_2 (A_n R^n + B_n R^{-n})^2}{L_1 + L_2} .
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Wegen $\alpha_0^{(1)} \geq 1$ und $\alpha_0^{(R)} \geq 1$ gilt offensichtlich

$$\begin{aligned}
& \frac{L_1 L_2 ((A_n + B_n)^2 + (A_n R^n + B_n R^{-n})^2)}{L_1 + L_2} \\
& - \frac{2\pi R L_1 (A_n + B_n)^2 + 2\pi L_2 (A_n R^n + B_n R^{-n})^2}{L_1 + L_2} \\
& \geq 0 .
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt mit (3.22) und (3.23)

$$\begin{aligned}
|\alpha_n^{(1)}\alpha_n^{(R)} + \beta_n^{(1)}\beta_n^{(R)}|^2 & \leq (\alpha_n^{(1)2} + \beta_n^{(1)2})(\alpha_n^{(R)2} + \beta_n^{(R)2}) \\
& \leq \left(\frac{L_1^2}{\pi^2} - \frac{2L_1}{\pi}\right) \left(\frac{L_2^2}{\pi^2 R^2} - \frac{2L_2}{\pi R}\right) \\
& = 16(\alpha_0^{(1)2} - \alpha_0^{(1)})(\alpha_0^{(R)2} - \alpha_0^{(R)}) \\
& = 16(\alpha_0^{(1)2} \alpha_0^{(R)2} - \alpha_0^{(1)2} \alpha_0^{(R)} - \alpha_0^{(1)} \alpha_0^{(R)2} + \alpha_0^{(1)} \alpha_0^{(R)}) .
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Schließlich gilt mit (3.29)

$$\begin{aligned}
& (L_1 L_2 ((A_n + B_n)^2 + (A_n R^n + B_n R^{-n})^2) - (2\pi R L_1 (A_n + B_n)^2 \\
& + 2\pi L_2 (A_n R^n + B_n R^{-n})^2))^2 \\
& - \left(2\pi^2 R (A_n + B_n)(A_n R^n + B_n R^{-n})(\alpha_n^{(1)}\alpha_n^{(R)} + \beta_n^{(1)}\beta_n^{(R)})\right)^2 \\
& \geq (L_1 L_2 ((A_n + B_n)^2 + (A_n R^n + B_n R^{-n})^2))^2 + (2\pi R L_1 (A_n + B_n)^2 \\
& + 2\pi L_2 (A_n R^n + B_n R^{-n})^2)^2 \\
& - 4\pi R L_1^2 L_2 (A_n + B_n)^4 - 4\pi L_1 L_2^2 (A_n R^n + B_n R^{-n})^4 \\
& - 4\pi R L_1^2 L_2 (A_n + B_n)^2 (A_n R^n + B_n R^{-n})^2 - 4\pi L_1 L_2^2 (A_n + B_n)^2 (A_n R^n + B_n R^{-n})^2 \\
& - 64\pi^4 R^2 (A_n + B_n)^2 (A_n R^n + B_n R^{-n})^2 (\alpha_0^{(1)2} \alpha_0^{(R)2} - \alpha_0^{(1)2} \alpha_0^{(R)} - \alpha_0^{(1)} \alpha_0^{(R)2} + \alpha_0^{(1)} \alpha_0^{(R)}) \\
& = (L_1 L_2 ((A_n + B_n)^2 - (A_n R^n + B_n R^{-n})^2))^2 + (2\pi R L_1 (A_n + B_n)^2 \\
& - 2\pi L_2 (A_n R^n + B_n R^{-n})^2)^2 \\
& - 4\pi R L_1^2 L_2 (A_n + B_n)^4 - 4\pi L_1 L_2^2 (A_n R^n + B_n R^{-n})^4 \\
& + 4\pi R L_1^2 L_2 (A_n + B_n)^2 (A_n R^n + B_n R^{-n})^2 + 4\pi L_1 L_2^2 (A_n + B_n)^2 (A_n R^n + B_n R^{-n})^2 \\
& = (L_1 L_2 ((A_n + B_n)^2 - (A_n R^n + B_n R^{-n})^2))^2 - (2\pi R L_1 (A_n + B_n)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2\pi L_2(A_n R^n + B_n R^{-n})^2 \\
& \geq 0 \quad . \quad (3.30)
\end{aligned}$$

Mit (3.28) und (3.30) folgt die Gültigkeit von (3.27) und damit das Bestehen von (3.24). Wegen der Normierung der Eigenfunktionen des Kreisringes gilt $\int_{\partial A} (u_j^{(0)})^2(z) + u_{j+1}^{(0)}(z)^2 ds_z = 2\pi(A_n + B_n)^2 + 2\pi R(A_n R^n + B_n R^{-n})^2 = 2$.

Sei $\alpha_{\min} = \min\{\alpha_0^{(1)}, \alpha_0^{(R)}\}$ und $\alpha_{\max} = \max\{\alpha_0^{(1)}, \alpha_0^{(R)}\}$. Dann erhält man (3.25) und (3.26), d.h. $d_{j,j} + d_{j+1,j+1} \geq \frac{2\alpha_{\min}}{\alpha_{\max}}$ für $u_j^{(0)}, u_{j+1}^{(0)}$ nichtradiale Eigenfunktionen zum selben Eigenwert.

Ist $u_j^{(0)}$ radiale Eigenfunktion, gilt (vgl. (3.20)) wegen $\alpha_0 \geq 2$ $d_{j,j} \geq \min\{\frac{\alpha_0^{(1)}}{2}, \frac{\alpha_0^{(R)}}{2}\} = \frac{\alpha_{\min}}{2} \geq \frac{\alpha_{\min}}{\alpha_{\max}}$. Damit ergibt sich bei geeigneter Nummerierung der Eigenfunktionen des Kreisringes (vgl. 2.3.3) der folgende Satz:

Satz 3.4 *Für die Eigenwerte des Problems (3.1) gilt mit einer Einschränkung an die zugelassenen Gebiete (Bemerkung 3.1 bzw. 3.5) die Ungleichung*

$$\sum_{j=2}^n \frac{1}{\lambda_j} \geq |C| \frac{\alpha_{\min}}{\alpha_{\max}} \sum_{j=2}^n \frac{1}{\lambda_j^{(0)}} \quad (3.31)$$

für beliebiges $n \geq 2$ unter Berücksichtigung der nachfolgenden Bemerkungen.

3.3.5 Ergänzende Bemerkungen

Bemerkung 3.1 *Zur Abschätzung der auftretenden Fourierkoeffizienten wurden die Ungleichungen (3.22) und (3.23) verwendet. Diese gelten für konforme Abbildungen der Klassen \mathcal{S} und Σ und für skalare Vielfache dieser Funktionen, jedoch nicht für beliebige konforme Abbildungen eines Kreisringes. Da $A(1, R) = \{z : 1 < |z| < R\}$, gilt der Beweis zunächst nur für $f \in \Sigma$.*

Betrachtet man $A(r, 1) = \{z : 0 < r < |z| < 1\}$, dann lässt sich der Beweis auch für $f \in \mathcal{S}$ durchführen.

Bemerkung 3.2 *Nicht jedes zweifach zusammenhängende Gebiet lässt sich konform auf jeden Kreisring abbilden, d.h. $A(1, R)$ bzw. $A(r, 1)$ muss zu D konform äquivalent sein; $\lambda_j^{(0)}$ in Satz 3.4 bezeichnet die Eigenwerte des zu D konform äquivalenten Kreisringes.*

Bemerkung 3.3 $|C|$ ergibt sich, wenn f das C -fache einer Funktion aus \mathcal{S} oder Σ ist (eventuell nach vorangegangener Verschiebung). Für Funktionen der Klassen \mathcal{S} und Σ ist $|C| = 1$.

Bemerkung 3.4 *Das Gleichheitszeichen in Satz 3.4 steht genau dann, wenn D ein zu A konform äquivalenter Kreisring ist: Gleichheit in (3.24) erfordert Gleichheit in (3.22) und (3.23). Dazu muss gelten $|f'(z)| \equiv 1$ bzw. mit Bemerkung 3.3 $|f'(z)| \equiv |C|$. Ist $f(z) \equiv Cz$, wird das Gleichheitszeichen natürlich angenommen; dann ist $\alpha_{\min} = \alpha_{\max} = 1$.*

Bemerkung 3.5 Satz 3.4 gilt also nur mit einer Einschränkung an die betrachteten Gebiete: D muss ein Gebiet sein, welches man durch konforme Abbildung eines Kreisringes mit einer Funktion der Klasse \mathcal{S} oder Σ (eventuell nach vorangegangener Verschiebung) oder eines skalaren Vielfaches einer solchen Funktion erhält.

Bemerkung 3.6 In Abhängigkeit von der Symmetrieordnung q des Gebietes D kann auch im zweifach zusammenhängenden Fall eine schärfere Aussage als (3.31) getroffen werden. (3.20) bleibt bestehen, wenn $u_j^{(0)}$ die radiale Eigenfunktion ist. Wenn $u_j^{(0)}$ und $u_{j+1}^{(0)}$ nichtradiale Eigenfunktionen zum selben Eigenwert mit $j \leq 2q-2$ sind, ergibt sich anstelle von (3.26)

$$\begin{aligned} d_{j,j} + d_{j+1,j+1} &= \int_{\partial A} |f'(z)| (u_j^{(0)^2}(z) + u_{j+1}^{(0)^2}(z)) ds_z \\ &= 2\pi\alpha_0^{(1)}(A_n + B_n)^2 + 2\pi R\alpha_0^{(R)}(A_n R^n + B_n R^{-n})^2 \\ &\geq 2\alpha_{\min} \quad . \end{aligned} \quad (3.32)$$

Besitzt D also die Symmetrieordnung q , dann gilt für $n \leq 2q-1$ die schärfere Ungleichung

$$\sum_{j=2}^n \frac{1}{\lambda_j} \geq |C| \alpha_{\min} \sum_{j=2}^n \frac{1}{\lambda_j^{(0)}} \quad , \quad (3.33)$$

bei hinreichend kleiner Eigenwertnummer des zur radialen Eigenfunktion gehörenden Eigenwertes des Kreisringes sogar für $n \leq 2q$.

Schließlich gilt auch

Satz 3.5 Sei $\Phi(x)$ für $x \geq 0$ eine konvexe, monoton wachsende Funktion. Für die Eigenwerte des Problems (3.1) gilt dann (wiederum unter Berücksichtigung der obigen Bemerkungen)

$$\sum_{j=2}^n \Phi\left(\frac{1}{\lambda_j}\right) \geq \sum_{j=2}^n \Phi\left(|C| \frac{\alpha_{\min}}{\alpha_{\max}} \frac{1}{\lambda_j^{(0)}}\right) \quad (3.34)$$

für beliebiges $n \geq 2$.

Speziell gilt

$$\sum_{j=2}^n \frac{1}{\lambda_j^s} \geq \left(|C| \frac{\alpha_{\min}}{\alpha_{\max}}\right)^s \sum_{j=2}^n \frac{1}{\lambda_j^{(0)s}}$$

für $s \geq 1$, vgl. Satz 4.4 bzw. 2.4.

4 Das Problem der festen Membran im einfach zusammenhängenden Gebiet

4.1 Das Eigenwertproblem

Ein weiteres klassisches Eigenwertproblem ist das Folgende: Sei D ein einfach zusammenhängendes beschränktes Gebiet der Ebene. Es gelte:

$$\begin{aligned} \Delta u + \lambda u &= 0 & \text{in } D, \\ u &= 0 & \text{auf } \partial D. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Mit λ sei wiederum der Eigenwertparameter bezeichnet.

Problem (4.1) ist das Problem der festen Membran im einfach zusammenhängenden Gebiet und besitzt die Eigenwerte $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ endlicher Vielfachheit mit den zugehörigen Eigenfunktionen u_1, u_2, u_3, \dots [2].

Im Unterschied zum Stekloffschen Eigenwertproblem (2.1), (3.1) ist der erste Eigenwert der festen Membran positiv. Die erste Eigenfunktion ist keine Konstante.

Das Problem der festen Membran ist das wohl am meisten behandelte Eigenwertproblem der Ebene. Ausführliche Abhandlungen finden sich schon in [44], [48] und [54].

Ist D der Einheitskreis, so treten radiale und nichtradiale Eigenfunktionen auf. Die Eigenfunktionen besitzen die Gestalt [4]

$$J_n(k_{n,m} r)(\alpha \cos n\phi + \beta \sin n\phi) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

J_n ist die Besselsche Funktion erster Art n -ter Ordnung mit den abzählbar unendlich vielen Nullstellen $k_{n,m}$, $m = 1, 2, 3, \dots$. Die zugehörigen Eigenwerte sind durch $\sqrt{\lambda_{n,m}} = k_{n,m}$, $k_{n,m} > 0$ gegeben. Offensichtlich treten für $n \geq 1$ die Eigenwerte mindestens doppelt auf.

Die Eigenschwingungen der fest eingespannten Membran in D werden dargestellt durch

$$J_n(k_{n,m} r)(\alpha \cos n\phi + \beta \sin n\phi)(a \cos k_{n,m} t + b \sin k_{n,m} t), \quad (4.3)$$

wobei t die Zeit bezeichnet.

Ein weiteres Beispiel, für welches sich die Eigenwerte und Eigenfunktionen explizit angeben lassen, ist das Rechteck [2], [4]. Sei D ein Rechteck mit den Kantenlängen a und b , d.h. $D = \{(x, y) \mid 0 < x < a, \quad 0 < y < b\}$. Dann sind die (nichtnormierten) Eigenfunktionen von D gegeben durch

$$u_{n,m} = \sin \frac{n\pi}{a} \sin \frac{m\pi}{b} \quad , \quad n, m = 1, 2, 3, \dots$$

mit den zugehörigen Eigenwerten

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \quad . \quad (4.4)$$

Auch für das Problem der festen Membran sind zahlreiche isoperimetrische Ergebnisse bewiesen worden. Das wohl bekannteste Resultat ist das folgende:

Satz 4.1 (Rayleigh-Faber-Krahn-Ungleichung) *Unter allen Gebieten gleicher Fläche besitzt der Kreis den kleinsten ersten Eigenwert, d.h.*

$$\lambda_1 \geq \frac{\pi k_{0,1}^2}{A} \quad ,$$

wobei λ_1 den ersten Eigenwert und A die Fläche des Gebietes D bezeichnet und $k_{0,1}$ die erste Nullstelle der Besselfunktion 0-ter Ordnung. Das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn D ein Kreis ist.

Diese Ungleichung wurde bereits von Lord Rayleigh vermutet und ist später durch Faber und Krahn unabhängig voneinander bewiesen worden, [2].

Ein Gegenstück dazu, vgl. [46] bildet der

Satz 4.2 (Pólya und Szegő) *Für alle einfach zusammenhängenden Gebiete der Ebene gilt*

$$\lambda_1 R^2 \leq k_{0,1}^2 \quad ,$$

wobei λ_1 den ersten Eigenwert und R den maximalen konformen Radius des Gebietes D bezeichnet und $k_{0,1}$ die erste Nullstelle der Besselfunktion 0-ter Ordnung. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn D ein Kreis ist.

Ein weiteres interessantes Ergebnis ist das folgende, siehe [45].

Satz 4.3 (Pólya und Schiffer) *Sei D ein beliebiges einfach zusammenhängendes beschränktes Gebiet der Ebene mit maximalem konformen Radius R . Dann gilt für die Eigenwerte von D für beliebiges n*

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \geq R^2 \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j^{(0)}} \quad ,$$

wobei $\lambda_j^{(0)}$ die Eigenwerte des Einheitskreises bezeichnet. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn D ein Kreis ist.

Dieses Resultat von Pólya und Schiffer ist von Laugesen und Morpugo erweitert worden bzw. kann als Folgerung aus Satz 4.3 betrachtet werden, vgl. auch Satz 2.4:

Satz 4.4 (Laugesen und Morpugo) *Sei $\Phi(x)$ für $x \geq 0$ eine konvexe, monoton wachsende Funktion. Dann gilt für beliebiges n*

$$\sum_{j=1}^n \Phi\left(\frac{1}{\lambda_j}\right) \geq \sum_{j=1}^n \Phi\left(R^2 \frac{1}{\lambda_j^{(0)}}\right),$$

wobei $\lambda_j^{(0)}$ die Eigenwerte des Einheitskreises bezeichnet. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn D ein Kreis ist.

Darüber hinaus sind Ungleichungen zwischen den Eigenwerten der festen und der freien Membran bewiesen worden. Dazu sei an dieser Stelle das Problem der freien Membran vorgestellt.

Sei D ein einfach zusammenhängendes beschränktes Gebiet der Ebene. Es gelte:

$$\begin{aligned} \Delta v + \mu v &= 0 & \text{in } D, \\ \frac{\partial v}{\partial n} &= 0 & \text{auf } \partial D. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Mit μ sei der Eigenwertparameter bezeichnet.

Problem (4.5) ist das Problem der freien Membran im einfach zusammenhängenden Gebiet und besitzt die Eigenwerte $0 = \mu_1 < \mu_2 \leq \mu_3 \leq \dots$ endlicher Vielfachheit mit den zugehörigen Eigenfunktionen $v_1 \equiv \text{const}, v_2, v_3, \dots$ [2].

Wie beim Stekloffschen Eigenwertproblem (2.1), (3.1) ist der erste Eigenwert der freien Membran 0. Die erste Eigenfunktion ist ebenfalls eine Konstante.

Für die Eigenwerte der festen bzw. der freien Membran des beschränkten Gebietes D mit hinreichend glatter Randkurve bewies Friedlander [24]

$$\mu_{k+1} \leq \lambda_k \quad (4.6)$$

für beliebiges $k \geq 1$.

Ferner gilt nach B. Dittmar [9] für die Eigenwerte der freien Membran

$$\frac{A}{R^4} \sum_{j=2}^n \frac{1}{\mu_j} \geq \pi \sum_{j=2}^n \frac{1}{\mu_j^{(0)}}$$

für beliebiges n , wobei R den maximalen konformen Radius und $A < \infty$ die Fläche des Gebietes D bezeichnet. Mit $\mu_j^{(0)}$ seien wiederum die Eigenwerte des Einheitskreises bezeichnet.

Dieses von B. Dittmar erzielte Resultat reiht sich ein in die Ergebnisse dieser Arbeit.

4.2 Eine endliche Summe - alternativer Beweis

Im folgenden Abschnitt soll die in 2.3.3 bzw. 3.3.4 angewandte Methode auf das Problem der festen Membran übertragen werden. Es wird sich zeigen, dass mit diesem Ansatz entsprechend dem allgemeinen Konzept ein alternativer Beweis des Satzes 4.3 von Pólya und Schiffer gelingt. Weitere alternative Beweise finden sich auch bei C. Bandle [2] oder J. Hersch [31].

4.2.1 Die Greensche Funktion im Einheitskreis

Gegeben sei das Problem (4.1). $G(z, \zeta)$ sei die Greensche Funktion im Einheitskreis und besitzt die Darstellung

$$G(z, \zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{u_j^{(0)}(z)u_j^{(0)}(\zeta)}{\lambda_j^{(0)}} \quad , \quad (4.7)$$

wobei $u_j^{(0)}$ die Eigenfunktionen des Einheitskreises bezeichne und $\lambda_j^{(0)}$ die zugehörigen Eigenwerte. Die Eigenfunktionen bzw. Eigenwerte des Einheitskreises genügen der Integralgleichung

$$u_j^{(0)}(z) = \lambda_j^{(0)} \int_U G(z, \zeta) u_j^{(0)}(\zeta) dA_\zeta \quad . \quad (4.8)$$

Ist f diejenige konforme Abbildung, die den Einheitskreis auf das Gebiet D abbildet, dann sind die Eigenwerte und Eigenfunktionen von D Lösung der Integralgleichung

$$u_j(z) = \lambda_j \int_U G(z, \zeta) |f'(\zeta)|^2 u_j(\zeta) dA_\zeta \quad , \quad (4.9)$$

vgl. [10].

4.2.2 Variationscharakterisierung der Eigenwerte

Ganz analog zu 2.3.1 und 3.3.2 erhält man aus 4.9 für die Eigenwerte der festen Membran

Hilfssatz 4.1 *Gegeben sei das Problem (4.1). Sei f diejenige konforme Abbildung, die das Innere des Einheitskreises konform auf D abbildet. Dann gilt für den k -ten Eigenwert von (4.1)*

$$\frac{1}{\lambda_k} = \max_h \int_U \int_U G(z, \zeta) |f'(z)|^2 |f'(\zeta)|^2 h(z) h(\zeta) dA_z dA_\zeta \quad (4.10)$$

mit $h \in L_2(U)$ und den Nebenbedingungen $\int_U |f'(z)|^2 h^2(z) dA_z = 1$ sowie $\int_U |f'(z)|^2 h(z) \cdot u_j(z) dA_z = 0$, $j = 1, 2, \dots, k-1$; wobei $k \geq 1$. Mit u_j seien die in den Einheitskreis überpflanzten Eigenfunktionen des Gebietes D bezeichnet.

Weiterhin gilt mit Hilfssatz 4.2 eine von den Eigenfunktionen des Gebietes D unabhängige Variationscharakterisierung der Eigenwerte:

Hilfssatz 4.2 *Für die Eigenwerte des Problems 4.1 gilt:*

$$\frac{1}{\lambda_k} = \max_{L_k} \min \int_U \int_U G(z, \zeta) |f'(z)|^2 |f'(\zeta)|^2 h(z) h(\zeta) dA_z dA_\zeta \quad ,$$

wobei das Maximum über alle k -dimensionalen Unterräume $L_k \subset L_2(U)$ gebildet wird. Das Minimum wird über alle Funktionen $h \in L_k$, welche der Nebenbedingung $\int_U h^2(z) |f'(z)|^2 dA_z = 1$ genügen, gebildet.

In [31] liefert J. Hersch ebenfalls einen alternativen Beweis zum Resultat von Pólya und Schiffer. Er charakterisiert die Eigenwerte mit Hilfe des Rayleighquotienten und erhält für den ersten Eigenwert

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_U \nabla^2 h(z) dA_z}{\int_U h^2(z) |f'(z)|^2 dA_z} \quad ,$$

wobei f die Abbildung des Einheitskreises auf das Gebiet D bezeichnet und $h \in L_2(U)$ mit $h \equiv 0$ auf ∂D , siehe auch 4.2.4.

Für die Summe der Reziproken der ersten n Eigenwerte von (4.1) erhält man folgenden

Satz 4.5 Für die Eigenwerte des Problems (4.1) gilt

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \geq \sum_{j=1}^n \int_U \int_U G(z, \zeta) |f'(z)|^2 |f'(\zeta)|^2 v_j(z) v_j(\zeta) dA_z dA_\zeta \quad (4.11)$$

mit den Nebenbedingungen $\int_U |f'(z)|^2 v_i(z) v_j(z) dA_z = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$, $v_j \in L_2(U)$.

4.2.3 Bezeichnungen und Definitionen

Wegen der Invarianz der Greenschen Funktion unter konformen Abbildungen gilt in Anlehnung an die Bezeichnungen aus 2.3.2 und 3.3.3 $w_j = u_j^{(0)}$, $j = 1, 2, 3, \dots$.

Die Koeffizienten $b_{j,k}$. Ferner ist

$$b_{j,k} = \int_U w_k(z) v_j(z) |f'(z)|^2 dA_z = \int_U u_k^{(0)}(z) v_j(z) |f'(z)|^2 dA_z \quad (4.12)$$

Die Ansatzfunktionen v_n gehen wiederum durch Orthonormierung aus den Funktionen $w_j = u_j^{(0)}$ hervor. Es ist

$$v_n(z) = \sum_{j=1}^n c_{n,j} u_j^{(0)} \quad , \quad n \geq 1 \quad (4.13)$$

mit den Nebenbedingungen $\int_U |f'(z)|^2 v_i(z) v_j(z) dA_z = \delta_{ij}$.

Die Koeffizienten $d_{i,j}$. Schließlich gelte

$$d_{i,j} = \int_U |f'(z)|^2 u_i^{(0)}(z) u_j^{(0)}(z) dA_z \quad (4.14)$$

4.2.4 Beweis der Ungleichung

Mit der schon in 2.3.3 und 3.3.4 angewandten Methode erhält man

Hilfssatz 4.3 Mit den unter 4.2.3 gewählten Bezeichnungen gilt

$$\sum_{j=1}^k b_{j,k}^2 = d_{k,k} \quad .$$

Es ergibt sich auch hier

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \geq \sum_{j=1}^n \frac{d_{j,j}}{\lambda_j^{(0)}} \quad (4.15)$$

Zum gleichen Zwischenergebnis gelangt J. Hersch [31], S. 379-381 nach Charakterisierung der Eigenwerte mittels des Rayleighquotienten. Die weiteren Rechnungen zur Auswertung von (4.15) folgen denen von J. Hersch.

Zunächst gilt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und $z = re^{i\phi}$, $0 < r \leq 1$

$$\int_{|z|=r} |f'(z)|^2 d\phi \geq \frac{1}{2\pi} \left(\int_{|z|=r} |f'(z)| d\phi \right)^2 \geq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z|=r} f'(z) d\phi \right|^2 = 2\pi \quad , \quad (4.16)$$

falls f den Einheitskreis konform auf das Gebiet D abbildet mit $f'(0) = 1$, d.h., falls $f \in \mathcal{S}$, (eventuell nach vorangegangener Verschiebung).

Ist h eine radiale Funktion, dann gilt

$$\int_U h^2(z) |f'(z)|^2 dA_z = \int_0^1 h^2(r) r \cdot \int_0^{2\pi} |f'(\phi)|^2 d\phi dr \geq 2\pi \int_0^1 h^2(r) r dr = \int_U h^2(z) dA_z \quad . \quad (4.17)$$

Folglich gilt für eine radiale Eigenfunktion $u_j^{(0)}$

$$d_{j,j} \geq \int_U u_j^{(0)2} dA_z = 1 \quad . \quad (4.18)$$

Sei $u_j^{(0)} = A_{j,n} \cdot J_n(\sqrt{\lambda_j^{(0)}} r) \cos n\phi$ eine nichtradiale Eigenfunktion ($A_{j,n}$ Normierungskonstante) und $u_{j+1} = A_{j,n} \cdot J_n(\sqrt{\lambda_j^{(0)}} r) \sin n\phi$ die zum selben Eigenwert gehörende Eigenfunktion. Dann ist $u_j^{(0)2} + u_{j+1}^{(0)2}$ radial, und mit (4.17) gilt

$$d_{j,j} + d_{j+1,j+1} \geq \int_U (u_j^{(0)2} + u_{j+1}^{(0)2}) dA_z = 2 \quad . \quad (4.19)$$

Damit erhält man bei geeigneter Nummerierung der Eigenwerte des Einheitskreises (vgl. 2.3.3) $\sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \geq \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j^{(0)}}$. Ist D ein Gebiet mit maximalem konformen Radius R , ergibt sich

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \geq R^2 \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j^{(0)}} \quad (4.20)$$

für beliebiges n und damit der Satz 4.3 von Pólya und Schiffer, vgl. 4.1.

4.3 Eine unendliche Summe

4.3.1 Vorbetrachtung

Ähnlich wie in 2.4.1 soll auch für das Problem der festen Membran eine Formel zur Berechnung von $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$ hergeleitet werden.

Für die Eigenwerte von (4.1) gilt [10]

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2} = \int_U \int_U G^2(z, \zeta) |f'(z)|^2 |f'(\zeta)|^2 dA_z dA_\zeta \quad . \quad (4.21)$$

Eine ganz ähnliche Formel findet sich bei Pólya und Schiffer in [45] auf Seite 330, jedoch dort lautend

$$P = 4 \int_U \int_U G(z, \zeta) |f'(z)|^2 |f'(\zeta)|^2 dA_z dA_\zeta \quad ,$$

womit die Torsionssteifigkeit P berechnet wird. In einfacher Weise kann damit eine Formel zur Berechnung der Torsionssteifigkeit für verschiedene Gebiete mit den Fourierkoeffizienten der Abbildungsfunktion hergeleitet werden. Eine Formel findet sich bereits bei [45], jedoch keine numerischen Resultate.

Ergänzend sei hier die Torsionssteifigkeit der Kardioide angegeben. Es ist

$$P = \frac{11}{48} \pi \quad .$$

Näheres zur Kardioide und der zugehörigen Abbildungsfunktion findet sich in 4.3.5.

Doch zurück zu den Eigenwerten der festen Membran. Da es sich in (4.21) um Gebietsintegrale handelt, gestaltet sich die Rechnung ungleich aufwendiger als in 2.4.1. Die Rechenwege werden angedeutet, jedoch aus Platzgründen nicht in aller Ausführlichkeit dargestellt und Zwischenergebnisse angegeben.

Zur Auswertung von (4.21) werden $G^2(z, \zeta)$ sowie $|f'(\zeta)|^2$ in eine Fourierreihe entwickelt. Dazu wird zu den Polarkoordinaten übergegangen. Es sei $z = r e^{i\phi}$ und $\zeta = s e^{i\theta}$.

Die Abbildungsfunktion. Benötigt wird eine Entwicklung von $|f'(\zeta)|^2$. Die Entwicklung besitze die Darstellung

$$|f'(s, \theta)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_{0,n} s^n + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{m,n} \cos m\theta + b_{m,n} \sin m\theta) s^n \quad (4.22)$$

bzw. entsprechend in r und ϕ , vgl. auch 4.3.4.

Die Greensche Funktion. Die Greensche Funktion besitzt eine Singularität in $|z| = |\zeta|$. Daher werden die Fälle $|\zeta| < |z|$ und $|z| < |\zeta|$ unterschieden. Aus Symmetriegründen gilt natürlich

$$\int_U \int_U G^2(z, \zeta) |f'(z)|^2 |f'(\zeta)|^2 dA_z dA_\zeta = 2 \int_{0 < |z| < 1} \int_{0 < |\zeta| < |z|} G^2(z, \zeta) |f'(z)|^2 |f'(\zeta)|^2 dA_z dA_\zeta, \quad (4.23)$$

so dass im folgenden nur der Fall $|\zeta| < |z|$ betrachtet wird. Es gilt

$$\begin{aligned} G(z, \zeta) &= \frac{1}{2\pi} (-\ln |z - \zeta| + \ln |1 - z\bar{\zeta}|) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(-\ln |z| - \ln \left| 1 - \frac{\zeta}{z} \right| + \ln |1 - z\bar{\zeta}| \right) \\ G^2(z, \zeta) &= \frac{1}{4\pi^2} \left(\ln^2 |z| + \ln^2 \left| 1 - \frac{\zeta}{z} \right| + \ln^2 |1 - z\bar{\zeta}| \right. \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$2 \ln |z| \ln \left| 1 - \frac{\zeta}{z} \right| - 2 \ln |z| \ln |1 - z\bar{\zeta}| - 2 \ln \left| 1 - \frac{\zeta}{z} \right| \ln |1 - z\bar{\zeta}| \Big). \quad (4.25)$$

Ferner gelten folgende Beziehungen

$$\ln |1 - x| = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \bar{x}^n \right) \quad (4.26)$$

$$\sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n(k-n)} = \frac{2}{k} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n} \quad (4.27)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(k+n)} = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} \quad , \quad (4.28)$$

welche in den anschließenden Rechnungen verwendet werden.

4.3.2 Herleitung einer Formel zur Berechnung von $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$

Zur Berechnung von (4.22) muss gemäß (4.23) über alle sechs Summanden von (4.25) integriert werden. Der Faktor $\frac{1}{4\pi^2}$ bleibt hierbei zunächst unberücksichtigt.

Erster Summand. Für den ersten Summanden ergibt sich in einfacher Rechnung mit $z = r e^{i\phi}$ und $\zeta = s e^{i\theta}$

$$\begin{aligned} & \int_{0 < |z| < 1} \int_{0 < |\zeta| < |z|} \ln^2 |z| |f'(z)|^2 |f'(\zeta)|^2 dA_{\zeta} dA_z \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} \ln^2 r \sum_{n=0}^{\infty} a_{0,n} s^{n+1} \sum_{n=0}^{\infty} a_{0,n} r^{n+1} d\theta ds d\phi dr \\ &= 8\pi^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_{0,n} a_{0,m}}{(n+2)(n+m+4)^3} \quad . \end{aligned} \quad (4.29)$$

Zweiter Summand. Am Beispiel des zweiten Summanden wird gezeigt, wie die Indizes zweckmäßig gewählt und Teilsummen zusammengefasst werden können. Es ergibt sich durch Entwicklung des zweiten Summanden in eine Fourierreihe

$$\begin{aligned} \ln^2 \left| 1 - \frac{\zeta}{z} \right| &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot m} \left(\frac{\zeta}{z} \right)^{n+m} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot m} \left(\frac{\zeta}{z} \right)^{n+m} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot m} \left(\frac{\zeta}{z} \right)^n \left(\frac{\zeta}{z} \right)^m \end{aligned} \quad (4.30)$$

siehe (4.26). Als erstes Teilergebnis erhält man mittels Integration gemäß (4.23)

$$\begin{aligned} & \int_{0 < |z| < 1} \int_{0 < |\zeta| < |z|} \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot m} \left(\left(\frac{\zeta}{z} \right)^{n+m} + \left(\frac{\bar{\zeta}}{z} \right)^{n+m} \right) |f'(z)|^2 |f'(\zeta)|^2 dA_{\zeta} dA_z \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot m} s^{n+m+1} r^{-(n+m)+1} \\ & \quad \cdot \left(e^{i(n+m)\theta} e^{-i(n+m)\phi} + e^{-i(n+m)\theta} e^{i(n+m)\phi} \right) \\ & \quad \cdot |f'(s, \theta)|^2 |f'(r, \phi)|^2 d\theta ds d\phi dr \end{aligned}$$

und unter der Wahl der Indizes

$$m + n = k \quad m = k - n \quad k = 2, 3, \dots \quad n = 1, 2, \dots, k - 1$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n(k-n)} s^{k+1} r^{-k+1} \left(e^{ik\theta} e^{-ik\phi} + e^{-ik\theta} e^{ik\phi} \right) \\ & \quad \cdot \sum_{m=1}^{\infty} (a_{k,m} \cos k\theta + b_{k,m} \sin k\theta) s^m \sum_{l=1}^{\infty} (a_{k,l} \cos k\phi + b_{k,l} \sin k\phi) r^l d\theta ds d\phi dr \\ &= \pi^2 \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_{k,m} a_{k,l} + b_{k,m} b_{k,l}}{(k+m+2)(m+l+4)}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Als zweites Teilergebnis für den zweiten Summanden aus (4.25) erhält man

$$\begin{aligned} & \int_{0 < |z| < 1} \int_{0 < |\zeta| < |z|} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot m} \left(\frac{\zeta}{z} \right)^n \left(\frac{\bar{\zeta}}{z} \right)^m |f'(z)|^2 |f'(\zeta)|^2 dA_z dA_{\zeta} \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} s^{2n+1} r^{-2n+1} \sum_{m=0}^{\infty} a_{0,m} s^m \sum_{l=0}^{\infty} a_{0,l} r^l \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n(k+n)} s^{k+2n+1} r^{-(k+2n)+1} \left(e^{ik\theta} e^{-ik\phi} + e^{-ik\theta} e^{ik\phi} \right) \right. \\ & \quad \left. \cdot \sum_{m=1}^{\infty} (a_{k,m} \cos k\theta + b_{k,m} \sin k\theta) s^m \sum_{l=1}^{\infty} (a_{k,l} \cos k\phi + b_{k,l} \sin k\phi) r^l \right) d\theta ds d\phi dr \\ &= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_{0,m} a_{0,l}}{n^2 (2n+m+2)(m+l+4)} \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$+ \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_{k,m} a_{k,l} + b_{k,m} b_{k,l}}{n(k+n)(2n+k+m+2)(m+l+4)}. \quad (4.33)$$

Für die übrigen Summanden sei hier auf die Angabe der Rechnungen verzichtet. Zur Vollständigkeit werden jedoch die Zwischenergebnisse angegeben.

Dritter Summand.

$$\pi^2 \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_{k,m} a_{k,l} + b_{k,m} b_{k,l}}{(k+m+2)(2k+m+l+4)} \quad (4.34)$$

$$+ 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_{0,m} a_{0,l}}{n^2 (2n+m+2)(4n+m+l+4)} \quad (4.35)$$

$$+ \pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_{k,m} a_{k,l} + b_{k,m} b_{k,l}}{n(n+k)(2n+k+m+2)(4n+2k+m+l+4)} \quad (4.36)$$

Vierter Summand.

$$2\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_{k,m} a_{k,l} + b_{k,m} b_{k,l}}{k(k+m+2)(m+l+4)^2} \quad (4.37)$$

Fünfter Summand.

$$-2\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_{k,m} a_{k,l} + b_{k,m} b_{k,l}}{k(k+m+2)(2k+m+l+4)^2} \quad (4.38)$$

Sechster Summand.

$$-4\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_{0,m} a_{0,l}}{n^2 (2n+m+2)(2n+m+l+4)} \quad (4.39)$$

$$- \pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_{k,m} a_{k,l} + b_{k,m} b_{k,l}}{n(k+n)(2n+k+m+2)(2n+m+l+4)} \quad (4.40)$$

$$- \pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_{k,m} a_{k,l} + b_{k,m} b_{k,l}}{n(k+n)(2n+k+m+2)(2k+2n+m+l+4)} \quad (4.41)$$

$$- \pi^2 \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{k-1} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_{k,m} a_{k,l} + b_{k,m} b_{k,l}}{n(k-n)(k+m+2)(2k-2n+m+l+4)} \quad (4.42)$$

Die erhaltenen Zwischenergebnisse sind nun in geeigneter Weise zusammenzufassen. Es werden jeweils addiert:

$$(4.32), (4.35) \text{ und } (4.39)$$

$$(4.37) \text{ und } (4.38)$$

$$(4.33), (4.36), (4.40) \text{ und } (4.41)$$

(4.31), (4.34) und (4.42).

(4.29) bleibt bestehen. Zur Zusammenfassung von (4.31), (4.34) und (4.42) sei, da die Rechnung nicht offensichtlich ist, Folgendes angemerkt. Es gilt

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n(k-n)(2k-2n+m+l+4)(k+m+2)} \\
&= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n(k-n)(2n+m+l+4)(k+m+2)} \\
&= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n(k+m+2)} \left(\frac{2}{(2k+m+l+4)(2n+m+l+4)} + \frac{1}{(k-n)(2k+m+l+4)} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n(k+m+2)} \left(\frac{2}{(2k+m+l+4)(2n+m+l+4)} + \frac{2}{k(2k+m+l+4)} \right).
\end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n(k+m+2)(m+l+4)} + \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n(k+m+2)(2k+m+l+4)} \\
& \quad - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n(k-n)(2k-2n+m+l+4)(k+m+2)} \\
&= \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n(k+m+2)(m+l+4)} + \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n(k+m+2)(2k+m+l+4)} \\
& \quad - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n(k+m+2)} \left(\frac{2}{(2k+m+l+4)(2n+m+l+4)} + \frac{2}{k(2k+m+l+4)} \right) \\
&= \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n(k+m+2)(m+l+4)} - \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n(k+m+2)(2k+m+l+4)} \\
& \quad - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{2}{n(k+m+2)(2k+m+l+4)(2n+m+l+4)} \\
&= \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{(k+m+2)(2k+m+l+4)} \left(\frac{2}{n(m+l+4)} - \frac{2}{n(2n+m+l+4)} \right) \\
&= 4 \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{(m+l+4)(k+m+2)(2k+m+l+4)(2n+m+l+4)}. \tag{4.43}
\end{aligned}$$

Aus den gewonnenen Resultaten ergibt sich folgender

Satz 4.6 Für die Eigenwerte des Problems (4.1) gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (A_{m,l} + B_{m,l}) \cdot a_{0,m} a_{0,l} \\ &+ \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (C_{k,m,l} + D_{k,m,l}) + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} E_{k,m,l} \right) \\ &\cdot (a_{k,m} a_{k,l} + b_{k,m} b_{k,l}) \end{aligned} \quad (4.44)$$

mit $a_{k,l}$ und $b_{k,l}$ gemäß (4.22) und den Koeffizienten

$$A_{m,l} = \frac{4}{(m+2)(m+l+4)^3} \quad (4.45)$$

$$B_{m,l} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(m+l+4)(2n+m+l+4)(4n+m+l+4)(2n+m+2)} \quad (4.46)$$

$$C_{k,m,l} = \frac{2}{(k+m+2)(m+l+4)^2(2k+m+l+4)} \quad (4.47)$$

$$+ \frac{2}{(k+m+2)(m+l+4)(2k+m+l+4)^2} \quad (4.48)$$

$$D_{k,m,l} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+k+m+2)(m+l+4)(2k+4n+m+l+4)(2n+m+l+4)} \quad (4.49)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+k+m+2)(m+l+4)(2k+4n+m+l+4)(2k+2n+m+l+4)} \quad (4.50)$$

$$E_{k,m,l} = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{2}{(k+m+2)(m+l+4)(2n+m+l+4)(2k+m+l+4)} \quad (4.51)$$

4.3.3 Der Einheitskreis

Mit Hilfe der Formel (4.44) lässt sich die Summe der reziproken Eigenwerte des Einheitskreises exakt berechnen. Man erhält

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^{(0)^2}} = \frac{4}{2 \cdot 4^3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{4(2n+4)(4n+4)(2n+2)} = \frac{\pi^2}{48} - \frac{5}{32} \quad , \quad (4.52)$$

da $a_{0,0} = 1$ und alle übrigen Fourierkoeffizienten 0 sind.

Dieses Ergebnis für die Eigenwerte des Einheitskreises ist bekannt, vgl. [10]. Für andere Gebiete lagen bislang keine Resultate vor.

4.3.4 Entwicklung der Abbildungsfunktion

Sei f die konforme Abbildung, die den Einheitskreis schlicht konform auf das Gebiet D abbildet. f besitzt die Darstellung $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$. Es gilt

$$\begin{aligned}
 |f'(z)|^2 &= f'(z) \cdot \overline{f'(z)} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k \bar{z}^k \\
 |f'(r, \phi)|^2 &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_j \bar{a}_k r^{j+k} e^{i(j-k)\phi} \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_j \bar{a}_k r^{j+k} (\cos(j-k)\phi + i \sin(j-k)\phi) \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 r^{2j} + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{j-1} \Re [a_j \bar{a}_k] r^{j+k} \cos(j-k)\phi \\
 &\quad - 2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{j-1} \Im [a_j \bar{a}_k] r^{j+k} \sin(j-k)\phi \tag{4.53}
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_{0,n} r^n + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{m,n} \cos m\phi + b_{m,n} \sin m\phi) r^n \quad . \tag{4.54}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man in einfacher Weise mit (4.53) und (4.54) die Darstellung der Koeffizienten $a_{m,n}$ von $|f'(r, \phi)|^2$ aus den Koeffizienten a_j der Abbildungsfunktion f .

4.3.5 Ein exakt zu berechnendes Beispiel: Abbildung auf eine Kardioide und verwandte Abbildungen

Sei $f_2(z) = z + \frac{1}{2}z^2$. f_2 bildet den Einheitskreis schlicht konform auf das Innere einer Kardioide ab. Es gilt

$$\begin{aligned}
 f_2'(z) &= 1 + z \\
 |f_2'(z)|^2 &= 1 + 2\Re[z] + |z|^2 \\
 |f_2'(r, \phi)|^2 &= 1 + 2r \cos \phi + r^2 \quad . \tag{4.55}
 \end{aligned}$$

$|f_2'(r, \phi)|^2$ besitzt also die Koeffizienten $a_{0,0} = 1$, $a_{0,2} = 1$ und $a_{1,1} = 2$; alle übrigen Fourierkoeffizienten $a_{m,n}$ und $b_{m,n}$ sind 0. Für die Eigenwerte der Kardioide gilt

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2} &= \frac{4}{2 \cdot 4^3} + \frac{4}{2 \cdot 6^3} + \frac{4}{4 \cdot 6^3} + \frac{4}{4 \cdot 8^3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{4(2n+4)(4n+4)(2n+2)} \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{6(2n+6)(4n+6)(2n+4)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{6(2n+6)(4n+6)(2n+2)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{8(2n+8)(4n+8)(2n+4)} + 4 \left(\frac{2}{4 \cdot 6^2 \cdot 8} + \frac{2}{4 \cdot 6 \cdot 8^2} \right. \\
 & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+4)6(4n+8)(2n+6)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+4)6(4n+8)(2n+8)} \right) + 0 \\
 & = \frac{3}{64} \pi^2 - \frac{551}{1536} \quad . \quad (4.56)
 \end{aligned}$$

Betrachtet wird nun die Abbildung $f_n(z) = z + \frac{1}{n}z^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$. Es gilt

Hilfssatz 4.4 Die Abbildung $f_n(z) = z + \frac{1}{n}z^n$, $n = 2, 3, \dots$ ist eine schlicht konforme Abbildung des Inneren des Einheitskreises $U = \{z : |z| < 1\}$.

Beweis. Angenommen, die Abbildung ist nicht schlicht, dann existieren $z_1 \neq z_2$ mit $|z_1| < 1$ und $|z_2| < 1$ mit $f_n(z_1) = f_n(z_2) = z_1 + \frac{1}{n}z_1^n = z_2 + \frac{1}{n}z_2^n$. D.h., das Polynom $(z - z_1) + \frac{1}{n}(z^n - z_1^n)$ besitzt mindestens eine von z_1 verschiedene Nullstelle. Es ist offensichtlich

$$(z - z_1) + \frac{1}{n}(z^n - z_1^n) = (z - z_1) \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_1^{n-1-k} \right).$$

Angenommen, es ist $\left(1 + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_1^{n-1-k} \right) = 0$, dann muss gelten $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_1^{n-1-k} = -1$. Andererseits gilt

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_1^{n-1-k} \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |z^k z_1^{n-1-k}| < 1,$$

da $|z| < 1$ und $|z_1| < 1$. Dies führt zu einem Widerspruch. Damit ist $\left(1 + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_1^{n-1-k} \right) \neq 0$ im Inneren des Einheitskreises. Somit ist die Abbildung f_n dort schlicht. \square

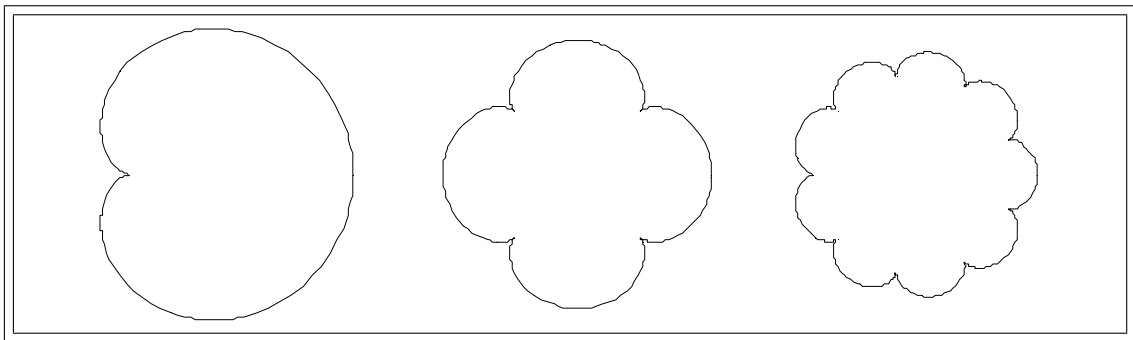


Abb. 1: Abbildung des Einheitskreises durch f_n für $n = 2$, $n = 5$ und $n = 10$

Weitere schlicht konforme Abbildungen des Einheitskreises erhält man durch $f_n^{(t)}(tz) = \frac{tz + \frac{1}{n}(tz)^n}{t}$ mit $0 < t < 1$. Mögliche Bildgebiete finden sich für $n = 6$ sowie $t = 3/4$, $t = 1/2$

und $t = 1/4$ in der folgenden Abbildung 2.

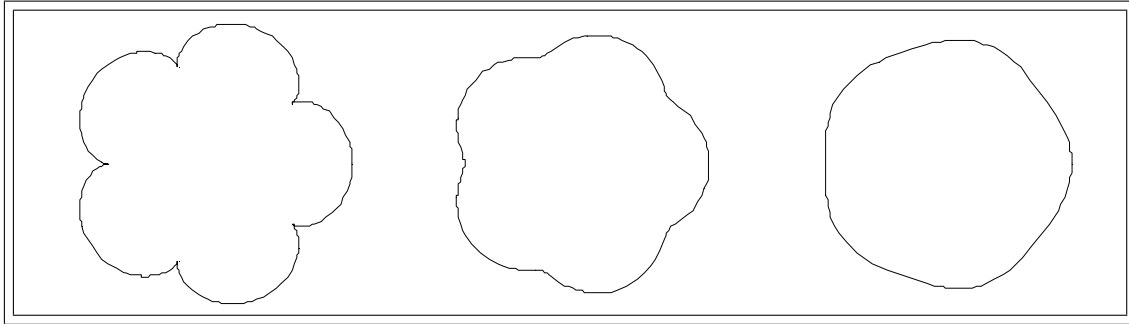


Abb. 2: Abbildung des Einheitskreises durch f_6 für $t = 7/8$, $t = 6/8$ und $t = 5/8$

Für die Funktion f_n erhält man die Koeffizienten $a_{0,0}^{(n)} = 1$, $a_{0,2(n-1)}^{(n)} = 1$ und $a_{n-1,n-1}^{(n)} = 2$. Die Werte für die Summe der reziproken Eigenwerte sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst; in Spalte zwei der exakte Wert, in der dritten Spalte eine numerische Näherung.

n	$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2(n)}$	$N\left[\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2(n)}\right]$
2	$\frac{3}{64}\pi^2 - \frac{551}{1536}$	0.1039137
3	$\frac{1}{27}\pi^2 - \frac{3817}{12960}$	0.0710193
4	$\frac{25}{768}\pi^2 - \frac{673343}{2580480}$	0.0603391
5	$\frac{3}{100}\pi^2 - \frac{26917}{112000}$	0.0557578
6	$\frac{49}{1728}\pi^2 - \frac{54228619}{239500800}$	0.0534437
7	$\frac{4}{147}\pi^2 - \frac{107001247}{494413920}$	0.0521403
8	$\frac{27}{1024}\pi^2 - \frac{43165500691}{206644838400}$	0.0513463
9	$\frac{25}{972}\pi^2 - \frac{2030899264883}{10003708915200}$	0.0508332
10	$\frac{121}{4800}\pi^2 - \frac{6647785909789}{33522128640000}$	0.0504859
11	$\frac{3}{121}\pi^2 - \frac{607345599478309}{3123256725388800}$	0.0502419
12	$\frac{169}{6912}\pi^2 - \frac{3269956373169173}{17097894668574720}$	0.0500650

Tabelle 5: Abbildung auf Kardioide und verwandte Abbildungen durch f_n , $n = 2, \dots, 20$

n	$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2(n)}$	$N\left[\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2(n)}\right]$
13	$\frac{49}{2028}\pi^2 - \frac{81968454631708789}{434769381792345600}$	0.0499336
14	$\frac{75}{3136}\pi^2 - \frac{281671639536842183}{1512688736650291200}$	0.0498337
15	$\frac{16}{675}\pi^2 - \frac{2576541683417762681}{13988511914176800000}$	0.0497563
16	$\frac{289}{12288}\pi^2 - \frac{157104035764726520747}{861190443061582233600}$	0.0496955
17	$\frac{27}{1156}\pi^2 - \frac{3523159678479820999393}{19478787017735946700800}$	0.0496468
18	$\frac{361}{15552}\pi^2 - \frac{3292525002805511458217}{18343760120231886692352}$	0.0496075
19	$\frac{25}{1083}\pi^2 - \frac{5472697828586560493}{3070153051198169845708800}$	0.0495753
20	$\frac{147}{6400}\pi^2 - \frac{117509580648071555345211239}{663357168956945285222400000}$	0.0495487

Tabelle 5: (Fortsetzung) Abbildung auf Kardioide und verwandte Abbildungen durch f_n , $n = 2, \dots, 20$

Es gilt

Satz 4.7 Sei $f_n(z) = z + \frac{1}{n}z^n$ mit $n \geq 2$ die Funktion, die den Einheitskreis schlicht konform auf das Gebiet D_n abbildet. Für die Eigenwerte von D_n gilt: $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2(n)}$ ist streng monoton fallend in n .

Beweis. Es gilt $a_{0,0}^{(n)} = 1$, $a_{0,2(n-1)}^{(n)} = 1$ und $a_{n-1,n-1}^{(n)} = 2$. Alle übrigen Koeffizienten von $|f'_n(r, \phi)|^2$ sind 0. Die genannte Summe berechnet sich mit Hilfe von (4.44) aus Satz 4.6. Die Koeffizienten $A_{m,l}$ und $B_{m,l}$ aus (4.44) sind jeweils streng monoton fallend in m und l ; $C_{k,m,l}$ und $D_{k,m,l}$ sind jeweils streng monoton fallend in k , m und l . Dies gilt jedoch nicht für $E_{k,m,l}$. Daher sind die Monotoniebetrachtungen etwas aufwendig.

Man erhält mit Hilfe von Formel (4.44) für die Eigenwerte von D_n

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2(n)} &= \left(\frac{1}{32} + \frac{1}{4(n+1)^2} + \frac{1}{4n(n+1)^3} + \frac{1}{16n^4} \right) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8(k+2)(k+1)^2} \frac{1}{2(n+1)(k+n+1)(2k+n+1)(k+n)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2(n+1)(k+n+1)(2k+n+1)(k+1)} + \frac{1}{8n(k+2n)(k+n)^2} \right) \\ &+ \left(\frac{1}{4n^2(n+1)^2} + \frac{1}{8n^3(n+1)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +4 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16(k+n)^2(n+1)(k+n+1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16(k+n)^2(n+1)(k+2n)} \right) \\
& +4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2(n+1)(k+n+1)} \\
& = \frac{\pi^2}{48} - \frac{5}{32} + \frac{1}{32n^4} + \frac{1}{4n(n+1)^2} - \frac{1}{4(n-1)(n+1)} - \frac{1}{8n^3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} \\
& + \frac{1}{2(n-1)n(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} + \left(\frac{1}{8n^2} + \frac{1}{4n} \right) \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right) \\
& := s_n \quad . \tag{4.57}
\end{aligned}$$

Mit den folgenden Abschätzungen

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{8n^3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} + \frac{1}{8(n+1)^3} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+n+1} = -\frac{3n^2+3n+1}{8n^3(n+1)^2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+n+1} \\
& \quad + \frac{1}{4(n+1)^3(2n+1)} + \frac{1}{8(n+1)^4} - \frac{1}{4n^3(n+1)} \\
& \geq -\frac{3n^2+4n+2}{8n^3(n+1)^2} + \frac{1}{4(n+1)^4} - \frac{1}{4n^3(n+1)} \\
& \frac{1}{2(n-1)n(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2n(n+1)(n+2)} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+1} \\
& = \frac{3}{2(n-1)(n+1)^2(n+2)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2n(n+1)(n+2)^2} \\
& \geq \frac{3}{2(n-1)(n+1)^2(n+2)} - \frac{1}{2n(n+1)(n+2)^2} \\
& \left(\frac{1}{8n^2} + \frac{1}{4n} \right) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \left(\frac{1}{8(n+1)^2} + \frac{1}{4(n+1)} \right) \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\
& \geq \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{8n^2} - \frac{1}{8(n+1)^2} + \frac{1}{4n} - \frac{1}{4(n+1)} \right) \\
& \quad + \frac{1}{(n+1)^2} \left(\frac{1}{8(n+1)^2} + \frac{1}{4(n+1)} \right)
\end{aligned}$$

erhält man

$$s_n - s_{n-1} \geq \frac{40n^5 + 36n^4 - 78n^3 - 88n^2 - 23n + 2}{32n^4(n+1)^4(n+2)} > 0 \quad \text{für } n \geq 2 \quad . \tag{4.58}$$

Man überzeugt sich leicht, dass für $n \geq 2$ das Polynom $p(n) = 40n^5 + 36n^4 - 78n^3 -$

$88n^2 - 23n + 2$ stets positiv ist, denn $p(2) > 0$, $p'(2) > 0$. Außerdem ist $p''(n) = 800n^3 + 432n^2 - 468n - 176 > 0$ für $n \geq 2$ wegen $800 + 432 - 468 - 176 > 0$ offensichtlich. Damit hat man Gültigkeit in (4.57), womit die Behauptung des Satzes 4.7 folgt. \square

Die Fläche des Gebietes D_N lässt sich in einfacher Weise berechnen. Es gilt

$$|D_N| = \int_U |f'(z)|^2 dA_z = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r + 2r^n \cos(n-1)\phi + r^{2n-1}) d\phi dr = \pi(1 + \frac{1}{n}) \quad . \quad (4.59)$$

Für wachsendes n ist die Fläche von D_n also streng monoton fallend.

Betrachtet man die normierten Gebiete \tilde{D}_n mit $|\tilde{D}_n| = \pi$, welche man durch Abbildung des Einheitskreises mittels der normierten Abbildung $\tilde{f}_n(z) = \sqrt{\frac{n}{n+1}} f_n(z) = \sqrt{\frac{n}{n+1}} (z + \frac{1}{n} z^n)$ erhält, so ergibt sich für die Eigenwerte von \tilde{D}_n der folgende

Satz 4.8 Sei $\tilde{f}_n(z) = \sqrt{\frac{n}{n+1}} (z + \frac{1}{n} z^n)$ die Funktion, die den Einheitskreis schlicht konform auf das Gebiet \tilde{D}_n abbildet. Für die Eigenwerte von \tilde{D}_n gilt: $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\tilde{\lambda}_j^2(n)}$ ist streng monoton wachsend in n für $n \geq 4$.

Beweis. Zum Beweis wird s_n aus (4.57) zunächst mit $\frac{n^2}{(n+1)^2}$ multipliziert. Man erhält $\tilde{s}_n = \frac{n^2}{(n+1)^2} s_n$. Um zu zeigen, dass für $n \geq 4$ $\tilde{s}_{n+1} - \tilde{s}_n > 0$, verfährt man wie beim Beweis von Satz 4.7; man erhält Satz 4.8. \square

Die Werte für die Summe der reziproken Eigenwerte der Gebiete \tilde{D}_n sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst; in Spalte zwei der exakte Wert, in der dritten Spalte eine numerische Näherung.

n	$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\tilde{\lambda}_j^2(n)}$	$N\left[\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\tilde{\lambda}_j^2(n)}\right]$
2	$\frac{1}{48}\pi^2 - \frac{551}{3456}$	0.0461839
3	$\frac{1}{48}\pi^2 - \frac{3817}{23040}$	0.0399484
4	$\frac{1}{48}\pi^2 - \frac{673343}{403200}$	0.038617
5	$\frac{1}{48}\pi^2 - \frac{26917}{161280}$	0.0387207
6	$\frac{1}{48}\pi^2 - \frac{54228619}{325987200}$	0.0392648
7	$\frac{1}{48}\pi^2 - \frac{107001247}{645765120}$	0.0399199

Tabelle 6: Abbildung auf Kardioide und verwandte Abbildungen durch \tilde{f}_n , $n = 2, \dots, 20$

n	$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2(n)}$	$N\left[\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2(n)}\right]$
8	$\frac{1}{48}\pi^2 - \frac{43165500691}{261534873600}$	0.0405699
9	$\frac{1}{48}\pi^2 - \frac{2030899264883}{12350257920000}$	0.0411749
10	$\frac{1}{48}\pi^2 - \frac{6647785909789}{40561775654400}$	0.0417239
11	$\frac{1}{48}\pi^2 - \frac{607345599478309}{3716933623603200}$	0.0422171
12	$\frac{1}{48}\pi^2 - \frac{3269956373169173}{20066279159646720}$	0.042659
13	$\frac{1}{48}\pi^2 - \frac{81968454631708789}{504229578883430400}$	0.043055
14	$\frac{1}{48}\pi^2 - \frac{281671639536842183}{1736504927277120000}$	0.0434107
15	$\frac{1}{48}\pi^2 - \frac{2576541683417762681}{1591581800013048000}$	0.0437312
16	$\frac{1}{48}\pi^2 - \frac{157104035764726520747}{972203273612489318400}$	0.0440209
17	$\frac{1}{48}\pi^2 - \frac{3523159678479820999393}{21837809666942722252800}$	0.0442837
18	$\frac{1}{48}\pi^2 - \frac{3292525002805511458217}{20438572232727503382528}$	0.0445231
19	$\frac{1}{48}\pi^2 - \frac{5472697828586560493}{3401831635676642488320000}$	0.0447417
20	$\frac{1}{48}\pi^2 - \frac{117509580648071555345211239}{731351278775032176957696000}$	0.0449421

Tabelle 6: (Fortsetzung) Abbildung auf Kardioide und verwandte Abbildungen durch f_n , $n = 2, \dots, 20$

4.3.6 Ein numerisches Beispiel: Abbildung auf ein reguläres n -Eck

Sei nun $f_n(z) = \int^z \frac{dz}{(1-z^n)^{\frac{2}{n}}}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 3$. f_n bildet den Einheitskreis schlicht konform auf das Innere eines regulären n -Ecks ab und ist ein Spezialfall der Schwarz-Christoffel-Formel [21].

Es gilt folgender

Satz 4.9 f'_n besitzt im Inneren des Einheitskreises die Potenzreihenentwicklung

$$f'_n(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\prod_{k=0}^{j-1} \frac{nk+2}{nk+n} \right) z^{nj}. \tag{4.60}$$

Beweis. Zunächst erfolgt eine formale Entwicklung von f'_n . Es gilt offensichtlich

$$f'_n(z) = \frac{1}{(1-z^n)^{\frac{2}{n}}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^{kn} \right)^{\frac{2}{n}} = (1+\xi)^{\frac{2}{n}}$$

unter Zuhilfenahme der Substitution $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} z^{kn}$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\frac{2}{n}}{j} \xi^j$$

und Verwendung der binomischen Reihe für beliebigen reellen Exponenten, [56, S. 119]. Wiedereinsetzen von ξ liefert

$$\begin{aligned} f'_n(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\frac{2}{n}}{j} \left(\sum_{k=1}^{\infty} z^{kn} \right)^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\frac{2}{n}}{j} z^{nj} \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^{kn} \right)^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\frac{2}{n}}{j} z^{nj} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+j-1}{j-1} z^{kn} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\frac{2}{n}}{j} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+j-1}{j-1} z^{n(k+j)} \end{aligned} \tag{4.61}$$

mit $m = j + k$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m \binom{\frac{2}{n}}{j} \binom{m-1}{j-1} z^{nm} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m \binom{\frac{2}{n}}{j} \binom{m-1}{m-j} z^{nm} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\frac{2}{n} + m - 1}{m} z^{nm} \quad [56, S.33] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{2+(m-1)n}{m} z^{nm} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{j-1} \frac{2+kn}{k+1} z^{nj} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{j-1} \frac{kn+2}{kn+n} z^{nj} . \end{aligned} \tag{4.62}$$

Bleibt zu zeigen, siehe (4.61)

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^{kn} \right)^j = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+j-1}{j-1} z^{kn} . \quad (4.63)$$

Der **Beweis** erfolgt durch vollständige Induktion nach j . Für $j = 1$ ist die Gültigkeit von (4.63) offensichtlich. Es gelte nun

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^{kn} \right)^j = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+j-1}{j-1} z^{kn} .$$

Durch Einsetzen der Induktionsvoraussetzung erhält man

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^{kn} \right)^{j+1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+j-1}{j-1} \sum_{k=0}^{\infty} z^{kn} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \binom{m+j-1}{j-1} z^{kn} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+j}{j} z^{kn} . \end{aligned} \quad (4.64)$$

Der **Beweis** von (4.64) erfolgt ebenfalls induktiv durch Induktion nach j . Für $j = 1$ ist die Gültigkeit von (4.64) ebenfalls offensichtlich. Nun gelte

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \binom{m+j-1}{j-1} z^{kn} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+j}{j} z^{kn} .$$

Man erhält

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^k \binom{m+j}{j} &= \sum_{m=0}^k \left[\binom{m+j-1}{j-1} + \binom{m+j-1}{j} \right] \quad [56, S.33] \\ &= \binom{k+j}{j} + \sum_{m=1}^k \binom{m+j-1}{j} \\ &= \binom{k+j}{j} + \sum_{m=1}^k \binom{m+j-1}{m-1} \\ &= \binom{k+j}{j} + \binom{k+j}{k-1} \quad [56, S.33] \\ &= \binom{k+j}{j} + \binom{k+j}{j+1} \\ &= \binom{k+j+1}{j+1} \end{aligned} \quad (4.65)$$

und damit die Gültigkeit von (4.64). \square

Dies zieht die Gültigkeit von (4.63) bzw. (4.61) nach sich. \square

Man erhält für f'_n die angegebene Entwicklung.

Zur Konvergenz. Einfachste Betrachtungen, z.B. mit Hilfe des Quotientenkriteriums, zeigen, dass die in (4.63) angegebene Reihe für alle $|z| < 1$ konvergiert. Daraus folgt die Gültigkeit des Satzes 4.9. Mit (4.60) hat man eine Entwicklung für die Ableitung der betrachteten Abbildungsfunktion. \square

Fehlerabschätzung am Beispiel des Quadrats. Für $n = 4$ ist f_n die Abbildung des Einheitskreises auf das Quadrat. Für die Koeffizienten von $f'_4(z)$ erhält man

$$\begin{aligned} a_{4j} &= \prod_{k=0}^{j-1} \frac{4k+2}{4k+4} = \prod_{k=0}^{j-1} \frac{(2k+1)(2k+2)}{(2k+2)(2k+2)} \\ &= \frac{(2j)!}{j!j!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2j} = \binom{2j}{j} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2j}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Aus der Stirlingschen Formel $n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\theta(n)/(12n)}$ mit $0 < \theta(x) < 1$ [56, S. 600] folgt

$$\begin{aligned} a_{4j} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2j} \frac{\sqrt{4\pi j} \left(\frac{2j}{e}\right)^{2j} e^{\theta(2j)/(24j)}}{\sqrt{2\pi j} \sqrt{2\pi j} \left(\frac{j}{e}\right)^j \left(\frac{j}{e}\right)^j e^{\theta(j)/(12j)} e^{\theta(j)/(12j)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi j}} \cdot \frac{e^{\theta(2j)/(24j)}}{e^{\theta(j)/(12j)} e^{\theta(j)/(12j)}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{j}} \cdot \frac{e^{\frac{1}{24}}}{\sqrt{\pi}} < \frac{1}{\sqrt{j}}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Für die Koeffizienten von $|f'_4(r, \phi)|^2$ gilt mit (4.53) und (4.54)

$$\begin{aligned} a_{0,8j} &= a_{4j} \cdot a_{4j} \\ &= \left[\binom{2j}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^{2j} \right]^2 \quad j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned} a_{4m,8j+4m} &= 2a_{4j} \cdot a_{4j+4m} \\ &= 2 \binom{2j}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^{2j} \binom{2j+2m}{j+m} \left(\frac{1}{2}\right)^{2j+2m} \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4.69)$$

Aus (4.44) und (4.45) erhält man mit

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} A_{m,l} a_{0,m} a_{0,l} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} A_{8m,8l} a_{0,8m} a_{0,8l} \quad (4.70)$$

bei jeweiliger Summation bis N folgende Fehlerabschätzung:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} A_{8m,8l} a_{0,8m} a_{0,8l} - \sum_{m=0}^N \sum_{l=0}^N A_{8m,8l} a_{0,8m} a_{0,8l} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=N+1}^{\infty} A_{8m,8l} a_{0,8m} a_{0,8l} + \sum_{m=N+1}^{\infty} \sum_{l=0}^N A_{8m,8l} a_{0,8m} a_{0,8l} \\
&= \frac{1}{32} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=N+1}^{\infty} \frac{1}{(4m+1)(2m+2l+1)^3} \left(\binom{2m}{m} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} \right)^2 \left(\binom{2l}{l} \left(\frac{1}{2}\right)^{2l} \right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{32} \sum_{m=N+1}^{\infty} \sum_{l=0}^N \frac{1}{(4m+1)(2m+2l+1)^3} \left(\binom{2m}{m} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} \right)^2 \left(\binom{2l}{l} \left(\frac{1}{2}\right)^{2l} \right)^2 \\
&\leq \frac{1}{32} \sum_{l=N+1}^{\infty} \frac{1}{l(2l+1)^3} + \frac{1}{32} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=N+1}^{\infty} \frac{1}{ml(4m+1)(2m+2l+1)^3} \\
&\quad + \frac{1}{32} \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{m(4m+1)(2m+1)^3} + \frac{1}{32} \sum_{m=N+1}^{\infty} \sum_{l=1}^N \frac{1}{ml(4m+1)(2m+2l+1)^3} \\
&\leq \frac{1}{32} \sum_{l=N+1}^{\infty} \frac{1}{l(2l+1)^3} + \frac{1}{32} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(4m+1)} \cdot \sum_{l=N+1}^{\infty} \frac{1}{l(2l+3)^3} \\
&\quad + \frac{1}{32} \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{m(4m+1)(2m+1)^3} + \frac{1}{32} \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{m(4m+1)(2m+3)^3} \cdot \sum_{l=1}^N \frac{1}{l} \quad .
\end{aligned} \tag{4.71}$$

In entsprechender Weise ergibt sich aus (4.44) und (4.46) mit

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} B_{m,l} a_{0,m} a_{0,l} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} B_{8m,8l} a_{0,8m} a_{0,8l} \tag{4.72}$$

die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} B_{8m,8l} a_{0,8m} a_{0,8l} - \sum_{m=0}^N \sum_{l=0}^N B_{8m,8l} a_{0,8m} a_{0,8l} \\
&= \frac{1}{8} \sum_{m=0}^N \sum_{l=N+1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\binom{2m}{m} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} \right)^2 \left(\binom{2l}{l} \left(\frac{1}{2}\right)^{2l} \right)^2}{(2m+2l+1)(n+4m+4l+2)(n+2m+2l+1)(n+4m+1)} \\
&\quad + \frac{1}{8} \sum_{m=N+1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\binom{2m}{m} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} \right)^2 \left(\binom{2l}{l} \left(\frac{1}{2}\right)^{2l} \right)^2}{(2m+2l+1)(n+4m+4l+2)(n+2m+2l+1)(n+4m+1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{8} \sum_{l=N+1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l(2l+1)(n+4l+2)(n+2l+1)(n+1)} \\
&\quad + \frac{1}{8} \sum_{m=1}^N \sum_{l=N+1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ml(2m+2l+1)(n+4m+4l+2)(n+2m+2l+1)(n+4m+1)} \\
&\quad + \frac{1}{8} \sum_{m=N+1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m(2m+1)(n+4m+2)(n+2m+1)(n+4m+1)} \\
&\quad + \frac{1}{8} \sum_{m=N+1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ml(2m+2l+1)(n+4m+4l+2)(n+2m+2l+1)(n+4m+1)} \\
&\leq \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2N+3)(n+1)} \cdot \sum_{l=N+1}^{\infty} \frac{1}{l(2l+1)(4l+3)} \\
&\quad + \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2N+5)(n+5)} \cdot \sum_{m=1}^N \frac{1}{m} \cdot \sum_{l=N+1}^{\infty} \frac{1}{l(2l+3)(4l+7)} \\
&\quad + \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2N+3)(n+4N+5)} \cdot \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{m(2m+1)(4m+3)} \\
&\quad + \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2N+5)(n+4N+5)} \cdot \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{m(2m+3)} \cdot \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l(4l+4N+7)} \quad (4.73)
\end{aligned}$$

$B_{8m,8l}$ wird in $\sum_{m=0}^N \sum_{l=0}^N B_{8m,8l} a_{0,8m} a_{0,8l}$ nicht durch eine Näherung ersetzt, da sich die Summe $\frac{8}{m+l+4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+m+l+4)(4n+m+l+4)(2n+m+2)}$ für m, l beliebig, fest, exakt bestimmen lässt.

Mit (4.44) und (4.69) gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (C_{k,m,l} + D_{k,m,l}) a_{k,m} a_{k,l} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (C_{4k,8m+4k,8l+4k} + D_{4k,8m+4k,8l+4k}) \\
&\quad \cdot a_{4k,8m+4k} a_{4k,8l+4k} \quad (4.74)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} E_{k,m,l} a_{k,l} a_{k,m} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} E_{4k,8m+4k,8l+4k} a_{4k,8m+4k} a_{4k,8l+4k} \quad (4.75)
\end{aligned}$$

Die Fehlerabschätzungen für (4.44) bzw. (4.47), (4.48), (4.49), (4.50) und (4.51) erfolgen in analoger Weise wie (4.71) und (4.73), werden hier aber nicht ausgeführt. Bei der numerischen Bestimmung von $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$ für das Quadrat werden $D_{k,m,l}$ und $E_{k,m,l}$ jeweils exakt bestimmt; die übrigen Summationen erfolgen bis N .

Alternative Bestimmung von $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$ für das Quadrat. Ist D ein Rechteck, so

sind die Eigenwerte und Eigenfunktionen von (4.1) bekannt. Besitzt D die Kantenlängen a und b , sind die Eigenwerte mit $\lambda_{n,m} = \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)$, $n, m = 1, 2, 3, \dots$ gegeben, vgl. z.B. [4] oder [2].

Durch Abbildung des Einheitskreises mit f_4 erhält man ein Quadrat der Kantenlänge

$$a = \int_{|z|=1} \frac{1}{4} |f_4'(z)| ds_z \approx 1.854 \quad .$$

Aus der Darstellung der Eigenwerte erhält man

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2} = \frac{(\int_{|z|=1} \frac{1}{4} |f_4'(z)| ds_z)^4}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + m^2)^2} = 0.05148 \frac{299}{311} \quad , \quad (4.76)$$

mit Hilfe der Formel (4.44) ergibt sich

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2} = 0.05148 \frac{28}{36} \quad (4.77)$$

unter Berücksichtigung der jeweiligen Fehlerschranke. Die Rechnungen mit (4.44) sind äußerst zeitaufwendig, liefern aber ein recht genaues Ergebnis mit einem Fehler $< 8 \cdot 10^{-7}$. Das Ergebnis (4.77) ist zwar weniger genau als (4.76), jedoch sind im allgemeinen die Eigenwerte nicht bekannt, so dass in diesen Fällen (4.44) von Nutzen ist. Für verschiedene reguläre n -Ecke sind die numerischen Resultate in der folgenden Tabelle zusammengestellt, in der zweiten Spalte eine untere, in der dritten eine obere Schranke. Für $n = 3$ ergibt sich eine hohe Fehlerschranke, so dass die Rechnungen für ein reguläres Dreieck nicht sinnvoll sind. Für $n \geq 4$ ist $8 \cdot 10^{-7}$ eine gültige Fehlerschranke.

n	$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$	$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$
4	0.0514828	0.0514836
5	0.0498796	0.0498805
6	0.0496056	0.0496065
7	0.0494915	0.0494924
8	0.0494375	0.0494384

Tabelle 7: Abbildung auf ein reguläres n -Eck

Die in der Tabelle enthaltenen Werte deuten auf eine mögliche Monotonie der Summe der reziproken Eigenwerte in Abhängigkeit von der Eckenzahl des regulären n -Ecks hin.

f_n besitzt die Koeffizienten $a_{n,j} = \prod_{k=0}^{j-1} \frac{nk+2}{nk+n}$, vgl. (4.60). Diese sind offensichtlich streng monoton fallend in j bei festem n , bei festem j monoton fallend in n , für $j \geq 1$ sogar streng. Demzufolge sind die Koeffizienten von

$$\begin{aligned} |f'(r, \phi)|^2 &= \sum_{m=0}^{\infty} a_{0,m} r^m + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (a_{k,l} \cos k\phi + b_{k,l} \sin k\phi) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} a_{0,2nm} r^{2nm} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{nk,2nl+nk} \cos nk\phi \end{aligned} \quad (4.78)$$

jeweils fallend in m , k und l und bei festen m , k , l monoton fallend in n .

Wie bereits erwähnt sind $A_{m,l}$ und $B_{m,l}$ jeweils streng monoton fallend in m und l , vgl. (4.45) und (4.46). $C_{k,m,l}$ und $D_{k,m,l}$ sind streng monoton fallend in k , m und l , vgl. (4.47), (4.48), (4.49) und (4.50). $E_{k,m,l}$ ist streng monoton fallend in m und l , jedoch nicht in k , vgl. (4.51). Numerische Rechnungen stützen jedoch die Vermutung, dass $D_{k,m,l} + E_{k,m,l}$ für $k \geq 2$ monoton fallend in k ist, ein Nachweis ist aber bislang nicht gelungen. Dies wäre hinreichend für Monotonie der Summen der reziproken Eigenwerte des regulären n -Ecks in Abhängigkeit von n .

4.4 Eine weitere unendliche Summe

4.4.1 Vorbetrachtung

Im Falle des Stekloffproblems (2.1) sind die nichttrivialen Eigenwerte des Einheitskreises gegeben durch $\lambda_{2j}^{(0)} = \lambda_{2j+1}^{(0)} = j$ mit $j = 1, 2, 3, \dots$. Die Summen $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^{(0)^n}$, $n \geq 2$ lassen sich in einfacher Weise mit der ζ -Funktion angeben.

Unter der Riemannschen ζ -Funktion versteht man die Reihe

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad ,$$

welche für alle reellen Zahlen $s > 1$ bzw. allgemeiner für alle komplexen Zahlen s mit $\Re[s] > 1$ konvergiert, [56, S. 116].

Nachfolgend soll in 4.4.2 die Summe $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^{(0)^4}$ für den Einheitskreis für das Problem (4.1) bestimmt werden.

Es gilt $G(z, \zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{u_j^{(0)}(z)u_j^{(0)}(\zeta)}{\lambda_j^{(0)}}$, wobei $u_j^{(0)}$ wiederum die normierten Eigenfunktionen des Einheitskreises bezeichnet und $\lambda_j^{(0)}$ die zugehörigen Eigenwerte. Folglich gilt für die Berechnung der Summe

$$\begin{aligned} & \int_U \int_U \left(\int_U \sum_{j=1}^{\infty} \frac{u_j^{(0)}(z)u_j^{(0)}(\eta)}{\lambda_j^{(0)}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{u_j^{(0)}(\zeta)u_j^{(0)}(\eta)}{\lambda_j^{(0)}} dA_\eta \right)^2 dA_\zeta dA_z \\ &= \int_U \int_U \sum_{j=1}^{\infty} \frac{u_j^{(0)}(z)u_j^{(0)}(\zeta)}{\lambda_j^{(0)^2}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{u_j^{(0)}(z)u_j^{(0)}(\zeta)}{\lambda_j^{(0)^2}} dA_\zeta dA_z \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^{(0)^4}} \quad . \quad (4.79)$$

4.4.2 Bestimmung von $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^{(0)^4}$

Unter Berücksichtigung der Singularität der Greenschen Funktion in $|z| = |\zeta|$ und unter Ausnutzung der Symmetrie gilt

$$\begin{aligned} & \int_U \int_U \left(\int_U G(z, \eta) G(\zeta, \eta) da_\eta \right)^2 dA_\zeta dA_z \\ &= 2 \int_U \int_{|\zeta| < |z|} \left(\int_U G(z, \eta) G(\zeta, \eta) dA_\eta \right)^2 dA_\zeta dA_z \\ &= 2 \int_U \int_{|\zeta| < |z|} \left(\int_{|\eta| < |\zeta|} G(z, \eta) G(\zeta, \eta) dA_\eta + \int_{|\zeta| < |\eta| < |z|} G(z, \eta) G(\zeta, \eta) dA_\eta \right. \\ & \quad \left. + \int_{|z| < |\eta|} G(z, \eta) G(\zeta, \eta) dA_\eta \right)^2 dA_\zeta dA_z \quad , \end{aligned} \quad (4.80)$$

vgl. auch (4.24).

Betrachtet wird zunächst $I_1 = 4\pi^2 \int_{|\eta| < |\zeta|} G(z, \eta) G(\zeta, \eta) dA_\eta$. Es gilt

$$\begin{aligned} G(z, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \left(-\ln |z| - \ln \left| 1 - \frac{\eta}{z} \right| + \ln |1 - z\bar{\eta}| \right) \\ G(\zeta, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \left(-\ln |\zeta| - \ln \left| 1 - \frac{\eta}{\zeta} \right| + \ln |1 - \zeta\bar{\eta}| \right) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} 4\pi^2 G(z, \zeta) \cdot G(\zeta, \eta) &= \ln |z| \ln |\zeta| + \ln |z| \ln \left| 1 - \frac{\eta}{\zeta} \right| - \ln |z| \ln |1 - \zeta\bar{\eta}| \\ & \quad + \ln \left| 1 - \frac{\eta}{z} \right| \ln |\zeta| + \ln \left| 1 - \frac{\eta}{z} \right| \ln \left| 1 - \frac{\eta}{\zeta} \right| - \ln \left| 1 - \frac{\eta}{z} \right| \ln |1 - \zeta\bar{\eta}| \\ & \quad - \ln |1 - z\bar{\eta}| \ln |\zeta| - \ln |1 - z\bar{\eta}| \ln \left| 1 - \frac{\eta}{\zeta} \right| + \ln |1 - z\bar{\eta}| \ln |1 - \zeta\bar{\eta}| \quad . \end{aligned}$$

Für I_1 erhält man

$$\begin{aligned} I_1 &= \pi \ln |z| \ln |\zeta| \cdot |\zeta|^2 + 0 - 0 + 0 \\ & \quad + \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} |\zeta|^{n+2} |z|^{-n} \left(e^{in\theta} e^{-in\phi} + e^{-in\theta} e^{in\phi} \right) \\ & \quad - \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} |\zeta|^{3n+2} |z|^{-n} \left(e^{in\theta} e^{-in\phi} + e^{-in\theta} e^{in\phi} \right) \end{aligned}$$

-0

$$\begin{aligned}
& -\frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} |\zeta|^{n+2} |z|^n \left(e^{-in\theta} e^{in\phi} + e^{in\theta} e^{-in\phi} \right) \\
& + \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} |\zeta|^{3n+2} |z|^n \left(e^{-in\theta} e^{in\phi} + e^{in\theta} e^{-in\phi} \right) .
\end{aligned}$$

Betrachtet wird nun $I_2 = 4\pi^2 \int_{|\zeta| < |\eta| < |z|} G(z, \eta) G(\zeta, \eta) dA_\eta$. Es gilt

$$\begin{aligned}
G(z, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \left(-\ln |z| - \ln \left| 1 - \frac{\eta}{z} \right| + \ln |1 - z\bar{\eta}| \right) \\
G(\zeta, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \left(-\ln |\eta| - \ln \left| 1 - \frac{\zeta}{\eta} \right| + \ln |1 - \zeta\bar{\eta}| \right)
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
4\pi^2 G(z, \eta) G(\zeta, \eta) &= \ln |z| \ln |\eta| + \ln |z| \ln \left| 1 - \frac{\zeta}{\eta} \right| - \ln |z| \ln |1 - \zeta\bar{\eta}| \\
&+ \ln \left| 1 - \frac{\eta}{z} \right| \ln |\eta| + \ln \left| 1 - \frac{\eta}{z} \right| \ln \left| 1 - \frac{\zeta}{\eta} \right| - \ln \left| 1 - \frac{\eta}{z} \right| \ln |1 - \zeta\bar{\eta}| \\
&- \ln |1 - z\bar{\eta}| \ln |\eta| - \ln |1 - z\bar{\eta}| \ln \left| 1 - \frac{\zeta}{\eta} \right| + \ln |1 - z\bar{\eta}| \ln |1 - \zeta\bar{\eta}| .
\end{aligned}$$

Für I_2 erhält man

$$I_2 = \pi \ln^2 |z| \cdot |z|^2 - \frac{\pi}{2} \ln |z| \cdot |z|^2 - \pi \ln |z| \ln |\zeta| \cdot |\zeta|^2 + \frac{\pi}{2} \ln |z| \cdot |\zeta|^2 + 0 - 0 + 0$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} |z|^{-n+2} |\zeta|^n \left(e^{-in\phi} e^{in\theta} + e^{in\phi} e^{-in\theta} \right) \\
& - \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} |z|^{-n} |\zeta|^{n+2} \left(e^{-in\phi} e^{in\theta} + e^{in\phi} e^{-in\theta} \right) \\
& - \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} |z|^{n+2} |\zeta|^n \left(e^{-in\phi} e^{in\theta} + e^{in\phi} e^{-in\theta} \right) \\
& + \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} |z|^{-n} |\zeta|^{3n+2} \left(e^{-in\phi} e^{in\theta} + e^{in\phi} e^{-in\theta} \right)
\end{aligned}$$

-0

$$-\frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} |z|^{n+2} |\zeta|^n \left(e^{in\phi} e^{-in\theta} + e^{-in\phi} e^{in\theta} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} |z|^n |\zeta|^{n+2} \left(e^{in\phi} e^{-in\theta} + e^{-in\phi} e^{in\theta} \right) \\
& + \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} |z|^{3n+2} |\zeta|^n \left(e^{in\phi} e^{-in\theta} + e^{-in\phi} e^{in\theta} \right) \\
& - \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} |z|^n |\zeta|^{3n+2} \left(e^{in\phi} e^{-in\theta} + e^{-in\phi} e^{in\theta} \right) .
\end{aligned}$$

Schließlich wird $I_3 = 4\pi^2 \int_{|z| < |\eta|} G(z, \eta) G(\zeta, \eta) dA_\eta$ betrachtet. Es gilt

$$\begin{aligned}
G(z, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \left(-\ln |\eta| - \ln \left| 1 - \frac{z}{\eta} \right| + \ln |1 - z\bar{\eta}| \right) \\
G(\zeta, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \left(-\ln |\eta| - \ln \left| 1 - \frac{\zeta}{\eta} \right| + \ln |1 - \zeta\bar{\eta}| \right)
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
4\pi^2 G(z, \eta) G(\zeta, \eta) &= \ln |\eta| \ln |\eta| + \ln |\eta| \ln \left| 1 - \frac{\zeta}{\eta} \right| - \ln |\eta| \ln |1 - \zeta\bar{\eta}| \\
&+ \ln \left| 1 - \frac{z}{\eta} \right| \ln |\eta| + \ln \left| 1 - \frac{z}{\eta} \right| \ln \left| 1 - \frac{\zeta}{\eta} \right| - \ln \left| 1 - \frac{z}{\eta} \right| \ln |1 - \zeta\bar{\eta}| \\
&- \ln |1 - z\bar{\eta}| \ln |\eta| - \ln |1 - z\bar{\eta}| \ln \left| 1 - \frac{\zeta}{\eta} \right| + \ln |1 - z\bar{\eta}| \ln |1 - \zeta\bar{\eta}| .
\end{aligned}$$

Für I_3 erhält man nun

$$\begin{aligned}
I_3 &= -\pi |z|^2 \ln^2 |z| + \pi |z|^2 \ln |z| + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} |z|^2 + 0 - 0 + 0 \\
&- \frac{\pi}{4} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2(n-1)} |z|^n |\zeta|^n \left(e^{in\phi} e^{-in\theta} + e^{-in\phi} e^{in\theta} \right) \\
&+ \frac{\pi}{4} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2(n-1)} |z|^{-n+2} |\zeta|^n \left(e^{in\phi} e^{-in\theta} + e^{-in\phi} e^{in\theta} \right) \\
&- \frac{\pi}{2} \ln |z| \cdot |z| |\zeta| \left(e^{i\phi} e^{-i\theta} + e^{-i\phi} e^{i\theta} \right) \\
&- \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} |z|^n |\zeta|^n \left(e^{in\phi} e^{-in\theta} + e^{-in\phi} e^{in\theta} \right) \\
&+ \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} |z|^{n+2} |\zeta|^n \left(e^{in\phi} e^{-in\theta} + e^{-in\phi} e^{in\theta} \right) \\
&- 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} |z|^n |\zeta|^n \left(e^{in\phi} e^{-in\theta} + e^{-in\phi} e^{in\theta} \right) \\
& + \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} |z|^{n+2} |\zeta|^n \left(e^{in\phi} e^{-in\theta} + e^{-in\phi} e^{in\theta} \right) \\
& + \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} |z|^n |\zeta|^n \left(e^{in\phi} e^{-in\theta} + e^{-in\phi} e^{in\theta} \right) \\
& - \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} |z|^{3n+2} |\zeta|^n \left(e^{in\phi} e^{-in\theta} + e^{-in\phi} e^{in\theta} \right) .
\end{aligned}$$

Zusammengefasst erhält man

$$\begin{aligned}
I_1 + I_2 + I_3 &= \frac{\pi}{2} |z|^2 \ln |z| + \frac{\pi}{2} |\zeta|^2 \ln |z| + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} |z|^2 \\
& - \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} |\zeta|^{n+2} |z|^{-n} (e^{in\theta} e^{-in\phi} + e^{-in\theta} e^{in\phi}) \\
& + \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} |\zeta|^{n+2} |z|^n (e^{in\theta} e^{-in\phi} + e^{-in\theta} e^{in\phi}) \\
& + \frac{\pi}{4} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} |\zeta|^n |z|^{-n+2} (e^{in\theta} e^{-in\phi} + e^{-in\theta} e^{in\phi}) \\
& + \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} |\zeta|^n |z|^{n+2} (e^{in\theta} e^{-in\phi} + e^{-in\theta} e^{in\phi}) \\
& - \frac{\pi}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n+1)} |\zeta|^n |z|^n (e^{in\theta} e^{-in\phi} + e^{-in\theta} e^{in\phi}) \\
& - \frac{\pi}{8} |\zeta| |z| (e^{i\theta} e^{-i\phi} + e^{-i\theta} e^{i\phi}) - \frac{\pi}{2} |\zeta| |z| \ln |z| (e^{i\theta} e^{-i\phi} + e^{-i\theta} e^{i\phi}) . \quad (4.81)
\end{aligned}$$

Schließlich ist noch zu berechnen $2 \cdot \frac{1}{16\pi^4} \int_U \int_{|\zeta| < |z|} (I_1 + I_2 + I_3)^2 dA_\zeta dA_z$; die weiteren Rechnungen werden hier allerdings nicht ausgeführt. Insgesamt ergibt sich für die Eigenwerte des Einheitskreises der festen Membran

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^{(0)^4} &= \frac{1}{8\pi^4} \int_0^1 \int_0^{|z|} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (I_1 + I_2 + I_3)^2 |z| |\zeta| d\theta d\phi d|\zeta| d|z| \\
&= \frac{1}{64} \left(\frac{\pi^4}{180} + \frac{5\pi^2}{18} - \frac{3491}{1728} - \zeta(3) \right) \\
&\approx 0.000943857 . \quad (4.82)
\end{aligned}$$

Zum Vergleich: Mit Hilfe der ersten drei nichttrivialen Nullstellen der ersten drei Besselschen Funktionen erhält man die Näherung

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^{(0)^4} \approx 0.000942256 .$$

5 Das Problem der festen Membran im zweifach zusammenhängenden Gebiet

5.1 Das Eigenwertproblem

Ein ähnliches klassisches Eigenwertproblem ist das folgende: Sei D ein zweifach zusammenhängendes beschränktes Gebiet der Ebene. Es gelte:

$$\begin{aligned} \Delta u + \lambda u &= 0 & \text{in } D, \\ u &= 0 & \text{auf } \partial D. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Mit λ sei wiederum der Eigenwertparameter bezeichnet.

Problem (5.1) ist das Problem der festen Membran im zweifach zusammenhängenden Gebiet und besitzt die Eigenwerte $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ endlicher Vielfachheit mit den zugehörigen Eigenfunktionen u_1, u_2, u_3, \dots [44].

Ist $D = A(r_1, r_2)$ ein Kreisring mit den Radien $0 < r_1 < r_2 < \infty$, so treten wiederum radiale und nichtradiale Eigenfunktionen auf. Die Eigenfunktionen besitzen die Gestalt [44]

$$(A_{n,m}J_n(k_{n,m}r) + B_{n,m}Y_n(k_{n,m}r))(\alpha \cos n\phi + \beta \sin n\phi), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.2)$$

J_n bezeichnet dabei die Besselschen Funktionen erster Art, Y_n die Besselschen Funktionen zweiter Art.

Die Werte für $k_{n,m}$ sowie $A_{n,m}$ und $B_{n,m}$ ergeben sich aus den zwei Randbedingungen sowie der Normierungsbedingung an die Eigenfunktionen.

Man überlegt sich leicht, dass für spezielle Werte von r_1 und r_2 Eigenfunktionen existieren, in welchen entweder keine Besselsche Funktion erster Art oder aber keine Besselsche Funktion zweiter Art auftritt.

Analog zum Satz 4.2 von Pólya und Szegő bewiesen T. Gasser und J. Hersch [26] den folgenden

Satz 5.1 (Gasser und Hersch) *Gegeben sei das Problem der festen Membran im zweifach zusammenhängenden Gebiet. Unter allen Gebieten D mit gleichem konformen Modul und gleicher Innenfläche besitzt der Kreisring den größten ersten Eigenwert.*

5.2 Eine endliche Summe

Im folgenden Abschnitt soll die in den vorangehenden Kapiteln angewandte Methode auf das Problem der festen Membran im zweifach zusammenhängenden Gebiet übertragen werden. Es wird sich zeigen, dass sich mit diesem Ansatz der Satz 4.3 von Pólya und Schiffer auch auf zweifach zusammenhängende Gebiete übertragen lässt.

5.2.1 Die Greensche Funktion im Kreisring

Gegeben sei das Problem (5.1). $G(z, \zeta)$ sei die Greensche Funktion im Kreisring $A(1, R)$ mit $1 < R < \infty$ und besitzt die Darstellung

$$G(z, \zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{u_j^{(0)}(z)u_j^{(0)}(\zeta)}{\lambda_j^{(0)}} \quad , \quad (5.3)$$

wobei $u_j^{(0)}$ die normierten Eigenfunktionen des Kreisringes bezeichne und $\lambda_j^{(0)}$ die zugehörigen Eigenwerte. Ganz analog zum einfach zusammenhängenden Fall genügen die Eigenfunktionen bzw. Eigenwerte des Kreisringes der Integralgleichung

$$u_j^{(0)}(z) = \lambda_j^{(0)} \int_{A(1,R)} G(z, \zeta) u_j^{(0)}(\zeta) dA_\zeta \quad . \quad (5.4)$$

Ist f diejenige konforme Abbildung, die den Kreisring auf das Gebiet D abbildet, dann sind die Eigenwerte und Eigenfunktionen λ_j bzw. u_j von D entsprechend Lösung der Integralgleichung

$$u_j(z) = \lambda_j \int_{A(1,R)} G(z, \zeta) |f'(\zeta)|^2 u_j(\zeta) dA_\zeta \quad . \quad (5.5)$$

5.2.2 Variationscharakterisierung der Eigenwerte

Ganz analog zu (4.2.2) erhält man aus (5.5) für die Eigenwerte der festen Membran im zweifach zusammenhängenden Gebiet

Hilfssatz 5.1 *Gegeben sei das Problem (5.1). Sei f diejenige konforme Abbildung, die das Innere des Kreisringes konform auf D abbildet. Dann gilt für den k -ten Eigenwert von (5.1)*

$$\frac{1}{\lambda_k} = \max_h \int_{A(1,R)} \int_{A(1,R)} G(z, \zeta) |f'(z)|^2 |f'(\zeta)|^2 h(z) h(\zeta) dA_z dA_\zeta \quad (5.6)$$

mit $h \in L_2(A(1, R))$ und den Nebenbedingungen $\int_{A(1,R)} |f'(z)|^2 h^2(z) dA_z = 1$ sowie $\int_{A(1,R)} |f'(z)|^2 h(z) \cdot u_j(z) dA_z = 0$, $j = 1, 2, \dots, k-1$; wobei $k \geq 1$. Mit u_j seien die in den Kreisring überpflanzten Eigenfunktionen des Gebietes D bezeichnet.

Darüberhinaus gilt

Hilfssatz 5.2 *Für die Eigenwerte des Problems 5.1 gilt:*

$$\frac{1}{\lambda_k} = \max_{L_k} \min \int_{A(1,R)} \int_{A(1,R)} G(z, \zeta) |f'(z)|^2 |f'(\zeta)|^2 h(z) h(\zeta) dA_z dA_\zeta \quad ,$$

wobei das Maximum über alle k -dimensionalen Unterräume $L_k \subset L_2(A(1, R))$ gebildet wird. Das Minimum wird über alle Funktionen $h \in L_k$, welche der Nebenbedingung $\int_{A(1,R)} |f'(z)|^2 h^2(z) dA_z = 1$ genügen, gebildet.

Schließlich erhält man für die Summe der Reziproken der ersten n Eigenwerte von (5.1) folgenden

Satz 5.2 *Für die Eigenwerte des Problems (5.1) gilt*

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \geq \sum_{j=1}^n \int_{A(1,R)} \int_{A(1,R)} G(z, \zeta) |f'(z)|^2 |f'(\zeta)|^2 v_j(z) v_j(\zeta) dA_z dA_\zeta \quad (5.7)$$

unter den Nebenbedingungen $\int_{A(1,R)} |f'(z)|^2 v_i(z) v_j(z) dA_z = \delta_{ij}$ mit $i, j = 1, \dots, n$ und $v_j \in L_2(A(1, R))$.

5.2.3 Bezeichnungen und Definitionen

Wie im einfach zusammenhängenden Fall gelten aufgrund der Invarianz der Greenschen Funktion unter konformen Abbildungen die Bezeichnungen $w_j = u_j^{(0)}$, $j = 1, 2, 3, \dots$, vgl. 4.2.3.

Die Koeffizienten $b_{j,k}$. Es sei

$$b_{j,k} = \int_{A(1,R)} w_k(z) v_j(z) |f'(z)|^2 dA_z = \int_{A(1,R)} u_k^{(0)}(z) v_j(z) |f'(z)|^2 dA_z \quad . \quad (5.8)$$

Die Ansatzfunktionen v_n ergeben sich mit den Nebenbedingungen $\int_{A(1,R)} |f'(z)|^2 \cdot v_i(z) v_j(z) dA_z = \delta_{ij}$ aus den Funktionen $w_j = u_j^{(0)}$. Es ist

$$v_n(z) = \sum_{j=1}^n c_{n,j} u_j^{(0)}, \quad n \geq 1 \quad . \quad (5.9)$$

Für die Koeffizienten $d_{i,j}$ gilt

$$d_{i,j} = \int_{A(1,R)} |f'(z)|^2 u_i^{(0)}(z) u_j^{(0)}(z) dA_z \quad . \quad (5.10)$$

5.2.4 Beweis der Ungleichung

Auch im Falle des Problems der festen Membran im zweifach zusammenhängenden Gebiet gelangt man zu denselben Zwischenergebnissen. Entsprechend erhält man

Hilfssatz 5.3 *Mit den unter 5.2.3 gewählten Bezeichnungen gilt*

$$\sum_{j=2}^k b_{j,k}^2 = d_{k,k} \quad .$$

Es ergibt sich auch hier

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \geq \sum_{j=1}^n \frac{d_{j,j}}{\lambda_j^{(0)}} \quad . \quad (5.11)$$

Sei f diejenige konforme Abbildung, die den Kreisring $A(1, R)$ auf das Gebiet D abbildet mit $f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j z^j$ und $a_1 = 1$. Dann gilt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und $z = re^{i\phi}$, $1 \leq r \leq R$

$$\int_{|z|=r} |f'(z)|^2 d\phi \geq \frac{1}{2\pi} \left(\int_{|z|=r} |f'(z)| d\phi \right)^2 \geq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z|=r} f'(z) d\phi \right|^2 = 2\pi \quad . \quad (5.12)$$

Ist h eine radiale Funktion, dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{A(1,R)} h^2(z) |f'(z)|^2 dA_z &= \int_1^R h^2(r)r \cdot \int_0^{2\pi} |f'(\phi)|^2 d\phi dr \\ &\geq 2\pi \int_1^R h^2(r)r dr = \int_{A(1,R)} h^2(z) dA_z \quad . \end{aligned} \quad (5.13)$$

Für eine radiale Eigenfunktion $u_j^{(0)}$ gilt demnach

$$d_{j,j} \geq \int_{A(1,R)} u_j^{(0)2} dA_z = 1 \quad . \quad (5.14)$$

Sei $u_j^{(0)}$ eine nichtradiale Eigenfunktion und $u_{j+1}^{(0)}$ die zum selben Eigenwert gehörende Eigenfunktion. Dann ist $u_j^{(0)2} + u_{j+1}^{(0)2}$ radial; mit (5.13) gilt

$$d_{j,j} + d_{j+1,j+1} \geq \int_{A(1,R)} (u_j^{(0)2} + u_{j+1}^{(0)2}) dA_z = 2 \quad . \quad (5.15)$$

Bei geeigneter Nummerierung der Eigenwerte (vgl. 2.3.3) erhält man folgenden

Satz 5.3 *Sei D ein zweifach zusammenhängendes und beschränktes, zum Kreisring $A(1, R)$ konform äquivalentes Gebiet. Sei $f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j z^j$ diejenige Abbildung, die den Kreisring schlicht konform auf das Gebiet D abbildet. Dann gilt für die Eigenwerte von D für beliebiges n*

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \geq |a_1|^2 \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j^{(0)}} ,$$

wobei $\lambda_j^{(0)}$ die Eigenwerte von $A(1, R)$ bezeichnet.

Dies ist auf einem anderen Weg bereits durch Laugesen und Morpugo gezeigt worden, vgl. [38]. Ferner gilt entsprechend wie in den vorangehenden Kapiteln

Satz 5.4 Sei $\Phi(x)$ für $x \geq 0$ eine konvexe, monoton wachsende Funktion. Sei D ein zweifach zusammenhängendes und beschränktes, zum Kreisring $A(1, R)$ konform äquivalentes Gebiet. Sei $f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j z^j$ diejenige Abbildung, die den Kreisring schlicht konform auf das Gebiet D abbildet. Dann gilt für die Eigenwerte von D für beliebiges n

$$\sum_{j=1}^n \Phi\left(\frac{1}{\lambda_j}\right) \geq \sum_{j=1}^n \Phi\left(|a_1|^2 \frac{1}{\lambda_j^{(0)}}\right),$$

wobei $\lambda_j^{(0)}$ die Eigenwerte von $A(1, R)$ bezeichnet.

6 Gemischte Stekloffprobleme im zweifach zusammenhängenden Gebiet

6.1 Die Eigenwertprobleme

Zwei Spezialfälle des verallgemeinerten Stekloffproblems sind die folgenden, welche zunächst in einem zweifach zusammenhängenden Gebiet D betrachtet werden, zum einen

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } D \\ u &= 0 && \text{auf } C_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \lambda u && \text{auf } C_2 \end{aligned} \quad (6.1)$$

und zum anderen

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0 && \text{in } D \\ \frac{\partial v}{\partial n} &= 0 && \text{auf } C_1 \\ \frac{\partial v}{\partial n} &= \mu v && \text{auf } C_2 \end{aligned} \quad , \quad (6.2)$$

wobei mit λ bzw. μ der Eigenwertparameter, mit $\frac{\partial}{\partial n}$ die Außennormale bezeichnet sei. C_1 und C_2 seien die beiden Randkomponenten von D . Die Länge der Komponente C_2 der Randkurve sei beschränkt.

Man überlegt sich leicht, dass (6.2) $v_0 \equiv \text{const}$ mit $\mu_0 = 0$ als Lösung besitzt, während der erste Eigenwert von (6.1) positiv ist.

Für Problem (6.1) gilt: Unter allen Gebieten D gleichen konformen Moduls $\text{mod}(D)$ und gleicher Länge der Randkurve L besitzt der Kreisring den größten ersten Eigenwert

$$\lambda_1^{(0)} = \frac{1}{L \cdot \text{mod}(D)} \quad ,$$

vgl. [32].

Eine Formel zur Berechnung von $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$ findet sich in [6]; diese ist jedoch fehlerhaft.

In [14] wurde am Beispiel des Grötzsch-Gebietes gezeigt, wie sich die Eigenfunktionen und damit auch die Eigenwerte des Problems (6.1) unter Verwendung funktionentheoretischer Methoden in einigen Fällen konstruieren lassen.

Problem (6.2) ist das sog. „Sloshing problem“, ein klassisches Problem der Hydrodynamik, welches bereits bei Hilbert erwähnt wird, [34]. Die Behandlung dieses Eigenwertproblems in der Literatur erfolgt überwiegend im einfach zusammenhängenden Fall, siehe auch 8.1.

6.2 Das Problem (6.1) im Kreisring und die Robinsche Funktion

Sei $A(1, R)$ der Kreisring mit den Radien $r_1 = 1$ und $r_2 = R$, $1 < r_2 < \infty$. Dann lassen sich die Eigenwerte und Eigenfunktionen von (6.1) für $C_1 = \{z : |z| = 1\}$ und $C_2 = \{z : |z| = R\}$ leicht angeben mit

$$\begin{aligned} u_1^{(0)}(r) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi R \ln R}} \cdot \ln r & \lambda_1^{(0)} &= \frac{1}{R \ln R} & \text{und} \\ u_{2n}^{(0)}(r, \phi) &= \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \cdot \begin{cases} \cos n\phi \\ \sin n\phi \end{cases} \cdot \frac{r^n - r^{-n}}{R^n + R^{-n}} & \lambda_{2n}^{(0)} = \lambda_{2n+1}^{(0)} &= \frac{n}{R} \cdot \frac{R^n + R^{-n}}{R^n - R^{-n}} \end{aligned} \quad (6.3)$$

für $n = 1, 2, \dots$.

Mit Hilfe der Eigenfunktionen und Eigenwerte des Kreisringes lässt sich die Robinsche Funktion des Kreisringes in einfacher Weise darstellen, siehe dazu die Definition der Robinschen Funktion in 7.2 sowie [19], [18] und auch [50]. Auf $C_2^{(0)}$, d.h. für $z = Re^{i\phi}$ und $\zeta = Re^{i\theta}$ gilt für die Robinsche Funktion von $A(1, R)$

$$R(\theta, \phi) = \frac{\ln R}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \cdot \frac{R^n - R^{-n}}{R^n + R^{-n}} (\cos n\theta \cos n\phi + \sin n\theta \sin n\phi) \quad . \quad (6.4)$$

Die Eigenwerte des Problem (6.1) für den Kreisring $A(1, R)$ sind die Eigenwerte der Robinschen Funktion des Kreisringes $A(1, R)$ auf dem Rand $C_2^{(0)}$, vgl. auch 7.2.

6.3 Das Problem (6.2) im Kreisring und die zugehörige Neumannsche Funktion

Die Eigenfunktionen und Eigenwerte des Kreisringes für das Problem (6.2) bei gleicher Wahl der Randkomponenten sind bis auf die Normierungskonstante recht ähnlich. Es sind

$$\begin{aligned} v_1^{(0)} &\equiv \text{const} & \mu_1^{(0)} &= 0 & \text{sowie} \\ v_{2n}^{(0)}(r, \phi) &= \frac{1}{\sqrt{\pi \left(\left(\frac{2}{R^n + R^{-n}} \right)^2 + R \right)}} \begin{cases} \cos n\phi \\ \sin n\phi \end{cases} \frac{r^n + r^{-n}}{R^n + R^{-n}} & \mu_{2n}^{(0)} = \mu_{2n+1}^{(0)} &= \frac{n}{R} \frac{R^n - R^{-n}}{R^n + R^{-n}} \end{aligned} \quad (6.5)$$

für $n = 1, 2, \dots$.

Mit Hilfe der nichttrivialen Eigenwerten und den zugehörigen Eigenfunktionen des Kreisringes für dieses gemischte Problem wird in einfacher Weise eine Bilinearreihe gebildet, die hier als Neumannsche Funktion zum Problem (6.2) bezeichnet wird. Auf dem Rand $C_2^{(0)}$, d.h. für $z = Re^{i\phi}$ und $\zeta = Re^{i\theta}$ gilt für die Neumannsche Funktion zu (6.2)

von $A(1, R)$

$$N^{(R)}(\theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R}{\pi n \left(\left(\frac{2}{R^n + R^{-n}} \right)^2 + R \right)} \cdot \frac{R^n + R^{-n}}{R^n - R^{-n}} (\cos n\theta \cos n\phi + \sin n\theta \sin n\phi) \quad . \quad (6.6)$$

Auf $C_1^{(0)}$ dagegen, d.h. für $z = e^{i\phi}$ und $\zeta = e^{i\theta}$ erhält man für die Neumannsche Funktion zu (6.2)

$$N^{(1)}(\theta, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R}{\pi n \left(\left(\frac{2}{R^n + R^{-n}} \right)^2 + R \right)} \cdot \frac{4}{R^{2n} - R^{-2n}} (\cos n\theta \cos n\phi + \sin n\theta \sin n\phi) \quad . \quad (6.7)$$

6.4 Eine endliche Summe für (6.1)

6.4.1 Variationscharakterisierung der Eigenwerte

Zur Herleitung einer zu (2.37) bzw. Satz 2.3 analogen Aussage für (6.1) werden zunächst mit Hilfe der in (6.4) angegebenen Darstellung der Robinschen Funktion $R(z, \zeta)$ die Eigenwerte von (6.1) charakterisiert.

Es gelten

Hilfssatz 6.1 *Gegeben sei das Problem (6.1). Sei f diejenige konforme Abbildung, die den Kreisring $A(1, R)$ schlicht konform auf D abbildet. Dann gilt für den k -ten Eigenwert von (6.1)*

$$\frac{1}{\lambda_k} = \max_h \int_{C_2^{(0)}} \int_{C_2^{(0)}} R(z, \zeta) |f'(z)| |f'(\zeta)| h(z) h(\zeta) ds_z ds_\zeta \quad (6.8)$$

mit $h \in L_2(C_2^{(0)})$ und $h \equiv 0$ auf $C_1^{(0)}$ sowie den Nebenbedingungen $\int_{C_2^{(0)}} |f'(z)| h^2(z) ds_z = 1$ und $\int_{C_2^{(0)}} |f'(z)| h(z) \cdot u_j(z) ds_z = 0$, $j = 1, 2, \dots, k-1$; wobei $k \geq 1$. Mit u_j seien die in den Kreisring $A(1, R)$ überpflanzten Eigenfunktionen des Gebietes D bezeichnet.

und

Hilfssatz 6.2 *Für die Eigenwerte des Problems (6.1) gilt:*

$$\frac{1}{\lambda_k} = \max_{L_k} \min \int_{C_2^{(0)}} \int_{C_2^{(0)}} R(z, \zeta) |f'(z)| |f'(\zeta)| h(z) h(\zeta) ds_z ds_\zeta \quad ,$$

wobei das Maximum über alle k -dimensionalen Unterräume $L_k \subset L_2(C_2^{(0)})$ gebildet wird. Für jede Funktion $v \in L_k$ gelte $v \equiv 0$ auf $C_1^{(0)}$. Das Minimum wird über alle Funktionen $h \in L_k$, welche der Nebenbedingung $\int_{C_2^{(0)}} h^2(z) |f'(z)| ds_z = 1$ genügen, gebildet.

sowie

Satz 6.1 Für die Eigenwerte des Problems (6.1) gilt

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \geq \sum_{j=1}^n \int_{C_2^{(0)}} \int_{C_2^{(0)}} R(z, \zeta) |f'(z)| |f'(\zeta)| v_j(z) v_j(\zeta) ds_z ds_\zeta \quad (6.9)$$

mit den Nebenbedingungen $v \equiv 0$ auf $C_1^{(0)}$ sowie $\int_{C_2^{(0)}} |f'(z)| v_i(z) v_j(z) ds_z = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$, $v_j \in L_2(C_2^{(0)})$.

6.4.2 Einige Bezeichnungen

Ähnlich wie die Greensche Funktion ist die Robinsche Funktion invariant unter konformen Abbildungen. Die weiteren Bezeichnungen werden in Anlehnung an 2.3.2 gewählt. Aufgrund der Invarianz der Robinschen Funktion ergibt sich $w_j = u_j^{(0)}$, $j = 1, 2, 3, \dots$.

Die Koeffizienten $b_{j,k}$. Ferner sei

$$b_{j,k} = \int_{C_2^{(0)}} w_k(z) v_j(z) |f'(z)| ds_z = \int_{C_2^{(0)}} u_j^{(0)}(z) v_j(z) |f'(z)| ds_z. \quad (6.10)$$

Die Ansatzfunktionen v_n erhält man durch Orthonormierung aus den Funktionen $w_j = u_j^{(0)}$. Es gilt

$$v_n(z) = \sum_{j=1}^n c_{n,j} u_j^{(0)}, \quad n \geq 1 \quad (6.11)$$

mit den Nebenbedingungen $\int_{C_2^{(0)}} |f'(z)| v_i(z) v_j(z) ds_z = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots$.

Für die Koeffizienten $d_{i,j}$ gilt

$$d_{i,j} = \int_{C_2^{(0)}} |f'(z)| u_i^{(0)}(z) u_j^{(0)}(z) ds_z. \quad (6.12)$$

Die Abbildung f vom Kreisring $A(1, R)$ auf das Gebiet D bzw. der Betrag der Ableitung von f besitze auf C_2 die folgende Fourierdarstellung

$$|f'(\phi)| = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j \cos j\phi + \beta_j \sin j\phi) \quad (6.13)$$

6.4.3 Beweis der Ungleichung

In bekannter Weise erhält man

Hilfssatz 6.3 *Mit den gewählten Bezeichnungen gilt*

$$\sum_{j=1}^k b_{j,k}^2 = d_{k,k} \quad .$$

Es ergibt sich

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \geq \sum_{j=1}^n \frac{d_{j,j}}{\lambda_j^{(0)}} \quad . \quad (6.14)$$

Sei nun $u_j^{(0)}$ die radiale Eigenfunktion. Dann gilt

$$d_{j,j} = \int_{C_2^{(0)}} u_j^{(0)2}(z) |f'(z)| ds_z = \frac{\alpha_0}{2} \quad . \quad (6.15)$$

Ist andererseits $u_j^{(0)}$ eine nichtradiale Eigenfunktion und $u_{j+1}^{(0)}$ die zum selben Eigenwert gehörende Eigenfunktion. Dann ergibt sich

$$d_{j,j} + d_{j+1,j+1} = \int_{C_2^{(0)}} \left(u_j^{(0)2}(z) + u_{j+1}^{(0)2}(z) \right) |f'(z)| ds_z = \alpha_0 \quad . \quad (6.16)$$

Mit diesen Resultaten erhält man bei geeigneter Nummerierung der Eigenwerte, vgl. 2.3.3, den folgenden

Satz 6.2 *Für die Eigenwerte des Problems (6.1) gilt für beliebiges n*

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \geq \frac{L_2}{2\pi R} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j^{(0)}} \quad .$$

Dabei bezeichnet $\lambda_j^{(0)}$ die Eigenwerte des Kreisringes $A(1, R)$ und L_2 die Länge der Randkurve C_2 mit $|C_2| = L_2 = \pi R \alpha_0$. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn D ein zu $A(1, R)$ konform äquivalenter Kreisring ist.

Ferner gilt auch, vgl. Satz 2.4 und dortige Bemerkungen sowie [38]

Satz 6.3 *Sei $\Phi(x)$ für $x \geq 0$ eine konvexe, monoton wachsende Funktion. Dann gilt für die Eigenwerte des Problems (6.1)*

$$\sum_{j=1}^n \Phi\left(\frac{1}{\lambda_j}\right) \geq \sum_{j=1}^n \Phi\left(\frac{L_2}{2\pi R} \frac{1}{\lambda_j^{(0)}}\right)$$

für beliebiges n . Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn D ein zu $A(1, R)$ konform äquivalenter Kreisring ist.

6.5 Eine endliche Summe für (6.2)

6.5.1 Die Neumannsche Funktion zum Problem (6.2)

In der Herleitung eines zu Satz 6.2 analogen Ergebnisses für das Problem (6.2) ergeben sich einige Unterschiede. Die Neumannsche Funktion für dieses Problem ist keine konforme Invariante. Dies ergibt sich schon aus der Eigenschaft

$$\int_{C_2} N_D(\xi, \eta) ds_\eta = 0 \quad \xi \in C_2,$$

vgl. (2.10) und liegt am trivialen ersten Eigenwert bzw. der dazugehörigen konstanten ersten Eigenfunktion von (6.2). $N_D(\xi, \eta)$ bezeichnet die Neumannsche Funktion zum Problem (6.2) des Gebietes D , vgl. 6.3, und besitzt, überpflanzt in den Kreisring $A(1, R)$ die Darstellung

$$N_D(z, \zeta) = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{w_j(z)w_j(\zeta)}{\mu_j^{(0)}} \quad \text{mit}$$

$$w_j(z) = v_j^{(0)}(z) - \frac{\int_{C_2^{(0)}} v_j^{(0)}(z)|f'(z)| ds_z}{\int_{C_2^{(0)}} |f'(z)| ds_z} \quad (6.17)$$

als Bilinearreihe, vgl. dazu auch Fußnote 1 in 2.2.

Damit hat man zunächst die Darstellung für die w_j , $j = 2, 3, \dots$.

6.5.2 Variationscharakterisierung der Eigenwerte

Bevor jedoch die weiteren Bezeichnungen angegeben werden, erfolgt erst einmal die Variationscharakterisierung der zum Problem (6.2) gehörenden Eigenwerte.

Für die Eigenwerte des Problems (6.2) gelten folgende Aussagen:

Hilfssatz 6.4 *Gegeben sei das Problem (6.2). Sei f diejenige konforme Abbildung, die den Kreisring $A(1, R)$ schlicht konform auf D abbildet. Dann gilt für den k -ten Eigenwert von (6.2)*

$$\frac{1}{\mu_k} = \max_h \int_{C_2^{(0)}} \int_{C_2^{(0)}} N_D(z, \zeta) |f'(z)| |f'(\zeta)| h(z) h(\zeta) ds_z ds_\zeta \quad (6.18)$$

mit $h \in L_2(C_2^{(0)})$ und $\int_{C_2^{(0)}} h(z) |f'(z)| ds_z = 0$ sowie den weiteren Nebenbedingungen $\int_{C_2^{(0)}} |f'(z)| h^2(z) ds_z = 1$ und $\int_{C_2^{(0)}} |f'(z)| h(z) \cdot v_j(z) ds_z = 0$, $j = 2, 3, \dots, k-1$; wobei $k \geq 2$. Mit v_j seien die in den Kreisring $A(1, R)$ überpflanzten Eigenfunktionen des Gebietes D bezeichnet.

und

Hilfssatz 6.5 *Für die Eigenwerte des Problems (6.2) gilt:*

$$\frac{1}{\mu_k} = \max_{L_{k-1}} \min \int_{C_2^{(0)}} \int_{C_2^{(0)}} N_D(z, \zeta) |f'(z)| h(z) |f'(\zeta)| h(\zeta) ds_z ds_\zeta \quad ,$$

wobei das Maximum über alle $(k-1)$ -dimensionalen Unterräume $L_{k-1} \subset L_2(C_2^{(0)})$ gebildet wird. Für jede Funktion $u \in L_{k-1}$ gelte $\int_{C_2^{(0)}} u(z)|f'(z)| ds_z = 0$. Das Minimum wird über alle Funktionen $h \in L_{k-1}$, welche der Nebenbedingung $\int_{C_2^{(0)}} h^2(z)|f'(z)| ds_z = 1$ genügen, gebildet.

sowie

Satz 6.4 Für die Eigenwerte des Problems (6.2) gilt

$$\sum_{j=2}^n \frac{1}{\mu_j} \geq \sum_{j=2}^n \int_{C_2^{(0)}} \int_{C_2^{(0)}} N_D(z, \zeta) |f'(z)| |f'(\zeta)| u_j(z) u_j(\zeta) ds_z ds_\zeta \quad (6.19)$$

mit den Nebenbedingungen $\int_{C_2^{(0)}} u_j(z) |f'(z)| ds_z = 0$ sowie $\int_{C_2^{(0)}} |f'(z)| u_i(z) u_j(z) ds_z = \delta_{ij}$, $i, j = 2, \dots, n$, $u_j \in L_2(C_2^{(0)})$.

6.5.3 Einige Bezeichnungen

Weiterhin gelten folgende Bezeichnungen.

Die **Koeffizienten** $b_{j,k}$ erhält man aus

$$b_{j,k} = \int_{C_2^{(0)}} w_k(z) \tilde{v}_j(z) |f'(z)| ds_z \quad . \quad (6.20)$$

Die **Ansatzfunktionen** werden hier mit \tilde{v}_n bezeichnet, so dass keine Verwechslung mit den Eigenfunktionen des Problems (6.2) erfolgen kann. Die \tilde{v}_n erhält man durch Ortho-normierung aus den Funktionen w_n durch Lösung des Gleichungssystems

$$\tilde{v}_n(z) = \sum_{j=2}^n c_{n,j} w_j \quad , \quad n \geq 2 \quad (6.21)$$

mit den Nebenbedingungen $\int_{C_2^{(0)}} |f'(z)| \tilde{v}_i(z) \tilde{v}_j(z) ds_z = \delta_{ij}$, $i, j = 2, 3, \dots$.

Schließlich gilt für die **Koeffizienten** $d_{i,j}$

$$d_{i,j} = \int_{C_2^{(0)}} |f'(z)| w_i(z) w_j(z) ds_z \quad . \quad (6.22)$$

Die **Abbildungsfunktion** f , die den Kreisring $A(1, R)$ schlicht konform auf das Gebiet D abbildet, ist im Gegensatz zu Problem (3.1) hier auf nur einem Rand zu betrachten. Es gelten die Bezeichnungen

$$|f'(z)|_{|z|=R} \sim \frac{\alpha_0^{(R)}}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j^{(R)} \cos j\phi + \beta_j^{(R)} \sin j\phi) =: |f'_R(\phi)| \quad . \quad (6.23)$$

Weiterhin gelten die Bezeichnungen $L_1 = \pi\alpha_0^{(1)}$ und $L_2 = \pi R\alpha_0^{(R)}$.

6.5.4 Beweis der Ungleichung

Es lässt sich leicht nachvollziehen, dass gilt

Hilfssatz 6.6 *Mit den gewählten Bezeichnungen gilt*

$$\sum_{j=2}^k b_{j,k}^2 = d_{k,k} \quad .$$

Ferner ergibt sich

$$\sum_{j=2}^n \frac{1}{\mu_j} \geq \sum_{j=2}^n \frac{d_{j,j}}{\mu_j^{(0)}} \quad . \quad (6.24)$$

Für die weitere Abschätzung von (6.24) werden die Koeffizienten $d_{j,j}$ betrachtet. Seien $v_j^{(0)} = v_{2n}^{(0)}$ und $v_{j+1}^{(0)} = v_{2n+1}^{(0)}$ zwei zum selben Eigenwert gehörende Eigenfunktionen. Dann ergibt sich mit

$$\alpha_0^{(R)^2} - (\alpha_n^{(R)^2} + \beta_n^{(R)^2}) \geq 2\alpha_0^{(R)} \quad , \quad (6.25)$$

vgl. auch (3.22) und (3.23), für Abbildungsfunktionen der Klasse Σ

$$\begin{aligned} d_{j,j} + d_{j+1,j+1} &= d_{2n,2n} + d_{2n+1,2n+1} \\ &= \int_0^{2\pi} R \cdot \frac{1}{\pi R} |f'_R(\phi)| \left(\left(\cos n\phi - \frac{\alpha_n^{(R)}}{\alpha_0^{(R)}} \right)^2 + \left(\sin n\phi - \frac{\beta_n^{(R)}}{\alpha_0^{(R)}} \right)^2 \right) d\phi \\ &= \alpha_0^{(R)} - \frac{\alpha_n^{(R)^2}}{\alpha_0^{(R)}} - \frac{\beta_n^{(R)^2}}{\alpha_0^{(R)}} \\ &\geq 2 \quad . \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\geq 2 \quad . \quad (6.27)$$

Die Rechnungen zum Beweis der Gültigkeit von (6.26) bzw. (6.27) folgen den Rechnungen in 2.3.3.

Bemerkung 6.1 *Da die Beziehung (6.25) verwendet wurde, muss eine Einschränkung an die Abbildungsfunktion gemacht werden. D.h., die Rechnung ist zunächst nur für $f \in \Sigma$ gültig.*

Bemerkung 6.2 *Sei $0 < R < 1$, dann ändert sich nur wenig an den vorangehenden Betrachtungen. Die Eigenwerte des Problems (6.1) sind dann gegeben durch $\lambda_1^{(0)} = \frac{1}{R \ln R}$ und $\lambda_{2n+1}^{(0)} = \lambda_{2n+1}^{(0)} = \frac{n}{R} \cdot \frac{R^{-n} + R^n}{R^{-n} - R^n}$, die von (6.2) durch $\mu_1^{(0)} = 0$ und $\mu_{2n+1}^{(0)} = \mu_{2n+1}^{(0)} = \frac{n}{R} \cdot \frac{R^{-n} - R^n}{R^{-n} + R^n}$; in der Darstellung der Neumannschen Funktion muss das Vorzeichen angepasst werden. Gleiches gilt für die Robinsche Funktion. In (6.26) wird dann eine Funktion $f \in \mathcal{S}$ verwendet; alle übrigen Betrachtungen bleiben bestehen.*

Bemerkung 6.3 Verwendet man ein skalares Vielfaches einer Abbildungsfunktion der Klassen \mathcal{S} oder Σ (eventuell nach vorangegangener Verschiebung), ergibt sich zusätzlich eine Konstante $|a_1|$.

Diese Überlegungen führen zu folgendem

Satz 6.5 Gegeben sei das Problem (6.2) in einem Gebiet D mit beschränkter Länge der Randkomponente C_2 . D sei konform äquivalent zum Kreisring $A(1, R)$ mit den Radien $r_1 = 1$ und $r_2 = R$ mit $0 < R < \infty$ und $R \neq 1$ und gehe durch eine schlicht konforme Abbildung $f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$ bzw. $g(z) = a_1z + a_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots$ aus $A(1, R)$ hervor. Dann gilt für die Eigenwerte des Problems (6.2)

$$\sum_{j=2}^n \frac{1}{\mu_j} \geq |a_1| \sum_{j=2}^n \frac{1}{\mu_j^{(0)}}$$

für beliebiges n . Dabei bezeichnen $\mu_j^{(0)}$ die Eigenwerte des Kreisringes $A(1, R)$. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn D ein zu $A(1, R)$ konform äquivalenter Kreisring ist.

Schließlich gilt auch, vgl. Satz 2.4

Satz 6.6 Sei $\Phi(x)$ für $x \geq 0$ eine konvexe, monoton wachsende Funktion. Dann gilt für die Eigenwerte des Problems (6.1)

$$\sum_{j=2}^n \Phi\left(\frac{1}{\mu_j}\right) \geq \sum_{j=2}^n \Phi\left(|a_1| \frac{1}{\mu_j^{(0)}}\right)$$

für beliebiges n . Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn D ein zu $A(1, R)$ konform äquivalenter Kreisring ist.

6.6 Eine unendliche Summe für (6.1)

Mit Hilfe der Robinschen Funktion $R(z, \zeta)$ des Kreisringes lässt sich $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$ für jedes beliebige zu $A(1, R)$ konform äquivalente Gebiet D berechnen. Sei f diejenige konforme Abbildungsfunktion, die den Kreisring $A(1, R)$ auf D abbildet. Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2} &= \int_{\partial A(1, R)} \int_{\partial A(1, R)} R^2(z, \zeta) |f'(z)| |f'(\zeta)| dA_{\zeta} dA_z \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R^2 \cdot R^2(\theta, \phi) |f'(\theta)| |f'(\phi)| d\theta d\phi \quad , \end{aligned} \tag{6.28}$$

wobei R den äußeren Radius des Kreises bezeichnet. Unter Verwendung der Darstellung (6.4) lässt sich $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$ durch elementare Rechnung leicht ermitteln. Zur besseren Übersicht setze man für $|z| = R$. Es ist

$$\begin{aligned} R(\theta, \phi) &= \frac{\ln R}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} A_n (\cos n\phi \cos n\theta + \sin n\phi \sin n\theta) \quad \text{für } R > 1 \quad \text{bzw.} \\ R(\theta, \phi) &= -\frac{\ln R}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} A_n (\cos n\phi \cos n\theta + \sin n\phi \sin n\theta) \quad \text{für } R > 1. \end{aligned} \tag{6.29}$$

Man erhält

Satz 6.7 Für die Eigenwerte des Problems (6.1) gilt mit dem Radius R

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2} = \frac{\alpha_0^2}{4} \cdot R^2 \cdot B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot R^2 \cdot (\alpha_n^2 + \beta_n^2)$$

mit den Bezeichnungen

$$A_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{R^n - R^{-n}}{R^n + R^{-n}} \quad \text{für } R > 1,$$

$$A_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{R^{-n} - R^n}{R^{-n} + R^n} \quad \text{für } R < 1,$$

$$B_0 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 + \ln^2 R$$

$$B_n = \sum_{m=1}^{\infty} A_{n+m} A_m + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-1} A_{n-m} A_m + \ln R \cdot A_n \quad \text{für } R > 1 \quad \text{bzw.}$$

$$B_n = \sum_{m=1}^{\infty} A_{n+m} A_m + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-1} A_{n-m} A_m - \ln R \cdot A_n \quad \text{für } R < 1$$

und den Fourierkoeffizienten α_n, β_n gemäß 6.4.2.

Darüber hinaus gilt offensichtlich folgender

Hilfssatz 6.7 Für festes n und $R > 1$ gilt: $A_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{R^n - R^{-n}}{R^n + R^{-n}}$ ist streng monoton wachsend in R .

6.7 Numerische Resultate für (6.1) und (6.2)

6.7.1 Numerische Resultate im Kreisring

Zunächst werden für (6.1) und (6.2) die Summen der reziproken Eigenwerte $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$ bzw.

$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\mu_j^2}$ im Kreisring einander gegenübergestellt. Wegen

$$\begin{aligned} 0 &< \sum_{n=N}^{\infty} \frac{R^2}{n^2} \left(1 - \left(\frac{R^n - R^{-n}}{R^n + R^{-n}} \right)^2 \right) \\ &< \sum_{n=N}^{\infty} \frac{R^2}{n^2} \cdot \frac{4}{R^{2n}} < \frac{4}{N^2} \sum_{n=N}^{\infty} R^{-2(n-1)} \end{aligned}$$

für $R > 1$ gelten für (6.1) die obere Schranke

$$R^2 \ln^2 R + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \frac{R^2}{n^2} \cdot \left(\frac{R^n - R^{-n}}{R^n + R^{-n}} \right)^2 + 2 \sum_{n=N}^{\infty} \frac{R^2}{n^2} \quad (6.30)$$

sowie die untere Schranke

$$R^2 \ln^2 R + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \frac{R^2}{n^2} \cdot \left(\frac{R^n - R^{-n}}{R^n + R^{-n}} \right)^2 + 2 \sum_{n=N}^{\infty} \frac{R^2}{n^2} - \frac{8}{N^2} \sum_{n=N}^{\infty} R^{-2(n+1)} \quad . \quad (6.31)$$

Andererseits gelten bei $R > 1$ für (6.2) wegen

$$\begin{aligned} 0 &< \sum_{n=N}^{\infty} \frac{R^2}{n^2} \left(\left(\frac{R^n + R^{-n}}{R^n - R^{-n}} \right)^2 - 1 \right) \\ &< \sum_{n=N}^{\infty} \frac{R^2}{n^2} \cdot \frac{4}{(R^n - R^{-n})^2} < \frac{4R^2}{(R^N - R^{-N})^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

die untere Schranke

$$2 \sum_{n=1}^{N-1} \frac{R^2}{n^2} \left(\frac{R^n + R^{-n}}{R^n - R^{-n}} \right)^2 + 2 \sum_{n=N}^{\infty} \frac{R^2}{n^2} \quad (6.32)$$

sowie die obere Schranke

$$2 \sum_{n=1}^{N-1} \frac{R^2}{n^2} \left(\frac{R^n + R^{-n}}{R^n - R^{-n}} \right)^2 + 2 \sum_{n=N}^{\infty} \frac{R^2}{n^2} + \frac{8R^2}{(R^N - R^{-N})^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^2} \right). \quad (6.33)$$

Die Tabellen 8 und 9 enthalten für verschiedene Werte R die oberen bzw. unteren

R	$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$ für (6.1)	$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\mu_j^2}$ für (6.2)
$\frac{11}{10}$	0.3932855337 ₀₉ ³⁹	291.04189206 ₀₉ ¹⁵
$\frac{12}{10}$	0.89533141977 ₆ ⁷	97.0550405520 ₁ ²
$\frac{13}{10}$	1.51207975498 ₇ ⁸	57.0600741832 ₀ ¹
$\frac{14}{10}$	2.2489956695 ₇₉ ⁸⁰	42.080506296 ₂₉ ³⁰
$\frac{15}{10}$	3.11113830918 ₃ ⁴	34.9798740999 ₄ ⁵
$\frac{16}{10}$	4.10321710773 ₂ ³	31.2487828208 ₄ ⁵
$\frac{17}{10}$	5.22963760787 ₂ ³	29.2492767902 ₃ ⁴
$\frac{18}{10}$	6.49454077602 ₄ ⁵	28.2591153322 ₃ ⁴
$\frac{19}{10}$	7.90183934493 ₈ ⁹	27.9153098366 ₀ ¹
$\frac{20}{10}$	9.45525304613 ₃ ⁴	28.0173097131 ₀ ¹

Tabelle 8: Der Kreisring, $\frac{11}{10} \leq R \leq \frac{20}{10}$

Schranken der Summen $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$ für (6.1) in Spalte 2 bzw. $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\mu_j^2}$ für (6.2) in Spalte 3; in Tabelle 8 für $R > 1$ und in Tabelle 9 für $R < 1$.

Die in Tabelle 8 enthaltenen Ergebnisse wurden mit Hilfe von (6.30), (6.31), (6.32) und (6.33) mit einem $N = 100$ ermittelt.

Die Werte der zweiten Spalte deuten auf Monotonie der Summe der reziproken Eigenwerte in Abhängigkeit vom Radius R hin. Es gilt

Satz 6.8 Sei $A(1, R)$ ein Kreisring mit den Radien $r_1 = 1$ und $r_2 = R > 1$. Dann gilt für die Summe der reziproken Eigenwerte von $A(1, R)$ zum Problem (6.1): Für wachsendes R ist $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$ streng monoton wachsend in R .

Der **Beweis** des Satzes 6.8 ist eine unmittelbare Folgerung aus Hilfssatz 6.7. \square

Man überlegt sich leicht, dass für $R \rightarrow \infty$ das Eigenwertproblem nicht mehr sinnvoll gestellt ist, da dann die Randbedingung, die den Eigenwertparameter enthält, entfällt.

In ähnlicher Weise lassen sich auch die jeweiligen Schranken für $R < 1$ angeben. Weitere numerische Resultate finden sich in der folgenden Tabelle.

R	$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$ für (6.1)	$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{\mu_j^2}$ für (6.2)
$\frac{1}{10}$	0.08513141706 $_{29}^{30}$	0.0337169339167 $_3^4$
$\frac{2}{10}$	0.223242102387 $_2^3$	0.1456143532172 $_3^4$
$\frac{3}{10}$	0.370510781811 $_4^5$	0.3758830000606 $_2^3$
$\frac{4}{10}$	0.50008898562 $_{39}^{40}$	0.8259023267457 $_5^6$
$\frac{5}{10}$	0.590953315383 $_3^4$	1.7510818570687 $_4^5$
$\frac{6}{10}$	0.627131367119 $_3^4$	3.8592694579528 $_4^5$
$\frac{7}{10}$	0.596007870098 $_2^3$	9.4932170088255 $_5^6$
$\frac{8}{10}$	0.487020931894 $_6^7$	29.293762722626 $_4^5$
$\frac{9}{10}$	0.29103566919 $_{73}^{98}$	159.7662659192 $_{52}^{99}$

Tabelle 9: Der Kreisring, $\frac{1}{10} \leq R \leq \frac{9}{10}$

6.7.2 Abbildung auf eine geschlitzte Ellipse

Die Joukowski-Abbildung $f(z) = z + 1/z$ bildet den Kreisring $A(1, R)$ schlicht konform auf eine Ellipse mit den Halbachsen $R + 1/R$ und $R - 1/R$, welche von -2 bis 2 aufgeschlitzt ist, ab. Der Schlitz entspricht C_1 , der Rand der Ellipse C_2 .

Ähnlich wie in 2.5.2 berechnen sich die für die Bestimmung von $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$ benötigten Fourierkoeffizienten, vgl. Satz 6.7, aus

$$\alpha_{2j}^{(R)} = \frac{1}{\pi R} \int_0^{2\pi} R \sqrt{1 + \frac{1}{R^4} - \frac{2}{R^2} \cos 2\phi} \cos 2j\phi \, d\phi, \quad (6.34)$$

$j = 1, 2, \dots$ und

$$\frac{\alpha_0^{(R)}}{2} = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} R \sqrt{1 + \frac{1}{R^4} - \frac{2}{R^2} \cos 2\phi} d\phi, \quad (6.35)$$

siehe auch (2.57).

Es gelten

Hilfssatz 6.8 Für $R < 1$ ist die Folge A_n aus Satz 6.7 streng monoton fallend in n .

und

Hilfssatz 6.9 Für $R > 1$ ist die Folge A_n aus Satz 6.7 streng monoton fallend in n .

Die Gültigkeit von Hilfssatz 6.8 ist offensichtlich.

Zum **Beweis** von Hilfssatz 6.9. Mit $S^2 = R$ ist die Behauptung des Hilfssatzes 6.9 äquivalent zu

$$0 < S^{2m+1} - (2m+1)S^{m+1} + (2m+1)S^m - 1. \quad (6.36)$$

Wegen

$$\begin{aligned} 0 &< (S-1)^3 \cdot \left(\sum_{n=0}^{m-2} (S^n + S^{2m-2-n}) \frac{(n+2)(n+1)}{2} + S^{m-1} \frac{(m+1)m}{2} \right) \\ &= -1 + S^{m+1} \frac{(m-1)m}{2} + S^m(1-m^2) + S^{m-1} \frac{m(m+1)}{2} \\ &\quad + S^{2m+1} - S^m \frac{(m-1)m}{2} - S^{m+1}(1-m^2) - S^{m+2} \frac{m(m+1)}{2} \\ &\quad + \sum_{n=3}^{m-2} (S^n + S^{2m-2-n}) \frac{(n-1)(n-2) - 3(n-1)n + 3(n+1)n - (n+2)(n+1)}{2} \\ &\quad + S^{m+2} \frac{m(m+1)}{2} - S^{m+1} \frac{3m(m+1)}{2} + S^m \frac{3m(m+1)}{2} - S^{m+1} \frac{m(m+1)}{2} \\ &= S^{2m+1} - (2m+1)S^{m+1} + (2m+1)S^m - 1 \end{aligned} \quad (6.37)$$

für $S > 1$, ist (6.36) offensichtlich richtig. Damit erhält man die Gültigkeit von Hilfssatz 6.9. \square

Mit diesen Resultaten erhält man in einfacher Weise aus (6.30) und (6.31) gute Fehlerabschätzungen für die Berechnung der B_n , $n = 1, 2, \dots$, vgl. Satz 6.7.

Bei der Berechnung der B_n wird die unendliche Summe

$$S_n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(n+m)} \cdot \frac{R^m - R^{-m}}{R^m + R^{-m}} \cdot \frac{R^{n+m} - R^{-(n+m)}}{R^{n+m} + R^{-(n+m)}},$$

vgl. Satz 6.7, durch eine Näherung ersetzt. Wegen

$$\begin{aligned} 0 &< \sum_{m=N}^{\infty} \frac{1}{m(n+m)} \cdot \left(1 - \frac{R^m - R^{-m}}{R^m + R^{-m}} \cdot \frac{R^{n+m} - R^{-(n+m)}}{R^{n+m} + R^{-(n+m)}} \right) \\ &< \sum_{m=N}^{\infty} \frac{1}{m(n+m)} \cdot \frac{4R^n}{R^{2m+n}} < \frac{4}{N(N+m)} \sum_{m=N}^{\infty} R^{-2m} \end{aligned}$$

für $R > 1$ gelten für S_n die untere Schranke

$$\sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{m(n+m)} \cdot \frac{R^m - R^{-m}}{R^m + R^{-m}} \cdot \frac{R^{n+m} - R^{-(n+m)}}{R^{n+m} + R^{-(n+m)}} + \sum_{m=N}^{\infty} \frac{1}{m(m+n)} - \frac{4}{N(N+n)} \sum_{m=N}^{\infty} R^{-2m} \quad (6.38)$$

sowie die obere Schranke

$$\sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{m(n+m)} \cdot \frac{R^m - R^{-m}}{R^m + R^{-m}} \cdot \frac{R^{n+m} - R^{-(n+m)}}{R^{n+m} + R^{-(n+m)}} + \sum_{m=N}^{\infty} \frac{1}{m(m+n)}. \quad (6.39)$$

Die Fehlerabschätzung für B_0 erhält man auf direktem Wege aus (6.30) und (6.31). Schließlich ergibt sich aus den Hilfssätzen 6.8 und 6.9 unmittelbar die

Folgerung 6.1 *Die Folgen B_n für $R > 1$ bzw. $R < 1$ aus Satz 6.7 sind streng monoton fallend in n .*

Fehlerschranken für die Berechnung der Summe $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\chi_j^2}$ zum Problem (6.1) für die Abbildung eines Kreisringes $A(1, R)$ auf eine aufgeschlitzte Ellipse erhält man in folgender Weise. Zunächst werden die Fourierkoeffizienten der Abbildungsfunktion betrachtet. Die Folge $R \cdot |\alpha_{2n}^{(R)}|$ ist bei festem n streng monoton fallend für wachsendes $R > 1$, siehe auch 2.5.2 und [28]. Somit gilt

$$R \cdot |\alpha_{2n}^{(R)}| < \frac{8}{\pi} \cdot \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \quad (6.40)$$

für $n = 1, 2, \dots$. Aus (6.40) ergibt sich die Fehlerabschätzung

$$R^2 \sum_{n=N}^{\infty} B_{2n} \alpha_{2n}^{(R)2} \leq B_{2N} \cdot \frac{64}{\pi^2} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2}. \quad (6.41)$$

Neben (6.41) ist der Fehler zu berücksichtigen, der bei der Berechnung der Koeffizienten B_n entsteht, siehe (6.38) und (6.39). Numerische Resultate für verschiedene R finden sich in folgender Tabelle, jeweils mit oberer und unterer Schranke.

R	$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$
$\frac{11}{10}$	0.661644 $_{6977}^{7036}$
$\frac{12}{10}$	1.3255954 $_{259}^{326}$
$\frac{13}{10}$	2.0377143 $_{866}^{937}$
$\frac{14}{10}$	2.82765067 $_{08}^{83}$
$\frac{15}{10}$	3.71553394 $_{04}^{81}$
$\frac{16}{10}$	4.7156820 $_{861}^{941}$
$\frac{17}{10}$	5.83874011 $_{04}^{85}$
$\frac{18}{10}$	7.0929597 $_{365}^{447}$
$\frac{19}{10}$	8.4849919 $_{183}^{267}$
$\frac{20}{10}$	10.0203943 $_{669}^{727}$

Tabelle 10: Abbildung auf eine geschlitzte Ellipse, $\frac{11}{10} \leq R \leq \frac{20}{10}$

Für die Rechnungen wurde in (6.41) $N = 101$ gesetzt. Bei der Berechnung der B_n wurde die unendliche Summe, vgl. Satz 6.7, durch die ersten 400 Summanden gemäß (6.38) approximiert. Der übrige, zur Bestimmung der B_n notwendige Teil geht exakt in die Rechnung ein.

6.7.3 Abbildung auf einen Ellipsenring

Eine ganz ähnliche Abbildung ist die Abbildung des Kreisringes $A(1, R)$ durch $f_r(z) = C(r)(rz + 1/(rz))$ auf einen Ellipsenring mit einer von r abhängenden Konstanten $C(r)$. Dieser wird begrenzt durch zwei Ellipsen mit den Halbachsenverhältnissen $(rR - \frac{1}{rR}) : (rR + \frac{1}{rR})$ und $(1 - \frac{1}{r}) : (1 + \frac{1}{r})$.

Die Konstante $C(r)$ wird zunächst so gewählt, dass der Umfang der inneren Ellipse konstant ist und zur besseren Vergleichbarkeit mit den Ergebnissen aus 6.7.1 stets 2π beträgt. Die identische Abbildung und damit die Resultate aus 6.7.1 erhält man für $r \rightarrow \infty$.

	$R = \frac{10}{5}$	$R = \frac{9}{5}$	$R = \frac{8}{5}$	$R = \frac{7}{5}$	$R = \frac{6}{5}$
$r \rightarrow \infty$	9.4552530461 $\frac{4}{3}$	6.494540776 $\frac{1}{0}$	4.10321710773 $\frac{3}{2}$	2.2489956695 $\frac{80}{79}$	0.89533141977 $\frac{7}{6}$
$r = \frac{10}{5}$	9.19967234 $\frac{575}{488}$	6.33172470 $\frac{49}{28}$	4.01454947 $\frac{419}{228}$	2.21511590 $\frac{560}{380}$	0.89395527 $\frac{703}{542}$
$r = \frac{9}{5}$	9.06926677 $\frac{420}{314}$	6.2485157 $\frac{208}{183}$	3.96097260 $\frac{620}{388}$	2.19754402 $\frac{230}{011}$	0.89301106 $\frac{227}{032}$
$r = \frac{8}{5}$	8.84669269 $\frac{664}{534}$	6.1062774 $\frac{208}{177}$	3.89107154 $\frac{296}{011}$	2.16709044 $\frac{782}{513}$	0.89100739 $\frac{519}{279}$
$r = \frac{7}{5}$	8.44674343 $\frac{952}{791}$	5.84995861 $\frac{48}{10}$	3.74963912 $\frac{757}{404}$	2.1108303 $\frac{7035}{6702}$	0.88610279 $\frac{896}{598}$
$r = \frac{6}{5}$	7.68961979 $\frac{883}{686}$	5.36191587 $\frac{53}{08}$	3.47697617 $\frac{950}{518}$	1.99836789 $\frac{900}{492}$	0.87176239 $\frac{481}{117}$
$r = \frac{5}{5}$	6.18208302 $\frac{38}{15}$	4.37529416 $\frac{96}{45}$	2.90886979 $\frac{683}{198}$	1.74423709 $\frac{869}{411}$	0.81769390 $\frac{718}{310}$

Tabelle 11: Abbildung auf einen Ellipsenring

Die Tabellen enthalten die numerischen Werte für $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$ für verschiedene r und R , jeweils mit oberer und unterer Schranke.

	$R = \frac{10}{5}$	$R = \frac{9}{5}$	$R = \frac{8}{5}$	$R = \frac{7}{5}$	$R = \frac{6}{5}$
$r \rightarrow \infty$	9.455253046 $\frac{2}{1}$	6.494540776 $\frac{1}{0}$	4.10321710773 $\frac{3}{2}$	2.2489956695 $\frac{80}{79}$	0.89533141977 $\frac{7}{6}$
$r = \frac{10}{5}$	9.49056697 $\frac{99}{89}$	6.53193452 $\frac{45}{24}$	4.14148996 $\frac{255}{058}$	2.2851581 $\frac{1000}{0814}$	0.92222223 $\frac{953}{787}$
$r = \frac{9}{5}$	9.5090774 $\frac{404}{392}$	6.5515351 $\frac{301}{275}$	4.16155128 $\frac{285}{042}$	2.30411308 $\frac{950}{721}$	0.93631729 $\frac{639}{434}$
$r = \frac{8}{5}$	9.54147039 $\frac{54}{39}$	6.5858357 $\frac{732}{699}$	4.19665802 $\frac{877}{569}$	2.33728355 $\frac{454}{164}$	0.9609829 $\frac{3167}{2908}$
$r = \frac{7}{5}$	9.60233951 $\frac{32}{13}$	6.65028944 $\frac{69}{27}$	4.2626259 $\frac{7089}{6687}$	2.39961234 $\frac{954}{575}$	1.00733021 $\frac{904}{566}$
$r = \frac{6}{5}$	9.72776225 $\frac{83}{58}$	6.78309776 $\frac{67}{09}$	4.3985526 $\frac{6408}{5862}$	2.52803757 $\frac{984}{468}$	1.10282400 $\frac{746}{286}$
$r = \frac{5}{5}$	10.0203943 $\frac{73}{66}$	7.0929597 $\frac{447}{365}$	4.7156820 $\frac{9403}{8616}$	2.82765067 $\frac{827}{085}$	1.3255954 $\frac{3252}{2591}$

Tabelle 12: Abbildung auf einen Ellipsenring, $C(r) = 1/r$

Zum Vergleich enthalten die Tabellen auch die normierten Werte für die Abbildung mit $r = 1$, vgl. 6.7.2.

Die Werte in Tabelle 12 wurden mit einem $C(r) = 1/r$ bestimmt, d.h., die Abbildungsfunktion ist normiert durch $|f'(\infty)| = 1$.

Es wurde jeweils mit einem $N = 101$ gerechnet. Bei der Berechnung der B_n wurde die unendliche Summe durch die ersten 100 Summanden angenähert. Der übrige, zur Bestimmung der B_n notwendige Teil geht wiederum exakt in die Rechnung ein.

Die in den Tabellen 11 und 12 enthaltenen numerischen Werte weisen ein monotonen

Verhalten sowohl in Abhängigkeit von R als auch von r auf.

Die in Tabelle 11 enthaltenen Werte deuten auf ein monotonen Wachsen der Summe der reziproken Eigenwerte sowohl bei festem r für wachsendes R als auch bei festem R für wachsendes r hin.

Die Werte in Tabelle 12 besitzen ein teilweise anderes Monotonieverhalten. Auch hier wachsen die Summen bei festem r für wachsendes R , jedoch fallen die Summen bei festem R für wachsendes r .

Durch einfache Überlegungen ergibt sich folgender

Satz 6.9 Sei $f(z) = z + \frac{1}{r^2 z}$ diejenige konforme Abbildung, die den Kreisring $A(1, R)$ schlicht konform auf das Gebiet D_r abbildet. Dann gilt für die Eigenwerte $\lambda_j(r)$ von D_r : Für wachsendes $r \geq 1$ bei festem R ist die Summe $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2(r)}$ streng monoton fallend.

Der Satz 6.9 kann auch in folgender Weise formuliert werden:

Satz 6.9a Gegeben seien konform äquivalente Ellipsenringe D_r , wobei das Äußere von $C_1^{(r)}$ ein Gebiet mit äußerem konformen Radius 1 ist. Das Halbachsenverhältnis HV der inneren Ellipse betrage $0 \leq HV < 1$. Dann gilt: Für wachsendes HV ist die Summe $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2(r)}$ streng monoton fallend.

Beweis. Die für die Berechnung der Summe $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2(r)}$ notwendigen Beträge der Fourierkoeffizienten $|\alpha_{2n}^{(R)}(r)|$ bzw. $\alpha_0^{(R)}(r)$ sind streng monoton fallend für wachsendes r bei festem Index, vgl. 2.5.2 und [28]. Mit der Formel aus Satz 6.7 ergibt sich unmittelbar die Behauptung von Satz 6.9. \square

Die in den Tabellen 11 und 12 bezeichneten Abbildungen normieren in gewissem Sinne die inneren Randkurven $C_1^{(r)}$ des Gebietes D_r . Im Falle der Tabelle 12 ist das Äußere der Kurve $C_1^{(r)}$ ein Gebiet mit äußerem konformen Radius 1, im Falle der Tabelle 11 wurde die Länge der Randkurve $C_1^{(r)}$ normiert.

Ganz analog kann eine Normierung auch für die äußere Randkurve $C_2^{(R)}$ eingeführt werden. D.h., abgebildet wird nun durch eine Abbildungsfunktion $f_R(z) = C(R)(rz + 1/(rz))$ mit einer von R abhängenden Konstanten $C(R)$. Numerische Resultate hierzu finden sich in den folgenden Tabellen 13 und 14. Dabei wurde die Konstante $C(R)$ in Tabelle 13 so gewählt, dass die Länge der äußeren Randkurve konstant ist und 2π beträgt. In Tabelle 14 wurde die Konstante $C(R)$ dagegen so gewählt, dass der äußere konforme Radius des Äußeren der Kurve $C_2^{(R)}$ stets 1 ist.

	$R = \frac{10}{5}$	$R = \frac{9}{5}$	$R = \frac{8}{5}$	$R = \frac{7}{5}$	$R = \frac{6}{5}$
$r \rightarrow \infty$	2.3638132615 $\frac{4}{3}$	2.0044878938 $\frac{4}{3}$	1.6028191827 $\frac{1}{0}$	1.147446770 $\frac{20}{19}$	0.6217579304 $\frac{1}{0}$
$r = \frac{10}{5}$	2.368013329 $\frac{25}{02}$	2.010038861 $\frac{69}{05}$	1.61007831 $\frac{470}{393}$	1.15646083 $\frac{632}{537}$	0.63087062 $\frac{913}{799}$
$r = \frac{9}{5}$	2.370205679 $\frac{36}{08}$	2.01293007 $\frac{146}{068}$	1.61384490 $\frac{241}{146}$	1.16110477 $\frac{685}{568}$	0.63549647 $\frac{973}{834}$
$r = \frac{8}{5}$	2.37402708 $\frac{112}{076}$	2.01795926 $\frac{794}{696}$	1.62037324 $\frac{258}{139}$	1.1690992 $\frac{9017}{8871}$	0.64334786 $\frac{491}{317}$
$r = \frac{7}{5}$	2.381155803 $\frac{77}{31}$	2.02730564 $\frac{525}{398}$	1.63242533 $\frac{443}{289}$	1.18367353 $\frac{997}{809}$	0.65728652 $\frac{849}{629}$
$r = \frac{6}{5}$	2.39563233 $\frac{658}{596}$	2.04614148 $\frac{977}{805}$	1.65638966 $\frac{799}{592}$	1.21191682 $\frac{525}{277}$	0.68283835 $\frac{719}{434}$
$r = \frac{5}{5}$	2.42831500 $\frac{953}{865}$	2.08793164 $\frac{978}{737}$	1.70793047 $\frac{893}{607}$	1.26905934 $\frac{382}{048}$	0.72767997 $\frac{897}{533}$

Tabelle 13: Abbildung auf einen Ellipsenring

	$R = \frac{10}{5}$	$R = \frac{9}{5}$	$R = \frac{8}{5}$	$R = \frac{7}{5}$	$R = \frac{6}{5}$
$r \rightarrow \infty$	2.3638132615 $\frac{4}{3}$	2.0044878938 $\frac{4}{3}$	1.6028191827 $\frac{1}{0}$	1.147446770 $\frac{20}{19}$	0.6217579304 $\frac{1}{0}$
$r = \frac{10}{5}$	2.372641744 $\frac{96}{73}$	2.01602917 $\frac{422}{358}$	1.61776951 $\frac{663}{585}$	1.16589699 $\frac{490}{394}$	0.6404321 $\frac{1079}{0963}$
$r = \frac{9}{5}$	2.3772693 $\frac{6009}{5981}$	2.022078743 $\frac{86}{08}$	1.62560596 $\frac{987}{891}$	1.17556790 $\frac{281}{163}$	0.65022034 $\frac{472}{329}$
$r = \frac{8}{5}$	2.385367598 $\frac{84}{48}$	2.03266536 $\frac{209}{110}$	1.63931954 $\frac{249}{128}$	1.19249169 $\frac{946}{798}$	0.66734925 $\frac{811}{630}$
$r = \frac{7}{5}$	2.40058487 $\frac{829}{783}$	2.0525584 $\frac{7127}{6998}$	1.66508826 $\frac{988}{831}$	1.22429201 $\frac{507}{313}$	0.69953487 $\frac{434}{199}$
$r = \frac{6}{5}$	2.43194056 $\frac{458}{395}$	2.09354869 $\frac{342}{166}$	1.71818463 $\frac{441}{227}$	1.2898150 $\frac{9176}{8912}$	0.76585000 $\frac{518}{199}$
$r = \frac{5}{5}$	2.50509859 $\frac{264}{174}$	2.18918510 $\frac{638}{386}$	1.84206331 $\frac{798}{490}$	1.44267891 $\frac{749}{370}$	0.9205523 $\frac{8369}{7910}$

Tabelle 14: Abbildung auf einen Ellipsenring, $C(R) = 1/(Rr)$

Auch in den Tabellen 13 und 14 weisen die numerischen Werte ein monotonen Verhalten sowohl in Abhängigkeit von R als auch von r auf.

In beiden Tabellen deuten die ermittelten Werte auf ein monotonen Wachsen der Summe der reziproken Eigenwerte für wachsendes R bei festem r sowie ein monotonen Fallen der Werte für wachsendes r bei festem R hin.

Es gilt

Satz 6.10 Sei $f_r(z) = C(r) \left(rz + \frac{1}{rz} \right)$ diejenige konforme Abbildung, die den Kreisring $A(1, R)$ schlicht konform auf das Gebiet D_r abbildet. Dann gilt für die Eigenwerte $\lambda_j(r)$ von D_r : Für wachsendes $r \geq 1$ bei festem R ist die Summe $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2(r)}$ streng monoton

fallend.

Eine alternative Formulierung dieses Satzes ist

Satz 6.10a Gegeben seien konform äquivalente Ellipsenringe D_r , wobei die Länge der äußeren Randkurve $C_2^{(r)}$ 2π beträgt. Das Halbachsenverhältnis HV der inneren Ellipse betrage $0 \leq HV < 1$. Dann gilt: Für wachsendes HV ist die Summe $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2(r)}$ streng monoton fallend.

Beweis. Die zur Bestimmung der Summe der reziproken Eigenwerte nötigen Fourierkoeffizienten $|\alpha_{2n}^{(R)}(r)|$ sind streng monoton fallend für wachsendes $r \geq 1$ und festes $n \geq 1$, vgl. 2.5.2 und [28]. Ferner ist $\alpha_0^{(R)}(r)$ aufgrund der Normierung der Länge der Randkurve konstant. Damit ergibt sich unmittelbar aus der Formel in Satz 6.7 die Behauptung obigen Satzes 6.10. \square

Weiterhin gilt auch folgender

Satz 6.11 Sei $f_r(z) = z + \frac{1}{R^2 r^2 z}$ diejenige konforme Abbildung, die den Kreisring $A(1, R)$ schlicht konform auf das Gebiet D_r abbildet. Dann gilt für die Eigenwerte $\lambda_j(r)$ von D_r : Für wachsendes $r \geq 1$ bei festem R ist die Summe $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2(r)}$ streng monoton fallend.

Die alternative Formulierung hierzu lautet:

Satz 6.11a Gegeben seien konform äquivalente Ellipsenringe D_r , wobei das Äußere von $C_2^{(r)}$ ein Gebiet mit äußerem konformen Radius 1 ist. Das Halbachsenverhältnis HV der inneren Ellipse betrage $0 \leq HV < 1$. Dann gilt: Für wachsendes HV ist die Summe $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2(r)}$ streng monoton fallend.

Beweis. Der Beweis erfolgt in ähnlicher Weise wie der vorangehende. Zudem ist $\alpha_0^{(R)}(r)$ hier ebenfalls streng monoton fallend in r bei festem R . Satz 6.11 kann außerdem unmittelbar aus Satz 6.9 gefolgert werden. \square

6.7.4 Abbildung durch $\frac{z-x}{1-zx}$

Die Funktion $f_x(z) = \frac{z-x}{1-zx}$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $0 \leq x < 1$ ist eine schlicht konforme Abbildung der gesamten komplexen Zahlenebene, die den Einheitskreis in sich abbildet.

Angewendet auf den Kreisring $A(1, R)$, erhält man für $x \cdot R \leq 1$ folgende Bildgebiete D_x :

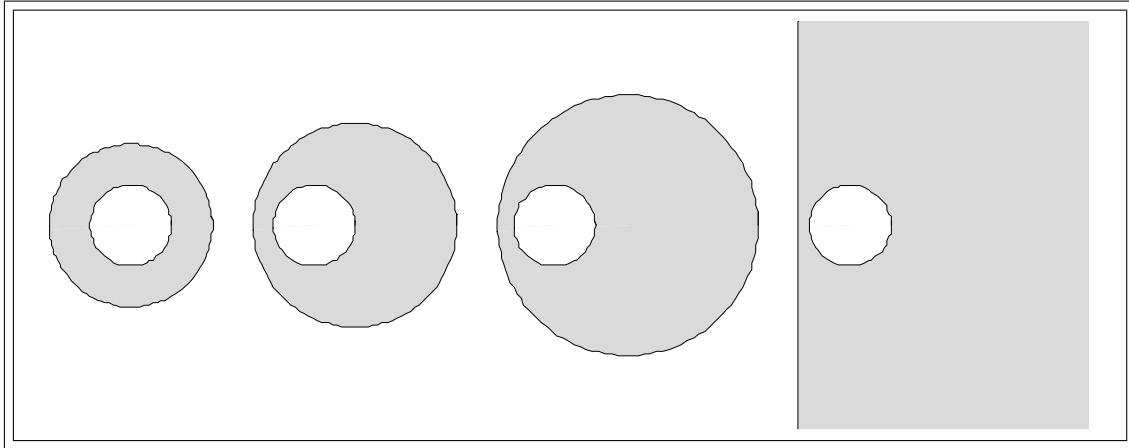


Abb. 3: Abbildung des Kreisringes $A(1, R)$ durch f_x mit $x = 0$, $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{3}$ und $x = \frac{1}{2}$ für $R = 2$

Der jeweils kleinere Kreis ist der Einheitskreis und entspricht der Randkomponente $C_1^{(x)}$.

Man überlegt sich leicht, dass im letzten abgebildeten Fall, d.h. für $R = 2$ und $x = \frac{1}{2}$ die Summe $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$ nicht existiert: Aus der in Satz 6.7 angegebenen Formel ist ersichtlich,

	$R = \frac{10}{5}$	$R = \frac{9}{5}$	$R = \frac{8}{5}$	$R = \frac{7}{5}$	$R = \frac{6}{5}$
$x = 0$	$2.3638132615\frac{4}{3}$	$2.0044878938\frac{4}{3}$	$1.6028191827\frac{1}{0}$	$1.147446770\frac{20}{19}$	$0.6217579304\frac{1}{0}$
$x = \frac{1}{20}$	$2.4103558456\frac{4}{3}$	$2.0366240038\frac{4}{3}$	$1.6189406696\frac{7}{6}$	$1.1586781228\frac{8}{7}$	$0.6262426754\frac{4}{3}$
$x = \frac{2}{20}$	$2.5554043722\frac{2}{3}$	$2.1360955504\frac{8}{7}$	$1.6685326081\frac{5}{4}$	$1.1930336443\frac{3}{2}$	$0.6398924157\frac{8}{7}$
$x = \frac{3}{20}$	$2.816837574\frac{60}{59}$	$2.3128349339\frac{4}{3}$	$1.7555144293\frac{2}{1}$	$1.25259648\frac{500}{499}$	$0.6633152902\frac{2}{1}$
$x = \frac{4}{20}$	$3.2308014756\frac{8}{7}$	$2.5862244630\frac{9}{8}$	$1.8872969084\frac{7}{6}$	$1.341196023\frac{60}{59}$	$0.6976015066\frac{1}{0}$
$x = \frac{5}{20}$	$3.865611398\frac{60}{59}$	$2.9908633218\frac{8}{7}$	$2.0764651896\frac{9}{8}$	$1.465056502\frac{90}{89}$	$0.7444558876\frac{6}{5}$
$x = \frac{6}{20}$	$4.8554954150\frac{4}{3}$	$3.5891314669\frac{3}{2}$	$2.3441242145\frac{8}{7}$	$1.633988769\frac{30}{29}$	$0.8064252075\frac{6}{5}$
$x = \frac{7}{20}$	$6.4938903849\frac{3}{2}$	$4.500708245\frac{20}{19}$	$2.726793293\frac{80}{79}$	$1.8635938063\frac{4}{3}$	$0.887281315\frac{10}{9}$
$x = \frac{8}{20}$	$9.5601220318\frac{7}{6}$	$5.9823919153\frac{5}{4}$	$3.2918481420\frac{1}{0}$	$2.179527155\frac{60}{59}$	$0.9926788834\frac{5}{4}$
$x = \frac{9}{20}$	$17.124973743\frac{9}{5}$	$8.6991747003\frac{4}{3}$	$4.1768040297\frac{5}{4}$	$2.6263767710\frac{7}{6}$	$1.1313300220\frac{1}{0}$

Tabelle 15: Abbildung durch \tilde{f}_x mit $0 \leq x \leq \frac{9}{20}$ und $\frac{6}{5} \leq R \leq 2$

dass die Länge der Randkurve $C_2^{(x)}$ unmittelbar in die Summe eingeht. $C_2^{(x)}$ ist hier aber eine Gerade.

Für $x \rightarrow \frac{1}{2}$ strebt $|C_2^{(x)}| \rightarrow \infty$. Daher empfiehlt es sich, eine Normierung einzuführen. Für die Berechnung der Summe der reziproken Eigenwerte $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$ wird die Abbildung f_x so normiert, dass $|C_2^{(x)}| = 2\pi$. Die zugehörigen numerischen Werte finden sich in Tabelle 15. Die normierte Abbildungsfunktion sei mit \tilde{f}_x bezeichnet. Es gilt

$$\tilde{f}_x(z) = \frac{1}{R} \cdot \frac{1 - x^2 R^2}{1 - x^2} \cdot \frac{z - x}{1 - zx}$$

Wie man leicht sieht, sind die numerischen Werte in Tabelle 15 monoton wachsend für wachsendes R bei festem x , aber auch monoton wachsend für wachsendes x bei festem R . Es gelten folgende Sätze:

Satz 6.12 Sei \tilde{f}_x diejenige konforme Abbildung, die den Kreisring $A(1, R)$ schlicht konform auf das Gebiet D_x abbildet. Dann gilt für die Summe der reziproken Eigenwerte von D_x : $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2(x)}$ ist streng monoton wachsend für wachsendes x bei festem R mit $xR < 1$.

Satz 6.13 Sei \tilde{f}_x diejenige konforme Abbildung, die den Kreisring $A(1, R)$ schlicht konform auf das Gebiet D_R abbildet. Dann gilt für die Summe der reziproken Eigenwerte von D_R : $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2(R)}$ ist streng monoton wachsend für wachsendes R bei festem x mit $xR < 1$.

Beweis von Satz 6.12. Die Fourierkoeffizienten von \tilde{f}_x für $|z| = R$ erhält man unmittelbar aus der Darstellung

$$|\tilde{f}'_x(\phi)| = \frac{1}{R} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (xR)^n \cos n\phi \right), \quad (6.42)$$

vgl. dazu auch Hilfssatz 2.5. Diese sind für wachsendes $x \geq 0$ bei festem R sowie festem Index $n \geq 1$ streng monoton wachsend; $\alpha_0^{(x)}$ ist konstant. Mit Satz 6.7 folgt die Behauptung des Satzes 6.12. \square

Beweis von Satz 6.13. Für die zur Berechnung der Summe $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2(R)}$ notwendigen Fourierkoeffizienten, vgl. (6.42), gilt: $R\alpha_n^{(x)}$ ist streng monoton wachsend für wachsendes R bei festem $x > 0$ sowie festem Index $n \geq 1$; andererseits ist $R\alpha_0^{(x)}$ konstant. Für $x = 0$ liegt die identische Abbildung vor. Mit Satz 6.7 und Satz 6.8 folgt die Behauptung des Satzes 6.13. \square

Ferner gilt für den konzentrischen Kreisring $A(r_1, r_2)$ folgende Extremalaussage:

Satz 6.14 Unter allen konform äquivalenten Kreisringgebieten D_x mit gleicher Länge der Randkurve $C_2^{(x)}$ besitzt der konzentrische Kreisring die kleinste Summe $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2(R)}$.

Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus Satz 6.12. \square

Mit Kreisringgebieten sind die Gebiete, die von zwei Kreisen berandet werden, gemeint. Allgemeiner gilt auch als unmittelbare Folgerung aus Satz 6.2

Satz 6.15 *Unter allen konform äquivalenten Ringgebieten D_x mit gleicher Länge der Randkurve $C_2^{(x)}$ besitzt der konzentrische Kreisring die kleinste Summe $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2(R)}$.*

Mit Ringgebieten sind wie allgemein üblich zweifach zusammenhängende Gebiete bezeichnet, vgl. auch [6].

Betrachtet wird nun ein weiterer Fall der Abbildung $f_x(z) = \frac{z-x}{1-zx}$. Im Folgenden gelte $Rx > 1$ bei einem $x < 1$. Die Abbildung 4 zeigt die Bildgebiete des Kreisringes für die genannte Abbildung.

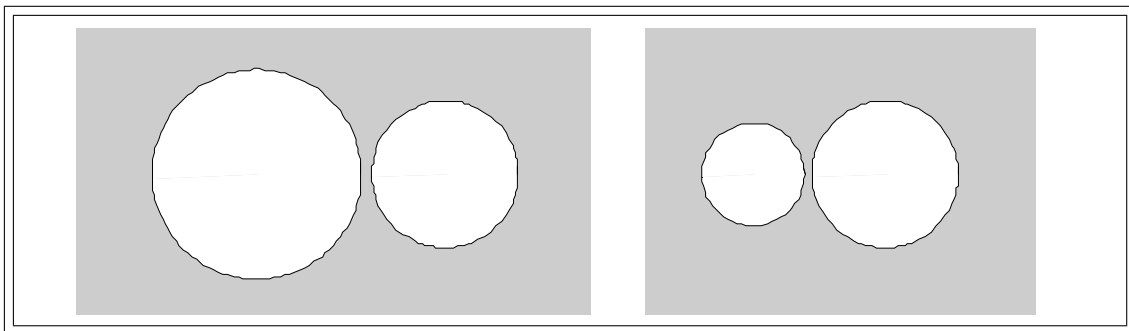


Abb. 4: Abbildung des Kreisringes $A(1, R)$ durch f_x für $x = \frac{2}{3}$ und $x = \frac{3}{4}$ für $R = 2$

Der rechte Kreis ist jeweils der Einheitskreis und entspricht der Randkomponente $C_1^{(x)}$. Wie im vorher betrachteten Fall strebt für $x \rightarrow \frac{1}{2}$ die Länge der zweiten Randkomponente $|C_2^{(x)}| \rightarrow \infty$. Daher empfiehlt es sich wiederum, eine Normierung einzuführen.

	$R = \frac{10}{5}$	$R = \frac{9}{5}$	$R = \frac{8}{5}$	$R = \frac{7}{5}$	$R = \frac{6}{5}$
$x = \frac{11}{20}$	18.414302 ³⁰¹²² ₂₉₈₆₇	---	---	---	---
$x = \frac{12}{20}$	11.252634634 ¹ ₀	19.049081 ⁷³¹⁰⁹ ₅₈₁₀₅	---	---	---
$x = \frac{13}{20}$	8.3712524587 ⁵ ₄	11.074325382 ⁵ ₄	20.7780005844 ³ ₂	---	---
$x = \frac{14}{20}$	6.8144042446 ¹ ₀	8.0524337636 ⁸ ₇	9.8059704852 ² ₁	---	---
$x = \frac{15}{20}$	5.8447163734 ⁸ ₇	6.4583269020 ⁷ ₆	6.7280096697 ⁵ ₄	17.6616106723 ⁷ ₆	---
$x = \frac{16}{20}$	5.1866443632 ⁵ ₄	5.4781148166 ¹ ₀	5.2599978832 ⁴ ₃	9.0731773010 ² ₁	---
$x = \frac{17}{20}$	4.7134097012 ⁴ ₃	4.8180113448 ⁹ ₈	4.4037557560 ⁸ ₇	6.2545457411 ¹ ₀	21. ⁶⁴⁷ ₅₄₈
$x = \frac{18}{20}$	4.3585148215 ⁸ ₇	4.3456185180 ⁴ ₃	3.8456083290 ⁹ ₈	4.8511774998 ⁸ ₇	7.436184 ⁴⁸¹ ₂₂₃
$x = \frac{19}{20}$	4.0837472213 ⁸ ₇	3.9924570591 ⁶ ₅	3.4548223571 ³ ₂	4.0150747498 ⁰ ₈	4.5925328986 ⁷ ₆

Tabelle 16: Abbildung durch \tilde{f}_x mit $\frac{11}{20} \leq x \leq \frac{19}{20}$ und $\frac{6}{5} \leq R \leq 2$ mit $Rx > 1$

Für die Berechnung der Summe der reziproken Eigenwerte $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$ wird die Abbildung f_x ebenfalls so normiert, dass $|C_2^{(x)}| = 2\pi$. Die zugehörigen numerischen Werte finden sich in Tabelle 16.

Da die Bedingung $xR > 1$ erfüllt sein soll, enthält die Tabelle natürlich nicht für alle Paare (x, R) numerische Werte.

Während die numerischen Werte spaltenweise wieder auf Monotonie hindeuten, ist dies hier zeilenweise nicht der Fall. Es gilt folgender

Satz 6.16 Sei \tilde{f}_x diejenige konforme Abbildung, die den Kreisring $A(1, R)$ schlicht konform auf das Gebiet D_x abbildet. Dann gilt für die Summe der reziproken Eigenwerte von D_x : $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2(x)}$ ist streng monoton fallend für wachsendes $x < 1$ bei festem R mit $xR > 1$.

Ferner gilt folgender

Hilfssatz 6.10 Für die Abbildungsfunktion \tilde{f}_x gilt auf der Randkomponente $C_2^{(0)}$

$$|\tilde{f}'_x(\phi)| = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (xR)^{-n} \cos n\phi \quad ,$$

wobei $x < 1$ und $xR > 1$.

Beweis von Hilfssatz 6.10. Für die Abbildungsfunktion \tilde{f}_x gilt auf $C_2^{(0)}$

$$|f'(\phi)| = \frac{x^2 R^2 - 1}{1 - 2xR \cos \phi + x^2 R^2} = \frac{1 - \frac{1}{x^2 R^2}}{1 - \frac{2}{xR} \cos \phi + \frac{1}{x^2 R^2}} .$$

Aus dieser Darstellung folgt unter Nutzung von Hilfssatz 2.5 bzw. (2.47) und (2.48) die Behauptung des Hilfssatzes 6.10. \square

Beweis von Satz 6.16. Unmittelbar aus Hilfssatz 6.10 lässt sich ablesen, dass bei festem Index $n \geq 1$ und festem R die benötigten Fourierkoeffizienten $\alpha_n^{(x)}$ streng monoton fallen; $\alpha_0^{(x)}$ ist konstant. Mit Satz 6.7 folgt die Aussage des Satzes 6.16. \square

6.7.5 Abbildung durch $\frac{zx-R}{Rx-z}$

Die Abbildung $g_x(z) = \frac{zx-R}{Rx-z}$ geht durch vorangehende Stürzung des Kreisringes $A(1, R)$ aus der Abbildungsfunktion $f_x(z) = \frac{z-x}{1-zx}$ hervor. Die Bildgebiete des Kreisringes $A(1, R)$ bei Abbildung mit g_x sehen genauso aus wie die von f_x , vgl. Abbildung 2 und 3; der Unterschied besteht darin, dass die Randkomponenten vertauscht sind. Der Einheitskreis ist jetzt jeweils die Randkomponente $C_2^{(x)}$.

Die Abbildung g_x ist bereits so normiert, dass die Länge der Randkomponente $C_2^{(x)}$ stets 2π beträgt. Numerische Resultate für verschiedene R und x finden sich in folgender

Tabelle.

	$R = \frac{10}{5}$	$R = \frac{9}{5}$	$R = \frac{8}{5}$	$R = \frac{7}{5}$	$R = \frac{6}{5}$
$x = \frac{1}{20}$	2.3753671140 $\frac{8}{7}$	2.0143534961 $\frac{2}{2}$	1.6090928260 $\frac{1}{0}$	1.1531635070 $\frac{5}{4}$	0.6248689205 $\frac{2}{1}$
$x = \frac{2}{20}$	2.4103558456 $\frac{4}{3}$	2.0442344711 $\frac{5}{4}$	1.6280975626 $\frac{4}{3}$	1.1704838797 $\frac{4}{3}$	0.6342956559 $\frac{1}{0}$
$x = \frac{3}{20}$	2.4697838505 $\frac{8}{7}$	2.0950035868 $\frac{2}{1}$	1.6603982106 $\frac{8}{7}$	1.1999310622 $\frac{3}{2}$	0.6503265615 $\frac{7}{6}$
$x = \frac{4}{20}$	2.5554043722 $\frac{3}{2}$	2.1681857152 $\frac{4}{3}$	1.7069826272 $\frac{6}{5}$	1.2424210848 $\frac{3}{2}$	0.6734671386 $\frac{6}{5}$
$x = \frac{5}{20}$	2.6698495726 $\frac{2}{1}$	2.266073316 $\frac{90}{8}$	1.7693382784 $\frac{2}{1}$	1.2993355898 $\frac{9}{8}$	0.7044809900 $\frac{5}{4}$
$x = \frac{6}{20}$	2.816837574 $\frac{60}{9}$	2.3919106534 $\frac{3}{2}$	1.8495747115 $\frac{2}{1}$	1.3726385930 $\frac{5}{4}$	0.7444558876 $\frac{6}{5}$
$x = \frac{7}{20}$	3.0014882898 $\frac{9}{8}$	2.5501755524 $\frac{4}{3}$	1.9506115478 $\frac{5}{4}$	1.465056502 $\frac{90}{89}$	0.7949061113 $\frac{8}{7}$
$x = \frac{8}{20}$	3.2308014756 $\frac{8}{7}$	2.7470072868 $\frac{4}{3}$	2.0764651896 $\frac{9}{8}$	1.580354177 $\frac{90}{89}$	0.857930327 $\frac{30}{29}$
$x = \frac{9}{20}$	3.5143877939 $\frac{5}{4}$	2.9908633218 $\frac{8}{7}$	2.2326910904 $\frac{9}{8}$	1.7237635684 $\frac{3}{2}$	0.9364585624 $\frac{6}{5}$
$x = \frac{10}{20}$	3.865611398 $\frac{60}{59}$	3.2935499949 $\frac{1}{0}$	2.427081765 $\frac{60}{59}$	1.9026654179 $\frac{4}{3}$	1.0346485814 $\frac{5}{4}$
$x = \frac{11}{20}$	4.3034319491 $\frac{1}{0}$	3.6718915229 $\frac{4}{3}$	2.6708042309 $\frac{2}{1}$	2.1277099514 $\frac{3}{2}$	1.1585447609 $\frac{7}{6}$
$x = \frac{12}{20}$	4.8554954150 $\frac{4}{3}$	4.1505439200 $\frac{8}{7}$	2.980330919 $\frac{70}{69}$	2.4147385321 $\frac{6}{5}$	1.3172231129 $\frac{1}{0}$
$x = \frac{13}{20}$	5.5635879106 $\frac{6}{5}$	4.7669853637 $\frac{2}{1}$	3.3808896921 $\frac{3}{2}$	2.7882562632 $\frac{8}{7}$	1.5248943491 $\frac{2}{1}$
$x = \frac{14}{20}$	6.4938903849 $\frac{3}{2}$	5.5809492409 $\frac{7}{6}$	3.9130376358 $\frac{2}{1}$	3.2881336089 $\frac{4}{3}$	1.8050435192 $\frac{4}{3}$
$x = \frac{15}{20}$	7.7579066424 $\frac{6}{5}$	6.6937819642 $\frac{2}{1}$	4.6462671073 $\frac{8}{7}$	3.9836756254 $\frac{9}{8}$	2.199332902 $\frac{70}{69}$
$x = \frac{16}{20}$	9.5601220318 $\frac{7}{6}$	8.2927802751 $\frac{9}{8}$	5.7104533496 $\frac{1}{0}$	5.0066579882 $\frac{2}{1}$	2.7891343721 $\frac{2}{1}$
$x = \frac{17}{20}$	12.324761019 $\frac{8}{7}$	10.76982817 $\frac{70}{69}$	7.3808175056 $\frac{9}{8}$	6.6421571066 $\frac{2}{1}$	3.756927921 $\frac{70}{69}$
$x = \frac{18}{20}$	17.124973743 $\frac{9}{5}$	15.125695754 $\frac{7}{2}$	10.37050025 $\frac{92}{88}$	9.647484442 $\frac{99}{59}$	5.61189375 $\frac{85}{78}$
$x = \frac{19}{20}$	27.9693 $\frac{472}{143}$	25.1402 $\frac{645}{252}$	17.4200 $\frac{687}{312}$	17.024 $\frac{8222}{7874}$	10.519 $\frac{511}{443}$

Tabelle 17: Abbildung durch g_x mit $\frac{1}{20} \leq x \leq \frac{19}{20}$ und $\frac{6}{5} \leq R \leq 2$

Die in Tabelle 17 enthaltenen numerischen Werte deuten wiederum auf Monotonie sowohl in Abhängigkeit von R als auch in Abhängigkeit von x hin. Es gilt

Satz 6.17 Sei $g(x)$ diejenige konforme Abbildung, die den Kreisring $A(1, R)$ schlicht konform auf das Gebiet D_x abbildet. Dann gilt für die Summe der reziproken Eigenwerte von D_x : $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2(x)}$ ist streng monoton wachsend für wachsendes $0 \leq x < 1$ bei festem R mit $R > 1$.

Der **Beweis** von Satz 6.17 folgt unmittelbar aus Satz 6.7 und der Darstellung der Fourierkoeffizienten von $|g'(\phi)|$ auf $|z| = R$: Es gilt $\alpha_0^{(x)} = \frac{1}{R}$ sowie $\alpha_n^{(x)} = \frac{2}{R}x^n$ für $n \geq 1$. Letztere sind streng monoton wachsend für wachsendes x . \square

Ergänzend zum Satz 6.8 ergibt sich auch folgender

Satz 6.18 Sei $A(1, R)$ ein Kreisring mit den Radien $r_1 = 1$ und $0 < r_2 = R < 1$. Dabei seien $C_1^{(0)} = \{z : |z| = 1\}$ und $C_2^{(0)} = \{z : |z| = R\}$. Dann gilt für die Summe der reziproken Eigenwerte von $A(1, R)$ zum Problem (6.1): Für wachsendes R ist $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$ streng monoton wachsend in R .

Der **Beweis** erfolgt ganz analog zum Beweis des Satzes 6.17. \square

Ferner gilt

Satz 6.19 Sei $g(x)$ diejenige konforme Abbildung, die den Kreisring $A(1, R)$ schlicht konform auf das Gebiet D_x abbildet. Dann gilt für die Summe der reziproken Eigenwerte von D_x : $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2(x)}$ ist streng monoton wachsend für wachsendes $R > 1$ bei festem x mit $0 \leq x < 1$.

Der **Beweis** von Satz 6.19 erfolgt mit Hilfssatz 6.7 in Verbindung mit Satz 6.7. \square

7 Ein Membranproblem mit gemischten Randbedingungen im zweifach zusammenhängenden Gebiet

7.1 Das Eigenwertproblem

Das folgende Eigenwertproblem ist ein weiteres gemischtes Eigenwertproblem und wird zunächst wiederum im zweifach zusammenhängenden Gebiet betrachtet. Sei D also ein zweifach zusammenhängendes Gebiet. Mit $\partial D = C_1 \cup C_2$, wobei C_1 und C_2 jeweils eine der Randkomponenten bilden, gelte

$$\begin{aligned} \Delta u + \lambda u &= 0 & \text{in } D \\ u &= 0 & \text{auf } C_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 & \text{auf } C_2. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Mit λ sei der Eigenwertparameter bezeichnet, mit $\frac{\partial}{\partial n}$ die Außennormale.

Das Problem (7.1) besitzt die Eigenwerte $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ mit den zugehörigen Eigenfunktionen u_1, u_2, u_3, \dots endlicher Vielfachheit. Das System der Eigenfunktionen ist vollständig und orthonormiert mit

$$\int_D u_i u_j \, dA = \delta_{ij}.$$

Während sich P. Duren und M. M. Schiffer vor allem mit der Robinschen Funktion und der Robin Kapazität beschäftigten, vgl. [17], [15], [18], [16], [19], finden sich bei R. S. Laugesen und C. Morpugo Resultate zu den Eigenwerten dieses gemischten Membranproblems, siehe auch 7.4 sowie [37] und [38].

7.2 Die Robinsche Funktion

Die Robinsche Funktion $R(z, \zeta)$ ist die sog. Greensche Funktion zur dritten potentialtheoretischen Randwertaufgabe bzw. die Fundamentallösung der dritten Randwertaufgabe, [50], [7], vgl. auch 2.2 oder 4.2.1 und kann als Verallgemeinerung der Greenschen Funktion zur ersten Randwertaufgabe verstanden werden. Die Robinsche Funktion besitzt ähnliche Invarianzeigenschaften wie die Greensche Funktion, vgl. [19], [18] und auch [50].

In einem Gebiet $\Omega \subset \tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ mit $\infty \in \Omega$ mit $A \subset \partial\Omega$ abgeschlossener Teil des Randes und $B = \partial\Omega \setminus A$ wird die Robinsche Funktion $R(z, \zeta)$ für festes ζ durch folgende Eigenschaften definiert:

- (1) $R(z, \zeta)$ ist harmonisch in Ω mit Ausnahme einer logarithmischen Singularität in ζ , d.h., $R(z, \zeta) + \log |z - \zeta|$ ist harmonisch in einer Umgebung von ζ , bzw. für $\zeta = \infty$ ist $R(z, \infty) - \log |z|$ harmonisch in einer Umgebung von ∞
- (2) $R(z, \zeta) = 0$ für $z \in A$
- (3) $\frac{\partial R}{\partial n}(z, \zeta) = 0$ für $z \in B$, wobei $\frac{\partial}{\partial n}$ die Normalableitung bezeichnet,

vgl. dazu [17], [15], [18], [16], [19], [7], [50].

Entsprechend der Randbedingungen wird A als Dirichlet-Rand und B als Neumann-Rand bezeichnet. Ist B leer, so liegt das Randwertproblem für die Greensche Funktion in Ω mit Pol in ∞ vor.

Aufgrund der Invarianzeigenschaften der Robinschen Funktion lässt sich die Definition der Robinschen Funktion in einfacher Weise durch Stürzung auf ein endliches Gebiet übertragen.

Ist $R(z, \zeta)$ die Robinsche Funktion des Gebietes D zum Eigenwertproblem (7.1), dann sind die Eigenwerte der Robinfunktion die Eigenwerte zu (7.1).

7.3 Die Eigenwerte und Eigenfunktionen im Kreisring

Sei $A(1, R)$ ein Kreisring mit den Radien $r_1 = 1$ und $r_2 = R$ mit $1 < R < \infty$. Dort werde das Eigenwertproblem (7.1) betrachtet. Auf dem äußeren Kreis $C_1^{(0)}$ gelte die Dirichletsche Randbedingung, auf dem inneren Kreis $C_2^{(0)}$ die Neumannsche Randbedingung. Dann besitzen die Eigenfunktionen von $A(1, R)$ die Gestalt

$$u_{m,n}^{(0)} = (A_{m,n}J_n(k_{m,n} \cdot r) + B_{m,n}Y_n(k_{m,n} \cdot r)) \begin{cases} \cos n\phi \\ \sin n\phi \end{cases}, \quad (7.2)$$

wobei J_n die Besselschen Funktionen erster Art bezeichnet und Y_n die Besselschen Funktionen zweiter Art, siehe [44], [37], [7].

Die Konstanten $A_{m,n}$, $B_{m,n}$ und $k_{m,n}$ erhält man aus den Randbedingungen sowie der Normierungsbedingung $\int_{A(1,R)} u_{m,n}^{(0)2} dA = 1$. Die Eigenwerte sind gegeben durch $\sqrt{\lambda_{m,n}^{(0)}} = k_{m,n}$, welche die Nullstellen der Besselschen Funktionen bezeichnen.

7.4 Eine endliche Summe

7.4.1 Variationscharakterisierung der Eigenwerte

Sei nun das Eigenwertproblem (7.1) gegeben. $R(z, \zeta)$ ist die Robinsche Funktion im Kreisring $A(1, R)$ und es gilt die Reihendarstellung

$$R(z, \zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{u_j^{(0)}(z)u_j^{(0)}(\zeta)}{\lambda_j^{(0)}},$$

wobei $u_j^{(0)}$ die Eigenfunktionen und $\lambda_j^{(0)}$ die Eigenwerte von $A(1, R)$ bezeichnet.

Ist \tilde{f} die schlicht konforme Abbildung des Kreisringes $A(1, R)$ auf das Gebiet D , dann erhält man die Eigenwerte λ_j und Eigenfunktionen u_j von D aus der Integralgleichung

$$u_j(z) = \lambda_j \int_{A(1,R)} R(z, \zeta) |f'(\zeta)|^2 u_j(\zeta) dA_\zeta.$$

Aus dieser Integralgleichung erhält man in einfacher Weise eine Variationscharakterisierung für die Eigenwerte des Problems (7.1). Es gilt

Hilfssatz 7.1 Gegeben sei das Problem (7.1). Sei f diejenige konforme Abbildung, die das Innere des Kreisringes $A(1, R)$ schlicht konform auf das Gebiet D abbildet. Dann gilt für den k -ten Eigenwert von (7.1)

$$\frac{1}{\lambda_k} = \max_h \int_{A(1,R)} \int_{A(1,R)} R(z, \zeta) |f'(z)|^2 |f'(\zeta)|^2 h(z) h(\zeta) dA_z dA_\zeta \quad (7.3)$$

mit $h \in L_2(A(1, R))$ und den Nebenbedingungen $h \equiv 0$ auf $C_1^{(0)}$, $\int_{A(1,R)} |f'(z)|^2 h^2(z) dA_z = 1$ sowie $\int_{A(1,R)} |f'(z)|^2 h(z) \cdot u_j(z) dA_z = 0$, $j = 1, 2, \dots, k-1$; wobei $k \geq 1$. Mit u_j seien die in den Kreisring überpflanzten Eigenfunktionen des Gebietes D bezeichnet.

Analog zu den vorangehenden Kapiteln gilt eine von den Eigenfunktionen unabhängige Variationscharakterisierung der Eigenwerte:

Hilfssatz 7.2 Für die Eigenwerte des Problems 7.1 gilt:

$$\frac{1}{\lambda_k} = \max_{L_k} \min \int_{A(1,R)} \int_{A(1,R)} R(z, \zeta) |f'(z)|^2 |f'(\zeta)|^2 h(z) h(\zeta) dA_z dA_\zeta.$$

Dabei wird das Maximum über alle k -dimensionalen Unterräume $L_k \subset L_2(A(1, R))$ gebildet, wobei für alle Funktionen $h \in L_k$ gilt: $h \equiv 0$ auf $C_1^{(0)}$. Das Minimum wird über alle Funktionen $h \in L_k$, welche der Nebenbedingung $\int_{A(1,R)} h^2(z) |f'(z)|^2 dA_z = 1$ genügen, gebildet.

Darüberhinaus gilt für die Summe der Reziproken der ersten n Eigenwerte von (7.1) folgender

Satz 7.1 Für die Eigenwerte des Problems (7.1) gilt

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \geq \sum_{j=1}^n \int_{A(1,R)} \int_{A(1,R)} R(z, \zeta) |f'(z)|^2 |f'(\zeta)|^2 v_j(z) v_j(\zeta) dA_z dA_\zeta \quad (7.4)$$

unter den Nebenbedingungen $\int_{A(1,R)} |f'(z)|^2 v_i(z) v_j(z) dA_z = \delta_{ij}$ mit $i, j = 1, \dots, n$ und $v_j \in L_2(A(1, R))$ sowie $v \equiv 0$ auf $C_1^{(0)}$.

7.4.2 Bezeichnungen und Definitionen

Aufgrund der Invarianz der Robinschen Funktion gelten die Bezeichnungen $w_j = u_j^{(0)}$, $j = 1, 2, 3, \dots$, vgl. auch 4.2.3.

Die Koeffizienten $b_{j,k}$ seien gegeben durch

$$b_{j,k} = \int_{A(1,R)} w_k(z) v_j(z) |f'(z)|^2 dA_z = \int_{A(1,R)} u_j^{(0)}(z) v_j(z) |f'(z)|^2 dA_z. \quad (7.5)$$

Die Ansatzfunktionen v_n ergeben sich mit Hilfe der Nebenbedingungen $\int_{A(1,R)} |f'(z)|^2 \cdot v_i(z)v_j(z) dA_z = \delta_{ij}$ aus den Funktionen $w_j = u_j^{(0)}$. Es gilt

$$v_n(z) = \sum_{j=1}^n c_{n,j} u_j^{(0)}, \quad n \geq 1. \quad (7.6)$$

Die Koeffizienten $d_{i,j}$ erhält man aus

$$d_{i,j} = \int_{A(1,R)} |f'(z)|^2 u_i^{(0)}(z) u_j^{(0)}(z) dA_z. \quad (7.7)$$

7.4.3 Beweis der Ungleichung

Auf dem bereits in den vorangehenden Kapiteln vorgestellten Weg gelangt man zum folgenden Zwischenergebnis:

Hilfssatz 7.3 *Mit den unter 7.4.2 gewählten Bezeichnungen gilt*

$$\sum_{j=2}^k b_{j,k}^2 = d_{k,k}.$$

Man erhält

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \geq \sum_{j=1}^n \frac{d_{j,j}}{\lambda_j^{(0)}}. \quad (7.8)$$

Sei f diejenige konforme Abbildung, die den Kreisring $A(1, R)$ auf das Gebiet D abbildet mit $f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j z^j$ und $a_1 = 1$.

Folgt man nun den Rechnungen (5.12), (5.13) in 5.2.4, erhält man für eine radiale Eigenfunktion $u_j^{(0)}$

$$d_{j,j} \geq \int_{A(1,R)} u_j^{(0)2} dA_z = 1 \quad (7.9)$$

sowie für zum selben Eigenwert gehörende nichtradiale Eigenfunktionen $u_j^{(0)}, u_{j+1}^{(0)}$

$$d_{j,j} + d_{j+1,j+1} \geq \int_{A(1,R)} (u_j^{(0)2} + u_{j+1}^{(0)2}) dA_z = 2. \quad (7.10)$$

Bei geeigneter Nummerierung der Eigenwerte (vgl. 2.3.3) erhält man folgenden

Satz 7.2 *Sei D ein zweifach zusammenhängendes, zum Kreisring $A(1, R)$ konform äquivalentes Gebiet. Sei $f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j z^j$ diejenige Abbildung, die den Kreisring schlicht konform auf das Gebiet D abbildet. Dann gilt für die Eigenwerte von D für beliebiges n*

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \geq |a_1|^2 \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j^{(0)}},$$

wobei $\lambda_j^{(0)}$ die Eigenwerte von $A(1, R)$ bezeichnet.

Wiederum kann gefolgert werden, vgl. Satz 4.4

Satz 7.3 Sei $\Phi(x)$ für $x \geq 0$ eine konvexe, monoton wachsende Funktion. Sei D ein zweifach zusammenhängendes, zum Kreisring $A(1, R)$ konform äquivalentes Gebiet. Sei $f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j z^j$ diejenige Abbildung, die den Kreisring schlicht konform auf das Gebiet D abbildet. Dann gilt für die Eigenwerte von D für beliebiges n

$$\sum_{j=1}^n \Phi\left(\frac{1}{\lambda_j}\right) \geq \sum_{j=1}^n \Phi\left(|a_1|^2 \frac{1}{\lambda_j^{(0)}}\right)$$

wobei $\lambda_j^{(0)}$ die Eigenwerte von $A(1, R)$ bezeichnet.

8 Gemischte Stekloffprobleme im einfach zusammenhängenden Gebiet

8.1 Die Eigenwertprobleme

Im folgenden werden die Eigenwertprobleme

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } D \\ u &= 0 && \text{auf } C_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \lambda u && \text{auf } C_2 \end{aligned} \quad (8.1)$$

und

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0 && \text{in } D \\ \frac{\partial v}{\partial n} &= 0 && \text{auf } C_1 \\ \frac{\partial v}{\partial n} &= \mu v && \text{auf } C_2 \end{aligned} \quad (8.2)$$

im einfach zusammenhängenden Gebiet betrachtet, wobei mit λ bzw. μ wiederum der Eigenwertparameter, mit $\frac{\partial}{\partial n}$ die Außennormale bezeichnet sei. Der Rand von D zerfalle in die beiden disjunkten Randkomponenten C_1 und C_2 . Die Länge der Randkurve C_2 sei beschränkt.

Während für (8.1) λ_1 stets positiv ist, ist der erste Eigenwert von (8.2) $\mu_0 = 0$.

Das Problem (8.1) wurde z.B. von B. Dittmar und R. Kühnau in [14] behandelt. Am Beispiel des entlang der reellen Achse von $0 < x < 1$ bis 1 aufgeschlitzten Einheitskreises wird in [14] eine Methode zur Konstruktion der Eigenfunktion vorgestellt und ein Monotonieergebnis für die Eigenwerte der beschriebenen Gebiete nachgewiesen.

Das sog. „Sloshing problem“ (8.2) ist ein lineares Eigenwertproblem, welches die Schwingungen der freien Oberfläche einer idealen, der Gravitation unterworfenen Flüssigkeit beschreibt. Zahlreiche numerische Resultate dazu finden sich in [22], [23] und [36].

Ein bekanntes Resultat ist, dass die Eigenwerte des sog. „Ice-fishing-problems“ universelle obere Schranken darstellen: Besitzen zwei Behälter dieselbe freie Oberfläche und beinhaltet ein Gefäß das andere, so besitzt der größere Behälter die größeren „Sloshing-Frequenzen“. Das „Ice-fishing-problem“ wurde ausführlich von Henrici, Troesch und Wuytack behandelt.

8.2 Endliche Summen

8.2.1 Problematik

Im Unterschied zu den bislang vorgestellten Eigenwertproblemen gestaltet sich für (8.1) und (8.2) die Suche nach einem möglichen Extremalgebiet für das Bestehen einer Un-

gleichung analog zu der in Satz 4.3 von Pólya und Schiffer als schwierig. Während man im einfach zusammenhängenden Gebiet intuitiv den Kreis als Extremalgebiet vermutet, denkt man im zweifach zusammenhängenden Fall an den Kreisring.

Die in den behandelten Eigenwertproblemen jeweils auftretenden Eigenfunktionen waren entweder radial oder je zwei zum selben Eigenwert gehörende Eigenfunktionen u_j und u_{j+1} ergänzten sich aufgrund der Eigenschaften der Sinus- bzw. Kosinusfunktion zu einem radialen Ausdruck $u_j^2 + u_{j+1}^2$. Diese Eigenschaft der Eigenfunktionen des jeweiligen Extremalgebietes war wesentlich für die Beweise der Sätze.

Man überlegt sich leicht, dass für die Eigenwertprobleme (8.1) und (8.2) im Kreis aufgrund der Randbedingungen keine Eigenfunktionen mit den genannten Eigenschaften auftreten können.

Natürlich muss für das genannte Problem kein Extremalgebiet existieren, aber angenommen, es existiert ein Extremalgebiet, dann kann eine einzelne Normierungsgröße (maximaler konformer Radius, Länge der Randkurve) zur Charakterisierung nicht mehr ausreichend sein. Sei D z.B. der Einheitskreis, dann beschreiben

$$(1) \quad C_1 = \{z = e^{i\phi}, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\}$$

$$(2) \quad C_1 = \{z = e^{i\phi}, 0 \leq \phi \leq \pi\}$$

zwei gänzlich unterschiedliche Probleme, obwohl das gleiche Gebiet betrachtet wird.

8.2.2 Ein Lösungssystem für (8.2)

Aufgrund der Anwendung in der Flüssigkeitsmechanik wird (8.2) in der Literatur i.a. in Gebieten D betrachtet, welche sich im 3. bzw. 4. Quadranten befinden und deren Randkurve C_2 auf der reellen Achse liegt. Die bekannten exakten Lösungen wurden 1983 in [22] zusammengestellt.

Lässt man andere Gebiete zu, so ist auch das folgende ein Lösungssystem zu (8.2), siehe auch [52].

Satz 8.1 Sei $H = \{z : |z| < 1, \Im[z] > 0\}$ der Halbkreis mit den Randkomponenten $C_1 = \{z \in \mathbb{R}, -1 \leq z \leq 1\}$ und $C_2 = \{z : |z| = 1, \Im[z] > 0\}$. Dann bilden die Eigenfunktionen $v_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ und $v_n(r, \phi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot r^n \cos n\phi$ mit den zugehörigen Eigenwerten $\mu_0 = 0$ und $\mu_n = n, n = 1, 2, \dots$ das vollständige Lösungssystem von Eigenfunktionen und Eigenwerten des Halbkreises H zum Eigenwertproblem (8.2).

Beweis. Man rechnet leicht nach, dass die in Satz 8.1 genannten Eigenwerte und Eigenfunktionen tatsächlich Eigenwerte und Eigenfunktionen des Halbkreises H für (8.2) sind. Bleibt zu zeigen: Das System $S = \{\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos n\phi\}_{n=1}^{\infty}$ ist vollständig und orthonormiert im Raum $L_2(0, \pi)$.

Es ist bekannt: Das System $T = \{\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 2j\phi, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin 2j\phi\}_{j=1}^{\infty}$ ist ein vollständiges Orthonormalssystem im Raum $L_2(0, \pi)$. D.h., jede Funktion $f \in L_2(0, \pi)$ lässt sich mit Hilfe des Systems T in eine Fourierreihe entwickeln, wobei die zugehörige Fourierreihe im Mittel gegen f konvergiert.

Das System S ist genau dann vollständig, wenn für jede Funktion $f \in L_2(0, \pi)$ die Parsevalsche Gleichung besteht, d.h., wenn gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^{\pi} f(\phi) \cdot v_k(\phi) d\phi \right)^2 = \int_0^{\pi} f^2(\phi) d\phi.$$

Da mit dem Funktionensystem T bereits ein vollständiges Orthonormalsystem bekannt ist, genügt es zu zeigen, dass jede Funktion des Systems T mit Hilfe der Funktionen des Systems S dargestellt werden kann, so dass die Parsevalsche Gleichung gilt. Für die Konstante sowie die Funktionen $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 2j\phi$ ist dies offensichtlich.

Ferner gilt

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin 2j\phi)^2 d\phi = 1$$

für beliebiges $j = 1, 2, \dots$. Dies entspricht der rechten Seite der Parsevalschen Gleichung. Andererseits gilt auch

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{\pi} \cos n\phi \sin 2j\phi d\phi \right)^2 &= \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{\pi} \cos(2n-1)\phi \sin 2j\phi d\phi \right)^2 \\ &= \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2j-2n+1} + \frac{1}{2j+2n-1} \right)^2 \\ &= \frac{64}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j^2}{(4j^2 - (2n+1)^2)^2} \\ &= 1, \end{aligned}$$

vgl. [47, S.689/21]. Man erhält die linke Seite der Parsevalsche Gleichung.

Damit lässt sich jede Funktion des Systems T nach den Funktionen des Systems S entwickeln, so dass die Parsevalsche Gleichung besteht. Damit ist das System S vollständig. Es gilt Satz 8.1. \square

Ein ähnliches, zum Eigenwertproblem (8.1) im Halbkreis H gehörendes Lösungssystem besteht aus den Eigenfunktionen $u_j(r, \phi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} r^j \sin j\phi$ mit den zugehörigen Eigenwerten $\lambda_j = j$, $j = 1, 2, \dots$, [14].

Im Folgenden seien die Eigenwerte und Eigenfunktionen zum Halbkreis H mit $\lambda_j^{(\pi)}$ und $u_j^{(\pi)}$ bzw. $\mu_j^{(\pi)}$ und $v_j^{(\pi)}$ bezeichnet. Entsprechendes gelte für die Randkomponenten des Halbkreises, diese seien mit $C_1^{(\pi)}$ und $C_2^{(\pi)}$ bezeichnet.

8.2.3 Die Neumannsche Funktion im Halbkreis zum Eigenwertproblem (8.2)

Mit $z = re^{i\phi}$ sowie $\zeta = se^{i\theta}$ gilt auf der Randkomponente $C_2^{(\pi)}$ des Halbkreises, d.h. für $|z| = |\zeta| = 1$, für die zum Eigenwertproblem (8.2) gehörende Neumannsche Funktion

$$N_H(\theta, \phi) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta \cos n\phi}{n}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(\theta - \phi)}{n} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(\theta + \phi)}{n} \\
&= -\frac{1}{\pi} \ln \left| 2 \sin \frac{\theta - \phi}{2} \right| - \frac{1}{\pi} \ln \left| 2 \sin \frac{\theta + \phi}{2} \right| \\
&= -\frac{1}{\pi} \ln \left| 4 \sin \frac{\theta - \phi}{2} \sin \frac{\theta + \phi}{2} \right| \\
&= -\frac{1}{\pi} \ln |2(\cos \theta - \cos \phi)|
\end{aligned}$$

In einfacher Weise errechnet man für die andere Randkomponente, dass für $\theta = \phi = 0$ bzw. für $\theta = \phi = \pi$ gilt

$$N_H(r, s) = -\frac{2}{\pi} \ln |1 - rs|$$

und für $\theta = 0$ und $\phi = \pi$ bzw. für $\theta = \pi$ und $\phi = 0$

$$N_H(r, s) = \frac{2}{\pi} \ln |1 - rs|.$$

Demgegenüber steht die Robinsche Funktion im Halbkreis. Auf $C_2^{(\pi)}$ gilt

$$R(\theta, \phi) = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{e^{-i\phi} - e^{i\theta}}{e^{i\phi} - e^{i\theta}} \right|,$$

vgl. [14] mit der Robinschen Funktion im geschlitzten Einheitskreis.

8.2.4 Variationscharakterisierung der Eigenwerte zu (8.1) und (8.2)

Mit Hilfe der Neumannschen Funktion des Halbkreises bzw. der Robinfunktion erfolgt nun eine Variationscharakterisierung der Eigenwerte der Probleme (8.1) und (8.2). Zunächst gelten

Hilfssatz 8.1 *Gegeben sei das Problem (8.1) im Gebiet D . Sei f diejenige konforme Abbildung, die den Halbkreis H schlicht konform auf das Gebiet D abbildet. Dabei bilde f $C_1^{(\pi)}$ auf C_1 und $C_2^{(\pi)}$ auf C_2 ab. Dann gilt für den k -ten Eigenwert von (8.1)*

$$\frac{1}{\lambda_k} = \max_h \int_{C_2^{(\pi)}} \int_{C_2^{(\pi)}} R(z, \zeta) |f'(z)| |f'(\zeta)| h(z) h(\zeta) ds_z ds_\zeta \quad (8.3)$$

mit $h \in L_2(C_2^{(\pi)})$ und $h \equiv 0$ auf $C_1^{(\pi)}$ sowie den Nebenbedingungen $\int_{C_2^{(\pi)}} |f'(z)| h^2(z) ds_z = 1$ und $\int_{C_2^{(\pi)}} |f'(z)| h(z) \cdot u_j(z) ds_z = 0$, $j = 1, 2, \dots, k-1$; wobei $k \geq 1$. Mit u_j seien die in den Halbkreis H überpflanzten Eigenfunktionen des Gebietes D bezeichnet.

und

Hilfssatz 8.2 *Gegeben sei das Problem (8.2) im Gebiet D . Sei f diejenige konforme Abbildung, die den Halbkreis H schlicht konform auf das Gebiet D abbildet. Dabei bilde*

$f \in C_1^{(\pi)}$ auf C_1 und $C_2^{(\pi)}$ auf C_2 ab. Dann gilt für den k -ten nichttrivialen Eigenwert von (8.2)

$$\frac{1}{\mu_k} = \max_h \int_{C_2^{(\pi)}} \int_{C_2^{(\pi)}} N_D(z, \zeta) |f'(z)| |f'(\zeta)| h(z) h(\zeta) ds_z ds_\zeta \quad (8.4)$$

mit $h \in L_2(C_2^{(\pi)})$ und $\int_{C_2^{(\pi)}} h(z) |f'(z)| ds_z = 0$ und den Nebenbedingungen $\int_{C_2^{(\pi)}} |f'(z)| h^2(z) ds_z = 1$ sowie $\int_{C_2^{(\pi)}} |f'(z)| h(z) \cdot v_j(z) ds_z = 0$, $j = 1, 2, \dots, k-1$; wobei $k \geq 1$. Mit v_j seien die in den Halbkreis H überpflanzten Eigenfunktionen des Gebietes D bezeichnet.

Die Neumannsche Funktion N_D des Gebietes D besitzt dabei die Darstellung

$$N_D(z, \zeta) = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{w_j(z) w_j(\zeta)}{\mu_j^{(\pi)}} \quad \text{mit} \\ w_j(z) = v_j^{(\pi)}(z) - \frac{\int_{C_2^{(\pi)}} v_j^{(\pi)}(z) |f'(z)| ds_z}{\int_{C_2^{(\pi)}} |f'(z)| ds_z} \quad (8.5)$$

Ferner gelten die von den Eigenfunktionen unabhängigen Variationscharakterisierungen für die Probleme (8.1) und (8.2):

Hilfssatz 8.3 Für die Eigenwerte des Problems (8.1) gilt:

$$\frac{1}{\lambda_k} = \max_{L_k} \min \int_{C_2^{(\pi)}} \int_{C_2^{(\pi)}} R(z, \zeta) |f'(z)| h(z) |f'(\zeta)| h(\zeta) ds_z ds_\zeta,$$

wobei das Maximum über alle k -dimensionalen Unterräume $L_k \subset L_2(C_2^{(\pi)})$ gebildet wird. Für jede Funktion $v \in L_k$ gelte $v \equiv 0$ auf $C_1^{(\pi)}$. Das Minimum wird über alle Funktionen $h \in L_k$, welche der Nebenbedingung $\int_{C_2^{(\pi)}} h^2(z) |f'(z)| ds_z = 1$ genügen, gebildet.

und

Hilfssatz 8.4 Für den k -ten nichttrivialen Eigenwert des Problems (8.2) gilt:

$$\frac{1}{\mu_k} = \max_{L_k} \min \int_{C_2^{(\pi)}} \int_{C_2^{(\pi)}} N_D(z, \zeta) |f'(z)| h(z) |f'(\zeta)| h(\zeta) ds_z ds_\zeta,$$

wobei das Maximum über alle k -dimensionalen Unterräume $L_k \subset L_2(C_2^{(\pi)})$ gebildet wird. Für jede Funktion $u \in L_k$ gelte $\int_{C_2^{(\pi)}} u(z) |f'(z)| ds_z = 0$. Das Minimum wird über alle Funktionen $h \in L_k$, welche der Nebenbedingung $\int_{C_2^{(\pi)}} h^2(z) |f'(z)| ds_z = 1$ genügen, gebildet.

Schließlich gelten für die Summen der ersten n nichttrivialen reziproken Eigenwerte von (8.1) und (8.2)

Satz 8.2 Für die Eigenwerte des Problems (6.1) gilt

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \geq \sum_{j=1}^n \int_{C_2^{(\pi)}} \int_{C_2^{(\pi)}} R(z, \zeta) |f'(z)| |f'(\zeta)| v_j(z) v_j(\zeta) ds_z ds_\zeta \quad (8.6)$$

mit den Nebenbedingungen $v \equiv 0$ auf $C_1^{(\pi)}$ sowie $\int_{C_2^{(\pi)}} |f'(z)| v_i(z) v_j(z) ds_z = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$, $v_j \in L_2(C_2^{(\pi)})$.

und

Satz 8.3 Für die Eigenwerte des Problems (6.2) gilt

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\mu_j} \geq \sum_{j=1}^n \int_{C_2^{(\pi)}} \int_{C_2^{(\pi)}} N_D(z, \zeta) |f'(z)| |f'(\zeta)| u_j(z) u_j(\zeta) ds_z ds_\zeta \quad (8.7)$$

mit den Nebenbedingungen $\int_{C_2^{(\pi)}} u_j(z) |f'(z)| ds_z = 0$ sowie $\int_{C_2^{(\pi)}} |f'(z)| u_i(z) u_j(z) ds_z = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$, $v_j \in L_2(C_2^{(\pi)})$.

8.2.5 Einige Bezeichnungen

Nachfolgend werden in Anlehnung an vorangehende Kapitel einige Bezeichnungen für die Behandlung von (8.1) und (8.2) eingeführt.

Zunächst gelte (abweichend von (8.5)) $w_j = u_j^{(\pi)}$ sowie

$$\tilde{w}_j(z) = v_j^{(\pi)}(z) - \frac{\int_{C_2^{(\pi)}} v_j^{(\pi)}(z) |f'(z)| ds_z}{\int_{C_2^{(\pi)}} |f'(z)| ds_z} .$$

Die Koeffizienten $b_{j,k}$ und $\tilde{b}_{j,k}$ besitzen die Gestalt

$$\begin{aligned} b_{j,k} &= \int_{C_2^{(\pi)}} w_k(z) v_j(z) |f'(z)| ds_z \\ &= \int_{C_2^{(\pi)}} u_k^{(\pi)} v_j |f'(z)| ds_z \quad \text{sowie} \\ \tilde{b}_{j,k} &= \int_{C_2^{(\pi)}} \tilde{w}_k(z) \tilde{v}_j(z) |f'(z)| ds_z . \end{aligned}$$

Die Ansatzfunktionen v_n und \tilde{v}_n erhält man durch Orthonormierung aus den Funktionen w_j bzw. \tilde{w}_j . Es gilt

$$v_n = \sum_{j=1}^n c_{n,j} w_j \quad \text{für } n \geq 1$$

mit den Nebenbedingungen $\int_{C_2^{(\pi)}} |f'| v_i v_j ds = \delta_{ij}$ für $i, j = 1, 2, \dots, n$ sowie

$$\tilde{v}_n = \sum_{j=1}^n \tilde{c}_{n,j} \tilde{w}_j \quad \text{für } n \geq 1$$

mit den Nebenbedingungen $\int_{C_2^{(\pi)}} |f'| \tilde{v}_i \tilde{v}_j ds = \delta_{ij}$ für $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Schließlich gelte für **die Koeffizienten** $d_{i,j}$ bzw. $\tilde{d}_{i,j}$

$$d_{i,j} = \int_{C_2^{(\pi)}} |f'| w_i w_j ds \quad \text{und}$$

$$\tilde{d}_{i,j} = \int_{C_2^{(\pi)}} |f'| \tilde{w}_i \tilde{w}_j ds.$$

Die Abbildungsfunktion genüge auf der Randkomponente $C_2^{(\pi)}$ der Darstellung

$$|f'(\phi)| = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\phi.$$

8.2.6 Beweis einer Ungleichung

Auf gleichem Wege wie in den vorangehenden Kapiteln erhält man

Hilfssatz 8.5 *Mit den unter 8.2.5 gewählten Bezeichnungen gilt*

$$\sum_{j=1}^k b_{j,k}^2 = d_{k,k}.$$

sowie

Hilfssatz 8.6 *Mit den unter 8.2.5 gewählten Bezeichnungen gilt*

$$\sum_{j=1}^k \tilde{b}_{j,k}^2 = \tilde{d}_{k,k}.$$

Entsprechend gilt auch

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \geq \sum_{j=1}^n \frac{d_{j,j}}{\lambda_j^{(\pi)}} \quad (8.8)$$

sowie

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\mu_j} \geq \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{d}_{j,j}}{\mu_j^{(\pi)}}. \quad (8.9)$$

Eine geometrische Abschätzung der Koeffizienten $d_{j,j}$, also z.B. eine Abhängigkeit der Koeffizienten vom maximalen konformen Radius, gelingt in (8.8) und (8.9) nicht. Dies liegt

an der bereits in 8.2.1 angesprochenen Problematik. Deshalb werden die Probleme (8.1) und (8.2) nun im Zusammenhang betrachtet. Offensichtlich gilt

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{\lambda_j} + \frac{1}{\mu_j} \right) \geq \sum_{j=1}^n \left(\frac{d_{j,j}}{\lambda_j^{(\pi)}} + \frac{\tilde{d}_{j,j}}{\mu_j^{(\pi)}} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} (d_{j,j} + \tilde{d}_{j,j})$$

für beliebiges $n \geq 1$.

Zu untersuchen ist nun der Ausdruck $(d_{j,j} + \tilde{d}_{j,j})$. Man erhält

$$d_{j,j} + \tilde{d}_{j,j} = \alpha_0 - \frac{\alpha_j^2}{\alpha_0}. \quad (8.10)$$

Man beachte jedoch, dass Hilfssatz 2.4 bzw. (2.29) auf (8.10) ohne weitere Bedingungen nicht anwendbar ist, da die in (8.10) auftretenden Fourierkoeffizienten im Gegensatz zu Hilfssatz 2.4 Fourierkoeffizienten zu einer Entwicklung auf dem Intervall $(0, \pi)$ sind.

Sei $|f'(\phi)| = \frac{\alpha_0^{(2\pi)}}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j^{(2\pi)} \cos j\phi + \beta_j^{(2\pi)} \sin j\phi)$ die Entwicklung von $|f'(\phi)|$ auf $(0, 2\pi)$. Dann gilt z.B. für den $(2j+1)$ -ten Fourierkoeffizient $\alpha_{2j+1}^{(\pi)}$ der Entwicklung auf $(0, \pi)$

$$\alpha_{2j+1}^{(\pi)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |f'(\phi)| \cos(2j+1)\phi \, d\phi = \alpha_{2j+1}^{(2\pi)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{2n-2j-1} + \frac{2}{2n+2j+1} \right) \beta_n^{(2\pi)};$$

d.h., die Entwicklungskoeffizienten $\alpha_j^{(\pi)}$ und $\alpha_j^{(2\pi)}$ sind i.a. verschieden. Nicht jede schlicht konforme Abbildung des Halbkreises H ist zudem eine schlicht konforme Abbildung des Einheitskreises, d.h., nicht für jede Abbildung des Halbkreises f existiert eine Entwicklung von $|f'(\phi)|$ auf dem Intervall $(0, 2\pi)$.

Soll Hilfssatz 2.4 dennoch auf (8.10) angewendet werden, so muss eine Einschränkung an die Abbildungsfunktion gemacht werden. Es ist erforderlich, dass die verwendete Abbildung eine schlicht konforme Abbildung des Einheitskreises ist mit verschwindenden Fourierkoeffizienten $\beta_j^{(2\pi)}$. Die Abbildungen mit den geforderten Eigenschaften sind genau die schlicht konformen Abbildungen des Einheitskreises, welche nur reelle Koeffizienten a_j besitzen, $j = 0, 1, 2, \dots$,

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

Die Bildgebiete des Halbkreises H sind genau diejenigen einfach zusammenhängenden Gebiete D der oberen bzw. unteren Halbebene, deren Randkomponente C_1 auf der reellen Achse liegt.

Diese Überlegungen führen zu folgendem

Satz 8.4 Sei D ein einfach zusammenhängendes Gebiet der oberen bzw. unteren Halbebene, wobei die Randkomponente C_1 auf der reellen Achse liegt. Sei $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$,

$a_j \in \mathbb{R}$, $j \geq 0$, diejenige schlicht konforme Abbildung, die den Halbkreis H auf das Gebiet D abbildet mit entsprechendem Ränderübergang. Dann gilt für die Eigenwerte der Probleme (8.1) und (8.2)

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{\lambda_j} + \frac{1}{\mu_j} \right) \geq |a_1| \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{\lambda_j^{(\pi)}} + \frac{1}{\mu_j^{(\pi)}} \right)$$

für beliebiges $n \geq 1$. Dabei bezeichnen $\lambda_j^{(\pi)}$ und $\mu_j^{(\pi)}$ die Eigenwerte des Halbkreises zu (8.1) und (8.2). Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn D ein Halbkreis ist.

Beweis. Mit den Einschränkungen an das Bildgebiet bzw. an die Abbildungsfunktion f des Halbkreises H ist f eine schlicht konforme Abbildung des Einheitskreises. Dies ist eine unmittelbare Folgerung des Spiegelungsprinzips. Die Entwicklungen von $|f'(\phi)|$ auf den Intervallen $(0, \pi)$ und $(0, 2\pi)$ stimmen überein. Damit ist Hilfssatz 2.4 auf (8.10) anwendbar. Es gilt

$$d_{j,j} + \tilde{d}_{j,j} \geq 2|a_0|.$$

Damit folgt die Behauptung des Satzes 8.4. □

Eine unmittelbare Folgerung des Satzes 8.4 ist

Satz 8.5 Sei D ein einfach zusammenhängendes Gebiet der oberen bzw. unteren Halbebene, wobei die Randkomponente C_1 auf der reellen Achse liegt. Sei $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$, $a_j \in \mathbb{R}$, $j \geq 0$, diejenige schlicht konforme Abbildung, die den Halbkreis H auf das Gebiet D mit entsprechendem Ränderübergang abbildet. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, fest. Dann gilt mindestens eine der beiden Ungleichungen

$$(1) \quad \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \geq |a_1| \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j^{(\pi)}}$$

$$(2) \quad \sum_{j=1}^n \frac{1}{\mu_j} \geq |a_1| \sum_{j=1}^n \frac{1}{\mu_j^{(\pi)}}.$$

Mit $\lambda_j^{(\pi)}$ und $\mu_j^{(\pi)}$ seien dabei die Eigenwerte des Halbkreises zu (8.1) und (8.2) bezeichnet.

Beweis. Angenommen, beide Ungleichungen wären falsch, würde dies zu einem Widerspruch zu Satz 8.4 führen. Damit gilt Satz 8.5. □

In diesem Sinne ist der Halbkreis H innerhalb der durch Satz 8.4 bzw. Satz 8.5 definierten Klasse einfach zusammenhängender Gebiete ein Extremalgebiet.

8.2.7 Eine Fragestellung

Wie bereits in 4.1 erwähnt, wurde von L. Friedlander eine Ungleichung zwischen den Eigenwerten der festen und der freien Membran bewiesen, vgl. (4.6). Es liegt nahe, an dieser Stelle nach einer analogen Aussage für die Eigenwerte von (8.1) und (8.2) zu fragen.

Gilt

$$\mu_k \geq \lambda_k \quad (8.11)$$

für beliebiges $k \geq 1$ in hinreichend glatt berandetem Gebiet D ?

In seinem Beweis [24] benutzt L. Friedlander den Dirichlet-Neumann-Operator, welcher die Werte einer Funktion auf dem Rande eines Gebietes Ω auf deren Normalableitung auf dem Rand abbildet. Die Untersuchung der Eigenschaften dieses Operators und die Untersuchung dessen Eigenwerte führen zum Ergebnis (4.6), vgl. auch [53], [35], [49] und [39].

Zwar wurde versucht, diese Beweismethode auch auf die Fragestellung (8.11) anzuwenden; ein Beweis der Ungleichung mit Hilfe der Operatortheorie gelang jedoch nicht. Auch mit funktionentheoretischen Methoden konnte die Ungleichung (8.11) nicht bestätigt werden.

Ein Bestehen der Ungleichung (8.11) würde das generelle Bestehen der Ungleichung (2) in Satz 8.5 nach sich ziehen und somit eine Verschärfung der Aussage des Satzes 8.5 bedeuten.

Die weiteren numerischen Resultate deuten jedoch darauf hin, dass eine solche Ungleichung nicht besteht.

8.2.8 Weitere Lösungssysteme

Sei $S^{(\Phi)}$ der Sektor des Einheitskreises mit $S^{(\Phi)} = \{z = re^{i\phi} : |z| < 1, 0 < \phi < \Phi\}$ mit $0 < \Phi \leq 2\pi$. Für die Randkomponente $C_2^{(\Phi)}$ gelte: $C_2^{(\Phi)} = \{z = e^{i\phi} : 0 < \phi < \Phi\}$; der übrige Teil des Randes sei $C_1^{(\Phi)}$.

Mit dieser Definition gelten folgende Sätze:

Satz 8.6 *Im Sektor $S^{(\Phi)}$ besitzt das Eigenwertproblem (8.1) das vollständige Lösungssystem $u_n^{(\Phi)} = \sqrt{\frac{2}{\Phi}} r^{\frac{\pi n}{\Phi}} \sin \frac{\pi}{\Phi} n\phi$ mit den zugehörigen Eigenwerten $\lambda_n^{(\Phi)} = \frac{\pi n}{\Phi}$ mit $n = 1, 2, \dots$*

.

sowie

Satz 8.7 *Im Sektor $S^{(\Phi)}$ besitzt das Eigenwertproblem (8.2) das vollständige Lösungssystem $v_0^{(\Phi)} \equiv \sqrt{\frac{1}{\Phi}}$ und $v_n^{(\Phi)} = \sqrt{\frac{2}{\Phi}} r^{\frac{\pi n}{\Phi}} \cos \frac{\pi}{\Phi} n\phi$ mit den zugehörigen Eigenwerten $\mu_0^{(\Phi)} = 0$ und $\mu_n^{(\Phi)} = \frac{\pi n}{\Phi}$ mit $n = 1, 2, \dots$*

Beweis der Sätze 8.6 und 8.7. Man überzeugt sich leicht, dass die angegebenen Eigenfunktionen und Eigenwerte tatsächlich Eigenfunktionen und Eigenwerte zu den Problemen (8.1) und (8.2) sind. Die Vollständigkeit folgt aus der Vollständigkeit der Lösungssysteme des Halbkreises H durch Streckung bzw. Stauchung des Intervalls $(0, \pi)$ auf $(0, \Phi)$, vgl. 8.2.2. \square

8.2.9 Weitere Gebietsklassen

Die Variationscharakterisierung der Eigenwerte zu den Eigenwertproblemen (8.1) und (8.2) kann ganz analog zu 8.2.4 auch mit der Neumannschen Funktion des Sektors $S^{(\Phi)}$ $N_{S^{(\Phi)}}$ bzw. der Robinschen Funktion im Sektor $S^{(\Phi)}$ erfolgen. Die Hilfssätze 8.1 bis 8.4 sowie die Sätze 8.2 und 8.3 bleiben im Wesentlichen bestehen; anstelle des Halbkreises H steht der Sektor $S^{(\Phi)}$, der Index (π) ist durch (Φ) zu ersetzen.

Gleiches kann mit den in 8.2.5 gewählten Bezeichnungen erfolgen. Damit übertragen sich ebenfalls die Hilfssätze 8.5 und 8.6.

Werden nun wieder (8.1) und (8.2) im Zusammenhang betrachtet, vgl. 8.2.1, gelangt man für die Eigenwerte des Gebietes D zu der Ungleichung

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{\lambda_j} + \frac{1}{\mu_j} \right) \geq \sum_{j=1}^n \left(\frac{d_{j,j}}{\lambda_j^{(\pi)}} + \frac{\tilde{d}_{j,j}}{\mu_j^{(\pi)}} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} (d_{j,j} + \tilde{d}_{j,j}) \quad (8.12)$$

für beliebiges $n \geq 1$.

Dabei gilt

$$d_{j,j} + \tilde{d}_{j,j} = \alpha_0^{(\Phi)} - \frac{\left(\int_{C_2^{(\Phi)}} v_j^{(\Phi)} |f'| ds \right)^2}{\int_{C_2^{(\Phi)}} |f'| ds} = \alpha_0^{(\Phi)} - \frac{\alpha_j^{(\Phi)^2}}{\alpha_0^{(\Phi)}}. \quad (8.13)$$

Soll wiederum Hilfssatz 2.4 auf (8.13) angewendet werden, dann muss $|f'(\phi)|$ auf den Intervallen $(0, 2\pi)$ und $(0, \Phi)$ dieselbe Entwicklung besitzen. Dies kann i.a. höchstens dann möglich sein, wenn $\frac{\pi}{\Phi}$ rational ist. Es gilt

Hilfssatz 8.7 Sei $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ diejenige Abbildung, die den Einheitskreis schlicht konform auf das Gebiet Ω abbildet, $z = re^{i\phi}$. Sei q die Symmetrieordnung von Ω . Dann besitzt $|f'(\phi)|$ auf dem Rand des Einheits- bzw. Halbkreises bzw. den Intervallen $(0, 2\pi)$ und $(0, \Phi)$ dieselbe Entwicklung, falls

- (1) $a_j \in \mathbb{R}$ für $j = 0, 1, 2, \dots$
- (2) $\frac{\pi}{\Phi} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$
- (3) $m|q$, d.h., $q = ml$ mit $l \in \mathbb{N}$.

Beweis. Unter den genannten Bedingungen besitzt $|f'(\phi)|$ auf dem Intervall $(0, 2\pi)$ die Entwicklung

$$\begin{aligned} |f'(\phi)| &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{jq} \cos jq\phi \\ &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{jml} \cos jml\phi. \end{aligned}$$

Die Eigenfunktionen des Sektors $S^{(\Phi)}$ auf $C_2^{(\Phi)}$ sind für $j \geq 1$ gegeben durch

$$v_k^{(\Phi)}(\phi) = \sqrt{\frac{2m}{\pi n}} \cos \frac{m}{n} k \phi.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi n}{m}} \frac{2m}{\pi n} \cdot \alpha_{jml} \cos jml\phi \cos \frac{m}{n} k\phi \, d\phi \\ &= \frac{m}{\pi n} \int_0^{\frac{\pi n}{m}} \left(\alpha_{jml} \left(\cos(jml - \frac{m}{n}k)\phi + \cos(jml + \frac{m}{n}k)\phi \right) \right) d\phi \\ &= \begin{cases} \alpha_{jml} & \text{für } k = jnl \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Aus diesem Resultat lässt sich unmittelbar die Behauptung des Hilfssatzes 8.7 ablesen. \square

Aus (8.12), (8.13) und Hilfssatz 8.7 folgt

Satz 8.8 Sei D ein Gebiet, für welches gilt

$$(1) \quad z \in D \quad \Rightarrow \quad 0 < \arg z < \Phi \quad \text{mit } 0 < \Phi \leq 2\pi$$

(2) Die Randkomponente C_1 des Gebietes D bestehe aus den zwei Teilstücken

$$A = \{z \in \mathbb{R} : 0 \leq z \leq r_1, \quad r_1 > 0\} \quad \text{und}$$

$$B = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq r_2, \quad r_2 > 0, \quad \arg z = \Phi\}.$$

Dabei sei Φ ein rationales Vielfaches von π , d.h., $\Phi = \frac{\pi k}{m}$, $m, k \in \mathbb{N}$. Lässt sich das Gebiet D durch Spiegelung an C_2 (gegebenenfalls auch mehrfache Spiegelung an den Bildern von C_2) auf ein Gebiet der Symmetrieordnung $q = lm$, $l \in \mathbb{N}$ fortsetzen, dann gibt es eine Abbildung

$$f(z) = a_1 z + a_{q+1} z^{q+1} + a_{2q+1} z^{2q+1} + \dots$$

mit reellen Koeffizienten a_j , die den Sektor $S^{(\Phi)}$ schlicht konform auf das Gebiet D abbildet mit entsprechender Ränderzuordnung. Im Falle $\Phi = 2\pi$ bedeutet das, D sei symmetrisch zur reellen Achse.

Für die Eigenwerte des Gebietes D zu den Problemen (8.1) und (8.2) gilt

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{\lambda_j} + \frac{1}{\mu_j} \right) \geq |a_1| \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{\lambda_j^{(\Phi)}} + \frac{1}{\mu_j^{(\phi)}} \right) \quad (8.14)$$

für beliebiges $n \geq 1$.

Es gilt mindestens eine der Ungleichungen

$$(1) \quad \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \geq |a_1| \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j^{(\Phi)}}$$

$$(2) \quad \sum_{j=1}^n \frac{1}{\mu_j} \geq |a_1| \sum_{j=1}^n \frac{1}{\mu_j^{(\Phi)}}.$$

Dabei bezeichnen $\lambda_j^{(\Phi)}$ und $\mu_j^{(\Phi)}$ die Eigenwerte des Sektors $S^{(\Phi)}$ zu den Problemen (8.1) und (8.2).

Beweis. Nach Riemannschem Abbildungssatz existiert eine schlicht konforme Abbildung, die den Sektor $S^{(\Phi)}$ auf das Gebiet D abbildet, wobei für den Randpunkt 0 gilt: $f(0) = 0$. Die Periodizität und die Eigenschaft $a_j \in \mathbb{R}$ der Abbildung f ergibt sich aus den Symmetrieeigenschaften von D . Die Ränderzuordnung ist eine Folgerung aus dem Spiegelungsprinzip.

Aus den Eigenschaften der Abbildungsfunktion f folgt, dass die Entwicklungen von $|f'(\phi)|$ auf den Intervallen $(0, 2\pi)$ und $(0, \Phi)$ übereinstimmen, vgl. Hilfssatz 8.7. Damit ist in (8.12) bzw. (8.13) Hilfssatz 2.4 anwendbar. Es folgt (8.14).

Der Beweis des letzten Teils des Satzes erfolgt ganz analog zum Beweis von Satz 8.5. Damit gilt Satz 8.8. □

Mit Hilfe des Satzes 8.8 sind weitere Gebietsklassen in Abhängigkeit des Winkels Φ erklärt worden; innerhalb dieser Klassen ist jeweils der Sektor $S^{(\Phi)}$ ein Extremalgebiet im Sinne des Satzes 8.8.

Beispiele für Gebiete solcher Klassen sind die folgenden: Die Gebiete D_1 mit $\Phi_1 = \frac{4}{3}\pi$ und $\Phi_2 = \frac{5}{3}\pi$ lassen sich auf D_3 fortsetzen; das Gebiet D_3 ist ein Gebiet der Symmetrieordnung 3.

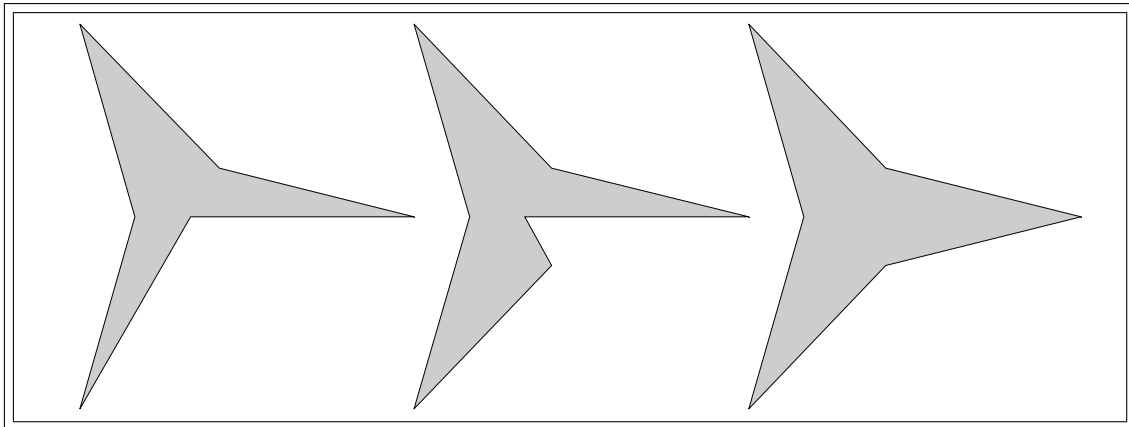


Abb. 5: Beispiele für die beschriebenen Gebietsklassen des Satzes 8.8

8.3 Unendliche Summen

8.3.1 Eine unendliche Summe für (8.1)

Im Folgenden soll für das Problem (8.1) eine Formel zur Bestimmung von $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$ ermittelt werden. Dazu wird die Robinsche Funktion $R(\theta, \phi)$ zu (8.1) im Halbkreis H auf $C_2^{(\pi)}$

benutzt. Es gilt für die Eigenwerte des Gebietes D

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2} &= \int_0^\pi \int_0^\pi R^2(\theta, \phi) |f'(\theta)| |f'(\phi)| d\theta d\phi \\ &= 4\pi^2 \int_0^\pi \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\phi \sin n\theta}{n} \right)^2 |f'(\theta)| |f'(\phi)| d\theta d\phi, \end{aligned} \quad (8.15)$$

wenn f diejenige Abbildung ist, die den Halbkreis H schlicht konform auf D mit entsprechendem Ränderübergang abbildet.

Die Auswertung von (8.15) erfolgt in ähnlicher Weise wie in 2.4.1. Man erhält

Satz 8.9 *Sei f diejenige Abbildung, die den Halbkreis schlicht konform auf das Gebiet D abbildet, wobei $C_1^{(\pi)}$ auf C_1 und $C_2^{(\pi)}$ auf C_2 abgebildet werden. Dann gilt für die Eigenwerte von D zum Problem (8.1)*

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2} &= \frac{\alpha_0^{(\pi)^2} \pi^2}{24} - \frac{\alpha_0^{(\pi)}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{2n}^{(\pi)}}{n^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n+m}^{(\pi)^2}}{nm} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\alpha_{n-m}^{(\pi)^2}}{nm} - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\alpha_{n+m}^{(\pi)} \alpha_{n-m}^{(\pi)}}{nm}. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen $\alpha_j^{(\pi)}$ die Fourierkoeffizienten von $|f'(\phi)|$ auf $C_2^{(\pi)}$.

8.3.2 Eine unendliche Summe für (8.2)

Ergänzend zum vorangehenden Abschnitt wird nun eine Formel für die Berechnung von $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j^2}$ für (8.2) angegeben. Die Herleitung erfolgt mit der zugehörigen Neumannschen Funktion N_D des Gebietes D , überpflanzt in den Halbkreis H . Für die Eigenwerte des Gebietes D zu (8.2) gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j^2} &= \int_0^\pi \int_0^\pi N_D^2(\theta, \phi) |f'(\theta)| |f'(\phi)| d\theta d\phi \\ &= \int_0^\pi \int_0^\pi N_D(\theta, \phi) N_H(\theta, \phi) |f'(\theta)| |f'(\phi)| d\theta d\phi \\ &= \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos n\theta - \frac{\alpha_n^{(\pi)}}{\alpha_0^{(\pi)}})(\cos n\phi - \frac{\alpha_n^{(\pi)}}{\alpha_0^{(\pi)}})}{n} \\ &\quad \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta \cos n\phi}{n} \cdot |f'(\theta)| |f'(\phi)| d\theta d\phi. \end{aligned} \quad (8.16)$$

f sei wieder die Abbildungsfunktion des Halbkreises auf das Gebiet D mit entsprechendem Ränderübergang. Damit gilt nach ähnlicher Rechnung für die Eigenwerte zu (8.2)

Satz 8.10 Sei f diejenige Abbildung, die den Halbkreis schlicht konform auf das Gebiet D abbildet, wobei $C_1^{(\pi)}$ auf C_1 und $C_2^{(\pi)}$ auf C_2 abgebildet werden. Dann gilt für die Eigenwerte von D zum Problem (8.2)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j^2} &= \frac{\alpha_0^{(\pi)^2} \pi^2}{24} + \frac{\alpha_0^{(\pi)}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{2n}^{(\pi)}}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^{(\pi)^2}}{n^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n+m}^{(\pi)^2}}{n \cdot m} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\alpha_{n-m}^{(\pi)^2}}{m \cdot n} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\alpha_{n+m}^{(\pi)} \alpha_{n-m}^{(\pi)}}{m \cdot n} - \frac{1}{\alpha_0^{(\pi)}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^{(\pi)} \alpha_m^{(\pi)} \alpha_{n+m}^{(\pi)}}{m \cdot n} \\ &- \frac{2}{\alpha_0^{(\pi)}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^{(\pi)} \alpha_m^{(\pi)} \alpha_{n+m}^{(\pi)}}{n(n+m)} + \frac{1}{\alpha_0^{(\pi)^2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^{(\pi)^2}}{n} \right)^2. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen $\alpha_j^{(\pi)}$ die Fourierkoeffizienten von $|f'(\phi)|$ auf $C_2^{(\pi)}$.

8.3.3 Abbildung des Halbkreises in sich

Mit der in 2.4.2 vorgestellten Abbildung $f(z) = \frac{z-x}{1-zx}$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $|x| < 1$ kann der Halbkreis H schlicht konform auf sich selbst abgebildet werden. Dabei werden $C_1^{(\pi)}$ und $C_2^{(\pi)}$ jeweils auf sich selbst abgebildet.

Nach Hilfssatz 8.7 besitzt $|f'(\phi)|$ auch auf $C_2^{(\pi)}$ die Entwicklung

$$|f'(\phi)| = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos n\phi,$$

vgl. auch (2.47) in Hilfssatz 2.5.

Mit Hilfe dieser Abbildung sollen nun die Formeln aus Satz 8.9 und Satz 8.10 „getestet“ werden. Für die Eigenwerte des Halbkreises H zum Problem (8.1) gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^{(0)^2}} &= \frac{\pi^2}{6} - 2 \operatorname{Polyln}(2, x^2) + \ln^2(1-x^2) - 2 \ln^2(1-x^2) + \ln^2(1-x^2) \\ &+ 2 \operatorname{Polyln}(2, x^2) \\ &= \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

Es bezeichnet $\operatorname{Polyln}(n, z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k / k^n$.

Demgegenüber steht das Problem (8.2). Für die Eigenwerte dieses Eigenwertproblems im Halbkreis H gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^{(0)^2}} &= \frac{\pi^2}{6} + 2 \operatorname{Polyln}(2, x^2) + \ln^2(1-x^2) + 2 \ln^2(1-x^2) + \ln^2(1-x^2) \\ &+ 2 \operatorname{Polyln}(2, x^2) - 4 \operatorname{Polyln}(2, x^2) - 4 \ln^2(1-x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -4 \ln^2(1 - x^2) + 4 \ln^2(1 + x^2) \\
 & = \frac{\pi^2}{6}.
 \end{aligned}$$

8.4 Numerische Resultate

8.4.1 Halbkreisabbildung

Die Abbildung $f(z) = \frac{z-i}{zi-1}$ ist eine schlicht konforme Abbildung des Halbkreises in sich. Dabei geht jedoch $C_1^{(\pi)}$ in $C_2^{(\pi)}$ über, $C_2^{(\pi)}$ wird auf $C_1^{(\pi)}$ abgebildet. Es sei $f : H \rightarrow \tilde{H}$, wobei \tilde{H} den Halbkreis mit angegebener Ränderwahl bezeichnet.

Es gilt $|f'(\phi)| = \frac{1}{1+\sin\phi}$ und damit $\frac{1}{2} \leq |f'(\phi)| \leq 1$, da $0 \leq \phi \leq \pi$. In einfacher Weise folgt damit für die Eigenwerte von \tilde{H} mit Hilfe des Poincaré- bzw. Monotonieprinzips

$$\begin{aligned}
 \lambda_n^{(\pi)} &= n \leq \tilde{\lambda}_n \leq 2n = 2\lambda_n^{(\pi)} && \text{bzw.} \\
 \mu_n^{(\pi)} &= n \leq \tilde{\mu}_n \leq 2n = 2\mu_n^{(\pi)},
 \end{aligned}$$

vgl. auch [8].

Die Abbildungsfunktion f genügt nicht dem Satz 8.4, jedoch kann aus obiger Eigenschaft gefolgert werden

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j^{(\pi)}} \geq \sum_{j=1}^n \frac{1}{\tilde{\lambda}_j} \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j^{(\pi)}} \quad \text{bzw.} \tag{8.17}$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\mu_j^{(\pi)}} \geq \sum_{j=1}^n \frac{1}{\tilde{\mu}_j} \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\mu_j^{(\pi)}}. \tag{8.18}$$

Ferner gilt für die Abbildungsfunktion

Hilfssatz 8.8 Für $f(z) = \frac{z-i}{zi-1}$ gilt auf $C_2^{(\pi)}$:

$$|f'(\phi)| = \frac{2}{\pi} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \left(4 \sum_{k=1}^j (-1)^k \frac{2k-1}{2j-(2k-1)} + (-1)^j (2-2j\pi) \right) \cos 2j\phi.$$

Beweis. Man rechnet leicht nach, dass $\alpha_0^{(\pi)} = \frac{4}{\pi}$. Zu berechnen ist nun $\alpha_{2j}^{(\pi)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos 2j\phi}{1+\sin\phi} d\phi$, alle übrigen Fourierkoeffizienten sind aus Symmetriegründen 0. Bei der Berechnung des Integrals wird zunächst $\cos 2j\phi$ durch $\frac{1}{2}(e^{2ij\phi} + e^{-2ij\phi})$ und $\sin \phi$ durch $\frac{1}{2i}(e^{i\phi} - e^{-i\phi})$ ersetzt. Nach anschließender Substitution $t = e^{i\phi}$ erhält man den Integranden $\frac{2}{\pi} \left(\frac{t^{2j}}{(t+i)^2} + \frac{1}{t^{2j}(t+i)^2} \right)$.

Mittels vollständiger Induktion kann nun gezeigt werden

$$\frac{t^{2j}}{(t+i)^2} = \sum_{n=1}^{2j-1} n \cdot t^{2j-1-n} \cdot i^{1-n} + \frac{2j \cdot i^{2j+1}}{t+1} + \frac{(-1)^j}{(t+i)^2}.$$

Ebenfalls durch vollständige Induktion erfolgt der Beweis der Beziehung

$$\frac{1}{t^{2j}(t+i)^2} = \sum_{n=1}^{2j} t^{-(2j+1-n)} \cdot i^{1+n} n + \frac{2j \cdot i^{2j+3}}{t+i} + \frac{(-1)^j}{(t+i)^2}.$$

Anschließende Integration liefert die Behauptung des Hilfssatzes 8.8. \square

Für die Fourierkoeffizienten gilt wegen $\int_0^\pi \frac{1}{1+\sin\phi} \cos 2j\phi d\phi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin\phi} \cos 2j\phi d\phi$ und $\left(\frac{1}{1+\sin\phi}\right)' \leq 0$ in $(0, \frac{\pi}{2})$ sowie $\left(\frac{1}{1+\sin\phi}\right)'' \geq 0$ in $(0, \frac{\pi}{2})$

$$\alpha_{2j}^{(\pi)} \geq 0$$

für beliebiges $j \geq 1$, vgl. Hilfssatz 4 in [28].

Wegen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$ gilt

$$\begin{aligned} 0 < \alpha_{2j}^{(\pi)} + \alpha_{2j+2}^{(\pi)} &= \frac{2}{\pi} \left((-1)^j (2\pi + 8 \sum_{k=1}^j \frac{(-1)^k}{2k-1}) - \frac{4}{2j+1} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\left| 8 \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} \right| - \frac{4}{2j+1} \right) \\ &\leq \frac{2}{\pi} \left(\frac{8}{2j+1} - \frac{4}{2j+1} \right) = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{1}{2j+1}. \end{aligned}$$

Damit erhält man die Abschätzung

$$0 < \alpha_{2j}^{(\pi)} < \frac{8}{\pi} \cdot \frac{1}{2j+1}. \quad (8.19)$$

Anwendung der Sätze 8.9 und 8.10 liefert folgende numerische Resultate:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\bar{\lambda}_j^2} &= 0.5687_{53}^{67} \\ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\bar{\mu}_j^2} &= 0.8282_{50}^{65} \quad . \end{aligned}$$

Die Fehlerabschätzungen erfolgen in einfacher Weise mit (8.19).

Ergänzend zu (8.17) und (8.18) erhält man mit Hilfe von (8.8) und (8.9)

$$\frac{1}{\bar{\lambda}_1} \geq \frac{\frac{1}{2} \alpha_0^{(\pi)} - \frac{1}{2} \alpha_2^{(\pi)}}{\lambda_1^{(\pi)}} = \frac{8}{\pi} - 2$$

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}_1 &\leq \frac{\pi}{8-2\pi} \approx 1.83 && \text{sowie} \\ \frac{1}{\tilde{\mu}_1} &\geq \frac{\frac{1}{2}\alpha_0^{(\pi)} + \frac{1}{2}\alpha_2^{(\pi)}}{\mu_1^{(\pi)}} = 2 - \frac{4}{\pi} \\ \tilde{\mu}_1 &\leq \frac{\pi}{2\pi-4} \approx 1.376 && .\end{aligned}$$

8.4.2 Abbildung auf die untere Halbebene

Die Joukowski-Abbildung $f(z) = z + \frac{1}{z}$ bildet den Halbkreis H schlicht konform auf die untere Halbebene ab. Dabei geht $C_2^{(\pi)}$ in das auf der reellen Achse liegende Intervall $(-2, 2)$ über. Das Bild von $C_1^{(\pi)}$ ist der übrige Teil der reellen Achse.

Für die Abbildungsfunktion gilt mit $\phi \in (0, \pi)$

$$|f'(\phi)| = \frac{4}{\pi} - \frac{8}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)(2j+1)} \cos 2j\phi.$$

Im Falle von (8.2) handelt es sich dann um das sog. Ice-fishing-Problem. Für die Summen der reziproken Eigenwerte erhält man

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\tilde{\lambda}_j^2} &= 4.220796_{66}^{72} \\ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\tilde{\mu}_j^2} &= 1.912872_{68}^{74} && .\end{aligned}$$

Zum Vergleich: Mit den in [22] angegebenen Werten für die ersten Eigenwerte zum Ice-fishing-problem und asymptotischen Näherungen für die übrigen ergibt sich für die Summe der reziproken Eigenwerte

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\tilde{\mu}_j^2} \approx 1.91282 \quad .$$

Ferner ergeben sich folgende Abschätzungen

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tilde{\lambda}_1} &\geq \frac{\frac{1}{2}\alpha_0^{(\pi)} - \frac{1}{2}\alpha_2^{(\pi)}}{\lambda_1^{(\pi)}} = \frac{16}{3\pi} \\ \tilde{\lambda}_1 &\leq \frac{3\pi}{16} \approx 0.589 && \text{sowie} \\ \frac{1}{\tilde{\mu}_1} &\geq \frac{\frac{1}{2}\alpha_0^{(\pi)} + \frac{1}{2}\alpha_2^{(\pi)}}{\mu_1^{(\pi)}} = \frac{8}{3\pi} \\ \tilde{\mu}_1 &\leq \frac{3\pi}{8} \approx 1.178 && .\end{aligned}$$

In [22] findet sich für $\tilde{\mu}_1$ die untere Schranke $1.002 < \tilde{\mu}_1$. Damit ist dies ein Beispiel, für welches gilt

$$\lambda_1 < \mu_1.$$

Diese Ungleichung steht in unmittelbarem Widerspruch zu (8.11), jedoch ist die Halbebene kein beschränktes Gebiet und fällt somit nicht unter die Bedingungen des Satzes von Friedlander.

8.4.3 Abbildung auf den geschlitzten Einheitskreis

Die Abbildung $f(z) = \frac{z^2-x}{1-z^2x}$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $|x| < 1$ bildet den Halbkreis schlicht konform auf den von $-x$ bis 1 aufgeschlitzten Einheitskreis ab. Dies ergibt sich durch Quadrieren des Halbkreises und anschließender Abbildung des Einheitskreises in sich. $C_1^{(\pi)}$ wird dabei auf den Schlitz abgebildet.

Für die Abbildungsfunktion gilt

$$|f'(\phi)| = 2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos 2n\phi \quad .$$

Numerische Resultate für die Bildgebiete zu unterschiedlichen Werten von x finden sich für (8.1) und (8.2) in der folgenden Tabelle.

x	$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$ für (8.1)	$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j^2}$ für (8.2)
$-\frac{8}{10}$	29.04683952208 ₀ ¹	3.423816385706 ₇ ⁸
$-\frac{7}{10}$	21.62268132627 ₂ ³	3.572154493927 ₄ ⁵
$-\frac{6}{10}$	17.07196570648 ₂ ³	3.774755050994 ₄ ⁵
$-\frac{5}{10}$	13.95108826890 ₇ ⁸	4.036180109128 ₄ ⁵
$-\frac{4}{10}$	11.66770034276 ₄ ⁵	4.363426848888 ₁ ²
$-\frac{3}{10}$	9.926168876972 ₅ ⁶	4.766141823990 ₀ ¹
$-\frac{2}{10}$	8.559834269913 ₁ ²	5.257246080445 ₃ ⁴
$-\frac{1}{10}$	7.466542182224 ₅ ⁶	5.854005264630 ₂ ³
0	$\frac{2}{3}\pi^2 \approx 6.57973626739$ ₂₉ ³⁰	$\frac{2}{3}\pi^2 \approx 6.57973626739$ ₂₉ ³⁰
$\frac{1}{10}$	5.854005264630 ₂ ³	7.466542182224 ₅ ⁶
$\frac{2}{10}$	5.257246080445 ₃ ⁴	8.559834269913 ₁ ²
$\frac{3}{10}$	4.766141823990 ₀ ¹	9.926168876972 ₅ ⁶

Tabelle 18: Abbildung auf den geschlitzten Einheitskreis, $-8/10 \leq x \leq 8/10$

x	$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$ für (8.1)	$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j^2}$ für (8.2)
$\frac{4}{10}$	4.363426848888_1^2	11.66770034276_4^5
$\frac{5}{10}$	4.036180109128_4^5	13.95108826890_7^8
$\frac{6}{10}$	3.774755050994_4^5	17.07196570648_2^3
$\frac{7}{10}$	3.572154493927_4^5	21.62268132627_2^3
$\frac{8}{10}$	3.423816385706_7^8	29.04683952208_0^1

Tabelle 18: (Fortsetzung) Abbildung auf den geschlitzten Einheitskreis, $-8/10 \leq x \leq 8/10$

Die in der Tabelle 18 enthaltenen Resultate stehen ebenfalls im Widerspruch zu (8.11), denn wenn für alle j gelten würde, $\lambda_j \geq \mu_j$, dann müsste erst recht gelten, $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j^2}$; jedoch genügt auch der geschlitzte Einheitskreis nicht dem Satz von Friedlander, denn der geschlitzte Einheitskreis besitzt keinen C^1 -Rand.

Allerdings stützen die numerischen Werte obiger Tabelle die Vermutung, dass (8.11) nicht besteht. Ein Widerspruch lässt sich möglicherweise durch geeignete Approximation der Gebiete erzeugen, vgl. [4].

In der obigen Tabelle fällt auf, dass die numerischen Werte zu (8.1) für x den numerischen Werten zu (8.2) für $-x$ entsprechen. Ein über numerische Beobachtungen hinaus gehender Nachweis gelang bisher nicht.

8.5 Weitere Resultate

Sei $\hat{H} = \{z : |z| > 1, \Im[z] > 0\}$ mit den Randkomponenten $\hat{C}_1 = \{z \in \mathbb{R}, |z| \geq 1\}$ und $\hat{C}_2 = \{z : |z| = 1, \Im[z] > 0\}$. Man überlegt sich leicht, dass das Gebiet \hat{H} zum Problem (8.1) die Eigenfunktionen $\hat{u}_n^{(\pi)}(r, \phi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} r^{-n} \sin n\phi$, $n = 1, 2, \dots$ mit den zugehörigen Eigenwerten $\hat{\lambda}_n^{(\pi)} = n$ besitzt. Entsprechend gehören zum Problem (8.2) die Eigenfunktionen $\hat{v}_0^{(\pi)} \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ und $\hat{v}_n^{(\pi)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} r^{-n} \cos n\phi$ mit den zugehörigen Eigenwerten $\hat{\mu}_0^{(\pi)} = 0$ und $\hat{\mu}_n^{(\pi)} = n$ für $n = 1, 2, \dots$.

Diese Lösungssysteme sind vollständig. Es handelt sich hierbei um analoge Resultate zu Satz 8.1.

Entsprechend übertragen sich die Hilfssätze 8.1 bis 8.6 sowie die Sätze 8.2 und 8.3 auf \hat{H} mit einer entsprechenden Abbildungsfunktion. Gleiches gilt für die Sätze 8.4 und 8.5.

In gleicher Weise wie für H bzw. \hat{H} findet man die Lösungssysteme zu den Gebieten $\hat{S}^{(\pi)} = \{z = re^{i\phi} : |z| > 1, 0 < \phi < \Phi\}$ mit $0 < \Phi \leq 2\pi$ mit der Randkomponente

$\hat{C}_2^{(\Phi)} = \{z = e^{i\phi} : 0 < \phi < \Phi\}$; der übrige Teil des Randes ist $\hat{C}_1^{(\Phi)}$.

Man erhält zu den Sätzen 8.6 und 8.7 passende Resultate. In Hilfssatz 8.7 tritt anstelle der dort genannten Abbildungsfunktion eine Abbildung $f(z) = a_1z + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots$ mit entsprechenden Eigenschaften der Koeffizienten A_j .

Analog zu Satz 8.8 erhält man schließlich

Satz 8.11 *Sei D ein Gebiet, für welches gilt*

$$(1) \quad z \in D \quad \Rightarrow \quad 0 < \arg z < \Phi \text{ mit } 0 < \Phi \leq 2\pi$$

(2) *Die Randkomponente C_1 bestehe aus den zwei Teilstücken*

$$A = \{z \in \mathbb{R} : r_1 \leq z \leq \infty, \quad r_1 > 0\} \quad \text{und}$$

$$B = \{z \in \mathbb{C} : r_2 \leq |z| \leq \infty, \quad r_2 > 0, \quad \arg z = \Phi\}.$$

Dabei sei Φ ein rationales Vielfaches von π , d.h., $\Phi = \frac{\pi k}{m}$, $m, k \in \mathbb{N}$. Lässt sich das Gebiet D durch Spiegelung an C_2 (gegebenenfalls auch mehrfache Spiegelung an den Bildern von C_2) auf ein Gebiet der Symmetrieordnung $q = lm$, $l \in \mathbb{N}$ fortsetzen, dann gibt es eine Abbildung

$$f(z) = a_1z + A_{-q+1}z^{-q+1} + A_{-2q+1}z^{-2q+1} + \dots$$

mit reellen Koeffizienten A_j bzw. a_1 , die das Gebiet $\hat{S}^{(\Phi)}$ schlicht konform auf das Gebiet D abbildet mit entsprechender Ränderzuordnung und mit $A_0 = 1$ für $q = 1$. Im Falle $\Phi = 2\pi$ bedeutet das, D sei symmetrisch zur reellen Achse.

Für die Eigenwerte des Gebietes D zu den Problemen (8.1) und (8.2) gilt

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{\lambda_j} + \frac{1}{\mu_j} \right) \geq |a_1| \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{\hat{\lambda}_j^{(\Phi)}} + \frac{1}{\hat{\mu}_j^{(\Phi)}} \right) \tag{8.20}$$

für beliebiges $n \geq 1$.

Es gilt mindestens eine der Ungleichungen

$$(1) \quad \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \geq |a_1| \sum_{j=1}^n \frac{1}{\hat{\lambda}_j^{(\Phi)}}$$

$$(2) \quad \sum_{j=1}^n \frac{1}{\mu_j} \geq |a_1| \sum_{j=1}^n \frac{1}{\hat{\mu}_j^{(\Phi)}}.$$

Dabei bezeichnen $\hat{\lambda}_j^{(\Phi)}$ und $\hat{\mu}_j^{(\Phi)}$ die Eigenwerte des Gebietes $\hat{S}^{(\Phi)}$ zu den Problemen (8.1) und (8.2).

Ferner übertragen sich die Sätze 8.9 und 8.10.

Schließlich kann das Resultat analog zu Satz 2.4 ebenfalls auf die Sätze dieses Abschnitts angewandt werden.

9 Ein Membranproblem mit gemischten Randbedingungen im einfach zusammenhängenden Gebiet

9.1 Das Eigenwertproblem

Abschließend sei folgendes Eigenwertproblem betrachtet: Sei D ein einfach zusammenhängendes beschränktes Gebiet der Ebene. Es gelte mit $\partial D = C_1 \cup C_2$:

$$\begin{aligned} \Delta u + \mu u &= 0 && \text{in } D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 && \text{auf } C_1 \\ u &= 0 && \text{auf } C_2. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Mit μ sei der Eigenwertparameter bezeichnet, mit $\frac{\partial}{\partial n}$ die Außennormale.

Behandelt wurde die mit diesem Eigenwertproblem zusammenhängende Robinsche Funktion bzw. Robin Kapazität von P. Duren und M. M. Schiffer, siehe 7.1 bzw. [17], [15], [18], [16], [19], siehe auch [2] oder [42].

9.2 Das Problem (9.1) im Halbkreis H

Die Eigenfunktionen des Halbkreises mit den Bezeichnungen $C_1^{(0)} = \{z \in \mathbb{R} : -1 \leq z \leq 1\}$ und $C_2^{(0)} = \{z = e^{i\phi}, 0 < \phi < \pi\}$ zum Problem (9.1) sind auch Eigenfunktionen des Problems der festen Membran (4.1) im Einheitskreis, jedoch mit einer anderen Normierungskonstanten. Genauer: Die Eigenfunktionen des Halbkreises zu (9.1) sind genau die nichtradiellen Eigenfunktionen des Einheitskreises zum Problem (4.1) der Gestalt

$$J_n(k_{n,m} r) \sin n\phi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.2)$$

J_n ist die Besselsche Funktion erster Art n -ter Ordnung mit den abzählbar unendlich vielen Nullstellen $k_{n,m}$, $m = 1, 2, 3, \dots$. Die zugehörigen Eigenwerte sind durch $\sqrt{\lambda_{n,m}} = k_{n,m}$, $k_{n,m} > 0$ gegeben.

Die übrigen Eigenfunktionen und Eigenwerte des Einheitskreises zum Problem (4.1) sind genau die Eigenfunktionen und Eigenwerte des Halbkreises H zum Problem der festen Membran (4.1).

9.3 Eine endliche Summe

Mit Hilfe der Eigenfunktionen des Halbkreises lässt sich die Robinsche Funktion zu (9.1) im Halbkreis darstellen, siehe 7.2. Ganz analog zu den vorangegangenen Eigenwertproblemen können damit Variationscharakterisierungen für die Eigenwerte zu (9.1) angegeben werden, vgl. insbesondere 7.4.

Bei der Suche nach einer zum Satz von Pólya und Schiffer analogen Aussage, ausgehend vom Halbkreis H , stößt man auf ähnliche Schwierigkeiten wie in 8.2.1. Wählt man dieselbe Herangehensweise wie in 8.2.6, um diese Schwierigkeiten zu umgehen, so ist das Problem der festen Membran als Hilfsproblem zu verwenden. Denn wie bereits in 9.2

erwähnt, besitzen die Probleme (9.1) und (4.1) im Halbkreis genau die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Einheitskreises zum Problem der festen Membran (4.1).

Im Unterschied zu 8.2.6 treten jedoch bei dem hier betrachteten Hilfsproblem neben den zu (9.1) korrespondierenden Eigenfunktionen noch weitere Eigenfunktionen und Eigenwerte auf, nämlich genau die radialen Eigenfunktionen des Einheitskreises zu (4.1) mit den zugehörigen Eigenwerten.

Nachfolgend werden für (9.1) Variationscharakterisierungen und anschließend eine Ungleichung, analog zu der in Satz 8.6, angegeben.

9.3.1 Variationscharakterisierung der Eigenwerte

Mit $R(z, \zeta)$ sei die Robinsche Funktion im Halbkreis H bezeichnet, sie genügt der Reihendarstellung

$$R(z, \zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{u_j^{(0)}(z)u_j^{(0)}(\zeta)}{\mu_j^{(0)}},$$

wobei $u_j^{(0)}$ die Eigenfunktionen und $\mu_j^{(0)}$ die Eigenwerte von H zu (9.1) bezeichnet. Für die Eigenwerte von D gilt

Hilfssatz 9.1 *Gegeben sei das Problem (9.1). Sei f diejenige konforme Abbildung, die das Innere des Halbkreises H schlicht konform auf das Gebiet D mit entsprechendem Ränderübergang abbildet. Dann gilt für den k -ten Eigenwert von (9.1)*

$$\frac{1}{\mu_k} = \max_h \int_H \int_H R(z, \zeta) |f'(z)|^2 |f'(\zeta)|^2 h(z) h(\zeta) dA_z dA_\zeta \quad (9.3)$$

mit $h \in L_2(H)$ und den Nebenbedingungen $h \equiv 0$ auf $C_1^{(0)}$, $\int_H |f'(z)|^2 h^2(z) dA_z = 1$ sowie $\int_H |f'(z)|^2 h(z) \cdot u_j(z) dA_z = 0$, $j = 1, 2, \dots, k - 1$; wobei $k \geq 1$. Mit u_j seien die in den Halbkreis überpflanzten Eigenfunktionen des Gebietes D bezeichnet.

Ferner gilt

Hilfssatz 9.2 *Für die Eigenwerte des Problems 9.1 gilt die von den Eigenfunktionen unabhängige Variationscharakterisierung*

$$\frac{1}{\mu_k} = \max_{L_k} \min \int_H \int_H R(z, \zeta) |f'(z)|^2 |f'(\zeta)|^2 h(z) h(\zeta) dA_z dA_\zeta.$$

Dabei wird das Maximum über alle k -dimensionalen Unterräume $L_k \subset L_2(H)$ gebildet, wobei für alle Funktionen $h \in L_k$ gilt: $h \equiv 0$ auf $C_1^{(0)}$. Das Minimum wird über alle Funktionen $h \in L_k$, welche der Nebenbedingung $\int_H h^2(z) |f'(z)|^2 dA_z = 1$ genügen, gebildet.

Schließlich gilt für die Summe der Reziproken der ersten n Eigenwerte von (9.1)

Satz 9.1 *Für die Eigenwerte des Problems (9.1) gilt*

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\mu_j} \geq \sum_{j=1}^n \int_H \int_H R(z, \zeta) |f'(z)|^2 |f'(\zeta)|^2 v_j(z) v_j(\zeta) dA_z dA_\zeta \quad (9.4)$$

unter den Nebenbedingungen $\int_H |f'(z)|^2 v_i(z) v_j(z) dA_z = \delta_{ij}$ mit $i, j = 1, \dots, n$ und $v_j \in L_2(H)$ sowie $v \equiv 0$ auf $C_1^{(0)}$.

Entsprechend Hilfssatz 4.1 und 4.2 sowie Satz 4.5 können die Eigenwerte zum Hilfsproblem (4.1) charakterisiert werden, wobei an die Stelle des Einheitskreises der Halbkreis tritt.

9.3.2 Eine Ungleichung

Da die weiteren Betrachtungen im Wesentlichen den Rechnungen in 7.4.3 und 8.2.6 folgen, jedoch zu einem schwächeren Resultat führen, werden sie hier nicht in aller Ausführlichkeit angegeben. Mit der insbesondere in 8.2.6 dargestellten Methode gelangt man zum

Satz 9.2 Sei D ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit den Randkomponenten C_1 und C_2 . Sei $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ diejenige schlicht konforme Abbildung, die den Halbkreis H auf das Gebiet D abbildet. Dann gilt für die Eigenwerte der Probleme (9.1) und (4.1) in D

$$\sum_{j=1}^{k(n)} \frac{1}{\lambda_j} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\mu_j} \geq |a_1|^2 \left(\sum_{j=1}^{k(n)} \frac{1}{\lambda_j^{(0)}} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\mu_j^{(0)}} \right)$$

für beliebiges $n \geq 1$. Dabei bezeichnen $\lambda_j^{(0)}$ und $\mu_j^{(0)}$ die Eigenwerte des Halbkreises zu (4.1) und (9.1). Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn D ein Halbkreis mit gleicher Ränderzuordnung ist.

Dabei sei $k(n)$ die Anzahl der Eigenwerte von H zu (4.1), welche kleiner oder gleich μ_n . Es gilt stets $k(n) \geq n$, dies liegt an den radialen Eigenfunktionen des Einheitskreises, siehe 9.3.

Von Interesse wäre natürlich eine Ungleichung, die nur μ_j bzw. $\mu_j^{(0)}$ enthält, jedoch sind in Einzelfällen stärkere Aussagen möglich, wie das folgende Beispiel zeigt.

9.3.3 Ein Beispiel

Sei D der Einheitskreis mit $C_2 = C_2^{(0)} = \{z = e^{i\phi}, 0 < \phi < \pi\}$.

$$f(z) = \frac{1 - i \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^2}{1 + i \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^2}$$

bildet den Halbkreis schlicht konform auf den Einheitskreis mit entsprechender Ränderzuordnung ab. Einfache Rechnung ergibt, dass

$$|a_1|^2 = 16.$$

Folglich erhält man für die Eigenwerte des Einheitskreises

$$\sum_{j=1}^{k(n)} \frac{1}{\lambda_j} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\mu_j} \geq 16 \left(\sum_{j=1}^{k(n)} \frac{1}{\lambda_j^{(0)}} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\mu_j^{(0)}} \right).$$

Angenommen, es würde für ein gewisses n gelten

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\mu_j} < 16 \sum_{j=1}^n \frac{1}{\mu_j^{(0)}},$$

dann müsste gelten

$$\sum_{j=1}^{k(n)} \frac{1}{\lambda_j} > 16 \sum_{j=1}^{k(n)} \frac{1}{\lambda_j^{(0)}}. \quad (9.5)$$

Für die weitere Betrachtung wird der maximale konforme Radius des Halbkreises benötigt. Dazu wird die Menge aller Abbildungen des Einheitskreises auf den Halbkreis betrachtet.

$$\frac{\frac{1+i}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{1-z}{1+z}}}{\frac{1+i}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{1-z}{1+z}}}$$

ist eine Abbildung des Einheitskreises auf den Halbkreis. Die Menge aller Abbildungen des Einheitskreises in sich ist gegeben durch

$$a \frac{z-p}{1-z\bar{p}}$$

mit $|a| = 1$, $|p| < 1$ und $a, p = \text{const.}$ \bar{p} bezeichnet die konjugiert komplexe Zahl zu p . Die Zusammensetzung dieser Abbildungen liefert die Menge aller Abbildungen des Einheitskreises auf den Halbkreis. Soll der maximale konforme Radius des Halbkreises bestimmt werden, so muss unter allen diesen Abbildungen diejenige bestimmt werden, für die $|f'(0)|$ maximal wird.

Da der Halbkreis ein konvexes Gebiet ist, gilt nach R. Kühnau, dass dieses Maximum eindeutig bestimmt ist, siehe auch Haegi [27]. Es handelt sich um ein symmetrisches Problem, folglich liegt $f(0)$ auf der imaginären Achse. Das bedeutet, für a kann $-i$ eingesetzt und für p ein reeller Wert angenommen werden.

Zu untersuchen sind somit alle Funktionen

$$f_p(z) = \frac{\frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - i \frac{z-p}{1-zp}} - \sqrt{1 + i \frac{z-p}{1-zp}}}{\frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - i \frac{z-p}{1-zp}} + \sqrt{1 + i \frac{z-p}{1-zp}}}$$

mit $p \in \mathbb{R}$. Man erhält

$$|f'_p(0)| = \frac{2(1-p^2)}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+p^2} + \sqrt{2} - \sqrt{2}p};$$

dies ist zu maximieren. Es ergeben sich

$$\begin{aligned} p &= 2 + \sqrt{5} - 2\sqrt{2 + \sqrt{5}} \\ f_p(0) &= i\sqrt{\sqrt{5} - 2} \quad \text{sowie} \\ |f'_p(0)| &= \sqrt{10\sqrt{5} - 22} \approx 0.600566212. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Bei Pólya und Szegő [46] findet sich die numerische Näherung $r = 0.60057$ als maximaler konformer Radius für den Halbkreis, dies entspricht dem ermittelten Resultat in (9.6).

Setzt man dies in Verbindung mit dem Resultat von Pólya und Schiffer bzw. der Ungleichung (4.20) in (9.5) ein, führt dies zu

$$\sum_{j=1}^{k(n)} \frac{1}{\lambda_j} > 16 \sum_{j=1}^{k(n)} \frac{1}{\lambda_j^{(0)}} \geq 16 \cdot (10\sqrt{5} - 22) \sum_{j=1}^{k(n)} \frac{1}{\lambda_j}$$

und damit, unabhängig von n , zu einem Widerspruch, denn $16 \cdot (10\sqrt{5} - 22) > 1$. Folglich gilt für die Eigenwerte des Kreises zu (9.1) bei oben beschriebener Ränderwahl

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\mu_j} \geq 16 \sum_{j=1}^n \frac{1}{\mu_j^{(0)}},$$

für beliebiges $n \geq 1$.

Allgemeinere Aussagen scheinen mit der dargestellten Herangehensweise nicht möglich zu sein.

Eine Übertragung des Satzes 2.4 ist wiederum möglich.

10 Bezeichnungen und Abkürzungen

D	hinreichend glatt berandetes Gebiet, im Falle des Stekloffproblems mit beschränkter Länge der Randkurve usw.
C	Randkurve von D
C_n	n -te Komponente der Randkurve C
$\Im[*]$	Imaginärteil von $*$
LU	Linke untere (Dreiecksmatrix), dh. für $A = \{a_{i,j}\}_{i,j=1}^n$ gilt $a_{i,j} = 0$ für $j > i$
$\Re[*]$	Realteil von $*$
R	maximaler konformer konformer Radius des Gebietes D bzw. äußerer konformer Radius von D , falls D ein Außengebiet ist
R_0	konformer Radius des Gebietes D bzgl. $w=0$
\mathcal{S}	Menge der schlicht konformen Abbildungen von $ z < 1$ mit $w = w(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ mit $a_1 = 1$
Σ	Menge der schlicht konformen Abbildungen von $ z > 1$ mit $w = w(z) = a_1 z + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \frac{A_3}{z^3} + \dots$ mit $a_1 = 1$
$\tilde{\mathbb{C}}$	$\mathbb{C} \cup \infty$
$m q$	m ist Teiler von q , d.h., $q = ml$ mit $l \in \mathbb{N}$.
$\text{Polyln}(n, z)$	$\sum_{k=1}^n \infty \frac{z^k}{k^n}$

Literatur

- [1] D. H. Armitage, S. J. Gardiner, *Classical Potential Theory*, Springer-Verlag London, 2001.
- [2] C. Bandle, *Isoperimetric Inequalities and Applications*, Pitman Publ., Boston - London - Melbourne 1980.
- [3] C. Bandle, *Über das Stekloffsche Eigenwertproblem: Isoperimetrische Ungleichungen für symmetrische Gebiete*, ZAMP **19** (1968), 627-637.
- [4] R. Courant, D. Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1993.
- [5] B. Dittmar, *Eigenvalue Problems and Conformal Mapping*, Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory, Vol. 2, Elsevier, ed. Kühnau, Amsterdam 2005, 671-686.
- [6] B. Dittmar, *Isoperimetric inequalities for the sums of reciprocal eigenvalues*, Pitman Research Notes in Mathematic Series **383**, 78-87, Addison Wesley Longman Ltd., Harlow, Essex 1998.
- [7] B. Dittmar, M. Hantke, *Robin function und their eigenvalues*, in Vorbereitung.
- [8] B. Dittmar, *Stekloffsche Eigenwerte und konforme Abbildungen*, Z. f. Anal. und Anwend. Bd. **7** (1988).
- [9] B. Dittmar, *Sums of Free Membrane Eigenvalues*, Journal d'Analyse Mathématique, **95** (2005), 323-332.
- [10] B. Dittmar, *Sums of Reciprocal Eigenvalues of the Laplacian*, Math. Nachr. **237** (2002), 45-61.
- [11] B. Dittmar, *Sums of reciprocal Stekloff eigenvalues*, Math. Nachr. **268** (2004), 44-49.
- [12] B. Dittmar, *Zu einem Stekloffschen Eigenwertproblem in Ringgebieten*.
- [13] B. Dittmar, *Zur Berechnung Stekloffscher Eigenwerte*, ZAMP **39** (1988). Mitt. Math. Sem. Giessen 228 (1996), 1-7.
- [14] B. Dittmar, R. Kühnau, *Zur Konstruktion der Eigenfunktionen Stekloffscher Eigenwertaufgaben*, ZAMP **51** (2000), 806-819.
- [15] P. L. Duren, *Robin capacity*, Computational Methods and Function Theory 1997, N. Papamichael, St. Ruscheweyh and E. B. Saff (Eds.), pp. 177-190.
- [16] P. L. Duren, J. Pfaltzgraff, *Robin Capacity and Extremal Length*, J. of Math. Anal. and Appl. Vol. **179** (1993), 110-119.

- [17] P. L. Duren, J. Pfaltzgraff, R. Thurman, *Physical Interpretation and Further Properties of Robin Capacity*, St. Petersburg Math. J. Vol. **9** (1998).
- [18] P. L. Duren, M. M. Schiffer, *Robin Functions and Distortion of Capacity Under Conformal Mapping*, Complex Variables, Vol. **21** (1993), pp. 189-196.
- [19] P. L. Duren, M. M. Schiffer, *Robin Function and Energy Functionals of Multiply Connected Domains*, Pac. J. of Math., Vol. **148** (1991), 251-273.
- [20] J. Edward, *An inequality for Steklov eigenvalues for planar domains*, ZAMP **45**, 493-496 (1994).
- [21] W. Fischer, I. Lieb, *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionentheorie*, Vieweg & Sohn, Braunschweig 1988.
- [22] D. W. Fox, J. R. Kuttler, *Sloshing frequencies*, ZAMP **34** (1983), 668-696.
- [23] D. W. Fox, J. R. Kuttler, *Upper and lower bounds for sloshing frequencies by intermediate problems*, ZAMP **32** (1981), 667-682.
- [24] L. Friedlander, *Some Inequalities between Dirichlet and Neumann Eigenvalues*, Arch. Rational Mech. Anal. **116** (1991), pp. 153-160.
- [25] P. R. Garabedian, *Partial differential equations*, John Wiley & Sons, Inc., New York - London - Sydney 1964.
- [26] T. Gasser, J. Hersch, *Über Eigenfrequenzen einer mehrfach zusammenhängenden Membran: Erweiterung von isoperimetrischen Sätzen von Pólya und Szegő*, Z. angew. Math. Phys. **19** (1968), 672-675.
- [27] H. R. Haegi, *Extremalprobleme und Ungleichungen konformer Gebietsgrößen*, Comp. Math. **8** (1950), 81-111.
- [28] M. Hantke, *Die Summe reziproker Eigenwerte*, Diplomarbeit Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg 2002.
- [29] G. H. Hardy, I. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, London, New York 1934.
- [30] P. Henrici, *Applied and Computational Complex Analysis*, John Wiley & Sons, Vol. III, New York 1986.
- [31] J. Hersch, *On Symmetric Membranes and Conformal Radius: Some Complements to Pólya's and Szegő's Inequalities*, Arch. Rat. Mech. Anal. **20** (1965), 378-395.
- [32] J. Hersch, L. E. Payne, *Extremal Principles and Isoperimetric Inequalities for some Mixed Problems of Stekloff's Type*, ZAMP **19** (1968), 802-817.
- [33] J. Hersch, L. E. Payne, M. M. Schiffer, *Some inequalities for Stekloff eigenvalues*, Arch. Rat. Mech. Anal. **57** (1974), 99-114.

- [34] D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, 2. Mitt., Nachr. Wiss. Ges. Göttingen, Math.-phys. Kl. (1904), 213-259.
- [35] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, Vol. I-IV, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York - London - Paris - Tokyo - Hong-Kong 1983.
- [36] J. R. Kuttler, V. G. Gigillito, *Sloshing of Liquids in Cylindrical Tanks*, AIAA Journal **22** (1984), 309-311.
- [37] R. S. Laugesen, *Eigenvalues of Laplacians with Mixed Boundary Conditions, under Conformal Mapping*, Illinois J. of Math., Vol. **42** (1998).
- [38] R. S. Laugesen, C. Morpugo, *Extremals for Eigenvalues of Laplacian under Conformal Mapping*, Journal of Functional Analysis, Vol. **155** (1998).
- [39] J. L. Lions, E. Magenes, *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*, Vol. I, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1972.
- [40] A. M. Marshall, I. Olkin, *Inequalities: Theory of Majorization and its Applications*, Academic Press New York 1979.
- [41] S. G. Michlin, *Vorlesungen über lineare Integralgleichungen*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1962.
- [42] Z. Nehari, *On the principal frequency of a membrane*, Pacific J. Math. **8** (1958), 285-293.
- [43] E. R. Neumann, *Studien über die Methoden von C. Neumann und G. Robin zur Lösung der beiden Randwertaufgaben der Potentialtheorie*, Teubner, Leipzig 1905.
- [44] F. Pockels, *Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ und deren Auftreten in der mathematischen Physik*, Teubner, Leipzig 1891.
- [45] G. Pólya, M. M. Schiffer, *Convexity of functionals by transplantation*, J. Anal. Math. **3** (1954), 245-345.
- [46] G. Pólya, G. Szegő, *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*, Princeton 1951.
- [47] A. P. Prudnikov, J. A. Bryckov, O. I. Maricev, *Integrale und Reihen: Elementare Funktionen*, Moskva: Nauka, 1981 (in Russisch).
- [48] Lord Rayleigh, *The theory of Sound*, 2nd ed., Vol. I, II, London 1894.
- [49] T. Runst, W. Sickel, *Sobolev Spaces of Fractional Order, Nemytskij Operators, and Nonlinear Partial Differential Equations*, Walter de Gruyter, Berlin - New York 1996.
- [50] M. Stiemer, *Zur Existenz und konformen Invarianz der Robinschen Funktion*, Dissertation Universität Dortmund 2001.

- [51] R. Sperb, *Bounds for the first eigenvalue of the elastically supported membrane on convex domains*, ZAMP **54** (2003), 879-903.
- [52] H. Triebel, *Analysis und mathematische Physik*, Teubner, Leipzig 1981.
- [53] H. Triebel, *Theory of function spaces*, Birkhäuser Verlag, Basel - Boston - Berlin 1992.
- [54] H. Weber, *Differentialgleichungen der mathematischen Physik*, Bd. I, II, Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig 1901.
- [55] R. Weinstock, *Inequalities for a classical eigenvalue problem*, J. Rat. Mech. Anal. **3** (1954), 745-753.
- [56] E. Zeidler, W. Hackbusch, H. R. Schwarz, *Teubner-Taschenbuch der Mathematik*, B. G. Teubner Stuttgart, Leipzig 1996.

Selbständigkeitserklärung

Ich bestätige, dass ich diese Arbeit selbständig und ohne fremde Hilfe verfasst und keine anderen als die von mir angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Die den benutzten Werken wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen habe ich als solche kenntlich gemacht.

Maren Hantke

Bildungsgang

Schulischer Werdegang

1984 - 1986	Polytechnische Oberschule „Ernst Thälmann“ in Magdeburg
1986 - 1991	Polytechnische Oberschule „Juri Gagarin“ mit erweitertem Russischunterricht in Magdeburg
1991 - 1996	Hegelymnasium in Magdeburg Abschluss mit allgemeiner Hochschulreife (1.3)

Weiterer Werdegang

10/1996 - 09/2002	Studium der Mathematik mit Nebenfach Betriebswirtschaftslehre an der Martin-Luther-Universität Halle - Wittenberg
04/1999 - 03/2000	Unterbrechung des Studiums für Mutterschafts- und Erziehungsurlaub
05.04.1999	Geburt meines Sohnes Nils Hantke
09/2002	Abschluss des Mathematikstudiums mit Diplom und dem Prädikat „sehr gut“
10/2002 - 12/2005	Graduiertenstipendium des Landes Sachsen-Anhalt
10/2002 - 12/2005	Anfertigung einer Doktorarbeit zum Thema „Summen reziproker Eigenwerte“ am Fachbereich Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle - Wittenberg
01/2004 - 09/2004	Unterbrechung der Tätigkeit für Mutterschafts- und Erziehungsurlaub
17.02.2004	Geburt meines Sohnes Clemens Hantke
29.03.2006	Einreichung der Doktorarbeit

Maren Hantke