ische
ionen.

lk.
rechn
823.

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:3-1192015415-1351375172-17/fragment/page=1

K. 360a.

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:3-1192015415-1351375172-17/fragment/page=2

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:3-1192015415-1351375172-17/fragment/page=3

94 A 7334
AK
UNIV.- U. LANDESBIBLIOTHEK * HALLE (SAALE)
Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:3-1192015415-1351375172-17/fragment/page=4

Bemerkungen

über

VERSCHIEDENE BEGRIFFE UND THEORIEN

aus der

ALLGEMEINEN GRÖSSEN- UND ZAHLENLEHRE,

von

Dr. Wilhelm August Förstemann,
Professor am Gymnasium zu Danzig.

12

Danzig, 1825.
In Commission der Gerhardschen Buchhandlung.

II

Gedruckt in der Wedelschen Hofbuchdruckerei.

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:3-1192015415-1351375172-17/fragment/page=5

Zur Einleitung.

Es ist nichts gewöhnlicher, als Lobeserhebungen der reinen Mathematik zu lesen, wegen der Schärfe und Evidenz ihrer Begriffe, der Strenge ihrer Beweise und der daraus entstehenden Gewifsheit ihrer Sätze. Wenn sie gleich dies Lob im Ganzen wohl verdient, so kann doch dadurch ein Unkundiger leicht verleitet werden, sich manche irrige Vorstellungen zu machen, und besonders, zu glauben, es müfsten die Elemente jener Wissenschaft in den Lehrbüchern sich auf eine solche Weise dargestellt finden, dafs wenig mehr zu wünschen übrig bliebe. Dies ist jedoch nicht so, und es ist auch sehr natürlich, dafs es nicht so ist. Schon die ersten Elemente der reinen Mathematik bieten dem wissenchaftlichen Nachdenken ein weites Feld dar, und dies Nachdenken ist schwierig; und zwar nicht selten da am schwierigsten, wo es auf Begründung der einfachsten Sätze, welche sich am Eingange der Wissenschaft befinden, ankommt. Viele solche Sätze werden aber, auch ohne dafs von ihnen ein eigentlicher, der Wissenschaft würdiger Beweis gegeben wird, leicht aus Beispielen begriffen; und hiemit begnügt sich die bei weitem gröfsere Anzahl derer, welche Mathematik treiben, indem sie so schnell als möglich den kräftiger lockenden Anwendungen der ersten Elemente zueilen, und die Nothwendigkeit einer festeren Begründung dieser Elemente entweder gar nicht fühlen, oder der Schwierigkeit wegen scheuen. Dabei ist nicht der ungemein grofse Einflufs zu übersehen, welchen die einmal eingeführten, oft sehr unzweckmäfsigen Bestimmungen und Bezeichnungen mannichfaltiger Begriffe und Operationen durch Sprach- und Schrift-Zeichen, so wie auch die gebräuchlichen Abgrenzungen und Anordnungen der Theile der Wissenschaft auf den Geist ausüben. Die Gewohnheit ist auch hier von grofser Gewalt; man bedient sich meistens der Worte und Zeichen, welche man bei Erlernung der Mathematik selbst kennen gelernt hat, so wie des eingeführten Fachwerkes der Wissenschaft, ohne die nicht selten Statt findende Unzweckmäfsigkeit zu ahnen, oder wenigstens, ohne sie hinwegzuräumen. In Hinsicht der Zeichen, und zwar sowohl der Sprach- als Schrift-Zeichen, ist es aber ausgemacht, dafs, so wie die Erweiterungen der Wissenschaft oft neue Zeichen nöthig machen, so auch umgekehrt neu eingeführte, gut gewählte Zeichen oft den Fortschritten der Wissenschaft sehr förderlich sind, und dafs durch Ein-

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:3-1192015415-1351375172-17/fragment/page=7

führung eines zweckmäſsigen Zeichens oft mehr, als durch viele Worte, zur Aufhellung einer besondern Theorie beigetragen werden kann, so daſs gerade die zweckmäſsige Bezeichnung wichtiger ist, als man vielleicht gewöhnlich glaubt. Bei diesem Allen ist es gewiſs nicht zu bewundern, wenn die gewöhnliche Darstellung der Anfangsgründe der reinen Mathematik, selbst in den bessern Lehrbüchern, noch lange nicht alle gerechten Forderungen erfüllet. Gestehen muſs man aber doch, daſs seit einer Reihe von Jahren die Zahl der Lehrbücher auf erfreuliche Weise zunimmt, welche die Elemente der Mathematik mit dem Streben nach Gründlichkeit und auf eigenthümliche Art behandeln, so daſs dadurch die in ihren höheren Theilen so erstaunlich angewachsene Wissenschaft auch in Hinsicht der Ausbildung der Elemente wirklich um Etwas vorgeschritten ist. Wir dürfen daher die angenehme Hoffnung hegen, man werde auch in Zukunft immer weiter vorwärts gehen, müssen aber auch wünschen, daſs bei solchen Bestrebungen manche Abwege und Uebertreibungen vermieden werden, wie z. B. das Hineinziehen von Spekulationen, welche mehr philosophischer Art, (man möchte fast sagen können „Unart“) sind, wobei man auf die mathematischen Begriffe eine Behandlungsart anwendet, welche einer gesunden Mathematik fremd seyn muſs; oder wie das übertriebene, zwecklose Umstoſsen herkömmlicher Kunstausdrücke und Bezeichnungen, und das Einführen neuer Worte und Zeichen, die oft schlecht gewählt sind, und vor den dadurch verdrängten keinen wesentlichen Vorzug haben.

Folgende Blätter haben den Zweck, in zerstreuten Bemerkungen über mancherlei Gegenstände der reinen Arithmetik auf die angedeutete Weise Einiges zur Förderung der Wissenschaft beizutragen, indem sie theils neue, theils von Andern aufgestellte, aber in der Wissenschaft noch nicht zum Bürgerrechte gelangte Ansichten, wenn gleich im Ganzen nur kurz, entwickeln, und hie und da neue Benennungen und Bezeichnungen vorschlagen. Zugleich aber sollen diese Blätter auch versuchen, einem Lehrbuche der Arithmetik, welches in einiger Zeit nachfolgen möchte, wo möglich freundlichen Empfang vorzubereiten.

1.

Den Begriff der Gröſse, eines Quanti, streng zu definiren darf und kann man schwerlich von der Mathematik verlangen. Erklärungen, wie man sie gewöhnlich findet, und welche darauf hinauslaufen, daſs Gröſsen Gegenstände sind, bei welchen Vermehrung, so wie auch im Allgemeinen (wenn gleich nicht in jedem besondern Falle; man denke nur z. B. an die Gröſse „1 Person“) Verminderung Statt finden kann, und auf welche sich die Begriffe eines Ganzen und eines Theils anwenden lassen, sind wohl ganz genügend. Mehr ist aber in Bezug auf die Begriffe der stetigen und der discreten Gröſsen, als der beiden Arten von Gröſsen, zu sagen. Ganz gewöhnlich lieset man, stetige Gröſsen seyen solche, bei denen ein Zusammenhang der Theile Statt finde, discrete, bei denen die Theile getrennt seyen. Wenn gleich hierin etwas Wahres ist, so sind dennoch, wie mir scheint, diese Definitionen nicht ganz genügend, und leicht Mißverständnissen ausgesetzt. Am richtigsten und verständlichsten scheint es mir, diese Größsenarten auf folgende Weise zu unterscheiden.

Discrete Größsen entstehen aus irgend einem Begriffe, so bald ich mir mehrere Gegenstände denke, denen dieser Begriff zukommt. Ihre Quantität bestehet in bloßer Vielheit. Es giebt bei ihnen eine untheilbare Grundeinheit, als das Einfachste und Kleinste, z. B. für eine Menge von Personen ist der Begriff „Eine Person“ die untheilbare Grundeinheit. Die letzten, kleinsten Theile einer discreten Größe sind der Grundeinheit gleich, und können nicht willkührlich bestimmt werden, sondern sind unabänderlich gegeben.

Bei den stetigen Größen ist keine untheilbare Grundeinheit vorhanden, sie sind bis ins Unendliche theilbar. Ihre Quantität beruht nicht in bloßer Vielheit, sondern in etwas Eigenthümlichem gewisser Objecte, in der Ausdehnung (bei den Raumgrößen) oder in etwas, das der Ausdehnung analog gedacht werden kann, (bei den Zeit-, Kraft-, Werth-Größen und dergl.) Die Theile der stetigen Größen lassen sich ganz nach Willkühr bestimmen. Die Vergleichungen zwischen gleichartigen discreten Größen kommen auf bloßes Zählen zurück, die Vergleichungen aber zwischen gleichartigen stetigen Größen erfordern ein Messen, im engsten Sinne, worin das Zählen ein vorhergegangenes Hervorbringen gleicher Theile voraussetzt.

Wendet man bei discreten Größen die untheilbare Grundeinheit an, so können sie nicht zu Brüchen führen, wendet man ein Aggregat von Grundeinheiten als künstliche Einheit an, so können sie nur zu gewissen Brüchen führen; z. B. es giebt wohl $\frac{1}{3}$ Dutzend Personen, aber nicht ein $\frac{1}{5}$ Dutzend Personen.

Irrationalzahlen sind auf discrete Größen gar nicht anwendbar.

Die stetigen Größen führen ohne alle Einschränkung zu Brüchen und zu Irrationalzahlen. Zu den letztern führen sie durch die Möglichkeit des Incommensurabel-Seyns gleichartiger stetiger Größen, welche Möglichkeit wieder in ihrer Theilbarkeit ins Unendliche gegründet ist.

Die Geometrie hat nicht alle stetigen Größen, sondern bloß die des Raumes zum Gegenstande; und es ist nicht gut, bloß die Raumgrößen als stetige Größen, oder wohl gar als die einzigen eigentlichen Größen zu betrachten. Die Arithmetik läßt sich nicht bloß auf discrete, sondern auch auf stetige Größen anwenden, daher ist die Unterscheidung der stetigen und der discreten Größen in der Einleitung zur Arithmetik nicht so wichtig, wie sie seyn würde, wenn es richtig wäre, daß die Arithmetik die discreten, die Geometrie die stetigen Größen betrachtete. Durch diesen falschen Satz wird die Geometrie neben die Arithmetik gestellt, statt daß sie, wenigstens in so fern man bloß auf die Gegenstände dieser Wissenschaften siehet, unter ihr stehen muß.

Wie leicht die Erklärung: „discrete Größen sind solche, deren Theile (Einheiten) getrennt sind, stetige solche, deren Theile zusammen hängen“ mißverstanden werden kann, mag Folgendes zeigen. Jedermann wird zugeben, daß, obgleich eine Seite eines Fünfecks, als Linie, und in so fern sie eine bestimmte Ausdehnung, eine Länge hat, zu den stetigen Größen gehört, doch der Ausdruck

„5 Seiten eines Fünfecks" nicht eine stetige, sondern nur eine discrete Gröfse bestimmt, bei deren Grundeinheit „Seite" die Ausdehnung, die Länge ganz unberücksichtigt bleibt. Sind aber die Seiten des Fünfecks getrennt? Haben sie nicht einen Zusammenhang an den Eckpunkten? Sollte also ein Anfänger nicht nach obiger Definition glauben müssen, der Ausdruck „5 Seiten eines Fünfecks" zeige eine stetige Gröfse an?

2.

An gleichartigen Gröfsen, stetigen wie discreten, können mannichfaltige Operationen vorgenommen werden. Am besten ist es, bei der Betrachtung dieser Operationen stetige Gröfsen, etwa gerade Linien, als Beispiele zu nehmen, weil bei den discreten diese Operationen zum Theil Einschränkungen erfahren, (die Division nämlich wegen der beschränkten Theilbarkeit discreter Gröfsen), und überhaupt die stetigen Gröfsen am wichtigsten sind.

Zwei gerade Linien können zunächst addirt werden. Man kann dabei den ersten Addendus, als Grundlage der Operation, dann den zweiten Addendus, und endlich das Resultat der Operation, die Summe, unterscheiden. In Bezug auf die Ordnung der Addenden hat man das Axiom, dafs dieselbe gleichgültig ist, dafs man ohne Aenderung der Summe den ersten und zweiten Addendus vertauschen kann. Mit der Addition hängt auf bekannte Weise die Subtraction zusammen, bei der die Summe und ein Addendus gegeben ist, der andere Addendus aber bestimmt werden soll. Genau genommen sind aber zwei Subtractionen zu unterscheiden. Bei der einen sucht man den ersten Addendus, bei der andern den zweiten. Jene fragt: Zu welcher Linie, als erstem Addendus, mufs eine gegebene Linie, als zweiter Addendus, hinzukommen, um die gegebene Summe hervorzubringen? und ist die Subtraction im engern Sinne. Diese fragt: Was mufs, als zweiter Addendus, zu einer gegebenen Linie, als erstem Addendus, hinzukommen, um eine gegebene Summe hervorzubringen? und sie ist die vergleichende Subtraction, oder die Bestimmung des arithmetischen Verhältnisses. — Addition, Subtraction und Bestimmung des arithmetischen Verhältnisses sind die drei Operationen der ersten Stufe.

Aus der Addition entsteht auf bekannte Weise die Multiplication. Es wird eine Summe aus lauter gleichen Addenden gebildet, ein solcher Addendus giebt den Multiplicandus; die Menge der Addenden wird durch eine Zahl ausgedrückt, und giebt den Multiplicator; die Summe aller Addenden ist das Product. — Mit der Multiplication hängen zwei andere Operationen zusammen; die Division, welche aus dem Producte und dem Multiplicator den Multiplicandus bestimmt, und die Bestimmung des geometrischen Verhältnisses, welche aus dem Producte und dem Multiplicandus den Multiplicator sucht. Bei der Division heifst der gesuchte Multiplicandus am besten aliquoter Theil, oder schlechthin Theil; man sagt aber hiefür gewöhnlich, obschon etwas unpassend, Quotient. Bei der Bestimmung des geometrischen Verhältnisses heifst der gesuchte Multiplicator gewöhnlich Exponent des Verhältnisses; aber man könnte ihn, mit einem gerade hier sehr passenden Worte, auch Quotient nennen. Die Bestimmung des geometrischen Verhältnisses kann auch vergleichende Division genannt werden, wenn man dies Wort Division in einem weiteren Sinne gebrauchen will. Multiplication, Division und Bestimmung des geometrischen Verhältnisses bilden die zweite Stufe der Operationen an Gröfsen.

Erst bei der Multiplication ergaben sich die Zahlen als nothwendig; zur Ableitung der Idee der Operationen der ersten Stufe waren sie nicht erforderlich. Bei der Multiplication sind aber die Zahlen nichts anders, als Zeichen, wie eine gewisse Gröfse aus einer andern, gleichartigen, durch Setzen dieser Gröfse, hervorzubringen ist. Dieses können wir daher füglich als Definition des Begriffs der Zahl ansehen; ganz kurz können wir auch sagen: „die Zahlen sind Multiplicatoren," oder auch, indem wir die mit der Multiplication zusammenhängende Bestimmung des geometrischen Verhältnisses der Definition unterlegen: „Zahlen sind Ausdrücke, Exponenten, für das Verhältnifs einer Gröfse zu einer gleichartigen;" die letztere Gröfse ist dabei die Einheit, mit welcher jene gemessen wird.

Eine benannte Zahl ist nun nichts anders, als eine Gröfse, ausgedrückt vermittelst einer Zahl in Verbindung mit einer zu Grunde gelegten Einheit; oder ist ein Product aus dieser Einheit, als Multiplicandus, und der Zahl, als Multiplicator.

Wenn gleich die hier gegebene Bestimmung des Begriffs der Zahl nicht durchaus für neu ausgegeben werden kann, so ist sie doch schwerlich schon ganz auf die obige Weise begründet, und noch weniger in die Lehrbücher ganz aufgenommen. Gerade der Begriff der Zahl, der Hauptbegriff der Arithmetik, findet sich in den mathematischen Elementarwerken meistens stiefmütterlich behandelt. In einigen Werken wird er wie ein undefinirbarer Grundbegriff angesehen, und kaum einigermafsen verdeutlicht; in andern wird er mit dem Begriffe der discreten Gröfsen verwirrt, so dafs man behauptet, die Arithmetik habe die discreten Gröfsen zum Gegenstande. Ganz besonders häufig sagt man, eine unbenannte Zahl sei eine solche, die sich auf eine unbestimmte Einheit beziehe. Dieses mag, auf gewisse Art verstanden, sich mit der obigen Ansicht vereinigen lassen; aber man scheint hiebei z. B. die Zahl 5 für einerlei zu halten mit der Angabe „5 Dinge." Es ist aber gewifs nöthig, sich in der Abstraction höher zu heben, und mit Weglassung selbst der umfassendsten Einheit, Ding, das blofse Zeichen 5 als eine Zahl anzusehen, und sich nach der obigen Weise darunter nichts zu denken als das Zeichen der Operation, welche man nach der Vorschrift dieser Zahl 5 vornimmt, wenn man aus dem Begriffe eines Dinges den Begriff „5 Dinge" sich ableitet.

Jeder Zahl kann nun eine bestimmte Bedeutung zugeschrieben werden, so dafs dadurch jede einzelne Zahl ihre besondere Definition erhält. So ist 1 das Zeichen dafür, dafs man ein Etwas, die Gröfsen-Einheit, geradezu und unverändert denken soll. (Dabei ergiebt sich sehr deutlich der wesentliche Unterschied des Begriffs der Einheit und des Begriffs der Zahl 1 *). Die Zahl 2 ver-

*) In dem Lehrbuche der Arithmetik für Schulen von E. G. Fischer, Berlin 1822, heifst es im § 3: „Man mufs aber Eins als Zahl, und Eins als Einheit unterscheiden. Jedes

langt, die Einheit 1 mal und noch 1 mal zu denken, und das einzeln Gedachte zu vereinigen. Diese Operation heifst etwas 2 mal denken. Die Zahl 3 verlangt, die Einheit 2 mal und noch 1 mal (oder 1 mal, noch 1 mal, und noch 1 mal) zu denken, und das einzeln Gedachte zusammenzufassen; u. s. w.

Uebrigens versteht es sich von selbst, dafs im Verfolge der Arithmetik genau gezeigt werden mufs, wie die Zahlen höherer Arten, als negative, Brüche und Irrational-Zahlen entstehen, und wie der Begriff der Zahlen gefafst werden mufs, um auch solche Zahlen unter sich zu begreifen.

Noch bleibt ein Einwand zu widerlegen, welcher hier gemacht werden möchte. Wie kann man, möchte gefragt werden, den Begriff der Zahl auf den der Multiplication stützen, da ja schon die Addition die Zahlen voraussetzt, und erst aus der Addition die Multiplication entstehet? Die Antwort ist leicht. Es ist der Begriff der Zahl ja nicht aus der Multiplication an Zahlen, sondern aus der unmittelbaren Multiplication an Gröfsen geschöpft worden, wobei der Multiplicandus eine unmittelbar gegebene Gröfse, und nur der Multiplicator eine Zahl ist; diese Multiplication wird aus der Addition an geradezu gegebenen Gröfsen verständlich, welche nicht den Begriff der Zahl voraussetzt. Die Ordnung ist also folgende. Man stellt zuerst die Begriffe der Operationen der ersten Stufe an unmittelbar gegebenen Gröfsen auf; aus diesen leiten sich die Operationen der zweiten Stufe, ebenfalls für unmittelbar gegebene Gröfsen, und mit diesen Operationen zugleich die Idee der Zahlen ab; erst jetzt ergeben sich die Operationen an Zahlen, die eigentlichen Rechnungen, welche wieder mit der Addition beginnen, und der wichtigste Gegenstand der Arithmetik sind. — Es bleibt bei diesen Operationen zu zeigen, wie sie an den unbenannten Zahlen, im obigen Sinne, möglich sind, und was sie an ihnen zu bedeuten haben. In so fern die Zahlen nicht Gröfsen sind, sondern nur Operationen an Gröfsen bezeichnen, mufs man die Arithmetik nicht eigentlich als eine Wissenschaft betrachten, welche von den Gröfsen an sich handelt, sondern nur als eine Wissenschaft der Operationen an Gröfsen.

Es mögen hier noch einige Erklärungen der Zahlen, welche in verschiedenen mathematischen Werken gegeben werden, und welche der hier gegebenen Erklärung mehr oder weniger nahe stehen, Platz finden.

In v. Segner's Lehrbuche „*Elementa Arithmeticae, Geometriae et Calculi geometrici*," dem ersten Theile seines immer noch schätzbaren *Cursus mathematicus*, heifst es im §. 2. sehr gut: „*Numerus autem est abstractus conceptus* „*modi, quo magnitudo aliqua A fit ex alia B, vel hujus partibus aliquotis, quae* „*quidem B jam Unum dicitur, vel Unitas.*" Man sieht, diese Erklärung umfafst die ganzen und die gebrochenen Zahlen.

Von einem *Mr. de Prémonteal* sind einige *Discours* vorhanden, welche die Mathematik betreffen. Der Verfasser kennt deren 4, nämlich 1) den

---

„einzelne gezählte Ding ist die Zahl Eins; aber die allen gezählten Dingen zukommende „gemeinschaftliche Benennung oder Begriff ist die Einheit." Hier darf man wohl fragen: Wie kann ein gezähltes Ding die Zahl 1 seyn? Es scheint, man könne blofs sagen: Das gezählte Ding wird durch 1 ausgedrückt.

Discours sur l'utilité des Mathématiques. Paris. 1742. 3) den *Discours sur diverses notions préliminaires à l'étude des mathématiques. Paris.* 1743. 4) den *Discours sur la nature du nombre. Paris.* 1743. In diesen Abhandlungen findet man Witz und gute, klar vorgetragene Gedanken. In der vierten werden mancherlei Erklärungen der Zahlen als ungenügend verworfen, und als die richtige aufgestellt: „*Le nombre est le rapport précis et déterminé d'une quantité quel-„conque avec une autre de même genre prise pour unité.*"

In den *Problèmes et Développemens sur diverses parties des mathématiques par M. Reynaud et M. Duhamel. Paris* 1823," sagt der zuletzt genannte Verfasser gleich zu Anfange des *Art.* 1: „*Le nombre est le rapport de deux gran-„deurs de même espèce; il donne la mesure de l'une par rapport à l'autre consi-„dérée comme terme de comparaison et à laquelle on donne alors le nom d'unité.*"

So wohl *de Prémontval* als *Duhamel* hätten wohl statt *rapport* besser gesagt: *l'expression du rapport.*

Auch in Eulers Algebra heifst es im §. 4.: „so dafs eine Zahl nichts „anders ist, als das Verhältnifs, worin eine Gröfse gegen eine andere, welche „für die Einheit angenommen wird, steht."

In Thibaut's „Grundrifs der reinen Mathematik" lieset man Seite 2: „So entstehen Zahlen, Darstellungen der bestimmten Art und Weise, durch „das Setzen einer gewissen Gröfse die Vielheit einer andern zu erzeugen." Dieses erklärt freilich blofs die ganzen Zahlen.

3.

Die Addition an unbenannten (ganzen, positiven) Zahlen kann als ein Aufwärtsgehen in der Zahlenreihe angesehen, und durch Verbindung zweier Zahlenreihen versinnlicht werden. Z. B. alle Additionen mit dem ersten Addendus 5 werden versinnlicht durch

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ......
0, 1, 2, 3, 4 ......

Die Subtraction ist das Gegentheil der Addition, ein Abwärtsgehen in der Zahlenreihe, und kann durch Verbindung zweier Zahlenreihen versinnlicht werden. Z. B. die Subtractionen mit dem Minuendus 7 werden so versinnlicht:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0

Die Addition $5 + 3 = 8$ giebt in Hinsicht ihrer Anwendung auf Gröfsen den Satz: Eine Einheit 5 mal nehmen, dann dieselbe 3 mal nehmen, und das Resultat jener Verfünffachung und das dieser Verdreifachung zusammensetzen, ist eben so viel, wie dieselbe Einheit 8 mal setzen. So spricht diese Rechnung und so sprechen überhaupt die Rechnungen der reinen Arithmetik, da sie sich auf Zahlen beziehen, welche nur Operationen an Gröfsen andeuten, im Allgemeinen nicht Sätze über Gröfsen an sich, sondern Sätze über Operationen an Gröfsen irgend einer Art aus, und die Arithmetik, ja man kann wohl sagen die allgemeine Gröfsenlehre, handelt nicht eigentlich von den Gröfsen, sondern von den Operationen an Gröfsen, und von dem Zusammenhange zwischen Gröfsen.

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:3-1192015415-1351375172-17/fragment/page=13

4.

Die Subtraction würde in Fällen, wo der Subtrahendus gröſser ist als der Minuendus, unmöglich scheinen, wenn man nicht eine besondere Klasse von Zahlen, nämlich die Zahlen unter 0, oder die negativen Zahlen aufstellen wollte. *)

So ist $5 - 8 = 0 - 3$ oder $= -3$; dieses ist eine Zahl, welche 3 Stellen unter 0 steht.

Die Idee der Addition einer negativen Zahl zu einer positiven oder auch selbst negativen, erhält man leicht aus der Versinnlichung der Addition. (Siehe 3). Die Addition $5 + (-2) = 3$, und überhaupt alle Additionen mit dem ersten Addendus 5, siehet man versinnlicht in:

$$\ldots\ldots -2, -1, \ 0, \ 1, \ 2, \ 3, \ 4, 5, 6, 7 \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, \ 0, \ 1, \ 2 \ldots\ldots$$

Eben so ist es mit der Subtraction. Die Subtractionen mit dem Minuendus 3, z. B. $3 - (-2) = 5$, werden so versinnlicht:

$$\ldots\ldots -1, 0, 1, 2, 3, \ 4, \ 5 \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \ 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2 \ldots\ldots$$

Dadurch erhält man die Sätze: Addition einer negativen Zahl ist ein Hinuntergehen in der Zahlenreihe, oder so viel wie Subtraction der positiven Zahl, welche ihr entgegengesetzt ist. — Subtraction einer negativen Zahl ist ein Hinaufgehen in der Zahlenreihe, und so viel wie Addition der entgegengesetzten positiven Zahl. — Subtractionen können allenthalben in Additionen verwandelt werden; die Subtraction wird also durch Anwendung positiver und negativer Zahlen mit der Addition verschmolzen.

Es ist eine Hauptfrage: Wie können negative Zahlen auf Gröſsen angewendet werden? Was hat eine negative Zahl hier für eine Bedeutung? Hier zeigt sich: Die negativen Zahlen können auf eine Gröſsenart angewandt werden, wenn bei zwei Gröſsen dieser Art ein Gegensatz Statt finden kann, der dem Gegensatze positiver und negativer Zahlen analog ist. Eine negative Zahl fordert bei dieser Anwendung, daſs man die Einheit so viel mal setze, wie die entgegengesetzte positive Zahl anzeigt, dann von dem Resultate das Entgegengesetzte nehme, oder auch, mit umgekehrter Ordnung, daſs man von der Einheit daſs Entgegengesetzte nehme, dann dieses so viel mal setze, wie jene positive Zahl anzeigt.

Das Zeichen — erscheint bei negativen Zahlen als Zeichen der Entgegensetzung, während es auch Zeichen der Subtraction ist, + ist als Zeichen der Bestärkung anzusehen, während es auch Addition bezeichnet. Bestärkung aber ist Addition zu 0, und Entgegensetzung ist Subtraction vom Minuendus 0; hieraus erklärt es sich, in wie fern jene doppelten Bedeutungen dieser Zeichen erlaubt sind, und nicht zu Irrungen führen können.

---

*) Der Verfasser glaubt, hier um so mehr kurz seyn zu können, da er schon in dem Werkchen: „Ueber den Gegensatz positiver und negativer Gröſsen. Nordhausen 1817,“ seine Ansicht ziemlich vollständig entwickelt hat.

Ein Buchstabe kann eben sowohl eine negative wie eine positive Zahl bedeuten. Man darf nicht sagen, $-a$ sey negativ, sondern nur $-a$ sey ein Buchstabe mit dem Vorzeichen $-$; es sey denn, dafs ausdrücklich gesagt wäre, a solle eine positive Zahl bedeuten, wo dann freilich $-a$ negativ ist. Jedesmal ist

$$--a = a$$
$$---a = -a \text{ u. s. w.}$$

5.

Zu den Rechnungen der ersten Stufe gehört aufser der Addition und der Subtraction auch die Bestimmung des arithmetischen Verhältnisses zweier Zahlen. Wie diese von der Addition abhängt, zeigt Folgendes:

In der Addition $a+b=c$ kann man den ersten Addendus a die Grundlage, den Ausdruck $+b$, welcher die Addition des zweiten Addendus fordert, die Bestimmung, und c das Resultat der Rechnung nennen, so dafs b die in der Rechnungsbestimmung enthaltene Zahl ist. Die Subtraction $c-b=a$ sucht aus dem Resultate c und der in der Rechnungsbestimmung enthaltenen Zahl b die Grundlage a. Man kann aber auch die Summe c und den ersten Addendus a als gegeben annehmen, und nach der in der Rechnungsbestimmung enthaltenen Zahl b fragen. So entsteht aus $5+3=8$ eine Rechnung, in welcher 3 aus 8 und 5 gesucht wird, und die folgendermafsen versinnlicht werden kann.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
0, 1, 2, 3

Diese Versinnlichung zeigt, dafs zu 5 addirt werden mufs 3, wenn 8 kommen soll. Man kann diese Rechnung, wodurch das arithmetische Verhältnifs von 8 zu 5 bestimmt wird, als eine Vergleichung zwischen 8 und 5 ansehen, und daher vergleichende Subtraction nennen; durch Vergleichung erfährt man ja Verhältnisse. Statt der bei der gewöhnlichen Subtraction gebräuchlichen Benennungen, Minuendus, Subtrahendus, Rest, hat man hier die Benennungen Vorderglied, Hinterglied, Exponent des Verhältnisses; statt Exponent des Verhältnisses sind aber die kürzern Ausdrücke Unterschied, Differenz, ganz passend, welche sich aber eigentlich nicht eignen, um das Resultat der gewöhnlichen Subtraction zu bezeichnen.

Da übrigens $a+b=b+a$, d. h. da man die Addenden vertauschen kann, ohne dafs der Werth der Summe sich ändert, so folgt, dafs diese Vergleichung von c mit a dieselbe Zahl als Differenz geben mufs, welche als Rest erscheint, wenn man a von c subtrahirt. So giebt ja auch die Subtraction $8-5$ den Rest $=3$, wie die Versinnlichung zeigt:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
5, 4, 3, 2, 1, 0

denn hier sieht man, 5 mufs zu 3 addirt werden, wenn 8 kommen soll.

Daher kann das Zeichen $-$ auch als Zeichen der vergleichenden Subtraction gebraucht werden; es ist $8-5=3$, man mag $-$ als Zeichen der eigentlichen oder der vergleichenden Subtraction ansehen. So bezeichnet also $-$ überhaupt dreierlei, nämlich aufser diesen beiden Subtractionsarten auch Entgegensetzung.

Da f — g denselben Werth bezeichnet, man mag — als Zeichen der Subtraction oder als Zeichen der Bestimmung des arithmetischen Verhältnisses betrachten, so erklärt es sich, woher es kommt, daſs man gewöhnlich nur zwei Rechnungen, Addition und Subtraction, aufstellt, die Bestimmung des arithmetischen Verhältnisses aber nicht als Grundrechnungsart aufführt, sondern gewöhnlich nur später einige Sätze über arithmetische Verhältnisse nachholt, und dabei auf die eigentliche Subtraction zurückweiset. Es scheint in der That nicht ganz wissenschaftlich, die vergleichende Subtraction mit der gewöhnlichen Subtraction zusammen zu fassen, da diese Subtractionsarten in der Idee und wirklich auch in der Ausführung, wie die Versinnlichungen zeigen, verschieden sind, und nur in Hinsicht des Resultates zusammen stimmen. Man kann die Rechnungen der ersten Stufe, Addition, Subtraction und Bestimmung des arithmetischen Verhältnisses, nach der Reihe zusammensetzende oder vorschreitende, auflösende oder zurückschreitende, und vergleichende Operation nennen.

6.

Die positiven Zahlen können nach ihrer Höhe in der Zahlenreihe verglichen werden. Ungleichungen, in denen ausgesprochen wird, eine Zahl sey höher als eine andere, sollen durch die Zeichen ⋗ und ⋖ bezeichnet werden, so daſs die Oeffnung des Winkels der höheren Zahl zugekehrt ist. So ist 5 ⋗ 3. Wendet man diese unbenannte Zahlen auf dieselbe Einheit, z. B. 1 Fuſs an, so findet sich, daſs 5 Fuſs gröſser ist als 3 Fuſs, und so giebt, auch bei jeder andern Einheit, die höhere Zahl immer die gröſsere Gröſse; daher mag man auch sagen, 5 sey gröſser als 3, obgleich man hiebei eine Beziehung zwischen den hervorgebrachten Gröſsen auf die Zeichen für die Art des Hervorbringens überträgt. «Gröſser», «gleich» und «kleiner» werde durch die Zeichen |ı, || und ı| bezeichnet, so daſs 5 |ı 3, 5 || 5, 3 ı| 5. Man erkennt, daſs bei positiven Zahlen die höhere auch die gröſsere ist.

Beide Vergleichungsweisen der Zahlen, die nach Quantität und die nach Höhe in der Zahlenreihe, müssen nun auch auf negative Zahlen ausgedehnt werden. Positive Zahlen sind höher als 0, höher als negative Zahlen, und desto höher, je mehr sie sich von 0 entfernen; negative Zahlen sind niedriger als 0, niedriger als positive Zahlen, und desto niedriger, je mehr sie sich von 0 entfernen. Es ist also:

7 ⋗ — 5
5 ⋗ — 5
— 3 ⋗ — 5

Wendet man auf dieselben Zahlen die Vergleichung nach Quantität an, indem man sie z. B. mit der Einheit «Fuſs rechts» verbindet, so wird, weil 7 Fuſs rechts gröſser als (— 5) Fuſs rechts, d. h. gröſser als 5 Fuſs links sind, auch seyn müssen

7 |ı — 5;

weil 5 Fuſs rechts an Länge (wenn gleich nicht an Lage) mit (— 5) Fuſs rechts, oder mit 5 Fuſs links gleich sind, so wird seyn müssen

5 || — 5;

und weil (— 3) Fuſs rechts, d. h. 3 Fuſs links, kleiner sind, als (— 5) Fuſs rechts, d. h. 5 Fuſs links, so wird seyn

— 3 ı| — 5.

Bei zwei negativen Zahlen ist die höhere immer die kleinere, bei einer positiven und einer negativen Zahl ist die positive zwar immer höher, aber bald gröſser, bald kleiner als die negative, ja zuweilen derselben gleich, wie bei 5 || — 5. Ueberhaupt ist eine Zahl desto gröſser, je weiter sie von 0 entfernt liegt.

Zwischen «höher» und «niedriger» liegt in der Mitte «auf derselben Stelle stehend» oder «völlig gleich.» Dieser Begriff werde durch = bezeichnet. So ist 5 = 5, — 5 = — 5, aber nicht 5 = — 5, sondern nur 5 || — 5.

Gewöhnlich nimmt man nur die Zeichen $>$, $=$, $<$ an, und spricht sie aus: «gröſser», «gleich», «kleiner», wo nur das mittlere Zeichen richtig benannt ist, die Benennungen der beiden andern Zeichen falsch sind, und, besonders bei einem Anfänger, die Begriffe verwirren müssen. Jeder verstehet — 7 $<$ 0, d. h. — 7 ist niedriger als 0, sobald er sich gewöhnt hat, die positiven Zahlen von 0 nach oben hin sich erstreckend zu denken; aber es kostet Mühe, dem Ausdrucke « — 7 ist kleiner als 0» (die negativen Zahlen sind kleiner als nichts) einen vernünftigen Sinn unterzulegen. — Ein groſser Vortheil, der sich aus der Einführung der doppelten Vergleichungsweise der Zahlen und der Einführung der Zeichen |ı, ||, ı| ergiebt, wird sich weiter unten zeigen, wenn die Rechnungen der zweiten Stufe erörtert seyn werden.

7.

Die Multiplication entspringt aus der Addition gleicher Zahlen. Als Definitionsgleichung derselben kann man aufstellen:

$$a\,m = \underset{1}{a} + \underset{2}{a} + \underset{3}{a} + \ldots\ldots + \underset{m}{a}$$

Dieses giebt aber noch nicht den Begriff von einer Multiplication durch einen negativen Multiplicator; man gelangt aber zu dem Begriffe einer solchen Multiplication auf doppelte Weise. Nämlich:

1) Aus der Lehre von der Addition läſst sich leicht der Begriff der arithmetischen Progression ableiten, und diese führt zu dem Begriffe des Vielfachen einer Zahl, und zu dem Begriffe der Multiplication. Die Multiplicationen mit dem Multiplicandus 5 werden durch Verbindung zweier arithmetischen Progressionen versinnlicht, von denen die eine die Reihe der ganzen Zahlen, die andere aber eine Progression mit der Differenz 5 ist; auf folgende Weise:

Multiplicatoren .... — 3, — 2, — 1, 0, 1, 2, 3 ....
Producte .... — 15, — 10, — 5, 0, 5, 10, 15 ....

Die Multiplicationen mit dem Multiplicandus — 5 werden durch Verbindung folgender Reihen versinnlicht:

Multiplicatoren .... — 3, — 2, — 1, 0, 1, 2, 3 ....
Producte .... 15, 10, 5, 0, — 5, — 10, — 15 ....

Aus diesen Versinnlichungen ergeben sich die bekannten Regeln, nach denen man das Vorzeichen des Products aus den Vorzeichen der Factoren bestimmt, und es ergiebt sich zugleich, daſs die Quantität des Productes unabhängig ist von den Vorzeichen der Factoren.

2) Zu demselben Resultate gelangt man auch, wenn man die Multiplication an geradezu gegebenen Gröſsen, und die Bedeutung der negativen Zahlen zu Grunde legt.

Eine Gröſse durch eine Zahl multipliciren heiſst, an der Gröſse die Operation vornehmen, welche die Zahl durch ihre Bedeutung vorschreibt. So muſs man, um «(— 3) Fuſs rechts» zu erhalten, an der Einheit «Fuſs rechts» die Operation vornehmen, welche — 3 vorschreibt, d. h. man muſs den Fuſs rechts 3 mal setzen, also mit 3 multipliciren, und was gefunden wurde, in das Entgegengesetzte verwandeln.

Dieses trage man nun auf die Multiplication an unbenannten Zahlen über, und nehme dieselbe Operation vor, wenn man mit — 3 die unbenannte Zahl 5 multipliciren soll. Man multiplicire 5 mit 3, so hat man $5.3 = \frac{5}{1} + \frac{5}{2} + \frac{5}{3} = 15$; hievon nehme man das Entgegengesetzte, so findet man $5.(-3) = -15$. Multiplication durch eine negative Zahl giebt daher jedesmal ein Product, das an Qualität von dem Multiplicandus verschieden ist, und es entstehet auf eine sehr klare Weise, die Regel: Gleiche Zeichen geben +, ungleiche —.

Dies gilt aber auch für Buchstaben, selbst wenn es unbestimmt bleibt, ob ein Buchstabe eine positive, oder eine negative Zahl bedeutet. So ist $(+a).(+b) = +ab$, d. i. den Multiplicandus und den Multiplicator unverändert lassen (bestärken) heiſst das Product unverändert lassen; $(+a).(-b) = -ab$, d. i. den Multiplicandus unverändert lassen, den Multiplicator aber ins Gegentheil verwandeln, heiſst das Product ins Entgegengesetzte verwandeln, u. s. w.

Die Division ist diejenige Operation, bei welcher man aus einem gegebenen Producte und einem gegebenen Multiplicator den Multiplicandus sucht. Daraus leitet sich für sie bekanntlich ebenfalls jene Regel in Bezug auf die Vorzeichen ab: Gleiche Zeichen geben +, ungleiche —.

Bei der Division sind die Benennungen Divisor, Dividendus, so wie Division selbst, zweckmäſsig gewählt, aber die Benennung Quotient ist unzweckmäſsig. Man sollte dafür sagen «aliquoter Theil», oder schlechthin «Theil». Doch mag man auch die gewohnte Benennung beibehalten, wenn man nur den richtigen Begriff damit verbindet.

8.

Wie, um alle Subtractionen an gewöhnlichen Zahlen möglich zu machen, die negativen Zahlen aufgestellt werden müssen, so ist zur Möglichkeit aller Divisionen an ganzen Zahlen die Einführung der Brüche nöthig. $\frac{3}{7}$ deutet die Forderung der Division $3:7$ an.

In wie fern können aber Brüche auf Gröſsen angewandt werden? Was haben Brüche für eine Bedeutung bei ihrer Anwendung auf Gröſsen? Antwort: Der Bruch $\frac{m}{n}$ ist, auf eine Gröſseneinheit U angewandt, da $\frac{m}{n}.U = (m:n).U = m.U:n$, ein Zeichen, daſs man an U eben so verfahren solle, wie der Ausdruck $mU:n$ fordert, d. h. daſs man das m fache der Einheit nehmen, und dieses in n gleiche Theile theilen, einen solchen Theil aber angeben soll; oder, mit geänderter Ordnung, daſs man die Einheit in n gleiche Theile theilen, und einen solchen Theil m mal setzen soll. Ein positiver Bruch enthält also zwei Operationen, eine Multiplication und eine Division, in seiner Bedeutung. Ein negativer Bruch fordert aufser diesen beiden Operationen auch noch eine Entgegensetzung.

Die Definitionen der Zahlen: «Zahlen sind Zeichen für die Hervorbringung einer gewissen Gröfse aus einer Einheit»; oder «Zahlen sind Ausdrücke des Verhältnisses zweier gleichartigen Gröfsen» sind nun immer noch gültig, indem sie auch die Brüche, wie die negativen Zahlen umfassen.

Dem Gegensatze einer positiven und der gleich grofsen negativen Zahl, dem Gegensatze zwischen $+$ a und $-$ a, ist der Gegensatz eines Bruches $\frac{m}{n}$ und des umgekehrten $\frac{n}{m}$ analog. Der erste dieser Gegensätze kann Additionsgegensatz, der andere Multiplicationsgegensatz genannt werden. $\frac{m}{n}$ und $\frac{n}{m}$ sind reciproke Zahlen. Hier ist einer von den Punkten, wo sich die Unterscheidung der Begriffe «Gröfse» und «Zahl» recht deutlich als nothwendig zeigt; der Multiplicationsgegensatz nämlich kann nicht an eigentlichen Gröfsen, sondern nur an unbenannten Zahlen Statt finden. Der Additionsgegensatz übrigens findet auch an Gröfsen Statt.

Soll eine Gröfse oder Zahl a durch den Bruch $\frac{r}{s}$ multiplicirt werden, so ist an a die Operation auszuführen, welche der Bruch $\frac{r}{s}$ durch seine Bedeutung vorschreibt, d. h. man mufs a durch r multipliciren, und das Resultat mit s dividiren.

Wie eine negative Zahl durch einen Buchstaben ohne vorgesetztes Minuszeichen angedeutet werden kann, so darf man auch unter einem einfachen Buchstaben, im Allgemeinen, wenn nichts Näheres darüber bestimmt wird, eben so gut einen Bruch, wie eine ganze Zahl denken.

9.

Zu den Rechnungen der dritten Stufe gehört, aufser Multiplication und Division, auch die Bestimmung des geometrischen Verhältnisses. Den Zusammenhang dieser Rechnung mit der Multiplication zeigt Folgendes:

In der Multiplication $a.m = p$ kann man a die Grundlage, m die Bestimmung, p das Resultat der Rechnung nennen, so dafs m die in der Rechnungsbestimmung enthaltene Zahl ist. (Man könnte den Multiplicator m, und eben so bei der Addition den zweiten Addendus, nicht unpassend mit dem Worte Operator bezeichnen, welches den Benennungen Multiplicator, Factor, Divisor analog gebildet ist). Die Division $p : m = a$ nun sucht die Grundlage aus dem Resultate und der in der Rechnungsbestimmung enthaltenen Zahl (dem Operator), man kann aber auch das Product p und den Multiplicandus a, oder also das Resultat und die Grundlage der Multiplication, als gegeben annehmen, und den Multiplicator, oder die Zahl suchen, welche in der Rechnungsbestimmung enthalten ist, (man kann den Operator suchen). Dies ist eine Vergleichung von p mit a, und wird Bestimmung des geometrischen Verhältnisses von p zu a genannt; p heifst Vorderglied, a Hinterglied, m Exponent des Verhältnisses. Gerade hier wäre aber für m die Benennung Quotient sehr passend, denn m zeigt an, wie viel mal a in p enthalten ist.

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:3-1192015415-1351375172-17/fragment/page=19

Da $am = ma$, so muſs übrigens, bei unbenannten Zahlen, diese Vergleichung von p mit a dieselbe Zahl hervorbringen, welche aus der Division $p : a$ entsteht. Daher wird auch diese vergleichende Rechnung durch : bezeichnet, und häufig Division genannt. Es mag dieses auch immerhin geschehen, nur muſs man doch dann die eigentliche, eintheilende Division von dieser vergleichenden zu unterscheiden wissen. Der Unterschied beider Divisionsarten erhellt am deutlichsten bei der Anwendung auf benannte Zahlen, oder selbst auf unmittelbar gegebene Gröſsen. Hier ist bei der Division der Divisor eine unbenannte Zahl, das Resultat eine mit dem Dividendus gleichartige Gröſse; bei der Bestimmung des geometrischen Verhältnisses dagegen ist das Hinterglied (Divisor) dem Vordergliede (Dividendus) gleichartig, das Resultat aber eine unbenannte Zahl; überhaupt ist hier diese Operation nichts anders, als ein Messen des Vordergliedes durch das Hinterglied.

Unter den Rechnungen der zweiten Stufe ist die Multiplication die zusammensetzende oder vorschreitende, die Division die auflösende oder zurückschreitende, die Bestimmung des geometrischen Verhältnisses aber die vergleichende.

10.

In Betreff des Zusammenhangs zwischen Ungleichungen vermittelst Addition und Subtraction, Multiplication und Division, findet man in den Lehrbüchern folgende Sätze:

1) Gleiches zu Gröſserem addirt giebt Gröſseres.
2) Gleiches von Gröſserem subtrahirt giebt Gröſseres.
3) Gröſseres von Gleichem subtrahirt giebt Kleineres.
4) Gröſseres zu Gröſserem addirt giebt Gröſseres.
5) Kleineres von Gröſserem subtrahirt giebt Gröſseres.
6) Gröſseres mit Gleichem multiplicirt giebt Gröſseres.
7) Gröſseres durch Gleiches dividirt giebt Gröſseres.
8) Gleiches durch Gröſseres dividirt giebt Kleineres.
9) Gröſseres durch Gröſseres multiplicirt giebt Gröſseres.
10) Gröſseres durch Kleineres dividirt giebt Gröſseres.

Alle diese Sätze sind ohne allen Zweifel richtig, so lange man sie bloſs auf positive Zahlen anwendet. Es bleibt aber zu untersuchen, wie sie ausgedrückt und verstanden werden müssen, wenn sie für alle Zahlen überhaupt, negative wie positive, gelten sollen. Hier findet sich die oben aufgestellte Unterscheidung zwischen den Begriffen «höher, völlig gleich, niedriger», und den Begriffen «gröſser, an Quantität gleich, kleiner», und zwischen den entsprechenden Zeichen $\succ$, $=$, $\prec$, und |ı, ||, ı| als besonders zweckmäſsig und wichtig. Nämlich:

I. Die 5 Sätze, welche die Addition und Subtraction betreffen, muſs man auf die Vergleichung der Zahlen nach ihrer Höhe und Tiefe, und auf die Zeichen $\succ$ $=$ $\prec$ beziehen, wenn sie allgemein richtig seyn sollen. Für die Vergleichung der Zahlen nach bloſser Quantität und die Zeichen |ı, ||, ı|

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:3-1192015415-1351375172-17/fragment/page=20

würden diese Sätze falsch seyn. Z. B. Satz 1. muſs gesprochen werden: «Völlig Gleiches zu Höherem addirt giebt Höheres.» So ist

richtig:
$$\begin{array}{r} +5 \triangleright -2 \\ -3 = -3 \\ \hline 2 \triangleright -5 \end{array}$$

falsch:
$$\begin{array}{r} +5 \mid\!\shortmid -2 \\ -3 \parallel -3 \\ \hline 2 \mid\!\shortmid -5 \end{array}$$

Der Satz 4. ist auszusprechen: «Höheres zu Höherem addirt giebt Höheres.» Z. B. Es ist

richtig:
$$\begin{array}{r} 5 \triangleright 2 \\ -6 \triangleright -7 \\ \hline -1 \triangleright -5 \end{array}$$

falsch:
$$\begin{array}{r} 5 \mid\!\shortmid 2 \\ -7 \mid\!\shortmid -6 \\ \hline -2 \mid\!\shortmid -4 \end{array}$$

II. Die sich auf Multiplication und Division beziehenden 5 Sätze sind, so wie sie oben ausgesprochen wurden, nicht bloſs für positive, sondern auch für negative Zahlen gültig, wenn man die Worte «gröſser, kleiner» so versteht, wie sie früher bestimmt worden sind, und wenn man sie mit $\mid\!\shortmid$ $\shortmid\!\mid$ bezeichnet. Was das Wort «gleich» betrifft, so kann man dasselbe, indem man darunter nur Gleichheit an Quantität versteht, durch $\parallel$ bezeichnen, aber freilich auch durch $=$, weil das, was völlig gleich ist, auch an Quantität gleich ist. Man erhält aber bei Anwendung des Zeichens $\parallel$ umfassendere Sätze, als bei Gebrauch des Zeichens $=$.

Der Satz 9 giebt z. B.

$$\begin{array}{r} 6 \mid\!\shortmid 4 \\ 5 \mid\!\shortmid 3 \\ \hline 30 \mid\!\shortmid 12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -6 \mid\!\shortmid 4 \\ -5 \mid\!\shortmid 3 \\ \hline 30 \mid\!\shortmid 12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -6 \mid\!\shortmid -4 \\ -5 \mid\!\shortmid -3 \\ \hline 30 \mid\!\shortmid 12 \end{array}$$ u. s. w.

Man siehet augenscheinlich, daſs es bei diesen Sätzen auf die reine Quantität der Zahlen ankommt, da die Vorzeichen der Zahlen nur die Vorzeichen der Producte und Quotienten, nicht deren Quantität bestimmen.

Wollte man aber, ganz auf die herkömmliche Weise, die Worte gröſser und kleiner in den Sätzen 6 bis 10 in dem Sinne verstehen, welchen wir den Worten höher und niedriger beigelegt haben, und wollte sie durch $\triangleright$ und $\triangleleft$ bezeichnen, so würde man zu einer Menge von falschen Schlüssen geführt werden. Z. B.

$$\begin{array}{r} -6 \triangleleft 4 \\ -5 \triangleleft 3 \\ \hline 30 \triangleleft 12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -6 \triangleleft -4 \\ -5 \triangleleft -3 \\ \hline 30 \triangleleft 12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -6 \triangleleft -4 \\ 3 \triangleleft 5 \\ \hline -18 \triangleleft -20 \end{array}$$

und dergl.

11.

Multiplication gleicher Factoren leitet zu dem Begriffe der **Potenzen** und des **Potenzirens**. Die Definitionsgleichung des Potenzirens ist

$$a^m = \underset{1}{a} . \underset{2}{a} . \underset{3}{a} \ldots\ldots \underset{m}{a} .$$

a ist **Grundzahl**, m der **Exponent**, der **Werth** von a^m oder das **Resultat** des Potenzirens ist die **Potenz** selbst.

Zur Erweiterung der Potenzen auf den Fall negativer Potenzen, gelangt man unter andern durch Verbindung einer arithmetischen Progression, der Zahlenreihe, welche die Exponenten enthält, und einer geometrischen, in welcher die Potenzen enthalten sind, und deren Quotient der Grundzahl gleich ist. So sind die Potenzen von 5 versinnlicht in

Exponenten ..... $-3, -2, -1, 0, 1; 2, 3$ .....
Potenzen .... $\frac{1}{125}, \frac{1}{25}, \frac{1}{5}, 1, 5, 25, 125$ .....

Der Additions-Gegensatz der Exponenten führt auf den Multiplications-Gegensatz der Potenzen. Es ist allgemein $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

Potenzirungen können nur an unbenannten Zahlen im strengsten Sinne, nicht an Gröfsen oder benannten Zahlen vorgenommen werden. So zeigt sich hier wiederum die scharfe Unterscheidung zwischen Gröfsen und Zahlen als sehr vortheilhaft, ja nothwendig.

Mit dem Potenziren, als einer zusammensetzenden, vorschreitenden Rechnung, hängt zusammen: 1) die **Wurzelausziehung**, als auflösende, zurückschreitende Rechnung, welche für die Gleichung $a^m = p$ aus p und m sucht a; 2) die Bestimmung des logarithmischen Verhältnisses (des Potenzial-Verhältnisses?) oder die **Logarithmen-Berechnung**, (das Graduiren, nach **Gartz**), welche aus p und a sucht m, als vergleichende Rechnung. Die Bezeichnung dieser Rechnung geschiehet nach gewöhnlicher Art durch log p (bas a) = m, oder auch auf eine in neuern Zeiten eingeführte, recht passende und für manche Zwecke sehr zu empfehlende Art durch p ? a = m.

Wir haben nun 3 Stufen von Operationen der Arithmetik, jede mit einer zusammensetzenden oder vorschreitenden, einer auflösenden oder zurückschreitenden, und mit einer vergleichenden Operation; eine Ansicht des Systems der Grund-Operationen, welche gewifs die Einsicht und die Uebersicht der Arithmetik sehr befördert.

Es scheint nothwendig, in einem Lehrbuche der Elemente den reichen Stoff der Lehre von den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen, in zwei Theile zu sondern, und ehe man den zweiten Theil behandelt, erst mancherlei andere Gegenstände der Arithmetik (Zerfällung der Zahlen, Primzahlen; Decimalzahlen, und überhaupt systematische Zahlen; Proportionen) der Untersuchung zu unterwerfen, welche nur einige Kenntnifs der Potenzen erfordern. Aufserdem scheint es aber selbst nothwendig, in den Sätzen aus der Lehre von den Wurzeln, welche man zuerst aufzustellen hat, sich gewisse Einschränkungen zu setzen. So vor allen Dingen scheint es nothwendig, zuerst hauptsächlich nur Wurzeln aus positiven Zahlen, und, da bekanntlich Wurzeln mehrfache Werthe haben, nur die positiven Werthe der Wurzeln zu betrachten. Ohne diese Einschränkung würde es schwerlich möglich seyn, in den elementaren Sätzen über Wurzeln Unrichtigkeiten und zugleich unerträgliche Weitläufigkeit zu vermeiden.

In Bezug auf die mehrfachen Werthe der Wurzeln mag für die weitere Ausführung der Wurzelnlehre wohl mit Recht eine besondere Bezeichnung zu empfehlen seyn, welche andeutet, man solle bei einer Wurzel aus einer positiven Zahl nur den einen positiven Werth denken, und eine andere Bezeichnung, welche andeutet, man solle bei einer Wurzel jeden ihrer Werthe denken dürfen. Hiefür hat bis jetzt nur Cauchy (*Cours d'Analyse* 1821) etwas vorgeschlagen. $\sqrt{4}$ bezeichnet bei ihm nur den Werth $+2$; unter $\sqrt{((4))}$, oder, was wohl passender ist, $\sqrt{\!\sqrt{4}}$ versteht er dagegen alle Werthe der Quadrat-Wurzel aus 4, nämlich $2, -2$. Auf analoge Art bedeutet ihm $\mathrm{l}.a$, wo l den Neperischen Logarithmen andeuten soll, wenn a eine positive Zahl ist, bloſs den reellen positiven Logarithmen, dagegen $\mathrm{l}((a))$ die Werthe des Ausdrucks $\mathrm{l}\,a + 2k\pi.i$.

Das Kapitel, welches die einfachsten Lehren von den Potenzen und Wurzeln enthält, schlieſst füglich mit Betrachtung der Rechnungen an Ausdrücken von der Form

$$A a^{\alpha} b^{\beta} + B a^{\alpha'} b^{\beta'}_{\cdots} + \ldots.$$

In diesen Ausdrücken mischen sich Addition, Multiplication und Potenzirung, und sie können etwa Potenzial-Polynome genannt werden. Auf die Theorie dieser Potenzial-Polynome kann dann am gründlichsten die Lehre der Zahlensysteme gestützt werden, welche zugleich die Lehre von den ganzen Decimalzahlen und Decimalbrüchen umfaſst.

12.

Die Begriffe des Maſses und des Vielfachen sind anwendbar auf Gröſsen, wie auf unbenannte Zahlen. Eine Gröſse heiſst ein Maſs einer andern, gleichartigen, wenn der Exponent des Verhältnisses dieser zweiten zur ersten eine ganze Zahl ist, und in diesem Falle heiſst zugleich die zweite ein Vielfaches der ersten. Ganz dasselbe gilt für Zahlen. Es ist aber für Zahlen nicht wohl passend, statt des Wortes Maſs zu sagen Theiler, und noch unpassender ist es, den Begriff des Maſses nur auf ganze Zahlen anzuwenden, und die Brüche auszuschlieſsen. Es muſs z. B. $2\frac{1}{3}$ ein Maſs der ganzen Zahl 7, wie des Bruches $4\frac{2}{3}$ genannt werden. Da übrigens allerdings die Betrachtung der ganzen Zahlen in Beziehungen dieser Art eine besondere Wichtigkeit hat, (in ſo fern man bei diesen Betrachtungen bloſs ganze Zahlen berücksichtigt, gehören sie zu den ersten Sätzen desjenigen Theils der Arithmetik, welchen man «Theorie der Zahlen» oder nach dem Beispiele eines Gauſs mit Recht «höhere Arithmetik» nennt), so möchte es gut seyn, bei der Einschränkung jener Begriffe auf ganze Zahlen, das Wort Theiler zu gebrauchen. So wäre also z. B. 3 ein Maſs und auch ein Theiler von 6, 9, 12..... dagegen $\frac{1}{2}$ nur ein Maſs von $1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}$ .... Jede Zahl hat also eine unendliche Menge von Maſsen, wie eine unendliche Menge von Vielfachen; aber eine ganze Zahl hat nur eine endliche Anzahl von Theilern. Ganze Zahlen, die nur 1 und sich selbst zu Theilern haben, heiſsen Primzahlen.

Die Sätze und Aufgaben über Maſse und Vielfache beziehen sich auf eigentliche Gröſsen und auf Zahlen. Daher wäre es vielleicht in diesen Sätzen der Kürze wegen recht passend, das Wort Gröſse in dem weiteren Sinne zu gebrauchen, welchen man ihm gewöhnlich beilegt, und in dem es die Zahlen sammt den eigentlichen Gröſsen umfaſst. Es kann hieraus kein Nachtheil entstehen, wenn man nur sonst jene Begriffe gehörig zu unterscheiden weiſs. Andere Sätze dagegen, über Zerfällung der Zahlen in Factoren, über Primzahlen, und dergl., gelten nur von den Zahlen. Eine Gröſse kann nicht in 2 Factoren zerfällt werden, nicht Primzahl seyn u. s. w. Dieses zeigt wieder den scharfen Unterschied zwischen Gröſsen und Zahlen.

Für einen Bruch, dessen Zähler und Nenner Primzahlen unter sich sind, der also nicht durch kleinere Zahlen ausgedrückt werden kann, fehlt eine einfache Benennung. Dem Verfasser scheint es sehr passend, solche Brüche Primbrüche zu nennen, es ist ja z. B. $\frac{3}{5}$ wirklich der erste Bruch in der Reihe der Brüche $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{9}{15}$ .... welche ihm alle am Werthe gleichen. Jede ganze Zahl ist, in so fern sie mit dem Nenner 1 geschrieben werden darf, als ein Primbruch zu betrachten.

An die Aufgabe, das gröſste gemeinschaftliche Maſs zweier gleichartigen Gröſsen zu bestimmen, ist der Begriff und die Erkenntniſs der Möglichkeit incommensurabler Gröſsen anzuknüpfen, deren Verhältniſs durch keine Zahl von den bisher erwähnten Arten, durch keine ganze und keine gebrochne, völlig bestimmt werden kann.

Die Lehre von den Maſsen und Vielfachen, der Zerfällung der Zahlen in Factoren u. s. w. bildet einen Theil der Arithmetik, welcher nach des Verfassers Meinung keinesweges zu vernachlässigen ist, aber leider in den Lehrbüchern meistens sehr vernachlässigt wird. Die Wichtigkeit dieses Theiles der Arithmetik liegt in Folgendem: 1) zur genauern Einsicht in andere wichtige Lehren der Arithmetik ist Kenntniſs mancher Begriffe, welche zu diesem Theil der Arithmetik gehören, selbst mancher Sätze, die man in den Lehrbüchern vergebens sucht, unerlaſslich. 2) Die Fertigkeit in der Auflösung mancher hieher gehörigen Aufgaben trägt sehr viel zur Fertigkeit im Zahlenrechnen überhaupt bei. 3) Das Studium dieses Theils der Arithmetik (und noch mehr der damit verwandten Theorie der Zahlen oder höhern Arithmetik) ist Jedem, der in der Mathematik sich nur etwas höhere Kenntnisse verschaffen will, wegen seiner eigenthümlichen, den mathematischen Sinn bildenden und übenden Kraft ganz vorzüglich zu empfehlen.

13.

Die Form des Potenzial-Polynoms

$$aB^m + bB^{m-1} + cB^{m-2} + \ldots\ldots mB + n + oB^{-1} + pB^{-2} + \ldots$$

führt zu der Idee der systematischen Zahlen. B ist die Basis des Systems. Setzt man B = zehn, so hat man die Decimalzahlen. Es braucht kaum gesagt zu werden, daſs hier unter Decimalzahlen sowohl die ganzen Zahlen des dekadischen Systems, als auch die Decimalbrüche verstanden werden.

In der gewöhnlichen Schreibart werden nur die Coefficienten a, b, u. s. w. geschrieben, die Potenzen der Grundzahl aber auf bekannte Weise durch die Stellung jener Coefficienten und durch das Komma oder den Decimalstrich bestimmt. Die Exponenten bezeichnen den Rang der einzelnen Ziffern. Die Rangzeiger der 5 Ziffern der Zahl 72,483 z. B. sind nach der Reihe 1, 0, — 1, — 2, — 3. Bedient man sich dieser Kunstausdrücke, so sind die Regeln für die Rechnung mit Decimalzahlen, besonders in Bezug auf die Bestimmung der Stelle des Komma, leicht auszudrücken. Z. B. für die Multiplication gilt die Regel: der Rangzeiger des Products ist die Summe der Rangzeiger der Factoren.

Die Lehre von den sogenannten abgekürzten Rechnungen mit Decimalzahlen ist für die Praxis von großer Wichtigkeit, wird aber in den Lehrbüchern nicht der gehörigen Aufmerksamkeit gewürdigt, ja nicht wenig Lehrbücher begehen offenbare Fehler im Vortrage dieser Lehre und der Verfasser kennt kein einziges Lehrbuch, in dem dieselbe genügend abgehandelt wäre.

Zunächst ist schon zu tadeln, daſs man den Vortrag auf das Rechnen an Decimalbrüchen beschränkt, da doch selbst bei vielziffrigen ganzen Zahlen häufig die letzten Ziffern fehlen, oder als unsicher angesehen und in der Rechnung nicht berücksichtigt werden müssen, so daſs bei diesen Rechnungen nothwendig Abkürzung eintreten muſs.

Um zu bestimmen, was vom Producte einer vollständigen Multiplication an Decimalzahlen hinweggelassen werden müsse, sobald die Factoren nur als Näherungen zu den Werthen, welche sie darstellen sollen, angesehen werden können, beziehen sich die Lehrbücher gewöhnlich auf die Anzahl der Decimalstellen in den Factoren. Hiedurch lassen sich aber die Regeln nicht bequem ausdrücken, und was in den Lehrbüchern gesagt wird, ist gewöhnlich fehlerhaft. Man kann zweckmäſsiger einen andern Begriff zu Grunde legen, den Begriff der Hauptziffern. Unter Hauptziffer versteht der Verfasser alle Ziffern einer Decimalzahl, welche nicht nachgesetzte oder vorangesetzte Nullen sind; zwischenstehende Nullen werden mitgezählt. Z. B. 6073000 hat 4 Hauptziffern wie 6073; 0,0050408 hat 5 Hauptziffern wie 50408.

Für die Multiplication findet sich nun: Sind beide Factoren bis auf m Hauptziffern genau, oder der, welcher die wenigsten Hauptziffern hat, ist bis zur mten Hauptziffer genau, so darf man das Product bis auf m — 1 Hauptziffern als genau betrachten; oder auch: Verlangt man ein Product bis zur n ten Hauptziffer genau, so ist es hinreichend, beide Factoren bis zur n + 1ten Hauptziffer genau anzuwenden. Z. B. das Product der Zahlen mit 6 Hauptziffern 742063 und 285106 ist vollständig berechnet = 211566613678. Sind aber die Factoren nur bis zur 6ten Hauptziffer genau, und zwar etwa so, daſs der Multiplicandus zwischen 742062 und 742064, der Multiplicator aber zwischen 285105 und 285017 liegen muſs, so kann obiges Product nur bis zur 5ten Hauptziffer als genau betrachtet werden, und muſs also zwischen den Grenzen 211560000000 und 211570000000 enthalten seyn. Dieses zeigen auch folgende Multiplicationen,

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:3-1192015415-1351375172-17/fragment/page=25

wovon eine an den kleinern, die andere an den gröſsern Grenzwerthen der Factoren ausgeführt ist.

$$742062 \times 285105 = 221565586510$$
$$742064 \times 285107 = 211567640848.$$

Das Product aus 7420,63 und 28,5106 würde liegen zwischen 211560 und 211570; das aus 0,00742063 und 285,106 zwischen 2,1156 und 2,1157; endlich das aus 0,742063 und 0,285106 zwischen 0,21156 und 0,21157. In allen diesen Exempeln sind die Hauptziffern der Factoren dieselben, nur ihr Rang ist verschieden; die Producte stimmen ebenfalls in den Hauptziffern überein; haben die Factoren allenthalben denselben Grad der Zuverlässigkeit, so sind auch die Producte allenthalben im gleichen Grade sicher; die Producte unterscheiden sich nur durch den Rang der Ziffern.

Die abgekürzte Multiplication des letzten Exempels giebt Folgendes:

$$\begin{array}{r l}
0{,}742063 & \\
0{,}285106 & \\
\hline
1484126 & \\
593650 & \\
37103 & \\
742 & \\
44 & \text{(oder 45)} \\
\hline
0{,}2115665 &
\end{array}$$

Man bedarf aber einer Regel, um bei jeder abgekürzten Multiplication beurtheilen zu können, in welchem Grade das Product höchstens fehlerhaft seyn möge. Dazu gehört aber, daſs man wisse, in wie weit sich die Factoren den durch sie darzustellenden Werthen nähern. Wir wollen nun als ein Beispiel annehmen, der Fehler in den letzten Ziffern jeder gegebenen Decimahlzahl sey, was häufig Statt findet, kleiner als die Ziffer 5 vom nächst niedrigern Range. Dann liegen also die Factoren des obigen letzten Exempels zwischen 0,7420625 und 0,7420635 und zwischen 0,2851055 und 0,2851065. Unter dieser Annahme gilt nun für solche Multiplicationen, in welchen, wie hier, die höchsten Hauptziffern vom — 1ten Range sind, die Regel: Waren die Factoren bis auf n Hauptziffern gegeben, so ist im Producte der Fehler höchstens gleich der Ziffer 1 vom — nten Range, d. h. höchstens $= 10^{-n}$, und er wird diese Gränze nicht einmal dann erreichen, wenn die absoluten Werthe der Factoren beide dem Werthe 1 sehr nahe kommen. So ist in jenem Exempel $n = 6$, und also der Fehler des Productes 0,2115665 kleiner als 0,000001. Auch bei Multiplicationen, wo die ersten Hauptziffern der Factoren nicht vom — 1 ten Range sind, ist hienach die Fehlerhaftigkeit der Producte leicht zu beurtheilen.

Um jetzt zu zeigen, daſs in den mathematischen Elementarwerken beim Vortrage der abgekürzten Rechnungen bedeutende Fehler begangen werden, mag hier aus einigen Lehrbüchern von anerkanntem Werthe Einiges ausgehoben werden.

In dem Lehrbuche der Arithmetik von Lehmus (Leipzig 1822) wird im §. 103. für die Multiplication an Decimalbrüchen, welche den Werth, den sie darstellen sollen, nur näherungsweise angeben, (irrationale Decimalbrüche werden sie, dem eigentlichen Sinne des Wortes irrational zuwider, genannt) folgende Regel aufgestellt: «Hat der eine Factor n, der andere m Decimalstellen, und ist $n > m$, so kann man im Producte nur die ersten $m - 1$ Decimalstellen als richtig beibehalten, die übrigen $n + (m - 1)$ «[soll heifsen $n + 1$]» sind als ganz oder zum Theil unrichtig wegzustreichen. Diese Regel bleibt auch passend, wenn $n = m$ ist.» Als Beispiel wird hinzugefügt: «Für die Factoren 0,8564 und 0,0593» [deren vollständiges Product = 0,05078452] «kann man also mit Sicherheit nur 0,050 annehmen.»

Die Behauptung über die Genauigkeit des Products in diesem Beispiele findet sich ganz richtig, wenn man sie nach der oben gegebenen Regel aus der Zahl der Hauptziffern beurtheilt. Nur zufälliger Weise giebt hier auch die falsche von Lehmus' aufgestellte Regel etwas Richtiges. Die Falschheit dieser Regel zeigt sich deutlich, wenn man die Hauptziffern der Factoren beibehält, aber ihren Rang ändert. Wären die Factoren z. B. 1) 0,008564 und 0,000593, so wäre das vollständige Product 0,000005078452; nach der falschen Regel dürften nur 5 Decimalen genommen werden, man hätte 0,00000 als Product, da doch offenbar 0,0000050 zuverlässig ist. 2) Aus den Factoren 85,64 und 5,93 wäre das vollständige Product 507,8452; nach Lehmus dürfte man nehmen 507,8. da doch offenbar nicht einmal 507 ganz zuverlässig ist, und nur die zwei Ziffern 5 und 0 immerfort sicher bleiben. — Die von Lehmus angegebene Regel würde richtig seyn, wenn die Bedingung hinzugefügt wäre, dafs die höchsten Hauptziffern der Factoren vom — 1ten Range seyn sollten.

In Thibaut's Grundrifs der reinen Mathematik dritte Auflage S. 59. heifst es: «Wenn man bei wirklichen Rechnungen mehrere Brüche in Decimalbrüche verwandelt, so ist es durchaus nothwendig, für die drei ersten arithmetischen Operationen bei ihnen allen die Entwickelung bis auf denselben Grad zu treiben. Bei Additionen und Subtractionen bekommt das Resultat eben so viel Decimalstellen als die Theile; bei Multiplicationen kann es doppelt so viele enthalten als die Factoren, aber es läfst sich leicht zeigen, dafs die letzte Hälfte davon ganz sicher als vollkommen unzuverlässig weggeworfen werden mufs.» Hier ist die vorangeschickte Forderung, man solle die Decimalbrüche bis auf denselben Grad d. h. bis auf dieselbe Anzahl von Decimalstellen entwickeln, für die Addition und Subtraction allerdings richtig, für die Multiplication aber offenbar falsch. Die Unrichtigkeit in der darauf gegebenen Regel, dafs man die letzte Hälfte Decimalstellen wegwerfen solle, erhellet schon aus dem Vorigen leicht. Doch zum Ueberflufs noch folgendes Beispiel. Das vollständige Product aus 0,000742063 und 0,000285106 ist 0,000000211566613678. Das zuverlässige Product liegt zwischen 0,00000021156 und 0,00000021157, während nach Thibaut's Regel blofs 0,000000211 genommen werden dürfte. Bei den Factoren 74206,3 und 28510,6 schwankt das Product zwischen 2115600000 und 2115700000, während nach Thibaut zu nehmen wäre 2115666136,7. Die falsche Regel ist aber ebenfalls so ziemlich richtig für Decimalbrüche, deren höchste Ziffer vom Range der Zehntel ist. Ferner heifst es: «Bei der Division wird man den Dividend wenigstens auf doppelt so viel Stellen entwickeln als den Divisor, und der

Quotient kann höchstens auf so viel Stellen richtig gefunden werden, als Ziffern» [vielleicht Decimalstellen?] «im Divisor enthalten sind.» Dies ist gänzlich unrichtig. Die richtige Regel ist: Ist der Divisor auf n Hauptziffern bestimmt, so muſs man auch den Dividendus auf n oder etwa n + 1 Hauptziffern entwickelt haben, und wird dann den Quotienten bis auf n — 1 Hauptziffern richtig erhalten.

Zum Schlusse ist noch zu erwähnen, daſs auch eine *abgekürzte Wurzelausziehung*, welche fast bloſs auf abgekürzte Division zurückkommt, möglich ist, und in den Lehrbüchern aufgeführt zu werden verdient.

14.

Wurzeln aus ganzen Zahlen wie aus Brüchen sind häufig weder ganze Zahlen noch Brüche, und doch kann man ihnen Werthe beilegen, vermöge deren sie im Stande sind, Verhältnisse gleichartiger, obschon incommensurabler Gröſsen auszudrücken. So erscheint $\sqrt{2}$ als Ausdruck des Verhältnisses der Diagonale zur Seite eines Quadrats. Man kann sich den Werthen solcher Wurzeln in gewöhnlichen Brüchen nähern; z. B. $\sqrt{2}$ hat die Näherungswerthe $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{41}{29}$, $\frac{99}{70}$ u. s. w. Hiedurch erhält die Wurzel ihre bestimmte Quantität und kann in Hinsicht dieser Quantität mit den gewöhnlichen Zahlen verglichen werden.

Gebrochne Zahlen waren Zeichen für die Hervorbringung einer Gröſse aus einer Einheit vermittelst Eintheilung und Vervielfachung. Eine solche Bedeutung kann freilich einer solchen Wurzel, wie $\sqrt{2}$, nicht beigelegt werden; aber in den Näherungswerthen $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$ u. s. w. findet man doch Vorschriften, wie man sich durch Eintheilung und Vervielfachung wenigstens einer Gröſse in beliebigem Grade nähern könne, deren Verhältniſs zur Einheit durch $\sqrt{2}$ bestimmt wird. In dieser Hinsicht kann man die Definition der Zahlen «*Zahlen sind Zeichen für die Hervorbringung einer Gröſse aus einer Einheit*» fast ansehen, als umfasse sie auch solche Wurzeln. Auf jeden Fall aber ist es klar, daſs die Definition «*Zahlen sind Ausdrücke des Verhältnisses gleichartiger Gröſsen,*» auch für die Werthe solcher Wurzeln passend ist; mit Recht können dieselben also auch zu den Zahlen gerechnet, und etwa, im Gegensatze der *rationalen* Zahlen, d. h. der ganzen Zahlen und der gewöhnlichen Brüche, *irrationale* Zahlen genannt werden.

Die irrationalen Wurzeln zerfallen nach dem Grade der Wurzeln in verschiedene Klassen. Es ist aber noch zu bemerken, daſs der Begriff der irrationalen Zahlen nicht bloſs auf irrationale Wurzeln einzuschränken ist, denn irrationale Zahlen erscheinen auch durch andere mannigfaltige Rechnungen höherer Art, und auch die sogenannten *transcendenten* Gröſsen oder Zahlen sind unter den irrationalen Zahlen zu begreifen, als eine besondere Klasse derselben bildend; denn sonst würde der Begriff des Irrationalen nicht den Gegensatz des Rationalen erschöpfend bezeichnen. *)

---

*) Im Lehrbuche der Arithmetik von *Lehmus* wird dem Worte Irrationalzahl auf eine ungewöhnliche, nicht zu empfehlende Weise ein anderer Sinn beigelegt, durch welchen dieser Begriff einen noch gröſsern Umfang erhält. In §. 95. nämlich heiſst es: „Jeder

15.

Was die Lehre von den Logarithmen betrifft, so mag hier nur mit ein Paar Worten angezeigt werden, wie sich die Regeln für den Gebrauch der Logarithmen als Mittel zur Abkürzung der Rechnungen in ihrer Vollständigkeit und zur bequemsten Uebersicht ausdrücken und zusammenstellen lassen.

I. Es sey $ab = c$, so daſs auch die Gleichungen $c:b = a$, für die Division, und $c:a = b$ für die Bestimmung des geometrischen Verhältnisses gültig sind.

Nun folgt aus $ab = c$ die logarithmische Gleichung $\log a + \log b = \log c$, und hieraus für die Subtraction die Gleichung $\log c - \log b = \log a$, für die Bestimmung des arithmetischen Verhältnisses aber $\log c - \log a = \log b$.

Es läſst sich leicht einsehen, daſs aus einer dieser 6 Gleichungen alle übrige 5 folgen, daſs sie gleichbedeutende Gleichungen sind.

Nun ergiebt sich: 1) Statt $ab = c$ kann man die Gleichung $\log a + \log b = \log c$ anwenden. Hiedurch wird die Multiplication zweier Zahlen, auf die Addition ihrer Logarithmen zurückgeführt. 2) Statt der Gleichung $c:b = a$ ist anzuwenden $\log c - \log b = \log a$. Die Division kommt also auf Subtraction zurück. 3) Statt $c:a = b$ hat man die logarithmische Gleichung $\log c - \log a = \log b$. An die Stelle der Bestimmung des geometrischen Verhältnisses tritt also, bei Anwendung der Logarithmen, die Bestimmung des arithmetischen Verhältnisses.

Diese drei Sätze können so zusammengefaſst werden: **Durch Anwendung der Logarithmen kommen die drei Rechnungen der zweiten Stufe auf die entsprechenden Rechnungen der ersten Stufe zurück**, nämlich die zusammensetzende auf die zusammensetzende, die auflösende auf die auflösende, und die vergleichende auf die vergleichende.

II. Es sey $a^m = p$, und also $\sqrt[m]{p} = a$, $p?a = m$ (oder $\log p$ (bas. a) $= m$). Dann ist auch die logarithmische Gleichung gültig $m \log a = \log p$, und hieraus die Gleichung $\frac{\log p}{m} = \log a$, welche eine Division, und die Gleichung $\log p : \log a = m$, welche eine Bestimmung eines geometrischen Verhältnisses enthält.

Die Richtigkeit einer dieser 6 Gleichungen zieht die Richtigkeit der 5 übrigen nach sich, und man findet: 1) Statt der Gleichung $a^m = p$ dient die logarithmische $m . \log a = \log p$. Die Potenzirung wird auf Multiplication zurückgeführt. 2) Statt der Gleichung $\sqrt[m]{p} = a$ hat man die logarithmische $\frac{\log p}{m} = \log a$.

Zahlenausdruck, welcher das, was er darstellen soll, nur näherungsweise angiebt, heiſst eine **Irrationalzahl**, im Gegensatze von einer vollständig angebbaren oder rationalen Zahl.“ Ferner: „Jeder irrationale Decimalbruch, bei welchem eine gewisse Anzahl Decimalziffern immer wiederkehren, heiſst ein **periodischer Decimalbruch**.“ Nach der gewöhnlichen, gewiſs vorzuziehenden Ansicht sind aber periodische Decimalbrüche keine Irrationalzahlen, denn sie sind am Werthe einem gewöhnlichen Bruche völlig gleich, und drücken das Verhältniſs commensurabler Gröſsen aus, während irrationale Zahlen nur Verhältnisse incommensurabler Gröſsen bestimmen.

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:3-1192015415-1351375172-17/fragment/page=29

Die Wurzelausziehung geht in Division über. 3) Endlich statt p?a=m ist anzuwenden logp:logm=a. Die Bestimmung des logarithmischen Verhältnisses (des Potenzial-Verhältnisses) kommt auf die Bestimmung des geometrischen Verhältnisses zurück.

Diese 3 Sätze können so in einen zusammengefaſst werden: Durch Anwendung der Logarithmen kommen die Rechnungen der dritten Stufe auf die entsprechenden Rechnungen der zweiten Stufe zurück. Man muſs dabei nur sich einprägen, daſs in den logarithmischen Gleichungen die eine Zahl, nämlich die, welche als Potenzexponent, als Wurzelexponent und als Logarithme durch m bezeichnet wurde, nur schlechthin enthalten ist, ohne daſs von ihr der Logarithme aufgesucht werden müſste oder gefunden würde.

16.

I. Wie die Subtraction zu den negativen, und die Division auf die gebrochnen Zahlen, so führte die Wurzelausziehung zu den irrationalen Zahlen. Auſserdem giebt aber die Wurzelausziehung noch durch ihre Beziehung auf negative Zahlen den Begriff von einer andern Art arithmetischer Formen, nämlich den der imaginären Wurzeln. Diese Wurzeln können nicht wohl als eigentliche Zahlen angesehen werden, da sie nicht als Exponenten des Verhältnisses wirklich vorhandener Gröſsen erscheinen können. Dennoch kann man auch mit solchen Wurzeln rechnen, indem man die Regeln für die Rechnungen an den eigentlichen Zahlen, namentlich die Regeln für die reellen Wurzeln, consequent anwendet.

Die Analysis zeigt, daſs alle imaginären Wurzeln höherer Exponenten sich in gewisser Art auf die Quadratwurzeln aus negativen Zahlen zurückführen lassen, daher mögen im Nächsten nur diese imaginären Quadratwurzeln näher betrachtet werden.

II. Wie eine Quadratwurzel aus einer positiven Zahl immer zwei Werthe hat, welche sich entgegengesetzt sind, so muſs man, der Analogie nach, auch der Wurzel aus -1 solche zwei Werthe zuschreiben, oder sagen, -1 habe zwei entgegengesetzte Wurzeln. Es ist auch klar, daſs, angenommen r wäre eine solche Wurzel, also $r^2=-1$, auch nothwendig $(-r)^2=(-r).(-r)=r^2=-1$, und also auch $-r$ eine Wurzel aus -1 seyn müſste. Bedient man sich der von Cauchy angewandten Bezeichnung (siehe 11.), so umfaſst $\mathbb{W}-1$, diese beiden Wurzeln. Wir wollen diese durch i' und i'' bezeichnen, und i' die erste, i'' die zweite Wurzel nennen. Dann ist also

$$\mathbb{W}-1=\begin{cases} i' \\ i'' \end{cases}$$

Da die beiden Wurzeln entgegengesetzt seyn sollen, so hat man $i'+i''=0$, $i''=-i'$, $i'=-i''$. Man muſs sich aber hüten, hier das Zeichen $-$ als Zeichen des Negativen zu betrachten. Jene Wurzeln sind ja weder positive noch negative, überhaupt keine reelle Zahlen; daher sind die Ausdrücke $-i'$ und $-i''$ weder positiv noch negativ. $-$ ist nur Zeichen der Entgegensetzung; $i'' = -i'$ sagt bloſs, i'' sey das Gegentheil von i'.

Zwischen i' und i'' findet nun freilich ein eben solcher Gegensatz Statt, wie zwischen einer positiven Zahl, etwa $+2$, und der negativen entgegengesetzten, also -2. Allein $+2$ und -2 haben auſserdem einen inneren, wesentlichen Unterschied, der sich bei ihrer Anwendung auf Gröſsen zeigt. Denn $+2$ fordert nur die Einheit einmal und noch einmal zu setzen, -2 fordert aber auſserdem noch eine Entgegensetzung. Etwas Gleiches gilt aber keineswegs für i' und i'', da sie sich gar nicht auf Gröſsen anwenden lassen. Man kann ihnen also keinen solchen innern Unterschied beilegen, und es unterscheidet sich überhaupt i' in nichts Wesentlichem von i''; nur das läſst sich von ihnen sagen: Sie sind sich gegenseitig entgegengesetzt. Dieser Mangel eines sonstigen innern Unterschiedes wird sich auch bei allen Rechnungen an imaginären Wurzeln bestätigen.

Man bezeichne i' schlechthin durch i, so ist $i'' = -i$, und also $W\!\!\!/\,{-1} = \begin{cases} i \\ -i \end{cases}$

Wollte man i'' durch i andeuten, so hätte man ebenfalls $W\!\!\!/\,{-1} = \begin{cases} i \\ -i \end{cases}$

Man kann also eigentlich gar nicht wissen, welchen Werth von $W\!\!\!/\,{-1}$ man unter i denken soll, ob den ersten oder zweiten. Durch i wird nur irgend eine der beiden Wurzeln aus -1 bezeichnet, und $-i$ bezeichnet dann das Gegentheil dieser beliebigen Wurzel, also die andere noch vorhandene Wurzel. Bei einer zusammenhängenden Rechnung muſs freilich unter i immer dieselbe Wurzel gedacht werden; allein bei zwei verschiedenen Rechnungen, die keinen Zusammenhang mit einander haben, ist es gleichgültig, ob man sich vorstellt, das i der einen Rechnung sey einerlei mit dem i, oder mit dem $-i$ der zweiten Rechnung. Es ist also erlaubt, sich in allen mathematischen Schriften, sobald i als Zeichen einer imaginären Wurzel aus -1 gebraucht wird, darunter immer einen und denselben Werth zu denken, obschon nicht ganz nothwendig.

Für eine positive Zahl a sollte $\sqrt{a}$ nur die positive reelle Wurzel, als Hauptwerth, und $-\sqrt{a}$ die negative Wurzel andeuten. Ist diese Bezeichnungsweise angenommen, so darf man nicht wohl die beiden Werthe von $W\!\!\!/\,{-1}$ durch $\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ bezeichnen, da weder i noch $-i$ als Hauptwerth angesehen werden kann. Wir wollen daher uns der Bezeichnung $\sqrt{-1}$ gänzlich enthalten.

Das Imaginäre kann nur dem Imaginären selbst entgegengesetzt seyn; es giebt keinen Gegensatz zwischen dem Imaginären und dem Reellen.

III. Bedeuten a und b positive Zahlen, so hat man die vier Gleichungen $\sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, $\sqrt{a}.(-\sqrt{b}) = -\sqrt{ab}$, $(-\sqrt{a}).\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$, $(-\sqrt{a}).(-\sqrt{b}) = \sqrt{ab}$. Man könnte diese Gleichungen in den einen Ausspruch $W\!\!\!/\,a.W\!\!\!/\,b = W\!\!\!/\,ab$ vereinigen wollen. Hierin würden aber auch noch vier andere Gleichungen enthalten zu seyn scheinen, nämlich $\sqrt{a}.\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$, $\sqrt{a}.(-\sqrt{b}) = \sqrt{ab}$, $(-\sqrt{a}).\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, $(-\sqrt{a}).(-\sqrt{b}) = -\sqrt{ab}$, welche sämmtlich falsch sind. Man dürfte daher diese das von Cauchy eingeführte doppelte Wurzelzeichen enthaltende Gleichung nur aussprechen: «Eine der Wurzeln von a mit einer der Wurzeln aus b multiplicirt, giebt immer eine der Wurzeln von ab,» aber keinesweges so: «Irgend eine der Wurzeln aus a mit irgend einer der Wurzeln aus b multiplicirt giebt jede Wurzel aus ab.» Der richtige Ausspruch gilt überhaupt von Wurzeln eines jeden Grades.

Man kann übrigens die beiden Werthe von $\sqrt{\!\!\sqrt{ab}}$ auf die positive Wurzel aus a und die beiden Werthe von $\sqrt{\!\!\sqrt{b}}$ zurückführen, indem man schreibt $\sqrt{\!\!\sqrt{ab}} = \sqrt{a}.\sqrt{\!\!\sqrt{b}}$, worin außer zwei falschen auch zwei richtige Gleichungen liegen, nämlich $\sqrt{ab} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$, und $-\sqrt{ab} = \sqrt{a}.(-\sqrt{b})$.

Auf gleiche Weise genügt es, um die Wurzeln aus einer negativen Zahl — a auf i zurückzuführen, zu schreiben $\sqrt{\!\!\sqrt{-a}} = \sqrt{a}.\sqrt{\!\!\sqrt{-1}}$, welcher Ausdruck die beiden Gleichungen

$$\sqrt{\!\!\sqrt{-a}} = \begin{cases} \sqrt{a}.i \\ \sqrt{a}.(-i) = -\sqrt{a}.i \end{cases}$$

in sich vereinigt.

IV. Additionen und Subtractionen zwischen dem Reellen und dem Imaginären können, nach den ursprünglichen Begriffen dieser Operationen, nicht wirklich ausgeführt werden; man darf sie aber andeuten, und an Ausdrücken wie $p + qi$ nach den sonstigen Regeln für die Rechnung an Binomen wirklich rechnen.

Ein imaginärer Ausdruck von der Form fi dagegen kann zu einem von ähnlicher Form addirt und davon subtrahirt werden. Es ist $fi + gi = (f+g)i$.

V. Das Imaginäre kann man, nach den ersten Begriffen von Multiplication und Division, durch etwas Reelles, als Multiplicator, multipliciren, und auch durch etwas Reelles dividiren. Es ist $fi \times m = (mf)i$, und $fi : m = (\frac{f}{m}).i$.

VI. Multiplication des Imaginären durch etwas Imaginäres kommt hauptsächlich auf die im Begriffe des i gegründete Gleichung $ii = -1$ zurück. Aus ihr folgt auch $i.(-i) = 1$.

Nun ist $\sqrt{\!\!\sqrt{-a}}.\sqrt{\!\!\sqrt{-b}} = \sqrt{\!\!\sqrt{ab}} = \pm\sqrt{ab}$. Hierin liegen die 4 Gleichungen:

$$\sqrt{a}.i \;.\; \sqrt{b}.i = -\sqrt{ab} \qquad (-\sqrt{a}.i).\;\sqrt{b}.i = \sqrt{ab}$$
$$(-\sqrt{a}.i).(-\sqrt{b}.i) = -\sqrt{ab} \qquad \sqrt{a}.i\;.\;(-\sqrt{b}.i) = \sqrt{ab}$$

Es liegen aber auch in obiger Gleichung vier falsche, die aus den richtigen durch Aenderung eines Vorzeichens entstehen. Z. B. $(\sqrt{ai}.)(\sqrt{bi}) = \sqrt{ab}$. Es erhellet hieraus, daſs man zu gröſserer Bestimmtheit gelangt, wenn man sich bloſs der Bezeichnung $\sqrt{ai}$ u. w. s. bedient.

In Eulers Algebra (I Th. 1 Abschn. 13 Kap. §. 148.) findet sich die Gleichung $\sqrt{-2}.\sqrt{-3} = \sqrt{6}$. Setzt man $\sqrt{-2} = \sqrt{2}.i$, und $\sqrt{-3} = \sqrt{3}.i$, so ist aber $\sqrt{-2}.\sqrt{-3} = -\sqrt{6}$. Indessen scheint Euler unter $\sqrt{-2}.\sqrt{-3} = \sqrt{6}$ zu verstehen $W\!\!\!/-2 \,.\, W\!\!\!/-3 = W\!\!\!/6$, welches nach Obigem vier richtige und vier falsche Gleichungen umfaſst.

VII. Die Division des Imaginären durch das Imaginäre ist ohne Schwierigkeit, und kann am natürlichsten als vergleichende Division angesehen werden. Es ist $fi : gi = \frac{f}{g}$.

Für die Divisision des Reellen durch das Imaginäre sind die Grundformeln $1 : i = \frac{1}{i} = -i$, und $\frac{1}{-i} = i$, welche aus $i.(-i) = 1$ entstehen. Sie sind in $1 : W\!\!\!/-1 = W\!\!\!/-1$ enthalten, worin aber auch die falschen Gleichungen $1 : i = i$ und $1 : -i = -i$ liegen.

Euler hat in seiner Algebra §. 149. die Gleichung $\frac{1}{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$. Hienach wäre, wenn $\sqrt{-1} = i$, auch $\frac{1}{i} = i$, eine jetzt als falsch anerkannte Gleichung. Allein Euler scheint unter seiner Gleichung zu verstehen $1 : W\!\!\!/-1 = W\!\!\!/-1$. Auch hier erhellet übrigens, indem diese Gleichung halb richtig, halb falsch ist, die in der Bezeichnung durch i begründete gröſsere Bestimmtheit und Verständlichkeit der Gleichungen.

VIII. Für die Potenzirung des Imaginären findet man leicht die bekannten Grundgleichungen

$$\begin{array}{ll} i^{4m} = 1 & (-i)^{4m} = 1 \\ i^{4m+1} = i & (-i)^{4m+1} = -i \\ i^{4m+2} = -1 & (-i)^{4m+2} = -1 \\ i^{4m+3} = -i & (-i)^{4m+3} = +i \end{array}$$

IX. Höhere imaginäre Wurzeln kommen bekanntlich alle auf die Form $p + qi$, und also auf imaginäre Quadratwurzeln zurück. Dabei findet sich aber, daſs jedesmal, wenn $p + qi$ einen Werth von ${}^{n}W\!\!\!/a$ ausdrückt, auch $p - qi$ einen solchen Werth darstellt. Es ist auch bekannt, daſs überhaupt bei allen algebraischen Gleichungen, selbst den unreinen, die Wurzeln immer doppelt sind, so daſs $p + qi$ verbunden ist mit $p - qi$. Es können überhaupt in der ganzen Analysis imaginäre Werthe nie anders als in Paaren von dieser Art erscheinen, denn wäre es nicht so, so würde dies der Behauptung widerstreiten, daſs sich i von $-i$, abgesehen von ihrem Gegensatze, in nichts Wesentlichem unterscheiden.

Damit eben diese Behauptung als richtig erscheine, ist auch erforderlich, daſs man in jeder allgemein richtigen i enthaltenden Gleichung statt i setzen könne $-i$, ohne daſs dadurch die Gleichung unrichtig werde. Und dies ist auch wirklich so. Z. B. die Gleichung $1 : i = -i$, gehet durch die Umtauschung in die ebenfalls richtige $1 : -i = i$ über. Die Gleichungen in VIII. über die Potenzen von i zeigen dieselbe Eigenschaft besonders deutlich. Man könnte solche zwei Gleichungen, deren eine aus der andern durch Umtauschung des i und $-i$ entsteht, durch Gebrauch der Bezeichnung i' und i'' in eine einzige Gleichung zusammenfassen. Z.B. $1 : i' = i''$ enthält sowohl $1 : i = -i$ als auch $1 : -i = i$. Die acht Gleichungen von VIII. sind dann in folgenden vier enthalten:

$$(i')^{4m} = 1 \qquad (i')^{4m+1} = i'$$
$$(i'')^{4m+2} = -1 \qquad (i')^{4m+3} = i''$$

Alle diese Bemerkungen dienen wohl zu überzeugenden Beweisen für die Wahrheit des Satzes, dafs i und — i zwar entgegengesetzt sind, aber sich außerdem in nichts unterscheiden, eines Satzes, der für eine gründliche Theorie des Imaginären besonders wichtig scheint.

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:3-1192015415-1351375172-17/fragment/page=35

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:3-1192015415-1351375172-17/fragment/page=36

94 A 7334
ULB Halle 3
000 410 713
S. b.
VD17
VD18
Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:3-1192015415-1351375172-17/fragment/page=37

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:3-1192015415-1351375172-17/fragment/page=38

12

Bemerkungen

über

VERSCHIEDENE BEGRIFFE UND THEORIEN

aus der

ALLGEMEINEN GRÖSSEN- UND ZAHLENLEHRE,

von

Dr. Wilhelm August Fö

Professor am Gymnasium zu

Danzig, 1825.

In Commission der Gerhardschen

11

Gedruckt in der Wedelschen H

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:3-1192015415-1351375172-17/fragment/page=39