

**Lösbarkeit und Finite-Elemente-Approximation
eines mathematischen Modells für die
Strömung in Magnetfluidichtungen**

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades

**doctor rerum naturalium
(Dr. rer. nat.)**

genehmigt durch die Fakultät für Mathematik
der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

von Mgs. Teodora Mitkova
geb. am 23.10.1975 in Sofia (Bulgarien)

Gutachter:

Prof. Dr. rer. nat. habil. Lutz Tobiska
Prof. Dr. rer. nat. habil. Ulrich Langer
Priv.-Doz. Dr. rer. nat. Oleg Iliev

Eingereicht am: 23.10.2003

Verteidigung am: 18.03.2004

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich all denjenigen Dank sagen, die dazu beigetragen haben, daß diese Arbeit in der vorliegenden Form entstehen konnte.

Dieser Dank gilt zuerst meinem Doktorvater, Prof. Dr. Lutz Tobiska, der mich während der gesamten Promotionsphase sehr engagiert und mit viel Geduld betreut hat. Für seine stete Unterstützung durch die Schaffung von Rahmenbedingungen für fachliche wie auch persönliche Weiterentwicklung wie auch das entgegengebrachte Vertrauen möchte ich ihm ebenso herzlich danken. Ohne dich, Lutz, wäre diese Arbeit nicht fertig geworden.

Dank gilt Herrn Prof. Ulrich Langer und Herrn Priv.-Doz. Dr. Oleg Iliev für die Begutachtung der Arbeit.

Meinen Kollegen am Institut für Analysis und Numerik, insbesondere Priv.-Doz. Dr. Volker John, Dr. Gunar Matthies und Dipl.-Math. Olga Lavrova möchte ich für viele hilfreiche Diskussionen und gute Hinweise danken. Dr. Gunar Matthies danke ich auch für das gewissenhafte Korrekturlesen. Bei Frau Barbara Fischbach möchte ich mich für die umsichtige Erledigung der oft sehr zeitaufwendigen organisatorischen Angelegenheiten bedanken.

Bedanken möchte ich mich bei Ass. Prof. Viktor Polevnikov von der Universität Minsk, Weißrussland, für die Übernahme der Daten für die numerisch bestimmten freien Oberflächen.

Ohne meine Deutschlehrerin, Frau Svetla Vutkovska, wäre diese Arbeit auf Englisch geschrieben.

Meine Freundinnen Frau Kalina Petrova und Frau Anna-Maria Petrow möchte ich für das Korrekturlesen der Arbeit ganz herzlich danken.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für die finanzielle Unterstützung meiner Arbeit im Graduiertenkolleg “Modellierung, Berechnung und Identifikation mechanischer Systeme” (GRK 203) und im Schwerpunktprogramm “Kolloidale magnetische Flüssigkeiten: Grundlagen, Entwicklung und Anwendung neuartiger Ferrofluide“ (DFG-SPP 1104). Mein Dank gilt weiterhin dem Institut für Analysis und Numerik für die hervorragenden Arbeitsbedingungen und die angenehme Atmosphäre.

Darüber hinaus danke ich meinen Eltern und meinen Freunden für die stetige moralische Unterstützung, welche das Fundament darstellt, auf dem ein Mensch und nicht zuletzt auch ein Projekt “Promotion” überhaupt erst wachsen kann.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Mathematische Problembeschreibung	9
2.1	Die Magnetfluiddichtung	9
2.2	Mathematische Modellierung des Dichtungsverhaltens	10
2.3	Reduktion auf ein zweidimensionales Modell	12
3	Das stetige Problem	19
3.1	Eine schwache Formulierung	20
3.2	Eine äquivalente Formulierung des Problems (3.13)	23
3.3	Existenz einer Lösung der stetigen Aufgabe	27
3.4	Eindeutigkeit der Lösung der stetigen Aufgabe	30
3.5	Entkopplung des stetigen Problems	32
4	Isoparametrische Finite-Elemente-Diskretisierung	37
4.1	Vergleich der verschiedenen Finite-Elemente-Diskretisierungen	37
4.2	Das diskrete Problem	41
4.3	Exakte Zerlegung und diskrete Bilinearformen	45
4.4	Lösbarkeit der diskreten Aufgabe	61
4.5	A priori-Fehlerabschätzungen	63
5	Die Lösung des algebraischen Gleichungssystems	77
5.1	Das Zerlegungskonzept	78
5.2	Der Aufbau des Gleichungssystems	80
5.2.1	Die Basisdarstellung	80
5.2.2	Die Berücksichtigung der Randbedingungen	81
5.3	Iterative Entkopplungsstrategie zur Lösung	84
5.4	Komponenten des Mehrgitterlösers MG-KD	85
5.4.1	Der Gittertransfer	85
5.4.2	Der Glätter und der Grobgitterlöser	87
5.5	Komponenten des Mehrgitterlösers MG-NS	87
5.5.1	Der Gittertransfer	87
5.5.2	Der Glätter und der Grobgitterlöser	88

6	Numerische Experimente	91
6.1	Das Navier-Stokes-Problem mit Gleitrandbedingung	91
6.1.1	Ein Noflow-Problem	92
6.1.2	Ein Testbeispiel im Halbkreis	95
6.1.3	Strömungsverhältnisse in Dissipationssysteme	99
6.2	Numerische Simulation der Strömungsverhältnisse in Magnetfluidichtungen	106
7	Zusammenfassung und Ausblick	117
A	Die verwendeten freien Oberflächen	119

Kapitel 1

Einleitung

Magnetische Flüssigkeiten, üblicherweise als Ferrofluide bezeichnet, sind Suspensionen feinsten, magnetischer Nanopartikel mit einem Durchmesser von ca. 10nm in geeigneten, nicht-magnetischen Trägerflüssigkeiten, z.B. Wasser, Kohlenwasserstoffe oder verschiedene Öle (siehe Abb. 1.1). Die Teilchen sind magnetische Eindomänenteilchen und können daher als thermisch bewegte magnetische Dipole in der Flüssigkeit betrachtet werden.

Die Besonderheit dieser Ferrofluide liegt in der Verbindung von normalem, flüssigem Verhalten mit superparamagnetischen Eigenschaften. Dies erlaubt den Einsatz magnetischer Kräfte zur Kontrolle der Eigenschaften und der Strömungen der Flüssigkeiten. Die Beeinflussbarkeit von Ferrofluiden durch äußere Magnetfelder ermöglicht das Design von Anwendungen bei denen magnetisch kontrollierte Flüssigkeiten ein Kernelement darstellen. Diese Möglichkeit hat in der Vergangenheit zu einigen tausend Patenten geführt, wobei einige der Ideen Eingang in das Alltagsleben gefunden haben.

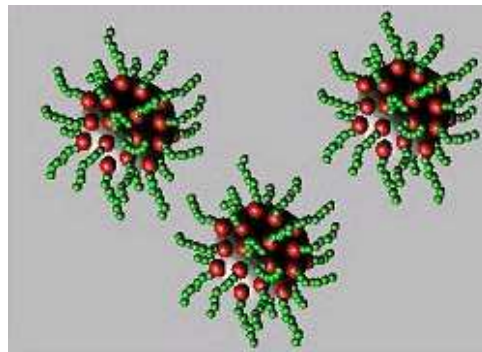


Abbildung 1.1: Schematische Darstellung der beschichteten Magnetitteilchen. In Ferrofluiden auf Kerosinbasis wird Ölsäure $C_{18}H_{34}O_2$ als Beschichtung verwendet. Die polare Carboxylgruppe $COOH$ haftet hierbei an der Teilchenoberfläche, während der unpolare Schwanz eine starke Affinität zur ebenfalls unpolaren Trägerflüssigkeit hat. Zwischen zwei Teilchen entsteht somit ein Puffer von 4 nm, da die Moleküllänge von Ölsäure ca. 2 nm beträgt [49].

Es gibt eine Reihe von technischen Anwendungen von magnetischen Flüssigkeiten, z.B. in Dämpfungen von Schrittmotoren, zur Abdichtung von Drehführungen, bei der Kühlung von Lautsprecher (siehe Abb. 1.2), zur Trennung nichtmagnetischer Stoffe und in der Medizin bei der magnetischen Hyperthermie (magnetisches Drug Targeting) zur Krebsbekämpfung (siehe Abb. 1.2). Die häufigste Anwendung der Ferrofluide ist zur Zeit zweifelsfrei die als Dichtung. In dieser Arbeit konzentrieren wir uns auf ein mathematisches Modell für Abdichtungen mit magnetischen Flüssigkeiten von Drehführungen und auf die Entwicklung von Algorithmen zur numerischen Behandlung des Modells mit Finite-Elemente-Methoden.

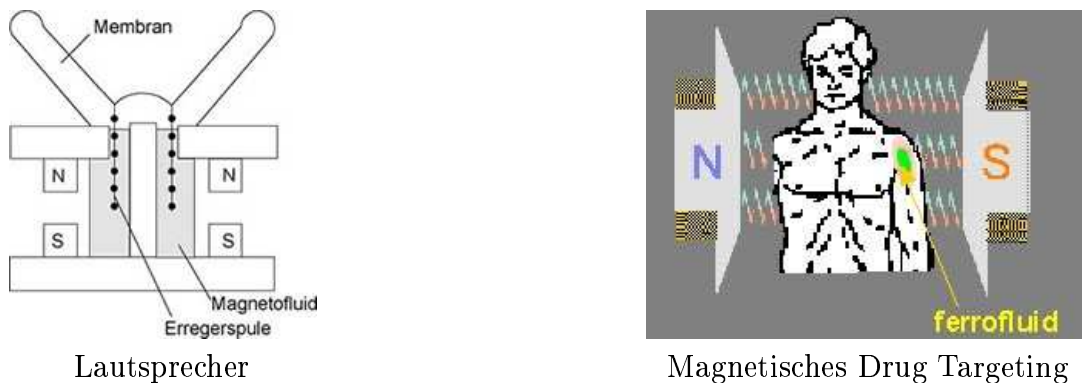


Abbildung 1.2: Zwei Anwendungen von magnetischen Flüssigkeiten

Dichtungen mit magnetischen Flüssigkeiten, die auch Magnetfluiddichtungen genannt werden, nutzen die Reaktion von Ferrofluiden auf ein angelegtes Magnetfeld aus. Prinzipiell besteht die Dichtung aus zwei Polschuhen, einem Magnet, dem Ferrofluid und einer drehenden Welle (siehe Abb. 1.3). Das Ferrofluid wird durch das angelegte Magnetfeld ringförmig an der Dichtungsstelle zwischen den Polschuhen und der drehenden Welle fixiert und kann dabei sogar starkem Druck widerstehen. Die herrschenden magnetischen Kräfte können das Fluid gegen Druckunterschiede von rund 1 bar festhalten. Das Ferrofluid bildet eine sogenannte "flüssige Dichtlippe" und dichtet hermetisch ab.

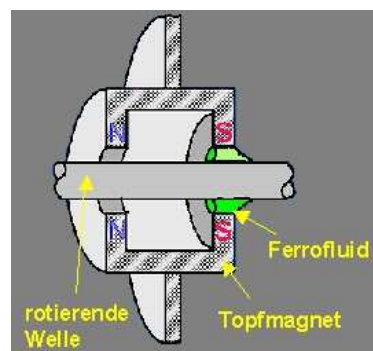


Abbildung 1.3: Magnetfluiddichtung von Drehführungen (schematisch)

Im Unterschied zu anderen Arten zur Abdichtung haben die Magnetfluiddichtungen eine

Reihe von Vorteilen, siehe zum Beispiel den Katalog von ALMA Verfahrens- und Anlagentechnik GmbH (ALMA Group Deutschland) [1] oder den von FerroTec GmbH [25]. Beim Einsatz von magnetfluidgedichteten Drehdurchführungen sind die Reibwiderstände geringer als bei elastomergedichteten. Dadurch ist es möglich die Antriebsleistungen minimiert anzulegen. An den flüssigen Dichtlippen findet kein mechanischer Abrieb statt. Aus diesem Grund werden keine Partikel gebildet, welche das Vakuum verunreinigen könnten. Durch den Einsatz der Ferrofluide ist die Dichtung für unbegrenzte Lebensdauer einsetzbar, da keine Verschleisserscheinungen an der Dichtung auftreten. Schließlich sind die Magnetfluiddichtungen wartungsfrei. Dadurch wird eine hundertprozentige Verfügbarkeit der Anlagen erreicht und es entstehen keine wartungsbedingten Stillstandszeiten.

Anzutreffen sind solche Dichtungen beispielsweise bei schnell drehenden Plattenlaufwerken, um den Informationsträger gegen Staub zu schützen. Wegen der hohen Zuverlässigkeit setzt man diese Dichtungen auch in der Raumfahrt ein. Um allerdings den Normaldruck gegenüber Vakuum abzudichten benötigt man ca. sechs hintereinandergeschaltete Ringe.

Aufgrund verschärfter Umweltschutzgesetzgebung werden Magnetfluidichtungen immer mehr in der chemischen Industrie verwendet, insbesondere um zu verhindern, dass toxische Stoffe in die Atmosphäre entweichen können.

Für praktische Anwendungen und für die Effektivität der verwendeten Anlagen ist es sehr wichtig, daß das Verhalten der Magnetfluidichtung vertieft untersucht ist. Wir wollen dieses Verhalten numerisch untersuchen. Deshalb brauchen wir ein geeignetes, mathematisches Modell, das sich durch ein System von partiellen Differentialgleichungen mit entsprechenden Randbedingungen beschreiben läßt. Als Grundlage des mathematischen Modells benutzen wir die inkompressiblen stationären dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen in Zylinderkoordinaten. Ausgehend vom physikalischen dreidimensionalen Modell zeigen wir, daß eine zweidimensionale Betrachtungsweise zulässig ist. Dieses vereinfachte zweidimensionale Modell für Dichtungen mit magnetischen Flüssigkeiten läßt sich mathematisch als ein System von der stationären inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen (für die Geschwindigkeit und den Druck) und der Konvektions-Diffusions-Gleichung (für die Umfangsgeschwindigkeit) auffassen. Zu diesem gekoppelten System betrachten wir entsprechende Randbedingungen. Die das mit Flüssigkeit ausgefüllte Gebiet begrenzenden Oberflächen setzen sich aus zwei vorgegebenen Oberflächen und zwei freien Oberflächen zusammen. Daraus folgen verschiedene Randbedingungen (die klassischen Stokes-Randbedingungen, die Gleitrandbedingung und die inhomogene Randbedingung). Nach dem Aufbau des gekoppelten zweidimensionalen Modells wird die numerische Lösungsmethode diskutiert. In einem ersten Schritt werden die Gleichungen diskretisiert. Das Herzstück einer jeden Diskretisierung stellt die Wahl der diskreten (endlichdimensionalen) Ansatzräume dar. Die Lösung des diskreten nichtlinearen algebraischen Gleichungssystems wird durch eine Folge von Lösungen linearer Gleichungssysteme approximiert. Die Lösung großer schwach besetzter linearer Probleme ist das Kernstück vieler Algorithmen innerhalb der numerischen Strömungssimulation. Zur Beurteilung eines Verfahrens gibt es drei grundlegende Kriterien. Das ist zum ersten die Genauigkeit der berechneten Lösungen, die nicht nur wesentlich von der Wahl der diskreten Ansatzräume sondern auch des Gitters abhängt. Das zweite Kriterium ist der numerische Aufwand zur Berechnung der Lösungen

und das dritte ist die Robustheit der Verfahren, das heißt die Unabhängigkeit ihres Verhaltens vom konkreten Problem. Diese beiden Punkten sind wesentlich an den verwendeten Löser geknüpft. Es ist bekannt, daß es Wechselwirkungen zwischen dem Diskretisierungskonzept und dem verwendeten Löser gibt, daß insbesondere die Wahl eines guten Löser nicht unabhängig von der zugrunde liegenden Diskretisierung ist.

Im Laufe der letzten Jahrzehnte haben sich die Diskretisierungstechniken stürmisch entwickelt. Die Diskretisierungskonzepte für die Modellgleichungen basieren auf Finite-Differenzen-Methoden (FDM), Finite-Volumen-Methode (FVM) und Finite-Elemente-Methoden (FEM).

Finite-Differenzen-Methoden auf regelmäßigen Gittern zeichnen sich durch eine einfache Datenstruktur und eine einfache Generierung der Systemmatrizen aus. Schwierigkeiten bereitet die Gittergenerierung für komplexe Strömungsgebiete (krummlinige Ränder, unregelmäßige Gitter), die ähnlich zu unserem sind.

Finite-Volumen-Methoden sind physikalisch interpretierbar als diskretes, konservatives Schema und weisen eine große Flexibilität bei der Behandlung komplexer Strömungsgebiete auf. Nachteilig ist jedoch das Nichtvorhandensein einer rigorosen Konvergenzanalyse.

Finite-Elemente-Methoden zeichnen sich durch die einfache Verständlichkeit der Hauptkomponenten der Methode aus. Eine rigorose Konvergenzanalyse ist verfügbar. Komplexe Strömungsgebiete können einfach behandelt werden. Randbedingungen 2. und 3. Art sind leicht integrierbar und die Adaption an Gebiete und Lösungsstrukturen ist ebenfalls einfach realisierbar. Von Nachteil sind bei dieser Methode die erhöhten Kosten bei der Generierung der Systemmatrizen und die komplizierte Datenstruktur.

Aus der Literatur sind numerische Lösungsverfahren für das Modellsystem bekannt, die entweder auf der Finite-Differenzen-Diskretisierungsmethode (siehe [51], [53], [76]) oder auf der Finite-Volumen-Methode (siehe [54]) basieren. Ein Blick in die Literatur zeigt, daß fast ausschließlich Finite-Elemente-Methoden zur Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichungen und der Konvektions-Diffusions-Gleichung genutzt werden. Häufig verwendete Finite-Elemente-Diskretisierungen für die Navier-Stokes-Gleichungen sind das konforme P_2/P_1 -Element (Taylor-Hood-Element), das nichtkonforme P_1/P_0 -Element sowie das nichtkonforme rotiert-bilineare Q_1/P_0 -Element. Betrachtet man nur die Genauigkeit der berechneten Lösungen, so liefern Finite-Elemente-Diskretisierungen mit hoher lokaler Ordnung die besten Ergebnisse. Doch wurde bereits in [27] bei einem Vergleich verschiedener zweidimensionaler Finite-Elemente-Diskretisierungen festgestellt, daß die Implementation dieser Diskretisierungen, die Assemblierung der Matrizen und das Lösen der Gleichungssysteme sehr aufwendig ist. Dies führt dazu, daß vom Kosten-Effizienz Standpunkt einige Finite-Elemente niedriger Ordnung konkurrenzfähig sind. Anstelle von der Bilinearform

$$a_D(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega),$$

die sowohl für konforme als auch für nichtkonforme Finite-Elemente-Räume koerzitiv ist, erfordert die Berücksichtigung der Randbedingung auf dem freien Rand die Verwendung der Bilinearform

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T, \nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega).$$

Da für nichtkonforme Finite-Elemente niedriger Ordnung keine diskrete Version der Kornschen Ungleichung gilt (siehe z.B. [3] und [39]), ist die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ für die nichtkonforme Elemente niedriger Ordnung im allgemeinen nicht koerzitiv. Aus diesem Grund haben wir uns entschieden, zur numerischen Lösung der Modellgleichungen konforme Finite-Elemente zu benutzen. Um eine bessere Gebietsapproximation bzw. eine bessere Berücksichtigung der Gleitrandbedingung auf dem freien krummlinigen Rand zu erreichen, verwenden wir konforme, krummlinig berandete (isoparametrische) Finite-Elemente. Die Geschwindigkeitskomponenten und die Umfangsgeschwindigkeit werden durch quadratische Ansätze approximiert. Der Druck wird durch einen linearen Ansatz approximiert. Zur Herleitung einer a priori-Fehlerabschätzung benutzen wir die Idee exakter Zerlegung. Dies ermöglicht uns die diskrete Lösung auf das originale Gebiet umzurechnen und die Integration auf dem Rand des diskreten Gebietes zu vermeiden.

Die Finite-Elemente-Diskretisierung der Modellgleichungen führt auf das Problem ein großes nichtlineares algebraisches Gleichungssystem behandeln zu müssen. Lösungsverfahren, die auf einer feiner Triangulierung die Inverse der Steifigkeitsmatrix verlangen, sind viel zu teuer bezüglich des Speicherplatzbedarfs und der CPU-Zeit auf dem Rechner und deshalb nicht attraktiv. Einfache iterative Verfahren konvergieren in den ersten Schritten schnell, später jedoch sehr langsam. Für dieses Konvergenzverhalten sind allein die langwelligeren Fehleranteile verantwortlich. Die kurzwelligen Fehleranteile werden schnell geglättet. Diese Beobachtung motivierte zur Konstruktion von Mehrgitterverfahren. Die Idee besteht darin, die langwelligeren Fehleranteile auf groben Gitter zu behandeln und die kurzwelligen Fehleranteile auf feinen Gittern schnell zu glätten. Für unser Mehrgitterverfahren verwenden wir blockstrukturierte Gitter. Die Gittergenerierung setzt auf der vorgegebenen Makrostruktur des Gebietes auf.

Die Arbeit ist im weiteren in folgende Abschnitte gegliedert:

Im zweiten Kapitel stellen wir zuerst die Magnetfluiddichtung von Drehführungen schematisch dar. Die mathematische Modellierung des Verhaltens der Magnetfluiddichtungen besteht aus der Berechnung des Magnetfeldes, der Untersuchung des Strömungsverhaltens und aus der Bestimmung der freien Oberflächen. Diese drei Problemkreise lassen sich mathematisch als ein gekoppeltes System von dreidimensionalen Gleichungen auffassen. Der größte Aufwand bei der Lösung des Systems entsteht bei der Lösung der Gleichungen, die die Strömungsverhältnisse in den Magnetfluiddichtungen beschreiben. Deshalb konzentrieren wir uns auf die numerische Untersuchung des Strömungsverhaltens. Ausgehend vom hydrodynamischen dreidimensionalen Modell zeigen wir, daß unter gewissen Annahmen eine zweidimensionale mathematische Betrachtungsweise zulässig ist.

Im dritten Kapitel werden wir das stetige Problem in eine Variationsformulierung überführen und Aussagen zur Existenz und Eindeutigkeit der Lösung formulieren. Die Existenz einer Lösung werden wir mit der Galerkin-Methode untersuchen, wobei abweichend von Standardtechniken die Struktur des Modells eine Aufspaltungstechnik und die Anwendung eines schwachen Maximumprinzips für gemischte Randwertaufgaben erfordert.

Die Untersuchung der Existenz mit Hilfe vom schwachen Maximumprinzip im Rahmen der Aufspaltungstechnik ist neu. Wir betrachten auch eine iterative teilproblem-orientierte Entkopplungsstrategie zur Lösung der stetigen Aufgabe und zeigen, daß die Entkopplungsiteration konvergiert. Die teilproblem-orientierte Entkopplungsstrategie besteht aus der sukzessiven Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen und der Konvektions-Diffusions-Gleichung.

Im vierten Kapitel beschreiben wir die Finite-Elemente-Diskretisierung des Modellsystems. Nach einem kritischen Vergleich möglicher Finite-Elemente-Diskretisierungen verwenden wir isoparametrische finite Elemente. Diese Elemente ermöglichen bei der Berücksichtigung der Gleitrandbedingung die Verwendung der stetigen Normalen an allen auf dem diskreten Rand liegenden Knoten. Jede Komponente der Geschwindigkeit und die Umfangsgeschwindigkeit approximieren wir durch quadratische Ansätze. Der Druck wird durch einen linearen Ansatz approximiert. Da die Aufspaltungstechnik bei der Untersuchung des diskreten Problems nicht anwendbar ist, betrachten wir die diskrete Aufgabe unter Verwendung der teilproblem-orientierten Entkopplungsstrategie. Nach der Untersuchung der Lösbarkeit der beiden diskreten Teilprobleme erhalten wir die Lösbarkeit der diskreten Aufgabe über die Konvergenz der Entkopplungsiteration. Die Konvergenzanalyse leiten wir auch unter Verwendung der teilproblem-orientierten Entkopplungsstrategie her. Unter Einsatz der Technik der exakten Zerlegung leiten wir die Fehleranalyse der beiden diskreten Teilprobleme auf dem Modellgebiet her. Aus diesem Grund stellen wir kurz die Konstruktion einer exakten Zerlegung und ihre Eigenschaften dar. Die Herleitung von a priori-Fehlerabschätzung für die mit isoparametrischen finiten Elemente diskretisierten Navier-Stokes-Gleichungen mit Gleitrandbedingung ist neu. Im Anschluß an die Konvergenzanalyse der beiden Teilprobleme leiten wir die Gesamtfehlerabschätzung her.

Die diskreten Modellgleichungen führen auf ein schwach besetztes großes gekoppeltes nichtlineares algebraisches Gleichungssystem für die Knotenwerte der Sekundärgeschwindigkeit, des Druckes und der Umfangsgeschwindigkeit. Das Kapitel 5 ist dem Lösungsverfahren dieses Gleichungssystems gewidmet. Wir haben ein Gleichungssystem sehr hoher Dimension zu lösen. Es bietet sich daher der Einsatz eines Mehrgitterverfahrens an. Zuerst behandeln wir die Konstruktion des Grobgitters und durch uniforme Verfeinerung konstruieren eine Folge von Gitter für die Stufen des Mehrgitterverfahrens. Zunächst betrachten wir die Struktur des Gleichungssystems und berücksichtigen die Randbedingungen. Die klassischen Dirichlet-Randbedingungen implementieren wir standardmäßig und konzentrieren uns auf die Implementation der Gleitrandbedingung. Nach einem kritischen Vergleich der möglichen Implementationskonzepte wählen wir eine Implementaion, die aus dem direkten Einbau der diskreten Form der Gleitrandbedingung in das Gleichungssystem besteht. Das gekoppelte Gleichungssystem wird iterativ auf jeder Mehrgitterstufe entkoppelt und auf jedem Iterationsschritt sind ein lineares System (entspricht der Konvektions-Diffusions-Gleichung) und ein nichtlineares System vom Sattelpunkttyp (entspricht den Navier-Stokes-Gleichungen) zu lösen. Das lineare System lösen wir unter Einsatz des Mehrgitterverfahrens **MG-KD**. Das nichtlineare System linearisieren wir zuerst unter Verwendung der Fixpunktiterationmethode und die linearen Teilprobleme in-

nerhalb der nichtlinearen Iteration lösen wir mit dem Mehrgitterverfahren **MG-NS**. Wir beschreiben kurz die Komponenten der beiden Mehrgitterlöser. Die Implementation der Navier-Stokes-Gleichungen mit Gleitrandbedingung unter Einsatz von Mehrgitterverfahren ist neu.

Im sechsten Kapitel werden die Ergebnisse der Testrechnungen dargestellt und diskutiert. Zunächst wird die Güte des konstruierten numerischen Lösungsverfahrens zur Navier-Stokes-Gleichungen mit Gleitrandbedingung mit bekannter exakter Lösung untersucht. Unter Verwendung der Implementation der Navier-Stokes-Gleichungen mit Gleitrandbedingung untersuchen wir numerisch die Strömungsverhältnisse in Dissipationssysteme. Die Anwendung und die Geometrie der Dissipationssysteme, sowie die mathematische Modellierung der Strömungsverhältnisse in Dissipationssysteme werden kurz beschrieben. Abschließend zeigen wir numerische Resultate zu dem gekoppelten Modellproblem, das die Strömungsverhältnisse in Magnetfluidichtungen beschreibt. Die Testrechnungen werden mit drei verschiedenen Modellströmungsgebieten durchgeführt.

Ein Ausblick schließt diese Arbeit ab.

Die punktweise gegebenen freien Oberflächen, die bei der numerischen Simulation der Strömungsverhältnisse in Magnetfluidichtungen verwendet werden, sind in Anhang A tabellarisch aufgelistet.

Kapitel 2

Mathematische Problembeschreibung

In diesem Kapitel stellen wir die Magnetfluidichtung von Drehführungen schematisch dar. Zunächst betrachten wir ein mathematisches Modell zur Beschreibung der Verhältnisse in Magnetfluidichtungen und konzentrieren uns auf die mathematische Modellierung der Strömungsverhältnisse. Ausgehend vom physikalischen hydrodynamischen dreidimensionalen Modell zeigen wir, daß eine zweidimensionale Betrachtungsweise zulässig ist.

2.1 Die Magnetfluidichtung

Magnetische Flüssigkeiten stellen komplexe Fluide dar, deren Verhalten sich durch ein äußeres Magnetfeld beeinflussen läßt. Standardwerke über Ferrofluide sind das Buch von Blums et al. [15] und das von Rosensweig [58]. In [15] und [58] werden der Aufbau und die Eigenschaften von Ferrofluiden, die verwendeten Materialien und die Herstellungsverfahren ausführlich beschrieben. In [12], [13] und [57] findet man eine Vielzahl von technischen Anwendungen von magnetischen Flüssigkeiten. Zur Zeit ist die häufigste Anwendung der Ferrofluide zweifelsfrei die als Dichtung. Die Abbildung 2.1 stellt die Magnetfluidichtung von Drehführungen schematisch dar. Die hyperbolische Form des Magnetkerns ist wichtig für die praktischen Anwendungen und ermöglicht eine explizite mathematische Darstellung des Magnetfeldes in einer Magnetfluidichtung. Ein Konzentrator mit hyperbolischem Kopf ist zuerst in [51] angeboten und mathematisch untersucht.

Für praktische Anwendungen und für die Effektivität der verwendeten Anlagen ist es sehr wichtig, daß man das Dichtungsverhalten gut untersucht. Die Lage und Gestalt der magnetischen Flüssigkeit spielt eine wichtige Rolle für das Dichtungsverhalten. Die das mit Flüssigkeit ausgefüllte Gebiet begrenzenden Oberflächen setzen sich aus zwei vorgegebenen Oberflächen (die Oberfläche des Rotors und des magnetischen Kerns) und zwei freien Oberflächen zusammen. Die Zuverlässigkeit der Dichtung hängt von der Form der freien Oberflächen ab, deren Berechnung die Simulation des Strömungsverhaltens der Flüssigkeit voraussetzt.

Zur mathematischen Untersuchung des Dichtungsverhaltens brauchen wir ein geeignetes mathematisches Modell, das sich durch ein System von partiellen Differentialgleichungen

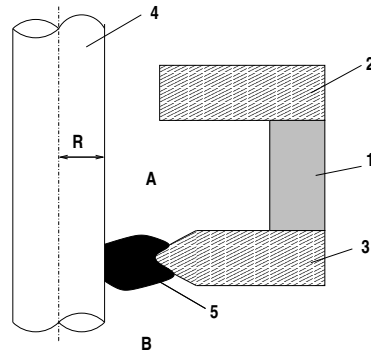


Abbildung 2.1: Magnetflüssigkeitsdichtung (schematisch): 1 - Magnet, 2 - Kern, 3 - Magnetkern mit hyperbolischem Kopf (Konzentrator), 4 - Schaft (Rotor), 5 - magnetische Flüssigkeit, A - Gebiet mit hohem Druck, B - Gebiet mit niedrigem Druck

unter Hinzunahme von geeigneten Randbedingungen beschreiben läßt.

2.2 Mathematische Modellierung des Dichtungsverhaltens

Die mathematische Modellierung des Verhaltens einer Magnetflüssigkeitsdichtung besteht aus drei Problemkreisen (siehe Abb. 2.2):

- Berechnung des Magnetfeldes;
- Untersuchung des Strömungsverhaltens;
- Bestimmung der freien Oberflächen.

Diese drei Problemkreise lassen sich mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen, bzw. der Navier-Stokes-Gleichungen und der Young-Laplace-Gleichung unter Hinzunahme von geeigneten Randbedingungen beschreiben.

Die Maxwell-Gleichungen stellen die Grundgleichungen der Elektrodynamik der magnetischen Flüssigkeiten dar (siehe z.B. [17]). Magnetische Flüssigkeiten können als nichtleitend angenommen werden [58]. Damit vereinfachen sich die Maxwell-Gleichungen zu

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{in } \tilde{\Omega}, \quad (2.1)$$

wobei \mathbf{H} die magnetische Feldstärke, \mathbf{B} die magnetische Induktion und $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ das Gebiet, das vom Ferrofluid eingenommen wird, bezeichnen. Neben den Gleichungen (2.1) wird noch eine Materialgleichung benötigt, welche den im allgemeinen nichtlinearen Zusammenhang $\mathbf{B} = \mu(|\mathbf{H}|)\mathbf{H}$, zwischen \mathbf{B} und \mathbf{H} beschreibt, wobei $\mu(|\mathbf{H}|)$ magnetische Permeabilität heißt. Um den Zusammenhang zwischen \mathbf{B} und \mathbf{H} in Materie zu beschreiben, benötigt man zusätzlich eine Größe

$$\mathbf{M} = \mathbf{H} \left(\frac{\mu(|\mathbf{H}|)}{\mu_0} - 1 \right),$$

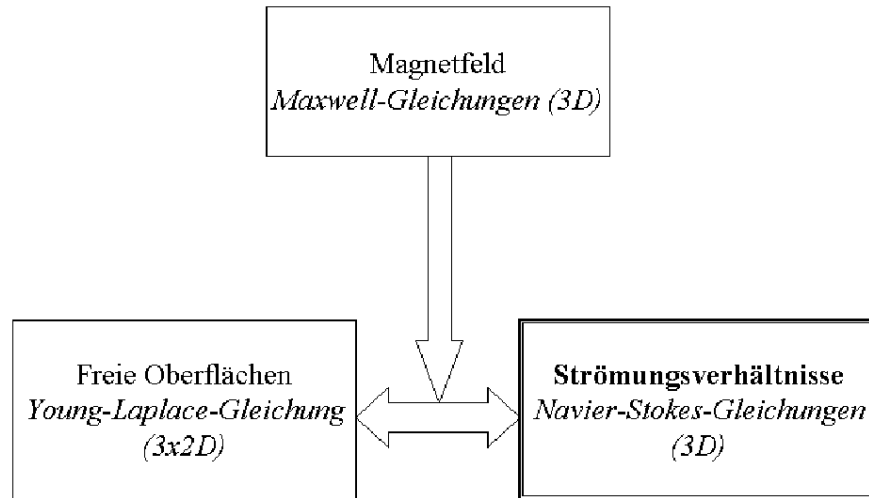


Abbildung 2.2: Modellierung des Verhaltens einer Magnetflüssigkeit

die die Magnetisierung bezeichnet. Allgemein erhält die Materialgleichung die Form

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) ,$$

mit der magnetischen Feldkonstante $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ VsA}^{-1}\text{m}^{-1}$. Die Magnetisierung \mathbf{M} und die magnetische Feldstärke \mathbf{H} sind parallele Vektoren. Darüberhinaus hängt der Betrag $M = |\mathbf{M}|$ nur vom Betrag $H = |\mathbf{H}|$ ab. Die Abhängigkeit wird durch

$$M(H) = M_s L(\gamma H)$$

beschrieben, wobei M_s die Sättigungsmagnetisierung, γ der Langevin-Parameter und

$$L(x) = \coth(x) - \frac{1}{x}$$

die Langevin-Funktion sind.

Zunächst betrachten wir das Dichtungsverhalten in hydrodynamischer Hinsicht. Für inkompressible Flüssigkeiten, d.h. für Flüssigkeiten mit konstanter Dichte, erhält man aus der Massen- und Impulsbilanz die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen, die das dynamische Strömungsverhalten der Flüssigkeit beschreiben. Für den Fall einer magnetischen Flüssigkeit sind die Navier-Stokes-Gleichungen durch

$$\begin{aligned} -\eta \Delta \mathbf{v} + \varrho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla P = \mathbf{f} + \mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} & \quad \text{in } \tilde{\Omega} , \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 & \quad \text{in } \tilde{\Omega} , \end{aligned} \quad (2.2)$$

gegeben (siehe [58]). Hier bezeichnet \mathbf{v} , P und \mathbf{f} die Geschwindigkeit, den Druck und die Volumenkraft. Die physikalischen (konstanten) Parameter sind die Dichte ϱ und die dynamische Viskosität η .

Auf der freien Grenzfläche zwischen der magnetischen Flüssigkeit und der Luft muss die Young-Laplace-Gleichung

$$\alpha\mathcal{K} = \frac{\mu_0}{2}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})^2 - [|\mathbf{n} \cdot \sigma(\mathbf{v}, P)\mathbf{n}|] \quad (2.3)$$

erfüllt sein. Hierbei sind α der Koeffizient der Oberflächenspannung, \mathcal{K} die Summe der Hauptkrümmungen, \mathbf{n} der Normaleneinheitsvektor an der Grenzfläche, $[|\mathbf{n} \cdot \sigma(\mathbf{v}, P)\mathbf{n}|]$ der Sprung der Normalspannungen an der Oberfläche und $\sigma(\mathbf{v}, P)$ der Spannungstensor.

Das Dichtungsverhalten lässt sich mathematisch als ein gekoppeltes System von dreidimensionalen Gleichungen (2.1), (2.2) und (2.3) auffassen. Wir nehmen an, daß die magnetische Flüssigkeit in Sättigung steht, d.h. $M = M_s$. Weiterhin setzen wir voraus, daß es $H \gg M_s$ gilt. Somit wird sich das Magnetfeld des Fluides nicht ändern, wenn das Fluidsvolumen sich ändert. Um dann das Magnetfeld zu berechnen, müssen wir die Maxwell-Gleichungen (2.1) nur einmal lösen. Eine numerische Behandlung von (2.1) kann man in [47] finden. Für den Fall der hyperbolischen Form des Magnetkerns und $H \gg M_s$ kann man das Magnetfeld in einem zweidimensionalen Querschnitt von $\tilde{\Omega}$ analytisch darstellen (siehe [52]).

Die Bestimmung der freien Oberflächen steht aber mit der Untersuchung des Strömungsverhaltens in iterativer Beziehung (siehe Abb. 2.2). Bei bekanntem Magnetfeld berechnen wir die Strömung (\mathbf{v}, P) im festen Gebiet $\tilde{\Omega}$ aus (2.2). Dann können die freien Oberflächen mit Hilfe der Gleichung (2.3) bestimmt werden. Weiterhin wird die Strömung im neuen Gebiet untersucht und die freien Oberflächen werden neu bestimmt. Die Young-Laplace-Gleichung (2.3) kann durch Parametrisierung auf drei zweidimensionalen Gleichungen reduziert werden. Der größte Aufwand in diesem iterativen Zusammenhang entsteht bei der Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen (2.2). Das System (2.2) muß effektiv gelöst werden, damit die gesamte Iteration zur Bestimmung der freien Oberflächen effizient ist. Deshalb konzentrieren wir uns auf die Untersuchung des Strömungsverhaltens. Zunächst betrachten wir eine Reduktion von (2.2) und zeigen, daß eine zweidimensionale Betrachtungsweise zulässig ist.

2.3 Reduktion auf ein zweidimensionales Modell

Wir betrachten die Navier-Stokes-Gleichungen (2.2). Der Druck $P = p_f + p_m$ setzt sich aus dem thermodynamischen Druck p_f und dem magnetischen Druck

$$p_m = \mu_0 \int_0^H M(H') dH'$$

zusammen (siehe [58]). Da die Vektoren \mathbf{H} und \mathbf{M} parallel sind, gilt $\mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} = \mu_0 M \nabla H$. Außerdem gilt

$$\mu_0 M \nabla H = \mu_0 \nabla \left(\int_0^H M(H') dH' \right).$$

Da $\nabla p_m = \mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}$ gilt, reduzieren sich die Navier-Stokes-Gleichungen (2.2) zu

$$\begin{aligned} -\eta \Delta \mathbf{v} + \varrho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla p_f &= \mathbf{f} \quad \text{in } \tilde{\Omega}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \quad \text{in } \tilde{\Omega}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Das zugrundeliegende Strömungsgebiet $\tilde{\Omega}$ kann bei stationärer Betriebsweise rotations-symmetrisch angenommen werden. Wir betrachten die dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen (2.4) in Zylinderkoordinaten $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$. Wir nehmen an, daß $\mathbf{v} = (v_r, v_\varphi, v_z)$ nur von r, z abhängt und vernachlässigen die Volumenkraft \mathbf{f} . Dann gilt

$$\begin{aligned} \varrho \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\varphi^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) + \frac{\partial p_f}{\partial r} &= \eta \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right), \\ \varrho \left(v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right) &= \eta \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} \right), \\ \varrho \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial p_f}{\partial z} &= \eta \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right), \\ \varrho \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Seien R der Radius des Rotors, $a \ll R$ die Spaltbreite und v_0 die Umfangsgeschwindigkeit des Rotors für $r = R$. Die Einführung dimensionsloser Variablen

$$X = \frac{r - R}{a}, \quad Y = \frac{z}{a}, \quad u_1 = \frac{v_r}{v_0}, \quad u_2 = \frac{v_z}{v_0}, \quad \omega = \frac{v_\varphi}{v_0}, \quad p = \frac{p_f}{\varrho v_0^2}$$

ergibt

$$\begin{aligned} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial X} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial Y} - \left(\frac{a}{R + aX} \right) \omega^2 + \frac{\partial p}{\partial X} &= \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial X^2} + \left(\frac{a}{R + aX} \right) \frac{\partial u_1}{\partial X} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{a}{R + aX} \right)^2 u_1 + \frac{\partial^2 u_1}{\partial Y^2} \right), \\ u_1 \frac{\partial u_2}{\partial X} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial Y} + \frac{\partial p}{\partial Y} &= \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial X^2} + \left(\frac{a}{R + aX} \right) \frac{\partial u_2}{\partial Y} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial Y^2} \right), \\ \frac{\partial u_1}{\partial X} + \left(\frac{a}{R + aX} \right) u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial Y} &= 0, \end{aligned}$$

$$u_1 \frac{\partial \omega}{\partial X} + u_2 \frac{\partial \omega}{\partial Y} - \left(\frac{a}{R+aX} \right) u_1 \omega = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \left(\frac{a}{R+aX} \right) \frac{\partial \omega}{\partial X} - \left(\frac{a}{R+aX} \right)^2 \omega + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right),$$

mit der Reynoldzahl $Re = \rho v_0 a / \eta$. Man vernachlässigt alle Terme der Form

$$\frac{a}{r} = \frac{a}{R+aX} = \frac{\delta}{1+\delta X} \ll 1 \quad \text{für} \quad \delta = \frac{a}{R} \ll 1$$

mit Ausnahme des Terms $\frac{a}{R+aX} \omega^2$ in der ersten Beziehung. Dieser Term beschreibt im wesentlichen die zentrifugalen Kräfte und wird wie folgt approximiert:

$$\frac{a}{R+aX} \omega^2 = \frac{\delta}{1+\delta X} \omega^2 \approx \delta \omega^2.$$

Daraus ergeben sich die entdimensionierten Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \delta \omega^2 \vec{\mathbf{e}}_1 + \nabla p &= \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \mathbf{u} \cdot \nabla \omega &= \frac{1}{Re} \Delta \omega, \end{aligned}$$

mit $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$, $\vec{\mathbf{e}}_1 = (1, 0)^T$.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitzstetigem Rand $\Gamma = \partial\Omega$. Das Modell, das die Kopplung zwischen der Sekundärströmung \mathbf{u} und der Hauptströmung ω beinhaltet, ist durch

$$-\frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \delta \omega^2 \vec{\mathbf{e}}_1 \quad \text{in } \Omega, \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (2.6)$$

$$-\frac{1}{Re} \Delta \omega + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (2.7)$$

gegeben. Für die Geschwindigkeit \mathbf{u} und den Druck p gelten die zweidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen (2.5)-(2.6). Für die Umfangsgeschwindigkeit ω gilt die skalare Konvektions-Diffusions-Gleichung (2.7). Die Zentrifugalkraft ist der Grund dafür, daß die rechte Seite in (2.5) quadratisch von der Umfangsgeschwindigkeit ω abhängt.

Bemerkung 2.3.1 *Wir nehmen an, daß die Temperatur von Fluid und Umgebung konstant ist. Ein Modell mit Berücksichtigung der Temperatur ist in [42] dargestellt.*

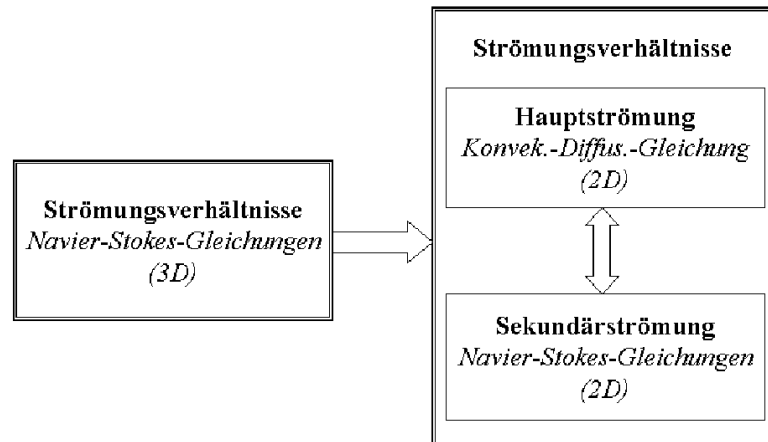


Abbildung 2.3: Reduktion bei der Modellierung der Strömungsverhältnisse

Das aus der Literatur bekannte zweidimensionale Modell zur Beschreibung der Strömungsverhältnisse in einer Magnetfluidichtung basiert auf ein entkoppeltes System (siehe [51], [52], [53], [54] und [76]). Wenn man von der Annahme ausgeht, daß der Einfluss der Umfangsgeschwindigkeit ω wesentlich größer als der der Sekundärströmung \mathbf{u} ist, kann man den Term $\mathbf{u} \cdot \nabla \omega \approx 0$ vernachlässigen. Somit ergibt sich ein entkoppeltes Modell in [51], [52], [53], [54] und [76]. Das von uns dargestellte, zweidimensionale Modell (2.5)-(2.7) ist wesentlich verallgemeinert. Unsere Entkopplungsstrategie besteht aus der sukzessiven Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen und der Konvektions-Diffusions-Gleichung (siehe Abb. 2.3). Bei bekannter Umfangsgeschwindigkeit ω bestimmen wir (\mathbf{u}, p) aus (2.5)-(2.6). Die Berechnung von ω aus (2.7) unter Nutzung des zuvor bestimmten Feldes \mathbf{u} ergibt eine neue Näherung für ω .

Zur numerischen Lösung der Modellgleichungen (2.5)-(2.6) benutzen wir einen Finite-Elemente-Ansatz. Wir sichern das Lösungsverfahren theoretisch ab und analysieren die numerischen Fehler. Aus der Literatur sind numerische Verfahren zur Lösung des entkoppelten Modells ($\mathbf{u} \cdot \nabla \omega \approx 0$ in (2.7)) bekannt, die auf den unterschiedlichen Diskretisierungsmethoden basieren, z.B. [51], [53], [54] und [76]. In [51], [53] und [76] sind die Finite-Differenzen-Methode und das Erhaltungsgesetz als numerische Lösungsverfahren eingesetzt. In [54] ist das Strömungsverhalten der Magnetfluidichtung mit Hilfe einer Finite-Volumen-Methode untersucht. Die in [51], [53], [54] und [76] dargestellten Lösungsverfahren wurden theoretisch nicht abgesichert. Die numerischen Fehler wurden auch nicht analysiert.

Im Unterschied zu den vorhergehenden Gleichungen, die den Zustand von Materie innerhalb eines bestimmten Volumens (Modellgebietes) beschreiben, werden zunächst Bedingungen betrachtet, die an der Grenze des Gebietes gelten müssen. Die Randbedingungen lassen sich auch aufgrund der Rotationssymmetrie auf Randbedingungen für den zweidimensionalen Querschnitt zurückführen. Der Rand $\Gamma = \partial\Omega$ setzt sich aus zwei vorgegebenen Oberflächen (die Oberfläche des Rotors Γ_S und des Konzentrators Γ_K) und zwei freien

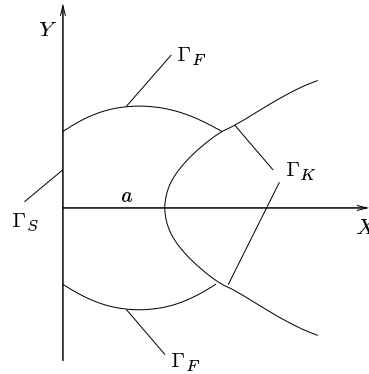


Abbildung 2.4: Das Modellgebiet Ω : Γ_K - Oberfläche des Konzentrators, Γ_S - Rotoroberfläche, Γ_F - freier Rand, a - Spaltbreite

Oberflächen Γ_F zusammen (siehe Abb. 2.4). Im Einzelnen gelten

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_K \cup \Gamma_S, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_F, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{n} \cdot \sigma(\mathbf{u}, p) \boldsymbol{\tau} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_F, \quad (2.10)$$

$$\omega = 1 \quad \text{auf } \Gamma_S, \quad (2.11)$$

$$\omega = 0 \quad \text{auf } \Gamma_K, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_F. \quad (2.13)$$

Dabei ist $\Gamma = \Gamma_K \cup \Gamma_S \cup \Gamma_F$ mit $\text{meas } \Gamma_K, \text{meas } \Gamma_S, \text{meas } \Gamma_F > 0$, $\Gamma_K \cap \Gamma_S = \emptyset$, $\Gamma_K \cap \Gamma_F \neq \emptyset$ und $\Gamma_S \cap \Gamma_F \neq \emptyset$. Die Oberfläche des Konzentrators Γ_K und die Rotoroberfläche Γ_S sind die festen Ränder des Gebiets Ω , so daß die klassische Stokes-Randbedingung (2.8) auf $\Gamma_K \cup \Gamma_S$ zu fordern wäre. Die Gleichungen (2.5)-(2.6) sind von zweiter Ordnung im Ort und benötigen daher Randbedingungen auf ganz Γ . Auf dem freien Rand Γ_F gilt die klassische Stokes-Randbedingung nicht mehr, sondern es gelten die Gleitrandbedingung (2.9) und die zusätzliche Bedingung (2.10) (siehe z.B. [23], [60] oder [67]). Hier bezeichnet \mathbf{n} den äußeren Normaleneinheitsvektor, $\boldsymbol{\tau}$ den Einheitstangentenvektor und $\sigma(\mathbf{u}, p) = (\sigma(\mathbf{u}, p))_{ij}$ mit

$$\sigma(\mathbf{u}, p)_{ij} := -p \delta_{ij} + \frac{2}{Re} \mathcal{D}(\mathbf{u})_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq 2$$

den hydrodynamischen Teil des Spannungstensors. Der Geschwindigkeitsdeformationstensor $\mathcal{D}(\mathbf{u}) = (\mathcal{D}(\mathbf{u}))_{ij}$ ist durch

$$\mathcal{D}(\mathbf{u})_{ij} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad 1 \leq i, j \leq 2$$

gegeben. Der Drehung des Rotors entspricht die inhomogene Randbedingung (2.11) auf Γ_S . Da der Konzentrator feststehend ist, verschwindet ω auf Γ_K .

Bemerkung 2.3.2 Auch die Modellierung anderer Prozesse, etwa die Strömung in Dissipationssysteme, führt auf Gleichungen der Struktur (2.5)-(2.6) (wobei $\delta\omega^2\vec{e}_1 \approx \mathbf{0}$) mit Randbedingungen (2.9)-(2.10) auf den freien Oberflächen des Strömungsgebietes.

Unter Verwendung der Implementation des Modells (2.5)-(2.13) untersuchen wir im Kapitel 6 die Strömungsverhältnisse in Dissipationssysteme numerisch.

Kapitel 3

Das stetige Problem

Sei Ω ein beschränktes Gebiet des \mathbb{R}^2 mit Lipschitzstetigem Rand $\Gamma = \Gamma_K \cup \Gamma_S \cup \Gamma_F$ ($\text{meas } \Gamma_K, \text{meas } \Gamma_S, \text{meas } \Gamma_F > 0, \Gamma_K \cap \Gamma_S = \emptyset, \Gamma_K \cap \Gamma_F \neq \emptyset, \Gamma_S \cap \Gamma_F \neq \emptyset$). Wir betrachten im folgenden das entdimensionierte Modell

$$-\frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \delta \omega^2 \mathbf{e}_1 \quad \text{in } \Omega, \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (3.2)$$

$$-\frac{1}{Re} \Delta \omega + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (3.3)$$

mit den Randbedingungen

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_K \cup \Gamma_S, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_F, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{n} \cdot \sigma(\mathbf{u}, p) \boldsymbol{\tau} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_F, \quad (3.6)$$

$$\omega = 1 \quad \text{auf } \Gamma_S, \quad (3.7)$$

$$\omega = 0 \quad \text{auf } \Gamma_K, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_F. \quad (3.9)$$

In diesem Kapitel wollen wir die Lösbarkeit des stetigen Modells (3.1)-(3.9) untersuchen und diskutieren. Aussagen über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung werden formuliert und bewiesen.

Wir benutzen die üblichen Bezeichnungen aus [30]. Die Normen in den Lebesgue- und Sobolev-Räumen $L^p(\Omega)$ und $H^m(\Omega)$ seien durch $\|\cdot\|_{0,p,\Omega}$ und $\|\cdot\|_{m,\Omega}$, die Seminorm in $H^m(\Omega)$ durch $|\cdot|_{m,\Omega}$ bezeichnet. Das Skalarprodukt im $L^2(\Omega)$ wird mit (\cdot, \cdot) notiert. Vektorwertige Funktionen und Räume werden in Fettdruck dargestellt, wobei die entsprechenden Normen und Skalarprodukte analog zum skalaren Fall definiert sind.

3.1 Eine schwache Formulierung

Ausgangspunkt der Untersuchungen ist eine schwache Formulierung von (3.1)-(3.9). Um das Problem (3.1)-(3.9) in eine schwache Formulierung zu überführen, verwenden wir die folgenden Ansatz- und Testräume:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_0 &:= \{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ auf } \Gamma_F \text{ und } \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ auf } \Gamma_K \cup \Gamma_S \} , \\ Q &:= L_0^2(\Omega) = \{ q \in L^2(\Omega) \mid (q, 1) = 0 \} , \\ \mathbf{W} &:= \{ \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0 \mid (q, \nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad \forall q \in Q \} , \\ Z_0 &:= \{ z \in H^1(\Omega) \mid z = 0 \text{ auf } \Gamma_K \cup \Gamma_S \} .\end{aligned}$$

Die Schwierigkeiten bei der numerischen Untersuchung des Modells (3.1)-(3.9) bestehen vor allem in der Berücksichtigung der Gleitrandbedingung (3.5) für die Geschwindigkeit \mathbf{u} auf dem freien Rand Γ_F . Zur Berücksichtigung dieser Randbedingungen gibt es verschiedene Varianten. Insbesondere gibt es die Varianten, die die Randbedingungen in starker Form im Ansatzraum (siehe [4], [5], [36] und [73]) oder in schwacher Form (als Lagrange-Multiplikator, siehe [5], [32], [44], [45], [50], [74] und [75]) berücksichtigen. Im Hinblick auf eine effiziente Umsetzung in Programmsysteme berücksichtigen wir die Gleitrandbedingungen (3.5) in starker Form im Ansatzraum \mathbf{V}_0 .

Die Räume $L_0^2(\Omega)$ und $\mathbf{H}_0^1(\Omega) = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \mid \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ auf } \partial\Omega \}$ erfüllen die wichtige LBB-Stabilitätsbedingung

$$\exists \beta > 0 : \quad \beta \|q\|_{0,2,\Omega} \leq \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)} \frac{(\nabla \cdot \mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}} \quad \forall q \in L_0^2(\Omega). \quad (3.10)$$

Einen Beweis von (3.10) findet man in [30]. Da $Q = L_0^2(\Omega)$ und $\mathbf{V}_0 \supset \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ gelten, genügen die Räume Q und \mathbf{V}_0 auch der LBB-Stabilitätsbedingung.

Wir führen nun die folgenden Bilinearformen und Trilinearformen ein:

$$\begin{aligned}a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T, \nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) = 2 \int_{\Omega} \mathcal{D}(\mathbf{u}) : \mathcal{D}(\mathbf{v}) \, dx \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \\ A(\omega, z) &:= (\nabla \omega, \nabla z) \quad \forall \omega, z \in H^1(\Omega), \\ b(\mathbf{v}, q) &:= -(\nabla \cdot \mathbf{v}, q) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \forall q \in L^2(\Omega), \\ n(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{m}) &:= (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}, \mathbf{m}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{m} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \\ N(\mathbf{u}, \omega, z) &:= (\mathbf{u} \cdot \nabla \omega, z) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \forall \omega, z \in H^1(\Omega).\end{aligned}$$

Wir betrachten die Gleichungen (3.1) und (3.2). Standardmäßig multiplizieren wir (3.1) mit einer Testfunktion $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ und integrieren auf dem Gebiet Ω . Mit dem Integralsatz von Green und (3.2) folgt

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p \right) \cdot \mathbf{v} \, dx \\
&= \frac{2}{Re} \int_{\Omega} \mathcal{D}(\mathbf{u}) : \mathcal{D}(\mathbf{v}) \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \, \mathbf{v} \, dx - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx - \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \sigma(\mathbf{u}, p) \, \mathbf{v} \, d\gamma \\
&= \frac{1}{Re} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + n(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) - \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \sigma(\mathbf{u}, p) \, \mathbf{v} \, d\gamma.
\end{aligned}$$

Für Funktionen $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_0$ erhalten wir mit der orthogonalen Zerlegung $\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau}$ und unter Berücksichtigung von (3.6)

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \sigma(\mathbf{u}, p) \, \mathbf{v} \, d\gamma &= \int_{\Gamma_K \cup \Gamma_S} \mathbf{n} \cdot \sigma(\mathbf{u}, p) \, \mathbf{v} \, d\gamma + \int_{\Gamma_F} \mathbf{n} \cdot \sigma(\mathbf{u}, p) \, \mathbf{v} \, d\gamma \\
&= \int_{\Gamma_F} \mathbf{n} \cdot \sigma(\mathbf{u}, p) \left((\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau} \right) \, d\gamma \\
&= \int_{\Gamma_F} \mathbf{n} \cdot \sigma(\mathbf{u}, p) \, \mathbf{n} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, d\gamma + \int_{\Gamma_F} \mathbf{n} \cdot \sigma(\mathbf{u}, p) \, \boldsymbol{\tau} (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}) \, d\gamma \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Bemerkung 3.1.1 Für den Deformationstensor gilt

$$2 \int_{\Omega} \mathcal{D}(\mathbf{u}) : \mathcal{D}(\mathbf{v}) \, dx = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx$$

mit $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ und $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Bei Berücksichtigung der Nebenbedingung $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ erkennen wir, daß die Bilinearformen

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2 \int_{\Omega} \mathcal{D}(\mathbf{u}) : \mathcal{D}(\mathbf{v}) \, dx \quad \text{und} \quad a_D(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{v} \, dx$$

für Funktionen $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ mit $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ und $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ übereinstimmen. Wenn die Randbedingung (3.6) vorliegt, dann kann die Testfunktion \mathbf{v} auf dem Rand nicht mehr Null gewählt werden. Damit ist die Gleichheit von $a(\cdot, \cdot)$ und $a_D(\cdot, \cdot)$ nicht mehr gewährleistet. Die Verwendung von $a(\cdot, \cdot)$ stellt die natürliche Wahl dar, da sich hier die Randbedingung (3.6) unmittelbar einarbeiten läßt.

Hinsichtlich des für Finite-Elemente-Methode erforderlichen Speicherplatzbedarfes wäre die Bilinearform $a_D(\cdot, \cdot)$ zu bevorzugen, da sie keine direkte Kopplung zwischen den Komponenten der Geschwindigkeit bewirkt, so daß die entsprechenden Einträge in der Steifigkeitsmatrix verschwinden.

Eine Variationsformulierung von (3.1)-(3.9) lautet nun:

Finde ein Tripel $\{\mathbf{u}, p, \omega\} \in \mathbf{V}_0 \times Q \times H^1(\Omega)$ mit $\omega|_{\Gamma_S} = 1$ und $\omega|_{\Gamma_K} = 0$, so daß

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + n(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= \delta(\omega^2, \mathbf{v} \cdot \vec{\mathbf{e}}_1) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0, \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0 \quad \forall q \in Q, \\ \frac{1}{Re} A(\omega, z) + N(\mathbf{u}, \omega, z) &= 0 \quad \forall z \in Z_0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Ziel der Untersuchungen ist es, Aussagen zur Lösbarkeit des Problems (3.11) herzuleiten.

Zunächst führen wir eine Homogenisierung der Dirichlet-Randbedingung $\omega = 1$ auf Γ_S durch. Da Γ_S und Γ_K keine Punkte gemeinsam haben, gibt es eine Erweiterung $\lambda_0 \in H^1(\Omega)$ mit $\lambda_0|_{\Gamma_S} = 1$ und $\lambda_0|_{\Gamma_K} = 0$. Anstelle von ω suchen wir nun $S \in Z_0$, wobei

$$\omega := S + \lambda_0.$$

Eine äquivalente Formulierung des Problems (3.11) lautet damit:

Finde ein Tripel $\{\mathbf{u}, p, S\} \in \mathbf{V}_0 \times Q \times Z_0$, so daß

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + n(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) + b(\mathbf{u}, q) &= \delta((S + \lambda_0)^2, \mathbf{v} \cdot \vec{\mathbf{e}}_1) \\ &\quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0, q \in Q, \\ \frac{1}{Re} A(S, z) + N(\mathbf{u}, S, z) + N(\mathbf{u}, \lambda_0, z) &= -\frac{1}{Re} A(\lambda_0, z) \quad \forall z \in Z_0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Durch die Einschränkung der Testfunktionen auf den Raum \mathbf{W} aller divergenzfreien Funktionen aus \mathbf{V}_0 kann der gesuchte Druck p eliminiert werden. Nach der Homogenisierung und der Druckelimination lautet das Variationsproblem:

Finde ein Paar $\{\mathbf{u}, S\} \in \mathbf{W} \times Z_0$, so daß

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + n(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \delta((S + \lambda_0)^2, \mathbf{v} \cdot \vec{\mathbf{e}}_1) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}, \\ \frac{1}{Re} A(S, z) + N(\mathbf{u}, S, z) + N(\mathbf{u}, \lambda_0, z) &= -\frac{1}{Re} A(\lambda_0, z) \quad \forall z \in Z_0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Wenn das Tripel $\{\mathbf{u}, p, S\} \in \mathbf{V}_0 \times Q \times Z_0$ eine Lösung des Variationsproblems (3.12) ist, dann ist das Paar $\{\mathbf{u}, S\} \in \mathbf{W} \times Z_0$ eine Lösung des Problems (3.13). Die Umkehrung gilt ebenfalls, da die Räume \mathbf{V}_0 und Q durch die LBB - Stabilitätsbedingung (3.10) miteinander verknüpft sind. Ist das Paar $\{\mathbf{u}, S\} \in \mathbf{W} \times Z_0$ eine Lösung des Problems (3.13), dann existiert ein eindeutiges $p \in Q$, so daß das Tripel $\{\mathbf{u}, p, S\} \in \mathbf{V}_0 \times Q \times Z_0$ eine Lösung des Variationsproblems (3.12) ist (siehe [30]). Deshalb beschränken wir uns in den folgenden Darstellungen auf die Analyse des Problems (3.13).

Für unser weiteres Vorgehen benötigen wir einige Eigenschaften der Bilinearformen und der Trilinearformen.

Lemma 3.1.1 Die Bilinearformen $a : \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ und $A : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ sind \mathbf{V}_0 - bzw. Z_0 -koerzitiv.

Beweis. Die \mathbf{V}_0 -Koerzitivität von $a(\cdot, \cdot)$ folgt aus der zweiten Kornischen Ungleichung (siehe [16])

$$\int_{\Omega} \mathcal{D}(\mathbf{v}) : \mathcal{D}(\mathbf{v}) \, dx \geq C_a \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0 \quad (3.14)$$

mit einer positiven Konstante C_a .

Nach der verallgemeinerten Poincaré-Friedrichsschen Ungleichung (siehe [2]) gibt es für $z \in Z_0$ eine Konstante $C_A > 0$ unabhängig von z mit

$$C_A \|z\|_{1,\Omega}^2 \leq \int_{\Omega} |\nabla z|^2 \, dx = A(z, z). \quad (3.15)$$

■

Die folgenden Aussagen, die einige Eigenschaften der Trilinearformen zusammenfassen, finden wir in [24], [30] oder [70].

Lemma 3.1.2 Seien $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{m} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ und $S, z \in H^1(\Omega)$. Dann gelten

$$|n(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{m})| \leq c_1 |\mathbf{v}|_{1,\Omega} \|\mathbf{u}\|_{0,4,\Omega} \|\mathbf{m}\|_{0,4,\Omega} \leq c_2 |\mathbf{v}|_{1,\Omega} \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{m}\|_{1,\Omega}, \quad (3.16)$$

$$|N(\mathbf{u}, S, z)| \leq c_3 |S|_{1,\Omega} \|\mathbf{u}\|_{0,4,\Omega} \|z\|_{0,4,\Omega} \leq c_4 |S|_{1,\Omega} \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \|z\|_{1,\Omega}. \quad (3.17)$$

Aus (3.16) und (3.17) folgt, daß die Trilinearformen $n : \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ und $N : \mathbf{H}^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind.

Lemma 3.1.3 Sei $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ mit $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ und $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$. Dann haben die Trilinearformen $n(\cdot, \cdot, \cdot)$ und $N(\cdot, \cdot, \cdot)$ die Eigenschaften:

$$n(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{m}) = -n(\mathbf{u}, \mathbf{m}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{m} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad (3.18)$$

$$N(\mathbf{u}, S, z) = -N(\mathbf{u}, z, S) \quad \forall S, z \in H^1(\Omega), \quad (3.19)$$

$$n(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad (3.20)$$

$$N(\mathbf{u}, S, S) = 0 \quad \forall S \in H^1(\Omega). \quad (3.21)$$

3.2 Eine äquivalente Formulierung des Problems (3.13)

Wenn wir die Standardbeweistechniken zum Nachweis der Existenz einer Lösung eines Sattelpunktproblems (siehe in [30], Chapter IV) anwenden möchten, müssen wir das Problem (3.13) durch

$$\frac{1}{Re} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + n(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \delta (S^2 + 2S\lambda_0, \mathbf{v} \cdot \vec{\mathbf{e}}_1) = \delta (\lambda_0^2, \mathbf{v} \cdot \vec{\mathbf{e}}_1) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}, \quad (3.22)$$

$$\frac{1}{Re} A(S, z) + N(\mathbf{u}, \lambda_0, z) + N(\mathbf{u}, S, z) = -\frac{1}{Re} A(\lambda_0, z) \quad \forall z \in Z_0 \quad (3.23)$$

äquivalent umschreiben und die Positivität der linken Seite in (3.22)-(3.23) auf dem Produktraum $\mathbf{W} \times Z_0$ beweisen. Mit Hilfe des Lemmas 3.1.1 und Lemmas 3.1.3 folgt für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$ und $z \in Z_0$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{Re} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + n(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) - \delta(z^2 + 2z\lambda_0, \mathbf{v} \cdot \vec{\mathbf{e}}_1) + \frac{1}{Re} A(z, z) + N(\mathbf{v}, \lambda_0, z) + N(\mathbf{v}, z, z) \\
&= \frac{1}{Re} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - \delta(z^2, \mathbf{v} \cdot \vec{\mathbf{e}}_1) - 2\delta(z\lambda_0, \mathbf{v} \cdot \vec{\mathbf{e}}_1) + \frac{1}{Re} A(z, z) + N(\mathbf{v}, \lambda_0, z) \\
&\geq C_a \frac{1}{Re} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2 - \delta(z^2, \mathbf{v} \cdot \vec{\mathbf{e}}_1) - c_5 \|z\|_{1,\Omega} |\lambda_0|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} + C_A \frac{1}{Re} \|z\|_{1,\Omega}^2 \\
&\quad - c_4 |\lambda_0|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \|z\|_{1,\Omega} \\
&\geq \left(\min\{C_a, C_A\} \frac{1}{Re} - \frac{c_4 + c_5}{2} |\lambda_0|_{1,\Omega} \right) \left(\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2 + \|z\|_{1,\Omega}^2 \right) - \delta(z^2, \mathbf{v} \cdot \vec{\mathbf{e}}_1),
\end{aligned}$$

mit c_5 eine positive Konstante und C_a , C_A und c_4 bezeichnen die Konstanten in (3.14) bzw. (3.15) und (3.17). In unserem Fall kann die benötigte Positivität nicht gezeigt werden, da keine Abschätzung des Termes $(z^2, \mathbf{v} \cdot \vec{\mathbf{e}}_1)$ mit $z \in Z_0$ zur Verfügung steht.

In [24] wird ein ähnliches gekoppeltes Problem untersucht. Da die rechte Seite des Problems in [24] eine lineare vektorwertige Funktion ist, kann dort die Positivität für kleine Reynoldszahlen Re gezeigt werden. Allerdings führt die Anwendung der Standardbeweistechniken zur Einschränkung an der Lösbarkeit. Die auftretende Einschränkung an die Kleinheit der Reynoldszahl Re wird in [24] mit einer Aufspaltungstechnik eliminiert. Wir wenden die gleiche Technik an, um die Lösbarkeit des Problems (3.13) zu untersuchen.

Abweichend zu Standardbeweistechniken überführen wir im folgenden das Problem (3.13) durch "Elimination von S " in eine äquivalente Formulierung auf dem Raum \mathbf{W} . Zu diesem Zweck definieren und untersuchen wir das Problem:

Problem (SP): Sei $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$ gegeben. Finde $S \in Z_0$, so daß

$$D(\mathbf{v}; S, z) = l(\mathbf{v}; z) \quad \forall z \in Z_0 \tag{3.24}$$

mit

$$\begin{aligned}
D(\mathbf{v}; S, z) &:= \frac{1}{Re} A(S, z) + N(\mathbf{v}, S, z), \\
l(\mathbf{v}; z) &:= -\frac{1}{Re} A(\lambda_0, z) - N(\mathbf{v}, \lambda_0, z).
\end{aligned}$$

Für eine gegebene Funktion $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$ ist $D(\mathbf{v}; \cdot, \cdot)$ eine stetige Bilinearform auf $Z_0 \times Z_0$. Für gegebene Funktionen $\lambda_0 \in H^1(\Omega)$ mit $\lambda_0|_{\Gamma_S} = 1$ und $\lambda_0|_{\Gamma_K} = 0$ und $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$ ist $l(\mathbf{v}; \cdot)$ eine stetige Linearform auf Z_0 . Es gilt

$$D(\mathbf{v}; z, z) \geq \frac{1}{Re} |z|_{1,\Omega}^2 \quad \forall z \in Z_0, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}.$$

Die Bedingungen des Satzes von Lax/Milgram (siehe [30], [78] oder [80]) sind damit erfüllt. Das bedeutet, daß das lineare Problem(SP) für jedes $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$ eine eindeutige Lösung $S \in Z_0$ hat. Es existiert also ein wohldefinierter Lösungsoperator

$$T : \mathbf{W} \rightarrow Z_0, \quad \mathbf{v} \mapsto T\mathbf{v} = S.$$

Wir können nun mittels T auf die zweite Gleichung in (3.13) verzichten und in der ersten Gleichung S durch $T\mathbf{u}$ ersetzen. Eine äquivalente Formulierung des Problems (3.13) lautet:

Finde $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$, so daß

$$\frac{1}{Re} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + n(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \delta \left((T\mathbf{u} + \lambda_0)^2, \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 \right) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}. \quad (3.25)$$

Aufgrund der Äquivalenz der Probleme (3.13) und (3.25) können wir uns bei den weiteren Untersuchungen auf das Problem (3.25) beschränken.

Damit wir die Kopplung zwischen der Geschwindigkeit \mathbf{u} und der Umfangsgeschwindigkeit S beweistechnisch ausnutzen können, müssen wir den Lösungsoperator T untersuchen.

Die folgenden Aussagen liefern wichtige technische Resultate, die wir für unsere Beweistechnik benötigen. Folgendes schwache Maximumprinzip kann man in [19] finden:

Lemma 3.2.1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ und

$$X = \{s \in H^1(\Omega) \mid s = 0 \text{ auf } \Gamma_0\}.$$

Darüber hinaus sei $L : H^1(\Omega) \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform mit

$$L(w, s) := \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} w_{x_i} s_{x_j} + \sum_{i=1}^n (b_i w_{x_i} s + d_i w s_{x_i}) + c w s \right\} dx + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} s d\gamma,$$

wobei $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} t_i t_j \geq \alpha |t|^2$, α positive Konstante, $b_i, d_i \in L^n(\Omega)$ und $c \in L^{\frac{n}{2}}(\Omega)$. Aus $L(w, s) \leq 0$ in Ω mit $w \in H^1(\Omega)$ und $s \in X \cap C^1(\bar{\Omega})$, $s \geq 0$ folgt

$$w \leq \max \left\{ 0, \max_{\Gamma_0} w \right\} \quad \text{in } \Omega.$$

Im Vergleich zu den in der Literatur häufig beschriebenen schwachen Maximumprinzipen (siehe [29] und [55]), behandelt Lemma 3.2.1 die schwachen Lösungen eines Problems mit gemischten Randbedingungen.

Mit Hilfe des Lemmas 3.2.1 erhält man die folgende a priori-Abschätzung:

Lemma 3.2.2 Für $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$ und $\lambda_0 \in H^1(\Omega)$ mit $\lambda_0|_{\Gamma_S} = 1$ und $\lambda_0|_{\Gamma_K} = 0$ gilt die a priori-Abschätzung

$$\|T\mathbf{v} + \lambda_0\|_{0,\infty,\Omega} \leq 1. \quad (3.26)$$

Beweis. Für gegebene $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$ und $\lambda_0 \in H^1(\Omega)$ mit $\lambda_0|_{\Gamma_S} = 1$ und $\lambda_0|_{\Gamma_K} = 0$ ist die Funktion $\omega^* = T\mathbf{v} + \lambda_0 \in H^1(\Omega)$ eine Lösung des Problems:

Finde $\omega \in H^1(\Omega)$ mit $\omega|_{\Gamma_S} = 1$ und $\omega|_{\Gamma_K} = 0$, so daß

$$D(\mathbf{v}; \omega, z) = 0 \quad \forall z \in Z_0. \quad (3.27)$$

Unter Verwendung des Lemmas 3.2.1 auf das Problem (3.27) ergibt sich

$$\omega^* \leq \max \left\{ 0, \max_{\Gamma_S} \omega^*, \max_{\Gamma_K} \omega^* \right\} = 1 \quad \text{in } \Omega. \quad (3.28)$$

Die Funktion $-\omega^* = -T\mathbf{v} - \lambda_0 \in H^1(\Omega)$ ist eine Lösung des folgenden Problems:

Finde $\omega \in H^1(\Omega)$ mit $\omega|_{\Gamma_S} = -1$ und $\omega|_{\Gamma_K} = 0$, so daß

$$D(\mathbf{v}; \omega, z) = 0 \quad \forall z \in Z_0. \quad (3.29)$$

Mit Hilfe vom Lemma 3.2.1 erhält man

$$-\omega^* \leq \max \left\{ 0, \max_{\Gamma_S} -\omega^*, \max_{\Gamma_K} -\omega^* \right\} = 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (3.30)$$

Mit (3.28) und (3.30) können wir schlußfolgern

$$\|T\mathbf{v} + \lambda_0\|_{0,\infty,\Omega} = \|\omega^*\|_{0,\infty,\Omega} \leq 1. \quad \blacksquare$$

Die folgende Eigenschaft des Lösungsoperators T ist für unsere Beweistechnik nützlich:

Lemma 3.2.3 *Der Lösungsoperator $T : \mathbf{W} \rightarrow Z_0$ hat die folgende Eigenschaft*

$$|T\mathbf{v}_1 - T\mathbf{v}_2|_{1,\Omega} \leq \mathcal{C} \operatorname{Re} \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{0,2,\Omega} \quad \forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{W}, \quad (3.31)$$

wobei \mathcal{C} eine positive Konstante bezeichnet.

Beweis. Seien $T\mathbf{v}_1 = S_1$ und $T\mathbf{v}_2 = S_2$, wobei $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{W}$ beliebig sind. Wir setzen S_1 und S_2 in (3.24) ein und bilden die Differenz. Für alle $z \in Z_0$ gilt

$$\frac{1}{\operatorname{Re}} A(S_1 - S_2, z) + N(\mathbf{v}_1, S_1, z) - N(\mathbf{v}_2, S_2, z) = -N(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \lambda_0, z). \quad (3.32)$$

Mit (3.19) erhalten wir

$$\begin{aligned} N(\mathbf{v}_1, S_1, z) - N(\mathbf{v}_2, S_2, z) &= N(\mathbf{v}_1, S_1, z) - N(\mathbf{v}_2, S_1, z) + N(\mathbf{v}_2, S_1, z) - N(\mathbf{v}_2, S_2, z) \\ &= N(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, S_1, z) + N(\mathbf{v}_2, S_1 - S_2, z) \\ &= -N(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, z, S_1) + N(\mathbf{v}_2, S_1 - S_2, z). \end{aligned}$$

Wir setzen $z := S_1 - S_2$ in (3.32) ein. Unter Verwendung von (3.19) und (3.21) ergibt sich

$$\frac{1}{Re} A(S_1 - S_2, S_1 - S_2) = N(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, S_1 - S_2, S_1 + \lambda_0).$$

Nutzt man (3.15) und die a priori-Abschätzung $\|S_1 + \lambda_0\|_{0,\infty,\Omega} = \|T\mathbf{v}_1 + \lambda_0\|_{0,\infty,\Omega} \leq 1$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{C_A}{Re} |S_1 - S_2|_{1,\Omega}^2 &\leq \frac{1}{Re} A(S_1 - S_2, S_1 - S_2) = N(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, S_1 - S_2, S_1 + \lambda_0) \\ &= \int_{\Omega} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \nabla(S_1 - S_2) (S_1 + \lambda_0) dx \\ &\leq \int_{\Omega} |(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot \nabla(S_1 - S_2)| dx \\ &\leq c \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{0,2,\Omega} |S_1 - S_2|_{1,\Omega}, \end{aligned}$$

mit positiver Konstante c .

Die Behauptung ergibt sich mit $\mathcal{C} = c/C_A$. ■

3.3 Existenz einer Lösung der stetigen Aufgabe

Wir zeigen zunächst die Existenz einer Lösung des Problems (3.25). Dazu schreiben wir das Problem (3.25) in Operatorform

$$P(\mathbf{u}) = 0 \tag{3.33}$$

mit

$$(P(\mathbf{u}), \mathbf{v}) = \frac{1}{Re} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + n(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \delta \left((T\mathbf{u} + \lambda_0)^2, \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 \right) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}.$$

Die Abbildung $P : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{W}$ ist stetig. Als Grundlage zum Nachweis der Existenz einer Lösung des Problems (3.33) benutzen wir eine Folgerung des klassischen Fixpunktsatzes von Brouwer, die man in [30] oder [70] finden kann.

Satz 3.3.1 *Sei \mathbf{X} ein endlich-dimensionaler Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{X}}$ und der Norm $|\cdot|_{\mathbf{X}}$. Weiter sei Q eine stetige Abbildung, $Q : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ mit der folgenden Eigenschaft: Es existiert eine Konstante $k > 0$, so daß*

$$(Q\mathbf{x}, \mathbf{x})_{\mathbf{X}} \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X} \quad \text{mit} \quad |\mathbf{x}|_{\mathbf{X}} = k.$$

Dann existiert ein Element $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, so daß

$$Q\mathbf{x} = 0, \quad |\mathbf{x}|_{\mathbf{X}} \leq k. \tag{3.34}$$

Lemma 3.3.1 *Das Problem (3.25) hat eine Lösung $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$.*

Beweis. Wir betrachten

$$(P(\mathbf{v}), \mathbf{v}) = \frac{1}{Re} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + n(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) - \delta \left((T\mathbf{v} + \lambda_0)^2, \mathbf{v} \cdot \vec{\mathbf{e}}_1 \right) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}.$$

Mit (3.14) und (3.20) gilt

$$(P(\mathbf{v}), \mathbf{v}) \geq \frac{C_a}{Re} |\mathbf{v}|_{1,\Omega}^2 - \delta \left((T\mathbf{v} + \lambda_0)^2, \mathbf{v} \cdot \vec{\mathbf{e}}_1 \right) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}.$$

Unter Verwendung von (3.26) erhält man für $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$

$$\left| \left((T\mathbf{v} + \lambda_0)^2, \mathbf{v} \cdot \vec{\mathbf{e}}_1 \right) \right| \leq \left| \int_{\Omega} (T\mathbf{v} + \lambda_0)^2 (\mathbf{v} \cdot \vec{\mathbf{e}}_1) dx \right| \leq \int_{\Omega} |\mathbf{v}| dx \leq C_1 |\mathbf{v}|_{1,\Omega},$$

mit positiver, von \mathbf{v} unabhängiger Konstante C_1 . Wir können dann schlußfolgern

$$(P(\mathbf{v}), \mathbf{v}) \geq \frac{C_a}{Re} |\mathbf{v}|_{1,\Omega}^2 - C_1 \delta |\mathbf{v}|_{1,\Omega},$$

Wir setzen

$$K_1 = K_1(Re, \delta) := \frac{C_1}{C_a} \delta Re.$$

Nach dieser Vorüberlegung können wir nun die Existenz einer Lösung mit der Galerkin-Methode zeigen.

Da \mathbf{W} ein separabler Hilbert-Raum ist, kann man ein System $\{\mathbf{r}_i\}_{i \geq 1} \subset \mathbf{W}$ abzählbar vieler linear unabhängiger Elemente in \mathbf{W} auswählen, deren Linearkombinationen dicht in \mathbf{W} liegen.

Sei $\mathbf{W}_m \subset \mathbf{W}$, $\mathbf{W}_m = span\{\mathbf{r}_i\}_{i=1}^m$. Dann ist mit

$$G\mathbf{y} = \sum_{i=1}^m y_i \mathbf{r}_i \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$$

eine bijektive Abbildung $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbf{W}_m$ definiert und $|G\mathbf{y}|_{1,\Omega}$ ist eine Norm in \mathbb{R}^m . Auf endlich-dimensionalen Räumen sind alle Normen äquivalent, deshalb existiert ein $k_0 > 0$ mit

$$|\mathbf{y}| \leq k_0 |G\mathbf{y}|_{1,\Omega}.$$

Hier kennzeichnen wir mit $|\cdot|$ die euklidische Norm in \mathbb{R}^m . Wir definieren durch

$$(Q\mathbf{y})_i = (P(G\mathbf{y}), \mathbf{r}_i), \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.35)$$

einen stetigen Operator $Q : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. Es gilt

$$(Q\mathbf{y}, \mathbf{y}) = (P(G\mathbf{y}), G\mathbf{y}) \geq 0 \quad \forall |\mathbf{y}| \geq k_0 K_1.$$

Nach Satz 3.3.1 existiert dann $\tilde{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^m$ mit $Q\tilde{\mathbf{y}} = 0$. Wir setzen $\mathbf{u}_m = G\tilde{\mathbf{y}}$. Wegen (3.35) ist

$$(P(\mathbf{u}_m), \mathbf{r}_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Dann folgt aus (3.34)

$$|\mathbf{u}_m|_{1,\Omega} \leq K_1 \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (3.36)$$

Da der Raum \mathbf{W} reflexiv ist, existiert wegen (3.36) eine Teilfolge \mathbf{u}_{m_j} und ein Element $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$, so daß

$$\mathbf{u}_{m_j} \rightharpoonup \mathbf{u} \quad \text{in } \mathbf{W}.$$

Wenn

$$\mathbf{u}_{m_j} \rightharpoonup \mathbf{u} \implies (P(\mathbf{u}_{m_j}), \mathbf{v}) \rightarrow (P(\mathbf{u}), \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W} \quad (3.37)$$

gilt, dann bedeutet das

$$(P(\mathbf{u}), \mathbf{r}_i) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Da $\mathbf{W} = \overline{\text{span}\{\mathbf{r}_i\}_{i=1}^{\infty}}$, erhalten wir

$$(P(\mathbf{u}), \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}.$$

Das heißt, daß ein $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$ mit $P(\mathbf{u}) = 0$ existiert. Die Existenz einer Lösung ist also bewiesen, wenn (3.37) gezeigt werden kann. Wir betrachten dazu

$$\begin{aligned} (P(\mathbf{u}_{m_j}) - P(\mathbf{u}), \mathbf{v}) &= \frac{1}{Re} a(\mathbf{u}_{m_j} - \mathbf{u}, \mathbf{v}) + n(\mathbf{u}_{m_j}, \mathbf{u}_{m_j}, \mathbf{v}) - n(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ &\quad - \delta \left((T\mathbf{u}_{m_j} + \lambda_0)^2 - (T\mathbf{u} + \lambda_0)^2, \mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1 \right). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Mit (3.18) und (3.16) finden wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} |n(\mathbf{u}_{m_j}, \mathbf{u}_{m_j}, \mathbf{v}) - n(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v})| &= |n(\mathbf{u}_{m_j} - \mathbf{u}, \mathbf{u}_{m_j}, \mathbf{v}) + n(\mathbf{u}, \mathbf{u}_{m_j} - \mathbf{u}, \mathbf{v})| \\ &= |n(\mathbf{u}_{m_j} - \mathbf{u}, \mathbf{u}_{m_j}, \mathbf{v}) - n(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}_{m_j} - \mathbf{u})| \\ &\leq c_2 \|\mathbf{u}_{m_j} - \mathbf{u}\|_{0,4,\Omega} |\mathbf{v}|_{1,\Omega} (|\mathbf{u}_{m_j}|_{1,\Omega} + |\mathbf{u}|_{1,\Omega}). \end{aligned}$$

Mit (3.26), (3.31) und der Einbettung $\mathbf{L}^4(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$ gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} &|((T\mathbf{u}_{m_j} + \lambda_0)^2, \mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1) - ((T\mathbf{u} + \lambda_0)^2, \mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1)| \\ &= \left| \left((T\mathbf{u}_{m_j} - T\mathbf{u})(T\mathbf{u}_{m_j} + \lambda_0 + T\mathbf{u} + \lambda_0), \mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1 \right) \right| \\ &\leq \mathcal{C}_1 Re \|\mathbf{u}_{m_j} - \mathbf{u}\|_{0,2,\Omega} |\mathbf{v}|_{1,\Omega} \\ &\leq \mathcal{C}_2 Re \|\mathbf{u}_{m_j} - \mathbf{u}\|_{0,4,\Omega} |\mathbf{v}|_{1,\Omega}, \end{aligned}$$

wobei \mathcal{C}_1 und \mathcal{C}_2 positive Konstanten sind.

Wir wenden auf (3.38) die Dreiecksungleichung an und setzen die eben gewonnenen Abschätzungen ein. Es gilt

$$\begin{aligned} |(P(\mathbf{u}_{m_j}) - P(\mathbf{u}), \mathbf{v})| &\leq \frac{1}{Re} |a(\mathbf{u}_{m_j} - \mathbf{u}, \mathbf{v})| \\ &\quad + \|\mathbf{u}_{m_j} - \mathbf{u}\|_{0,4,\Omega} |\mathbf{v}|_{1,\Omega} \left(c_2 |\mathbf{u}_{m_j}|_{1,\Omega} + c_2 |\mathbf{u}|_{1,\Omega} + C_2 \delta Re \right). \end{aligned}$$

Die schwache Konvergenz $\mathbf{u}_{m_j} \rightharpoonup \mathbf{u}$ in \mathbf{W} ist per Definition gleichbedeutend mit

$$a(\mathbf{u}_{m_j} - \mathbf{u}, \mathbf{v}) \rightarrow 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}.$$

Der Raum \mathbf{W} ist nach den Sobolevschen Einbettungssätzen kompakt eingebettet im Raum $\mathbf{L}^p(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$. Das heißt, konvergiert die Folge \mathbf{u}_{m_j} schwach gegen \mathbf{u} in \mathbf{W} , dann konvergiert die Folge \mathbf{u}_{m_j} stark gegen \mathbf{u} in $\mathbf{L}^4(\Omega)$. Das bedeutet

$$\|\mathbf{u}_{m_j} - \mathbf{u}\|_{0,4,\Omega} \rightarrow 0 \quad \text{für } \mathbf{u}_{m_j} \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ in } \mathbf{W}.$$

Mit der Beschränktheit (3.36) der Teilfolge \mathbf{u}_{m_j} ist dann (3.37) gezeigt.

Das Problem (3.33) hat eine Lösung $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$. Damit ist die Behauptung bewiesen, da das Problem (3.33) eine Operatorform des Problems (3.25) beschreibt. ■

Satz 3.3.2 *Das Ausgangsproblem (3.11) hat eine Lösung $\{\mathbf{u}, p, w\} \in \mathbf{V}_0 \times Q \times H^1(\Omega)$ mit $\omega|_{\Gamma_S} = 1$ und $\omega|_{\Gamma_K} = 0$.*

Beweis. Das Problem (3.25) ist äquivalent zu Problem (3.24). Das Problem (3.24) besitzt damit eine Lösung $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$. Dann existiert ein Paar $(\mathbf{u}, S) \in \mathbf{W} \times Z_0$ mit $S = T\mathbf{u}$, das das Problem (3.13) löst. Wegen der Gültigkeit der LBB-Stabilitätsabschätzung gibt es ein eindeutiges $p \in Q$, so daß das Tripel $(\mathbf{u}, p, S) \in \mathbf{V}_0 \times Q \times Z_0$ eine Lösung des Variationsproblems (3.12) ist. Also hat das Ausgangsproblem (3.11) eine Lösung $\{\mathbf{u}, p, \omega\} \in \mathbf{V}_0 \times Q \times H^1(\Omega)$ mit $\omega|_{\Gamma_S} = 1$ und $\omega|_{\Gamma_K} = 0$. ■

3.4 Eindeutigkeit der Lösung der stetigen Aufgabe

Aus den bisherigen Untersuchungen wissen wir, daß es zu jeder Lösung $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$ des Problems (3.25) genau ein $S \in Z_0$ und genau ein $p \in Q$ gibt, so daß das Tripel $(\mathbf{u}, p, S) \in \mathbf{V}_0 \times Q \times Z_0$ das Problem (3.12) löst bzw. das Tripel $(\mathbf{u}, p, \omega) \in \mathbf{V}_0 \times Q \times H^1(\Omega)$ mit $\omega|_{\Gamma_S} = 1$ und $\omega|_{\Gamma_K} = 0$ das Problem (3.11) löst. Wir müssen nur noch untersuchen, unter welchen Bedingungen das Problem (3.25) eine eindeutige Lösung $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$ hat. Dazu benötigen wir als erstes eine a priori-Abschätzung für die Lösungen des Problems (3.25).

Lemma 3.4.1 *Eine Lösung $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$ des Problems (3.25) genügt der a priori-Abschätzung*

$$|\mathbf{u}|_{1,\Omega} \leq C Re \delta \tag{3.39}$$

mit positiver Konstante C .

Beweis. Wir betrachten das Problem (3.25) und setzen $\mathbf{v} := \mathbf{u}$. Aus der Eigenschaft (3.20), den Aussagen von Lemma 3.1.1 und mit (3.26) folgt

$$\frac{C_a}{Re} |\mathbf{u}|_{1,\Omega}^2 \leq \frac{1}{Re} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \delta \left((T\mathbf{u} + \lambda_0)^2, \mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{e}}_1 \right) \leq \delta C_1 |\mathbf{u}|_{1,\Omega},$$

wobei C_1 eine positive Konstante ist. Mit $C = C_1/C_a$ ist (3.39) erfüllt. ■

Satz 3.4.1 *Für hinreichend kleine Werte des Parameters δRe^2 hat das Problem (3.25) genau eine Lösung $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$.*

Beweis. Seien \mathbf{u}_1 und \mathbf{u}_2 zwei Lösungen des Problems (3.25). Wir setzen \mathbf{u}_1 und \mathbf{u}_2 in (3.25) ein und bilden die Differenz. Es gilt für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$

$$\frac{1}{Re} a(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) + n(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}) - n(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = \delta \left((T\mathbf{u}_1 + \lambda_0)^2 - (T\mathbf{u}_2 + \lambda_0)^2, \mathbf{v} \cdot \vec{\mathbf{e}}_1 \right).$$

Wir setzen $\mathbf{v} := \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ und benutzen die Eigenschaften (3.18) und (3.20). Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} a(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) &= \delta \left((T\mathbf{u}_1 + \lambda_0)^2 - (T\mathbf{u}_2 + \lambda_0)^2, (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot \vec{\mathbf{e}}_1 \right) \\ &\quad + n(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Die Ausdrücke auf der rechten Seite werden abgeschätzt. Mit der Abschätzung (3.26) und der Eigenschaft (3.31) wird der erste Summand wie folgt behandelt

$$\begin{aligned} & \left| \delta \left((T\mathbf{u}_1 + \lambda_0)^2 - (T\mathbf{u}_2 + \lambda_0)^2, (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot \vec{\mathbf{e}}_1 \right) \right| \\ &= \left| \delta \left((T\mathbf{u}_1 - T\mathbf{u}_2)(T\mathbf{u}_1 + \lambda_0 + T\mathbf{u}_2 + \lambda_0), (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot \vec{\mathbf{e}}_1 \right) \right| \\ &\leq 2 C_1 \delta |T\mathbf{u}_1 - T\mathbf{u}_2|_{1,\Omega} |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_{1,\Omega} \\ &\leq 2 C_1 C_2 \delta Re \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{0,2,\Omega} |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_{1,\Omega} \\ &\leq \mathcal{C} \delta Re |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_{1,\Omega}^2, \end{aligned}$$

wobei \mathcal{C} eine positive Konstante ist. Mit (3.16), der Einbettung $\mathbf{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^4(\Omega)$ und der Abschätzung (3.39) finden wir

$$\begin{aligned} |n(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2)| &\leq c_1 \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{0,4,\Omega} |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_{1,\Omega} \|\mathbf{u}_2\|_{0,4,\Omega} \\ &\leq c_1 C_3^2 |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_{1,\Omega}^2 |\mathbf{u}_2|_{1,\Omega} \\ &\leq \mathcal{C}_2 \delta Re |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_{1,\Omega}^2, \end{aligned}$$

wobei C_3 die Einbettungskonstante bezeichnet und $\mathcal{C}_2 = c_1 C_3^2 C$.

Wir setzen die Abschätzungen in (3.40) ein. Es gilt

$$\frac{C_a}{Re} |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_{1,\Omega}^2 \leq (C_1 + C_2) \delta Re |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|_{1,\Omega}^2. \quad (3.41)$$

Für hinreichend kleine Werte des Parameters δRe^2 gilt

$$\frac{C_a}{Re} - (C_1 + C_2) \delta Re = \frac{1}{Re} (C_a - (C_1 + C_2) \delta Re^2) > 0.$$

Somit folgt aus (3.41) $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$. ■

Als Folgerung aus dem Satz 3.4.1 erhalten wir das Resultat:

Folgerung 3.4.1 *Das Ausgangsproblem (3.11) hat für hinreichend kleine Werte des Parameters δRe^2 genau eine Lösung $\{\mathbf{u}, p, \omega\} \in \mathbf{V}_0 \times Q \times H^1(\Omega)$ mit $\omega|_{\Gamma_S} = 1$ und $\omega|_{\Gamma_K} = 0$.*

3.5 Entkopplung des stetigen Problems

Wie vorher (siehe Abschnitt 2.3, Kapitel 2) erklärt, lösen wir das gekoppelte Modell (3.1)-(3.9) unter Einsatz einer iterativen Entkopplungsstrategie, die aus der sukzessiven Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen (3.1)-(3.2) mit den Randbedingungen (3.4)-(3.6) und der Konvektions-Diffusions-Gleichung (3.3) mit den Randbedingungen (3.7)-(3.9) besteht. Sei $\{\mathbf{u}^k, p^k\}$ eine gegebene Approximation der Lösung von (3.1)-(3.2) mit (3.4)-(3.6). Dann erhält man für die Unbekannten $\{\mathbf{u}^{k+1}, p^{k+1}, \omega^{k+1}\}$ ein Problem der Gestalt:

$$-\frac{1}{Re} \Delta \omega^{k+1} + \mathbf{u}^k \cdot \nabla \omega^{k+1} = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (3.42)$$

$$-\frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}^{k+1} + \mathbf{u}^{k+1} \cdot \nabla \mathbf{u}^{k+1} + \nabla p^{k+1} = \delta (\omega^{k+1})^2 \mathbf{e}_1 \quad \text{in } \Omega, \quad (3.43)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{k+1} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (3.44)$$

mit den Randbedingungen

$$\mathbf{u}^{k+1} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_K \cup \Gamma_S, \quad (3.45)$$

$$\mathbf{u}^{k+1} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_F, \quad (3.46)$$

$$\mathbf{n} \cdot \sigma(\mathbf{u}^{k+1}, p^{k+1}) \boldsymbol{\tau} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_F, \quad (3.47)$$

$$\omega^{k+1} = 1 \quad \text{auf } \Gamma_S, \quad (3.48)$$

$$\omega^{k+1} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_K, \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial \omega^{k+1}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_F. \quad (3.50)$$

Die Berechnung von ω^{k+1} aus (3.42) und (3.48)-(3.50) unter Nutzung des bekannten Feldes \mathbf{u}^k ergibt eine neue Näherung für ω . Mit Hilfe der schon bestimmten Umfangsgeschwindigkeit ω^{k+1} berechnen wir $\{\mathbf{u}^{k+1}, p^{k+1}\}$ aus (3.43)-(3.44) und (3.45)-(3.47). Ziel der weiteren Untersuchungen ist es, eine Aussage zur Konvergenz der Entkopplungsiteration

$$\mathbf{u}^k \mapsto \mathbf{u}^{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

mit dem Startwert $\mathbf{u}^0 = \mathbf{0}$ herzuleiten.

Das Problem (3.42)-(3.44) mit den Randbedingungen (3.45)-(3.50) überführen wir in schwachen Formulierungen analog wie im Abschnitt 3.1 und 3.2. Eine Variationsformulierung von (3.42)-(3.50) lautet nun:

Finde ein Tripel $\{\mathbf{u}^{k+1}, p^{k+1}, \omega^{k+1}\} \in \mathbf{V}_0 \times Q \times H^1(\Omega)$ mit $\omega^{k+1}|_{\Gamma_S} = 1$ und $\omega^{k+1}|_{\Gamma_K} = 0$, so daß

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} A(\omega^{k+1}, z) + N(\mathbf{u}^k, \omega^{k+1}, z) &= 0 & \forall z \in Z_0, \\ \frac{1}{Re} a(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}) + n(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p^{k+1}) & \\ &= \delta \left((\omega^{k+1})^2, \mathbf{v} \cdot \vec{\mathbf{e}}_1 \right) & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0, \\ b(\mathbf{u}^{k+1}, q) &= 0 & \forall q \in Q. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Nach der Homogenisierung der Dirichlet-Randbedingung $\omega^{k+1} = 1$ auf Γ_S und der Druckelimination verwenden wir die Aufspaltungstechnik wie im Abschnitt 3.2. Sei $\mathbf{u}^k \in \mathbf{W}$. Dann lautet eine äquivalente Formulierung des Problems (3.51):

Finde $\mathbf{u}^{k+1} \in \mathbf{W}$, so daß

$$\frac{1}{Re} a(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}) + n(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}) = \delta \left((T\mathbf{u}^k + \lambda_0)^2, \mathbf{v} \cdot \vec{\mathbf{e}}_1 \right) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}. \quad (3.52)$$

Für das Problem (3.52) kann man die folgende Lösbarkeitsaussage formulieren:

Lemma 3.5.1 *Für hinreichend kleine Werte des Parameters δRe^2 hat das Problem (3.52) eine eindeutig bestimmte Lösung $\mathbf{u}^{k+1} \in \mathbf{W}$, d. h., ein wohldefinierter Lösungsoperator*

$$E : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{W}, \quad \mathbf{u}^k \mapsto E\mathbf{u}^k = \mathbf{u}^{k+1}$$

existiert.

Beweis. Das Problem (3.52) ist eine schwache Formulierung der Navier-Stokes-Gleichungen (3.43)-(3.44) mit der Dirichlet-Randbedingung (3.45), der Gleitrandbedingung (3.46) und der zusätzlichen Bedingung (3.47). Mit $\mathbf{f} := (\delta(\omega^{k+1})^2, 0)^T$ bezeichnen wir die rechte

Seite von (3.43). Nach der Theorie zur Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen mit Gleitrandbedingung (siehe [10], [11]) existiert genau eine Lösung von (3.43)-(3.44) mit (3.45)-(3.47) für hinreichend kleine $Re^2 \|\mathbf{f}\|_{0,2,\Omega}$. Mit der Abschätzung (3.26) ergibt sich

$$Re^2 \|\mathbf{f}\|_{0,2,\Omega} = Re^2 \delta \|(\omega^{k+1})^2\|_{0,2,\Omega} = Re^2 \delta \|(T\mathbf{u}^k + \lambda_0)^2\|_{0,2,\Omega} \leq C Re^2 \delta, \quad \forall \mathbf{u}^k \in \mathbf{W}$$

mit positiver Konstante C . Dann ist $Re^2 \|\mathbf{f}\|_{0,2,\Omega}$ hinreichend klein für hinreichend kleine Werte des Parameters δRe^2 . ■

Im folgenden Lemma beweisen wir eine a priori-Abschätzung für die Lösung von (3.52):

Lemma 3.5.2 *Die Lösung $\mathbf{u}^{k+1} \in \mathbf{W}$ des Problems (3.52) genügt der a priori-Abschätzung*

$$|\mathbf{u}^{k+1}|_{1,\Omega} \leq C Re \delta \tag{3.53}$$

mit positiver Konstante C .

Beweis. Wir betrachten das Problem (3.52) und setzen $\mathbf{v} := \mathbf{u}^{k+1}$. Aus der Eigenschaft (3.20), der \mathbf{V}_0 -Koerzitivität von $a(\cdot, \cdot)$ (siehe Lemma 3.1.1) und mit der Abschätzung (3.26) folgt

$$\frac{C_a}{Re} |\mathbf{u}^{k+1}|_{1,\Omega}^2 \leq \frac{1}{Re} a(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{u}^{k+1}) = \delta \left((T\mathbf{u}^k + \lambda_0)^2, \mathbf{u}^{k+1} \cdot \vec{\mathbf{e}}_1 \right) \leq \delta C_1 |\mathbf{u}^{k+1}|_{1,\Omega},$$

wobei C_1 positive Konstante ist. Mit $C = C_1/C_a$ ist (3.53) erfüllt. ■

Als Grundlage zum Nachweis der Konvergenz der Entkopplungsiteration benutzen wir den Fixpunktsatz von Banach, den man in [79] finden kann.

Satz 3.5.1 *Sei (\mathbf{X}, d) ein vollständiger metrischer Raum. Weiter sei $Q : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ eine kontraktive Abbildung, d.h.*

$$d(Q\mathbf{x}, Q\mathbf{y}) \leq L d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}, \quad 0 \leq L < 1.$$

Dann existiert genau ein Fixpunkt $\mathbf{x}^ \in \mathbf{X}$ von Q . Für beliebige $\mathbf{x}^0 \in \mathbf{X}$ konvergiert die Fixpunktiteration $\mathbf{x}^{k+1} := Q\mathbf{x}^k$ gegen \mathbf{x}^* .*

Satz 3.5.2 *Für hinreichend kleine Werte des Parameters δRe^2 konvergiert die durch*

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}^{k+1} := E\mathbf{u}^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

definierte Folge $\{\mathbf{u}^k\}_{k=0}^\infty$ gegen den eindeutigen Fixpunkt $\mathbf{u}^ \in \mathbf{W}$.*

Beweis. Seien $\mathbf{u}_1^{k+1} := E\mathbf{u}_1^k$ und $\mathbf{u}_2^{k+1} := E\mathbf{u}_2^k$ mit $\mathbf{u}_1^k, \mathbf{u}_2^k \in \mathbf{W}$. Für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$ folgt aus (3.52) durch die Differenz

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} a(\mathbf{u}_1^{k+1} - \mathbf{u}_2^{k+1}, \mathbf{v}) + n(\mathbf{u}_1^{k+1}, \mathbf{u}_1^{k+1}, \mathbf{v}) - n(\mathbf{u}_2^{k+1}, \mathbf{u}_2^{k+1}, \mathbf{v}) \\ = \delta \left((T\mathbf{u}_1^k + \lambda_0)^2 - (T\mathbf{u}_2^k + \lambda_0)^2, \mathbf{v} \cdot \vec{\mathbf{e}}_1 \right). \end{aligned}$$

Wir setzen $\mathbf{v} := \mathbf{u}_1^{k+1} - \mathbf{u}_2^{k+1}$ und benutzen die Eigenschaften (3.18) und (3.20). Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} a(\mathbf{u}_1^{k+1} - \mathbf{u}_2^{k+1}, \mathbf{u}_1^{k+1} - \mathbf{u}_2^{k+1}) = \delta \left((T\mathbf{u}_1^k + \lambda_0)^2 - (T\mathbf{u}_2^k + \lambda_0)^2, (\mathbf{u}_1^{k+1} - \mathbf{u}_2^{k+1}) \cdot \vec{\mathbf{e}}_1 \right) \\ + n(\mathbf{u}_1^{k+1} - \mathbf{u}_2^{k+1}, \mathbf{u}_1^{k+1} - \mathbf{u}_2^{k+1}, \mathbf{u}_2^{k+1}). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Die Ausdrücke auf der rechten Seite werden abgeschätzt. Mit der Abschätzung (3.26) und der Eigenschaft (3.31) finden wir

$$\left| \delta \left((T\mathbf{u}_1^k + \lambda_0)^2 - (T\mathbf{u}_2^k + \lambda_0)^2, (\mathbf{u}_1^{k+1} - \mathbf{u}_2^{k+1}) \cdot \vec{\mathbf{e}}_1 \right) \right| \leq \mathcal{C}_1 \delta Re |\mathbf{u}_1^k - \mathbf{u}_2^k|_{1,\Omega} |\mathbf{u}_1^{k+1} - \mathbf{u}_2^{k+1}|_{1,\Omega},$$

wobei \mathcal{C}_1 eine positive Konstante ist. Mit (3.16), der Einbettung $\mathbf{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^4(\Omega)$ und der Abschätzung $|\mathbf{u}_2^{k+1}|_{1,\Omega} \leq C \delta Re$ (siehe Lemma 3.5.2) gilt

$$|n(\mathbf{u}_1^{k+1} - \mathbf{u}_2^{k+1}, \mathbf{u}_1^{k+1} - \mathbf{u}_2^{k+1}, \mathbf{u}_2^{k+1})| \leq \mathcal{C}_2 \delta Re |\mathbf{u}_1^{k+1} - \mathbf{u}_2^{k+1}|_{1,\Omega}^2$$

mit positiver Konstante \mathcal{C}_2 .

Wir setzen die Abschätzungen in (3.54) ein. Es gilt

$$\frac{C_a}{Re} |\mathbf{u}_1^{k+1} - \mathbf{u}_2^{k+1}|_{1,\Omega}^2 \leq \mathcal{C}_1 \delta Re |\mathbf{u}_1^k - \mathbf{u}_2^k|_{1,\Omega} |\mathbf{u}_1^{k+1} - \mathbf{u}_2^{k+1}|_{1,\Omega} + \mathcal{C}_2 \delta Re |\mathbf{u}_1^{k+1} - \mathbf{u}_2^{k+1}|_{1,\Omega}^2.$$

Dann folgt

$$|\mathbf{u}_1^{k+1} - \mathbf{u}_2^{k+1}|_{1,\Omega} \leq \frac{\mathcal{C}_1 \delta Re^2}{C_a - \mathcal{C}_2 \delta Re^2} |\mathbf{u}_1^k - \mathbf{u}_2^k|_{1,\Omega}. \quad (3.55)$$

Für für hinreichend kleine Werte des Parameters δRe^2 gilt

$$\frac{\mathcal{C}_1 \delta Re^2}{C_a - \mathcal{C}_2 \delta Re^2} < 1.$$

Damit folgt aus (3.55), daß die Abbildung E kontraktiv ist.

Da \mathbf{W} ein Hilbert-Raum ist und die Abbildung $E : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{W}$ kontraktiv ist, sind die Bedingungen des Satzes 3.5.1 erfüllt. Dann existiert genau ein Fixpunkt $\mathbf{u}^* \in \mathbf{W}$ der Abbildung E und die Folge $\{\mathbf{u}^k\}_{k=0}^\infty$, die durch $\mathbf{u}^0 = \mathbf{0}, \mathbf{u}^{k+1} := E\mathbf{u}^k, k = 0, 1, 2, \dots$, definiert wird, konvergiert gegen den Fixpunkt \mathbf{u}^* . ■

Als Folgerung aus dem Satz 3.5.2 und (3.31) erhalten wir das Resultat:

Folgerung 3.5.1 *Die Entkopplungsiteration*

$$\{\mathbf{u}^k, p^k, \omega^k\} \mapsto \{\mathbf{u}^{k+1}, p^{k+1}, \omega^{k+1}\}, \quad \mathbf{u}^0 = \mathbf{0}, p^0 = 0, \omega^0 = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

zur Lösung des gekoppelten Problem (3.1)-(3.9) konvergiert für hinreichend kleine Werte des Parameters δRe^2 .

Kapitel 4

Isoparametrische Finite-Elemente-Diskretisierung

Aus der Literatur sind numerische Lösungsverfahren für die Modellgleichungen (3.1)-(3.3) mit den Randbedingungen (3.4)-(3.9) bekannt, die auf der Finite-Differenzen-Diskretisierungsmethode (siehe [51], [53] oder [76]) oder auf der Finite-Volumen-Methode (siehe [54]) basieren. Unser Diskretisierungskonzept für das Modell (3.1)-(3.9) wird auf der Basis der Finite-Elemente-Methode entwickelt. Im Gegensatz zu den anderen Diskretisierungsverfahren ist eine rigorose Konvergenzanalyse bei der Finite-Elemente-Methode verfügbar und komplexe Strömungsgebiete können einfach behandelt werden. Die Randbedingungen sind leicht integrierbar und die Adaption an Gebiete und Lösungsstrukturen ist einfach realisierbar.

4.1 Vergleich der verschiedenen Finite-Elemente-Diskretisierungen

Suchen wir für die Geschwindigkeit \mathbf{u} , den Druck p und die Umfangsgeschwindigkeit ω ein Elementetripel, das pro Element eine möglichst geringe Zahl an Freiheitsgraden hat und dennoch stabil im Sinne von Babuška-Brezzi (LBB-Stabilitätsbedingung (3.10)) ist, so kommen wir auf die Idee, das nichtkonforme Dreieckelement von Crouzeix-Raviart (siehe [18] oder [22]) anzuwenden. Die Geschwindigkeitskomponenten und das Umfangsgeschwindigkeitsfeld werden stückweise linear approximiert und der Druck wird als stückweise konstant angenommen. Um die abstrakte Finite-Elemente-Theorie von Babuška und Brezzi über gemischte Probleme (siehe [21]) anwenden zu dürfen, brauchen wir für die nichtkonformen Finite-Elemente-Räume die Koerzitivität der Bilinearform

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T, \nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$$

und die LBB-Stabilitätsbedingung. Im stetigen Fall folgt die Koerzitivität aus der Kornschen Ungleichung (siehe Lemma 3.1.1 im Kapitel 3). Verwendet man nichtkonforme finite

Elemente, so überträgt sich die Koerzitivität nicht automatisch und ein diskretes Analogon wird erforderlich. In der Literatur (siehe [3] oder [18]) ist es aber gezeigt, daß keine diskrete Kornsche Ungleichung für das nichtkonforme Element von Crouzeix-Raviart gilt. In einer neueren Arbeit (siehe [39]) ist es allgemeiner bewiesen, daß für nichtkonforme finite Elemente erster Ordnung die diskrete Kornsche Ungleichung im allgemeinen nicht mit einer von h unabhängigen Konstante gelten kann. Daraus folgt, daß die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ in diesem Fall nicht gleichmäßig bezüglich h koerzitiv ist.

Wenn wir die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ durch die Bilinearform

$$a_D(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$$

ersetzen könnten, dürften wir nichtkonforme finite Elemente anwenden. Im Unterschied zu $a(\cdot, \cdot)$ ist die Bilinearform $a_D(\cdot, \cdot)$ sowohl für konforme als auch für nichtkonforme Finite-Elemente-Räume koerzitiv. Wie wir vorher (siehe Bemerkung 3.1.1 im Kapitel 3) erklärt haben, ist die Gleichheit von $a(\cdot, \cdot)$ und $a_D(\cdot, \cdot)$ nicht mehr gewährleistet, wenn die Randbedingung (3.6) vorliegt. Die Einarbeitung der Randbedingung (3.6) erfordert die Verwendung der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$, die für nichtkonforme Elemente niedriger Ordnung im allgemeinen nicht koerzitiv ist. Wir beschränken uns deshalb im folgenden auf konforme finite Elemente.

Die Gleitrandbedingung (3.5) spielt eine gewisse Rolle bei der Diskretisierung des Modells (3.1)-(3.9). Die Gleitrandbedingung (3.5) und die klassischen Dirichlet-Randbedingungen (3.4), (3.7) und (3.8) beschreiben ganz unterschiedliche physikalische Situationen (siehe [23], [48], [64], oder [35], [60], [67]). Daraus folgen die verschiedenen, numerischen Behandlungen der beiden Bedingungen. Im Vergleich zu den Navier-Stokes-Gleichungen mit Dirichlet-Randbedingungen findet man in der Literatur nur wenig über Finite-Elemente-Diskretisierungen zur numerischen Lösung des Problems mit Gleitrandbedingung.

Bei der numerischen Berücksichtigung der Gleitrandbedingung (bzw. der krummlinigen Ränder) braucht man praktisch eine geeignete Approximation des Gebietes Ω . Aus der Literatur sind Approximationen des Gebietes bekannt, die auf unterschiedlichen Konzepten basieren (siehe [4], [21], [37], [38] und [73]). Zunächst vergleichen wir kritisch die Konzepte und wählen die zum Modell (3.1)-(3.9) geeignete Finite-Elemente-Diskretisierung.

In [37] und [38] wurden die dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen mit Gleitrandbedingung auf der Basis einer Erweiterung des Gebietes diskretisiert. Dort betrachtet man ein Gebiet $\tilde{\Omega}$, so daß $\Omega \subset \tilde{\Omega}$ und $\Omega_h \subset \tilde{\Omega}$ ($\Omega \not\subset \Omega_h$, $\Omega_h \not\subset \Omega$), wobei Ω_h das diskrete Gebiet ist. Die Fehlerabschätzungen wurden auf $\tilde{\Omega}$ hergeleitet.

Eine Anwendung der konformen finiten Elemente für die zweidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen mit Gleitrandbedingung kann man in [4] und [73] finden. Dort wurde das sogenannte Taylor-Hood-Element (siehe [18] oder [30]) benutzt, d.h., die Geschwindigkeit wird durch stückweise quadratische, stetige Funktionen approximiert und der Druck wird als stückweise lineare stetige Funktion angenommen. Im Vergleich zur in [73] betrachteten polygonalen Approximation des Gebietes Ω wurde in [4] ein anderes Konzept und nämlich die so genannte exakte Zerlegung angewendet. Wir vergleichen beide Konzepte sowie die Konvergenzraten, die als Folge der unterschiedlichen Betrachtungsweisen der Gleitrandbedingung (bzw. der krummlinigen Ränder) gezeigt werden können. Es ist gut bekannt,

daß man bei der Anwendung des Taylor-Hood-Elementes für Navier-Stokes-Gleichungen mit Dirichlet-Randbedingung auf polygonalen Gebieten eine a priori-Fehlerabschätzung mit Konvergenzrate h^2 beweisen kann (siehe [18], [22] oder [30]). Bei der Berücksichtigung der krummlinigen Ränder mit einem Standard- \mathcal{P}_2 -Finite-Element ist eine Konvergenzrate h^2 nicht mehr zu erwarten. In [69] kann man eine ausführliche Untersuchung der Poisson-Gleichung mit Dirichlet-Randbedingung im krummlinigen Gebiet finden. Dort wurde eine Fehlerabschätzung mit Konvergenzrate $h^{\frac{3}{2}}$ bei der Anwendung des konformen \mathcal{P}_2 -Elementes hergeleitet. Der $h^{\frac{1}{2}}$ -Verlust liegt daran, daß die stetige Lösung nicht auf dem diskreten Rand verschwindet, sondern nur in Eckpunkten der Randelementseiten. Auf Grund der Untersuchungen in [69] erwartet man einen Verlust der Konvergenzrate bei der Anwendung des Taylor-Hood-Elementes für die Navier-Stokes-Gleichungen mit Gleitrandbedingung. In [73] kann man eine Fehlerabschätzung mit Konvergenzrate $h^{\frac{1}{2}}$ finden. Dort wurde die Gleitrandbedingung nur in Eckpunkten der Randelementseiten berücksichtigt. Zur Gleitrandbedingung wurden die stetigen Normalen an den Eckpunkten verwendet. Da die Mittelpunkte der Randelementseiten nicht auf dem Rand des Gebietes liegen, steht dort keine stetige Normale zur Verfügung (siehe Abb. 4.1). Deshalb wurde die Gleitrandbedingung in Mittelpunkten der Randelementseiten weggelassen. Im Unterschied zur in [73] bewiesenen Konvergenzrate $h^{\frac{1}{2}}$ kann man in [4] eine verbesserte Fehleranalyse mit Konvergenzrate $h^{\frac{3}{2}}$ finden. Unter Verwendung der so genannten exakten Zerlegung wurde die Fehleranalyse in [4] direkt auf dem originalen Gebiet hergeleitet. Die exakte Zerlegung bietet die Möglichkeit, daß die stetige Normale an allen auf dem diskreten Rand liegenden Knoten verwendet werden kann. Die Verwendung der stetigen Normalen an den Eckpunkten der Randelementseiten ist problemlos, weil diese Punkte auf dem diskreten Rand sowie auf dem stetigen liegen. Da die Mittelpunkte der Randelementseiten nur auf dem diskreten Rand liegen, werden diese Punkte auf den stetigen Rand abgebildet (die grundlegende Idee der exakten Zerlegung) und es wird die entsprechende stetige Normale verwendet (siehe Abb. 4.2). Folglich ist eine diskrete Gleitrandbedingung in den entsprechenden Finite-Elemente-Raum eingebaut.

Man muss die diskrete Gleitrandbedingung korrekt formulieren, damit die diskrete Lösung zur schwachen Lösung konvergiert. In [73] kann man ein Beispiel der inkorrekten Formulierung (das Babuška-Paradox) finden. Dort wurde eine diskrete Gleitrandbedingung mit Hilfe der diskreten Normalen an jedem auf dem diskreten Rand liegenden Knoten formuliert. Mit dieser diskreten Gleitrandbedingung wurde bewiesen, daß die Lösung des diskreten Problems nicht zur schwachen Lösung konvergiert.

Die letzte Vorgehensweise zur Berücksichtigung der krummlinigen Gebietsränder (bzw. der Gleitrandbedingung) ist die Verwendung der isoparametischen finiten Elemente (siehe [21]). Mittels krummlinig berandeter Elemente erreicht man eine bessere Gebietsapproximation und man kann die stetigen Normalen an allen auf dem diskreten Rand liegenden Knoten verwenden (siehe Abb. 4.3).

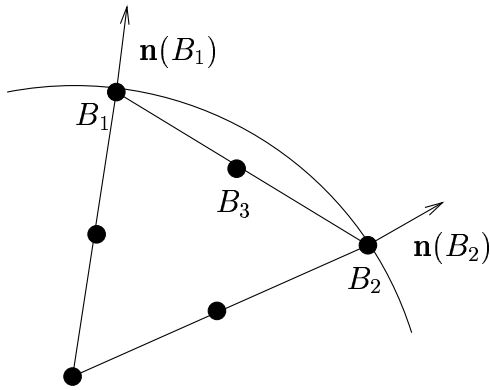


Abbildung 4.1: Berücksichtigung der Gleitrandbedingung in [73]

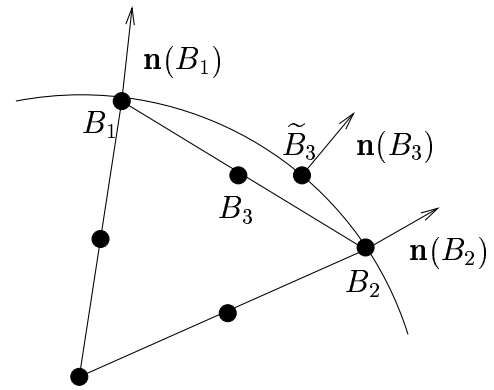


Abbildung 4.2: Berücksichtigung der Gleitrandbedingung in [4]

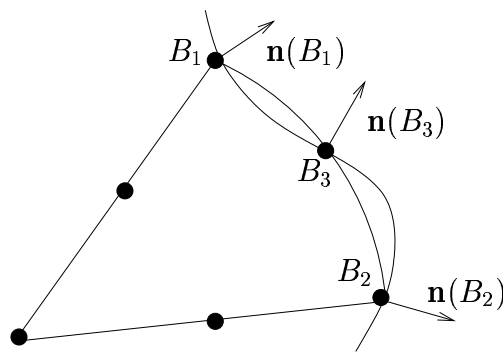


Abbildung 4.3: Berücksichtigung der Gleitrandbedingung mit isoparametrischem Element

Im Hinblick auf eine effiziente Umsetzung der Diskretisierung in Programmsysteme verwenden wir isoparametrische finite Elemente für unser Modell (3.1)-(3.9). Zunächst beschreiben wir die gewählte Finite-Elemente-Diskretisierung und das diskrete Problem. Das diskrete Problem betrachten wir unter Verwendung der teilproblem-orientierten Entkoppelungsstrategie, die aus der sukzessiven Lösung der diskreten Navier-Stokes-Gleichungen und der diskreten Konvektions-Diffusions-Gleichung besteht. Die Fehleranalyse der diskreten Teilprobleme leiten wir nicht auf dem diskreten Gebiet (wie z.B. in [21]) sondern auf dem Modellgebiet Ω her. Zur Fehleranalyse der Navier-Stokes-Gleichungen verwenden wir die in [4] beschriebene Strategie, aber in Bezug auf die isoparametrische Diskretisierung. Da wir die Fehleranalyse auf dem Originalgebiet Ω herleiten, verwenden wir die Technik der exakten Zerlegung. Die Technik der exakten Zerlegung benötigen wir auch bei der Untersuchung der Lösbarkeit des diskreten Problems. Deshalb stellen wir kurz die Konstruktion einer exakten Zerlegung dar, wir beweisen die benötigten technischen Resultate und untersuchen dann die diskrete Aufgabe.

4.2 Das diskrete Problem

Es sei Ω ein beschränktes Gebiet des \mathbb{R}^2 mit Lipschitzstetigem Rand $\partial\Omega = \Gamma_K \cup \Gamma_S \cup \Gamma_F$. Außerdem setzen wir voraus, daß $\Gamma_F \in C^4$.

Im folgenden sei \mathcal{T}_h eine reguläre Zerlegung von Ω in Dreiecke T (siehe [20]), d.h., der Durchschnitt zweier Dreieckelemente T ist entweder leer, eine gemeinsame Ecke oder eine gemeinsame Kante. Wir setzen

$$\bar{\Omega}_h = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T.$$

Außerdem nehmen wir an, daß die Familie $\{\mathcal{T}_h\}_h$ von Zerlegungen quasiuniform ist, d.h., für jede Zerlegung \mathcal{T}_h sei der Quotient aus dem Elementdurchmesser h_T und dem Inkreisdurchmesser ρ_T eines jeden Dreieck T unabhängig von der Gitterweite beschränkt:

$$0 < \gamma_1 \leq \frac{h_T}{\rho_T} \leq \gamma_2 \quad \forall T \in \{\mathcal{T}_h\}_h, \quad \forall h > 0.$$

Wir legen noch fest, daß

$$h := \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T.$$

Ein Dreieck $T \in \mathcal{T}_h$ nennen wir inneres Element, wenn T einen oder keinen Eckknoten auf dem Rand $\partial\Omega = \Gamma_K \cup \Gamma_S \cup \Gamma_F$ hat. Sonst nennen wir T ein Randelement.

Die zur Finite-Elemente-Berechnung verwendeten Funktionen werden auf den Zellen T der Zerlegung \mathcal{T}_h definiert, wobei eine Transformation auf ein Referenzelement \hat{T} vorgenommen wird. Sei das Dreieck mit den Ecken $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$ das Referenzdreieck \hat{T} . Wir definieren

$$\hat{\mathcal{P}}_k(\hat{T}) := \left\{ \hat{p}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \sum_{0 \leq i+j \leq k} a_{ij} \hat{x}_1^i \hat{x}_2^j \right\}$$

als den Raum der Polynome vom Grade kleiner oder gleich k auf dem Referenzelement \hat{T} . Sei $F_T : \hat{T} \rightarrow T$ die Referenztransformation, die das Referenzdreieck \hat{T} auf die Zelle $T \in \mathcal{T}_h$ abbildet. Um eine bessere Approximation des Modellgebietes Ω zu erreichen, verwenden wir an den krummlingen Randteilen Γ_K und Γ_F isoparametrische finite Elemente. Dann können wir die Referenztransformation F_T mit

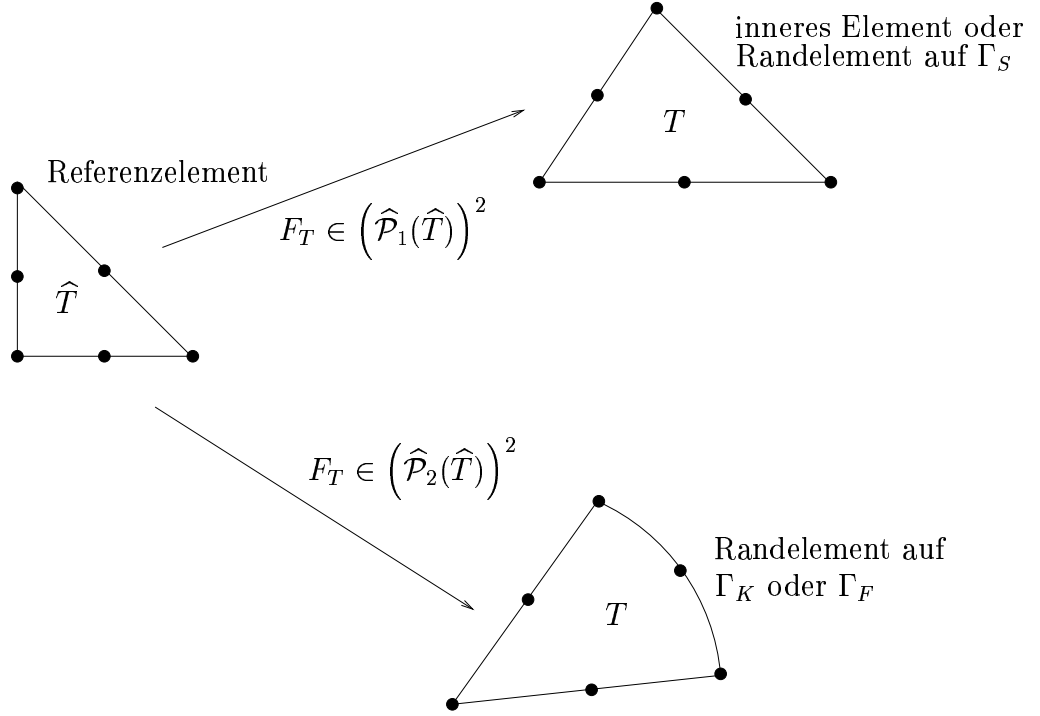
$$F_T \in \begin{cases} \left(\hat{\mathcal{P}}_1(\hat{T}) \right)^2, & \text{falls } T \text{ inneres Element oder Randelement auf } \Gamma_S \\ \left(\hat{\mathcal{P}}_2(\hat{T}) \right)^2, & \text{falls } T \text{ Randelement auf } \Gamma_K \text{ oder } \Gamma_F \end{cases} \quad (4.1)$$

definieren (siehe [21] und Abb. 4.4).

Mit Hilfe der Inverse der Referenzabbildung definieren wir

$$\mathcal{P}_k(T) := \left\{ p = \hat{p} \circ F_T^{-1} : \hat{p} \in \hat{\mathcal{P}}_k(\hat{T}) \right\}$$

als lokalen Funktionenraum auf T . Die Funktionen in $\mathcal{P}_k(T)$ stellen in der Regel keine Polynome mehr dar, da die Referenztransformation F_T im allgemeinen nicht affin ist.

Abbildung 4.4: Die Referenztransformation $F_T : \hat{T} \rightarrow T$

Wir bezeichnen mit Γ_h^j die Kanten der Elemente $T \in \mathcal{T}_h$, wobei wir $1 \leq j \leq N_I$ für die inneren Kanten annehmen wollen. Mit

$$\Gamma_{h,F}^j \subset \partial\Omega_h \quad \text{für } N_I < j \leq N_I + N_F,$$

$$\Gamma_{h,K}^j \subset \partial\Omega_h \quad \text{für } N_I + N_F < j \leq N_I + N_F + N_K \quad \text{und}$$

$$\Gamma_{h,S}^j \subset \partial\Omega_h \quad \text{für } N_I + N_F + N_K < j \leq N_I + N_F + N_K + N_S$$

bezeichnen wir die Randkanten, die die Randteile Γ_F bzw. Γ_K und Γ_S approximieren. Seien

$$\Gamma_{h,F} = \bigcup_{j=N_I+1}^{N_I+N_F} \Gamma_{h,F}^j, \quad \Gamma_{h,K} = \bigcup_{j=N_I+N_F+1}^{N_I+N_F+N_K} \Gamma_{h,K}^j \quad \text{und} \quad \Gamma_{h,S} = \bigcup_{j=N_I+N_F+N_K+1}^{N_I+N_F+N_K+N_S} \Gamma_{h,S}^j.$$

Die Knoten auf den Seitenmitten und auf den Ecken der Elementkanten bezeichnen wir mit B_j . Seien

$$J(\Omega_h) := \{j : 1 \leq j \leq N_I + N_F + N_K + N_S\}$$

die Indexmenge aller Knoten sowie

$$J(\Gamma_{h,F}) := \{j : N_I < j \leq N_I + N_F\},$$

$$J(\Gamma_{h,K}) := \{j : N_I + N_F < j \leq N_I + N_F + N_K\} \quad \text{und}$$

$$J(\Gamma_{h,S}) := \{j : N_I + N_F + N_K < j \leq N_I + N_F + N_K + N_S\}$$

die der entsprechenden Randknoten. Die Randknoten $B_j \in \Gamma_{h,F} \cap \Gamma_{h,K}$ bzw. $B_j \in \Gamma_{h,F} \cap \Gamma_{h,S}$ betrachten wir als Dirichlet-Randknoten, d.h. $j \in J(\Gamma_{h,K})$ bzw. $j \in J(\Gamma_{h,S})$.

Um das Problem (3.1)-(3.9) in eine diskrete Formulierung zu überführen, verwenden wir die folgenden diskreten Räume:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_h &:= \{ \mathbf{v}_h \in (C^0(\overline{\Omega}_h))^2 : \mathbf{v}_h|_T \in (\mathcal{P}_2(T))^2 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \}, \\ \mathbf{V}_{0h} &:= \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h : (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n})(B_j) = 0 \quad \forall j \in J(\Gamma_{h,F}), \\ \mathbf{v}_h(B_j) = 0 \quad \forall j \in J(\Gamma_{h,K}) \cup J(\Gamma_{h,S}) \end{array} \right\}, \\ Q_h &:= \left\{ q_h \in C^0(\overline{\Omega}_h) : q_h|_T \in \mathcal{P}_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \int_{\Omega_h} q_h = 0 \right\}, \\ Z_h &:= \{ z_h \in C^0(\overline{\Omega}_h) : z_h|_T \in \mathcal{P}_2(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \}, \\ Z_{0h} &:= \{ z_h \in Z_h : z_h(B_j) = 0 \quad \forall j \in J(\Gamma_{h,K}) \cup J(\Gamma_{h,S}) \}. \end{aligned}$$

Jede Komponente der Geschwindigkeit und die Umfangsgeschwindigkeit approximieren wir durch quadratische Ansätze. Der Druck wird durch einen linearen Ansatz approximiert. In allen Randknoten B_j , $j \in J(\Gamma_{h,F})$ gilt die diskrete Gleitrandbedingung $(\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n})(B_j) = 0$. Die isoparametrischen Elemente am Rand ermöglichen die Verwendung der stetigen Normale $\mathbf{n}(B_j)$ an jedem Randknoten B_j , $j \in J(\Gamma_{h,F})$.

Wir führen nun die folgenden Bilinearformen und Trilinearformen ein:

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &:= 2 \int_{\Omega_h} \mathcal{D}(\mathbf{u}_h) : \mathcal{D}(\mathbf{v}_h) dx \quad \forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ b_h(\mathbf{v}_h, q_h) &:= - \int_{\Omega_h} \nabla \cdot \mathbf{v}_h q_h dx \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \forall q_h \in Q_h, \\ A_h(\omega_h, z_h) &:= \int_{\Omega_h} \nabla \omega_h \cdot \nabla z_h dx \quad \forall \omega_h, z_h \in Z_h, \\ n_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{m}_h) &:= \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Omega_h} \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h \mathbf{m}_h dx - \int_{\Omega_h} \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{m}_h \mathbf{v}_h dx \right\} \quad \forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{m}_h \in \mathbf{V}_h, \\ N_h(\mathbf{u}_h, \omega_h, z_h) &:= \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Omega_h} \mathbf{u}_h \cdot \nabla \omega_h z_h dx - \int_{\Omega_h} \mathbf{u}_h \cdot \nabla z_h \omega_h dx \right\} \quad \forall \mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h, \forall \omega_h, z_h \in Z_h. \end{aligned}$$

Bemerkung 4.2.1 Die diskreten Bilinearformen $a_h(\cdot, \cdot)$, $b_h(\cdot, \cdot)$ und $A_h(\cdot, \cdot)$ definieren wir ähnlich der entsprechenden Formen im stetigen Fall (siehe Abschnitt 3.1, Kapitel 3). Im stetigen Fall haben wir die Trilinearformen $n(\cdot, \cdot, \cdot)$ und $N(\cdot, \cdot, \cdot)$ als

$$n(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{m}) := (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}, \mathbf{m}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{m} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$$

bzw.

$$N(\mathbf{u}, \omega, z) := (\mathbf{u} \cdot \nabla \omega, z) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \forall \omega, z \in H^1(\Omega)$$

definiert. Sind $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{m} \in \mathbf{V}_0$, $\omega, z \in H^1(\Omega)$ und $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ erfüllt, so gelten

$$n(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{m}) = \frac{1}{2} \{n(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{m}) - n(\mathbf{u}, \mathbf{m}, \mathbf{v})\}, \quad (4.2)$$

$$N(\mathbf{u}, \omega, z) = \frac{1}{2} \{N(\mathbf{u}, \omega, z) - N(\mathbf{u}, z, \omega)\}. \quad (4.3)$$

Im diskreten Fall übertragen sich (4.2) und (4.3) nicht automatisch.

Als Folgerung aus der Definition der diskreten Trilinearformen $n_h(\cdot, \cdot, \cdot)$ und $N_h(\cdot, \cdot, \cdot)$ erhalten wir:

Folgerung 4.2.1 Sei $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$. Dann gelten

$$n_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \quad (4.4)$$

$$N_h(\mathbf{u}_h, z_h, z_h) = 0 \quad \forall z_h \in Z_h. \quad (4.5)$$

Nach diesen Vorüberlegungen können wir das diskrete Problem formulieren. Eine diskrete Formulierung des Modells (3.1)-(3.9) lautet:

Finde ein Tripel $\{\mathbf{u}_h, p_h, \omega_h\} \in \mathbf{V}_{0h} \times Q_h \times Z_h$ mit $\omega_h(B_j) = 1$ für alle $j \in J(\Gamma_{h,S})$ und $\omega_h(B_j) = 0$ für alle $j \in J(\Gamma_{h,K})$, so daß

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + n_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h(\mathbf{v}_h, p_h) &= \delta(\omega_h^2, \mathbf{v}_h \cdot \vec{\mathbf{e}}_1)_h \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{0h}, \\ b_h(\mathbf{u}_h, q_h) &= 0 \quad \forall q_h \in Q_h, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{Re} A_h(\omega_h, z_h) + N_h(\mathbf{u}_h, \omega_h, z_h) = 0 \quad \forall z_h \in Z_{0h},$$

wobei das Skalarprodukt im $L^2(\Omega_h)$ mit $(\cdot, \cdot)_h$ notiert wird.

Zunächst führen wir eine Homogenisierung der Dirichlet-Randbedingung $\omega_h(B_j) = 1$ für alle $j \in J(\Gamma_{h,S})$ durch. Wir betrachten einen Interpolationsoperator

$$I_h : H^2(\Omega) \rightarrow Z_{h,\partial},$$

wobei $Z_{h,\partial}$ die Einschränkung von Z_h auf $\partial\Omega_h$ bezeichnet. Mit Hilfe des Interpolationsoperator I_h konstruieren wir die diskrete Homogenisierungsfunktion

$$\lambda_{0h} := I_h \lambda_0.$$

Wir setzen

$$\omega_h := S_h + \lambda_{0h}$$

und erhalten eine äquivalente Formulierung des diskreten Problems (4.6):

Finde ein Tripel $\{\mathbf{u}_h, p_h, S_h\} \in \mathbf{V}_{0h} \times Q_h \times Z_{0h}$ mit, so daß

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + n_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b_h(\mathbf{v}_h, p_h) \\ = \delta \left((S_h + \lambda_{0h})^2, \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{e}_1 \right)_h \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{0h}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$b_h(\mathbf{u}_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h, \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} A_h(S_h, z_h) + N_h(\mathbf{u}_h, S_h, z_h) + N_h(\mathbf{u}_h, \lambda_{0h}, z_h) \\ = -\frac{1}{Re} A_h(\lambda_{0h}, z_h) \quad \forall z_h \in Z_{0h}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Bei der Untersuchung des diskreten Problems (4.7)-(4.9) interessieren uns folgende Fragestellungen:

- Lösbarkeitaussagen (Existenz und Eindeutigkeit) für die diskreten Aufgabe;
- Herleitung von a priori-Fehlerabschätzungen.

Wenn wir die Lösbarkeit von (4.7)-(4.9) genauso wie beim stetigen Problem (unter Verwendung der Aufspaltungstechnik, siehe Abschnitte 3.2 und 3.3 im Kapitel 3) untersuchen möchten, benötigen wir eine L^∞ -Abschätzung für die Finite-Elemente-Lösung ω_h der diskreten Konvektions-Diffusions-Gleichung. Solche Abschätzung kann man nur für spezielle finite Elemente erster Ordnung beweisen (siehe [56]). Abweichend von dieser Vorgehensweise betrachten wir das diskrete Problem (4.7)-(4.9) unter Verwendung der teilproblemorientierten Entkopplungsstrategie. Wir untersuchen die Lösbarkeit der beiden diskreten Teilprobleme.

Die Konvergenzanalyse (die Herleitung von a priori-Fehlerabschätzungen) leiten wir auch unter Verwendung der teilproblemorientierten Entkopplungsstrategie her. Die Fehleranalyse der beiden diskreten Teilprobleme leiten wir nicht auf dem diskreten Gebiet Ω_h sondern auf dem Modellgebiet Ω her.

Für unsere Beweistechniken bei der Untersuchung der Lösbarkeit und der Herleitung von a priori-Fehlerabschätzungen benötigen wir die so genannte exakte Zerlegung. Zunächst stellen wir kurz die Konstruktion einer exakten Zerlegung dar. Unter Anwendung der exakten Zerlegung beweisen wir einige Aussagen, die für unsere Beweistechniken wichtige technische Resultate liefern.

4.3 Exakte Zerlegung und diskrete Bilinearformen

Im Abschnitt 4.2 haben wir standardmäßig eine reguläre Zerlegung \mathcal{T}_h des Modellgebietes Ω betrachtet. Die Familie $\{\mathcal{T}_h\}_h$ von Zerlegungen haben wir als quasiuniform angenommen. Im folgenden geben wir die Definition einer exakten Zerlegung an und stellen kurz ihre Konstruktion dar.

Definition 4.3.1 Sei $\tilde{\mathcal{T}}_h$ eine reguläre Zerlegung des Gebietes Ω . Die Zerlegung $\tilde{\mathcal{T}}_h$ wird exakt genannt, wenn

$$\bar{\Omega} \equiv \bar{\Omega}_h \quad \text{mit} \quad \bar{\Omega}_h := \bigcup_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h} \tilde{T}.$$

Sei $\tilde{\mathcal{T}}_h$ eine exakte Zerlegung des Bereiches Ω in krummlinige Dreiecke \tilde{T} , also

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h} \tilde{T}.$$

Die Existenz und die Konstruktion exakter Zerlegungen sowie der entsprechenden Eigenschaften und Interpolationsabschätzungen sind ausführlich in [14] und [43] untersucht. Explizite Konstruktionen der exakten Zerlegung kann man in [40], [43] und [66] finden. In [66] ist eine Konstruktion angegeben, die nur im 2D-Fall anwendbar ist. Die in [40] gezeigte Konstruktion ist nur im 3D-Fall beschrieben. Im Unterschied zur Konstruktion in [43] sind diese beiden Algorithmen zur Bauweise komplizierter. Der in [43] angegebene Algorithmus ist nicht nur im 2D-Fall, sondern auch im 3D-Fall anwendbar. Die in [14] beschriebene Konstruktion ist ein Sonderfall der Konstruktion in [43]. In [14] wird keine isoparametrische Approximation des krummlinigen Gebietes sondern nur eine Approximation mit geradlinigen Dreiecken beschrieben. Zunächst stellen wir kurz die in [43] angebotene Konstruktion einer exakten Zerlegung in Bezug auf die von uns ausgewählte isoparametrische Diskretisierung dar.

Sei \mathcal{T}_h eine reguläre Zerlegung von Ω in Dreieckelemente T . Wir betrachten das Referenzelement \hat{T} (das Dreieck mit den Knoten $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$) und die mit (4.1) definierte Referenztransformation $F_T : \hat{T} \rightarrow T$. Seien $\tilde{\mathcal{T}}_h$ eine exakte Zerlegung des Gebietes Ω in krummlinige Elemente \tilde{T} und $\tilde{F}_{\tilde{T}} : \hat{T} \rightarrow \tilde{T}$ die Transformation, die das Referenzdreieck \hat{T} auf die krummlinige Zelle $\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h$ abbildet. Die Abbildung $\tilde{F}_{\tilde{T}}$ kann in der Form

$$\tilde{F}_{\tilde{T}} := F_T + \Phi_T$$

mit $\Phi_T \in C^3(\hat{T}; \mathbb{R}^2)$ geschrieben werden. Die konstruktive Definition der Abbildung Φ_T kann man in [14] und [43] finden. Die Abbildung Φ_T wird dort als C^{k+1} -Transformation konstruiert, wobei k die Ordnung der Finite-Elemente-Diskretisierung bezeichnet. Wir verwenden Elemente zweiter Ordnung und setzen $\Phi_T \in C^3(\hat{T}; \mathbb{R}^2)$ voraus. Die Abbildung Φ_T wird nur für die Randelemente T auf den krummlinigen Randteilen Γ_K und Γ_F konstruiert, sonst gilt $\Phi_T \equiv 0$.

Mit Hilfe der Abbildungen F_T und $\tilde{F}_{\tilde{T}}$ definieren wir einen Homöomorphismus G_h zwischen dem diskreten Gebiet Ω_h ($\bar{\Omega}_h := \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$) und dem Modellgebiet Ω ($\bar{\Omega} = \bigcup_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h} \tilde{T}$) als

$$G_h|_T := \tilde{F}_{\tilde{T}} \circ F_T^{-1} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \quad (4.10)$$

(siehe die Konstruktion in Abb. 4.5). Der so definierte Homöomorphismus G_h bildet die Randelemente $T \in \mathcal{T}_h$ auf Γ_K oder Γ_F auf das krummlinige Element $\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h$ ab. Für die inneren Elemente und die Randelemente auf Γ_S ist G_h der Identitätsoperator.

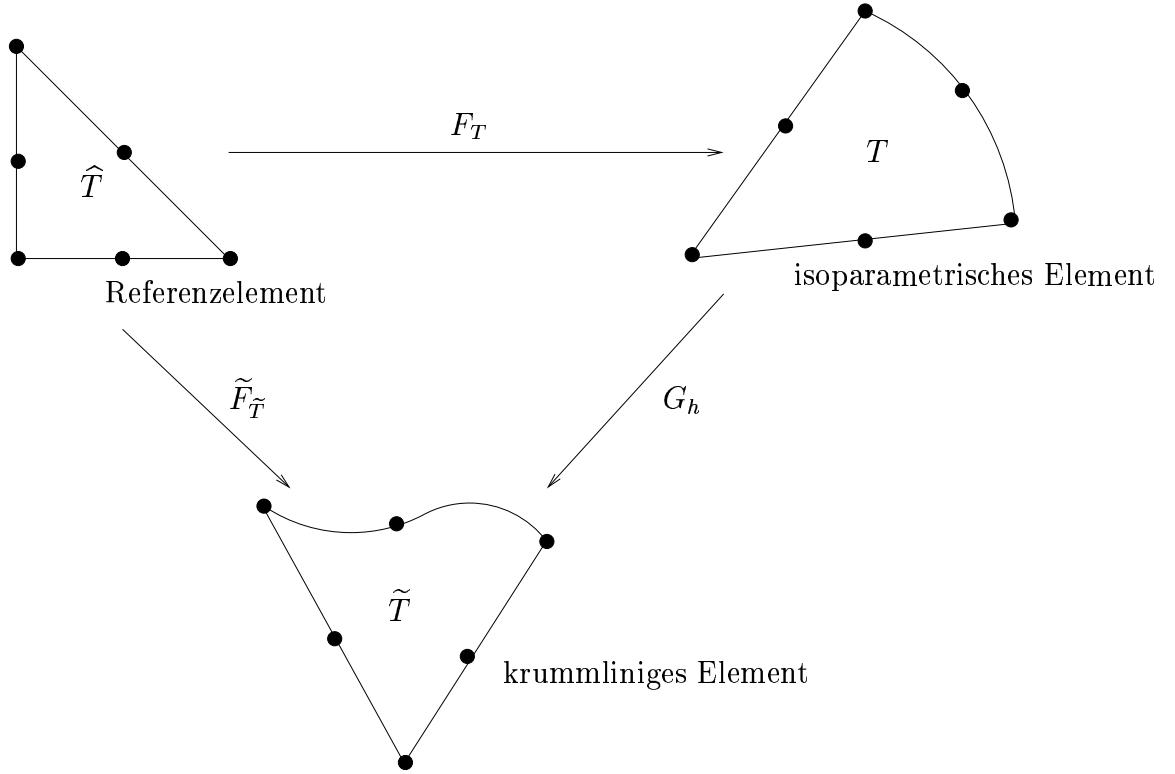


Abbildung 4.5: Konstruktion der exakten Zerlegung

Im weiteren vereinbaren wir das Symbol $\tilde{\mathcal{T}}_h^i$ bzw. \mathcal{T}_h^i für die Menge aller inneren Elemente $\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h$ bzw. $T \in \mathcal{T}_h$. Die Menge aller Randelemente $\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h$ bzw. $T \in \mathcal{T}_h$ bezeichnen wir mit $\tilde{\mathcal{T}}_h^\partial$ bzw. \mathcal{T}_h^∂ . Die Menge der Randelemente $\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h$ bzw. $T \in \mathcal{T}_h$ auf Γ_S bzw. $\Gamma_{h,S}$ stellen wir mit $\tilde{\mathcal{T}}_h^{\partial,S}$ bzw. $\mathcal{T}_h^{\partial,S}$ dar. Schließlich setzen wir $\tilde{\mathcal{T}}_h^{\partial,K,F} := \tilde{\mathcal{T}}_h^\partial \setminus \tilde{\mathcal{T}}_h^{\partial,S}$ und $\mathcal{T}_h^{\partial,K,F} := \mathcal{T}_h^\partial \setminus \mathcal{T}_h^{\partial,S}$. Nach der Definition des Homöomorphismus G_h gelten

$$\begin{aligned} \tilde{T} &:= G_h(T) \equiv T \in \tilde{\mathcal{T}}_h^i & \forall T \in \mathcal{T}_h^i, \\ \tilde{T} &:= G_h(T) \in \tilde{\mathcal{T}}_h^\partial & \forall T \in \mathcal{T}_h^\partial, \\ \tilde{T} &:= G_h(T) \in \tilde{\mathcal{T}}_h^{\partial,S} & \forall T \in \mathcal{T}_h^{\partial,S}, \\ \tilde{T} &:= G_h(T) \in \tilde{\mathcal{T}}_h^{\partial,K,F} & \forall T \in \mathcal{T}_h^{\partial,K,F}. \end{aligned}$$

Für unseres weiteres Vorgehen benötigen wir einige Eigenschaften des Homöomorphismus G_h .

Lemma 4.3.1 *Sei G_h der in (4.10) definierte Homöomorphismus zwischen Ω_h und Ω . Dann gelten:*

a) *es existieren Konstanten c_1 und c_2 , so daß*

$$\sup_{M \in T} |J(G_h|_T)_M - 1| \leq c_1 h_T^2 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \quad (4.11)$$

und

$$\sup_{\tilde{M} \in \tilde{T}} |J(G_h^{-1}|_{\tilde{T}})_{\tilde{M}} - 1| \leq c_2 h_{\tilde{T}}^2 \quad \forall \tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h, \quad (4.12)$$

wobei $J(G_h|_T)_M$ bzw. $J(G_h^{-1}|_{\tilde{T}})_{\tilde{M}}$ den Betrag der Jacobi-Determinante von $G_h|_T$ bzw. $G_h^{-1}|_{\tilde{T}}$ im Punkt $M \in T$ bzw. $\tilde{M} \in \tilde{T}$ bezeichnet;

b) es existieren Konstanten c_s , so daß

$$\sup_{M \in T} \|D^s(G_h|_T(M) - I)\| \leq c_s h^{3-s} \quad \forall s \leq 3, \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad (4.13)$$

wobei $D^s(G_h|_T(M) - I)$ die Fréchet-Ableitung s -ter Ordnung im Punkt M bezeichnet;

c) $v \in H^1(\Omega)$ genau dann, wenn $v \circ G_h \in H^1(\Omega_h)$. Ferner gilt

$$c_3 \|v\|_{1,\Omega} \leq \|v \circ G_h\|_{1,\Omega_h} \leq c_4 \|v\|_{1,\Omega}. \quad (4.14)$$

Die Eigenschaften (4.11) und (4.13) sind ein Sonderfall ($k = 2$) der in [43] als Proposition (i) und (iii) bewiesenen Abschätzungen. Einen Beweis der Abschätzung (4.12) kann man auch in [43] (Proposition 3 (ii), $k = 2$) finden. Die Aussage c) wird auch in [43] als Proposition 4 bewiesen.

Da wir die Technik der exakten Zerlegung für unsere Beweistechniken bei der Untersuchung der Lösbarkeit der diskreten Aufgaben und der Herleitung von a priori-Abschätzungen benötigen, beweisen wir zunächst einige wichtige technische Resultate. Für jedes Tripel

$$\{\mathbf{u}_h, p_h, S_h\} \in \mathbf{V}_{0h} \times Q_h \times Z_{0h}$$

definieren wir das Tripel

$$\{\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{p}_h, \tilde{S}_h\} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times Q \times Z_0$$

mit

$$\{\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{p}_h, \tilde{S}_h\} := \left\{ \mathbf{u}_h \circ G_h^{-1}, p_h \circ G_h^{-1} - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} p_h \circ G_h^{-1} d\tilde{x}, S_h \circ G_h^{-1} \right\}. \quad (4.15)$$

Für eine beliebige Funktion $p_h \in Q_h$ gilt $p_h \circ G_h^{-1} \in L^2(\Omega)$. Die Konstruktion

$$\tilde{p}_h := p_h \circ G_h^{-1} - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} p_h \circ G_h^{-1} d\tilde{x}$$

liefert $(\tilde{p}_h, 1) = 0$, d.h., $\tilde{p}_h \in Q$.

Im allgemeinen gelten $\tilde{\mathbf{u}}_h \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ und $\tilde{\mathbf{u}}_h \notin \mathbf{V}_0$, weil $\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}$ nur in den Punkten B_j , $j \in J(\Gamma_{h,F})$ verschwindet. Die nächste Aussage liefert die Randbedingungen für $\tilde{\mathbf{u}}_h$ auf Γ_S und Γ_K .

Lemma 4.3.2 Sei $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{0h}$ eine beliebige Funktion. Für die Funktion $\tilde{\mathbf{v}}_h := \mathbf{v}_h \circ G_h^{-1}$ gilt

$$\tilde{\mathbf{v}}_h = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_S \cup \Gamma_K. \quad (4.16)$$

Beweis. Für eine beliebige Funktion $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{0h}$ gilt $\mathbf{v}_h(B_j) = \mathbf{0}$ für alle $j \in J(\Gamma_{h,S})$. Da der diskrete Randteil $\Gamma_{h,S}$ geradlinig ist, gelten $\mathbf{v}_h = \mathbf{0}$ auf $\Gamma_{h,S}$ und $\Gamma_{h,S} \equiv \Gamma_S$. Nach der Definition des Homöomorphismus G_h gilt $G_h|_T \equiv I$ für alle Randelemente T auf Γ_S . Dann finden wir

$$\tilde{\mathbf{v}}_h = \mathbf{v}_h \circ G_h^{-1} = \mathbf{v}_h = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_S. \quad (4.17)$$

Für beliebiges $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{0h}$ gilt $\mathbf{v}_h(B_j) = \mathbf{0}$, $j \in J(\Gamma_{h,K})$. Dann gilt für alle $j \in J(\Gamma_{h,K})$ $(\mathbf{v}_h \circ F_T)(\hat{B}_j) = \mathbf{0}$ mit $\hat{B}_j := F_T^{-1}(B_j)$. Wir setzen $\hat{\Gamma}_{h,K} := F_T^{-1}(\Gamma_{h,K})$. Aus $\mathbf{v}_h \circ F_T = \mathbf{0}$ auf $\hat{\Gamma}_{h,K}$ ergibt sich $\mathbf{v}_h = \mathbf{0}$ auf $\Gamma_{h,K}$. Seien beliebiges $\tilde{B}_j \in \Gamma_K$ und $B_j := G_h^{-1}(\tilde{B}_j) \in \Gamma_{h,K}$. Es gilt

$$\tilde{\mathbf{v}}_h(\tilde{B}_j) = \mathbf{v}_h(G_h^{-1}(\tilde{B}_j)) = \mathbf{v}_h(B_j) = \mathbf{0}. \quad (4.18)$$

Mit (4.17) und (4.18) folgt die Behauptung. ■

Die folgende Aussage liefert das wichtigste technische Resultat, das wir für unsere Beweistechnik bei der Herleitung der a priori-Abschätzungen benötigen.

Lemma 4.3.3 Es gibt eine positive Konstante C , so daß

$$\|\tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \mathbf{n}\|_{0,2,\Gamma_F} \leq C h^{\frac{3}{2}} \|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1,\Omega} \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{0h} \quad (4.19)$$

mit $\tilde{\mathbf{v}}_h := \mathbf{v}_h \circ G_h^{-1}$.

Beweis. Wir vereinbaren das Symbol $\tilde{\mathcal{T}}_h^{\partial,F}$ bzw. $\mathcal{T}_h^{\partial,F}$ für die Menge aller Randelemente $\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h$ auf Γ_F bzw. $T \in \mathcal{T}_h$ auf $\Gamma_{h,F}$. Für beliebiges $\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h^{\partial,F}$ bzw. $T \in \mathcal{T}_h^{\partial,F}$ setzen wir $\tilde{\Gamma}_F^\partial := \tilde{T} \cap \Gamma_F$ bzw. $\Gamma_{h,F}^\partial := T \cap \Gamma_{h,F}$ und $\hat{\Gamma}_{h,F}^\partial := F_T^{-1}(\Gamma_{h,F}^\partial)$, wobei F_T^{-1} die Inverse der Referenzabbildung F_T bezeichnet. Nach der Definition von $\tilde{\mathbf{v}}_h$, mit den Eigenschaften von G_h und der Abschätzung $\|J(F_T)\|_{0,\infty,\hat{\Gamma}_h^\partial} \leq c h$ (siehe [21]) finden wir

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_F} |\tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \mathbf{n}|^2 d\tilde{\gamma} &= \sum_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h^{\partial,F}} \int_{\tilde{\Gamma}_F^\partial} |(\mathbf{v}_h \circ G_h^{-1}) \cdot \mathbf{n}|^2 d\tilde{\gamma} = \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\partial,F}} \int_{\Gamma_{h,F}^\partial} |\mathbf{v}_h \cdot (\mathbf{n} \circ G_h)|^2 J(G_h) d\gamma \\ &\leq c_1 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\partial,F}} \int_{\Gamma_{h,F}^\partial} |\mathbf{v}_h \cdot (\mathbf{n} \circ G_h)|^2 d\gamma \\ &= c_1 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\partial,F}} \int_{\hat{\Gamma}_{h,F}^\partial} |(\mathbf{v}_h \circ F_T) \cdot ((\mathbf{n} \circ G_h) \circ F_T)|^2 J(F_T) d\hat{\gamma} \\ &\leq c_1 c_2 h \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\partial,F}} \int_{\hat{\Gamma}_{h,F}^\partial} |(\mathbf{v}_h \circ F_T) \cdot ((\mathbf{n} \circ G_h) \circ F_T)|^2 d\hat{\gamma}. \end{aligned}$$

Da für beliebiges $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{0h}$ die Bedingung $(\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n})(B_j) = 0$ für alle $j \in J(\Gamma_{h,F})$ erfüllt ist, gilt

$$((\mathbf{v}_h \circ F_T) \cdot ((\mathbf{n} \circ G_h) \circ F_T))(\widehat{B}_j) = (\mathbf{v}_h \cdot (\mathbf{n} \circ G_h))(B_j) = (\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n})(B_j) = 0$$

für alle $j \in J(\Gamma_{h,F})$ mit $\widehat{B}_j := F_T^{-1}(B_j) \in \widehat{\Gamma}_{h,F}^\partial$. Dann gilt

$$i_h^2 \left((\mathbf{v}_h \circ F_T)|_{\widehat{\Gamma}_{h,F}^\partial} \cdot ((\mathbf{n} \circ G_h) \circ F_T)|_{\widehat{\Gamma}_{h,F}^\partial} \right) \equiv 0,$$

wobei i_h^2 den gewöhnlichen Lagrange-Interpolationsoperator auf dem Referenzelement \widehat{T} für die Polynome vom Grade zwei bezeichnet. Mit der standardmäßigen Interpolationsabschätzung (siehe [21]) erhalten wir

$$\begin{aligned} & \int_{\widehat{\Gamma}_{h,F}^\partial} |(\mathbf{v}_h \circ F_T) \cdot ((\mathbf{n} \circ G_h) \circ F_T)|^2 d\widehat{\gamma} \\ &= \int_{\widehat{\Gamma}_{h,F}^\partial} \left| (\mathbf{v}_h \circ F_T) \cdot ((\mathbf{n} \circ G_h) \circ F_T) - i_h^2((\mathbf{v}_h \circ F_T) \cdot ((\mathbf{n} \circ G_h) \circ F_T)) \right|^2 d\widehat{\gamma} \quad (4.20) \\ &\leq c \int_{\widehat{\Gamma}_{h,F}^\partial} \left| D^3 \left(((\mathbf{v}_h \circ F_T) \cdot ((\mathbf{n} \circ G_h) \circ F_T))|_{\widehat{\Gamma}_{h,F}^\partial} \right) \right|^2 d\widehat{\gamma}, \end{aligned}$$

wobei c eine positive Konstante bezeichnet. Mit D^i bezeichnen wir den zu $\widehat{\Gamma}_{h,F}^\partial$ tangentialen Differentialoperator i -ter Ordnung. Zunächst schätzen wir (4.20) ab. Wir betrachten die Ableitung $D^3((\mathbf{v}_h \circ F_T) \cdot ((\mathbf{n} \circ G_h) \circ F_T))$. Nach der Leibnizschen Regel zur Berechnung der Ableitung n -ter Ordnung für ein Produkt aus zwei Funktionen gilt

$$\begin{aligned} D^3((\mathbf{v}_h \circ F_T) \cdot ((\mathbf{n} \circ G_h) \circ F_T)) &= (\mathbf{v}_h \circ F_T) \cdot D^3((\mathbf{n} \circ G_h) \circ F_T) \\ &\quad + 3D(\mathbf{v}_h \circ F_T) \cdot D^2((\mathbf{n} \circ G_h) \circ F_T) \\ &\quad + 3D^2(\mathbf{v}_h \circ F_T) \cdot D((\mathbf{n} \circ G_h) \circ F_T) \\ &\quad + D^3(\mathbf{v}_h \circ F_T) \cdot (\mathbf{n} \circ G_h). \end{aligned}$$

Da $(\mathbf{v}_h \circ F_T)|_{\widehat{\Gamma}_{h,F}^\partial}$ ein Polynom zweiten Grades ist, gilt $D^3(\mathbf{v}_h \circ F_T)|_{\Gamma_{h,F}^\partial} \equiv 0$. Die Ableitungen $D((\mathbf{n} \circ G_h) \circ F_T)$, $D^2((\mathbf{n} \circ G_h) \circ F_T)$ und $D^3((\mathbf{n} \circ G_h) \circ F_T)$ berechnen wir nach der Kettenregel. Auf Grund der Voraussetzung $\Gamma_F \in C^4$ gelten

$$\|D((\mathbf{n} \circ G_h))\|_{0,\infty,\Gamma_{h,F}^\partial} \leq C_1, \quad (4.21)$$

$$\|D^2((\mathbf{n} \circ G_h))\|_{0,\infty,\Gamma_{h,F}^\partial} \leq C_2, \quad (4.22)$$

$$\|D^3((\mathbf{n} \circ G_h))\|_{0,\infty,\Gamma_{h,F}^\partial} \leq C_3, \quad (4.23)$$

wobei C_i , $i = 1, 2, 3$ positive Konstante bezeichnen (siehe [29]). Aus (4.21)-(4.23) und den Abschätzungen

$$|F_T|_{1,\infty,\hat{\Gamma}_{h,F}^\partial} \leq ch, \quad |F_T|_{2,\infty,\hat{\Gamma}_{h,F}^\partial} \leq ch^2, \quad |F_T|_{3,\infty,\hat{\Gamma}_{h,F}^\partial} = 0,$$

(siehe [21]) ergibt sich

$$\|D^i((\mathbf{n} \circ G_h) \circ F_T)\|_{0,\infty,\hat{\Gamma}_{h,F}^\partial} \leq c_i h^i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.24)$$

Mit (4.24) finden wir

$$\begin{aligned} & \int_{\hat{\Gamma}_{h,F}^\partial} \left| D^3 \left(((\mathbf{v}_h \circ F_T) \cdot ((\mathbf{n} \circ G_h) \circ F_T)) \Big|_{\hat{\Gamma}_{h,F}^\partial} \right) \right|^2 d\hat{\gamma} \\ & \leq c_1 h^6 \int_{\hat{\Gamma}_{h,F}^\partial} |\mathbf{v}_h \circ F_T|^2 d\hat{\gamma} + c_2 h^4 \int_{\hat{\Gamma}_{h,F}^\partial} |D(\mathbf{v}_h \circ F_T)|^2 d\hat{\gamma} \\ & \quad + c_3 h^2 \int_{\hat{\Gamma}_{h,F}^\partial} |D^2(\mathbf{v}_h \circ F_T)|^2 d\hat{\gamma} \\ & = c_1 h^6 \|\mathbf{v}_h \circ F_T\|_{0,2,\hat{\Gamma}_{h,F}^\partial}^2 + c_2 h^4 \|\mathbf{v}_h \circ F_T\|_{1,\hat{\Gamma}_{h,F}^\partial}^2 + c_3 h^2 \|\mathbf{v}_h \circ F_T\|_{2,\hat{\Gamma}_{h,F}^\partial}^2. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Nutzt man den Spursatz, die Abschätzungen

$$\|\mathbf{v}_h \circ F_T\|_{0,2,\hat{\Gamma}} \leq ch^{-1} \|\mathbf{v}_h\|_{0,2,T}, \quad |\mathbf{v}_h \circ F_T|_{1,\hat{\Gamma}} \leq c |\mathbf{v}_h|_{1,T}$$

(siehe [21]) und die Einbettung $\mathbf{H}^1(T) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(T)$, wird die Norm $\|\mathbf{v}_h \circ F_T\|_{0,2,\hat{\Gamma}_{h,F}^\partial}$ wie folgt abgeschätzt

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_h \circ F_T\|_{0,2,\hat{\Gamma}_{h,F}^\partial} & \leq c_1 \left(\|\mathbf{v}_h \circ F_T\|_{0,2,\hat{\Gamma}} + |\mathbf{v}_h \circ F_T|_{1,\hat{\Gamma}} \right) \leq c_1 \left(c_2 h^{-1} \|\mathbf{v}_h\|_{0,2,T} + c_3 |\mathbf{v}_h|_{1,T} \right) \\ & \leq c_4 h^{-1} \|\mathbf{v}_h\|_{1,T}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Mit dem Spursatz, den Abschätzungen

$$|\mathbf{v}_h \circ F_T|_{1,\hat{\Gamma}} \leq c |\mathbf{v}_h|_{1,T}, \quad |\mathbf{v}_h \circ F_T|_{2,\hat{\Gamma}} \leq ch |\mathbf{v}_h|_{2,T}$$

(siehe [21]) und der inversen Ungleichung

$$\|\mathbf{v}_h\|_{2,T} \leq ch^{-1} \|\mathbf{v}_h\|_{1,T}$$

finden wir

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}_h \circ F_T|_{1,\hat{\Gamma}_{h,F}^\partial} & \leq c_1 \left(|\mathbf{v}_h \circ F_T|_{1,\hat{\Gamma}} + |\mathbf{v}_h \circ F_T|_{2,\hat{\Gamma}} \right) \leq c_1 \left(c_2 |\mathbf{v}_h|_{1,T} + c_3 h |\mathbf{v}_h|_{2,T} \right) \\ & \leq c_1 \left(c_2 |\mathbf{v}_h|_{1,T} + c_3 h c_4 h^{-1} \|\mathbf{v}_h\|_{1,T} \right) \leq c_5 \|\mathbf{v}_h\|_{1,T}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Die Norm $|\mathbf{v}_h \circ F_T|_{2, \widehat{\Gamma}_{h,F}^\partial}$ schätzen wir analog zu der eben hergeleiteten Abschätzung ab. Wir erhalten

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}_h \circ F_T|_{2, \widehat{\Gamma}_{h,F}^\partial} &\leq c_1 \left(|\mathbf{v}_h \circ F_T|_{2, \widehat{T}} + |\mathbf{v}_h \circ F_T|_{3, \widehat{T}} \right) = c_1 |\mathbf{v}_h \circ F_T|_{2, \widehat{T}} \\ &\leq c_1 c_2 h |\mathbf{v}_h|_{2, T} \leq c_1 c_2 h c_3 h^{-1} \|\mathbf{v}_h\|_{1, T} = c_4 \|\mathbf{v}_h\|_{1, T}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

wobei benutzt wurde, daß $|\mathbf{v}_h \circ F_T|_{3, \widehat{T}} = 0$ gilt, da $\mathbf{v}_h \circ F_T \in \widehat{\mathcal{P}}_2(\widehat{T})$.

Die eben gewonnenen Abschätzungen (4.28), (4.27) und (4.26) setzen wir in (4.25) ein. Es gilt

$$\int_{\widehat{\Gamma}_{h,F}^\partial} \left| D^3 \left(((\mathbf{v}_h \circ F_T) \cdot ((\mathbf{n} \circ G_h) \circ F_T)) \Big|_{\widehat{\Gamma}_{h,F}^\partial} \right) \right|^2 d\widehat{\gamma} \leq C^* h^2 \|\mathbf{v}_h\|_{1, T}^2. \quad (4.29)$$

Aus der Äquivalenz der Normen $\|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1, \Omega}$ und $\|\mathbf{v}_h\|_{1, \Omega_h}$, und unter Verwendung von (4.29) ergibt sich

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \mathbf{n}\|_{0, 2, \Gamma_F}^2 &= \int_{\Gamma_F} |\tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \mathbf{n}|^2 d\tilde{\gamma} \leq C_1 h \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\partial, F}} \int_{\widehat{\Gamma}_{h,F}^\partial} |(\mathbf{v}_h \circ F_T) \cdot ((\mathbf{n} \circ G_h) \circ F_T)|^2 d\widehat{\gamma} \\ &\leq C_2 h \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\partial, F}} \int_{\widehat{\Gamma}_{h,F}^\partial} \left| D^3 \left(((\mathbf{v}_h \circ F_T) \cdot ((\mathbf{n} \circ G_h) \circ F_T)) \Big|_{\widehat{\Gamma}_{h,F}^\partial} \right) \right|^2 d\widehat{\gamma} \\ &\leq C_3 h^3 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\partial, F}} \|\mathbf{v}_h\|_{1, T}^2 \leq C_4 h^3 \sum_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h^{\partial, F}} \|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1, \tilde{T}}^2 \leq C_4 h^3 \|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1, \Omega}^2. \end{aligned}$$

■

Bemerkung 4.3.1 Die L^2 -Norm von $\tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \mathbf{n}$ betrachten wir nicht auf $\partial\Omega = \Gamma_S \cup \Gamma_F \cup \Gamma_K$ sondern nur auf Γ_F , da $\tilde{\mathbf{v}}_h|_{\Gamma_S \cup \Gamma_K} = \mathbf{0}$ gilt (siehe Lemma 4.3.2). In [4] kann man auch eine Abschätzung der Norm $\|\tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \mathbf{n}\|_{0, 2, \partial\Omega}$ mit Ordnung $\mathcal{O}(h^{\frac{3}{2}})$ finden. Im Unterschied zu den Abschätzungen (4.31) und (4.32) liefert unsere isoparametrische Betrachtungsweise kein besseres Resultat beim Abschätzen der Norm $\|\tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \mathbf{n}\|_{0, 2, \partial\Omega}$.

Im folgenden Lemma schätzen wir den Effekt der Abbildung der Funktionen aus \mathbf{V}_{0h} , Q_h und Z_{0h} mit dem Homöomorphismus G_h auf den Bilinearformen $a(\cdot, \cdot)$, $b(\cdot, \cdot)$ und $A(\cdot, \cdot)$ ab.

Lemma 4.3.4 Seien $\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_{0h}$, $y_h, z_h \in Z_{0h}$, $q_h \in Q_h$ und $\tilde{\mathbf{v}}_h := \mathbf{v}_h \circ G_h^{-1}$, $\tilde{\mathbf{w}}_h := \mathbf{w}_h \circ G_h^{-1}$, $\tilde{y}_h := y_h \circ G_h^{-1}$, $\tilde{z}_h := z_h \circ G_h^{-1}$

$$\tilde{q}_h := q_h \circ G_h^{-1} - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} q_h \circ G_h^{-1} d\tilde{x}.$$

Dann gelten:

a) es existiert eine Konstante C_1 , so daß

$$|A(\tilde{y}_h, \tilde{z}_h) - A_h(y_h, z_h)| \leq C_1 h^2 \left(\sum_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h^{\partial, K, F}} \|\tilde{y}_h\|_{1, \tilde{T}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h^{\partial, K, F}} \|\tilde{z}_h\|_{1, \tilde{T}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}; \quad (4.30)$$

b) es existiert eine Konstante C_2 , so daß

$$|a(\tilde{\mathbf{v}}_h, \tilde{\mathbf{w}}_h) - a_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)| \leq C_2 h^2 \left(\sum_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h^{\partial, K, F}} \|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1, \tilde{T}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h^{\partial, K, F}} \|\tilde{\mathbf{w}}_h\|_{1, \tilde{T}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}; \quad (4.31)$$

c) es existieren Konstanten C_3 und C_4 , so daß

$$|b(\tilde{\mathbf{v}}_h, \tilde{q}_h) - b_h(\mathbf{v}_h, q_h)| \leq C_3 h^2 \left(\sum_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h^{\partial, K, F}} \|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1, \tilde{T}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h^{\partial, K, F}} \|\tilde{q}_h\|_{0,2, \tilde{T}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.32)$$

$$+ C_4 h^{\frac{5}{2}} \|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1, \Omega} \|\tilde{q}_h\|_{0,2, \Omega}.$$

Beweis. a) Die Abschätzung (4.30) ist ein Sonderfall ($k = 2$) der in [43] als Lemma 8 (ii) bewiesenen Abschätzung. Dort wird eine verallgemeinerte Referenztransformation $F_T \in \left(\hat{\mathcal{P}}_k(\hat{T}) \right)^2$ betrachtet und bewiesen, daß

$$|A(\tilde{y}_h, \tilde{z}_h) - A_h(y_h, z_h)| \leq C_1 h^k \left(\sum_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h^{\partial}} \|\tilde{y}_h\|_{1, \tilde{T}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h^{\partial}} \|\tilde{z}_h\|_{1, \tilde{T}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.33)$$

gilt, wobei hier $\tilde{\mathcal{T}}_h^{\partial}$ die Menge aller Randlemente auf dem krummlinigen Rand $\partial\Omega$ bezeichnet. Mit (4.33) ergibt sich (4.30), da in unserem Fall $F_T \in \left(\hat{\mathcal{P}}_2(\hat{T}) \right)^2$ für Randlemente T auf den krummlinigen Randteilen Γ_K und Γ_F .

b) Der Beweis ist analog zu Lemma 8 (ii) in [43]. Unter Verwendung von $F_T \in \left(\hat{\mathcal{P}}_2(\hat{T}) \right)^2$ für Randlemente T auf den krummlinigen Randteilen Γ_K und Γ_F ergibt sich (4.31).

c) Nach der Definition von \tilde{q}_h gilt

$$|b(\tilde{\mathbf{v}}_h, \tilde{q}_h) - b_h(\mathbf{v}_h, q_h)| \leq |b(\tilde{\mathbf{v}}_h, q_h \circ G_h^{-1}) - b_h(\mathbf{v}_h, q_h)| + c \|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1, \Omega} \left| \int_{\Omega} q_h \circ G_h^{-1} d\tilde{x} \right| \quad (4.34)$$

mit positiver Konstante c . Die beiden Summanden in 4.34 werden getrennt abgeschätzt.

Die Abschätzung des Terms $|b(\tilde{\mathbf{v}}_h, q_h \circ G_h^{-1}) - b_h(\mathbf{v}_h, q_h)|$ ist analog zu Lemma 8 (i) in [43]. Mit $F_T \in (\widehat{\mathcal{P}}_2(\widehat{T}))^2$ für Randelemente T auf den krummlinigen Randteilen Γ_K und Γ_F ergibt sich

$$|b(\tilde{\mathbf{v}}_h, q_h \circ G_h^{-1}) - b_h(\mathbf{v}_h, q_h)| \leq C_3 h^2 \left(\sum_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h^{\partial, K, F}} \|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1, \tilde{T}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h^{\partial, K, F}} \|\tilde{q}_h\|_{0, 2, \tilde{T}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.35)$$

mit positiver Konstante C_3 .

Nun betrachten wir $\int_{\Omega} q_h \circ G_h^{-1} d\tilde{x}$. Da die in (4.10) definierte Abbildung G_h für innere Elemente und Randelemente auf Γ_S die Identität ist, gelten

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} q_h \circ G_h^{-1} d\tilde{x} &= \sum_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h^i} \int_{\tilde{T}} q_h \circ G_h^{-1} d\tilde{x} + \sum_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h^{\partial}} \int_{\tilde{T}} q_h \circ G_h^{-1} d\tilde{x} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h^i} \int_T q_h dx + \sum_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h^{\partial, S}} \int_{\tilde{T}} q_h \circ G_h^{-1} d\tilde{x} + \sum_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h^{\partial, K, F}} \int_{\tilde{T}} q_h \circ G_h^{-1} d\tilde{x} \quad (4.36) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h^i} \int_T q_h dx + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\partial, S}} \int_T q_h dx + \sum_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h^{\partial, K, F}} \int_{\tilde{T}} q_h \circ G_h^{-1} d\tilde{x}. \end{aligned}$$

Aus

$$0 = \int_{\Omega_h} q_h dx = \sum_{T \in \mathcal{T}_h^i} \int_T q_h dx + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\partial, S}} \int_T q_h dx + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\partial, K, F}} \int_T q_h dx$$

folgt

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h^i} \int_T q_h dx + \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\partial, S}} \int_T q_h dx = - \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\partial, K, F}} \int_T q_h dx. \quad (4.37)$$

Wir setzen (4.37) in (4.36) ein und erhalten

$$\int_{\Omega} q_h \circ G_h^{-1} d\tilde{x} = \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\partial, K, F}} \left(\int_T q_h |J(G_h)| dx - \int_T q_h dx \right), \quad (4.38)$$

wobei $J(G_h)$ den Betrag der Jacobi-Determinante von G_h bezeichnet. Nutzt man (4.38) und die Abschätzung (4.11) und

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\partial, K, F}} h_T \leq c \text{meas}(\partial\Omega_h) \leq c \text{meas}(\partial\Omega)$$

folgt

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Omega} q_h \circ G_h^{-1} d\tilde{x} \right| &= \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\theta, K, F}} \int_T q_h (J(G_h) - 1) dx \right| \leq c_1 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\theta, K, F}} h_T^2 \int_T |q_h| dx \\
&\leq c_1 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\theta, K, F}} h_T^3 \|q_h\|_{0,2,T} \leq c_2 \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\theta, K, F}} h_T^6 \right)^{\frac{1}{2}} \|q_h\|_{0,2,\Omega_h} \quad (4.39) \\
&\leq c_2 \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\theta, K, F}} h^5 h_T \right)^{\frac{1}{2}} \|q_h\|_{0,2,\Omega_h} = c_2 \left(h^5 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\theta, K, F}} h_T \right)^{\frac{1}{2}} \|q_h\|_{0,2,\Omega_h} \\
&\leq c_3 h^{\frac{5}{2}} \|q_h \circ G_h^{-1}\|_{0,2,\Omega} \leq c_4 h^{\frac{5}{2}} \|\tilde{q}_h\|_{0,2,\Omega} + c_5 h^{\frac{5}{2}} \left| \int_{\Omega} q_h \circ G_h^{-1} d\tilde{x} \right|.
\end{aligned}$$

Faßt man die Abschätzungen (4.34), (4.35) und (4.39) zusammen, so erhält man (4.32). \blacksquare

Bemerkung 4.3.2 In [4] wird der Effekt der Abbildung der Funktionen aus den entsprechenden diskreten Räumen mit dem Homöomorphismus G_h , der unter Verwendung des Taylor-Hood-Elementes definiert wird, auf den Bilinearformen $a(\cdot, \cdot)$ und $b(\cdot, \cdot)$ abgeschätzt. Da in [4] das geradliniges Taylor-Hood-Element, d.h. $F_T \in \left(\hat{\mathcal{P}}_1(\hat{T}) \right)^2$, verwendet wird, ist die Ordnung der Abschätzungen $\mathcal{O}(h)$. Unsere isoparametrische Betrachtungsweise liefert die Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$.

Im folgenden Lemma schätzen wir den Effekt der Abbildung der Funktionen aus \mathbf{V}_{0h} und Z_{0h} mit dem Homöomorphismus G_h auf den Trilinearformen $n(\cdot, \cdot, \cdot)$ und $N(\cdot, \cdot, \cdot)$ ab.

Lemma 4.3.5 Seien $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^3(\Omega) \cap \mathbf{V}_0$ und $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, $y \in H^3(\Omega) \cap Z_0$, $\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h \in \mathbf{H}^1(\Omega_h)$ und $y_h, z_h \in H^1(\Omega_h)$. Darüberhinaus seien $\tilde{\mathbf{u}}_h := \mathbf{u}_h \circ G_h^{-1}$, $\tilde{\mathbf{v}}_h := \mathbf{v}_h \circ G_h^{-1}$, $\tilde{\mathbf{w}}_h := \mathbf{w}_h \circ G_h^{-1}$ und $\tilde{z}_h := z_h \circ G_h^{-1}$. Dann gelten:

a) es existieren die Konstanten C_1 und C_2 , so daß

$$\begin{aligned}
|n(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{v}}_h) - n_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h)| &\leq C_1 \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{w}}_h\|_{1,\Omega} \|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1,\Omega} \left(\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} + \|\tilde{\mathbf{w}}_h\|_{1,\Omega} \right) \\
&\quad + C_2 h^{\frac{5}{2}} \|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1,\Omega}; \quad (4.40)
\end{aligned}$$

b) es existieren die Konstanten C_3, C_4 und C_5 , so daß

$$\begin{aligned}
|N(\mathbf{u}, y, \tilde{z}_h) - N_h(\mathbf{u}_h, y_h, z_h)| &\leq C_3 \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,\Omega} \|y\|_{1,\Omega} \|\tilde{z}_h\|_{1,\Omega} \\
&\quad + C_4 \|y - \tilde{y}_h\|_{1,\Omega} \|\tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1,\Omega} \|\tilde{z}_h\|_{1,\Omega} + C_5 h^{\frac{5}{2}} \|\tilde{z}_h\|_{1,\Omega}. \quad (4.41)
\end{aligned}$$

Beweis. a) Nach der Definition der diskreten Trilinearform $n_h(\cdot, \cdot, \cdot)$ und mit der Eigenschaft (4.2) der stetigen Bilinearform $n(\cdot, \cdot, \cdot)$ (siehe Bemerkung 4.2.1) finden wir

$$\begin{aligned} & |n(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{v}}_h) - n_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h)| \tag{4.42} \\ &= \left| \frac{1}{2} \{n(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{v}}_h) - n_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h)\} - \frac{1}{2} \{n(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{v}}_h, \mathbf{u}) - n_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)\} \right| \\ &\leq \frac{1}{2} |n(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{v}}_h) - n_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h)| + \frac{1}{2} |n(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{v}}_h, \mathbf{u}) - n_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)|. \end{aligned}$$

Nun werden die beiden Summanden in (4.42) getrennt abgeschätzt.

Nutzt man (4.11), die Stetigkeit der Trilinearform $n_h(\cdot, \cdot, \cdot)$, die Einbettung $\mathbf{H}^3(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{C}^1(\Omega)$ und die Voraussetzung $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^3(\Omega)$ ($\|\mathbf{u}\|_{3,\Omega} \leq c$) folgt

$$\begin{aligned} & |n(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{v}}_h) - n_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h)| \\ &= \left| \int_{\Omega_h} (\mathbf{u} \circ G_h) \cdot \nabla(\mathbf{u} \circ G_h) \mathbf{v}_h J(G_h) dx - \int_{\Omega_h} \mathbf{w}_h \cdot \nabla \mathbf{w}_h \mathbf{v}_h dx \right| \\ &\leq \left| \int_{\Omega_h} (\mathbf{u} \circ G_h) \cdot \nabla(\mathbf{u} \circ G_h) \mathbf{v}_h dx - \int_{\Omega_h} \mathbf{w}_h \cdot \nabla \mathbf{w}_h \mathbf{v}_h dx \right| \\ &\quad + \left| \int_{\Omega_h} (\mathbf{u} \circ G_h) \cdot \nabla(\mathbf{u} \circ G_h) \mathbf{v}_h (J(G_h) - 1) dx \right| \\ &= \left| \int_{\Omega_h} (\mathbf{u} \circ G_h) \cdot \nabla(\mathbf{u} \circ G_h) \mathbf{v}_h - \mathbf{w}_h \cdot \nabla \mathbf{w}_h \mathbf{v}_h dx \right| \\ &\quad + \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\partial, K, F}} \int_T (\mathbf{u} \circ G_h) \cdot \nabla(\mathbf{u} \circ G_h) \mathbf{v}_h (J(G_h) - 1) dx \right| \tag{4.43} \\ &= \left| \int_{\Omega_h} (\mathbf{u} \circ G_h) \cdot \nabla(\mathbf{u} \circ G_h) \mathbf{v}_h - \mathbf{w}_h \cdot \nabla(\mathbf{u} \circ G_h) \mathbf{v}_h dx \right| \\ &\quad + \left| \int_{\Omega_h} \mathbf{w}_h \cdot \nabla(\mathbf{u} \circ G_h) \mathbf{v}_h - \mathbf{w}_h \cdot \nabla \mathbf{w}_h \mathbf{v}_h dx \right| \\ &\quad + \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\partial, K, F}} \int_T (\mathbf{u} \circ G_h) \cdot \nabla(\mathbf{u} \circ G_h) \mathbf{v}_h (J(G_h) - 1) dx \right| \\ &\leq c_1 \|\mathbf{u} \circ G_h - \mathbf{w}_h\|_{1,\Omega_h} \|\mathbf{u} \circ G_h\|_{1,\Omega_h} \|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega_h} \\ &\quad + c_2 \|\mathbf{w}_h\|_{1,\Omega_h} \|\mathbf{u} \circ G_h - \mathbf{w}_h\|_{1,\Omega_h} \|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega_h} \\ &\quad + c_3 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{C}^1(\Omega)}^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\partial, K, F}} h_T^2 \int_T |\mathbf{v}_h| dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq c_4 \|\mathbf{u} \circ G_h - \mathbf{w}_h\|_{1,\Omega_h} \left(\|\mathbf{u} \circ G_h\|_{1,\Omega_h} + \|\mathbf{w}_h\|_{1,\Omega_h} \right) \|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega_h} \\ &\quad + c_3 c_5 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\partial,K,F}} h_T^3 \|\mathbf{v}_h\|_{0,2,T}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\partial,K,F}} h_T \leq c \operatorname{meas}(\partial\Omega_h) \leq c \operatorname{meas}(\partial\Omega). \quad (4.44)$$

Aus (4.43) folgt die Abschätzung des ersten Summandes mit (4.44), der Äquivalenz der Normen $\|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1,\Omega}$ und $\|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega_h}$ und der stetigen Einbettung $\mathbf{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$

$$\begin{aligned} &|n(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{v}}_h) - n_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h)| \\ &\leq c_4 \|\mathbf{u} \circ G_h - \mathbf{w}_h\|_{1,\Omega_h} \left(\|\mathbf{u} \circ G_h\|_{1,\Omega_h} + \|\mathbf{w}_h\|_{1,\Omega_h} \right) \|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega_h} \\ &\quad + c_3 c_5 \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\partial,K,F}} h_T^6 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\partial,K,F}} \|\mathbf{v}_h\|_{0,2,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c_4 \|\mathbf{u} \circ G_h - \mathbf{w}_h\|_{1,\Omega_h} \left(\|\mathbf{u} \circ G_h\|_{1,\Omega_h} + \|\mathbf{w}_h\|_{1,\Omega_h} \right) \|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega_h} \\ &\quad + c_3 c_5 c_6 h^{\frac{5}{2}} \|\mathbf{v}_h\|_{0,2,\Omega_h} \\ &\leq C_1 \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{w}}_h\|_{1,\Omega} \left(\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} + \|\tilde{\mathbf{w}}_h\|_{1,\Omega} \right) \|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1,\Omega} + C_2 h^{\frac{5}{2}} \|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1,\Omega}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Der zweite Summand wird genauso wie der erste abgeschätzt

$$\begin{aligned} &|n(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{v}}_h, \mathbf{u}) - n_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)| \\ &\leq c_1 \|\mathbf{u} \circ G_h - \mathbf{w}_h\|_{1,\Omega_h} \|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega_h} \left(\|\mathbf{u} \circ G_h\|_{1,\Omega_h} + \|\mathbf{w}_h\|_{1,\Omega_h} \right) \\ &\quad + c_2 c_3 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\partial,K,F}} h_T^3 \|\mathbf{v}_h\|_{1,T} \\ &\leq C_1 \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{w}}_h\|_{1,\Omega} \left(\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} + \|\tilde{\mathbf{w}}_h\|_{1,\Omega} \right) \|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1,\Omega} + C_2 h^{\frac{5}{2}} \|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1,\Omega}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Die Zusammenfassung der einzelnen Abschätzungen (4.45) und (4.46) liefert (4.40).

b) Die Beweisführung ist analog zu a). Wir finden

$$\begin{aligned} &|N(\mathbf{u}, y, \tilde{z}_h) - N_h(\mathbf{u}_h, y_h, z_h)| \\ &= \left| \frac{1}{2} \{N(\mathbf{u}, y, \tilde{z}_h) - N(\mathbf{u}, \tilde{z}_h, y)\} - \frac{1}{2} \{N_h(\mathbf{u}_h, y_h, z_h) - N_h(\mathbf{u}_h, z_h, y_h)\} \right| \\ &\leq \frac{1}{2} |N(\mathbf{u}, y, \tilde{z}_h) - N_h(\mathbf{u}_h, y_h, z_h)| + \frac{1}{2} |N(\mathbf{u}, \tilde{z}_h, y) - N_h(\mathbf{u}_h, z_h, y_h)|. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Die beiden Summanden in (4.47) schätzen wir getrennt ab. Es folgen

$$\begin{aligned}
& |N(\mathbf{u}, y, \tilde{z}_h) - N_h(\mathbf{u}_h, y_h, z_h)| \\
&= \left| \int_{\Omega_h} (\mathbf{u} \circ G_h) \cdot \nabla(y \circ G_h) z_h J(G_h) dx - \int_{\Omega_h} \mathbf{u}_h \cdot \nabla y_h z_h dx \right| \\
&\leq \left| \int_{\Omega_h} (\mathbf{u} \circ G_h) \cdot \nabla(y \circ G_h) z_h dx - \int_{\Omega_h} \mathbf{u}_h \cdot \nabla y_h z_h dx \right| \\
&\quad + \left| \int_{\Omega_h} (\mathbf{u} \circ G_h) \cdot \nabla(y \circ G_h) z_h (J(G_h) - 1) dx \right| \\
&\leq \left| \int_{\Omega_h} (\mathbf{u} \circ G_h) \cdot \nabla(y \circ G_h) z_h dx - \int_{\Omega_h} \mathbf{u}_h \cdot \nabla(y \circ G_h) z_h dx \right| \\
&\quad + \left| \int_{\Omega_h} \mathbf{u}_h \cdot \nabla(y \circ G_h) z_h dx - \int_{\Omega_h} \mathbf{u}_h \cdot \nabla y_h z_h dx \right| \tag{4.48} \\
&\quad + \left| \int_{\Omega_h} (\mathbf{u} \circ G_h) \cdot \nabla(y \circ G_h) z_h (J(G_h) - 1) dx \right| \\
&\leq c_1 \|\mathbf{u} \circ G_h - \mathbf{u}_h\|_{1, \Omega_h} \|y \circ G_h\|_{1, \Omega_h} \|z_h\|_{1, \Omega_h} \\
&\quad + c_2 \|\mathbf{u}_h\|_{1, \Omega_h} \|y \circ G_h - y_h\|_{1, \Omega_h} \|z_h\|_{1, \Omega_h} \\
&\quad + c_3 \|\mathbf{u}\|_{C^1(\Omega)} \|y\|_{C^1(\Omega)} \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\partial, K, F}} h_T^2 \int_T |z_h| dx \\
&\leq c_4 \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1, \Omega} \|y\|_{1, \Omega} \|\tilde{z}_h\|_{1, \Omega} \\
&\quad + c_5 \|\tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1, \Omega} \|y - \tilde{y}_h\|_{1, \Omega} \|\tilde{z}_h\|_{1, \Omega} + c_6 h^{\frac{5}{2}} \|\tilde{z}_h\|_{1, \Omega},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& |N(\mathbf{u}, \tilde{z}_h, y) - N_h(\mathbf{u}_h, z_h, y_h)| \\
&\leq c_1 \|\mathbf{u} \circ G_h - \mathbf{u}_h\|_{1, \Omega_h} \|y \circ G_h\|_{1, \Omega_h} \|z_h\|_{1, \Omega_h} \\
&\quad + c_2 \|\mathbf{u}_h\|_{1, \Omega_h} \|y \circ G_h - y_h\|_{1, \Omega_h} \|z_h\|_{1, \Omega_h} \\
&\quad + c_3 \|\mathbf{u}\|_{C^1(\Omega)} \|y\|_{C^1(\Omega)} \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\partial, K, F}} h_T^2 \int_T |\nabla z_h| dx \tag{4.49} \\
&\leq c_4 \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1, \Omega} \|y\|_{1, \Omega} \|\tilde{z}_h\|_{1, \Omega} \\
&\quad + c_5 \|\tilde{\mathbf{u}}_h\|_{1, \Omega} \|y - \tilde{y}_h\|_{1, \Omega} \|\tilde{z}_h\|_{1, \Omega} + c_6 h^{\frac{5}{2}} \|\tilde{z}_h\|_{1, \Omega}.
\end{aligned}$$

Die Zusammenfassung der Abschätzungen (4.48) und (4.49) liefert (4.41). ■

Bemerkung 4.3.3 In [4] kann man die folgende Abschätzung

$$\begin{aligned} & |n(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{v}}_h) - n_h(\mathbf{w}_h, \mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h)| \\ & \leq C_1 \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{w}}_h\|_{1,\Omega} \|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1,\Omega} \left(\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} + \|\tilde{\mathbf{w}}_h\|_{1,\Omega} \right) + C_2 h^{\frac{3}{2}} \|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1,\Omega}; \end{aligned}$$

finden. Unsere isoparametrische Betrachtungsweise liefert ein besseres Resultat im Unterschied zu der in [4] verwendeten geradlinigen Taylor-Hood-Diskretisierung.

Die Analysis des Fehlers $\{\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h, p_h - \tilde{p}_h\}$ werden wir standardtechnisch herleiten. Da wir bekannte Resultate über die Approximation der Sattelpunktprobleme (siehe §II.2 in [18]) verwenden wollen, benötigen wir die geeigneten Analogien der Elliptizitätsbedingung und der LBB-Stabilitätsbedingung für die Funktionen

$$\tilde{\mathbf{v}}_h := \mathbf{v}_h \circ G_h^{-1} \quad \text{und} \quad \tilde{q}_h := q_h \circ G_h^{-1} - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} q_h \circ G_h^{-1} d\tilde{x}.$$

Lemma 4.3.6 Seien $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{0h}$, $q_h \in Q_h$ und $\tilde{\mathbf{v}}_h := \mathbf{v}_h \circ G_h^{-1}$,

$$\tilde{q}_h := q_h \circ G_h^{-1} - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} q_h \circ G_h^{-1} d\tilde{x}.$$

Dann gelten:

a) es existiert eine Konstante \tilde{C}_a , so daß

$$a(\tilde{\mathbf{v}}_h, \tilde{\mathbf{v}}_h) \geq \tilde{C}_a \|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1,\Omega}^2; \quad (4.50)$$

b) es existiert eine Konstante $\tilde{\beta} > 0$, so daß

$$\tilde{\beta} \|\tilde{q}_h\|_{0,2,\Omega} \leq \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{0h}} \frac{b(\tilde{\mathbf{v}}_h, \tilde{q}_h)}{\|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1,\Omega}}. \quad (4.51)$$

Beweis. a) Mit Hilfe der zweiten Kornschen Ungleichung

$$c_1 \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2 \leq \int_{\Omega} \mathcal{D}(\mathbf{v}) : \mathcal{D}(\mathbf{v}) d\tilde{x} + c_2 \|\mathbf{v}\|_{0,2,\Omega}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$$

und der Poincaré-Morreyschen Ungleichung

$$c_2 \|\mathbf{v}\|_{0,2,\Omega}^2 \leq \int_{\Omega} \mathcal{D}(\mathbf{v}) : \mathcal{D}(\mathbf{v}) d\tilde{x} + \int_{\partial\Omega} |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|^2 d\tilde{\gamma} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1,\Omega}^2 & \leq \frac{1}{2c_1} a(\tilde{\mathbf{v}}_h, \tilde{\mathbf{v}}_h) + \frac{c_2}{c_1} \|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{0,2,\Omega}^2 \\ & \leq \frac{1}{2c_1} a(\tilde{\mathbf{v}}_h, \tilde{\mathbf{v}}_h) + \frac{c_2}{c_1} \left\{ \frac{1}{2c_2} a(\tilde{\mathbf{v}}_h, \tilde{\mathbf{v}}_h) + \frac{1}{c_2} \int_{\partial\Omega} |\tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \mathbf{n}|^2 d\tilde{\gamma} \right\} \\ & = \frac{1}{c_1} a(\tilde{\mathbf{v}}_h, \tilde{\mathbf{v}}_h) + \frac{1}{c_1} \int_{\partial\Omega} |\tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \mathbf{n}|^2 d\tilde{\gamma}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Mit (4.16) und (4.19) ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} |\tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \mathbf{n}|^2 d\tilde{\gamma} &= \int_{\Gamma_S \cup \Gamma_K} |\tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \mathbf{n}|^2 d\tilde{\gamma} + \int_{\Gamma_F} |\tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \mathbf{n}|^2 d\tilde{\gamma} \\ &= \int_{\Gamma_F} |\tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \mathbf{n}|^2 d\tilde{\gamma} \leq C h^3 \|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1,\Omega}^2. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Mit (4.52) und (4.53) können wir schlußfolgern

$$\tilde{C}_a \|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1,\Omega}^2 \leq a(\tilde{\mathbf{v}}_h, \tilde{\mathbf{v}}_h)$$

mit Konstante $\tilde{C}_a = c_1 - C h^3$.

b) Wir betrachten den diskreten Raum

$$\mathbf{V}_{0h}^0 := \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h : \mathbf{v}_h(B_j) = 0 \forall j \in J(\Gamma_{h,K}) \cup J(\Gamma_{h,S}) \cup J(\Gamma_{h,F})\}.$$

Die Räume \mathbf{V}_{0h}^0 und Q_h erfüllen die diskrete LBB-Stabilitätsbedingung

$$\beta \|q_h\|_{0,2,\Omega_h} \leq \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{0h}^0} \frac{b_h(\mathbf{v}_h, q_h)}{|\mathbf{v}_h|_{1,\Omega_h}} \quad \forall q_h \in Q_h$$

mit einer Konstante $\beta > 0$ (siehe [26]). Da $\mathbf{V}_{0h} \supset \mathbf{V}_{0h}^0$ gilt, genügen die Räume \mathbf{V}_{0h} und Q_h auch der diskreten LBB-Stabilitätsbedingung

$$\beta \|q_h\|_{0,2,\Omega_h} \leq \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{0h}} \frac{b_h(\mathbf{v}_h, q_h)}{|\mathbf{v}_h|_{1,\Omega_h}} \quad \forall q_h \in Q_h. \quad (4.54)$$

Aus der Äquivalenz der Normen $\|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1,\Omega}$ und $\|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega_h}$ bzw. $\|\tilde{q}_h\|_{1,\Omega}$ und $\|q_h\|_{1,\Omega_h}$ (siehe (4.14)) und unter Verwendung von (4.54) und (4.32) ergeben sich

$$\begin{aligned} \|\tilde{q}_h\|_{0,2,\Omega} &\leq c_1 \|q_h\|_{0,2,\Omega_h} \leq \frac{c_1}{\beta} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{0h}} \frac{b_h(\mathbf{v}_h, q_h)}{|\mathbf{v}_h|_{1,\Omega_h}} \leq \frac{c_1}{\beta c_2} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{0h}} \frac{b_h(\mathbf{v}_h, q_h)}{|\tilde{\mathbf{v}}_h|_{1,\Omega}} \\ &\leq \frac{c_1}{\beta c_2} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{0h}} \frac{b(\tilde{\mathbf{v}}_h, \tilde{q}_h)}{|\tilde{\mathbf{v}}_h|_{1,\Omega}} \\ &\quad + \frac{c_1}{\beta c_2} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{0h}} \frac{C_3 h^2}{|\tilde{\mathbf{v}}_h|_{1,\Omega}} \left(\sum_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h^{\partial,K,F}} \|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1,\tilde{T}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h^{\partial,K,F}} \|\tilde{q}_h\|_{0,2,\tilde{T}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{c_1}{\beta c_2} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{0h}} \frac{C_4 h^{\frac{5}{2}}}{|\tilde{\mathbf{v}}_h|_{1,\Omega}} \|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1,\Omega} \|\tilde{q}_h\|_{0,2,\Omega} \\ &\leq \frac{c_1}{\beta c_2} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{0h}} \frac{b(\tilde{\mathbf{v}}_h, \tilde{q}_h)}{|\tilde{\mathbf{v}}_h|_{1,\Omega}} + C h^2 \|\tilde{q}_h\|_{0,2,\Omega}. \end{aligned}$$

Die Behauptung ergibt sich mit $\tilde{\beta} = (1 - \mathcal{C} h^2) \beta c_2/c_1$. ■

Nach diesen Vorüberlegungen können wir nun die diskrete Aufgabe (4.7)-(4.9) untersuchen.

4.4 Lösbarkeit der diskreten Aufgabe

Wie vorher erklärt, untersuchen wir die Lösbarkeit des diskreten Problems (4.7)-(4.9) unter Verwendung der teilproblem-orientierten Entkopplungsstrategie. Sei $\{\mathbf{u}_h^k, p_h^k\} \in \mathbf{V}_{0h} \times Q_h$ eine gegebene Approximation der Lösung von (4.7)-(4.8). Dann erhält man für die Unbekannten $\{\mathbf{u}_h^{k+1}, p_h^{k+1}, S_h^{k+1}\} \in \mathbf{V}_{0h} \times Q_h \times Z_{0h}$ ein Problem der Gestalt:

Finde ein Tripel $\{\mathbf{u}_h^{k+1}, p_h^{k+1}, S_h^{k+1}\} \in \mathbf{V}_{0h} \times Q_h \times Z_{0h}$, so daß

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} A_h(S_h^{k+1}, z_h) + N_h(\mathbf{u}_h^k, S_h^{k+1}, z_h) \\ = -\frac{1}{Re} A_h(\lambda_{0h}, z_h) - N_h(\mathbf{u}_h^k, \lambda_{0h}, z_h) \quad \forall z_h \in Z_{0h}, \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} a_h(\mathbf{u}_h^{k+1}, \mathbf{v}_h) + n_h(\mathbf{u}_h^{k+1}, \mathbf{u}_h^{k+1}, \mathbf{v}_h) + b_h(\mathbf{v}_h, p_h^{k+1}) \\ = \delta \left((S_h^{k+1} + \lambda_{0h})^2, \mathbf{v}_h \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 \right)_h \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{0h}, \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$b_h(\mathbf{u}_h^{k+1}, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h. \quad (4.57)$$

Zunächst untersuchen wir exemplarisch die Lösbarkeit der beiden Teilprobleme (4.55) und (4.56)-(4.57).

Satz 4.4.1 *Das diskrete Teilproblem (4.55) hat für beliebige $\mathbf{u}_h^k \in \mathbf{V}_{0h}$ genau eine Lösung $S_h^{k+1} \in Z_{0h}$.*

Beweis. Zum Beweis wenden wir das Lax-Milgran-Lemma an, d. h., wir müssen die Stetigkeit von $\frac{1}{Re} A_h(\cdot, \cdot) + N_h(\mathbf{u}_h^k, \cdot, \cdot)$ und $-\frac{1}{Re} A_h(\lambda_{0h}, \cdot) - N_h(\mathbf{u}_h^k, \lambda_{0h}, \cdot)$ sowie die Koerzivität von $\frac{1}{Re} A_h(\cdot, \cdot) + N_h(\mathbf{u}_h^k, \cdot, \cdot)$ auf Z_{0h} zeigen.

Wir zeigen zunächst die Stetigkeit von $\frac{1}{Re} A_h(\cdot, \cdot) + N_h(\mathbf{u}_h^k, \cdot, \cdot)$. Für alle $S_h, z_h \in Z_{0h}$ gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{Re} A_h(S_h, z_h) + N_h(\mathbf{u}_h^k, S_h, z_h) \right| &\leq \frac{1}{Re} |S_h|_{1, \Omega_h} |z_h|_{1, \Omega_h} + |\mathbf{u}_h^k|_{1, \Omega_h} \|S_h\|_{1, \Omega_h} \|z_h\|_{1, \Omega_h} \\ &\leq C(Re, |\mathbf{u}_h^k|_{1, \Omega_h}) \|S_h\|_{1, \Omega_h} \|z_h\|_{1, \Omega_h}. \end{aligned}$$

Zur Stetigkeit von $-\frac{1}{Re} A_h(\lambda_{0h}, \cdot) - N_h(\mathbf{u}_h^k, \lambda_{0h}, \cdot)$ zeigen wir, daß für alle $z_h \in Z_{0h}$ gilt

$$\begin{aligned} \left| -\frac{1}{Re} A_h(\lambda_{0h}, z_h) - N_h(\mathbf{u}_h^k, \lambda_{0h}, z_h) \right| &\leq \frac{1}{Re} |\lambda_{0h}|_{1, \Omega_h} |z_h|_{1, \Omega_h} + |\mathbf{u}_h^k|_{1, \Omega_h} \|\lambda_{0h}\|_{1, \Omega_h} \|z_h\|_{1, \Omega_h} \\ &\leq C(Re, \|\lambda_{0h}\|_{1, \Omega_h}, |\mathbf{u}_h^k|_{1, \Omega_h}) \|z_h\|_{1, \Omega_h}. \end{aligned}$$

Für die Funktionen $z_h \in Z_{0h}$ gilt $z_h|_{\Gamma_{h,K} \cup \Gamma_{h,S}} \equiv 0$. Dann folgt aus der verallgemeinerten Poincaré-Friedrichsschen Ungleichung die Z_{0h} -Koerzivität der Bilinearform $A_h(\cdot, \cdot)$. Mit der Eigenschaft (4.5) von $N_h(\cdot, \cdot, \cdot)$ und der Z_{0h} -Koerzivität von $A_h(\cdot, \cdot)$ finden wir

$$\frac{1}{Re} A_h(z_h, z_h) + N_h(\mathbf{u}_h^k, z_h, z_h) = \frac{1}{Re} A_h(z_h, z_h) \geq C_{A_h} \|z_h\|_{1, \Omega_h}^2$$

für alle $z_h \in Z_{0h}$. Somit ist die Koerzivität von $\frac{1}{Re} A_h(\cdot, \cdot) + N_h(\mathbf{u}_h^k, \cdot, \cdot)$ auf Z_{0h} gezeigt. \blacksquare

Satz 4.4.2 *Das diskrete Teilproblem (4.56)-(4.57) hat für beliebige $S_h^{k+1} \in Z_{0h}$ genau eine Lösung $\{\mathbf{u}_h^{k+1}, p_h^{k+1}\} \in \mathbf{V}_{0h} \times Q_h$.*

Beweis. Wir setzen

$$\mathbf{W}_h := \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{0h} : b_h(\mathbf{v}_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h\}.$$

Nach der abstrakten Finite-Elemente-Theorie (siehe [18] oder [30]) folgt die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösung von (4.56)-(4.57) mit der diskreten LBB-Stabilitätsbedingung und der Koerzivität von $a_h(\cdot, \cdot)$ auf \mathbf{W}_h , d.h., wir müssen zeigen, daß

$$\beta \|q_h\|_{0,2,\Omega_h} \leq \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{0h}} \frac{b_h(\mathbf{v}_h, q_h)}{|\mathbf{v}_h|_{1,\Omega_h}} \quad \forall q_h \in Q_h \quad (4.58)$$

und

$$a_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \geq C_h \|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega_h}^2 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{W}_h \quad (4.59)$$

gelten.

Wir zeigen zunächst die Bedingung (4.58). Die diskreten Räume

$$\mathbf{V}_{0h}^0 := \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h : \mathbf{v}_h(B_j) = 0 \quad \forall j \in J(\Gamma_{h,K}) \cup J(\Gamma_{h,S}) \cup J(\Gamma_{h,F})\}$$

und Q_h erfüllen die diskrete LBB-Stabilitätsbedingung

$$\beta \|q_h\|_{0,2,\Omega_h} \leq \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{0h}^0} \frac{b_h(\mathbf{v}_h, q_h)}{|\mathbf{v}_h|_{1,\Omega_h}} \quad \forall q_h \in Q_h$$

mit einer Konstante $\beta > 0$ (siehe [26]). Da $\mathbf{V}_{0h} \supset \mathbf{V}_{0h}^0$ gilt, genügen die Räume \mathbf{V}_{0h} und Q_h auch die diskrete LBB-Stabilitätsbedingung (4.58).

Wir betrachten die Bilinearform $a_h(\cdot, \cdot)$ für alle $\mathbf{v}_h \in \mathbf{W}_h \subset \mathbf{V}_{0h}$. Mit der Abschätzung (4.31) und der Bedingung (4.50) finden wir

$$\begin{aligned} a_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) &= a_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) - a(\tilde{\mathbf{v}}_h, \tilde{\mathbf{v}}_h) + a(\tilde{\mathbf{v}}_h, \tilde{\mathbf{v}}_h) \geq -C_1 h^2 \|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1,\Omega}^2 + \tilde{C}_a \|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1,\Omega}^2 \\ &= (\tilde{C}_a - C_1 h^2) \|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1,\Omega}^2, \end{aligned}$$

wobei $\tilde{\mathbf{v}}_h := \mathbf{v}_h \circ G_h^{-1}$. Aus der Äquivalenz der Normen $\|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1,\Omega}$ und $\|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega_h}$ (siehe (4.14)) ergibt sich die Bedingung (4.59) mit $C_h = c \left(\tilde{C}_a - C_1 h^2 \right)$. ■

Als Folgerung aus den Sätzen 4.4.1 und 4.4.2 und aus der Konvergenz der Entkopplungsiteration (siehe Folgerung 3.5.1 im Kapitel 3) erhalten wir das Resultat:

Folgerung 4.4.1 *Für hinreichend kleine Werte des Parameters δRe^2 hat das Problem (4.6) genau eine Lösung $\{\mathbf{u}_h, p_h, \omega_h\} \in \mathbf{V}_{0h} \times Q_h \times Z_h$ mit $\omega_h(B_j) = 1$ für alle $j \in J(\Gamma_{h,S})$ und $\omega_h(B_j) = 0$ für alle $j \in J(\Gamma_{h,K})$.*

4.5 A priori-Fehlerabschätzungen

In diesem Abschnitt wollen wir die Fehleranalyse für die gegebene Diskretisierung des stetigen Modellsystems (3.1)-(3.9) darstellen. Die Konvergenzanalyse leiten wir auch unter Verwendung der teilproblem-orientierten Entkopplungsstrategie her, d.h., wir schätzen die Navier-Stokes-Gleichungen und die Konvektions-Diffusions-Gleichung sukzessiv ab. Unter Einsatz der Technik der exakten Zerlegung leiten wir die Fehleranalyse der beiden diskreten Teilprobleme nicht auf dem diskreten Gebiet Ω_h sondern auf dem Modellgebiet Ω her. Diese Vorgehensweise der Fehleranalyse kann man in [4] finden. Dort wurden die Navier-Stokes-Gleichungen mit Gleitrandbedingung unter Einsatz vom Taylor-Hood-Element diskretisiert. Die in [4] beschriebene Abschätzungsstrategie verwenden wir für das Navier-Stokes-Teilproblem in Bezug auf unsere isoparametrische Diskretisierung. Somit vermeiden wir die Abschätzung der Terme, die die Integration auf dem diskreten Rand $\partial\Omega_h$ involvieren. In [73] kann man eine auf dem diskreten Gebiet durchgeführte Fehlerabschätzung der mit dem Taylor-Hood-Element diskretisierten Navier-Stokes-Gleichungen mit Gleitrandbedingung finden. Wie wir vorher (siehe Abschnitt 4.1) erklärt haben, ist in [73] beschriebene Fehlerabschätzung nicht optimal im Vergleich zur Abschätzung in [4]. Der Grund dafür liegt darin, daß die Norm $\|\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}\|_{0,2,\partial\Omega_h}$ mit Ordnung $\mathcal{O}(h^{\frac{1}{2}})$ abgeschätzt wird (siehe [73]). Im Unterschied zur L^2 -Norm $\|\mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}\|_{0,2,\partial\Omega_h}$ auf dem diskreten Rand $\partial\Omega_h$ wird die Norm $\|\tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \mathbf{n}\|_{0,2,\partial\Omega}$ auf dem stetigen Rand $\partial\Omega$ mit Ordnung $\mathcal{O}(h^{\frac{3}{2}})$ (siehe Lemma 4.3.3 und Bemerkung 4.3.1) abgeschätzt.

Der Ausgangspunkt der Untersuchungen ist das stetige Problem:

Finde ein Tripel $\{\mathbf{u}^{k+1}, p^{k+1}, \omega^{k+1}\} \in \mathbf{V}_0 \times Q \times H^1(\Omega)$ mit $\omega^{k+1}|_{\Gamma_S} = 1$ und $\omega^{k+1}|_{\Gamma_K} = 0$, so daß

$$\frac{1}{Re} A(\omega^{k+1}, z) + N(\mathbf{u}^k, \omega^{k+1}, z) = 0 \quad \forall z \in Z_0, \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} a(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}) + n(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p^{k+1}) \\ = \delta \left((\omega^{k+1})^2, \mathbf{v} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1 \right) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0, \end{aligned} \quad (4.61)$$

$$b(\mathbf{u}^{k+1}, q) = 0 \quad \forall q \in Q, \quad (4.62)$$

wobei $\{\mathbf{u}^k, p^k\}$ eine gegebene Approximation der Lösung von (3.1)-(3.2) mit (3.4)-(3.6) bezeichnet.

Für jedes Tripel $\{\mathbf{u}_h, p_h, S_h\} \in \mathbf{V}_{0h} \times Q_h \times Z_{0h}$ betrachten wir das mit (4.15) definierte Tripel $\{\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{p}_h, \tilde{S}_h\} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times Q \times Z_0$. Wir definieren $\tilde{\omega}_h \in H^1(\Omega)$ mit

$$\tilde{\omega}_h := \tilde{S}_h + \lambda_0,$$

wobei $\lambda_0 \in H^1(\Omega)$ mit $\lambda_0|_{\Gamma_S} = 1$ und $\lambda_0|_{\Gamma_K} = 0$.

Zunächst untersuchen wir die Fehler $\{\mathbf{u}^{k+1} - \tilde{\mathbf{u}}_h^{k+1}, p^{k+1} - \tilde{p}_h^{k+1}\}$ und den Fehler $\omega^{k+1} - \tilde{\omega}_h^{k+1}$.

Zur Abschätzung des Fehlers $\omega^{k+1} - \tilde{\omega}_h^{k+1}$ benötigen wir das stetige Problem:

Finde ein Tripel $\{\mathbf{u}^{k+1}, p^{k+1}, S^{k+1}\} \in \mathbf{V}_0 \times Q \times Z_0$, so daß

$$\frac{1}{Re} A(S^{k+1}, z) + N(\mathbf{u}^k, S^{k+1}, z) = -\frac{1}{Re} A(\lambda_0, z) - N(\mathbf{u}^k, \lambda_0, z) \quad \forall z \in Z_0, \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} a(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}) + n(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p^{k+1}) \\ = \delta((S^{k+1} + \lambda_0)^2, \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0, \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$b(\mathbf{u}^{k+1}, q) = 0 \quad \forall q \in Q, \quad (4.65)$$

wobei $\{\mathbf{u}^k, p^k\}$ eine gegebene Approximation der Lösung von (3.1)-(3.2) mit (3.4)-(3.6) bezeichnet.

Satz 4.5.1 *Seien $\{\mathbf{u}^k, p^k\}$ eine gegebene Approximation der schwachen Lösung des Problems (3.1)-(3.2) mit Randbedingungen (3.4)-(3.6) und $\{\mathbf{u}_h^k, p_h^k\}$ eine gegebene Approximation der Lösung des diskreten Problems (4.7)-(4.8). Darüberhinaus seien S^{k+1} die stetige Lösung von (4.63), S_h^{k+1} die diskrete Lösung von (4.55), $\omega^{k+1} := S^{k+1} + \lambda_0$, $\omega_h^{k+1} := S_h^{k+1} + \lambda_{0h}$, $\tilde{\mathbf{u}}_h^k := \mathbf{u}_h^k \circ G_h^{-1}$, $\tilde{S}_h^{k+1} := S_h^{k+1} \circ G_h^{-1}$ und $\tilde{\omega}_h^{k+1} := \tilde{S}_h^{k+1} + \lambda_0$. Zusätzlich gelten die Regularitätsvoraussetzungen $S^{k+1} \in Z_0 \cap H^3(\Omega)$, $\mathbf{u}^k \in \mathbf{V}_0 \cap \mathbf{H}^3(\Omega)$ und $\lambda_0 \in H^3(\Omega)$.*

Für hinreichend kleine Werte des Parameters Re gilt die Abschätzung

$$\|\omega^{k+1} - \tilde{\omega}_h^{k+1}\|_{1,\Omega} \leq \mathcal{C}_1 h^2 + \mathcal{C}_2 \|\mathbf{u}^k - \tilde{\mathbf{u}}_h^k\|_{1,\Omega} \quad (4.66)$$

mit $\mathcal{C}_1 := \mathcal{C}_1(Re, \|S^{k+1}\|_{3,\Omega}, \|\mathbf{u}^k\|_{3,\Omega}, \|\lambda_0\|_{3,\Omega})$ und $\mathcal{C}_2 := \mathcal{C}_2(Re, \|S^{k+1}\|_{3,\Omega}, \|\lambda_0\|_{3,\Omega})$.

Beweis. Mit der Poincaré-Friedrichsschen Ungleichung und der Definition von $\tilde{\omega}_h$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \|\omega^{k+1} - \tilde{\omega}_h^{k+1}\|_{1,\Omega} &\leq c |\omega^{k+1} - \tilde{\omega}_h^{k+1}|_{1,\Omega} = c |S^{k+1} + \lambda_0 - (\tilde{S}_h^{k+1} + \lambda_0)|_{1,\Omega} \\ &= c |S^{k+1} - \tilde{S}_h^{k+1}|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

Zum Abschätzen von $|S^{k+1} - \tilde{S}_h^{k+1}|_{1,\Omega}$ betrachten wir die Gleichung (4.63). Für alle $z_h \in Z_{0h}$ gilt

$$\frac{1}{Re}A(S^{k+1}, \tilde{z}_h) + N(\mathbf{u}^k, S^{k+1}, \tilde{z}_h) = -\frac{1}{Re}A(\lambda_0, \tilde{z}_h) - N(\mathbf{u}^k, \lambda_0, \tilde{z}_h), \quad (4.67)$$

wobei $\tilde{z}_h := z_h \circ G_h^{-1}$. Mit dem diskreten Problem (4.55) und (4.67) erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re}A(S^{k+1} - \tilde{S}_h^{k+1}, \tilde{z}_h) &= -N(\mathbf{u}^k, S^{k+1}, \tilde{z}_h) - N(\mathbf{u}^k, \lambda_0, \tilde{z}_h) \\ &\quad - \frac{1}{Re}A(\lambda_0, \tilde{z}_h) - \frac{1}{Re}A(\tilde{S}_h^{k+1}, \tilde{z}_h) \\ &\quad + \frac{1}{Re}A_h(S_h^{k+1}, z_h) + \frac{1}{Re}A_h(\lambda_{0h}, z_h) \\ &\quad + N_h(\mathbf{u}_h^k, S_h^{k+1}, z_h) + N_h(\mathbf{u}_h^k, \lambda_{0h}, z_h) \end{aligned}$$

für alle $z_h \in Z_{0h}$. Dann finden wir für den Fehler $S^{k+1} - \tilde{S}_h^{k+1}$

$$\|S^{k+1} - \tilde{S}_h^{k+1}\|_{1,\Omega} \leq C \left(\inf_{z_h \in Z_{0h}} \|S^{k+1} - \tilde{z}_h\|_{1,\Omega} + \sum_{i=1}^4 L_{ih} \right) \quad (4.68)$$

mit

$$\begin{aligned} L_{1h} &:= \sup_{z_h \in Z_{0h} \setminus \{0\}} \frac{|A_h(S_h^{k+1}, z_h) - A(\tilde{S}_h^{k+1}, \tilde{z}_h)|}{\|\tilde{z}_h\|_{1,\Omega}} \\ L_{2h} &:= \sup_{z_h \in Z_{0h} \setminus \{0\}} \frac{|A_h(\lambda_{0h}, z_h) - A(\lambda_0, \tilde{z}_h)|}{\|\tilde{z}_h\|_{1,\Omega}} \\ L_{3h} &:= Re \sup_{z_h \in Z_{0h} \setminus \{0\}} \frac{|N_h(\mathbf{u}_h^k, S_h^{k+1}, z_h) - N(\mathbf{u}^k, S^{k+1}, \tilde{z}_h)|}{\|\tilde{z}_h\|_{1,\Omega}} \\ L_{4h} &:= Re \sup_{z_h \in Z_{0h} \setminus \{0\}} \frac{|N_h(\mathbf{u}_h^k, \lambda_{0h}, z_h) - N(\mathbf{u}^k, \lambda_0, \tilde{z}_h)|}{\|\tilde{z}_h\|_{1,\Omega}}. \end{aligned}$$

Nun werden die Ausdrücke auf der rechten Seite in (4.68) einzeln abgeschätzt.

Wir definieren einen Interpolationsoperator $J_h : H^2(\Omega_h) \rightarrow Z_{0h}$ mit

$$J_h S := (i_h^2(S \circ F_T)) \circ F_T^{-1},$$

wobei i_h^2 den gewöhnlichen Lagrange-Interpolationsoperator auf dem Referenzelement \hat{T} für die Polynome vom Grade zwei bezeichnet. Wir setzen $z_h^{k+1} := J_h(S^{k+1} \circ G_h) \in Z_{0h}$ und $\tilde{z}_h^{k+1} := z_h^{k+1} \circ G_h^{-1} \in Z_0$. Mit der Interpolationsabschätzung

$$|S^{k+1} \circ G_h - z_h^{k+1}|_{1,T} \leq c h^2 |S^{k+1} \circ G_h|_{3,T} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h$$

(siehe [21]) und den Eigenschaften der Abbildung G_h finden wir

$$\begin{aligned} \|S^{k+1} - \tilde{z}_h^{k+1}\|_{1,\Omega} &= \left(\sum_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h} \|S^{k+1} - \tilde{z}_h^{k+1}\|_{1,\tilde{T}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c_1 \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|S^{k+1} \circ G_h - z_h^{k+1}\|_{1,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c_1 c_2 h^2 \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|S^{k+1} \circ G_h\|_{3,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_1 h^2 \|S^{k+1}\|_{3,\Omega} \end{aligned} \quad (4.69)$$

mit positiver Konstante C_1 .

Jetzt schätzen wir den Term L_{1h} ab. Mit Abschätzung (4.30) (siehe Lemma 4.3.4) und der stetigen Einbettung $\mathbf{H}^3(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{H}^1(\Omega)$ finden wir

$$\begin{aligned} L_{1h} &\leq c_1 h^2 \left(\sum_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h^{\delta,K,F}} \|\tilde{S}_h^{k+1}\|_{1,\tilde{T}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c_1 h^2 \|S^{k+1} - \tilde{S}_h^{k+1}\|_{1,\Omega} + c_1 h^2 \left(\sum_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h^{\delta,K,F}} \|S^{k+1}\|_{1,\tilde{T}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c_1 h^2 \|S^{k+1} - \tilde{S}_h^{k+1}\|_{1,\Omega} + c_1 h^2 \|S^{k+1}\|_{1,\Omega} \\ &\leq c_1 h^2 \|S^{k+1} - \tilde{S}_h^{k+1}\|_{1,\Omega} + c_1 c_2 h^2 \|S^{k+1}\|_{3,\Omega}. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Zunächst schätzen wir den Term L_{2h} ab. Wir setzen $\tilde{\lambda}_{0h} := \lambda_{0h} \circ G_h^{-1}$. Nach der Dreieckungleichung gilt

$$|A_h(\lambda_{0h}, z_h) - A(\lambda_0, \tilde{z}_h)| \leq |A_h(\lambda_{0h}, z_h) - A(\tilde{\lambda}_{0h}, \tilde{z}_h)| + |A(\lambda_0 - \tilde{\lambda}_{0h}, \tilde{z}_h)|. \quad (4.71)$$

Die Summanden in (4.71) werden getrennt abgeschätzt.

Mit der Stetigkeit von $A(\cdot, \cdot)$ finden wir

$$|A(\lambda_0 - \tilde{\lambda}_{0h}, \tilde{z}_h)| \leq c_1 \|\lambda_0 - \tilde{\lambda}_{0h}\|_{1,\Omega} \|\tilde{z}_h\|_{1,\Omega}.$$

Zum Abschätzen von $\|\lambda_0 - \tilde{\lambda}_{0h}\|_{1,\Omega}$ betrachten wir die Norm $\|\lambda_0 - \tilde{\lambda}_{0h}\|_{1,\tilde{T}}$. Wir definieren den Interpolationsoperator $I_h : H^2(\Omega) \rightarrow Z_h$ mit $I_h \lambda := (i_h^2((\lambda \circ G_h) \circ F_T)) \circ F_T^{-1}$, wobei i_h^2 den gewöhnlichen Lagrange-Interpolationsoperator auf dem Referenzelement \hat{T} für die Polynome vom Grade zwei bezeichnet. Dann gilt $\lambda_{0h} = I_h \lambda_0$. Wir finden

$$\begin{aligned} \|\lambda_0 - \tilde{\lambda}_{0h}\|_{1,\tilde{T}}^2 &= \|\lambda_0 - (I_h \lambda_0) \circ G_h^{-1}\|_{1,\tilde{T}}^2 \leq c_1 \|\lambda_0 \circ G_h - I_h \lambda_0\|_{1,T}^2 \\ &\leq c_2 h^2 \|(\lambda_0 \circ G_h) \circ F_T - (I_h \lambda_0) \circ F_T\|_{0,2,\hat{T}}^2 \\ &\quad + c_3 \|(\lambda_0 \circ G_h) \circ F_T - (I_h \lambda_0) \circ F_T\|_{1,\hat{T}}^2. \end{aligned}$$

Wir setzen $\widehat{\lambda}_0 := (\lambda_0 \circ G_h) \circ F_T$. Dann gilt $(I_h \lambda_0) \circ F_T = i_h^2 \widehat{\lambda}_0$. Aus der Interpolationsabschätzungen

$$\|\widehat{\lambda}_0 - i_h^2 \widehat{\lambda}_0\|_{0,2,\widehat{T}} \leq c |\widehat{\lambda}_0|_{3,\widehat{T}} \quad \text{und} \quad |\widehat{\lambda}_0 - i_h^2 \widehat{\lambda}_0|_{1,\widehat{T}} \leq c |\widehat{\lambda}_0|_{3,\widehat{T}}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \|\lambda_0 - \widetilde{\lambda}_{0h}\|_{1,\widetilde{T}}^2 &\leq c_4 |\widehat{\lambda}_0|_{3,\widehat{T}}^2 = c_4 |(\lambda_0 \circ G_h) \circ F_T|_{3,\widehat{T}}^2 \leq c_5 h^4 |\lambda_0 \circ G_h|_{3,T}^2 \\ &\leq c_6 h^4 \|\lambda_0\|_{3,\widetilde{T}}^2. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Mit (4.72) finden wir

$$\|\lambda_0 - \widetilde{\lambda}_{0h}\|_{1,\Omega} \leq C h^2 \|\lambda_0\|_{3,\Omega}. \quad (4.73)$$

Dann folgt aus (4.73)

$$|A(\lambda_0 - \widetilde{\lambda}_{0h}, \widetilde{z}_h)| \leq C_2 h^2 \|\lambda_0\|_{3,\Omega} \|\widetilde{z}_h\|_{1,\Omega}. \quad (4.74)$$

Den zweiten Summand in (4.71) schätzen wir mit (4.30) (siehe Lemma 4.3.4) ab. Es folgt

$$\left| A(\widetilde{\lambda}_{0h}, \widetilde{z}_h) - A_h(\lambda_{0h}, z_h) \right| \leq C_3 h^2 \left(\sum_{\widetilde{T} \in \widetilde{\mathcal{T}}_h^{\vartheta,K,F}} \|\widetilde{\lambda}_{0h}\|_{1,\widetilde{T}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\widetilde{T} \in \widetilde{\mathcal{T}}_h^{\vartheta,K,F}} \|\widetilde{z}_h\|_{1,\widetilde{T}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.75)$$

Mit den einzelnen Abschätzungen (4.74) und (4.75), und der stetigen Einbettung $\mathbf{H}^3(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{H}^1(\Omega)$ folgt die Abschätzung des Terms L_{2h}

$$\begin{aligned} L_{2h} &\leq c_1 h^2 \left(\sum_{\widetilde{T} \in \widetilde{\mathcal{T}}_h^{\vartheta,K,F}} \|\widetilde{\lambda}_{0h}\|_{1,\widetilde{T}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + c_2 h^2 \|\lambda_0\|_{3,\Omega} \\ &\leq c_1 h^2 \|\lambda_0 - \widetilde{\lambda}_{0h}\|_{1,\Omega} + c_1 h^2 \left(\sum_{\widetilde{T} \in \widetilde{\mathcal{T}}_h^{\vartheta,K,F}} \|\lambda_0\|_{1,\widetilde{T}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + c_2 h^2 \|\lambda_0\|_{3,\Omega} \\ &\leq c_1 h^2 \|\lambda_0 - \widetilde{\lambda}_{0h}\|_{1,\Omega} + c_1 h^2 \|\lambda_0\|_{1,\Omega} + c_2 h^2 \|\lambda_0\|_{3,\Omega} \\ &\leq c_3 h^4 \|\lambda_0\|_{3,\Omega} + c_4 h^2 \|\lambda_0\|_{3,\Omega}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Die Terme L_{3h} und L_{4h} behandeln wir unter Verwendung der Abschätzung (4.41) (siehe Lemma 4.3.5). Dann gelten

$$\begin{aligned} L_{3h} &\leq Re c_1 \|\mathbf{u}^k - \widetilde{\mathbf{u}}_h^k\|_{1,\Omega} \|S^{k+1}\|_{1,\Omega} + Re c_2 \|S^{k+1} - \widetilde{S}_h^{k+1}\|_{1,\Omega} \|\widetilde{\mathbf{u}}_h^k\|_{1,\Omega} + Re c_3 h^{\frac{5}{2}} \\ &\leq Re c_4 \|\mathbf{u}^k - \widetilde{\mathbf{u}}_h^k\|_{1,\Omega} \|S^{k+1}\|_{3,\Omega} + Re c_2 \|S^{k+1} - \widetilde{S}_h^{k+1}\|_{1,\Omega} \left(\|\mathbf{u}^k - \widetilde{\mathbf{u}}_h^k\|_{1,\Omega} + \|\mathbf{u}^k\|_{1,\Omega} \right) \\ &\quad + Re c_3 h^{\frac{5}{2}} \end{aligned} \quad (4.77)$$

$$\begin{aligned} &\leq Re c_4 \|\mathbf{u}^k - \tilde{\mathbf{u}}_h^k\|_{1,\Omega} \|S^{k+1}\|_{3,\Omega} + Re c_2 \|S^{k+1} - \tilde{S}_h^{k+1}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{u}^k - \tilde{\mathbf{u}}_h^k\|_{1,\Omega} \\ &\quad + Re c_5 \|S^{k+1} - \tilde{S}_h^{k+1}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{u}^k\|_{3,\Omega} + Re c_3 h^{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} L_{4h} &\leq Re c_1 \|\mathbf{u}^k - \tilde{\mathbf{u}}_h^k\|_{1,\Omega} \|\lambda_0\|_{1,\Omega} + Re c_2 \|\lambda_0 - \tilde{\lambda}_{0h}\|_{1,\Omega} \|\tilde{\mathbf{u}}_h^k\|_{1,\Omega} + Re c_3 h^{\frac{5}{2}} \\ &\leq Re c_4 \|\mathbf{u}^k - \tilde{\mathbf{u}}_h^k\|_{1,\Omega} \|\lambda_0\|_{3,\Omega} + Re c_5 h^2 \|\lambda_0\|_{3,\Omega} \left(\|\mathbf{u}^k - \tilde{\mathbf{u}}_h^k\|_{1,\Omega} + \|\mathbf{u}^k\|_{1,\Omega} \right) \\ &\quad + Re c_3 h^{\frac{5}{2}} \tag{4.78} \\ &\leq Re c_6 \|\lambda_0\|_{3,\Omega} \|\mathbf{u}^k - \tilde{\mathbf{u}}_h^k\|_{1,\Omega} + Re c_5 h^2 \|\lambda_0\|_{3,\Omega} \|\mathbf{u}^k\|_{3,\Omega} + Re c_3 h^{\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

Die Zusammenfassung der einzelnen Abschätzungen (4.68), (4.69), (4.70), (4.76), (4.77) und (4.78) liefert

$$\begin{aligned} &(1 - Re c(\|\mathbf{u}^k\|_{3,\Omega})\{\|\mathbf{u}^k - \tilde{\mathbf{u}}_h^k\|_{1,\Omega} + 1\}) \|S^{k+1} - \tilde{S}_h^{k+1}\|_{1,\Omega} \\ &\quad \leq C(Re, \|S^{k+1}\|_{3,\Omega}, \|\mathbf{u}^k\|_{3,\Omega}, \|\lambda_0\|_{3,\Omega}) h^2 \\ &\quad \quad + \tilde{C}(Re, \|S^{k+1}\|_{3,\Omega}, \|\lambda_0\|_{3,\Omega}) \|\mathbf{u}^k - \tilde{\mathbf{u}}_h^k\|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

Für hinreichend kleine Werte des parameters Re ist der Ausdruck

$$1 - Re c(\|\mathbf{u}^k\|_{3,\Omega})\{\|\mathbf{u}^k - \tilde{\mathbf{u}}_h^k\|_{1,\Omega} + 1\}$$

streng positiv und wir erhalten die Abschätzung (4.66). ■

Das folgende Lemma liefert eine a priori-Abschätzung für die Lösung von (4.60), die wir für unsere weitere Beweistechnik benötigen.

Lemma 4.5.1 *Die Lösung $\omega^{k+1} \in H^1(\Omega)$ des Problems (4.60) mit $\omega^{k+1}|_{\Gamma_S} = 1$ und $\omega^{k+1}|_{\Gamma_K} = 0$ genügt der a priori-Abschätzung*

$$\|\omega^{k+1}\|_{0,\infty,\Omega} \leq 1. \tag{4.79}$$

Beweis. Die Beweisführung ist analog zu Lemma 3.2.2 im Kapitel 3. ■

Nach dieser Vorüberlegung können wir die Analyse der Fehler $\mathbf{u}^{k+1} - \tilde{\mathbf{u}}_h^{k+1}$ und $p^{k+1} - \tilde{p}_h^{k+1}$ durchführen.

Satz 4.5.2 *Seien $\{\mathbf{u}^{k+1}, p^{k+1}, \omega^{k+1}\}$ die Lösung des stetigen Problems (4.60)-(4.62) und $\{\mathbf{u}_h^{k+1}, p_h^{k+1}, S_h^{k+1}\}$ die Lösung des diskreten Problems (4.55)-(4.57). Darüberhinaus seien $\omega_h^{k+1} := S_h^{k+1} + \lambda_{0h}$, $\tilde{\mathbf{u}}_h^{k+1} := \mathbf{u}_h^{k+1} \circ G_h^{-1}$, $\tilde{p}_h^{k+1} := p_h^{k+1} \circ G_h^{-1} - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} p_h^{k+1} \circ G_h^{-1} d\tilde{x}$,*

$\tilde{S}_h^{k+1} := S_h^{k+1} \circ G_h^{-1}$ und $\tilde{\omega}_h^{k+1} := \tilde{S}_h^{k+1} + \lambda_0$. Zusätzlich gelten die Regularitätsvoraussetzungen $\mathbf{u}^{k+1} \in \mathbf{V}_0 \cap \mathbf{H}^3(\Omega)$ und $p^{k+1} \in Q \cap H^2(\Omega)$.

Für hinreichend kleine Werte des Parameters Re gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^{k+1} - \tilde{\mathbf{u}}_h^{k+1}\|_{1,\Omega} + \|p^{k+1} - \tilde{p}_h^{k+1}\|_{0,2,\Omega} \\ \leq \mathcal{C}_1 h^{\frac{3}{2}} + \mathcal{C}_2 \|\omega^{k+1} - \tilde{\omega}_h^{k+1}\|_{1,\Omega} + \mathcal{C}_2 \|\omega^{k+1} - \tilde{\omega}_h^{k+1}\|_{1,\Omega}^2 \end{aligned} \quad (4.80)$$

mit $\mathcal{C}_1 := \mathcal{C}_1(\delta Re, \|\mathbf{u}^{k+1}\|_{3,\Omega}, \|p^{k+1}\|_{2,\Omega})$, $\mathcal{C}_2 := \mathcal{C}_2(\delta Re)$.

Beweis. Wir betrachten die Gleichungen

$$\begin{aligned} -\frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}^{k+1} + \mathbf{u}^{k+1} \cdot \nabla \mathbf{u}^{k+1} + \nabla p^{k+1} &= \delta (\omega^{k+1})^2 \tilde{\mathbf{e}}_1 \quad \text{in } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{k+1} &= 0 \quad \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

Mit den Testfunktionen $\tilde{\mathbf{v}}_h \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ und $\tilde{q}_h \in Q$ ($\tilde{\mathbf{v}}_h := \mathbf{v}_h \circ G_h^{-1}$, $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{0h}$; $\tilde{q}_h := q_h \circ G_h^{-1} - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} q_h \circ G_h^{-1} d\tilde{x}$, $q_h \in Q_h$) finden wir die folgende schwache Formulierung

$$\frac{1}{Re} a(\mathbf{u}^{k+1}, \tilde{\mathbf{v}}_h) + n(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{u}^{k+1}, \tilde{\mathbf{v}}_h) + b(\tilde{\mathbf{v}}_h, p^{k+1}) \quad (4.81)$$

$$= \delta \int_{\Omega} (\omega^{k+1})^2 (\tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1) d\tilde{x} + \int_{\Gamma_F} (\mathbf{n} \cdot \sigma(\mathbf{u}^{k+1}, p^{k+1}) \mathbf{n}) (\tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \mathbf{n}) d\tilde{\gamma}$$

$$b(\mathbf{u}^{k+1}, \tilde{q}_h) = 0. \quad (4.82)$$

Es wurde benutzt, daß $\tilde{\mathbf{v}}_h = \mathbf{0}$ auf $\Gamma_S \cup \Gamma_K$ gilt (siehe Lemma 4.3.2). Mit dem diskreten Problem (4.56)-(4.57) und (4.81)-(4.82) erhalten wir für die Fehler $\{\mathbf{u}^{k+1} - \tilde{\mathbf{u}}_h^{k+1}, p^{k+1} - \tilde{p}_h^{k+1}\}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} a(\mathbf{u}^{k+1} - \tilde{\mathbf{u}}_h^{k+1}, \tilde{\mathbf{v}}_h) + b(\tilde{\mathbf{v}}_h, p^{k+1} - \tilde{p}_h^{k+1}) \\ = \frac{1}{Re} a_h(\mathbf{u}_h^{k+1}, \mathbf{v}_h) - \frac{1}{Re} a(\tilde{\mathbf{u}}_h^{k+1}, \tilde{\mathbf{v}}_h) + b_h(\mathbf{v}_h, p_h^{k+1}) - b(\tilde{\mathbf{v}}_h, \tilde{p}_h^{k+1}) \\ + \delta \int_{\Omega} (\omega^{k+1})^2 (\tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1) d\tilde{x} - \delta \int_{\Omega_h} (\omega_h^{k+1})^2 (\mathbf{v}_h \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1) dx \\ + \int_{\Gamma_F} (\mathbf{n} \cdot \sigma(\mathbf{u}^{k+1}, p^{k+1}) \mathbf{n}) (\tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \mathbf{n}) d\tilde{\gamma} \\ - n(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{u}^{k+1}, \tilde{\mathbf{v}}_h) + n_h(\mathbf{u}_h^{k+1}, \mathbf{u}_h^{k+1}, \mathbf{v}_h) \\ b(\mathbf{u}^{k+1} - \tilde{\mathbf{u}}_h^{k+1}, \tilde{q}_h) = b_h(\mathbf{u}_h^{k+1}, q_h) - b(\tilde{\mathbf{u}}_h^{k+1}, \tilde{q}_h) \end{aligned}$$

für alle $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{0h}$, $q_h \in Q_h$. Die Elliptizitätsbedingung (4.50) und die LBB-Stabilitätsbedingung (4.51) (siehe Lemma 4.3.6) ermöglichen die Anwendung der Standardtechnik zur

Fehlerabschätzung bei der Approximation der Sattelpunktprobleme (siehe §II.2 in [18]). Nach der Berücksichtigung der standardmäßigen Fehleranalyse erhalten wir

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}^{k+1} - \tilde{\mathbf{u}}_h^{k+1}\|_{1,\Omega} + \|p^{k+1} - \tilde{p}_h^{k+1}\|_{0,2,\Omega} \\ & \leq C \left(\inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{0h}} \|\mathbf{u}^{k+1} - \tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1,\Omega} + \inf_{q_h \in Q_h} \|p^{k+1} - \tilde{q}_h\|_{0,2,\Omega} + \sum_{i=1}^6 M_{ih} \right) \end{aligned} \quad (4.83)$$

mit

$$\begin{aligned} M_{1h} &:= \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{0h} \setminus \{0\}} \frac{|a_h(\mathbf{u}_h^{k+1}, \mathbf{v}_h) - a(\tilde{\mathbf{u}}_h^{k+1}, \tilde{\mathbf{v}}_h)|}{\|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1,\Omega}}, \\ M_{2h} &:= \operatorname{Re} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{0h} \setminus \{0\}} \frac{|b_h(\mathbf{v}_h, p_h^{k+1}) - b(\tilde{\mathbf{v}}_h, \tilde{p}_h^{k+1})|}{\|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1,\Omega}}, \\ M_{3h} &:= \operatorname{Re} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{0h} \setminus \{0\}} \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1,\Omega}} \left| \delta \int_{\Omega} (\omega^{k+1})^2 (\tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1) d\tilde{x} - \delta \int_{\Omega_h} (\omega_h^{k+1})^2 (\mathbf{v}_h \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1) dx \right|, \\ M_{4h} &:= \operatorname{Re} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{0h} \setminus \{0\}} \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1,\Omega}} \left| \int_{\Gamma_F} (\mathbf{n} \cdot \sigma(\mathbf{u}^{k+1}, p^{k+1}) \mathbf{n})(\tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \mathbf{n}) d\tilde{\gamma} \right|, \\ M_{5h} &:= \operatorname{Re} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{0h} \setminus \{0\}} \frac{|n(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{u}^{k+1}, \tilde{\mathbf{v}}_h) - n_h(\mathbf{u}_h^{k+1}, \mathbf{u}_h^{k+1}, \mathbf{v}_h)|}{\|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1,\Omega}}, \\ M_{6h} &:= \sup_{q_h \in Q_h \setminus \{0\}} \frac{|b_h(\mathbf{u}_h^{k+1}, q_h) - b(\tilde{\mathbf{u}}_h^{k+1}, \tilde{q}_h)|}{\|\tilde{q}_h\|_{0,2,\Omega}}. \end{aligned}$$

Im folgenden werden die Ausdrücke auf der rechten Seite in (4.83) einzeln abgeschätzt. Wir verwenden die in [4] beschriebene Abschätzungstrategie aber im Bezug auf die isoparametrische Diskretisierung. Der zweite wesentliche Unterschied zu der Vorgehensweise in [4] liegt in der Abschätzung des Terms M_{3h} . Wegen der quadratischen Gestalt der rechten Seite des Modellsystems ist eine neue, modifizierte Abschätzung von M_{3h} erforderlich.

Wir definieren den Interpolationsoperator $\mathbf{J}_h : \mathbf{H}^2(\Omega_h) \rightarrow \mathbf{V}_{0h}$ mit

$$\mathbf{J}_h \mathbf{v} := (\mathbf{i}_h^2(\mathbf{v} \circ F_T)) \circ F_T^{-1},$$

wobei \mathbf{i}_h^2 den gewöhnlichen Lagrange-Interpolationsoperator auf dem Referenzelement \hat{T} für die Polynome vom Grade zwei bezeichnet. Wir setzen $\mathbf{w}_h^{k+1} := \mathbf{J}_h(\mathbf{u}^{k+1} \circ G_h)$. Dann gelten $\mathbf{w}_h^{k+1} \in \mathbf{V}_{0h}$ und die Interpolationsabschätzung

$$\|\mathbf{u}^{k+1} \circ G_h - \mathbf{w}_h^{k+1}\|_{1,T} \leq c h^2 |\mathbf{u}^{k+1} \circ G_h|_{3,T} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h. \quad (4.84)$$

Mit der Interpolationsabschätzung (4.84) und den Eigenschaften der Abbildung G_h finden

wir

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^{k+1} - \tilde{\mathbf{w}}_h^{k+1}\|_{1,\Omega} &= \left(\sum_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h} \|\mathbf{u}^{k+1} - \tilde{\mathbf{w}}_h^{k+1}\|_{1,\tilde{T}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c_1 \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{u}^{k+1} \circ G_h - \mathbf{w}_h^{k+1}\|_{1,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c_1 c_2 h^2 \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |\mathbf{u}^{k+1} \circ G_h|_{3,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C h^2 \|\mathbf{u}^{k+1}\|_{3,\Omega}, \end{aligned}$$

wobei $\tilde{\mathbf{w}}_h^{k+1} := \mathbf{w}_h^{k+1} \circ G_h^{-1}$.

Die gleiche Idee übertragen wir auf den Term $\inf_{q_h \in Q_h} \|p^{k+1} - \tilde{q}_h\|_{0,2,\Omega}$. Die Summation der Ergebnisse liefert

$$\inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{0h}} \|\mathbf{u}^{k+1} - \tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1,\Omega} + \inf_{q_h \in Q_h} \|p^{k+1} - \tilde{q}_h\|_{0,2,\Omega} \leq C_1 h^2 \left(\|\mathbf{u}^{k+1}\|_{3,\Omega} + \|p^{k+1}\|_{2,\Omega} \right). \quad (4.85)$$

Jetzt schätzen wir den Term M_{1h} ab. Mit der Abschätzung (4.31) (siehe Lemma 4.3.4) und der stetigen Einbettung $\mathbf{H}^3(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{H}^1(\Omega)$ finden wir

$$\begin{aligned} M_{1h} &\leq c_1 h^2 \left(\sum_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h^{\delta,K,F}} \|\tilde{\mathbf{u}}_h^{k+1}\|_{1,\tilde{T}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c_1 h^2 \|\mathbf{u}^{k+1} - \tilde{\mathbf{u}}_h^{k+1}\|_{1,\Omega} + c_1 h^2 \left(\sum_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h^{\delta,K,F}} \|\mathbf{u}^{k+1}\|_{1,\tilde{T}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.86) \\ &\leq c_1 h^2 \|\mathbf{u}^{k+1} - \tilde{\mathbf{u}}_h^{k+1}\|_{1,\Omega} + c_1 h^2 \|\mathbf{u}^{k+1}\|_{1,\Omega} \\ &\leq c_1 h^2 \|\mathbf{u}^{k+1} - \tilde{\mathbf{u}}_h^{k+1}\|_{1,\Omega} + c_1 c_2 h^2 \|\mathbf{u}^{k+1}\|_{3,\Omega}. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Abschätzung (4.32) (siehe Lemma 4.3.4) und der stetigen Einbettungen $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ erhalten wir die folgende Abschätzung des Terms M_{2h}

$$\begin{aligned} M_{2h} &\leq c_1 Re h^2 \left(\sum_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h^{\delta,K,F}} \|\tilde{p}_h^{k+1}\|_{0,2,\tilde{T}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + c_2 Re h^{\frac{5}{2}} \|\tilde{p}_h^{k+1}\|_{0,2,\Omega} \\ &\leq c_1 Re h^2 \|p^{k+1} - \tilde{p}_h^{k+1}\|_{0,2,\Omega} + c_1 Re h^2 \left(\sum_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h^{\delta,K,F}} \|p^{k+1}\|_{0,2,\tilde{T}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.87) \\ &\quad + c_2 Re h^{\frac{5}{2}} \|p^{k+1} - \tilde{p}_h^{k+1}\|_{0,2,\Omega} + c_2 Re h^{\frac{5}{2}} \|p^{k+1}\|_{0,2,\Omega} \\ &\leq c_3 Re h^2 \left(\|p^{k+1} - \tilde{p}_h^{k+1}\|_{0,2,\Omega} + \|p^{k+1}\|_{0,2,\Omega} \right) \\ &\leq c_3 Re h^2 \left(\|p^{k+1} - \tilde{p}_h^{k+1}\|_{0,2,\Omega} + c_4 \|p^{k+1}\|_{2,\Omega} \right). \end{aligned}$$

Die Abschätzung des Terms M_{3h} startet mit einer Aufspaltung dieses Terms nach der Dreieckungleichung

$$\begin{aligned}
& \left| \delta \int_{\Omega} (\omega^{k+1})^2 (\tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1) d\tilde{x} - \delta \int_{\Omega_h} (\omega_h^{k+1})^2 (\mathbf{v}_h \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1) dx \right| \\
& \leq \delta \left| \int_{\Omega} (\omega^{k+1})^2 (\tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1) d\tilde{x} - \int_{\Omega_h} ((\omega^{k+1})^2 \circ G_h) (\mathbf{v}_h \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1) dx \right| \\
& \quad + \delta \left| \int_{\Omega_h} ((\omega^{k+1})^2 \circ G_h) (\mathbf{v}_h \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1) dx - \int_{\Omega_h} (\omega_h^{k+1})^2 (\mathbf{v}_h \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1) dx \right|.
\end{aligned} \tag{4.88}$$

Nun werden die beiden Summanden getrennt abgeschätzt.

Unter Verwendung der Eigenschaften des Homöomorphismus G_h (siehe Lemma 4.3.1), der a priori-Abschätzung (4.79) und der stetigen Einbettung $\mathbf{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$ schätzen wir den ersten Summand ab

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Omega} (\omega^{k+1})^2 (\tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1) d\tilde{x} - \int_{\Omega_h} ((\omega^{k+1})^2 \circ G_h) (\mathbf{v}_h \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1) dx \right| \\
& = \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\partial, K, F}} \int_T ((\omega^{k+1})^2 \circ G_h) (\mathbf{v}_h \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1) (J(G_h) - 1) dx \right| \\
& \leq c_1 h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^{\partial, K, F}} \|(\omega^{k+1})^2 \circ G_h\|_{0,2,T} \|\mathbf{v}_h\|_{0,2,T} \\
& \leq c_2 h^2 \sum_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h^{\partial, K, F}} \|(\omega^{k+1})^2\|_{0,2,\tilde{T}} \|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{0,2,\tilde{T}} \\
& \leq c_2 h^2 \|(\omega^{k+1})^2\|_{0,2,\Omega} \|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{0,2,\Omega} \\
& \leq c_3 h^2 \|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1,\Omega}.
\end{aligned} \tag{4.89}$$

Es gilt

$$(\omega^{k+1})^2 - (\tilde{\omega}_h^{k+1})^2 = -(\omega^{k+1} - \tilde{\omega}_h^{k+1})^2 + 2\omega^{k+1}(\omega^{k+1} - \tilde{\omega}_h^{k+1}). \tag{4.90}$$

Mit Hilfe der Eigenschaften von G_h , der Darstellung (4.90), der a priori-Abschätzung (4.79) und den stetigen Einbettungen $\mathbf{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$ und $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ wird der zweite

Summand wie folgt behandelt:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Omega_h} ((\omega^{k+1})^2 \circ G_h) (\mathbf{v}_h \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1) dx - \int_{\Omega_h} (\omega_h^{k+1})^2 (\mathbf{v}_h \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1) dx \right| \\
&= \left| \int_{\Omega} ((\omega^{k+1})^2 - (\tilde{\omega}_h^{k+1})^2) (\tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1) J(G_h^{-1}) d\tilde{x} \right| \\
&\leq c_1 \left| \int_{\Omega} ((\omega^{k+1})^2 - (\tilde{\omega}_h^{k+1})^2) (\tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1) d\tilde{x} \right| \\
&= c_1 \left(\left| \int_{\Omega} (\omega^{k+1} - \tilde{\omega}_h^{k+1})^2 (\tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1) d\tilde{x} \right| + 2 \left| \int_{\Omega} \omega^{k+1} (\omega^{k+1} - \tilde{\omega}_h^{k+1}) (\tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1) d\tilde{x} \right| \right) \quad (4.91) \\
&\leq c_1 \left(\|\omega^{k+1} - \tilde{\omega}_h^{k+1}\|_{0,4,\Omega}^2 \|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{0,2,\Omega} + 2 \|\omega^{k+1} - \tilde{\omega}_h^{k+1}\|_{0,2,\Omega} \|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{0,2,\Omega} \right) \\
&\leq c_1 \left(c_2 \|\omega^{k+1} - \tilde{\omega}_h^{k+1}\|_{1,\Omega}^2 \|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1,\Omega} + 2 c_3 \|\omega^{k+1} - \tilde{\omega}_h^{k+1}\|_{1,\Omega} \|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1,\Omega} \right) \\
&\leq c^* \|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1,\Omega} \left(\|\omega^{k+1} - \tilde{\omega}_h^{k+1}\|_{1,\Omega} + \|\omega^{k+1} - \tilde{\omega}_h^{k+1}\|_{1,\Omega}^2 \right)
\end{aligned}$$

mit $c^* := \max\{c_1 c_2, 2 c_1 c_3\}$.

Die eben gewonnenen Abschätzungen (4.89) und (4.91) setzen wir in (4.88) ein. Es folgt die Abschätzung des Terms M_{3h}

$$M_{3h} \leq C_2 Re \delta h^2 + C_3 Re \delta \|\omega^{k+1} - \tilde{\omega}_h^{k+1}\|_{1,\Omega} + C_3 Re \delta \|\omega^{k+1} - \tilde{\omega}_h^{k+1}\|_{1,\Omega}^2. \quad (4.92)$$

Zunächst schätzen wir den Term M_{4h} ab. Mit der Abschätzung (4.19) (siehe Lemma 4.3.3) und den stetigen Einbettungen $\mathbf{H}^3(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{C}^1(\bar{\Omega})$ und $H^2(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Gamma_F} (\mathbf{n} \cdot \sigma(\mathbf{u}^{k+1}, p^{k+1}) \mathbf{n}) (\tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \mathbf{n}) d\tilde{\gamma} \right| &\leq c_1 \left(\|\mathbf{u}^{k+1}\|_{\mathbf{C}^1(\bar{\Omega})} + \|p^{k+1}\|_{C^0(\bar{\Omega})} \right) \|\tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \mathbf{n}\|_{0,2,\Gamma_F} \\
&\leq c_1 c_2 h^{\frac{3}{2}} \left(\|\mathbf{u}^{k+1}\|_{3,\Omega} + \|p^{k+1}\|_{2,\Omega} \right) \|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{1,\Omega}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Abschätzung des Terms M_{4h}

$$M_{4h} \leq C_4 Re h^{\frac{3}{2}} \left(\|\mathbf{u}^{k+1}\|_{3,\Omega} + \|p^{k+1}\|_{2,\Omega} \right). \quad (4.93)$$

Zum Abschätzen des Terms M_{5h} verwenden wir die Abschätzung (4.40) (siehe Lemma 4.3.5). Mit (4.40) und der stetigen Einbettung $\mathbf{H}^3(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{H}^1(\Omega)$ finden wir

$$\begin{aligned}
M_{5h} &\leq c_1 Re \|\mathbf{u}^{k+1} - \tilde{\mathbf{u}}_h^{k+1}\|_{1,\Omega} \left(\|\mathbf{u}^{k+1}\|_{1,\Omega} + \|\tilde{\mathbf{u}}_h^{k+1}\|_{1,\Omega}^{k+1} \right) + c_2 Re h^{\frac{5}{2}} \\
&\leq c_3 Re \|\mathbf{u}^{k+1} - \tilde{\mathbf{u}}_h^{k+1}\|_{1,\Omega} \left(\|\mathbf{u}^{k+1}\|_{1,\Omega} + \|\mathbf{u}^{k+1} - \tilde{\mathbf{u}}_h^{k+1}\|_{1,\Omega} \right) + c_2 Re h^{\frac{5}{2}} \quad (4.94) \\
&\leq c_4 Re \|\mathbf{u}^{k+1} - \tilde{\mathbf{u}}_h^{k+1}\|_{1,\Omega} \left(\|\mathbf{u}^{k+1}\|_{3,\Omega} + \|\mathbf{u}^{k+1} - \tilde{\mathbf{u}}_h^{k+1}\|_{1,\Omega} \right) + c_2 Re h^{\frac{5}{2}}.
\end{aligned}$$

Es bleibt der letzte Term M_{6h} . Mit der Abschätzung (4.32) (siehe Lemma 4.3.4) und der stetigen Einbettung $\mathbf{H}^3(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{H}^1(\Omega)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
M_{6h} &\leq c_1 h^2 \left(\sum_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h^{\partial, K, F}} \|\tilde{\mathbf{u}}_h^{k+1}\|_{1, \tilde{T}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + c_2 h^{\frac{5}{2}} \|\tilde{\mathbf{u}}_h^{k+1}\|_{1, \Omega} \\
&\leq c_1 h^2 \|\mathbf{u}^{k+1} - \tilde{\mathbf{u}}_h^{k+1}\|_{1, \Omega} + c_1 h^2 \left(\sum_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}_h^{\partial, K, F}} \|\mathbf{u}^{k+1}\|_{1, \tilde{T}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + c_2 h^{\frac{5}{2}} \|\mathbf{u}^{k+1} - \tilde{\mathbf{u}}_h^{k+1}\|_{1, \Omega} + c_2 h^{\frac{5}{2}} \|\mathbf{u}^{k+1}\|_{1, \Omega} \\
&\leq c_3 h^2 \left(\|\mathbf{u}^{k+1} - \tilde{\mathbf{u}}_h^{k+1}\|_{1, \Omega} + \|\mathbf{u}^{k+1}\|_{1, \Omega} \right) \\
&\leq c_3 h^2 \left(\|\mathbf{u}^{k+1} - \tilde{\mathbf{u}}_h^{k+1}\|_{1, \Omega} + c_4 \|\mathbf{u}^{k+1}\|_{3, \Omega} \right).
\end{aligned} \tag{4.95}$$

Die Zusammenfassung der einzelnen Abschätzungen (4.85), (4.86), (4.87), (4.92), (4.93), (4.94) und (4.95) liefert

$$\begin{aligned}
&(1 - Re c(\|\mathbf{u}^k\|_{3, \Omega})\{\|\mathbf{u}^k - \tilde{\mathbf{u}}_h^k\|_{1, \Omega} + 1\})\|\mathbf{u}^k - \tilde{\mathbf{u}}_h^k\|_{1, \Omega} + \|p^{k+1} - \tilde{p}_h^{k+1}\|_{1, \Omega} \\
&\leq C(\delta Re, \|\mathbf{u}^{k+1}\|_{3, \Omega}, \|p^{k+1}\|_{2, \Omega}) h^{\frac{3}{2}} \\
&\quad + \tilde{C}(\delta Re)\|\omega^{k+1} - \tilde{\omega}_h^{k+1}\|_{1, \Omega}^2 + \tilde{C}(\delta Re)\|\omega^{k+1} - \tilde{\omega}_h^{k+1}\|_{1, \Omega}.
\end{aligned}$$

Für hinreichend kleine Werte des parameters Re ist der Ausdruck

$$1 - Re c(\|\mathbf{u}^k\|_{3, \Omega})\{\|\mathbf{u}^k - \tilde{\mathbf{u}}_h^k\|_{1, \Omega} + 1\}$$

streng positiv und wir erhalten die Abschätzung (4.80). ■

Die Fehlerabschätzungen (4.66) und (4.80) haben wir im Bezug auf die Iteration der iterativen teilproblem-orientierten Entkopplungsstrategie hergeleitet. Nun leiten wir die Gesamtfehlerabschätzung her.

Satz 4.5.3 *Seien die Werte des Parameters δRe^2 hinreichend klein, so daß das stetige Problem (3.11) eine eindeutige Lösung $\{\mathbf{u}, p, \omega\}$ hat. Darüberhinaus seien $\{\mathbf{u}_h^k, p_h^k, S_h^k\}$ eine gegebene Approximation der Lösung des diskreten Problems (4.7)-(4.9) und $\{\mathbf{u}^k, p^k, S^k\}$ eine gegebene Approximation der Lösung des stetigen Problems (3.12). Zusätzlich genüge die Lösung $\{\mathbf{u}^k, p^k, S^k\}$ der Regularitätsvoraussetzung: $\{\mathbf{u}^k, p^k, S^k\} \in \mathbf{H}^3(\Omega) \times H^2(\Omega) \times H^3(\Omega)$. Außerdem seien $\lambda_0 \in H^3(\Omega)$ und die Werte des Parameters Re hinreichend klein, so daß die Abschätzungen (4.66) und (4.80) gelten. Dann gilt die Gesamtfehlerabschätzung*

$$\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h^k\|_{1, \Omega} + \|p - \tilde{p}_h^k\|_{0, 2, \Omega} + \|\omega - \tilde{\omega}_h^k\|_{1, \Omega} \leq \mathcal{C}_1 q^k + \mathcal{C}_2(k)(k+1)h^{\frac{3}{2}} \tag{4.96}$$

mit $\tilde{\mathbf{u}}_h^k := \mathbf{u}_h^k \circ G_h^{-1}$, $\tilde{p}_h^k := p_h^k \circ G_h^{-1} - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} p_h^k \circ G_h^{-1} d\tilde{x}$, $\tilde{S}_h^k := S_h^k \circ G_h^{-1}$, $\tilde{\omega}_h^k := \tilde{S}_h^k + \lambda_0$,
 $q := \frac{c_1 \delta Re^2}{C_a - c_2 \delta Re^2}$ und positiven Konstanten $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_1(Re)$ und $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_2(k)$.

Beweis. Zuerst betrachten wir den Fehler $\omega - \tilde{\omega}_h^k$. Nach der Dreiecksungleichung gilt

$$\|\omega - \tilde{\omega}_h^k\|_{1,\Omega} \leq \|\omega - \omega^k\|_{1,\Omega} + \|\omega^k - \tilde{\omega}_h^k\|_{1,\Omega}. \quad (4.97)$$

Aus der Konvergenz der Entkopplung des stetigen Problems (siehe Satz 3.5.2 im Abschnitt 3.5, Kapitel 3) erhalten wir

$$\|\omega - \omega^k\|_{1,\Omega} \leq \mathcal{C}_1^* q^k \quad \text{mit} \quad q := \frac{c_1 \delta Re^2}{C_a - c_2 \delta Re^2} < 1 \quad \text{und} \quad \mathcal{C}_1^* = \mathcal{C}_1^*(Re). \quad (4.98)$$

Mit den Fehlerabschätzungen (4.66) und (4.80) finden wir

$$\begin{aligned} \|\omega^k - \tilde{\omega}_h^k\|_{1,\Omega} &\leq C_1(k) h^2 + C_2(k) \|\mathbf{u}^{k-1} - \tilde{\mathbf{u}}_h^{k-1}\|_{1,\Omega} \\ &\leq C_1(k) h^2 + C_3(k) h^{\frac{3}{2}} + C_4(k) \|\omega^{k-1} - \tilde{\omega}_h^{k-1}\|_{1,\Omega} + C_4(k) \|\omega^{k-1} - \tilde{\omega}_h^{k-1}\|_{1,\Omega}^2. \end{aligned}$$

Für hinreichend kleine Werte des Modellparameters δRe^2 gilt $C_4(k) < 1$. Zunächst zeigen wir mit der Hilfe der vollständigen Induktion, daß

$$\|\omega^k - \tilde{\omega}_h^k\|_{1,\Omega} < 1 \quad (4.99)$$

für $k = 1, 2, \dots$ und hinreichend kleine Werte des Modellparameters δRe^2 gilt. Für $k = 1$ und hinreichend kleine Werte des Modellparameters δRe^2 gilt

$$\|\omega^1 - \tilde{\omega}_h^1\|_{1,\Omega} \leq c_1 h^2 + c_2 h^{\frac{3}{2}} \leq c^* h^{\frac{3}{2}} < 1,$$

mit $c^* < 1$. Für $k = 2$ erhalten wir

$$\|\omega^2 - \tilde{\omega}_h^2\|_{1,\Omega} \leq c^* h^{\frac{3}{2}} + c_3 \|\omega^1 - \tilde{\omega}_h^1\|_{1,\Omega} + c_3 \|\omega^1 - \tilde{\omega}_h^1\|_{1,\Omega}^2 \leq c^* (1 + c_3) h^{\frac{3}{2}},$$

mit $c_3 < 1$. Wir nehmen an, daß für $k = l$

$$\|\omega^l - \tilde{\omega}_h^l\|_{1,\Omega} < 1$$

gelte. Dann finden wir für $k = l + 1$ und hinreichend kleine Werte des Modellparameters δRe^2

$$\begin{aligned} \|\omega^{l+1} - \tilde{\omega}_h^{l+1}\|_{1,\Omega} &\leq c^* h^{\frac{3}{2}} + c_3 \|\omega^l - \tilde{\omega}_h^l\|_{1,\Omega} + c_3 \|\omega^l - \tilde{\omega}_h^l\|_{1,\Omega}^2 \\ &\leq c^* h^{\frac{3}{2}} + c^* h^{\frac{3}{2}} (c_3 + c_3^2 + \dots + c_3^l) \leq c^* h^{\frac{3}{2}} \frac{1}{1 - c_3} < 1. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von (4.99) und für hinreichend kleine Werte des Modellparameters δRe^2 ergibt sich

$$\begin{aligned}
\|\omega^k - \tilde{\omega}_h^k\|_{1,\Omega} &\leq C_1(k) h^2 + C_3(k) h^{\frac{3}{2}} + C_4(k) \|\omega^{k-1} - \tilde{\omega}_h^{k-1}\|_{1,\Omega} \\
&\leq C_1(k) h^2 + C_3(k) h^{\frac{3}{2}} + C_5(k) h^2 + C_6(k) \|\mathbf{u}^{k-2} - \tilde{\mathbf{u}}_h^{k-2}\|_{1,\Omega} \\
&\leq \dots \\
&\leq C_1^*(k) (k+1) h^2 + C_2^*(k) k h^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned} \tag{4.100}$$

Die Abschätzungen (4.98) und (4.100) setzen wir in (4.97) ein. Es gilt

$$\|\omega - \tilde{\omega}_h^k\|_{1,\Omega} \leq C_1^* q^k + C_2^*(k) k h^{\frac{3}{2}}. \tag{4.101}$$

Als nächstes betrachten wir den Fehler $\{\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h^k, p - \tilde{p}_h^k\}$. Die Fehlerabschätzung leiten wir analog zu der eben hergeleiteten Abschätzung von $\|\omega - \tilde{\omega}_h^k\|_{1,\Omega}$ her. Für hinreichend kleine Werte des Modellparameters δRe^2 gilt

$$\|\mathbf{u}^k - \tilde{\mathbf{u}}_h^k\|_{1,\Omega} < 1, \quad k = 1, 2, \dots$$

Dann finden wir mit (4.66) und (4.80)

$$\|\mathbf{u}^k - \tilde{\mathbf{u}}_h^k\|_{1,\Omega} + \|p^k - \tilde{p}_h^k\|_{0,2,\Omega} \leq C_4^*(k) (k+1) h^{\frac{3}{2}}.$$

Mit der eben gewonnenen Abschätzung und

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^k\|_{1,\Omega} + \|p - p^k\|_{0,2,\Omega} \leq C_3^* q^k$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h^k\|_{1,\Omega} + \|p - \tilde{p}_h^k\|_{0,2,\Omega} &\leq \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^k\|_{1,\Omega} + \|p - p^k\|_{0,2,\Omega} \\
&\quad + \|\mathbf{u}^k - \tilde{\mathbf{u}}_h^k\|_{1,\Omega} + \|p^k - \tilde{p}_h^k\|_{0,2,\Omega} \\
&\leq C_3^* q^k + C_4^*(k) (k+1) h^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned} \tag{4.102}$$

Mit (4.101) und (4.102) folgt

$$\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h^k\|_{1,\Omega} + \|p - \tilde{p}_h^k\|_{0,2,\Omega} + \|\omega - \tilde{\omega}_h^k\|_{1,\Omega} \leq C_1 q^k + C_2(k) (k+1) h^{\frac{3}{2}}.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. ■

Bemerkung 4.5.1 Sei k hinreichend groß und fest, so daß $C_1 q^k < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann gilt

$$C_2(k) (k+1) h^{\frac{3}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

für $h \leq h_0(k)$. Mit der Gesamtfehlerabschätzung (4.96) ergibt sich

$$\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h^k\|_{1,\Omega} + \|p - \tilde{p}_h^k\|_{0,2,\Omega} + \|\omega - \tilde{\omega}_h^k\|_{1,\Omega} < \varepsilon$$

für hinreichend großes und festes k , und $h \leq h_0(k)$.

Kapitel 5

Die Lösung des algebraischen Gleichungssystems

Die numerische Simulation erfordert in der Regel feine Zerlegungen \mathcal{T}_h des Gebietes Ω . Das führt auf das mathematische Problem große im allgemeinen nichtlineare Gleichungssysteme behandeln zu müssen. Lösungsverfahren, die auf einer feiner Zerlegung die Inverse der Steifigkeitsmatrix (z.B. des linearisierten Problems) verlangen, sind viel zu teuer bezüglich des Speicherplatzbedarfs und der CPU-Zeit auf dem Rechner und deshalb nicht attraktiv. Einfache iterative Verfahren (z.B. Jacobi oder Gauß-Seidel) konvergieren in den ersten Schritten schnell, später jedoch sehr langsam. Für dieses Konvergenzverhalten sind allein die langwelligen Fehleranteile verantwortlich. Die kurzwelligen Fehleranteile werden schnell geglättet. Diese Beobachtung motivierte zur Konstruktion von Mehrgitterverfahren (siehe [31]). Die Idee besteht darin, die langwelligen Fehleranteile auf groben Gitter zu behandeln und die kurzwelligen Fehleranteile auf feinen Gittern schnell zu glätten. Die Effizienz des Mehrgitterverfahrens für lineare, positiv definite und symmetrische Probleme (z.B. die Poisson-Gleichung [31]) bzw. die Stokes-Gleichungen (siehe [71]) ist durch theoretische Untersuchungen belegt. Mehrgitterverfahren werden genauso erfolgreich bei der numerischen Lösung nichtlinearer Differentialgleichungen eingesetzt (siehe [16], [31] oder [61]). Grundsätzlich unterscheidet man drei verschiedene Vorgehensweisen:

- Beim nichtlinearen Mehrgitterverfahren wendet man das Mehrgitterverfahren direkt auf die gegebenen nichtlinearen Gleichungen an.
- Beim Mehrgitter-Newton-Verfahren löst man die linearisierten Gleichungen mit dem Mehrgitterverfahren.
- Als äußere nichtlineare Iteration verwendet man die Fixpunktiteration und löst jedes lineare Teilproblem mit dem Mehrgitterverfahren.

In der Literatur (siehe [16] oder [31]) wird keine der drei Vorgehensweisen als besonders vorteilhaft herausgestellt.

Im Rahmen der Entkopplung des Modellsystems lösen wir die Navier-Stokes-Gleichungen und die Konvektions-Diffusions-Gleichung sukzessiv. Das nichtlineare Gleichungssystem, das den Navier-Stokes-Gleichungen entspricht, lösen wir unter Verwendung der Fixpunktiteration als Linearisierungsmethode. Das Mehrgitterverfahren verwenden wir zur Lösung der linearen Teilprobleme innerhalb der äußeren nichtlinearen Iteration. Diese Vorgehensweise wird am häufigsten verwendet, weil die Konstruktion geeigneter Glättungsverfahren beim nichtlinearen Mehrgitterverfahren zu wesentlichen Schwierigkeiten führen.

Die Konstruktion von Mehrgitterverfahren verlangt ein passendes Datenkonzept zur Konstruktion von Zerlegungen des Gebietes Ω . Das Konzept muß es erlauben, die notwendigen Informationen zur Konstruktion eines Gitters effektiv zu verwalten und schnell Beziehungen zwischen verschiedenen Gittern herzustellen. Zur Realisierung sehr feiner Zerlegungen ist es außerdem notwendig, die Anzahl der ständig benötigten Informationen im Speicher gering zu halten. Bei der Konstruktion unserer Gitter verwenden wir den Gittergenerator **OMEGA** vom Programmsystem **MoonMD** (**M**athematics and **o**bject-**o**riented **N**umerics in **M**ag**D**ebug) (siehe [9]). Im Fall eines komplizierten Gebietes generieren wir die benötigten Gitter mit Hilfe des Programmsystems **MATLAB** (Partial Differential Equations (PDE) Toolbox) (siehe [46]) und bauen diese im Programmsystem **MoonMD** ein.

5.1 Das Zerlegungskonzept

Für unser Mehrgitterverfahren verwenden wir blockstrukturierte Gitter. Die Gittergenerierung setzt auf der vorgegebenen Makrostruktur des Gebietes auf. Nach einer shape-regulären Zerlegung des Gebietes in sogenannte Makroelemente (siehe Abb. 5.1) bezeichnen wir als größtes Gitter die Zerlegung, die einfach durch das Hineinlegen der rechten oder linken Diagonale in das jeweilige Makroelement erzeugt wird.

Blockstrukturierte Gitter stellen einen Kompromiß zwischen zwei Dingen dar. Auf der einen Seite bieten sie noch eine relativ hohe Flexibilität, um komplexe Geometrien zu erfassen. Auf der anderen Seite hat man lokal auf den Makroelement ein sehr regelmäßiges Gitter, das sich hinsichtlich der Datenstruktur einfach verwalten läßt und die Möglichkeit für eine Vektorisierung bietet.

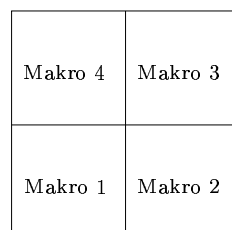


Abbildung 5.1: Makrostruktur auf dem Gebiet Ω (Einheitsquadrat)

Im Mehrgitterkontext verwenden wir für ein konkretes Gitter den Begriff Stufe (Level). Das größte Gitter entspricht dann der Stufe 1. Durch uniforme Verfeinerung (einen

sukzessiven Halbierungsprozeß) können unabhängig auf jedem Makroelement alle feineren Gitter konstruiert werden. Die Makroelemente werden in Zellen zerlegt, in die dann die Diagonalen zur Erzeugung der Dreieckelemente gelegt werden. Die Abbildung 5.2 zeigt die Zerlegung des Einheitsquadrates auf dem größten Gitter (Stufe 1) und nach dem ersten Halbierungsschritt (Stufe 2). Im Fall eines krummlinigen Gebietsrandes wird der Verfeinerungsprozeß so modifiziert, daß für Elemente, die an einem krummlinigen Randteil liegen, die entsprechenden Ecken der Sohnelemente jeweils auf den Rand des Gebietes verschoben werden (siehe Abb. 5.3 und Abb. 5.4).



Abbildung 5.2: Konstruktion feinerer Gitterlevel bei polygonal berandetem Gebiet



Abbildung 5.3: Konstruktion feinerer Gitterlevel bei krummlinigen Randteilen (Gittergenerator **OMEGA** vom Programmsystem **MoonNMD**)

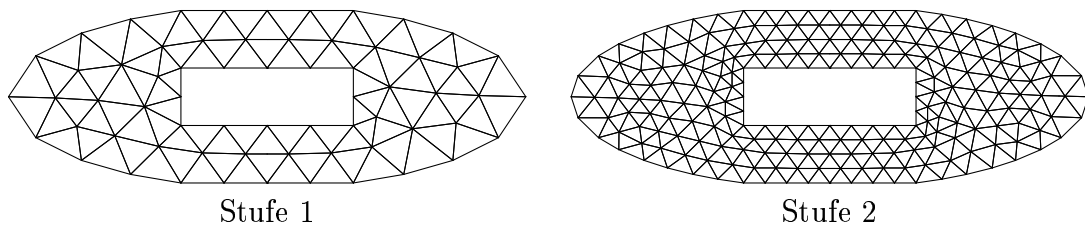


Abbildung 5.4: Konstruktion feinerer Gitterlevel bei krummlinigen Randteilen (Gittergenerator vom Programmsystem **MATLAB** - Partial Differential Equations (PDE) Toolbox)

5.2 Der Aufbau des Gleichungssystems

Nach einer Zerlegung des Gebietes in Dreiecke, werden für die unbekannt Funktionen \mathbf{u} , p und ω in jedem Dreieck ein bestimmter Ansatz gewählt (siehe Abschnitt 4.2, Kapitel 4). Diese Diskretisierung führt auf ein schwach besetztes nichtlineares Gleichungssystem. Zunächst stellen wir die Basisdarstellung der diskreten Funktionen \mathbf{u}_h , p_h , ω_h und das entsprechende algebraische Gleichungssystem vor.

5.2.1 Die Basisdarstellung

Im folgenden bezeichnen wir mit $\mathbf{u}_1 \in \mathbb{R}^{N_u}$, $\mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^{N_u}$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{N_p}$ und $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^{N_u}$ jeweils den Vektor der Knotenwerte zur Lösung $(\mathbf{u}_h = (u_{1h}, u_{2h}), p_h, \omega_h)$ des diskreten Problems (4.6), d.h. es gelte

$$u_{1h} = \sum_{j=1}^{N_u} \mathbf{u}_{1j} \varphi_j, \quad u_{2h} = \sum_{j=1}^{N_u} \mathbf{u}_{2j} \varphi_j, \quad \omega_h = \sum_{j=1}^{N_u} \boldsymbol{\omega}_j \varphi_j, \quad p_h = \sum_{j=1}^{N_p} \mathbf{p}_j \psi_j, \quad (5.1)$$

wobei $\left\{ \begin{pmatrix} \varphi_j \\ 0 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_j \end{pmatrix} \right\}_{j=1}^{N_u}$ die Basis von \mathbf{V}_h , $\{\varphi_j\}_{j=1}^{N_u}$ die Basis von Z_h und $\{\psi_j\}_{j=1}^{N_p}$ die Basis von Q_h bezeichnen. Für die beiden Komponenten $(u_{1h}$ und $u_{2h})$ von \mathbf{u}_h und ω_h verwenden wir quadratische Ansätze, und für p_h einen linearen Ansatz.

Das diskrete Problem ist äquivalent zu einem nichtlinearen Gleichungssystem für die Koeffizienten \mathbf{u}_{1j} , \mathbf{u}_{2j} , \mathbf{p}_j und $\boldsymbol{\omega}_j$. Entsprechend der Knotennummerierung und der Anzahl der Elemente werden die Koeffizienten in den Vektoren $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, \mathbf{p} und $\boldsymbol{\omega}$ zusammengefaßt. Die Verwendung der Knotendarstellung (5.1) für die Geschwindigkeit, die Umfangsgeschwindigkeit und den Druck führt auf ein nichtlineares algebraisches Gleichungssystem der Struktur

$$\tilde{\mathbf{L}}(\mathbf{y})\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{F}} \quad (5.2)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{L}}(\mathbf{y}) := \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}(\mathbf{u}) & \tilde{A}_{12} & \tilde{B}_1 & \mathbf{0} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22}(\mathbf{u}) & \tilde{B}_2 & \mathbf{0} \\ \tilde{B}_1^T & \tilde{B}_2^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{A}_{11}(\mathbf{u}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} := \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{F}} := \begin{pmatrix} \delta \boldsymbol{\omega}^2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Dabei hat die Matrix

$$\tilde{B} := \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{pmatrix}$$

die Komponenten $\tilde{B}_{ij} = b_h(\psi_j, \varphi_i)$. Zu einem gegebenen Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{N_u}$ sind die Einträge der Matrix

$$\tilde{A}(\mathbf{v}) := \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}(\mathbf{v}) & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22}(\mathbf{v}) \end{pmatrix}$$

definiert durch

$$\left(\tilde{A}(\mathbf{v})\right)_{ij} = \frac{1}{Re} a_h(\varphi_j, \varphi_i) + n_h(\mathbf{v}_h, \varphi_j, \varphi_i),$$

wobei \mathbf{v}_h die zu \mathbf{v} gehörende Finite-Elemente-Funktion $\mathbf{v}_h = \sum_j \mathbf{v}_j \varphi_j$ bezeichnet. Für die praktische Berechnung der Einträge der Matrizen $\tilde{A}(\mathbf{v})$ und \tilde{B} verwenden wir die Referenztransformation $F_T : \hat{T} \rightarrow T$ (siehe Abschnitt 4.2, Kapitel 4). Somit berechnen wir die notwendigen Integrale auf das Referenzelement \hat{T} .

Die Gesamtmatrix $\tilde{\mathbf{L}}(\mathbf{y})$ und der Gesamtvektor $\tilde{\mathbf{F}}$ wurden unter der Annahme aufgebaut, daß die Randbedingungen noch unberücksichtigt bleiben. Erst die korrekte und vollständige Berücksichtigung der problemgerechten Randbedingungen macht das Gleichungssystem eindeutig lösbar.

5.2.2 Die Berücksichtigung der Randbedingungen

Nach dem Aufbau des algebraischen Gleichungssystems besteht unser nächstes Ziel darin, die entsprechenden Randbedingungen für die Sekundärgeschwindigkeit \mathbf{u} und die Umfangsgeschwindigkeit ω und zwar

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_K \cup \Gamma_S, \quad (5.3)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_F, \quad (5.4)$$

$$\omega = 1 \quad \text{auf } \Gamma_S, \quad (5.5)$$

$$\omega = 0 \quad \text{auf } \Gamma_K \quad (5.6)$$

zu berücksichtigen. Die anderen zwei Randbedingungen

$$\mathbf{n} \cdot \sigma(\mathbf{u}, p) \boldsymbol{\tau} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_F, \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_F \quad (5.8)$$

sind wegen der Variationsformulierung des Problems (siehe (3.11) im Abschnitt 3.1, Kapitel 3) im schwachen Sinn erfüllt.

Die klassischen Dirichlet-Randbedingungen (5.3), (5.5) und (5.6) werden standardmäßig auf dem Block

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}(\mathbf{u}) & \tilde{B} \\ \tilde{B}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

(entspricht der Bedingung (5.3)) und auf dem Block $\tilde{A}_{11}(\mathbf{u})$ (entspricht den Bedingungen (5.5) und (5.6)) der Matrix $\tilde{\mathbf{L}}(\mathbf{y})$ und der rechten Seite $\tilde{\mathbf{F}}$ in (5.2) implementiert (siehe [2] oder [65]). Die Schwierigkeiten bei der numerischen Behandlung der Randbedingungen (5.3)-(5.6) bestehen vor allem in der Berücksichtigung der Randbedingung (5.4) für die Sekundärgeschwindigkeit \mathbf{u} auf dem freien Rand Γ_F . Im Vergleich zu den Dirichlet-Randbedingungen (5.3), (5.5) und (5.6) findet man in der Literatur nur wenig über die

Implementation der Gleitrandbedingung (5.4). Zunächst diskutieren wir kurz über verschiedene mögliche Implementationen der Gleitrandbedingung (5.4) und konzentrieren uns auf die gewählte Strategie zur numerischen Berücksichtigung.

Im Hinblick auf eine effiziente Umsetzung in Programmsysteme haben wir bei der Variationsformulierung des Problems (siehe Abschnitt 3.1, Kapitel 3) die Gleitrandbedingung (5.4) in starker Form im Ansatzraum berücksichtigt. Zur Implementation der in starker Form berücksichtigten Gleitrandbedingung kann man grundsätzlich zwei verschiedene Vorgehensweisen unterscheiden:

- Implementation durch Projektionsmethode (siehe [4] und [5]).
- Implementation durch direkten Einbau der Gleitrandbedingung in das System (5.2).

In programmtechnischer Hinsicht ist der direkte Einbau der Gleitrandbedingung in (5.2) leichter realisierbar als die in [4] und [5] betrachtete zusätzliche Projektionsmethode. Aus diesem Grund wählen wir das zweite Vorgehen.

Das gewählte Implementationsvorgehen erfordert eine diskrete Form der Bedingung (5.4) in allen Randknoten auf dem freien Rand. Wir berücksichtigen die diskrete Gleitrandbedingung

$$\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} = 0$$

in Randknoten, die nur auf dem freien Rand Γ_F liegen. Wie vorher angenommen, erfordern wir in den Knoten auf $\Gamma_F \cap \Gamma_K$ und $\Gamma_F \cap \Gamma_S$ die Dirichlet-Randbedingung (5.3). Die Anzahl aller Knoten zur Bestimmung der diskreten Funktion \mathbf{u}_h bezeichnen wir mit N_u und betrachten den i -ten Knoten, der nur auf dem freien Rand Γ_F liegt. Dann lautet die diskrete Gleitrandbedingung im i -ten Knoten

$$\mathbf{u}_{1i} \cdot n_{1i} + \mathbf{u}_{2i} \cdot n_{2i} = 0, \quad (5.10)$$

wobei \mathbf{u}_{1i} bzw. \mathbf{u}_{2i} die i -te Komponente von \mathbf{u}_1 bzw. \mathbf{u}_2 ist. Hier bezeichnet $\mathbf{n}_i = (n_{1i}, n_{2i})$ den äußeren stetigen Normaleneinheitsvektor im i -ten Knoten.

Um die diskrete Randbedingung (5.10) zu implementieren, modifizieren wir den Block (5.9). Die Bedingung (5.10) bauen wir in (5.9) als eine lineare Kombination der entsprechenden Zeilen ein. Die i -te bzw. die $i + N_u$ -te Zeile des Blocks entspricht der Komponente \mathbf{u}_{1i} bzw. \mathbf{u}_{2i} . Die i -te Zeile wird mit $-n_{2i}$ multipliziert und dann zu der mit n_{1i} multiplizierten $i + N_u$ -ten Zeile addiert. Das Ergebnis wird als eine neue i -te Zeile gespeichert. Die $i + N_u$ -te Zeile in (5.9), d.h. die i -te Zeile der Matrizen \tilde{A}_{21} , $\tilde{A}_{22}(\mathbf{u})$ und \tilde{B}_2 , wird auf Null gesetzt und als i -tes Diagonalelement von \tilde{A}_{21} bzw. $\tilde{A}_{22}(\mathbf{u})$ wird n_{1i} bzw. n_{2i} gespeichert. Nach dieser Umformung realisiert die $i + N_u$ -te Zeile im Block (5.9) die diskrete Gleitrandbedingung (5.10). Die entsprechenden Teile der rechten Seite $\tilde{\mathbf{F}}$ werden analog umgeformt. Mit (5.11) und (5.12) zeigen wir schematisch die Umformung des Blocks (5.9) und der

rechten Seite $\tilde{\mathbf{F}}$.

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \tilde{a}_{11}^{ij} & \tilde{a}_{11}^{ii} & \dots & \tilde{a}_{12}^{ij} & \tilde{a}_{12}^{ii} & \dots & \tilde{b}_1^{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \tilde{a}_{21}^{ij} & \tilde{a}_{21}^{ii} & \dots & \tilde{a}_{22}^{ij} & \tilde{a}_{22}^{ii} & \dots & \tilde{b}_2^{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \tilde{b}_1^{ij} & \dots & \dots & \tilde{b}_2^{ij} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ \delta\omega_i^2 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow i - \text{te Zeile} \\ \longrightarrow i + N_u - \text{te Zeile} \end{array}$$

↓ Nach der Berücksichtigung der Bedingung (5.10) (5.11)

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{11}^{ij} & a_{11}^{ii} & \dots & a_{12}^{ij} & a_{12}^{ii} & \dots & b_1^{ij} & \dots \\ \dots & \mathbf{0} & 0 & n_{1i} & \mathbf{0} & 0 & n_{2i} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \tilde{b}_1^{ij} & \dots & \dots & \tilde{b}_2^{ij} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ \delta\underline{\omega}_i \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{neue } i - \text{te Zeile} \\ \longrightarrow \text{neue } i + N_u - \text{te Zeile} \end{array}$$

$$\begin{aligned} a_{11}^{ij} &= -\tilde{a}_{11}^{ij} \cdot n_{2i} + \tilde{a}_{21}^{ij} \cdot n_{1i}, & a_{11}^{ii} &= -\tilde{a}_{12}^{ii} \cdot n_{2i} + \tilde{a}_{21}^{ii} \cdot n_{1i} \\ a_{12}^{ij} &= -\tilde{a}_{12}^{ij} \cdot n_{2i} + \tilde{a}_{22}^{ij} \cdot n_{1i}, & a_{22}^{ii} &= -\tilde{a}_{12}^{ii} \cdot n_{2i} + \tilde{a}_{22}^{ii} \cdot n_{1i} \\ b_1^{ij} &= -\tilde{b}_1^{ij} \cdot n_{2i} + \tilde{b}_2^{ij} \cdot n_{1i}, & \underline{\omega}_i &= -\omega_i^2 \cdot n_{2i}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Nach der Berücksichtigung der Randbedingungen (5.3)-(5.6) lautet das neue System

$$\mathbf{L}(\mathbf{y})\mathbf{y} = \mathbf{F} \quad (5.13)$$

mit

$$\mathbf{L}(\mathbf{y}) := \begin{pmatrix} A_{11}(\mathbf{u}) & A_{12}(\mathbf{u}) & B_1 & \mathbf{0} \\ A_{21} & A_{22}(\mathbf{u}) & B_2 & \mathbf{0} \\ \tilde{B}_1^T & \tilde{B}_2^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_{11}^*(\mathbf{u}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} := \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{p} \\ \omega \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} := \begin{pmatrix} \delta \underline{\omega} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Die neuen Matrix-Blöcken $A_{11}(\mathbf{u})$, $A_{12}(\mathbf{u})$, B_1 , A_{21} , $A_{22}(\mathbf{u})$, B_2 und $A_{11}^*(\mathbf{u})$ sowie der Vektor $\underline{\omega}$ ergeben sich nach der zur Berücksichtigung der Randbedingungen benötigten Umformungen.

Bemerkung 5.2.1 Die vorliegende Implementation der Gleitrandbedingung induziert potentielle Probleme bei der Berücksichtigung der Nichtlinearität im Teil des Systems (5.13), das den Navier-Stokes-Gleichungen entspricht. Standardmäßig hängt die Matrix \tilde{A}_{12} nicht von \mathbf{u} ab. Bei der Linearisierung des Problems müssen wir zusätzlich darauf achten, daß die neue Matrix $A_{12}(\mathbf{u})$ von \mathbf{u} abhängt.

Das gekoppelte System (5.13) zur Bestimmung von \mathbf{u} , \mathbf{p} und ω lösen wir unter Einsatz des Mehrgitterverfahrens und einer iterativen Entkopplungsstrategie.

5.3 Iterative Entkopplungsstrategie zur Lösung

In den folgenden Darstellungen bezeichnet der Index l stets die aktuelle Gitterstufe l , auf der das Problem gelöst werden soll. Unsere Entkopplungsstrategie zur Lösung des Systems (5.13) besteht aus der sukzessiven Lösung der Konvektions-Diffusions-Gleichung und der Navier-Stokes-Gleichungen auf jeder Stufe l , d.h. wir lösen sukzessiv die algebraischen Gleichungssysteme

$$A_{11,l}^*(\mathbf{u}_l) \boldsymbol{\omega}_l = \mathbf{0} \quad (5.14)$$

und

$$\bar{\mathbf{L}}_l(\bar{\mathbf{y}}_l) \bar{\mathbf{y}}_l = \bar{\mathbf{F}}_l \quad (5.15)$$

mit

$$\bar{\mathbf{L}}_l(\bar{\mathbf{y}}_l) := \begin{pmatrix} A_{11,l}(\mathbf{u}_l) & A_{12,l}(\mathbf{u}_l) & B_{1,l} \\ A_{21,l} & A_{22,l}(\mathbf{u}_l) & B_{2,l} \\ \tilde{B}_{1,l}^T & \tilde{B}_{2,l}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{y}}_l := \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{1,l} \\ \mathbf{u}_{2,l} \\ \mathbf{p}_l \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{F}}_l := \begin{pmatrix} \delta \underline{\boldsymbol{\omega}}_l \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Somit wird das System (5.13) iterativ entkoppelt. Unter Nutzung des zuvor bestimmten \mathbf{u}_l ergibt sich ein neues $\boldsymbol{\omega}_l$ aus (5.14). Bei bekanntem $\boldsymbol{\omega}_l$ bestimmen wir $(\mathbf{u}_l = (\mathbf{u}_{1,l}, \mathbf{u}_{2,l}), \mathbf{p}_l)$ aus (5.15). Das System (5.14) bzw. (5.15) lösen wir unter Einsatz der Komponenten des Mehrgitterlösers **MG-KD** bzw. **MG-NS**. Zur besseren Übersicht geben wir zunächst den groben Ablauf der Entkopplung des Systems (5.13).

Algorithmus:

1. Löse näherungsweise das lineare Problem

$$A_{11,l}^*(\mathbf{u}_l^k) \boldsymbol{\omega}_l^{k+1} = \mathbf{0}$$

unter Verwendung der Komponenten des Mehrgitterlösers **MG-KD**. Wenn $k = 0$ ist, berechne eine Näherungslösung $\boldsymbol{\omega}_l^1$ aus dem Startwert $\mathbf{u}_l^0 = \mathbf{0}$.

2. Falls $k > 0$ gilt, berechne die neue Iterierte $\boldsymbol{\omega}_l^{k+1}$ aus der gedämpften Korrektur

$$\boldsymbol{\omega}_l^{k+1} = \boldsymbol{\omega}_l^k + \varrho (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_l^{k+1} - \boldsymbol{\omega}_l^k)$$

mit $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_l^{k+1}$ das Ergebnis aus Schritt 1.

3. Löse näherungsweise das nichtlineare Problem

$$\begin{pmatrix} A_{11,l}(\mathbf{u}_l^{k+1}) & A_{12,l}(\mathbf{u}_l^{k+1}) & B_{1,l} \\ A_{21,l} & A_{22,l}(\mathbf{u}_l^{k+1}) & B_{2,l} \\ \tilde{B}_{1,l}^T & \tilde{B}_{2,l}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{1,l}^{k+1} \\ \mathbf{u}_{2,l}^{k+1} \\ \mathbf{p}_l^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta \underline{\boldsymbol{\omega}}_l^{k+1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

unter Verwendung des Mehrgitterlösers **MG-NS**.

4. Die Iteration wird abgebrochen, falls

$$\|\omega_l^{k+1} - \omega_l^k\|_{0,2,\Omega} \leq \varsigma_\omega$$

mit einem vorgegebenen Fehlermaß ς_ω .

In unseren numerischen Testrechnungen haben wir für den Korrektur im Schnitt 2 den Wert $\varrho = 0.9$ und für das Abbruchkriterium im Schnitt 4 den Wert $\varsigma_\omega = 10^{-8}$ verwendet.

In den nächsten Abschnitten beschreiben wir die Mehrgitter-Algorithmen **MG-KD** und **MG-NS**. Dabei beschränken wir uns auf die Angabe ihrer Komponenten (für eine generelle Beschreibung der Mehrgittermethode verweisen wir auf [31] und [77]). Im wesentlichen beinhaltet ein Mehrgitterverfahren vier Komponenten: den Gittertransfer, den Glätter und den Grobgitterlöser.

Bei einem Mehrgitterverfahren ist der Transfer von Lösungsinformationen zwischen verschiedenen Gitterstufen notwendig. Es werden Transfer-Operatoren sowohl zur Informationsübertragung von einem Feingitterraum auf einen Grobgitterraum (Restriktion) als auch umgekehrt (Prolongation) benötigt.

Glätter sind Iterationsverfahren, die auf jedem Gitterlevel die jeweils hochfrequenten Fehleranteile glätten sollen.

Mit dem Begriff Grobgitterlöser bezeichnen wir stets den Löser auf der untersten Stufe des Mehrgitterverfahrens. Der Grobgitterlöser hängt von der Größe des Grobgittersystems ab.

Wir erläutern die Komponenten der beiden Mehrgitterverfahren exemplarisch. Als Mehrgitter-Zyklus wählen wir in beiden Fällen nur den W-Zyklus. Bei der Grobgitterkorrektur bei den beiden Mehrgitterlöser dämpfen wir den berechneten Korrekturvektor mit einem Faktor $\alpha \in (0, 1)$. In unseren numerischen Testrechnungen haben wir den festen Wert $\alpha = 0.8$ verwendet.

Bemerkung 5.3.1 *Im Unterschied zum in [4] und [5] angewendeten Verfahren der konjugierten Gradienten mit Vorkonditionierer, werden die Navier-Stokes-Gleichungen mit Gleitrandbedingung auf dem freien Rand von uns unter Einsatz des Mehrgitterverfahrens gelöst.*

5.4 Komponenten des Mehrgitterlösers MG-KD

5.4.1 Der Gittertransfer

Im Rahmen des Mehrgitterverfahrens **MG-KD** werden zwei Gittertransfer-Operatoren verwendet, die Prolongation P_{l-1}^l und die Restriktion $R_l^{l-1,*}$. Der Restriktionsoperator $R_l^{l-1,*}$ transformiert die Defektfunktionale vom feinen auf das grobe Gitter.

Seien \mathcal{T}_h^{l-1} und \mathcal{T}_h^l aufeinanderfolgende Gitter in der Hierarchie des Mehrgitters. Die damit verbundenen diskreten Räume der Umfangsgeschwindigkeit seien Z_h^{l-1} und Z_h^l . Wegen der Anwendung der isoparametrischen Elemente am krummlinigen Rand gilt nicht

mehr $Z_h^{l-1} \subset Z_h^l$. Aus diesem Grund können wir die Transfer-Operatoren nicht kanonisch definieren.

Der Prolongationsoperator definieren wir unter Verwendung des in [63] vorgeschlagenen allgemeinen Gittertransfer-Operators. Wir bestimmen die Prolongation P_{l-1}^l auf einem Raum Σ_h^l , wobei

$$Z_h^{l-1} + Z_h^l \subset \Sigma_h^l \subset L^2(\Omega).$$

Sei $\{\varphi_j^l\}_{j=1}^{J_l}$ eine Basis für Z_h^l und $\{N_j^{T,l}\}$ die Menge aller lokalen Knotenfunktionale auf dem Raum Z_h^l , wobei $T \in \mathcal{T}_h^l$ und J_l die Anzahl der Unbekannte auf der Stufe l bezeichnet. Wir nehmen an, daß

$$N_j^{T,l}(\varphi_i^l|_T) = \delta_{ij}, \quad i, j \in J_l$$

gilt. Die Menge aller zu einer Zelle $T \in \mathcal{T}_h^l$ gehörigen Unbekannte definieren wir als

$$J_l(T) := \{i \in J_l : \text{supp } \varphi_i^l \cap T \neq \emptyset\}.$$

Für jede Unbekannte $j \in J_l$ führen wir

$$\mathcal{T}_{h,j}^l = \{T \in \mathcal{T}_h^l : j \in J_l(T)\}$$

als Menge aller mit dem Knoten j verbundenen Zellen $T \in \mathcal{T}_h^l$ ein. Die Anzahl der Zellen von $\mathcal{T}_{h,j}^l$ bezeichnen wir mit $\text{card}(\mathcal{T}_{h,j}^l)$. Mit

$$N_i^l(\omega_h) := \frac{1}{\text{card}(\mathcal{T}_{h,i}^l)} \sum_{T \in \mathcal{T}_{h,i}^l} N_i^{T,l}(\omega_h|_T), \quad i \in J_l$$

können wir die Prolongation $P_{l-1}^l : \Sigma_h^l \rightarrow Z_h^l$ durch

$$P_{l-1}^l \omega_h := \sum_{i \in J_l} N_i^l(\omega_h) \varphi_i^l, \quad \omega_h \in \Sigma_h^l \quad (5.16)$$

definieren.

Über die Eigenschaften des Operators P_{l-1}^l findet man in [33] die folgende Aussage:

Lemma 5.4.1 *Der mit (5.16) definierte Prolongationsoperator P_{l-1}^l ist uniform L^2 -stabil, d.h.*

$$\|P_{l-1}^l \omega_h\|_{0,2,\Omega} \leq C \|\omega_h\|_{0,2,\Omega} \quad \forall \omega_h \in \Sigma_h^l$$

gilt mit Konstante C .

Für alle $\omega_h^l \in Z_h^l$ gilt $P_{l-1}^l \omega_h^l = \omega_h^l$.

In [33] kann man den Beweis dieses Lemmas sowie eine ausführliche Diskussion über die Struktur des Raums Σ_h^l finden. In programmtechnischer Hinsicht wird der Operator P_{l-1}^l in [34] und [63] betrachtet. Die praktische Implementation des Operators im Programmsystem **MooNMD** wurde in [34] ausführlich beschrieben.

Zur Definition der Restriktion $R_l^{l-1,*} : Z_h^{l,*} \rightarrow Z_h^{l-1,*}$ verwenden wir den oben eingef6hrten Prolongationsoperator $P_{l-1}^l : \Sigma_h^l \rightarrow Z_h^l$. F6ur ein gegebenes Defektfunktional $d^l \in Z_h^{l,*}$ auf dem feinen Gitter erkl6ren wir das zugeordnete Grobgitterfunktional $R_l^{l-1,*} d^l \in Z_h^{l-1,*}$ durch

$$\langle R_l^{l-1,*} d^l, \omega_h^{l-1} \rangle = \langle d^l, P_{l-1}^l \omega_h^{l-1} \rangle, \quad \forall \omega_h^{l-1} \in Z_h^{l-1}.$$

5.4.2 Der Gl6tter und der Grobgitterl6ser

Wir verwenden ein Jacobi-Iterationsverfahren (siehe [59]) als Gl6tter. Falls das Residuum um einen vorher festgelegten Faktor reduziert wird, wird die Iteration abgebrochen. In unseren numerischen Testrechnungen haben wir als Faktor 0.1 verwendet. Innerhalb des Mehrgitterverfahrens **MG-KD** f6hren wir jeweils zwei Vorgl6ttungsschritte und zwei Nachgl6ttungsschritte aus.

Das Grobgitterproblem l6sen wir direkt durch ein LU-Verfahren (Zerlegung mit Spaltenpivotsuche, siehe [59]).

5.5 Komponenten des Mehrgitterl6sers MG-NS

Wie vorher erkl6rt, l6sen wir das nichtlineare System (5.15) unter Verwendung der Fixpunktiteration als Linearisierungsmethode. Als 6u6ere nichtlineare Iteration benutzen wir die einfache Fixpunktiteration, bei der eine Linearisierung der Form

$$\bar{\mathbf{L}}(\bar{\mathbf{y}}^{n+1}) \bar{\mathbf{y}}^{n+1} \approx \bar{\mathbf{L}}(\bar{\mathbf{y}}^n) \bar{\mathbf{y}}^{n+1}$$

verwendet wird. Dabei lassen wir in unserer Notation den Index l zur Kennzeichnung der Gitterstufe weg. Eine ausf6hrliche Beschreibung der Fixpunktiteration kann man in [62] finden. Wir halten uns eng an die dortige Vorgehensweise. In unseren numerischen Testrechnungen brach die nichtlineare Iteration bei einer euklidischen Norm des Residuums von kleiner als 10^{-10} ab.

Zun6chst beschreiben wir die Komponenten des Mehrgitterverfahrens **MG-NS** zur L6sung der linearen Teilprobleme innerhalb der 6u6eren nichtlinearen Iteration.

5.5.1 Der Gittertransfer

Im Rahmen des Mehrgitterverfahrens **MG-NS** werden drei Gittertransfer-Operatoren verwendet, die Prolongation P_{l-1}^l sowie die Restriktionen $R_l^{l-1,*}$ und R_l^{l-1} . Der Restriktionsoperator R_l^{l-1} ist bei der Generierung der Grobgittermatrizen innerhalb der nichtlinearen Iteration erforderlich, weil die aktuelle Finite-Elemente-Approximation der L6sung n6tig ist.

Seien \mathcal{T}_h^{l-1} und \mathcal{T}_h^l aufeinanderfolgende Gitter der Gitterhierarchie und $\mathbf{V}_h^{l-1}, \mathbf{V}_h^l$ bzw. Q_h^{l-1}, Q_h^l die zugeh6rigen diskreten R6ume der Geschwindigkeit bzw. des Druckes. Die Operatoren $P_{l-1}^l : \Sigma_{h,V}^l \times \Sigma_{h,Q}^l \rightarrow \mathbf{V}_h^l \times Q_h^l$ und $R_l^{l-1,*} : \mathbf{V}_h^{l,*} \times Q_h^{l,*} \rightarrow \mathbf{V}_h^{l-1,*} \times Q_h^{l-1,*}$ definieren

wir wie im Abschnitt 5.4.1, wobei $\mathbf{V}_h^{l-1} + \mathbf{V}_h^l \subset \Sigma_{h,V}^l$ und $Q_h^{l-1} + Q_h^l \subset \Sigma_{h,Q}^l$. Der Restriktionsoperator $R_i^{l-1} : \mathbf{V}_h^l \times Q_h^l \rightarrow \mathbf{V}_h^{l-1} \times Q_h^{l-1}$ kann man als lokale L^2 -Projektion definieren. Ausführliche Beschreibung der Restriktion R_i^{l-1} in programmtechnischer Hinsicht findet man in [34].

5.5.2 Der Glätter und der Grobgitterlöser

Da in der Systemmatrix $\bar{\mathbf{L}}_l$ in (5.15) der untere Hauptdiagonalblock aus lauter Nullen besteht, können die sonst üblichen Glätter wie das Jacobi-, SOR- oder ILU-Verfahren nicht eingesetzt werden. Wir verwenden einen speziellen blockweisen Gauß-Seidel-Glätter, der auch als druckorientierter Vanka-Glätter bezeichnet wird. Dieses Glättungsverfahren basiert auf den in [72] für ein Finite-Differenzen-Verfahren vorgeschlagenen Glätter.

Auf jeder jeweils aktuellen Gitterstufe l ist unser Glätter eine iterative Methode zur Lösung des Gleichungssystem

$$\bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \tilde{\mathcal{B}} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{F}} \quad (5.17)$$

mit

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} A_{11}(\mathbf{u}) & A_{12}(\mathbf{u}) \\ A_{21} & A_{22}(\mathbf{u}) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} := \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \tilde{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} \tilde{B}_1^T & \tilde{B}_2^T \end{pmatrix}.$$

Dabei lassen wir in unserer Notation den Index l zur Kennzeichnung des Gitterlevels weg.

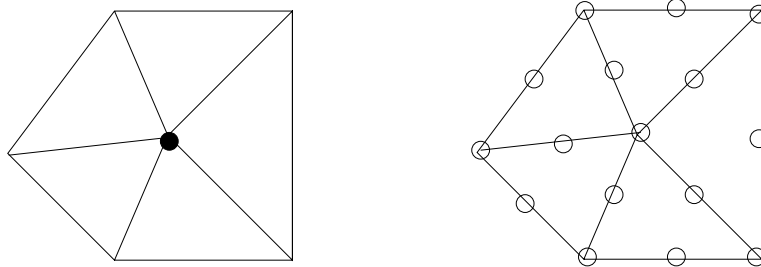


Abbildung 5.5: Die Unbekannte des druckorientierten Vanka-Glätters (links: Druck, rechts: Geschwindigkeit)

Die Idee des Vanka-Glätters besteht darin, durch alle Druckunbekannte zu laufen und jede Unbekannte jeweils die dazugehörigen Geschwindigkeitsunbekannte (siehe Abb. 5.5) durch Lösung eines zugeordneten lokalen Gleichungssystems neu zu berechnen. Zur Matrix $\bar{\mathbf{L}}$ in (5.17) definieren wir für eine gegebene Druckunbekannte j ($1 \leq j \leq N_p$) die "lokale Matrix" $\bar{\mathbf{L}}_j$ als diejenige Teilmatrix von $\bar{\mathbf{L}}$, die entsteht, wenn wir aus $\bar{\mathbf{L}}$ nur solche Zeilen und Spalten auswählen, die den Unbekannten von j entsprechen. Die Matrix $\bar{\mathbf{L}}_j$ hat auch eine Sattelpunktstruktur

$$\bar{\mathbf{L}}_j = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_j & \mathcal{B}_j \\ \tilde{\mathcal{B}}_j & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Weiterhin definieren wir zu einem gegebenen globalen Vektor $\bar{\mathbf{y}}$ einen “modifizierten lokalen rechte-Seite-Vektor” $\widetilde{\mathbf{F}}_j(\bar{\mathbf{y}})$ als

$$\widetilde{\mathbf{F}}_j(\bar{\mathbf{y}}) := \bar{\mathbf{F}}_j - (\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{y}})_j + \bar{\mathbf{L}}_j\bar{\mathbf{y}}_j,$$

wobei $\bar{\mathbf{F}}_j$, $(\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{y}})_j$ und $\bar{\mathbf{y}}_j$ die entsprechenden Teilvektoren der globalen Vektoren $\bar{\mathbf{F}}$, $\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{y}}$ und $\bar{\mathbf{y}}$ bezeichnen.

Ein Glättungsiterationsschritt $\bar{\mathbf{y}}^{old} \rightarrow \bar{\mathbf{y}}^{new}$ umfaßt zwei Aktionen:

- Einmaliges Lösen des lokalen Gleichungssystems

$$\bar{\mathbf{L}}_j\bar{\mathbf{y}}_j = \widetilde{\mathbf{F}}_j(\bar{\mathbf{y}}) \tag{5.18}$$

für jede Druckunbekannte j . Es entsteht der neue globale Iteriertenvektor $\bar{\mathbf{Y}}_j$;

- Ausführung der globalen Relaxation

$$\bar{\mathbf{y}}^{new} = \bar{\mathbf{y}}^{old} + \rho (\bar{\mathbf{Y}}_j - \bar{\mathbf{y}}^{old}) .$$

mit einem a priori gewählten Relaxationsfaktor ρ .

Die Matrix $\bar{\mathbf{L}}_j$ ist regulär und hat eine einfache Struktur. Wir lösen das lokale System (5.18) mit der iterativen GMRES-Methode (siehe [59]), da die Matrix \mathcal{A}_j nicht symmetrisch ist. In unseren Testrechnungen haben wir für die Relaxation den Wert $\rho = 0.8$ verwendet. Innerhalb des Mehrgitterverfahrens **MG-NS** führen wir jeweils drei Vorglättungsschritte und drei Nachglättungsschritte aus.

Das Grobgittersystem wird mit Hilfe des druckorientierten Vanka-Glätters iterativ gelöst.

Kapitel 6

Numerische Experimente

Zur Beurteilung der Güte des konstruierten Lösungsverfahrens müssen verschiedene Aspekte berücksichtigt werden.

Einerseits möchte man überprüfen, ob theoretisch hergeleitete Fehlerabschätzungen praktisch bestätigt werden (Genauigkeit des Verfahrens). Dazu definiert man in der Regel Testprobleme mit bekannter analytischer Lösung. Von wesentlichem Interesse hierbei ist der Einfluß der Gitterverfeinerung auf das Fehlerverhalten.

Aussagen zur Effizienz und Robustheit des algebraischen Lösungsverfahrens sowie der iterativen Entkopplungsstrategie sind ebenso wichtig.

Ein nicht zu vernachlässigendes Hilfsmittel zur Beurteilung der numerischen Ergebnisse ist die grafische Auswertung des Datenmaterials. Man interessiert sich für die Darstellungen der Isolinien skalarer Funktionen wie des Druckes und der Umfangsgeschwindigkeit, des Vektorfeldes der Geschwindigkeit und der Isolinien der daraus abgeleiteten Stromfunktion. Ein Teil der präsentierten Abbildungen wird mit Hilfe des Grafikprogrammes **Grape** (siehe [68]) erstellt.

Alle numerischen Ergebnisse wurden mit Hilfe des Programmsystems **MoonMD** (siehe [9]) erhalten. Die Rechnungen wurden auf einer Workstation HP J5600 durchgeführt.

6.1 Das Navier-Stokes-Problem mit Gleitrandbedingung

In diesem Abschnitt werden wir unsere Lösungsmethode auf die stationären Navier-Stokes-Gleichungen mit Gleitrandbedingung anwenden. Zuerst betrachten wir ein Noflow-Problem für die Navier-Stokes-Gleichungen in einem Strömungsgebiet mit einfacher Geometrie (das Einheitsquadrat) und setzen die exakte Lösung als bekannt voraus. Um unsere Lösungsmethode auf die Navier-Stokes-Gleichungen mit Gleitrandbedingung in einem Gebiet mit krummlinigem Randteil zu untersuchen, betrachten wir als zweites Testproblem ein Beispiel im Halbkreis, dessen exakte Lösung bekannt ist. Das Ziel dieser Testprobleme ist die Verifizierung des Codes und die Untersuchung des Konvergenzverhaltens der angewendeten numerischen Methode.

Als ein Anwendungsbeispiel stellen wir das Modell zur Beschreibung der Strömungsverhältnisse in einem Dissipationssystem dar.

Zur Lösung aller drei nichtlinearen Testprobleme verwenden wir die Fixpunktiteration. Die nichtlineare Iteration brach bei einer euklidischen Norm des Residuums von kleiner als 10^{-10} ab. Eine Dämpfung bei der nichtlinearen Iteration wurde nicht verwendet. Die aufgetretenden linearen Systeme wurden mit dem Mehrgitterverfahren unter Verwendung des W-Zyklus gelöst. Im W-Zyklus des Mehrgitterverfahrens wurden die Glättungsiterationen mit Hilfe vom Vanka Glätter (siehe Abschnitt 5.5.2, Kapitel 5) realisiert. Die Testrechnungen wurden mit drei Vor- und drei Nachglättungsiterationen durchgeführt. Die approximierete Lösung des linearen Problems wurde mit dem Faktor 0.8 gedämpft, um bessere Konvergenz zu erzielen. Die lineare Iteration brach bei einer euklidischen Norm des Residuums von kleiner als 10^{-10} ab.

Bei Testprobleme mit krummlinigen Randteilen wenden wir in programtechnischer Hinsicht die diskreten Normaleneinheitsvektoren an, d.h. in jedem Randknoten den äußeren Normaleneinheitsvektor der Kante des Randelementes. Wenn zwei Elemente einen gemeinsamen Knoten als Eckpunkt besitzen, bestimmen wir den diskreten Normaleneinheitsvektor als normierte Summe der äußeren Normalenvektoren der beiden Randkanten in diesem Knoten.

6.1.1 Ein Noflow-Problem

Wir untersuchen ein Noflow-Problem für die Navier-Stokes-Gleichungen auf dem Einheitsquadrat Ω

$$-\frac{1}{Re}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega, \quad (6.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (6.2)$$

mit den Randbedingungen

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_2 \cup \Gamma_4 \quad (6.3)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \quad (6.4)$$

$$\mathbf{n} \cdot \sigma(\mathbf{u}, p) \boldsymbol{\tau} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_1 \cup \Gamma_3. \quad (6.5)$$

Der Rand $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ ist durch

$$\Gamma_1 := \{(x, y) : y = 0, 0 < x < 1\}, \quad \Gamma_2 := \{(x, y) : x = 1, 0 \leq y \leq 1\},$$

$$\Gamma_3 := \{(x, y) : y = 1, 0 < x < 1\}, \quad \Gamma_4 := \{(x, y) : x = 0, 0 \leq y \leq 1\}$$

gegeben. Wir geben die exakte Lösung

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}, \quad p = \frac{\delta}{3}(1-x)^3 - \frac{\delta}{12}$$

mit $\delta = 0.01$ vor. Dann ist

$$\mathbf{f} = \nabla p = \begin{pmatrix} -\delta(1-x)^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Testrechnungen haben wir $Re = 1$ gewählt.

Das Beispiel ist auf dem Einheitsquadrat definiert. Das verwendete Grobgitter (Stufe 1) ist in Abbildung 6.1 und die Anzahl der Elemente sowie der Unbekannten bei gleichmäßiger Verfeinerung in der Tabelle 6.1 zu sehen. Da wir ein zweidimensionales Problem betrachten, wächst die Anzahl der Unbekannten um einen Faktor in der Größenordnung 4 von einer Stufe zur nächstfeineren an. Aufgrund der großen Anzahl der Unbekannten und den daraus folgenden hohen Rechenzeiten beschränken wir unsere Rechnungen auf die Stufe 7. Die Stufe 7 betrachten wir als die feinste Stufe der Gitter.

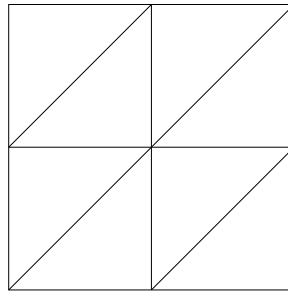


Abbildung 6.1: Das verwendete Grobgitter (Stufe 1)

Stufe	Elemente	Unb. Geschw.	Unb. Druck
1	8	50	9
2	32	162	25
3	128	578	81
4	512	2 178	289
5	2 048	8 450	1 089
6	8 192	33 282	4 225
7	32 768	132 098	16 641

Tabelle 6.1: Die Anzahl der Unbekannten bei gleichmäßiger Verfeinerung

In der Tabelle 6.2 sind die Anzahl der nichtlinearen Iterationen sowie die gesamte Anzahl der linearen Iterationen und die Rechenzeit auf den einzelnen Stufen dargestellt. Bei den Rechnungen ist ein lineares Wachstum der Rechenzeiten bemerkbar (siehe Abb. 6.2). Die Ergebnisse in der Tabelle 6.2 zeigen deutlich, daß das Noflow-Problem mit Mehrgitterverfahren auch bei Gleitrandbedingungen effizient gelöst werden kann.

Stufe	Nichtlin. Iterationen (lin. Iterationen)	CPU-Zeit (Sec.)
1	4 (4)	1.00
2	4 (6)	4.60
3	3 (5)	15.03
4	3 (5)	60.80
5	3 (5)	249.72
6	3 (4)	814.06
7	2 (3)	2 474.70

Tabelle 6.2: Die Anzahl der nichtlinearen Iterationen, die entsprechende Gesamtzahl der linearen Iterationen und die Rechenzeit in Sekunden pro Stufe

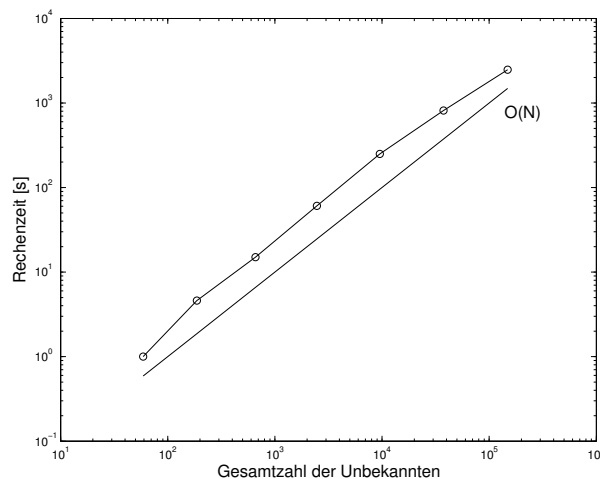


Abbildung 6.2: Die Rechenzeiten in Abhängigkeit von der Gesamtzahl der Unbekannten N pro Stufe des Mehrgitterverfahrens

In der Tabelle 6.3 stellen wir den Fehler der Geschwindigkeitsapproximation \mathbf{u}_h in der \mathbf{L}^2 -Norm und der \mathbf{H}^1 -Seminorm dar. In der Literatur (siehe z.B. [24] und [28]) wurde beobachtet, daß die numerische Approximation der Navier-Stokes-Gleichungen (auch im Fall eines Noflow-Problem) mit stabilen Elementpaaren zu beliebig großen Fehlern in der diskreten Geschwindigkeitslösung führen kann. Der \mathbf{L}^2 - als auch der \mathbf{H}^1 -Fehler in der Tabelle 6.3 zeigen, daß wir eine gute Approximation an die exakte Lösung $\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$ erhalten. Im Fall des Noflow-Problems (6.1)-(6.5) spielt die erwartete auftretende künstliche Geschwindigkeit (bzw. der Konsistenzfehler) eine untergeordnete Rolle. Dies begründet sich mit der Kleinheit des Parameters δ ($\delta \ll 1$). Die Ordnung des \mathbf{L}^2 -Fehlers sowie des \mathbf{H}^1 -Fehlers deutet auf eine Superkonvergenz hin.

Stufe	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{0,2,\Omega}$	Ord.	$ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h _{1,\Omega}$	Ord.
1	2.183247e-06	-	2.568867e-05	-
2	1.570504e-07	3.797176e+00	4.385206e-06	2.550416e+00
3	1.204146e-08	3.705146e+00	7.310821e-07	2.584539e+00
4	9.758404e-10	3.625221e+00	1.238551e-07	2.561380e+00
5	8.219707e-11	3.569486e+00	2.134552e-08	2.536648e+00
6	7.085978e-12	3.536048e+00	3.721344e-09	2.520037e+00
7	7.075600e-13	3.324040e+00	6.532210e-10	2.510180e+00

Tabelle 6.3: Fehlerentwicklung und Konvergenzordnungen für die Geschwindigkeit

Man kann die Entwicklung des Fehlers der Druckapproximation in Richtung Asymptotik sowohl für den L^2 - als auch für den H^1 -Fehler in der Tabelle 6.4 beobachten. Für die Ordnung des L^2 -Fehlers erwartet man 2 und für den H^1 -Fehler 1. Die Ergebnisse in der Tabelle 6.4 zeigen, daß diese Werte gut erreicht werden.

Stufe	$\ p - p_h\ _{0,2,\Omega}$	Ord.	$ p - p_h _{1,\Omega}$	Ord.
1	1.544124e-04	-	1.624439e-03	-
2	3.827905e-05	2.012162e+00	8.294155e-04	9.697742e-01
3	9.527376e-06	2.006404e+00	4.162408e-04	9.946769e-01
4	2.378508e-06	2.002022e+00	2.082839e-04	9.988670e-01
5	5.943974e-07	2.000557e+00	1.041607e-04	9.997399e-01
6	1.485844e-07	2.000145e+00	5.208261e-05	9.999378e-01
7	3.714520e-08	2.000040e+00	2.604160e-05	9.999850e-01

Tabelle 6.4: Fehlerentwicklung und Konvergenzordnungen für den Druck

6.1.2 Ein Testbeispiel im Halbkreis

Das Modellgebiet Ω sei ein Halbkreis mit dem Mittelpunkt $(0, 0)$ und dem Radius 1, d.h.

$$\Omega := \left\{ (x, y) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2} \right\}.$$

Der Rand $\partial\Omega$ setzt sich aus zwei Randteile

$$\Gamma_D := \{(x, y) : y = 0, -1 \leq x \leq 1\}$$

und

$$\Gamma_F := \left\{ (x, y) : -1 < x < 1, 0 < y \leq \sqrt{1 - x^2} \right\}$$

zusammen.

Wir betrachten das Problem

$$-\frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \quad (6.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (6.7)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad \text{auf } \Gamma_D \quad (6.8)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_F, \quad (6.9)$$

$$\mathbf{n} \cdot \sigma(\mathbf{u}, p) \boldsymbol{\tau} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_F. \quad (6.10)$$

Die rechte Seite \mathbf{f} und die Dirichlet-Randbedingung \mathbf{u}_0 sind so gewählt, daß

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad p = \frac{\delta}{3}(1-x)^3 - \frac{7\delta}{12}$$

die exakte Lösung von (6.6)-(6.10) ist. Dann gelten

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} -x - \delta(1-x)^2 \\ -y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -x \end{pmatrix}.$$

Für die Testrechnungen haben wir $Re = 1$ und $\delta = 0.01$ gewählt.

Das Modellgebiet Ω hat einen krummlinigen Randteil. Die Gittergenerierung zur Erstellung der diskreten Aufgabe besteht in diesem Fall nicht nur aus einer uniformen Verfeinerung sondern auch aus einer Randanpassung. Das verwendete Grobgitter (Stufe 1) ist in Abbildung 6.3 zu sehen. Die Abbildung 6.4 zeigt das Gitter auf Stufe 2. Bei der Konstruktion der Gitter wurde der Gittergenerator **OMEGA** vom Programmsystem **MooNMD** (siehe [9]) verwendet.

Die Anzahl der Elemente sowie der Unbekannten bei gleichmäßiger Verfeinerung ist in der Tabelle 6.5 dokumentiert. Da wir ein zweidimensionales Problem betrachten, wächst die Anzahl der Unbekannten um einen Faktor in der Größenordnung 4 von einer Stufe zur nächstfeineren an. Die Stufe 6 betrachten wir als die feinste Stufe der Gitter.

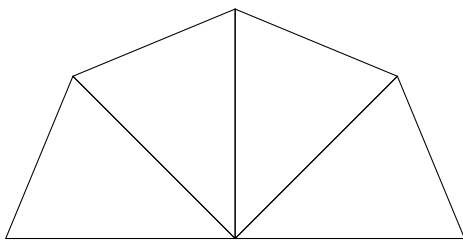


Abbildung 6.3: Das verwendete Grobgitter (Stufe 1)

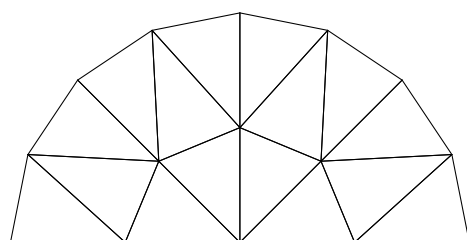


Abbildung 6.4: Das verwendete Gitter auf Stufe 2

Stufe	Elemente	Unb. Geschw.	Unb. Druck
1	4	30	6
2	16	90	15
3	64	306	45
4	256	1 122	153
5	1 024	4 290	561
6	4 096	16 770	2 145

Tabelle 6.5: Die Anzahl der Unbekannten bei gleichmäßiger Verfeinerung

In der Tabelle 6.6 sind die Anzahl von den nichtlinearen Iterationen sowie die gesamte Anzahl der linearen Iterationen und die Rechenzeit auf den einzelnen Stufen dargestellt. Bei den Rechnungen ist ein lineares Wachstum der Rechenzeiten bemerkbar. Es wird mit der Abbildung 6.5 graphisch dargestellt. Die Ergebnisse in der Tabelle 6.6 zeigen deutlich, daß das Problem (6.6)-(6.10) mit den Randbedingungen mit Hilfe des Mehrgitterverfahrens effizient gelöst werden kann.

Stufe	Nichtlin. Iterationen (lin. Iterationen)	CPU-Zeit (Sec.)
1	8 (8)	0.2
2	8 (13)	0.7
3	8 (8)	1.45
4	7 (10)	5.92
5	7 (12)	25.93
6	8 (13)	107.36

Tabelle 6.6: Die Anzahl der nichtlinearen Iterationen, die entsprechende Gesamtzahl der linearen Iterationen und die Rechenzeit in Sekunden pro Stufe

In der Tabelle 6.7 stellen wir den Fehler der Geschwindigkeitsapproximation \mathbf{u}_h in der L^2 -Norm und der \mathbf{H}^1 -Seminorm dar. Der L^2 - als auch der \mathbf{H}^1 -Fehler zeigen, daß wir eine gute Approximation an die exakte Lösung $\mathbf{u} = (y, -x)$ erhalten. In der L^2 -Norm hat der Fehler der Geschwindigkeitsapproximation \mathbf{u}_h eine Konvergenz von Ordnung 3.4. Nach der Fehlerabschätzungen aus Kapitel 4 haben wir eine Konvergenz von Ordnung 3 erwartet. Die Ergebnisse deuten auf eine Superkonvergenz hin.

Man kann die Entwicklung des Fehlers der Druckapproximation in Richtung Asymptotik sowohl für den L^2 - als auch für den H^1 -Fehler in der Tabelle 6.8 beobachten. Für die Ordnung des L^2 -Fehlers erwartet man 2 und für den H^1 -Fehler 1. Die Ergebnisse in der Tabelle 6.8 zeigen, daß diese Werte gut erreicht werden.

In den Abbildungen 6.6, 6.7 und 6.8 sind das Vektorfeld der diskreten Geschwindigkeitsapproximation, die diskrete Stromfunktion und die Isolinien der Druckapproximation gezeigt.

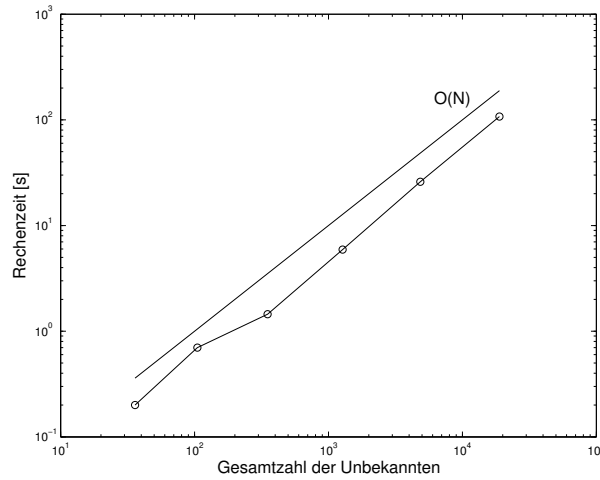


Abbildung 6.5: Die Rechenzeiten in Abhängigkeit von der Gesamtzahl der Unbekannten N pro Stufe des Mehrgitterverfahrens

Stufe	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{0,2,\Omega}$	Ord.	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _{1,\Omega}$	Ord.
1	2.795406e-05	-	2.147830e-04	-
2	4.335130e-06	2.688910e+00	5.757689e-05	1.899318e+00
3	3.877920e-07	3.482720e+00	1.053377e-05	2.450468e+00
4	3.485644e-08	3.475786e+00	1.851967e-06	2.507891e+00
5	3.091491e-09	3.495051e+00	3.243700e-07	2.513347e+00
6	2.803713e-10	3.462892e+00	5.699233e-08	2.508801e+00

Tabelle 6.7: Fehlerentwicklung und Konvergenzordnungen für die Geschwindigkeit

Stufe	$\ p - p_h\ _{0,2,\Omega}$	Ord.	$\ p - p_h\ _{1,\Omega}$	Ord.
1	1.092829e-03	-	6.109549e-03	-
2	3.166564e-04	1.787077e+00	3.601326e-03	7.625376e-01
3	8.070891e-05	1.972118e+00	1.861462e-03	9.520918e-01
4	2.007338e-05	2.007445e+00	9.378424e-04	9.890190e-01
5	4.984992e-06	2.009620e+00	4.693952e-04	9.985423e-01
6	1.240744e-06	2.006386e+00	2.346416e-04	1.000344e+00

Tabelle 6.8: Fehlerentwicklung und Konvergenzordnungen für den Druck

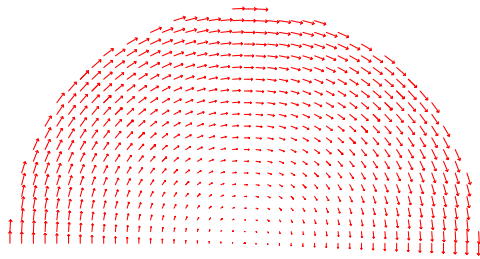


Abbildung 6.6: Vektorplot der Geschwindigkeit auf Stufe 6

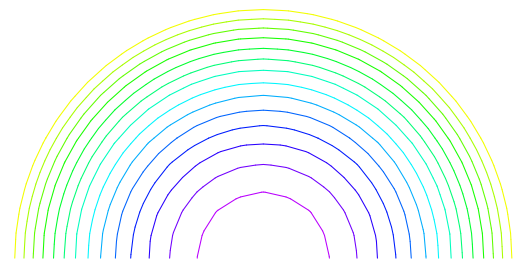


Abbildung 6.7: Isolinien der Stromfunktion auf Stufe 6

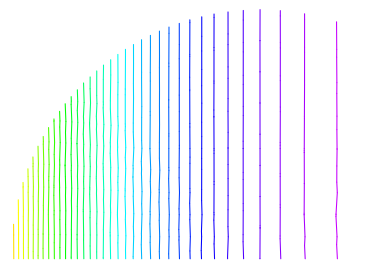


Abbildung 6.8: Isolinien des Druckes auf Stufe 6

6.1.3 Strömungsverhältnisse in Dissipationssysteme

Die Beeinflussbarkeit von Ferrofluiden durch äußere Magnetfelder ermöglicht das Design von Anwendungen bei denen magnetisch kontrollierte Flüssigkeiten ein Kernelement darstellen. Diese Möglichkeit hat zu einer Reihe von technischen Anwendungen von magnetischen Flüssigkeiten geführt. Die häufigste Anwendung der Ferrofluide ist die als Dichtung, die Ferrofluide können aber auch als Dämpfungsmedium in den so genannten Dissipationssystemen angewendet werden.

Die Geometrie eines Dissipationssystems wird mit der Abbildung 6.9 schematisch dargestellt. Grundlegend besteht das Dissipationssystem aus dem Ferrofluid, einem Magnet und zwei (untere und obere) Platten. Das Dissipationssystem funktioniert mit Ferrofluid als Dämpfungsmedium, in dem die Bewegungsenergie durch viskose Reibung in Wärme umgewandelt wird.

Die Dissipationssysteme sind ein äußerst zuverlässiges präzises Dämpfungselement. Selbst bei offenen Systemen ist kein Flüssigkeitsverlust zu verzeichnen. Die typische Anwendung von Dissipationssystemen ist die als grundlegendes Element verschiedener Modelle von Dämpfer (siehe [6], [7] und [58]) oder die als leicht empfindliches Element von Messgeräte, Fräsmaschinen und Roboter.

In kinematischer Hinsicht kann die Bewegung dieses mechanischen Dissipationssystems als eine Bewegung des Magnets oder als eine von den Platten betrachtet werden. Im Hinblick auf eine effiziente Modellierung der Strömungsverhältnisse nehmen wir an, daß die

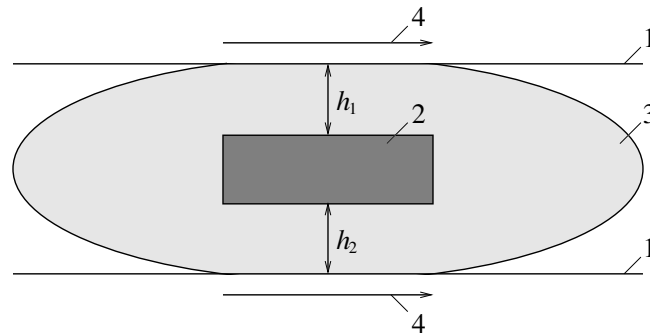


Abbildung 6.9: Dissipationssystem (schematische Darstellung): 1 - bewegte Platte, 2 - Magnet, 3 - magnetische Flüssigkeit, 4 - Richtung der Bewegung

beiden horizontalen Platten sich bewegen und der Magnet fest ist. Eine Untersuchung der Dynamik des Dissipationssystems bei Berücksichtigung fester Platten und bewegter Matnete kann man in [8] finden.

Zunächst konzentrieren wir uns auf die mathematische Modellierung der Strömungsverhältnisse im Dissipationssystem. Der Rand des Strömungsgebietes setzt sich aus drei vorgegebenen Oberflächen (die beiden Oberflächen der Platten und die Oberfläche des Magnets) und zwei freien Oberflächen zusammen. Da die Untersuchung der Strömungsverhältnisse im Dissipationssystem der wesentliche Problemkreis bei der mathematischen Modellierung des Dissipationssystemsverhaltens ist (die Motivation ist die gleiche wie bei der mathematischen Modellierung des Dichtungsverhaltens, siehe Abschnitt 2.2, Kapitel 2), nehmen wir die freien Obeffächen als bekannt an und wir betrachten nur das Strömungsproblem.

Die mathematische Modellierung der Strömungsverhältnisse in Dissipationssysteme fangen wir mit der Darstellung des Modellgebietes an. Man kann verschiedene Formen des Magnets betrachten. Wir betrachten eine rechteckige Form des Magnets, da diese Form für die praktischen Anwendungen wichtig ist. Die Position des Magnets spielt auch eine wichtige Rolle für die Strömungsverhältnisse. Die Magnetposition berücksichtigen wir mit Hilfe des Parameters $h_1 \setminus h_2$, wobei h_1 und h_2 die Abstände zwischen den Magnet und die Platten bezeichnen (siehe Abb. 6.9). Wir betrachten zwei verschiedene Positionen, die den Werten $h_1 \setminus h_2 = 1$ und $h_1 \setminus h_2 = 7$ entsprechen. Bei $h_1 \setminus h_2 = 1$ liegt der Magnet im Zentrum des Ferrofluidtropfens und bei $h_1 \setminus h_2 = 7$ liegt der in der Nähe der unteren Platte (siehe Abb. 6.10).

Die beiden freien Oberflächen betrachten wir als Teile einer Ellipse. Die elliptische Form der Oberflächen ist die erste Approximation der realistischen Form. Bei den Experimenten mit einem Magnet im Ferrofluidtropfen kann man eine Form der freien Oberflächen, die ähnlich zu der elliptischen ist, beobachten. So kann man aus der Praxiserfahrung diese elliptische Approximation begründen. Aus der Theorie existiert auch eine Begründung, da die freien Oberflächen die Form der Magnetfeldlinien, die ähnlich zu den elliptischen sind, besitzen. Die elliptische Form der freien Oberflächen passt gut für die Testbeispiele bei der Untersuchung der Strömungsverhältnisse im Dissipationssystem.

Die beiden Platten betrachten wir nicht nur zentriert sondern auch gleichmäßig lang.

Nach diesen Vorüberlegungen können wir die Modellgebiete $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$ mit Ränder $\partial\Omega_1 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3^1 \cup \Gamma_F$ und $\partial\Omega_2 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3^2 \cup \Gamma_F$ beschreiben. Die Ränder $\partial\Omega_1$ und $\partial\Omega_2$ setzen sich aus drei vorgegebenen Oberflächen (zwei horizontale Platten Γ_1 und Γ_2 , und die Oberfläche des Magnets Γ_3^1 ($h_1 \setminus h_2 = 1$) bzw. Γ_3^2 ($h_1 \setminus h_2 = 7$)) und zwei freie Oberflächen Γ_F zusammen. Die einzelnen Randteile sind durch

$$\Gamma_1 := \left\{ (x, y) : y = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \right\},$$

$$\Gamma_2 := \left\{ (x, y) : y = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \right\},$$

$$\Gamma_3^1 := \left\{ (x, y) : y = -\frac{1}{6}, -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \right\} \cup \left\{ (x, y) : y = \frac{1}{6}, -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \right\} \\ \cup \left\{ (x, y) : x = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{6} < y < \frac{1}{6} \right\} \cup \left\{ (x, y) : x = \frac{1}{2}, -\frac{1}{6} < y < \frac{1}{6} \right\},$$

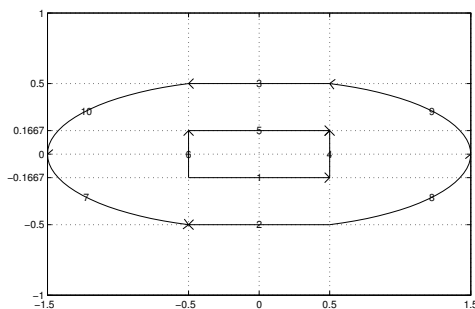
$$\Gamma_3^2 := \left\{ (x, y) : y = -\frac{5}{12}, -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \right\} \cup \left\{ (x, y) : y = \frac{1}{12}, -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \right\} \\ \cup \left\{ (x, y) : x = -\frac{1}{2}, -\frac{5}{12} < y < -\frac{1}{12} \right\} \cup \left\{ (x, y) : x = \frac{1}{2}, -\frac{5}{12} < y < -\frac{1}{12} \right\},$$

$$\Gamma_F := \left\{ (x, y) : \frac{4x^2}{9} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\} \setminus \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

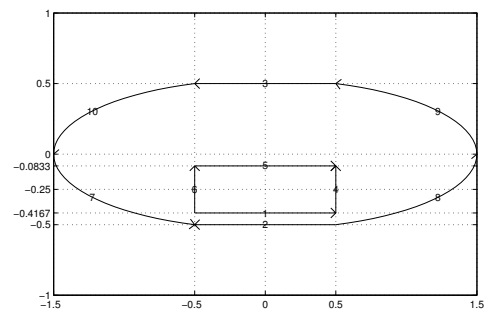
mit

$$b = \frac{3}{4\sqrt{2}}$$

gegeben (siehe Abb. 6.10).



Modellgebiet $\Omega_1(h_1 \setminus h_2 = 1)$



Modellgebiet $\Omega_2(h_1 \setminus h_2 = 7)$

Abbildung 6.10: Modellgebiete Ω_1 und Ω_2 : 3 - der Rand Γ_1 ; 2 - der Rand Γ_2 ; 1, 4, 5, 6 - der Rand Γ_3^1 bzw. Γ_3^2 ; 7, 8, 9, 10 - der freie Rand Γ_F

Nach der detaillierten Beschreibung der Modellgebiete Ω_1 und Ω_2 stellen wir das mathematische Modell dar, das die Dynamik der Dissipationssysteme beschreibt. Die mathematische Modellierung der Strömungsverhältnisse in den Dissipationssystemen führt auf zweidimensionale Navier-Stokes-Gleichungen der Gestalt

$$-\frac{1}{Re}\Delta\mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega_1 \text{ bzw. } \Omega_2, \quad (6.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega_1 \text{ bzw. } \Omega_2 \quad (6.12)$$

(siehe die Gleichungen (2.2) und (2.4) im Abschnitt 2.2, Kapitel 2). Die Volumenkraft in der rechten Seite von (6.11) wird auf Null eingesetzt, da die Dissipationssysteme am häufigsten im Weltraum in Betrieb sind und die Schwerkraft keine Rolle spielt. Die Gleichungen (6.11)-(6.12) ergänzen wir mit den folgenden Randbedingungen:

$$\mathbf{u} = (1, 0)^T \quad \text{auf } \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad (6.13)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_3^1 \text{ bzw. } \Gamma_3^2, \quad (6.14)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_F, \quad (6.15)$$

$$\mathbf{n} \cdot \sigma(\mathbf{u}, p) \tau = 0 \quad \text{auf } \Gamma_F. \quad (6.16)$$

Die Bewegung der beiden horizontalen Platten entspricht der inhomogenen Randbedingung (6.13) auf $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Die Oberfläche des Magnets Γ_3^1 bzw. Γ_3^2 ist der feste Rand des Strömungsgebietes Ω_1 bzw. Ω_2 , so daß die klassische Stokes-Randbedingung (6.14) auf Γ_3^1 bzw. Γ_3^2 zu fordern wäre. Auf dem freien Rand Γ_F gelten die Gleitrandbedingung (6.15) und die zusätzliche Bedingung (6.16).

Die Modellgebiete Ω_1 und Ω_2 haben krummlinige Ränder. Die Gittergenerierung zur Erstellung der diskreten Aufgabe besteht in dem Fall nicht nur aus einer uniformen Verfeinerung sondern auch aus einer Randanpassung. Die verwendeten Grobgitter (Stufe 1) und die Gitter auf Stufe 2 sind in Abbildungen 6.11 und 6.12 zu sehen. Bei der Konstruktion der Gitter wurde das Programmsystem **MATLAB** - PDE Toolbox (siehe [46]) verwendet.

Die Anzahl der Elemente sowie der Unbekannten bei gleichmäßiger Verfeinerung ist in der Tabelle 6.9 dokumentiert. Da wir ein zweidimensionales Problem betrachten, wächst die Anzahl der Unbekannten um einen Faktor in der Größenordnung 4 von einer Stufe zur nächstfeineren an. Aufgrund der großen Anzahl der Unbekannten und den daraus folgenden hohen Rechenzeiten beschränken wir unsere Rechnungen auf die Stufe 5. Die Stufe 5 betrachten wir als die feinste Stufe der Gitter.

Wir haben das Modellproblem (6.11)-(6.12) mit den Randbedingungen (6.13)-(6.16) für die Reynoldzahlen $Re = 0.1$, $Re = 1$ und $Re = 10$ gelöst. Nach den numerischen Experimenten haben wir festgestellt, daß die Unterschied zwischen die Ergebnisse für $Re = 0.1$, $Re = 1$ und $Re = 10$ weniger als 2 % ist. Aus diesem Grund stellen wir zunächst die numerischen Ergebnisse für das Problem (6.11)-(6.16) nur mit $Re = 1$ dar.

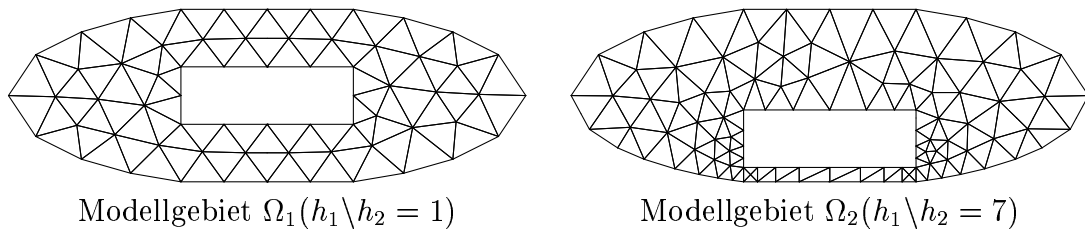


Abbildung 6.11: Die verwendeten Grobgitter (Stufe 1)

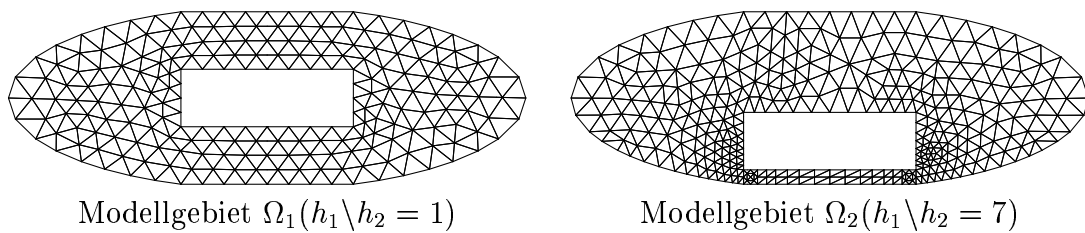


Abbildung 6.12: Die verwendeten Gitter auf Stufe 2

Stufe	Elemente	Unb. Geschw.	Unb. Druck
Modellgebiet $\Omega_1(h_1 \setminus h_2 = 1)$			
1	92	440	64
2	368	1 616	220
3	1 472	6 176	808
4	5 888	24 128	3 088
5	23 552	95 360	12 064
Modellgebiet $\Omega_2(h_1 \setminus h_2 = 7)$			
1	154	732	106
2	616	2 696	366
3	2 464	10 320	1 348
4	9 856	40 352	5 160
5	39 424	159 552	20 176

Tabelle 6.9: Die Anzahl der Unbekannten bei gleichmäßiger Verfeinerung

In der Tabelle 6.10 sind die Anzahl der nichtlinearen Iterationen sowie die Gesamtzahl linearer Iterationen und die Rechenzeit auf den einzelnen Stufen dargestellt. Bei den Rechnungen ist ein lineares Wachstum der Rechenzeiten bemerkbar. Es wird mit der Abbildung 6.13 graphisch dargestellt. Die Ergebnisse in der Tabelle 6.10 zeigen deutlich, daß das Problem (6.11)-(6.12) mit den Randbedingungen (6.13)-(6.16) mit Hilfe des Mehrgitterverfahrens effizient gelöst werden kann.

Stufe	Nichtlin. Iterationen (lin. Iterationen)	CPU-Zeit (Sec.)
Modellgebiet $\Omega_1(h_1 \setminus h_2 = 1)$		
1	5 (10)	1.17
2	5 (8)	3.54
3	5 (8)	18.23
4	5 (10)	102.21
5	4 (10)	429.74
Modellgebiet $\Omega_2(h_1 \setminus h_2 = 7)$		
1	5 (10)	2.57
2	5 (8)	6.36
3	5 (9)	33.85
4	5 (10)	168.08
5	5 (10)	702.85

Tabelle 6.10: Die Anzahl der nichtlinearen Iterationen, die entsprechende Gesamtzahl der linearen Iterationen und die Rechenzeit in Sekunden pro Stufe

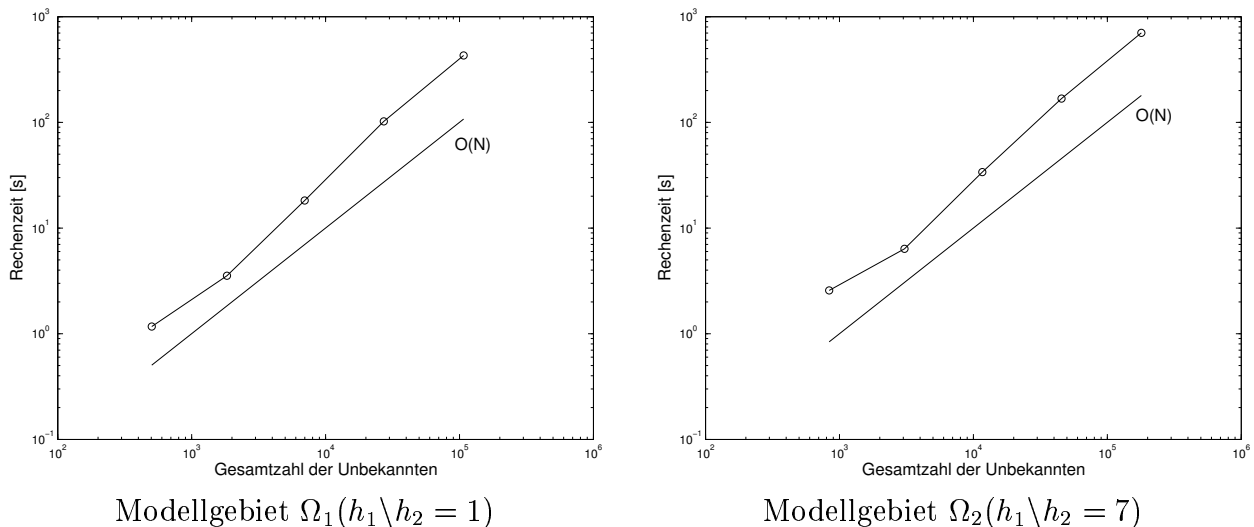


Abbildung 6.13: Die Rechenzeiten in Abhängigkeit von der Gesamtzahl der Unbekannten N pro Stufe des Mehrgitterverfahrens

Wir zeigen in den Abbildungen 6.14, 6.15 und 6.16 das Vektorfeld der diskreten Geschwindigkeitsapproximation, die diskrete Stromfunktion und die Isolinien der Druckapproximation. Die Abbildungen 6.14 und 6.15 zeigen deutlich, daß die Position des Magnets eine wesentliche Rolle für die Strömungsverhältnisse im Dissipationssystem spielt. Wenn der Magnet in der Mitte des Dissipationssystems ($h_1 \setminus h_2 = 1$) liegt, entstehen zwei Wir-

bel über und unter dem Magnet. Falls der Magnet in der Nähe von der unteren Platte ($h_1 \setminus h_2 = 7$) liegt, schließen sich die Stromfunktionsisolinien um den Magnet herum und entsteht nur ein Wirbel über dem Magnet. Die Isolinien des Druckes (siehe Abb. 6.16) zeigen die aufgetretenen Singularitäten. Dieser Effekt erfordert die Entwicklung adaptiver finiter Elemente Methoden für die weitere Untersuchung des Problems.

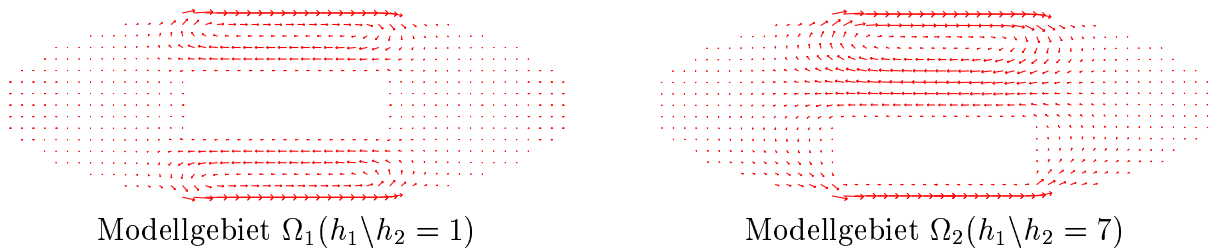


Abbildung 6.14: Vektorplot der Geschwindigkeit auf Stufe 5

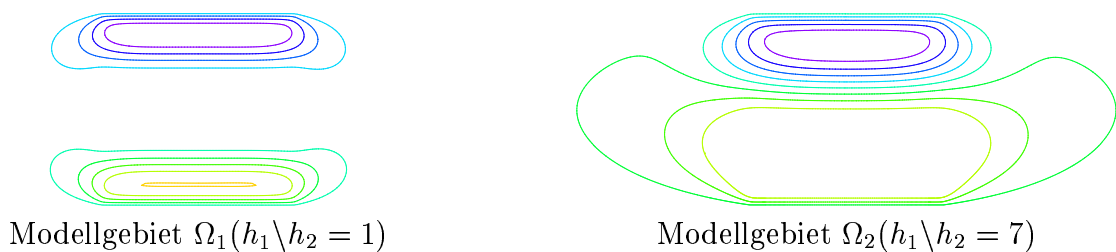


Abbildung 6.15: Isolinien der Stromfunktion auf Stufe 5



Abbildung 6.16: Isolinien des Druckes auf Stufe 5

Die numerische Untersuchung der Strömungsverhältnisse in einem Dissipationssystem schließen wir mit der numerischen Ergebnisse für die Dissipationsenergie ab. Die Dissipationsenergie ist eine wichtige Eigenschaft der Dissipationssysteme, da die Dissipationsenergie die vernichtete Energie des Systems beschreibt. Die Dissipationsenergie E eines Dissipati-

onssysteme ist durch

$$E = -\frac{\eta}{2} \mathbf{u}_0^2 \kappa, \quad \kappa = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 dV, \quad 1 \leq i, j \leq 2$$

gegeben (siehe [41]). Hier bezeichnet η die dynamische Viskosität, \mathbf{u}_0 die Geschwindigkeit der Platten ($\mathbf{u}_0 = (1, 0)^T$, siehe die Randbedingung (6.13)) und κ den dimensionlosen Dissipationskoeffizienten. Die berechneten Werte des Dissipationskoeffizienten κ in Abhängigkeit von der Lage des Magnets sind in der Abbildung 6.17 dargestellt. Die Ergebnisse zeigen deutlich, daß die Größe der Dissipationsenergie wesentlich von der Lage des Magnets abhängt.

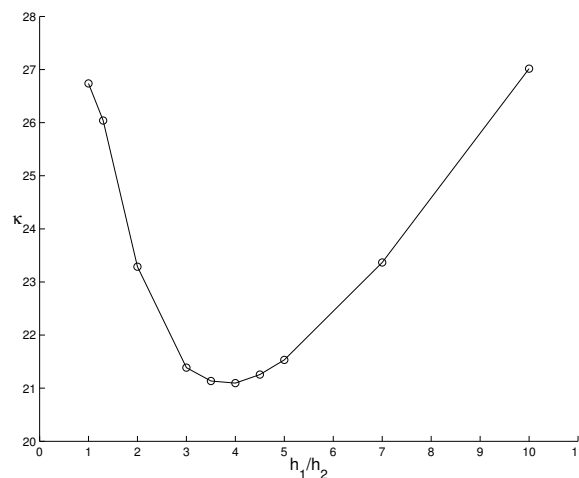


Abbildung 6.17: Der Dissipationskoeffizient κ in Abhängigkeit von der Lage des Magnets

6.2 Numerische Simulation der Strömungsverhältnisse in Magnetfluidichtungen

In diesem Abschnitt werden numerische Ergebnisse zu dem Modellproblem (2.5)-(2.7) mit den Randbedingungen (2.8)-(2.13) vorgestellt.

Zuerst beschreiben wir die Modellgebiete, in denen wir die Testrechnungen durchführen. Der Rand Γ des Strömungsgebietes Ω setzt sich aus zwei vorgegebenen Oberflächen (die Oberfläche des Rotors Γ_S und des Konzentrators Γ_K) und zwei freien Oberflächen Γ_F zusammen (siehe Abb. 2.4 im Abschnitt 2.3, Kapitel 2). Da wir uns auf die Untersuchung des Strömungsverhaltens konzentriert haben, haben wir die freien Oberflächen bei der mathematischen Modellierung des Strömungsverhaltens als bekannt angenommen. Um die Testrechnungen in realistischen Modellgebieten durchführen zu können, verwenden wir punktweise gegebene freie Oberflächen, die nach der in [54] beschriebenen Methode bestimmt wurden. Zunächst stellen wir kurz diese Methode zur Berechnung der freien Oberflächen dar.

Auf den freien Grenzflächen Γ_F^1 und Γ_F^2 ($\Gamma_F = \Gamma_F^1 \cup \Gamma_F^2$) zwischen der magnetischen Flüssigkeit und der Luft muss die Young-Laplace-Gleichung (siehe die Gleichung (2.3) im Abschnitt 2.2, Kapitel 2 mit $P = p_f + p_m = \varrho v_0^2 p + p_m$)

$$\mathbf{n} \cdot \sigma(\mathbf{u}, p) \mathbf{n} = \alpha \mathcal{K} + \frac{\mu_0}{2} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})^2 + \mu_0 \int_0^H M(H') dH' + c_i \quad \text{auf } \Gamma_F^i, i = 1, 2 \quad (6.17)$$

erfüllt sein. Hier bezeichnen c_i , $i = 1, 2$ positive Konstanten. Wir nehmen an, daß die magnetische Flüssigkeit in Sättigung steht, d.h. $M = M_s$. Dann gilt

$$\mu_0 \int_0^H M(H') dH' = \mu_0 M_s H.$$

Weiterhin setzen wir voraus, daß die Oberflächenspannung ($\alpha \mathcal{K} \approx 0$) und der Term $\frac{\mu_0}{2} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})^2$ vernachlässigt werden können. Das hyperbolische Profil ($Y^2 = X^2 - 1$) des Magnetkerns und die Annahme, daß es $H \gg M_s$ gilt, ermöglichen die folgende explizite mathematische Darstellung des Magnetfeldes in einer Magnetfluiddichtung

$$H(X, Y) = \frac{1}{\sqrt[4]{(X^2 + Y^2 + 2)^2 - 8X^2}}$$

(siehe [52]). Nach diesen Annahmen liefert die Young-Laplace-Gleichung (6.17) eine Gleichung der Gestalt

$$H(X, Y_i(X)) = Fr_m \Phi_i(\mathbf{u}, p) - c_i \quad (6.18)$$

zur Bestimmung der freien Oberflächen Γ_F^i , $i = 1, 2$, wobei $Y_i(X)$ eine Parametrisierung der freien Oberfläche Γ_F^i ist. Hier bezeichnet Fr_m die magnetische Froudezahl. Die Funktion $\Phi_i(\mathbf{u}, p)$ bezeichnet die Terme, die von der Geschwindigkeit \mathbf{u} und dem Druck p abhängen. Die Differenz $Pm = c_1 - c_2$ entspricht dem Drucksprung der hermetisch voneinander getrennten Umgebungsbereiche. Also ist der Parameter Pm bekannt.

Seien gegeben die Parametrisierungen $Y_1(X)$ und $Y_2(X)$ der freien Oberflächen Γ_F^1 und Γ_F^2 , der Parameter Pm und das feste Volumen U des Gebietes. Dann ist das Strömungsgebiet Ω gegeben und man berechnet die Geschwindigkeit \mathbf{u} und den Druck p in Ω . So sind die Funktionen $\Phi_i(\mathbf{u}, p)$ auf $Y_i(X)$, $i = 1, 2$ bekannt. Die Gleichung (6.18) kann nach $Y_i(X)$ aufgelöst werden. Die fehlende Konstante wird durch Volumenerhaltung fixiert.

Zur Berechnung der in (6.18) benötigten Geschwindigkeit \mathbf{u} bzw. des Druckes p wurde in [54] ein entkoppeltes Modell mit dem Modellparameter $\delta = 0.01$ angewendet (siehe den Hinweis im Abschnitt 2.3, Kapitel 2).

Mit der in [54] beschriebenen Methode kann man für entsprechende Werte der magnetischen Froudezahl Fr_m , des Parameters Pm , des Volumens U und des Modellparameters δ die entsprechenden freien Oberflächen berechnen. Zusätzlich betrachtet man in [54] den Parameter

$$Gm := \frac{Re^2}{Fr_m} \quad (6.19)$$

und bei der Berechnung der Geschwindigkeit wird $\sqrt{Gm Fr_m}$ an der Stelle von Re verwendet. Somit entsprechen fünf Parameter (Fr_m , Pm , U , Gm und δ) den freien Oberflächen eines Gebietes.

Zur numerischen Simulation der Strömungsverhältnisse in Magnetfluidichtungen verwenden wir drei Modellgebiete Ω_i , $i = 1, 2, 3$. Die entsprechenden Parameter zur Berechnung der freien Oberflächen der Modellgebiete Ω_i , $i = 1, 2, 3$ sind in der Tabelle 6.11 aufgelistet. Die entsprechenden Reynoldzahlen Re werden mit (6.19) berechnet und sind auch in der Tabelle 6.11 zu sehen. In der Tabelle A.1 bzw. A.2 und A.3 (siehe Anhang A) sind die X - und Y -Koordinate der Punkte auf den freien Oberflächen für das Modellgebiet Ω_1 bzw. Ω_2 und Ω_3 aufgelistet. Die Geometrie der Modellgebiete Ω_1 , Ω_2 und Ω_3 kann man in der Abbildung 6.18 sehen. Dort wird eine feinere Zerlegung jedes Modellgebietes dargestellt.

Froudezahl Fr_m	Parameter Pm	Volumen U	Parameter Gm	Modellparameter δ	Reynoldzahl Re
Modellgebiet Ω_1					
0.1	0	5	$4 \cdot 10^4$	0.01	63.2456
Modellgebiet Ω_2					
0.25	0	5	$4 \cdot 10^4$	0.01	100
Modellgebiet Ω_3					
1	0	5	$4 \cdot 10^4$	0.01	200

Tabelle 6.11: Parameter zur Berechnung der freien Oberflächen der Modellgebiete

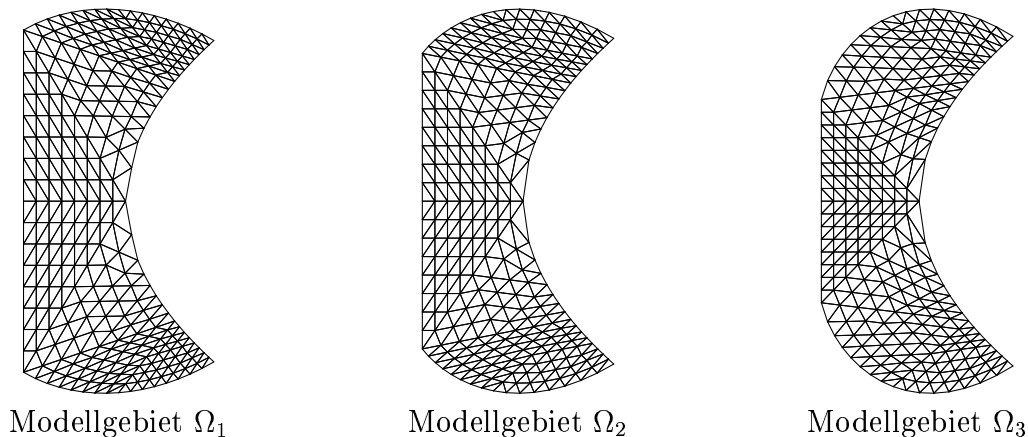


Abbildung 6.18: Modellgebiete Ω_i , $i = 1, 2, 3$ (Verfeinerungsstufe 4)

Die Modellgebiete Ω_1 , Ω_2 und Ω_3 haben krummlinigen Ränder. Die Gittergenerierung zur Erstellung der diskreten Aufgabe besteht in dem Fall nicht nur aus einer uniformen Verfeinerung sondern auch aus einer Randanpassung. Die verwendeten Grobgitter (Stufe 1)

und die Gitter auf Stufe 2 sind in Abbildungen 6.19 und 6.20 zu sehen. Bei der Konstruktion der Gitter wurde der Gittergenerator **OMEGA** vom Programmsystem **MoonMD** (siehe [9]) verwendet.

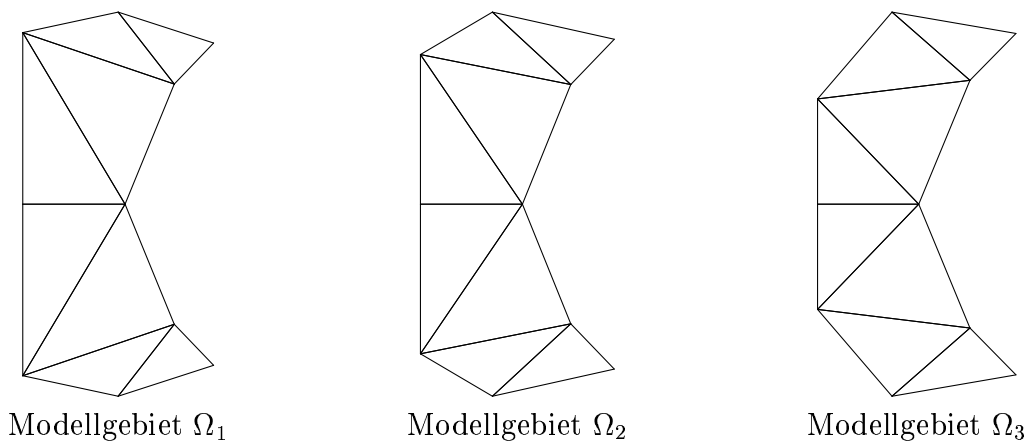


Abbildung 6.19: Die verwendeten Grobgitter (Stufe 1)

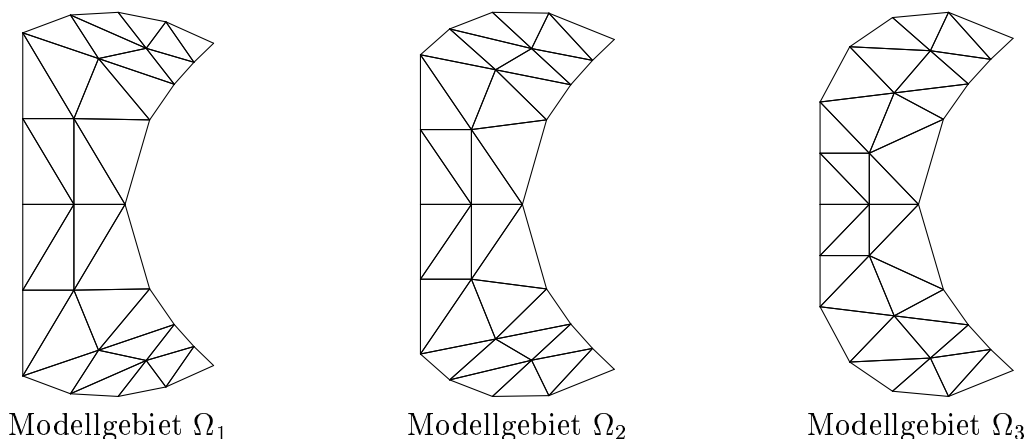


Abbildung 6.20: Die verwendeten Gitter auf Stufe 2

Die Anzahl der Elemente sowie der Unbekannten bei gleichmäßiger Verfeinerung ist in der Tabelle 6.12 dokumentiert. Da wir ein zweidimensionales Problem betrachten, wächst die Anzahl der Unbekannten um einen Faktor in der Größenordnung 4 von einer Stufe zur nächstfeineren an. Aufgrund der großen Anzahl der Unbekannten und daraus folgenden hohen Rechenzeiten beschränken wir unsere Rechnungen auf der Stufe 7. Die Stufe 7 betrachten wir als die feinste Stufe der Gitter.

Die freien Randteile des Strömungsgebietes Ω_i , $i = 1, 2, 3$ sind nur punktwise gegeben. In dem Fall steht keine stetige Normale zur Verfügung. Bei der Implementierung der Gleitrandbedingung auf dem freien Rand wenden wir in jedem Knoten des Gitters

die diskreten Normaleneinheitsvektoren an, d.h., den äußeren Normaleneinheitsvektor der Kante des Randelementes. Wenn zwei Elemente einen gemeinsamen Knoten als Eckpunkt besitzen, bestimmen wir den diskreten Normaleneinheitsvektor als normierte Summe der äußeren Normalenvektoren der beiden Randkanten in diesem Knoten.

Stufe	Elemente	Unb. Geschw.	Unb. Druck	Unb. Umfangsgeschw.
Modellgebiete Ω_1, Ω_2 und Ω_3				
1	8	54	10	27
2	32	170	27	85
3	128	594	85	297
4	512	2 210	297	1 105
5	2 048	8 514	1 105	4 257
6	8 192	33 410	4 257	16 705
7	32 768	132 354	16 705	66 177

Tabelle 6.12: Die Anzahl der Unbekannten bei gleichmäßiger Verfeinerung

Die Finite-Elemente-Diskretisierung des Modellproblems (2.5)-(2.7) mit den Randbedingungen (2.8)-(2.13) führt auf ein schwach besetztes nichtlineares gekoppeltes Gleichungssystem (siehe Abschnitt 5.2, Kapitel 5). Das gekoppelte, algebraische Gleichungssystem lösen wir unter Einsatz einer iterativen Entkopplungsstrategie (siehe den Entkopplungsalgorithmus im Abschnitt 5.3, Kapitel 5). Auf der Stufe l des Mehrgitterverfahrens führen wir die folgende Entkopplung

$$\{\mathbf{u}_{h,l}^k, p_{h,l}^k, \omega_{h,l}^k\} \mapsto \{\mathbf{u}_{h,l}^{k+1}, p_{h,l}^{k+1}, \omega_{h,l}^{k+1}\}, \quad \mathbf{u}_{h,l}^0 = \mathbf{0}, p_{h,l}^0 = 0, \omega_{h,l}^0 = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

durch. Die Entkopplungsiteration brach bei $\|\omega_{h,l}^{k+1} - \omega_{h,l}^k\|_{0,2,\Omega} \leq 10^{-8}$ ab. In der Tabelle 6.13 ist die Anzahl der Entkopplungsiterationen pro Stufe des Mehrgitterverfahrens dargestellt. Die Ergebnisse in der Tabelle 6.14 zeigen den Einfluss der Entkopplungsstrategie auf der diskreten Lösung. Dort sind die Fehler $\|\omega_h^k - \omega_h^1\|_{0,2,\Omega}$, $\|\mathbf{u}_h^k - \mathbf{u}_h^1\|_{0,2,\Omega}$ und $\|p_h^k - p_h^1\|_{0,2,\Omega}$ auf feinen Stufen des Mehrgitterverfahrens dokumentiert. Hier bezeichnet $\omega_{h,l}^k$ bzw. $\mathbf{u}_{h,l}^k$ und $p_{h,l}^k$ die diskrete Lösung nach der Entkopplungsiteration k auf der Stufe l . Die Ergebnisse in der Tabelle 6.14 zeigen deutlich, daß die Sekundärströmung eine untergeordnete Rolle bei der Berechnung der Hauptströmung spielt. Die Ergebnisse verifizieren die heuristische einfache Entkopplung des Modells (2.5)-(2.13), die man in [52], [54] und [76] finden kann. Dort entkoppelt man das Modell (2.5)-(2.13) durch eine Vernachlässigung des Terms $\mathbf{u} \cdot \nabla \omega$ in der Konvektions-Diffusions-Gleichung (2.7).

In jeder Entkopplungsiteration

$$\{\mathbf{u}_{h,l}^k, p_{h,l}^k, \omega_{h,l}^k\} \mapsto \{\mathbf{u}_{h,l}^{k+1}, p_{h,l}^{k+1}, \omega_{h,l}^{k+1}\}, \quad \mathbf{u}_{h,l}^0 = \mathbf{0}, p_{h,l}^0 = 0, \omega_{h,l}^0 = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

auf der Stufe l des Mehrgitterverfahrens berechnen wir die approximierete Lösung $\omega_{h,l}^{k+1}$ bzw. $(\mathbf{u}_{h,l}^{k+1}, p_{h,l}^{k+1})$ mit Hilfe von den Komponenten des Löser **MG-KD** bzw. **MG-NS** (siehe Abschnitt 5.4 bzw. 5.5, Kapitel 5).

Stufe	1	2	3	4	5	6	7
Modellgebiet Ω_1							
Entkopplungsiter.	5	5	5	4	4	4	4
Modellgebiet Ω_2							
Entkopplungsiter.	6	6	6	6	6	5	5
Modellgebiet Ω_3							
Entkopplungsiter.	13	13	12	10	9	8	8

Tabelle 6.13: Die Anzahl der Entkopplungsiterationen pro Stufe des Mehrgitterverfahrens

Stufe l	k	$\ \omega_{h,l}^k - \omega_{h,l}^1\ _{0,2,\Omega}$	$\ \mathbf{u}_{h,l}^k - \mathbf{u}_{h,l}^1\ _{0,2,\Omega}$	$\ p_{h,l}^k - p_{h,l}^1\ _{0,2,\Omega}$
Modellgebiet Ω_1				
4	4	3.024143e-05	2.524124e-07	1.097317e-07
5	4	9.074464e-06	2.022643e-07	3.248126e-08
6	4	3.561360e-06	6.201111e-08	1.364285e-08
7	4	2.924312e-06	6.200702e-08	9.812252e-09
Modellgebiet Ω_2				
4	6	1.955079e-04	6.958529e-06	5.899936e-07
5	6	7.526252e-05	2.269420e-06	2.758235e-07
6	5	3.876853e-05	1.106981e-06	1.431153e-07
7	5	1.050478e-05	2.616858e-07	3.771402e-08
Modellgebiet Ω_3				
4	10	2.163204e-03	6.229055e-05	5.461009e-06
5	9	7.191527e-04	2.163754e-05	1.858267e-06
6	8	4.865763e-04	1.446804e-05	1.250905e-06
7	8	1.558791e-04	7.247004e-06	2.649503e-07

Tabelle 6.14: Der Einfluss der Entkopplungsstrategie auf die diskrete Lösung

Das lineare System zur Berechnung von $\omega_{h,l}^{k+1}$ wurde mit dem Mehrgitterlöser **MG-KD** unter Verwendung des W-Zyklus gelöst. Im W-Zyklus des Mehrgitterverfahrens wurden die Glättungsiterationen mit Hilfe vom Jacobi-Iterationsverfahren realisiert. Die Testrechnungen wurden mit zwei Vor- und zwei Nachglättungsiterationen durchgeführt. Die approximierete Lösung wurde mit dem Faktor 0.8 gedämpft. Die Iteration brach ab, falls das Residuum um den Faktor 0.1 reduziert wurde.

Zur Berechnung von $(\mathbf{u}_{h,l}^{k+1}, p_{h,l}^{k+1})$ lösen wir das nichtlineare System unter Einsatz der Fixpunktiteration. Die nichtlineare Iteration brach bei einer euklidischen Norm des Residuums von kleiner als 10^{-10} ab. Eine Dämpfung bei der nichtlinearen Iteration wurde nicht verwendet. Die aufgetretenden linearen Systeme wurden mit dem Mehrgitterverfahren **MG-NS** unter Verwendung des W-Zyklus gelöst. Im W-Zyklus des Mehrgitter-

verfahrens wurden die Glättungsiterationen mit Hilfe des Vanka Glätters realisiert. Die Testrechnungen wurden mit drei Vor- und drei Nachglättungsiterationen durchgeführt. Die approximierten Lösungen des linearen Problems wurde mit dem Faktor 0.8 gedämpft, um bessere Konvergenz zu erzielen. Die lineare Iteration brach bei einer euklidischen Norm des Residuums von kleiner als 10^{-10} ab.

Für die Testrechnungen im Modellgebiet Ω_1 bzw. Ω_2 und Ω_3 sind in der Tabelle 6.15 bzw. 6.16 und 6.17 die Anzahl der linearen Iterationen zur Berechnung der diskreten Umfangsgeschwindigkeit ω_h sowie die Anzahl der nichtlinearen und linearen Iterationen zur Berechnung der diskreten Geschwindigkeit \mathbf{u}_h und dem Druck p_h pro Entkopplungsiteration auf feinen Stufen des Mehrgitterverfahrens dargestellt. Die Anzahl der Iterationen zur Berechnung der approximierten Lösungen und die auch in den Tabellen 6.15, 6.16 und 6.17 dargestellten Rechenzeiten zeigen, daß die beiden Teilprobleme sowie das gekoppelte Problem im Zusammenhang mit der iterativen Entkopplungsstrategie mit Mehrgitterverfahren effizient gelöst werden können.

Entkopplungsiteration	Lin. Iterationen in MG-KD	Nichtlin. Iterationen (lin. Iter.) in MG-NS	CPU-Zeit (Sec.)
Stufe 5			
1	5	4(5)	17.68
2	3	2(8)	28.07
3	2	1(9)	31.56
4	1	1(9)	31.53
Stufe 6			
1	5	4(5)	74.68
2	2	1(7)	103.40
3	1	1(7)	103.21
4	1	1(7)	103.25
Stufe 7			
1	5	4(4)	244.14
2	2	1(6)	361.77
3	1	1(6)	360.88
4	1	1(6)	360.96

Tabelle 6.15: Die Anzahl der Iterationen zur Berechnung der diskreten Lösungen im Modellgebiet Ω_1 und die Rechenzeit pro Entkopplungsiteration auf feinen Stufen des Mehrgitterverfahrens

Entkopplungs-iteration	Lin. Iterationen in MG-KD	Nichtlin. Iterationen (lin. Iter.) in MG-NS	CPU-Zeit (Sec.)
Stufe 5			
1	7	4(6)	21.24
2	3	2(10)	35.06
3	2	2(13)	45.51
4	2	1(15)	52.55
5	1	1(15)	52.53
6	1	1(15)	52.54
Stufe 6			
1	9	4(5)	75.53
2	3	2(8)	118.58
3	2	1(10)	148.00
4	1	1(11)	162.42
5	1	1(11)	162.44
Stufe 7			
1	11	4(4)	252.21
2	2	1(6)	362.76
3	1	1(7)	422.04
4	1	1(7)	422.12
5	1	1(7)	422.20

Tabelle 6.16: Die Anzahl der Iterationen zur Berechnung der diskreten Lösungen im Modellgebiet Ω_2 und die Rechenzeit pro Entkopplungsiteration auf feinen Stufen des Mehrgitterverfahrens

Entkopplungs-iteration	Lin. Iterationen in MG-KD	Nichtlin. Iterationen (lin. Iter.) in MG-NS	CPU-Zeit (Sec.)
Stufe 5			
1	6	4(6)	21.35
2	4	3(12)	42.20
3	3	3(17)	59.67
4	3	2(21)	73.69
5	2	2(24)	84.17
6	2	2(27)	94.72
7	1	1(29)	101.70
8	1	1(29)	101.71
9	1	1(29)	101.72
Stufe 6			
1	7	4(6)	89.62
2	4	3(11)	162.50
3	3	2(15)	221.17
4	3	2(19)	279.88
5	2	2(22)	324.08
6	2	1(24)	353.33
7	1	1(25)	367.87
8	1	1(25)	367.89
Stufe 7			
1	12	4(5)	313.13
2	4	2(10)	608.26
3	2	2(14)	851.59
4	2	2(17)	1 033.60
5	2	1(19)	1 153.70
6	2	1(20)	1 215.00
7	1	1(20)	1 214.10
8	1	1(20)	1 214.10

Tabelle 6.17: Die Anzahl der Iterationen zur Berechnung der diskreten Lösungen im Modellgebiet Ω_3 und die Rechenzeit pro Entkopplungsiteration auf feinen Stufen des Mehrgitterverfahrens

Wir zeigen in den Abbildungen 6.21, 6.22 und 6.23 die Isolinien der diskreten Umfangsgeschwindigkeit, der diskreten Stromfunktion und des diskreten Druckes auf Stufe 6 nach der letzten Entkopplungsiteration. Die Ergebnisse für die Umfangsgeschwindigkeit und die Stromfunktion stimmen qualitativ gut mit den nach nur einer Entkopplungsiteration entsprechenden Resultaten in [54] überein. Da die Strömungsverhältnisse in Magnetfluid-dichtungen in [54] mit einem Modell in Stromfunktion-Wirbel-Formulierung untersucht

wurden, können wir die Ergebnisse für den Druck nicht vergleichen.

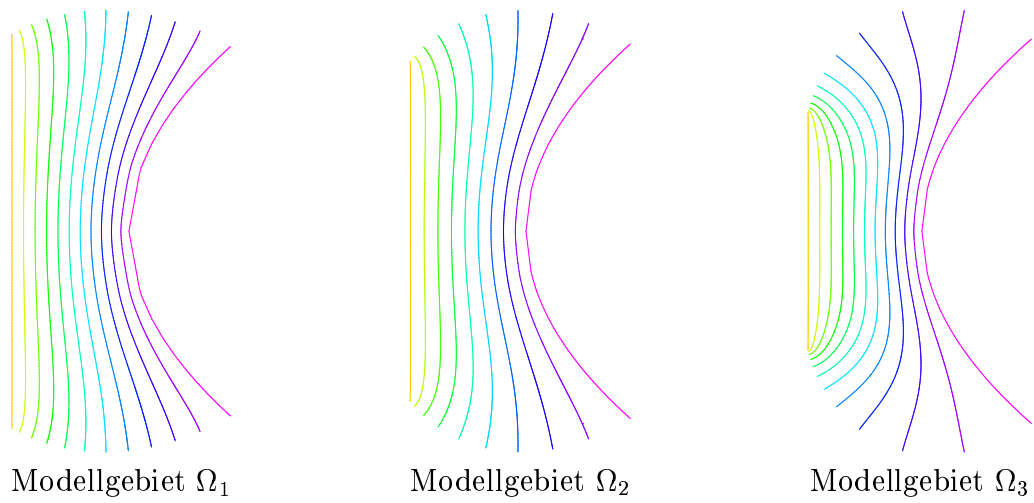


Abbildung 6.21: Isolinien der Umfangsgeschwindigkeit auf Stufe 6

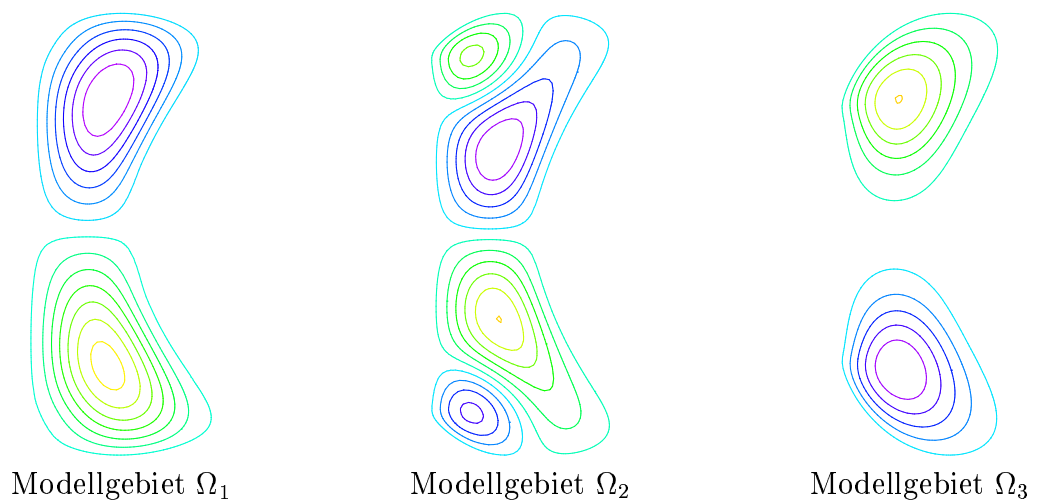


Abbildung 6.22: Isolinien der Stromfunktion auf Stufe 6

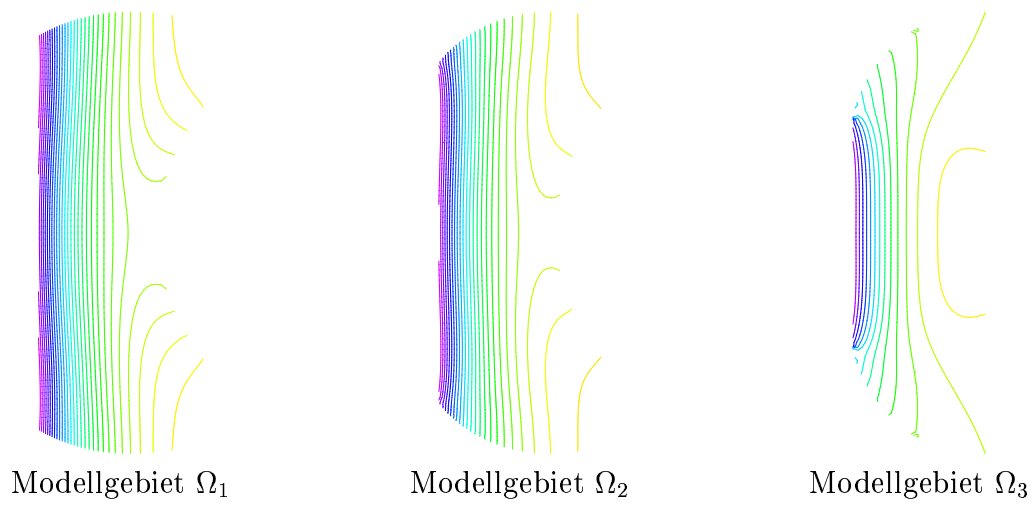


Abbildung 6.23: Isolinien des Druckes auf Stufe 6

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

Das Ziel dieser Arbeit war die Finite-Elemente-Modellierung und Analysis der Strömungsverhältnisse in Magnetfluidichtungen, die die wesentliche Rolle bei der mathematischen Modellierung des Dichtungsverhaltens spielen.

Dieses Ziel zu erreichen, haben wir die Strömungsverhältnisse in Magnetfluidichtungen mit Hilfe eines mathematischen zweidimensionalen gekoppelten Modells beschrieben. Es wurde gezeigt, daß die Reduktion des dreidimensionalen Modells auf eine zweidimensionale Betrachtungsweise zulässig ist. Das zweidimensionale gekoppelte Modell besteht aus den Navier-Stokes-Gleichungen für die Sekundärströmung und den Druck, und der Konvektions-Diffusions-Gleichung für die Hauptströmung. Die klassischen Stokes-Randbedingungen auf dem festen Rand des Strömungsgebietes und die Gleitrandbedingung auf den freien Rand vervollständigen das Modell.

Die mathematische Lösbarkeit des gekoppelten Modells wurde mit der Galerkin-Methode analysiert, wobei eine Aufspaltungstechnik und ein schwaches Maximumprinzip für gemischte Randwertaufgaben zum Einsatz gekommen sind. Ausgangspunkt der Untersuchungen war eine schwache Formulierung des Problems mit Berücksichtigung der Gleitrandbedingung in starker Form im Ansatzraum. Für hinreichend kleine Werte des Parameters δRe^2 hat das stetige gekoppelte Problem genau eine Lösung. Die stetige gekoppelte Aufgabe haben wir unter Einsatz einer iterativen teilproblem-orientierten Entkopplungsstrategie betrachtet, die aus der sukzessiven Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen und der Konvektions-Diffusions-Gleichung besteht.

Im Hinblick auf eine effiziente Umsetzung der Diskretisierung im Programmsysteme wurden isoparametrische finite Elemente zum Modellsystem verwendet. Jede Komponente der Sekundärströmung und die Hauptströmung wurden durch quadratische Ansätze approximiert. Ein linearer Ansatz approximiert den Druck. Das gekoppelte diskrete Problem haben wir unter Verwendung der teilproblem-orientierten Entkopplungsstrategie untersucht. Die Lösbarkeit der beiden diskreten Teilprobleme und die Konvergenz der Entkopplungsiteration liefern die Lösbarkeit der diskreten gekoppelten Aufgabe. Die Konvergenzanalyse zu den beiden diskreten Teilproblemen wurde unter Einsatz der Technik der exakten Zerlegung durchgeführt. Die Konstruktion einer exakten Zerlegung wurde kurz dargestellt. Wir haben den Einfluss dieser Technik auf den Bilinearformen untersucht. Die Gesamt-

fehlerabschätzung wurde mit der Fehleranalyse der beiden diskreten Teilprobleme und der Konvergenz der Entkopplungsiteration hergeleitet. Eine interessante zukünftige Aufgabestellung wäre die Herleitung von a priori-Gesamtfehlerabschätzung ohne Verwendung der teilproblem-orientierten Entkopplungsstrategie.

Die diskreten Modellgleichungen führen auf ein gekoppeltes nichtlineares algebraisches Gleichungssystem, das iterativ entkoppelt wurde und unter Einsatz vom Mehrgitterverfahren effizient gelöst wurde. Die Gleitrandbedingung erfordert eine spezielle, programmtechnische Implementation, die durch den direkten Einbau der diskreten Form der Bedingung in das algebraische Gleichungssystem realisiert wurde.

Die Testrechnungen zeigen, daß das konstruierte Lösungsverfahren gut einsetzbar ist und optimale Fehlerordnungen erreicht werden. Unsere numerische Ergebnisse bei der iterativen Entkopplung des gekoppelten Modells verifizieren die heuristische einfache Entkopplung, die man in der Literatur im Falle geringer Spaltbreiten finden kann.

Unter Verwendung der Implementation der Navier-Stokes-Gleichungen mit Gleitrandbedingung wurden auch die Strömungsverhältnisse in Dissipationssysteme numerisch untersucht. Die numerischen Simulationen haben deutlich gezeigt, daß die Position des Magnets in einem Dissipationssystem eine wesentliche Rolle für die Strömungsverhältnisse spielt. Die Testrechnungen haben auch aufgetretene Singularitäten gezeigt. Dieser Effekt erfordert die Entwicklung adaptiver finiter Elemente Methoden für die weitere Untersuchung des Problems.

Anhang A

Die verwendeten freien Oberflächen

In diesem Anhang stellen wir die bei der numerischen Simulation der Strömungsverhältnisse in Magnetfluidichtungen verwendeten freien Oberflächen tabellarisch dar. Die freien Oberflächen wurden nach der in [54] beschriebenen Methode punktweise bestimmt. Für jedes Modellgebiet (siehe Tab. 6.11 im Abschnitt 6.2, Kapitel 6) werden die X - und Y -Koordinate der Punkte auf den freien Oberfläche in einer Tabelle aufgelistet.

Tabelle A.1: Die punktweise gegebenen freien Oberflächen des Modellgebietes Ω_1

X -Koordinate	Y -Koordinate	X -Koordinate	Y -Koordinate
0.00000	1.67711	0.00000	-1.67711
0.03728	1.69878	0.03728	-1.69878
0.07456	1.71854	0.07456	-1.71854
0.11185	1.73675	0.11185	-1.73675
0.14914	1.75358	0.14914	-1.75358
0.18643	1.76914	0.18643	-1.76914
0.22372	1.78351	0.22372	-1.78351
0.26101	1.79675	0.26101	-1.79675
0.29831	1.80892	0.29831	-1.80892
0.33560	1.82006	0.33560	-1.82006
0.37290	1.83021	0.37290	-1.83021
0.41020	1.83938	0.41020	-1.83938
0.44751	1.84762	0.44751	-1.84762
0.48481	1.85494	0.48481	-1.85494
0.52212	1.86137	0.52212	-1.86137
0.55943	1.86692	0.55943	-1.86692
0.59674	1.87162	0.59674	-1.87162
0.63405	1.87547	0.63405	-1.87547

0.67136	1.87849	0.67136	-1.87849
0.70867	1.88070	0.70867	-1.88070
0.74599	1.88211	0.74599	-1.88211
0.78331	1.88273	0.78331	-1.88273
0.82062	1.88256	0.82062	-1.88256
0.85794	1.88163	0.85794	-1.88163
0.89527	1.87993	0.89527	-1.87993
0.93259	1.87747	0.93259	-1.87747
0.96991	1.87427	0.96991	-1.87427
1.00724	1.87032	1.00724	-1.87032
1.04456	1.86564	1.04456	-1.86564
1.08189	1.86022	1.08189	-1.86022
1.11921	1.85407	1.11921	-1.85407
1.15654	1.84720	1.15654	-1.84720
1.19387	1.83961	1.19387	-1.83961
1.23120	1.83129	1.23120	-1.83129
1.26853	1.82225	1.26853	-1.82225
1.30586	1.81248	1.30586	-1.81248
1.34320	1.80200	1.34320	-1.80200
1.38053	1.79078	1.38053	-1.79078
1.41786	1.77884	1.41786	-1.77884
1.45520	1.76616	1.45520	-1.76616
1.49253	1.75274	1.49253	-1.75274
1.52987	1.73858	1.52987	-1.73858
1.56720	1.72365	1.56720	-1.72365
1.60454	1.70796	1.60454	-1.70796
1.64187	1.69149	1.64187	-1.69149
1.67921	1.67422	1.67921	-1.67422
1.71655	1.65615	1.71655	-1.65615
1.75388	1.63724	1.75388	-1.63724
1.79122	1.61748	1.79122	-1.61748
1.82856	1.59684	1.82856	-1.59684
1.86590	1.57530	1.86590	-1.57530
X-Koordinate	Y-Koordinate	X-Koordinate	Y-Koordinate

Tabelle A.2: Die punktweise gegebenen freien Oberflächen des Modellgebietes Ω_2

X-Koordinate	Y-Koordinate	X-Koordinate	Y-Koordinate
0.00000	1.46718	0.00000	-1.46718
0.01875	1.49122	0.01875	-1.49122
0.03818	1.51404	0.03818	-1.51404
0.05830	1.53607	0.05830	-1.53607
0.07914	1.55749	0.07914	-1.55749
0.10072	1.57840	0.10072	-1.57840
0.12304	1.59884	0.12304	-1.59884
0.14612	1.61885	0.14612	-1.61885
0.16999	1.63843	0.16999	-1.63843
0.19466	1.65758	0.19466	-1.65758
0.22013	1.67630	0.22013	-1.67630
0.24643	1.69456	0.24643	-1.69456
0.27356	1.71235	0.27356	-1.71235
0.30155	1.72964	0.30155	-1.72964
0.33040	1.74639	0.33040	-1.74639
0.36012	1.76258	0.36012	-1.76258
0.39071	1.77816	0.39071	-1.77816
0.42220	1.79310	0.42220	-1.79310
0.45458	1.80735	0.45458	-1.80735
0.48787	1.82087	0.48787	-1.82087
0.52205	1.83360	0.52205	-1.83360
0.55714	1.84551	0.55714	-1.84551
0.59314	1.85653	0.59314	-1.85653
0.63004	1.86663	0.63004	-1.86663
0.66784	1.87574	0.66784	-1.87574
0.70653	1.88381	0.70653	-1.88381
0.74611	1.89079	0.74611	-1.89079
0.78656	1.89662	0.78656	-1.89662
0.82788	1.90126	0.82788	-1.90126
0.87005	1.90465	0.87005	-1.90465
0.91304	1.90673	0.91304	-1.90673
0.95685	1.90747	0.95685	-1.90747
1.00146	1.90680	1.00146	-1.90680
1.04683	1.90469	1.04683	-1.90469
1.09293	1.90108	1.09293	-1.90108
1.13976	1.89594	1.13976	-1.89594

1.18726	1.88924	1.18726	-1.88924
1.23541	1.88093	1.23541	-1.88093
1.28417	1.87098	1.28417	-1.87098
1.33350	1.85937	1.33350	-1.85937
1.38337	1.84607	1.38337	-1.84607
1.43372	1.83107	1.43372	-1.83107
1.48453	1.81435	1.48453	-1.81435
1.53574	1.79588	1.53574	-1.79588
1.58731	1.77567	1.58731	-1.77567
1.63918	1.75371	1.63918	-1.75371
1.69131	1.72998	1.69131	-1.72998
1.74365	1.70447	1.74365	-1.70447
1.79615	1.67719	1.79615	-1.67719
1.84875	1.64810	1.84875	-1.64810
1.90140	1.61720	1.90140	-1.61720
X-Koordinate	Y-Koordinate	X-Koordinate	Y-Koordinate

Tabelle A.3: Die punktweise gegebenen freien Oberflächen des Modellgebietes Ω_3

X-Koordinate	Y-Koordinate	X-Koordinate	Y-Koordinate
0.00000	1.04002	0.00000	-1.04002
0.01978	1.11417	0.01978	-1.11417
0.04026	1.17488	0.04026	-1.17488
0.06146	1.22865	0.06146	-1.22865
0.08339	1.27782	0.08339	-1.27782
0.10607	1.32357	0.10607	-1.32357
0.12951	1.36662	0.12951	-1.36662
0.15374	1.40742	0.15374	-1.40742
0.17876	1.44631	0.17876	-1.44631
0.20459	1.48350	0.20459	-1.48350
0.23124	1.51914	0.23124	-1.51914
0.25873	1.55336	0.25873	-1.55336
0.28707	1.58623	0.28707	-1.58623
0.31627	1.61781	0.31627	-1.61781
0.34635	1.64814	0.34635	-1.64814
0.37730	1.67725	0.37730	-1.67725
0.40915	1.70512	0.40915	-1.70512

0.44188	1.73178	0.44188	-1.73178
0.47553	1.75720	0.47553	-1.75720
0.51007	1.78136	0.51007	-1.78136
0.54553	1.80424	0.54553	-1.80424
0.58189	1.82581	0.58189	-1.82581
0.61916	1.84604	0.61916	-1.84604
0.65734	1.86488	0.65734	-1.86488
0.69642	1.88229	0.69642	-1.88229
0.73639	1.89822	0.73639	-1.89822
0.77724	1.91262	0.77724	-1.91262
0.81897	1.92545	0.81897	-1.92545
0.86157	1.93665	0.86157	-1.93665
0.90500	1.94617	0.90500	-1.94617
0.94927	1.95394	0.94927	-1.95394
0.99434	1.95993	0.99434	-1.95993
1.04020	1.96407	1.04020	-1.96407
1.08683	1.96632	1.08683	-1.96632
1.13418	1.96662	1.13418	-1.96662
1.18224	1.96494	1.18224	-1.96494
1.23098	1.96122	1.23098	-1.96122
1.28036	1.95543	1.28036	-1.95543
1.33034	1.94755	1.33034	-1.94755
1.38089	1.93754	1.38089	-1.93754
1.43197	1.92539	1.43197	-1.92539
1.48353	1.91109	1.48353	-1.91109
1.53554	1.89463	1.53554	-1.89463
1.58794	1.87603	1.58794	-1.87603
1.64069	1.85530	1.64069	-1.85530
1.69375	1.83245	1.69375	-1.83245
1.74707	1.80754	1.74707	-1.80754
1.80059	1.78058	1.80059	-1.78058
1.85426	1.75163	1.85426	-1.75163
1.90803	1.72071	1.90803	-1.72071
1.96186	1.68787	1.96186	-1.68787
X-Koordinate	Y-Koordinate	X-Koordinate	Y-Koordinate

Literaturverzeichnis

- [1] ALMA-Group. Bringen Sie Ihr Vakuum ins Reine. Magnetfluidgedichtete Drehdurchführungen. ALMA Group Deutschland, ALMA Verfahrens- und Anlagentechnik GmbH, <http://www.alma-group.de>, 2000.
- [2] L. Angermann and P. Knabner. *Numerik partieller Differentialgleichungen*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2000.
- [3] S. Artlich. Über die Ungültigkeit der Kornschen Ungleichung und eine neue Formulierung zur Lösung der Stokes-Gleichung mit Slip-Randbedingung in zwei Raumdimensionen unter Verwendung von nichtkonformen Finiten Elementen. Master's thesis, Universität Bonn, Institut für Angewandte Mathematik, 1991.
- [4] E. Bänsch and K. Deckelnick. Optimal Error Estimates for the Stokes and Navier-Stokes Equations with Slip-Boundary Condition. *Math. Model. Numer. Anal., RAIRO M2AN*, 33(5):923–935, 1999.
- [5] E. Bänsch and B. Höhn. Numerical treatment of the Navier-Stokes equations with slip boundary condition. *SIAM J. Sci. Comput.*, 21(6):2144–2162, 2000.
- [6] V. Bashtovoi, B. Berkovskii, V. Dashkevich, V. Mihalev, E. Taic, V. Chernobai, and U. Jamolchik. *USSR Patent 1692219*. Moskva, 1988.
- [7] V. Bashtovoi, V. Dashkevich, A. Zeleznei, M. Krakov, V. Mihalev, A. Reks, E. Taic, and V. Chernobai. *USSR Patent 1692217*. Moskva, 1988.
- [8] V. Bashtovoi, D. Kabachnikov, A. Kolobov, V. Samoylov, and A. Vikoulenkov. Research of the dynamics of a magnetic fluid dynamic absorber. *Journal of magnetism and magnetic materials*, 252:312–314, 2002.
- [9] V. Behns, V. John, G. Matthies, and F. Schieweck. MoonMD2.2-user's manual. Fakultät für Mathematik, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg.
- [10] J. Bemelmans. Gleichgewichtsfiguren zähler Flüssigkeiten mit Oberflächenspannung. *Analysis*, 1:241 – 282, 1981.
- [11] J. Bemelmans. Liquid drops in a viscous fluid under the influence of gravity and surface tension. *Manuscripta Math.*, 36:105 – 123, 1981.

- [12] B. Berkovski and V. Bashtovoy. *Magnetic fluids and Applications Handbook*. Begell House, inc., New York, 1996.
- [13] B. Berkovsky, V. Medvedev, and M. Krakov. *Magnetic Fluids Engineering Applications*. Oxford University Press, Oxford, New York, Tokyo, 1993.
- [14] Ch. Bernardi. Optimal Finite-Element Interpolation on Curved Domains. *SIAM J. Numer. Anal.*, 26(5):1212–1240, 1989.
- [15] E. Blums, A. Cebers, and M. Maiorov. *Magnetic Fluids*. Walter De Gruyter, 1997.
- [16] D. Braess. *Finite Elemente*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1997.
- [17] S. Brandt and D. Dahmen. *Elektrodynamik: Eine Einführung in Experiment und Theorie*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1997.
- [18] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer - Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1991.
- [19] M. Chicco. Principio di massimo per soluzioni di problemi al contorno musti per equazioni ellittiche di tipo variazionale. *Boll. Un. Mat. Ital.*, IV Ser. 3:384–394, 1970.
- [20] P. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [21] P. Ciarlet and J. Lions. *Handbook of Numerical Analysis, v.II, Finite Element Methods*. Elsevier Science Publishers, 1991.
- [22] M. Crouzeix and P. Raviart. Conforming and Nonconforming Finite Element Methods for Solving the Stationary Stokes Equations I. *RAIRO*, R-3:33–76, 1973.
- [23] C. Cuvelier and J. Driessen. Thermocapillary free boundaries in crystal growth. *J. Fluid mech.*, 169:1–26, 1986.
- [24] O. Dorok. *Eine Stabilisierte Finite-Elemente-Methode zur Lösung der Boussinesq-Approximation der Navier-Stokes-Gleichungen*. PhD thesis, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, 1995.
- [25] FerroTec. Ferrofluidic Vacuum Rotary Feedthroughs, Catalog & Product Specifications. FerroTec GmbH, <http://www.ferrotec.com>, 2001.
- [26] M. Fortin. Finite element solution of the Navier-Stokes equations. *Acta Numerica*, 1:239–284, 1993.
- [27] M. Fortin and A. Fortin. Experiments with several elements for viscous incompressible flows. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 5:911–928, 1985.

- [28] P. Frolkovic. Consistent velocity approximation for density driven flow and transport. *Advanced Computational Methods in Engineering*, 2:603–611, 1998.
- [29] D. Gilbarg and N. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1983.
- [30] V. Girault and P. Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1986.
- [31] W. Hackbusch. *Multi-Grid Methods and Applications*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1985.
- [32] V. John. Slip with friction and penetration with resistance boundary conditions for the Navier-Stokes equations - numerical tests and aspects of the implementation. *J. Comp. Appl. Math.*, 147:287–300, 2002.
- [33] V. John, P. Knobloch, G. Matthies, and L. Tobiska. Non-nested multi-level solvers for finite element discretizations of mixed problems. *Computing*, 68:313 – 341, 2002.
- [34] V. John and G. Matthies. MooNMD - a program package based on mapped finite element methods. Otto-von-Guericke Universität Magdeburg, Fakultät für Mathematik, Technical Report 01, 2002.
- [35] S. Kistler and L. Scriven. Coating flow theory by finite element and asymptotic analysis of the Navier-Stokes system. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 4:207–229, 1984.
- [36] P. Knobloch. *Solvability and Finite Element Discretization of a Mathematical Model Related to Czochralski Crystal Growth*. PhD thesis, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Fakultät für Mathematik, 1996.
- [37] P. Knobloch. Variational crimes in a finite element discretization of 3D Stokes equations with nonstandard boundary conditions. *East-West J. Numer. Math.*, 7(2):133–158, 1999.
- [38] P. Knobloch. A finite element convergence analysis for 3D Stokes equations in case of variational crimes. *Appl. Math., Praha*, 45(2):99–129, 2000.
- [39] P. Knobloch. On Korn’s Inequality for Nonconforming Finite Elements. *Technische Mechanik*, 20(3):205–214, 2000.
- [40] V. Korneev. Schemes of the finite element method of high order of accuracy for second order elliptic equations in three-dimensional regions I. *USSR Comput. Maths Math. Phys.*, 19:149–162, 1982.
- [41] L. Landau and E. Lifschitz. *Lehrbuch der theoretischen Physik, Band VI Hydrodynamik*. Akademie Verlag, 1991.

- [42] O. Lavrova, G. Matthies, T. Mitkova, V. Polevikov, and L. Tobiska. Finite element methods for coupled problems in ferrohydrodynamics. Otto-von-Guericke Universität Magdeburg, Fakultät für Mathematik, Preprint 37, 2002.
- [43] M. Lenoir. Optimal Isoparametric Finite Elements and Error Estimates for Domains Involving Curved Boundaries. *SIAM J. Numer. Anal.*, 23(3):562–580, 1986.
- [44] A. Liakos. *Weak Imposition of Boundary Conditions in the Stokes and Navier-Stokes Equations*. PhD thesis, University of Pittsburgh, 1999.
- [45] A. Liakos. Discretization of the Navier-Stokes Equations with Slip Boundary Conditions. *Numer. Methods Partial Differential Eq.*, 17:26–42, 2001.
- [46] The MathWorks. Partial Differential Equations (PDE) Toolbox User's Guide, For Use with MATLAB. Computer Solutions Europe AB, <http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/toolbox/pde/pde.shtml>, 2001.
- [47] G. Matthies and L. Tobiska. Simulation of the free Surfaces of magnetic Liquids. *Proceedings of Algorithmy 2000, 15th Conference on Scientific Computing, Slovak University of Technology, Bratislava*, 1:1–10, 2000.
- [48] R. Müller and A. Ostogorsky. Convection in Melt Growth. *Handbook of Crystal Growth 2B. Eds.: Hurlé, D.T.J. Elsevier Science Publishers, North-Holland*, 1:709–819, 1994.
- [49] S. Odenbach. *Magnetoviscous effects in ferrofluids*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 2002.
- [50] C. Parés. Un traitement faible en éléments finis de la condition de glissement sur une paroi pour les équations de Navier-Stokes. *C. R. Acad. Sci. Paris, Analyse numérique*, 307(I):101–106, 1988.
- [51] V. Polevikov. On application of adaptive grids for calculation of a free surface in static problems of magnetic fluid. *Differential Equations*, 30(12):2146–2152, 1994.
- [52] V. Polevikov. Stability of a static magnetic-fluid seal under the action of an external pressure drop. *Fluid Dynamics*, 32(3):457–461, 1997.
- [53] V. Polevikov, T. Romankova, and D. Frenkel. Numerical simulation of a dynamic magnetic-fluid seal depending on centrifugal forces and external pressure drop. *Proceedings of the Second International Conference "Finite Element Methods: Theory and Applications"*, Minsk: Institute of Mathematics of NAS of Belarus, 3:43–46, 1998.
- [54] V. Polevikov and L. Tobiska. Modeling of a Dynamic Magneto-Fluid Seal in the Presence of a Pressure Drop. *Fluid Dynamics*, 36(6):890–898, 2001.
- [55] M. Protter and H. Weinberger. *Maximum Principles in Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1984.

-
- [56] H.-G. Roos, M. Stynes, and L. Tobiska. *Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1996.
- [57] R. Rosensweig. Fluid Dynamics and Science of Magnetic Liquids. *Advances in Electronics and Electron Physics*, 48:103–199, 1979.
- [58] R. Rosensweig. *Ferrohydrodynamics*. Cambridge University Press, London, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney, 1997.
- [59] Y. Saad. *Iterative methods for sparse linear systems*. PWS Publishing Company, 1996.
- [60] H. Saito and L. Scriven. Study of Coating Flow by Finite Element Method. *J. Comp. Phys.*, 42:53–76, 1981.
- [61] F. Schieweck. A parallel multigrid algorithm for solving the Navier-Stokes equations. *IMPACT Comput. Sci. Eng.*, 5(4):345–378, 1993.
- [62] F. Schieweck. Parallel Lösung der stationären inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen. Otto-von-Guericke Universität Magdeburg, Fakultät für Mathematik, Habilitationsschrift, 1997.
- [63] F. Schieweck. A general transfer operator for arbitrary finite element spaces. Otto-von-Guericke Universität Magdeburg, Fakultät für Mathematik, Preprint 25, 2000.
- [64] D. Schwabe. *Surface-Tension-Driven Flow in Crystal Growth Melts*. Crystal Growth, Properties and Applications 11. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1988.
- [65] H. Schwarz. *Methode der finiten Elemente. Eine Einführung unter besonderer Berücksichtigung der Rechenpraxis*. Teubner Studienbücher Mathematik, 1991.
- [66] R. Scott. *Finite element techniques for curved boundaries*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1973.
- [67] J. Silliman and L. Scriven. Separating flow near a static contact line: slip at a wall and shape of a free surface. *J. Comp. Phys.*, 34:287–313, 1980.
- [68] Sonderforschungsbereich256. GRAPE 5.3-user’s manual. Institut für Angewandte Mathematik, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, <http://www.iam.uni-bonn.de/sfb256/grape/>.
- [69] G. Strang and G. Fix. *An Analysis of the Finite Element Method*. Prentice-Hall, Inc., 1973.
- [70] R. Temam. *Navier-Stokes Equations*. North Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, 1979.

-
- [71] St. Turek. *Ein robustes und effizientes Mehrgitterverfahren zur Lösung der instationären, inkompressiblen 2-D Navier-Stokes-Gleichungen mit diskret divergenzfreien finiten Elementen*. PhD thesis, Universität Heidelberg, 1991.
- [72] S. Vanka. Block-implicit multigrid calculation of two-dimensional recirculating flows. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 59(1):29–48, 1986.
- [73] R. Verfürth. Finite Element Approximation of Steady Navier-Stokes Equations with Mixed Boundary Conditions. *Math. Model. and Numer. Anal.*, 19(3):461–475, 1985.
- [74] R. Verfürth. Finite Element Approximation of Incompressible Navier-Stokes Equations with Slip Boundary Condition I. *Numer. Math.*, 50:697–721, 1987.
- [75] R. Verfürth. Finite Element Approximation of Incompressible Navier-Stokes Equations with Slip Boundary Conditions II. *Numer. Math.*, 59:615–636, 1991.
- [76] A. Vislovich and V. Polevikov. Concerning numerical simulation of the failure of a magnetic-fluid seal with a rotary outer profiled cylinder. *J. Engineering Physics and Thermophysics*, 70(1):105–110, 1997.
- [77] P. Wesseling. *An Introduction to Multigrid Methods*. John Wiley and Sons, 1991.
- [78] K. Yosida. *Functional Analysis*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1995.
- [79] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, I: Fixed-Point Theorems*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1986.
- [80] E. Zeidler. *Applied Functional Analysis, Applications to Mathematical Physics*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1995.

Lebenslauf

Teodora Mitkova

geboren am 23.10.1975 in Sofia (Bulgarien)

- 09\1982-06\1989 Grundschule in Sofia
- 09\1989-06\1993 Nationales Naturwissenschaftliches und
Mathematisches Gymnasium in Sofia
Fachrichtungen: Mathematik, Physik und Englisch
- 06\1993 Abitur
- 10\1993-09\1998 Studentin der Mathematik an der Sofioter Universität
"St. Kliment Ohridski", Sofia
- 09\1997-09\1998 Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Mathematik
und Informatik der bulgarischen Forschungsgemeinschaft
- 09\1998 Verleihung des Grades "Magister der Mathematik"
- 12\1998-12\2001 Stipendiatin am Graduiertenkolleg "Modellierung,
Berechnung und Identifikation mechnischer Systeme"
(GRK 203) am Institut für Analysis und Numerik der
Universität Magdeburg
- 12\2001-10\2003 Wissenschaftliche Mitarbeiterin im DFG-Projekt
am Institut für Analysis und Numerik der Universität
Magdeburg
- seit 10\2003 Wissenschaftliche Assistentin am Institut für Analysis
und Numerik der Universität Magdeburg