Experimentelle und numerische Untersuchungen zum Wärmeübergang in Mikrokanälen

Dissertation

Zur Erlangung des akademischen Grades

Doktoringenieur

(Dr.- Ing.)

von Dipl.-Ing. Ingo Hapke

geb. am 28. 04. 1968 in Neubrandenburg

genehmigt durch die Fakultät für Verfahrens- und Systemtechnik
der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Gutachter:

Prof. Dr.- Ing. Jürgen Schmidt

Prof. Dr. rer. nat. habil. Lutz Tobiska

Promotionskolloquium am 3. 11. 2004

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Strömungstechnik und Thermodynamik / Abteilung Thermodynamik der Otto-von-Guericke-Universität in Magdeburg.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. J. Schmidt für die interessante Themenstellung und die Betreuung der Arbeit sowie für die wertvollen fachlichen Hinweise und Anregungen.

Für seine konstruktiven Ratschläge sowie für die Bereitschaft zur Übernahme des Gutachtens danke ich Herrn Prof. Dr. rer. nat. habil. L. Tobiska.

Weiterhin gilt mein Dank Herrn Dr.-Ing. D. Weiß, Herrn Dr.-Ing. D. Reppmann und Herrn Dr.-Ing. H.-P. Poppitz für die unzähligen Diskussionen vor allem in Bezug auf die numerischen Abschnitte der Arbeit und die steten aufmunternden Worte. Herrn Dr.-Ing. H. Boye danke ich für die vielen Gespräche, die die Arbeit bereichert haben.

Abschließend möchte ich mich auch bei den namentlich nicht genannten Kollegen des Institutes, den Diplomanden und Studienarbeitern sowie den wissenschaftlichen Hilfskräften für die gute Zusammenarbeit bedanken.

Für ihren Rückhalt, ihre Unterstützung und ihr Verständnis danke ich meiner Familie, insbesondere meiner Frau Christiane.

Magdeburg, im November 2004 Ingo Hapke

Kurzfassung

Diese Arbeit befasst sich mit der Untersuchung von Wärmetransportvorgängen in durchströmten Mikrokanälen. Dazu werden experimentelle Untersuchungen vorgenommen, Modelle zur Beschreibung des ein- uns des zweiphasigen Wärmeübergangs aufgestellt und numerische Berechnungen durchgeführt.

Für die experimentellen Untersuchungen wurde ein Versuchsaufbau konzipiert und realisiert. Als untersuchte Kanalgeometrien kamen Rohre mit einem Durchmesser von 1,5 mm und speziell konstruierte Kanäle mit Rechteckquerschnitt zum Einsatz. Die Querschnitte der Rechteckkanäle hatten eine Breite von 10 mm und eine Höhe von 300 µm bzw. 700 µm. Es wurden die Testmedien Wasser und n-Heptan untersucht.

Ein wesentlicher Bestandteil der realisierten Messmethode ist die Infrarotthermografie. Sie dient der Bestimmung der Außenwandtemperatur der untersuchten Kanäle. Die hohe örtliche Auflösung des verwendeten Infrarotthermografiesystems ermöglicht die Erfassung einer nahezu kontinuierlichen Temperaturverteilung entlang eines Kanals und gestattet die Aufnahme von flächenhaften Bildern der Temperatur an der Kanaloberfläche.

Aus den gewonnenen experimentellen Daten werden Aussagen zum Wärmeübergang für die einphasige und die zweiphasige Strömung abgeleitet. Aus den kontinuierlichen Temperaturverläufen lässt sich die Lage der einzelnen Bereiche im Kanal, von der einphasigen Flüssigkeitsströmung über die zweiphasigen Siedebereiche bis hin zur Dampfströmung, ermitteln. Es werden Korrelationen abgeleitet, die die Bestimmung des Ortes des Siedebeginns und des Ortes des Dryouts ermöglichen.

Mit Hilfe der Aufzeichnung von Infrarotbildsequenzen werden instationäre Siedevorgänge visualisiert.

Im zweiten Teil der Arbeit werden Modelle für den einphasigen Bereich und für den Bereich des konvektiven Siedens entwickelt.

Das Modell für den einphasigen Kanalabschnitt wurde programmtechnisch umgesetzt und in der Programmbibliothek „Chi++“ unter konsequenter Anwendung des Konzeptes der objektorientierten Programmierung in der Programmiersprache C++ implementiert. Für weiterführende Untersuchungen wurde die Chimära-Gittertechnik umgesetzt.

Mit dem erstellten Programmsystem werden Berechnungen zum Wärmeübergang in Mikrokanälen vorgenommen und den experimentellen Ergebnissen gegenübergestellt.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis ..... **I**

Symbolverzeichnis ..... **V**

Abbildungsverzeichnis ..... **XI**

Tabellenverzeichnis ..... **XV**

1 Einleitung **1**

1.1 Mikroapparate – Charakterisierung und technische Anwendung 3

1.2 Optimierungsziele 5

1.3 Ziel der Arbeit 5

2 Wärmeübergang in durchströmten Kanälen - Stand des Wissens **7**

2.1 Einphasiger Wärmeübergang 8

2.2 Zweiphasiger Wärmeübergang - Strömungssieden in Kanälen 12

2.2.1 Initialpunkt 14

2.2.2 Sieden gesättigter Flüssigkeiten 15

2.2.3 Dryout 15

2.3 Druckverlust 16

2.3.1 Druckverlust - einphasig 16

2.3.2 Druckverlust - zweiphasig 17

2.4 Wärmeübergang in Mikrokanälen 17

2.5 Vorgehensweise für die Untersuchungen 19

3 Experimentelle Untersuchungen **21**

3.1 Versuchsaufbau 21

3.1.1 Verwendete Testsektionen 24

3.1.2 Realisierung der Beheizung 26

3.2 Beschreibung der Messmethode 27

3.2.1 Bestimmung der Außenwandtemperatur des Versuchskanals 27

3.2.2 Berechnung der Innenwandtemperatur für den ebenen Kanal 29

3.2.3 Berechnung der Innenwandtemperatur für die Rohrwand 31

3.2.4 Abschätzung des äußeren Wärmeübergangskoeffizienten 31

3.3 Versuchsdurchführung 33

3.3.1 Offene Anlage 33

3.3.2 Geschlossene Anlage 34

3.4 Konzept für die experimentellen Untersuchungen 34

3.5 Versuchsauswertung ... 35
3.6 Experimentelle Ergebnisse ... 36
3.6.1 Abgrenzung der Siedebereiche ... 37
3.6.2 Initialpunkt ... 39
3.6.3 Strömungssieden ... 43
3.6.4 Dryout ... 45
3.6.5 Wärmeübergang ... 49
3.6.6 Druckverlust ... 54
3.7 Fehlerbetrachtung ... 57
3.7.1 Allgemeines ... 57
3.7.2 Fehler der Messwerte ... 58
3.7.3 Fehler der abgeleiteten Größen ... 58
3.8 Instationäre Siedevorgänge ... 60
3.9 Zusammenfassung ... 63
4 Modellierung der thermischen und der strömungstechnischen Vorgänge ... 65
4.1 Analyse der Siedebereiche und Voraussetzungen für die Modellbildung ... 65
4.2 Das Modell für den einphasigen Kanalabschnitt ... 68
4.3 Modellvorstellungen für den zweiphasigen Kanalabschnitt ... 71
4.3.1 Modellierung für den Bereich des konvektiven Siedens ... 72
4.3.2 Gleichungssystem für ein Gebiet mit Phasengrenze ... 74
4.3.3 Ein vereinfachtes Modell für die zweiphasige Strömung ... 75
5 Numerisches Lösungsverfahren ... 81
5.1 Diskretisierung ... 81
5.1.1 Diskretisierung der allgemeinen Transportgleichung ... 82
5.1.2 Kopplung von Druck- und Geschwindigkeitsfeld ... 84
5.1.3 Randbedingungen für die Feldgrößen ... 86
5.2 Programmtechnische Umsetzung ... 87
5.2.1 Organisation eines ChiGrid ... 88
5.2.2 Die Volumenzelle (ChiCell und ChiUnknowns) ... 90
5.2.3 Anwendung der Klassenbibliothek ... 91
5.2.4 Implementierung der Randbedingungen ... 92
5.3 Lösung der linearen Gleichungssysteme ... 96
6 Berechnung des Wärmeübergangs in Mikrokanälen ... 97
6.1 Test des Berechnungsalgorithmus ... 97
6.1.1 Hydrodynamische Einlaufstrecke ... 97

6.1.2 Wärmeübergang im Bereich des thermischen Einlaufes ... 99
6.1.3 Wärmeübergang bei eingelaufener Kanalströmung – 3D ... 99
6.1.4 Weitere Testrechnungen und Anwendungsfälle ... 100
6.2 Einphasiger Wärmeübergang an einer glatten Heizfläche ... 101
6.2.1 Thermischer und hydrodynamischer Einlauf ... 101
6.3 Einphasiger Wärmeübergang an einer rauhen Heizfläche ... 101
6.4 Berechnung des zweiphasigen Wärmeübergangs mit dem vereinfachten Modell für das konvektive Sieden – Erste Erfahrungen ... 104
7 Zusammenfassung und Ausblick ... 107
7.1 Zusammenfassung ... 107
7.2 Ausblick ... 109
Literaturverzeichnis ... 111
8 Anhang ... 117
Anhang A – Gleichungen zur Korrektur der Infrarotmessungen ... 118
Anhang B – Diskretisierung der Erhaltungsgleichungen ... 119
Anhang C - Konturangepasste Koordinaten ... 127
Anhang D – Hilfsfunktionen für die Gittergenerierung und den Datenaustausch ... 133
Anhang E - Abbildungen ... 136
Anhang F – ausgewählte Stoffwerte ... 140

Symbolverzeichnis

Allgemeine Hinweise zu den verwendeten Symbolen

Skalare Größen werden durch Symbole in kursiver Schriftart bezeichnet. Vektorielle Größen bzw. Tensoren und Matrizen sind fett - kursiv dargestellt. Der Betrag einer vektoriellen Größe wird durch das gleiche Symbol wie die vektorielle Größe in der Schriftart der skalaren Größen dargestellt. Einheitsvektoren sind durch ein ^ gekennzeichnet.

Beispiele: Temperatur T

Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = v \cdot \hat{\boldsymbol{v}}$

Alle nicht im Symbolverzeichnis aufgeführten Größen werden bei ihrem ersten Auftreten direkt im Text erklärt.

Größen - lateinische Symbole

Symbol	Bedeutung	Einheit
$\boldsymbol{A}$	Fläche	m²
b	Breite	m
C	Konstante	
$\boldsymbol{COG}$	Schwerpunkt der Zelle (Center of Gravity)	m
c	Schallgeschwindigkeit	m/s
c	spezifische Wärmekapazität	J/(kgK)
D	diffusiver Strom	
d	Durchmesser	m
F	Konvektiver Strom	
$\boldsymbol{F}$	Kraft	N
f	Frequenz	Hz
$\boldsymbol{g}$	Fallbeschleunigung	m/s²
H	Enthalpie	J
$\dot{H}$	Enthalpiestrom bzw. zeitliche Änderung der Enthalpie	J/s
h	Höhe	m
h	spezifische Enthalpie	J/kg
Δh_V	spezifische Verdampfungsenthalpie	J/kg
I	Impuls	kgm/s
I	Stromstärke	A

Symbol	Bedeutung	Einheit
I	Intensität, Thermischer Wert (AGEMA THV 900)	
$\lvert J \rvert$	Jacobi'sche Funktionaldeterminante	
l	Länge	m
$\dot{M}$	Massenstrom	kg/s
$\dot{m}$	Massenstromdichte	kg/(m²s)
n	Zellenanzahl	
n	Koordinate in Normalenrichtung	m
$\hat{\boldsymbol{n}}$	Normalenvektor einer Fläche	M
P	Leistung	W
p	Druck	Pa
Δp_v	Druckverlust	Pa
$\dot{Q}$	Wärmestrom	W
$\dot{\boldsymbol{q}}$	Wärmestromdichte	W/m²
R	Gaskonstante	J/(kgK)
R	Radius, halbe Spaltweite	m
S	Quellterm	
s	Schlupf	-
s	Spaltweite bzw. Wandstärke	m
T	Temperatur	K
t	Zeit	s
U	Spannung	V
U	Umfang	m
u	Unbekannte	
V	Volumen	m³
$\dot{V}$	Volumenstrom	m³/s
$\boldsymbol{v}$	Geschwindigkeit	m/s
W	Wichtungsfaktor	
u, v, w	Geschwindigkeitskomponenten	m/s
x, y, z	Ortskoordinaten	m
$\dot{x}$	Strömungsdampfgehalt	-

Größen -Griechische Symbole

Symbol	Bedeutung	Einheit
α	Wärmeübergangskoeffizient	W/(m²K)
β	thermischer Volumenausdehnungskoeffizient	1/K
Γ	Diffusionskoeffizient	
ε	volumetrischer Dampfgehalt	-
ε	Emissionsverhältnis	-
Φ	Potential	m²/s
ϕ	intensive Größe	
Λ	freie Weglänge	m
λ	Rohrreibungskoeffizient	-
λ	Wärmeleitfähigkeit	W/(mK)
η	dynamische Viskosität	kg/(ms)
κ	Krümmung	m
ν	Kinematische Viskosität	m^2/s
ω	Relaxationsparameter	
ρ	Dichte	kg/m³
σ	Oberflächenspannung	
σ_S	Stefan-Boltzmann-Konstante	$W/(m^2K^4)$
τ	Transmissionskoeffizient	-
τ	Spannung	N/m²
ϑ	Temperatur	°C
ξ,η,ζ	konturangepasste Koordinaten	m
ζ	Verlustbeiwert	-

Kennzahlen

Symbol	Bedeutung	Definition
Gr	Grashof-Zahl	$Gr = gl_{ch}^3 \beta \Delta\vartheta / \nu^2$
Kn	Knudsen-Zahl	$Kn = \Lambda / l_{ch}$
Ma	Mach-Zahl	$Ma = v/c$
Nu	Nußelt-Zahl	$Nu = \alpha l_{ch} / \lambda$
N_b	Siedekennzahl	$N_b = \dot{q} / (\dot{m} \Delta h_V)$
Pe	Peclet-Zahl	$Pe = RePr = v l_{ch} / a$
Ph	Phasenkennzahl	$Ph = (h - h') / \Delta h_V$
Pr	Prandtl-Zahl	$Pr = \nu / a$
Ra	Rayleigh-Zahl	$Ra = GrPr$
Re	Reynolds-Zahl	$Re = v l_{ch} / \nu$

Indizes und Exponenten

Index	Bedeutung
.′	Zustand auf der Siedelinie
.″	Zustand auf der Taulinie
+1/2	kennzeichnet Größen auf den Randflächen der Zellen
-1/2	kennzeichnet Größen auf den Randflächen der Zellen
A	Austritt, Ausströmrand
Amb	Ambient, Umgebung
Atm	Atmosphäre
alt	alter Zeitpunkt
b	bottom
c	center
ch	charakteristisch
diff	diffusiv
dry	Dryout
E	Eintritt, Einströmrand
e	east
el	elektrisch
Env	Umgebung (environment)
F	falsch, fehlerhaft
Fl	Fluid
Gas, g	Gas
GO	reines Gas
hyd	hydraulisch, hydrodynamisch
i	Interface, Phasengrenze
i	Zählvariabel
Image	Infrarotaufnahme
ini	Initialpunkt
in	Innen[1]
IR	Infrarot
j	Zählvariable
k	Zählvariable
k	kennzeichent eine Phase
Konv	konvektiv
kr	kritisch
Liquid, l	Flüssigkeit
LO	reine Flüssigkeit
l	Index der Druckkorrekturschleife
M	gemittelt

[1] Die Bezeichnung „in“ kennzeichnet in der Regel den gesuchten Wärmeübergangskoeffizienten bzw. die Wärmestromdichte an der Innenwand des Kanals, die Innenfläche oder die Innenwandtemperatur. Der besseren Übersicht halber wird bei der Bezeichnung dieser Größen der Index teilweise weggelassen.

Index	Bedeutung
neu	neuer Zeitpunkt
n	Index der Zeitschleife
n	north
Obj	Objekt
OC	IR-Chip
out	außen
Ph	Phasengrenze
R	Rand
S	Siedezustand
Str	Strahlung
s	south
t	top
t	transport
th	thermisch, thermodynamisch
trav	Traversierung
V	volumetrisch
v	Dampf (vapor)
W	Wand
w	west

Abbildungsverzeichnis

Bild 1.1: Benzin-Mikroverdampfer ... 3

Bild 1.2: WÜ FZK ... 4

Bild 1.3: WÜ FZK ... 4

Bild 2.1: Hydrodynamische Einlauflänge im Rohr ... 9

Bild 2.2: Hydrodynamische Einlauflänge zwischen parallelen Platten ... 10

Bild 2.3: Strömungsformen beim Sieden gesättigter Flüssigkeiten ... 12

Bild 2.4: Strömungsformen im horizontal durchströmten Kanal ... 13

Bild 2.5: Strömungsformen im vertikal, aufwärts durchströmten Kanal ... 13

Bild 3.1: Schema der offenen Versuchsanlage ... 22

Bild 3.2: Schema der Versuchsanlage ... 22

Bild 3.3: Geschlossene Versuchsanlage ... 24

Bild 3.4: Aufbau eines Versuchskanals ... 25

Bild 3.5: Versuchskanal ... 25

Bild 3.6: Testsektion (Mikrokanal) ... 26

Bild 3.7: Infrarot-Aufnahme eines Kanals a) offene Anlage b) geschlossene Anlage ... 28

Bild 3.8: Kanalwand eines ebenen Kanals ... 30

Bild 3.9: Kanalwand eines zylindrischen Kanals ... 30

Bild 3.10: Bestimmung der Innenwandtemperatur ... 35

Bild 3.11: Bestimmung des Druckverlaufes ... 36

Bild 3.12: Siedebereiche ... 37

Bild 3.13: IR-Aufnahmen der einzelnen Kanalabschnitte a) Siedebeginn b) Strömungssieden c) Dryout ... 37

Bild 3.14: Außenwandtemperatur am Kapillarrohr, $d_i = 1{,}5$ mm ... 39

Bild 3.15: Wandüberhitzung am Initialpunkt, $d_i = 1{,}5$ mm ... 39

Bild 3.16: Wandüberhitzung am Initialpunkt, $d_i = 1{,}5$ mm ... 39

Bild 3.17: Abhängigkeit der Phasenkennzahl am Initialpunkt von der Siedekennzahl, $d_i = 1{,}5$ mm ... 40

Bild 3.18: Vorwärmung und Siedebeginn im ebenen Kanal ... 41

Bild 3.19: Temperaturverteilung im Bereich des Siedebeginns, $p \approx 1$ bar 42

Bild 3.20: Temperaturverteilung im Bereich des ausgebildeten Strömungssiedens, $p \approx 2$ bar 44

Bild 3.21: axialer Temperaturverlauf 46

Bild 3.22: axialer Temperaturverlauf 46

Bild 3.23: axialer Temperaturverlauf 46

Bild 3.24: axialer Temperaturverlauf 47

Bild 3.25: axialer Temperaturverlauf 47

Bild 3.26: axialer Temperaturverlauf 47

Bild 3.27: Dampfgehalt am Ort des Dryouts 48

Bild 3.28: Dampfgehalt am Ort des Dryouts 48

Bild 3.29: Einphasiger Wärmeübergang im Kanal 49

Bild 3.30: Nußelt-Zahl für kleine Kanäle 51

Bild 3.31: Wärmeübergangskoeffizienten im Bereich des konvektiven Siedens 51

Bild 3.32: Wärmeübergangskoeffizienten im Bereich des konvektiven Siedens 52

Bild 3.33: Wärmeübergangskoeffizienten im Bereich des konvektiven Siedens 52

Bild 3.34: Wärmeübergangskoeffizienten im Bereich des konvektiven Siedens 52

Bild 3.35: Wärmeübergangskoeffizienten im Bereich des konvektiven Siedens 53

Bild 3.36: Rohrreibungszahl $\lambda(Re)$ 55

Bild 3.37: Druckverlust, $s = 300$ µm, Wasser 56

Bild 3.38: Druckverlust im Kanal, $s = 300$ µm, Heptan 56

Bild 3.39: Einfluss eines fehlerhaften Emissionsverhältnisses auf die gemessene Wandtemperatur 58

Bild 3.40: Wandtemperatur in der Umgebung des Initialpunktes 60

Bild 3.41: Schwankung der Wandtemperatur in der Umgebung des Initialpunktes 61

Bild 3.42: Zeitliche Änderung der Wärmestromdichte 61

Bild 3.43: Außenwandtemperaturverlauf bei zeitlicher Änderung der Wärmestromdichte 62

Bild 3.44: Vergleich der Wandtemperaturen in der Mitte und am Rand des Rechteckkanals 62

Bild 4.1: Bilanzraum 68

Bild 4.2: Abhängigkeit des volumetrischen Dampfgehaltes vom Massendampfgehalt und vom Dichteverhältnis der Flüssig-/Gasphase 72

Bild 4.3: Position der Phasen im Bereich des konvektiven Siedens im vertikal durchströmten Kanal 73

Bild 4.4: Geschwindigkeitsprofile in der Gas- und in der Flüssigphase 77

Bild 5.1: Struktur der ChiGrid Basisklasse 88

Bild 5.2: Vernetztes Untersuchungsgebiet 89

Bild 5.3: Volumenzelle 90

Bild 5.4: Struktur eines mit der Chimära-Gittertechnik vernetzten Lösungsgebietes 91

Bild 5.5: von ChiGrid abgeleitete Klassen 92

Bild 5.6: Variablenanordnung im Gitter 92

Bild 5.7: Randbedingung links 93

Bild 5.8: Randbedingung rechts 93

Bild 6.1: axiale Geschwindigkeit im Einlauf 98

Bild 6.2: axiale Geschwindigkeit im Einlauf 98

Bild 6.3: Nußelt-Zahl im thermischen Einlauf 99

Bild 6.4: Temperaturverteilung 99

Bild 6.5: Geschwindigkeitsverteilung 99

Bild 6.6: Nußelt-Zahl im hydrodynamischen und im thermischen Einlauf 101

Bild 6.7: Verhältnis der Nußelt-Zahlen im rauhen und im glatten Kanal 103

Bild 6.8: Temperaturfeld im glatten und im rauhen Kanal, T [K] 103

Bild 6.9: Betrag der Geschwindigkeit im glatten und im rauhen Kanal, v [m/s] 103

Bild 8.1: Anordnung der Volumenzellen in konturangepassten Koordinaten 127

Bild 8.2: Gitterzelle und Interpolationspunkt 133

Bild 8.3: Fläche/Gerade 134

Bild 8.4: Siedebeginn 136

Bild 8.5: Blasensieden 136

Bild 8.6: aufgewühlte Strömung 136

Bild 8.7: Kolbenblasenströmung 136

Bild 8.8: Nebelströmung 136

Bild 8.9: Skizze eines Versuchskanals 137

Bild 8.10: Screenshot Programmoberfläche „Micha“ 138
Bild 8.11: Screenshots Kanaleinlaufströmung 138
Bild 8.12 Temperaturfeld in der Rohrwand eines Drehrohrofens 139
Bild 8.13: Geschwindigkeitsvektoren 139
Bild 8.14: Stromlinien 139

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1.1: Verwendete Bezeichnungen für technische Größenordnungen 3

Tabelle 3.1: Wärmeübergang bei freier Konvektion 32

Tabelle 3.2: Wärmeübergangskoeffizienten für den äußeren Wärmeübergang 33

Tabelle 3.3: Wärmeübergangskoeffizient beim konvektiven Sieden 53

Tabelle 4.1: Geschwindigkeitsregime kompressibler Strömungen 67

Tabelle 4.2: Randbedingungen für die Zweiphasenströmung zwischen parallelen Platten (vereinfacht) 76

Tabelle 5.1: Koeffizienten der allgemeinen Transportgleichung 82

Tabelle 5.2: Diskretisierungsschemen nach Patankar 83

Tabelle 5.3: Randbedingungen für die Zustandsgrößen 86

Tabelle 6.1: Randbedingungen für die einphasige Strömung zwischen parallelen Platten 97

1 Einleitung

Der Transport von Wärme gehört zu den grundlegenden Prozessen des Energietransportes. Prinzipiell kann sich dieser durch Leitung, Konvektion und Strahlung vollziehen. Der Wärmetransport von einem Festkörper an ein angrenzendes Fluid bzw. von einem Fluid an einen Festkörper wird als Wärmeübergang bezeichnet. Dieser Transportprozess setzt sich aus den drei angegebenen Arten des Wärmetransportes zusammen. Da der Prozess bei einem speziellen technischen Anwendungsfall von vielen Faktoren beeinflusst ist, gestaltet sich die Beschreibung der Teilprozesse oft sehr aufwendig. Um dennoch mit vertretbarem Aufwand die Größe des Wärmestromes bestimmen zu können, der eine solche technische Anwendung charakterisiert, wird dieser in Abhängigkeit von der Temperaturdifferenz zwischen dem Festkörper und dem Fluid, der Fläche, durch die der Wärmestrom erfolgt, und von einem Proportionalitätsfaktor, dem Wärmeübergangskoeffizienten dargestellt. Für die Beschreibung technischer Prozesse ist die Kenntnis des Wärmeübergangskoeffizienten unerlässlich.

In den letzten 10-12 Jahren ist zunehmend ein Trend der Miniaturisierung zu verzeichnen. Ursache für diese Entwicklung ist der Wunsch, verschiedene Vorteile, die eine derartige Verringerung der Baumaße mit sich bringt, zu nutzen. Einige dieser Vorteile sind schon aus dem Bereich der Mikroelektronik bekannt, wie z.B. die Verringerung des Bauraums, der Masse, des Materialaufwandes, sowie die Möglichkeit einer Massenproduktion von Bauelementen und damit verbunden die drastische Verringerung der Herstellungskosten für eine einzelne Baugruppe sowie die Austauschbarkeit von Baugruppen.

Ein weiterer wesentlicher Vorteil, der mit der Miniaturisierung von Apparaten, in denen Wärme- oder Stofftransportprozesse ablaufen, verbunden ist, ist das Vorhandensein wesentlich höherer Transportkoeffizienten. Beispielsweise sind mit kompakten Wärmeübertragern, bei denen das Medium durch viele parallel geschaltete Strömungskanäle geführt wird, die erreichbaren Leistungen pro Volumeneinheit um Größenordnungen höher als in Wärmeübertragern, in denen der gleiche Massenstrom durch wenige größer dimensionierte Kanäle strömt.

In verschiedenen Bereichen der Technik etablieren sich daher Anwendungsfälle, die die Kenntnis der Wärmeübergangsbedingungen in Kanälen mit sehr kleinen geometrischen Abmessungen erfordern. Der aktuelle Wissensstand weist allerdings nur relativ unsichere Beschreibungen des Wärmeübergangs in Kanälen im Bereich kleiner charakteristischer Längen ($l_{ch} \leq 1\,\mathrm{mm}$) auf.

Andere Anwendungsfälle sind in der Mikroverfahrenstechnik zu finden. Die kleinen charakteristischen Längen, die in Mikroreaktoren vorliegen, verbessern ähnlich dem Wärmetransport auch den Stofftransport und die Reaktionsgeschwindigkeit und damit die Ausbeute an Reaktionsprodukten. Da viele Reaktionen thermisch geführt werden, ist auch hier die Kenntnis der Wärmeübergangsbedingungen von großer Bedeutung. Ein weiterer Vorteil von Mikroreaktoren resultiert aus sicherheitstechnischen Aspekten. Durch das Vorliegen kleiner Volu-

mina sind die Auswirkungen von eventuell eintretenden Havarien bei unkontrolliertem Ablauf von Reaktionen, an denen explosive Stoffe beteiligt sind, in einem vertretbaren Rahmen zu halten. Weiterhin werden durch die guten Wärmeübergangsbedingungen hohe Wandüberhitzungen bei Reaktionen, die einer Wärmezufuhr, und hohe lokale Temperaturen bei Reaktionen, die einer Wärmeabfuhr bedürfen, vermieden.

Äußerst aktuelle Anwendungsfälle lassen sich in der Kraftfahrzeugtechnik finden. So ist beispielsweise durch eine Verdampfung des Kraftstoffs vor dem Eindüsen in die Ansaugluft ein Kraftstoff-Luft-Gemisch herstellbar, das selbst bei teilweiser Rückkondensation des Kraftstoffs in der kälteren Luft eine sehr gute Durchmischung sowie eine große spezifische Oberfläche zwischen den Kraftstofftröpfchen und der Luft aufweist. Dies verbessert die Zündeigenschaften und damit die Vollständigkeit der Verbrennung. In der Kaltstartphase kann daher auf eine starke Anreicherung des Gemisches mit Kraftstoff verzichtet werden, so dass der Anteil unverbrannter Kohlenwasserstoffe im Abgas drastisch reduziert werden kann.

Die Entwicklung alternativer Antriebe für den mobilen Einsatz forcierte in den letzten Jahren auch die Brennstoffzellenforschung. Da die Verwendung von gasförmigem Wasserstoff als Energieträger einen relativ hohen Aufwand an Transport, Infrastruktur und Sicherheitstechnik bei geringer Energiedichte darstellt, werden derzeit Methanol bzw. ein Methanol-Wasser-Gemisch und andere flüssige Energieträger bevorzugt. Dieses Medium wird durch Reformierung für den Brennstoffzellenprozess aufbereitet bzw. bei der Direkt-Methanol-Brennstoffzelle dieser sofort zugeführt. Sowohl für den Reformer als auch für die Brennstoffzelle ist eine vorherige Verdampfung des Mediums erforderlich. Da der zur Verdampfung erforderliche Wärmestrom durch den Massenstrom und die Verdampfungsenthalpie festgelegt ist, dem Konstrukteur im Fahrzeug aber nur begrenzte volumetrische Abmessungen für den Verdampfer zur Verfügung stehen, ist ein Aggregat mit einer hohen Leistungsdichte erforderlich. Auch hier sprechen deren Vorzüge für den Einsatz von Mikrowärmeübertragern.

Der Stand des Wissens[2] zum Wärmeübergang in Mikrowärmeübertragern beschränkte sich bis vor wenigen Jahren auf den einphasigen Wärmeübergang mit Wasser und verschiedenen Kältemitteln als strömendes Fluid. Sowohl für den Bereich der zweiphasigen Strömung als auch für die Verdampfung flüssiger Brennstoffe liegen wenige oder gar keine experimentellen Ergebnisse vor. Die vorliegenden theoretischen Modelle zur Beschreibung des Flüssig-Dampfbereiches verlieren ihre Gültigkeit unter den Bedingungen des Mikrokanals oder bedürfen der Verifizierung durch das Experiment.

[2] [2], [7]-[9], [14], [27], [43], [52]-[56]

1.1 Mikroapparate – Charakterisierung und technische Anwendung

Als Mikroapparate werden im Schrifttum technische Apparate genannt, in denen die für die Transportprozesse charakteristischen Längen im Mikrometerbereich liegen. Tabelle 1.1 zeigt den für Mikroapparate geltenden Größenbereich sowie den der angrenzenden Größenordnungen.

Tabelle 1.1: Verwendete Bezeichnungen für technische Größenordnungen

Makro	Mikro	Nano
$\left(1-10^{-3}\right)\mathrm{m}$	$\left(10^{-3}-10^{-6}\right)\mathrm{m}$	$10^{-6}-10^{-9}\ \mathrm{m}$

Die Herstellung von Apparaten in derart kleinen Dimensionen wird durch moderne Fertigungsmethoden ermöglicht. Eine viel versprechende Methode ist die LIGA-Technik, die mittels Lithographie, Galvanoformung und Abformung eine flexible und effiziente Herstellung von komplexen Mikrosystemen ermöglicht. Aber auch mechanische Fertigungsverfahren finden Anwendung bei der Herstellung von Mikrostrukturen [20].

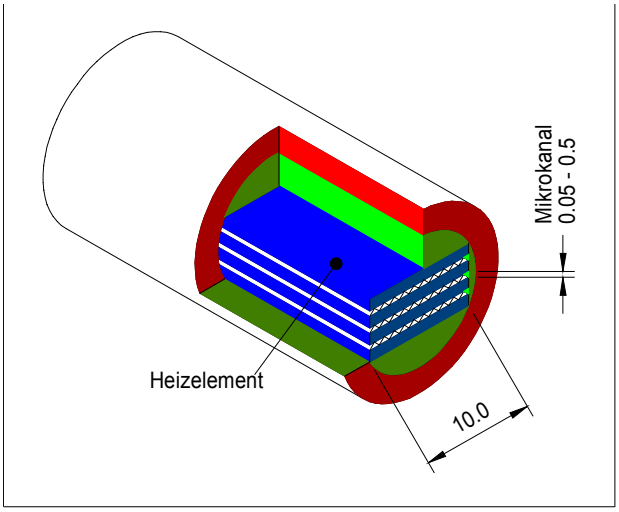


Bild 1.1: Benzin-Mikroverdampfer

Im Folgenden sollen einige technische Anwendungsfälle gezeigt werden, in denen Wärmeübergangsprozesse in Mikrostrukturen auftreten. Ein wichtiger Anwendungsfall sind der Mikrowärmeübertrager bzw. der Mikroverdampfer. In Bild 1.1 ist ein elektrisch beheizter Mikroverdampfer dargestellt, der für die Vorverdampfung von Benzin vor der Saugrohreinspritzung von Ottomotoren konzipiert wurde. Die Wärmezufuhr erfolgt durch Widerstandsheizelemente, zwischen denen Kanäle mit charakteristischen Längen von ca. 50 µm angeordnet sind, durch die das zu verdampfende Medium strömt. Diese Bauform ermöglicht bei einer Gesamtabmessung des Verdampfers von 1 cm Durchmesser und einer Länge von 4 cm die Realisierung eines Wärmestromes von ca. 600 W, ohne dabei für Benzin kritische Heizflächentemperaturen zu überschreiten.

In Bild 1.2 und Bild 1.3 sind Mikrowärmeübertrager dargestellt, die im Forschungszentrum Karlsruhe [20] entwickelt wurden. Diese Wärmeübertrager weisen eine sehr hohe spezifische

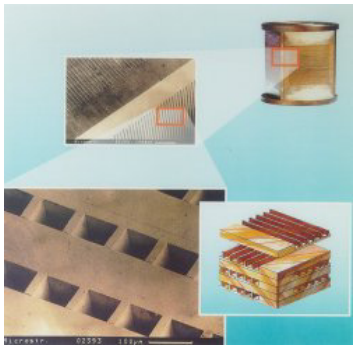


Bild 1.2: WÜ FZK[3]

Bild 1.3: WÜ FZK[4]

Wärmeübertragerfläche von bis zu 30000 m²/m³ auf. Die charakteristischen Längen der durchströmten Kanäle in diesen Wärmeübertragern liegen in einer Größenordnung von 70 µm-200 µm. Ein solches Aggregat mit einem Volumen von ca. 30 cm³ ermöglicht bei Verwendung von Wasser als heizendes und als kühlendes Medium eine Wärmeübertragerleistung von bis zu 200 kW.

Als ein Spezialfall des Mikrowärmeübertragers kann der Mikrokühler betrachtet werden. Ein wichtiges Einsatzgebiet für miniaturisierte Kühlelemente ist die Mikroelektronik. Mikrokühler ermöglichen den Abtransport der Wärme, die in integrierten Schaltkreisen infolge wachsender Integration in zunehmendem Maße anfällt.

Schon weiter oben wurde die Anwendung von Mikroapparaten in der Verfahrenstechnik genannt. Mikroreaktoren ermöglichen die Führung chemischer Reaktionen mit hoher Prozesssicherheit, gewährleisten durch redundante Anordnung von Reaktoren eine hohe Ausfallsicherheit der gesamten Anlage und geben die Möglichkeit, eine Wartung von einzelnen Anlagenteilen im laufenden Betrieb durchzuführen. Durch die Miniaturisierung wird eine Dezentralisierung von chemischen Anlagen wirtschaftlich bzw. bei einigen Prozessen überhaupt erst ermöglicht. Nicht zuletzt verspricht die Miniaturisierung von Reaktoren wegen der größeren Transportkoeffizienten für den Stoff- und Energietransport eine Erhöhung der Ausbeute und damit verbunden einen wirtschaftlichen Nutzen durch die Einsparung von Energie und Rohstoffen.

[3] Quelle: http://www.fzk.de/
[4] Quelle: http://www.fzk.de/

1.2 Optimierungsziele

Weiterer Fortschritt in der Entwicklung von Mikrosystemen ist eng mit dem Erreichen folgender Ziele verbunden:

- Weitere Miniaturisierung von Komponenten bei vorgegebenen Leistungsparametern ist insbesondere für den mobilen Einsatz erforderlich, da hier nur begrenzt Bauraum zur Verfügung steht und auch Beschränkungen hinsichtlich der Masse der Komponenten bestehen.
- Erhöhung der übertragenen Wärmestromdichte bzw. zielgerichtetes Abstimmen der zu realisierenden Wärmeübergangskoeffizienten, Wärmeübertragerflächen und Temperaturdifferenzen durch optimale Wahl der Geometrie hinsichtlich Kanalform und charakteristischer Länge.
- Verringerung bzw. Optimierung des Druckverlustes, um erforderliche Pumpleistungen gering zu halten.
- Gute Regelbarkeit. Für viele Anwendungsfälle ist auch eine instationäre Betriebsweise der Komponenten bzw. der Betrieb in wechselnden Lastzuständen von Interesse.
- Verringerung der Verschmutzungsgefahr durch konstruktive Optimierung der Kanalform um den Einsatz teurer Filtertechnik, die wiederum mit einem erhöhten Druckverlust verbunden ist, reduzieren oder ganz vermeiden zu können.
- Verringerung des Fertigungsaufwandes bei Einhaltung der gewünschten Qualitätsanforderungen. Dies ist durch eine Neu- und Weiterentwicklung der Herstellungsverfahren in Kombination mit der Entwicklung definierter Schnittstellen bzw. Standards für die Verbindung von Komponenten der Mikrosystemtechnik zu erreichen.

Um diese Ziele realisieren zu können, ist eine umfassende Kenntnis der Transportprozesse, die in Mikrostrukturen auftreten, erforderlich. Es ist zu klären, inwieweit das Wissen, das für makroskopische Geometrien vorliegt, für die Vorgänge in Mikrostrukturen anwendbar ist, und für welche Phänomene neue Modellvorstellungen zu entwickeln sind.

1.3 Ziel der Arbeit

In der vorliegenden Arbeit soll ein Beitrag zur Verbesserung des Kenntnisstandes über den Wärmeübergang in Mini- und Mikrokanälen geleistet werden. Dazu werden experimentelle Untersuchungen an Einzelkanälen vorgenommen, die von den Testfluiden Wasser bzw. n-Heptan durchströmt werden. Untersuchungsgegenstand ist sowohl der Bereich des einphasigen als auch der Bereich des zweiphasigen Wärmeübergangs. Für diese Untersuchungen kommt eine infrarotthermografische Messmethode zur Anwendung, die die Vorzüge eines berührungslosen und eines nahezu verzögerungsfreien Messverfahrens in sich vereinigt. Weiterhin ermöglicht diese Messmethode eine hohe örtliche Auflösung des zu untersuchenden Kanals. Im Ergebnis der experimentellen Untersuchungen sollen Aussagen

zur Position der einzelnen Siedebereiche, zur Größe des Wärmeübergangskoeffizienten und zum Druckverlust getroffen werden.

Es soll ein numerisches Berechnungsmodell erarbeitet werden, das den Prozess des Wärmeübergangs im ein- und im zweiphasigen Bereich beschreibt. Für den einphasigen Bereich soll das Modell programmtechnisch umgesetzt und für den zweiphasigen Bereich die rechentechnische Umsetzung vorbereitet werden. Damit wird die Möglichkeit eröffnet, zum einen die Anzahl erforderlicher Experimente zu reduzieren und zum anderen für die Messung schwer zugängliche Bereiche zu untersuchen.

Weiterhin werden dadurch die Interpretation von Experimenten und die Analyse verschiedener Phänomene unterstützt bzw. überhaupt erst ermöglicht.

Wegen der kleinen charakteristischen Längen der Mikrokanäle ist davon auszugehen, dass auch im technisch relevanten Bereich der Strömungsgeschwindigkeiten kein turbulentes Strömungsregime auftritt. Daher werden die Untersuchungen auf den Bereich der laminaren Strömung beschränkt.

2 Wärmeübergang in durchströmten Kanälen - Stand des Wissens

Der Prozess der Wärmeübertragung wird von den Erhaltungsprinzipien von Masse, Impuls und Energie bestimmt. Für die makroskopische Betrachtungsweise der Strömung eines Fluides in einem beheizten oder gekühlten Kanal werden diese Erhaltungsprinzipien durch die Navier-Stokes-Gleichungen sowie die Fourier-Kirchoff-Gleichung wiedergegeben. Auf die Bilanzierung unter Verwendung dieser Gleichungen wird im Abschnitt 4 näher eingegangen. Da die Lösung dieser Gleichungen für die praktische Anwendung in der Regel sehr aufwendig ist, versucht die Wissenschaft, dem Ingenieur für die Bestimmung des Wärmestromes $\dot{Q}$ eine einfache Gleichung der Form

$$\dot{Q} = \dot{q}A = \alpha A \Delta T \qquad (2.1)$$

zur Verfügung zu stellen. Kann in einem Experiment die Wärmestromdichte $\dot{q}$ realisiert und die Temperaturdifferenz ΔT messtechnisch bestimmt werden bzw. kann der Prozess mit Hilfe einer numerischen Berechnung simuliert werden, so kann der Wärmeübergangskoeffizient zu

$$\alpha = \frac{\dot{q}}{\Delta T} \qquad (2.2)$$

bestimmt werden. Dabei beinhaltet der Wärmeübergangskoeffizient einen Anteil des Energietransportes, der auf der Wärmeleitung beruht und einen Anteil der durch die Konvektion hervorgerufen wird. Der Anteil der reinen Leitung ist im Allgemeinen gut bekannt bzw. bestimmbar, während der konvektive Anteil von einer Vielzahl von Einflussparametern abhängt. Es wird daher eine dimensionslose Kennzahl definiert, die das Verhältnis der Widerstände gegen den Transport durch Leitung zum gesamten Wärmeübergangswiderstand angibt:

$$Nu = \frac{\alpha l_{ch}}{\lambda} \qquad (2.3)$$

Sie kann als dimensionsloser Wärmeübergangskoeffizient aufgefasst werden und wird als Nußelt-Zahl bezeichnet.

In der Literatur finden sich Gleichungen für die Bestimmung der Nußelt-Zahl, die verschiedene Kennzahlen als Parameter aufweisen. Diese Kennzahlen lassen sich mit Hilfe der Ähnlichkeitstheorie [18], [42]; [79] aus den Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie herleiten. Der Wärmeübergang bei konvektionsdominanten Problemen ist im Wesentlichen von der Reynolds-Zahl und der Prandtl-Zahl abhängig. Es gilt der funktionale Zusammenhang

$$Nu = \left(f\left(Re, Pr\right)\right), \qquad (2.4)$$

der häufig durch einen einfachen Potenzansatz der Form

$$Nu = k \cdot Re^m \cdot Pr^n \qquad (2.5)$$

dargestellt wird. Der Koeffizient k und die Exponenten m und n sind durch Experimente zu bestimmen.

2.1 Einphasiger Wärmeübergang

Durchströmt eine homogene Phase einen beheizten Kanal, wird dieser Wärme zugeführt. Erfolgt dies in einem Temperatur-Druck-Bereich, in dem kein Phasenwechsel auftritt, wird der Vorgang als einphasiger Wärmeübergang bezeichnet. Der Prozess kann durch die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie entsprechend der Kontinuumstheorie beschrieben werden. Für Standardgeometrien und konstante Randbedingungen lassen sich mit entsprechenden Vereinfachungen analytische Lösungen der Gleichungen ableiten. Klassische Lösungen findet man in Merker [42] bzw. in Baehr/Stephan [4]. Eine umfangreiche Zusammenstellung sowohl analytischer Lösungen als auch auf experimentellen Daten basierender Ergebnisse stellt der VDI-Wärmeatlas [3] dar.

Im Wesentlichen ist der Wärmeübergang dabei von folgenden Bedingungen abhängig:

Zunächst ist der Charakter der Strömung, d. h. laminar oder turbulent von großem Einfluss auf den Wärmeübergang. Es bilden sich bei beiden Strömungsformen unterschiedliche Geschwindigkeitsprofile aus. In der turbulenten Strömung treten zusätzliche Energietransportprozesse auf Grund der turbulenten Oberschwingungen der Strömungsgeschwindigkeit auf. Für Rohre und Kanäle wird der Charakter der Strömung durch den Betrag der Reynolds-Zahl Re festgelegt.

$$Re = \frac{d_{hyd} v}{\nu} \qquad (2.6)$$

Dabei bezeichnet $d_{hyd} = 4A/U$ den hydraulischen Durchmesser, der für kreisförmige Rohre dem Innendurchmesser entspricht. Weist die Reynolds-Zahl einen Wert auf, der kleiner ist als die kritische Reynolds-Zahl, die für die Strömung in Rohren mit $Re = 2320$ angegeben wird, liegt laminare Strömung vor. Es folgt ein Übergangsbereich bis etwa $Re \leq 8000$, in dem bei sehr glatten Rohren und ruhiger Zuströmung noch laminare Strömung vorliegen kann. Bei noch größeren Reynolds-Zahlen ist die Strömung turbulent. Bei sehr kleinen charakteristischen Längen, wie sie in Mikroapparaten vorkommen, liegt laminare Strömung vor. Daher werden die weiteren Ausführungen auf die laminare Strömung beschränkt.

Tritt das Fluid in den Kanal ein, beispielsweise aus einem Behälter oder einem Kanal mit einem anderen Querschnitt, muss das Fluid eine bestimmte Strecke in Strömungsrichtung durchlaufen, bis sich das der Strömungsform entsprechende Strömungsprofil eingestellt hat. Diese Strecke wird als hydrodynamische Einlauflänge bezeichnet. Da das Strömungsprofil Einfluss auf den Wärmeübergang hat, ist für diesen entscheidend, ob die Strömung

hydrodynamisch eingelaufen oder nicht eingelaufen ist. Merker [42] macht für die Länge des hydrodynamischen Einlaufes folgende Angaben:

Für das Kreisrohr gilt

$$l_{hyd} = Red_{hyd}\left[0{,}056 + \frac{0{,}6}{Re\left(1 + 0{,}035 \cdot Re\right)}\right] \qquad (2.7)$$

und für die Strömung zwischen parallelen Platten

$$l_{hyd} = Red_{hyd}\left[0{,}011 + \frac{0{,}315}{Re\left(1 + 0{,}0175 \cdot Re\right)}\right]. \qquad (2.8)$$

In Bild 2.1 ist die hydrodynamische Einlauflänge für die Strömung in Rohren und in Bild 2.2 die für die Strömung zwischen parallelen Platten in Abhängigkeit von der mittleren Strömungsgeschwindigkeit und vom Durchmesser bzw. vom Plattenabstand für Mikrokanäle dargestellt.

Sind die Strömungsgeschwindigkeiten in den Kanälen verhältnismäßig klein, ist die hydrodynamische Einlauflänge in Mikrokanälen verhältnismäßig kurz, so dass für Mikrokanäle bei ausreichend großer Gesamtlänge des Kanals von hydrodynamisch eingelaufener Strömung ausgegangen werden kann.

Von weiterem Einfluss auf den Wärmeübergang in durchströmten Kanälen ist der Ort des Beginns der Beheizung, der nicht identisch mit dem Kanaleintritt übereinstimmen muss bzw. die damit verbundene Strecke, die das Fluid zu durchlaufen hat, bis sich ein ausgebildetes Temperaturprofil eingestellt hat, d. h. die Gradienten des Temperaturfeldes ändern sich nicht mehr, so dass die Größe des Wärmestromes unabhängig vom Ort in Strömungsrichtung ist. Diese Strecke, die das Fluid vom Beginn der Beheizung an bis zum Erreichen des ausgebildeten Temperaturprofils zu durchlaufen hat, wird thermische Einlauflänge genannt. Die Länge des thermischen Einlaufs ist abhängig von der Art der Beheizung, d. h. vom Typ der an der Wand vorherrschenden Randbedingung. Im Schrifttum werden insbesondere die beiden Sonderfälle a) konstante Wandtemperatur, $T_W = konst.$, die beispielsweise durch eine

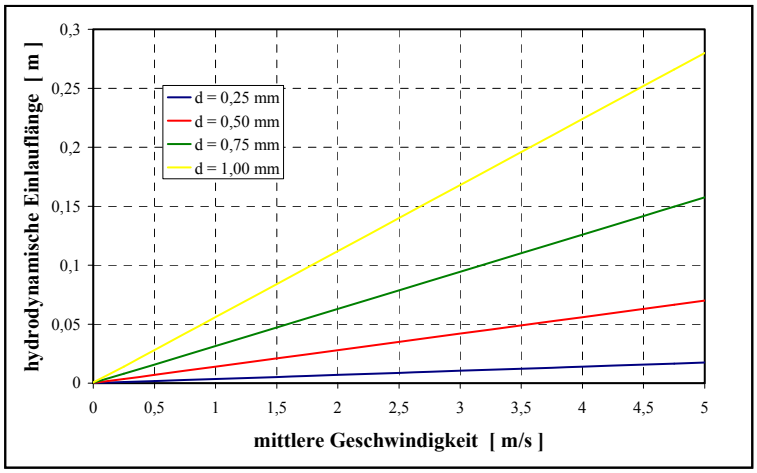


Bild 2.1: Hydrodynamische Einlauflänge im Rohr

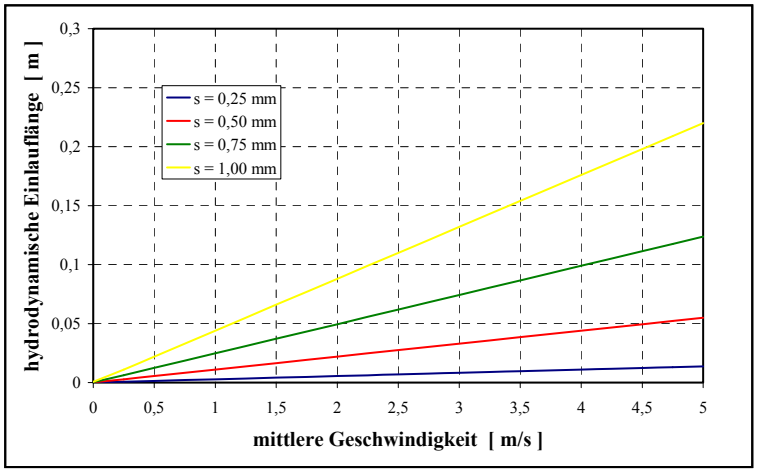


Bild 2.2: Hydrodynamische Einlauflänge zwischen parallelen Platten

Beheizung mit kondensierendem Dampf realisiert werden kann, und b) konstante Wärmestromdichte, $\dot{q} = konst.$, die recht gut durch elektrische Beheizung zu erreichen ist, dargestellt. Analog ist auch der Wärmeübergang, d. h. die Größe der Nußelt-Zahl von diesen Randbedingungen abhängig. Shah hat aus der Lösung des Graetz-Nußelt-Problems die folgenden Gleichungen ermittelt [42]. Aus den mit Hilfe dieser Beziehungen bestimmten Nußelt-Zahlen lassen sich unter Verwendung von Gleichung (2.3) die entsprechenden Wärmeübergangskoeffizienten berechnen. Zur Bestimmung des Wärmestromes ist die calorisch über den Querschnitt gemittelte Fluidtemperatur zu verwenden.

Für die thermische Einlauflänge l_{th} sowie für die lokale Nußelt-Zahl Nu_z und die mittlere Nußelt-Zahl Nu_m gilt, wenn der hydrodynamische Einlauf bereits abgeschlossen ist, für das Kreisrohr im Fall $T_W = konst.$

$$l_{th} = 0{,}0335 \cdot RePrd_{hyd}$$

$$Nu_z = \begin{cases} \dfrac{1{,}077}{\left(z^*\right)^{1/3}} - 0{,}7; & z^* = \dfrac{z}{d_{hyd} RePr} \le 0{,}01 \\ 3{,}657 + \dfrac{6{,}874}{\left(10^3 z^*\right)^{0{,}488}} \exp\left(-57{,}2 z^*\right); & z^* = \dfrac{z}{d_{hyd} RePr} > 0{,}01 \end{cases}$$

$$Nu_m = \begin{cases} \dfrac{1{,}615}{\left(z^*\right)^{1/3}} - 0{,}7; & z^* \le 0{,}005 \\ \dfrac{1{,}615}{\left(z^*\right)^{1/3}} - 0{,}2; & 0{,}005 \le z^* \le 0{,}03 \\ 3{,}657 + \dfrac{0{,}0499}{z^*} & 0{,}03 < z^* \end{cases} \qquad (2.9)$$

und im Fall $\dot{q} = konst.$

$$l_{th} = 0{,}0431 RePrd_{hyd}$$

$$Nu_z = \begin{cases} \dfrac{1{,}302}{\left(z^*\right)^{1/3}} - 1; & z^* \le 5\cdot 10^{-5} \\ \dfrac{1{,}302}{\left(z^*\right)^{1/3}} - \dfrac{1}{2}; & 5\cdot 10^{-5} \le z^* \le 1{,}5\cdot 10^{-3} \\ 4{,}364 + \dfrac{8{,}68}{\left(10^3 z^*\right)^{0{,}506}} \exp\left(-41 z^*\right); & z^* > 1{,}5\cdot 10^{-3} \end{cases} \qquad (2.10)$$

$$Nu_m = \begin{cases} \dfrac{1{,}953}{\left(z^*\right)^{1/3}}; & z^* \le 0{,}03 \\ 4{,}364 + \dfrac{0{,}0722}{z^*}; & z^* > 0{,}03 \end{cases}$$

sowie für die Strömung zwischen parallelen Platten im Fall $T_W = konst.$

$$l_{th} = 0{,}007974 \cdot RePrd$$

$$Nu_z = \begin{cases} \dfrac{1{,}233}{\left(x^*\right)^{1/3}} + 0{,}4; & z^* \le 0{,}001 \\ 7{,}541 + \dfrac{6{,}874}{\left(10^3 z^*\right)^{0{,}488}} \exp\left(-245 z^*\right) & z^* > 0{,}001 \end{cases}$$

$$Nu_m = \begin{cases} \dfrac{1{,}849}{\left(z^*\right)^{1/3}}; & z^* \le 5\cdot 10^{-4} \\ \dfrac{1{,}849}{\left(z^*\right)^{1/3}} + 0{,}6; & 5\cdot 10^{-4} z^* < 0{,}006 \\ 7{,}541 + \dfrac{0{,}0235}{z^*} & z^* > 0{,}006 \end{cases} \qquad (2.11)$$

und im Fall $\dot{q} = konst.$

$$l_{th} = 0{,}01154 \cdot RePrd$$

$$Nu_z = \begin{cases} \dfrac{1{,}490}{\left(z^*\right)^{1/3}}; & z^* \le 2\cdot 10^{-4} \\ \dfrac{1{,}490}{\left(z^*\right)^{1/3}} - 0{,}4; & 2\cdot 10^{-4} \le z^* \le 10^{-3} \\ 8{,}235 + \dfrac{8{,}68}{\left(10^3 z^*\right)^{0{,}506}} \exp\left(-164 x^*\right); & z^* > 10^{-3} \end{cases}$$

$$Nu_m = \begin{cases} \dfrac{2{,}236}{\left(z^*\right)^{1/3}}; & z^* \le 10^{-3} \\ \dfrac{2{,}236}{\left(z^*\right)^{1/3}} + 0{,}9; & 10^{-3} \le z^* \le 10^{-2} \\ 8{,}235 + \dfrac{0{,}0364}{z^*} & z^* > 10^{-2} \end{cases} \qquad (2.12)$$

Es sei darauf hingewiesen, dass die angegebenen Gleichungen an den Grenzen der Gültigkeitsbereiche teilweise nicht stetig ineinander übergehen bzw. dass die Gleichungen für die mittlere und für die lokale Nußelt-Zahl unterschiedliche Gültigkeitsbereiche aufweisen. Dies liegt darin begründet, dass Shah diese verhältnismäßig einfachen Gleichungen an die analytische Lösung des Graetz-Nußelt-Problems angepasst hat, so dass die Abweichung von dieser maximal 3% beträgt.

In der Literatur, z.B. [3], [4], [42] werden weitere Gleichungen zur Bestimmung der Nußelt-Zahl angegeben, die größtenteils auf der Korrelation experimenteller Daten beruhen. Die damit berechneten Nußelt-Zahlen stimmen mehr oder weniger gut mit den angegebenen Gleichungen überein.

2.2 Zweiphasiger Wärmeübergang - Strömungssieden in Kanälen

Wird in einem beheizten Kanal eine Flüssigkeit verdampft, lassen sich verschiedene Phänomene beobachten. Erreicht die Temperatur einer in einem beheizten Kanal strömenden Flüssigkeit die zum lokalen Druck gehörige Siedetemperatur, kommt es zum Verdampfungsprozess. Bild 2.3 zeigt die unterschiedlichen Strömungsformen, die beim Sieden in durchströmten Kanälen auftreten können. Zunächst zeigt die Abbildung einen Bereich, in dem noch reine Flüssigkeit vorliegt. In diesem Bereich erfolgt die Vorwärmung wie im Abschnitt 2.1 beschrieben. Überschreitet die Differenz der Wandtemperatur T_W und der Siedetemperatur T_S einen bestimmten Wert, der für eine Blasenbildung bzw. für ein Blasenwachstum notwendig ist, so beginnt der Siedeprozess. Der Ort, an dem diese ersten Blasen entstehen wird als Initialpunkt bezeichnet. Im nun folgenden Bereich entstehen permanent Blasen an der Wand, es existiert aber auch noch Flüssigkeit, die gegenüber der Siedetemperatur unterkühlt ist. Der Bereich vom Beginn der Blasenentstehung bis zu dem Ort, an dem die über den Strömungsquerschnitt gemittelte Fluidtemperatur $\overline{T}_{Fl}$ gleich der Siedetemperatur ist, wird als Bereich des unterkühlten Siedens bezeichnet.

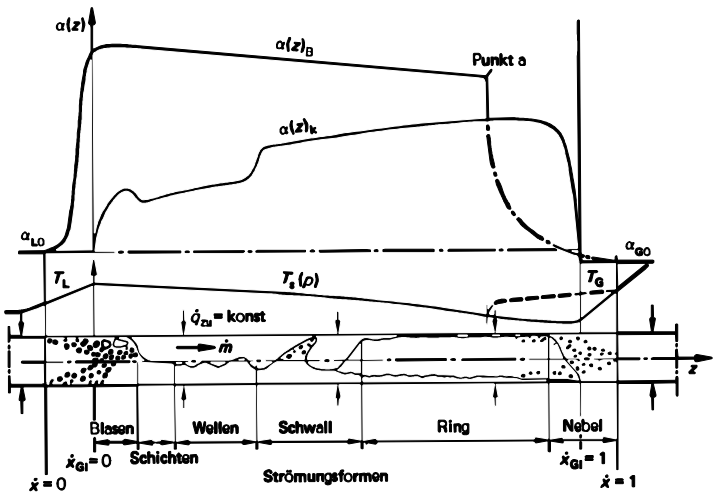


Bild 2.3: Strömungsformen beim Sieden gesättigter Flüssigkeiten[5]

[5] Quelle: [3], VDI-Wärmeatlas, Abschn. Hbb

An diesen Bereich schließt sich der Bereich des Sättigungssiedens an. Das Fluid im gesamten Querschnitt befindet sich im Siedezustand. Hier können in Abhängigkeit vom Dampfgehalt, von der Heizflächenbelastung, von den Stoffwerten des Fluides und anderen Einflussgrößen verschiedene Strömungsformen auftreten. Von besonderem Einfluss ist die räumliche Ausrichtung des Strömungskanals. Auf Grund von Schwerkraftwirkungen unterscheiden sich die Strömungsformen in einem horizontal angeordneten Kanal, Bild 2.4, von denen in einem vertikal angeordneten Kanal, Bild 2.5. Im Anhang E sind fotografische Aufnahmen diverser Strömungsformen dargestellt. Durch den Auftrieb der Phase mit der geringeren Dichte einstehen in horizontal angeordneten Kanälen Strömungsformen, die hinsichtlich der Kanalachse eine Unsymmetrie aufweisen. Während in vertikal angeordneten Kanälen die Kanalwand auf dem gesamten Umfang mit Flüssigkeit benetzt sein kann, entstehen in horizontal durchströmten Kanälen Heizflächenbereiche, die nur mit der Gasphase in Verbindung treten. Da der Prozess der Blasenentstehung und des Wachstums der Gasbereiche stochastischen Charakter besitzt, ist auch die Strömung in vertikal angeordneten Kanälen, wie in Bild 2.5 nicht symmetrisch. Für eine Modellbetrachtung kann dies aber in guter Näherung angenommen werden. Für beide Anordnungen verändern sich die Strömungsformen mit zunehmendem Strömungsdampfgehalt $\dot{x}$ von der Blasenströmung hin zur Nebelströmung. Welche Strömungsform konkret vorliegt, kann so genannten Strömungsformenkarten entnommen werden, wie sie beispielsweise in [3] zu finden sind. Der Wärmeübergang im Bereich der Zweiphasenströmung wird von der Art der vorliegenden Strömungsform beeinflusst.

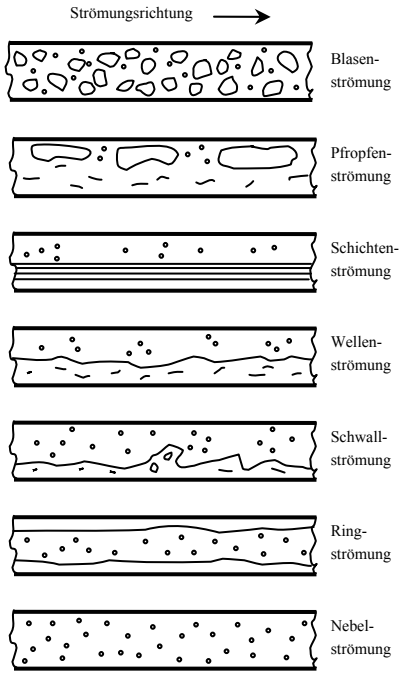


Bild 2.4: Strömungsformen im horizontal durchströmten Kanal

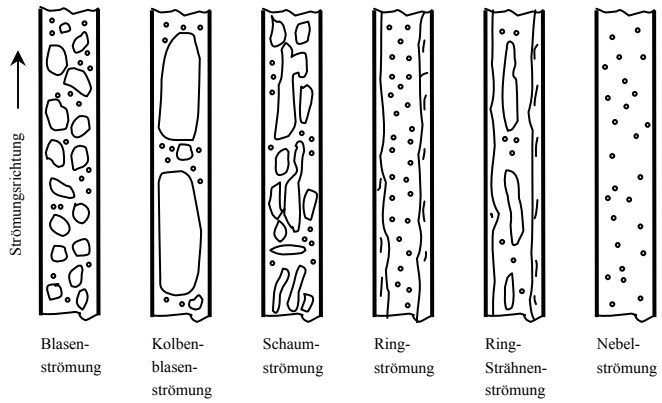


Bild 2.5: Strömungsformen im vertikal, aufwärts durchströmten Kanal

Wird die von der Heizfläche an das Fluid übertragene Wärmestromdichte über einen kritischen Wert gesteigert, geht die Benetzung mit Flüssigkeit verloren. Es kommt zum Austrocknen der Heizfläche, dem so genannten Dryout. Da der Dampf im Verhältnis zur Flüssigkeit wesentlich schlechtere Wärmetransporteigenschaften aufweist, verschlechtert sich der Wärmeübergang, was vor allem bei Systemen mit aufgeprägter Wärmestromdichte

(elektrische Beheizung) zu drastischen Anstiegen der Wandtemperatur und somit zur Zerstörung der Heizfläche führen kann. Daher ist die Kenntnis der kritischen Wärmestromdichte von großem Interesse für die Auslegung von Verdampfern.

Nach dem Dryout folgt das so genannte Postdryoutgebiet, in dem die restliche Flüssigkeit weiter verdampft wird, bis ein Strömungsdampfgehalt von $\dot{x} = 1$ erreicht ist. Befindet sich der nun alleinig vorliegende Dampf weiterhin in einer beheizten Kanalstrecke, wird er einphasig überhitzt.

2.2.1 Initialpunkt

Für die Abschätzung, ob einphasiger Wärmeübergang vorliegt oder der Siedeprozess bereits eingesetzt hat, ist die Bestimmung der Lage des Initialpunktes erforderlich. Dazu lassen sich in der Literatur unterschiedliche Ansätze finden. Zum einen kann die erforderliche Wandüberhitzung $(T_W - T_S)_{ini}$ bestimmt werden, bei der die ersten Dampfblasen zu beobachten sind. Hierzu sind die Gleichungen von Sato und Matsumura [60] als theoretisches Modell

$$(T_W - T_S)_{ini} = 2\left(\frac{2\sigma(1/\rho'' - 1/\rho')T_S\dot{q}}{\Delta h_v \lambda'}\right)^{1/2} \qquad (2.13)$$

sowie die von Bergles und Rohsenow [5] empirisch für Wasser ermittelte Gleichung

$$(T_W - T_S)_{ini} = \frac{5}{9}\left[\left(\frac{\dot{q}}{1120}\right)^{0,463} p^{-0,535}\right]^{p^{0,0234}} \qquad (2.14)$$

am bekanntesten.

Zum anderen kann der Ort des Initialpunktes direkt angegeben werden. Dies erfolgt in der Regel über den dimensionslosen Siedepunktsabstand, die Phasenkennzahl Ph. Eine Gleichung zur Bestimmung der Lage des Initialpunktes wurde von Hodgson [35] aufgestellt.

$$141\left(N_{b,ini}\right)^{0,7} = \left(-Ph_{ini}\right)^{0,55} H_b^{0,08}$$
$$\text{mit} \qquad H_b = -\frac{\Delta h_v}{c'_p}\frac{\dfrac{d(\rho'/\rho'')}{dp}}{dT_S/dp} \qquad (2.15)$$

N_b ist die Siedekennzahl und Ph ist die Phasenkennzahl, die hier für den Initialpunkt gelten. Vom Initialpunkt an stromabwärts beginnt der Bereich des unterkühlten Siedens. In Kanälen mit sehr kleinen charakteristischen Längen ist der Kern der Strömung gegenüber der Wand aber nur schwach unterkühlt. Daher hat dieser Bereich keine sehr große Ausdehnung, die Strömung geht unmittelbar in den Bereich des gesättigten Strömungssiedens über.

2.2.2 Sieden gesättigter Flüssigkeiten

Der Bereich des Sättigungssiedens umfasst, wie bereits ausgeführt, verschiedene Strömungsformen. Für diese unterschiedlichen Bereiche finden sich in der Literatur verschiedene Ansätze, die meist empirischen Charakters sind. Beispielhaft sei an dieser Stelle die Gleichung für das konvektive Sieden in vertikal durchströmten Kanälen nach [3]

$$\frac{\alpha(z)}{\alpha_{LO}} = \left\{ (1-\dot{x})^{0,01} \left[(1-\dot{x})^{1,5} + 1{,}9\dot{x}^{0,6} \left(\frac{\rho'}{\rho''} \right)^{0,35} \right]^{-2,2} + \dot{x}^{0,01} \left[\frac{\alpha_{GO}}{\alpha_{LO}} \left(1 + 8(1-\dot{x})^{0,7} \left(\frac{\rho'}{\rho''} \right)^{0,67} \right) \right]^{-2} \right\} \tag{2.16}$$

angegeben. Das konvektive Sieden, welches auch als stilles Sieden bezeichnet wird, ist eine Form des zweiphasigen Wärmeübergangs, die eintritt, wenn der Wärmewiderstand in der Grenzschicht bzw. der Flüssigkeitsschicht kleiner ist als der beim Blasensieden. Es werden daher keine neuen Dampfblasen generiert, die Verdampfung findet an der bereits bestehenden Phasengrenze statt. Gleichung (2.16) korreliert den lokalen Wärmeübergangskoeffizienten $\alpha(z)$ mit den Stoffwerten der Flüssigkeit und des Dampfes im Siedezustand an der Stelle z, mit dem vorliegenden Strömungsdampfgehalt sowie mit den lokalen Wärmeübergangskoeffizienten der einphasigen Flüssigkeits- bzw. Dampfströmung, die an der Stelle z vorliegen würden.

2.2.3 Dryout

Die in der Literatur aufgeführten Gleichungen zur Bestimmung des kritischen Siedezustandes weisen in der Regel die Form $\dot{q}_{kr} = f(\dot{m}, \dot{x}, p, l_{ch}, ...)$ bzw. $\dot{x}_{kr} = (\dot{m}, \dot{q}, p, l_{ch}, ...)$ auf. Sind die Betriebsparameter, d. h. die Massenstromdichte und die Wärmestromdichte für eine gegebene Kanalgeometrie bekannt, wie dies beispielsweise durch eine elektrische Beheizung realisierbar ist, so ist die zweite Form von Vorteil, um den Ort des Austrocknens der Heizfläche zu ermitteln. Ist für den interessierenden Parameterbereich keine Korrelation in dieser Form verfügbar, kann auf die erste Form zurückgegriffen werden. Allerdings sind diese Gleichungen nicht immer analytisch nach $\dot{x}$ auflösbar, so dass ein iteratives Lösungsverfahren angewendet werden muss. In [3] sind für senkrecht durchströmte Rohre Korrelationsgleichungen für verschiedene Druckbereiche angegeben. Beispielhaft sei hier

$$\dot{x}_{kr} = 10{,}795\dot{q}^{-0,125}\dot{m}^{-0,333} \cdot (d \cdot 1000)^{-0,07} e^{0,01715p} \tag{2.17}$$

mit dem Gültigkeitsbereich $200\ \mathrm{kg/(m^2 s)} \le \dot{m} \le 5000\ \mathrm{kg/(m^2 s)}$, $4 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} \le d \le 32 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}$ und $4{,}9\ \mathrm{bar} \le p \le 29{,}4\ \mathrm{bar}$ angegeben. Die Parameter $\dot{q}$, $\dot{m}$ und d sind in die angegebene Gleichung in SI-Einheiten, der Druck p ist in bar einzusetzen.

2.3 Druckverlust

2.3.1 Druckverlust - einphasig

Der Druckverlust, der sich zwischen zwei Orten 1 und 2 in einem Kanal einstellt, folgt aus der Bilanz der mechanischen Energien, die auf die Bernoulli-Gleichung

$$p_1 + \frac{\rho_1}{2} v_1^2 + \rho_1 g h_1 = p_2 + \frac{\rho_2}{2} v_2^2 + \rho_2 g h_2 + \Delta p_v \qquad (2.18)$$

führt. Treten starke Änderungen der Dichte auf, ist diese Gleichung abschnittsweise anzuwenden. Für die einphasige Strömung wird der Druckverlust in durchströmten Rohren und Kanälen, für verschiedene Einbauten wie Krümmer und Ventile sowie für Verluste, die beim Einströmen in bzw. beim Ausströmen aus einem Rohr auftreten, üblicherweise über den Zusammenhang

$$\Delta p_v = \zeta \frac{\rho}{2} v^2 \qquad (2.19)$$

bestimmt, wobei der Verlustbeiwert ζ für Kanäle von der Länge l, vom hydraulischen Durchmesser d_{hyd} sowie vom Rohrreibungskoeffizienten λ in der Form

$$\zeta = \varphi \lambda \frac{l}{d_h} \qquad (2.20)$$

abhängt. Der Koeffizient φ dient der Berücksichtigung der speziellen Geometrie. Für kreisförmige Rohre gilt $\varphi = 1$. Bei Rechteckkanälen ist die Größe von φ vom Seitenverhältnis a/b abhängig.

Für den Druckverlust ist von großer Bedeutung, ob sich die Strömung im laminaren oder im turbulenten Zustand befindet. In der Regel kann bei Kanälen mit sehr geringen Kanalquerschnitten von laminarer Strömung ausgegangen werden. In diesem Fall gilt für glatte Rohre das Hagen-Poiseulle´sche Gesetz

$$\Delta p_v = \frac{32 \eta v l}{d^2} \qquad (2.21)$$

was mit (2.19) und (2.20) auf

$$\lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}} \qquad (2.22)$$

führt. Bei turbulenter Strömung gilt in einem Bereich von $3000 \le \mathrm{Re} \le 100000$ die Gleichung von Blasius

$$\lambda = \frac{0{,}3164}{\sqrt[4]{\mathrm{Re}}}. \qquad (2.23)$$

2.3.2 Druckverlust - zweiphasig[6]

Die Bestimmung des Druckverlustes im Bereich der Zweiphasenströmung wird häufig mit der Methode von Martinelli durchgeführt. Sie gibt den Druckverlust Δp_v als Produkt des Druckverlustes einer Phase und eines Zweiphasenmultiplikators ϕ an. Von Chrisholm wurde dieser Ansatz auf die flüssige Phase bezogen. Es gilt

$$\Delta p_v = \Delta p_{v,l} \phi_l^2 \tag{2.24}$$

mit

$$\phi_l^2 = 1 + \left(\Gamma^2 - 1\right)\left[\frac{21}{\Gamma}\dot{x}^{0,9}\left(1-\dot{x}\right)^{0,9} + \dot{x}^{1,8}\right]$$
$$\text{und} \quad \Gamma = \left(\frac{\rho_l}{\rho_v}\right)^{0,5}\left(\frac{\eta_v}{\eta_l}\right). \tag{2.25}$$

Die Berechnung des Druckabfalls in einem Kanal erfolgt auch im Gebiet der zweiphasigen Strömung mit Hilfe der Gleichung (2.18). Die einzusetzende Dichte ist dann die Gemischdichte

$$\overline{\rho} = \left(1-\varepsilon\right)\rho_l + \varepsilon\rho_v \,. \tag{2.26}$$

Die Größe ε ist der volumetrische Dampfgehalt, der zu

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + \left(\frac{1-\dot{x}}{\dot{x}}\right)\cdot s \cdot \frac{\rho_v}{\rho_l}} \tag{2.27}$$

bestimmt werden kann. Der Schlupf $s = v_v / v_l$ zwischen den beiden Phasen wird mit

$$s = \left(\frac{\rho_l}{\rho_v}\right)^{0,205}\left(\frac{\dot{m}d}{\eta_f}\right)^{-0,016} \tag{2.28}$$

angegeben.

2.4 Wärmeübergang in Mikrokanälen

Der Beginn der Untersuchungen zum Wärmetransport in Kanälen mit kleinen charakteristischen Längen begann vor ca. 2 Jahrzehnten. Tuckerman und Pease [70] veröffentlichten 1981 Ergebnisse zum Wärmeübergang in Kühlkörpern für elektronische Schaltkreise. Von diesem Zeitpunkt an, ist bis heute eine starke Zunahme der Forschungsarbeiten auf dem Gebiet des Wärmetransports in Mikrokanälen zu verzeichnen. Das große Interesse liegt darin begründet, dass bei Verringerung der charakteristischen Länge des Kanals vom Makro- hin zum Mikromaßstab die Wärmeübergangsverhältnisse nach herkömmlichen

[6] Die Ausführungen folgen [3], Abschnitt Lgb

Modellvorstellungen permanent besser werden. Demgegenüber steht der Sachverhalt, dass der Bereich der charakteristischen Länge der Mikrokanäle, 1 mm-1 µm relativ groß ist, so dass unterschiedliche Phänomene zu verzeichnen sein können. Seit diesem Zeitpunkt ist ein ständig steigendes Interesse an der Thematik und eine Zunahme der publizierten Arbeiten zu registrieren. Eine Zusammenfassung und Auswertung der bisherigen Forschungsarbeiten nehmen Obot [48], Palm [50] sowie Sobhan und Garimella [66] vor. Von diversen Autoren wurden Messungen zum Wärmeübergang in engen Kanälen vorgenommen. Dabei wurden neben Kanälen mit Kreis- und Rechteckquerschnitt auch andere Geometrien wie in [73] oder auch binäre und ternäre Gemische untersucht [23]. Die Ergebnisse zeigen dabei unterschiedliche Entwicklungen beim Verringern der charakteristischen Längen. Palm [50] schlussfolgert: „It can be concluded that there are still many open questions to be answered before reliable design tools are available in the form of correlating equations for heat transfer and pressure drop. More research is therefore needed …".

Dass die Ergebnisse der Untersuchungen verschiedener Autoren sehr unterschiedlich ausfallen, stellt auch Herwig in [32] und [34] fest. Zusammenfassend gibt er folgende Bereiche für die Verhältnisse charakteristischer Größen zwischen Mikro- und Makrogeometrien an.

Für den Druckverlustbeiwert: $$0{,}5 < \frac{\zeta_{MIKRO}}{\zeta_{MAKRO}} < 3{,}5\,,$$

für die Nußelt-Zahl: $$0{,}2 < \frac{Nu_{MIKRO}}{Nu_{MAKRO}} < 16 \text{ und}$$

für die kritische Reynolds-Zahl: $$0{,}13 < \frac{Re_{C,MIKRO}}{Re_{C,MAKRO}} < 0{,}43\,.$$

Sehr umfangreiche Untersuchungen wurden von Peng, Wang und Mitarbeitern [52]-[56] vorgenommen. Sie untersuchten den Wärmeübergang in Mikrokanälen sowohl im einphasigen Bereich als auch beim Strömungssieden. Durch Peng und Wang werden die Begriffe „fictitious boiling" und „evaporating space" für Effekte, die bei der Verdampfung in Mikrokanälen zu beobachten sind, geprägt. „Fictitious boiling" weist darauf hin, dass in sehr kleinen Geometrien keine Dampfbildung auftritt. Vielmehr wird die Flüssigkeit in einen metastabilen Zustand versetzt. Erst wenn diese überhitzte Flüssigkeit in einen ausreichend großen Raum, dem „evaporating space" strömt, soll es zur Verdampfung kommen.

Viele Autoren, z.B. Bowers und Mudawar [7], [8], [9], Celata et al. [11], Mertz und Groll [43], [44] oder Peng et al. [56] stellen Ergebnisse vor, die für die Bedingung einer konstanten Temperatur der Kanalwand gewonnen wurden. Die Beheizung wird dabei durch kondensierenden Dampf realisiert oder Mikrokanäle sind in einem gut wärmeleitenden Material wie Kupfer oder Messing angeordnet, welches die elektrisch eingetragene Heizleistung verteilt und eine gleichmäßige Temperaturverteilung an den Heizflächen gewährleistet.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass zum Teil sehr widersprüchliche Aussagen in Bezug auf den Wärmeübergang in Mikrokanälen existieren. Frühere Untersuchungen waren meist auf einphasige Strömungen beschränkt. Vom Beginn dieser Arbeit bis zum heutigen Zeitpunkt sind sehr umfangreiche Untersuchungsergebnisse auf dem Gebiet des Wärmeübergangs, vor allem auch für die zweiphasige Strömung durchgeführt und veröffentlicht worden. Der aktuelle Stand der Forschung kann [39], [40] entnommen werden.

Diese Arbeit wurde im Wesentlichen durch den Mangel an gesicherten Auslegungskriterien insbesondere für Verdampfungsprozesse motiviert. Die unterschiedlichen Aussagen der Literatur erfordern die Notwendigkeit von Experimenten, aber auch von Simulationen, insbesondere in Verbindung mit den gewachsenen numerischen und rechentechnischen Möglichkeiten, um Effekte zu untersuchen, die dem Experiment nur schwer zugänglich sind. Die Simulationsergebnisse ermöglichen eine bessere Interpretation der experimentellen Ergebnisse und können zur Verbesserung der experimentellen Auswertemöglichkeiten beitragen.

2.5 Vorgehensweise für die Untersuchungen

Zur Durchführung eigener Experimente wird ein Versuchsaufbau konzipiert, der es ermöglicht, die zur Bestimmung der Wärmeübergangsverhältnisse in durchströmten Kanälen erforderlichen Daten zu erfassen. Inbesondere soll eine Temperaturverteilung entlang des Stömungskanals bestimmbar sein. Die Beheizung wird so realisiert, dass das im Kanal strömende Fluid mit einer konstanten Wärmestromdichte beaufschlagt wird.

Es werden Messungen zur Bestimmung des Wärmeübergangs mit verschiedenen Testkanälen und mit unterschiedlichen Fluiden durchgeführt.

Auf der Basis der experimentell gewonnenen Erkenntnisse werden Modelle für die Strömung im beheizten Kanal im ein- und zweiphasigen Gebiet hergeleitet.

Für das Modell der einphasigen Strömung wird ein numerischer Algorithmus entwickelt und programmtechnisch umgesetzt. Die Implementation eines Modells für das zweiphasige Gebiet wird vorbereitet.

Der Algorithmus wird getestet und es werden Berechnungen zum Wärmeübergang in Mikrokanälen durchgeführt. Die Berechnungsergebnisse werden den experimentellen Daten gegenübergestellt.

3 Experimentelle Untersuchungen

Aus dem vorangegangenen Abschnitt geht hervor, dass für ein besseres Verständnis der Transportphänomene in Mikrokanälen experimentelle Untersuchungen erforderlich sind, die Informationen über den Zustand der Strömung und den Wärmeübergang vor allem im Zweiphasengebiet liefern. Dazu sind bei Kenntnis der Wärmestromdichte $\dot{q}$ neben den Bedingungen am Kanaleintritt und am Kanalaustritt vor allem Messwerte der Temperatur entlang des Strömungskanals zu gewinnen, womit die Bestimmung eines lokalen Wärmeübergangskoeffizienten sowie die Abgrenzung der einzelnen Siedebereiche voneinander ermöglicht wird. Der Messaufbau sollte dabei unter anderem folgende Anforderungen erfüllen:

- Realisierung eines möglichst konstanten Massenstroms, auch bei instationären Schwankungen der erforderlichen Druckerhöhung
- Möglichkeit des Einsatzes unterschiedlicher Testmedien, auch brennbarer Stoffe
- Möglichst geringe Beeinflussung des Prozesses durch die Messtechnik
- Möglichkeit der Visualisierung instationärer Effekte

Diesen Erfordernissen gerechtwerdende Versuchsaufbauten wurden konzipiert, aufgebaut und für die experimentellen Untersuchungen eingesetzt. Ihr Aufbau wird im Folgenden beschrieben. Erste Ergebnisse sind in [28] dargestellt.

3.1 Versuchsaufbau

Zur Untersuchung der Phänomene beim Sieden in Mikrokanälen wurden zwei Versuchsanlagen entwickelt. Technisch relevante Mikrokanäle weisen neben ihrer kleinen charakteristischen Länge meist auch eine entsprechend kurze Länge in Strömungsrichtung auf. Um die unterschiedlichen Bereiche des Strömungssiedens dennoch gut beobachten zu können, wurde eine Versuchsanlage für Vorversuche konzipiert, die es ermöglicht, Kapillarrohre mit einer Länge von bis zu 1,1 m zu untersuchen. Dieser Versuchsaufbau ist in Bild 3.1 schematisch dargestellt. Die Anlage besteht aus einem Strömungskreislauf in Edelstahlausführung. Der von dem Testfluid durchlaufene Weg führt vom Vorratsbehälter (a), an den zur Temperierung ein Thermostat (b) angeschlossen ist, durch eine Zahnradpumpe (c), passiert ein Massenstrommessgerät (d) und tritt schließlich in die Testsektion (e) ein. In der Testsektion findet die Energiezufuhr statt. Nach dem Durchströmen der Testsektion tritt das Fluid in den Expansionsbehälter (f) ein. Zur Einstellung konstanter Versuchsbedingungen wurde die Versuchsanlage als ein gegen die Atmosphäre offenes System ausgeführt. Eine Verbindung zur Umgebung besteht am Vorratsbehälter, eine zweite am Entspannungsgefäß. Wird in der Testsektion soviel Energie zugeführt, dass Verdampfung eingetreten ist und somit eine Zweiphasenströmung bzw. reiner Dampf vorliegt, so entweicht der Dampf aus dem Entspannungsgefäß in die Umgebung.

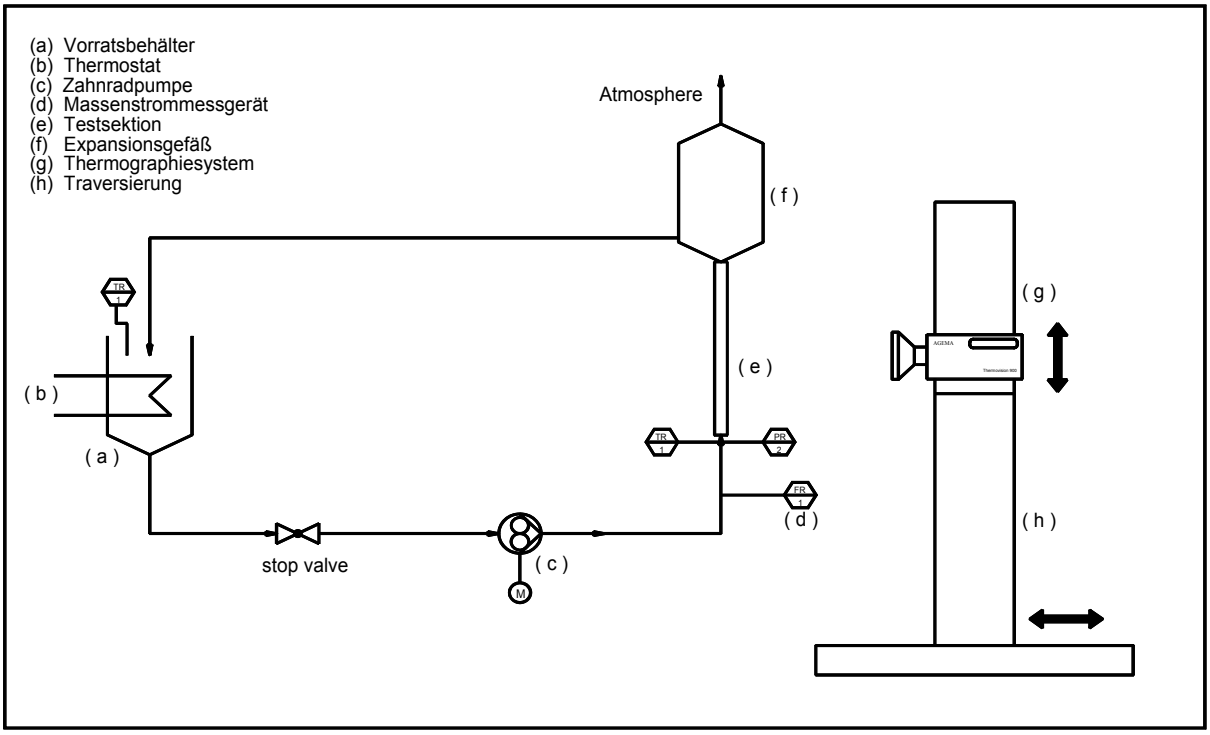


Bild 3.1: Schema der offenen Versuchsanlage

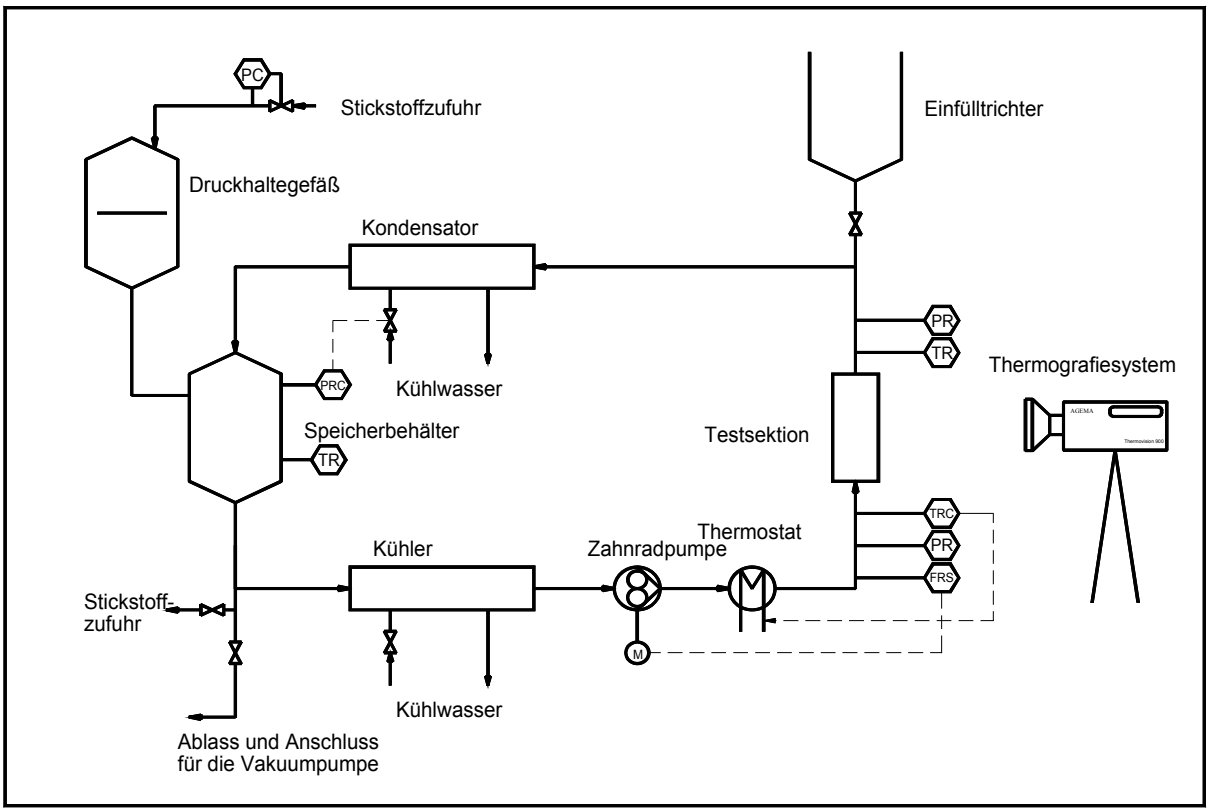


Bild 3.2: Schema der Versuchsanlage

Der nicht verdampfte Anteil des Fluides bzw. die rückkondensierte Flüssigkeit wird gesammelt und in den Vorratsbehälter zurückgeführt. Der Vorteil einer offenen Ausführung der Versuchsanlage liegt darin begründet, dass durch die Verdampfung kein Anstieg des Druckniveaus in der Anlage eintritt, da sämtlicher Dampf in die Atmosphäre abgeleitet wird. Da Dampf in die Atmosphäre austreten kann, ist der Einsatz von brennbaren bzw. giftigen Stoffen in dieser Versuchsanlage nicht möglich. Sie ist einzig für die Untersuchungen mit Wasser vorgesehen. Zur Erfassung der Messwerte kamen folgende Sensoren zum Einsatz:

Massenstrommessgerät:	Danfoss Massflo® Mass 2100 Anordnung zwischen Pumpe und Kanaleintritt
Druckmessumformer:	Jumo, Typ 4341 direkt am Kanaleintritt und am Kanalaustritt
Thermoelement:	Typ K direkt am Kanaleintritt und am Kanalaustritt

Der Umlauf wurde durch eine Zahnradpumpe vom Typ ismatec MCP-Z realisiert, die einen Volumenstrom von $0\ \text{ml/min} \leq \dot{V} \leq 250\ \text{ml/min}$ bei einer maximalen Druckerhöhung von 6 bar abdeckt. Durch den Einsatz einer Zahnradpumpe, also einer nahezu kontinuierlich arbeitenden Verdrängerpumpe, kann die Forderung nach einem konstanten Fördermassenstrom, auch bei schnell wechselnden Gegendrücken, weitestgehend erfüllt werden.

Zur Bestimmung der örtlichen Temperatur der Kanalwand kommt ein Infrarot-Thermografiesystem vom Typ AGEMA Thermovision® 900 (g) zum Einsatz. Das als Scanner arbeitende Thermografiesystem ist durch folgende Parameter gekennzeichnet:

Empfindlichkeit für elektromagnetische Strahlung im Wellenlängenbereich: 8-12 µm

Auflösung des Untersuchungsgebietes:	136 x 272 Pixel bei max. 15 Hz Bildfrequenz (Vollbildmodus) 68 x 272 Pixel bei max. 30 Hz Bildfrequenz (Halbbildmodus) 1 x 272 Pixel bei max. 2500 Hz Bildfrequenz (Linescanmodus)

Durch den Einsatz dieses Infrarotthermografiesystems steht eine Messtechnik zur Verfügung, die eine sowohl örtlich als auch zeitlich hochauflösende Erfassung der Wandtemperaturen der Testsektionen ermöglicht. Außerdem besteht keine Rückwirkung durch das Messsystem auf den zu untersuchenden Prozess.

Da die gesamte Kanallänge von 1,1 m nicht in einem Bildausschnitt des Infrarotsystems erfassbar ist, wurde das System auf eine Traversiereinrichtung (h) montiert. Dadurch ist es möglich, einen gewünschten Bereich der Testsektion direkt anzufahren bzw. durch kontinuierliches Verfahren der Traversierung ein Abscannen der gesamten Testsektion durchzuführen.

Die beschriebene offene Versuchsanlage weist verschiedene Vorteile auf, wie einen konstanten Druck am Austritt der Testsektion, einen einfachen Aufbau sowie die Möglichkeit der Untersuchung verhältnismäßig großer Verdampferlängen. Demgegenüber steht aber eine Reihe von Nachteilen, wie beispielsweise ein sehr starker Druckverlust, vor allem bei größeren Dampfgehalten. Instationäre Prozesse können nicht am gesamten Kanal, sondern nur bei einer festen Kameraposition richtig erfasst werden, da die Zeitdauer für das Abscannen die Zeitdauer von instationären Vorgängen, die durch die Verdampfung im Kanal hervorgerufen werden, wesentlich überschreitet. Weiterhin ist durch die offene Konstruktion eine Untersuchung von brennbaren oder giftigen Medien nicht möglich.

Daher wurde eine zweite Anlage konzipiert, bei deren Konstruktion die genannten Nachteile beseitigt wurden. Schematisch ist diese Anlage in Bild 3.2 dargestellt. Gegenüber der offenen Anlage wurde diese zweite Anlage als geschlossenes System ausgeführt und der Strömungskreislauf wurde um die Komponenten Kondensator, Kühler und eine Druckhaltung ergänzt. Druck- und Temperatursensoren wurden jeweils am Ein- und Austritt der Testsektion angeordnet. Das Einstellen der gewünschten Zulauftemperatur erfolgt über einen, durch einen Wärmeübertrager vom Fluidkreislauf getrennten Thermostaten, der hinter der Zahnradpumpe angeordnet ist. Zur Bestimmung der Temperatur des Kanals kommt wiederum das genannte Thermographiesystem zum Einsatz. Als maximale Länge für die zu untersuchenden Kanäle wurde hier eine Länge von 0,2 m festgelegt. Dies ermöglicht die Erfassung der gesamten Testsektion bei einer festen Kameraposition. Bild 3.3 Zeigt die Position der Testsektion in der Versuchsanlage.

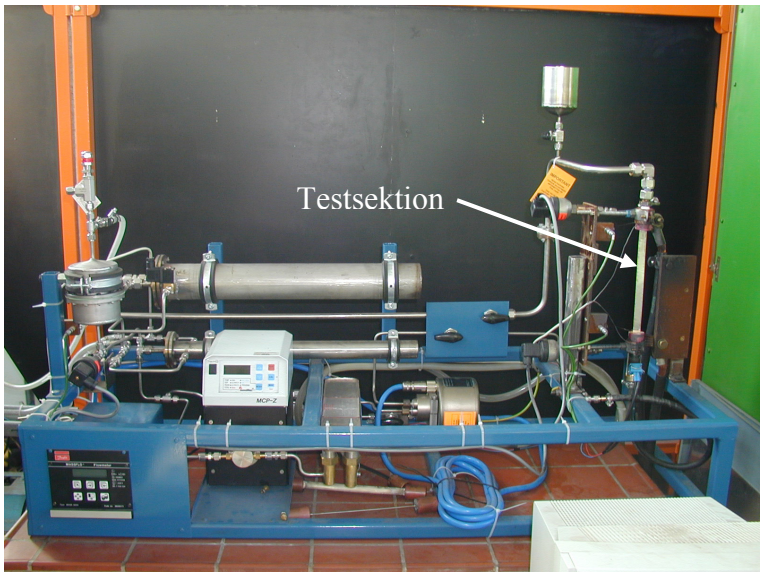


Bild 3.3: Geschlossene Versuchsanlage

3.1.1 Verwendete Testsektionen

Zur Untersuchung des Wärmeübergangs in Mikrokanälen wurden Versuchskanäle mit unterschiedlichem Querschnitt untersucht. In der offenen Versuchsanlage kamen Kapillarrohre zum Einsatz, in der geschlossenen Versuchsanlage fanden Kanäle mit Rechteckquerschnitt mit unterschiedlichen Seitenverhältnissen Verwendung, siehe Anhang E, Bild 8.9.

Um auch Versuche auszuführen, die sich bis in das Gebiet nach dem Dryout erstrecken, wird als Wandmaterial für alle Kanäle die hochwarmfeste Nickelbasislegierung 2.4816 (Inconel 600) verwendet. Bei den Kapillarrohren handelt es sich um nahtlos gezogene Rohre.

Zur Realisierung der Kanäle mit Rechteckquerschnitt wurden zwei Deckbleche mit Hilfe von zwei Distanzblechen entsprechend Bild 3.4 angeordnet und an den beiden Längskanten verschweißt. Bedingt durch das angewendete Schweißverfahren ist zur Realisierung der Schweißnaht ein Blechüberstand an jeder Seite des Kanals von 2 mm gegenüber der gewünschten Kanalbreite *b* erforderlich. Um die gewünschte Spaltweite *s* des Kanals zu realisieren, werden neben den an beiden Seiten des Kanals angeordneten Distanzblechen, die ebenfalls die Stärke *s* aufweisen, während der Schweißung Abstandshalter in den Kanal eingelegt, und der gesamte Kanal zwischen Kupferplatten verspannt. Die Kupferplatten haben zum einen die Aufgabe, die Bleche für den Schweißprozess zu fixieren und andererseits, die durch die Schweißung eingetragene Wärme abzuleiten, wodurch ein Verziehen des Kanals vermieden werden konnte. Nach Beendigung des Schweißprozesses und einer Abkühlphase werden die Kupferplatten sowie die Abstandshalter entfernt.

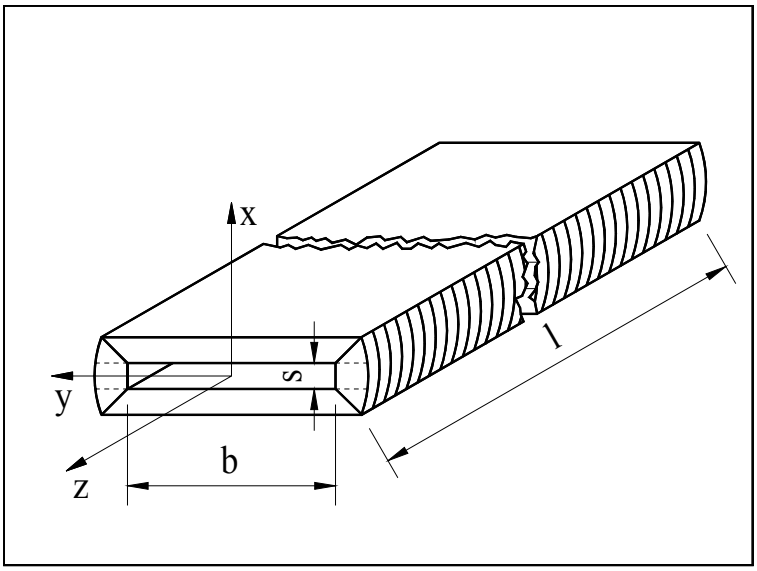
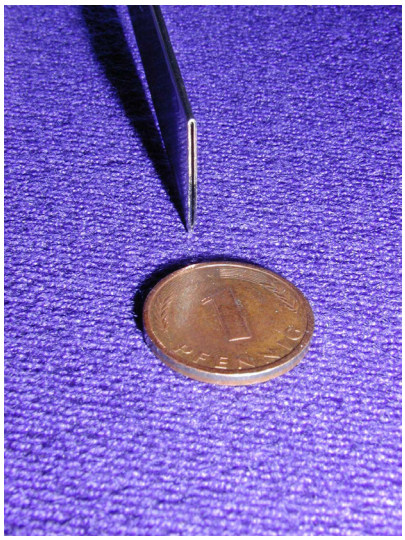


Bild 3.4: Aufbau eines Versuchskanals

Zum Einbinden des Kanals in den Strömungskreislauf werden spezielle Anschlussstücke verwendet, in die der geschweißte Kanal beiderseits eingelötet wird. Diese Anschlussstücke dienen weiterhin der Einbindung der Temperatur- und Drucksensoren. Bild 3.5 a) zeigt einen geschweißten Kanal zum Größenvergleich mit einer Münze. In Bild 3.5 b) sind diverse Kanäle, die bereits in die Anschlussstücke eingelötet sind, dargestellt.



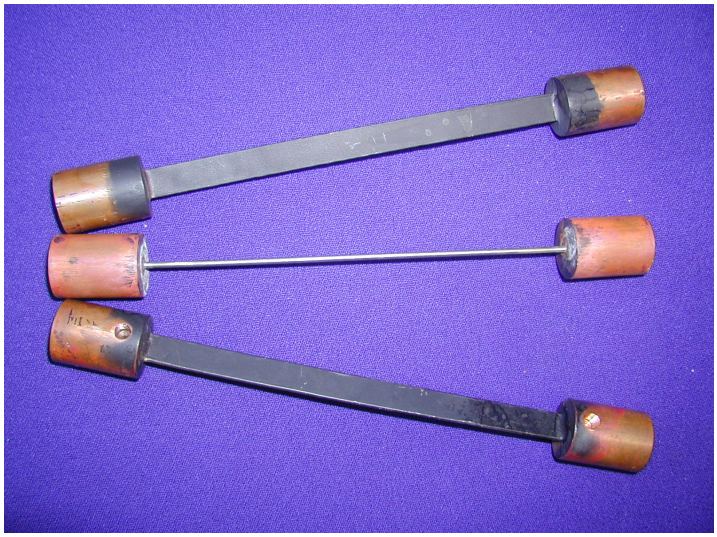


Bild 3.5: Versuchskanal
a) Größenvergleich **b) Kanäle mit Anschlussstücken**

3.1.2 Realisierung der Beheizung

Neben der sehr hohen Temperaturbeständigkeit weist das für die Kanäle verwendete Wandmaterial auch einen verhältnismäßig hohen spezifischen elektrischen Widerstand auf. Daher ist es möglich, die Kanalwand als Ohm´schen Widerstand zu verwenden, indem an die Anschlussstücke des Kanals eine Spannung angelegt wird. Damit wird die am Widerstand abfallende elektrische Leistung innerhalb der Kanalwand in Wärme umgesetzt. Um möglichst die gesamte elektrische Verlustleistung in der Kanalwand umzusetzen und somit wenig Wärme in den Anschlussstücken zu generieren, wurden diese aus Kupfer hergestellt. Der gesamte Versuchskanal wurde von der übrigen Versuchsanlage durch den Einbau von Kunststoffrohren elektrisch getrennt.

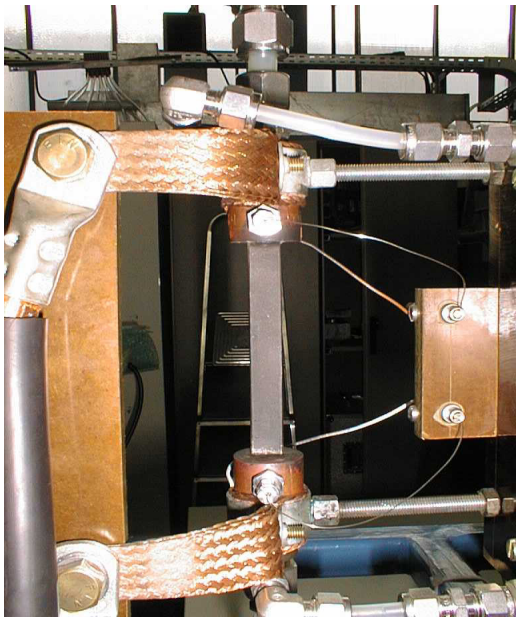


Bild 3.6: Testsektion (Mikrokanal)

Bild 3.6 zeigt die Einbindung eines Versuchskanals in den Strömungskreislauf, die elektrischen Anschlüsse sowie die Anschlüsse von Druck und Temperatursensoren.

Durch die direkte Umsetzung der elektrischen Verlustleistung P_{el} in Wärme

$$\dot{Q}_V = \dot{q}_V V = P_{el} = UI \qquad (3.1)$$

lässt sich eine nahezu gleichverteilte volumetrische Wärmequelle

$$\dot{q}_V = \frac{UI}{V} \qquad (3.2)$$

in der Kanalwand realisieren. Für die Bereitstellung der elektrischen Leistung kamen zwei Laborspannungsquellen vom Typ Delta Elektronika SM 15-200 D zur Anwendung, die jeweils maximal 3 kW elektrische Leistung liefern können. Durch Parallel- oder Reihenschaltung beider Geräte lassen sich wahlweise die Bereiche 0-15 V, 0-400 A bzw. 0-30 V, 0-200 A anwenden. Bei den durchgeführten Versuchen wurde der elektrische Strom vorgewählt. Da der elektrische Widerstand eines Kanals von dessen Bauart und geometrischer Größe bestimmt wird, stellt sich die Spannung dem eingestellten Strom entsprechend ein. Die maximal mögliche Heizleistung wird somit erreicht, wenn entweder die Bereichsgrenze für den Strom oder die für die Spannung, die für die entsprechende Schaltung der Spannungsquellen gilt, überschritten wird.

Alle für die Auswertung der Versuche erforderlichen Daten werden durch einen PC mit Messdatenerfassungshardware und –software registriert und für die spätere Auswertung gespeichert. Die Infrarotaufnahmen werden von einem PC mit Spezialhardware für das Infrarotthermografiesystem erfasst und gespeichert.

3.2 Beschreibung der Messmethode

Ziel ist die Bestimmung des lokalen Wärmeübergangskoeffizienten α im Kanal nach Gleichung (2.2). Die vom Kanal an die strömende Flüssigkeit übertragene Wärmestromdichte $\dot{q}$ wird aus der Energiebilanz an einem Kanalwandausschnitt dV zu

$$\dot{q} = \frac{\dot{q}_V dV - \dot{q}_{out} dA_{out} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} dV}{dA} = \frac{dUI - \dot{q}_{out} dA_{out} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} dV}{dA}$$

bzw. (3.3)

$$\bar{\dot{q}} = \frac{\bar{\dot{q}}_V V - \bar{\dot{q}}_{out} A_{out}}{A} = \frac{UI - \bar{\dot{q}}_{out} A_{out}}{A}$$

bestimmt. Die erste Form der Gl. (3.3) gibt dabei die lokale, die zweite Form die mittlere Wärmestromdichte an. Die Wärmestromdichte $\dot{q}_{out}$ ist die Wärmestromdichte, die Energieverluste an die Umgebung berücksichtigt. A_{out} ist die wärmeübertragende Fläche an der Außenseite des Versuchskanals. Auf den Wärmeübergang von der Außenseite des Kanals an die Umgebung wird näher in den folgenden Abschnitten eingegangen. Weiterhin ist bei der Bestimmung der Wärmestromdichte nach der 2. Form von Gl. (3.3) vorausgesetzt, dass die volumetrische Wärmequelle konstant ist, was gerechtfertigt ist, wenn die Temperatur der Kanalwand in Richtung des Kanals keinen großen Änderungen unterworfen ist. Ebenfalls wird die Annahme getroffen, dass Effekte durch Wärmeleitung in Längsrichtung des Kanals vernachlässigbar sind. Diese Annahme ist erlaubt, wenn die Krümmung des Temperaturfeldes klein ist, wie in [29] dargestellt.

Für die Bestimmung des Wärmeübergangskoeffizienten ist weiterhin die Kenntnis der Temperaturdifferenz zwischen Innenwand des Kanals T_{in} und einer für den Wärmeübergang charakteristischen Temperatur des Fluides erforderlich. Für die Temperatur des Fluides wird

$$T_{Fl}(z) = \begin{cases} \bar{T}(z) & \text{, im einphasigen Bereich} \\ T_S(p(z)) & \text{, im zweiphasigen Bereich} \end{cases} \qquad (3.4)$$

festgelegt. $\bar{T}$ ist die calorisch gemittelte Temperatur des Fluides, die aus der Energiebilanz zwischen dem Kanaleintritt und dem Ort z bestimmt wird. Es gilt

$$\dot{H}(z) = \dot{H}_E + \dot{Q}(z) \text{ und } \bar{T}(z) = f\left(\dot{H}(z)\right). \qquad (3.5)$$

Die Innenwandtemperatur T_{in} wird indirekt aus der gemessenen Temperatur an der Außenwand des Kanals T_{out} bestimmt, wie in den Abschnitten 3.2.2 und 3.2.3. beschrieben.

3.2.1 Bestimmung der Außenwandtemperatur des Versuchskanals

Die lokale Außenwandtemperatur des Versuchskanals T_{out} wird messtechnisch mit Hilfe des im Abschnitt 3.1 beschriebenen Infrarotthermografiesystems AGEMA Thermovision® 900 bestimmt. Mit Hilfe dieses Messsystems ist es möglich, die Kanalaußenwand in Abhängigkeit

von der verwendeten Optik örtlich verhältnismäßig hoch aufzulösen. Es standen ein 5°-Objektiv mit einer zusätzlichen Close-Up Linse zur Verfügung, mit der bei einem Abstand von 0,6 m zwischen Kanalwand und Objektiv ein Ausschnitt von 54 mm x 27 mm im Vollbildmodus (vgl. Abschnitt 3.1) erfasst werden kann. Dies entspricht mit der Pixelanzahl für den genannten Modus einer Auflösung von 0,2 mm pro Pixel. Weiterhin kam ein 20°-Objektiv zur Anwendung, das eine Auflösung von 1,5 mm pro Pixel ermöglichte.

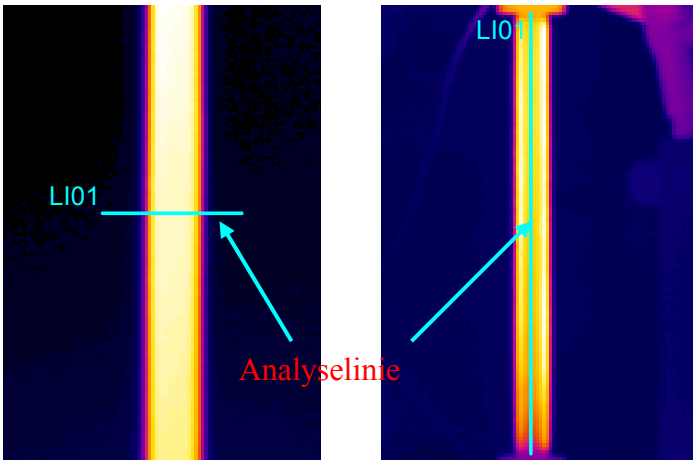


Bild 3.7: Infrarot-Aufnahme eines Kanals
a) offene Anlage b) geschlossene Anlage

Bild 3.7 zeigt beispielhaft jeweils eine Infrarotaufnahme, die von einem Kanal a) in der offenen Versuchsanlage und b) in der geschlossenen Versuchanlage aufgezeichnet wurde. Da in der offenen Versuchsanlage Kanäle mit einer Länge von bis zu 1,1 m untersucht werden können, ist es erforderlich, das IR-System mittels Traversiereinrichtung entlang des Kanals zu verfahren, (siehe Abschnitt 3.1). Dies erfolgt mit einer konstanten Geschwindigkeit v_{Trav}. Gleichzeitig wird durch das IR-System eine Sequenz von Infrarotaufnahmen mit der Frequenz f_{IR} gespeichert.

Die Software des IR-Systems stellt zudem diverse Analysetools bereit. So lassen sich z.B. die Temperaturen entlang einer Analyselinie bestimmen. In Bild 3.7 a) ist eine Analyselinie quer zur Kanalachse angeordnet. Entlang dieser Linie werden Temperaturen bestimmt. Für die in der offenen Versuchsanlage ausschließlich untersuchten Kapillarröhrchen kann daher davon ausgegangen werden, dass an einer axialen Position z auf dem Umfang des Kanals die gleiche Temperatur vorliegt. Entsprechend dem Lambertschen Kosinusgesetz wird das IR-System die größte Strahlungsintensität und somit auch die größte Temperatur für das Flächenelement der Kanalwand registrieren, dessen Flächennormale mit der Verbindungslinie Kanal - IR-System zusammenfällt. Folglich ist die Maximaltemperatur, die entlang der Analyselinie bestimmt wird, die Außenwandtemperatur des Kanals. Bei Verwendung einer Analyselinie werden entsprechend der Aufnahmefrequenz f_{IR} Kanalaußenwandtemperaturen registriert. Die Werte werden der axialen Position z entsprechend der Geschwindigkeit der Traversierung und der verstrichenen Zeit zugeordnet. Dazu wird die Analyselinie auf der 1. Infrarotaufnahme der Sequenz direkt am Kanaleintritt positioniert. Dieser Aufnahme ist die Zeit 0 s zugeordnet. Jeder weiteren Infrarotaufnahme (Image) ist eine Zeit relativ zur 1. Aufnahme zugeordnet. Es gilt somit für die axiale Position $z = v_{Trav} \cdot t_{\mathrm{Im}age}$. Beispielsweise ergibt sich bei einer Geschwindigkeit der Traversierung von $v_{Trav} = 12{,}5$ mm/s und einer Aufnahmefrequenz des IR-Systems von 15 Hz ein Abstand zwischen den einzelnen

Temperaturmessstellen von 0,83 mm. Das Erreichen einer größeren Auflösung in z-Richtung ist möglich durch eine Verringerung der Geschwindigkeit der Traversierung, was aber den Nachteil mit sich bringt, dass sich die Zeit für das Abscannen des Kanals vergrößert. Eine andere Variante ist die Verwendung von mehreren Analyselinien und Überlagerung der Images.

Das Abscannen sehr langer Kanäle weist den Nachteil auf, dass nur quasistationäre Prozesse untersucht werden können, bzw. dass die Temperaturen, die mit der beschriebenen Methode für die Orte z der Kanalaußenwand bestimmt wurden, nicht einem einzigen Zeitpunkt zugeordnet werden können. Um diesen Nachteil zu umgehen, wurde die 2., die geschlossene Versuchsanlage so ausgelegt, dass der gesamte Kanal in einem Image erfassbar ist. Die mögliche Kanallänge wurde daher auf 0,2 m festgelegt. Bild 3.7 b) zeigt eine Infrarotaufnahme eines solchen Kanals. Durch diese Art der Erfassung des Kanals ist es möglich, eine Analyselinie in der Kanalachse anzuordnen, so dass die gesamte Temperaturfunktion $T(z)$ zu einem Zeitpunkt ermittelt werden kann.

Eine Messung mittels Infrarotthermografie erfordert eine gute Kenntnis des Emissionsverhältnises ε der untersuchten Oberfläche. Der Fehler der gemessenen Temperatur, der auf dem fehlerbehafteten Emissionsgrad $\varepsilon_F = \varepsilon + \Delta\varepsilon$ beruht, ist bei gleicher Abweichung $\Delta\varepsilon$ vom wahren Wert ε um so kleiner, je größer der wahre Wert ist. Daher ist es vorteilhaft, die metallischen Oberflächen der Versuchskanäle, die ein Emissionsverhältnis in der Größenordnung $0{,}1 \le \varepsilon \le 0{,}2$ aufweisen, zu beschichten. Hierzu kam ein Speziallack zur Anwendung, dessen Emissionsverhältnis in der Größenordnung von 0,9 liegt. Die Beschichtung wurde durch gleichmäßiges Aufsprühen realisiert. Das Emissionsverhältnis des verwendeten Lackes weist eine Temperaturabhängigkeit auf, welche vor der Verwendung messtechnisch durch definiertes Aufheizen einer mit dem Lack beschichteten Kupferprobe in einem Ofen mit Hilfe des Infrarotthermografiesystems bestimmt wurde. Die Abhängigkeit des Emissionsverhältnisses des Lackes von der Temperatur kann entsprechend der Messung im Bereich $50\ °C \le \vartheta \le 400\ °C$ zu

$$\varepsilon(T) = -3{,}7662 \cdot 10^{-9}\,\vartheta^3 + 3{,}5772 \cdot 10^{-6}\,\vartheta^2 - 1{,}1012 \cdot 10^{-3}\,\vartheta + 0{,}98645 \qquad (3.6)$$

angegeben werden. Die Infrarotaufnahmen erfolgen mit einem zuvor eingestellten konstanten Emissionsverhältnis. Zur Auswertung werden die Messdaten für die Temperatur entsprechend der Temperaturabhängigkeit des Emissionsgrades korrigiert. Dies erfolgt mit Hilfe der Gleichungen im Anhang A. Die aus dem Infrarot-Thermografiesystem AGEMA Thermovision® 900 ausgelesenen Messwerte werden mit der zu diesem Zweck entwickelten Auswertesoftware iterativ korrigiert.

3.2.2 Berechnung der Innenwandtemperatur für den ebenen Kanal

Zur Bestimmung des Wärmeübergangskoeffizienten ist die Kenntnis der Innenwandtemperatur des Kanals erforderlich. Mittels Infrarotthermografie wird die

Oberflächentemperatur an der Außenseite des Kanals ermittelt. Für geringe Wandstärken kann davon ausgegangen werden, dass der Energietransport durch die Wand in guter Näherung durch das 1D-Wärmeleitproblem mit Quelle beschrieben wird. Ein Vergleich mit numerischen 2D-Rechnungen für ausgewählte Betriebszustände bestätigt dies [29]. Bild 3.8 zeigt einen Schnitt durch die Wand eines ebenen Kanals. Betrachten wir ein Wandelement, das sich von der Außenseite des Kanals bis zu der Koordinate x erstreckt, so ergibt sich die Energiebilanz

$$\begin{aligned}\dot{Q}_V(x)+\dot{Q}(x)-\dot{Q}_{out} &= \dot{q}_V dV+\dot{q}(x)dA(x)-\dot{q}_{out}dA_{out}\\ &= \dot{q}_V(x_{out}-x)dydz+\dot{q}(x)dydz-\dot{q}_{out}dydz=0\,.\end{aligned} \qquad (3.7)$$

Es folgt

$$\dot{q}(x)=-\lambda\frac{dT}{dx}=-\dot{q}_V(x_{out}-x)+\dot{q}_{out}\,. \qquad (3.8)$$

Die Trennung der Veränderlichen und anschließende Integration

$$\int_{T(x)}^{T_{out}}dT=\int_{x}^{x_{out}}\frac{\dot{q}_V}{\lambda}(x_{out}-x)-\frac{\dot{q}_{out}}{\lambda}dx \qquad (3.9)$$

führt auf die Temperaturfunktion $T(x)$

$$T(x)=T_{out}-\frac{\dot{q}_V}{2\lambda}(x_{out}-x)^2+\frac{\dot{q}_{out}}{\lambda}(x_{out}-x) \qquad (3.10)$$

in der Wand. Der qualitative Verlauf dieser Funktion ist in Bild 3.8 dargestellt. Die Integration über die gesamte Wandstärke s des Kanals ergibt

$$T_{in}=T_{out}-\frac{\dot{q}_V}{\lambda}\frac{s^2}{2}+\frac{\dot{q}_{out}}{\lambda}s \qquad (3.11)$$

als Bestimmungsgleichung für die Innenwandtemperatur des Kanals. Der Wärmeverlust an

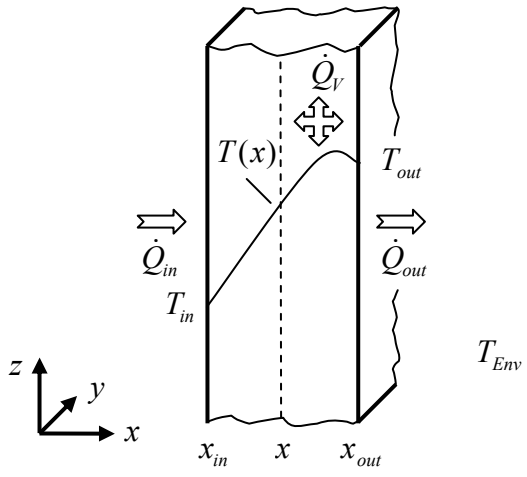


Bild 3.8: Kanalwand eines ebenen Kanals

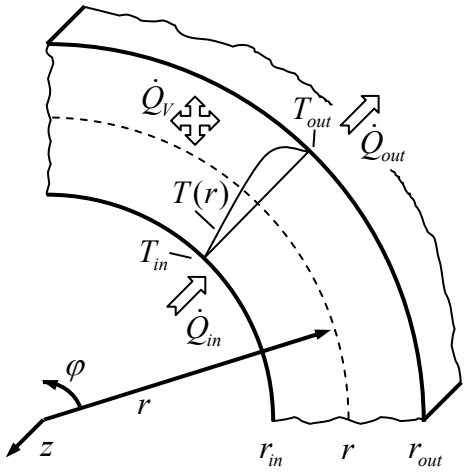


Bild 3.9: Kanalwand eines zylindrischen Kanals

der Außenseite des Kanals erfolgt durch Konvektion und Strahlung, so dass er mit Hilfe der Gleichung $\dot{q}_{out} = \alpha_{out}\left(T_{out} - T_{Env}\right)$ bestimmt werden kann. Die Bestimmung des Wärmeübergangskoeffizienten α_{out} wird im Abschnitt 3.2.4 diskutiert.

3.2.3 Berechnung der Innenwandtemperatur für die Rohrwand

Analog zur Vorgehensweise in Abschnitt 3.2.2 kann die Innenwandtemperatur für einen Kanal mit Kreisquerschnitt bestimmt werden. Die in diesem Fall auftretenden Wärmeströme sowie die charakteristischen geometrischen Daten sind in Bild 3.9 ersichtlich. Mit der Energiebilanz

$$\begin{aligned}\dot{Q}_V(r) + \dot{Q}(r) - \dot{Q}_{out} &= \dot{q}_V dV(r) + \dot{q}(r) dA(r) - \dot{q}_{out} dA_{out} \\ &= \dot{q}_V \pi\left(r_{out}^2 - r^2\right) dz + \dot{q}_{in} 2\pi r dz - \dot{q}_{out} 2\pi r_{out} dz = 0\end{aligned} \qquad (3.12)$$

folgt

$$\dot{q}(r) = -\lambda \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}_V}{2}\left(\frac{r_{out}^2}{r} - r\right) + \dot{q}_{out}\frac{r_{out}}{r} \qquad (3.13)$$

sowie nach Integration

$$\int_{T(r)}^{T_{out}} dT = \int_{r}^{r_{out}} \left[\frac{\dot{q}_V}{2\lambda}\left(\frac{r_{out}^2}{r} - r\right) - \dot{q}_{out}\frac{r_{out}}{\lambda r}\right] dr \qquad (3.14)$$

für den Temperaturverlauf

$$T(r) = T_{out} - \frac{\dot{q}_V}{2\lambda}\left[r_{out}^2 \ln\frac{r_{out}}{r} - \frac{1}{2}\left(r_{out}^2 - r^2\right)\right] + \frac{\dot{q}_{out}}{\lambda} r_{out} \ln\frac{r_{out}}{r} \qquad (3.15)$$

und für die Innenwandtemperatur

$$T_{in} = T_{out} - \frac{\dot{q}_V}{2\lambda}\left[r_{out}^2 \ln\frac{r_{out}}{r_{in}} - \frac{1}{2}\left(r_{out}^2 - r_{in}^2\right)\right] + \frac{\dot{q}_{out}}{\lambda} r_{out} \ln\frac{r_{out}}{r_{in}}. \qquad (3.16)$$

Bild 3.9 zeigt den qualitativen Temperaturverlauf in der Rohrwand. Damit ist die Innenwandtemperatur für die Rohrwand auf der Basis der gemessenen Außenwandtemperatur bestimmt.

3.2.4 Abschätzung des äußeren Wärmeübergangskoeffizienten

Weist der Kanal an der Außenwand eine höhere Temperatur als die Umgebung auf, kommt es durch Konvektion und Strahlung zu einem Wärmeverlust an die Umgebung. Zur Bestimmung des Wärmeverlustes wurden sowohl experimentelle Untersuchungen [28] durchgeführt, als auch theoretische Abschätzungen vorgenommen. Der konvektive Anteil wird wesentlich durch die Bewegung der den Kanal umgebenden Luft beeinflusst. Kann von nahezu ruhender Umgebungsluft ausgegangen werden, was bei ausreichender Abschirmung des Kanals zutrifft,

vollzieht sich der Wärmetransport von der Kanalwand an die Luft durch freie Konvektion. Zur Bestimmung des äußeren Wärmeübergangskoeffizienten sind in [3] für die untersuchten Kanalgeometrien die in Tabelle 3.1 aufgeführten Gleichungen angegeben.

Tabelle 3.1: Wärmeübergang bei freier Konvektion

senkrechte Platte	$Nu = \left\{0{,}825 + 0{,}387 \cdot \left[Ra \cdot f_1(\mathrm{Pr})\right]^{1/6}\right\}^2$ mit $f_1(\mathrm{Pr}) = \left[1 + \left(\frac{0{,}492}{\mathrm{Pr}}\right)^{9/16}\right]^{-19/9}$
senkrechter Zylinder	$Nu = Nu_{Platte} + 0{,}87\frac{h}{d}$

Unter der Annahme einer Temperatur für die Umgebung von $\vartheta_{Env} = 20\ °\mathrm{C}$ und einer charakteristischen Länge von 0,2 m ergeben sich für unterschiedliche Außenwandtemperaturen die in Tabelle 3.2 angegebenen Werte für den äußeren konvektiven Wärmeübergangskoeffizienten.

Der beheizte Kanal gibt weiterhin einen Teil der ihm zugeführten Energie durch Wärmestrahlung an die Umgebung ab. Dabei kann der Versuchskanal als strahlender Körper mit Umhüllung (Umgebung) betrachtet werden. Nach [18] gilt für einen umschlossenen Körper

$$\dot{Q}_{Str} = \varepsilon_{12}\sigma_S A_1\left(T_1^4 - T_2^4\right) \text{ mit } \sigma_S = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W/(m^2K^4)}. \qquad (3.17)$$

Da die strahlende Fläche der Umgebung wesentlich größer als die des Kanals ist, nimmt der resultierende Strahlungskoeffizient $\varepsilon_{12} = 1/\left[1/\varepsilon_1 + A_1/A_2\left(1/\varepsilon_2 - 1\right)\right]$ den Wert $\varepsilon_{12} \approx \varepsilon_1 \approx \varepsilon_{out}$ an. Er entspricht also dem Emissionsverhältnis der äußeren Kanaloberfläche. Der Wärmetransport durch Strahlung kann analog zum Wärmeübergang durch eine Gleichung der Form $\dot{Q}_{Str} = \alpha_{Str} A_1\left(T_1 - T_2\right)$ beschrieben werden. Mit Gleichung (3.17) folgt dann der Wärmeübergangskoeffizient für den Transport durch Strahlung zu

$$\alpha_{Str} = \varepsilon_{out}\sigma_S \frac{T_1^4 - T_2^4}{T_1 - T_2}. \qquad (3.18)$$

Für den Wärmeverlust an der Außenseite des Kanals folgt somit

$$\dot{Q}_{out} = \alpha_{out} A_{out}\left(T_{out} - T_{env}\right) = \left(\alpha_{Konv} + \alpha_{Str}\right)A_{out}\left(T_{out} - T_{env}\right). \qquad (3.19)$$

In Tabelle 3.2 sind beispielhaft Werte für den äußeren konvektiven Wärmeübergangskoeffizienten α_{Konv}, für den Wärmeübergangskoeffizienten für den Wärmeverlust durch Strahlung α_{Str} sowie der Wärmeübergangskoeffizient für den gesamten äußeren Wärmeübergang α_{out} bei unterschiedlichen Oberflächentemperaturen angegeben.

Tabelle 3.2: Wärmeübergangskoeffizienten für den äußeren Wärmeübergang

Oberflächentemperatur ϑ_{out} [°C]	50	100	150	200
α_{Konv} [W/(m²K)]	6,82	8,78	10,07	10,37
α_{Str} [W/(m²K)]	6,65	8,51	10,76	13,46
α_{out} [W/(m²K)]	13,47	17,29	20,83	23,83

Die Berechnung wurde mit den in diesem Abschnitt angegebenen Gleichungen unter Annahme einer Temperatur für die Umgebung von $\vartheta_{Env} = 20\,°C$ für einen sehr dünnen Kanal mit der Länge $l = 0{,}2$ m und einer Außenbreite von $b = 0{,}014$ m, der vertikal angeordnet ist, ausgeführt. Die Größenordnung der Werte für den äußeren Wärmeübergangskoeffizienten wurde durch Referenzversuche bestätig. Für diese Versuche wurde der trockene, nicht durchströmte Kanal elektrisch beheizt. Da der trockene Kanal nach Erreichen des stationären Zustandes innen nahezu keine Wärme abgibt, ist über die elektrische Beheizung der äußere Wärmestrom bekannt. Nach Messung der Oberflächentemperatur und der Umgebungstemperatur kann der äußere Wärmeübergangskoeffizient an einem Kanal bestimmt werden.

Zur Auswertung der Experimente wurde ein konstanter Wert für den äußeren Wärmeübergangskoeffizienten von $\alpha_{out} = 20$ W/(m²K) angenommen. Dies ist gerechtfertigt, da der Wärmeübergang im durchströmten Kanal sowohl im einphasigen Flüssigkeitsgebiet als auch im Bereich des zweiphasigen Wärmeübergangs um Größenordnungen höher ist als der Wärmeübergang von der Außenseite des Kanals an die Umgebung. Kleine Fehler bei der Bestimmung des äußeren Wärmeübergangskoeffizienten wirken sich daher kaum auf die Berechnung der Innenwandtemperatur des Kanals und auf die Größe des dem Fluid zugeführten Wärmestromes aus.

3.3 Versuchsdurchführung

3.3.1 Offene Anlage

Zur Vorbereitung der Versuche wird die Anlage mit deionisiertem Wasser befüllt und das Fluid über einen längeren Zeitraum im Kreislauf gefahren, um Schmutzpartikel aus der Anlage herauszuspülen. Im Anschluss an diesen Reinigungsvorgang wird das Fluid abgelassen und die Anlage erneut mit deionisiertem Wasser befüllt.

Im zweiten Schritt wird das Fluid mit Hilfe der Testsektion (Verdampferröhrchen) auf ca. 80 °C erwärmt und bei dieser Temperatur über mehrere Stunden im Kreislauf gefahren, um die Flüssigkeit zu Entgasen.

Es folgt die Beschichtung des Verdampferkanals durch Aufsprühen des Lackes. Eine Überprüfung der Gleichmäßigkeit der Beschichtung erfolgt mit Hilfe des Infrarotthermografiesystems. Wird der unbeheizte Kanal mit temperierter Flüssigkeit durchströmt, muss die Infrarotaufnahme eine nahezu gleichmäßige Temperaturverteilung

zeigen. Ist die Qualität der Beschichtung nicht zufrieden stellend, wird diese entfernt und eine neue aufgetragen.

Zur Durchführung der Versuche werden nun die Versuchsparameter, Eintrittstemperatur ϑ_E, Massenstrom $\dot{M}$ und die Heizleistung bzw. die gewünschte Wärmestromdichte $\dot{q}$ eingestellt. Nach Einstellung der Versuchsparameter ist eine Wartezeit einzuhalten, um einen möglichst stationären Zustand von Strömungs- und Wärmeübergangsprozessen im Versuchskanal zu erreichen.

Im Anschluss erfolgt die Aufnahme der Messwerte durch zeitgleichen Start von Infrarotthermografiesystem, Messwerterfassungs-PC und Traversiereinrichtung. Ist der gesamte Kanal durch das Verfahren des Thermografiesystems abgescannt worden, werden alle Systeme gestoppt. Die nächste Messung kann mit veränderten Parametern durchgeführt werden.

3.3.2 Geschlossene Anlage

Analog zu den Ausführungen im vorherigen Abschnitt erfolgt ein Befüllen und Spülen der Anlage mit dem Testfluid. Die Anlage wird entleert und im Anschluss mehrmals mit Stickstoff gespült und evakuiert, so dass möglichst keine Restluft in der Anlage verbleibt. Anschließend erfolgt das Befüllen der Versuchsanlage mit dem Testmedium.

Es folgt das Entgasen der Versuchsanlage, wobei das auf ca. 80 °C beheizte Fluid im Kreislauf gefahren wird. Die abgeschiedene Luft entweicht durch das geöffnete Ventil am Einfüllbehälter.

Wie bei der offenen Versuchsanlage wird der Verdampferkanal durch Aufsprühen des Lackes beschichtet und die Gleichmäßigkeit der Beschichtung mittels Infrarotthermografiesystem überprüft. Falls erforderlich, wird das Beschichten wiederholt.

Sind diese Vorbereitungen getroffen, können die Versuchsparameter Eintrittstemperatur ϑ_E, Massenstrom $\dot{M}$ und die Heizleistung bzw. die gewünschte Wärmestromdichte $\dot{q}$ eingestellt werden.

Ist ein nahezu stationärer Zustand erreicht, kann die Aufnahme von Messwerten erfolgen.

3.4 Konzept für die experimentellen Untersuchungen

Für das Vorgehen bei den experimentellen Untersuchungen werden folgende Festlegungen getroffen:

1. Es werden Kanäle in vertikaler Anordnung untersucht, um Unsymmetrien im Strömungsprofil vor allem im zweiphasigen Gebiet auszuschließen.
2. Das Fluid durchströmt den Kanal von unten nach oben.

3. Zunächst werden Voruntersuchungen an einem Kapillarröhrchen mit deionisiertem Wasser als Testfluid vorgenommen. Der Innendurchmesser des Kapillarröhrchens beträgt 1,5 mm, der Außendurchmesser 3 mm.
4. Es werden Kanäle mit Rechteckquerschnitt untersucht. Diese Kanäle werden mit einem relativ großen Seitenverhältnis ausgeführt, so dass die Betrachtung als ebener Spalt (Strömung zwischen parallelen Platten), d. h. die Reduzierung auf ein 2D-Problem gerechtfertigt ist.
5. Die Kanäle werden mit Spaltweiten von 700 µm und 300 µm, bei einer Breite des durchströmten Querschnittes von 10 mm ausgeführt.
6. Als Testfluide kommen deionisiertes Wasser und n-Heptan zum Einsatz.

3.5 Versuchsauswertung

Die Messwerte wurden durch das Messdatenerfassungssystem aufgenommen und PC-basiert gespeichert. Zur Bestimmung des Wärmeübergangskoeffizienten sind nun einige Auswerteschritte erforderlich. Zunächst ist die Innenwandtemperatur zu berechnen. Bild 3.10 verdeutlicht den Ablauf.

Bild 3.10: Bestimmung der Innenwandtemperatur

Die mittels Infrarotthermografie bestimmte Außenwandtemperatur $T_{out,mess}$, der ein konstanter Wert für das Emissionsverhältnis der Kanaloberfläche zugrunde liegt, wird zunächst entsprechend der Temperaturabhängigkeit des Emissionsverhältnisses korrigiert. Die hieraus resultierende Temperatur $T_{out,korr}$ bildet nun den Ausgangswert für die Berechnung der Innenwandtemperatur mittels der Gleichung für die eindimensionale Wärmeleitung mit Quelle, Gl. (3.11) bzw. Gl. (3.16).

Um die, für die Ermittlung des Wärmeübergangskoeffizienten erforderliche charakteristische Fluidtemperatur zu bestimmen, ist die Kenntnis des Druckverlaufes $p(z)$ im Kanal erforderlich. Da eine lokale Messung des Druckes an der Stelle z im Kanal nicht möglich ist, ohne wesentlich auf die Strömungsvorgänge Einfluss auszuüben, wird der Druckverlauf näherungsweise aus den gemessenen Größen am Ein- bzw. Austritt des Kanals bestimmt. Die Vorgehensweise wird in Bild 3.11 verdeutlicht.

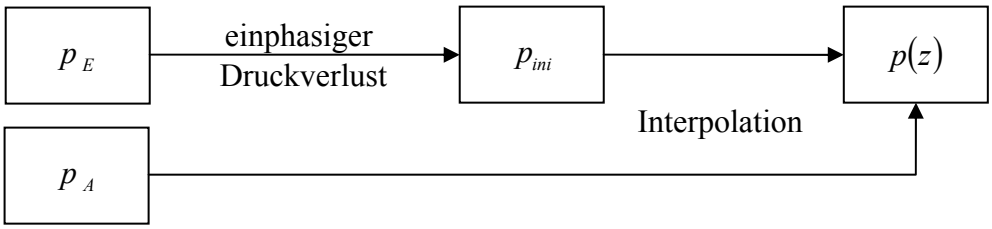


Bild 3.11: Bestimmung des Druckverlaufes

Zwischen dem Eintritt z_E in den Kanal und dem Initialpunkt z_{ini} wird der Verlauf des Druckes unter Berücksichtigung des einphasigen Druckverlustes für die laminare Flüssigkeitsströmung und der Änderung des statischen Druckes auf Grund der Höhenänderung ermittelt. Dies ist gerechtfertigt, da die Strömungsgeschwindigkeiten relativ klein sind und somit auch der Druckverlust klein ist. Den wesentlichen Anteil macht die Änderung des Druckes auf Grund der Höhendifferenz zwischen dem Eintritt und dem Initialpunkt aus. Diese kann aber verhältnismäßig genau bestimmt werden. Der Ort des Initialpunktes wird dabei aus den Temperaturverläufen $T(z)$ entlang der Kanalwand ermittelt. Für den Bereich der zweiphasigen Strömung stellt sich die Bestimmung des Druckverlaufes problematischer dar. In Ermangelung konkreter Messwerte an verschiedenen Orten z in diesem Bereich wird eine lineare Interpolation zwischen dem Druck am Initialpunkt und dem gemessenen Austrittsdruck vorgenommen. Diese Vorgehensweise kann nicht endgültig zufrieden stellen, muss aber für die hier gezeigten Untersuchungen genügen. Eine Verbesserung der Kenntnis des Druckverlaufes im Bereich der Zweiphasenströmung ist nur mit erheblich höherem messtechnischen Aufwand erreichbar. Vor allem in Mikrokanälen würde aber das Anbringen von zusätzlichen Druckmessstellen die Strömungs- und Wärmeübergangsprozesse stark beeinflussen. Daher stellt die verwendete Methode eine Alternative dar, die allerdings durch einen verhältnismäßig großen Fehler, wie in Abschnitt 3.7 abgeschätzt, erkauft wird.

Sind die Wandtemperatur und der Druckverlauf ermittelt, kann die Fluidtemperatur T_{Fl} nach Gleichung (3.4) bestimmt werden. Im einphasigen Bereich wird als Fluidtemperatur die mittlere calorische Temperatur angenommen, die aus der Energiebilanz zwischen dem Eintritt des Kanals und dem Ort z bestimmt werden kann. Im zweiphasigen Bereich, $z > z_{ini}$, wird die zum lokalen Druck gehörige Siedetemperatur als Fluidtemperatur festgelegt.

Die zugeführte Wärmestromdichte wird aus den gemessenen elektrischen Größen und der Kanalgeometrie nach Gleichung (3.3) ermittelt. Damit sind alle erforderlichen Größen bekannt, um den Wärmeübergangskoeffizienten nach Gleichung (2.2) zu berechnen.

3.6 Experimentelle Ergebnisse

Im Folgenden werden die Ergebnisse der Messungen an der offenen und der geschlossenen Anlage diskutiert. Während der Messungen wurden die Versuchsanlagen in einem quasistationären Betrieb gefahren. Eine Durchführung der Versuche unter 100% stationären

Bedingungen ist nicht möglich, da vor allem die Verdampfung ein stark instationäres Prozessverhalten aufweist. Dies äußert sich in Druck- und daraus resultierenden Massenstromschwankungen. Daher weisen die Messwerte zum Teil eine große Streubreite auf, die an entsprechender Stelle diskutiert wird.

3.6.1 Abgrenzung der Siedebereiche

Die Charakterisierung und Lokalisierung der einzelnen Bereiche der ein- und zweiphasigen Strömung, die das Fluid beim Durchströmen des beheizten Kanals passiert, ist von großer Bedeutung für die Untersuchung der Wärmeübergangsprozesse, da unterschiedliche Transportvorgänge den Wärmeübergang beeinflussen. Zunächst kann eine grobe Unterteilung in einphasige und zweiphasige Bereiche vorgenommen werden. Die Lage dieser Bereiche kann aus dem Verlauf der Wandtemperatur des Kanals entnommen werden. Bild 3.12 zeigt einen experimentell ermittelten Außenwandtemperaturverlauf eines Kanals, in dem der gesamte Prozess der Verdampfung eines Fluides, in diesem Beispiel Heptan, einschließlich der Vorwärmung der Flüssigkeit und dem Überhitzen des Dampfes stattfindet. Eine Abgrenzung dieser Bereiche lässt sich an Hand derartiger Temperaturprofile, die für diverse Kombinationen der Betriebsparameter vorliegen, vornehmen.

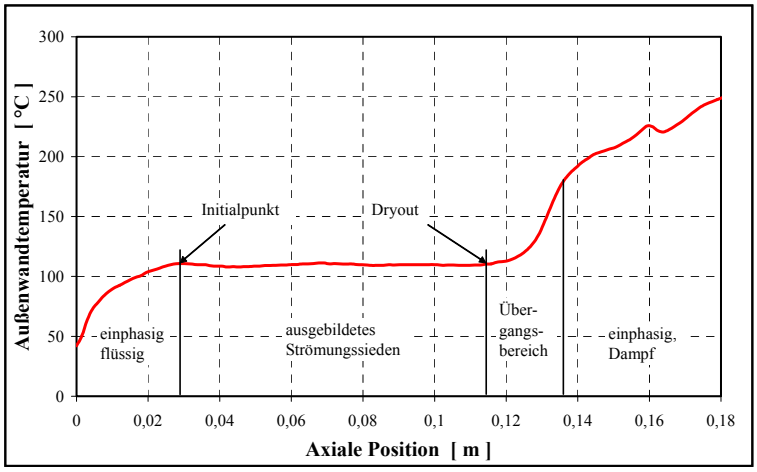


Bild 3.12: Siedebereiche

Eine weitere Aussage über den vorliegenden Zustand der Strömung und den Verdampfungsvorgang ermöglichen die zweidimensionalen Infrarotaufnahmen des Verdampferkanals. Für einen der untersuchten Rechteckkanäle mit einem durchströmten Querschnitt von 0,3 mm x 10 mm ist die Außenwandtemperaturverteilung über der Breite des

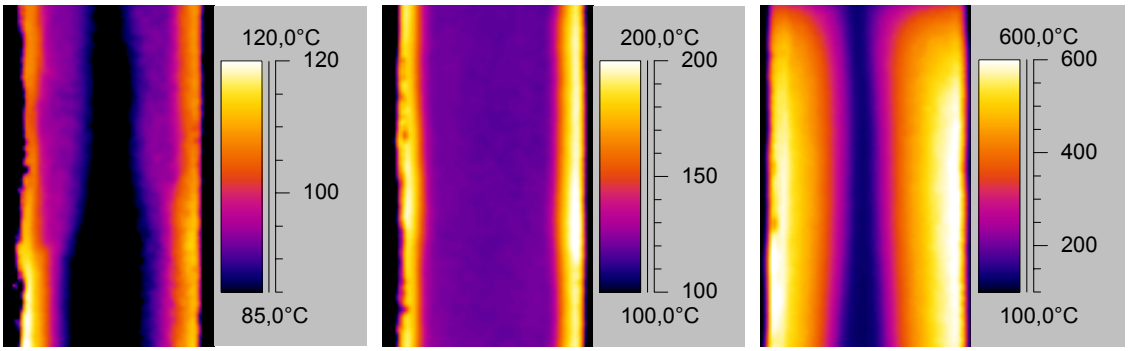


Bild 3.13: IR-Aufnahmen der einzelnen Kanalabschnitte
a) Siedebeginn b) Strömungssieden c) Dryout

Kanals in Bild 3.13 dargestellt. Die IR-Images entstanden unter Verwendung unterschiedlicher Betriebsparameter. Bild 3.13 a) zeigt den Zustand des Siedebeginns. Dampfbereiche bzw. Dampfblasen entstehen zunächst in den Ecken bzw. an den Schmalseiten des Kanals. Da in der Ecke des Kanalquerschnittes zwei Heizflächen auf das Fluid einwirken, ist hier die erforderliche Überhitzung, die für den Siedebeginn erforderlich ist, zuerst erreicht, und die Blasenbildung findet hier statt. Die entstandenen Blasen beginnen zu wachsen und breiten sich in Richtung Kern der Strömung aus. Bei entsprechender Beheizung nimmt in Mikrokanälen schon nach einer kurzen Wegstrecke in Strömungsrichtung die Dampfphase einen wesentlichen Teil des Kanalquerschnittes ein. In diesem Abschnitt, dem Bereich des Strömungssiedens, zeigt sich eine sehr ausgeglichene Temperaturverteilung über der gesamten Oberfläche der Kanalwand. Das heißt, es liegt an der gesamten beheizten Fläche ein sehr gleichmäßiger und guter Wärmeübergang vor. Bild 3.13 b) zeigt eine Infrarotaufnahme aus diesem Kanalabschnitt.

Diesem Kanalabschnitt folgt dann der Dryout. Hier kommt es zum Austrocknen der Heizfläche und somit zum sehr starken Ansteigen der Wandtemperatur. Wie in Bild 3.13 c) ersichtlich, beginnt bei den untersuchten ebenen Kanälen das Austrocknen an den schmalen Seiten. Dies liegt darin begründet, dass in Kanälen mit Rechteckquerschnitt, wie schon weiter oben zum Siedebeginn ausgeführt, in den Ecken des Querschnittes eine größere wärmeübertragende Fläche zur Verfügung steht, die auf das angrenzende Fluid einwirkt. Durch die spezielle Kanalkonstruktion, die hier zur Anwendung kommt, liegt an den Schmalseiten ein stärkerer Bereich Wandmaterial durch die dort angeordnete Schweißnaht vor, so dass hier mehr Wärme generiert wird, die dem Fluid zusätzlich zugeführt wird. Von den Ecken des Kanalquerschnittes ausgehend setzt sich der Prozess des Austrocknens der Heizflächen in den Kanal hinein fort, was dann zu einem schnellen Anstieg der Wandtemperatur führt, wie er in Bild 3.12 ersichtlich ist. Dem Dryout folgt ein Bereich, der hier als Übergangsbereich bezeichnet wird. In ihm liegt eine Dampfströmung vor, die noch letzte Flüssigkeitströpfchen enthält. Sind diese verdampft, wird der reine Dampf überhitzt.

3.6.2 Initialpunkt

An dieser Stelle soll untersucht werden, wann in einem beheizten Kanal der Siedeprozess einsetzt. Bild 3.14 zeigt beispielhaft die ermittelten Außenwandtemperaturverläufe zweier Messungen am Kapillarrohr bei gleichen Versuchsparametern. Es ist ersichtlich, dass nach dem Durchlaufen des Bereiches der einphasigen Vorwärmung ein Maximum der Außenwandtemperatur erreicht wird. Weiter stromabwärts fällt die Wandtemperatur zunächst stark ab, um dann leicht wieder anzusteigen.

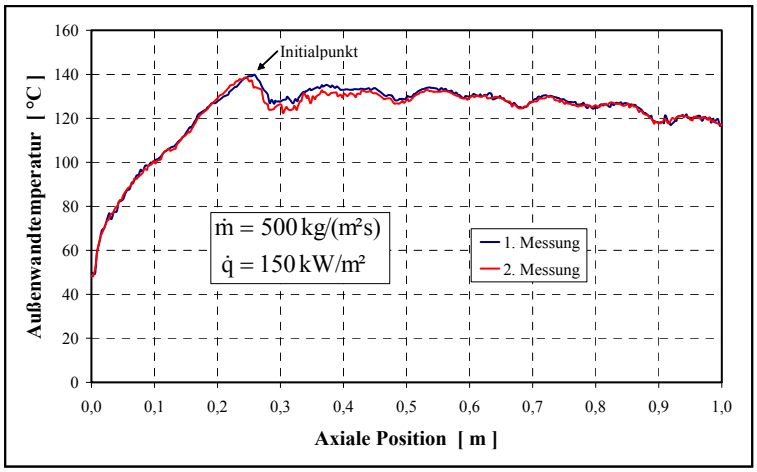


Bild 3.14: Außenwandtemperatur am Kapillarrohr, $d_i = 1{,}5$ mm

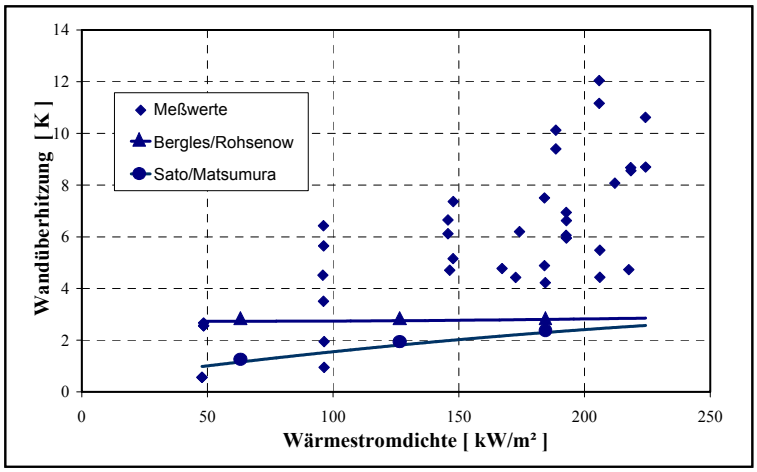


Bild 3.15: Wandüberhitzung am Initialpunkt, $d_i = 1{,}5$ mm

Dieser Effekt resultiert daraus, dass mit dem Erreichen des Maximums der Verdampfungsprozess einsetzt. Durch die nun entstehenden Dampfblasen wird das Fluid gut durchmischt und der Wärmeübergang stark verbessert, so dass die Fluidtemperatur an der Wand und somit auch die Wandtemperatur absinken. Daher kann der Ort des Maximums der Außenwandtemperatur als Initialpunkt des Verdampfungsprozesses angesehen werden. Wird für den so ermittelten Ort des Initialpunktes der Druck $p(z_{ini})$ bestimmt, lässt sich die Siedetemperatur $T_S(p_{ini})$ und mit dem aus dem Außentemperaturverlauf gewonnenen Innenwandtemperaturverlauf die Wandüberhitzung bestimmen, die zum Initiieren des Verdampfungsprozesses erforderlich ist. In Bild 3.15 sind die experimentell ermittelten Wandüberhitzungen für ein Kapillarrohr mit einem

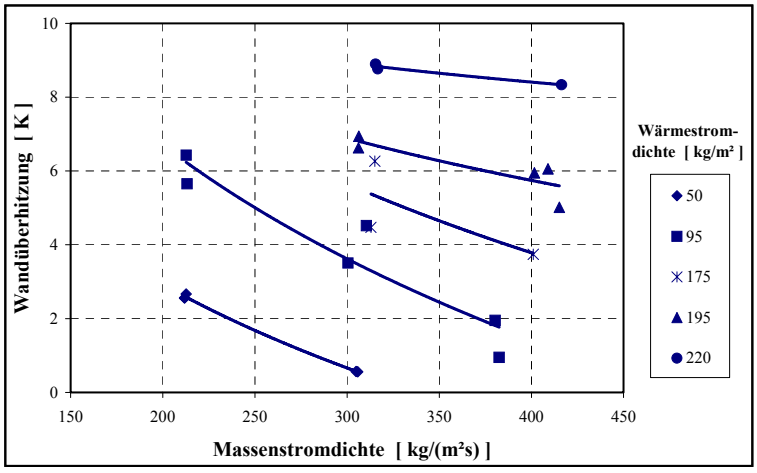


Bild 3.16: Wandüberhitzung am Initialpunkt, $d_i = 1{,}5$ mm

Innendurchmesser von 1,5 mm dargestellt. Die Versuchsparameter wurden in den Bereichen $200\ \mathrm{kg/(m^2s)} \le \dot{m} \le 450\ \mathrm{kg/(m^2s)}$ und $50\ \mathrm{kW/m^2} \le \dot{q} \le 220\ \mathrm{kW/m^2}$ variiert. Leichte Abweichungen der Parameter resultieren aus der Tatsache, dass der elektrische Strom für die Beheizung vorgewählt wird und die Wärmestromdichte somit erst während der Auswertung ermittelt werden kann. Weiterhin kann die Massenstromdichte auf Grund von wechselnden Druckbedingungen etwas vom vorgewählten Wert abweichen. Für die Auswertung kommen dann die messtechnisch bestimmten Werte zur Anwendung. Die Auswirkung der Massenstromschwankungen auf die gemessene Außenwandtemperatur wird in Bild 3.14 ersichtlich. Vor allem im Bereich am und kurz hinter dem Initialpunkt weichen die Temperaturverläufe, die für die gleichen Versuchparameter aufgezeichnet wurden, voneinander ab (siehe auch Abschnitt 3.8).

Die gemessenen Daten für die Wandüberhitzung sind den für die gleichen Parameter nach Sato/Matsumura [60], Gl. (2.13), bzw. Bergles/Rohsenow [5], Gl. (2.14), berechneten Werten gegenübergestellt, Bild 3.15. Einerseits weisen die experimentell ermittelten Wandüberhitzungen teilweise wesentlich höhere Werte auf als die nach Sato/Matsumura bzw. nach Bergles/Rohsenow ermittelten Wandüberhitzungen, andererseits zeigt sich eine Abhängigkeit der Wandüberhitzung am Initialpunkt von der Massenstromdichte. Diese Abhängigkeit verdeutlicht Bild 3.16. Sowohl in Gl. (2.13) als auch in Gl. (2.14) ist die Massenstromdichte nicht als Parameter enthalten.

Um eine Aussage über die Lage des Initialpunktes treffen zu können, wurden die Versuchsdaten analog zum Vorschlag von Hodgson [35] arrangiert. In Bild 3.17 ist die

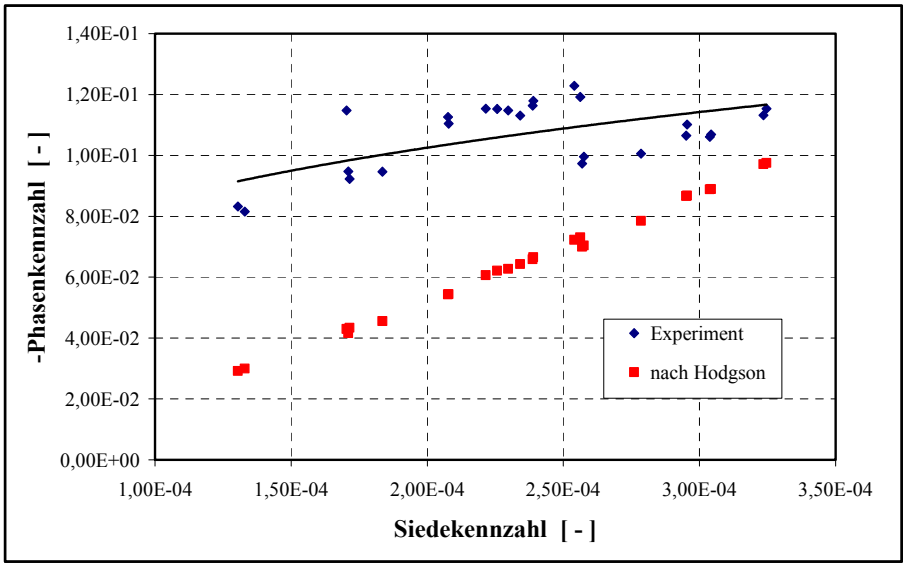


Bild 3.17: Abhängigkeit der Phasenkennzahl am Initialpunkt von der Siedekennzahl, $d_i = 1{,}5$ mm

Abhängigkeit der Phasenkennzahl $Ph = (h - h')/\Delta h_V$ von der Siedekennzahl $N_b = \dot{q}/(\dot{m}\Delta h_V)$ dargestellt. Die experimentell ermittelten Werte liegen in der Darstellung $(-Ph) = f(N_b)$ deutlich über den Werten, die mit der Korrelation von Hodgson (2.15) bestimmt wurden. Die

experimentellen Werte zeigen aber die gleiche Tendenz, wie die nach Hodgson bestimmten Daten. Die in Bild 3.17 dargestellten experimentellen Werte können durch die Korrelation

$$-Ph_i = 0{,}9915 N_b^{0{,}2664}, \qquad (3.20)$$

die ebenfalls im Diagramm dargestellt ist, angenähert werden. Diese gilt für Betriebsparameter, bei denen der Initialpunkt im thermischen Einlauf liegt. Die Daten weisen allerdings eine große Streubreite auf, so dass Gl. (3.20) einen verhältnismäßig geringen Vertrauenswert besitzt und der Bestätigung durch weitere Experimente bedarf. Eine etwas abweichende Vorgehensweise für die Bestimmung der Korrelation von Phasenkennzahl zur Siedekennzahl ist in [29] dargestellt.

In den untersuchten ebenen Kanälen bzw. Kanälen mit Rechteckquerschnitt konnten derart

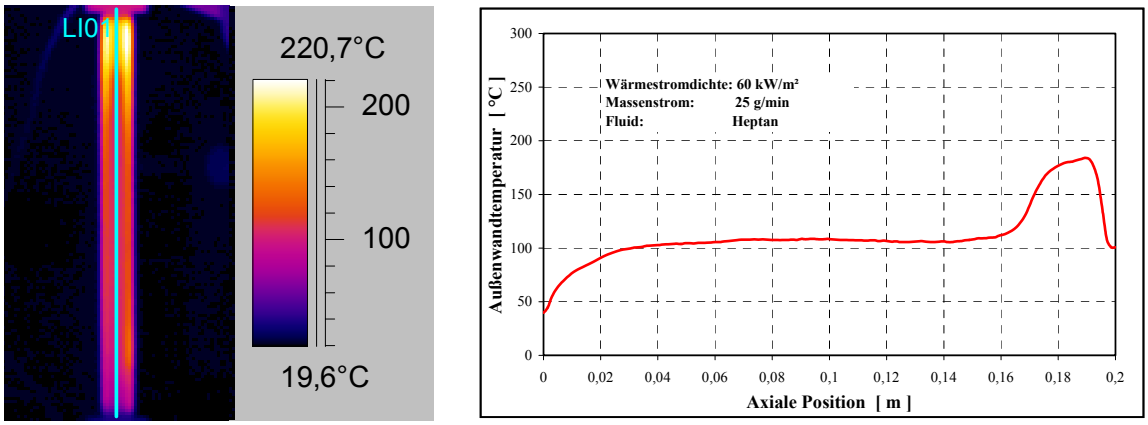


Bild 3.18: Vorwärmung und Siedebeginn im ebenen Kanal

große Wandüberhitzungen, wie sie im Kapillarröhrchen auftraten, nicht beobachtet werden. Der Außenwandtemperaturverlauf in der Kanalmitte, Bild 3.18, zeigt einen sehr gleichmäßigen Übergang vom Bereich der einphasigen Vorwärmung in den Bereich des Strömungssiedens. Dies lässt sich wiederum mit der Querschnittsgeometrie begründen. Lokal in den Ecken des Rechteckquerschnittes sind die Bedingungen für eine Blasenbildung, wie schon im Abschnitt 3.6.1 ausgeführt, sehr schnell erreicht. Die hier entstehenden Blasen breiten sich von den Ecken ausgehend aus und ermöglichen so den Siedebeginn auch an anderen Positionen im Querschnitt. An den Seiten des Kanalquerschnittes ist keine große Überhitzung mehr erforderlich, da bereits Dampfbereiche vorhanden sind, in die die verdampfenden Flüssigkeitsmoleküle übergehen können. Es ist daher nicht möglich, für die hier untersuchten Rechteckgeometrien eine präzise Bestimmung der Lage des Initialpunktes unter Verwendung des Wandtemperaturverlaufes durchzuführen. Da die Spaltweiten der untersuchten Kanäle aber wesentlich kleiner als der Innendurchmesser des Kapillarrohres sind, und daher die Temperaturunterschiede über der Querschnittsfläche verhältnismäßig klein sind, kann davon ausgegangen werden, dass der Siedebeginn in der Nähe des Ortes liegt, an dem der über den Querschnitt gemittelte Strömungsdampfgehalt, der auch als Gleichgewichtsdampfgehalt bzw. als thermodynamischer Dampfgehalt bezeichnet wird, den Wert $\dot{x}_{th} = \dot{x}_{th}(\dot{q}, z, \dot{m}) = 0$ erreicht, bzw. $\vartheta(z) = \vartheta_S$ gilt.

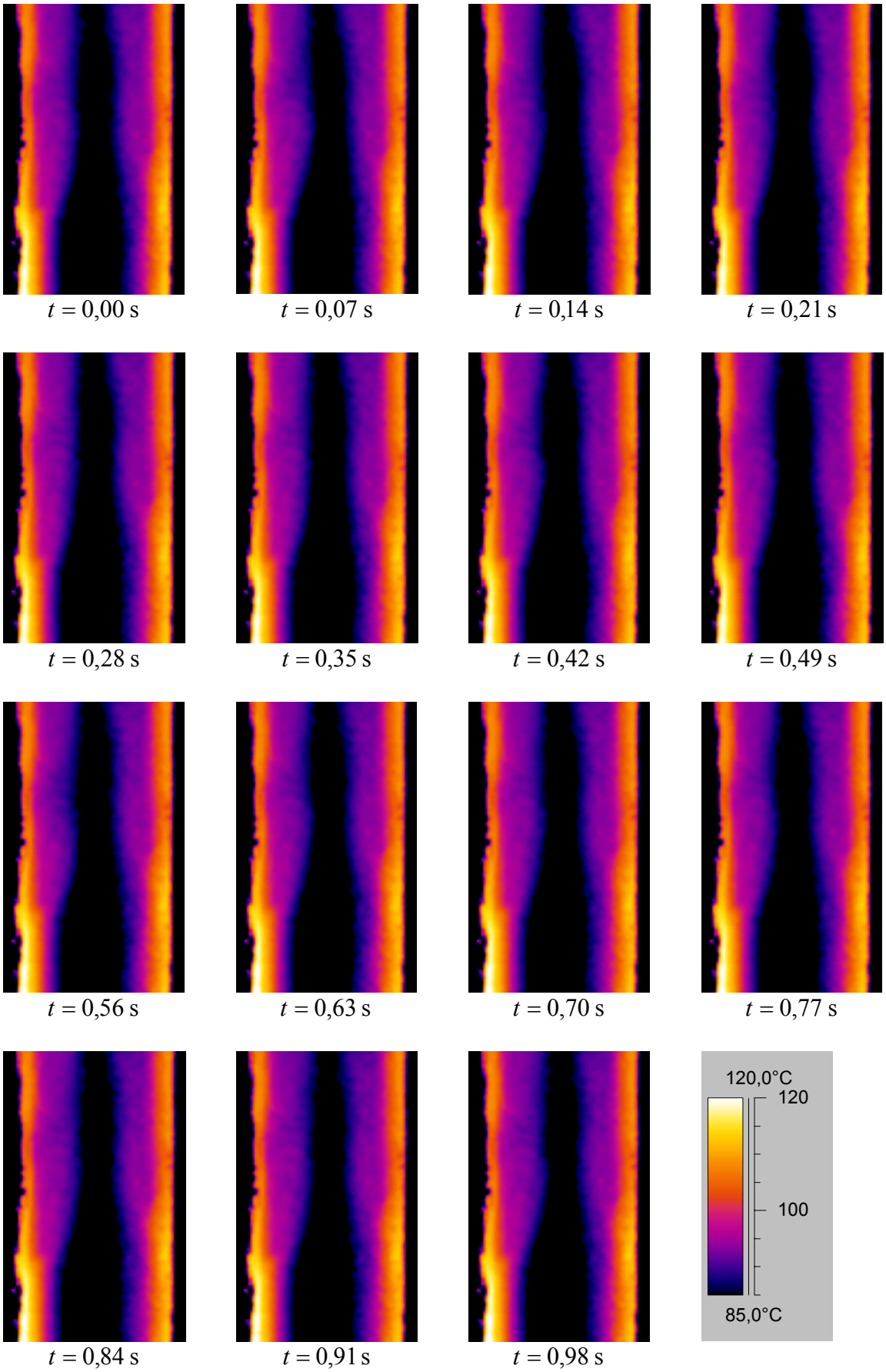


Bild 3.19: Temperaturverteilung im Bereich des Siedebeginns, $p \approx 1$ bar

Wird zudem in einem Kanal, wie den hier untersuchten, das Fluid vollständig verdampft, weist der zweiphasige Bereich die größte axiale Ausdehnung auf und der Initialpunkt liegt in Abhängigkeit von der Vorlauftemperatur verhältnismäßig nahe am Kanaleintritt. Gekennzeichnet ist der Bereich in unmittelbarer Umgebung des Initialpunktes durch verhältnismäßig starke Schwankungen der Wandtemperatur, die sowohl zeitlich als auch örtlich in Erscheinung treten. Bild 3.19 zeigt eine Sequenz von IR-Aufnahmen am Ort des Siedebeginns. Erkennbar ist der von den Seiten ausgehende Dampfbereich, der in Strömungsrichtung zunimmt und schließlich den gesamten Kanalquerschnitt einnimmt. Die zu den unterschiedlichen Zeiten aufgenommenen Images der Kanalwand lassen die zeitlichen Fluktuationen erkennen. Die in Bild 3.19 dargestellte Aufnahme des Siedebeginns erfolgte für einen Betrieb des Kanals bei einer verhältnismäßig geringen Wärmestromdichte. Daher ist die Ausdehnung des Bereiches, vom Siedebeginn bis zum Erfüllen des gesamten Kanals mit Dampf verhältnismäßig lang, hier etwa die 2-3fache Kanalbreite. Dieser Bereich nimmt bei Betriebsparametern, die eine vollständige Verdampfung im Kanal ermöglichen, eine wesentlich kürzere Strecke ein.

3.6.3 Strömungssieden

Dem Initialpunkt folgt der Bereich des Strömungssiedens. Im Gegensatz zu dem sehr unruhigen Strömungszustand, der auf Grund der Blasenentstehung und des Blasenwachstums am und hinter dem Initialpunkt vorliegt, ist dieser Bereich dadurch gekennzeichnet, dass eine sehr ausgeglichene Wandtemperatur über die gesamte Breite des Strömungskanals sowie über einen großen axialen Bereich gegeben ist. Ebenso treten nahezu keine zeitlichen Fluktuationen der Wandtemperatur auf, wie die Sequenz der IR-Aufnahmen in Bild 3.19 erkennen lässt.

Weiterhin weist das axiale Wandtemperaturprofil einen Verlauf auf, der dem Verlauf der Siedetemperatur folgt, d. h. sie fällt in Strömungsrichtung leicht ab, da auf Grund des Druckverlustes auch die Siedetemperatur abfällt.

Diese große Stabilität der Wandtemperatur des Kanals führt zu der Annahme, dass im Kanal konvektives Sieden, welches auch als stilles Sieden bezeichnet wird [3], vorliegt. D. h. im Zentrum des Kanalquerschnittes strömt die Dampfphase, während der gesamte Umfang des Kanalquerschnittes mit Flüssigkeit benetzt ist. Es liegt eine so genannte Ringströmung vor, die nach [3] in vertikal angeordneten Kanälen häufig beobachtet wird. Die Verdampfung der Flüssigkeit erfolgt an der Phasengrenze zwischen der Flüssigkeitsschicht am Rand und dem Dampfbereich im Zentrum des Kanalquerschnittes. Die Schichtdicke des Flüssigkeitsfilms ist verhältnismäßig dünn, so dass die Überhitzung der Flüssigkeit an der beheizten Kanalwand nicht ausreicht, um Blasen entstehen zu lassen. Ein solches Blasensieden würde zu sehr unruhigen Strömungsverhältnissen führen, was sich in starken zeitlichen Änderungen der Wandtemperatur widerspiegeln müsste, jedoch durch die Aufnahmen (siehe Bild 3.20) nicht wiedergegeben wird.

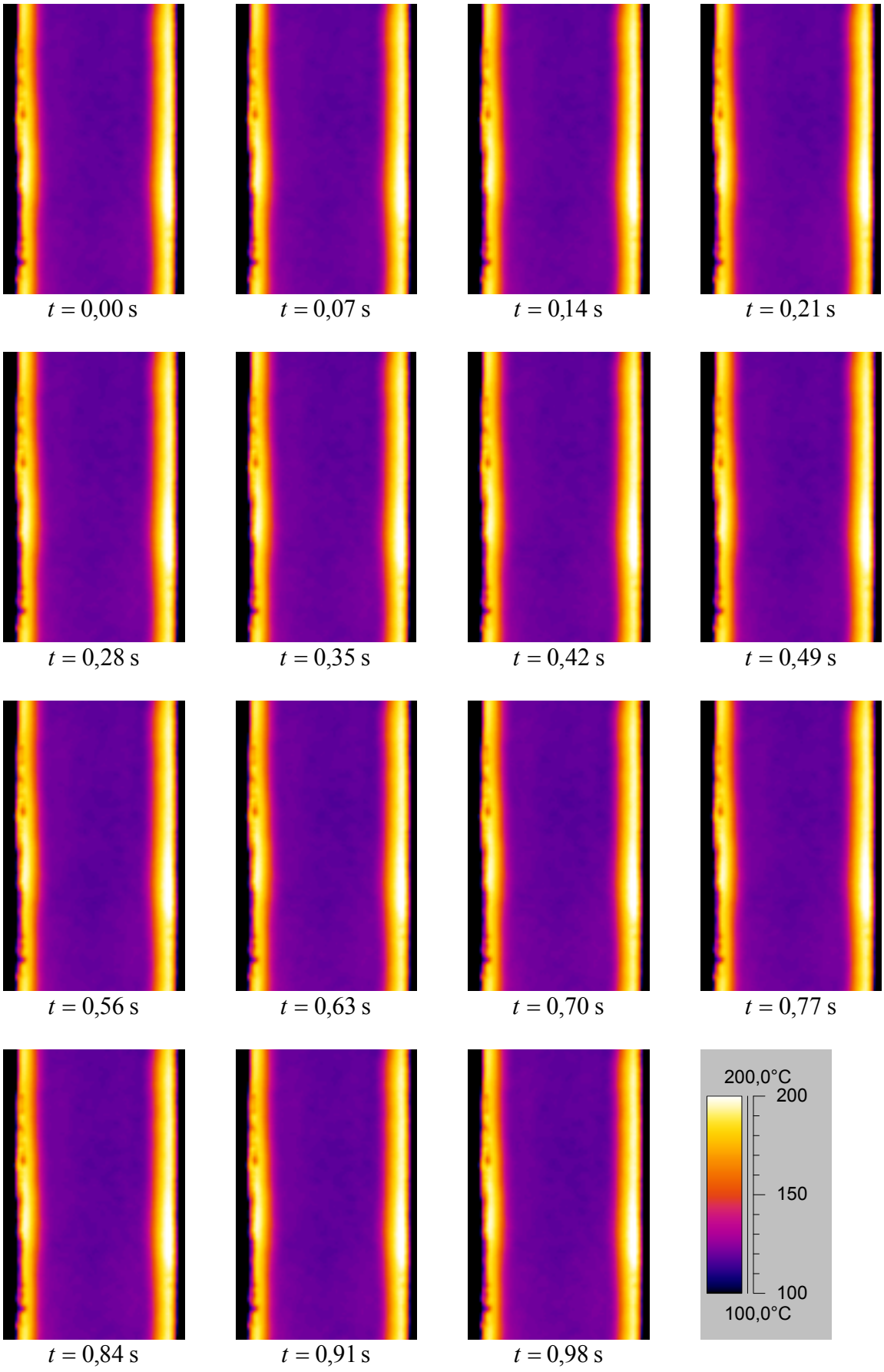


Bild 3.20: Temperaturverteilung im Bereich des ausgebildeten Strömungssiedens, $p \approx 2$ bar

Speziell durch die kleine Geometrie des Mikrokanals ist nach dem Siedebeginn sehr schnell ein großer Bereich des Querschnittes mit Dampf gefüllt und somit ist die Schichtdicke der Flüssigkeit, die ein konvektives Sieden ermöglicht, erreicht. Ein Bereich des Blasensiedens ist nur sehr klein und dicht hinter dem Initialpunkt erkennbar, Bild 3.19.

Aus den IR-Sequenzen, Bild 3.19 und Bild 3.20 ist u.a. auch ersichtlich, dass für die Größenordnung der untersuchten Kanäle, also bis zu einer minimalen Spaltweite von 300 µm, die Bildung von Dampfbereichen beobachtet werden kann. Peng und Wang [52], [53] führen aus, dass Dampfblasen nur dann entstehen, wenn der Flüssigkeit ein ausreichend großer Raum, der „evaporating space“, zur Verfügung steht, um ein inneres Sieden zu ermöglichen. Steht zu wenig Raum für die Verdampfung zur Verfügung, tritt nach Peng und Wang das Phänomen des „fictitious boiling“, eines scheinbaren Siedens auf, bei dem die Flüssigkeit bei Wärmezufuhr nicht verdampft, sondern in einen Nichtgleichgewichtszustand versetzt wird.

3.6.4 Dryout

Das Ende des Bereiches des konvektiven Siedens ist dadurch gekennzeichnet, dass die Flüssigkeitsschicht, die während des konvektiven Siedens die Heizfläche vollständig benetzte, aufreißt. Es kommt zum Austrocknen der Heizfläche, dem so genannten Dryout. In Bild 3.21-Bild 3.26 sind Temperaturverläufe gezeigt, die an einem Kanal mit einem Strömungsquerschnitt von 0,3 mm x 10 mm aufgenommen wurden. Die Untersuchungen wurden für Wasser und Heptan durchgeführt. Die Betriebsparameter wurden so variiert, dass im Kanal ein Dryout eintritt.

Der Ort, an dem es zum Eintreten des Dryouts kommt, ist abhängig von den Betriebsparametern $\dot{q}$ und $\dot{m}$ und damit verbunden mit dem vorliegenden Dampfgehalt $\dot{x}$. Der Dampfgehalt kann mit Hilfe der Energiebilanz zwischen dem Eintritt des Kanals und der Position z bestimmt werden.

Da die untersuchten Kanäle konstruktionsbedingt auf dem Umfang keine gleichverteilte Wärmestromdichte aufweisen, wurde für diese Untersuchung nur ein schmaler Ausschnitt in der Mitte der Breitseite des Kanals herangezogen. Da das Seitenverhältnis der untersuchten Kanäle verhältnismäßig groß ist, ist dies gerechtfertigt. Der Strömungsdampfgehalt ergibt sich dann zu

$$\dot{x}(z) = \frac{h(z) - h'}{h'' - h'} = \frac{h_E + \frac{\dot{q}^* 2bz}{\dot{M}} - h'}{h'' - h'}, \qquad (3.21)$$

wobei die Wärmestromdichte $\dot{q}^*$, für den schmalen Ausschnitt in der Mitte des Kanals ermittelt wird. Sie ist in Bezug auf die Wärmestromdichte, die durch die Energiebilanz für den gesamten Kanal bestimmt wird, geringfügig reduziert.

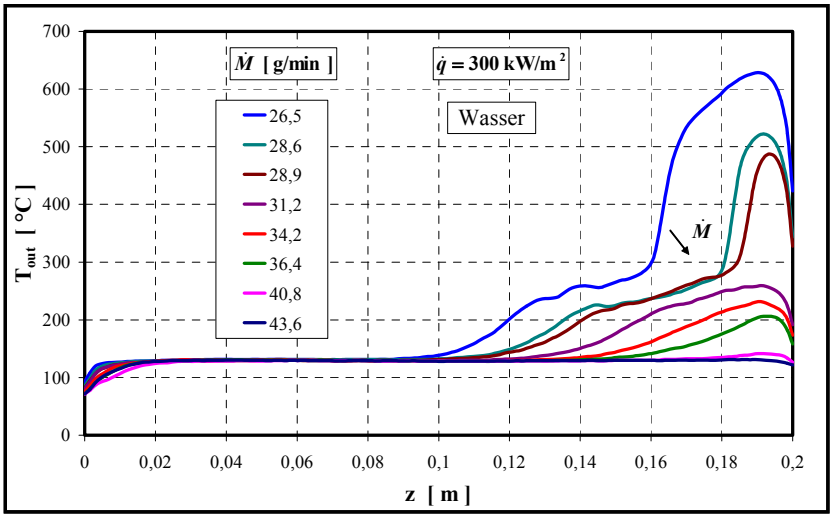


Bild 3.21: axialer Temperaturverlauf

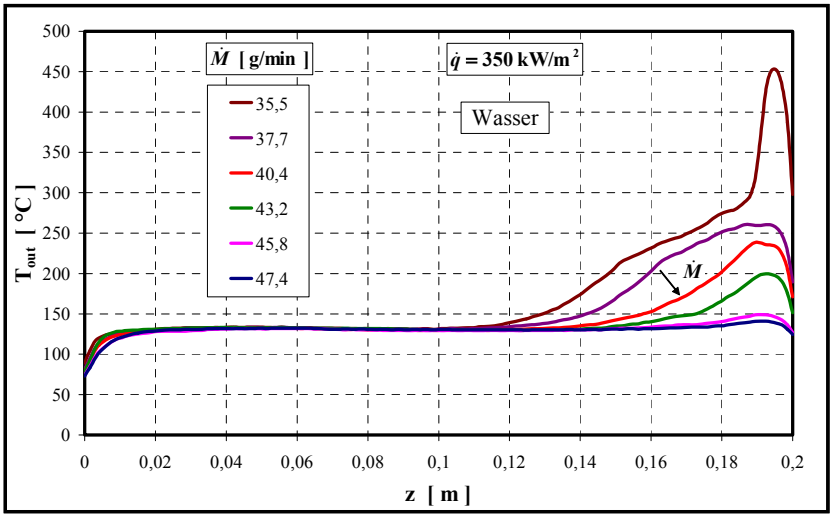


Bild 3.22: axialer Temperaturverlauf

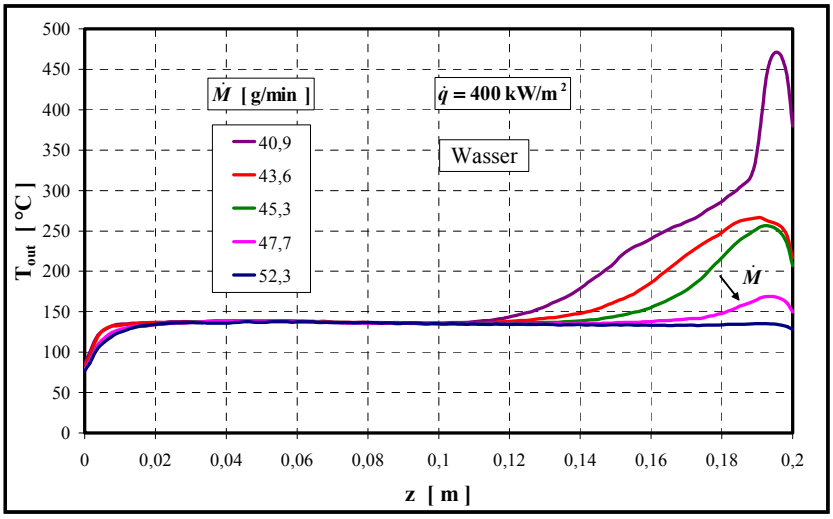


Bild 3.23: axialer Temperaturverlauf

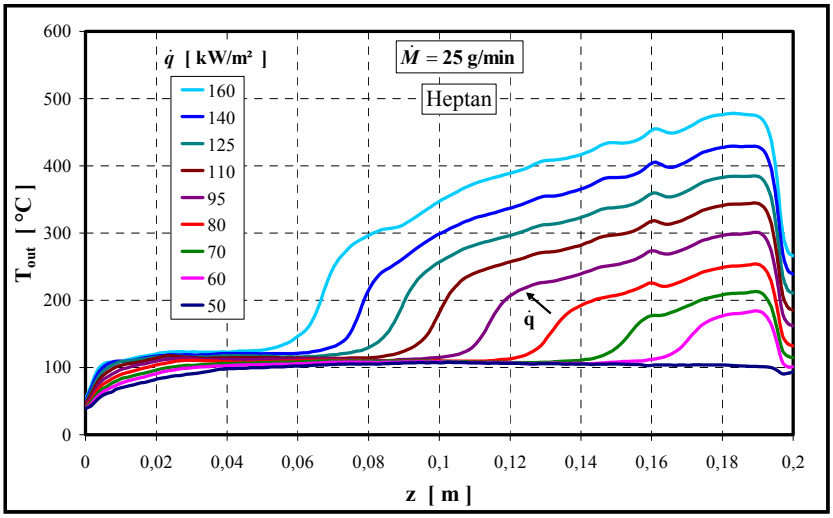


Bild 3.24: axialer Temperaturverlauf

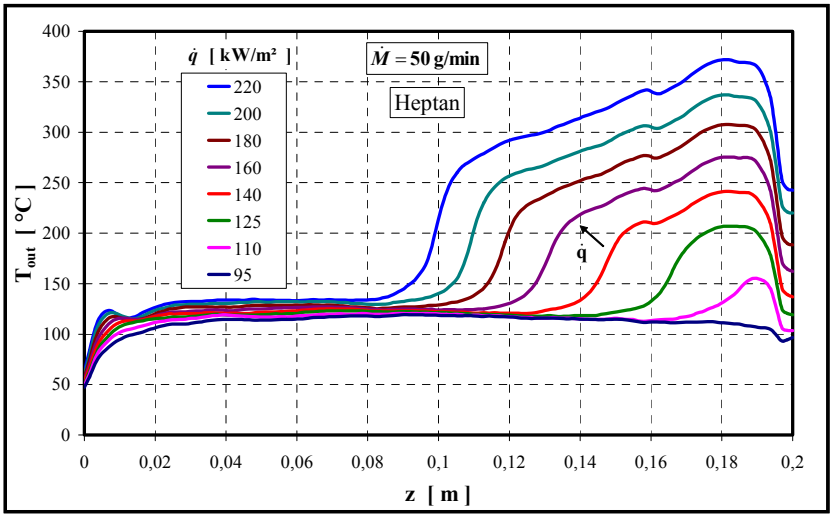


Bild 3.25: axialer Temperaturverlauf

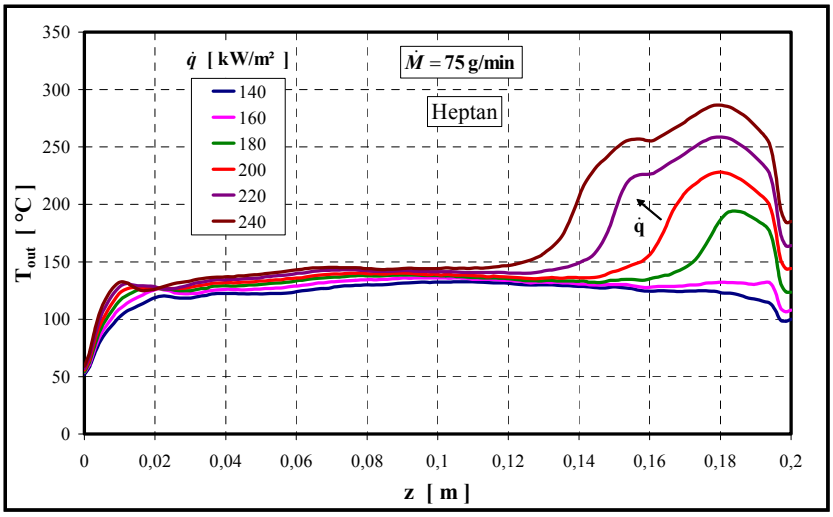


Bild 3.26: axialer Temperaturverlauf

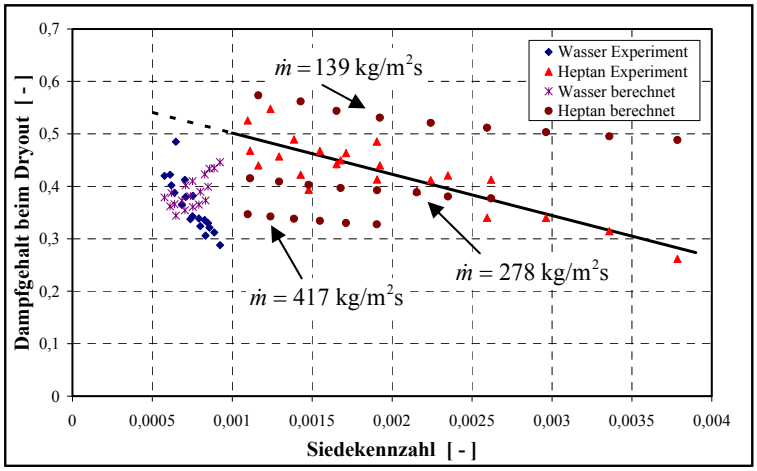


Bild 3.27: Dampfgehalt am Ort des Dryouts

Die axialen Temperaturverläufe, die aus den Infrarotaufnahmen entnommen werden können, erlauben die Bestimmung des Ortes z_{dry}, an dem der Dryout eintritt, sowie die Berechnung des Dampfgehaltes $\dot{x}_{dry}$ an dieser Stelle im Kanal. Dieser Dampfgehalt kann nun in Abhängigkeit von den Betriebsparametern, die in der Siedekennzahl

$$N_b = \frac{\dot{q}}{\dot{m}\Delta h_V} \qquad (3.22)$$

zusammengefasst sind, in der Form $\dot{x}_{dry} = f(N_b)$ dargestellt werden. Bild 3.27 zeigt den Zusammenhang der experimentell ermittelten Daten. Die experimentellen Daten sind berechneten Werten nach Gleichung (2.17) gegenübergestellt. Dabei zeigen sich deutliche Unterschiede. Die berechneten Werte für Heptan weisen beispielsweise einen erheblich höheren Einfluss der Massenstromdichte bei konstanter Siedekennzahl auf das Eintreten des Dryouts auf. Bei einer höheren Massenstromdichte kommt es demnach bei kleineren Werten von $\dot{x}$ zum Eintreten des Dryouts, wie Bild 3.27 verdeutlicht. Diese Abhängigkeit konnte im Experiment nicht nachgewiesen werden. Im untersuchten Parameterbereich ergeben die

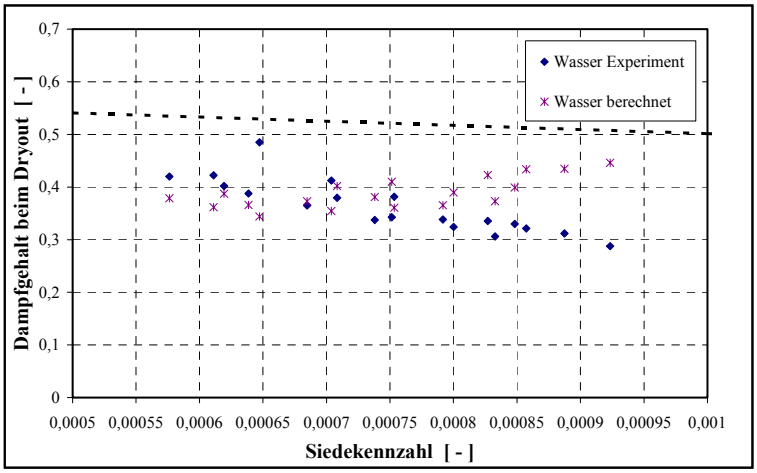


Bild 3.28: Dampfgehalt am Ort des Dryouts

experimentell bestimmten Dampfgehalte $\dot{x}_{dry}$ für Heptan einen nahezu linearen Zusammenhang, der durch die Regressionsfunktion

$$\dot{x}_{dry} = -78{,}53 \cdot N_b + 0{,}58 \qquad (3.23)$$

angenähert werden kann.

Sowohl die nach Gl. (2.17) berechneten als auch die experimentell bestimmten Werte für Wasser weisen aus, dass der Dryout bei kleineren Dampfgehalten eintritt als bei Heptan. Allerdings zeigen die berechneten und gemessenen Dampfgehalte unterschiedliche Anstiege in ihrer Abhängigkeit von der Siedekennzahl. Bild 3.28 zeigt zur Verdeutlichung eine Vergrößerung des entsprechenden Ausschnittes für Wasser aus Bild 3.27. Für die Klärung der hier beschriebenen Abweichungen der Messergebnisse im Mikrokanal von den Berechnungsergebnissen für konventionelle Kanäle sind weitere experimentelle Untersuchungen erforderlich.

Ein gewisser Grad der Streuung, den die Messdaten aufweisen, liegt darin begründet, dass der Druck nicht direkt am Ort des Dryouts messtechnisch bestimmt werden kann. Der entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 3.5 bestimmte Druck und somit auch die von ihm abhängige Siedetemperatur sowie diverse Stoffwerte können daher fehlerbehaftet sein, was sich auf die Bestimmung des Dampfgehaltes auswirkt.

3.6.5 Wärmeübergang

3.6.5.1 Einphasige Vorwärmung

Die experimentellen Untersuchungen im Bereich der einphasigen Vorwärmung zeigen für die untersuchten Kanäle, dass sich der Wärmeübergang so vollzieht, wie dies bekannte Bestimmungsgleichungen für die Strömung in Rohren bzw. Kanälen erwarten lassen. Beispielhaft zeigt Bild 3.29 einen Vergleich verschiedener Korrelationsgleichungen mit einem ausgewählten Messergebnis. Im Wesentlichen zeigen die experimentellen Ergebnisse, dass das Einlaufgeschehen nachvollzogen werden kann, und dass die experimentell bestimmte Nußelt-Zahl gegen den erwarteten Wert für die hydraulisch und thermisch eingelaufene Strömung strebt. In Abhängigkeit von der für die Definition der Nußelt-Zahl verwendeten charakteristischen Länge ist dies ein Wert von 4,364 bei der Strömung durch Kreisrohre bzw. ein Wert von 8,235 für die Strömung zwischen

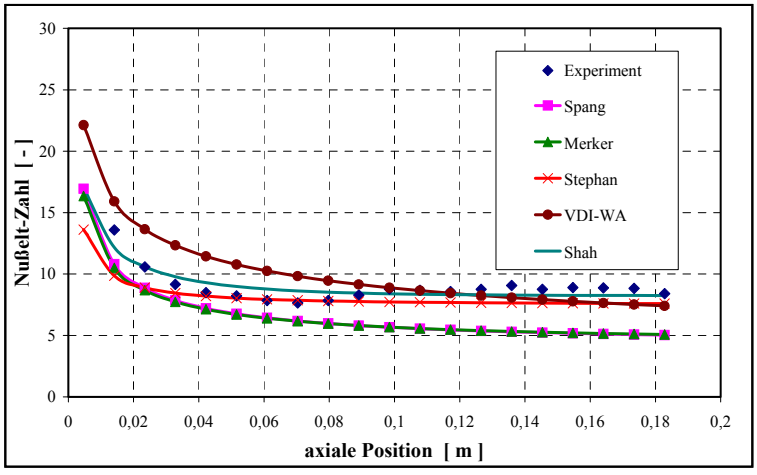


Bild 3.29: Einphasiger Wärmeübergang im Kanal

parallelen Platten.

In der Literatur findet sich eine Vielzahl von Korrelationen zur Bestimmung der Nußelt-Zahl im Rohr bzw. im Kanal/ebenen Spalt. Die in Bild 3.29 beispielhaft dargestellten experimentell bestimmten Nußelt-Zahlen wurden an einem Kanal mit einem Querschnitt von 0,7 mm x 10 mm ermittelt. Die Reynoldszahl beträgt $Re = 1200$ und das untersuchte Medium ist Wasser. Am besten stimmen die Daten mit der von Shah, vgl. Gleichung (2.12), für die Strömung zwischen parallelen Platten abgeleiteten Beziehung für die Nußelt-Zahl überein. Weiterhin ist die in [3] angegebene Gleichung nach Stephan

$$Nu_m = 7{,}55 + \frac{A}{B} \quad \text{mit } A = 0{,}24\left(RePr\frac{d_h}{l}\right)^{1{,}14};\; B = 1 + 0{,}0358\left(RePr\frac{d_h}{l}\right)^{0{,}64} Pr^{0{,}17}, \quad (3.24)$$

die ebenfalls für die Strömung zwischen parallelen Platten abgeleitet wurde, dargestellt. Diese Gleichung gibt die mittlere Nußelt-Zahl an, die lokale Nußelt-Zahl wird folgendermaßen bestimmt

$$Nu(z) = 7{,}55 + A/B - 1{,}14\,A/B + 0{,}64\,A(B-1)/B^2. \quad (3.25)$$

Als Randbedingung für diese Gleichung ist eine konstante Wandtemperatur vorausgesetzt. Aber auch für die im Experiment realisierte Bedingung konstanter Wärmestromdichte liefert die Gleichung nach Stephan eine gute Übereinstimmung.

Zum weiteren Vergleich sind die Gleichungen nach Merker [42]

$$Nu(z) = 4{,}363 + \frac{0{,}01\cdot\left(RePr\frac{d_h}{z}\right)^{1{,}329}}{1 + 0{,}0226\cdot\left(RePr\frac{d_h}{z}\right)^{0{,}829} Pr^{0{,}155}}, \quad (3.26)$$

die verhältnismäßig einfache Beziehung

$$Nu_m = 4{,}36\left(1 + \left(0{,}0292\,Pe\frac{d}{l}\right)^2\right)^{0{,}15}\left(\frac{Pr}{Pr_W}\right)^{0{,}14} \quad (3.27)$$

nach VDI-Wärmeatlas [3], Abschn. Hba, sowie die Gleichung nach Spang [3]

$$Nu(z) = \left[Nu_1^3 + 1 + (Nu_2 - 1)^3 + Nu_3^3\right]^{1/3}$$
mit (3.28)
$$Nu_1 = 4{,}364; \quad Nu_2 = 1{,}302\left(RePr\frac{d_h}{z}\right)^{1/3}; \quad Nu_3 = 0{,}462\,Pr^{1/3}\left(Re\frac{d_h}{z}\right)^{1/2}$$

in Bild 3.29 dargestellt. Diese Gleichungen gelten für die Strömung in Rohren. Da der Querschnitt des untersuchten Kanals ein verhältnismäßig großes Seitenverhältnis aufweist, weichen die experimentellen Daten entsprechend stark von den Nußelt-Zahlen, die mit den letzten drei Korrelationen bestimmt wurden, ab.

Peng und Wang [53] geben für Mikrokanäle die von Li berechnete Beziehung

$$\frac{Nu}{Nu_C} = \frac{\left(1+4{,}108\cdot Kn\right)^2}{1+10{,}46\cdot Kn+18{,}41\cdot Kn^2}; \qquad Kn = \Lambda / l_{ch} \tag{3.29}$$

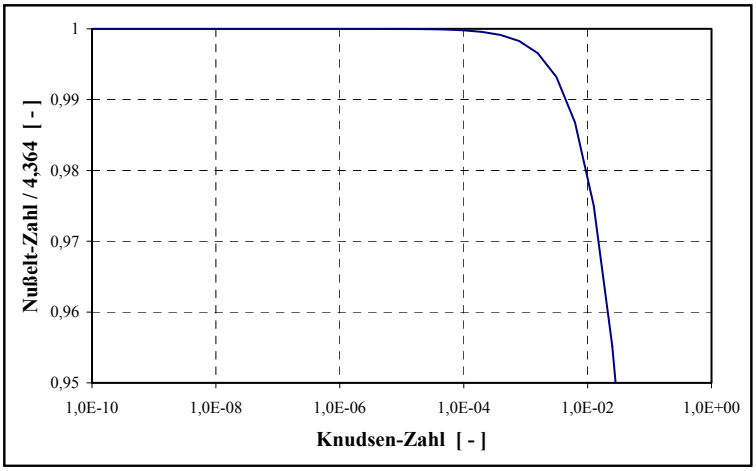


Bild 3.30: Nußelt-Zahl für kleine Kanäle

an. Worin Nu_C dem klassischen Wert für die Nußelt-Zahl, für Rohre im eingelaufenen Zustand $Nu_C = 4{,}364$ entspricht. Bild 3.30 zeigt, in welcher Weise die klassische Nußelt-Zahl in Abhängigkeit von der Knudsen-Zahl verringert wird. Für die kleinsten, in dieser Arbeit untersuchten Kanäle mit einer Spaltweite von $s = 300\,\mu\text{m}$, weist die Knudsen-Zahl selbst bei reinen Gasströmungen eine Größenordnung von etwa 10^{-4} auf. Wie aus Bild 3.30 hervorgeht, ist für die untersuchten Kanäle kaum eine Abweichung von der klassische Nußelt-Zahl zu erwarten. Die Ergebnisse zeigen, dass für den Wärmeübergang von der beheizten Kanalwand an die einphasige Flüssigkeitsströmung für die untersuchten Kanäle, die eine charakteristische Länge von $l_{ch} = 2s \geq 600\,\mu\text{m}$ aufweisen, keine wesentliche Abweichung von den Korrelationsgleichungen, die für größere Kanäle ermittelt wurden, festgestellt werden kann.

3.6.5.2 Wärmeübergang im Bereich des konvektiven Siedens

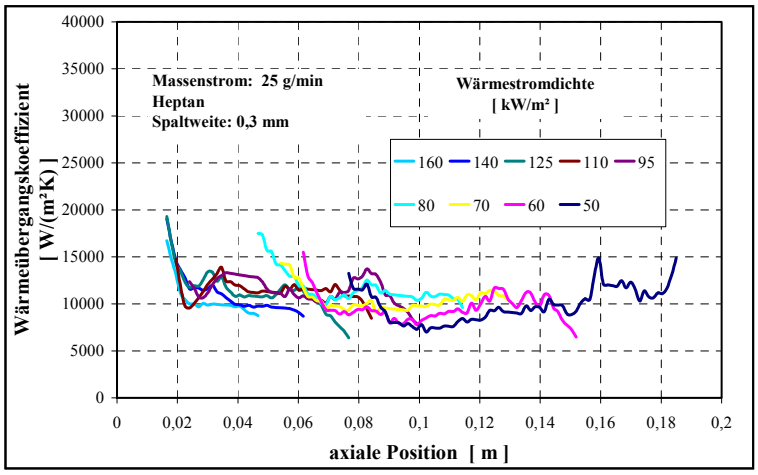


Bild 3.31: Wärmeübergangskoeffizienten im Bereich des konvektiven Siedens

Wie bereits in Abschnitt 3.6.3 ausgeführt, liegt in einem großen Bereich des Strömungssiedens konvektives Sieden vor. In Bild 3.31-Bild 3.33 sind die experimentell bestimmten Wärmeübergangskoeffizienten, die für die Verdampfung von Heptan in einem Kanal mit einer Spaltweite von $s = 300\,\mu\text{m}$ bestimmt wurden, dargestellt.

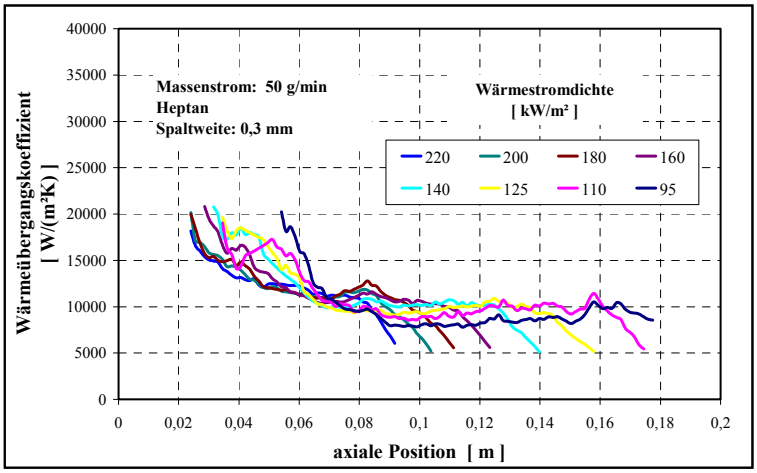


Bild 3.32: Wärmeübergangskoeffizienten im Bereich des konvektiven Siedens

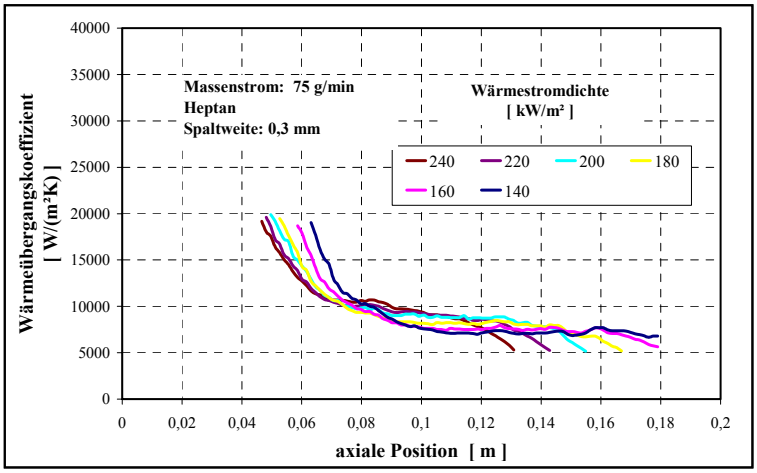


Bild 3.33: Wärmeübergangskoeffizienten im Bereich des konvektiven Siedens

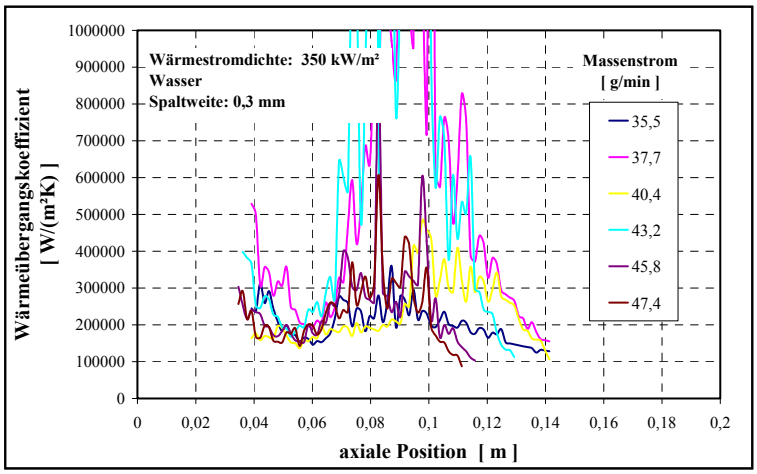


Bild 3.34: Wärmeübergangskoeffizienten im Bereich des konvektiven Siedens

Die axialen Verläufe des Wärmeübergangskoeffizienten zeigen nach dem typischen Verhalten am Initialpunkt, vgl. Abschnitt 3.6.2, das aus dem Übergang von einem kurzen Bereich des Blasensiedens in das konvektive Sieden herrührt, einen nahezu horizontalen Verlauf. Die starke Verschlechterung des Wärmeübergangs am Ende des Bereiches des konvektiven Siedens weist auf das Eintreten des Dryouts hin. Im Abschnitt des konvektiven Siedens ist ein leichter Anstieg des Wärmeübergangskoeffizienten zu verzeichnen. Dies weist auf die Abnahme der an der Wand strömenden Flüssigkeitsschicht auf Grund des wachsenden Dampfgehaltes hin und stützt so die Annahme des Vorliegens von konvektivem Sieden. Weiterhin ist eine nur leichte Zunahme des Wärmeübergangskoeffizienten mit wachsender Wärmestromdichte zu verzeichnen.

Bei der Berechnung des Wärmeübergangskoeffizienten nach Gleichung (2.16) ergeben sich für die untersuchten Medien Wasser und Heptan die in Tabelle 3.3 angegebenen maximalen Werte.

Tabelle 3.3: Wärmeübergangskoeffizient beim konvektiven Sieden

Medium	Spaltweite	Wärmeübergangskoeffizient
Heptan	300 µm	$\alpha = 8000 - 9000\ \mathrm{W/(m^2K)}$
Wasser	300 µm	$\alpha = 50000 - 60000\ \mathrm{W/(m^2K)}$
Wasser	700 µm	$\alpha = 25000 - 30000\ \mathrm{W/(m^2K)}$

Die mittleren Wärmeübergangskoeffizienten, die experimentell für den Bereich des konvektiven Siedens bestimmt wurden, sind in Bild 3.35 in Abhängigkeit von der Siedekennzahl dargestellt. Die Werte für Heptan weisen eine relativ gute Übereinstimmung mit den berechneten Werten aus Tabelle 3.3 auf. Charakteristisch ist eine Vergrößerung des Wärmeübergangskoeffizienten von ca. 10% für die Messwerte unter Mikrokanalbedingungen, insbesondere bei höheren Siedekennzahlen. Die Werte von Wasser hingegen weichen für beide Kanalgeometrien sehr stark von den erwarteten Werten ab, wobei die Messwerte für Wasser mit einer größeren Messunsicherheit behaftet sind.

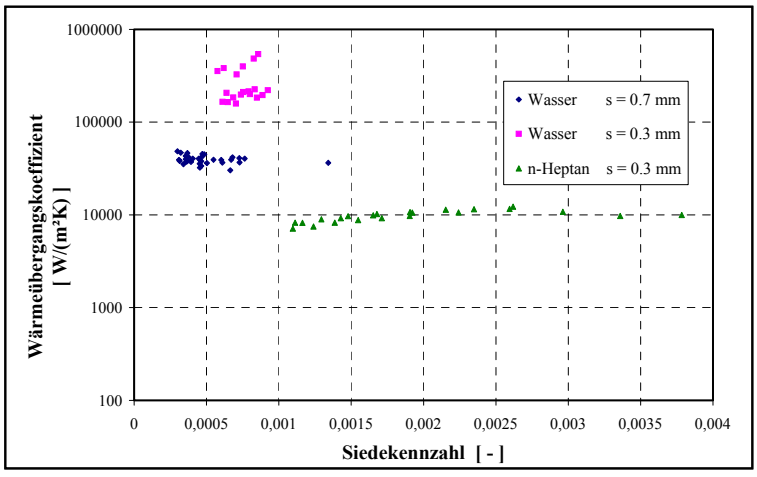


Bild 3.35: Wärmeübergangskoeffizienten im Bereich des konvektiven Siedens

In sehr kleinen Kanälen ist die Temperaturdifferenz zwischen der Wand und der Siedetemperatur sehr gering. Aus kleinen Fehlern bei der Bestimmung der Außenwandtemperatur bzw. bei der Bestimmung des Druckverlaufes und somit der Siedetemperatur können große Fehler für den ermittelten Wärmeübergangskoeffizienten resul-

tieren. Da beim konvektiven Sieden die Temperaturdifferenz zwischen der beheizten Wand und der Siedetemperatur, die der Dampftemperatur im Kern der Strömung entspricht, im Wesentlichen durch den Transportwiderstand der Flüssigkeitsschicht an der Wand bestimmt wird, liegt bei Wasser eine wesentlich kleinere Temperaturdifferenz vor als bei Heptan, da die Wärmeleitfähigkeit von Wasser etwa den siebenfachen Wert der Wärmeleitfähigkeit von Heptan aufweist. Damit wirken sich kleine Messfehler bei den Versuchen mit Wasser wesentlich stärker auf den Wert des Wärmeübergangskoeffizienten aus als bei den Versuchen mit Heptan. Beispielhaft zeigt Bild 3.34 experimentell bestimmte Wärmeübergangskoeffizienten für den Bereich des konvektiven Siedens mit Wasser als Testfluid. Die durch die fehlerbehaftete Messung auftretende starke Schwankung des lokalen Wärmeübergangskoeffizienten macht eine Auswertung für Wasser nahezu unmöglich. Hier stößt die verwendete Messmethode an ihre Grenzen hinsichtlich der quantitativen Bestimmung von Wärmeübergangskoeffizienten für den Bereich des zweiphasigen Wärmeübergangs.

3.6.6 Druckverlust

Wie bereits im Abschnitt 2.3.1 beschrieben, kann der Druckabfall in einem durchströmten Kanal mit Hilfe der Bernoulli-Gleichung

$$p_1 + \frac{\rho_1}{2} v_1^2 + \rho_1 g h_1 = p_2 + \frac{\rho_2}{2} v_2^2 + \rho_2 g h_2 + \Delta p_v \qquad (3.30)$$

bestimmt werden. Für den Druckverlust folgt also

$$\Delta p_v = p_1 - p_2 + \frac{1}{2}\left(\rho_1 v_1^2 - \rho_2 v_2^2\right) + g\left(\rho_1 h_1 - \rho_2 h_2\right). \qquad (3.31)$$

Für die einphasige Strömung wird der Druckverlust in durchströmten Rohren und Kanälen, für verschiedene Einbauten wie Krümmer und Ventile sowie für Verluste, die beim Einströmen in bzw. beim Ausströmen aus einem Rohr auftreten, üblicherweise über den Zusammenhang

$$\Delta p_v = \zeta \frac{\rho}{2} v^2 \qquad (3.32)$$

bestimmt, wobei der Widerstandsbeiwert ζ für Kanäle von der Länge l, vom hydraulischen Durchmesser d_h sowie von der Rohrreibungszahl λ in der Form

$$\zeta = \varphi \lambda \frac{l}{d_h} \qquad (3.33)$$

abhängt. Der Koeffizient φ dient der Berücksichtigung der speziellen Geometrie. Für kreisförmige Rohre gilt $\varphi = 1$. Bei Rechteckkanälen ist die Größe von φ vom Seitenverhältnis abhängig. Nach [24] kann für die untersuchten Rechteckkanalgeometrien ein

Wert von $\varphi \approx 1{,}4$ angenommen werden. Für die experimentelle Bestimmung der Rohrreibungszahl steht somit die Gleichung

$$\lambda = \frac{2}{\rho v^2}\frac{d_h}{\varphi l}\left[p_1 - p_2 + \frac{1}{2}\left(\rho_1 v_1^2 - \rho_2 v_2^2\right) + g\left(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2\right)\right] \qquad (3.34)$$

zur Verfügung. Da die Strömungsquerschnitte in den Anschlussstücken der Kanäle (Orte der Druckmessung am Ein- und Austritt) gleich ausgeführt sind und im Bereich der einphasigen Flüssigkeitsströmung keine wesentlichen Dichteänderungen des Fluides eintreten, kann der Term für die kinetischen Energien in Gl. (3.34) vernachlässigt werden. Die Druckmessung erfolgt in den Anschlussstutzen der Kanäle, die einen anderen durchströmten Querschnitt aufweisen als der jeweilige Kanal selbst. Daher sind Ein- und Austrittsdruckverluste zu berücksichtigen.

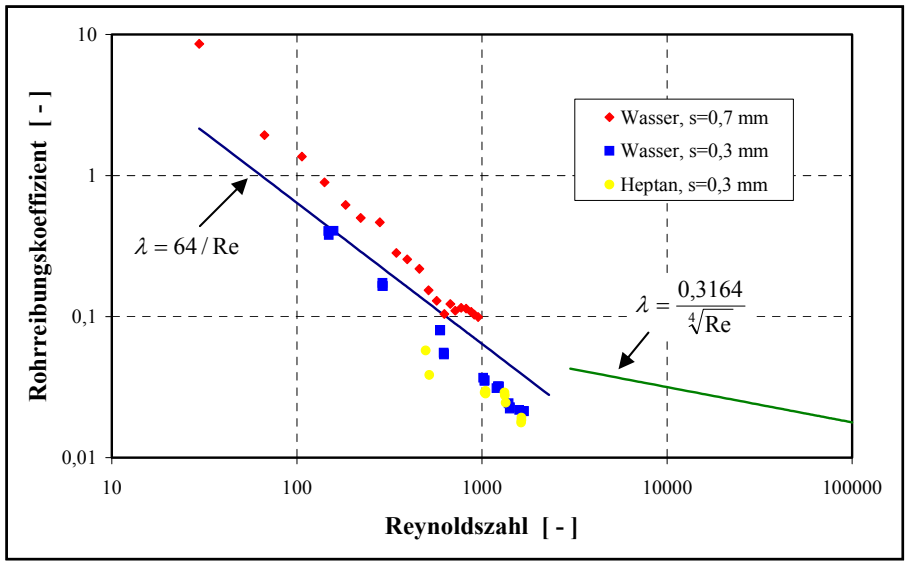


Bild 3.36: Rohrreibungszahl $\lambda(Re)$

Die Ergebnisse der messtechnischen Bestimmung des Druckverlustes für Wasser und Heptan bei einphasiger Strömung sind in Bild 3.36 der bekannten Beziehung für die laminare Strömung sowie der Korrelationsgleichung nach Blasius gegenübergestellt. Es zeigt sich, dass für die untersuchten Kanalgeometrien die Messwerte sehr gut durch die Beziehung $\lambda = 64/Re$ wiedergegeben werden. Dieses Ergebnis wird auch durch die Messungen von Celata et. al. [11] bestätigt, die den einphasigen Druckverlust in Kapillarrohren mit 0,13 mm Innendurchmesser bestimmten. Die Messungen von Celata zeigen allerdings ein Ansteigen des Rohrreibungskoeffizienten bei Reynoldszahlen >500. Der Einfluss von eventuell vorhandenen Mikroeffekten liegt in Bezug auf den Druckverlust also im Bereich der Messgenauigkeit.

Wird im Mikrokanal verdampft, ist der Druckabfall im Wesentlichen vom erreichten Dampfgehalt sowie bei vollständiger Verdampfung von der Überhitzung des Dampfes abhängig. Bild 3.37 und Bild 3.38 zeigen den Druckabfall im Kanal mit einer Spaltweite von $s = 300\,\mu m$ für die vollständige Verdampfung von Wasser bzw. von Heptan. Die Bestim-

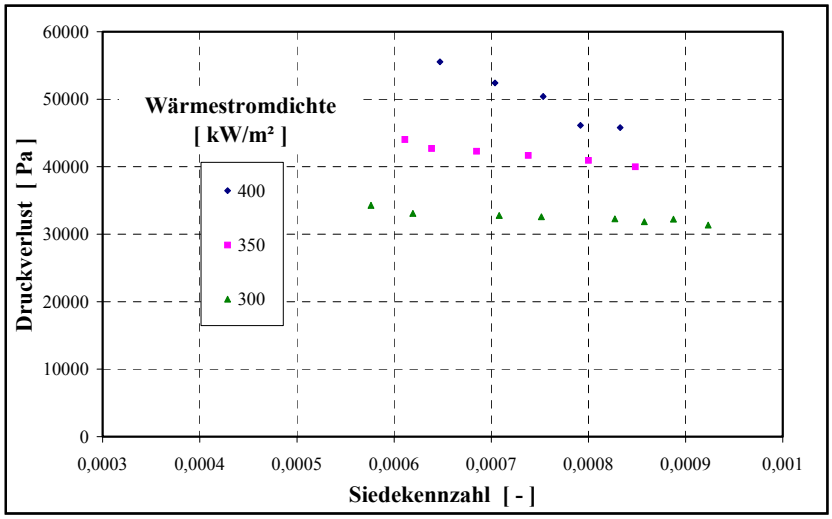


Bild 3.37: Druckverlust, $s = 300\ \mu\text{m}$, Wasser

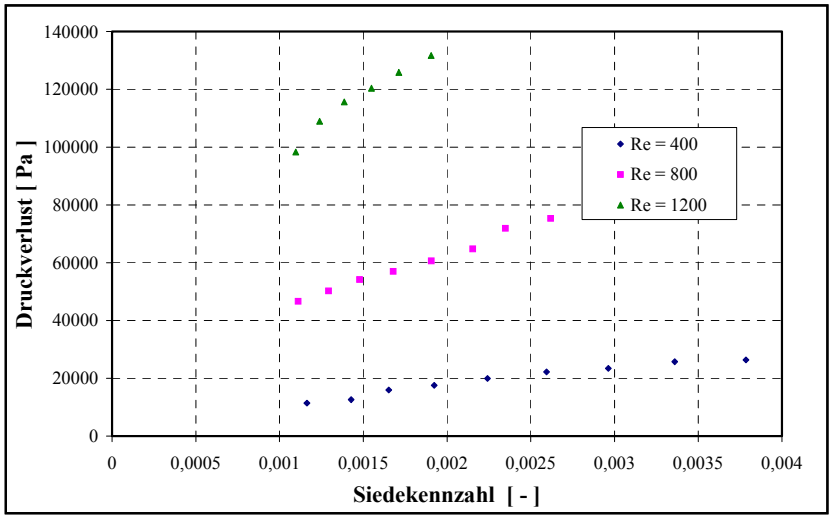


Bild 3.38: Druckverlust im Kanal, $s = 300\ \mu\text{m}$, Heptan

mung des Druckverlustes in einem bestimmten Abschnitt im Mikrokanal gestaltet sich verhältnismäßig schwierig, da nur am Ein- und Austritt Messwerte gewonnen werden konnten.

Um den Druckverlust im Bereich der zweiphasigen Strömung bestimmen zu können, ist also der Druckverlust der einphasig strömenden Flüssigkeit im Bereich der Vorwärmung von der Differenz des gemessenen Druckverlustes zu subtrahieren. Da bei vollständiger Verdampfung in den untersuchten Kanälen der Bereich der einphasigen Vorwärmung verhältnismäßig kurz ist, ist der Druckabfall in diesem Bereich von geringem Einfluss auf den Gesamtdruckverlust. Eine Abschätzung des Druckverlustes für Wasser ergibt folgendes: Im untersuchten Parameterbereich liegt die maximale Strömungsgeschwindigkeit des einphasigen Wassers im Kanal mit der Spaltweite $s = 300\ \mu\text{m}$ bei $\bar{v} = 0{,}3$ m/s. Für den Druckverlust ergibt sich somit entsprechend den Ausführungen zum einphasigen Druckverlust bei laminarer Strömung mit $\nu = 0{,}25 \cdot 10^{-6}$ m²/s und $\rho = 940$ kg/m³ ein Wert für den Druckverlust von $\Delta p_V = 263$ Pa

sowie ein Druckabfall infolge der Zunahme an potentieller Energie von $\Delta p_H = 277$ Pa. Insgesamt ergibt sich so ein Druckabfall für den einphasigen Bereich von $\Delta p = 540$ Pa. Die Werte wurden unter der Voraussetzung berechnet, dass die Länge des einphasigen Bereiches 0,03 m beträgt. Diese Länge ist Bild 3.21-Bild 3.23 zu entnehmen.

Analog ergibt sich für Heptan für eine maximale mittlere Strömungsgeschwindigkeit von etwa $\bar{v} = 0{,}7$ m/s ein einphasiger Gesamtdruckabfall von $\Delta p = 700$ Pa.

Die in Bild 3.37 und Bild 3.38 dargestellten Druckverluste sind um die hier angegebenen Druckabfälle für den einphasigen Flüssigkeitsbereich zu vermindern.

Liegt die axiale Position, an der die vollständige Verdampfung erreicht wird, sehr nahe am Austritt des Kanals, so kann der Druckverlust in der reinen Dampfströmung vernachlässigt werden. Ist dies nicht der Fall, lässt sich dieser Anteil am Gesamtdruckverlust für die entsprechenden Betriebsparameter nur schwer abschätzen, da eine scharfe Trennung vom Postdryoutbereich, in dem noch eine Tröpfchenströmung vorliegt, und dem Bereich der einphasigen Dampfströmung mit Hilfe der Wandtemperaturbereiche nicht möglich ist. Hier sind weitere Messungen mit unterschiedlichen Kanallängen oder mit zusätzlichen Druckmessstellen erforderlich. Hilfreich wäre auch die Verwendung von Kanälen mit durchsichtiger Wand, die eine optische Beobachtung der Strömung zulassen, um eine definierte Trennung vom zweiphasigen Bereich und dem einphasigen Dampfbereich vornehmen zu können.

3.7 Fehlerbetrachtung

3.7.1 Allgemeines

Jede Messung ist fehlerbehaftet [57]. Dies resultiert aus der Tatsache, dass vorhandene Messgeräte Unzulänglichkeiten aufweisen, dass die menschlichen Sinne unvollkommen sind und daraus, dass auf jede Messung Umwelteinflüsse einwirken, die kontrolliert bzw. erfasst und kompensiert werden können. Die das Messergebnis verfälschende Messunsicherheit setzt sich nach DIN 1319, Teil 3 [17] aus den systematischen und den zufälligen Fehlern zusammen.

Systematische Fehler werden hervorgerufen durch die Unvollkommenheit der Messgeräte und des Messobjektes. Sie treten regelmäßig auf, d. h. sie werden auch beim Ausführen von Wiederholmessungen wieder in Erscheinung treten. Sie sind prinzipiell, in der Regel mit erheblichem experimentellen Mehraufwand, vermeidbar. Systematische Fehler lassen sich durch Vergleichsmessungen mit anderen Messverfahren erfassen und somit rechnerisch korrigieren. Unter zufälligen Fehlern sind die, durch nicht zu erfassende Umwelteinflüsse hervorgerufenen Fehler zu verstehen. Sie sind unter gleichen Messbedingungen unregelmäßig in Größe und Richtung und weder beeinflussbar noch vermeidbar.

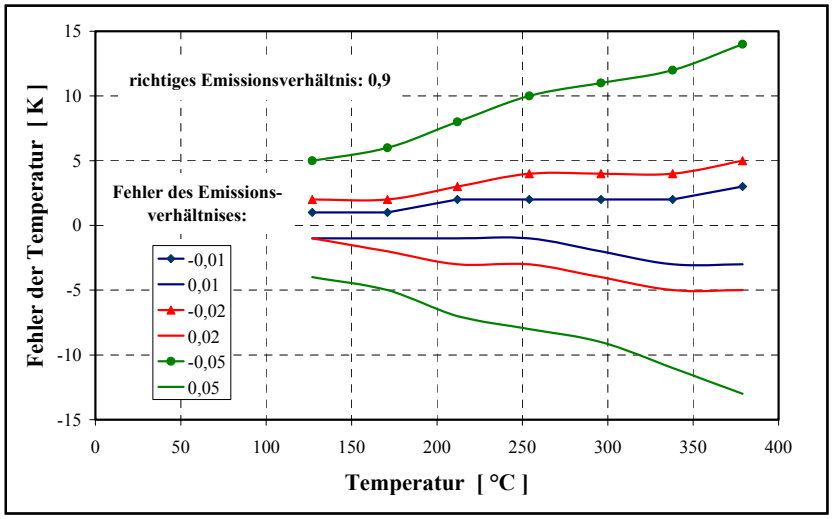


Bild 3.39: Einfluss eines fehlerhaften Emissionsverhältnisses auf die gemessene Wandtemperatur

3.7.2 Fehler der Messwerte

Für die Fehler der einzelnen Messwerte können die folgenden Angaben gemacht werden. Die angegebenen Fehlertoleranzen gehen aus Herstellerangaben sowie statistischen Betrachtungen hervor.

Druckmessung: $\Delta p = 0{,}05$ bar

Temperaturmessung Ein-/Austritt: $\Delta T \leq 0{,}1$ K nach Kalibrierung der Thermoelemente

Massenstrommessung: $\Delta \dot{M} \leq 0{,}2\%$ des Messwertes im verwendeten Parameterbereich

Außenwandtemperatur: $\Delta T \leq 0{,}1$ K (Wiederholbarkeit der Messung mit dem Infrarotthermografiesystem)
Ein weitaus größerer Fehler tritt durch die Unkenntnis des Emissionsverhältnisses ein. Bild 3.39 zeigt den durch Vorversuche mit dem verwendeten IR-System bestimmten Einfluss eines fehlerhaften Emissionsverhältnisses auf die gemessene Außenwandtemperatur.

Strommessung: $\Delta I = 1$ A

Spannungsmessung: $\Delta U = 0{,}1$ V

3.7.3 Fehler der abgeleiteten Größen

Die wenigsten physikalischen Größen werden direkt gemessen, vielmehr wird ihre Auswirkung auf eine messbare Größe genutzt. Die Bestimmung abgeleiteter Größen erfolgt meist über die Messung anderer, voneinander unabhängiger Größen - auch als mittelbare Messung bezeichnet. Der dabei auftretende maximale systematische Fehler kann aus den Fehlern der

unabhängigen Größen über die linearen Glieder einer Taylor-Reihen-Entwicklung abgeschätzt werden, wobei zur Vermeidung von Kompensation die Absolutbeträge der partiellen Ableitungen zu verwenden sind. Für die Abschätzung des zufälligen Fehlers der abgeleiteten Größe aus den empirischen Standardabweichungen wird, Gaußsche Normalverteilung vorausgesetzt, das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz angewendet.

Am Beispiel eines ebenen Kanals soll die Auswirkung der Messfehler der einzelnen Größen auf die ermittelte Innenwandtemperatur gezeigt werden.

Nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz folgt für eine Messgröße $u(x_1, x_2, x_3, \ldots)$

$$\Delta u = \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\Delta x_1\right| + \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\Delta x_2\right| + \left|\frac{\partial u}{\partial x_3}\Delta x_3\right| + \ldots \qquad (3.35)$$

Aus Gleichung (3.11) folgt nach Ersetzen der äußeren Wärmestromdichte und der volumenbezogenen Wärmequelle

$$T_{in} = T_{out} - \frac{UI}{V\lambda}\frac{s^2}{2} + \frac{\alpha_{out}(T_{out} - T_{Env})}{\lambda}s \qquad (3.36)$$

und für den Fehler der Innenwandtemperatur unter der Annahme, dass die geometrischen Größen und die Wärmeleitfähigkeit des Wandmaterials nahezu keine Fehler aufweisen

$$\begin{aligned}\Delta T_{in} = &\left(1 + \frac{\alpha_{out}}{\lambda}s\right)\Delta T_{out} + \frac{I}{V\lambda}\frac{s^2}{2}\Delta U + \frac{U}{V\lambda}\frac{s^2}{2}\Delta I + \frac{\alpha_{out}}{\lambda}s\Delta T_{Env} \\ &+ \frac{(T_{out} - T_{Env})}{\lambda}s\Delta\alpha_{out}.\end{aligned} \qquad (3.37)$$

Das Einsetzen entsprechender Werte führt zu dem Ergebnis, dass der Term für den Fehler der Außenwandtemperatur den weitaus größten Einfluss (>95%) auf den Fehler der Innenwandtemperatur ausübt.

Analog folgt für die Wärmestromdichte

$$\dot{q} = [UI - \alpha_{out}(T_{out} - T_{Env})]\frac{A_{out}}{A_{in}} \qquad (3.38)$$

und somit für deren Fehler

$$\begin{aligned}\Delta\dot{q} = &U\frac{A_{out}}{A_{in}}\Delta I + I\frac{A_{out}}{A_{in}}\Delta U + \alpha_{out}\frac{A_{out}}{A_{in}}\Delta T_{out} + \alpha_{out}\frac{A_{out}}{A_{in}}\Delta T_{Env} \\ &+ (T_{out} - T_{Env})\frac{A_{out}}{A_{in}}\Delta\alpha_{out}.\end{aligned} \qquad (3.39)$$

Der sich hieraus für relevante Versuchsdaten ergebende Fehler liegt in einer Größenordnung von 1%. Ein wesentlich größerer Fehler resultiert aus der Tatsache, dass die ermittelte Wärmestromdichte bei den untersuchten Rechteckkanälen auf dem Umfang nicht konstant ist, da durch die spezielle Konstruktion eine Anhäufung von Wandmaterial an den beiden

Schmalseiten des Kanals vorliegt, was sich auf die Verteilung der elektrisch generierten Quellwärme und somit auf die Verteilung der Wärmestromdichte auswirkt.

3.8 Instationäre Siedevorgänge

Instationäre Siedevorgänge werden durch das An- bzw. Abfahren des Verdampfers hervorgerufen. Aber auch der Siedeprozess selbst generiert Instationaritäten. Im Rahmen dieser Arbeit sollen instationäre Siedeprozesse nicht untersucht werden, es werden im Folgenden nur einige Phänomene aufgezeigt.

Beispielsweise wird durch den Vorgang der Blasenentstehung und der Blasenimplosion in der

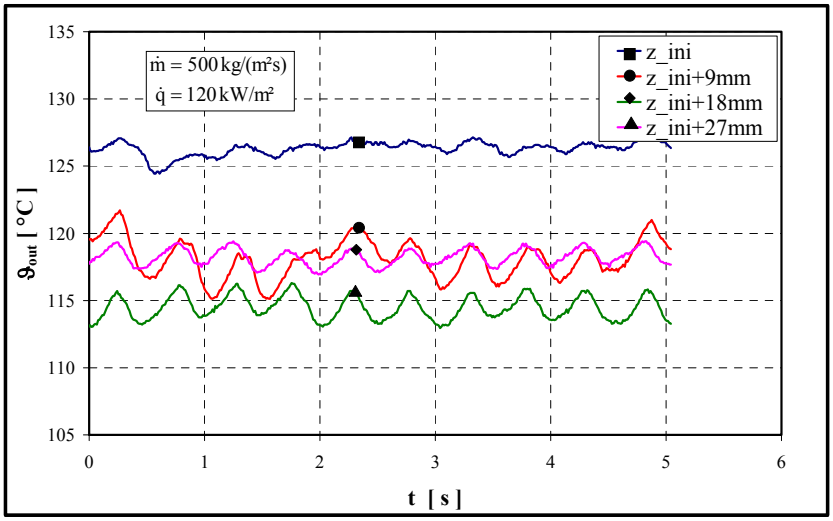


Bild 3.40: Wandtemperatur in der Umgebung des Initialpunktes

Umgebung des Initialpunktes ein stark instationäres Verhalten des Wärmeübergangs hervorgerufen, vgl. [28], [29]. Durch die gegenüber der Flüssigkeit höheren Kompressibilität der Zweiphasenströmung zeigt sich dies vor allem stromabwärts vom Initialpunkt sehr deutlich. Bild 3.40 zeigt beispielhaft das Zeitverhalten der äußeren Wandtemperatur am Initialpunkt sowie an ausgewählten stromabwärts gelegenen Orten. Die Amplituden der Temperaturschwankungen werden neben dem Verdampfungsprozess auch durch die Eigenschaften der Versuchsanlage beeinflusst. Im Wesentlichen betrifft dies die in der Anlage vorkommenden Elastizitäten. Durch die Realisierung entsprechender Versuchsbedingungen wie Ausführung der Anlage mit starren Rohrverbindungen, Evakuieren der Anlage vor der Befüllung um Lufteinschlüsse zu vermeiden und eine sehr gute Durchflussregelung bzw. Realisierung der Förderung und der erforderlichen Druckerhöhung könnten die instationären Schwankungen minimiert werden.

Bereits Bild 3.14 zeigt, dass die Ergebnisse der Wandtemperaturmessungen eine gewisse Schwankungsbreite aufweisen. Es ist ersichtlich, dass diese insbesondere hinter dem Initialpunkt stark ausgeprägt ist. Die dargestellten Messkurven zeigen für die Verdampfung in einem Röhrchen (offene Versuchsanlage) die Veränderungen, die bei zwei zeitlich aufeinanderfolgenden Messungen auftreten können. Damit sind auch der Reproduzierbarkeit

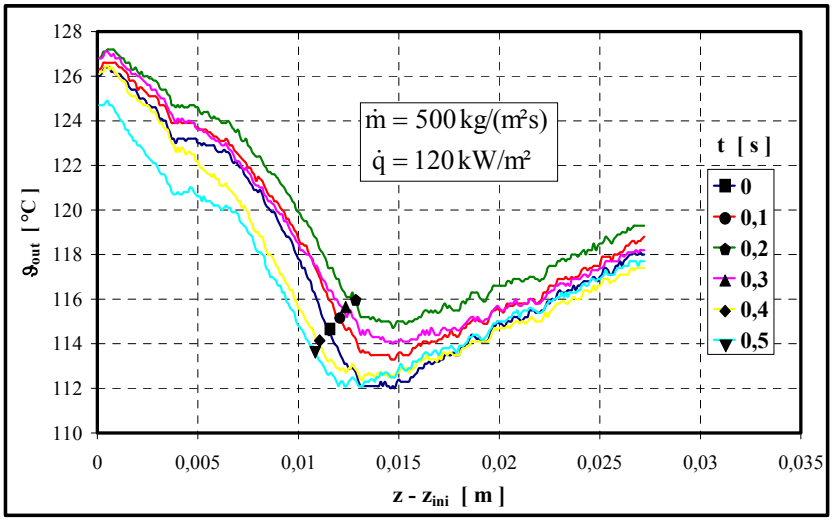


Bild 3.41: Schwankung der Wandtemperatur in der Umgebung des Initialpunktes

gewisse Grenzen gesetzt. Um die Größenordnung der Schwankungen zu verdeutlichen, sind in Bild 3.41 für andere Versuchsparameter die Außenwandtemperaturen eines Verdampferröhrchens in der näheren Umgebung des Initialpunktes für kurz aufeinanderfolgende Zeitschritte vergrößert dargestellt.

Wie der Grafik zu entnehmen ist, treten Temperaturschwankungen in der Größenordnung von ca. 4 K für die angegebenen Versuchsparameter auf. Bei der Auslegung von Verdampferanlagen, ist diese instationäre Arbeitsweise des Verdampfers, die mit Schwankungen des Druckverlustes und damit verbundenen Massenstromschwankungen einhergeht, wie bereits im Abschnitt 3.6.2 ausgeführt, zu berücksichtigen, um die gewünschte Qualität des Dampfmassenstromes hinsichtlich Konstanz von Volumenstrom und Dampfgehalt sowie

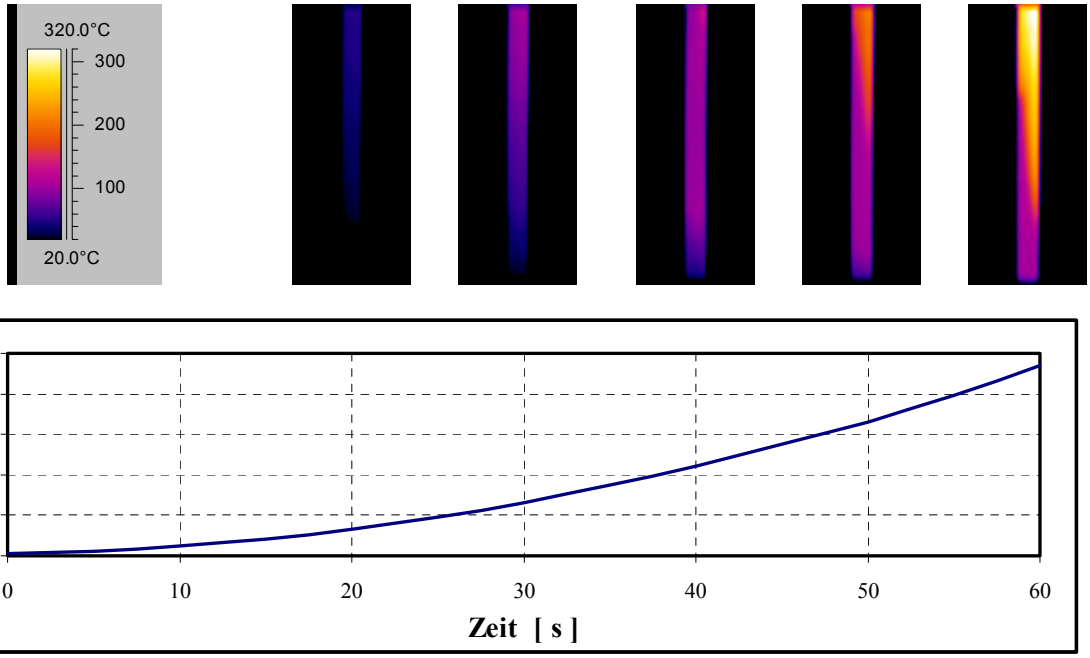


Bild 3.42: Zeitliche Änderung der Wärmestromdichte

entsprechende Sicherheitsaspekte (ungewolltes Auftreten des Dryouts) zu realisieren.

Instationäre Siedeprozesse treten aber auch auf, wenn die Heizleistung des Verdampfers einer

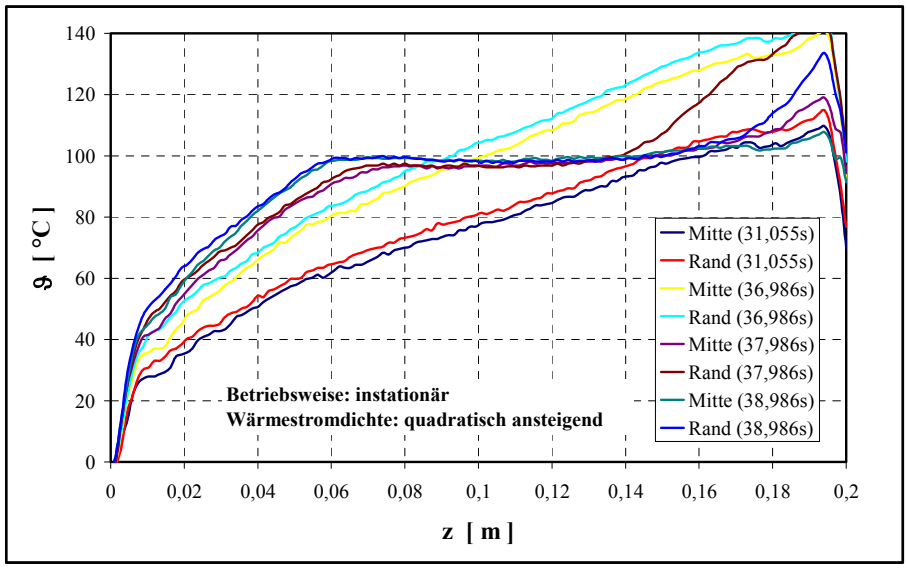


Bild 3.43: Außenwandtemperaturverlauf bei zeitlicher Änderung der Wärmestromdichte

zeitlichen Änderung unterliegt. Dies tritt beim An- und Abfahren des Verdampfers oder aber auch im Rahmen von Regelungsprozessen auf. Um derartige instationäre Vorgänge in Mikrokanälen zu demonstrieren, wurde ein Aufheizprozess untersucht, vgl. [30] bzw. [31]. Bild 3.42 zeigt die zeitliche Änderung der Wärmestromdichte, die bei diesem Versuch realisiert wurde. Weiterhin sind Infrarot-Aufnahmen der Außenwand eines Verdampferkanals mit rechteckigem Strömungsquerschnitt zu ausgewählten Zeipunkten dargestellt. Aus Bild 3.43, welches die Temperaurverteilung zu ausgewählten Zeitpunkten in der Nähe der Zeit des Siedebeginns zeigt, ist ersichtlich, dass sehr hohe Wandüberhitzungen zu realisieren

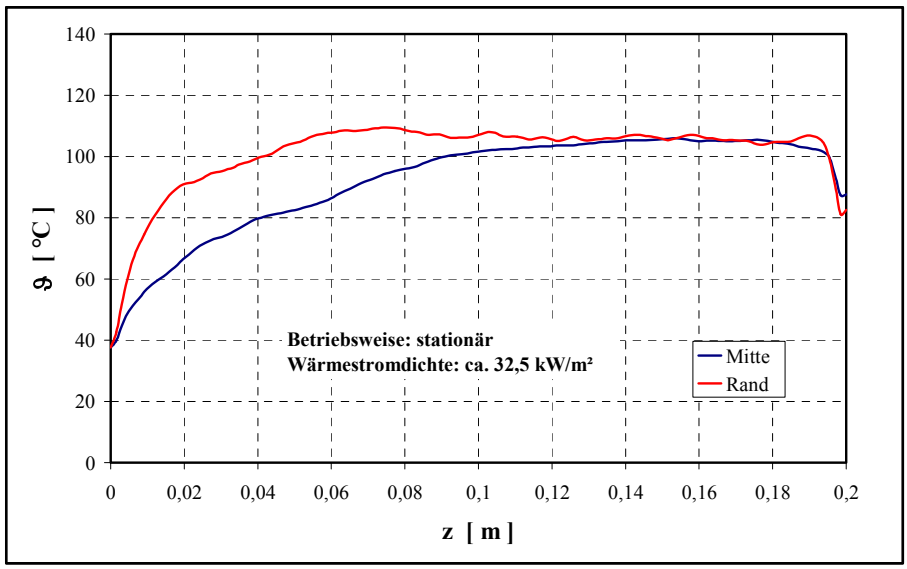


Bild 3.44: Vergleich der Wandtemperaturen in der Mitte und am Rand des Rechteckkanals

sind, um den Verdampfungsprozess zu starten. Diese werden, da die Strömung noch einphasig ist, erwartungsgemäß am Ende des Verdampferkanals erreicht. Die Verdampfung startet und die Wandtemperatur sinkt in weiten Bereichen des Kanals auf ein Niveau ab, welches in Abhängigkeit von der Wärmestromdichte verhältnismäßig nah an der lokalen Siedetemperatur des zu verdampfenden Mediums liegt. Am Kanalaustritt setzt bei entsprechender Wärmestromdichte der Dryout ein.

Im Vergleich dazu setzt bei stationärer Bertriebsweise der Siedeprozess zunächst an den Rändern des Rechteckkanals ein (schmale Seite des Querschnittes), da hier an der Kanalwand örtlich wesentlich früher die erforderliche Temperatur erreicht wird als in der Mitte der Breitseite des Kanals. Bild 3.44 verdeutlicht dies.

Um die instationären Siedevorgänge genauer zu untersuchen sind allerdings wesentlich umfangreichere Untersuchungen erforderlich als dies im Rahmen dieser Arbeit möglich ist. Daher besitzen die an dieser Stelle gezeigten Phänomene nur exemplarischen Charakter.

3.9 Zusammenfassung

Es wurde eine infrarotthermografische Methode vorgestellt, die es ermöglicht, den Prozess der Verdampfung von Flüssigkeit in Mikrokanälen zu untersuchen. Diese Methode eignet sich besonders gut zur qualitativen Beurteilung des Siedevorgangs. Sie ermöglicht die Abgrenzung der Siedebereiche und lässt Aussagen zur Größenordnung der Überhitzung am Initialpunkt zu. Weiterhin konnte gezeigt werden, dass in Mikrokanälen interessante Phänomene beim Anfahren der Beheizung auftreten können. So setzt der Siedebeginn am Kanalaustritt ein, wo einerseits die größte Überhitzung vorliegt und andererseits „Raum“ für die Verdampfung vorhanden ist, wie er von Peng et.al. [52], [53] postuliert wurde. Hat der Siedeprozess eingesetzt, bewegt sich der Ort des Siedebeginns stromaufwärts in den Kanal hinein, wo sich dann für den Verdampfungsvorgang ein mehr oder weniger stationärer Prozess einstellt, der mit einer wesentlich geringeren Überhitzung am Initialpunkt abläuft. Die durch den bereits vorliegenden Siedeprozess hervorgerufenen Druckschwankungen im Kanal wirken unterstützend auf das Initialgeschehen, so dass im stationären Prozess eine deutlich geringere Überhitzung erforderlich ist als für den erstmaligen Siedebeginn.

Im Ergebnis der experimentellen Untersuchungen konnte eine Korrelation für den Ort des Initialpunktes und Überhitzung an dieser Stelle für zylindrische Rohre abgeleitet werden. In Kanälen mit Rechteckquerschnitt ist nahezu keine Überhitzung erkennbar bzw. durch den verwendeten Messaufbau nicht auswertbar.

Weiterhin konnte für Rechteckkanäle eine Korrelation für den Ort des Eintretens des Dryouts abgeleitet werden. Diese Korrelation gibt die Werte, die für n-Heptan ermittelt wurden, ebenso gut wieder, wie die für Wasser gemessenen.

Die vorgestellte Messmethode wurde auch zur Bestimmung des Wärmeübergangskoeffizienten angewendet. Hier zeigte sich, dass das Messverfahren relativ gut im Bereich der einphasigen Strömung zur Bestimmung des Wärmeübergangskoeffizienten geeignet ist. Die

Ergebnisse für die untersuchten Kanalgeometrien korrelieren gut mit Literaturangaben auch für Kanäle mit größeren charakteristischen Längen.

Für den Bereich des zweiphasigen Wärmeübergangs, der im Wesentlichen durch den Bereich des konvektiven Siedens geprägt ist, ist die gezeigte Messmethode nur bedingt zur quantitativen Bestimmung von Wärmeübergangskoeffizienten einsetzbar, da vor allem in sehr kleinen Kanälen die Temperaturdifferenz zwischen der beheizten Wand und dem Fluid sehr klein ist und somit kleine Fehler bei der Bestimmung der Temperaturen große Auswirkung auf den Betrag des Wärmeübergangskoeffizienten, wenn dieser nach Gleichung (2.2) ermittelt wird, haben. Im Bereich des zweiphasigen Wärmeübergangs ist daher gegebenenfalls auf andere geeignete Messmethoden zurückzugreifen, um den Wärmeübergang zu charakterisieren. Soll trotzdem auf die Vorzüge der Infrarotthermografie nicht verzichtet werden, sollten die angegebenen Hinweise zur Verbesserung der Messgenauigkeit Berücksichtigung finden.

Auf Grund der beschriebenen Problematik bei der experimentellen Untersuchung des Wärmeübergangs im zweiphasigen Bereich wird vorgeschlagen, den Wärmeübergangskoeffizienten durch numerische Untersuchungen zu bestimmen. Modelle für den Bereich der einphasigen Strömung und für den Bereich des konvektiven Siedens werden im folgenden Abschnitt hergeleitet.

4 Modellierung der thermischen und der strömungstechnischen Vorgänge

Die Berechnung des Wärmetransportes von der beheizten Wand eines Kanals an das im Kanal strömende Fluid erfordert die Kenntnis des Strömungsfeldes und der Transporteigenschaften des Fluides. Es ist also ein Modell zu entwickeln, dass sowohl die Berechnung der Strömung als auch die Bestimmung des Temperaturfeldes und damit verbunden die Charakterisierung des Wärmetransportprozesses erlaubt. Da bei der Verdampfung einer Flüssigkeit sowohl Bereiche mit Einphasenströmung als auch Bereiche mit Zweiphasenströmung vorliegen, vgl. Abschnitt 2.2, ist es zweckmäßig, diese Bereiche gesondert zu betrachten. Eine Abgrenzung der Siedebereiche kann mit Hilfe der Ausführungen im Abschnitt 3.6.1 vorgenommen werden.

4.1 Analyse der Siedebereiche und Voraussetzungen für die Modellbildung

Da hier Kanäle mit sehr kleiner charakteristischer Länge betrachtet werden, ist zunächst zu klären, ob die Anwendung der Kontinuumstheorie gerechtfertigt ist. Dies kann mit Hilfe der Knudsen-Zahl Kn abgeschätzt werden. Nach [50] lassen sich mittels Kn-Zahl, die als das Verhältnis von freier Weglänge Λ zur charakteristischen Länge l_{ch} definiert ist, drei Bereiche abgrenzen. Weist die Kn-Zahl einen Wert von $Kn > 0{,}1$ auf, so haben die zwischenmolekularen Kräfte einen großen Einfluss auf die Transportprozesse. Die Berechnung muss hier unter Anwendung der Gleichungen der Molekulardynamik erfolgen (Boltzmanngleichung). Nimmt die Kn-Zahl einen Wert von $0{,}001 \le Kn \le 0{,}1$ an, liegt der Prozess im sogenannten Übergangsbereich. In diesem Bereich kann eine Berechnung mit Hilfe der Kontinuumstheorie erfolgen. Der immer noch starke Einfluss der zwischenmolekularen Kräfte wird über entsprechende Zusatzbedingungen, z.B. Slip-Flow-Condition, berücksichtigt. Für $Kn < 0{,}001$ ist die Kontinuumstheorie anwendbar, um die Transportvorgänge mit hinreichender Genauigkeit zu beschreiben.

Für Flüssigkeiten und Gase werden in [64] die folgenden Größenordnungen für die freie Weglänge der Moleküle angegeben: $\Lambda_{Gas} = 200\ \text{nm}$; $\Lambda_{Liquid} = 0{,}1 - 1\ \text{nm}$. Hinweise zur genaueren Ermittlung der freien Weglänge für einen konkreten Stoff lassen sich in [63] finden. Für eine erste Abschätzung sollen oben angegebene Werte genügen. Sieht man als Grenze für den Bereich der Mikrokanäle eine Größenordnung von $l_{ch} = 1\ \mu\text{m}$ an, so ergeben sich im Extremfall Knudsen-Zahlen von $Kn = 1 \cdot 10^{-3}$ für die Flüssigkeit bzw. $Kn = 2 \cdot 10^{-1}$ für die reine Gasströmung. Es kann also sogar in kleinsten Mikrokanälen bei Flüssigkeitsströmungen von der Anwendbarkeit der Kontinuumstheorie ausgegangen werden. Für Gasströmungen ist diese Annahme nicht gerechtfertigt, wie die Knudsen-Zahl zeigt. Für

die in dieser Arbeit betrachteten Kanäle ist die Kontinuumstheorie anwendbar. Bei einer charakteristischen Länge von 300 µm (kleinster untersuchter Kanal) ergibt sich eine Knudsen-Zahl von $Kn = 3 \cdot 10^{-6}$ für die Flüssigkeit und $Kn = 6{,}7 \cdot 10^{-4}$ für die Gasströmung. Treten während des Verdampfungsvorgangs sehr kleine Gasbereiche auf, ist in diesen die Kontinuumstheorie genaugenommen nicht gültig. Da allerdings in Strömungsrichtung durch die Beheizung des Kanals einerseits und durch den Druckabfall andererseits mit einer schnellen Zunahme des gasgefüllten Raumes zu rechnen ist, wird dieser Zustand, in dem kleine Gasbereiche vorliegen, nicht weiter betrachtet. Im Weiteren wird also von der Gültigkeit der Kontinuumstheorie im gesamten Kanal ausgegangen.

Nachdem die Anwendbarkeit der Kontinuumstheorie dargestellt wurde, ist nun zu klären, welches Strömungsregime, d. h. laminare oder turbulente Strömung im Kanal vorliegt. Für eine Abschätzung wird angenommen, dass sich das Fluid im Siedezustand bei einer Siedetemperatur von 130 °C befindet. Die entsprechenden Stoffwerte sind [3] entnommen. Bei den experimentellen Untersuchungen, in denen ein großer Dampfgehalt erreicht wurde, vgl. Abschnitt 3.6.4, konnten maximale Massenströme von 52 g/min für Wasser und 75 g/min für Heptan realisiert werden. Damit ergeben sich für die Kanäle mit einer Spaltweite von 300 µm Reynoldszahlen von $Re = 790$ für Wasser bzw. $Re = 1565$ für Heptan bei reiner Flüssigkeitsströmung und $Re = 12650$ für Wasser bzw. $Re = 28170$ für Heptan bei reiner Gasströmung. Bei reiner Flüssigkeitsströmung liegen die Reynoldszahlen deutlich unter der für Kanalströmungen bekannten kritischen Reynoldszahl von $Re = 2300$. Damit liegt laminare Strömung vor. Ist die Flüssigkei vollständig verdampft, d. h. es liegt reine Gasströmung vor, liegen die Reynoldszahlen über der kritischen Reynoldszahl. Die experimentellen Untersuchungen zeigen aber, dass auf Grund des hohen Druckverlustes, der bei sehr großen Dampfgehalten und hohen Strömungsgeschwindigkeiten im Kanal auftritt, die großen Massenströme zum Teil nicht realisiert werden konnten bzw. eine stark instationäre Arbeitsweise des Verdampfers auftrat. Weiterhin treten nach dem Erreichen des Dryout sehr große Heizflächentemperaturen auf, die bei weiterer Vergrößerung der Heizleistung zur Zerstörung des Kanals führen würden. Daher wurde eine vollständige Verdampfung im Experiment vermieden bzw. konnte nicht stabil gefahren werden. Folglich liegen die tatsächlich erreichten Reynoldszahlen unter den oben angegebenen für die reine Gasströmung.

Es ist weiterhin anzunehmen, dass die Entwicklung einer turbulenten Strömung sowie die Ausbildung von Turbulenzballen durch die geringen Dimensionen eines Mikrokanals stark eingeschränkt werden. Daher soll bei der folgenden Modellierung von laminarer Strömung ausgegangen werden. Ob Turbulenz auftritt und welchen Einfluss diese auf die Transportvorgänge in Mikrokanälen ausübt, soll nicht Gegenstand dieser Arbeit sein und ist weiteren Untersuchungen vorbehalten.

Wegen der kleinen geometrischen Dimensionen der Mikrokanäle und verhältnismäßig niedriger Re-Zahlen ist für die Berechnung der Transprozesse die Direkte Numerische Simulation (DNS) anwendbar. Sie erfordert keine besonderen Turbulenzmodelle, so dass mit ausreichend leistungsfähiger Rechentechnik das nachfolgend abgeleitete Modell die Basis für

entsprechende Berechnungen sein kann. Dies soll im Rahmen dieser Arbeit aber nicht weiter ausgeführt werden.

Neben der Entscheidung, ob eine laminare oder eine turbulente Strömung vorliegt, ist zu klären, wie die Flüssigkeits- und wie die Gasströmung zu behandeln sind. In Abhängigkeit davon sind unterschiedliche Gleichungssysteme bzw. Lösungsverfahren zu verwenden. Auf Grund der verhältnismäßig großen Kräfte, die erforderlich sind, um die Dichte einer Flüssigkeit zu verändern, gilt diese als inkompressibel. Gase sind kompressible Medien. Unter bestimmten Bedingungen kann aber auch eine Gasströmung als inkompressibel betrachtet werden. Voraussetzung dafür ist, dass im Untersuchungsgebiet nur verhältnismäßig kleine Druck- und Temperaturänderungen auftreten. Weiterhin ist für die Betrachtung der Gasströmung die Größenordnung der Mach-Zahl von entscheidender Bedeutung. Tabelle 4.1 zeigt unterschiedliche Geschwindigkeitsregime kompressibler Strömungen nach [36], deren Mach-Zahl-Bereiche und Beispiele für deren Auftreten.

Tabelle 4.1: Geschwindigkeitsregime kompressibler Strömungen

Bezeichnung	Machzahlbereich	Beispiel
Inkompressibel	$Ma < 0{,}3$	U-Boot
Subsonisch	$0{,}3 < Ma < 0{,}7$	Spitfire
Transsonisch	$0{,}7 < Ma < 1{,}2$	Boeing 777
Supersonisch	$1{,}2 < Ma < 5$	Concorde
Hypersonisch	$5 < Ma$	Space Shuttle

Eine nahezu isotherme Gasströmung kann in guter Näherung als inkompressibles Medium betrachtet werden, wenn die Mach-Zahl in der Größenordnung 0,3 oder kleiner liegt. Für die schon weiter oben zur Abschätzung des Auftretens von laminarer bzw. turbulenter Strömung herangezogenen Massenströme ergeben sich bei den genannten geometrischen Abmessungen der Kanäle Geschwindigkeiten von 0,3 m/s für flüssiges Wasser bzw. von 193 m/s für den Wasserdampf, wenn wiederum Siedezustand bei einer Temperatur von 130 °C vorausgesetzt wird. Bei dieser Temperatur und diesem Siededruck liegt die Schallgeschwindigkeit nach Wagner und Pruß [75] bei $c_{H_2O,l} = 1504$ m/s für die Flüssigkeit und bei $c_{H_2O,g} = 486$ m/s für den Dampf. Damit ergeben sich Mach-Zahlen von $Ma_{H_2O,l} = 0{,}0002$ bzw. $Ma_{H_2O,g} = 0{,}4$. Die Mach-Zahl des Wasserdampfes fällt entsprechend Tabelle 4.1 in den Bereich der subsonischen Strömung. Die in der Tabelle angegebenen Bereichsgrenzen nach [36] sind allerdings nicht als dogmatisch anzusehen und lassen einen gewissen Spielraum für die Ausdehnung der einzelnen Bereiche zu. Zumal die hohen Strömungsgeschwindigkeiten des Mediums nur bei vollständiger Verdampfung auftreten und bei geringeren Dampfgehalten sehr schnell abnehmen, ist es legitim, für den vorliegenden Anwendungsfall anzunehmen, dass sich auch die Gasströmung nahezu inkompressibel verhält. Für das Medium Heptan fällt die Mach-Zahl wesentlich unkritischer aus als für das Medium Wasser, da auf Grund der geringeren Dichteänderung beim Übergang von der flüssigen in die gasförmige Phase die

Strömung weniger beschleunigt wird und damit deutlich geringere Strömungsgeschwindigkeiten vorliegen ($v_{C_7H_{16},l} = 0{,}7$ m/s bzw. $v_{C_7H_{16},g} = 52$ m/s).

Aus dieser Abschätzung geht hervor, dass sowohl die flüssige als auch die gasförmige Phase als inkompressibles Medium betrachtet werden kann. Dies hat für das weitere Vorgehen den Vorteil, dass beide Phasen in gleicher Weise modelliert werden können und damit auch das gleiche numerische Lösungsverfahren angewendet werden kann.

Zusammengefasst lassen sich also die folgenden Modellannahmen postulieren:

1. Anwendung der Kontinuumsbetrachtung
2. Beschränkung auf laminaren Bereich weil $l_{ch} \downarrow$
3. Beschränkung auf inkompressible Strömung

Für die jeweils einphasige Flüssigkeits- bzw. Gasströmung kann unter den genannten Voraussetzungen ein Modell für die Strömung und den Wärmetransport abgeleitet werden. Für die Untersuchung des Verdampfungsvorgangs ist das zweiphasige Transportgeschehen zu berücksichtigen. Hierzu sind die einphasigen Transportgleichungen für jede Phase aufzustellen. Die Kopplung der Gas- bzw. Flüssigbereiche erfolgt an der Phasengrenze, wozu die Gleichungen durch entsprechende Übergangsterme erweitert werden. Hierauf wird im Abschnitt 4.3 näher eingegangen.

4.2 Das Modell für den einphasigen Kanalabschnitt

Für die Modellierung der Transportprozesse in Mikrokanälen werden die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie zugrunde gelegt. In der Literatur [6], [33], [49], [62], [68], [69] existieren eine Vielzahl von Darstellungen, in denen die Herleitung dieser Gleichungen ausführlich gezeigt wird. Daher sei hier nur eine kurze Darstellung gegeben. Betrachtet wird ein raumfestes Volumen als Bilanzraum, vgl. Bild 4.1. Aus dem Gesetz von der Erhaltung der Masse geht hervor, dass die Masse im Bilanzraum nur durch Zu- oder Abfluss von Masse über die Bilanzraumgrenze geändert werden kann, wenn dieser quell- und senkenfrei ist. Für das betrachtete Volumen gilt demnach

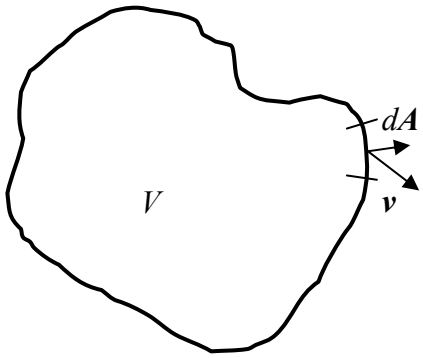


Bild 4.1: Bilanzraum

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV = -\int_A \rho \boldsymbol{v} d\boldsymbol{A}\,. \qquad (4.1)$$

Unter Anwendung des Integralsatzes von Gauß[7] [10], [25], kann Gleichung (4.1) in die differentielle Form überführt werden. Es ergibt sich die Gleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0 \qquad (4.2)$$

als differentielle Massenbilanz.

Neben der Massenerhaltung ist auch die Erfüllung des Impulserhaltungssatzes erforderlich. Es gilt, dass die Änderung des Impulses einer betrachteten Masse gleich der Summe der an dieser Masse angreifenden Kräfte ist. Als äußere Kräfte an einem Fluidelement treten Oberflächen- und Volumenkräfte auf. Es folgt

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dmv}{dt} = F_V + F_A \,. \qquad (4.3)$$

Die Änderung des Impulses lässt sich durch einen lokalen und einen konvektiven Anteil ausdrücken. Die Oberflächenkräfte resultieren aus den Druck- und den Zähigkeitskräften. Als Volumenkraft tritt in der Regel nur die Gravitation in Erscheinung. Weitere, auf das Volumen des Fluidelementes wirkende Kräfte, z.B. magnetische Kräfte sollen hier nicht berücksichtigt werden, da sie für den in dieser Arbeit untersuchten Anwendungsfall nicht relevant sind. Die Impulsbilanz in integraler Form lässt sich daher folgendermaßen darstellen:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \boldsymbol{v} dV + \int_A \boldsymbol{v}\rho \boldsymbol{v} d\boldsymbol{A} = -\int_A p d\boldsymbol{A} + \int_A \boldsymbol{\tau} d\boldsymbol{A} + \int_V \rho \boldsymbol{g} dV \,. \qquad (4.4)$$

Der Spannungstensor $\boldsymbol{\tau}$ setzt sich für Newtonsche Fluide folgendermaßen zusammen:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{v} + 2\eta \dfrac{\partial u}{\partial x} & \eta\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & \eta\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \eta\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{v} + 2\eta \dfrac{\partial v}{\partial y} & \eta\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \eta\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) & \eta\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) & \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{v} + 2\eta \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}. \qquad (4.5)$$

Unter Verwendung der Hypothese von Stokes, $3\lambda + 2\eta = 0$ bzw. $\lambda = -\frac{2}{3}\eta$, siehe [62], folgt

$$\boldsymbol{\tau} = \eta \begin{bmatrix} -\dfrac{2}{3}\operatorname{div} \boldsymbol{v} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} & -\dfrac{2}{3}\operatorname{div} \boldsymbol{v} + 2\dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z} & -\dfrac{2}{3}\operatorname{div} \boldsymbol{v} + 2\dfrac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}. \qquad (4.6)$$

---

[7] $\int_O \boldsymbol{v} dA = \int_G \nabla \boldsymbol{v} dV$

Eine erneute Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes führt auf $\int_A \boldsymbol{\tau} d\boldsymbol{A} = \int_V \nabla \boldsymbol{\tau} dV$ und somit auf

$$\nabla \boldsymbol{\tau} = \nabla \eta \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \frac{6}{3}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & -\frac{2}{3}\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \frac{6}{3}\frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} & -\frac{2}{3}\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \frac{6}{3}\frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}. \tag{4.7}$$

Der Ausdruck für den Spannungsterm kann unter den Bedingungen, dass die Strömung inkompressibel und die Viskosität konstant sind, weiter vereinfacht werden. Es folgt für den Spannungsterm $\nabla \boldsymbol{\tau}$:

$$\nabla \boldsymbol{\tau} = \eta \begin{bmatrix} 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial z}\operatorname{div}\boldsymbol{v} \end{bmatrix}, \tag{4.8}$$

$$\nabla \boldsymbol{\tau} = \eta \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ \left(\frac{\partial^2 v}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \end{bmatrix}, \tag{4.9}$$

$$\nabla \boldsymbol{\tau} = \eta \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ \left(\frac{\partial^2 v}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \end{bmatrix}. \tag{4.10}$$

Für eine inkompressible Strömung gilt $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$, so dass $\nabla \tau = \eta \Delta \boldsymbol{v}$ folgt.

Der Impulssatz in seiner differentiellen Form ergibt sich somit zu

$$\frac{\partial \rho \boldsymbol{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\boldsymbol{v} \rho \boldsymbol{v}) = -\operatorname{grad} p + \eta \Delta \boldsymbol{v} + f_V . \tag{4.11}$$

Neben der Erhaltung der Masse und des Impulses ist auch die Energieerhaltung zu gewährleisten. Die zeitliche Änderung der Energie eines betrachteten Fluidelementes wird

hervorgerufen durch die diesem pro Zeiteinheit zugeführten Wärmen bzw. an ihm verrichteten Arbeiten.

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q}_V + \dot{Q}_O + \dot{W} \tag{4.12}$$

Da die Terme für die mechanische Energie, d. h. die Änderung der kinetischen und der potentiellen Energie, die Arbeiten für die Verschiebung im Druck- und Schwerefeld sowie die Reibungsarbeit, gegenüber der Änderung der inneren Energie bzw. der Enthalpie und den zugeführten Wärmen verhältnismäßig gering ausfallen, werden diese vernachlässigt. Die Energiebilanz in integraler Form lautet

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho c T dV + \int_A \rho c T \boldsymbol{v} dA = \int_A \lambda \operatorname{grad} T dA + \int_V \dot{q}_V dV \tag{4.13}$$

bzw. nach Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes

$$\frac{\partial \rho c T}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\boldsymbol{v}\rho c T\right) = \operatorname{div} \lambda \operatorname{grad} T + \dot{q}_V \tag{4.14}$$

in der differentiellen Form.

Zum Schließen des Systems sind weitere Gleichungen erforderlich. Dies ist einerseits das Stoffgesetz, das eine Verbindung zwischen den Zustandsgrößen herstellt. Beispielhaft sei hier die Gleichung des idealen Gases

$$p/\rho = RT \tag{4.15}$$

genannt, die zur Bestimmung des Druckes herangezogen werden kann. Für ein inkompressibles Fluid kann eine derartige Beziehung nicht angegeben werden, da wegen der Bedingung der Inkompressibilität eine unendlich hohe Druckänderung erforderlich ist, um geringste Veränderungen in der Dichte hervorzurufen. Daher ist für die Bestimmung des Druckfeldes auf Lösungsverfahren zurückzugreifen, die speziell für inkompressible Strömungen entwickelt wurden. Ein solches Verfahren wird im Abschnitt 5 vorgestellt.

Andererseits ist für die Beschreibung der Transportprozesse mit Hilfe der angegebenen Gleichungen die Kenntnis diverser Materialeigenschaften wie Dichte $\rho(p,T)$, dynamische Viskosität $\eta(p,T)$, Wärmekapazität $c_p(p,T)$ und Wärmeleitfähigkeit $\lambda(p,T)$ erforderlich. Diese werden für die untersuchten Fluide nach [75] bzw. [3] bestimmt. Aus den in der genannten Literatur aufgeführten Stoffwerten werden zur Verwendung Korrelationen ermittelt. Auszugsweise sind Gleichungen für Wasser im Anhang F angegeben.

4.3 Modellvorstellungen für den zweiphasigen Kanalabschnitt

Wie schon im Abschnitt 2 beschrieben, handelt es sich beim Prozess des Strömungssiedens um eine Zweiphasenströmung, deren Strömungsformen sehr unterschiedlich ausfallen können. Den Prozess in seiner Gesamtheit zu beschreiben bzw. numerisch zu simulieren, ist

gegenwärtig nur mit sehr großem rechentechnischen Aufwand möglich. Aktuelle Arbeiten zeigen Berechnungen mit einer überschaubaren Anzahl von Bereichen mit unterschiedlichen Phasen. Beispielsweise zeigt Sabisch [59] ein Verfahren zur Simulation der Dynamik von Einzelblasen und Blasenschwärmen. Dabei wurde das Verhalten von maximal 5 Luftblasen in Wasser untersucht. Hierbei handelt es sich um eine Zweiphasenströmung ohne Phasenübergang.

Diese Arbeit befasst sich mit dem Wärmeübergang in Mikrokanälen. Bei der Verdampfung von Flüssigkeit im Kanal liegt eine Zweiphasenströmung mit Phasenübergang vor. Wie aus den experimentellen Ergebnissen, die im Abschnitt 3 dargestellt wurden, hervorgeht, liegt über weite Bereiche des Kanals, in denen die Verdampfung der Flüssigkeit erfolgt, konvektives Sieden vor. Die folgenden Ausführungen sollen daher auf den Bereich des konvektiven Siedens beschränkt bleiben.

4.3.1 Modellierung für den Bereich des konvektiven Siedens

An dieser Stelle soll ein Modell entworfen werden, das den Verdampfungsvorgang in vereinfachter Weise beschreibt.

Für den volumetrischen Dampfgehalt ε in einer Zweiphasenströmung gilt

$$\varepsilon = \frac{\dot{V}_v}{\dot{V}} = \frac{\dot{V}_v}{\dot{V}_v + \dot{V}_l} = \frac{\dot{M}_v}{\rho_v\left(\frac{\dot{M}_v}{\rho_v} + \frac{\dot{M}_l}{\rho_l}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{\rho_v}{\rho_l}\frac{\dot{M}_l}{\dot{M}_v}} = \frac{1}{1 + \frac{\rho_v}{\rho_l}\frac{1-\dot{x}}{\dot{x}}}. \qquad (4.16)$$

In Abhängigkeit vom Verhältnis der Dichte der flüssigen Phase zur Dichte der Dampfphase, welches beispielsweise bei Wasser im Druckbereich von 1-5 bar zwischen 1600 und 350 liegt, kann der volumetrische Dampfgehalt schon bei relativ kleinen Massendampfgehalten sehr große Werte annehmen. Bild 4.2 zeigt für ausgewählte Dichteverhältnisse diese

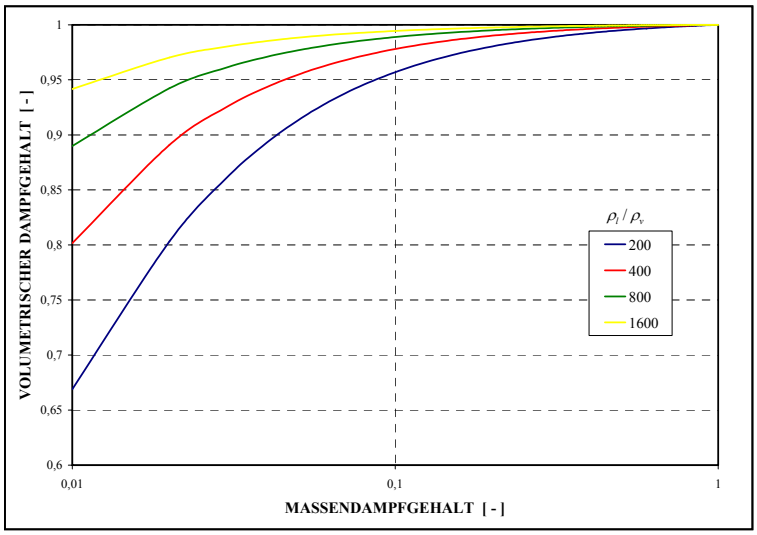


Bild 4.2: Abhängigkeit des volumetrischen Dampfgehaltes vom Massendampfgehalt und vom Dichteverhältnis der Flüssig-/Gasphase

Abhängigkeit.

Es ist für diese Dichteverhältnisse ersichtlich, dass schon bei einem Massendampfgehalt von 10% mehr als 95% des durchströmten Querschnittes mit Dampf gefüllt ist. Die sehr kleinen Querschnitte der Mikrokanäle sind also nahezu vollständig mit Dampf gefüllt. Verursacht durch die Oberflächenspannung wirken an gekrümmten Phasengrenzen Kräfte, die in das Innere einer Dampfblase gerichtet sind. Mit abnehmendem Blasenradius wachsen diese Kräfte an und wirken einem Blasenwachstum entgegen. Eine Neubildung von kleinen Blasen in der Flüssigkeit erfordert eine Überhitzung des Dampfes, vgl. Sato-Matsumura [60].

In Mikrokanälen ist es naheliegend, dass sich das gesamte Dampfvolumen in einem zusammenhängenden Bereich konzentriert. In senkrechten Kanälen strömt der Dampf auf Grund von Auftriebs-, Reibungs- und Oberflächenkräften im Kern der Strömung, während die Flüssigkeit an der Wand strömt. Von ähnlichen Modellvorstellungen gehen Wei und Tongze [76], [77] aus. Bild 4.3 verdeutlicht die Lage der dampf- und der flüssigkeitsgefüllten Bereiche des Querschnittes eines elektrisch beheizten Kanals, wie er im Abschnitt 3.1.1 beschrieben wurde. Es wird daher im Folgenden für die Berechnung des Wärmeübergangs im Bereich des konvektiven Siedens von der Modellvorstellung ausgegangen, dass beide Phasen getrennt voneinander in zwei großen Bereichen des Querschnittes vorliegen und eine Verdampfung bzw. eine Kondensation nur an der vorhandenen Phasengrenze auftritt. Es kommt im betrachteten Abschnitt des Kanals zu keiner Neubildung von Dampfblasen innerhalb des Flüssigkeitsbereiches.

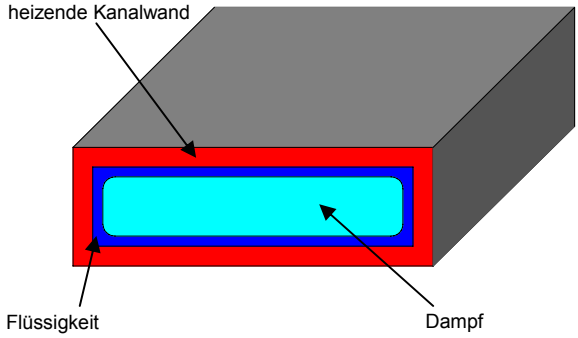


Bild 4.3: Position der Phasen im Bereich des konvektiven Siedens im vertikal durchströmten Kanal

Für beide Phasen, für den Dampf und für die Flüssigkeit, gelten die Masse-, die Impuls- und die Energieerhaltungsprinzipien. Wird ein Bereich der Strömung betrachtet, in dem keine Phasengrenze vorliegt, gelten für die entsprechende Phase k, die im Abschnitt 4.2 dargestellten Bilanzgleichungen

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho_k dV + \int_A \rho_k \boldsymbol{v}_k d\boldsymbol{A} = 0, \\
&\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho_k \boldsymbol{v}_k dV + \int_A \boldsymbol{v}_k \rho_k \boldsymbol{v}_k d\boldsymbol{A} = -\int_A p_k d\boldsymbol{A} + \int_A \boldsymbol{\tau}_k d\boldsymbol{A} + \int_V \rho_k \boldsymbol{g} dV, \\
&\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho_k c_k T_k dV + \int_A \rho_k c_k T_k \boldsymbol{v}_k dA = \int_A \lambda_k \operatorname{grad} T_k dA + \int_V \dot{q}_V dV
\end{aligned} \qquad (4.17)$$

der einphasigen Strömung. Im Bereich der Phasengrenze sind die Bilanzgleichungen durch entsprechende Terme zu erweitern.

4.3.2 Gleichungssystem für ein Gebiet mit Phasengrenze

Die Erweiterung der Erhaltungsgleichungen um die Übergangsterme an der Phasengrenze folgt dem Vorgehen in [37]. Klepp leitet ein Gleichungssystem zur Berechnung des Filmsiedens unter Vernachlässigung des Dissipationsterms her. Die Gleichungen gelten für Volumenzellen, die eine mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_i$ bewegte Phasengrenze enthalten. Die erweiterten Bilanzgleichungen basieren auf dem Transporttheorem für Zweiphasengebiete. Dieses wird beispielsweise in [61] behandelt. Um die bei der Verdampfung bzw. bei der Kondensation von der einen in die andere Phase übergehende Masse zu berücksichtigen, wird die Massenbilanz zu

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV + \int_A \rho \boldsymbol{v} d\boldsymbol{A} = \sum_{k=1,2} \rho_{ki} \boldsymbol{v}_i d\boldsymbol{A}_{ki} \qquad (4.18)$$

erweitert. Analog dazu ergibt sich die Impulsbilanz zu

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \boldsymbol{v} dV + \int_A \boldsymbol{v}\rho \boldsymbol{v} d\boldsymbol{A} = -\int_A p d\boldsymbol{A} + \int_A \boldsymbol{\tau} d\boldsymbol{A} + \int_V \rho \boldsymbol{g} dV + \int_{A_i} \sum_{k=1,2} \left(\rho_{ki} \boldsymbol{v}_{ki} \boldsymbol{v}_i\right) d\boldsymbol{A}_{ki} + \int_{A_i} \boldsymbol{F}_\sigma d\boldsymbol{A} \qquad (4.19)$$

mit Kraftwirkung durch Oberflächenspannung an der Phasengrenze

$$\int_{A_i} \boldsymbol{F}_\sigma d\boldsymbol{A} = \int_{A_i} 2\sigma\kappa_M d\boldsymbol{A} \,. \qquad (4.20)$$

Für die Energiebilanz folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho h dV + \int_A \rho h \boldsymbol{v} dA = \int_A \lambda \,\mathrm{grad}\, T dA + \int_V \dot{q}_V dV + \int_{A_i} \sum_{k=1,2} \rho_{ki} h_{ki} u_i d\boldsymbol{A}_{ki} \,. \qquad (4.21)$$

Zusätzlich gilt als Bedingung an der Phasengrenze

$$T_i = T_s\left(p_l\right)\left(1 + 2\kappa\sigma / \rho_V \Delta h_V\right). \qquad (4.22)$$

In [37] wird die Temperatur an der Phasengrenze T_i als Kriterium für die Lage der Phasengrenze verwendet. Beim Filmsieden liegt an der beheizten Wand überhitzter Dampf vor. Mit zunehmender Entfernung von der Wand nimmt die Temperatur des Dampfes bis zur Phasengrenztemperatur ab. Für die Temperatur der Flüssigkeit gilt $T_{Fl} <= T_i$. Damit kann die Trennung der Phasen eindeutig vorgenommen werden.

Das aufgestellte Gleichungssystem ist auch für die Berechnung des konvektiven Siedens in Mikrokanälen geeignet. Allerdings liegt im Fall des konvektiven Siedens an der beheizten Wand eine überhitzte Flüssigkeit vor. Die Verdampfung findet, wie im Abschnitt 4.3.1 ausgeführt, an der etwas von der Wand entfernt liegenden Phasengrenze statt. Die Phasengrenztemperatur ist also geringer als die Temperatur der Flüssigkeit an der beheizten

Wand. Da auch die Dampfphase überhitzt sein kann, ist es nicht möglich, mit Hilfe der Phasengrenztemperatur eine eindeutige Trennung der Phasen vorzunehmen. Es ist erforderlich, eine geeignete Methode zur Beschreibung der Phasengrenze zu finden.

Zur Behandlung von Strömungen mit einer Phasengrenze gibt die Literatur diverse Verfahren an. Ein Überblick wird z. B. in [59] und [71] gegeben. In Anlehnung an die genannte Literatur seien einige Methoden an dieser Stelle nur kurz aufgeführt. Im Wesentlichen wird zwischen front-capturing- und tracking-Methoden unterschieden.

Front-capturing-Methoden basieren auf einer Finiten-Volumen-Diskretisierung hoher Ordnung. Sie verwenden keine mathematischen Hilfsfunktionen zur Verfolgung der Phasengrenze. Diese wird durch das Verfahren aufgelöst.

Tracking-Methoden benutzen zusätzliche Elemente zur Verfolgung der Phasengrenze. Dies sind Marker-Partikel oder Farbfunktionen, die den Volumenanteil der einzelnen Phase in der Zelle angeben. Es wird zwischen surface-tracking-Methoden und volume-tracking-Methoden unterschieden. Surface-tracking-Methoden speichern zusätzliche Informationen über die Lage der Phasengrenze, beispielsweise ein mitbewegtes Gitter, das die Grenzfläche beschreibt. Dieser Methode ist die Level-Set-Methode verwandt. Volume-tracking-Methoden speichern Informationen über die Fluidverteilung im Gitter. Aus dieser Verteilung wird die Phasengrenze rekonstruiert. Zu dieser Kategorie zählen die Marker-and-Cell-Methode, die SLIC-Methode und die Volume-of-Fluid-Methode.

Eine Umsetzung einer dieser Methoden soll nicht Gegenstand dieser Arbeit sein. Daher wird ein stärker vereinfachtes Modell aufgestellt.

4.3.3 Ein vereinfachtes Modell für die zweiphasige Strömung

Es wird von der Vorstellung ausgegangen, dass der Dampf im Zentrum des Kanalquerschnittes strömt und die Flüssigkeit an der Kanalwand, wie im Abschnitt 4.3.1 ausgeführt. Begründet durch die spezielle Geometrie der in dieser Arbeit untersuchten Kanäle, d. h. ein großes Verhältnis von Breite zu Höhe des Kanalquerschnittes, wird davon ausgegangen, dass sich die Strömung im Kanal wie die Strömung zwischen parallelen Platten mit dem Abstand $s = 2R$ verhält. Der Einfluss der Wand auf die Strömung in der Nähe der Schmalseiten des Querschnittes wird vernachlässigt.

Mit dem Ziel, eine geeignete Startsituation für die Feldberechnung zu schaffen, wird zunächst davon ausgegangen, dass es keinen Phasenübergang zwischen den Phasen gibt und dass eine stationäre, hydrodynamisch ausgebildete Strömung vorliegt. Beide Phasen werden als inkompressibel angesehen. Es soll nur eine Axialkomponente der Geschwindigkeit auftreten. Unter diesen Voraussetzungen reduziert sich das System der Navier-Stokes-Gleichungen auf die Gleichung

$$\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} = C_2 . \qquad (4.23)$$

Diese Gleichung ist für die Bereiche der beiden Phasen zu lösen. Kann von konstanten Stoffwerten (η, ρ) ausgegangen werden, ist auch der Druckgradient eine Konstante. Die Integration der Gleichung führt auf

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} = C_2 y + C_1 \text{ und } v_z = \frac{C_2}{2} y^2 + C_1 y + C_0 . \qquad (4.24)$$

Sowohl für den Bereich des Flüssigkeitsfilms, als auch für den Dampfbereich sind die Integrationskonstanten zu bestimmen. Neben den Bedingungen:

- kein Phasenübergang,
- $\dot{x}(z) = \dot{x}_{th}(z)$, d. h. thermodynamisches Gleichgewicht, und
- konstanter Druck in einem durchströmten Querschnitt, d. h. gleicher Druckgradient in beiden Phasen

sind die in Tabelle 4.2 angegeben Randbedingungen zu erfüllen.

Tabelle 4.2: Randbedingungen für die Zweiphasenströmung zwischen parallelen Platten (vereinfacht)

Art	Bedingung
Symmetrie	$\frac{\partial v_{z,v}}{\partial y}(y = 0) = 0\ \mathrm{s}^{-1}$
Haftbedingung	$v_{z,l}(y = R) = 0\ \mathrm{m/s}$
Geschwindigkeiten an der Phasengrenze	$v_{z,l} = v_{z,v}$
Schubspannungen an der Phasengrenze	$\eta_v \frac{\partial v_{z,l}}{\partial y} = \eta_l \frac{\partial v_{z,v}}{\partial y}$

Es gilt für die Geschwindigkeiten der beiden Phasen

$$v_{z,v} = \frac{C_{2,v}}{2} y^2 + C_{1,v} y + C_{0,v} \text{ und } v_{z,l} = \frac{C_{2,l}}{2} y^2 + C_{1,l} y + C_{0,l} . \qquad (4.25)$$

Mit den oben genannten Voraussetzungen, den Randbedingungen aus Tabelle 4.2 sowie der Erfüllung der Massenbilanz für jede der beiden Phasen

$$\frac{\dot{M}_l}{\rho_l \Delta x} = \bar{v}_l (R - y_{Ph}) = \int_{y_{Ph}}^{R} v_l dy \quad \text{sowie} \quad \frac{\dot{M}_v}{\rho_v \Delta x} = \bar{v}_v y_{Ph} = \int_0^{y_{Ph}} v_v dy \qquad (4.26)$$

lässt sich die Lage der Phasengrenze über die Gleichung

$$(3 - 2B + A) y_{Ph}^3 - 3(A+1) R^2 y_{Ph} + 2AR^3 = 0 , \qquad (4.27)$$

mit $A = \frac{\rho_l}{\rho_v} \frac{\dot{M}_v}{\dot{M}_l}$ und $B = \frac{\eta_l}{\eta_v}$ bestimmen.

Die kubische Gleichung (4.27) zur Bestimmung des Ortes der Phasengrenze kann mit Hilfe der Cardanoschen[8] Formeln analytisch oder iterativ gelöst werden. Im allgemeinen Fall besitzt eine kubische Gleichung 3 Lösungen. Unter Verwendung physikalisch relevanter Parameter A und B existiert für die Gleichung (4.27) nur eine reele Lösung im Intervall $0 < y_{Ph} < R$, so dass zwei Lösungen ausgeschlossen werden können. Bei iterativer Lösung ist ein Startwert aus dem genannten Intervall, z.B. $y_{Ph}^0 = 0{,}5 \cdot R$ zu wählen, um die richtige Lösung zu erhalten. Mit bekannter Phasengrenze folgt für die Koeffizienten der Gleichung für die Axialgeschwindigkeit v_z der Flüssigkeit

$$C_{2,l} = \frac{6\dot{M}_l}{\rho_l \Delta x}\left(-2R^3 - y_{Ph}^3 + 3R^2 y_{Ph}\right)^{-1}, \quad C_{1,l} = 0\,, \qquad C_{0,l} = -\frac{C_{2,l}}{2}R^2 \tag{4.28}$$

und für die Gleichung der Dampfgeschwindigkeit

$$C_{2,v} = \frac{\eta_l}{\eta_v}C_{2,l}\,, \qquad C_{1,v} = 0\,, \qquad C_{0,v} = \frac{\dot{M}_v}{\rho_v \Delta x y_{Ph}} - \frac{C_{2,v}}{6}y_{Ph}^2\,. \tag{4.29}$$

Mit Vorgabe des Massenstromes pro Kanalbreite $\dot{M}/\Delta x$, des Dampfgehaltes $\dot{x}$, der Dichten ρ_l und ρ_v, der Viskositäten η_l und η_v sowie der halben Spalthöhe R ergeben sich die Geschwindigkeitsprofile der einzelnen Phasen, wie in Bild 4.4 qualitativ dargestellt.

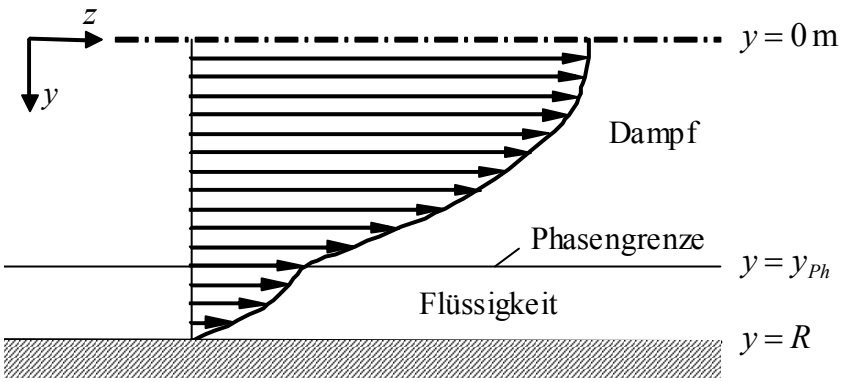


Bild 4.4: Geschwindigkeitsprofile in der Gas- und in der Flüssigphase

Wird nun ein beheizter Kanal betrachtet, in dem Flüssigkeit verdampft. Stromabwärts nimmt der Dampfgehalt $\dot{x}$ zu, wodurch die Lage der Phasengrenze und die Geschwindigkeitsprofile verändert werden. Die Lage der Phasengrenze kann für jeden Ort z mit Hilfe der Gleichung (4.27) bestimmt werden.

Ein ähnliches Vorgehen bei der Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes wird für Rohre in [78] dargestellt. Dort wird ein Wärmeübergangsmodell auf der Basis dieses Geschwindigkeitsfeldes abgeleitet.

[8] nach dem italienischen Mathematiker Geronimo Cardano

Demgegenüber soll daher im Folgenden versucht werden, ein Vorgehen für die Verbesserung des Geschwindigkeitsfeldes zu finden, das den Einfluss des Phasenübergangs berücksichtigt.

Es wird ein kurzer Kanalabschnitt betrachtet, in dem ein Phasenübergang stattfinden soll. Die Länge dieses Abschnittes wird in Abhängigkeit von der an der Wand aufgeprägten Wärmestromdichte so gewählt, dass die Änderungen des Dampfgehaltes und die Änderung der Lage der Phasengrenze klein sind. Unter dieser Voraussetzung kann der Verlauf der Phasengrenze im betrachteten Kanalabschnitt zwischen den am Ein- und Austritt mittels Gleichung (4.27) bestimmten Phasengrenzkoordinaten $y_{Ph,E}$ und $y_{Ph,A}$ linearisiert werden.

Mit der so festgelegten Phasengrenze wird das Lösungsgebiet in einen Dampf- und einen Flüssigkeitsbereich eingeteilt. In beiden Bereichen werden die Erhaltungsgleichungen für die einphasige Strömung, die im Abschnitt 4.2 hergeleitet wurden, gelöst. An der Phasengrenze werden zusätzliche Übergangsterme in die Erhaltungsgleichungen eingefügt. Diese Übergangsterme werden entsprechend den folgenden Modellannahmen festgelegt:

1. Im betrachteten Kanalabschnitt ist die Phasengrenze eben. Die Wirkung von Oberflächenspannungskräften wird daher vernachlässigt.
2. Die gesamte Gasphase liegt bei Siedetemperatur vor. Die Energiegleichung ist daher nur für die Flüssigkeit zu lösen.
3. Die gesamte Wärme, die in einem Wandabschnitt eingetragen wird, führt ortsnah zur Verdampfung von Flüssigkeit.

Die von der Flüssigkeit an den Dampf übergehende Massenstromdichte kann zu

$$\dot{m}_V = \frac{\dot{q}}{\Delta h_V\left(T_S(p)\right)} \frac{dA_{Heiz}}{dA_i} \qquad (4.30)$$

bestimmt werden. Die von der einen in die andere Phase übergehende Masse entpricht bei feststehender Phasengrenze dem konvektiven Strom über die Phasengrenzfläche. Zur Darstellung der konvektiven Terme wird daher die das betrachtete Volumen begrenzende Fläche aufgeteilt in die Phasengrenzfläche und restliche Fläche. Es gilt $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{A}_R$ Für die Massenbilanz der Phase k folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho_k dV + \int_{A_R} \rho_k \boldsymbol{v}_k d\boldsymbol{A} = \int_{A_i} \dot{m}_{V_k} dA_i \qquad (4.31)$$

mit $\dot{m}_{V,v} = \dot{m}_V$ und $\dot{m}_{V,l} = -\dot{m}_V$. In der Impulsbilanz ist der mit der Masse an der Phasengrenze übertretende Impuls zu berücksichtigen. Dieser ist gleich dem Produkt der verdampften Masse und der Geschwindigkeit der masseabgebenden Phase. Es gilt

$$\dot{\boldsymbol{I}}_V = \int_{A_i} \dot{m}_{V_k} \boldsymbol{v}_l dA_i \,. \qquad (4.32)$$

Die Impulsbilanz nimmt damit die Gestalt

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho_k \boldsymbol{v}_k dV + \int_{A_R} \boldsymbol{v}_k \rho_k \boldsymbol{v}_k d\boldsymbol{A} = -\int_A p_k d\boldsymbol{A} + \int_A \boldsymbol{\tau}_k d\boldsymbol{A} + \int_V \rho_k \boldsymbol{g} dV + \int_{A_i} \dot{m}_{V_k} \boldsymbol{v}_l dA_i \qquad (4.33)$$

an. Analog zum Impuls findet ein Enthalpietransport über die Phasengrenze statt. Dieser ist gleich dem Produkt aus übertretender Masse und der Summe der spezifischen Enthalpie der masseabgebenden Phase und der spezifischen Verdampfungsenthalpie. Den getroffenen Modellannahmen entsprechend ist die Energiebilanz nur für die Flüssigkeit zu lösen, sie lautet

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho_l c_l T_l dV + \int_{A_R} \rho_l c_l T_l \boldsymbol{v}_l d\boldsymbol{A} = \int_A \lambda_l \operatorname{grad} T_l d\boldsymbol{A} + \int_V \dot{q}_V dV + \int_{A_i} \dot{m}_{V_l} h'' dA_i \,. \qquad (4.34)$$

Mit den hier dargestellten Modellgleichungen können das Geschwindigkeitsfeld im Dampf und in der Flüssigkeit sowie das Temperaturfeld der Flüssigkeit berechnet werden. Dabei wird von einer gleichverteilten Dampfproduktion im Lösungsgebiet ausgegangen. Somit kann der Einfluss des Phasenübergangs auf den Wärmeübergang abgeschätzt werden.

Bisher ist die Phasengrenze feststehend. Ein nächster Schritt zur Verbesserung des Modells ist eine Korrektur der Phasengrenze mittels Überprüfung der globalen Bilanzen. Damit werden auch das Strömungs- und das Temperaturfeld verbessert, so dass abschließend ein Wärmeübergangskoeffizient entsprechend der Gleichung $\alpha = \dot{q}/(T_W - T_S)$ bestimmt werden kann.

Mit dem hier vorgeschlagenen Modell lassen sich Aussagen zum Einfluss der 2D-Formulierung der Erhaltungsgleichungen und des Phasenübergangs auf das Geschwindigkeitsfeld treffen. Es ermöglicht Variantenuntersuchungen durch die Änderung der Phasenaufteilung im Kanalquerschnitt. Weiterhin lassen sich Aussagen über den Verlauf der Geschwindigkeitsprofile treffen. Der Einfluss der Schleppwirkung des Dampfes auf die Flüssigphase sowie die Wirkung und der Wert der Querkomponente der Dampfgeschwindigkeit, die aus dem Phasenübergang resultiert, lassen sich abschätzen und hinsichtlich ihres Beitrags zum Wärmetransport bewerten.

Das in diesem Abschnitt vorgeschlagene Modell stellt somit eine Verbesserung gegenüber Modellen dar, die den Phasenübergang vernachlässigen [78], [16]. Es ermöglicht das Finden von Gültigkeitsbereichen für einfachere Modelle und gibt neue Informationen für die Bestimmung von Anpassparametern in diesen Modellen.

5 Numerisches Lösungsverfahren

Die im vorangegangenen Abschnitt hergeleiteten Gleichungssysteme sind nur unter starken Vereinfachungen analytisch lösbar. Daher soll an dieser Stelle ein numerisches Lösungsverfahren für die Gleichungssysteme der Bereiche der Ein- und der Zweiphasenströmung in Mikrokanälen entwickelt werden. Das Verfahren bzw. das daraus resultierende Programmsystem soll dabei den folgenden Anforderungen genügen:

- Es wird eine möglichst allgemeine Formulierung angestrebt, um das Verfahren bzw. das Programm für andere Anwendungsfälle nachnutzen zu können.
- Neben den in dieser Arbeit untersuchten Geometrien soll die Möglichkeit gegeben sein, auch kompliziertere Strukturen zu vernetzen und zu berechnen.
- Für die Untersuchung der zweiphasigen Strömung in Mikrokanälen soll die Berechnung auf Fälle mit ebener Phasengrenze beschränkt bleiben. Das Programm soll aber für spätere Untersuchungen ohne aufwändige Modifizierungen die Berechnung von gekrümmten Phasengrenzen und somit z.B. die Beobachtung des Transports und des Wachstums von Einzelblasen ermöglichen.
- Letztendlich soll das Programmsystem übersichtlich strukturiert sein und Erweiterungen möglichst einfach, unter Nachnutzung der vorhandenen Funktionalität und ohne große Eingriffe in diese, ermöglichen.

Die Umsetzung der Funktionalität wurde im Sinne der Wiederverwendung in Form einer Bibliothek ausgeführt. Diese Bibliothek erhielt den Namen „Chi++“[9]. Im Folgenden wird die Realisierung der gewünschten Eigenschaften des Programmes dargestellt.

5.1 Diskretisierung

Um den oben genannten Anforderungen gerecht zu werden, erfolgt eine Diskretisierung der Bilanzgleichungen unter Verwendung der Finiten Volumen Methode (FVM), wobei im Wesentlichen den Ausführungen von Ferziger und Peric [19], Fletscher[21], [22] bzw. von Nirschl [45], [46] gefolgt wird. Die Formulierung wird vollkommen implizit vorgenommen. Um das zu entwickelnde Verfahren möglichst allgemein zu halten, werden die Gleichungssysteme für konturangepasste Koordinaten (allgemeine orthogonale Koordinaten) aufgestellt und implementiert, um auch kompliziertere Geometrien als die in dieser Arbeit untersuchten vernetzen und berechnen zu können. Zur weiteren Unterstützung der Vernetzung aufwändiger Geometrien bzw. der Untersuchung von Partikel oder Blasenströmungen soll das

[9] Der Name „Chi++“ ist abgeleitet aus der Bezeichnung Chimära-Gitter-Technik und der objektorientierten Umsetzung in der Programmiersprache „C++“.

Programm die Chimära-Gittertechnik, von Chimäre[10], bei der unterschiedlich geartete Netze überlagert werden können, sowie verbundene Gitter ermöglichen. Der Datenaustausch zwischen den Netzen wird durch die Wahl entsprechender Randbedingungen realisiert. Dies sind die Interpolation der Feldgrößen bei der Chimära-Gittertechnik und die Gleichheit von Wert und Gradient der Zustandsgröße bei der Verwendung der verbundenen Gitter.

5.1.1 Diskretisierung der allgemeinen Transportgleichung

Die folgenden Ausführungen werden für die einphasige Strömung gemacht. Für die zweiphasige Strömung sind die Gleichungen durch die entprechenden Übergangsterme zu erweitern, die Vorgehensweise stellt sich aber analog zur einphasigen Strömung dar. Die im Abschnitt 4 abgeleiteten Gleichungen stellen ihrem Charakter nach Konvektions-Diffusions-Probleme dar. Sie können daher durch die allgemeine Transportgleichung[11] (Konvektions-Diffusionsgleichung) dargestellt werden.

$$\int_V \frac{\partial c_t \phi}{\partial t} dV + \int_A \boldsymbol{v} c_t \phi d\boldsymbol{A} = \int_A c_{diff} \nabla \phi d\boldsymbol{A} + \int_V S_\phi dV \,. \qquad (5.1)$$

Tabelle 5.1: Koeffizienten der allgemeinen Transportgleichung

	ϕ	c_t	c_{diff}	S
Massenbilanz	ρ	1	0	0
Impulsbilanz	$\boldsymbol{v}$	ρ	η	$\boldsymbol{g} - \nabla p$
Energiebilanz	T	ρc_p	λ	$\dot{q}_V$

Tabelle 5.1 zeigt die für die einzelnen Erhaltungsgleichungen in die allgemeine Transportgleichung einzusetzenden Feldgrößen, Koeffizienten bzw. Quellterme. Die Diskretisierung führt unter Verwendung eines kartesischen Koordinatensystems auf

$$\begin{aligned} &\int_V \frac{\partial c_t \phi_c}{\partial t} dV + \left(c_t \phi \boldsymbol{v} \boldsymbol{A}\right)_e - \left(c_t \phi \boldsymbol{v} \boldsymbol{A}\right)_w + \left(c_t \phi \boldsymbol{v} \boldsymbol{A}\right)_n - \left(c_t \phi \boldsymbol{v} \boldsymbol{A}\right)_s + \left(c_t \phi \boldsymbol{v} \boldsymbol{A}\right)_t - \left(c_t \phi \boldsymbol{v} \boldsymbol{A}\right)_b \\ &\quad = c_{diff,e} \frac{\phi_e - \phi_c}{\Delta x_e} A_e - c_{diff,w} \frac{\phi_c - \phi_w}{\Delta x_w} A_w \\ &\quad + c_{diff,n} \frac{\phi_n - \phi_c}{\Delta x_n} A_n - c_{diff,s} \frac{\phi_c - \phi_s}{\Delta x_s} A_s \\ &\quad + c_{diff,t} \frac{\phi_t - \phi_c}{\Delta x_t} A_t - c_{diff,b} \frac{\phi_c - \phi_b}{\Delta x_b} A_b + S_\phi V_c . \end{aligned} \qquad (5.2)$$

Die Diskretisierungen für die einzelnen Gleichungen sind in Anhang B dargestellt.

---

[10] Nach Bertelsmann Universal Lexikon; Bertelsmann Lexikon Verlag GmbH, Gütersloh, 1991; Chimäre: feuerschnaubendes Fabelwesen der griechischen Mythologie, vorn Löwe, in der Mitte Ziege, hinten Drache. Allgemein: Hirngespinst (Schimäre)

[11] Die allgemeine Transportgleichung wird in der Literatur häufig angegeben. Als beispielhafte Quelle sei hier [47] genannt.

Zur Darstellung der Gleichung in konturangepassten Koordinaten ist der Gradient im diffusiven Term der Gleichung (5.1) entsprechend zu ersetzen. Die Transformationsvorschrift für das Produkt aus Gradient und Fläche ist im Anhang C dargestellt. Unter Verwendung allgemeiner orthogonaler Koordinaten (ξ, η, ζ) lässt sich die diskretisierte Transportgleichung in der Form

$$\begin{aligned}\int_V \frac{\partial c_t \phi_c}{\partial t} dV &+ \left(c_t \phi \boldsymbol{v} \boldsymbol{A}\right)_e - \left(c_t \phi \boldsymbol{v} \boldsymbol{A}\right)_w + \left(c_t \phi \boldsymbol{v} \boldsymbol{A}\right)_n - \left(c_t \phi \boldsymbol{v} \boldsymbol{A}\right)_s + \left(c_t \phi \boldsymbol{v} \boldsymbol{A}\right)_t - \left(c_t \phi \boldsymbol{v} \boldsymbol{A}\right)_b \\ &= c_{diff,e}\left(\phi_e - \phi_c\right) C_{\xi,e} - c_{diff,w}\left(\phi_c - \phi_w\right) C_{\xi,w} \\ &+ c_{diff,n}\left(\phi_n - \phi_c\right) C_{\eta,n} - c_{diff,s}\left(\phi_c - \phi_s\right) C_{\eta,t} \\ &+ c_{diff,t}\left(\phi_t - \phi_c\right) C_{\zeta,t} - c_{diff,b}\left(\phi_c - \phi_b\right) C_{\zeta,b} \\ &+ S_\phi V_c\end{aligned} \qquad (5.3)$$

darstellen, vgl. [37], [45]. Die Transformationskoeffizienten C_ξ, C_η, C_ζ werden dabei durch die Gittergeometrie bestimmt.

Die Zeitintegration wird nach dem Euler-Rückwärts-Verfahren ausgeführt, es gilt

$$\int_V \frac{\partial c_t \phi}{\partial t} dV = \frac{c_t\left(\phi_c^{n+1} - \phi_c^n\right)}{\Delta t} V_c = f\left(\phi^{n+1}\right). \qquad (5.4)$$

Damit liegt ein voll implizites Verfahren vor.

Konvektions-Diffusions-Probleme, die konvektionsdominant sind, können bei Diskretisierung nach dem Verfahren der Zentralen Differenzen numerische Probleme aufwerfen. Für den Fall großer Zell-Peclet-Zahlen, $|Pe| > 2$, sind Maßnahmen zur Stabilisierung der Lösung vorzunehmen. Eine Möglichkeit ist die Reduzierung der Ortsschrittweiten, wodurch die Zell-Peclet-Zahl verringert wird. Diese Variante ist aber uneffektiv, da Speicherbedarf und Rechenzeit stark ansteigen.

In der Literatur werden andere Stabilisierungsmethoden dargestellt, die auch bei groben Gittern die Lösung der Konvektions-Diffusions-Probleme ermöglichen. In der Bibliothek „Chi++“ sind die in Tabelle 5.2 angegebenen Verfahren nach Patankar [51] realisiert.

Tabelle 5.2: Diskretisierungsschemen nach Patankar

Schema	$W\left(\lvert Pe\rvert\right)$
Zentrale Differenzen	$1 - 0{,}5\lvert Pe\rvert$
Upwind	1
Hybrid	$\max\left(0; 1 - 0{,}5\lvert Pe\rvert\right)$
Power Law	$\max\left[0; \left(1 - 0{,}1\lvert Pe\rvert^5\right)\right]$
Exponential	$\lvert Pe\rvert / \left(e^{\lvert Pe\rvert} - 1\right)$

Tabelle 5.2 gibt weiterhin die Bestimmungsgleichungen für die Wichtungsfaktoren an, die für die Diskretisierung verwendet werden. Im Anhang B ist die Umsetzung dieser

Stabilisierungsmethoden in der Bibliothek „Chi++“ dargestellt. Von den implementierten Schemen stellt das Exponential-Schema die exakte Lösung des eindimensionalen Konvektions-Diffusionsproblems dar. Die Berechnung der Exponentialfunktion ist allerdings sehr rechenzeitintensiv. Das Power Law – Schema kommt dieser exakten Lösung relativ nahe und ist daher ein guter Kompromiss zwischen Genauigkeit und Rechenzeitbedarf. Die drei anderen aufgeführten Schemen sind noch weniger rechenintensiv, allerdings nimmt auch die Qualität der Lösung bei gleichem Rechengitter ab. Beispielsweise neigt das Upwind-Verfahren zum sogenannten „Schmieren“ und das Verfahren der Zentralen Differenzen weist die schon genannten Probleme bei großen Peclet-Zahlen auf.

Die hier dargestellte Diskretisierung wird für die Massen- und die Impulsbilanz in leicht abgeänderter Form angewendet. Da in dieser Arbeit von nahezu inkompressiblen Fluiden ausgegangen wird, ist eine Lösung der Kontinuitätsgleichung mit der Dichte als Unbekannten nicht zielführend. In diesem Fall ist auch der Zusammenhang zwischen Druck und Dichte durch ein Stoffgesetz nicht gegeben. Im Folgenden wird die in „Chi++“ verwendete Methode zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen hergeleitet.

5.1.2 Kopplung von Druck- und Geschwindigkeitsfeld

Wie schon im Abschnitt 4 dargestellt, werden die Strömungsvorgänge in einem homogenen Newtonschen Fluid durch die Erhaltungsgleichungen für die Masse

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\int_A \rho \boldsymbol{v} d\boldsymbol{A} \qquad (5.5)$$

und für den Impuls

$$\int_V \frac{\partial (\rho \boldsymbol{v})}{\partial t} dV = -\int_A \boldsymbol{v}(\rho \boldsymbol{v}) d\boldsymbol{A} - \int_A p d\boldsymbol{A} + \int_A \boldsymbol{\tau} d\boldsymbol{A} + \int_V \boldsymbol{f}_V dV\,, \qquad (5.6)$$

die hier in integraler Form für ein finites Volumen angegeben sind, beschrieben. Zur numerischen Lösung werden die Zeitableitungen nach Euler diskretisiert, wie schon im Abschnitt 5.1.1 ausgeführt. Unter Verwendung einer voll impliziten Methode führt dies auf

$$\int_V \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} dV = -\int_A \rho^{n+1} \boldsymbol{v}^{n+1} d\boldsymbol{A} \qquad (5.7)$$

$$\int_V \frac{\rho^{n+1} \boldsymbol{v}^{n+1} - \rho^n \boldsymbol{v}^n}{\Delta t} dV = -\int_A \boldsymbol{v}^{n+1} \rho^{n+1} \boldsymbol{v}^{n+1} d\boldsymbol{A} - \int_A p^{n+1} d\boldsymbol{A} + \int_A \boldsymbol{\tau}^{n+1} d\boldsymbol{A} + \int_V \boldsymbol{f}_V^{n+1} dV\,. \qquad (5.8)$$

Da für den Druck keine Bilanzgleichung vorliegt, ist für schwach kompressible Fluide das Druckfeld nicht explizit bestimmbar. Die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes nach (5.8) unter Verwendung des bereits bekannten Druckfeldes führt im Allgemeinen auf eine Lösung, die nicht der Massenbilanz (5.7) genügt. Um den entstandenen Massendefekt zu korrigieren, ist das Druckfeld anzupassen. Hierzu findet eine so genannte Projektionsmethode, ähnlich der in [12],[13],[37],[45],[46] beschriebenen, Verwendung. Die zum Zeitpunkt $n+1$ zu

bestimmende Geschwindigkeit setzt sich demnach als Summe der aus der Impulsbilanz unter Verwendung eines alten Druckfeldes berechneten Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}^*$ und einer Korrekturgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}^c$ zusammen,

$$\boldsymbol{v}^{n+1} = \boldsymbol{v}^* + \boldsymbol{v}^c . \tag{5.9}$$

Damit lassen sich die Massenbilanz (5.7) und die Impulsbilanz (5.8) in der Form

$$\int_V \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} dV = -\int_A \rho^{n+1} \boldsymbol{v}^{*,n+1} d\boldsymbol{A} - \int_A \rho^{n+1} \boldsymbol{v}^{c,n+1} d\boldsymbol{A}, \tag{5.10}$$

$$\int_V \frac{\rho^{n+1} \boldsymbol{v}^{*,n+1} - \rho^n \boldsymbol{v}^n}{\Delta t} dV = -\int_A \boldsymbol{v}^{n+1} \rho^{n+1} \boldsymbol{v}^{n+1} d\boldsymbol{A} - \int_A p_{l-1}^{n+1} d\boldsymbol{A} + \int_A \boldsymbol{\tau}^{n+1} d\boldsymbol{A} + \int_V \boldsymbol{f}_V^{n+1} dV , \tag{5.11}$$

$$\int_V \frac{\rho^{n+1} \boldsymbol{v}^{c,n+1}}{\Delta t} dV = -\int_A \left(p^{n+1} - p_{l-1}^{n+1} \right) d\boldsymbol{A} . \tag{5.12}$$

schreiben. Weil die Diskretisierung des konvektiven Terms auf ein nichtlineares Gleichungssystem führt, wird eine Linearisierung vorgenommen, indem im konvektiven Term eine Geschwindigkeit zunächst durch die des vorherigen Zeitschrittes ersetzt wird. Um die implizit diskretisierte Impulsbilanz zu erfüllen, wird die Lösung über eine zusätzliche Iterationsschleife, in der die neu berechnete Geschwindigkeit einfließt, korrigiert. Da die Korrekturgeschwindigkeit nur von Druckkräften abhängt, die nicht in der Lage sind, das betrachtete Volumenelement in Rotation zu versetzen, ist auch diese rotationsfrei. Daher kann ein Geschwindigkeitspotential so definiert werden, dass

$$\boldsymbol{v}^c = -\nabla \Phi \tag{5.13}$$

gilt. Damit folgt

$$\int_V \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} dV = -\int_A \rho^{n+1} \boldsymbol{v}^{*,n+1} d\boldsymbol{A} + \int_A \rho^{n+1} \nabla \boldsymbol{\Phi}^{n+1} d\boldsymbol{A} , \tag{5.14}$$

$$\int_V \frac{\rho^{n+1} \boldsymbol{v}^{*,n+1} - \rho^n \boldsymbol{v}^n}{\Delta t} dV = -\int_A \boldsymbol{v}_{l-1}^{n+1} \rho^{n+1} \boldsymbol{v}^{n+1} d\boldsymbol{A} - \int_A p_{l-1}^{n+1} d\boldsymbol{A} + \int_A \boldsymbol{\tau}^{n+1} d\boldsymbol{A} + \int_V \boldsymbol{f}_V^{n+1} dV , \tag{5.15}$$

$$-\int_V \frac{\rho^{n+1} \nabla \boldsymbol{\Phi}^{n+1}}{\Delta t} dV = -\int_A \left(p^{n+1} - p_{l-1}^{n+1} \right) d\boldsymbol{A} . \tag{5.16}$$

Für ein schwach kompressibles Fluid kann die Gleichung wie folgt umgeformt werden

$$\int_V \frac{\rho^{n+1} \nabla \Phi^{n+1}}{\Delta t} dV = \frac{\rho^{n+1}}{\Delta t} \int_V \nabla \Phi^{n+1} dV = \frac{\rho^{n+1}}{\Delta t} \int_A \Phi^{n+1} d\boldsymbol{A} = \int_A \left(p^{n+1} - p_{l-1}^{n+1} \right) d\boldsymbol{A}, \tag{5.17}$$

und damit ergibt sich die Druckkorrekturgleichung zu

$$p^{n+1} = p_{l-1}^{n+1} + \frac{\rho^{n+1}}{\Delta t}\Phi^{n+1} \qquad (5.18)$$

und die Geschwindigkeitskorrekturgleichung zu

$$\boldsymbol{v}^{n+1} = \boldsymbol{v}^{*} - \nabla\Phi^{n+1}. \qquad (5.19)$$

Die Geschwindigkeit v^* wird nun aus Gleichung (5.15) und das Potential aus Gleichung (5.14) bestimmt. Im Anschluss werden der korrigierte Druck und die korrigierte Geschwindigkeit ermittelt. Das ganze System wird iterativ bis zum Erreichen des Konvergenzkriteriums gelöst.

5.1.3 Randbedingungen für die Feldgrößen

Zur Lösung des Differentialgleichungssystems für die Strömung sind für die einzelnen Zustandsgrößen Randbedingungen vorzugeben. Die an den unterschiedlichen Bereichen des Untersuchungsgebietes auftretenden physikalischen Bedingungen werden zweckmäßig durch die in Tabelle 5.3 angegebenen Bedingungen wiedergegeben.

Tabelle 5.3: Randbedingungen für die Zustandsgrößen

	Geschwindigkeit	Druck	Potential	Temperatur
Inflow	$\boldsymbol{v}_R = \boldsymbol{v}_{in}$	$\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right\|_R = 0$	$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right\|_R = 0$	$T_R = T_{in}$
Outflow	$\left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial n}\right\|_R = 0$	$p_R = p_{out}$	$\Phi_R = 0$	$\left.\frac{\partial T}{\partial n}\right\|_R = 0$
Wand	$\boldsymbol{v}_R = 0$	$\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right\|_R = 0$	$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right\|_R = 0$	$\frac{\partial T}{\partial n} = \dot{q}/\lambda$
Symmetry	$\left.\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial n}\right\|_R = 0$	$\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right\|_R = 0$	$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right\|_R = 0$	$\left.\frac{\partial T}{\partial n}\right\|_R = 0$

Die Randbedingungen für das Potential ergeben sich dabei zwangsläufig aus den Bestimmungsgleichungen für die Druck- bzw. die Geschwindigkeitskorrektur. Das heißt, ist der Druck bekannt, darf keine Druckkorrektur vorgenommen werden und somit muss das Potential den Wert 0 aufweisen. Analog dazu ist bei bekannter Geschwindigkeit der Wert der Korrekturgeschwindigkeit gleich 0, woraus folgt, dass der Anstieg der Potentialfunktion gleich 0 sein muss.

Problematisch stellt sich in Abhängigkeit vom Anwendungsfall die Ausström-Randbedingung dar. Sie gilt in der dargestellten Form nur für ein eingelaufenes Geschwindigkeitsprofil, d. h. in Richtung des Ausströmrandes ändert sich die Geschwindigkeit nicht mehr. Für stark konvektionsdominante Probleme ist die Ausströmbedingung aber von untergeordneter

Bedeutung, da sie kaum auf das Strömungsfeld im Berechnungsgebiet zurückwirkt, vgl. [51]. Auch die Ausströmbedingung für die Temperatur führt in Abhängigkeit vom Anwendungsfall auf Lösungen, die in der Nähe des Randes nicht gelten. Dies zeigt sich beispielsweise bei der Berechnung des Temperaturprofils der Strömung in einem beheizten Kanal. Hier knickt das Temperaturfeld ab, um der Bedingung $\partial T/\partial n = 0$ zu genügen. Eine physikalisch sinnvollere Lösung wird hier durch Setzen der Bedingung $\partial^2 T/\partial n^2 = 0$ bzw. durch Vergrößerung des Berechnungsgebietes erreicht, was allerdings mit erhöhtem Aufwand einhergeht.

Ein Setzen der Randbedingung $p_R = p_{out}$ ist für Kanäle mit eingelaufener Strömung zulässig, da hier der Druck über dem Querschnitt konstant ist. Im Allgemeinen wird der Druck allerdings nur für eine Zelle des Berechnungsgebietes fest vorgegeben, wodurch das Gesamtdruckniveau bestimmt ist. Eine Vorgabe für mehrere Zellen führt zur Überbestimmung und beeinflusst die Lösung und den Lösungsalgorithmus negativ.

5.2 Programmtechnische Umsetzung

Die programmtechnische Umsetzung des vorab beschriebenen Verfahrens wurde nicht zuletzt von dem Gedanken bestimmt, den zu entwickelnden Programmcode möglichst allgemein und freundlich für die Nachnutzung zu gestalten. Daher ist die grundlegende Funktionalität in Form einer Klassenbibliothek mit dem Namen „Chi++“ realisiert, die mit gringem Aufwand in andere Programme eingebunden werden kann. Für die Bearbeitung der Thematik dieser Arbeit wurde das Programm „Micha[12]“ erstellt, welches die Klassenbibliothek nutzt. „Micha“ stellt eine grafische Benutzeroberfläche (Anhang E, Bild 8.10) zur Verfügung, die die Beobachtung des Rechnungsfortschrittes an Hand der grafischen Darstellung der Feldgrößen ermöglicht. In der Umgebung des Programms „Micha“ wurde die Klassenbibliothek entwickelt und getestet.

Die Bibliothek „Chi++“ wurde in der Programmiersprache C++ implementiert. Dadurch sind die Vorteile einer objektorientierten Programmierung gegeben. Diese Art der Programmierung eröffnet Möglichkeiten zur übersichtlichen Konzeption von umfangreichen Algorithmen. Die Daten und die Funktionen zur Manipulation dieser Daten werden in Klassen gekapselt, was Zugriffsbeschränkungen auf die Daten ermöglicht und somit zur sicheren Funktionsweise des Programms beiträgt. Weiterhin ist die Sprache C++ eine Compilersprache, die nicht zuletzt auch durch ihre Effizienz bei der Quellcodeerstellung und die Abarbeitungsgeschwindigkeit des generierten Binärcodes besticht.

Eine wesentliche Eigenschaft einer objektorientierten Programmiersprache ist die Methode der Vererbung, d. h. von einer einmal erstellten Basisklasse lassen sich beliebig weitere Klassen ableiten, die die Daten und die Funktionalität der Basisklasse erben. In den abgeleiteten Klassen werden nur entsprechende Erweiterungen der Funktionalität implementiert. Die Methode der Vererbung trägt dadurch zu einer übersichtlichen Struktur

[12] von **Mi**cro**cha**nnel

und einer Verringerung der Zahl von Programmierfehlern bei, da bereits getesteter Code nicht verändert werden muss. Veränderungen, die an bereits vorhandenen Funktionen vorgenommen werden sollen, werden in der abgeleiteten Klasse überschrieben und nicht in der Basisklasse implementiert. Auf diese Weise bleibt die ursprüngliche Funktionalität erhalten und kann parallel zur neuen Implementation genutzt werden.

Die Vererbung ermöglicht so aber auch eine verhältnismäßig einfache Integration weiterer Funktionen und Methoden in das Programm. Ein Programmierer, der solche Erweiterungen vornehmen möchte, erstellt eine von einer vorhandenen Basisklasse abgeleitete Klasse, die die neue Funktionalität erhält. Für den Programmierer ist keine vollständige Kenntnis des Quellcodes der Basisklasse erforderlich. Damit wird eine Programmentwicklung im Team wesentlich unterstützt und der einzelne Programmierer entlastet. In der Bibliothek „Chi++“ wurden diese Vorteile bewusst eingesetzt und die Methode der Vererbung genutzt, um neue Modellgleichungen, Zustandsgrößen und Lösungsverfahren unter Beibehaltung der vorhandenen Funktionalität wie Speicherverwaltung, Geometrieerzeugung und vorhandene Modellgleichungen zu implementieren.

An dieser Stelle soll kurz auf ausgewählte Klassen der Bibliothek eingegangen werden.

5.2.1 Organisation eines ChiGrid

Den Kern der Klassenbibliothek „Chi++“ bildet die Klasse *ChiGrid*. Sie beinhaltet den Hauptteil der Funktionalität, die mit der Bibliothek zur Verfügung gestellt wird. Im Bild 5.1 ist die grundlegende Struktur der Klasse *ChiGrid* dargestellt.

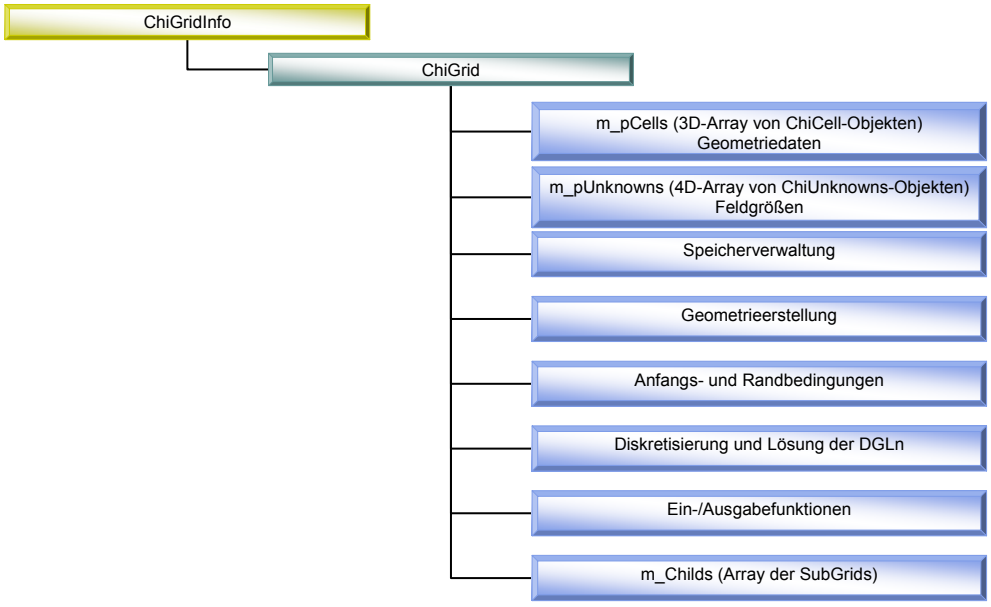


Bild 5.1: Struktur der ChiGrid Basisklasse

Die Klasse *ChiGrid* enthält die wesentlichen Speicherstrukturen sowohl für die Geometriedaten als auch für die Feldgrößen. Einige grundlegende Daten und Steuerparameter sind aus Gründen der Übersichtlichkeit in der Klasse *ChiGridInfo* untergebracht. Diese dient als Basisklasse für die Klasse *ChiGrid*, so dass die Daten auch in *ChiGrid* zur Verfügung

stehen. Da die einzige Aufgabe der Klasse *ChiGridInfo* in der Auslagerung von Daten aus der Klasse *ChiGrid* besteht, soll auf diese nicht weiter eingangen werden.

Wie aus Bild 5.1 hervorgeht, hat die Klasse *ChiGrid* neben der Kapselung der Speicherstrukturen die Aufgabe, die dynamische Speicherverwaltung zu organisieren und die erforderlichen geometrischen Größen zu berechnen. Weiterhin enthält die Klasse *ChiGrid* die Hauptzeitschleife sowie grundlegende Funktionen, die für die Diskretisierung und Lösung der Differentialgleichungen erforderlich sind. In dieser Klasse werden den Feldgrößen die Anfangsbedingungen zugewiesen und es erfolgt die Behandlung der Randbedingungen. Die Klasse ChiGrid stellt außerdem Funktionen für die Datenein- und -ausgabe per Datei bzw. manuell bereit.

Ein wesentlicher Bestandteil der Funktionalität der Klasse *ChiGrid* ist die Speicherverwaltung und Organisation von Kindgittern. Dazu enthält die Klasse *ChiGrid* ein Array mit Zeigern auf die jeweiligen Kindgitter. Jedes dieser Kindgitter ist wiederum eine Instanz der Klasse *ChiGrid* mit deren vollen Funktionalität. Insbesondere bedeutet dies, dass auch jedes Kindgitter wiederum Kindgitter besitzen kann und sich somit komplexe Gitterstrukturen modulartig zusammensetzen lassen. Da jedes Kindgitter eine eigene Zeitschleife besitzt, lassen sich für jedes Gitter unterschiedliche Schrittweiten für die Zeitintegration realisieren. Für die Synchronisation der einzelnen Kindgitter ist dann die jeweils übergeordnete *ChiGrid*-Instanz verantwortlich. Die einzelnen *ChiGrid*-Instanzen kennen ihre übergeordnete Instanz sowie die Gitter, mit denen Daten ausgetauscht werden müssen. Jedes Gitter kann dazu auf die entsprechenden Gitter zugreifen, um die erforderlichen Informationen von diesen zu erhalten.

Durch diese Gitter-Hierarchie wird in der Bibliothek die Chimära-Gittertechnik realisiert.

Zur numerischen Lösung der Erhaltungsgleichungen ist in der Bibliothek „Chi++“ die Finite

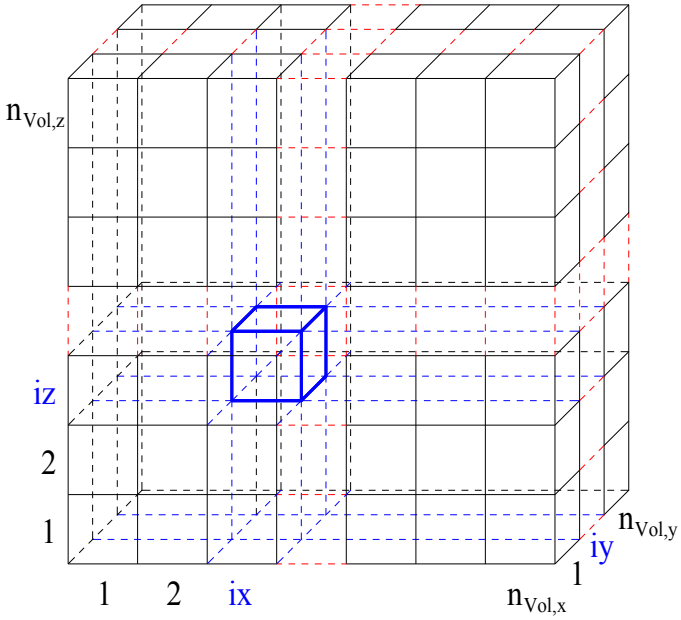


Bild 5.2: Vernetztes Untersuchungsgebiet

Volumen Methode implementiert. Das Untersuchungsgebiet, das durch ein *ChiGrid* abgebildet werden soll, wird dazu in Volumenzellen zerlegt. Diese Volumenzellen werden durch die Klasse *ChiCell* dargestellt. Ein *ChiGrid* enthält ein 3D-Array von *ChiCell*-Objekten. Auf die Klasse *ChiCell* wird im nächsten Abschnitt näher eingegangen. Bild 5.2 zeigt beispielhaft ein dreidimensionales Unterschuchungsgebiet, das mit einem *ChiGrid* vernetzt wurde. Mit der im ChiGrid enthaltenen Funktionalität ist es möglich, kartesische, zylindrische oder sphärische Netze zu generieren. Die Schrittweiten in den einzelnen Koordinatenrichtungen können dabei gestaffelt werden, um kritische Bereiche des Lösungsgebietes mit einer höheren Gitterauflösung zu vernetzen. Weiterhin besteht die Möglichkeit, Netze, die von externen Gittergeneratoren erzeugt werden, wie beispielsweise Generatoren, die von Klepp [37] und Wadewitz [74] verwendet wurden, über ein entsprechendes Dateiformat einzulesen. Für jede Koordinatenrichtung wird das Berechnungsgebiet in n Volumen unterteilt, wobei n für jede dieser Richtungen unabhängig gewählt werden kann. Für die laufenden Indizes gilt $1 \le ix \le n_{Vol,x}$, $1 \le iy \le n_{Vol,y}$ bzw. $1 \le iz \le n_{Vol,z}$. Die Indizes ix, iy und iz bezeichnen dabei die aktuell betrachtete Volumenzelle. x, y und z kennzeichnen in Anlehnung an das kartesische Koordinatensystem die drei Koordinatenrichtungen. Die Klasse *ChiGrid* ermöglicht aber nicht nur die Darstellung in kartesischen Koordinaten. Neben diesen ist auch eine Diskretisierung in Zylinder- und Kugelkoordinaten sowie in konturangepassten Koordinaten möglich. Die einzelnen Volumenzellen werden dann entsprechend verformt.

5.2.2 Die Volumenzelle (ChiCell und ChiUnknowns)

Für die Umsetzung der Finiten Volumen Methode in der Klasse *ChiGrid* wird das Untersuchungsgebiet in Hexaeder zerlegt. Die zu berechnenden Zustandsgrößen und die Geometriedaten werden dem entsprechenden Hexaeder zugeordnet. Ein solcher Hexaeder wird durch die Klasse *ChiCell* programmtechnisch abgebildet. Bild 5.3 zeigt einen Hexaeder vom Typ *ChiCell*. Zur Rekonstruktion der Geometrie der Zellen genügt es, nur einen

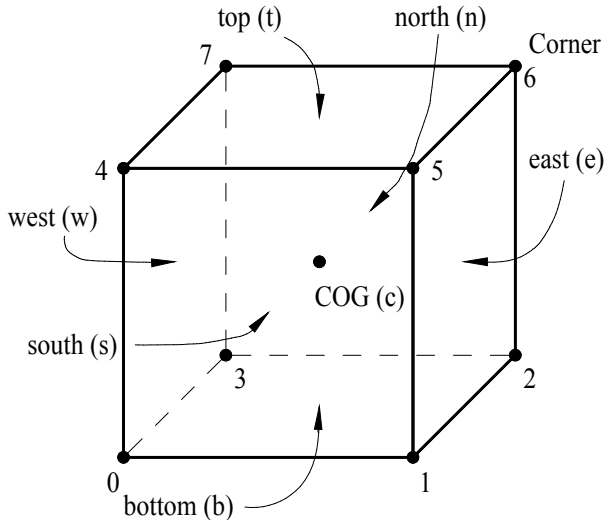


Bild 5.3: Volumenzelle

Eckpunkt pro Volumenzelle zu speichern. Die anderen Eckpunkte werden dann durch die benachbarten Zellen gespeichert. In der Klasse werden daher die Koordinaten des mit Corner (6) bezeichneten Punktes abgelegt. Die Zustandsgrößen Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$, Temperatur T, Druck p, Dichte ρ und das Geschwindigkeitspotential Φ werden für den Schwerpunkt, Center Of Gravity (COG) des Hexaeders berechnet. Daher wird dieser ebenfalls berechnet und in der Klasse *ChiCell* gespeichert. Die Unbekannten selbst werden aus Gründen der Speicherplatzeffizienz in einer Klasse namens *ChiUnknowns* abgelegt. Dies ist erforderlich, da für bestimmte Anwendungsfälle der Zugriff auf ein oder mehrere zurückliegende Zeitpunkte erforderlich sein kann, während die Geometrie zeitlich unveränderlich ist. Daher enthält die Klasse *ChiGrid* ein dreidimensionales Array von *ChiCell*-Objekten und ein vierdimensionales Array von *ChiUnknowns*-Objekten mit der Zeit als 4. Dimension. Die Begrenzungsflächen des Hexaeders werden durch die Himmelsrichtungen wie aus Bild 5.3 ersichtlich gekennzeichnet. Weiterhin werden das Volumen der Zelle, die Flächeninhalte und Flächenvektoren der Flächen e, n und t, die Abstände zwischen dem Schwerpunkt der aktuell betrachteten Zelle und den Schwerpunkten der in jeweils positiver Koordinatenrichtung angrenzenden Zellen sowie die Abstände vom Schwerpunkt zu den Flächen e, n und t berechnet und in *ChiCell* gespeichert.

Schlussendlich enthält die Klasse *ChiCell* Informationen über die Art der Zelle, z.B. ob es sich um eine innere oder eine Randzelle handelt, über die Randbedingungen (bei Randzellen), über die Quellterme und über den Stoff, aus dem die Zelle besteht.

5.2.3 Anwendung der Klassenbibliothek

An dieser Stelle soll gezeigt werden, wie die Bibliothek „Chi++“ verwendet werden kann. Dazu zeigt Bild 5.4 beispielhaft ein Programm, das ein Untersuchungsgebiet mit mehreren hierarchisch geschachtelten *ChiGrid*-Objekten vernetzt.

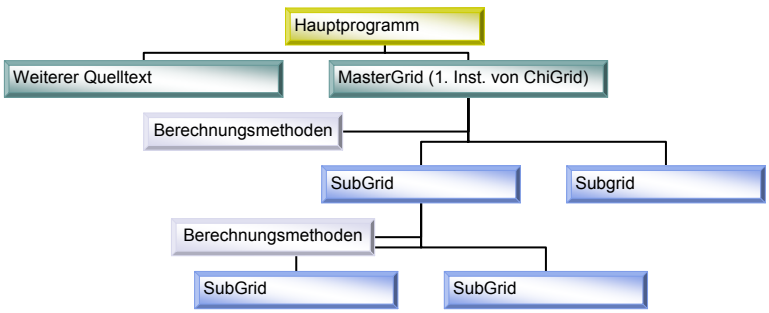


Bild 5.4: Struktur eines mit der Chimära-Gittertechnik vernetzten Lösungsgebietes

Das Hauptprogramm bindet die Bibliothek ein und initialisiert die erste Instanz einer ChiGrid-Klasse. Diese übernimmt die Initialisierung der Kindgitter und steuert global die Berechnung. Sowohl das Hauptgitter als auch alle Untergitter können verschiedene, von *ChiGrid* abgeleitete Klassen sein, die unterschiedliche Berechnungsmethoden verwenden.

Über derart abgeleitete Klassen, die in der Bibliothek „Chi++“ enthalten sind, gibt Bild 5.5 einen Überblick und zeigt deren Abhängigkeiten voneinander. Die Klassen zur Unterstützung freier Oberflächen sind gegenwärtig nicht implementiert und hier nur als Ausblick auf zukünftige Entwicklungen dargestellt. Die Trennung der einzelnen Klassen in der dargestellten Art und Weise bietet mehrere Vorteile. Einerseits kann in ein Programm, welches die Klassenbibliothek nutzt, nur genau die Funktionalität implementiert werden, die erforderlich ist, wodurch Speicherplatz und Rechenzeit gespart werden können. Andererseits trägt diese Trennung zur besseren Übersichtlichkeit des Programmcodes bei.

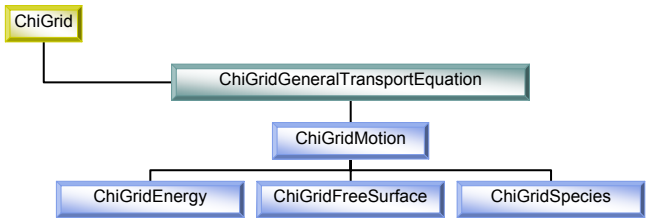


Bild 5.5: von ChiGrid abgeleitete Klassen

5.2.4 Implementierung der Randbedingungen

Zur Behandlung der Randbedingungen wurde die Klasse *ChiGrid* so konzipiert, dass neben den eigentlichen Volumenzellen, die das Untersuchungsgebiet darstellen, Randzellen (Ghostcells) generiert werden. Diese Zellen liegen auf den Rändern des *ChiGrids*. Daher werden für jede Koordinatenrichtung n+2 *ChiCell*-Objekte angelegt. Die Randzellen werden so generiert, dass ihr Volumen verschwindet, d. h. sie besitzen keine Ausdehnung normal zur entsprechenden Randfläche.

Im Bild 5.6 ist ein ChiGrid dargestellt, das die Speicherorte für die Feldgrößen zeigt. Wegen der besseren Übersichtlichkeit ist hier ein zweidimensionales Gitter dargestellt.

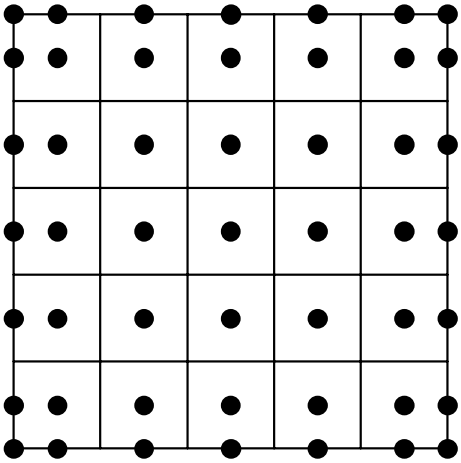


Bild 5.6: Variablenanordnung im Gitter

Dreidimensionale Gitter sind analog aufgebaut. Für die inneren Zellen ist der Schwerpunkt der Zelle (COG) der Speicherort für die Feldgrößen. Dies ist für die Randzellen prinzipiell ähnlich, wegen des fehlenden Volumens entarten die entsprechenden Schwerpunkte allerdings zu Flächen- oder Linienschwerpunkten, im Extremfall schrumpft die gesamte Randzelle zu einem einzigen Raumpunkt zusammen.

In Abhängigkeit von der Art der vorliegenden Randbedingung sind die Randzellen mit Werten zu belegen bzw. entsprechende Werte in die Koeffizientenmatrix des zu lösenden Gleichungssystems einzuspeisen. Die folgenden beiden Abbildungen zeigen jeweils eine Randzelle und zwei benachbarte Volumenzellen im Inneren des Berechnungsgebietes.

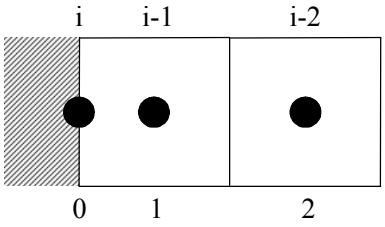


Bild 5.7: Randbedingung links

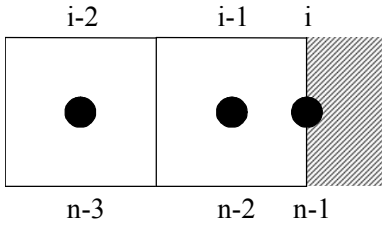


Bild 5.8: Randbedingung rechts

Bild 5.7 stellt dabei Volumenzellen am linken Rand einer bestimmten Koordinatenrichtung und Bild 5.8 analog die Volumenzellen am rechten Rand dar. Zur Vereinheitlichung der folgenden Ausführungen kennzeichnet der Index i die Randzelle unabhängig vom Zählindex der entsprechenden Koordinatenrichtung. Der Index i entsprich dem Zählindex 0 am linken Rand und dem Zählindex n-1 am rechten Rand. Die entsprechende Bezeichnung für die Rand- und deren Nachbarzellen sowie die Zuordnung zum Zählindex ist aus den Abbildungen oben zu entnehmen. Die Variable u_i bezeichnet somit die Unbekannte auf dem Rand, die Variable u_{i-1} kennzeichnet den 1. Nachbarn der Randzelle im Berechnungsgebiet und die Variable u_{i-2} den zweiten Nachbarn in der entsprechenden Koordinatenrichtung. Die unterschiedlichen Randbedingungen die im ChiGrid verfügbar sind, sind folgendermaßen implementiert.

5.2.4.1 Randbedingung 1. Art (Dirichlet)

Als Dirichlet´sche Randbedingung wird die Randbedingung bezeichnet, bei der für die Unbekannte auf dem Rand für einen bestimmten Zeitpunkt

$$u\big|_R = g\left(t, \boldsymbol{x}_R\right) \tag{5.20}$$

gilt. Die Funktion g ist dabei lediglich von der Zeit und vom Ort, dem Rand, abhängig. Als Beispiel sei hier als Randbedingung für die Energiegleichung die Vorgabe der Temperatur auf dem Rand des Berechnungsgebietes genannt. Es gilt

$$T_R = T\left(t, \boldsymbol{x}_R\right). \tag{5.21}$$

Allgemein gilt für die Unbekannte u_i

$$[1]u_i = [u_R], \tag{5.22}$$

wobei die in den eckigen Klammern angegebenen Terme die Werte bezeichnen, die an die entsprechende Position für die Unbekannte in die Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A}$ des Gleichungssystems $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{u}$ bzw. in den Vektor der rechten Seite $\boldsymbol{b}$ einzuspeisen sind.

5.2.4.2 Randbedingung 2. Art (Neumann)

Als Neumann´sche Randbedingung wird die Randbedingung bezeichnet, bei der der Anstieg der Unbekannten normal zum Rand als eine Funktion des Ortes und der Zeit gegeben ist. Es gilt

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_R = g\left(t, \boldsymbol{x}_R\right). \tag{5.23}$$

Beispielhaft folgt für eine gegebene Wärmestromdichte am Rand

$$\left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_R = \dot{q}\left(t, \boldsymbol{x}_R\right)/\lambda\,. \tag{5.24}$$

Nach Diskretisierung und Sortierung nach den einzelnen Unbekannten folgt

$$[1]u_i + [-1]u_{i-1} = \left[+\frac{\dot{q}}{\lambda}\left(x_i - x_{i-1}\right)\right], \tag{5.25}$$

wobei die eckigen Klammern wiederum die, in das lineare Gleichungssystem einzuspeisenden Werte markieren.

5.2.4.3 Randbedingung 3. Art (Cauchy)

Bei der Randbedingung 3. Art, die auch als Randbedingung nach Cauchy bezeichnet wird, ist der Anstieg der Unbekannten am Rand als eine Funktion des Ortes, der Zeit und der Unbekannten am Rand selbst gegeben. Es gilt

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_R = g\left(t, \boldsymbol{x}, u\right). \tag{5.26}$$

Hier kann wieder ein Beispiel für die Energiegleichung herangezogen werden. Für den Wärmeübergang zwischen einer Wand und einem angrenzenden Fluid gilt

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_R = \dot{\boldsymbol{q}}\left(t, \boldsymbol{x}, T_R\right)/\lambda = \frac{\alpha}{\lambda}\left(T_R - T_U\right). \tag{5.27}$$

Wird diese Beziehung diskretisiert und nach den Unbekannten sowie der rechten Seite sortiert, ergibt sich

$$\left[1 + \frac{\alpha}{\lambda}\left(x_i - x_{i-1}\right)\right]u_i + [-1]u_{i-1} = \left[+\frac{\alpha}{\lambda}\left(x_i - x_{i-1}\right)T_U\right] \tag{5.28}$$

mit den durch die eckigen Klammern markierten Elementen der Koeffizientenmatrix bzw. der rechten Seite des Gleichungssystems.

5.2.4.4 Verschwindende 2. Ableitung

Als eine weitere Randbedingung ist die Bedingung einer verschwindenden zweiten Ableitung der Unbekannten in der Umgebung des Randes implementiert. Diese Randbedingung wurde implementiert, da für bestimmte Anwendungsfälle, vor allem bei der Verwendung als Randbedingung für den Druck am Einströmrand, bessere Ergebnisse erzielt werden können als bei Verwendung einer Randbedingung 2. Art mit einem Anstieg der Unbekannten von 0. Es gilt

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right|_R = 0 \qquad (5.29)$$

Nach der Diskretisierung und der Sortierung nach den Unbekannten ergeben sich mit

$$\left[\frac{1}{x_i - x_{i-1}}\right] u_i + \left[-\frac{1}{x_i - x_{i-1}} - \frac{1}{x_{i-1} - x_{i-2}}\right] u_{i-1} + \left[\frac{1}{x_{i-1} - x_{i-2}}\right] u_{i-2} = [0] \qquad (5.30)$$

die in die Koeffizientenmatrix und in den Vektor der rechten Seite des Gleichungssystems einzuspeisenden Werte.

5.2.4.5 Chimära-Gitter

Um den Datenaustausch zwischen den überlagerten Gittern zu realisieren, werden die Unbekannten auf dem Rand des aktuell betrachteten Gitters mittels trilinearer Interpolation bestimmt. Die entsprechende Interpolationsvorschrift ist im Anhang D angegeben. Im Anschluss daran ist die Behandlung der Randbedingung identisch mit einer Randbedingung 1. Art und wird wie im Abschitt 5.2.4.1 behandelt. Da sich die Gitter gegenseitig beeinflussen, ändern sich die Randbedingungen innerhalb eines Zeitschrittes. Die Lösung wird durch eine externe Iterationsschleife über alle Gitter angenähert. Wird bis zum Erreichen eines stationären Zustandes gerechnet und werden zeitgenaue Lösungen für Zwischenschritte nicht benötigt, muss die Iteration zur Anpassung der Randbedingungen innerhalb eines Zeitschrittes nicht bis zur vollständigen Konvergenz ausgeführt werden. Dadurch lässt sich die erforderliche Rechenzeit erheblich reduzieren.

Die verwendete Variante zur Realisierung der Randbedingungen, bei der für die Randzellen ebenfalls Einträge in das Gleichungssystem zur Lösung der Differentialgleichungen vorgenommen werden, stellt nicht die effektivste Variante hinsichtlich Rechenzeit und Speicherbedarf bei der Lösung des Gleichungssystems dar, da die Anzahl der Unbekannten erhöht wird. Eine Aufbereitung der diskretisierten Gleichungen derart, dass die Unbekannte der Randzelle verschwindet und die Information in der rechten Seite des Gleichungssystems steckt, führt zu effizienteren Lösungsalgorithmen. Die vorgestellte Variante weist aber Vorteile hinsichtlich der programmtechnischen Aufbereitung und der Übersichtlichkeit auf.

Da die Bibliothek „Chi++“ auch hinsichtlich Nachnutzung und Erweiterung konzipiert wurde, stand die Übersichtlichkeit im Vordergrund.

5.3 Lösung der linearen Gleichungssysteme

Bei der impliziten Diskretisierung der Erhaltungsgleichungen entstehen große lineare Gleichungssysteme der Form

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\,. \tag{5.31}$$

Darin bezeichnet $\boldsymbol{A}$ die Koeffizientenmatrix, $\boldsymbol{x}$ den Vektor der Unbekannten und $\boldsymbol{b}$ den Vektor der rechten Seite des Systems. Trotz der rasanten Entwicklung der Rechentechnik ist eine effiziente Lösung derartiger Gleichungssysteme unumgänglich, da die zu berechnenden Problemstellungen ebenfalls komplexer werden. Ein Überblick über eine Reihe von Algorithmen sowie Hinweise zur Implementierung sind in [41] und [67] zu finden. Die entstehende Koeffizientenmatrix ist in der Regel schwach besetzt. Eine effektive Lösungsmethode sollte diese Eigenschaft hinsichtlich hoher Genauigkeit und Abarbeitungsgeschwindigkeit der Berechnung sowie Minimierung des Speicherplatzbedarfes ausnutzen.

In der Programmbibliothek „Chi++“ wurden diverse iterative Löser implementiert, die in das objektorientierte Konzept eingepasst sind. Dies sind im Wesentlichen das SOR, JACOBI, BICG, CGS, BICGSTAB, die Implementation wurde in Anlehnung an Meister [41] vorgenommen. Weiterhin wurde eine Schnittstelle zum Programmpacket LASPACK von Skalicky [65] geschaffen, so dass weitere Löser zur Verfügung stehen.

Eine wesentliche Verkürzung der für die Berechnung der Anwendungfälle dieser Arbeit erforderlichen Rechenzeit kann durch die Verwendung moderner Multigrid-Löser und durch die Verwendung von Algorithmen, die einen Einsatz von Parallelrechnern ermöglichen, erreicht werden. Diese Löser sind insbesondere zu empfehlen, wenn für die Berechnung eine hohe Gitterauflösung erforderlich ist, wie dies bei Anwendung der DNS zur Berechnung der Turbulenz bzw. bei der Vernetzung aufwändiger Geometrien der Fall ist. Beispielhaft sei hier die Untersuchung von Rauigkeitseinflüssen genannt. Soll die Oberflächenstruktur einer Kanalwand durch das Gitter erfasst werden, ist eine sehr feine Gitterauflösung erforderlich.

Der Einsatz derartiger Löser ist nicht Gegenstand dieser Arbeit. Für eine Weiterentwicklung der Programmbibliothek „Chi++“ ist die Implementation modernerer Algorithmen empfehlenswert, da dadurch die Einsatzmöglichkeiten der Bibliothek deutlich erweitert würden.

6 Berechnung des Wärmeübergangs in Mikrokanälen

6.1 Test des Berechnungsalgorithmus

6.1.1 Hydrodynamische Einlaufstrecke

Zum Test des numerischen Algorithmus soll an dieser Stelle ein Vergleich zwischen der numerischen und einer analytischen Lösung angegeben werden. Da die Strömung in Kanälen Schwerpunkt dieser Arbeit ist, wird als Testbeispiel die hydrodynamische Einlaufströmung gewählt. Da die untersuchten Kanäle ein sehr großes Verhältnis von Kanalbreite zu Kanalhöhe aufweisen, bietet sich die Berechnung der Strömung zwischen parallelen Platten an.

Für die hydrodynamisch ausgebildete Strömung unter der Voraussetzung einer stationären, eindimensionalen und inkompressiblen Strömung, bei der nur die z-Komponente der Geschwindigkeit auftritt, reduziert sich das System der Navier-Stokes-Gleichungen auf die Gleichung

$$\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} = C_2 \,. \tag{6.1}$$

Kann von konstanten Stoffwerten (η, ρ) ausgegangen werden, ist auch der Druckgradient eine Konstante. Die Integration der Gleichung führt auf

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} = C_2 y + C_1 \text{ und } v_z = \frac{C_2}{2} y^2 + C_1 y + C_0 \,. \tag{6.2}$$

Zur Bestimmung der beiden Integrationskonstanten C_1 und C_2 sind die in Tabelle 6.1 angegebenen Randbedingungen heranzuziehen. R bezeichnet dabei den halben Plattenabstand.

Tabelle 6.1: Randbedingungen für die einphasige Strömung zwischen parallelen Platten

Art	Bedingung
Symmetrie	$\frac{\partial v_z}{\partial y}(y=0) = 0\ \mathrm{s}^{-1}$
Haftbedingung	$v_z(y=R) = 0\ \mathrm{m/s}$

Aus der Symmetriebedingung folgt $C_1 = 0\ \mathrm{s}^{-1}$ und aus der Haftbedingung $C_0 = -\frac{C_2}{2} R^2$. Das Geschwindigkeitsprofil wird also durch die Gleichung

$$v_z(y) = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial z}\left(y^2 - R^2\right) = -\frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial z} R^2 \left[1 - \left(\frac{y}{R}\right)^2\right] \tag{6.3}$$

beschrieben. Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit kann berechnet werden zu

$$\begin{aligned}\bar{v}_z &= \frac{1}{R}\int_0^R v_z(y)dy = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial z}\frac{1}{R}\int_0^R\left(y^2 - R^2\right)dy \\ &= \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial z}\frac{1}{R}\left[\frac{1}{3}y^3 - R^2 y\right]_0^R = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial z}\frac{1}{R}\left[\frac{1}{3}R^3 - R^3\right] = -\frac{1}{3\eta}\frac{\partial p}{\partial z}R^2.\end{aligned} \qquad (6.4)$$

Da an der Stelle $y = 0\,\mathrm{m}$, verursacht durch die Symmetriebedingung der Anstieg der Geschwindigkeit $\frac{\partial v_z}{\partial y} = 0\,\mathrm{s}^{-1}$ ist, ist an dieser Stelle auch die Maximalgeschwindigkeit

$$v_{z,\max} = v_z(y=0) = -\frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial z}R^2 = 1{,}5\cdot\bar{v}_z \qquad (6.5)$$

zu finden.

Für die numerische Bestimmung der Einlaufströmung wird ein Berechnungsgebiet vernetzt, das durch den Eintrittsrand, den Austrittsrand, die Plattenwand und die Symmetrielinie begrenzt ist. Das Gebiet wurde mit einer Auflösung von 40x200 Volumenzellen in y- bzw. in z-Richtung vernetzt. Am Eintrittsrand wird die Geschwindigkeit $v_{z,0} = \bar{v}_z$ vorgegeben. Im Bild 6.1 sind die sich in Abhängigkeit von der axialen Koordinate z entwickelnden Geschwindigkeitsprofile dargestellt. Es zeigt sich am Ende des Kanals eine gute Annäherung an das Profil der analytischen Lösung (6.3).

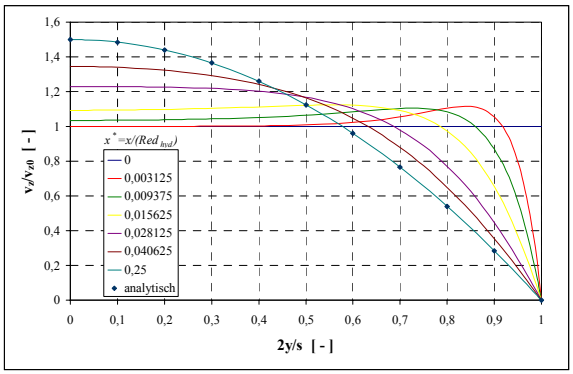


Bild 6.1: axiale Geschwindigkeit im Einlauf

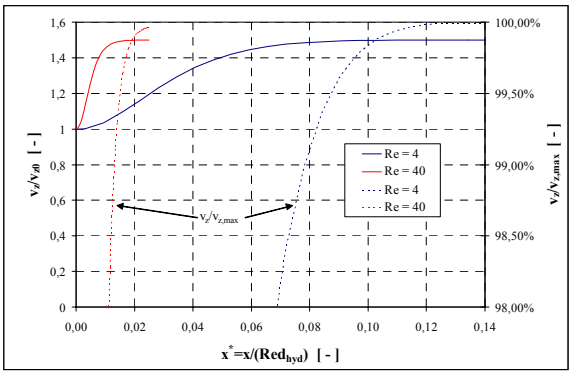


Bild 6.2: axiale Geschwindigkeit im Einlauf

Der hydrodynamische Einlauf ist beendet, wenn die Geschwindigkeit in der Achse 99% der Geschwindigkeit des entwickelten Profils in der Achse erreicht hat. Chen [42] gibt dafür die Einlauflänge in dimensionsloser Form zu

$$\frac{l_{hyd}}{Red_{hyd}} = \left[0{,}011 + \frac{0{,}315}{Re\left(1 + 0{,}0175\cdot Re\right)}\right] \qquad (6.6)$$

an. Für die hier angegebenen Re-Zahlen folgen dimensionslose Einlauflängen von 0,084 ($Re = 4$) bzw. 0,015 ($Re = 40$). Auch mit diesen stimmt die numerische Rechnung gut überein, wie Bild 6.2 zeigt.

6.1.2 Wärmeübergang im Bereich des thermischen Einlaufes

Es soll nun der Wärmeübergang zwischen parallelen Platten für eine hydrodynamisch ausgebildete Strömung für den Fall des thermischen Einlaufes berechnet werden. Bild 6.3 zeigt für die Beheizung mit einer konstanten Wärmestromdichte die numerisch berechnete Nu-Zahl über der dimensionslosen Länge $z^* = z/\left(d_{hyd} RePr\right)$ im Vergleich zur Korrelation von Shah, siehe Gleichung (2.12). Hier sind Abweichungen nur an den Stellen wesentlich, an denen ein Bereichswechsel in den Gleichungen von Shah auftritt. Für die thermische Einlauflänge gilt $l_{th} = 0{,}01154 \cdot RePrd_{hyd}$, wie schon im Abschnitt 2.1 ausgeführt. Vom Erreichen eines thermisch ausgebildeten Temperaturprofiles spricht man, wenn die lokale Nußelt-Zahl das 1,05-fache der Nußelt-Zahl für den unendlich langen Einlauf unterschreitet. Aus Bild 6.3 kann entnommen werden, dass diese Länge durch die berechnete Nußelt-Zahl sehr gut wiedergegeben wird.

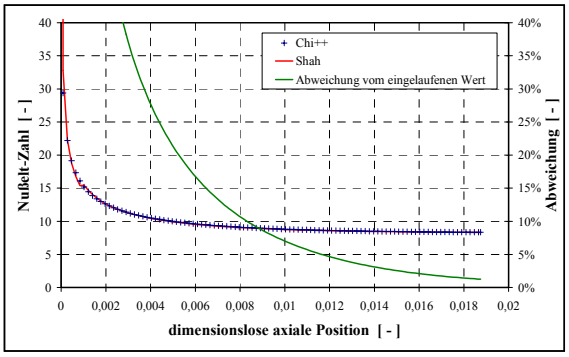


Bild 6.3: Nußelt-Zahl im thermischen Einlauf

6.1.3 Wärmeübergang bei eingelaufener Kanalströmung – 3D

Als Testfall für eine dreidimensionale Berechnung des Temperatur- und Geschwindigkeitsfeldes wird in diesem Abschnitt die Berechnung einer Einlaufströmung in einem Rechteckkanal dargestellt. Der Querschnitt des Kanals hat die Abmessung $2a \cdot 2b$. Da das Problem 2 Symmetrieebenen aufweist, wird nur ein Viertel des Querschnittes als Untersuchungsgebiet vernetzt. Die Symmetrieflächen fallen mit den Koordinaten $x = 0$ und $y = 0$ zusammen. Die Kanalwände liegen bei $x = a$ und $y = b$. Die Wände sind mit einer konstanten Wärmestromdichte beaufschlagt. Am Eintrittsquerschnitt wird eine konstante Axialgeschwindigkeit v_z vorgegeben. Am Ausströmquerschnitt wird die Abströmbedingung nach Tabelle 5.3 gesetzt. Im Kanal bilden sich das Geschwindigkeits- und das Temperaturfeld bis zum Erreichen des hydrodynamischen und des thermischen Einlaufes aus. Bild 6.4 zeigt die Temperaturverteilung über dem berechneten Querschnittsviertel. Die Koordinate z des

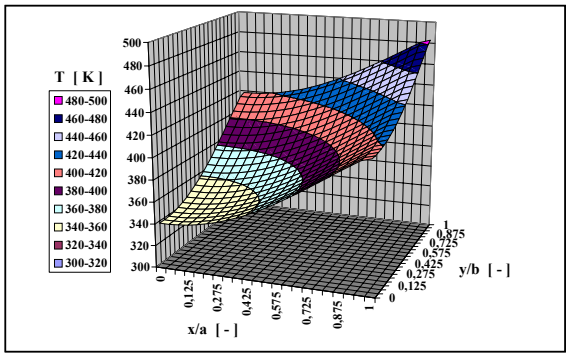


Bild 6.4: Temperaturverteilung

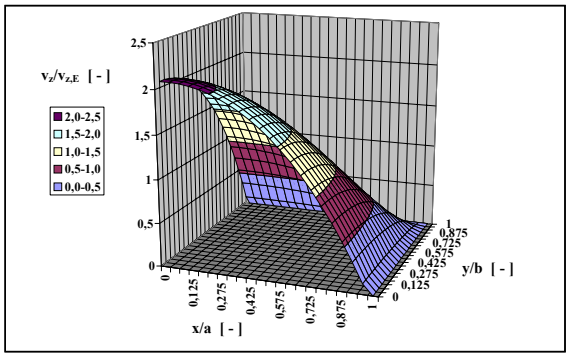


Bild 6.5: Geschwindigkeitsverteilung

betrachteten Querschnittes liegt im vollständig eingelaufenen Bereich. Das dazugehörige Geschwindigkeitsprofil ist in Bild 6.5 dargestellt. Für den hier dargestellten Testfall wurde eine Gitterauflösung von 20x20x40 Zellen verwendet.

Für das Problem der Kanalströmung mit aufgeprägter Wärmestromdichte existieren in der Literatur Angaben zu den sich einstellenden Nußelt-Zahlen. In [42] wird für einen quadratischen Kanal, d. h. $b/a = 1$, eine Nußeltzahl von $Nu_{q,\infty} = 3{,}091$ angegeben. Die „Chi++"-Berechnung der hier dargestellten Kanalströmung lieferte den Wert $Nu = 3{,}093$. Damit liegt die Abweichung bei einem Wert < 0,1%.

6.1.4 Weitere Testrechnungen und Anwendungsfälle

Neben den in den vorangegangen Abschnitten dargestellten Testrechnungen wurde die Bibliothek „Chi++" diversen anderen Tests unterzogen. Unter anderem wurden die hier aufgeführten Testbeispiele so vernetzt, dass jeweils eine der Koordinatenrichtungen mit der Hauptströmungsrichtung zusammenfiel. Die Ergebnisse wurden untereinander verglichen. Es traten keine wesentlichen Abweichungen auf.

Als Testfall für eine dimensionsbehaftete Berechnung wurden die Größen ρ, η und l_{ch} sowie v_{Bezug} variiert, wobei die Reynoldszahl $Re = \rho v_{Bezug} l_{ch} / \eta$ konstant gehalten wurde. Dieser Test wird von Patankar [51] empfohlen. In der dimensionslosen Ergebnisdarstellung führen alle Varianten auf die gleiche Lösung. Auch hier waren keine wesentlichen Unterschiede zu verzeichnen.

Beispielhaft für weitere durchgeführte Tests sei an dieser Stelle noch die Berechnung der Nischenströmung genannt, die beispielsweise von Peric und Ferziger [19] empfohlen wird. Das Ergebnis einer derartigen Rechnung ist im Anhang E, Bild 8.13 und Bild 8.14 dargestellt.

Neben der Berechnung des in dieser Arbeit behandelten Anwendungsfalles des Wärmeübergangs in Mikrokanälen konnte die Klassenbibliothek „Chi++" bereits in anderen Projekten eingesetzt werden. Zwei sollen an dieser Stelle nur kurz genannt werden.

Der erste Fall ist die Berechnung des Wärmetransportes in der rotierenden Rohrwand eines Drehrohrofens. Dabei wird ein Teilbereich der Innenfläche der Rohrwand mit einem heißen Gas beaufschlagt, der andere Teil steht mit einem Granulat in Kontakt. Ein berechnetes Temperaturfeld ist im Anhang E Bild 8.12 dargestellt. Die Ergebnisse sind [72] zu entnehmen.

Der zweite Anwendungsfall ist die Temperaturfeldberechnung im Schmelzbad beim Schweißen. Ergebnisse sind in [15] dargestellt.

Diese Anwendungsfälle demonstrieren die Anwendbarkeit „Chi++" und die Flexibilität einer Klassenbibliothek, die eine einfache Anpassung an neue Aufgabenstellungen ermöglicht.

6.2 Einphasiger Wärmeübergang an einer glatten Heizfläche

6.2.1 Thermischer und hydrodynamischer Einlauf

Da Mikrokanäle in Mikrosystemen in der Regel als Kanalbündel eingesetzt werden, und eine eventuelle Beheizung kurz hinter dem Verteiler, d. h. kurz hinter dem Eintritt in den Kanal beginnt, liegt in einer großen Zahl der Anwendungsfälle sowohl ein hydrodynamischer als auch ein thermischer Einlaufbereich vor. Dieser Fall des gleichzeitigen thermischen und hydrodynamischen Einlaufes trifft auch für die in dieser Arbeit untersuchten Mikrokanäle zu, da konstruktionsbedingt direkt ab dem Eintritt in den Kanal die Heizleistung zugeführt wird. Daher wird im Bild 6.6 der Vergleich der berechneten Nußelt-Zahl für die Einlaufströmung zu den experimentellen Ergebnisen geführt. Da wie schon weiter oben ausgeführt, die untersuchten Kanäle ein verhältnismäßig großes Seitenverhältnis aufweisen, ist es auch hier naheliegend, den Kanal als parallele Platte zu betrachten. Die Beheizung erfolgt wie in Abschnitt 3.1.2 ausgeführt und kann in guter Näherung als Realisierung einer konstanten Wärmestromdichte an der heizenden Wand angesehen werden. Bild 6.6 zeigt eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den mit dem Programmsystem „Chi++“ berechneten und den experimentell bestimmten Nußelt-Zahlen. Die maximale Abweichung der Messdaten von der berechneten Nußelt-Zahl beträgt ca. 10% wobei ein großer Anteil mit Sicherheit den Messfehlern zuzuordnen ist, vgl. 3.7. Weiterhin sind im Bild 6.6 zur Information die Wand und die Fluidtemperatur dargestellt. Qualitative Darstellungen der Geschwindigkeitskomponenten, der Druck und der Temperaturverteilung sind beispielhaft im Anhang E, Bild 8.11 dargestellt.

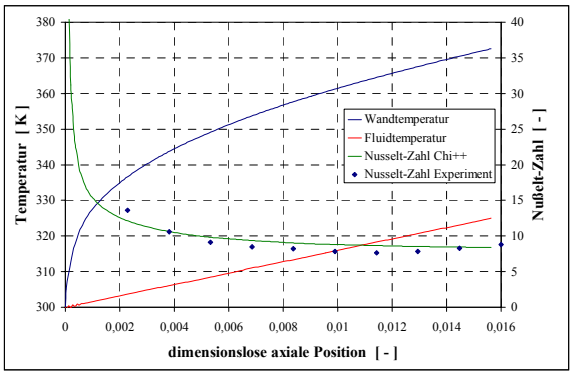


Bild 6.6: Nußelt-Zahl im hydrodynamischen und im thermischen Einlauf

Aus den Darstellungen zum einphasigen Wärmeübergang zwischen parallelen Platten lässt sich schließen, dass die Wärmetransportmechanismen in Mikrokanälen nicht von denen in Kanälen mit charakteristischen Längen in gewöhnlichen Größenordnungen verschieden sind. Diese Aussage kann für Rechteckkanäle mit einem Spaltmaß $s > 300\ \mu m$ getroffen werden.

Abweichend davon verhalten sich die Wärmeübergangsbedingungen zwischen Kanälen mit großen charakteristischen Längen und denen mit kleineren charakteristischen Längen unterschiedlich, wenn eine Oberfächenstruktur, z.B. eine Rauhigkeit berücksichtigt wird. Dies soll im folgenden Abschnitt an einem Beispiel verdeutlicht werden.

6.3 Einphasiger Wärmeübergang an einer rauhen Heizfläche

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, welchen Einfluss eine Wandrauhigkeit auf den einphasigen Wärmeübergang in einem durchströmten Rohr ausübt. Rauhigkeiten weisen in

der Regel eine stochastische Verteilung und Rauhtiefe auf, was für Vergleiche ungünstig ist, da für derartige Rauhigkeiten wechselnde Ergebnisse erwartet werden. Deshalb wird für diese Untersuchung eine periodische Funktion, die Sinus-Funktion $f(x)=(l_{rauh}/2)\sin(x)+C$ angenommen. $C=r_m$ ist der mittlere Radius der rauhen Rohrwand. Die beheizte Oberfläche des Testkanals wird durch Rotation der die Wandkontur beschreibenden Funktion um die Rotationsachse ($x-Achse$) erzeugt. Für die Berechnung werden insgesamt 5 Perioden der Sinusfunktion vernetzt. Für die spätere Auswertung wird aber nur die mittlere Periode verwendet, um eventuelle Einflüsse der Randbedingungen zu reduzieren. Für den Ein- und den Austrittsquerschnitt wird eine periodische Randbedingung gesetzt, so dass ein unendlich langes Rohr vorliegt und das Strömungsprofil eine ins Unendliche fortgesetzte Periodizität aufweist. Für die übrigen Ränder werden die Symmetriebedingung an der Rohrachse und die Randbedingung für die mit einer konstanten Wärmestromdichte beaufschlagten Wand gesetzt.

Ziel der Untersuchung ist es, die Nußelt-Zahl für die Strömung im Rohr mit rauher Wand zu bestimmen und diese mit der Nußelt-Zahl für die eingelaufene Strömung im glatten Rohr zu vergleichen. Für das glatte Rohr gilt wie im Abschnitt 2.1 ausgeführt

$$Nu=\frac{\alpha l_{ch}}{\lambda_{fl}}=4{,}36\ldots \qquad (6.7)$$

Die Berechnung wird für mehrere Durchmesser ausgeführt. Um vergleichbare Ergebnisse zu erzielen, ist die Reynoldszahl konstant zu halten. Es gilt

$$Re=\frac{\bar{v}d_m}{\nu}=const.,\ \text{wobei} \qquad (6.8)$$

der Index m den Mittelwert der Sinusfunktion kennzeichnet. Ebenso wird das Verhältnis

$$\frac{\dot{Q}}{\dot{M}}=const.=\frac{A_m\dot{q}}{\dot{M}}=\frac{\pi d_{m_1}s\dot{q}_1}{\dot{M}_1}=\frac{\pi d_{m_2}s\dot{q}_2}{\dot{M}_2} \qquad (6.9)$$

zwischen zwei Rechnungen 1 und 2 konstant gehalten, um vergleichbare energetische Bedingungen zu erhalten. Die Größe s kennzeichnet hier die Bogenlänge des betrachteten Abschnittes der Sinusfunktion.

Im Anschluss an die Berechnung werden aus den Feldgrößen und aus der Geometrie die erforderlichen Größen bestimmt, um die Nußelt-Zahl

$$Nu=\frac{\alpha l_{ch}}{\lambda_{Fl}}=\frac{\dot{q}l_{ch}}{\lambda_{Fl}\left(T_W-\bar{T}_{Fl}\right)} \qquad (6.10)$$

zu berechnen. Die charakteristische Länge l_{ch} entspricht dabei dem Durchmesser, der jeweils bis zur mittleren Rauhigkeitshöhe der Rohrwand gemessen wird.

Das Ergebnis der Berechnungen für verschiedene Rohrdurchmesser mit konstanter Rauhigkeitshöhe ist in Bild 6.7 dargestellt. Es ist zu erkennen, dass für sehr kleine

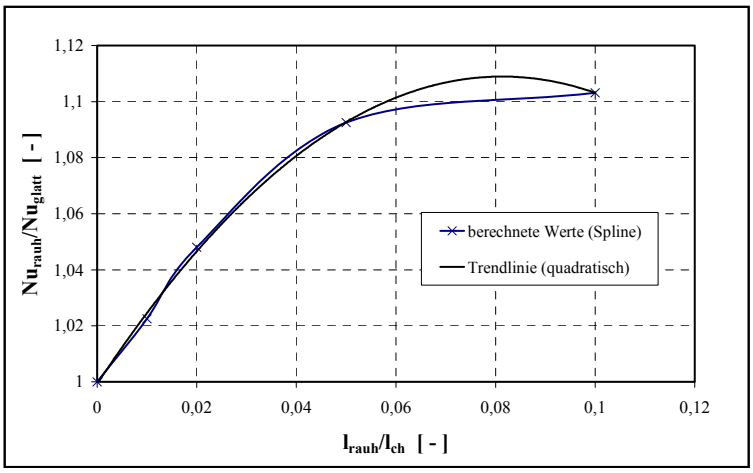


Bild 6.7: Verhältnis der Nußelt-Zahlen im rauhen und im glatten Kanal

Verhältnisse von l_{rauh}/l_{ch}, d. h. bei sehr großen Rohrdurchmessern bzw. bei sehr kleinen Rauhigkeitshöhen die Nußelt-Zahl für das rauhe Rohr gegen die Nußelt-Zahl des glatten Rohres strebt. Aus den berechneten Werten kann eine Korrelation abgeleitet werden, die für den untersuchten Bereich von l_{rauh}/l_{ch} und die Beispielrauhigkeit Sinus-Funktion zu

$$\frac{Nu_{rauh}}{Nu_{glatt}} = -16{,}4 \cdot \left(\frac{l_{rauh}}{l_{ch}}\right)^2 + 2{,}67 \cdot \left(\frac{l_{rauh}}{l_{ch}}\right) + 1; \quad \text{für:} \quad 0 \le \frac{l_{rauh}}{l_{ch}} \le 0{,}1 \qquad (6.11)$$

bestimmt wurde. Bild 6.8 zeigt zum Vergleich die Temperaturprofile für einen glatten und für einen rauhen Kanal. In Bild 6.9 sind die dazugehörigen Geschwindigkeiten dargestellt.

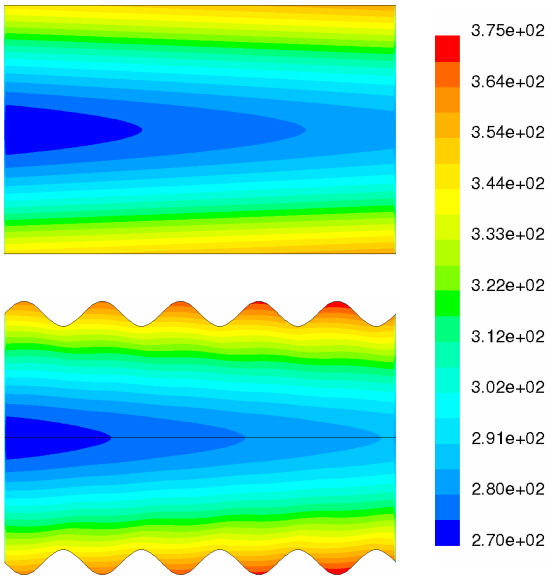


Bild 6.8: Temperaturfeld im glatten und im rauhen Kanal, *T* [K]

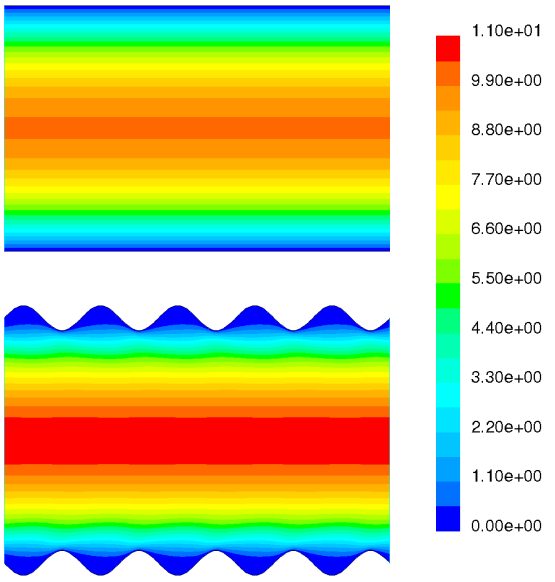


Bild 6.9: Betrag der Geschwindigkeit im glatten und im rauhen Kanal, *v* [m/s]

Innerhalb der Vertiefungen der rauhen Wand erreicht die Geschwindigkeit des Fluids nahezu den Wert 0 m/s. Diese Bereiche geringer Geschwindigkeit sind stärker ausgedehnt als im glatten Rohr, wo nur durch die Haftbedingung die Geschwindigkeit direkt an der Wand den Wert 0 m/s erreicht. Daher erreicht die Temperatur des Fluids innerhalb der Vertiefungen einen höheren Wert als im glatten Rohr, was den Transport durch Wärmeleitung im Randbereich verbessert. Weiterhin kann die Verbesserung des Wärmeübergangs mit einer Rippenwirkung der Erhebungen des Wandmaterials und dem durch die Struktur beeinflussten Geschwindigkeitsfeld, das zu einem verbesserten konvektiven Transport führt, erklärt werden. Nicht zuletzt gewinnt bei einem großen Verhältnis l_{rauh}/l_{ch} die vergrößerte Wärmeübertragerfläche an Bedeutung, was ebenfalls einer Verbesserung des Wärmeübergangs zugute kommt.

6.4 Berechnung des zweiphasigen Wärmeübergangs mit dem vereinfachten Modell für das konvektive Sieden – Erste Erfahrungen

Mit dem im Abschnitt 4.3.3 vorgeschlagenen vereinfachten Modell für den Bereich des konvektiven Siedens wurden erste Testrechnungen vorgenommen. Das bisherige Vorgehen soll kurz beschrieben werden und als Starthilfe für weiterführende Arbeiten dienen.

Es wird ein zweidimensionales Problem, die Strömung zwischen zwei beheizten Platten, betrachtet. Das Untersuchungsgebiet wird begrenzt durch die beiden festen Wände, einen Einström- und einen Ausströmrand. Da das Problem symmetrisch ist, genügt die Betrachtung des halben Gebietes also von einer festen Wand bis zur Symmetrielinie in der Mitte zwischen den beiden Platten. Das Untersuchungsgebiet wird durch die Koordinaten y, z beschrieben. Die Koordinate y hat auf der Symmetrielinie ihren Ursprung und ist normal zur Hauptströmungsrichtung orientiert. Es gilt $0 \le y \le s/2$. Die Koordinate z weist in Strömungsrichtung.

Die Lage der Phasengrenze wird in Abhängigkeit von den gegebenen Eintrittsgrößen $\dot{M}_E$ und $\dot{x}_E$, den Stoffwerten und der Wärmestromdichte an der Wand nach Gleichung (4.27) für den Eintritts- und den Austrittsquerschnitt des Berechnungsgebietes bestimmt. Der Strömungsdampfgehalt am Austritt ist dabei gleich dem thermodynamischen Dampfgehalt, der sich aus den Eintrittsgrößen und dem ins Untersuchungsgebiet eingetragenen Wärmestrom ergibt. Für das Innere des Berechnungsgebietes wird ein linearer Verlauf der Phasengrenze zwischen den Koordinaten am Eintritt $y_{Ph,E}$ und am Austritt $y_{Ph,A}$ angenommen. Das Gitter für die Berechnung wird so generiert, dass eine Gitterlinie (Zellgrenze) direkt entlang der Phasengrenze verläuft. Dem Bereich zwischen Phasengrenze und Wand wird die Flüssigkeit zugeordnet, dem übrigen Gebiet der Dampf. Als Randbedingung für die Axialkomponente der Geschwindigkeit wird am Einströmrand das

berechnete Geschwindigkeitsprofil für die Strömung ohne Phasenübergang angesetzt. Für die Querkomponente der Geschwindigkeit werden direkt an der Phasengrenze die Bedingungen

$$v_{y,l} = \frac{\dot{m}_V}{\rho_l} \quad \text{und} \quad v_{y,v} = \frac{\dot{m}_V}{\rho_v} \tag{6.12}$$

gesetzt. In Richtung Wand und in Richtung der Symmetrielinie werden diese Geschwindigkeiten linear auf 0 reduziert.

Am Ausströmrand gilt die Abströmbedingung. Es wird nun das System der Erhaltungsgleichungen (4.17) gelöst, wobei für die Zellen die sowohl gas- als auch flüssigkeitsseitig direkt an der Phasengrenze liegen, die Gleichungen mit den Übergangstermen, die im Abschnitt 4.3.3 hergeleitet wurden, zur Anwendung kommen. Die Zellen sind zur Identifizierung als gasseitige bzw. als flüssigkeitsseitige Phasengrenzzellen markiert.

Für die Dampftemperatur gilt im gesamten Feld $T_v = T_S$. Erste Testrechnungen wurden mit den Stoffgrößen für Wasser vorgenommen.

Auf folgendes Problem sei noch hingewiesen:

Da die Lage der Phasengrenze während dieser Rechnung nicht verändert wird, ist die Lösung inkonsistent. Dies kann beispielsweise zu einem falschen Druckfeld führen. Mittels Überprüfung der globalen Bilanzen kann eventuell die Phasengrenzlage korrigiert und eine weitere Verbesserung des Strömungs- und Temperaturfeldes erreicht werden, so dass abschließend ein Wärmeübergangskoeffizient entsprechend der Gleichung $\alpha = \dot{q}/(T_W - T_S)$ bestimmt werden kann.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde eine numerische Lösung nicht erreicht. Es konnte dabei nicht endgültig geklärt werden, ob die Probleme rein numerischer Natur sind oder ob diese in den starken Vereinfachungen des Modells begründet liegen. Dies sollte durch eine Nachfolgearbeit geklärt werden. Gegebenenfalls muss für die Berechnung des Wärmeübergangs beim konvektiven Sieden auf umfangreichere Modelle zurückgegriffen werden.

7 Zusammenfassung und Ausblick

7.1 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Untersuchung von Wärmetransportvorgängen in durchströmten Mikrokanälen. Zur experimentellen Beobachtung wurde ein Versuchsaufbau konzipiert, der die Erfassung aller erforderlichen Größen, wie Drücke, Temperaturen, Massenstrom und Heizleistung, ermöglicht.

Kernstück des Versuchsaufbaus ist ein hochauflösendes Infrarotthermografiesystem, welches zur Registrierung der Außenwandtemperatur verwendet wird. Dieses System weist eine Reihe von Vorteilen für die Untersuchung auf. Im Gegensatz zur Messung der Temperatur mit Thermoelementen an diskreten Punkten liefert die Infrarotmesstechnik ein flächenhaftes Bild der Temperatur der Kanaloberfläche. Die hohe örtliche Auflösung ermöglicht die Erfassung einer nahezu kontinuierlichen Temperaturverteilung entlang eines Kanals. Weiterhin kann die gesamte Kanallänge zeitgleich beobachtet und Temperaturdaten aufgezeichnet werden. Dadurch ist es möglich, mehrere Siedebereiche, die im Kanal vorliegen, sichtbar zu machen. Gegenüber bisher in der Fachliteratur veröffentlichten Messdaten, die im Wesentlichen auf einer diskontinuierlichen Erfassung der Kanalwandtemperatur beruhen, stellen die Ergebnisse der infrarotthermografischen Messmethode eine deutliche Verbesserung dar. Ein weiterer Vorteil ist die hohe zeitliche Auflösung der Temperaturmessung. Das Thermografiesystem ist in der Lage, Sequenzen von Infrarotbildern aufzuzeichnen, die die Visualisierung von instationären Vorgängen erlauben, wodurch die Interpretation verschiedener Vorgänge erleichtert wird.

Für die in dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen kamen Rohre mit einem Durchmesser von 1,5 mm und speziell konstruierte Kanäle mit Rechteckquerschnitt zum Einsatz. Die Querschnitte der Rechteckkanäle hatten eine Breite von 10 mm und eine Höhe von 300 µm bzw. 700 µm. Es wurde eine elektrische Beheizung der Kanäle realisiert. Als Testmedien für die Untersuchungen kamen Wasser und n-Heptan zum Einsatz.

Die Versuchsparameter Massenstromdichte $\dot{m}$ und Wärmestromdichte $\dot{q}$ wurden so gewählt, dass experimentelle Ergebnisse zum Wärmeübergang in Mikrokanälen ausgehend vom Bereich der einphasigen Flüssigkeitsvorwärmung bis hin ins Gebiet des Post-Dryouts gewonnen werden konnten.

Mit Hilfe der experimentell gewonnenen Daten konnte für den Bereich der einphasigen Flüssigkeitsströmung gezeigt werden, dass der Wärmeübergang in Mikrokanälen unter der Voraussetzung des Vorliegens einer laminaren Strömung den gleichen Gesetzmäßigkeiten genügt, die auch für konventionelle Kanäle gelten. Bekannte Gleichungen zur Berechnung des Wärmeübergangs sind für die untersuchten Kanalgeometrien und –abmessungen anwendbar.

Ebenso konnte festgestellt werden, dass der Druckverlust, den die Strömung in den untersuchten Kanälen erfährt, im einphasigen Bereich dem von Kanälen mit gewöhnlichen charakteristischen Längen entspricht. Die Verlustbeiwerte lassen sich mit den Gleichungen für die laminare Strömung bestimmen.

Um die Phänomene des Wärmeübergangs bei der Verdampfung der Flüssigkeit zu untersuchen und zu beschreiben, ist es zunächst erforderlich, die durchströmte Länge des Kanals in Abschnitte zu zerlegen und diesen die entsprechenden Siedebereiche zuzuordnen. Speziell sind der Ort des Siedebeginns und der Ort des Austrocknens der Heizfläche, des sogenannten Dryouts, zu bestimmen.

Unter Verwendung der hochauflösenden Infrarotaufnahmen und den daraus gewonnenen Wandtemperaturverläufen war es möglich, eine Abgrenzung der Bereiche vorzunehmen. Für die untersuchten Kreisrohre konnte eine Korrelation zwischen den Versuchsparametern und dem Ort des Siedebeginns gefunden werden. In den untersuchten Rechteckkanälen tritt der Siedebeginn in unmittelbarer Nähe des Ortes ein, an dem der über den Querschnitt gemittelte thermodynamische Strömungsdampfgehalt den Wert $\dot{x} = 0$ überschreitet. Dies liegt in der speziellen Kanalgeometrie und der Art der verwendeten Beheizung begründet. Ein Überhitzen der Flüssigkeit gegenüber der Siedetemperatur konnte kaum beobachtet werden.

Ein weiterer wichtiger Punkt ist die Kenntnis des Ortes des Dryouts. Bei der Auslegung von Verdampfern ist eine entsprechende Dosierung der Heizleistung für den Kanalabschnitt hinter dem Dryout vorzusehen, da ansonsten auf Grund des schlechten Wärmeübergangs die Temperaturen der Heizfläche stark ansteigen und die Gefahr der Zerstörung derselben besteht. Für die untersuchten Rechteckkanäle konnte aus den experimentellen Daten eine Korrelation zwischen den Betriebsparametern und dem Ort des Dryouts abgeleitet werden.

Die Untersuchungen des Wärmeübergangs im zweiphasigen Bereich ergaben für den Mikrokanal höhere Wärmeübergangskoeffizienten als die, die für normale Kanalgeometrien gelten. Allerdings ist im zweiphasigen Bereich die Messunsicherheit größer als im einphasigen Bereich, da die Temperaturdifferenzen, die im Kanal zwischen Heizfläche und Fluidtemperatur auftreten, kleiner als im einphasigen Bereich sind.

Auf der Basis der experimentellen Ergebnisse für den ein- und den zweiphasigen Bereich wurden Modelle zur numerischen Berechnung des Wärmeübergangs entwickelt. Dabei wurde das Ziel verfolgt, den Einfluss des Phaseübergangs und des mehrdimensionalen Charakters des Geschwindigkeitsfeldes auf den Wärmeübergang zu untersuchen, um einfachere 1D-Modelle verifizieren und stützen zu können. Dabei wird für den zweiphasigen Bereich davon ausgegangen, dass in weiten Bereichen des Kanals konvektives Sieden vorliegt. Diese Modellvorstellung wird durch die Aufnahme von Infrarotbildsequenzen gestützt.

Das Modell für den einphasigen Kanalabschnitt wurde programmtechnisch umgesetzt und in der Programmbibliothek „Chi++“ unter konsequenter Anwendung des Konzeptes der objektorientierten Programmierung in der Programmiersprache C++ implementiert. Großer Wert wurde dabei auf die Flexibilität des Algorithmus gelegt, um diesen als Basisalgorithmus

für weiterführende Untersuchungen nutzen zu können. Zu diesem Zweck ist die Bibliothek auf die Nutzung der Chimära-Gittertechnik ausgelegt und basiert auf einer Diskretisierung der Erhaltungsgleichungen in konturangepassten Koordinaten.

Der Algorithmus wurde umfangreich getestet und es wurden Berechnungen zum Wärmeübergang in Mikrokanälen vorgenommen. Die Berechnungsergebnisse wurden den Messergebnissen gegenübergestellt.

Für den einphasigen Bereich wurde neben den Berechnungen zur Kanalströmung mit glatten Wänden Berechnungen zum Wärmeübergang in einem Kanal mit einer rauhen Wand durchgeführt. Dazu wurde die Kanalwand mit einer Testrauhigkeit strukturiert. Aus den Berechnungsergebnissen wurde die Abhängigkeit des Verhältnisses der Nußelt-Zahl im rauhen Kanal zur Nußelt-Zahl im glatten Kanal vom Verhältnis der Rauhtiefe zur charakteristischen Länge abgeleitet.

Zur Umsetzung des Modells für den Bereich des konvektiven Siedens wurde das Modell für den einphasigen Bereich um die Phasenübergangsterme erweitert. Es wurden Testrechnungen durchgeführt. Im Rahmen dieser Arbeit konnten jedoch keine aussagekräftigen Berechnungsergebnisse erzielt werden.

7.2 Ausblick

Die in dieser Arbeit verwendete experimentelle Methode eignet sich sehr gut zur Untersuchung der Phänomene, die beim Wärmeübergang in Mikrokanälen auftreten. Zur weiteren Verbesserung der quantitativen Ergebnisse sollten jedoch folgende Punkte beachtet werden:

1. Es ist eine Beschichtung für die Kanalwand zu realisieren, die möglichst dünnschichtig, dabei aber festhaftend sowie temperatur- und alterungsbeständig ist. Sie sollte ein möglichst definiertes, hohes und temperaturunabhängiges Emissionsverhältnis aufweisen, um den Fehler der Infrarotmessung weiter zu verringern. Galvanische Beschichtungsverfahren sind zu empfehlen.
2. Die Kanalkonstruktion und Herstellung ist so auszuführen, dass eine gleichmäßige Beheizung auf dem Umfang des durchströmten Querschnittes realisiert werden kann. Bei der hier verwendeten Art der Beheizung kann dies insbesondere dadurch erreicht werden, dass eine lokale Anhäufung von Wandmaterial vermieden wird. Dies kann z.B. durch Laserstrahlschweißung des Kanals realisiert werden.

Das in der Arbeit vorgestellte Modell für den Bereich des konvektiven Siedens sollte in einer Nachfolgearbeit weiterentwickelt werden. Dabei sollte eine Korrektur der Lage der Phasengrenze möglich sein.

Die im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Programmbibliothek „Chi++“ stellt ein leistungsfähiges Programmsystem dar, dessen Anwendung nicht auf die Berechnung des Wärmeübergangs in Mikrokanälen beschränkt ist. Vor allem wegen der Verfügbarkeit des

Quellcodes ist es sehr flexibel an neue Anwendungsfälle anzupassen bzw. ermöglicht die Implementierung neuer Modelle, was gegenüber der Nutzung eines kommerziellen Systems von Vorteil sein kann. Durch das objektorientierte Design ist es möglich, durch Anwendung des Konzepts der Vererbung Erweiterungen vorzunehmen, ohne in den bestehenden Code eingreifen zu müssen. Dabei kann die vorhandene Funktionalität weiter genutzt werden.

Abschließend sei bemerkt, dass in der Bibliothek „Chi++“ die Funktionalität der Chimära-Gittertechnik vorbereitet ist, deren Nutzung beispielsweise bei der Vernetzung von Rauhigkeiten oder der Verfolgung von Phasengrenzen von großem Vorteil ist. Als weiterer Vorteil ist das objektorientierte Konzept zu nennen, das eine Erweiterung der Funktionalität und eine Anpassung für neue Anwendungen unterstützt und stark vereinfacht.

Literaturverzeichnis

[1] **AGEMA:** *Manual zum Infrarotsystem AGEMA Thermovision® 900.*

[2] **ALIGOODARZ, M. R.; KENNING, D. B. R.:** *Vapour bubble behaviour in a single narrow channel.* C510/061/95 ImechE 1995.

[3] **AUTORENKOLLEKTIV:** *VDI-Wärmeatlas.* 8. Überarbeitete und erweiterte Auflage, Springer-Verlag Berlin 1997.

[4] **BAEHR, H. D.; STEPHAN, K.:** *Wärme- und Stoffübertragung.* ISBN: 3-540-60374-3, Springer-Verlag Berlin, 1996.

[5] **BERGLES, A. E.; ROHSENOW, W. M.:** *The determination of forced-convection surface boiling heat transfer.* 3. Heat Transfer, Vol. 86, 1964, S.365-372.

[6] **BIRT, R. B.; STEWART, E. W.; LIGHTFOOT, E. N.:** *Transport Phenomena.* John Wiley & Sons, Inc., New York, 2001.

[7] **BOWERS, M. B., MUDAWAR, I.:** *High flux boiling in low flow rate, low pressure drop mini- and micro-channel heat sinks.* International Journal Heat and Mass Transfer, Vol. 37, No. 2 pp. 321-332, 1994.

[8] **BOWERS, M. B., MUDAWAR, I.:** *Two-Phase Electronic Cooling Using Mini-Channel and Micro- Channel Heat Sinks: Part 1-Design Criteria and Heat Diffusion Constrains.* Transaction of ASME, Vol. 116, December 1994, 290-297.

[9] **BOWERS, M. B., MUDAWAR, I.:** *Two-Phase Electronic Cooling Using Mini-Channel and Micro- Channel Heat Sinks: Part 2-Flow Rate and Pressure Drop Constrains.* Transaction of ASME, Vol. 116, December 1994, 298-305.

[10] **BRONSTEIN, I. N.; SEMENDJAJEW K. A.:** *Taschenbuch der Mathematik.* 24. Auflage, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1979.

[11] **CELATA, G. P.; CUMO, M.; GUGLIELMI, M.; ZUMMO, G.:** *Experimental Investigation of hydraulic and Single Phase Heat Transfer in 0.130 mm Capillary Tube.* Proceedings of the International Conference on „Heat Transfer and Transport Phenomena in Microscale“, pp. 108-113, ISBN: 1-56700-150-5, Begell House, Inc., 2000.

[12] **CHORIN, J. A.:** *A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems.* Journal of Computational Physics, pp 12-26, 1967.

[13] **CHORIN, J A.:** *Numerical Solution of the Navier-Stokes equations.* Math. Comput., 22, 745-762, 1968.

[14] **CORNWELL, K., KEW, P. A.:** *Evaporation in micro channel heat exchangers.* C510/061/95 ImechE 1995.

[15] **DFG-FORSCHERGRUPPE:** *Werkstoffbezogene numerische Simulation thermischer Prozesse in der Produktionstechnik. Teilprojekt IV: Numerische Simulation des Werkstoff- und Prozessverhaltens beim Schmelzbadschweißen.* Abschlußbericht.

[16] **DIAZ, M. C.; BOYE, H.; HAPKE, I.; SCHMIDT; J.; STAATE Y.; ZHEKOV, Z.:** *Flow boiling in mini and microchannels.* 2nd Int. Conference on Microchannels and Minichannels, Rochester, New York, 2004.

[17] **DIN1319:** *Grundbegriffe der Meßtechnik, Begriffe für die Meßunsicherheit und für die Beurteilung von Meßgeräten und Meßeinrichtungen.* Deutsches Institut für Normung e.V., Beuth Verlag GmbH, Berlin 1983.

[18] **ELSNER, N.:** *Grundlagen der Technischen Thermodynamik.* Akademie-Verlag Berlin, 1974.

[19] **FERZIGER, J. H.; PERIC, M.:** *Computational Methods for Fluid Dynamics.* Second Edition, Springer-Verlag Berlin, 1999.

[20] **FICHTNER, M.; BRANDNER, J.; LINDNER, G.; SCHYGULLA, U.; WENKA, A.; SCHUBERT, K:** *Microstructure Devices for Applications in Thermal and Chemical Process Engineering.* Proceedings of the International Conference on „Heat Transfer and Transport Phenomena in Microscale“, pp. 222-228, ISBN: 1-56700-150-5, Begell House, Inc., 2000.

[21] **FLETCHER, C. A. J.:** *Computational Techniques for Fluid Dynamics. Volume I, Fundamental and General Techniques.* Second Edition, Springer-Verlag Berlin 1991.

[22] **FLETCHER, C. A. J.:** *Computational Techniques for Fluid Dynamics. Volume II, Specific Techniques for Different Flow Categories.* Second Edition, Springer-Verlag Berlin 1991.

[23] **FRANKUUM, D. P.; WADEKAR, V. V., AZZOPARDI, B. J.:** *Flow boiling measurements with binary and ternary mixtures of hydrocarbons.* C510/061/95 ImechE 1995.

[24] **GIECK, K.; GIECK, R.:** *Technische Formelsammlung.* 29. deutsche Auflage, ISBN: 3920379179 Gieck Verlag, Germering, 1989.

[25] **GÖHLER W.**: *Höhere Mathematik, Formeln und Hinweise.* Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1987.

[26] **GRIGOROPOULOS, C., P.; YE, M.:** *Numerical methods in Microscale heat transfer: Modelling of phase-change and laser interactions with materials.* Advances in numerical heat transfer, Vol. 2, pp. 227-257, Taylor & Francis, 2000.

[27] **HAMMER, J.; STEPHAN, P.:** *Results of the micro-region model for nucleate boiling heat transfer.* C510/061/95 ImechE 1995.

[28] **HAPKE, I.; BOYE, H.; SCHMIDT, J.; STAATE, Y.:** *Investigation of flow boiling in mini channels using thermography.* Proceedings of the Eurotherm Seminar N^{o} 57 “Microscale Heat Transfer, 1998.

[29] **HAPKE, I.; BOYE, H.; SCHMIDT, J.:** *Onset of nuceate boiling in minichannels.* International Journal of Thermal Sciences. (2000) 39, pp. 505-513.

[30] **HAPKE, I.; BOYE, H.; SCHMIDT, J.:** *Flow Boiling of Water and n-Heptane in Micro Channels.* Proceedings of the International Conference on „Heat Transfer and Transport Phenomena in Microscale“, pp. 222-228, ISBN: 1-56700-150-5, Begell House, Inc., 2000.

[31] **HAPKE, I.; BOYE, H.; SCHMIDT, J.:** *Flow Boiling of Water and n-Heptane in Micro Channels.* Microscale Thermophysical Engineering, Vol. 6, No. 2, Taylor & Francis, 2002.

[32] **HAUSNER, O.; HERWIG, H.:** *Critical Analyssis of Heat Transfer Experiments in Microchannels.* Proceedings of GAMM 2001, Zurich, Switzerland, Feb. 2001.

[33] **HEWITT, G. F.; SHIRES, G. L.; POLEZHAEV, Y. V.:** *International Encyclopedia of Heat and Mass Transfer.* CRC Press, Boca Raton, 1997.

[34] **HERWIG, H.:** *Flow and Heat Transfer in Micro Systems: Is Everything Different or Just Smaller?* ZAMM, 00, 2000, Vorabdruck.

[35] **HODGSON, A. S.:** *Forced convection subcooled boiling heat transfer with water in an electrically heated tube at 100 to 550 lb/in.* Trans. Instn. Chem. Engrs. 46, 1968, S. 25-31.

[36] **JOHNSON, R. W.:** *The Handbook of Fluid Dynamics.* Springer Verlag Heidelberg, 1998.

[37] **KLEPP, G. H.:** *Numerische Simulation des Filmsiedens unter Intensivkühlbedingungen.* ISBN 3-18-363603-4, VDI Verlag GmbH, Düsseldorf, 2000.

[38] **KLEPP, G. H.; WADEWITZ, A.:** *CHIMERA – Programmdokumentation.* Bericht. ISUT-Thermodynamik, Otto-von-Guericke Universität Magdeburg, 1998.

[39] **KANDLIKAR, S. G.:** *Fundamental issues related to flow boiling in minichannels and microchannels.* Proceedings of „Experimental Heat Transfer, Fluid Mechanics, and Thermodynamics 2001“, Part I, pp. 129-146, ISBN: 88-467-0459-2, Edizioni ETS Pisa, Italy, 2001.

[40] **KANDLIKAR, S. G.:** Proceedings of the 2nd International Conference on Microchannels and Minichannels. ICMM2004, Rochester, New York, 2004.

[41] **MEISTER, A.:** *Numerik linearer Gleichungssysteme – Eine Einführung in moderne Verfahren.* Friedrich Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 1999.

[42] **MERKER, G. P.:** *Konvektive Wärmeübertragung.* ISBN: 3-540-16995-4, Springer-Verlag Berlin, 1987.

[43] **MERTZ, R.; GROLL, M.:** *Flow boiling from enhanced heat transfer surfaces with narrow channels.* C510/061/95 ImechE 1995.

[44] **MERTZ, R. ; GROLL, M.:** *Flow boiling heat transfer in narrow channels.* Proceedings of the Eurotherm Seminar N^{o} 57 "Microscale Heat Transfer, 1998.

[45] **NIRSCHL, H.:** *Mikrofluidmechanik - Numerische und experimentelle Untersuchung zur Umströmung kleiner Körper.* VDI-Verlag GmbH Düsseldorf, 1994.

[46] **NIRSCHL, H.:** *Partikelbewegungen in Scherströmungen ohne und mit Berücksichtigung des Einflusses angrenzender Wände.* VDI Verlag GmbH Düsseldorf, 1997.

[47] **NOLL, B.:** *Numerische Strömungsmechanik.* Springer-Verlag Berlin, 1993.

[48] **OBOT, N. T.:** *Toward a Better Understanding of Friction and Heat/Mass Transfer in Microchannels – A Literature Review.* Proceedings of the International Conference on „Heat Transfer and Transport Phenomena in Microscale", pp. 72-79, ISBN: 1-56700-150-5, Begell House, Inc., 2000.

[49] **OERTEL, H.:** *Strömungsmechanik – Methoden und Phänomene.* Springer-Verlag Berlin, 1995.

[50] **PALM B.:** *Heat Transfer in Microchannels.* Proceedings of the International Conference on „Heat Transfer and Transport Phenomena in Microscale", pp. 54-64, ISBN: 1-56700-150-5, Begell House, Inc., 2000.

[51] **PATANKAR, S. V.:** *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow.* Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1980.

[52] **PENG, X. F.; HU, H. Y.; WANG, B. X.:** *Boiling nucleation during liquid flow in microchannels.* Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 41 No. 1 pp. 101-106, 1998.

[53] **PENG, X. F.; WANG, B. X.:** *Forced-convection and boiling characteristics in microchannels.* Heat Transfer 1998, Proceedings of 11th IHTC, Vol. 1, August 23-28, 1998, Kyongju, Korea.

[54] **PENG, X. F.; WANG, B. X.:** *Forced convection and flow boiling heat transfer for liquid flowing through microchannels.* Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 36 No. 14 pp. 3421-3427, 1993.

[55] **PENG, X. F.; WANG, B. X.; PETERSON, G. P.; MA, H. B.:** *Experimental investigation of heat transfer in flat plates with rectangular microchannels.* Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 38 No. 1 pp. 127-137, 1995.

[56] **PENG, X. F.; PETERSON, G. P.; WANG, B. X.:** *Flow boiling of binary mixtures in microchanneled plates.* Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 39 No. 6 pp. 1257-1264, 1996.

[57] **KREHER, K.; KRÖTSCH, M.; SCHNEIDER, H.A.; SCHULZE, H.:** *Physikalisches Praktikum für Anfänger.* BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 7. überarbeitete Auflage, 1985.

[58] **RUAN, S.:** *Experimentelle Untersuchungen der kritischen Wärmestromdichte von aufwärts und abwärts strömendem Wasser in einem senkrechten Kreisrohr bei niedrigen Drücken und niedrigen Massenstromdichten.* VDI-Verlag, Düsseldorf, 1994.

[59] **SABISCH, W.**: Dreidimensionale numerische Simulation der Dynamik von aufsteigenden Einzelblasen und Blasenschwärmen mit einer Volume-of-Fluid-Methode. Dissertation, Universität Karlsruhe, Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe, 2000.

[60] **SATO, T.; MATSUMURA, H.:** *On the conditions of incipient subcooled boiling with forced convection.* Bulletin ISME, Vol. 7, 1963, Nr.26, S.392-398.

[61] **SCHADE, H.**: *Kontinuumstheorie strömender Medien.* Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[62] **SCHLICHTING, H.; GERSTEN, K.:** *Grenzschicht-Theorie.* 9. Auflage, Springer-Verlag Berlin, 1997.

[63] **SCHLÜNDER, E. U.; TSOTSAS, E.:** *Wärmeübertragung in Festbetten, durchmischten Schüttgütern und Wirbelschichten.* ISBN: 3-13-713001-8, Georg Thieme Verlag Stuttgart, 1988.

[64] **SHI, L.; MAJUMDAR, A.:** *Recent Developments in Microscale Temperature Measurement Techniques.* Proceedings of the International Conference on „Heat Transfer and Transport Phenomena in Microscale“, pp. 12-23, ISBN: 1-56700-150-5, Begell House, Inc., 2000.

[65] **SKALICKY, T.:** *LASPACK.* TU-Dresden, 1995. Numerical package for large sparce systems of linear equations.

[66] **SOBHAN, C. B.; GARIMELLA, S. V.:** *A Comparative Analysis of Studies on Heat Transfer and Fluid Flow in Microchannels.* Proceedings of the International Conference on „Heat Transfer and Transport Phenomena in Microscale“, pp. 80-92, ISBN: 1-56700-150-5, Begell House, Inc., 2000.

[67] **SPÄTH, H.:** *Numerik - Eine Einführung für Mathematiker und Informatiker.* Friedrich Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 1994.

[68] **TRUCKENBRODT, E.:** *Fluidmechanik. Band 1, Grundlagen und elementare Strömungsvorgänge dichtebeständiger Fluide.* 4. Auflage, Springer-Verlag Berlin, 1996.

[69] **TRUCKENBRODT, E.:** *Fluidmechanik. Band 2, Elementare Strömungsvorgänge dichteveränderlicher Fluide sowie Potential- und Grenzschichtströmungen.* 3. Auflage, Springer-Verlag Berlin, 1992.

[70] **TUCKERMANN, D. B.; PEASE, R. F.:** *High-performance heat sinking for VLSI.* IEEE Electronic Device Letters, 1981 Vol. EDL-2(5). Pp. 126-129

[71] **UNVERDI, S. O.; TRYGGVASON, G.:** *A front-tracking method for viskous, incompressible, multi-fluid flows.* Journal of Computational Physics, 100, 25-37, 1992.

[72] **QUECK, A.:** *Untersuchung des gas- und wandseitigen Wärmetransportes in die Schüttung von Drehrohröfen.* Der Andere Verlag, Osnabrück, 2002.

[73] **QU, W.; MALA, G. M.; LI, D.:** *Heat transfer for water flow in trapeziodal silicon microchannels.* International Journal of Heat and Mass Transfer, 43 (2000), pp. 3925-3936.

[74] **WADEWITZ, A.:** Lokale und mittlere Nußelt-Zahl sowie Formänderung infolge Phasenumwandlung bei Partikeln unterschiedlicher Form. ISBN 3-89825-259-0, dissertation.de – Verlag im Internet, Berlin, 2001.

[75] **WAGNER, W.; PRUSS, A.:** *Die neue internationale Standard-Zustandsgleichung für Wasser für den allgemeinen und wissenschaftlichen Gebrauch.* Jahrbuch 97, VDI-Gesellschaft Verfahrenstechnik und Chemieingenieurwesen, VDI-Verlag, Düsseldorf, 134-156 (1997).

[76] **WEI, Q.**; **TONGZE, M.:** *Effects of the Polarity of Working Fluids on Vapor-Liquid Flow and Heat Transfer Characteristics in a Capillary.* Proceedings of the International Conference on „Heat Transfer and Transport Phenomena in Microscale“, pp. 229-236, ISBN: 1-56700-150-5, Begell House, Inc., 2000.

[77] **WEI, Q.; TONGZE, M.:** *Charakteristics of Two-Phase Flow and Evaporation Heat Transfer in Capillary at Constant Heat Fluxes.* Proceedings of the International Conference on „Heat Transfer and Transport Phenomena in Microscale“, pp. 196-203, ISBN: 1-56700-150-5, Begell House, Inc., 2000.

[78] **ZHEKOW, Z.; STAATE, Y.; BOYE, H.; SCHMIDT, J.:** *Experimental Investigation on Boiling Regimes in Minichannels.* Proceedings of the 4th European Thermal Science Conference, Birmingham, 2004.

[79] **ZIEREP, J.:** *Ähnlichkeitsgesetze und Modellregeln der Strömungslehre.* G. Braun GmbH, 1991.

8 Anhang

Anhang A – Gleichungen zur Korrektur der Infrarotmessungen

Gleichungen zur Korrektur des Emissionsverhältnisses

Die an dieser Stelle angegebenen Gleichungen werden von der Firmware (ERIKA 3.00) des Infrarotmesssystem AGEMA Thermovision® 900 verwendet [1].

$$I_{OC} = \tau\varepsilon I_{Obj} + \tau(1-\varepsilon)I_{Amb} + (1-\tau)I_{Atm} \tag{8.1}$$

$$I = \frac{R}{e^{\frac{B}{T}} - F} \tag{8.2}$$

$$T = \frac{B}{\ln\left(\frac{R}{I} + F\right)} \tag{8.3}$$

Korrektur des Emissionsverhältnisses

$$\varepsilon = \frac{\tau\varepsilon_F I_{Obj,F} - \tau\varepsilon_F I_{Amb}}{\tau I_{Obj} - \tau I_{Amb}} \tag{8.4}$$

Korrektur der Intensität des Objektes

$$\begin{aligned} &\tau\varepsilon I_{Obj} + \tau(1-\varepsilon)I_{Amb} + (1-\tau)I_{Atm} \\ &= \tau_F\varepsilon_F I_{Obj,F} + \tau_F(1-\varepsilon_F)I_{Amb,F} + (1-\tau_F)I_{Atm,F} \end{aligned} \tag{8.5}$$

$$I_{Obj} = \frac{\tau_F\varepsilon_F I_{Obj,F} + \tau_F(1-\varepsilon_F)I_{Amb,F} + (1-\tau_F)I_{Atm,F} - \tau(1-\varepsilon)I_{Amb} - (1-\tau)I_{Atm}}{\tau\varepsilon} \tag{8.6}$$

Im Rahmen der Firmware (ERIKA 3.00) ist die Berücksichtigung der Abhängigkeit des Emissionsverhältnisses von der Temperatur nicht möglich. Die oben angegebenen Gleichungen wurden in einem VBA-Modul implementiert, so dass eine Korrektur des temperaturabhängigen Emissionsverhältnisses und somit auch eine Korrektur der gemessenen Temperatur auf iterativem Weg erfolgen kann. Die Konstanten B, F und R sind Kalibrierparameter des Messystems, die für die einzelnen Messbereiche der Systemsoftware entnommen werden können. Weiterhin ist die Kenntnis der Umgebungsbedingungen, d. h. die der Temperatur der Umgebung, der Temperatur der Atmosphäre sowie des Transmissionskoeffizienten für den Bereich zwischen dem Messobjekt und dem Objektiv des IR-Systems, erforderlich. Der Einfluss eines fehlerhaften Emissionsverhältnisses geht aus Bild 3.39 hervor.

Anhang B – Diskretisierung der Erhaltungsgleichungen

Diskretisierung der Energiebilanz

Nach Abschnitt 4.2 lautet die Energiebilanz in der Integralen Form

$$\int_V \frac{\partial \rho h}{\partial t} dV + \int_A \boldsymbol{v} \rho h d\boldsymbol{A} = \int_A \lambda \nabla T d\boldsymbol{A} + \int_V \dot{q}_V dV \,. \qquad (8.7)$$

Wird diese Gleichung für ein hexaenderförmiges Volumenelement entsprechend Bild 5.3 im Abschnitt 5.2.2 diskretisiert, folgt

$$\begin{aligned}
&\frac{(\rho h)_{ijk}^{neu} - (\rho h)_{ijk}^{alt}}{\Delta t} V_{ijk} + (\rho h)_{i+1/2,j,k} \boldsymbol{v}_{i+1/2,j,k} \boldsymbol{A}_{e_{i,j,k}} - (\rho h)_{i-1/2,j,k} \boldsymbol{v}_{i-1/2,j,k} \boldsymbol{A}_{e_{i-1,j,k}} \\
&+ (\rho h)_{i,j+1/2,k} \boldsymbol{v}_{i,j+1/2,k} \boldsymbol{A}_{n_{i,j,k}} - (\rho h)_{i,j-1/2,k} \boldsymbol{v}_{i,j-1/2,k} \boldsymbol{A}_{n_{i,j-1,k}} \\
&+ (\rho h)_{i,j,k+1/2} \boldsymbol{v}_{i,j,k+1/2} \boldsymbol{A}_{t_{i,j,k}} - (\rho h)_{i,j,k-1/2} \boldsymbol{v}_{i,j,k-1/2} \boldsymbol{A}_{t_{i,j,k-1}} \\
&= \lambda_{i+1/2,j,k} \frac{(T_{i+1,j,k} - T_{i,j,k})}{l_{e_{i,j,k}}^2} (\boldsymbol{COG}_{i+1,j,k} - \boldsymbol{COG}_{i,j,k}) \boldsymbol{A}_{e_{i,j,k}} \\
&- \lambda_{i-1/2,j,k} \frac{(T_{i,j,k} - T_{i-1,j,k})}{l_{e_{i-1,j,k}}^2} (\boldsymbol{COG}_{i,j,k} - \boldsymbol{COG}_{i-1,j,k}) \boldsymbol{A}_{e_{i-1,j,k}} \\
&+ \lambda_{i,j+1/2,k} \frac{(T_{i,j+1,k} - T_{i,j,k})}{l_{n_{i,j,k}}^2} (\boldsymbol{COG}_{i,j+1,k} - \boldsymbol{COG}_{i,j,k}) \boldsymbol{A}_{n_{i,j,k}} \\
&- \lambda_{i,j-1/2,k} \frac{(T_{i,j,k} - T_{i,j-1,k})}{l_{n_{i,j-1,k}}^2} (\boldsymbol{COG}_{i,j,k} - \boldsymbol{COG}_{i,j-1,k}) \boldsymbol{A}_{n_{i,j-1,k}} \\
&+ \lambda_{i,j,k+1/2} \frac{(T_{i,j,k+1} - T_{i,j,k})}{l_{t_{i,j,k}}^2} (\boldsymbol{COG}_{i,j,k+1} - \boldsymbol{COG}_{i,j,k}) \boldsymbol{A}_{t_{i,j,k}} \\
&- \lambda_{i,j,k-1/2} \frac{(T_{i,j,k} - T_{i,j,k-1})}{l_{t_{i,j,k-1}}^2} (\boldsymbol{COG}_{i,j,k} - \boldsymbol{COG}_{i,j,k-1}) \boldsymbol{A}_{t_{i,j,k-1}} \qquad (8.8) \\
&+ \dot{q}_{V\,ijk} V_{ijk} \,.
\end{aligned}$$

Für den neuen Zustand ergibt sich damit

$$
\begin{aligned}
(\rho h)_{ijk}^{neu} = (\rho h)_{ijk}^{alt} &+ \Delta t\{\dot{q}_{Vijk} \\
&+ [\\
&- (\rho h)_{i+1/2,j,k} \boldsymbol{v}_{i+1/2,j,k} \boldsymbol{A}_{e_{i,j,k}} + (\rho h)_{i-1/2,j,k} \boldsymbol{v}_{i-1/2,j,k} \boldsymbol{A}_{e_{i-1,j,k}} \\
&- (\rho h)_{i,j+1/2,k} \boldsymbol{v}_{i,j+1/2,k} \boldsymbol{A}_{n_{i,j,k}} + (\rho h)_{i,j-1/2,k} \boldsymbol{v}_{i,j-1/2,k} \boldsymbol{A}_{n_{i,j-1,k}} \\
&- (\rho h)_{i,j,k+1/2} \boldsymbol{v}_{i,j,k+1/2} \boldsymbol{A}_{t_{i,j,k}} + (\rho h)_{i,j,k-1/2} \boldsymbol{v}_{i,j,k-1/2} \boldsymbol{A}_{t_{i,j,k-1}} \\
&+ \lambda_{i+1/2,j,k} \frac{(T_{i+1,j,k} - T_{i,j,k})}{l_{e_{i,j,k}}^2} (\boldsymbol{COG}_{i+1,j,k} - \boldsymbol{COG}_{i,j,k}) \boldsymbol{A}_{e_{i,j,k}} \\
&- \lambda_{i-1/2,j,k} \frac{(T_{i,j,k} - T_{i-1,j,k})}{l_{e_{i-1,j,k}}^2} (\boldsymbol{COG}_{i,j,k} - \boldsymbol{COG}_{i-1,j,k}) \boldsymbol{A}_{e_{i-1,j,k}} \\
&+ \lambda_{i,j+1/2,k} \frac{(T_{i,j+1,k} - T_{i,j,k})}{l_{n_{i,j,k}}^2} (\boldsymbol{COG}_{i,j+1,k} - \boldsymbol{COG}_{i,j,k}) \boldsymbol{A}_{n_{i,j,k}} \\
&- \lambda_{i,j-1/2,k} \frac{(T_{i,j,k} - T_{i,j-1,k})}{l_{n_{i,j-1,k}}^2} (\boldsymbol{COG}_{i,j,k} - \boldsymbol{COG}_{i,j-1,k}) \boldsymbol{A}_{n_{i,j-1,k}} \\
&+ \lambda_{i,j,k+1/2} \frac{(T_{i,j,k+1} - T_{i,j,k})}{l_{t_{i,j,k}}^2} (\boldsymbol{COG}_{i,j,k+1} - \boldsymbol{COG}_{i,j,k}) \boldsymbol{A}_{t_{i,j,k}} \\
&- \lambda_{i,j,k-1/2} \frac{(T_{i,j,k} - T_{i,j,k-1})}{l_{t_{i,j,k-1}}^2} (\boldsymbol{COG}_{i,j,k} - \boldsymbol{COG}_{i,j,k-1}) \boldsymbol{A}_{t_{i,j,k-1}} \\
&] / V_{ijk}\}
\end{aligned}
\qquad (8.9)
$$

.

Der neue Wert der Temperatur wird über einen geeigneten funktionalen Zusammenhang

$$T_{ijk}^* = f(h_{ijk}) = f\left(\frac{(\rho h)_{ijk}^{neu}}{\rho_{ijk}}\right) \qquad (8.10)$$

ermittelt. Beispielsweise kann dieser zu

$$T_{ijk}^* = \frac{(\rho h)_{ijk}^{neu}}{\rho_{ijk} c_{p_{ijk}}} \qquad (8.11)$$

bestimmt werden (konstante Stoffwerte). Eine äußere Interationsschleife (Nichtlinearschleife) dient der Berücksichtigung der Abhängigkeit der Stoffwerte von den Unbekannten sowie der Auflösung anderer Nichtlinearitäten. Mittels Relaxation kann der Fortschritt der Lösung gedämpft oder beschleunigt werden. Es gilt

$$u^{neu} = u^{alt} + \omega(u^* - u^{alt}). \qquad (8.12)$$

Bei konvektionsdominanten Problemen, ($|Pe| > 2$, vgl. [51]), ist es erforderlich, das Lösungsverfahren zu stabilisieren. Eine Möglichkeit stellt die Diskretisierung nach dem Upwind-Verfahren dar. Für den konvektiven Strom über die Fläche in positiver Richtung der ersten Koordinate folgt danach

$$(\rho h)_{i+1/2,j,k} = \begin{cases} (\rho h)_{i,j,k} & \text{wenn } \left(v_{i+1/2,j,k} A_{e_{i,j,k}}\right) > 0 \\ (\rho h)_{i+1,j,k} & \text{wenn } \left(v_{i+1/2,j,k} A_{e_{i,j,k}}\right) < 0 \end{cases}. \qquad (8.13)$$

Die konvektiven Ströme über die anderen Flächen werden analog bestimmt.

Matrixkoeffizienten der diskretisierten Energiegleichung

Die implizite Diskretisierung der Energiegleichung führt auf ein lineares Gleichungssystem $\boldsymbol{MT} = \boldsymbol{R}$ (unter Voraussetzung konstanter Stoffwerte). Um dieses System mit Hilfe verschiedener Gleichungssystemlöser behandeln zu können, ist es erforderlich, die Koeffizienten vor den Unbekannten (Temperaturen) zu bestimmen. Die spezifischen Enthalpien werden für den Fall konstanter Stoffwerte durch $h = c_p T$ ersetzt.

Die Gleichung des linearen Gleichungssystems, die aus der Diskretisierung der aktuellen Volumenzelle resultiert, lautet

$$\begin{aligned} &M_{i-1\,jk} T_{i-1\,jk} + M_{ij-1k} T_{ij-1k} + M_{ijk-1} T_{ijk-1} \\ &+ M_{ijk} T_{ijk} + M_{i+1\,jk} T_{i+1\,jk} + M_{ij+1k} T_{ij+1k} + M_{ijk+1} T_{ijk+1} = R_{ijk}. \end{aligned} \qquad (8.14)$$

Der Zeilenindex der Elemente der Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{M}$ entspricht dem der aktuell betrachteten Zelle (Index ijk) und ist in der obigen Gleichung nicht angegeben. Zur besseren Übersicht wird der Koeffizient der aktuellen Zelle aus den Anteilen zusammengesetzt, die aus dem Speicherterm ($M_{Sp,ijk}$), dem diffusiven Anteil ($M_{Diff,ijk}$) und dem konvektiven Anteil ($M_{Kon,ijk}$) resultieren. Es gilt

$$M_{ijk} = M_{Sp,ijk} + M_{Diff,ijk} + M_{Kon,ijk}. \qquad (8.15)$$

Für den Speicherterm folgt aus der Energiebilanz

$$M_{Sp,ijk} = \frac{\left(\rho c_p\right)_{ijk}^{neu}}{\Delta t} V_{ijk}, \qquad (8.16)$$

für den diffusiven Anteil

$$
\begin{aligned}
M_{Diff,ijk} = & \frac{\lambda_{i+1/2,j,k}}{l^2_{e_{i,j,k}}}\left(\boldsymbol{COG}_{i+1,j,k} - \boldsymbol{COG}_{i,j,k}\right)\boldsymbol{A}_{e_{i,j,k}} \\
& + \frac{\lambda_{i-1/2,j,k}}{l^2_{e_{i-1,j,k}}}\left(\boldsymbol{COG}_{i,j,k} - \boldsymbol{COG}_{i-1,j,k}\right)\boldsymbol{A}_{e_{i-1,j,k}} \\
& + \frac{\lambda_{i,j+1/2,k}}{l^2_{n_{i,j,k}}}\left(\boldsymbol{COG}_{i,j+1,k} - \boldsymbol{COG}_{i,j,k}\right)\boldsymbol{A}_{n_{i,j,k}} \\
& + \frac{\lambda_{i,j-1/2,k}}{l^2_{n_{i,j-1,k}}}\left(\boldsymbol{COG}_{i,j,k} - \boldsymbol{COG}_{i,j-1,k}\right)\boldsymbol{A}_{n_{i,j-1,k}} \\
& + \frac{\lambda_{i,j,k+1/2}}{l^2_{t_{i,j,k}}}\left(\boldsymbol{COG}_{i,j,k+1} - \boldsymbol{COG}_{i,j,k}\right)\boldsymbol{A}_{t_{i,j,k}} \\
& + \frac{\lambda_{i,j,k-1/2}}{l^2_{t_{i,j,k-1}}}\left(\boldsymbol{COG}_{i,j,k} - \boldsymbol{COG}_{i,j,k-1}\right)\boldsymbol{A}_{t_{i,j,k-1}}
\end{aligned}
\qquad (8.17)
$$

und für den konvektiven Anteil

$$
M_{Konv,ijk} = \begin{cases}
+\left(\rho c_p\right)_{i,j,k}\boldsymbol{v}_{i+1/2,j,k}\boldsymbol{A}_{e_{i,j,k}} & \text{wenn } \left(\boldsymbol{v}_{i+1/2,j,k}\boldsymbol{A}_{e_{i,j,k}}\right) > 0 \\
-\left(\rho c_p\right)_{i,j,k}\boldsymbol{v}_{i-1/2,j,k}\boldsymbol{A}_{e_{i-1,j,k}} & \text{wenn } \left(\boldsymbol{v}_{i-1/2,j,k}\boldsymbol{A}_{e_{i-1,j,k}}\right) < 0 \\
+\left(\rho c_p\right)_{i,j,k}\boldsymbol{v}_{i,j+1/2,k}\boldsymbol{A}_{n_{i,j,k}} & \text{wenn } \left(\boldsymbol{v}_{i,j+1/2,k}\boldsymbol{A}_{n_{i,j,k}}\right) > 0 \\
-\left(\rho c_p\right)_{i,j,k}\boldsymbol{v}_{i,j-1/2,k}\boldsymbol{A}_{n_{i,j-1,k}} & \text{wenn } \left(\boldsymbol{v}_{i,j-1/2,k}\boldsymbol{A}_{n_{i,j-1,k}}\right) < 0 \\
+\left(\rho c_p\right)_{i,j,k}\boldsymbol{v}_{i,j,k+1/2}\boldsymbol{A}_{t_{i,j,k}} & \text{wenn } \left(\boldsymbol{v}_{i,j,k+1/2}\boldsymbol{A}_{t_{i,j,k}}\right) > 0 \\
-\left(\rho c_p\right)_{i,j,k}\boldsymbol{v}_{i,j,k-1/2}\boldsymbol{A}_{t_{i,j,k-1}} & \text{wenn } \left(\boldsymbol{v}_{i,j,k-1/2}\boldsymbol{A}_{t_{i,j,k-1}}\right) < 0
\end{cases}
\qquad (8.18)
$$

Die Matrixkoeffizienten der Nachbarzellen ergeben sich aus der diskretisierten Energiebilanz zu

$$
\begin{aligned}
M_{i-1jk} = & -\frac{\lambda_{i-1/2,j,k}}{l^2_{e_{i-1,j,k}}}\left(\boldsymbol{COG}_{i,j,k} - \boldsymbol{COG}_{i-1,j,k}\right)\boldsymbol{A}_{e_{i-1,j,k}} \\
& -\left(\rho c_p\right)_{i-1,j,k}\boldsymbol{v}_{i-1/2,j,k}\boldsymbol{A}_{e_{i-1,j,k}} \qquad \text{wenn } \left(\boldsymbol{v}_{i-1/2,j,k}\boldsymbol{A}_{e_{i-1,j,k}}\right) > 0
\end{aligned}
\qquad (8.19)
$$

$$
\begin{aligned}
M_{ij-1k} = & -\frac{\lambda_{i,j-1/2,k}}{l^2_{n_{i,j-1,k}}}\left(\boldsymbol{COG}_{i,j,k} - \boldsymbol{COG}_{i,j-1,k}\right)\boldsymbol{A}_{n_{i,j-1,k}} \\
& -\left(\rho c_p\right)_{i,j-1,k}\boldsymbol{v}_{i,j-1/2,k}\boldsymbol{A}_{n_{i,j-1,k}} \qquad \text{wenn } \left(\boldsymbol{v}_{i,j-1/2,k}\boldsymbol{A}_{n_{i,j-1,k}}\right) > 0
\end{aligned}
\qquad (8.20)
$$

$$
\begin{aligned}
M_{ijk-1} = & -\frac{\lambda_{i,j,k-1/2}}{l^2_{t_{i,j,k-1}}}\left(\boldsymbol{COG}_{i,j,k} - \boldsymbol{COG}_{i,j,k-1}\right)\boldsymbol{A}_{t_{i,j,k-1}} \\
& -\left(\rho c_p\right)_{i,j,k-1}\boldsymbol{v}_{i,j,k-1/2}\boldsymbol{A}_{t_{i,j,k-1}} \qquad \text{wenn } \left(\boldsymbol{v}_{i,j-1/2,k}\boldsymbol{A}_{n_{i,j-1,k}}\right) > 0
\end{aligned}
\qquad (8.21)
$$

$$M_{ijk+1} = \begin{cases} -\dfrac{\lambda_{i,j,k+1/2}}{l^2_{t_{i,j,k}}}\left(\boldsymbol{COG}_{i,j,k+1} - \boldsymbol{COG}_{i,j,k}\right)\boldsymbol{A}_{t_{i,j,k}} \\ +\left(\rho c_p\right)_{i,j,k+1}\boldsymbol{v}_{i,j,k+1/2}\boldsymbol{A}_{t_{i,j,k}} & \text{wenn } \left(\boldsymbol{v}_{i,j,k+1/2}\boldsymbol{A}_{t_{i,j,k}}\right) < 0 \end{cases} \quad (8.22)$$

$$M_{ij+1k} = \begin{cases} -\dfrac{\lambda_{i,j+1/2,k}}{l^2_{n_{i,j,k}}}\left(\boldsymbol{COG}_{i,j+1,k} - \boldsymbol{COG}_{i,j,k}\right)\boldsymbol{A}_{n_{i,j,k}} \\ +\left(\rho c_p\right)_{i,j+1,k}\boldsymbol{v}_{i,j+1/2,k}\boldsymbol{A}_{n_{i,j,k}} & \text{wenn } \left(\boldsymbol{v}_{i,j+1/2,k}\boldsymbol{A}_{n_{i,j,k}}\right) < 0 \end{cases} \quad (8.23)$$

$$M_{i+1jk} = \begin{cases} -\dfrac{\lambda_{i+1/2,j,k}}{l^2_{e_{i,j,k}}}\left(\boldsymbol{COG}_{i+1,j,k} - \boldsymbol{COG}_{i,j,k}\right)\boldsymbol{A}_{e_{i,j,k}} \\ +\left(\rho c_p\right)_{i+1,j,k}\boldsymbol{v}_{i+1/2,j,k}\boldsymbol{A}_{e_{i,j,k}} & \text{wenn } \left(\boldsymbol{v}_{i+1/2,j,k}\boldsymbol{A}_{e_{i,j,k}}\right) < 0 \end{cases} \quad (8.24)$$

Für die rechte Seite des Gleichungssystems folgt

$$R_{ijk} = \left[\frac{\left(\rho c_p T\right)^{alt}_{ijk}}{\Delta t} + \dot{q}_{Vijk}\right]V_{ijk}\,. \quad (8.25)$$

Der Zeilenindex einer Matrixzeile, die aus der Diskretisierung für die Volumenzelle mit den Richtungsindizes i, j, k hervorgeht, ergibt sich aus der Durchnummerierung aller Zellen zu

$$Index = n_y n_z i + n_z j + k\,, \quad (8.26)$$

wenn die Anzahl der Volumenzellen für die jeweilige Koordinatenrichtung im Gitter konstant ist. Die Faktoren n_y und n_z bezeichnen die Anzahl der Volumenzellen für die zweite und die dritte Koordinatenrichtung einschließlich der Randzellen (Ghostzellen). Die Spaltenindizes für die Koeffizienten ergeben sich analog.

Matrixkoeffizienten der diskretisierten Impulsgleichung

Analog zum Vorgehen für die Energiebilanz wird die Gleichung (5.15) diskretisiert und in die Matrixform überführt, um mittels Gleichungssystemlöser die Geschwindigkeit $\vec{v}^*$ zu bestimmen. Unter der Annahme, dass $\vec{v}^*$ gegen $\vec{v}^{n+1}$ strebt, liegt ein nichtlineares Gleichungssystem vor. Dieses wird linearisiert, indem im konvektiven Term auf eine Geschwindigkeit eines vorhergehenden Iterationsschrittes der Nichtlinearschleife zurückgegriffen wird. Eine Zeile des Gleichungssystems $\boldsymbol{M}\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{R}$ lässt sich in der Form

$$\begin{aligned} &M_{i-1jk}v_{i-1jk} + M_{ij-1k}v_{ij-1k} + M_{ijk-1}v_{ijk-1} \\ &+ M_{ijk}\boldsymbol{v}_{ijk} + M_{i+1jk}v_{i+1jk} + M_{ij+1k}v_{ij+1k} + M_{ijk+1}v_{ijk+1} = R_{ijk} \end{aligned} \quad (8.27)$$

darstellen, mit

$$M_{ijk} = M_{Sp,ijk} + M_{Diff,ijk} + M_{Kon,ijk}\,. \quad (8.28)$$

Der Anteil des Speicherterms ergibt sich zu

$$M_{Sp,ijk} = \frac{\rho_{ijk}^{n+1}}{\Delta t} V_{ijk}\,, \tag{8.29}$$

der Anteil der diffusiven Terme zu

$$\begin{aligned} M_{Diff,ijk} = & \frac{\eta_{i+1/2,j,k}}{l^2_{e_{i,j,k}}} \left(\boldsymbol{COG}_{i+1,j,k} - \boldsymbol{COG}_{i,j,k}\right) \boldsymbol{A}_{e_{i,j,k}} \\ & + \frac{\eta_{i-1/2,j,k}}{l^2_{e_{i-1,j,k}}} \left(\boldsymbol{COG}_{i,j,k} - \boldsymbol{COG}_{i-1,j,k}\right) \boldsymbol{A}_{e_{i-1,j,k}} \\ & + \frac{\eta_{i,j+1/2,k}}{l^2_{n_{i,j,k}}} \left(\boldsymbol{COG}_{i,j+1,k} - \boldsymbol{COG}_{i,j,k}\right) \boldsymbol{A}_{n_{i,j,k}} \\ & + \frac{\eta_{i,j-1/2,k}}{l^2_{n_{i,j-1,k}}} \left(\boldsymbol{COG}_{i,j,k} - \boldsymbol{COG}_{i,j-1,k}\right) \boldsymbol{A}_{n_{i,j-1,k}} \\ & + \frac{\eta_{i,j,k+1/2}}{l^2_{t_{i,j,k}}} \left(\boldsymbol{COG}_{i,j,k+1} - \boldsymbol{COG}_{i,j,k}\right) \boldsymbol{A}_{t_{i,j,k}} \\ & + \frac{\eta_{i,j,k-1/2}}{l^2_{t_{i,j,k-1}}} \left(\boldsymbol{COG}_{i,j,k} - \boldsymbol{COG}_{i,j,k-1}\right) \boldsymbol{A}_{t_{i,j,k-1}} \end{aligned} \tag{8.30}$$

und der der Konvektion zu

$$\begin{aligned} M_{Kon.ijk} \quad & + \rho_{i,j,k} \boldsymbol{v}_{i+1/2,j,k} \boldsymbol{A}_{e_{i,j,k}} \quad \text{wenn } \left(\boldsymbol{v}_{i+1/2,j,k} \boldsymbol{A}_{e_{i,j,k}}\right) > 0 \\ & - \rho_{i,j,k} \boldsymbol{v}_{i-1/2,j,k} \boldsymbol{A}_{e_{i-1,j,k}} \quad \text{wenn } \left(\boldsymbol{v}_{i-1/2,j,k} \boldsymbol{A}_{e_{i-1,j,k}}\right) < 0 \\ & + \rho_{i,j,k} \boldsymbol{v}_{i,j+1/2,k} \boldsymbol{A}_{n_{i,j,k}} \quad \text{wenn } \left(\boldsymbol{v}_{i,j+1/2,k} \boldsymbol{A}_{n_{i,j,k}}\right) > 0 \\ & - \rho_{i,j,k} \boldsymbol{v}_{i,j-1/2,k} \boldsymbol{A}_{n_{i,j-1,k}} \quad \text{wenn } \left(\boldsymbol{v}_{i,j-1/2,k} \boldsymbol{A}_{n_{i,j-1,k}}\right) < 0 \\ & + \rho_{i,j,k} \boldsymbol{v}_{i,j,k+1/2} \boldsymbol{A}_{t_{i,j,k}} \quad \text{wenn } \left(\boldsymbol{v}_{i,j,k+1/2} \boldsymbol{A}_{t_{i,j,k}}\right) > 0 \\ & - \rho_{i,j,k} \boldsymbol{v}_{i,j,k-1/2} \boldsymbol{A}_{t_{i,j,k-1}} \quad \text{wenn } \left(\boldsymbol{v}_{i,j,k-1/2} \boldsymbol{A}_{t_{i,j,k-1}}\right) < 0 \end{aligned} \,. \tag{8.31}$$

An dieser Stelle ist wiederum eine Diskretisierung nach dem Upwind-Verfahren dargestellt. Die Koeffizienten der Nachbarzellen lauten für diese Diskretisierung

$$\begin{aligned} M_{i-1jk} = & -\frac{\eta_{i-1/2,j,k}}{l^2_{e_{i-1,j,k}}} \left(\boldsymbol{COG}_{i,j,k} - \boldsymbol{COG}_{i-1,j,k}\right) \boldsymbol{A}_{e_{i-1,j,k}} \\ & - \rho_{i-1,j,k} \boldsymbol{v}_{i-1/2,j,k} \boldsymbol{A}_{e_{i-1,j,k}} \qquad \text{wenn } \left(\boldsymbol{v}_{i-1/2,j,k} \boldsymbol{A}_{e_{i-1,j,k}}\right) > 0 \end{aligned} \tag{8.32}$$

$$\begin{aligned} M_{ij-1k} = & -\frac{\eta_{i,j-1/2,k}}{l^2_{n_{i,j-1,k}}} \left(\boldsymbol{COG}_{i,j,k} - \boldsymbol{COG}_{i,j-1,k}\right) \boldsymbol{A}_{n_{i,j-1,k}} \\ & - \rho_{i,j-1,k} \boldsymbol{v}_{i,j-1/2,k} \boldsymbol{A}_{n_{i,j-1,k}} \qquad \text{wenn } \left(\boldsymbol{v}_{i,j-1/2,k} \boldsymbol{A}_{n_{i,j-1,k}}\right) > 0 \end{aligned} \tag{8.33}$$

$$\begin{aligned} M_{ijk-1} = & -\frac{\eta_{i,j,k-1/2}}{l^2_{t_{i,j,k-1}}} \left(\boldsymbol{COG}_{i,j,k} - \boldsymbol{COG}_{i,j,k-1}\right) \boldsymbol{A}_{t_{i,j,k-1}} \\ & - \rho_{i,j,k-1} \boldsymbol{v}_{i,j,k-1/2} \boldsymbol{A}_{t_{i,j,k-1}} \qquad \text{wenn } \left(\boldsymbol{v}_{i,j-1/2,k} \boldsymbol{A}_{n_{i,j-1,k}}\right) > 0 \end{aligned} \tag{8.34}$$

$$M_{ijk+1} = -\frac{\eta_{i,j,k+1/2}}{l^2_{t_{i,j,k}}}\left(\boldsymbol{COG}_{i,j,k+1} - \boldsymbol{COG}_{i,j,k}\right)\boldsymbol{A}_{t_{i,j,k}} + \rho_{i,j,k+1}\boldsymbol{v}_{i,j,k+1/2}\boldsymbol{A}_{t_{i,j,k}} \quad \text{wenn } \left(\boldsymbol{v}_{i,j,k+1/2}\boldsymbol{A}_{t_{i,j,k}}\right) < 0 \tag{8.35}$$

$$M_{ij+1k} = -\frac{\eta_{i,j+1/2,k}}{l^2_{n_{i,j,k}}}\left(\boldsymbol{COG}_{i,j+1,k} - \boldsymbol{COG}_{i,j,k}\right)\boldsymbol{A}_{n_{i,j,k}} + \rho_{i,j+1,k}\boldsymbol{v}_{i,j+1/2,k}\boldsymbol{A}_{n_{i,j,k}} \quad \text{wenn } \left(\boldsymbol{v}_{i,j+1/2,k}\boldsymbol{A}_{n_{i,j,k}}\right) < 0 \tag{8.36}$$

$$M_{i+1jk} = -\frac{\eta_{i+1/2,j,k}}{l^2_{e_{i,j,k}}}\left(\boldsymbol{COG}_{i+1,j,k} - \boldsymbol{COG}_{i,j,k}\right)\boldsymbol{A}_{e_{i,j,k}} + \rho_{i+1,j,k}\boldsymbol{v}_{i+1/2,j,k}\boldsymbol{A}_{e_{i,j,k}} \quad \text{wenn } \left(\boldsymbol{v}_{i+1/2,j,k}\boldsymbol{A}_{e_{i,j,k}}\right) < 0 \tag{8.37}$$

Der Vektor der rechten Seite ergibt sich zu

$$\begin{aligned} R_{ijk} = & \left[\frac{(\rho v)^{alt}_{ijk}}{\Delta t} + f_{Vijk}\right]V_{ijk} \\ & - p_{i+1/2,j,k}\boldsymbol{A}_{e,i,j,k} + p_{i-1/2,j,k}\boldsymbol{A}_{e,i-1,j,k} \\ & - p_{i,j+1/2,k}\boldsymbol{A}_{n,i,j,k} + p_{i,j-1/2,k}\boldsymbol{A}_{n,i,j-1,k} \\ & - p_{i,j,k+1/2}\boldsymbol{A}_{t,i,j,k} + p_{i,j,k-1/2}\boldsymbol{A}_{b,i,j,k-1} \end{aligned} \tag{8.38}$$

Der Zeilenindex der aktuellen Matrixzeile steht, wie schon für die Energiegleichung ausgeführt, mit den Richtungsindizes i, j, k über die Beziehung

$$Index = n_y n_z i + n_z j + k \tag{8.39}$$

in einem eindeutigen Zusammenhang.

Matrixkoeffizienten der diskretisierten Massenbilanz

Das Geschwindigkeitspotential Φ wird nun mit Hilfe von Gleichung (5.14)

$$\int_V \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} dV = -\int_A \rho^{n+1}\boldsymbol{v}^{*,n+1} d\boldsymbol{A} + \int_A \rho^{n+1}\nabla\Phi^{n+1} d\boldsymbol{A} \tag{8.40}$$

bestimmt. Auch hier ergibt sich ein lineares Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} & M_{i-1jk}\Phi_{i-1jk} + M_{ij-1k}\Phi_{ij-1k} + M_{ijk-1}\Phi_{ijk-1} \\ & + M_{ijk}\Phi_{ijk} + M_{i+1jk}\Phi_{i+1jk} + M_{ij+1k}\Phi_{ij+1k} + M_{ijk+1}\Phi_{ijk+1} = R_{ijk} \end{aligned} \tag{8.41}$$

Für die in die Koeffizientenmatrix einzutragenden Terme folgt

$$M_{ijk} = -\left(M_{i+1jk} + M_{ij+1k} + M_{ijk+1} + M_{i-1jk} + M_{ij-1k} + M_{ijk-1}\right) \tag{8.42}$$

für die aktuelle Volumenzelle und

$$
\begin{aligned}
M_{i+1\,jk} &= \rho^{n+1}_{i+1/2\,jk}\frac{\boldsymbol{COG}_{i+1\,jk}-\boldsymbol{COG}_{ijk}}{l^2_{e_{ijk}}}\boldsymbol{A}_{e_{ijk}}, \quad & M_{i-1\,jk} &= \rho^{n+1}_{i-1/2\,jk}\frac{\boldsymbol{COG}_{ijk}-\boldsymbol{COG}_{i-1\,jk}}{l^2_{e_{i-1\,jk}}}\boldsymbol{A}_{e_{i-1\,jk}},\\
M_{ij+1k} &= \rho^{n+1}_{ij+1/2k}\frac{\boldsymbol{COG}_{ij+1k}-\boldsymbol{COG}_{ijk}}{l^2_{n_{ijk}}}\boldsymbol{A}_{n_{ijk}}, \quad & M_{ij-1k} &= \rho^{n+1}_{ij-1/2k}\frac{\boldsymbol{COG}_{ijk}-\boldsymbol{COG}_{ij-1k}}{l^2_{n_{ij-1k}}}\boldsymbol{A}_{n_{ij-1k}},\\
M_{ijk+1} &= \rho^{n+1}_{ijk+1/2}\frac{\boldsymbol{COG}_{ijk+1}-\boldsymbol{COG}_{ijk}}{l^2_{t_{ijk}}}\boldsymbol{A}_{t_{ijk}}, \quad & M_{ijk-1} &= \rho^{n+1}_{ijk-1/2}\frac{\boldsymbol{COG}_{ijk}-\boldsymbol{COG}_{ijk-1}}{l^2_{t_{ijk-1}}}\boldsymbol{A}_{t_{ijk-1}}
\end{aligned}
\qquad (8.43)
$$

für die Nachbarzellen. Der Vektor der rechten Seite ergibt sich zu

$$
\begin{aligned}
R_{ijk} = {} & \rho^{n+1}_{i+1/2\,jk}\boldsymbol{v}^{*,n+1}_{i+1/2\,jk}\boldsymbol{A}_{e,ijk} - \rho^{n+1}_{i-1/2\,jk}\boldsymbol{v}^{*,n+1}_{i-1/2\,jk}\boldsymbol{A}_{e,i-1\,jk}\\
& + \rho^{n+1}_{ij+1/2k}\boldsymbol{v}^{*,n+1}_{ij+1/2k}\boldsymbol{A}_{n,ijk} - \rho^{n+1}_{ij-1/2k}\boldsymbol{v}^{*,n+1}_{ij-1/2k}\boldsymbol{A}_{n,ij-1k}\\
& + \rho^{n+1}_{ijk+1/2}\boldsymbol{v}^{*,n+1}_{ijk+1/2}\boldsymbol{A}_{t,ijk} - \rho^{n+1}_{ijk-1/2}\boldsymbol{v}^{*,n+1}_{ijk-1/2}\boldsymbol{A}_{t,ijk-1}\\
& + \frac{\rho^{n+1}-\rho^{n}}{\Delta T}V_{ijk}.
\end{aligned}
\qquad (8.44)
$$

Diskretisierte Konvektions-Diffusionsgleichung mit Wichtung nach Patankar [51]

Zur Stabilisierung der Lösung von konvektionsdominanten Problemen wurden verschiedene Diskretisierungsschemen nach Patankar [51] implementiert. Nach Diskretisierung der Konvektions-Diffusionsgleichung lassen sich die Koeffizienten der Ströme über die Randflächen der Volumenzelle folgendermaßen bestimmen. Die Koeffizienten der diffusiven Ströme ergeben sich zu

$$
\begin{aligned}
D_e &= \Gamma_e / l_e \boldsymbol{A}_e, \quad & D_n &= \Gamma_n / l_n \boldsymbol{A}_n, \quad & D_t &= \Gamma_t / l_t \boldsymbol{A}_t,\\
D_w &= \Gamma_w / l_w \boldsymbol{A}_w, \quad & D_s &= \Gamma_s / l_s \boldsymbol{A}_s, \quad & D_b &= \Gamma_b / l_b \boldsymbol{A}_b
\end{aligned}
\qquad (8.45)
$$

worin Γ den jeweiligen Diffusionskoeffizienten (einschließlich Richtung) bezeichnet. Für die Koeffizienten der konvektiven Ströme folgt

$$
\begin{aligned}
F_e &= \rho_e \boldsymbol{v}_e \boldsymbol{A}_e, \quad & F_n &= \rho_n \boldsymbol{v}_n \boldsymbol{A}_n, \quad & F_t &= \rho_t \boldsymbol{v}_t \boldsymbol{A}_t,\\
F_w &= \rho_w \boldsymbol{v}_w \boldsymbol{A}_w, \quad & F_s &= \rho_s \boldsymbol{v}_s \boldsymbol{A}_s, \quad & F_b &= \rho_b \boldsymbol{v}_b \boldsymbol{A}_b.
\end{aligned}
\qquad (8.46)
$$

Die Elemente der Koeffizientenmatrix werden damit bestimmt zu

$$
\begin{aligned}
M_{i+1,j,k} &= -D_e W\left(F_e, D_e\right) - \max\left(-F_e, 0\right),\\
M_{i-1,j,k} &= -D_w W\left(F_w, D_w\right) - \max\left(F_w, 0\right),\\
M_{i,j+1,k} &= -D_n W\left(F_n, D_n\right) - \max\left(-F_n, 0\right),\\
M_{i,j-1,k} &= -D_s W\left(F_s, D_s\right) - \max\left(F_s, 0\right),\\
M_{i,j+1,k+1} &= -D_t W\left(F_t, D_t\right) - \max\left(-F_t, 0\right),\\
M_{i,j,k-1} &= -D_b W\left(F_b, D_b\right) - \max\left(F_b, 0\right),\\
M_{i,j,k} &= -M_{i+1,j,k} - M_{i-1,j,k} - M_{i,j+1,k} - M_{i,j-1,k} - M_{i,j,k+1} - M_{i,j,k-1} + M_{Sp,ijk}.
\end{aligned}
\qquad (8.47)
$$

Die Bestimmung der Wichtungsfaktoren W ist im Abschnitt 5.1.1 beschrieben.

Anhang C - Konturangepasste Koordinaten

Zur Diskretisierung von Geometrien, die von der Form der Grundsysteme abweichen, werden konturangepasste Koordinaten verwendet. Bei der Überführung der Transportgleichungen in die diskrete Form hat dies insbesondere auf den diffusiven Term einen Einfluss, da hier der Gradient der Unbekannten zu bestimmen ist.

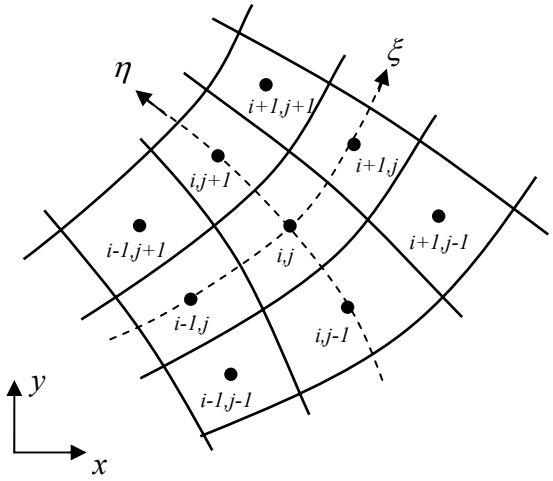


Bild 8.1: Anordnung der Volumenzellen in konturangepassten Koordinaten

Bestimmung des Gradienten 2D

Die Transformation $x, y \leftrightarrow \xi, \eta$ einer skalaren Funktion ϕ mit $\phi = \phi(x,y) = \phi(\xi(x,y), \eta(x,y))$ führt bei der Bestimmung des Gradienten auf

$$\operatorname{grad}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{y}} \qquad (8.48)$$

und für das Produkt des Gradienten und eines Flächenelementes auf

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\phi\boldsymbol{dA} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} dA_x \\ dA_y \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)dA_x + \left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)dA_y .\end{aligned} \qquad (8.49)$$

Die erforderlichen Ableitungen nach den Koordinatenrichtungen lassen sich direkt aus der Geometrie bestimmen. Es folgt

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\phi d\boldsymbol{A} &= \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}dA_x + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}dA_x + \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}dA_y + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}dA_y \\ &= \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}dA_x + \frac{\partial\xi}{\partial y}dA_y\right)\frac{\partial\phi}{\partial\xi} + \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}dA_x + \frac{\partial\eta}{\partial y}dA_y\right)\frac{\partial\phi}{\partial\eta} \\ &= C_\xi^*\frac{\partial\phi}{\partial\xi} + C_\eta^*\frac{\partial\phi}{\partial\eta} = C_\xi\partial\phi_\xi + C_\eta\partial\phi_\eta.\end{aligned} \tag{8.50}$$

Die Koeffizienten C_ξ und C_η sind dabei reine Funktionen der Geometrie.

Bestimmung des Gradienten 3D

Die Transformation $x,y,z \leftrightarrow \xi,\eta,\zeta$ einer skalaren Funktion ϕ mit $\phi = \phi(x,y,z) = \phi(\xi(x,y,z),\eta(x,y,z),\zeta(x,y,z))$ führt bei der Bestimmung des Gradienten auf

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}} &= \left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)\hat{\boldsymbol{x}} \\ &+ \left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\hat{\boldsymbol{y}} \\ &+ \left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z} + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\phi}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{z}}\end{aligned} \tag{8.51}$$

und für das Produkt des Gradienten und eines Flächenelementes auf

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\phi d\boldsymbol{A} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z} + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\phi}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} dA_x \\ dA_y \\ dA_z \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)dA_x \\ &+ \left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)dA_y \\ &+ \left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z} + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\phi}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)dA_z.\end{aligned} \tag{8.52}$$

Die erforderlichen Ableitungen nach den Koordinatenrichtungen lassen sich direkt aus der Geometrie bestimmen. Es folgt

$$
\begin{aligned}
\operatorname{grad}\phi d\boldsymbol{A} &= \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}dA_x + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}dA_x + \frac{\partial\phi}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}dA_x \\
&+ \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}dA_y + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}dA_y + \frac{\partial\phi}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}dA_y \\
&+ \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}dA_z + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z}dA_z + \frac{\partial\phi}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}dA_z \\
&= \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}dA_x + \frac{\partial\xi}{\partial y}dA_y + \frac{\partial\xi}{\partial z}dA_z\right)\frac{\partial\phi}{\partial\xi} \\
&+ \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}dA_x + \frac{\partial\eta}{\partial y}dA_y + \frac{\partial\eta}{\partial z}dA_z\right)\frac{\partial\phi}{\partial\eta} \\
&+ \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}dA_x + \frac{\partial\zeta}{\partial y}dA_y + \frac{\partial\zeta}{\partial z}dA_z\right)\frac{\partial\phi}{\partial\zeta} \\
&= C_\xi^*\frac{\partial\phi}{\partial\xi} + C_\eta^*\frac{\partial\phi}{\partial\eta} + C_\zeta^*\frac{\partial\phi}{\partial\zeta} = C_\xi\partial\phi_\xi + C_\eta\partial\phi_\eta + C_\zeta\partial\phi_\zeta .
\end{aligned}
\tag{8.53}
$$

Die Koeffizienten C_ξ, C_η und C_ζ sind dabei reine Funktionen der Geometrie.

Bestimmung der Richtungsableitungen 2D

Die in den Erhaltungsgleichungen auftretenden partiellen Ableitungen nach den kartesischen Koordinatenrichtungen lassen sich in den Koordinaten des konturangepassten Systems folgendermaßen darstellen

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial\xi}\xi_x + \frac{\partial}{\partial\eta}\eta_x, \\
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial\xi}\xi_y + \frac{\partial}{\partial\eta}\eta_y .
\end{aligned}
\tag{8.54}
$$

Für die partiellen Ableitungen nach den konturangepassten Koordinaten gilt analog

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\xi} &= \frac{\partial}{\partial x}x_\xi + \frac{\partial}{\partial y}y_\xi, \\
\frac{\partial}{\partial\eta} &= \frac{\partial}{\partial x}x_\eta + \frac{\partial}{\partial y}y_\eta .
\end{aligned}
\tag{8.55}
$$

Für ein bekanntes konturangepasstes Gitter lassen sich die Ableitungen der Komponenten der kartesischen Koordinaten nach den Komponenten der konturangepassten Koordinaten mit Hilfe zentraler Differenzen bestimmen. Zur Bestimmung der partiellen Ableitungen nach den Komponenten der kartesischen Koordinaten ist dann das lineare Gleichungssystem

$$
\begin{bmatrix} x_\xi & y_\xi \\ x_\eta & y_\eta \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial\eta} \end{bmatrix}
\tag{8.56}
$$

zu lösen. Dies kann beispielsweise mit Hilfe der Cramerschen Regel erfolgen, so dass sich für die einzelnen Ableitungen die folgenden Beziehungen ergeben:

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{1}{|J|}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial\xi} & y_\xi\\ \frac{\partial}{\partial\eta} & y_\eta\end{vmatrix},\ \frac{\partial}{\partial y}=\frac{1}{|J|}\begin{vmatrix}x_\xi & \frac{\partial}{\partial\xi}\\ x_\eta & \frac{\partial}{\partial\eta}\end{vmatrix}. \tag{8.57}$$

Darin bezeichnet $|J|$ die Jacobi'sche Funktionaldeterminante

$$|J|=\begin{vmatrix}x_\xi & y_\xi\\ x_\eta & y_\eta\end{vmatrix}. \tag{8.58}$$

Die gesuchten Ableitungen der Komponenten der konturangepassten Koordinaten nach den Komponenten der kartesichen Koordinaten ergeben sich durch Einsetzen der konturangepassten Koordinaten in obige Gleichungen. Für die gesuchten Terme folgt damit

$$\begin{aligned}\frac{\partial\xi}{\partial x}&=\frac{y_\eta}{|J|},\quad \frac{\partial\eta}{\partial x}=-\frac{y_\xi}{|J|},\\ \frac{\partial\xi}{\partial y}&=-\frac{x_\eta}{|J|},\quad \frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{x_\xi}{|J|}.\end{aligned} \tag{8.59}$$

Die Richtungsableitungen und somit der Gradient einer Feldfunktion können nun im konturangepassten Koordinatensystem bestimmt werden.

Bestimmung der Richtungsableitungen 3D

Die in den Erhaltungsgleichungen auftretenden partiellen Ableitungen nach den kartesischen Koordinatenrichtungen lassen sich in den Koordinaten des konturangepassten Systems folgendermaßen darstellen

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial\xi}\xi_x+\frac{\partial}{\partial\eta}\eta_x+\frac{\partial}{\partial\zeta}\zeta_x,\\ \frac{\partial}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial\xi}\xi_y+\frac{\partial}{\partial\eta}\eta_y+\frac{\partial}{\partial\zeta}\zeta_y,\\ \frac{\partial}{\partial z}&=\frac{\partial}{\partial\xi}\xi_z+\frac{\partial}{\partial\eta}\eta_z+\frac{\partial}{\partial\zeta}\zeta_z.\end{aligned} \tag{8.60}$$

Für die partiellen Ableitungen nach den konturangepassten Koordinaten gilt analog

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\xi}&=\frac{\partial}{\partial x}x_\xi+\frac{\partial}{\partial y}y_\xi+\frac{\partial}{\partial z}z_\xi,\\ \frac{\partial}{\partial\eta}&=\frac{\partial}{\partial x}x_\eta+\frac{\partial}{\partial y}y_\eta+\frac{\partial}{\partial z}z_\eta,\\ \frac{\partial}{\partial\zeta}&=\frac{\partial}{\partial x}x_\zeta+\frac{\partial}{\partial y}y_\zeta+\frac{\partial}{\partial z}z_\zeta.\end{aligned} \tag{8.61}$$

Für ein bekanntes konturangepasstes Gitter lassen sich die Ableitungen der Komponenten der kartesischen Koordinaten nach den Komponenten der konturangepassten Koordinaten mit Hilfe zentraler Differenzen bestimmen. Zur Bestimmung der partiellen Ableitungen nach den Komponenten der kartesischen Koordinaten ist dann das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} x_\xi & y_\xi & z_\xi \\ x_\eta & y_\eta & z_\eta \\ x_\zeta & y_\zeta & z_\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \tag{8.62}$$

zu lösen. Dies kann beispielsweise mit Hilfe der Cramerschen Regel erfolgen, so dass sich für die einzelnen Ableitungen die folgenden Beziehungen ergeben

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{|J|}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} & y_\xi & z_\xi \\ \frac{\partial}{\partial \eta} & y_\eta & z_\eta \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} & y_\zeta & z_\zeta \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{|J|}\begin{vmatrix} x_\xi & \frac{\partial}{\partial \xi} & z_\xi \\ x_\eta & \frac{\partial}{\partial \eta} & z_\eta \\ x_\zeta & \frac{\partial}{\partial \zeta} & z_\zeta \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{|J|}\begin{vmatrix} x_\xi & y_\xi & \frac{\partial}{\partial \xi} \\ x_\eta & y_\eta & \frac{\partial}{\partial \eta} \\ x_\zeta & y_\zeta & \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{vmatrix}. \tag{8.63}$$

Darin bezeichnet $|J|$ die Jacobi'sche Funktionaldeterminante

$$|J| = \begin{vmatrix} x_\xi & y_\xi & z_\xi \\ x_\eta & y_\eta & z_\eta \\ x_\zeta & y_\zeta & z_\zeta \end{vmatrix}. \tag{8.64}$$

Die gesuchten Ableitungen der Komponenten der konturangepassten Koordinaten nach den Komponenten der kartesichen Koordinaten ergeben sich durch Einsetzten der konturangepassten Koordinaten in obige Gleichungen. Für die gesuchten Terme folgt damit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{1}{|J|}\begin{vmatrix} y_\eta & z_\eta \\ y_\zeta & z_\zeta \end{vmatrix}, & \frac{\partial \eta}{\partial x} &= -\frac{1}{|J|}\begin{vmatrix} y_\xi & z_\xi \\ y_\zeta & z_\zeta \end{vmatrix}, & \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= \frac{1}{|J|}\begin{vmatrix} y_\xi & z_\xi \\ y_\zeta & z_\zeta \end{vmatrix}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} &= -\frac{1}{|J|}\begin{vmatrix} x_\eta & z_\eta \\ x_\zeta & z_\zeta \end{vmatrix}, & \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{1}{|J|}\begin{vmatrix} x_\xi & z_\xi \\ x_\zeta & z_\zeta \end{vmatrix}, & \frac{\partial \zeta}{\partial y} &= -\frac{1}{|J|}\begin{vmatrix} x_\xi & z_\xi \\ x_\zeta & z_\zeta \end{vmatrix}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} &= \frac{1}{|J|}\begin{vmatrix} x_\eta & y_\eta \\ x_\zeta & y_\zeta \end{vmatrix}, & \frac{\partial \eta}{\partial z} &= -\frac{1}{|J|}\begin{vmatrix} x_\xi & y_\xi \\ x_\zeta & y_\zeta \end{vmatrix}, & \frac{\partial \zeta}{\partial z} &= \frac{1}{|J|}\begin{vmatrix} x_\xi & y_\xi \\ x_\eta & y_\eta \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{8.65}$$

Die Richtungsableitungen und somit der Gradient einer Feldfunktion können nun im konturangepassten Koordinatensystem bestimmt werden.

Orthogonale Koordinatensysteme

Die Verwendung von orthogonalen Gittern weist Vorteile für die Lösung der Erhaltungsgleichungen auf. Diese Vorteile sind einerseits physikalisch begründet. Da

diffusive Ströme normal zur Fläche bestimmt werden, werden sie gut approximiert. Andererseits lässt sich der Berechnungsaufwand für die diffusiven Ströme vereinfachen, wenn das konturangepasste System ein orthogonales System darstellt, da die Flächennormalen mit den Koordinatenrichtungen zusammenfallen. In Abhängigkeit vom Richtungsvektor des durchströmten Flächenelementes entfallen Terme aus der Transformationsvorschrift, vgl. [38], [74], so dass Gleichung (5.3) aus der Diskretisierung der Transportgleichung resultiert.

Anhang D – Hilfsfunktionen für die Gittergenerierung und den Datenaustausch

Trilineare Interpolation

Zur Bestimmung der Randwerte der sich überlagernden Gitter wird für jeden betreffenden Gitterpunkt P des einen Gitters eine Interpolation zwischen den Werten der ihn umgebenden Gitterpunkte $P_1, P_2, \ldots, P_8$ des jeweils anderen Gitters entsprechend der Funktion

$$f(x,y,z) = a_1xyz + a_2xy + a_3yz + a_4zx + a_5x + a_6y + a_7z + a_8 \qquad (8.66)$$

vorgenommen. Bild 8.2 zeigt ein hexaederförmiges Gebiet, dass durch die acht Eckpunkte festgelegt ist. Innerhalb dieses Gebietes ist ein Funktionswert für den Punkt P zu ermitteln.

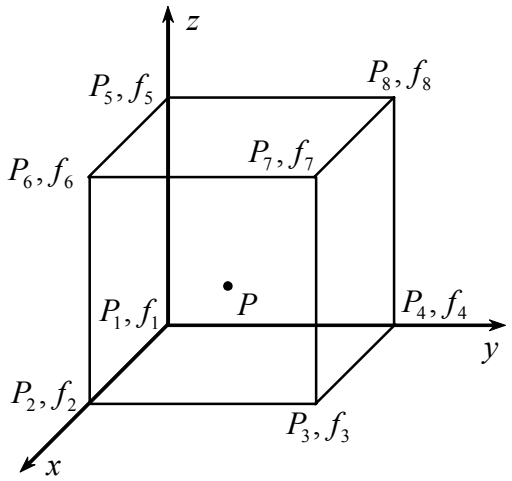


Bild 8.2: Gitterzelle und Interpolationspunkt

Aus der Bedingung, dass in jedem Eckpunkt der Zelle der bekannte Funktionswert in diesem Punkt auch durch die Interpolationsfunktion (8.66) wiedergegeben werden soll, folgt ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} x_1y_1z_1 & x_1y_1 & y_1z_1 & z_1x_1 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2y_2z_2 & x_2y_2 & y_2z_2 & z_2x_2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3y_3z_3 & x_3y_3 & y_3z_3 & z_3x_3 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4y_4z_4 & x_4y_4 & y_4z_4 & z_4x_4 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ x_5y_5z_5 & x_5y_5 & y_5z_5 & z_5x_5 & x_5 & y_5 & z_5 & 1 \\ x_6y_6z_6 & x_6y_6 & y_6z_6 & z_6x_6 & x_6 & y_6 & z_6 & 1 \\ x_7y_7z_7 & x_7y_7 & y_7z_7 & z_7x_7 & x_7 & y_7 & z_7 & 1 \\ x_8y_8z_8 & x_8y_8 & y_8z_8 & z_8x_8 & x_8 & y_8 & z_8 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \end{bmatrix} \qquad (8.67)$$

aus welchem sich die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_8$ bestimmen lassen. Dieses System wird mit Hilfe einer Gauss-Elimination gelöst.

Geometrie

Berechnung des Schnittpunktes einer Geraden mit einer Fläche

Eine Gerade $\boldsymbol{g}$ sei gegeben durch die Gleichung

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}_0 + a\boldsymbol{g}_1 . \qquad (8.68)$$

Weiterhin sei eine Fläche $\boldsymbol{A}$ durch die Gleichung

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 + b\boldsymbol{A}_1 + c\boldsymbol{A}_2 \qquad (8.69)$$

gegeben, Bild 8.3. Gesucht ist der Schnittpunkt der Geraden mit der Fläche, d. h. der Durchtritts- oder Durchstechpunkt. Zu bestimmen ist also der Punkt P, für den

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g} &= \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{g}_0 + a\boldsymbol{g}_1 &= \boldsymbol{A}_0 + b\boldsymbol{A}_1 + c\boldsymbol{A}_2 \end{aligned} \qquad (8.70)$$

gilt. Es sind die Koeffizienten a, b und c so zu bestimmen, dass Gleichung (8.70) erfüllt ist. Eine Umformung von Gleichung (8.70) führt auf das lineare Gleichungssystem

$$a\boldsymbol{g}_1 - b\boldsymbol{A}_1 - c\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A}_0 - \boldsymbol{g}_0 , \qquad (8.71)$$

das in Matrixschreibweise die Gestalt

$$\begin{bmatrix} g_{1,x} & A_{1,x} & A_{2,x} \\ g_{1,y} & A_{1,y} & A_{2,y} \\ g_{1,z} & A_{1,z} & A_{2,z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{0,x} - g_{0,x} \\ A_{0,y} - g_{0,y} \\ A_{0,z} - g_{0,z} \end{bmatrix} \qquad (8.72)$$

annimmt. Für das hier betrachtete Problem ist es nicht erforderlich, das gesamte

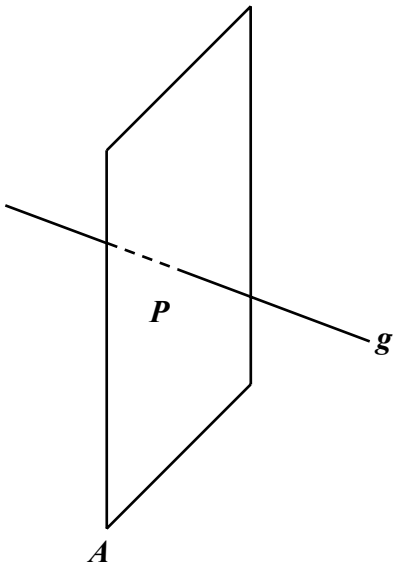


Bild 8.3: Fläche/Gerade

Gleichungssystem zu lösen. Es genügt die Bestimmung des Koeffizienten a. Für den gesuchten Schnittpunkt von Gerade und Fläche folgt dann

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{g}_0 + a\boldsymbol{g}_1 . \tag{8.73}$$

Werden die Koeffizienten b und c auch bestimmt, kann mit Hilfe der Flächengleichung die Korrektheit der Lösung überprüft werden.

Berechnung einer Flächennormalen, die durch den Punkt *P* verläuft

Gegeben sei eine Fläche $\boldsymbol{A}$ durch die Gleichung

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 + a\boldsymbol{A}_1 + b\boldsymbol{A}_2 . \tag{8.74}$$

Weiterhin sei der Punkt $\boldsymbol{P}$ mit $\boldsymbol{P} \notin \boldsymbol{A}$ gegeben. Gesucht ist eine Gerade $\boldsymbol{g}$, die durch den Punkt $\boldsymbol{P}$ verläuft und die auf $\boldsymbol{A}$ senkrecht steht. Wird diese Gerade durch die Gleichung

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}_0 + c\boldsymbol{g}_1 \tag{8.75}$$

beschrieben, kann die Bedingung $\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{g}$ erfüllt werden, wenn $\boldsymbol{g}_0 = \boldsymbol{P}$ gilt. Es bleibt also noch der Richtungsvoktor $\boldsymbol{g}_1$ zu bestimmen. Die Erfüllung der Orthogonalitätsbedingung $\boldsymbol{g} \perp \boldsymbol{A}$ ist erfüllt, wenn gilt $\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{A}_1 = 0$ und $\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{A}_2 = 0$. Es ergibt sich ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Komponenten von $\boldsymbol{g}_1$. Dieses ist unterbestimmt, da nur zwei Gleichungen aber 3 Unbekannte vorliegen. Sind an den Vektor $\boldsymbol{g}_1$ keine weiteren als die genannten Bedingungen geknüpft, ist sein Absolutbetrag von untergeordneter Bedeutung. Eine Komponente des Vektors kann daher frei gewählt werden. Es sei $g_{1,z} = 1$. Es folgt dann

$$\begin{aligned} g_{1,x}A_{1,x} + g_{1,y}A_{1,y} &= -A_{1,z}, \\ g_{1,x}A_{2,x} + g_{1,y}A_{2,y} &= -A_{2,z}, \end{aligned} \tag{8.76}$$

und

$$\begin{aligned} g_{1,x} &= \left(-A_{1,z}A_{2,y} + A_{2,z}A_{1,y}\right)/\left(A_{1,x}A_{2,y} - A_{2,x}A_{1,y}\right), \\ g_{1,y} &= \left(-A_{1,x}A_{2,z} + A_{2,x}A_{1,z}\right)/\left(A_{1,x}A_{2,y} - A_{2,x}A_{1,y}\right). \end{aligned} \tag{8.77}$$

Eine weitere Variante zur Bestimmung des Richtungsvektors $\boldsymbol{g}_1$ entsprechend der Orthogonalitätsbedingung ist

$$\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{A}_1 \times \boldsymbol{A}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_{1,x} & A_{1,y} & A_{1,z} \\ A_{2,x} & A_{2,y} & A_{2,z} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,y}A_{2,z} - A_{2,y}A_{1,z} \\ A_{1,z}A_{2,x} - A_{2,z}A_{1,x} \\ A_{1,x}A_{2,y} - A_{2,x}A_{1,y} \end{bmatrix}. \tag{8.78}$$

Sind Anforderungen an den Betrag des Vektors $\boldsymbol{g}_1$ gestellt, beispielsweise wenn dieser dem Flächeninhalt einer bestimmten Teilfläche von $\boldsymbol{A}$ entsprechen soll, ist $\boldsymbol{g}_1$ entsprechend zu skalieren.

Anhang E - Abbildungen

Strömungsformen

Bild 8.4: Siedebeginn

Bild 8.5: Blasensieden

Bild 8.6: aufgewühlte Strömung

Bild 8.7: Kolbenblasen-strömung

Bild 8.8: Nebelströmung

Die Abbildungen zeigen unterschiedliche Strömungsformen, die bei der Verdampfung einer Flüssigkeit auftreten können. Das gezeigte Verdampferrohr ist ein doppelwandiges Glasrohr. Die zu verdampfende Flüssigkeit, hier ein leichtsiedendes Treibmittel, strömt aufwärts im Innenrohr. Im äußeren Ringspalt strömt das Heizmittel, für diese Aufnahmen wurde Wasser verwendet, abwärts.

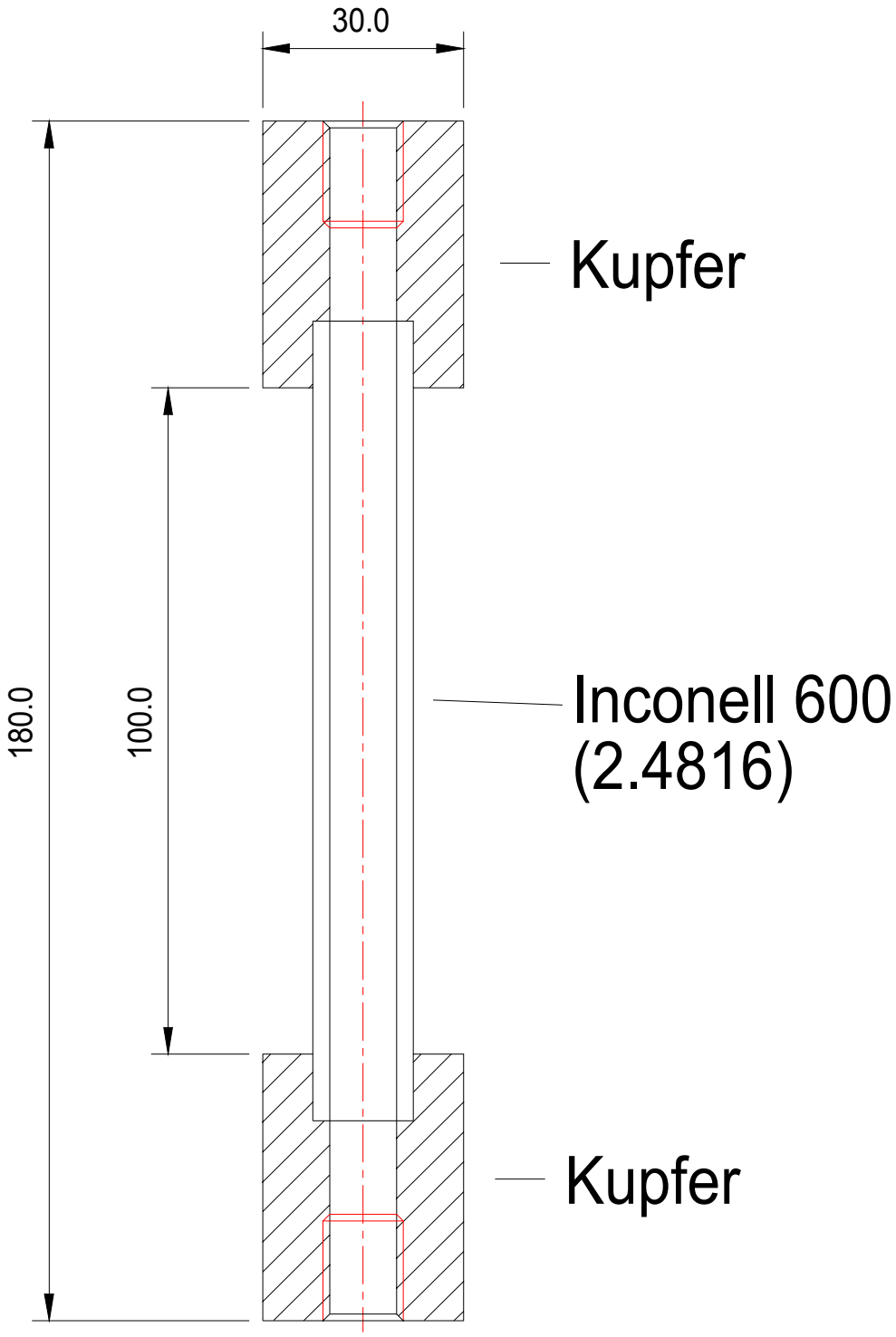


Bild 8.9: Skizze eines Versuchskanals

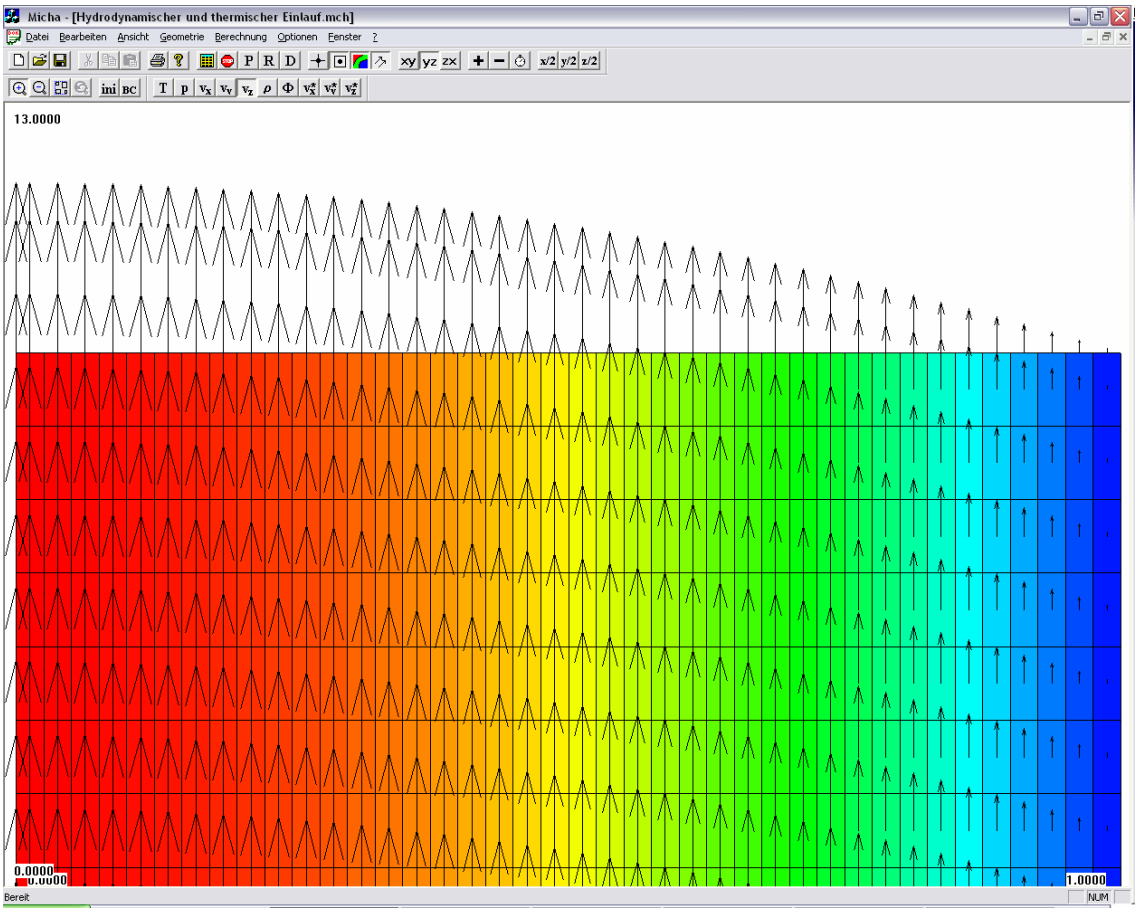


Bild 8.10: Screenshot Programmoberfläche „Micha“

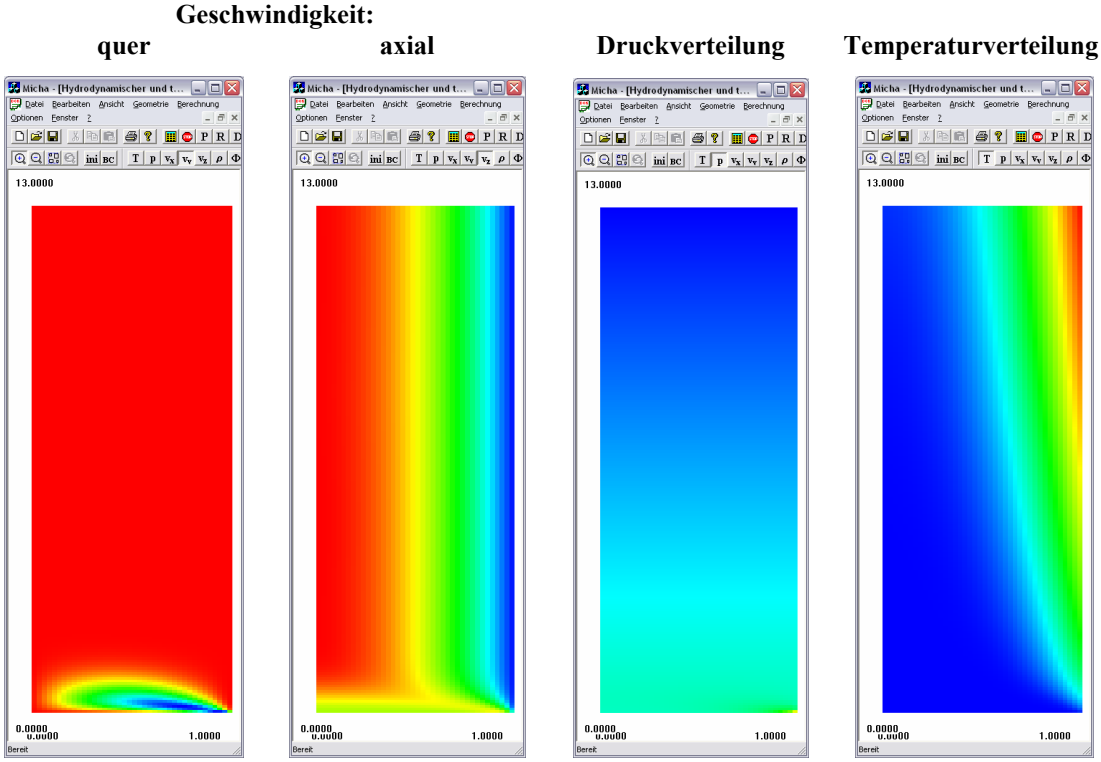


Bild 8.11: Screenshots Kanaleinlaufströmung

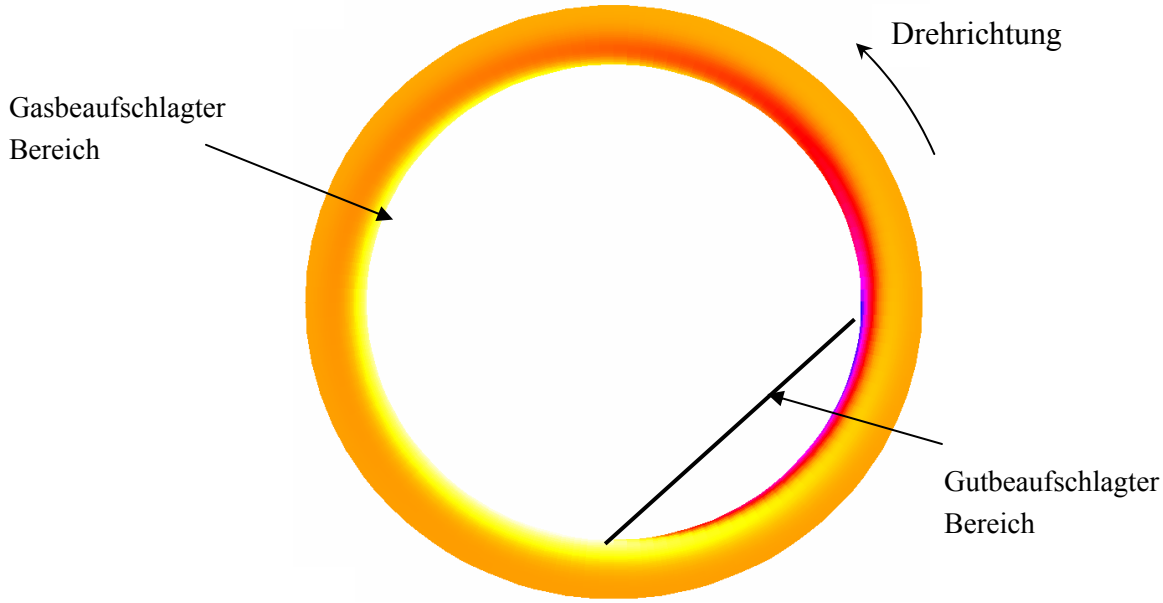


Bild 8.12 Temperaturfeld in der Rohrwand eines Drehrohrofens

Nischenströmung

Nischenströmung, Re=10, Gitter 100x100

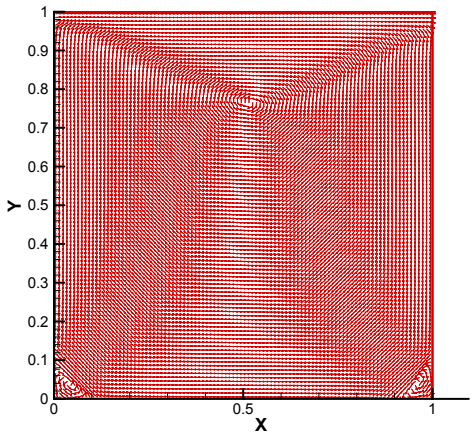


Bild 8.13: Geschwindigkeitsvektoren

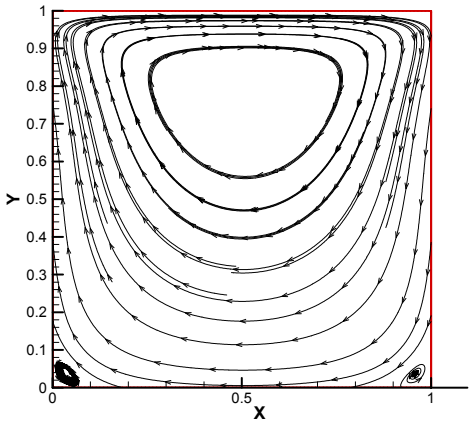


Bild 8.14: Stromlinien

Anhang F – ausgewählte Stoffwerte

Stoffwerte für Inconel 600 nach [58]:

$$\left.\begin{aligned} c_p &= 460\,(\mathrm{J/kgK}) \\ \rho &= 8450\,\mathrm{kg/m^3} \end{aligned}\right\} \text{ bei } 20\,^{\circ}\mathrm{C}$$

$$\rho_{el} = (1{,}0208 + 0{,}00020 \cdot t - 6{,}38 \cdot 10^{-8} t^2) \cdot 10^{-6}\,\Omega m$$

$$\lambda = 14{,}4334 \cdot \left(1 + 0{,}0010748 \cdot \vartheta + 6{,}5 \cdot 10^{-8} \cdot \vartheta^2\right) \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{mK}}$$

Stoffwerte für Wasser (einphasig) nach [3] bzw. [75]

gültig bis 100 °C

$$\rho = -3{,}0579 \cdot 10^{-3} \cdot T^2 + 1{,}5317 \cdot T + 8{,}1225 \cdot 10^2 \cdot 10^{-9} \cdot T^3\ \mathrm{kg/m^3}$$

$$\eta = -1{,}4914 \cdot 10^{-9} \cdot T^3 + 1{,}6013 \cdot 10^{-6} \cdot T^2 - 5{,}7706 \cdot 10^{-4} \cdot T + 7{,}0132 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{kg/(ms)}$$

$$\lambda = -9{,}7384 \cdot 10^{-6} \cdot T^2 + 7{,}4818 \cdot 10^{-3} \cdot T - 7{,}5727 \cdot 10^{-1}\ \mathrm{W/(mK)}$$

$$c_p = 1{,}4857 \cdot 10^{-6} \cdot T^4 - 2{,}0175 \cdot 10^{-3} \cdot T^3 + 1{,}0338 \cdot T^2 - 2{,}3627 \cdot 10^2 \cdot T + 2{,}4459 \cdot 10^4\ \mathrm{J/(kgK)}$$

gültig bis 160 °C

$$\rho = 4{,}4266 \cdot 10^{-6} \cdot T^3 - 7{,}3735 \cdot 10^{-3} \cdot T^2 + 2{,}9283 \cdot T + 6{,}6259 \cdot 10^2\ \mathrm{kg/m^3}$$

$$\eta = 4{,}0349 \cdot 10^{-12} \cdot T^4 - 6{,}3945 \cdot 10^{-9} \cdot T^3 + 3{,}8080 \cdot 10^{-6} \cdot T^2 - 1{,}0122 \cdot 10^{-3} \cdot T + 1{,}0175 \cdot 10^{-1}\ \mathrm{kg/(ms)}$$

$$\lambda = 2{,}3954 \cdot 10^{-8} \cdot T^3 - 3{,}3480 \cdot 10^{-5} \cdot T^2 + 1{,}5297 \cdot 10^{-2} \cdot T - 1{,}6114\ \mathrm{W/(mK)}$$

$$c_p = 1{,}9337 \cdot 10^{-7} \cdot T^4 - 2{,}5071 \cdot 10^{-4} \cdot T^3 + 1{,}3029 \cdot 10^{-1} \cdot T^2 - 3{,}1494 \cdot 10^{1} \cdot T + 7{,}1023 \cdot 10^3\ \mathrm{J/(kgK)}$$

gültig bis 210 °C

$$\rho = -2{,}4299 \cdot 10^{-3} \cdot T^2 + 1{,}1097 \cdot T + 8{,}8354 \cdot 10^2\ \mathrm{kg/m^3}$$

$$\eta = -1{,}7364 \cdot 10^{-14} \cdot T^5 + 3{,}5929 \cdot 10^{-11} \cdot T^4 - 2{,}9714 \cdot 10^{-8} \cdot T^3 + 1{,}2291 \cdot 10^{-5} \cdot T^2 - 2{,}5474 \cdot 10^{-3} \cdot T + 2{,}1232 \cdot 10^{-1}\ \mathrm{kg/(ms)}$$

$$\lambda = -9{,}2887 \cdot 10^{-11} \cdot T^4 + 1{,}6109 \cdot 10^{-7} \cdot T^3 - 1{,}0891 \cdot 10^{-4} \cdot T^2 + 3{,}3622 \cdot 10^{-2} \cdot T - 3{,}2699\ \mathrm{W/(mK)}$$

$$c_p = 1{,}7346 \cdot 10^{-7} \cdot T^4 - 2{,}2235 \cdot 10^{-4} \cdot T^3 + 1{,}1504 \cdot 10^{-1} \cdot T^2 - 2{,}7826 \cdot 10 \cdot T + 6{,}7673 \cdot 10^3\ \mathrm{J/(kgK)}$$

Lebenslauf

Zur Person

Name:	Ingo Hapke
Geburtsdatum:	28. 04. 1968
Geburtsort:	Neubrandenburg

Schulausbildung

1976 - 1984	Besuch der 10-klassigen allgemeinbildenden Oberschule in Friedland/Meckl.
1984 - 1987	Berufsausbildung zum Maschinen- und Anlagenmonteur mit Abitur
1987 - 1989	Wehrdienst
1989 - 1990	Tätigkeit als Maschinen- und Anlagenmonteur

Hochschulausbildung

1990 - 1995	Studium des Maschinenbaus, Studiengang Thermischer Maschinenbau/Verfahrenstechnik, Vertiefungsrichtung Strömungs-maschinen an der "Otto-von-Guericke-Universität" in Magdeburg
1995 - 1997	Wissenschaftlicher Mitarbeiter der Abteilung Strömungslehre des Institutes für Strömungstechnik und Thermodynamik der "Otto-von-Guericke-Universität" in Magdeburg
1997 - 2002	Wissenschaftlicher Mitarbeiter der Abteilung Thermodynamik des Institutes für Strömungstechnik und Thermodynamik der "Otto-von-Guericke-Universität" in Magdeburg
seit 2002	Mitarbeiter der Volkswagen AG in Wolfsburg