

# **Schwingungsinduziertes Fließen feinstkörniger, kohäsiver Pulver**

## **Dissertation**

zur Erlangung des akademischen Grades

## **Doktoringenieur**

**(Dr.-Ing.)**

von Dipl.-Ing. Thomas Kollmann

geb. am 17.08.1967 in Magdeburg

genehmigt durch die Fakultät für Verfahrens- und Systemtechnik  
der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. Jürgen Tomas  
Prof. Dr.-Ing. Jörg Schwedes  
Dr. rer. nat. habil. Friedemann Laugwitz

Promotionskolloquium am: 22.03.2002

*„Zu solchen Extravaganzen haben wir nicht oft Gelegenheit, und ich bin froh, daß ich sie genutzt habe.“<sup>a</sup>*

PAUL AUSTER

Für meine Familie

## Danksagung

Herr Prof. Dr.-Ing. habil. Jürgen Tomas initiierte und betreute die vorliegende Arbeit. Ich danke ihm für das in mich gesetzte Vertrauen und vor allem für die mir von ihm gelassenen Freiräume. Herrn Prof. Dr.-Ing. Jörg Schwedes und Herrn Dr. rer. nat. habil. Friedemann Laugwitz möchte ich für die Bereitschaft zur Begutachtung der Dissertation danken.

Die Forschungen wurden von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) im Rahmen des Schwerpunktprogramms „Handhabung hochdispenser Pulver“ gefördert. Der DFG gebührt mein Dank für die finanzielle Unterstützung. Die durchgeführten Forschungen profitierten von den angeregten Diskussionen im Rahmen des Schwerpunktprogramms, insbesondere innerhalb der Arbeitsgruppe „Lagern und Fördern“.

Ich danke allen Mitarbeitern des Instituts für Verfahrenstechnik, die mir mit Rat und Tat zur Seite standen. Die freundschaftliche Zusammenarbeit trug wesentlich zum Gelingen der Arbeit bei.

Hervorheben möchte ich das Engagement von Herrn Ammar Al-Hilo, der mich über einen Zeitraum von drei Jahren bei allen Arbeiten tatkräftig unterstützte. Mein besonderer Dank gilt Herrn Aimó Haack, Herrn Guido Kache sowie Frau Elisaveta Georgieva Shopova, die im Rahmen von Studien- oder Diplomarbeiten zum Fortschritt der Arbeit maßgeblich beitrugen. Die Gewinnung der umfangreichen experimentellen Daten war nur durch ihr Mitwirken möglich.

Herr Dr. rer. nat. habil. Friedemann Laugwitz und Herr Dr.-Ing. Karl-Heinz Gröbel vom Institut für Mechanik waren mir bei der Auslegung des Versuches behilflich und beantworteten mir unzählige Fragen zur Schwingungsmessung und -analyse. Viele ihrer Anregungen flossen in die Arbeit ein.

Meine Kenntnisse zur Anwendung mechanischer Schwingungen in der Schüttguttechnik verdanke ich Herrn Dietrich Kröger (ehem. Netter Vibrationstechnik GmbH). Besonders in Kapitel 2 finden sich viele seiner Hinweise und Informationen wieder. Sie sind ein wesentlicher Bestandteil.

Noch vielen anderen ist zu danken. Sie sind hier eingeschlossen.

Vor allem danke ich meiner ganzen Familie. Ihr Beistand ist unschätzbar.

Magdeburg, Juli 2002

Thomas Kollmann

## Kurzreferat

Die vorliegende Arbeit möchte zur weiteren Aufklärung der Grundlagen zum Fließverhalten feinstkörniger, kohäsiver Pulver bei überlagerter Einwirkung harmonischer Schwingungen beitragen. Im Vordergrund steht der Schwerkraftfluß der Pulver, der durch die Schwingungseinwirkung initiiert und unterstützt wird. Ausgehend von den Untersuchungen von ROBERTS et al. wurde eine Meßmethodik entwickelt, mit der sowohl der Einfluß der Schwingungen auf die Fließkennwerte von Schüttgütern als auch die Schwingungsübertragung im Schüttgut meßtechnisch zugänglich sind. Anhand experimenteller Ergebnisse für je ein Kalkstein- und Titandioxid-Pulver mit mittleren Partikelgrößen um 1 µm werden im einzelnen diskutiert:

- Einfluß harmonischer Schwingungen auf die Fließkennwerte des beginnenden und erstmalig auch des stationären Fließens
- Einflüsse von Dämpfung und Resonanz
- Wandreibung bei Schwingungseinwirkung

Basierend auf den gewonnenen Ergebnissen werden Schlußfolgerungen für die verfahrenstechnische Silo-Dimensionierung aufgezeigt und mit Beispielen unterlegt.

## Abstract

The present work strives to contribute to better understanding of the flow behaviour of very fine, cohesive powders in the presence of harmonic vibrations. The study focuses on the gravity powder flow that is initiated and promoted by the application of harmonic vibrations. Based on the work of ROBERTS et al., a test technique has been established that allows the measurement of the effect of vibrations on the flow properties of particulate solids as well as vibration transmission through particulate solids. On the basis of experimental results for one Limestone- and one Titania-Powder, each with an average particle size of about 1 µm, the following will be discussed in detail:

- effect of harmonic vibrations on the flow properties for incipient flow and also, previously unprecedented, for steady state flow
- influence of damping and resonance
- wall friction in the presence of vibration

Using the derived results the consequences for silo-hopper design will be shown and substantiated with the help of examples.

# Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	IV
1 Einleitung	1
2 Anwendung mechanischer Schwingungen zur Siloentleerung	3
2.1 Abgrenzung und Definition	3
2.2 Schwingantriebe (Vibratoren)	3
2.3 Schwingende Austraghilfen	10
2.3.1 Anregung der Behälterwand, Außenvibratoren	10
2.3.2 Schwingende Behälter oder Trichter	11
2.3.3 Schwingende Einbauten	13
2.4 Zur Auswahl und verfahrenstechnischen Dimensionierung	14
3 Fließverhalten von Schüttgütern – Aussagen der Kontinuumsmechanik	16
3.1 Das Kontinuum „Schüttgut“	16
3.2 Kinetische und kinematische Größen	17
3.2.1 Spannungen	17
3.2.2 Deformation und Deformationsgeschwindigkeit	19
3.3 Hauptmerkmale des Schüttgutverhaltens	21
3.4 Fließkriterien für Schüttgüter	22
3.5 Induzierte Anisotropie	27
3.6 Fließen von Schüttgütern bei Schwingungseinwirkung	29
3.6.1 Kinematische Größen harmonischer Schwingungen	29
3.6.2 Fließkriterium für das schwingungsinduzierte Fließen	30
3.6.3 Auslaufmassstrom	33
3.6.4 Vibrationsinduzierte pneumatische Förderung	36
4 Partikelmechanische Betrachtungsweise	37
4.1 Begriffe	37
4.2 Spannungsübertragung in einer Partikelpackung	38
4.3 Kontakt-Versagen und Fließen kohäsiver Schüttgüter	39
4.3.1 Charakteristische Stoffgrößen	39
4.3.2 Stationäre Fließen	40
4.3.3 Beginnendes Fließen	41
4.3.4 Schnelles stationäres Fließen	44
4.4 Verfahrenstechnische Silo-Dimensionierung	44

5 Schwingungsübertragung im Kontinuum	46
5.1 Herleitung der Modellgleichung	46
5.1.1 Rheologische Grundmodelle	46
5.1.2 Rheologisches Schüttgutmodell	48
5.1.3 Diskretisiertes Modell und Bewegungsgleichung	50
5.2 Schwingungsübertragung bei harmonischer Erregerfunktion	52
5.2.1 Linear-viskose Dämpfung	52
5.2.2 Nichtlineare Modelle	58
5.2.3 Linearisierte Modelle – das äquivalente lineare Dämpfungsmaß	65
5.3 Probendämpfung und Schüttguldämpfung	70
5.4 Dämpfungsverhalten von Schüttgütern	72
6 Versuchsaufbau und Meßmethoden	75
6.1 Anforderungen und Konzept	75
6.2 Translations-Scherversuch ohne Schwingungen – Aufbau und Durchführung	75
6.3 Vibrations-Scherapparatur	79
6.3.1 Versuchsaufbau	79
6.3.2 Konstruktive Einflüsse auf das Meßergebnis	83
6.4 Durchführung der Schwingungs-Scherversuche	87
6.4.1 Mögliche Versuchsmethoden	87
6.4.2 Methode A – Schwingungen beim Abscheren	88
6.4.3 Methode B – Schwingungen beim An- und Abscheren	89
6.4.4 Probenvorbereitung (Vorverfestigung)	90
6.5 Ermittlung der Übertragungsfunktion $H(f)$	91
6.6 Bestimmung des relativen Schwingweges	93
7 Charakterisierung der Versuchsmaterialien	95
7.1 Ausgewählte Versuchsgüter	95
7.2 Granulometrie	96
7.3 Gutfeuchte und Wasseradsorption	98
7.4 Pulvereigenschaften und Fließverhalten	100
8 Einfluß mechanischer Schwingungen auf die Fließkennwerte kohäsiver Schüttgüter	103
8.1 Schwingungsinduziertes Fließen	103
8.2 Beginnendes Fließen bei Schwingungseinwirkung	104
8.2.1 Scherkraftverläufe	104
8.2.2 Einfluß der Schwinggeschwindigkeit	106
8.2.3 Bestimmung der Modellparameter $\beta$ und $\gamma$	109
8.2.4 Schwingungseinfluß auf die Fließkennwerte des beginnenden Fließens	112
8.3 Stationäres Fließen bei Schwingungseinwirkung	115

8.3.1 Einfluß auf die Scherfestigkeit	115
8.3.2 Schwingungseinfluß auf die Fließkennwerte des stationären Fließens	119
8.4 Schwingungseinfluß auf die Fließfunktion	122
9 Dämpfung und Resonanz und deren Einfluß auf die Scherfestigkeit	123
9.1 Diskussion der Modelle	123
9.2 Bestimmung und Interpretation der Modellparameter $f_0$ , $\zeta$ und $\Lambda$	127
9.2.1 Einfluß der Normalspannungen $\sigma_{an}$ und $\sigma_{ab}$	127
9.2.2 Einfluß des Schüttgutes – Vergleich von $\text{CaCO}_3$ mit $\text{TiO}_2$	130
9.2.3 Isotropie – Anisotropie	131
9.3 Abschätzung der Federkonstante $c$	132
9.3.1 Zugänglichkeit der Größen $b$ , $c$ und $k$	132
9.3.2 Frequenzgang-Betrag bei Störkrafteinwirkung	132
9.3.3 Auswertung der Scherkraftverläufe	133
9.3.4 Auswertung der Hystereseschleifen	134
9.4 Einfluß von Resonanz auf die Scherfestigkeit	134
9.5 Vergleich mit den Ergebnissen anderer Autoren	140
10 Wandfließverhalten bei Schwingungseinwirkung	142
10.1 Wandmaterialien	142
10.2 Wandschubspannungen bei Schwingungseinwirkung	142
10.3 Bestimmung von $\beta_w$ und $\gamma_w$	146
10.4 Bestimmung des Wandreibungswinkels	148
11 Konsequenzen für die Silo-Auslegung	150
12 Zusammenfassung	154
Literaturverzeichnis	157
Verzeichnis der Zitate	170
Anlagenverzeichnis	171



## Symbolverzeichnis

Symbole, die nur einmal im Text auftreten, sind ausschließlich dort erklärt.

A	m	Fläche
a	m / s <sup>2</sup>	Schwingbeschleunigung
b	kg / s	Dämpfungskonstante des viskosen Dämpfers
b <sub>min</sub>	m	minimale Öffnungsweite eines Massenflußtrichters
c	N / m	Feder-Konstante
c <sub>ijkl</sub>	Pa·s	Viskositätstensor
D <sub>ij</sub>	1/s	Verzerrungsgeschwindigkeitstensor
d	m	Partikel- (Äquivalent-) Durchmesser
d <sub>1,2</sub>	m	SAUTER-Durchmesser
d <sub>50,3</sub>	m	mittlere Partikelgröße (Medianwert der Partikel-Volumenverteilung)
E	Pa	Elastizitätsmodul
E <sub>ijkl</sub>	Pa	Elastizitätstensor
e(t)	* <sup>1</sup>	Erregerfunktion
F	N	Kraft
F <sub>H</sub>	N	Haftkraft
Fr	—	FROUDE-Zahl
f	Hz	Frequenz
f <sub>max</sub>	Hz	Resonanzfrequenz (Schwingweg-Resonanz)
f <sub>0</sub>	Hz	Eigenfrequenz des ungedämpften Schwingers
ff	—	Fließfaktor nach JENIKE
ff <sub>c</sub>	—	Fließfunktion
G	N / m <sup>2</sup>	Gleitmodul
g	9,81 m/s <sup>2</sup>	Erdbeschleunigung
H	*	Übertragungsfunktion (komplexer Frequenzgang)
j	—	imaginäre Einheit
m	kg	Masse
n	—	rheologischer Parameter

---

<sup>1</sup> vom Bezugsmerkmal abhängig

n	—	Kompressibilitätsindex
p	Pa	Druck
Q	—	Dämpfungsfunktion
$r_{xy}^2$	—	Bestimmtheitsmaß
S	m <sup>2</sup>	Oberfläche
s	m	Weg
T	s	Schwingdauer
t	s	Zeit
U	—	Vergrößerungsfunktion des ungedämpften Schwingers
V	—	Vergrößerungsfunktion
V	m <sup>3</sup>	Volumen
VB	*	Vertrauensbereich
v	m / s	Schwinggeschwindigkeit
$\Delta v$	m	relative Schwinggeschwindigkeit ( $v_r - v_e$ )
W	Nm	Arbeit
$X_l$	—	Feuchte (Flüssigkeitsbeladung)
x	m	Schwingweg
$\dot{x}$	m / s	Schwinggeschwindigkeit (1. Zeitableitung von x)
$\ddot{x}$	m / s <sup>2</sup>	Schwingbeschleunigung (2. Zeitableitung von x)
$\Delta x$	m	relativer Schwingweg ( $x_r - x_e$ )
x,y,z	—	Raumkoordinaten
$\alpha$	—	Irrtums-Wahrscheinlichkeit ( $\alpha = 0,05$ )
$\alpha$	Grad	Winkel
$\beta$	Pa	maximale Scherspannungsreduzierung bei Schwingungseinwirkung ( $\tau - \tau_{v,min}$ )
$\gamma$	m/s	charakteristische Schwinggeschwindigkeit
$\gamma$	—	Scherdeformation / Gleitung
$\dot{\gamma}$	—	Scherrate
$\delta$	1 / s	Abklingkonstante des viskosen Dämpfers
$\delta_{ij}$	—	KRONECKER-Symbol
$\varepsilon$	—	Porosität
$\epsilon$	—	Dehnung
$\epsilon_{ij}$	—	Verzerrungstensor
$\dot{\epsilon}$	—	Dehnungsgeschwindigkeit

$\zeta$	—	dimensionsloses (kritisches) Dämpfungsmaß; Dämpfungsverhältnis
$\eta$	Pa·s	dynamische Viskosität
$\Theta$	Grad	Trichterneigungswinkel
$\vartheta$	—	spezifische Dämpfung
$\theta$	° C	Temperatur
$\kappa$	—	Haftkraftanstieg (Kontaktverfestigungs-Koeffizient)
$\Lambda$	—	Dämpfungsverhältnis des COULOMB-Dämpfers
$\mu$	—	Reibungsbeiwert der COULOMB-Reibung
$\nu$	—	Querdehnungs- (POISSON-) Zahl
$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	Dichte
$\sigma$	Pa	Normalspannung
$\sigma_{ij}$	Pa	Spannungstensor
$\bar{\sigma}_{ij}$	Pa	Tensor der effektiven Spannungen
$\sigma_c$	Pa	einaxiale Druckfestigkeit
$\sigma_M$	Pa	Mittelpunktspannung
$\sigma_R$	Pa	Radiusspannung
$\sigma_t$	Pa	einaxiale Zugfestigkeit
$\sigma_Z$	Pa	isostatische Zugfestigkeit
$\sigma_0$	Pa	isostatische Zugfestigkeit, unverfestigt
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Pa	Hauptspannungen
$\tau$	Pa	Schubspannung
$\tau_a$	Pa	Adhäsion
$\tau_c$	Pa	Kohäsion
$\tau_F$	Pa	Fließgrenze
$\varphi_e$	Grad	effektiver (innerer) Reibungswinkel
$\varphi_i$	Grad	innerer Reibungswinkel
$\varphi_{st}$	Grad	stationärer (innerer) Reibungswinkel
$\varphi_w$	Grad	Wandreibungswinkel
$\phi$	% rF	relative Luftfeuchte
$\psi$	Grad	Nullphasenwinkel
$\Omega$	—	Abstimmungsverhältnis ( $f / f_0$ )
$\omega$	1 / s	Kreisfrequenz
$\omega_0$	1 / s	Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Schwingers

**Indizes**

ab	Abscheren	max	maximal
an	Anscheren	min	minimal
äqu	äquivalent	N	Normal-
b	Schüttgut (bulk)	pl	plastisch
d	Dämpfungs-	r	Antwort-, resultierend
e	Erreger-	S	Scher-
el	elastisch	s	Feststoff (solid)
f	Fluid (fluid)	st	stationäres Fließen
G	Grenz-	T	Tangential
ges	gesamt	V	Volumenbezogen
H	Hohlraum	v	bei Schwingungseinwirkung
ij	Laufindizes	vis	viskos
K	Klopf-	vor	Vorverfestigen
krit	kritisch	W	Wand
l	Flüssigkeit (liquid)	0	unverfestigt
m	Massebezogen		

## 1 Einleitung

Ein wichtiger Trend der Feststoffverfahrenstechnik ist die Erzeugung immer feinerer Partikeln z.B. für Pigmente, Adsorbentien, Katalysatoren, Keramiken etc. [58,108,179]. Feinere Partikeln führen zu steigenden Anforderungen bei deren Handhabung. Die bei diesen Produkten gegenüber den interpartikulären Haftkräften vernachlässigbare Schwerkraft ist für einen störungsfreien Pulverfluß i.allg. nicht ausreichend. Bei der Silolagerung kommt der Pulverfluß durch Brücken- oder Schachtbildung zum Erliegen, kontinuierliches Dosieren mit konstanter Pulverdichte ist kaum möglich. Die „statische“ Silo-Auslegung stößt mit erforderlichen Trichtermeigungswinkeln von  $10^\circ$  oder darunter, verbunden mit großen Auslaufdurchmessern, an ihre Grenzen. Steile Trichter bedingen hohe Fertigungskosten und gehen mit einer schlechten Raumausnutzung einher; große Austragquerschnitte verteuern die nachfolgenden Dosier- und Fördereinrichtungen.

Als Lösung kann das Fließverhalten dieser Pulver durch Anregung mittels mechanischer Schwingungen deutlich verbessert werden. Die Schwingungen dienen dazu, den Schwerkraftfluß der Schüttgüter zu initiieren und zu unterstützen. So kann ein kontinuierlicher Produktabzug aus dem Silo ermöglicht werden. Folglich werden vibrierende Austraggeräte und Austraghilfen häufig angewandt. Kapitel 2 gibt einen Einblick in den Stand der Technik zur Anwendung mechanischer Schwingungen bei der Siloentleerung.

Auswahl und Auslegung dieser Geräte sind oft empirisch orientiert. Zugrundegelegt werden z.B. Erfahrungen mit ähnlichen Materialien oder Tests in kleineren Trichtern [162]. Die Fließeigenschaften der Pulver gehen bestenfalls qualitativ ein. BELL (Du Pont) und JACOB (Dow Chemical) schlußfolgern stellvertretend für die Belange der Chemischen Industrie:

*„...there remain a great many practical industrial problems that current methods cannot address effectively, if at all. These problems include...the application of flow promoting devices...The suppliers of flow promotion devices can usually provide recommendations for their application. Unfortunately, these recommendations are often not applicable beyond the empirical situation from which they were derived.”<sup>b</sup>*

*„...over the last decade...industrial organizations have come to realize that solids processing technology is critical to the success of their businesses...the nanoparticles of the 21<sup>st</sup> century will challenge us in the field of bulk solids handling.”<sup>c</sup>*

Die vorliegende Arbeit möchte einen Beitrag zur weiteren Aufklärung der Grundlagen zum Fließverhalten feinstkörniger, kohäsiver Pulver bei überlagerter Einwirkung harmonischer Schwingungen liefern und Antworten auf einige der vielen offenen Fragen finden. Dabei steht der Schwerkraftfluß der Pulver im Vordergrund, der durch die Schwingungseinwirkung initiiert und unterstützt wird.

DUMBAUGH [28] und SIEBENHAAR [146] verwendeten im vergleichbaren Zusammenhang den Begriff *schwingungsinduziert*, was den Sachverhalt wohl am besten wiedergibt.

Die Beschreibung des Fließverhaltens von Schüttgütern basiert auf der Kontinuumsmechanik. Im Kapitel 3 werden die Grundlagen der Kontinuumsmechanik zum Fließverhalten kohäsiver Schüttgüter dargelegt. Die kontinuumsmechanische Betrachtungsweise bietet den Vorteil leicht zu handhabender Modelle. Allerdings bleiben Einflüsse einzelner Partikeleigenschaften, wie z.B. die Abhängigkeit der Kohäsion trockener Pulver von der Partikelgröße verborgen [94]. MOLERUS [92] initiierte durch Einbeziehung von Partikeleigenschaften eine neue Denkweise. Von dieser nachfolgend als Partikelmechanik bezeichnete Modellierungsstrategie handelt Kapitel 4.

Systematische Untersuchungen zum Fließverhalten von Schüttgütern bei Schwingungseinwirkung begannen Ende der 70er Jahren mit den Arbeiten von ROBERTS et al. [114-118]. Eine Übersicht über seither veröffentlichte Ergebnisse anderer Autoren zum Schwingungseinfluß auf die Fließeigenschaften finden sich in Kapitel 3. Bedeutsam ist neben der Wirkung der Schwingungen am Ort der Fließstörung auch die Schwingungsübertragung durch das Schüttgut hindurch, also Dämpfung und Resonanz. In Kapitel 5 werden eindimensionale mathematische Modelle mit einem Freiheitsgrad vorgestellt, die weitestgehend auf Arbeiten aus der Festkörpermechanik der 30er Jahre beruhen, ergänzt durch Literaturdaten zum Dämpfungsverhalten von Schüttgütern der letzten zwei Jahrzehnte.

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt im experimentellen Teil. Für die experimentellen Untersuchungen wurde das Konzept der „Schwingenden Translations-Scherzelle“ von ARNOLD [3] und ROBERTS [114-115] aufgegriffen und weiterentwickelt, Kapitel 6. Diese Apparatur basiert auf der in der Schüttguttechnik als Standardmeßgerät etablierten JENIKE-Scherzelle. Ungeachtet deren Vor- und Nachteile, über die in den vergangenen Jahrzehnten ausführlich diskutiert wurde (siehe z.B. [140]), haben sich die damit ermittelten Ergebnisse in der Praxis bewährt. Als Versuchsmaterialien wurden ein Kalksteinmehl ( $\text{CaCO}_3$ ) mit einer mittleren Partikelgröße von etwa  $1\ \mu\text{m}$  und ein Titandioxid-Pulver ( $\text{TiO}_2$ ) mit einer Primärpartikelgröße um  $100\ \text{nm}$  ausgewählt. Neben deren guter Eignung als Modellsubstanz werden beide Produkte großtechnisch hergestellt und verarbeitet. Sie besitzen somit auch praktische Relevanz.

## 2 Anwendung mechanischer Schwingungen zur Siloentleerung

### 2.1 Abgrenzung und Definition

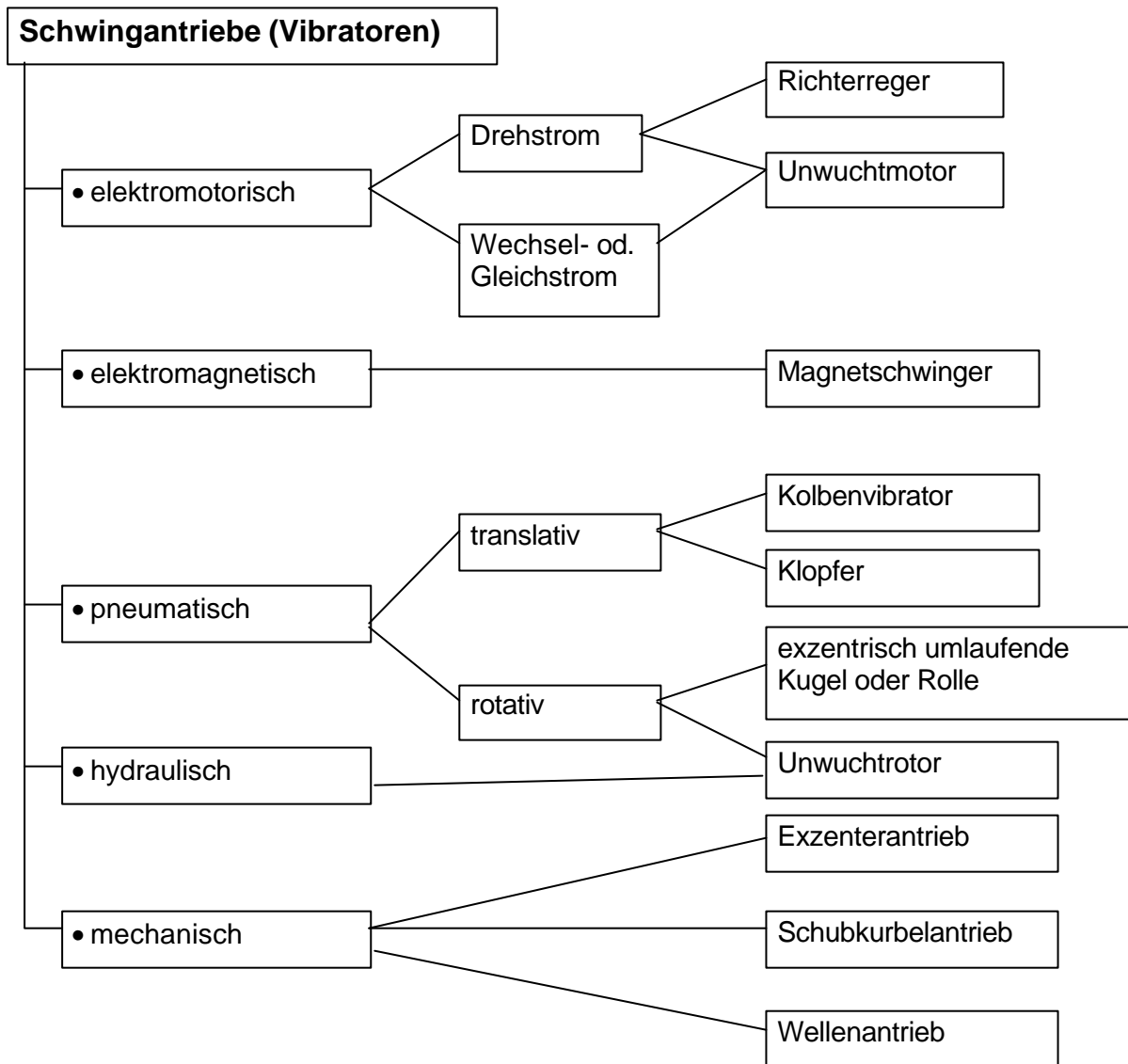
In verfahrenstechnischen Anlagen dienen vibrierende Austraghilfen und Austraggeräte der Entleerung von Silos und Bunkern oder anderen Apparaten wie Aufgabetrichern etc. (Nachfolgend wird vereinfachend der Begriff Silo verwendet.). Sie sind notwendig, wenn z.B. die Silo-Auslegung nach JENIKE [60] Trichtergeometrien fordert, die in der Praxis selten realisiert werden, wie etwa Trichter-neigungswinkel  $< 20^\circ$ . Häufig werden Austrag- oder Fließhilfen nachträglich in bestehenden Anlagen eingebaut, wenn das Fließverhalten der jeweiligen Produkte bei der Planung und Auslegung ungenügend berücksichtigt wurde und Fließstörungen, wie Brückenbildung, Schachtbildung, Anbackungen..., auftreten.

Die Begriffe Austraghilfe (auch Fließhilfe) sowie Austragorgan werden in der deutschsprachigen Literatur häufig mit folgender Bedeutung verwendet: Austraghilfen dienen zur Anregung und Unterstützung des Pulver-Fließens (z.B. Übergang von Kern- zu Massenfluß, Vermeidung von Brücken- oder Schachtbildung etc.), Austragorgane ermöglichen eine Mengenstromsteuerung [106,139,165,181]. Die nachfolgende Darstellung zum Stand der Technik beschränkt sich, entsprechend der Zielstellung der vorliegenden Arbeit, auf Austraghilfen, also auf Geräte mit der vorrangigen Aufgabe, den Schwerkraftfluß der Schüttgüter zu initiieren und zu unterstützen und für eine vollständige Entleerung zu sorgen. Einige der anschließend aufgeführten Austraghilfen gewähren *zusätzlich* die Möglichkeit, den Mengenstrom zu steuern und den Auslauf abzusperren. Diese sind sowohl Austraghilfen als auch Austragorgane.

Alle Arten von Schwingförderern, wie Schwingrinnen, -rohre etc., fallen demzufolge nicht darunter. Zum einen, da deren Funktion nicht die Unterstützung der Schüttgutbewegung infolge Schwerkraft ist (Beispielsweise fördert der Wendelschwingförderer entgegengesetzt zur Schwerkraft.). Zum anderen beeinflussen sie nicht das Fließverhalten des im Silo befindlichen Schüttgutes. Vielmehr ist der erfolgreiche Schüttgutaustrag Voraussetzung für die Funktion der Schwingförderer. Ebenfalls unberücksichtigt bleiben Geräte, die sehr niederfrequente ( $< 1$  Hz) oszillierende Bewegungen ausführen und die Schüttgutbewegung durch Formscluß oder Verdrängung hervorrufen.

### 2.2 Schwingantriebe (Vibratoren)

Mechanische Schwingungen für verfahrenstechnische Maschinen können elektromotorisch, elektromagnetisch, pneumatisch, hydraulisch oder mechanisch erzeugt werden. **Abb. 2.1** zeigt einen Überblick über Antriebs- und Bauarten von Vibratoren in der Verfahrenstechnik.



**Abb. 2.1:** Vibratoren in der Verfahrenstechnik, Antriebs- und Bauarten

Am häufigsten werden Unwuchtmotoren angewendet, **Abb. 2.2**. Dabei handelt es sich fast ausschließlich um Drehstrom-Asynchron-Maschinen, selten um Gleichstrom- oder Einphasenmotoren. Unwuchtmotoren sind speziell für hohe dynamische Lasten konstruiert. Die Zentrifugalkraft wird durch Gewichte auf beiden Wellenenden erzeugt (**Abb. 2.2**). Durch Justieren der Wuchtgewichte kann die Fliehkraft von 0 bis 100 % variiert werden. Unwuchtmotoren sind mit Erregerkräften bis 200 kN verfügbar.

Die Drehzahl ist bei Drehstrom-Maschinen durch die Netzfrequenz und die Anzahl der Pole (Polzahl) festgelegt, **Tab. 2.1**. Die Polzahl resultiert aus der Anzahl der Spulen, aus denen die Drehstromwicklungen auf Stator und Rotor bestehen. Mittels zusätzlicher Frequenzumformer kann die Frequenz und damit die Motordrehzahl stufenlos verstellt werden. Dadurch sind auch höhere Frequenzen als die Netzfrequenz möglich. Handelsüblich sind Drehzahlen bis maximal  $10500 \text{ min}^{-1}$ .





**Abb. 2.2:** Unwuchtmotor [188]

**Tab. 2.1:** Synchrondrehzahlen von Drehstrommotoren (50 Hz Netzfrequenz)

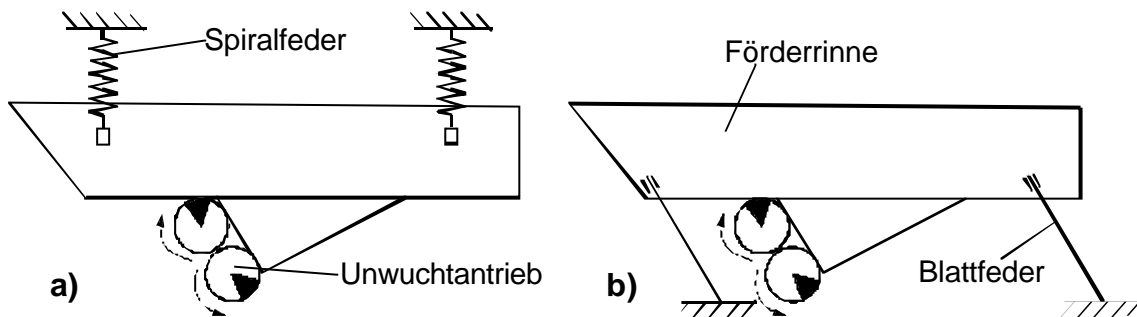
Polzahl	Synchrondrehzahl im $\text{min}^{-1}$	Frequenz in Hz
2	3000	50
4	1500	25
6	1000	$16\frac{2}{3}$
8	750	$12\frac{1}{2}$

Unwuchtmotoren zeichnen sich durch geringe Investitionskosten, kompakte Bauform, hohe massebezogene Leistung, hohe Lebensdauer, Wartungsarmut und geringe Betriebskosten aus [38,158]. Unwuchtmotoren benötigen eine Anlaufzeit von einigen Sekunden, die sich besonders bei der Silo-Entleerung nachteilig auswirken kann (Schüttgutverdichtung beim Anlaufen) [112].

Bei achsparalleler Anordnung zweier gegenläufiger Motoren addieren sich die Fliehkräfte in Wirkrichtung, während sie sich senkrecht zur Wirkrichtung aufheben. Dadurch erreicht man lineare Schwingbewegungen, d.h. die Erregerkraft wirkt sinusförmig ausschließlich in eine Richtung. Die Antriebe müssen mit exakt gleichen Drehzahlen und konstantem Phasenverhältnis laufen. Dafür kann der Effekt der Selbstsynchronisation genutzt werden (siehe z.B. [5,13,14,149,150]). Dabei synchronisieren sich die Unwuchtantriebe selbsttätig, allein infolge Rückwirkung durch das schwingende Bauteil. Im Vergleich zur Zwangssynchronisation mittels Getriebe bietet die Selbstsynchronisation einige Vorteile, wie einfachere Konstruktion und Wartung, Gerauscharmut. Selbstsynchronisierende

Antriebe werden häufig für Siebmaschinen, Schwingförderer, Mühlen, Backenbrecher, Formgebungs- und Verdichtungsmaschinen angewendet.

Die Selbstsynchronisation ist an Bedingungen geknüpft. Sie hängt ab von den Eigenschaften des Schwingers (Anzahl der Freiheitsgrade, Massenträgheitsmomente, Eigenfrequenzen...) sowie vom Antrieb (Anzahl, Drehzahl, gleich- oder gegenläufige Drehrichtung) [26]. Das Beispiel **Abb. 2.3a** zeigt ein schwingendes System mit drei Freiheitsgraden (z.B. Fördergerät). In diesem Fall ist die Selbstsynchronisation mit Überlagerung der Erregung bei überkritischem Betrieb stabil, d.h. für Antriebsfrequenzen oberhalb der Eigenfrequenz des Schwingers (weiche Lagerung). Das gleiche System ist in **Abb. 2.3b** als Einfreiheitsgrad-System dargestellt (konstruktiv durch Blattfedern gelöst). Hier ist die Stabilitätslage umgekehrt. Stabilität für den gewünschten Zustand der Kraftverstärkung liegt nur im weniger interessierenden unterkritischen Bereich vor. Bei überkritischem Betrieb wird die Erregerkraft in Wirkrichtung nicht verstärkt, sondern kompensiert.

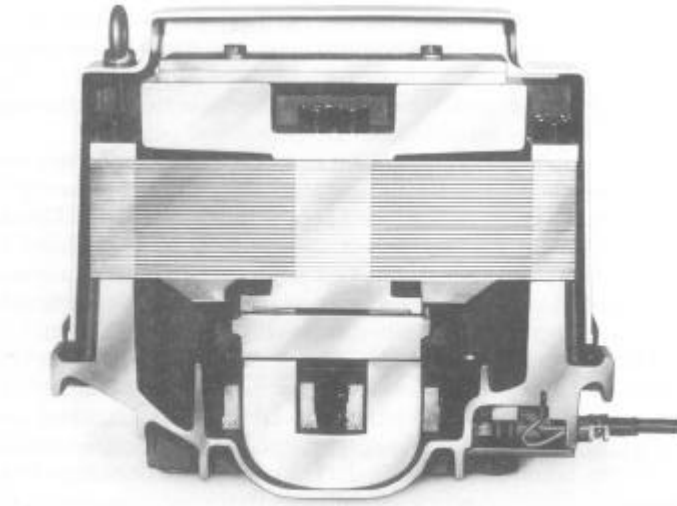


**Abb. 2.3:** Schematische Darstellung eines ebenen Schwingers (z.B. Förderrinne) mit zwei gegenläufigen Unwuchtmotoren; a) mit drei Freiheitsgraden (links) und b) mit einem Freiheitsgrad (rechts)

Eine Sonderform der Unwuchtmotoren sind die sog. Richterreger. Sie besitzen zwei auf gegenläufigen Wellen gleicher Drehzahl sitzende Wuchtmassen und erzeugen somit ebenfalls lineare Schwingungen. Richterreger werden zwangssynchronisiert, d.h. die gegenläufigen Wellen sind durch Zahnräder gekoppelt. Die Synchronisation ist somit unabhängig von der Drehzahl und von der Abstimmung des Schwingensystems. Bevorzugte Drehzahlen sind 750 bis 1500  $\text{min}^{-1}$ . Richterreger können sehr hohe Erregerkräfte bis 470 kN erzeugen.

Lineare Schwingungen werden ebenfalls von Magnetvibratoren bereitgestellt. **Abb. 2.4** zeigt die Schnittdarstellung eines Magnetvibrators. Von unten nach oben sind zu sehen: Magnetsystem, Blattfederpaket, Gegenmasse. Magnetvibratoren bilden mit dem Schwinggerät einen Zwei-Massen-Schwinger. Sie werden meist unterkritisch betrieben, d.h. mit Erregerfrequenzen unterhalb der Eigenfrequenz des Schwinggerätes (z.B. der Förderrinne). Im unterkritischen Betrieb ist die Sensibilität auf Beladungsschwankungen, wie z.B. Schüttgutbackungen oder variierende Silofüllstände, am geringsten. Mit Verringerung des Resonanzabstandes erhöhen sich Schwingleistung bzw. Wirkungsgrad. Der Magnetvibrator muß daher auf das jeweilige Schwinggerät abgestimmt werden. Die Abstimmung

hängt von der Nutzmasse ab und ist durch Variation der Gegenmasse lt. **Abb. 2.4** möglich. Magnetvibratoren werden fast immer mit Thyristor-Anschlußgeräten kombiniert, die eine Amplitudenverstellung und damit z.B. bei Schwingförderern eine Mengenstromsteuerung ermöglichen. Übliche Frequenzen sind 25,  $33\frac{1}{3}$  und 50 Hz [24,106,151,187].



**Abb. 2.4:** Schnittdarstellung eines Magnetvibrators [151]

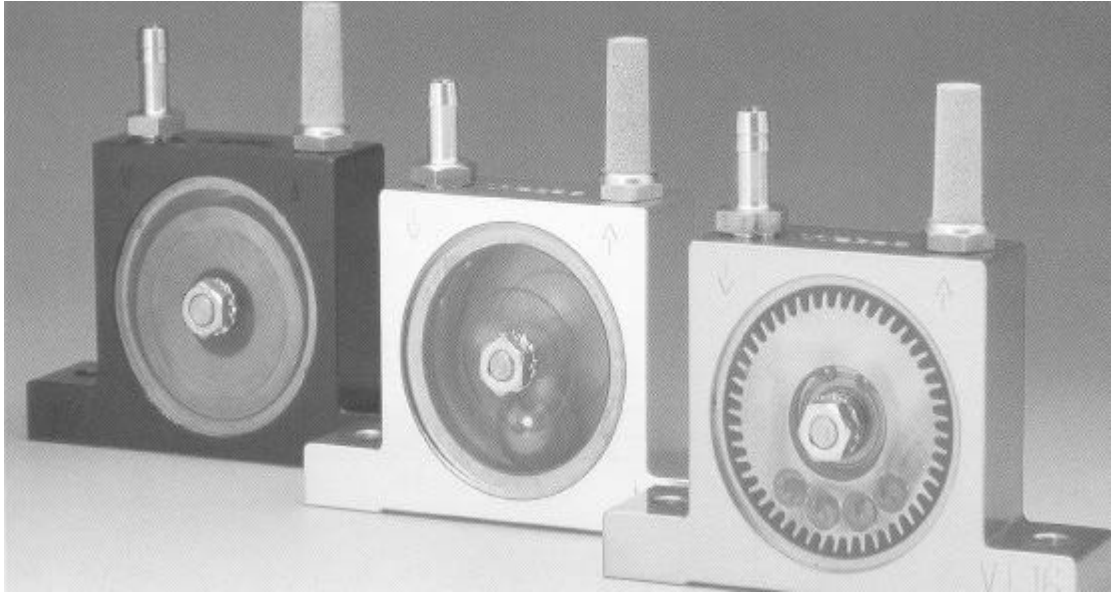
Vorteile von Magnetvibratoren gegenüber Unwuchtmotoren sind: geringerer Stromverbrauch, größere Lebensdauer, völlige Wartungsfreiheit und somit geringere Betriebskosten. Die Investitionskosten fallen unter Berücksichtigung von Anschluß- und Steuergeräten bei kleinen Baugrößen (z.B. < 1 kW) ebenfalls geringer aus. Mit zunehmender Baugröße verschiebt sich der Vergleich der Investitionskosten zugunsten des Unwuchtmotors [151]. Ein weiterer Vorteil der Magnetvibratoren ist die kürzere Anfahrzeit. Dadurch verringert sich die Gefahr einer Schüttgutverdichtung während des Anlaufens [151].

Hydraulikvibratoren bestehen aus einem Unwuchttrotor, der durch einen Hydraulikmotor angetrieben wird. Sie sind in Ihrer Charakteristik den Unwuchtmotoren ähnlich und ersetzen diese, wenn kein Drehstromnetz vorhanden ist, wie z.B. an Baumaschinen [188].

Pneumatisch angetriebene Vibratoren werden in vielfältigen Bauarten angeboten. Diese können in zwei Gruppen unterteilt werden:

- Vibratoren mit umlaufenden oder rotierenden Massen (Rotationsbewegung)
- Kolbenvibratoren und Intervallklopfer (Translationsbewegung)

Die erstgenannten, nachfolgend als pneumatische Umlaufvibratoren bezeichnet, umfassen Unwuchttrotoren mit angeflanschem Luftmotor (äquivalent zum Hydraulikvibrator), exzentrisch gelagerte Rotoren, Vibratoren mit umlaufenden Kugeln oder exzentrisch gelagerten Rollen sowie Turbinenvibratoren, **Abb. 2.5**. Umlaufvibratoren erzeugen Kreisschwingungen. Das Anlaufverhalten ist ähnlich wie bei Unwuchtmotoren, wobei die Rollenvibratoren die geringste Anlaufzeit benötigen [188].



**Abb. 2.5:** Druckluft- Rollen-, Kugel- und Turbinenvibrator (von links)  
(Firmenprospekt Webac GmbH, Euskirchen)

Lineare (gerichtete) Schwingungen werden durch Kolbenvibratoren erzeugt. Die Vor- und Rückbewegung des Kolbens wird durch Umlenken der Druckluft über Steuerbohrungen im Zylinder hervorgerufen. Zusätzlich kann der Kolben mit einem Anschlag versehen werden. Dadurch wird der sinusförmigen Schwingbewegung je ein Stoß pro Halbwelle überlagert. Aufgrund der Lärmemission hartschlagender Kolbenvibratoren besonders bei höheren Frequenzen kann der überlagerte Stoß mittels Luftpolster (starke Dämpfung) oder Elastomereinlagen (geringere Dämpfung) gemindert werden („Gummihammer-Effekt“). Die Arbeitsfrequenz von Kolbenvibratoren kann über den Druck variiert werden. Eine Reduzierung der Schwingweite ist durch Abluftdrosselung möglich. Bei Kolbenvibratoren tritt kein An- oder Nachlaufen auf [71,188]. Pneumatische Vibratoren besitzen einen niedrigeren Anschaffungspreis als Unwucht- und Magnetvibratoren und eine geringere Eigenmasse bei vergleichbarer Leistung [71]. Der höhere Energieverbrauch spielt nur eine untergeordnete Rolle, da Vibratoren für die Siloentleerung meist nur kurzzeitig („gepulst“) betrieben werden [188].

Intervallklopfer, mit Arbeitsfrequenzen unterhalb von 1 Hz, besitzen einen Kolben, der mittels Druckluft gegen eine Feder vorgespannt wird. Durch die Federkraft und z.T. mit Druckluftunterstützung wird der Kolben in Gegenrichtung beschleunigt und durch einen Anschlag abgebremst.

Mechanische Antriebe, wie Schubkurbel- oder Exzenterantriebe, sind für den Austrag feinkörniger Schüttgüter kaum von Bedeutung. Sie sind noch in der Siebtechnik sowie bei der Schüttgutförderung (für große und lange Förderrinnen) und in der Gießereitechnik im Einsatz [124]. Sehr spezielle Konstruktionen, wie z.B. Vibratoren mit einer Flüssigkeit als Unwuchtmasse [182], werden in der Schüttguttechnik ebenfalls selten verwendet.

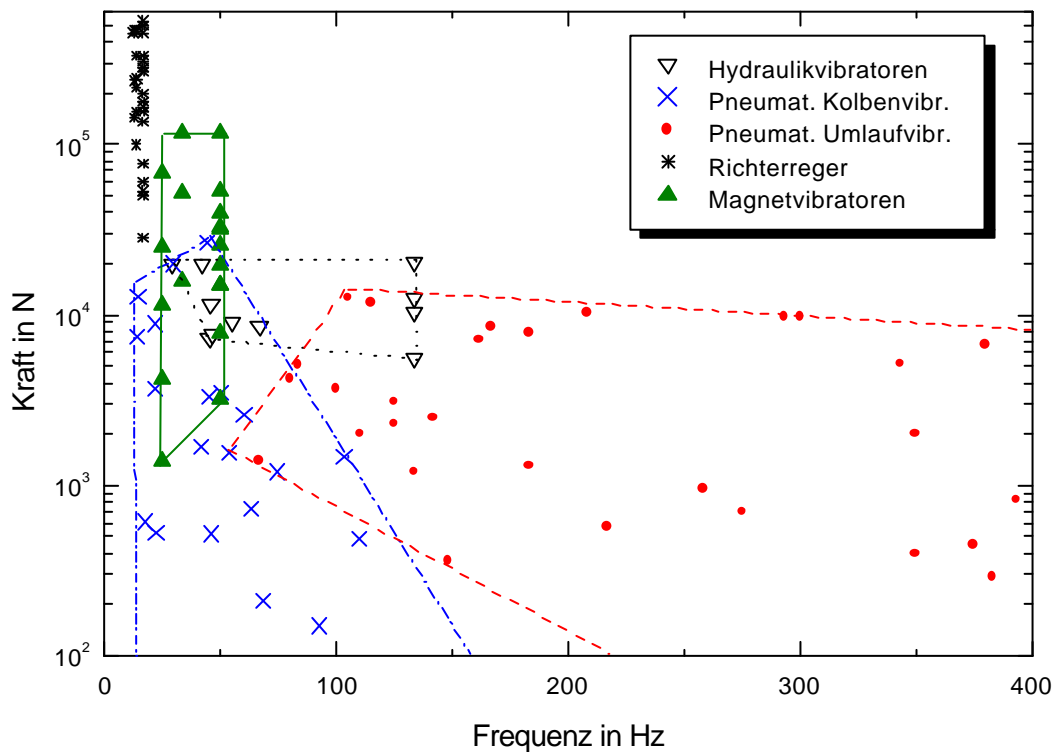
**Tab. 2.2:** Arbeitsbereiche häufig verwendeter Vibratoren

Schwingantrieb	Schwingungen pro min	Frequenz <sup>1</sup> in Hz	Amplitude in mm	Erregerkraft in kN	El. Leistung in kW
Unwuchtmotor	600...10500	10...175	—	≤ 200	0,02...60
Richterreger	750...1000	25	—	20...500	2...70
Magnetvibrator	1500...6000	25...100	0,5...5	≤ 115	≤ 37
Hydraulik-Vibrator	500...8000	8...133	—	5...50	2...6 <sup>2</sup>
pneumat. Umlaufvibr.	6000...46000	100...767	—	0,2...62	0,37...13 <sup>2</sup>
pneumat. Kolbenvibr.	1250...8300	20...138	—	0,05...31	0,15...18 <sup>2</sup>

<sup>1</sup> gemäß:  $60 \text{ min}^{-1} = 1 \text{ Hz}$

<sup>2</sup> des Hydraulikaggregates / Verdichters für einen Vibrator

In **Tab. 2.2** sind wesentliche Leistungsparameter sowie übliche Arbeitsbereiche der wichtigsten Schwingantriebe in der Verfahrenstechnik zusammengestellt. Die Bereichsgrenzen sind Anhaltswerte. Sie wurden aus [186] und Firmenprospekten (siehe Verzeichnis Firmenprospekte S. 169) zusammengetragen. Zu beachten ist, daß mit zunehmender Drehzahl aufgrund der überproportional steigenden dynamischen Beanspruchungen die realisierbaren Fliehkräfte überproportional sinken.

**Abb. 2.6:** Handelsübliche Vibratoren (Auswahl)

**Abb. 2.6** zeigt den Bereich der Erregerkraft (logarithmisch!) über der Schwingfrequenz handelsüblicher Vibratoren. Die eingezeichneten Punkte stehen für einige ausgewählte Baugrößen, die nach Meinung des Autors den Leistungsbereich der am Markt verfügbaren Geräte repräsentieren. Die Daten entstammen ebenfalls den im Literaturverzeichnis unter *Firmenprospekte* aufgeführten Quellen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurden Unwuchtmotoren nicht eingetragen. Sie decken etwa das Gebiet der Hydraulik- und Magnetvibratoren und z.T. der Richterreger (bis 200 kN) ab. Pneumatische Umlaufvibratoren sind auch für höhere Frequenzen verfügbar (bis etwa 750 Hz mit  $F < 2$  kN).

## 2.3 Schwingende Austraghilfen

### 2.3.1 Anregung der Behälterwand, Außenvibratoren

Vibratoren, die die Schwingungen indirekt über die Apparatewand in das Schüttgut einleiten, werden als Außenvibratoren oder Bunkerrüttler bezeichnet. Sie sind häufig in verfahrenstechnischen Anlagen zu finden, da sie auch nachträglich zur Behebung von Fließstörungen (Brückenbildung, Schachtbildung, Anbackungen) leicht zu montieren sind [181]. Dafür werden alle in Abschn. 2.2 aufgeführten Vibratoren eingesetzt. Die Vibratoren werden direkt oder mit zusätzlichen Versteifungen auf der Apparatewand angebracht. Die Versteifungen (auch „Leitprofile“) verringern die Beanspruchung der Wandung und sollen besonders bei höheren Frequenzen für eine breitere Schwingungseinleitung sorgen. Prinzipiell lassen sich drei Fälle unterscheiden:

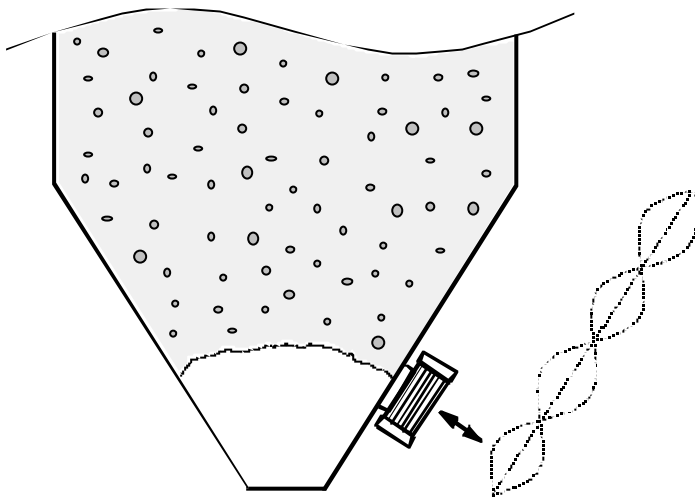
- niederfrequente Membranbewegung
- hochfrequente Anregung mit Resonanzverstärkung
- Impulsklopfen

Als hochfrequent gelten in der Schüttguttechnik sowie im nachfolgenden Text bereits Frequenzen oberhalb von 50 Hz, z.B. 100 Hz. Unter niederfrequent sind Schwingungen unterhalb dieser Standardfrequenz zu verstehen, wie etwa 25 Hz.

Die niederfrequente Membranbewegung (25...50 Hz) der Silowandung eignet sich zur Zerstörung von Schüttgutbrücken. Als Antriebe kommen Unwuchtmotoren oder Kolbenvibratoren in Betracht. Nachteilig ist das häufige Auftreten von Ermüdungsbrüchen der Wandung. Die Vibratoren werden am Trichter in der Nähe des Auslaufes positioniert (stabilste Stelle), bei Brückenbildung idealerweise in Höhe der Schüttgutbrücke [188].

Mit zunehmend höheren Frequenzen ( $\geq 100$  Hz) und damit verbunden geringeren Schwingwegen wird die Wandung ausschließlich im elastischen Bereich beansprucht. Die Gefahr von Ermüdungsbrüchen sinkt. Die gestrichelten Linien in **Abb. 2.7** zeigen schematisch eine mögliche Schwingungsform der Trichterwand im Resonanzfall. Die Anzahl der Knotenpunkte hängt von der Frequenz ab.

Pneumatische Umlaufvibratoren stellen sich selbsttätig auf eine Resonanz mit der Behälterwand ein, wodurch die Schwingungsamplitude verstärkt wird. Besonders ausgeprägt ist dieser Effekt bei Kugel- oder Rollenvibratoren. Durch die Wandbewegung wird die Kreisbahn der umlaufenden Masse in eine ellipsoide Bahn abgelenkt, wobei die größtmögliche Auslenkung im Resonanzfall auftritt. Bei einer Änderung der Luftzufuhr verharrt der Vibrator zunächst in diesem stabilen Zustand, um schließlich auf die nächsthöhere bzw. -tiefere Resonanzstelle zu springen. Die möglichen Arbeitsfrequenzen sind somit durch die Unterkonstruktion (Behälterwand mit Versteifungen) festgelegt. Für sehr feinkörnige Schüttgüter haben sich auch Kolbenvibratoren mit gedämpftem Stoß (vgl. Abschn. 2.2) in der Praxis bewährt [188].



**Abb. 2.7:** Unwuchtmotor als Austraghilfe (gestrichelt: mögliche Wandbewegung bei hochfrequenter Anregung)

Impuls- oder Einmal-Klopfer regen die Behälterwand zu freien Schwingungen an (Ersatz für „Silohammer“). Der elastische Stoß hartschlagender Klopfer bewirkt hohe Wandbeschleunigungen, wodurch z.B. Anbackungen beseitigt werden können.

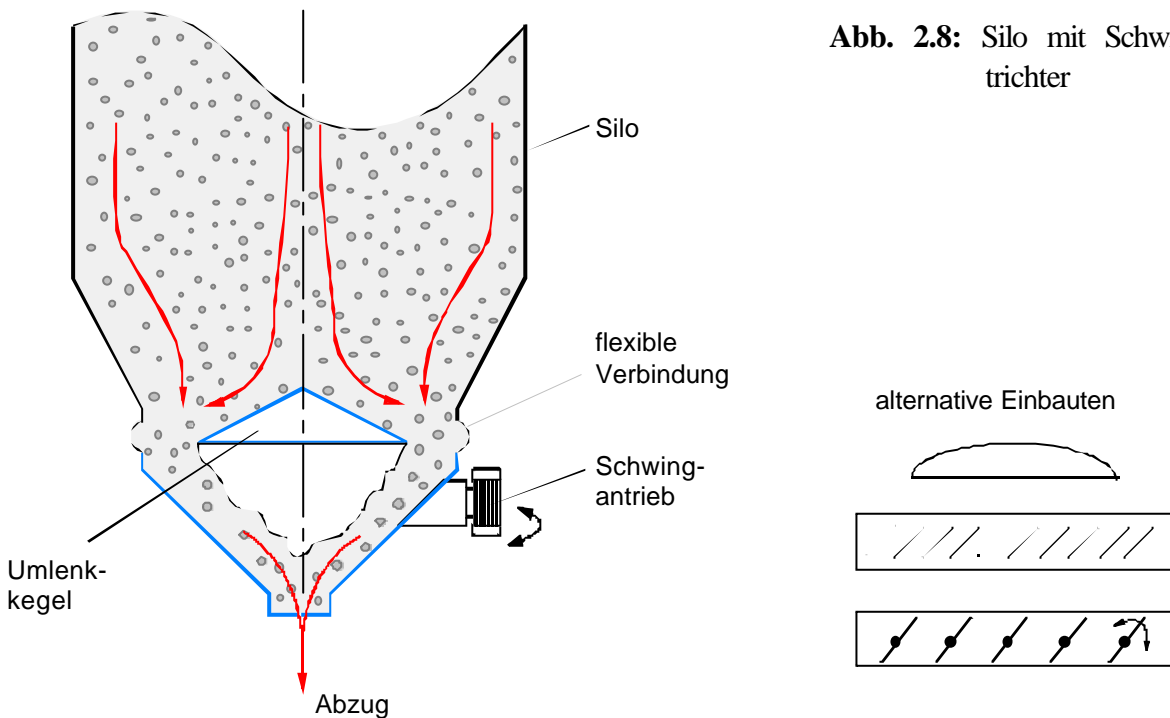
### 2.3.2 Schwingende Behälter oder Trichter

In diesem Fall wird der gesamte Behälter z.B. Silo, Transportbehälter o.ä. über Gummilager oder Federn schwingfähig gelagert und durch einen Vibrationsantrieb (Unwuchtmotor, Kolbenvibrator) in Schwingungen versetzt. Die Schwingungsparameter beschränken sich auf geringe Frequenzen (25 Hz) bei Schwingwegen im Millimeter-Bereich. Es sind sowohl lineare als auch Kreisschwingungen anzutreffen. Anwendungsfälle sind:

- Austragen und Vereinzeln zum Verhaken neigender Produkte, wie Streichhölzer, Schrauben, Trafofleche, Sojabohnen...[188],
- Entleerung von Transportbehältern,
- Entleerung kleinerer Silos (bis 5 m Durchmesser) bei gleichzeitiger „Selbstreinigung“ (z.B. für die Lagerung von Nahrungsmitteln, pharmazeutischen Wirkstoffen, Chemikalien, radioaktiven Substanzen...) [28].

Der gravierende Nachteil: Es muß eine sehr große „tote“ Masse mitbeschleunigt werden. Einen diesbezüglichen Kompromiß stellt der sog. Schwingtrichter dar, bei dem das Silo starr befestigt ist und nur der untere Teil in Schwingungen versetzt wird.

Schwingtrichter (auch Schwing- oder Vibrationsböden) sind seit Mitte der 60er Jahre bekannt [18,28]. Sie bestehen aus einem flexibel aufgehängten Trichter mit konvexem oder kegelförmigem Einbau (**Abb. 2.8**). Sie werden in Drehschwingungen um die Vertikalachse versetzt, wodurch das Schüttgut durch den Ringspalt zwischen Trichter und Umlenkkegel abfließt. Als Antriebe dienen meist Unwuchtmotoren, aber auch pneumatische oder magnetische Vibrationsantriebe. Meist werden Frequenzen von maximal 25 Hz verwendet und Auslenkungen bis zu 4 mm erreicht [28,51,162]. Bezüglich der Trichterform und des Umlenkkegels existieren vielfältige Bauformen. Neben konvexen und kegelförmigen Einbauten gibt es Schwingtrichter mit Lamellenrost-Einbau (Schwingroste) oder auch ohne Einbauten.



Schwingtrichter werden gern verwendet, da sie sich gut ins Anlagenkonzept integrieren lassen. Das zu lagernde Produkt läßt sich vollständig von der Umgebung kapseln. Auch bei abrasiven Medien tritt praktisch kein Verschleiß auf. Die Investitions- und Betriebskosten sind geringer als für mechanische Systeme (z.B. Räumarm) [28-29].

Nachteile treten besonders bei größer werdenden Durchmessern zutage (handelsüblich bis 6 m). Zu der mit dem Durchmesser überproportional steigenden Massenträgheit des Schwingtrichters selbst addiert sich bei einer Installation unterhalb eines Silos ohne Trichter noch die unverminderte Vertikal-



last des Schüttgutes im Silo. Bei solchen extremen Anfahrlasten besteht die Gefahr einer weiteren Schüttgutverdichtung (und damit Fließverschlechterung), bis der Antrieb die volle Amplitude erreicht (mehrere Sekunden) [112-113]. Ein weiteres Problem ist die ungleichmäßige Entleerung des Silos besonders in Kombination mit Abzugsförderern [28] und die daraus resultierenden Konsequenzen für Verweilzeitverteilung und (asymmetrische) Silo-Lasten.

Hinsichtlich der Eignung als Absperr- und Austragorgan gibt es in der Literatur gegensätzliche Darstellungen. Einerseits wird die ausschließliche Nutzung als Fließhilfe empfohlen, z.B. [28,40,50,162]. Andererseits wird für kohäsive Schüttgüter die Eignung als Absperrorgan attestiert oder durch Variation des Schwingweges (mittels magnetischem Vibrationsantrieb [112]) eine Mengenstromsteuerung in Aussicht gestellt, z.B. [106,181].

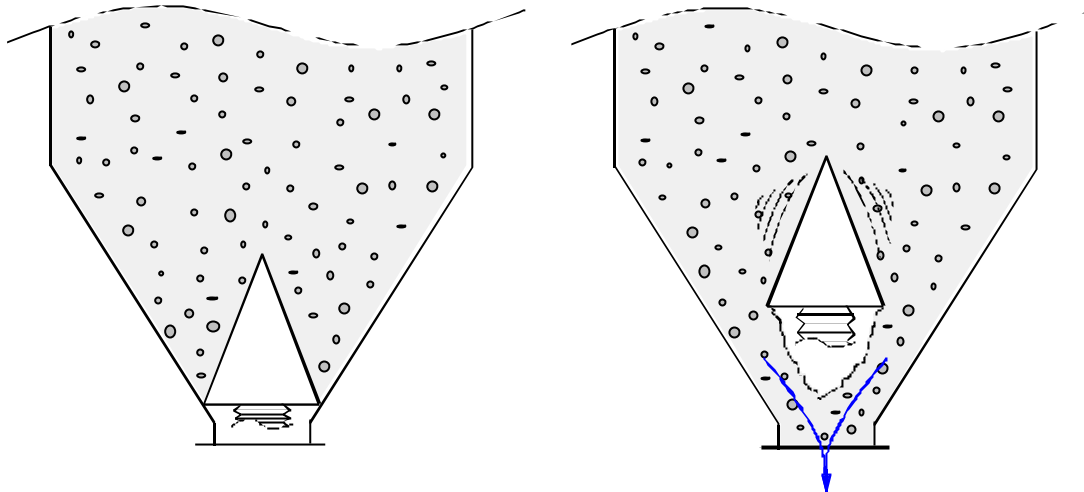
Die Schwingroste, eine Sonderform der Schwingtrichter, besitzen statt des Umlenkkegels vibrierende horizontale Lamellen, die starr oder in ihrer Neigung justierbar sein können (**Abb. 2.8**). Im letzteren Fall kann über die Neigung der Lamellen der Mengenstrom gesteuert und der Austrag verschlossen werden [31,37,50,106,162,181]. Für weitere Bauarten und Anwendungen vibrierender Behälter oder Trichter siehe z.B. [87,193-198].

### 2.3.3 Schwingende Einbauten

Im Gegensatz zu den Außenvibratoren (Abschn. 2.3.1) können vibrierende Einbauten direkt am Ort der Fließstörung wirken, ohne erst z.B. bei Schachtbildung durch die gesamte Schüttgutpackung übertragen und gedämpft zu werden. Sie besitzen wesentlich geringere Massen als z.B. vibrierende Silos oder Silotrichter (Abschn. 2.3.2), wodurch die erforderlichen Erregerkräfte proportional geringer sind. Je nach Bauart kann der nachträgliche Einbau jedoch sehr aufwendig sein.

Vibrierende Einbauten sind im einfachsten Fall ins Schüttgut hineinragende Stäbe oder Ketten. Typisch sind Käfige im Trichter [6,37,135,191] die ähnlich wie die Schwingtrichter angetrieben werden. In Betonsilos können schwingfähig gelagerte Platten eingebracht werden, die ebenfalls mit außenliegenden Vibratoren gekoppelt sind [187]. Ähnlich wie bei den Schwingtrichtern werden meist niederfrequente Schwingungen mit hohen Schwingweiten verwendet.

Es gibt auch hier eine Vielzahl spezieller Konstruktionen, wie trapezförmige Siebeinbauten oder Gitter im Trichter (Bridge Breaker<sup>®</sup>), die zur Trichterwandung parallele Schwingungen ausführen und dadurch sich bildende Brücken zerstören [162] Ebenso gibt es vibrierende Kegel, wie das Matcon-Bules<sup>®</sup> „Austragventil“, **Abb. 2.9**. Dieses besteht aus einem ins Schüttgut hineinragenden Kegel, dessen vertikale Lage pneumatisch verstellt werden kann. Dadurch kann der Auslauf entweder verschlossen oder mit variablem Spalt geöffnet werden. In geöffnetem Zustand wird der Kegel durch einen Pneumatik-Vibrator angetrieben [162].



**Abb.: 2.9:** Matcon-Bules® „Austragventil“: mit abgesenktem Kegel als Absperrorgan (links) und mit angehobenem, vibrierendem Kegel als Austraghilfe (rechts)

## 2.4 Zur Auswahl und verfahrenstechnischen Dimensionierung

Anhaltspunkte für die Auswahl schwingender Austraghilfen sind in **Tab. 2.3** zusammengefaßt. Ob bei der Planung berücksichtigt oder nachträglich installiert, die Auswahl und Auslegung schwingender Austraghilfen ist stark empirisch orientiert. Häufig sind sie Ergebnisse einer langen und damit teuren Serie von „Versuch und Fehler“ [8]. Zugrundegelegt werden dabei Erfahrungen mit ähnlichen Materialien oder mit Tests in kleinen Trichtern [162]. Die Fließeigenschaften des Schüttgutes, Schüttdichte und Vertikallast werden lediglich qualitativ berücksichtigt. Als Folge kann sich die installierte Austraghilfe beispielsweise unterhalb einer im Silotrichter gebildeten Schüttgutbrücke befinden. Sie zeigt somit nicht den gewünschten Effekt, da sie nicht am Ort der Fließstörung wirken kann [111]. Andererseits berichtet BELL [8] ebenso von Fällen, in denen eine effektive Fließhilfe bereits mit der Hälfte der vom Hersteller empfohlenen Vibrator-Größe erzielt werden konnte.

Hinsichtlich der verfahrenstechnischen Auslegung werden in der Literatur einige generelle Aspekte genannt, die nachfolgend zusammengefaßt sind:

- Der Einlaufdurchmesser muß mindestens so groß sein wie der kritische Durchmesser zur Vermeidung von Brückenbildung bei Massenfluß [106] bzw. zur Vermeidung von Schachtbildung bei Kernfluß (kritischer Durchmesser gegen Brücken- oder Schachtbildung siehe z.B. [60,88]).
- Schwingende Einbauten in Kernflußsilos, wie z.B. Umlenkkegel von Schwingtrichtern, benötigen einen größeren Durchmesser als den kritische Durchmesser gegen Schachtbildung.
- Für Schwingtrichter empfiehlt RADEMACHER [112-113] je nach Schüttguteigenschaften, Trichter-geometrie und Silolast einen maximalen Durchmesser um 1,5 m. Schwingtrichter sollten ausschließlich unterhalb eines Silo-Trichters installiert werden. Andernfalls treten sehr hohe Anfahrla-

sten auf (mit dem Durchmesser überproportional steigenden Massenträgheit des Schwingtrichters zuzüglich der unverminderten Vertikallast des Schüttgutes im Silo).

- Für Außenvibratoren sind höhere Frequenzen (oberhalb von etwa 100 Hz) günstig (weniger Ermüdungsbrüche, geringere Verdichtungsneigung, Resonanzverstärkung, vgl. Abschn. 2.3.1) [188].
- Alle Arten von vibrierenden Austraghilfen dürfen nur während des Abzugs von Schüttgut betätigt werden, da die Schwingungseinleitung in ruhendes Gut ebenso wie vertikale Schwingungen häufig zu einer Verdichtung und damit Fließverschlechterung führen. Zu diesem Effekt kann es bereits während des Anlaufens (bei Unwuchtmotoren mehrere Sekunden) kommen.
- Beim Abzug von geringen Mengen (relativ zum Silovolumen) ist der Zustand im Silo ähnlich dem bei geschlossenem Auslauf. Eine permanente Schwingungseinleitung würde auch hier eine Verdichtungsgefahr hervorrufen. Daher ist während des Austragens kleinerer Mengenströme ein gepulster Betrieb (jeweils für wenige Sekunden mit anschließender Pause) empfehlenswert [40,188].

**Tab. 2.3:** Anhaltspunkte für die Auswahl schwingender Austraghilfen (in Anlehnung an [162])

	<b>Außenvibratoren</b>	<b>Schwingende Silos u. Trichter</b>	<b>Schwingende Einbauten</b>
Beispiele	Bunkerrüttler, Impulsklopfer	Schwingtrichter, Schwingroste	Käfige, Gitter, Kegel
Antriebsenergie: elektrisch	X	X	X
pneumatisch	X	X	X
hydraulisch	X	—	—
Eignung für kohäsive Pulver	X	X	X
Funktion: Fließhilfe	X	X	X
Grobdosieren	—	z.T.	z.T.
Absperren	—	z.T.	z.T.
Gerätekosten im Vergleich	gering	hoch - sehr hoch	hoch - sehr hoch
Installation: während des Baus	X	X	X
bei entleertem Silo	X	z.T.	X
während des Betriebes	X	—	—

## 3 Fließverhalten von Schüttgütern - Aussagen der Kontinuumsmechanik

### 3.1 Das Kontinuum „Schüttgut“

In der Kontinuumsmechanik wird der Begriff Kontinuum als eine „stetige“ Anhäufung materieller Punkte definiert [12], deren Eigenschaften durch kontinuierliche Funktionen beschreibbar sind [39,80]. Das Kontinuum Schüttgut setzt sich in jedem Punkt aus einer Feststoff- und einer Hohlraumphase zusammen. Der Anteil des Hohlraumvolumens  $V_H$  am Gesamtvolumen  $V_{ges}$  wird als Porosität  $\varepsilon$  bezeichnet, Gl. (3-1). Der Hohlraum kann wiederum aus einer oder mehreren fluiden Phasen, z.B. Luft und / oder Wasser, bestehen.

$$\varepsilon = \frac{V_H}{V_{ges}} \quad (3-1)$$

Häufig wird statt der Porosität  $\varepsilon$  die Schüttgutdichte  $\rho_b$  verwendet. Für trockene Schüttgüter kann die Dichte des Porenfluids  $\rho_f$  gegenüber der Dichte der festen Phase  $\rho_s$  vernachlässigt werden. In diesem Fall lautet der Zusammenhang zwischen Schüttgutdichte und Porosität:

$$\varepsilon = 1 - \rho_b / \rho_s \quad \text{für } \rho_f \ll \rho_s \quad (3-2)$$

Für die kontinuumsmechanische Beschreibung von Schüttgütern werden (in Anlehnung an [33]) die nachfolgenden grundlegenden Annahmen getroffen:

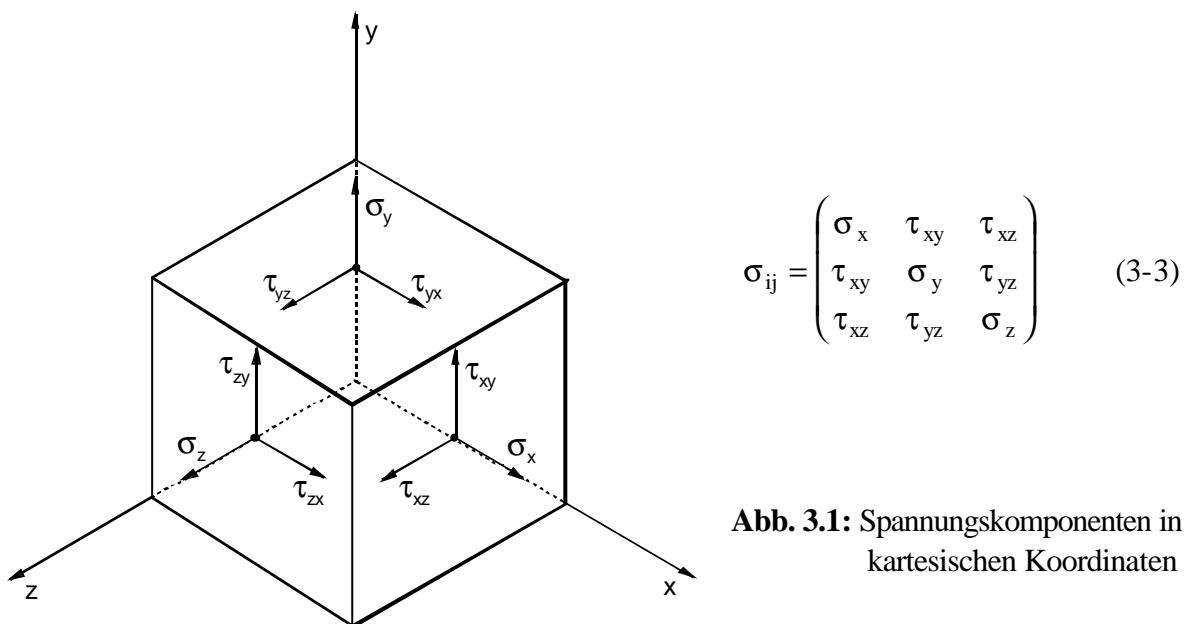
- a) Kontinuität: Disperse Materialien, wie Schüttgüter, können als Kontinuum betrachtet werden, wenn die einzelnen Partikeln in ihrer Ausdehnung klein gegenüber der Abmessung des betrachteten Volumenelements sind. So soll eine lineare Abmessung dieses Volumenelements mindestens das 25fache der maximalen Partikelgröße betragen [164].
- b) Integrität: Die Schüttgut-Partikeln bleiben unbeschädigt. Partikelbruch, Abrieb und chemische Reaktionen mit dem Porenfluid treten nicht auf.
- c) Lokalität (Nahordnung): Das mechanische Verhalten an einem Punkt wird nur durch dessen unmittelbare Umgebung beeinflusst.
- d) Nicht-Polarität: Es wirken nur Oberflächen- und Volumenkräfte, aber keine Momente [2]. Dies ist Voraussetzung für die Symmetrie des Spannungstensors (siehe 3.2.1).
- e) Einphasigkeit: Die Partikeln befinden sich in direktem Kontakt. Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Phasen des Schüttgutes sind vernachlässigbar. Es genügt die Betrachtung des Feststoffgerüsts (siehe auch 3.2.1).

Den in Abschn. 3.2 definierten kinetischen und kinematischen Größen liegen die obigen Annahmen a) bis e) zugrunde.

## 3.2 Kinetische und kinematische Größen

### 3.2.1 Spannungen

Auf einen Körper wirkende Oberflächen- und Volumenkräfte rufen in seinem Innern Spannungen hervor, die den Beanspruchungszustand charakterisieren. Dabei werden Spannungskomponenten senkrecht zu einer gedachten Schnittebene als Normalspannungen  $\sigma$  bezeichnet. Spannungskomponenten längs dieser Ebene heißen Schubspannungen  $\tau$ . Der Spannungszustand in einem Punkt des Kontinuums wird durch den Spannungstensor, Gl. (3-3), als Feldgröße beschrieben. Die Normalspannungen befinden sich auf der Hauptdiagonalen, alle anderen Tensor-Elemente stehen für Schubspannungen. **Abb. 3.1** zeigt die Bezeichnung der Spannungskomponenten.

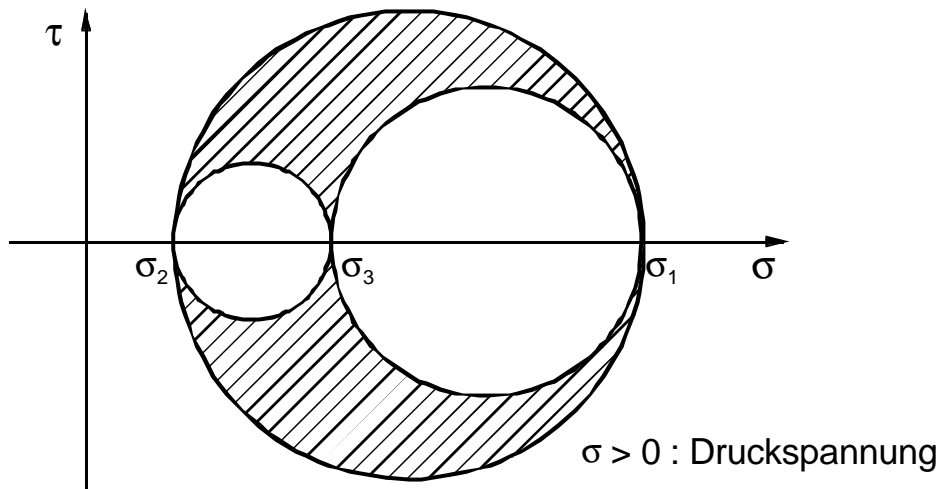


**Abb. 3.1:** Spannungskomponenten in kartesischen Koordinaten

Aufgrund der Symmetrie des Spannungstensors (vgl. Annahme d) existieren in jedem Punkt des Kontinuums drei jeweils orthogonale Schnittflächen, in denen nur Normalspannungen  $\sigma$ , aber keine Schubspannungen  $\tau$  wirken. Die dazugehörigen Flächennormalen bilden das Hauptachsensystem. Die in Richtung der Hauptachsen wirkenden Normalspannungen heißen Hauptspannungen. Hauptspannungen sind invariante Größen, d.h. sie beschreiben den Spannungszustand unabhängig vom gewählten Koordinatensystem.

Jeder beliebige (räumliche) Spannungszustand kann als Überlagerung dieser drei untereinander orthogonalen, einachsigen Spannungszustände  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  aufgefaßt, und mithilfe MOHRscher Spannungskreise (zweidimensional) grafisch dargestellt werden. Mit  $\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2$  erhält man drei Spannungskreise gemäß **Abb. 3.2**. Das schraffierte Gebiet einschließlich seiner Ränder beinhaltet die Normalspannungen  $\sigma$  und Schubspannungen  $\tau$ , die in einer beliebigen Ebene durch einen Punkt des Kontinuums übertragen werden. In der Schüttgutmechanik werden Druckspannungen mit positivem Vorzeichen versehen. Da die Mohrkreise symmetrisch zur  $\sigma$ -Achse sind, genügt nachfolgend die

Betrachtung der Halbebene  $\tau \geq 0$ . Die Vorzeichen der Schubspannungen geben deren Orientierung an (siehe z.B. [12,80,94]).



**Abb. 3.2:** Spannungszustand in einem Punkt des Kontinuums, dargestellt durch MOHRsche Spannungskreise

Neben dem dreiachsigen Spannungszustand (allgemeiner Fall) sind folgende Sonderfälle möglich:

- Sind zwei Hauptspannungen Null, liegt einfacher oder einachsiger Zug oder Druck vor.
- Ist eine Hauptspannung Null, heißt der Spannungszustand eben oder zweiachsig.
- Beim iso- oder hydrostatischen Spannungszustand sind alle drei Hauptspannungen gleichgroß:  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$ .

Spannungen werden durch alle Phasen des Schüttgutes übertragen. Dabei wird zwischen effektiven Spannungen  $\bar{\sigma}_{ij}$ , die im Feststoffgerüst wirken, und neutralen Spannungen  $p_H$  in den fluiden Phasen (auch Porendruck) unterschieden [19,159].

$$\sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} + p_H \cdot \delta_{ij} \quad (3-4)$$

$\sigma_{ij}$	totale Spannungen	
$\bar{\sigma}_{ij}$	effektive Spannungen	
$p_H \cdot \delta_{ij}$	Tensor der neutralen Spannungen	
$\delta_{ij}$	KRONECKER-Symbol, mit	$\delta_{ij} = 1; i = j$
		$\delta_{ij} = 0; i \neq j$

Die neutralen Spannungen sind isostatisch (s.o.). D.h. die Tensoren der totalen und effektiven Spannungen unterscheiden sich nur in den Hauptdiagonal-Elementen um jeweils den Wert des Porendrucks  $p_H$ . Neutrale Spannungen entstehen,

- wenn das Porenfluid nicht oder nur langsam entweichen kann,
- durch den Strömungsdruck des entweichenden Fluids,

- durch Kapillarkräfte im feuchten Schüttgut (negativer Porendruck),
- durch das Eigengewicht des Fluids.

Bei (quasi-) trockenen Schüttgütern, auf die sich die nachfolgenden Betrachtungen beschränken, sowie langsamer Deformation ist der Porenüber- oder Porenunterdruck gegenüber dem Umgebungsdruck vernachlässigbar. Daher braucht nicht zwischen effektiven und totalen Spannungen unterschieden zu werden. Der Strömungsdruck der entweichenden Luft ist aufgrund der Gasdichten und Strömungsgeschwindigkeiten gering. Die Strömungsgeschwindigkeit des Fluids liegt in der Größenordnung der Deformationsgeschwindigkeit, die auch für die Schwingungsbeanspruchung unter 0,1 m/s bleibt (siehe Abschn. 8). Insbesondere bei der Durchströmung sehr feinkörniger Partikelsysteme (Porengröße liegt in der Größenordnung der freien Weglänge des Gases<sup>2</sup>) können totale und effektive Spannungen als gleich betrachtet werden [19]. Damit liegt eine (quasi-) Einphasigkeit gemäß Annahme e) vor.

### 3.2.2 Deformation und Deformationsgeschwindigkeit

Die Belastung eines Körpers verursacht Verschiebungen  $u$  seiner materiellen Punkte mit den Koordinaten  $x$ . Die Verschiebungen bewirken Deformationen, bestehend aus Starrkörperbewegungen (Translation und Rotation) sowie Verzerrungen. Verzerrungen unterscheiden sich von den Anteilen der Starrkörperbewegung dadurch, daß sich die Lage der materiellen Punkte gegeneinander ändert. Für die Beschreibung von Deformation und Deformationsgeschwindigkeit (auch Deformationsrate) sollen zwei Vereinfachungen getroffen werden:

- Es werden nur kleine (infinitesimale) Deformationen betrachtet. Geometrische Nichtlinearitäten in Form gemischter Ableitungen können vernachlässigt werden (Theorie kleiner Deformationen).
- Die Deformation ist drehungsfrei.

Die geometrischen Änderungen des Körpers werden dann durch den Verzerrungstensor, Gl. (3-5), charakterisiert, da die Starrkörper-Translation bereits durch die Gradientenbildung eliminiert ist. Der Verzerrungstensor ist ebenso wie der Spannungstensor symmetrisch. Es gelten die gleichen Gesetzmäßigkeiten (Konstanz der Orthogonalität des Hauptachsensystems).

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad i, j = x, y, z \quad (3-5)$$

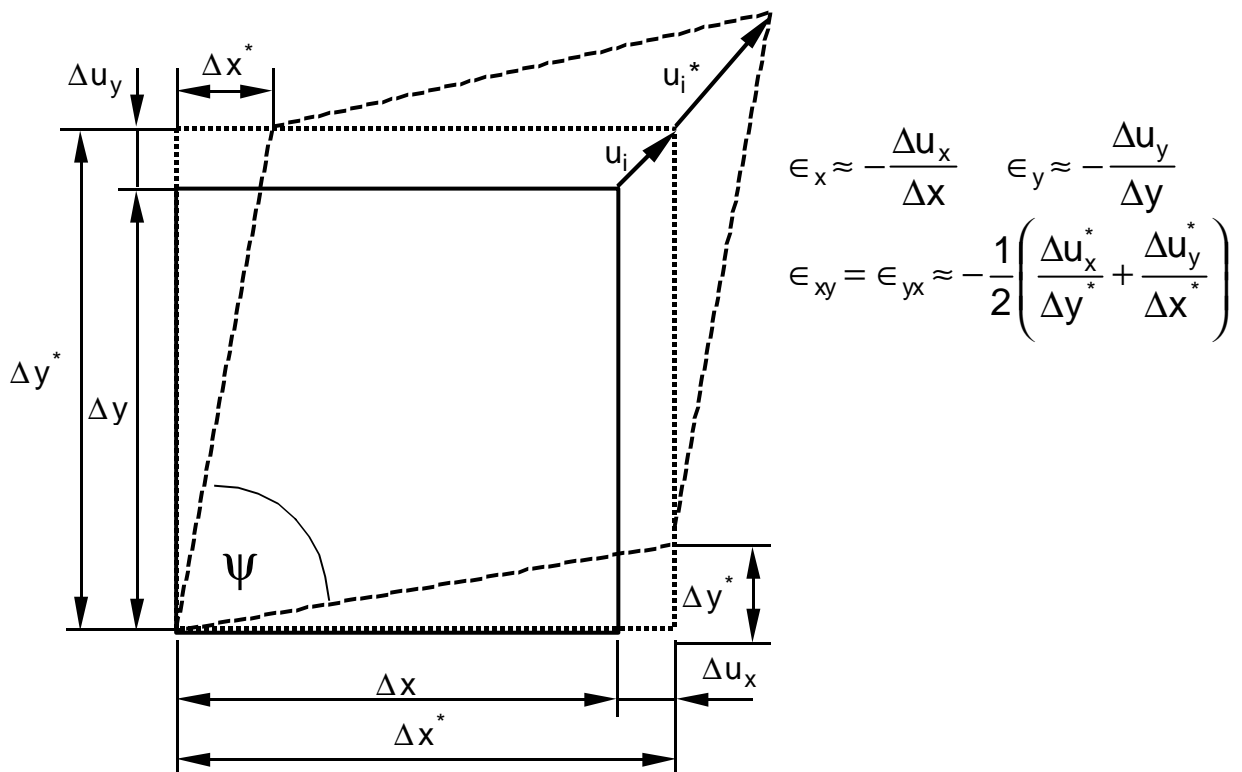
mit:  $\|\epsilon_{ij}\| \ll 1 \quad (3-6)$

<sup>2</sup> Luft (1 bar, 293 K): mittlere freie Weglänge 0,07  $\mu\text{m}$  [76]

- $\epsilon_{ij}$  Verzerrungstensor für kleine Verzerrungen  
 $u_i$  Verschiebungsvektor  
 $x_i$  Punktkoordinaten

In der Theorie kleiner Deformationen kann die Verzerrung in eine Dehnung / Kompression der Kanten (Normalverzerrungen) und eine Gleitung (Schubverzerrung) zerlegt werden. Die Hauptdiagonalelemente  $\epsilon_{ij}$ ;  $i = j$  beschreiben die Normalverzerrungen und die Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen  $\epsilon_{ij}$ ;  $i \neq j$  die volumentreue Gleitung, **Abb. 3.3**. Für ingenieurtechnische Anwendungen werden die Gleitungen häufig dargestellt als:

$$\gamma_{ij} = 2 \cdot \epsilon_{ij}, \quad i \neq j \quad (3-7)$$



**Abb. 3.3:** Geometrische Deutung kleiner Verzerrungen (ebener Fall)

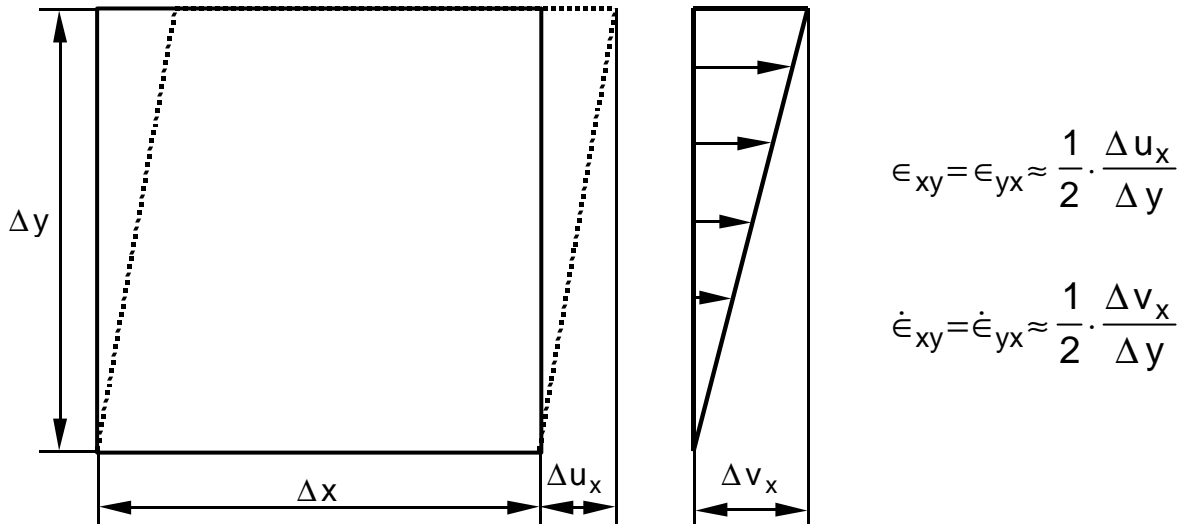
Spannungs- und Deformationstensor beschreiben den Momentanzustand eines Volumenelementes. Die zeitliche Entwicklung von Spannungen und Deformationen bis zum Zeitpunkt  $t$  heißen Spannungs- und Deformationsvorgeschichte oder zusammengefaßt Beanspruchungsvorgeschichte [45]. Die Relativgeschwindigkeit zwischen materiellen Punkten des Kontinuums wird mit Vorraussetzung g) durch den ebenfalls symmetrischen Verzerrungsgeschwindigkeitstensor  $D_{ij}$  wiedergegeben:

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (3-8)$$



Unter Voraussetzung f) (kleine Deformationen) stimmt der Verzerrungsgeschwindigkeitstensor, Gl. (3-8), mit der Zeitableitung des Verzerrungstensors, Gl. (3-5), überein [80]:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{d \epsilon_{ij}}{d t} \approx D_{ij} \quad (3-9)$$



**Abb. 3.4:** Deformation und Deformationsrate bei einfacher Scherung

Im Falle stationärer Deformation (stationäres Fließen) sind die Elemente des Tensors  $\dot{\epsilon}_{ij}$  zeitunabhängig [94]. Für den Fall der einfachen Scherung ist die geometrische Deutung der Deformationsgeschwindigkeit in **Abb. 3.4** zu sehen. Die Deformation besteht in diesem Fall nur aus einer Gleitung. Die Gleitungsgeschwindigkeit (oder Scherrate) kann in Analogie zu Gl. (3-7) angegeben werden als:

$$\dot{\gamma} \approx 2 \cdot \dot{\epsilon}_{ij}, \quad i \neq j \quad (3-10)$$

### 3.3 Hauptmerkmale des Schüttgutverhaltens

In der Kontinuumsmechanik wird das Materialverhalten von Schüttgütern durch sechs Hauptmerkmale beschrieben, **Tab. 3.1**. Jede spezielle Schüttguteigenschaft beruht auf einem oder mehreren dieser Hauptmerkmale [33]. Neben den Hauptmerkmalen in **Tab. 3.1** tritt als weitere Besonderheit des Materialverhaltens von Schüttgütern stationäres Fließen auf. Stationäres Fließen stellt sich bei kontinuierlicher Scherdeformation ein. Es charakterisiert einen Zustand unbegrenzter Gleitung bei konstanten Spannungen [35]. Häufig wird stationäres Fließen auch als Fließen unter Volumenkonstanz beschrieben.

**Tab. 3.1:** Hauptmerkmale des Materialverhaltens von Schüttgütern nach LADE [73], KOLYMBAS [69] und FEISE [33]

<b>Merkmal</b>	<b>Bedeutung</b>
Plastizität	Schüttgüter fließen auch unter kleinen Schubspannungen plastisch ohne erkennbaren elastischen Bereich.
Barotropie	Die Materialeigenschaften (Steifigkeiten, Festigkeiten) hängen vom Spannungsniveau ab.
Pyknotropie	Die Materialeigenschaften (Steifigkeiten, Festigkeiten) hängen von der Schüttgutedichte ab, die bei gleichem Spannungsniveau variieren kann.
Dilatanz	Reine Scherbeanspruchungen können Volumenänderungen hervorrufen (oder: volumentreue Scherdeformationen ändern den isostatischen Spannungsanteil).
Kohäsion	Fähigkeit des Schüttgutes Zugspannungen zu übertragen; Die Zugfestigkeit ist um Größenordnungen kleiner als die Druckfestigkeit.
Argotropie	Die für eine Deformation notwendigen Spannungen hängen von der Deformationsrate ab (Viskosität, Kriechen, Relaxation).

### 3.4 Fließkriterien für Schüttgüter

Das Materialverhalten wird durch Materialgleichungen (auch: Stoff-, Konstitutiv- oder Zustandsgleichungen) wiedergegeben. Materialgleichungen verknüpfen die in Abschnitt 3.2 definierten kinetischen und kinematischen Größen. Dabei werden i. allg. zwei weitere Annahmen getroffen: Homogenität und Isotropie.

- h) Homogenität: Unter Homogenität ist im Sinne der Schüttgutmechanik eine konstante Schüttgutedichte in einem repräsentativen Volumenbereich zu verstehen [138]. Entmischungserscheinungen werden dadurch ausgeschlossen.
- i) Isotropie: Die betrachtete physikalische Größe ist in allen Raumrichtungen gleich. Sie besitzt keine Vorzugsrichtung. Wie später noch deutlich wird, ist zumindest der Ausschluß von inhärenter Anisotropie erforderlich. D.h. es liegt ein isotroper Ausgangszustand vor. In diesem Fall bewirken isostatische Spannungen nur Volumenänderungen<sup>3</sup>. Hingegen prägen alle Verfestigungsprozeduren, die durch deviatorische Spannungen ausgelöst werden, einem Material Anisotropie auf (induzierte Anisotropie) [41,69].

<sup>3</sup> Bei inhärent anisotropen Materialien, z.B. Holz, kann auch der isostatische Spannungszustand Gestaltänderungen hervorrufen [2,80]. Dieser Fall steht hier jedoch nicht zur Debatte und wird durch Annahme i) ausgeschlossen.

Die meisten Konstitutivgleichungen für Schüttgüter (siehe [35,164]) zerlegen die Deformationen additiv in einen reversiblen (elastischen) und einen irreversiblen Anteil, Gleichung (3-11). Der irreversible Anteil kann sich wiederum aus plastischen und / oder viskosen Deformationen zusammensetzen.

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij,rev} + \epsilon_{ij,irrev} \quad (3-11)$$

Ebenso kann die Deformationsrate zerlegt werden:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij,rev} + \dot{\epsilon}_{ij,irrev} \quad (3-12)$$

Die Grenze zwischen reversiblen und irreversiblen Dehnungen wird durch eine Fließbedingung (nachfolgend auch Fließkriterium oder Fließgrenze) vorgegeben. Sie hat in den Hauptspannungen die allgemeine Form [63]:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \quad (3-13)$$

Die in der Schüttguttechnik standardmäßig verwendeten Meßgeräte (Ring- und JENIKE-Scherzelle) liefern den bei einer gegebenen Normalspannung jeweils größtmöglichen Wert der Schubspannung. Da die Abmessungen der Scherzone nicht exakt bestimmbar sind, sind weder Deformationen noch Volumenänderungen quantitativ zugänglich. Fließbedingungen für die Auswertung von Scherversuchen besitzen daher die Form:

$$\tau = f(\sigma) \quad (3-14)$$

Ein Beispiel sei die Fließbedingung nach MOHR-COULOMB. Sie beschreibt bindige und kohäsionslose Böden in Analogie zur Festkörperreibung, **Abb. 3.5**. Die größte übertragbare Schubspannung hängt von der inneren Reibung, charakterisiert durch den Reibungswinkel  $\varphi_i$ , sowie von der Kohäsion  $\tau_c$ , also der Scherfestigkeit bei  $\sigma = 0$ , ab. Spannungszustände, die innerhalb des schraffierten Gebietes liegen, rufen nur elastische Deformationen hervor, d.h. die gegenseitige Lage der materiellen Punkte des Kontinuums bleibt erhalten. Spannungszustände auf dem größten MOHR-Kreis ( $\sigma_1 - \sigma_2$ ) führen zu plastischen Deformationen (Fließen). Die mathematische Formulierung der Fließbedingung gemäß Gl. (3-14) lautet:

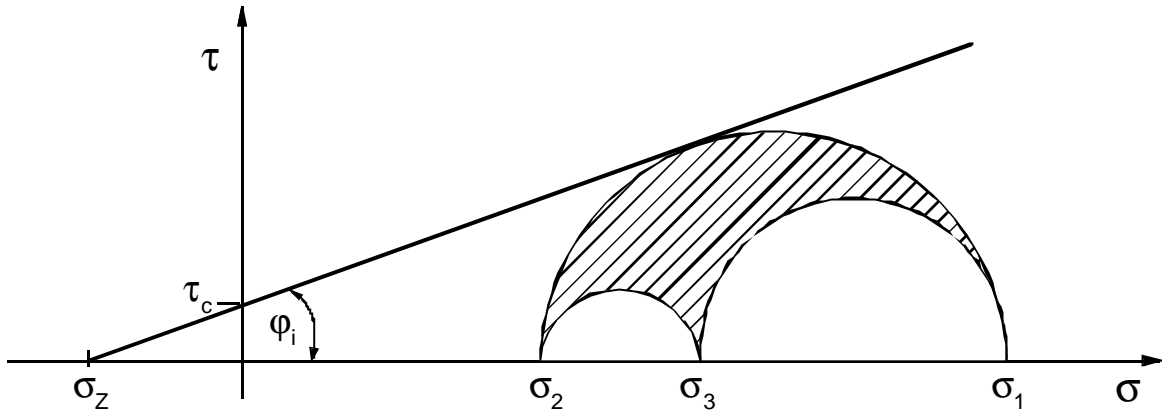
$$\begin{aligned} \tau &= \tan\varphi_i \cdot \sigma + \tau_c \\ &= \tan\varphi_i (\sigma + \sigma_Z) \end{aligned} \quad (3-15)$$

oder in den Hauptspannungen, gemäß Gl. (3-13):

$$(\sigma_1 - \sigma_2)(1 - \sin\varphi_i) - 2\tau_c \cdot \cos\varphi_i = 0. \quad (3-16)$$

$\varphi_i$	innerer Reibungswinkel
$\tau_c$	Kohäsion
$\sigma_Z$	isostatische Zugfestigkeit

Die Fließbedingung nach MOHR-COULOMB ist geschwindigkeitsunabhängig und isotrop. Sie beschreibt Plastizität, Barotropie, Dilatanz (gemäß Tab. 3.1) und Kohäsion [35].



**Abb. 3.5:** Fließbedingung von MOHR-COULOMB

JENIKE [60] modifizierte die Fließbedingung von MOHR-COULOMB für das Fließen von Schüttgütern bei geringen Spannungen, wie sie bei Lagerung und Transport auftreten. Er führte folgende Erweiterungen ein:

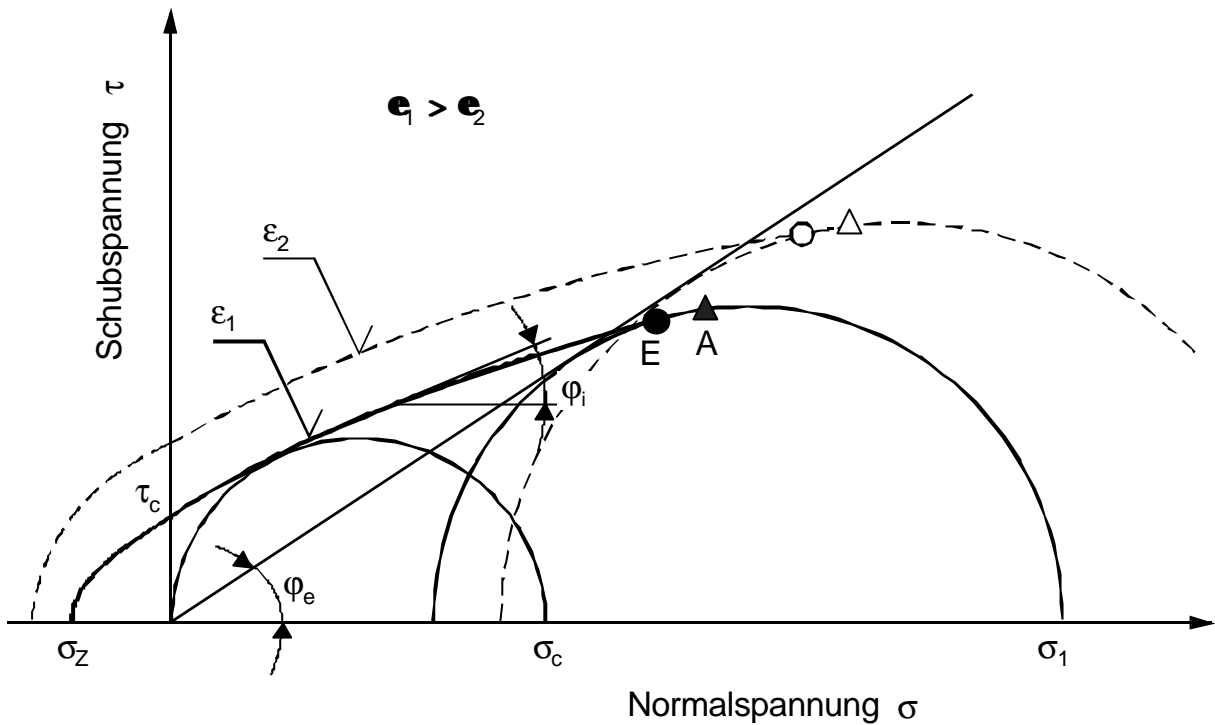
- Die Lage der Fließgrenze (des Fließortes) hängt von der Porosität  $\varepsilon$  bzw. Schüttgutdichte  $\rho_b$  ab (Pyknotropie). Die Variation der Porosität führt auf eine Schar von Fließorten.
- Es wird zwischen beginnendem Fließen und stationärem Fließen unterschieden (in Analogie zur Haft- und Gleitreibung bei Festkörpern).
- Der Fließort besitzt einen Endpunkt (E) in Richtung steigender Normalspannungen  $\sigma$ . Dieser Endpunkt liegt auf dem MOHR-Kreis für stationäres Fließens (siehe **Abb. 3.6**).

Damit folgt aus Gl. (3-13):

$$(\sigma_1 - \sigma_2) - f(\sigma_1, \sigma_2, \tau_c, \phi_i, \phi_e, \varepsilon) = 0 \quad (3-17)$$

**Abb. 3.6** zeigt die Fließbedingung von JENIKE in der MOHRschen Ebene. Für den durchgezeichneten Fließort ( $\varepsilon_1$ ) wurden zwei charakteristische Spannungszustände durch MOHR-Kreise veranschaulicht:

- einaxialer Druck ( $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ): Der dazugehörige MOHR-Kreis verläuft durch den Koordinatenursprung. Die größte Hauptspannung heißt in diesem Fall einachsige oder einaxiale Druckfestigkeit  $\sigma_c$ .
- stationäres Fließen: Das stationäre Fließen wird durch den größtmöglichen MOHR-Kreis symbolisiert mit der Spannung  $\sigma_1$  als größte Verfestigungs-Hauptspannung.



**Abb. 3.6:** Fließbedingung nach JENIKE in der MOHRschen Ebene

Das Verhältnis der Verfestigungsspannung  $\sigma_1$  zur resultierenden Schüttgutfestigkeit  $\sigma_c$  heißt Fließfunktion  $ff_c$ .

$$ff_c = \sigma_1 / \sigma_c \quad (3-18)$$

Anhand der Fließfunktion werden Schüttgüter hinsichtlich ihres Fließverhaltens eingeteilt, **Tab. 3.2**. Je größer der Wert der Fließfunktion  $ff_c$ , desto leichter fließt das Schüttgut.

**Tab. 3.2:** Klassifizierung der Fließfähigkeit von Schüttgütern [165]

$10 < ff_c$	rieselfähig, freifließend
$4 < ff_c < 10$	leicht fließend
$2 < ff_c < 4$	kohäsiv, schwer fließend
$1 < ff_c < 2$	sehr kohäsiv
$ff_c < 1$	nicht fließend, verhärtet

Die einzelnen (auch individuellen) Fließorte mit dem jeweiligen Winkel  $\varphi_i$  charakterisieren das beginnende Fließen. Der effektive Fließort mit dem effektiven Reibungswinkel  $\varphi_e$  steht für das stationäre Fließen. JENIKE beschreibt den effektiven Fließort als Gerade durch den Koordinatenursprung, die den jeweils größten MOHR-Kreis eines Fließortes tangiert. Das Fließen des Schüttgutes an einer Grenzfläche (Behälterwand) wird für jede Kombination von Schüttgut und Wandmaterial durch ei-

nen einzigen Wandfließort wiedergegeben. Der Anstieg des Wandfließortes in der MOHRschen Ebene heißt Wandreibungswinkel  $\varphi_w$  und der Ordinatenabschnitt Adhäsion  $\tau_a$ .

Das Modell von JENIKE beinhaltet alle in Abschn. 3.3.1 genannten Merkmale des Materialverhaltens, mit Ausnahme der Argotropie, also der Abhängigkeit der für die Deformation notwendigen Spannung von der Deformationsrate. Diese Vereinfachung ist zulässig für die bei der Silo-Lagerung auftretenden Fließgeschwindigkeiten [164].

Die Fließbedingung von JENIKE wurde vielfach modifiziert, z.B. von SCHWEDES [138], MOLERUS [92,94] und TOMAS [164,168]. Die beiden letztgenannten führten Kennwerte zwischenpartikulärer Haftkräfte in das kontinuumsmechanische Modell von JENIKE ein. Auf diese partikelmechanischen Modelle wird in Abschnitt 4 eingegangen.

Basierend auf dem rheologischen Modell für viskoplastische Stoffe mit Fließgrenze Gl. (3-19)

$$\tau = \tau_F + \eta_{pl} \cdot \dot{\gamma}^n \quad (3-19)$$

$\tau_F$	Fließgrenze
$\eta_{pl}$	Plastizität („plastische Viskosität“)
$\dot{\gamma}$	Scherrate
$n$	rheologischer Parameter

nennt TOMAS [164] für das schnelle Fließen von Schüttgütern folgenden Ansatz:

$$\tau = \tan\varphi_i (\sigma + \sigma_Z) + \eta_{pl} \cdot \dot{\gamma}^n \quad (3-20)$$

Der erste Term der rechten Seite beschreibt den Anteil der Festkörperreibung und der zweite Term die Geschwindigkeitsabhängigkeit. Für geringe Scherraten geht Gl. (3-20) in (3-15) über. Das plastische Verhalten von Schüttgütern nach MOHR-COULOMB ist demnach als asymptotischer Grenzfall in Gl. (3-20) enthalten.

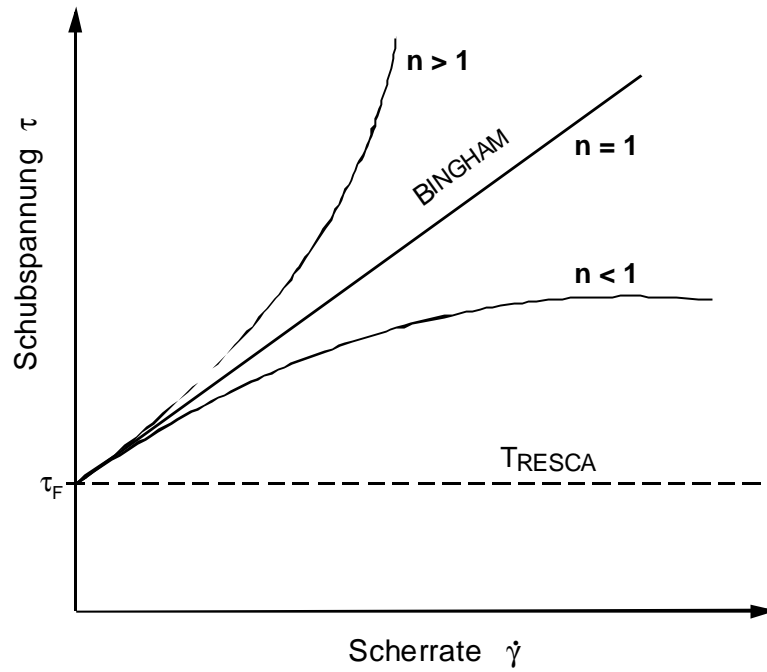
Der Exponent  $n$  wird als rheologischer Parameter bezeichnet. Für  $n = 1$  folgt aus Gl. (3-19) der Sonderfall des BINGHAM-Materials (**Abb. 3.7**), der wiederum für  $\tau_F = 0$  das NEWTONsche Fluid als Sonderfall enthält. Ist der rheologische Parameter  $n$  von eins verschieden, wird nichtlineare<sup>4</sup> Viskosität einbezogen. Dabei sind zwei Fälle möglich (**Abb. 3.7**):

- Für  $n > 1$  liegt Dilatanz<sup>5</sup> vor. Bei diesem Verhalten wächst die Viskosität mit steigender Scherrate („shear thickening“).
- Für  $0 < n < 1$  sinkt die Viskosität mit steigender Scherrate („shear thinning“). Dieses Verhalten heißt strukturviskos.

<sup>4</sup> Hier liegt physikalische Nichtlinearität vor; mit Annahme f) in Abschn. 3.2.2 wurde lediglich geometrische Nichtlinearität ausgeschlossen.

<sup>5</sup> Trotz des selben Begriffes handelt es sich hier *nicht* um Dilatanz im Sinne von **Tab. 3.1**.

Das Modell von STADLER / BUGGISCH [20,152] besitzt ebenfalls die Form (3-19). Zusätzlich enthält es einen Term für die Impulsübertragung im Schüttgut. Da dieser Term als inelastische Partikelkollision interpretiert wird und die mikroskopische Variable Partikeldurchmesser enthält, wird dieses Modell ebenfalls im Rahmen der partikelmechanischen Theorie (Abschn. 4) behandelt.



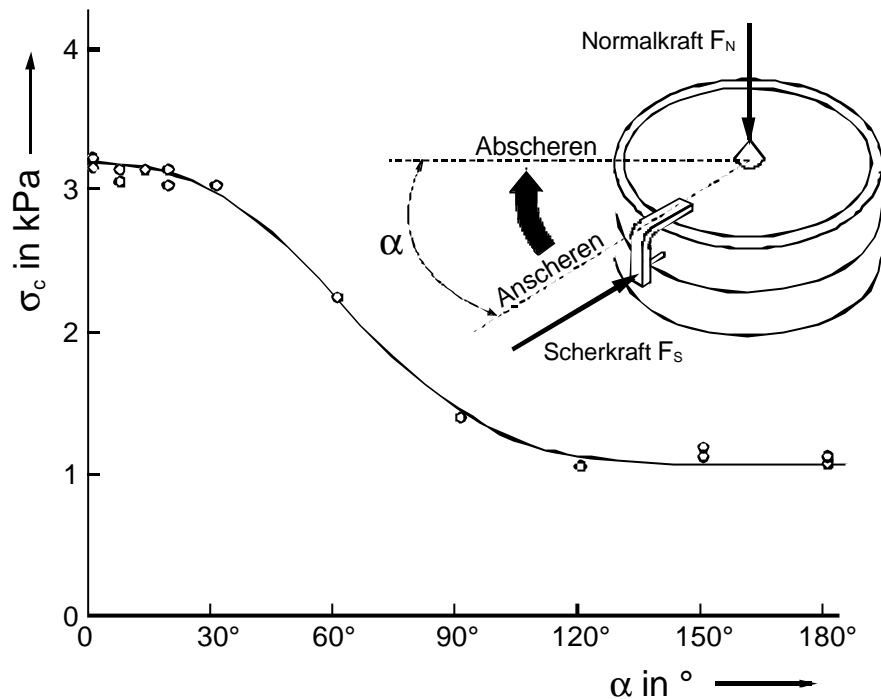
**Abb. 3.7:** Geschwindigkeitsabhängiges Materialverhalten bei einfacher Scherung

### 3.5 Induzierte Anisotropie

Gemäß Abschn. 3.3.2, Annahme i) sind verfestigte Schüttgüter nur dann mechanisch isotrop, wenn sie isostatisch verdichtet wurden, also mit  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ . Verfestigende isostatische Spannungszustände treten jedoch weder bei der Silo-Lagerung noch in gebräuchlichen Meßapparaturen auf [94,140]. Einem Schüttgut wird beim Verfestigen fast immer Anisotropie aufgeprägt, selbst wenn ein isotroper Ausgangszustand vorlag.

MOLERUS [94] schlug einen Anisotropienachweis vor, der auf dem JENIKE-Versuch basiert (vgl. Abschn. 6.2). Die Scherzelle wurde nach dem Anscheren um  $90^\circ$  um die Vertikalachse gedreht und anschließend unter der geänderten Scherrichtung abgeschert. Diese Methode lieferte geringere Scherfestigkeiten, verglichen mit Versuchen bei identischer An- und Abscherrichtung unter sonst gleichen Versuchsbedingungen. SARABER et al. [123] griffen dieses Experiment auf und variierten die Abscherrichtung in mehreren Stufen zwischen  $0^\circ$  und  $180^\circ$  gegenüber der Richtung beim Anscheren. Die höchste Scherfestigkeit wurde auch hier bei Übereinstimmung von An- und Abscherrichtung

beobachtet. Die mit diesen Ergebnissen formal gebildete Fließfunktion nach JENIKE zeigt eine starke Richtungsabhängigkeit, **Abb. 3. 8**.



**Abb. 3. 8:** Mit der JENIKE-Scherzelle gemessene Richtungsabhängigkeit der einaxialen Druckfestigkeit eines Kalksteinpulvers [123]

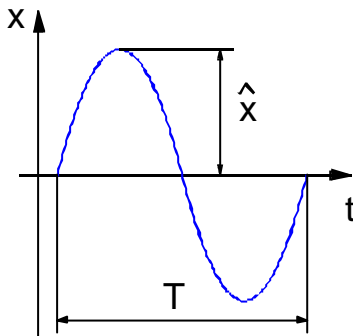
Offensichtlich wird die Schüttgutprobe beim stationären Fließen nicht in allen Richtungen gleichartig beansprucht. Bedingung für Isotropie war eine isostatische Verfestigung, also  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ , während nach dem stationären Fließen das Verhältnis von kleinster zu größter Hauptspannung  $\sigma_2 / \sigma_1$  minimal wird [140]. HARDER [45] und SCHWEDES [140] argumentieren, daß bei Variation der Abscherrichtung gegenüber der Anscherrichtung keine klar definierte Verfestigung durch stationäres Fließen vorliegt. Die nach Drehung der Probe gemessenen Scherfestigkeiten repräsentieren andere Verfestigungsbedingungen und gehören folglich nicht zum betrachteten stationären Fließort als Beanspruchungsvorgeschichte.

Allen Untersuchungen ist jedoch gemein, daß bei Variation der Abscherrichtung die größten Festigkeiten bei Übereinstimmung von An- und Abscherrichtung gemessen wurden. D.h., werden kohäsive Schüttgüter monoton deformiert, entsteht eine Packungsstruktur, die einen maximalen Widerstand gegen gerade diesen Typ der Deformation liefert [34]. Und was für die Anwendung wesentlich ist: Die Fließfunktion nach JENIKE nimmt zumindest keine kleineren Werte an, als bei Übereinstimmung von An- und Abscherrichtung. Unabhängig davon, ob die Deformations- oder Hauptspannungsrichtungen beim Verfestigen und beim beginnenden Fließen in der jeweiligen praktischen Anwendung tatsächlich übereinstimmen, liegt man mit den Ergebnissen des JENIKE-Versuchs somit auf der „sicheren Seite“.



### 3.6 Fließen von Schüttgütern bei Schwingungseinwirkung

#### 3.6.1 Kinematische Größen harmonischer Schwingungen



**Abb. 3.9:** Harmonische Schwingung

Für die Beschreibung harmonischer Schwingungen stehen folgende kinematische Größen zur Verfügung: Die Schwingungsdauer  $T$  (oder die abgeleiteten Größen Frequenz  $f$  oder Kreisfrequenz  $\omega$ ), der Schwingweg  $x$  sowie dessen zeitliche Ableitungen Schwinggeschwindigkeit  $\dot{x}$  und Beschleunigung  $\ddot{x}$ , **Tab. 3.3**. Der Schwingweg und dessen Zeitableitungen ändern ihren Wert periodisch mit der Zeit  $t$ . Die Maximalwerte heißen Amplitude (z.B. Schwingweg-Amplitude  $\hat{x}$ ) und werden durch ein „Dach“ gekennzeichnet, **Abb. 3.9**. Man benötigt genau zwei dieser vier Größen, um die Schwingung eindeutig zu beschreiben. Alle weiteren Größen

legt man dadurch zwangsläufig fest. Wird beispielsweise die Frequenz  $f$  variiert und der Schwingweg  $\hat{x}$  konstant gehalten, so steigt mit der Frequenz gleichzeitig die Beschleunigung, und zwar quadratisch, Gl. (3-27), sowie linear mit der Frequenz die Schwinggeschwindigkeit, Gl. (3-25). Hält man hingegen die Beschleunigung konstant, sinkt mit steigender Frequenz der Schwingweg mit dem Faktor  $1/\omega^2$  und die Schwinggeschwindigkeit mit dem Faktor  $1/\omega$ .

**Tab. 3.3:** Kinematische Größen harmonischer Schwingungen

Parameter	Symbol	Einheit	Gleichung	Bemerkungen
Frequenz bzw. Kreisfrequenz	$f$ $\omega$	Hz 1/s	$f = 1/T$ (3-21) $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ (3-22)	$T$ -Schwingungsdauer, <b>Abb. 3.9</b>
Schwingweg	$x$	m	$x = \hat{x} \cdot \sin(\omega t)$ (3-23)	$\hat{x}$ lt. <b>Abb. 3.9</b>
Schwinggeschwindigkeit	$v, \dot{x}$	m/s	$\dot{x} = dx/dt$ $= \hat{x} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$ (3-24)	$\hat{\dot{x}} = \hat{x} \cdot \omega$ (3-25)
Schwingbeschleunigung	$a, \ddot{x}$	m/s <sup>2</sup>	$\ddot{x} = d^2x/dt^2$ $= -\hat{x} \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t)$ (3-26)	$\hat{\ddot{x}} = \hat{x} \cdot \omega^2$ (3-27)

### 3.6.2 Fließkriterium für das schwingungsinduzierte Fließen

Mechanische Schwingungen, die auf in Bewegung befindliche Schüttgüter wirken, verringern deren Scherfestigkeit und führen so zu einer Fließverbesserung (höhere Fließfähigkeit). Auch die Reibung an Grenzflächen wird herabgesetzt. So können beispielsweise in Kernflußsilos Massenfluß erzeugt (Verringerung der Wandreibung) oder Schüttgutbrücken im Silotrichter zerstört werden (Reduzierung der Schüttgutfestigkeit).

Basierend auf Messungen mit einer modifizierten JENIKE-Scherzelle (siehe Abschn. 6.3) schlugen LI und ROBERTS [116] ein Fließkriterium für das schwingungsinduzierte Fließen von Schüttgütern vor. Als Ausgangspunkt diente die Fließfläche von ROSCOE [119]. Diese beschreibt die Schubspannung  $\tau$  für ein gegebenes Material als Funktion der Normalspannung  $\sigma$  und der Porosität in der Scherzone  $\varepsilon_s$ :

$$\begin{aligned}\tau &= f(\sigma, \varepsilon_s) \\ &= \mu \cdot \sigma + \beta \cdot \exp(-B \cdot \varepsilon_s)\end{aligned}\quad (3-28)$$

$B$ ,  $\beta$  und  $\mu$  sind Materialkonstanten.

Nach LI (zitiert in [116]) korreliert die Porosität in der Scherzone  $\varepsilon_s$  für gegebene Verfestigungsbedingungen mit der Intensität der eingeleiteten Schwingungen, die durch die maximale Schwinggeschwindigkeit  $\hat{v}$  charakterisiert werden kann:

$$\varepsilon_s \sim \hat{v}$$

D.h. die eingeleiteten Schwingungen verursachen eine lokale Ausdehnung des Schüttgutes in der Scherzone, wodurch sich die Scherfestigkeit mit zunehmender Schwinggeschwindigkeit verringert:

$$\begin{aligned}\tau_v &= f(\sigma, \hat{v}) \\ &= \mu \cdot \sigma + \beta \cdot \exp(-B \cdot \hat{v})\end{aligned}\quad (3-29)$$

Der Grenzfall  $\hat{v} \rightarrow \infty$  liefert die minimale Scherfestigkeit  $\tau_\infty$ :

$$\tau_v(\hat{v} \rightarrow \infty) = \mu \cdot \sigma = \tau_\infty \quad (3-30)$$

und für  $\hat{v} = 0$  erhält man die Scherfestigkeit ohne Schwingungseinwirkung:

$$\tau = \tau_\infty + \beta \quad (3-31)$$

Mit den Grenzfällen (3-30), (3-31) und der Substitution  $B = 1/\gamma$  wird Gl. (3-29) schließlich zu:

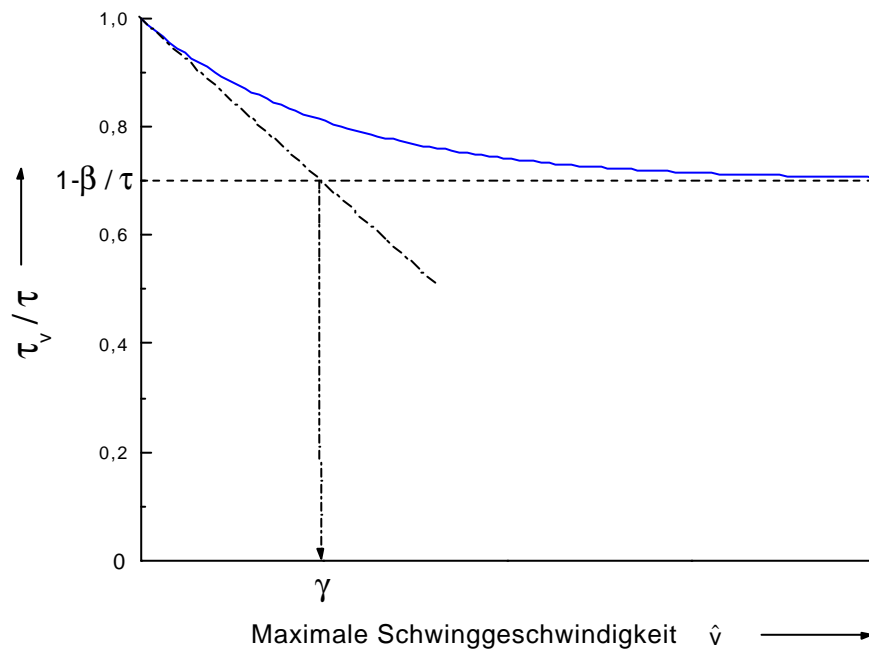
$$\tau_v = \tau - \beta[1 - \exp(-\hat{v}/\gamma)] \quad (3-32)$$

oder in dimensionsloser Schreibweise:

$$\frac{\tau_v}{\tau} = 1 - \frac{\beta}{\tau} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\hat{v}}{\gamma}\right) \right] \quad (3-33).$$

$\tau$	Scherspannung
$\tau_v$	Scherspannung bei Schwingungseinwirkung
$\hat{v}$	maximale Schwinggeschwindigkeit
$\beta, \gamma$	Materialkonstanten

Mit steigender Schwinggeschwindigkeit fällt die Scherfestigkeit zunächst stark ab und nähert sich asymptotisch einem Minimalwert  $\tau_{v,\min}$ . Der Parameter  $\beta$  liefert die Differenz zwischen der Scherspannung ohne Schwingungseinwirkung und der minimalen Scherspannung infolge Schwingungseinwirkung, also  $\beta = \tau - \tau_{v,\min}$ , und damit auch den Grenzfall der minimalen Scherfestigkeit  $1 - \beta/\tau$  (gestrichelte Linie in **Abb. 3.10**).  $\beta$  ist eine Materialkonstante, hängt aber wie auch die übrigen Materialeigenschaften von der Verfestigungsspannung ab.

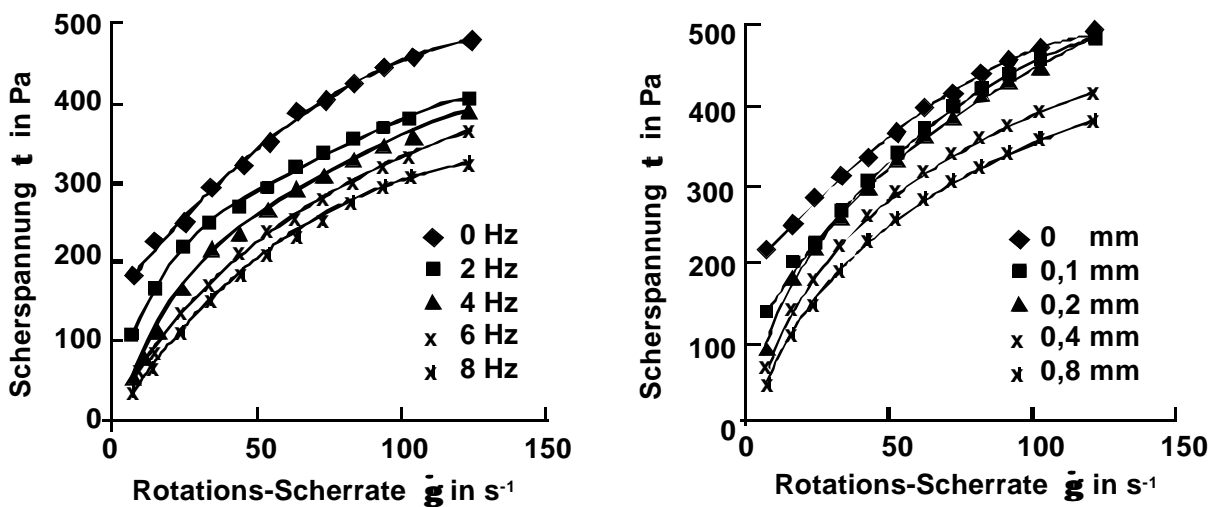


**Abb. 3.10:** Physikalische Deutung der Modellparameter  $\beta$  und  $\gamma$

Die Konstante  $\gamma$  gibt den Anstieg der Tangente an der Stelle  $\hat{v} = 0$  an.  $\gamma$  kann als charakteristische Schwinggeschwindigkeit interpretiert werden, bei der 63 % der maximal möglichen Scherspannungsreduzierung erreicht werden (Strich-Punkt-Linie in **Abb. 3.10**). Die charakteristische Schwinggeschwindigkeit  $\gamma$  ist unabhängig von der Verfestigungsspannung. ROBERTS fand für die von ihm untersuchten Schüttgüter charakteristische Schwinggeschwindigkeiten von  $\gamma = 7 \dots 10$  mm/s (siehe Anlage D).

Eine prinzipiell ähnliche Wirkung eingeleiteter harmonischer Schwingungen bei gleichzeitiger Scherung fand MOREY et al. [97] für Lebensmittelsuspensionen (Tomatenkonzentrat, geschmolzene Schokolade und Stärke-Paste). Der innere der zwei coaxialen Zylinder eines Rotationsviskosimeters (Spaltbreite 2,33 mm) rotierte mit konstanter Drehzahl. Der äußere starre Zylinder des Viskosimeters (Durchmesser 18,66 mm) wurde mit Vertikal-Schwingungen beaufschlagt, so daß der Scherung eine Schwingbeanspruchung überlagert wurde ( $f = 0 \dots 75 \text{ Hz}$  ;  $\hat{x} = 0 \dots 3 \text{ mm}$ ).

Bei konstanter Scherrate  $\dot{\gamma}$  sank die Scherfestigkeit  $\tau$  sowohl mit steigender Frequenz  $f$  bei konstantem Schwingweg  $\hat{x}$  als auch mit steigendem Schwingweg bei konstanter Frequenz, **Abb. 3.11**. Die gezeigten experimentellen Ergebnisse legen nahe, daß die Scherfestigkeit bei konstanter Scherrate auch hier der Schwinggeschwindigkeit, also dem Produkt  $\hat{v} = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \hat{x}$  zugeordnet werden kann.



**Abb. 3.11:** Einfluß von Frequenz (links) und Schwingweg (rechts) auf die Fließkurven von Tomatenkonzentrat [97]

Ebenso wie die innere Reibung im Schüttgut scheint auch die Wandreibung mit der Schwinggeschwindigkeit verknüpft zu sein, wie SHARMA et al. [145] für die Reibung zwischen Metallproben und landwirtschaftlichen Böden nachwies. Während der durch horizontales Verschieben einer Bodenprobe ( $v_s = 0,44 \dots 1,79 \text{ m/s}$ ) erzeugten Relativbewegung zwischen Boden und Metall, **Abb. 3.12**, wurde die Schwingungen vertikal, also senkrecht zur Gleitebene, über einen starr mit der Metallplatte verbundenen Schwingerreger eingeleitet ( $f = 10 \text{ kHz}$  ,  $\hat{x} \leq 25 \mu\text{m}$ ).

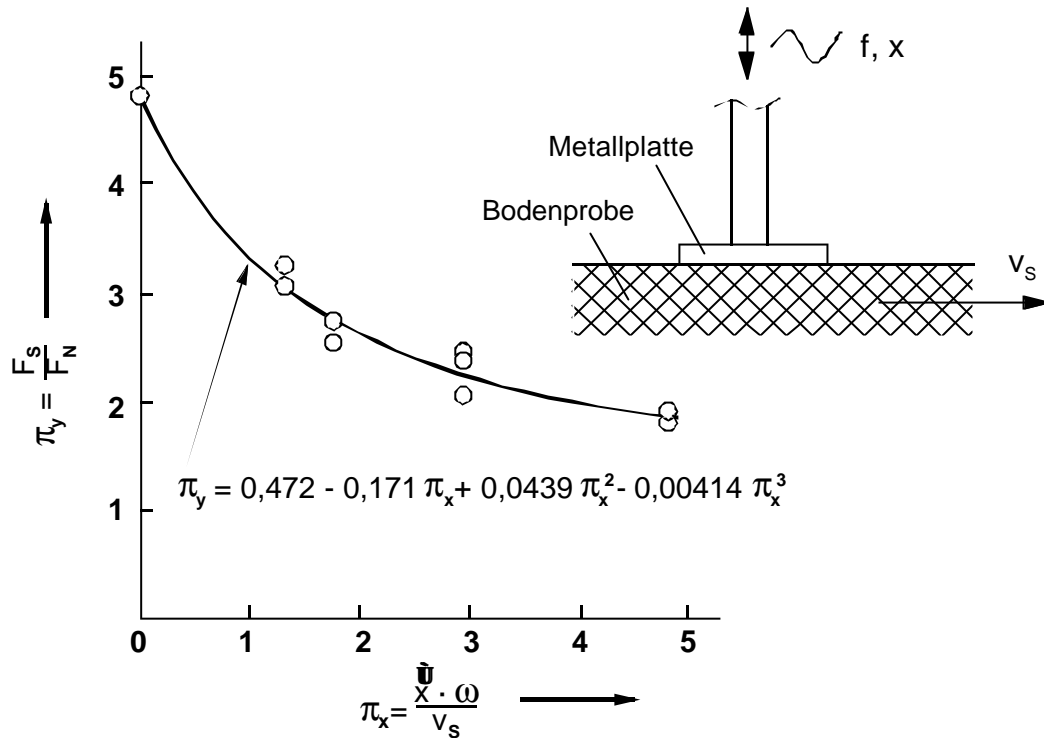
Der Schwingungseinfluß auf die Reibungskraft wird durch zwei dimensionslose Kennzahlen wiedergegeben, dem Verhältnis von Reibungskraft  $F_S$  zur Normalkraft  $F_N$  und folglich vom Schub- Normalspannungsverhältnis  $\tau/\sigma$ :

$$\pi_y = F_S / F_N \quad (3-34)$$

sowie der dimensionslosen Schwinggeschwindigkeit, gebildet aus der maximalen Schwinggeschwindigkeit  $\hat{v}$  und der Schergeschwindigkeit  $v_s$ :

$$\pi_x = \hat{v} / v_s \quad (3-35).$$

Bei diesen Versuchen konnte die dimensionslose Reibungskraft  $F_s / F_N$  durch die überlagerte Schwingungseinwirkung um maximal 58 % verringert werden. Die experimentellen Ergebnisse, **Abb. 3.12**, zeigen einen ähnlichen Zusammenhang, wie bereits für die Scherfestigkeit des Schüttgutes bei Schwingungseinwirkung beschrieben wurde.



**Abb. 3.12:** Dimensionslose Reibungskraft zwischen Boden und Metall über der dimensionslosen Schwinggeschwindigkeit nach [145]

MATCHETT et al. [1,81-86,90,138] untersuchte das Verhalten zylindrischer Schüttgutproben bei Einwirkung vertikaler harmonischer Schwingungen, insbesondere die Schwingungsübertragung innerhalb des Schüttgutes. Wesentliche Ergebnisse werden in Abschn. 5.4 zitiert.

### 3.6.3 Auslaufmassstrom

Häufig dient der Auslaufmassstrom  $\dot{m}$  als Zielgröße oder Bewertungskriterium bei experimentellen Untersuchungen zur Fließanregung. Da der Auslaufmassstrom unter anderem von der Fließfähigkeit des Schüttgutes abhängt (siehe zB. [101,126,133,137,164]), wird er als indirektes Maß für die Fließfähigkeit bei Schwingungseinwirkung genutzt, **Tab. 3.4**.

Die erhaltenen Aussagen sind oft an die verwendete Versuchsanordnung geknüpft und nur qualitativ übertragbar.

**Tab. 3.4:** Experimentelle Arbeiten zum Auslaufmassstrom von Schüttgütern aus Trichtern unter Einwirkung harmonischer Schwingungen

Versuchsapparatur / Schüttgut	Schwingungs-Parameter	Autor, Quelle
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Trichter mit vertikal vibrierender Scheibe</li> <li>• pharmazeutische Pulver (Lactose, Stärke, Magnesiumstearat u.a.)</li> </ul>	$f = 60 \dots 250 \text{ Hz}$ ; $\hat{a} = 28 \dots 56 \text{ m/s}^2$	SOBE [148] 1982
<ul style="list-style-type: none"> <li>• schwingender Spatel</li> <li>• Lactose, NaCl, Aktivkohle, je mehrere Fraktionen im Bereich <math>d = 1 \dots 500 \mu\text{m}</math></li> </ul>	k.A.	HIKEY, COCESSIO [54] 1994
<ul style="list-style-type: none"> <li>• horizontal vibrierender Trichter, Seitenlänge des Schafts ca. 30 cm, Trichterneigung <math>45^\circ</math>, Gesamthöhe 33 cm, Auslaufweite 1,75 cm</li> <li>• Glaskugeln, zwei Fraktionen: <math>d = 1 \text{ mm}</math> und <math>d = 2 \text{ mm}</math></li> </ul>	$f = 5 \dots 35 \text{ Hz}$ , $\hat{a} = 0 \dots 3 \cdot g$	WEATHERS et al. [178] 1997
<ul style="list-style-type: none"> <li>• vertikal vibrierender Trichter, Abmessungen wie WEATHERS et. al.</li> <li>• Glaskugeln, <math>d = 1,3 \text{ mm}</math></li> </ul>	$f = 20 \dots 60 \text{ Hz}$ , $\hat{a} = 0 \dots 4 \cdot g$	WASGREN et al. [177] 1997
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modellsilo mit Torsions-Schwingtrichter, Innen-<math>\varnothing</math> 5 cm, Auslauf-<math>\varnothing</math> ca. 2,5 cm, konischer Einbau, Spaltweite zwischen Trichter und Konus 4,3...7,3 mm,</li> <li>• feiner Kies, <math>d = 3 \text{ mm}</math>; Kalkstein <math>d = 10 \mu\text{m}</math></li> </ul>	$f = 50 \dots 250 \text{ Hz}$ ; k.A.	MAISCH, TEJCHMAN [79] 1999

SOBE [148] untersuchte den Einfluß mechanischer Schwingungen auf pharmazeutische Pulver hinsichtlich der Dosiergenauigkeit und Fließverbesserung in Zuteiltrichtern von Tablettiermaschinen. Die Anregung erfolgte über eine vibrierende Scheibe im Auslauftrichter ( $f = 60 \dots 250 \text{ Hz}$  ;  $\hat{a} = 28 \dots 56 \text{ m/s}^2$ ). Bei schlechtfließenden Schüttgütern wurde qualitativ eine Fließverbesserung festgestellt. Als mögliche Ursache wird die Überwindung zwischenpartikulärer Haftkräfte und die Zerstörung von Schüttgutbrücken genannt.

Pharmazeutische Pulver waren ebenfalls Gegenstand der Untersuchungen von HICKEY und CONCESSIO [54], insbesondere deren Herabfließen von einem vibrierenden Spatel. Schwingweg und Frequenz wurden konstant gehalten. Im Ergebnis fließen Pulver, bestehend aus kleinen Partikeln,

langsamer als grobkörnigere Pulver. Einige Produkte fließen im Gegensatz zu anderen unregelmäßig. Diese Fließunregelmäßigkeiten werden auf die Partikelform zurückgeführt.

MAISCH und TEJCHMAN untersuchten die Eignung eines Schwingtrichters mit konischem Einbau (vgl. Abschn. 2.3) zur Steuerung des Auslaufmassstroms aus einem Modellsilo (Innen-Durchmesser 5 cm). Zwei pneumatische Kugelvibratoren (vgl. Abschn. 2.2) versetzten den Schwingtrichter in Torsionsschwingungen um die Hochachse. Die Schwingfrequenz kann bei Kugelvibratoren über den Luftdruck gesteuert werden. Der sich einstellende Schwingweg hängt vom schwingenden System ab (Masse, Steifigkeit der flexiblen Verbindung zwischen Siloschaft und Schwingtrichter...). Diese Anordnung war gut geeignet, den Auslaufmassstrom zu steuern, der mit zunehmender Frequenz anstieg ( $f = 50 \dots 250$  Hz, keine Aussagen zu Beschleunigung oder Schwingweg). Die Entleerungszeit eines Modellsilos konnte am Beispiel von Kalkstein um den Faktor 2...3 reduziert werden. Als Ursachen der Fließverbesserung werden Reduzierung von Wandreibung und innerer Reibung genannt.

Der Auslaufmassstrom aus einem vibrierenden Trichter hängt nicht nur von der Intensität der eingeleiteten Schwingungen, sondern auch von deren Richtung ab. WEATHERS et al. [178] und WASSGREN et al. [177] betrachteten das Auslaufverhalten von Glaskugeln mit Partikelgrößen  $d = 1 \dots 2$  mm aus einem Modelltrichter. Die Seitenlänge des Schafts betrug etwa 30 cm, der Trichterneigungswinkel  $45^\circ$ . Ohne Schwingungseinwirkung bildete sich im Modelltrichter ein Kernflußprofil aus, das sowohl durch horizontale, als auch durch vertikale harmonische Schwingungen in Massenfluß überführt werden konnte. Die Fließgeschwindigkeiten in Wandnähe waren bei Schwingungseinwirkung größer als im Kern des Trichters. Der Auslaufmassstrom erhöhte sich bei Einwirkung horizontaler harmonischer Schwingungen nahezu linear mit der dimensionslosen Schwinggeschwindigkeit  $\hat{v} / v_A$ , mit  $v_A$  als charakteristischer Auslaufgeschwindigkeit (hier  $0,38 \dots 0,4$  m/s). Im untersuchten Parameterbereich  $\hat{v} / v_A = 0 \dots 1,2$  ( $f = 5 \dots 35$  Hz;  $\hat{a} = 0 \dots 3 \cdot g$ ) stieg  $\dot{m}$  um maximal 10...15 % [178]. Die mit zunehmender Schwinggeschwindigkeit verbesserte Fließfähigkeit wird ähnlich wie bei ROBERTS mit einer Verminderung der Schüttgutdichte und / oder einer geringeren „Viskosität“ des Schüttgutes erklärt [177].

Auch bei vertikalen harmonischen Schwingungen ließ sich der Auslaufmassstrom am besten mit der Schwinggeschwindigkeit korrelieren [177]. Im Gegensatz zu horizontal schwingenden Trichtern können vertikale Schwingungen zu einer Abnahme von  $\dot{m}$  führen. Im Bereich  $f = 20 \dots 60$  Hz und  $\hat{a} = 0 \dots 4 \cdot g$  sank  $\dot{m}$  auf minimal 70 % des Massstroms ohne Schwingungseinwirkung [177].

### 3.6.4 Vibrationsinduzierte pneumatische Förderung

MOLERUS, SIEBENHAAR und GERICKE [95,146] entwickelten ein vibrationsinduziertes pneumatisches Förderverfahren zum Transport bruchempfindlicher Güter. Die einzelnen Abschnitte einer unterteilten Rohrstrecke sind durch Gummischläuche miteinander verbunden. An fördertechnisch kritischen Punkten, wie Rohrbögen, werden über Unwuchtmotoren mechanische Schwingungen eingeleitet. Das gezielte Zusammenwirken von Strömungskräften und Schwingungen reduziert die Reibung zwischen Fördergut und Rohrwandung, so daß die Stopfgrenze herabgesetzt wird. Die Mindestfördergeschwindigkeit kann so um den Faktor 2...3 verringert werden, was einen sehr schonenden Guttransport gewährleistet.

Die Schwingungsintensität wird durch die Apparate-Kennziffer  $Fr$  (FROUDE-Zahl) quantifiziert.  $Fr$  beschreibt das Verhältnis der maximalen Schwingbeschleunigung  $\hat{a}$  zur Erdbeschleunigung  $g$ :

$$Fr = \hat{a} / g$$

Theoretische Betrachtungen und experimentelle Untersuchungen an Sprühgranulat, gerösteten Kaffeebohnen, Manteltabletten, Braunkohlepellets und Quarzsand mit mittleren Partikelgrößen von  $d = 80 \mu\text{m} \dots 10,7 \text{ mm}$  führten auf einen optimalen Bereich von  $Fr = 1,5 \dots 2$ . Da die Frequenz der verwendeten Unwuchtmotoren bei  $f = 50 \text{ Hz}$  festlag, folgt damit für die maximale Schwinggeschwindigkeit  $\hat{v}$  ein Bereich von  $\hat{v} \approx 50 \dots 60 \text{ mm/s}$ . Eine weitere Erhöhung der FROUDE-Zahl brachte nur geringe Verbesserungen hinsichtlich Transportgeschwindigkeit, aber zusätzlichen Abrieb durch Partikel-Wand-Reibung infolge der Schwingungen [146].



## 4 Partikelmechanische Betrachtungsweise

### 4.1 Begriffe

Die bisher betrachtete kontinuumsmechanische Betrachtungsweise bietet den Vorteil leicht zu handhabender Modelle. Ähnlich wie in der Fluid- und Festkörpermechanik kann das Materialverhalten mit wenigen (experimentell zu bestimmenden) Stoffgrößen beschrieben werden. So können die in Abschn. 3.4 genannten Zusammenhänge für eine Apparateauslegung genutzt werden, ohne Kenntnisse über die Mikrostruktur des Schüttgutes (chemisch-mineralogische Zusammensetzung, Feststoffdichte, Feuchte, Partikelgrößenverteilung, Partikelrauhigkeitsverteilung, Partikelporosität, Partikelhärte etc.) zu besitzen.

Allerdings bleiben Einflüsse einzelner Partikeleigenschaften verborgen, wie z.B. die Abhängigkeit der Kohäsion trockener Pulver von der Partikelgröße, vgl. [94]. Diese Zusammenhänge werden nur deutlich, wenn die o.g. mikroskopischen Kenngrößen in die Modellierung einbezogen werden. Um die leichte Handhabbarkeit der phänomenologischen Modelle zu erhalten, wird die für die Apparateauslegung vorteilhafte MOHR-Kreis-Darstellung von Spannungszuständen (Abschn. 3.2 und 3.3) auf die Spannungsübertragung von Partikelpackungen übertragen. So können basierend auf mikroskopischen Betrachtungen zum Spannungs-Deformationsverhalten der Einzelpartikeln makroskopische (kontinuumsmechanische) Konstitutivgleichungen abgeleitet werden. Diese Modellierungsstrategie wird nachfolgend als Partikelmechanik<sup>6</sup> bezeichnet.

Parallel dazu werden in der Literatur unter dem Begriff Partikelmechanik auch numerische Methoden zusammengefaßt, bei denen aus Einzelkräften und Partikelkoordinaten das Bewegungs- und Verformungsverhalten der *einzelnen* Partikeln berechnet wird [44]. Den Simulationsrechnungen liegen meist einfache Stoffgesetze für das mechanische Verhalten der Partikelkontakte zugrunde, z.B. lineare Elastizität, lineare Viskosität. Mit Hilfe z.B. der zeitschrittgesteuerten Methoden *Discrete Element Methods (Molecular Dynamics Technique)* oder *Distinct Element Methods* werden die Bewegungsgleichungen für jede einzelne Partikel gelöst [52]. Makroskopische Größen sind nicht direkt zugänglich, sondern müssen mittels sog. Homogenisierungsmethoden statistisch ermittelt werden. Mit Hilfe dieser Methoden kann das qualitative Verhalten disperser Feststoffe oft gut wiedergegeben werden, siehe z.B. [52,86,154-155,177], wodurch diese „numerischen Experimente“ wesentlich zum Verständnis des dynamischen Verhaltens von Partikelpackungen beitragen. Die mögliche Partikelzahl ist durch die verfügbare Rechnerleistung begrenzt. Nichtsphärische oder oberflächenraue Partikeln schränken die maximale Partikelzahl weiter ein. Dieser Aspekt bekommt zusätzliches Gewicht, da im Rahmen dieser Arbeit sehr feine Pulver im Vordergrund stehen. So besteht ein Quader mit der Seitenlänge 1 cm bei einer Porosität von  $\varepsilon = 0,8$  aus ca.  $4 \cdot 10^{11}$  Einzelpartikeln mit dem

---

<sup>6</sup> Eine ebenfalls in der Literatur gebrauchte Einteilung versteht die makroskopische Modellierung (hier Kontinuumsmechanik) sowie die mikroskopische Strategie (hier Partikelmechanik) als Teilgebiete der Kontinuumsmechanik [44].

Durchmesser  $d = 1 \mu\text{m}$ . Mit diesen Methoden lassen sich also nur sehr kleine charakteristische Schüttgutelemente simulieren.

## 4.2 Spannungsübertragung in einer Partikelpackung

Nach MOLERUS [92,94,96] können Spannungen im Schüttgut in Haftkräfte zwischen Einzelpartikeln umgerechnet werden. Dafür sind folgende Annahmen notwendig [94]:

- 1) Die Fläche am Partikelkontakt ist klein gegenüber der Partikeloberfläche. Die Kontaktflächen können zu Punktkontakten idealisiert werden.
- 2) Das Schüttgut besteht aus einer isotropen Zufallspackung monodisperser Kugeln. Die Porosität ist in beliebigen Schnittflächen gleich (stochastische Homogenität).
- 3) Die Kontaktstellen der Partikeln sind gleichmäßig über der Partikeloberfläche verteilt.
- 4) Ebenso liegt eine gleichmäßige Verteilung der in den Kontakten wirkenden Kräfte vor.

Basierend auf der Gleichung von RUMPF [120] für die Zugfestigkeit von Agglomeraten kennzeichnet MOLERUS den Zusammenhang zwischen Spannungen im Schüttgut und Kräften am Partikelkontakt folgendermaßen:

$$\sigma = K \cdot F_N \quad (4-1)$$

$$\tau = K \cdot F_T \quad (4-2)$$

$F_N$  Normalkraft am Partikelkontakt

$F_T$  Tangentialkraft am Partikelkontakt

Nach einem Vorschlag von RUMPF [120] lautet die Funktion K:

$$K = \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{d^2} \quad (4-3)$$

Der Ausdruck  $(1-\varepsilon)/\varepsilon$  gibt das Verhältnis von Feststoff- zu Hohlraumvolumen wieder,  $d$  ist der Partikeldurchmesser.

Für die Gesamtkraft aus Haft- und äußeren Kräften am Partikelkontakt gilt [94]:

$$F_N + F_H = F_{\text{ges}} \quad (4-4)$$

Zwischen äußeren Kräften und Haftkräften bestehen Wechselwirkungen. Die Größe der Haftkraft hängt vom Partikelabstand und der Kontaktdeformation und somit von der Verfestigungsspannung ab. Die Haftkraft infolge VAN-DER-WAALS-Wechselwirkungen steigt linear mit der verfestigenden Normalkraft  $F_N$  [136]. Unter der Annahme, daß die Größe der Kontaktfläche und damit die Größe der Haftkraft nur von der normal zur Partikeloberfläche wirkenden Kontaktkraftkomponente bestimmt wird, gilt dann [94]:

$$F_H = F_{H,0} + \kappa_{pl} \cdot F_N \quad (4-5)$$

$F_{H,0}$  ist die Haftkraft im unverfestigten Partikelkontakt. Der Haftkraftanstieg  $\kappa_{pl}$  gibt die lineare Abhängigkeit zwischen Haftkraft und der durch die verfestigende Normalkraft hervorgerufenen plastischen Kontaktdeformation wieder.

Darauf aufbauend führte TOMAS [170-174] folgende Erweiterungen ein:

- Neben plastischen werden auch elastische Kontaktdeformation berücksichtigt.
- Eine Kontaktabplattung tritt bereits infolge der Haftkraft in den unverfestigten Kontakten auf, also auch ohne äußere Last.

Der Haftkraftanstieg  $\kappa$  (Kontaktverfestigungs-Koeffizient) setzt sich aus einem Anteil infolge elastischer Kontaktdeformation und einem dominierenden plastischen Anteil zusammen:

$$\kappa = \frac{\kappa_p}{\kappa_A - \kappa_p} \quad (4-6)$$

$\kappa_A$      elastisch-plastischer Kontaktflächen-Koeffizient

$\kappa_p$      plastischer Repulsionskoeffizient

Unter Berücksichtigung der Kontaktabplattung infolge Haftkräften in den unverfestigten Kontakten durch den Term  $\kappa \cdot F_{H,0}$  wird Gl. (4-5) zu:

$$F_H = F_{H,0} + \kappa(F_{H,0} + F_N) \quad (4-7)$$

Kleine Anstiege  $\kappa$  repräsentieren ein geringes Haftkraftniveau mit  $F_H \approx F_{H,0}$ , also „steife“ Partikelkontakte. Große Werte für  $\kappa$  drücken kohäsives Fließverhalten aus, also „weiche“ deformierbare Kontakte [173-174].

Die Gleichungen (4-1), (4-2) und (4-3) liefern einen Zusammenhang zwischen Spannungen im Schüttgut und Kräften am Partikelkontakt. Auf dieser Grundlage kann das Konzept der Hauptspannungen / MOHR-Kreise für die Spannungsübertragung im Schüttgut angewendet werden. Die Unterschiede zwischen Gl. (4-7) und (4-5) führen zu Unterschieden in den daraus abgeleiteten Fließkriterien, siehe [174].

### 4.3 Kontakt-Versagen und Fließen kohäsiver Schüttgüter

#### 4.3.1 Charakteristische Stoffgrößen

Das nachfolgend verwendete Modell von TOMAS enthält drei Stoffgrößen, die aufgrund der Vorgänge in den Partikelkontakten ableitbar sind:

- 1 Die Haftkraft am unverfestigten Partikelkontakt  $F_{H,0}$  und gemäß Gl. (4-1) und (4-3) die isostatische Zugfestigkeit im unverfestigten Zustand  $\sigma_0$
- 2 Der Haftkraftanstieg infolge Verfestigung  $\kappa$  bzw. der stationäre Reibungswinkel  $\varphi_{st}$

3 Den inneren Reibungswinkel  $\varphi_i$

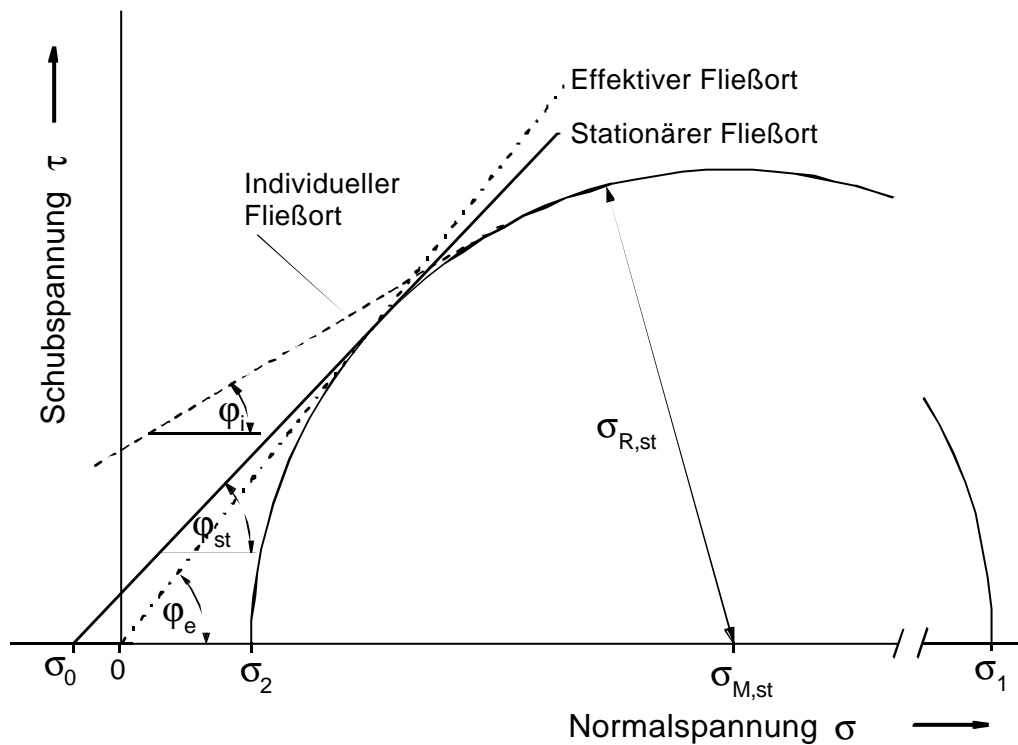
sowie einen charakteristischen mittleren Druck in der Partikelpackung während des stationären Fließens  $\sigma_{M,st}$ .

#### 4.3.2 Stationäres Fließen

In Erweiterung der JENIKE-Theorie (Abschn. 3.4) wird das stationäre Fließen als kohäsiv beschrieben, **Abb. 4.1**, was auch experimentelle Erfahrungen widerspiegeln. Der stationäre Fließort ist die Einhüllende aller End-MOHR-Kreise. Seine Lage in der MOHRschen Ebene ist unabhängig vom Verfestigungsniveau. Der Verlauf des stationären Fließortes wird als Gerade angenommen. Die Fließbedingung für stationäres Fließen lautet dann [171]:

$$\sigma_{R,st} = \sin \varphi_{st} \cdot (\sigma_{M,st} + \sigma_0) \quad (4-8)$$

oder 
$$\tau_{st} = \tan \varphi_{st} \cdot (\sigma_{st} + \sigma_0) \quad (4-9)$$



**Abb. 4.1:** Kohäsiver stationärer Fließort

Die Normalspannungen  $\sigma_R$  und  $\sigma_M$  sind die Radius- bzw. Mittelpunktspannung des jeweiligen MOHR-Kreises und sind durch die kleinste und größte Hauptspannung definiert:

$$\sigma_R = (\sigma_1 - \sigma_2)/2 \quad (4-10)$$

$$\sigma_M = (\sigma_1 + \sigma_2)/2 \quad (4-11)$$

Der Index „st“ steht für stationäres Fließen.

Gl. (4-12) gibt den Zusammenhang zwischen dem inneren Reibungswinkel beim beginnenden Fließen  $\varphi_i$  und dem stationären Reibungswinkel  $\varphi_{st}$  wieder, mit  $\kappa$  gemäß Gl. (4-6).

$$\tan \varphi_{st} \equiv (1 + \kappa) \cdot \tan \varphi_i = \text{konst.} \quad (4-12)$$

Je „weicher“ die Partikelkontakte, desto größer ist die Differenz zwischen den Winkeln  $\varphi_i$  und  $\varphi_{st}$  und desto kohäsiver verhält sich das Schüttgut [173].

Aus Gl. (4-12) folgt:

$$\kappa = \frac{\tan \varphi_{st}}{\tan \varphi_i} - 1 \quad (4-13)$$

so daß sich alle genannten Zusammenhänge durch die drei geforderten Stoffgrößen  $\sigma_0$ ,  $\kappa$  und  $\varphi_i$  ausdrücken lassen.

### 4.3.3 Beginnendes Fließen

Das beginnende Fließen soll an dieser Stelle auf folgenden Sonderfall beschränkt bleiben:

- Verfestigung durch vorausgegangenes stationäres Fließen
- Die individuellen Fließorte können durch Geraden approximiert werden.

Die individuellen Fließorte weichen im meßbaren Bereich (siehe Abschn. 6.2) meist nicht signifikant von der Geradenform ab. Da der JENIKE-Scherversuch keine Informationen über den quantitativen Verlauf des Fließortes im Bereich kleiner oder negativer Spannungen liefert, erscheint eine geradlinige Extrapolation zumindest gerechtfertigt.

Die Fließbedingung für beginnendes Fließen (siehe [173]) vereinfacht sich zu:

$$\sigma_R = \sin \varphi_i \cdot (\sigma_M + \sigma_Z) \quad (4-14)$$

oder 
$$\tau = \tan \varphi_i \cdot (\sigma + \sigma_Z) \quad (4-15).$$

Die isostatische Zugfestigkeit  $\sigma_Z$  hängt von der Beanspruchungsvorgeschichte ab, ausgedrückt durch den stationären Fließort. Für die linearisierten Fließorte folgt:

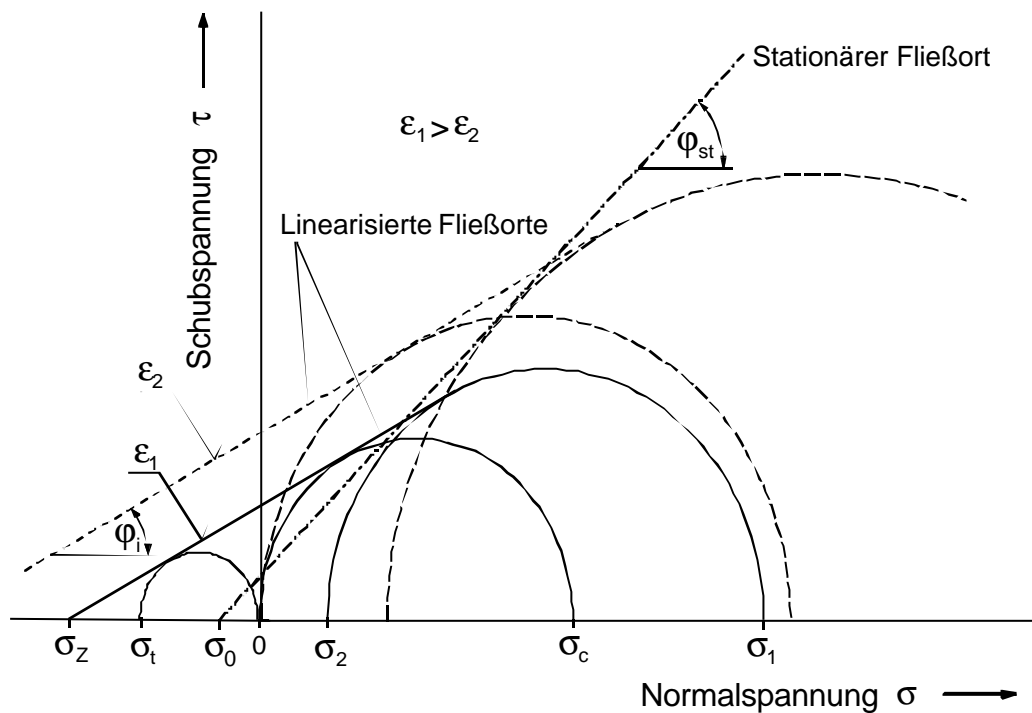
$$\sigma_R = \sin \varphi_i \cdot \left[ \sigma_M + \left( \frac{\sin \varphi_{st}}{\sin \varphi_i} - 1 \right) \cdot \sigma_{M,st} + \frac{\sin \varphi_{st}}{\sin \varphi_i} \cdot \sigma_0 \right] \quad (4-16)$$

oder

$$\tau = \tan \varphi_i \cdot \left[ \sigma + \left( \frac{\sin \varphi_{st}}{\sin \varphi_i} - 1 \right) \cdot \sigma_{M,st} + \frac{\sin \varphi_{st}}{\sin \varphi_i} \cdot \sigma_0 \right] \quad (4-17).$$

Die Gleichungen für beginnendes Fließen sind aus den in den Partikelkontakten wirkenden Kräften hergeleitet und lassen sich ebenfalls mit den drei o.g. Stoffgrößen  $\sigma_0$ ,  $\varphi_{st}$  und  $\varphi_i$  ausdrücken.

Im Gegensatz zum stationären Fließort hängt die Lage der individuellen Fließorte vom Verfestigungsniveau, also von der Porosität  $\varepsilon$  bzw. Schüttgutdichte  $\rho_b$  ab, **Abb. 4.2**. Die Verdichtbarkeit (Kompressibilität) eines Schüttgutes spiegelt somit ebenfalls dessen Fließeigenschaften wieder. Besonders sehr feinkörnige Pulver weisen im unverfestigten Zustand hohe Porositäten auf, z.B.  $\varepsilon \approx 0,8$ . Einwirkende äußere Kräfte führen sowohl zu einer starken Kontaktverfestigung als auch einer starken Verdichtung, was einen starken Anstieg der einaxialen Druckfestigkeit bewirkt.



**Abb. 4.2:** Linearisierte Fließorte

Die Schüttgutdichte im unverfestigten Zustand  $\rho_{b,0}$  wird durch die Partikelwechselwirkungen bestimmt, ausgedrückt durch die unverfestigte isostatische Zugfestigkeit  $\sigma_0$ . Die zur Verdichtung führende Spannung wird durch die Mittelpunktsspannung des stationären Fließens  $\sigma_{M,st}$  berücksichtigt.

Die Schüttgutdichte  $\rho_b$  korreliert dann mit der Summe aus der äußeren Mittelpunktsspannung  $\sigma_{M,st}$  und der inneren isostatischen Zugfestigkeit  $\sigma_0$  [173]:

$$\frac{\rho_b}{\rho_{b,0}} = \left( \frac{\sigma_0 + \sigma_{M,st}}{\sigma_0} \right)^n \quad (4-18)$$

oder in den Koordinaten der größten Hauptspannung  $\sigma_1$  und der einaxiale Zugfestigkeit  $\sigma_t$ :

$$\frac{\rho_b}{\rho_{b,0}} = \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_t}{\sigma_t} \right)^n \quad (4-19).$$

Der Exponent  $n$  heißt Kompressibilitätsindex. Er dient der Einteilung der Schüttgüter hinsichtlich ihrer Verdichtbarkeit, **Tab. 4.1**.

Die einaxiale Druckfestigkeit  $\sigma_c$  folgt aus der Bedingung:

$$\sigma_R = \sigma_M = \sigma_c / 2 \quad (4-20).$$

Eingesetzt in Gl. (4-17) ergibt sich der lineare Zusammenhang:

$$\sigma_c = a \cdot \sigma_1 + \sigma_{c,0} \quad (4-21).$$

$\sigma_{c,0}$  ist die einaxiale Druckfestigkeit des unverfestigten Gutes:

$$\sigma_{c,0} = \frac{2 \cdot \sin \varphi_{st} \cdot (1 + \sin \varphi_i)}{(1 + \sin \varphi_{st}) \cdot (1 - \sin \varphi_i)} \cdot \sigma_0$$

und für den Anstieg  $a$  gilt:

$$a = \frac{2 \cdot (\sin \varphi_{st} - \sin \varphi_i)}{(1 + \sin \varphi_{st}) \cdot (1 - \sin \varphi_i)} \quad (4-22).$$

**Tab. 4.1:** Verdichtbarkeit von Schüttgütern ( $\sigma_1 = 1 \dots 100$  kPa) [173]

Exponent $n$	Schüttgutverhalten
$n = 0$	idealer Festkörper
$0 < n < 0,01$	inkompressibel
$0,01 < n < 0,05$	wenig kompressibel
$0,05 < n < 0,1$	kompressibel
$0,1 < n < 1$	stark kompressibel
$n = 1$	ideales Gas

### 4.3.4 Schnelles stationäres Fließen

Wie in Abschn. 3.4 dargestellt wurde, zeigen Schüttgüter beim schnellem Fließen, also Schergeschwindigkeiten in der Größenordnung 1 m/s [164], geschwindigkeitsabhängiges Materialverhalten (Argotropie). Beim schnellen stationären Fließen trockener Schüttgüter sind die wichtigsten dissipativen Prozesse (STADLER [152]):

- COULOMB-Reibung zwischen den Partikeln und
- infolge Schubspannung verursachte inelastische Partikelstöße.

Für die je Volumenelement dissipierte Energie gilt also:

$$dW = dW_{\text{Coul}} + dW_{\text{Stoß}} \quad (4-23).$$

Die Scherspannung setzt sich additiv aus einem geschwindigkeitsunabhängigen Reibungsanteil und einem Stoßanteil zusammen. Der Impulsaustausch beim Partikelstoß hängt quadratisch von der Geschwindigkeit ab [20,152].

$$\tau = \tau_{\text{Coul}} + a_k \cdot \rho_b \cdot d^2 \cdot \dot{\gamma}^2 \quad (4-24)$$

$\tau_{\text{Coul}}$  Scherspannung infolge COULOMB-Reibung (vgl. Abschn. 4.3.2)

$a_k$  Stoßbeiwert

$d$  Partikeldurchmesser

$\rho_b$  Schüttgutdichte

$\dot{\gamma}$  Schergradient

Im Gegensatz zum Reibungsanteil ist der Stoßanteil unabhängig von der wirkenden Normalspannung, so daß dieser Anteil mit steigender Normalspannung an Einfluß verliert.

### 4.4 Verfahrenstechnische Silo-Dimensionierung

Die Anwendbarkeit auf die verfahrenstechnische Silo-Dimensionierung soll am Beispiel der minimalen Öffnungsweite eines Silotrichters zur Vermeidung von Brückenbildung in einem Massenfluß-Silo  $b_{\text{min}}$  veranschaulicht werden. Die minimale Öffnungsweite hängt hauptsächlich von der Schüttgutfestigkeit  $\sigma_c$  ab. Eine mögliche Berechnungsgleichung lautet [164]:

$$b_{\text{min}} = \frac{(1 + m) \cdot \sigma_{c,\text{krit}} \cdot \sin(\varphi_w + \Theta)}{\rho_b \cdot g} \quad (4-25)$$

$m$  Trichterformfaktor,  $m = 1$ ; konischer Trichter (axialsymmetrisches Spannungsfeld)  
 $m = 0$ ; keilförmiger Trichter (ebenes Spannungsfeld)

$g$  Erdbeschleunigung

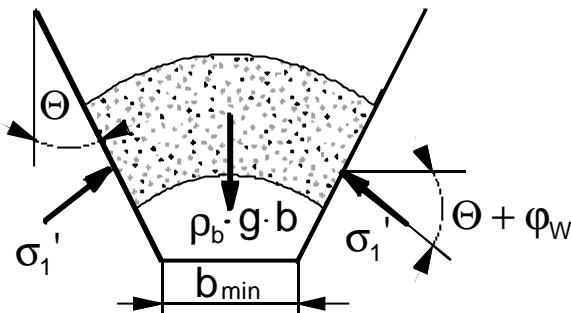
$\varphi_w$  Wandreibungswinkel (Bestimmung von  $\varphi_w$  siehe Abschn. 6.2)

$\Theta$  Trichterneigungswinkel für Massenfluß (Bestimmung von  $\Theta$  siehe Anlage II)



$\sigma_{c,krit}$  kritische einaxiale Druckfestigkeit

Die Größe  $\sigma_{c,krit}$  erhält man durch Gleichsetzen von  $\sigma_c = f(\sigma_1)$  mit der Auflagerspannung der kohäsiven Schüttgutbrücke  $\sigma_1' = \sigma_1 / ff$  (wirksame Hauptspannung an der Wand), **Abb. 4.3**. Dabei ist  $ff$  der Fließfaktor nach JENIKE [60]. Er hängt vom effektiven Reibungswinkel  $\varphi_e$ , vom Wandreibungswinkel  $\varphi_w$  und vom Trichterneigungswinkel  $\Theta$  ab. Im Falle eines konischen Silotrichters nimmt er üblicherweise Werte im Bereich  $ff = 1,2 \dots 1,6$  an, siehe [60]. Ist die Auflagerspannung größer als die Schüttgutfestigkeit  $\sigma_c$ , kommt es zum Fließen. Im umgekehrten Fall ist die Brücke stabil.



**Abb. 4.3:** Auflagerspannung  $\sigma_1'$  einer kohäsiven Schüttgutbrücke

Die Grenzbedingung  $\sigma_1' = \sigma_{c,krit}$  liefert schließlich mit (4-21) [173]:

$$b_{min} = \frac{2 \cdot (1 + m) \cdot \sin 2(\varphi_w + \Theta) \cdot (1 + \sin \varphi_i) \cdot \sin \varphi_{st} \cdot \sigma_0}{\rho_b \cdot g \cdot [1 - \sin \varphi_{st} \cdot \sin \varphi_i - (\sin \varphi_{st} - \sin \varphi_i) \cdot (2 \cdot ff - 1)]} \quad (4-26).$$

## 5 Schwingungsübertragung im Kontinuum

### 5.1 Herleitung der Modellgleichung

#### 5.1.1 Rheologische Grundmodelle

Jede reale Bewegung eines Kontinuums ist mit dem Verlust mechanischer Energie verbunden. Im Falle von Schwingungen wird dieser Energieverlust als Dämpfung bezeichnet. Die Werkstoffdämpfung hängt von der Relativbewegung der materiellen Punkte des Kontinuums, also von Verzerrungen und Verzerrungsgeschwindigkeiten ab. Basierend auf der Zerlegung des Verzerrungstensors (Abschn. 3.2.2) können die Volumen- und Gestaltänderungen in erster Näherung als voneinander unabhängig betrachtet werden. Weiterhin wird angenommen [2]:

- 1) Für alle Materialgleichungen gilt eine elastische Volumenänderung (Erstes Axiom der Rheologie).
- 2) Unterschiede in den Konstitutivgleichungen für ausgewählte Materialien treten signifikant nur in den Gleichungstermen der Gestaltänderung auf (Zweites Axiom der Rheologie).

Bei der Ableitung rheologischer Modelle werden zunächst einfache, physikalisch konsistente Grundmodelle aufgestellt. Die Grundmodelle erfassen jeweils einen Grenzfall realen Materialverhaltens. Mit den Annahmen 1) und 2) lassen sich vier Grundmodelle ableiten:

- elastische Volumenänderung (reversibel, geschwindigkeitsunabhängig)
- elastische Gestaltänderung (reversibel, geschwindigkeitsunabhängig)
- plastische Gestaltänderung (irreversibel, geschwindigkeitsunabhängig)
- viskose Gestaltänderung (irreversibel, geschwindigkeitsabhängig)

Das Verhalten realer Materialien wird durch Kombination (Reihen- und/oder Parallelschaltung) der vier Grundmodelle approximiert. Die physikalische Konsistenz bleibt erhalten [2]. Das Grundmodell der elastischen Volumenänderung spielt gemäß Annahme 1) für die nachfolgende Modellierung der Materialdämpfung keine Rolle. Hierfür genügen die drei Grundmodelle der Gestaltänderung:

#### Grundmodell elastische Gestaltänderung

Das Grundmodell der linear-elastische Gestaltänderung lautet:

$$\sigma'_{ij} = 2G \cdot \epsilon'_{ij} \quad (5-1)$$

und im ebenen Fall mit Gl. (3-7):  $\tau = G \cdot \gamma$  (5-2).

Die Materialkonstante  $G$  heißt Schub- oder Gleitmodul.  $G$  kann ebenfalls durch den Elastizitätsmodul  $E$  und die POISSON-Zahl  $\nu$  ausgedrückt werden:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (5-3)$$

Die physikalische Konsistenz ist erfüllt, wenn  $E > 0$ ,  $G > 0$ ,  $-1 < \nu \leq 1/2$  wobei  $\nu$  für reale Werkstoffe nicht negativ sein kann, d.h.  $0 \leq \nu \leq 1/2$  [2].

### Grundmodell plastische Gestaltänderung

Plastische Gestaltänderungen treten erst auf, wenn ein bestimmtes Belastungsniveau (Fließgrenze) erreicht wird, z.B. gemäß (3-13). Zustände unterhalb der Fließgrenze führen nicht zu plastischen Gestaltänderungen:

$$\begin{aligned} f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) < 0: & \quad \dot{\epsilon}'_{ij} = 0 \\ f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0: & \quad \sigma'_{ij} = \lambda \dot{\epsilon}'_{ij} \end{aligned} \quad (5-4).$$

Die Fließgrenze  $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  ist an den jeweiligen Anwendungsfall gebunden, also an das Material und den Beanspruchungszustand (Plastizitätshypothese). Für die skalare Größe  $\lambda$  folgt aus Konsistenzgründen:  $\lambda \geq 0$ . Hier wird in Anlehnung an die LEVI-V.-MIESES-Gleichung [80] der Ausdruck (5-5) für  $\lambda$  vorgeschlagen:

$$\lambda = \frac{\tau_F}{\sqrt{\text{II}(\dot{\epsilon}'_{ij})}} \quad (5-5)$$

$\tau_F$  Fließgrenze  
 $\text{II}(\dot{\epsilon}'_{ij})$  zweite Hauptinvariante des Verzerrungsgeschwindigkeits-Deviators

Damit folgt:

$$\sigma'_{ij} = \tau_F \frac{\dot{\epsilon}'_{ij}}{\sqrt{\text{II}(\dot{\epsilon}'_{ij})}} \quad (5-6)$$

Die Größe der Schubspannungen hängt nur von  $k$  ab. Der Ausdruck  $\dot{\epsilon}'_{ij} / \sqrt{\text{II}(\dot{\epsilon}'_{ij})}$  beschreibt lediglich die Richtung der Deformation und liefert im ebenen Fall:

$$\frac{\dot{\epsilon}'_{ij}}{\sqrt{\text{II}(\dot{\epsilon}'_{ij})}} \xrightarrow{2\text{-dim.}} \frac{\dot{\epsilon}_{xy}}{|\dot{\epsilon}_{xy}|} = \text{sgn } \dot{\epsilon}_{xy}.$$

und ferner mit (3-10):  $\tau = \tau_F \cdot \text{sgn } \dot{\gamma}$  (5-7).

wobei:

$$\begin{aligned} \text{sgn } \dot{\gamma} = 1; & \quad \dot{\gamma} \geq 0 \\ \text{sgn } \dot{\gamma} = -1; & \quad \dot{\gamma} < 0 \end{aligned}$$

Für  $\tau_F = \mu \cdot \sigma$  erhält man den Fall der COULOMB-Reibung:

$$\tau = \mu \cdot \sigma \quad \text{in Beanspruchungsrichtung} \quad (5-8)$$

### Grundmodell viskose Gestaltänderung

Bei viskosem Materialverhalten hängen die für eine Gestaltänderung erforderlichen Schubspannungen von den Scherraten ab. VOCK [176] und STADLER [152] zeigten beispielsweise für die schnelle

Scherung trockener Schüttgüter eine quadratische Abhängigkeit der Scherspannung vom Schergradienten. Im Gegensatz zu den Grundmodellen der elastischen und plastische Gestaltänderung soll das viskose Grundmodell durch den Scherindex  $n$  auch nichtlineare Viskosität einschließen:

$$\sigma'_{ij} = 2\eta \cdot f(\dot{\epsilon}'_{ij}) \quad (5-9)$$

und zweidimensional mit (3-10):

$$\tau = \eta \cdot \dot{\gamma}^n \cdot \operatorname{sgn} \dot{\gamma} \quad (5-10)$$

worin wiederum für  $n = 1$  das NEWTONSche Fluid enthalten ist.

Die Gleichung erfüllt die physikalische Konsistenz, wenn der Materialkennwert Schubviskosität  $\eta$  nicht negativ ist, d.h.:  $\eta \geq 0$ .

Die Kopplung der Grundmodelle kann durch beliebige Kombinationen von Reihen- und/oder Parallelschaltungen erfolgen. Im Fall der Reihenschaltung muß die Erregung  $E$  des Modellkörpers durch jedes der  $K$  Elemente übertragen werden:

$$E_R = E_1 = E_2 = \dots E_K \quad (5-11)$$

Die Systemantwort  $A$  ist die Summe der individuellen Antworten:

$$A_R = \sum_{i=1}^K A_i \quad (5-12)$$

Bei der Parallelschaltung wird die Erregung des Modellkörpers so auf die  $K$  Elemente aufgeteilt, daß die Antworten gleich sind:

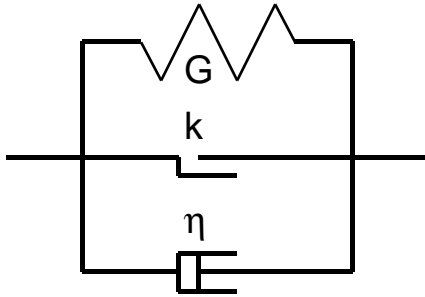
$$E_P = \sum_{i=1}^K E_i \quad (5-13)$$

$$A_P = A_1 = A_2 = \dots A_K \quad (5-14)$$

### 5.1.2 Rheologisches Schüttgutmodell

In realen Werkstoffen treten sowohl viskose als auch COULOMBSche Komponenten auf. Für deren getrennte Bestimmung liegen jedoch kaum Ergebnisse vor [153]. Meist wird ein äquivalenter Dämpfungsfaktor eingeführt, der alle Dämpfungsanteile einschließt, siehe [59].

ROBERTS [116] schlug für Schüttgüter eine Parallelschaltung der drei Grundmodelle der Gestaltänderung vor. Durch Einsetzen der Gleichungen (5-1), (5-6) und (5-9) in Gl. (5-13) und  $\epsilon'_{ij,el} = \epsilon'_{ij,pl} = \epsilon'_{ij,vis}$  sowie  $\dot{\epsilon}'_{ij,el} = \dot{\epsilon}'_{ij,pl} = \dot{\epsilon}'_{ij,vis}$  infolge Gl. (5-14) erhält man:



$$\sigma'_{ij} = 2G \cdot \epsilon'_{ij} + \tau_F \frac{\dot{\epsilon}'_{ij}}{\sqrt{\Pi(\dot{\epsilon}'_{ij})}} + 2\eta \cdot f(\dot{\epsilon}'_{ij}) \quad (5-15)$$

$$\tau = G \cdot \gamma + \tau_F \cdot \operatorname{sgn} \dot{\gamma} + \eta \cdot \dot{\gamma}^n \cdot \operatorname{sgn} \dot{\gamma} \quad (5-16)$$

Das rheologische Modell (5-16) spielt für die Beschreibung der Materialdämpfung eine wichtige Rolle. Gleichzeitig kann es als Verallgemeinerung der in Abschn. 3.4 erläuterten elasto-plastischen Stoffmodelle aufgefaßt werden. Die Fließkriterien von Schüttgütern sind als Sonderfälle enthalten. Das vorgeschlagene Modell ist zur üblichen Darstellungsweise in der Schüttgutmechanik konform, wie anhand der folgenden Beispiele deutlich wird:

- Schüttgüter zeigen bei stationärer Scherdeformation keinen oder keinen meßbaren elastischen Bereich, Abschn. 3.3, d.h.  $G \rightarrow 0$ . Für das schnelle Fließen kohäsiver Schüttgüter liefert (5-16) mit  $\tau_F = \tan \varphi_i (\sigma + \sigma_z)$  den Ansatz von TOMAS, Gl. (3-25).
- Für geringe Prozeßgeschwindigkeiten, wie etwa in der JENIKE-Scherzelle (siehe Abschn. 6), geht die Viskoplastizität asymptotisch in den Grenzfall der Plastizität über [12]. Mit  $\dot{\gamma} \rightarrow 0$  vereinfacht sich Gl. (5-16) weiter zu Gl. (3-20).

Für die Beschreibung des Schüttgutverhaltens bei dynamischer Beanspruchung ist eine weitere Einschränkung erforderlich, mit dem Ziel ein handhabbares Modell zu erhalten:

- 3) Die Materialeigenschaften ändern sich infolge Schwingungsbeanspruchung nicht permanent, etwa durch Verdichtung oder Auflockerung.

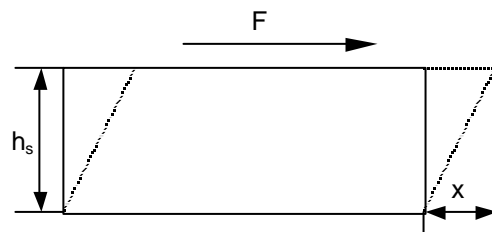
Zudem bietet sich eine eindimensionale Betrachtung an, da beim JENIKE-Schergerät weder Informationen über die Ausdehnung der linsenförmigen Scherzone zugänglich sind noch darüber, ob und wie sich die Ausdehnung der Scherzone bei variierender Beanspruchung ändert. Gl. (5-16) wird eindimensional betrachtet (vgl. [10]):

$$F = c \cdot x + k \cdot \operatorname{sgn} \dot{x} + b \cdot \dot{x}^n \cdot \operatorname{sgn} \dot{x} \quad (5-17)$$

wobei:  $G = c \cdot \frac{h_s}{A_s} \quad (5-18)$

$$\tau_F = \frac{k}{A_s} \quad (5-19)$$

und  $\eta = b \cdot \frac{h_s^n}{A_s} \quad (5-20).$



$A_s$  ist die Scherfläche und  $h_s$  die (unbekannte) Höhe der Scherzone.

### 5.1.3 Diskretisiertes Modell und Bewegungsgleichung

Die gesuchte Bewegungsgleichung erhält man durch Einsetzen des Stoffmodells Gl. (5-16) in die Impulsbilanz [9]:

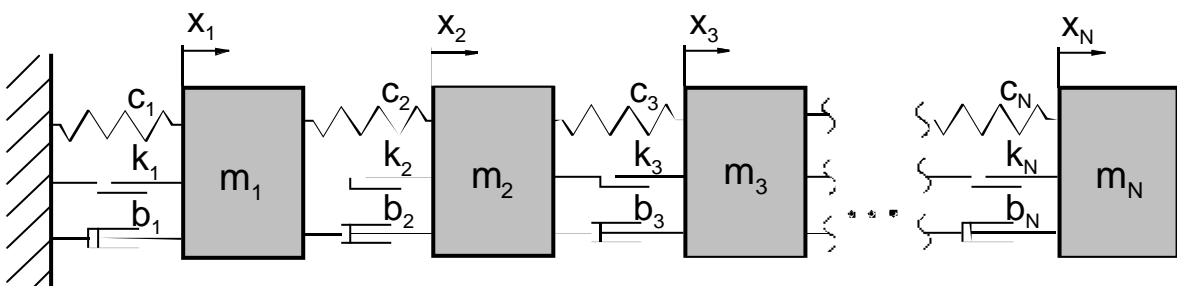
$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho \cdot f_i = \rho \cdot a_i \quad (5-21).$$

$f_i$  Vektor der Massenkraftdichte (z.B. Gravitationsfeld  $g$ )

$a_i$  Beschleunigungsvektor

Da die Masse eines Schüttgutvolumens quasi-kontinuierlich verteilt ist, besitzt sie unendlich viele Freiheitsgrade. Man erhält ein partielles Differentialgleichungssystem, das Ableitungen nach der Zeit und nach dem Ort enthält. Z.B. führt Gl. (5-21) für ein rein viskoses Material auf das NAVIER-STOKES-Gleichungssystem.

Mithilfe diskreter Ersatzmodelle läßt sich die Behandlung wieder auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückführen. Das eindimensionale Modell in **Abb. 5.1** mit  $N$  Freiheitsgraden liefert ein System aus  $N$  gekoppelten<sup>7</sup> gewöhnlichen Differentialgleichungen. Bei vertikaler Anordnung der Massen  $m_i$  ändern sich mit zunehmender Ausdehnung (z.B. Füllhöhe im Behälter) auch die Materialeigenschaften (vgl. Abschn. 3.3.1) und damit die Koeffizienten  $m_i$  (des Volumenelements),  $c_i$ ,  $k_i$  und  $b_i$ , also  $c_1 \neq c_2 \dots \neq c_N$  u.s.w.



**Abb. 5.1:** Eindimensionales diskretes Modell realen Schüttgutverhaltens

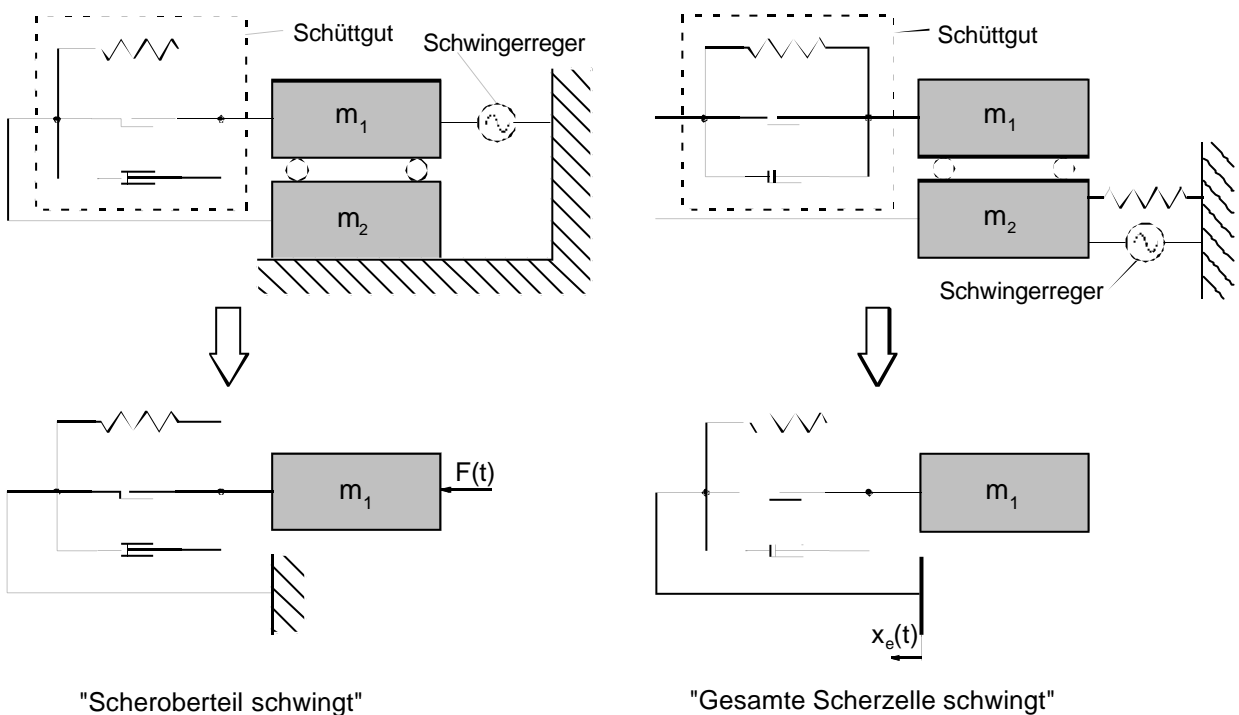
ROBERTS [116] fand für die von ihm untersuchten Erze im Frequenzbereich  $f = 5 \dots 200$  Hz jeweils eine dominante Resonanzfrequenz (Anlage I). Vergleichbare Ergebnisse ermittelten NORMAN-

<sup>7</sup> Auch bei Vernachlässigung der COULOMB-Reibung und linearer Viskosität ( $n = 1$ ) ist es bei diesem System nicht möglich, die Gleichungen durch geeignete Koordinatenwahl zu entkoppeln, d.h. Trägheits-, Dämpfungs-, und Steifigkeits-Matrix (jeweils im Format  $N \times N$ ) gleichzeitig in Diagonalf orm zu überführen [23].

GREGORY und SELIG [102] für Sand (20...450 Hz) sowie MATCHETT et al. [81-82] für Sand, Kohle und Terephthalsäure (100...400 Hz) sowie diverse Schüttgutmischungen (10...1000 Hz), siehe Abschn. 5.4. Auch sie konnten im jeweils untersuchten Frequenzbereich nur jeweils eine Resonanzstelle beobachten.

Dieses Verhalten läßt sich durch ein Modell mit lediglich einem Freiheitsgrad wiedergeben. Eventuelle höhere Resonanzfrequenzen bleiben dadurch unberücksichtigt. Diese Einschränkung erscheint gerade aus praktischer Sicht (z.B. Fließverbesserung infolge harmonischer Anregung) zweckmäßig, da sowohl die erforderliche Leistung als auch die spezifische Dämpfung mit steigender Frequenz zunehmen. Des weiteren ist bei vielen Anwendungen (z.B. Schwingtrichter) aufgrund großer zu beschleunigender Massen der mögliche Frequenzbereich nach oben begrenzt, vgl. Abschn. 2.3.

Für die experimentellen Untersuchungen zum Fließverhalten feinstkörniger, kohäsiver Pulver bei gleichzeitiger Schwingungseinwirkung werden zwei Versuchsanordnungen verwendet, siehe Abschn. 6.3. Im ersten Fall werden die Schwingungen in das Oberteil der Scherzelle eingeleitet (vgl. **Abb. 6.5**). Im zweiten Fall wird die gesamte Scherzelle in Schwingungen versetzt (vgl. **Abb. 6.6**). **Abb. 5.2** zeigt die dazugehörigen eindimensionalen Ersatzschaubilder mit je einem Freiheitsgrad.



**Abb. 5.2:** Modell der schwingenden Translations-Scherzelle  
(siehe auch **Abb. 6.5** und **Abb. 6.6**)

Das linke Bild illustriert die Versuchsanordnung „Scheroberteil schwingt“. Die Schüttguteigenschaften werden durch die Parallelschaltung von Feder, Dämpfer und Reibglied symbolisiert. Die Schüttgutmasse ist je zum Teil in  $m_1$  und  $m_2$  enthalten. Die Masse  $m_2$  umfaßt darüberhinaus die Masse des Scherbodens, der hier starr befestigt ist. Die Masse  $m_1$  beinhaltet auch die Massen von

Scherring und Scherdeckel (siehe auch Abschn. 6.3.2). Diese Versuchsanordnung kann durch das Modell eines störfreierregten Schwingers beschrieben werden.

Die Versuchsanordnung „Gesamte Scherzelle schwingt“, **Abb. 5.2** rechts, korrespondiert mit dem Ersatzmodell des fußpunkterregten Schwingers. Die Masse  $m_2$  ist hier nicht fixiert, sondern elastisch aufgehängt. Diese Aufhängung ist so abgestimmt, daß die Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$  weit unterhalb der Erregerkreisfrequenz  $\omega$  liegt („weiche“ Feder). Wegen  $\omega_0(m_2) \ll \omega$  kann  $m_2$  unberücksichtigt bleiben. Folglich genügt auch hier ein Freiheitsgrad.

Die Bewegungsgleichung eines eindimensionalen Modells mit einem Freiheitsgrad erhält man aus dem quasi-statischen Kräfte-Gleichgewicht unter Berücksichtigung der Trägheitskraft, **Tab. 5. 1**. Da nur eine schwingende Masse berücksichtigt wird sei  $m_1 := m$ .

Die Bewegungsgleichungen sind nichtlinear in  $\dot{x}$ . Für die praktische Anwendung erscheinen weitere Vereinfachungen zweckmäßig, z.B. die Annahme linearer Viskosität und / oder die Vernachlässigung des Reibungsgliedes. Exakte Lösungen sowie Näherungslösungen für harmonische Erregerfunktionen  $F(t)$  und  $x_e(t)$  für insgesamt sechs Sonderfälle werden in Abschn. 5.2 vorgestellt und diskutiert.

## 5.2 Schwingungsübertragung bei harmonischen Erregerfunktionen

### 5.2.1 Linear-viskose Dämpfung

Die Bewegungsgleichungen (5-26) und (5-27) sind in  $\dot{x}$  bzw.  $\Delta\dot{x}$  nichtlinear. Ein lineares Modell erhält man nur für ausschließliche linear-viskose Dämpfung<sup>8</sup>, d.h.  $k = 0$  und  $n = 1$ . Mit den Substitutionen

$$b/m = 2\delta; \quad (5-22)$$

und 
$$\zeta = \delta/\omega_0 \quad (5-23)$$

$\delta$  Abklingkonstante des linear-viskosen Dämpfers in 1/s

$\zeta$  dimensionsloses Dämpfungsmaß des linear-viskosen Dämpfers

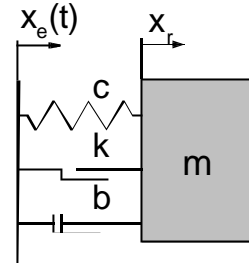
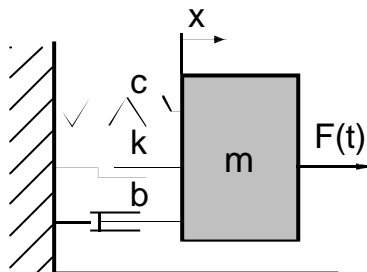
---

<sup>8</sup> In der Kontinuumsmechanik wird die Parallelschaltung eines linear-viskosen mit einem elastischen Element häufig als KELVIN-VOIGT-Modell oder KELVIN-Festkörper bezeichnet.

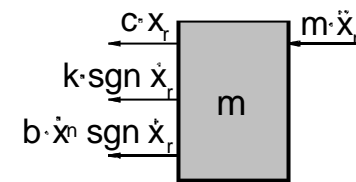
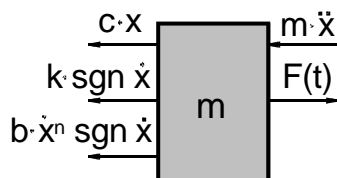


**Tab. 5. 1:** Erzwungene Schwingung eines Einfreiheitsgrad-Systems – Bewegungsgleichung**Störkrafteerregter Schwinger****Fußpunkterregter Schwinger**

- Ersatzschaltbild



- Schnittkräfte



- Kräftegleichgewicht

$$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x}^n \cdot \operatorname{sgn} \dot{x} + k \cdot \operatorname{sgn} \dot{x} + c \cdot x = F(t)$$

$$m \cdot \ddot{x}_r + b \cdot (\dot{x}_r - \dot{x}_e)^n \cdot \operatorname{sgn}(\dot{x}_r - \dot{x}_e) + \dots \\ \dots + k \cdot \operatorname{sgn}(\dot{x}_r - \dot{x}_e) + c \cdot (x_r - x_e) = 0$$

- Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \cdot \dot{x}^n \cdot \operatorname{sgn} \dot{x} + \frac{k}{m} \cdot \operatorname{sgn} \dot{x} + \frac{c}{m} \cdot x = a(t)$$

$$\text{mit } a(t) = F(t)/m$$

$$\Delta \ddot{x} + \frac{b}{m} \cdot (\Delta \dot{x})^n \cdot \operatorname{sgn} \Delta \dot{x} + \frac{k}{m} \cdot \operatorname{sgn} \Delta \dot{x} + \dots$$

$$\dots + \frac{c}{m} \cdot \Delta x = \ddot{x}_e(t)$$

$$\text{mit } \Delta x := x_r - x_e$$

Substitutionen:

$$\frac{c}{m} = \omega_0^2 \quad (5-24)$$

$\omega_0$  Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Schwingers in 1/s

$$\frac{k}{m} = \frac{k}{c} \cdot \omega_0^2 \quad (5-25)$$

- Substituierte Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \cdot \dot{x}^n \cdot \operatorname{sgn} \dot{x} + \frac{k}{c} \cdot \omega_0^2 \cdot \operatorname{sgn} \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = a(t)$$

$$(5-26)$$

$$\Delta \ddot{x} + \frac{b}{m} \cdot (\Delta \dot{x})^n \cdot \operatorname{sgn} \Delta \dot{x} + \frac{k}{c} \cdot \omega_0^2 \cdot \operatorname{sgn} \Delta \dot{x} + \dots$$

$$\dots + \omega_0^2 \cdot \Delta x = \ddot{x}_e(t) \quad (5-27)$$

lautet die Bewegungsgleichung am Beispiel der Fußpunkterregung:

$$\ddot{x}_r + 2\delta \cdot (\dot{x}_r - \dot{x}_e) + \omega_0^2 \cdot (x_r - x_e) = \ddot{x}_e(t) \quad (5-28)$$

Die lineare Differentialgleichung (DGI) 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, Gl. (5-28), ist inhomogen mit dem Störglied  $\ddot{x}_e(t)$ . Die allgemeine Lösung erhält man durch Linearkombination der allgemeinen Lösung der homogenen DGI (also für freie Schwingungen,  $\ddot{x}_e(t) = 0$ ) und einer beliebigen partikulären Lösung der inhomogenen DGI.

$$x_r = x_{r, \text{homogen}} + x_{r, \text{partikulär}} \quad (5-29)$$

Die homogene Lösung ist nur beim Einschwingen interessant und hängt von den Anfangsbedingungen ab. Für  $\zeta \neq 0$  klingt sie sehr schnell ab (wenige Perioden). Der hier interessierende eingeschwungene Zustand wird durch die partikuläre Lösung wiedergegeben und ist von den Anfangsbedingungen unabhängig [64]. Eine partikuläre Lösung lautet:

$$\begin{aligned} x_{r,p} &= \hat{x}_r \cdot \sin(\omega t - \psi) \\ &= \underline{\hat{x}}_r \cdot e^{j\omega t} \quad \text{mit } \sqrt{j} = -1 \quad \text{und } \underline{\hat{x}}_r = \hat{x}_r \cdot e^{j\psi}. \end{aligned} \quad (5-30)$$

Einsetzen von Gl. (5-30) und deren Zeitableitungen in Gl. (5-28) führt auf den komplexen Frequenzgang  $H(\Omega)$  des Schwingers (Übertragungsfunktion). Dabei ist  $\Omega$  das Verhältnis von Erregerkreisfrequenz  $\omega$  zur Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$  (Abstimmungsverhältnis).

$$\Omega = \omega / \omega_0 \quad (5-31)$$

Der Betrag des Frequenzganges liefert das gesuchte Amplitudenverhältnis  $\hat{x}_r / \hat{x}_e$ :

$$|H(\Omega)| = \hat{x}_r / \hat{x}_e = \sqrt{[\text{Re}(H)]^2 + [\text{Im}(H)]^2} \quad (5-32)$$

und das Argument des Frequenzganges die Phasenlage (vgl. [36,74]):

$$\tan \psi = \frac{\text{Im}(H)}{\text{Re}(H)} \quad (5-33)$$

$\text{Re}(H)$  Realteil von  $H(\Omega)$

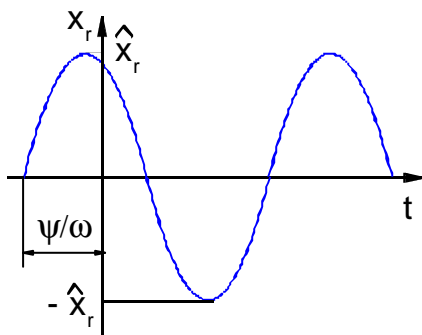
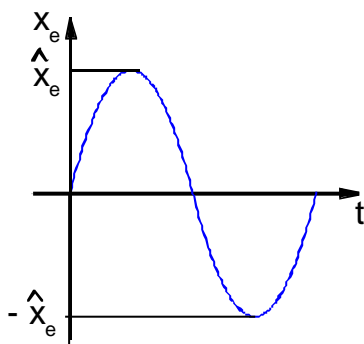
$\text{Im}(H)$  Imaginärteil von  $H(\Omega)$

Der Schwingweg  $\hat{x}_r$  eilt dem Erregersignal  $\hat{x}_e$  mit dem Winkel  $\psi$  nach, **Abb. 5.3**.

Die Lösung für Störkrafteerregung erhält man auf dem gleichen Wege. Die Ergebnisse für Fußpunkt- und Störkrafteerregung sind in **Tab. 5.2** zusammengefaßt.

**Tab. 5.2:** Stationäre Lösungen für Fußpunkt- und Störkrafteerregung, vgl. [36,46,74]  
(linear-viskose Dämpfung)

	Fußpunkterregung	Störkrafteerregung
$H(\Omega)$	$\frac{\hat{x}_r}{\hat{x}_e} = \frac{1 + 2\zeta \cdot \Omega \cdot j}{1 - \Omega^2 + 2\zeta \cdot \Omega \cdot j} \quad (5-34)$	$\frac{\hat{x}}{\hat{F}} = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{1 - \Omega^2 + 2\zeta \cdot \Omega \cdot j} \quad (5-35)$
$ H(\Omega) $	$\frac{\hat{x}_r}{\hat{x}_e} = \sqrt{\frac{1 + 4\zeta^2 \cdot \Omega^2}{(1 - \Omega^2)^2 + 4\zeta^2 \cdot \Omega^2}} \quad (5-36)$	$\frac{\hat{x}}{\hat{F}} = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{(1 - \Omega^2)^2 + 4\zeta^2 \cdot \Omega^2} \quad (5-37)$
$\arg H(\Omega)$	$\tan \psi = -\frac{2\zeta \cdot \Omega^3}{(1 - \Omega^2) + 4\zeta^2 \cdot \Omega^2} \quad (5-38)$	$\tan \psi = -\frac{2\zeta \cdot \Omega}{1 - \Omega^2} \quad (5-39)$
Resonanz	$f_{\max} = f_0 \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{1 + 8\zeta^2} - 1}}{2\zeta} \quad (5-40)$	$f_{\max} = f_0 \cdot \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (5-41)$



**Abb. 5.3:** Nacheilwinkel des linearen Schwingers Gl. (5-28)

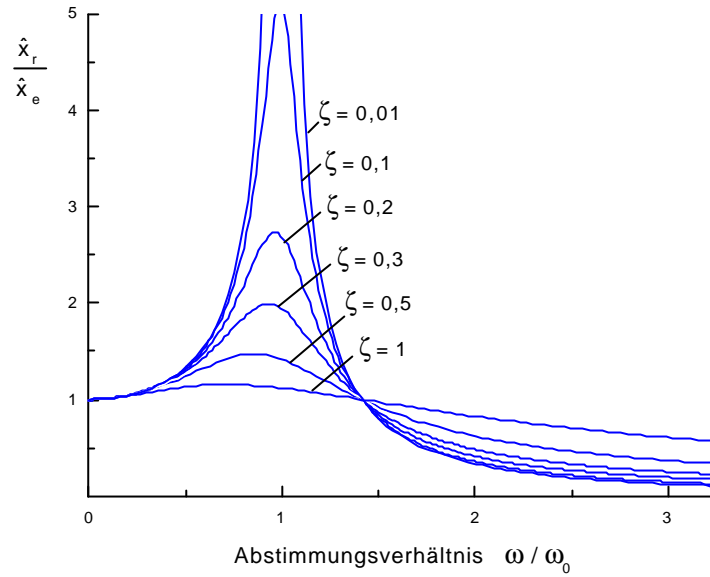
Wie aus den Gleichungen (5-36) und (5-38) ersichtlich wird, erhält man für  $\Omega \rightarrow 0$  den statischen Grenzfall, also  $\hat{x}_r = \hat{x}_e$  und  $\psi = 0$ . Für steigende Werte von  $\Omega$  steigt auch  $\hat{x}_r$  und kann in der Nähe von  $\Omega = 1$  für hinreichend kleine  $\zeta$  bis auf ein Vielfaches von  $\hat{x}_e$  steigen, **Abb. 5.4**. Die Amplitude  $\hat{x}_r$  eilt der Erreger-Amplitude  $\hat{x}_e$  für  $\zeta \rightarrow 0$  um  $\pi/2$  nach, **Abb. 5.5**. Für  $\Omega > \sqrt{2}$  wird  $\hat{x}_r$  kleiner als  $\hat{x}_e$  und konvergiert mit  $\Omega \rightarrow \infty$  gegen Null.

Mit steigenden Werten für  $\zeta$  verschiebt sich das Maximum der Funktion  $\hat{x}_r/\hat{x}_e$  in Richtung kleinerer Werte. Ableiten und Null setzen von (5-36) liefert schließlich:

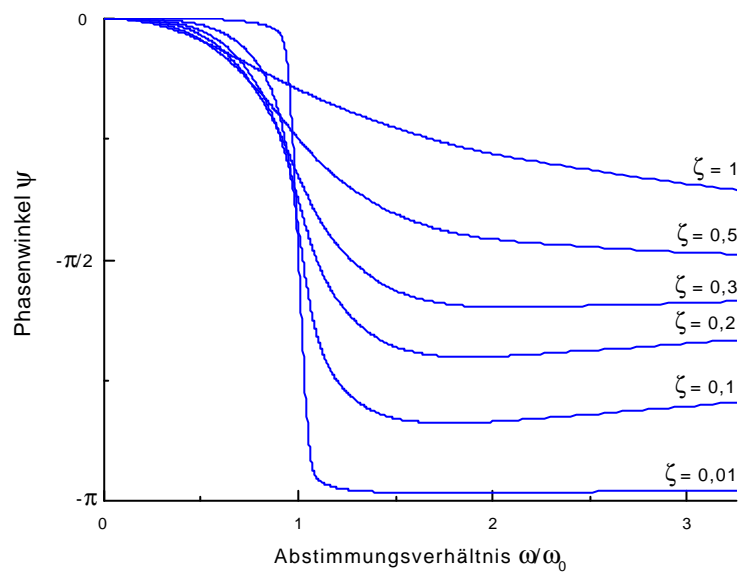
$$\Omega_{\max} = \frac{\sqrt{\sqrt{1 + 8\zeta^2} - 1}}{2\zeta} \quad (5-42)$$

Der Ausdruck  $\Omega_{\max}$  bezeichnet den Wert von  $\Omega$ , für den die Amplitude des Schwingweges  $\hat{x}_r$  maximal wird, nachfolgend als Resonanzstelle<sup>9</sup> bezeichnet.

<sup>9</sup> Die Lage der Resonanzstelle hängt außer von der Dämpfung auch von der Meßgröße ab, d.h. die Maxima von Schwingweg, Schwinggeschwindigkeit und Beschleunigung liegen nicht an der selben Stelle  $\Omega_{\max}$ . Da nachfolgend nur die Resonanz der Schwingweg-Amplitude betrachtet wird, wird auf eine begriffliche Unterscheidung verzichtet.



**Abb. 5.4:** Verlauf von  $|H(\Omega)|$  für verschiedene Werte für  $\zeta$   
(linear-viskoser Dämpfer mit Fußpunkterregung)



**Abb. 5.5:** Verlauf des Phasenwinkels  $\psi$  für verschiedene Dämpfungen  $\zeta$   
(linear-viskoser Dämpfer mit Fußpunkterregung)

Die Resonanzfrequenz  $f_{\max}$  folgt zu:

$$f_{\max} = f_0 \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{1+8\zeta^2} - 1}}{2\zeta} \quad (5-40)$$

Für kleine Dämpfungen  $\zeta \leq 0,1$  ist folgende Vereinfachung zulässig [74]:

$$\sqrt{1+8\zeta^2} \approx 1+4\zeta^2 - 8\zeta^4$$

so daß: 
$$f_{\max} \approx f_0 \cdot \sqrt{1-2\zeta^2} \quad (5-41).$$

Für störfrechterregte Schwinger gilt die Beziehung (5-41) für beliebige Dämpfungen exakt.

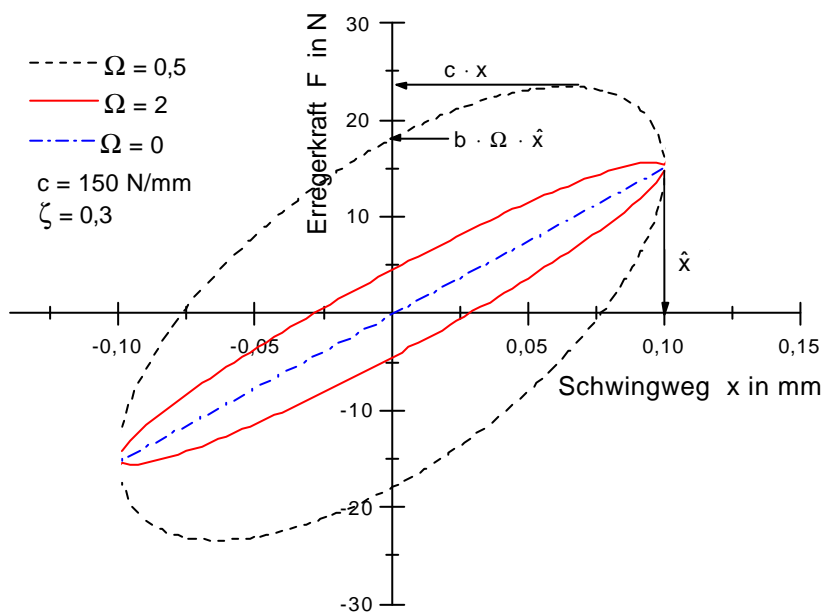
Der Fall ausschließlicher linear-viskoser Dämpfung ist sowohl analytisch als auch numerisch bequem zu handhaben und wird daher sehr häufig verwendet. Dies ist insbesondere für geringe Dämpfungen, also  $\zeta \leq 0,1$ , gerechtfertigt, da hier die Unterschiede z.B. zur COULOMB-Dämpfung vernachlässigbar sind.

Für das lineare Modell gibt BETTEN [10] folgende Ellipsengleichung an:

$$0 = (1 + 4\zeta^2 \cdot \Omega^2) \cdot x^2 - 2x \cdot \left(\frac{F}{c}\right) + \left(\frac{F}{c}\right)^2 - 4\zeta^2 \cdot \Omega^2 \cdot \hat{x}^2 \quad (5-43)$$

und damit 
$$F = c \cdot x \pm 2c \cdot \zeta \cdot \Omega \cdot \sqrt{\hat{x}^2 - x^2} \quad (5-44).$$

F ist die Erregerkraft und x der Schwingweg. Das positive Vorzeichen des zweiten Terms in Gl. (5-44) gibt den oberen, das negative Vorzeichen den unteren Kurvenast wieder, **Abb. 5.6**. Mit steigendem Abstimmungsverhältnis  $\Omega$  steigt der Flächeninhalt innerhalb der Ellipse. Die Schleifen schließen sich bei harmonischer Erregung, falls keine Ermüdungs- oder Setzungserscheinungen auftreten [103].



**Abb. 5.6:**

Beispiele berechneter Hystereseschleifen für unterschiedliche Werte von  $\Omega$

Die Anwendung einer linearen Differentialgleichung ist um so mehr gerechtfertigt, je weniger die Hysteresekurve von der Ellipsenform abweicht [175].

Gemäß Annahme 1) (Abschn. 5.1.1) folgt die Dämpfungsarbeit im eindimensionalen Fall:

$$W_d = \oint F_d dx \quad (5-45)$$

und wegen Gl. (3-29) [153] 
$$W_d = \int_0^{2\pi} F_d \cdot \dot{x} \frac{d\omega t}{\omega} \quad (5-46).$$

Mit der Dämpfungskraft für linear-viskose Dämpfung  $F_d = b \cdot \dot{x}$  führt das Integral (5-46) auf:

$$W_d = b \cdot \hat{x}^2 \cdot \omega \cdot \pi \quad (5-47).$$

Bei Fußpunkterregung ist  $x$  durch  $\Delta x$  zu ersetzen.

### 5.2.2 Nichtlineare Modelle

Alle anderen aus dem vorgeschlagenen Modell, Gln. (5-26), (5-27), ableitbaren Bewegungsgleichungen sind nichtlinear. Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist hier nicht durch Superposition gemäß Gl. (5-30) zugänglich. Für ausschließliche COULOMB-Dämpfung ( $b = 0$ ) sowie kombinierte linear-viskose und COULOMB-Dämpfung ( $n = 1$ ) gab DEN HARTOG [48-49] analytische Lösungen an. Im eingeschwungenen Zustand ist die Frequenz der resultierenden Bewegung gleich der Erregerfrequenz und für beide Halbzyklen gelten die gleichen Gesetzmäßigkeiten. Die Lösung für den eingeschwungenen Zustand erhält man durch Kombination der Teillösungen für  $\text{sgn } \dot{x} = 1$  und  $\text{sgn } \dot{x} = -1$  bzw.  $\text{sgn } \Delta \dot{x} = 1$  und  $\text{sgn } \Delta \dot{x} = -1$  [65].

#### COULOMB-Dämpfung

Für ausschließliche COULOMB-Dämpfung und Bewegung ohne Stillstände lautet die Vergrößerungsfunktion  $V$  (für die Herleitung siehe [48-49] oder [65]):

$$V = \sqrt{U^2 - \Lambda^2 \cdot Q^2} \quad (5-48)$$

und für die Phasenlage gilt:

$$\sin \psi = -\Lambda \cdot \frac{Q}{U} \quad (5-49).$$

mit:  $V$  Vergrößerungsfunktion

$U$  Vergrößerungsfunktion des ungedämpften Schwingers

$$U = \frac{1}{1 - \Omega^2} \quad (5-50)$$

$Q$  Dämpfungsfunktion

$$Q = \frac{\sin(\pi/\Omega)}{\Omega[1 + \cos(\pi/\Omega)]} \quad (5-51)$$

Die Lösung gilt sowohl für Störkraft- als auch für Fußpunkterregung in den Koordinaten der absoluten Amplitude  $\hat{x}_r/\hat{x}_e$ , je nach Wahl der Größen  $V$  und  $\Lambda$ , **Tab. 5.3**. Die Größe  $\psi$  ist kein echter Phasenwinkel, da die resultierende Schwingung nicht harmonisch ist, sondern gibt lediglich den Abstand der Maxima  $\hat{x}$  bzw.  $\hat{x}_r$  und  $\hat{e}$  an.

Die Gültigkeit der Lösungen ist auf Bewegungen ohne Stillstände beschränkt. Bei COULOMB-Dämpfung können auch bei sinusförmiger Erregung Stillstände auftreten. Die Geschwindigkeit hält dabei nicht nur im Moment des Vorzeichenwechsel, sondern für längere Zeiträume u.U. mehrmals je Halbperiode den Wert Null.

**Tab. 5.3:** Vergrößerungsfunktion  $V$  und Dämpfungsverhältnis  $\Lambda$  für Fußpunkt und Störkrafteerregung

Erregerfunktion $e(t)$	$x_e(t)$	$F(t)$
Vergrößerungsfunktion $V$	$\hat{x}_r/\hat{x}_e$	$\hat{x}/(\hat{F}/c)$
Dämpfungsverhältnis $\Lambda$	$k/(c \cdot \hat{x}_e)$	$k/\hat{F}$

Die Ursache der Stillstände wird besonders am Beispiel der Störkrafteerregung deutlich. In diesem Fall gibt die Erregerfunktion  $e(t)$  den zeitlichen Verlauf der Erregerkraft wieder. Die Federkraft  $c \cdot x(t)$  wird durch die resultierende Bewegung  $x(t)$  repräsentiert und unterscheidet sich von dieser nur um den konstanten Faktor  $c$ . Die Bewegungsgleichung für ausschließliche COULOMB-Dämpfung mit Störkrafteerregung folgt aus Gl. (5-26) mit  $b = 0$ :

$$\ddot{x} + \frac{k}{c} \cdot \omega_0^2 \cdot \operatorname{sgn} \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = a(t) \quad (5-52)$$

Anhand der Bewegungsgleichung (5-52) ist der Sachverhalt der Stillstände allerdings nur sehr schwer zu überblicken. Daher soll zunächst der vereinfachte Fall  $c \rightarrow 0$  betrachtet werden.

Gl. (5-52) vereinfacht sich zu:

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot \operatorname{sgn} \dot{x} = F(t) \quad (5-53)$$

Befindet sich die Masse  $m$  in Ruhe ( $\dot{x} = 0$ ), wird sie erst in Bewegung versetzt, wenn die Erregerkraft  $F(t)$  größer als die Reibungskraft  $k$  wird, also  $\hat{F} \cdot \sin \omega t > k$ . Für den anschließenden Zeitraum bis zum nächsten Stillstand wird die Bewegung durch Gl. (5-53) beschrieben. Der Schwinger verharrt erneut, bis die Erregerkraft wieder größer als die Reibungskraft wird. Dann folgt der gleiche Ablauf in entgegengesetzter Richtung. Für dieses Beispiel gilt für das Auftreten von Stillständen die Grenzbedingung Gl. (5-54) [65]. Wird  $k/\hat{F} < 0,537$ , verläuft die Bewegung ohne Stillstände. Die Geschwindigkeit der Masse durchläuft lediglich den Nullpunkt.

$$\left(\frac{k}{\hat{F}}\right)_G = \left[1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = 0,537 \quad (5-54)$$

Für den allgemeinen Fall  $c > 0$  schränkt DEN HARTOG den Gültigkeitsbereich der Lösungen (Bewegung ohne Stillstände) durch die Grenzbedingungen  $\Lambda_G$  und  $V_G$  ein.

$$\Lambda_G \leq \sqrt{\frac{U^2}{(S/\Omega^2)^2 + Q^2}} \quad (5-55)$$

$$V_G \geq \sqrt{\frac{U^2}{1 + (\Omega^2/S)^2 \cdot Q^2}} \quad (5-56)$$

Der Ausdruck  $S$  ist das Ergebnis einer numerischen Berechnung und kann mit guter Genauigkeit  $S = 1$  gesetzt werden [48].

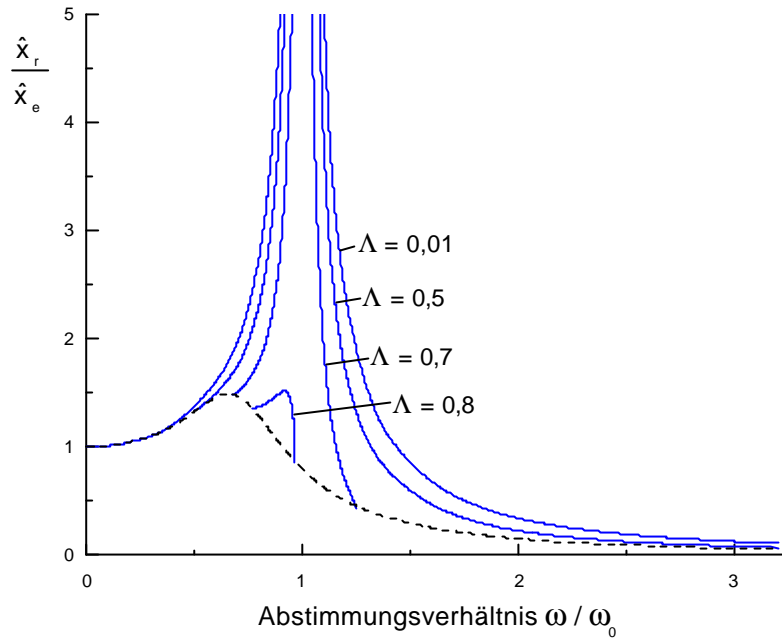
**Abb. 5.7** zeigt den Verlauf der Vergrößerungsfunktion  $V$  für ausschließliche COULOMB-Dämpfung. Die gestrichelte Linie ist die Grenzbedingung (5-56). Zustände unterhalb der Linie sind durch Stillstände gekennzeichnet. An der Stelle  $\Omega = 1$  wird der Betrag des Frequenzganges unendlich, für alle Werte

$$\Lambda = k/(c \cdot \hat{x}_c) < \pi/4. \quad (5-57)$$

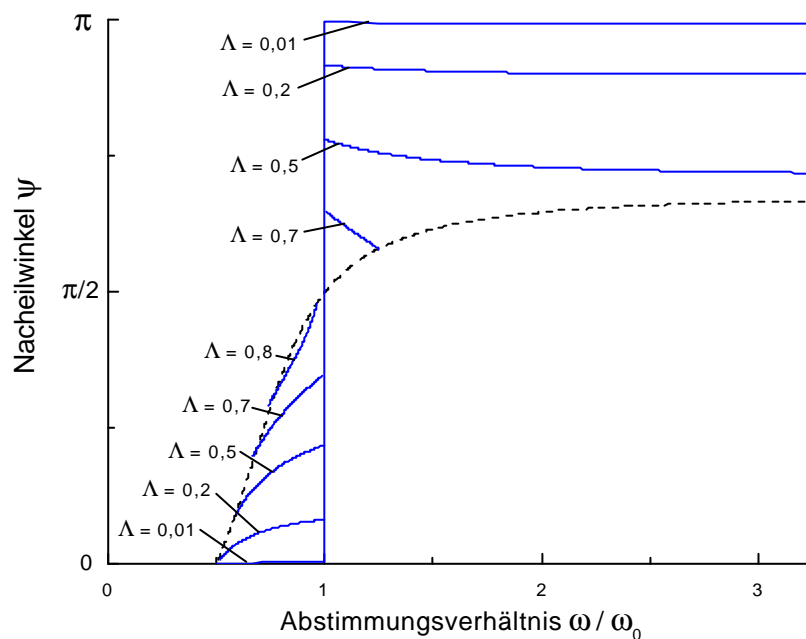
Für Werte  $\Lambda > 0,826$  liegt  $V$  bereits vollständig im Gebiet der Stillstände. Das heißt, bei ausschließlicher COULOMB-Dämpfung sind an der Resonanzstelle nur die Zustände „unendlicher Ausschlag“ und „Stillstand“ (bzw. Bewegung mit Stillständen) möglich. Kurven mit endlichen Maximalwerten, deren Höhe von der Dämpfung abhängt, wie sie für viskose Dämpfung typisch sind (vgl. **Abb. 5.4**), treten hier praktisch nicht auf.

Dieses Verhalten spiegelt sich auch im Verlauf des Phasenwinkels wieder, **Abb. 5.8**. Die gestrichelte Linie grenzt das Gebiet der Stillstände ab, mit Hilfe von Gl. (5-55). Im Gegensatz zur viskosen Dämpfung treten für alle  $\Lambda$  an der Resonanzstelle Sprünge auf, was daraus resultiert, daß die Amplituden unendlich werden.





**Abb. 5.7:** Vergrößerungsfunktion  $V$  für COULOMB-Dämpfung nach DEN HARTOG



**Abb. 5.8:** Verlauf des Winkels  $\psi$  (COULOMB-Dämpfung nach DEN HARTOG)

Dieses Verhalten wird mit Hilfe einer Energiebetrachtung plausibel. Im stationären Zustand wird die dem Schwinger zugeführte Energie vollständig dissipiert. Mit anderen Worten, die von der externen Erregerkraft  $F(t)$  je Periode am System verrichtete Arbeit  $W_e$  ist gleich der Dämpfungsarbeit  $W_d$  [78,143]. Die Trägheitskraft ( $\rightarrow$  kinetische Energie) und Rückstellkraft der Feder ( $\rightarrow$  potentielle Energie) liefern nur Blindarbeiten, d.h. sie verschwinden für eine Vollschiwingung. Mit Integral (5-46) erhält man für  $W_e$ :

$$W_e = \pi \cdot \hat{F} \cdot \hat{x} \cdot \sin \psi \quad (5-58)$$

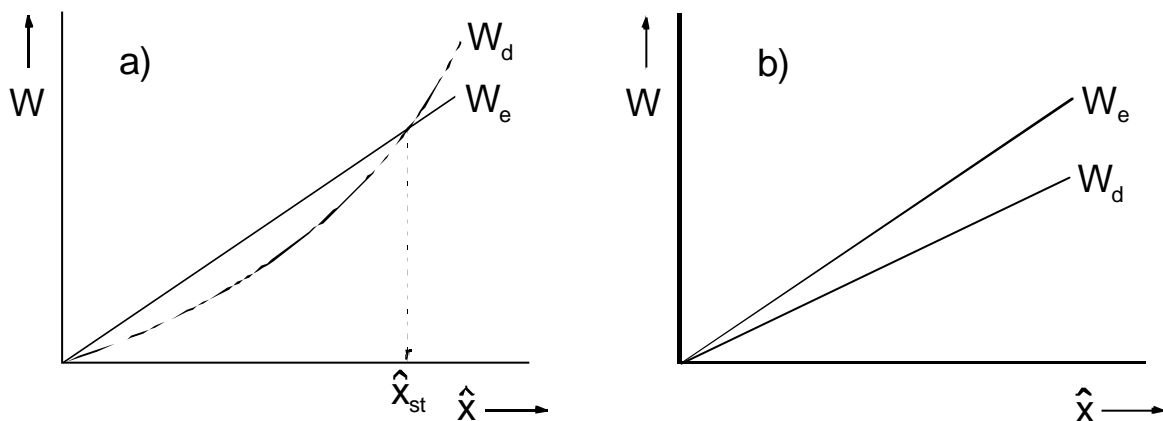
$W_e$  ist also direkt proportional zur resultierenden Schwingweg-Amplitude  $\hat{x}$ . Beim linear-viskosen Dämpfer hängt die Dämpfungsarbeit  $W_d$  vom Quadrat der Größe  $\hat{x}$  ab, vgl. Gl.

(5-47). Die Gleichgewichtsbedingung

$$W_e = W_d \quad (5-59)$$

liefert für beliebige Werte  $\omega = \text{konst.}$  die stationäre Schwingweg-Amplitude  $\hat{x}_{st}$ , **Abb. 5.9**.

$$\hat{x}_{st} = \frac{\hat{F}}{b \cdot \omega} \cdot \sin \psi \quad (5-60)$$



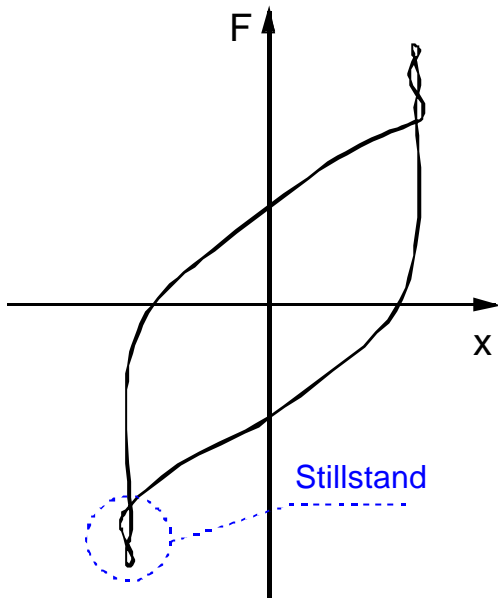
**Abb. 5.9:** Vergleich von zugeführter und dissipierter Energie je Zyklus bei  
 a) viskose Dämpfung und b) COULOMBSche Dämpfung [49]

Für den COULOMB-Dämpfer lautet die Dämpfungskraft  $F_d = k \cdot \text{sgn} \dot{x}$ . Das Integral (5-46) kann Abschnittsweise jeweils für  $\text{sgn} \dot{x} = 1$  und  $\text{sgn} \dot{x} = -1$  gelöst werden. Die verrichtete Arbeit für eine Vollschwingung:

$$W_d = 4k \cdot \hat{x} \quad (5-61)$$

hängt genau wie  $W_e$  linear von  $\hat{x}$  ab, **Abb. 5.9**. Solange der Anstieg von  $W_d$  kleiner ist als der von  $W_e$ , also für  $k/\hat{F} < \pi/4$ , ist die zugeführte Energie immer größer als die dissipierte. Folglich wird  $\hat{x}$  an der Stelle  $\Omega = 1$  unendlich.

Die Hystereseschleifen weisen hier im Gegensatz zum linearen Schwinger Spitzen auf [103,65]. **Abb. 5.10** zeigt den Verlauf einer Hystereseschleife bei Bewegung mit je einem Stillstand je Halbzyklus für eine Abstimmung von  $\Omega = 0,5$ . Mit steigenden Werten für  $\Omega$  verlieren die Spitzen an Ausprägung und verschwinden schließlich (für  $\Omega \rightarrow \infty$  wird  $V_{vis} = V_{Coul} = 0$ ).



**Abb. 5.10:** Gemessene Hystereseschleife bei COULOMB-Dämpfung ( $\Omega = 0,5$ ) mit je einem Stillstand je Halbzyklus nach [49]

### Kombinierte COULOMB- und viskose Dämpfung

Ebenso wie für ausschließliche COULOMB-Dämpfung fand DEN HARTOG [48-49,65] auch für kombinierte COULOMB- und viskose Dämpfung eine analytische Lösung:

$$V = -L \cdot \Lambda + \sqrt{V_{\text{vis}}^2 - M^2 \cdot \Lambda^2} \quad (5-62)$$

mit:

$$L = \frac{\sinh\left(\frac{\pi \cdot \zeta}{\Omega}\right) - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\Omega} \cdot \sqrt{1-\zeta^2}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi \cdot \zeta}{\Omega}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{\Omega} \cdot \sqrt{1-\zeta^2}\right)} \quad (5-63)$$

$$M = \frac{1}{\Omega \cdot \sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\Omega} \cdot \sqrt{1-\zeta^2}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi \cdot \zeta}{\Omega}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{\Omega} \cdot \sqrt{1-\zeta^2}\right)} \quad (5-64)$$

Mit den Ausdrücken für die Vergrößerungsfunktion  $V$  und die Dämpfungsgröße  $\Lambda$  nach

**Tab. 5.4** können die Lösungen für Störkrafterregung und Fußpunkterregung in den Koordinaten der absoluten Schwingweg-Amplitude  $\hat{x}_r$  angegeben werden. Für  $\Lambda = 0$  erhält man aus Gl. (5-62) die Lösung für reine viskose Dämpfung und mit  $\zeta = 0$ , also  $L = 0$ ;  $V_{\text{vis}} = U$ ;

$M = Q$ , die Lösung für reine COULOMB-Dämpfung, Gl. (5-48).

Der Nullphasenwinkel ist nicht explizit zugänglich, sondern nur durch die transzendente Beziehung:

$$\tan(\psi - \alpha) = \frac{2\zeta \cdot \Omega}{1 - \Omega^2} \quad (5-65)$$

mit 
$$\sin \alpha = -\frac{\Lambda \cdot M}{V_{\text{vis}}} \quad (5-66)$$

$$\cos \alpha = \frac{V + \Lambda \cdot L}{V_{\text{vis}}} \quad (5-67)$$

**Tab. 5.4:** Vergrößerungsfunktionen und Dämpfungsverhältnis für Fußpunkt- und Störkrafteerregung

Erregerfunktion $e(t)$	$\mathbf{x}_e(t)$	$\mathbf{F}(t)$
Vergrößerungsfunktion $V$	$\hat{x}_r / \hat{x}_e$	$\hat{x} / (\hat{F} / c)$
Vergrößerungsfunktion $V_{\text{vis}}$	(5-36)	(5-37)
Dämpfungsverhältnis $L$	$k / (c \cdot \hat{x}_e)$	$k / \hat{F}$

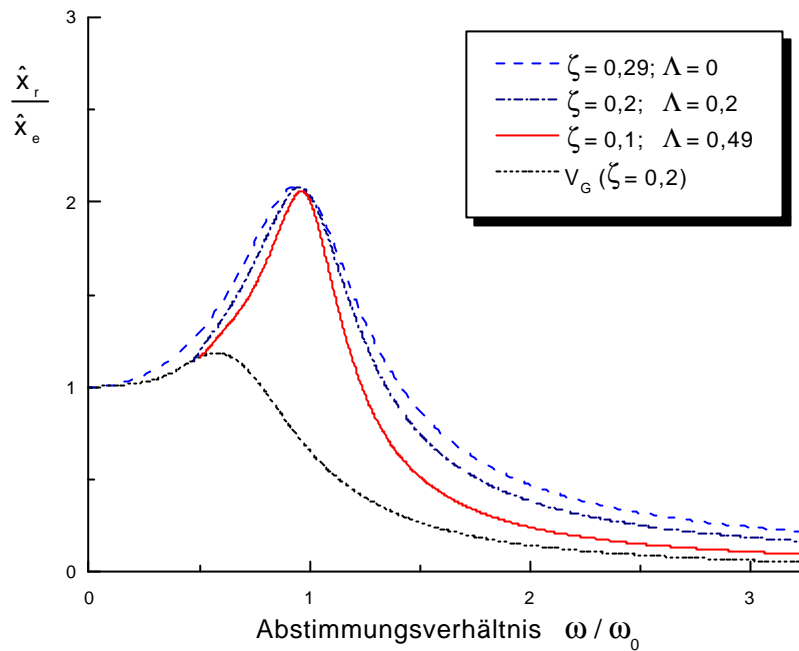
Die Lösung gilt wieder für Bewegungen ohne Stillstände. Die Grenzbedingungen lauten hier:

$$\Lambda_G \leq \frac{V_{\text{vis}}}{\sqrt{M^2 + [S \cdot I + (1 - S) \cdot L]^2}} \quad (5-68)$$

$$V_G \geq \frac{V_{\text{vis}} \cdot S \cdot (I - L)}{\sqrt{M^2 + [S \cdot I + (1 - S) \cdot L]^2}} \quad (5-69)$$

$$I = 2M \cdot \frac{\zeta}{\Omega} + \frac{(1 + L)}{\Omega^2} \quad (5-70)$$

Im Gegensatz zur viskosen Dämpfung, bei der die Vergrößerungsfunktion  $V$  nur von den Größen  $\Omega$  und  $\zeta$  abhängt, tritt in der Vergrößerungsfunktion, Gl. (5-62), zusätzlich die Erregergröße  $\hat{F}$  bzw.  $\hat{x}_e$  auf. **Abb. 5.11** zeigt den Verlauf von  $\hat{x}_r / \hat{x}_e$  für verschiedene Werte für  $\zeta$  und  $\Lambda$ . Bei konstantem Maximalausschlag wird die Kurve mit steigendem  $\Lambda$ , also zunehmendem COULOMB-Einfluß, schmaler. Anders als bei ausschließlicher viskoser Dämpfung schneiden sich die Kurven nicht bei  $\Omega = \sqrt{2}$ , um anschließend wieder auseinander zu laufen, vgl. **Abb. 5.4**. Der Unterschied zu reiner COULOMB-Dämpfung zeigt sich in den endlichen Resonanzausschlägen. Die untere gestrichelte Kurve grenzt das Gebiet der Stillstände ab. Die Lage der Grenzlinie hängt von  $\zeta$  ab. Ein wachsender viskoser Anteil (steigendes  $\zeta$ ) verschiebt die Grenzlinie nach unten. Für  $\Lambda \leq 0,1$  zeigen sich praktisch keine Unterschiede zu reiner viskoser Dämpfung.



**Abb. 5.11:** Einfluß von  $\Lambda$  auf den Verlauf der Vergrößerungsfunktion für kombinierte viskose und COULOMBSche-Dämpfung bei Fußpunkterregung

### 5.2.3 Linearisierte Modelle - das äquivalente lineare Dämpfungsmaß

Die Nachteile der nichtlinearen Modelle in Abschn. 5.2.2 im Vergleich zum linearen Modell, Abschn. 5.2.1, liegen auf der Hand. Als Ausweg kann man die nichtlinearen Dämpfungsterme in der Bewegungsgleichung durch äquivalente lineare Ausdrücke ersetzen. Diese Methode liefert gute Näherungen für den eingeschwungenen Zustand, d.h. wenn die Schwingungsamplituden konstant bleiben [65]. Die Ergebnisse für äquivalente COULOMB-Dämpfung ( $b = 0$ ), für kombinierte linear-viskose und äquivalente COULOMB-Dämpfung ( $n = 1$ ) sowie für quadratisch-viskose Dämpfung ( $n = 2$ ;  $k = 0$ ) werden nachfolgend überblicksweise dargestellt.

Als Äquivalenzbedingung dient die Gleichheit der je Periode dissipierten Energie, d.h. die je Schwingung verrichtete Arbeit  $W_d$ .

$$W_d = W_{d,\text{äqu}} \quad (5-71)$$

#### COULOMB-Dämpfung

Die Dämpfungsarbeit  $W_d$  ist für COULOMB-Reibung durch Gl. (5-61) gegeben. Die ersetzende Größe  $W_{d,\text{äqu}}$  erhält man aus der Dämpfungsarbeit des viskosen Dämpfers, Gl. (5-47):

$$W_{d,\text{äqu}} = b_{\text{äqu}} \cdot \hat{x}^2 \cdot \omega \cdot \pi \quad (5-72)$$

Die Äquivalenzbedingung Gl. (5-71) liefert nun den bekannten Ausdruck für den äquivalenten Dämpfungsfaktor  $b_{\text{äqu}}$  für COULOMB-Dämpfung (vgl. [46] S. 4.33). Er enthält die Reibungskraft  $k$  und die Amplitude der Schwinggeschwindigkeit  $\hat{v}$ .

$$b_{\text{äqu}} = \frac{4k}{\pi \cdot \hat{v}} \quad (5-73)$$

Damit gilt für das äquivalente dimensionslose Dämpfungsmaß:

$$\zeta_{\text{äqu}} = \frac{2 \cdot \Lambda}{\pi \cdot \Omega} \quad (5-74).$$

Der Ausdruck  $\Lambda$  ist das Verhältnis der Reibungs- zur Federkraft (Plastizität zu Elastizität).

$$\Lambda = \frac{k}{c} \cdot \hat{x} \quad (5-75)$$

Die Lösungen für  $|H(\Omega)|$  und  $\arg H(\Omega)$  gewinnt man durch Einsetzen der äquivalenten Dämpfungsmaße in die Lösung der Bewegungsgleichungen (5-26), (5-27) des linearen Modells. Das Vorgehen soll anhand der Beispiele für äquivalente COULOMB-Dämpfung ( $b = 0$ ), für kombinierte linearviskose und äquivalente COULOMB-Dämpfung ( $n = 1$ ) exemplarisch gezeigt werden. Die Abweichungen zur analytischen Lösung ergeben sich daraus, daß die resultierende Schwingung nicht harmonisch ist, aber als solche betrachtet wird.

Bei Störkrafteerregung kann das äquivalente Dämpfungsmaß  $\zeta_{\text{äqu}}$  gleich in das lineare Modell eingesetzt werden. Die partikuläre Lösung ist direkt zugänglich, ebenso wie in Abschn. 5.2.2 beschrieben.

Bei Fußpunkterregung ist nicht die resultierende Schwingweg-Amplitude  $\hat{x}_r$ , sondern die relative Amplitude  $\Delta\hat{x}$  in den Gleichungen des äquivalenten Dämpfungsmaßes zu verwenden. Diese ist meßtechnisch jedoch kaum zugänglich. Um  $\Delta\hat{x}$  zu substituieren, muß man den Umweg über die Lösung der linearisierten DGL für den relativen Schwingweg  $\Delta\hat{x}$  gehen (Vorgehensweise gemäß Abschn. 5.2.2):

$$\frac{\Delta\hat{x}}{\hat{x}_e} = \frac{\Omega^2}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + (2\zeta_{\text{äqu}} \cdot \Omega)^2}} \quad (5-76)$$

Nach  $\Delta\hat{x}$  umgestellt, quadriert und eingesetzt in  $\zeta_{\text{äqu}}^2$  erhält man das gesuchte äquivalente Dämpfungsmaß in den Koordinaten der Erregeramplitude  $\hat{x}_e$ : mit  $\Lambda = k/(c \cdot \hat{x}_e)$

$$\zeta_{\text{äqu}}^2(\hat{x}_e) = \frac{(2\Lambda/\pi)^2 \cdot (1-\Omega^2)^2}{\Omega^2 [\Omega^4 - (4\Lambda/\pi)^2]} \quad (5-77)$$

Einsetzen in die Lösung für viskose Dämpfung, Gl. (5-36), liefert schließlich:

$$\frac{\hat{x}_r}{\hat{x}_e} = \sqrt{\frac{1 + (4\Lambda/\pi)^2 \cdot (1 - 2/\Omega^2)}{(1 - \Omega^2)^2}} \quad (5-78)$$

Durch Einbeziehung des Ausdrucks U nach Gl. (5-50) sowie von

$$Q_{\text{äqu}}^2 = (4/\pi)^2 \cdot (2/\Omega^2 - 1) \quad (5-79)$$

läßt sich die Lösung in die Form der exakten Lösung überführen, wobei sich lediglich die jeweiligen „Dämpfungsfunktionen“ Q der exakten und der Näherungslösung voneinander unterscheiden.

$$\frac{\hat{x}_r}{\hat{x}_e} = \sqrt{U^2 - \Lambda^2 \cdot Q_{\text{äqu}}^2} \quad (5-80)$$

Für die Phasenlage erhält man auf gleichem Wege:

$$\tan \psi = -\frac{(4\Lambda/\pi) \cdot \sqrt{\Omega^4 - (4\Lambda/\pi)^2}}{\Omega^2 - (4\Lambda/\pi)^2} \quad (5-81)$$

Eine Grenzbedingung resultiert hier aus der Tatsache, daß die Wurzel (5-78) nur im Bereich

$$\Lambda < \frac{\pi}{4} \cdot \Omega^2$$

reelle Lösungen besitzt.

### Kombinierte COULOMB- und viskose Dämpfung

Die gleiche Vorgehensweise wie bei ausschließlicher COULOMB-Dämpfung führt auch für kombinierte viskose und COULOMB-Dämpfung zum Ziel. Die Ergebnisse für den Betrag des Frequenzganges und den Phasenwinkel lauten für den fußpunkterregten Schwinger in den Koordinaten des absoluten Schwingweges  $\hat{x}_r$ :

$$\frac{\hat{x}_r}{\hat{x}_e} = \sqrt{\frac{1 + 4(\zeta + \zeta_{\text{äqu}})^2 \cdot \Omega^2}{(1 - \Omega^2)^2 + 4(\zeta + \zeta_{\text{äqu}})^2 \cdot \Omega^2}} \quad (5-82)$$

$$\tan \psi = -\frac{2\zeta \cdot \Omega^3}{(1 - \Omega^2) + 4(\zeta + \zeta_{\text{äqu}})^2 \cdot \Omega^2} \quad (5-83)$$

mit:

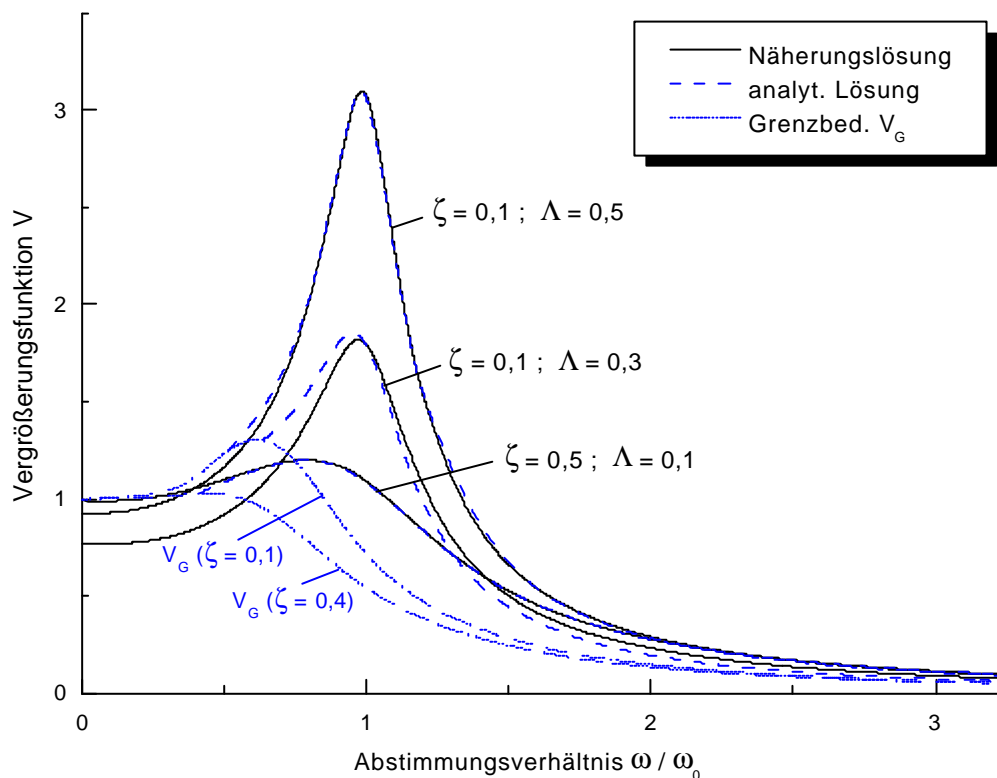
$$\zeta_{\text{äqu}}(\hat{x}_e) = \frac{1}{[\Omega^2 \cdot \pi/(4\Lambda)]^2 - 1} \cdot \left[ \zeta + \sqrt{\zeta^2 + P \cdot \frac{[\Omega^2 \cdot \pi/(4\Lambda)]^2 - 1}{(2\Omega^2)^2}} \right]$$

wobei 
$$P = (1 - \Omega^2)^2 + (2\zeta \cdot \Omega)^2 \quad (5-84).$$

Für  $\zeta = 0$  geht Gl. (5-82) in den Grenzfall der COULOMB-Dämpfung, Gl. (5-78), über und für  $\zeta_{\text{äqu}} = 0$  in die Lösung des linearen Schwingers, Gl. (5-36).

Die Näherungslösung ist kaum übersichtlicher als das Ergebnis von DEN HARTOG. Sie vereinfacht jedoch die numerische Behandlung (Kurvenanpassung), da die analytische Lösung im Bereich  $\Omega < 1$  zum Überschwingen neigt.

Die Unterschiede zwischen beiden Lösungen sind für kleine  $\Lambda$  und für beliebige  $\zeta$  gering, **Abb. 5.12**. Die durchgezogenen Kurven repräsentieren die Näherungslösungen. Die gestrichelten Kurven geben die analytischen Lösungen nach DEN HARTOG wieder, mit den Punkt-Linien als dazugehörige Grenzkurve zum Gebiet der Stillstände. Für  $\Lambda \leq 0,3$  sind die Kurven nahezu identisch, siehe  $\zeta = 0,1 / \Lambda = 0,3$  und  $\zeta = 0,5 / \Lambda = 0,1$ . Relevante Abweichungen, besonders im Bereich  $\Omega < 1$ , treten erst für  $\Lambda > 0,3$  auf, wie das Beispiel  $\zeta = 0,1 / \Lambda = 0,5$  verdeutlicht.



**Abb. 5.12:** Vergleich von analytischer und Näherungslösung für kombinierte viskose und COULOMBSche Dämpfung am Beispiel der Störkrafteerregung

### Quadratisch-viskoser Dämpfer

VOCK [176] und STADLER [152] beobachteten ein quadratisch-viskoses Materialverhalten, vgl. Abschn. 4.3.4. Für den quadratisch-viskosen Dämpfer ( $n = 2$ ;  $k = 0$ ) folgt aus der Dämpfungskraft

$$F_d = b \cdot \dot{x}^2 \cdot \text{sgn } \dot{x} \quad (5-85)$$

die Dämpfungsarbeit je Periode zu:



$$W_d = \frac{8}{3} b \cdot \hat{x}^3 \cdot \omega^2 \quad (5-86)$$

und mit der Äquivalenzbedingung Gl. (5-71) schließlich der äquivalente Dämpfungsfaktor  $b_{\text{äqu}}$  (vgl. [46] S. 4.33).

$$b_{\text{äqu}} = \frac{8}{3\pi} b \cdot \hat{v} \quad (5-87)$$

Er ist direkt proportional zur Amplitude der Schwinggeschwindigkeit  $\hat{v}$ .

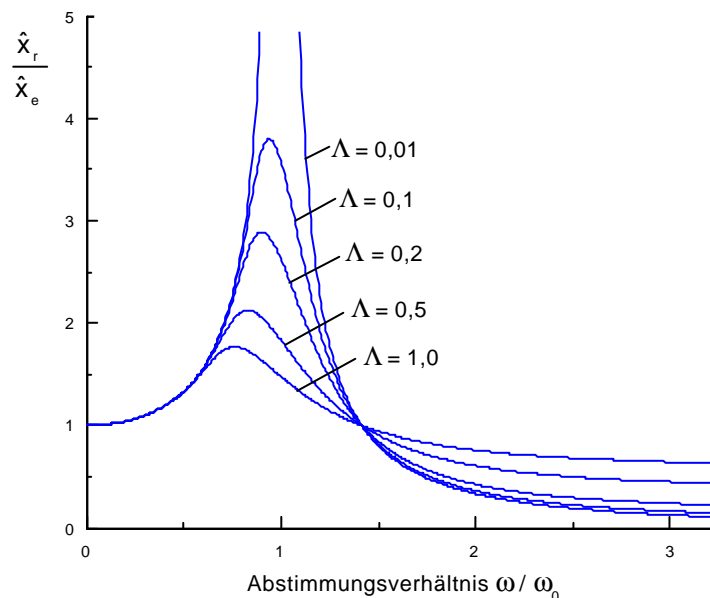
Das äquivalente Dämpfungsmaß lautet somit:

$$\zeta_{\text{äqu}} = \frac{4}{3\pi} b \cdot \hat{x} \frac{\Omega}{m} \quad (5-88).$$

Im Fall der Fußpunkterregung gelten die Zusammenhänge für  $\Delta\hat{x}$  anstelle  $\hat{x}$ .

Der komplexe Frequenzgang ergibt sich wieder durch Einsetzen des linearisierten Dämpfungsmaßes in die Bewegungsgleichungen (5-26), (5-27) gemäß Abschn. 5.2.2 (vgl. auch [59]). Bei Fußpunkterregung muß ebenso wie bei der COULOMB-Dämpfung die Amplitude des relativen Schwingweges  $\Delta\hat{x}$  substituiert werden. Schließlich erhält man aus Gl. (5-88) als Dämpfungsparameter des quadratisch-viskosen Dämpfers

$$\Lambda = b \cdot \hat{x}_e / m \quad (5-89).$$



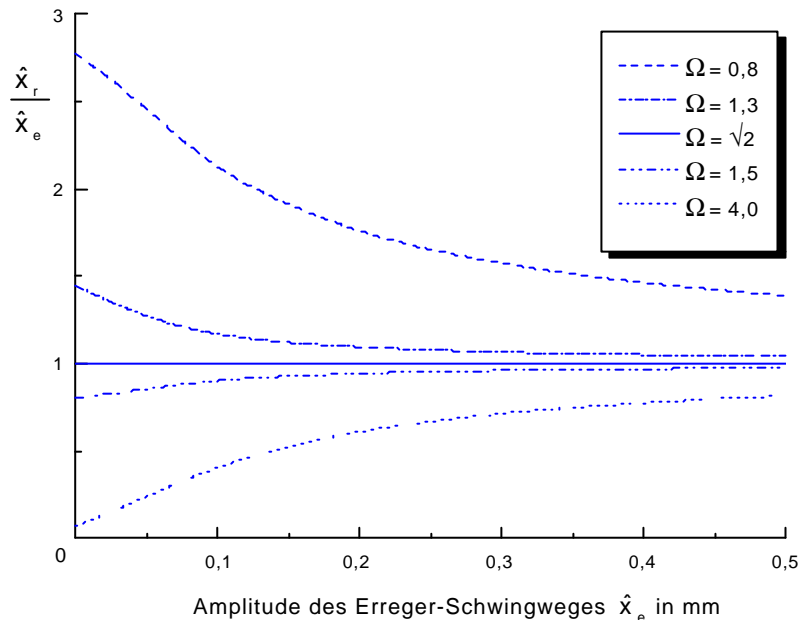
**Abb. 5.13:** Verlauf von  $\hat{x}_r / \hat{x}_e$  für quadratisch-viskose Dämpfung

**Abb. 5.13** zeigt das Amplitudenverhältnis  $\hat{x}_r / \hat{x}_e$ . Die Unterschiede zu linear-viskoser Dämpfung sind hier nur quantitativ, vgl. **Abb. 5.4**.

Qualitative Unterschiede werden bei Betrachtung des Schwingweg-Verhältnisses über der Amplitude des Erregerschwingweges  $\hat{x}_e$  deutlich. Die lineare Lösung (5-36) enthält als Parameter nur  $\omega_0$  und  $\zeta$ . D.h das Verhältnis  $\hat{x}_r / \hat{x}_e$  ist unabhängig vom Wert des Schwingweges  $\hat{x}_e$ . Demgegenüber ist bei quadratisch-viskoser Dämpfung im Dämpfungsparameter  $\Lambda$ , Gl. (5-89), und damit im Betrag des Frequenzganges die Erregergröße  $\hat{x}_e$  enthalten. Folglich ändert sich der Betrag des Frequenzganges  $\hat{x}_r / \hat{x}_e$  mit  $\hat{x}_e$ , **Abb. 5.14**. Dabei können drei Fälle beobachtet werden.

- Für  $\Omega < \sqrt{2}$  fällt  $\hat{x}_r / \hat{x}_e$  mit steigendem  $\hat{x}_e$  ab.
- Bei  $\Omega = \sqrt{2}$  ist  $\hat{x}_r / \hat{x}_e$  unabhängig von  $\hat{x}_e$ .
- Bei  $\Omega > \sqrt{2}$  wächst das Verhältnis  $\hat{x}_r / \hat{x}_e$  mit steigendem  $\hat{x}_e$ .

Gleiches gilt für den Fall der Störkrafterregung. Hier hängt  $\hat{x} / \hat{F}$  von der Größe der Erregerkraft  $\hat{F}$  ab.



**Abb. 5.14:** Einfluß der Amplitude des Erreger-Schwingweges  $\hat{x}_e$  auf die Vergrößerungsfunktion  $\hat{x}_r / \hat{x}_e$  für quadratisch-viskose Dämpfung ( $\Lambda = 0,6$ ;  $m = 1\text{ kg}$ )

### 5.3 Probendämpfung und Schüttgutdämpfung

In Abschn. 5.2 wurde die Dämpfungsarbeit  $W_d$  je Periode berechnet, also die Energie, die zugeführt wird, um die Schwingung aufrecht zu erhalten. Bisher wurden keine Aussagen darüber getroffen, inwieweit die ermittelte Dämpfung durch die Schüttgutprobe vorgegeben ist oder ob es sich um einen Materialkennwert (Kontinuumseigenschaft) handelt. Die Unterschiede zwischen der Dämpfung der Schüttgutprobe und der des Schüttgutkontinuums werden nachfolgend anhand des leicht überschaubaren Beispiels des linear-viskosen Dämpfers bei Störkrafterregung diskutiert.

Das Integral  $W_d$  entspricht dem Flächeninhalt der Hystereseschleife, **Abb. 5.15**. Die spezifische Dämpfung  $\vartheta_b$  (Elementdämpfung, Verlustfaktor) des Schüttgutes erhält man mit [175]<sup>10</sup>:

$$\vartheta_b = W_d / W_{el} \quad (5-90)$$

$W_{el}$  ist die Formänderungsarbeit je Periode, also die in einer Umkehrlage gespeicherte (potentielle) Energie. Für den linear-viskosen Dämpfer mit Störkrafteerregung gilt:

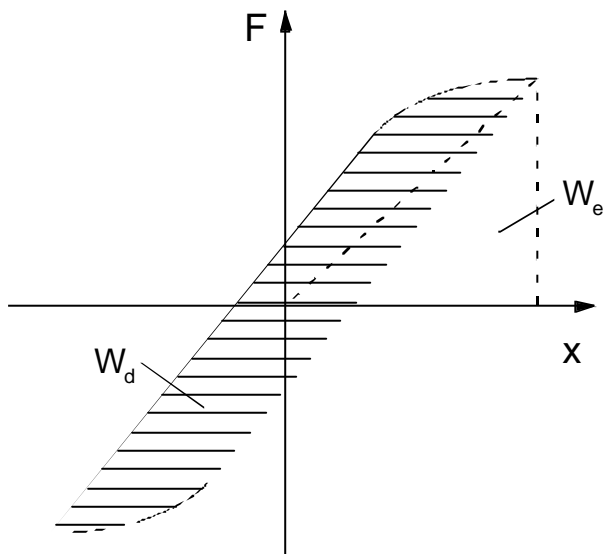
$$W_{el} = \frac{c}{2} \cdot \hat{x}^2 \quad (5-91)$$

und 
$$W_d = \pi \cdot b \cdot \omega \cdot \hat{x}^2 \quad (5-92).$$

Beide Größen hängen von  $\hat{x}^2$  ab, so daß  $\vartheta_b$  schließlich unabhängig von  $\hat{x}$  ist:

$$\vartheta_b = 4\pi \cdot \zeta \cdot \Omega \quad (5-93)$$

Die spezifische Dämpfung des Schüttgutes ist also eine Funktion des dimensionslosen Dämpfungsmaßes  $\zeta$  und des Abstimmungsverhältnisses  $\Omega$ , vgl. [10,175].



**Abb. 5.15:** Definition der spezifischen Dämpfung, nach [175]

Bei experimentellen Untersuchungen ermittelt man jedoch nicht die Materialdämpfung, also die Dämpfung des Schüttgutkontinuums  $\vartheta_b$ , sondern die Nenndämpfung der Schüttgutprobe  $\vartheta_p$ .

$$\vartheta_p = W_{d,P} / W_{el,P} \quad (5-94)$$

<sup>10</sup> Abweichend hierzu wird  $\vartheta$  auch definiert als  $\vartheta = W_d / (2\pi \cdot W_{el})$ , z.B. [42,65]. Der Unterschied besteht lediglich im konstanten Faktor  $2\pi$ .

Bei homogener Spannungsverteilung im Material (z.B. Zug-Druck-Beanspruchung eines Stabes konstanten Querschnitts) sind

$$\vartheta_b = \vartheta_p \quad (5-95).$$

Andernfalls gilt [42]:

$$\vartheta_b = \vartheta_p \cdot K_1 \cdot K_2 \quad (5-96).$$

$K_1$  und  $K_2$  sind Formfaktoren.  $K_1$  beschreibt den Einfluß der Spannungsverteilung über dem Querschnitt der Probe und  $K_2$  der Spannungsverteilung längs der Probe (in Beanspruchungsrichtung, also Schwingungsrichtung). Für Festkörper liegen beide Konstanten i. allg. im Bereich 1...2, also  $K_1 \cdot K_2 = 1...4$  [42]<sup>11</sup>. Bei homogener Scherdeformation linear viskoser Materialien gilt  $K_1 = K_2 = 1$ .

Beide Annahmen sind streng genommen nicht erfüllt. Homogene Scherdeformation wird hingegen auch für die Scherversuche vorausgesetzt (siehe Abschn. 6.2) und soll hier übernommen werden. Lineare Viskosität liegt ebenfalls nicht vor. Das Schüttgutverhalten kann aber gut mit linearisierten Modellen beschrieben werden, siehe Abschn. 9. Insbesondere im Hinblick auf die Schwankungsbreiten bei der Ermittlung der Dämpfungsparameter (Abschn. 9) erscheint hier die Annahme gerechtfertigt:

$$\vartheta_b \approx \vartheta_p \quad (5-97).$$

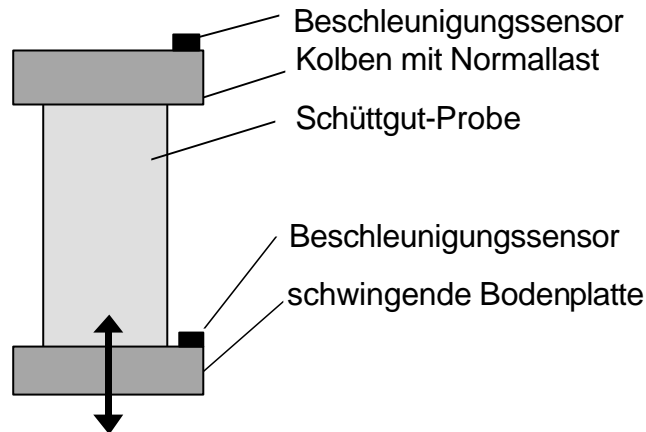
## 5.4 Dämpfungsverhalten von Schüttgutern

ROBERTS et al. [114-118] verwendete für Untersuchungen zum Übertragungsverhalten von Erzen eine modifizierte JENIKE-Scherzelle (siehe ausführlich in Abschn. 6.3). Nach herkömmlichem Vorverfestigen und Anscheren der Schüttgutprobe bis zum stationären Fließen (Abschn. 6.2) wurden die Schwingungen mit dem Erreger-Schwingweg  $\hat{x}_e$  während des Abschervorgangs am Scherboden eingeleitet. Der resultierende Schwingweg  $\hat{x}_r$  wurde am Scherring gemessen und so der Betrag des Frequenzganges  $\hat{x}_r / \hat{x}_e$  experimentell bestimmt, **Tab. 5.5**.

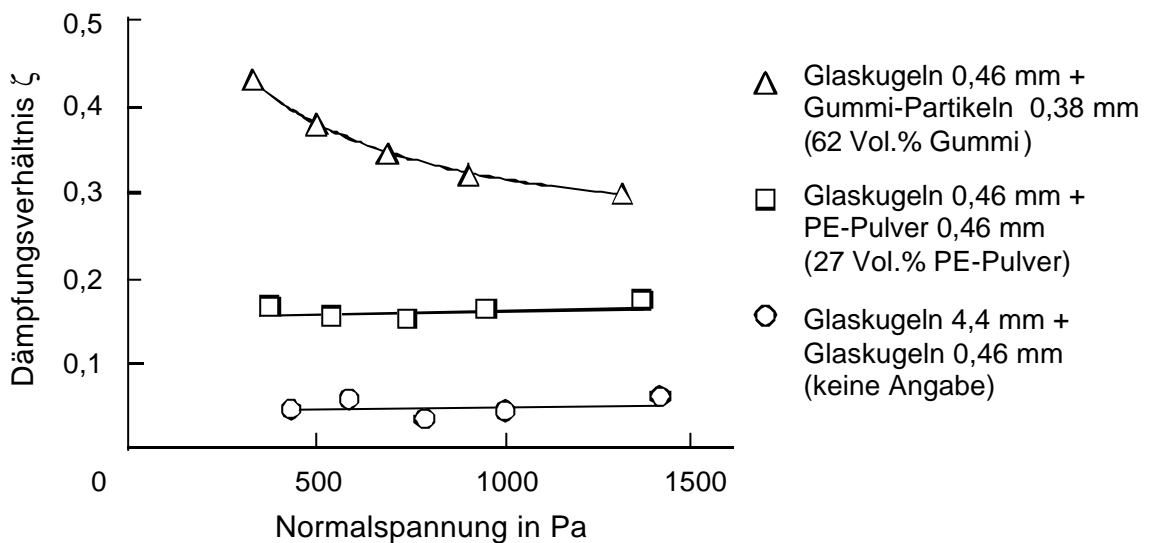
---

<sup>11</sup>  $K_1$  und  $K_2$  hängen von einem Exponenten  $q$  ab, der der empirischen Beziehung  $W_d = K \cdot (\hat{\tau} / \hat{\tau}^*)^q$  entstammt, wobei  $\hat{\tau}^*$  eine zu definierende Bezugsspannung ist, vgl. [42,65]. Übliche Werte für  $q$  liegen im Bereich  $q = 2...3$ , woraus die Werte  $K_1, K_2 = 1...2$  resultieren, siehe [65].

Basierend auf Untersuchungen von NORMAN-GREGORY und SELIG [102] beaufschlagte MATCHETT et al. [81-82] zylindrische Schüttgutproben mit vertikalen Schwingungen, **Abb. 5.16**. Die Schüttgutprobe (mit oder ohne Stützmembran) befindet sich zwischen einer vibrierenden Bodenplatte und einer aufgesetzten Masse. Bei konstanter Basisbeschleunigung  $\hat{x}_e$  erhält man am Oberteil der Probe die resultierende Beschleunigung  $\hat{x}_r$ .



**Abb. 5.16:** Schematische Darstellung der Versuchsanordnung von MATCHETT et al. [82]



**Abb. 5.17:** Einfluß der Normalspannung auf das Dämpfungsverhältnis von Schüttgutmischungen [138]

**Abb. 5.17** und **Tab. 5.5** zeigen Literaturdaten experimentell ermittelter Dämpfungsverhältnisse von Schüttgütern. Alle Werte für  $\zeta$  beruhen auf dem Modell des Einfreiheitsgrad-Schwingers mit linearviskoser Dämpfung und Fußpunkterregung. Dabei wurde jeweils die Gleichung des Frequenzgangbetrages (5-36) den experimentell gewonnenen Wertepaaren  $\hat{x}_r / \hat{x}_e = f(f)$  angepaßt.

**Tab. 5.5:** Experimentell ermittelte Dämpfungsmaße für Schüttgüter (Literaturdaten)

Schüttgut / Versuchsapparatur / Schwingungsparameter	Dämpfungsverhältnis $\zeta$	Autor, Quelle
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Erze (<math>d_{50,3} = 200 \dots 1800 \mu\text{m}</math>; <math>X_W = 0 \dots 10 \%</math>)</li> <li>• modifizierte JENIKE-Scherzelle, <math>\sigma_{\text{an}} \approx 4 \dots 8 \text{ kPa}</math></li> <li>• <math>f = 50 \dots 200 \text{ Hz}</math>; <math>\hat{x} \leq 0,1 \text{ mm}</math></li> </ul>	$\zeta = 0,1 \dots 0,13$ (Anlage I)	ROBERTS et al. [114-118] 1978...1986
<ul style="list-style-type: none"> <li>• trockener Sand (<math>d = 0,75 \dots 5 \text{ mm}</math>)</li> <li>• modifizierter Triaxial-Tester, siehe <b>Abb. 5.16</b></li> <li>• <math>f = 20 \dots 450 \text{ Hz}</math>; <math>\hat{a}_e = 0,5 \cdot g</math></li> </ul>	$\zeta = 0,04$	NORMAN-GREGORY; SELIG [102] 1987
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Sand (<math>d_{50,3} = 200 \dots 800 \mu\text{m}</math>, <math>X_W = 3 \dots 12 \%</math>)</li> <li>• modifizierter Triaxial-Tester, <b>Abb. 5.16</b>, Probe freistehend, Proben- <math>\varnothing 38/50 \text{ mm}</math>; <math>H/D = 2</math>; <math>\sigma \approx 0,2 \dots 2 \text{ kPa}</math></li> <li>• <math>f = 100 \dots 400 \text{ Hz}</math>; <math>\hat{a}_e = 0,1 \cdot g</math></li> </ul>	$\zeta = 0,04 \dots 0,12$	MATCHETT et al. [1,81-85] 1992...1998
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Glaskugeln (<math>d_{50,3} = 4,4 \text{ mm}</math> und <math>0,46 \text{ mm}</math>)</li> <li>• Polyethylen-Pulver (<math>d_{50,3} = 0,46 \text{ mm}</math>)</li> <li>• Gummi-Partikeln (<math>d_{50,3} = 0,38 \text{ mm}</math>)</li> <li>• wie <b>Abb. 5.16</b>, aber zylindrisches Probengefäß</li> <li>• Innen- <math>\varnothing 80 \text{ mm}</math>; <math>H = 200 \text{ mm}</math>; <math>\sigma = 0,75 \text{ kPa}</math></li> <li>• <math>f = 10 \dots 1000 \text{ Hz}</math>; <math>\hat{a}_e = 0,02 \cdot g</math></li> </ul>	$\zeta = 0,06$ $\zeta = 0,24$ $\zeta = 0,40$	MATCHETT et al. [138], 2001

## 6 Versuchsaufbau und Meßmethoden

### 6.1 Anforderungen und Konzept

Für die Messung der Fließeigenschaften feinstkörniger Pulver unter Schwingungseinwirkung und die Überprüfung der in Abschn. 3 bis 5 beschriebenen Modellvorstellungen wurde eine Versuchsaapparatur konstruiert, die folgenden Anforderungen genügen sollte:

- Experimentelle Ermittlung der Fließkennwerte feinstkörniger, kohäsiver Pulver als Funktion der gewählten Schwingungsparameter
- Untersuchung von Resonanzeffekten sowie des Dämpfungsverhaltens der Pulver und deren Einfluß auf das Fließverhalten.
- Quantifizierung des Schwingungseinflusses auf den Wandreibungswinkel
- unmittelbare Anwendbarkeit der Ergebnisse für die verfahrenstechnische Auslegung von Lager- und Transportbehältern und Austraghilfen

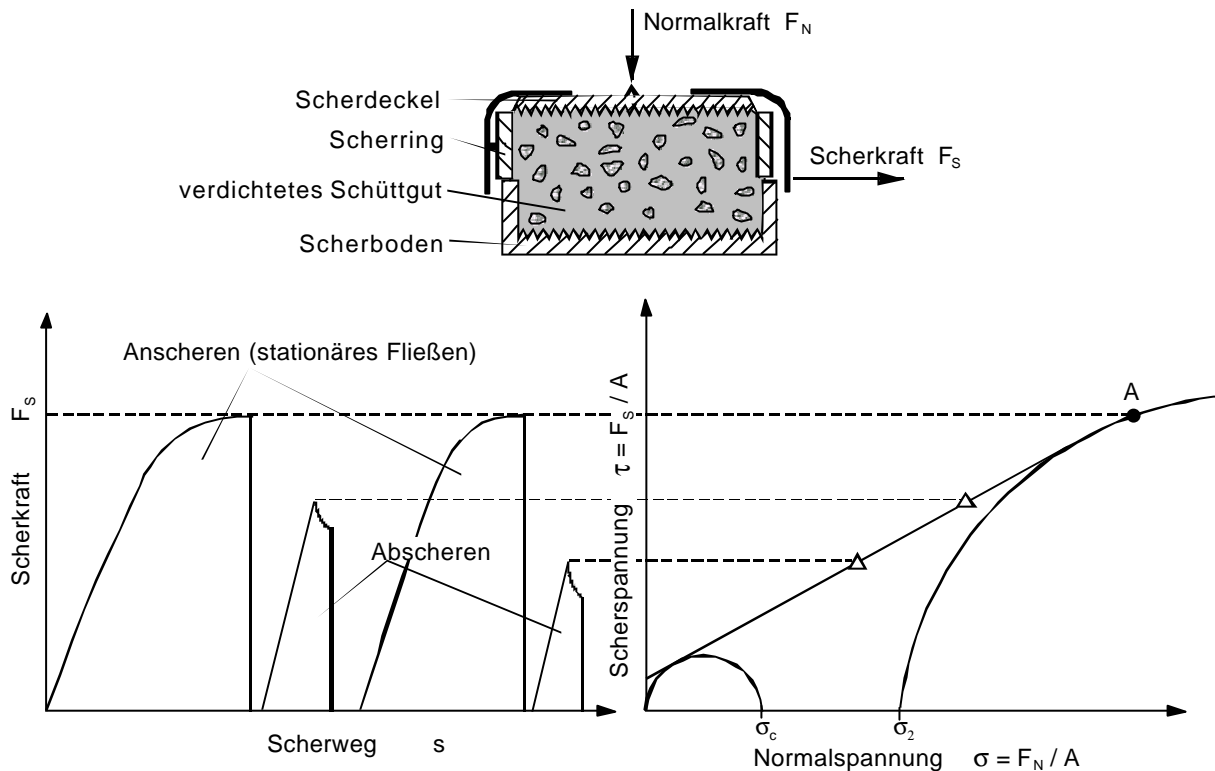
Für die Umsetzung dieser Zielstellungen schien das Konzept der „Schwingenden Translations-Scherzelle“ am besten geeignet. Daher wurde diese, erstmals von ARNOLD [3] und ROBERTS [114-115] beschriebene, Methode aufgegriffen und weiterentwickelt.

Basis dieser Versuchsanordnung ist eine Translations-Scherzelle vom JENIKE-Typ. Der Translations-Scherversuch nach JENIKE [60] hat sich als Standardmeßmethode in der Schüttguttechnik etabliert. Er liefert alle für die verfahrenstechnische Silo-Dimensionierung relevanten Fließkennwerte. Die damit ermittelten Ergebnisse haben sich in der Praxis bewährt. Über Vor- und Nachteile ist in den vergangenen Jahrzehnten in der Literatur ausführlich diskutiert worden, überblicksweise z.B. in [140]. Aufbau und Durchführung der Versuche sind standardisiert [185] und vielfach in der Literatur beschrieben. Ungeachtet dessen werden im Abschn. 6.2 Versuchsaufbau und Durchführung des JENIKE-Scherversuchs kurz wiedergegeben, zum einen, um auf konstruktive Besonderheiten der neugebauten Apparatur einzugehen und zum anderen für ein besseres Verständnis der im Abschn. 6.3 beschriebenen Schwingungs-Scherversuche.

### 6.2 Translations-Scherversuch ohne Schwingungen – Aufbau und Durchführung

Die verwendete Translations-Scherapparatur setzt sich aus den Komponenten Scherzelle, Scherantrieb und Kraftsensor zusammen. Kernstück der Versuchsanordnung ist die Scherzelle, bestehend aus Scherring, Scherboden und Scherdeckel, gemäß **Tab. 6.1** und **Abb. 6.1**. Deckel-Unter- und Boden-Oberseite sind mit Rillen versehen, um ein Gleiten des Schüttgutes an der Wandung zu unterbinden. Durch Verschieben des Scherringes relativ zum Scherboden werden von den zu untersuchenden Schüttgütern Scherkraft-Weg-Verläufe aufgezeichnet, **Abb. 6.1**. Um eine Beeinflussung der

Scherkraftmessung durch die spätere Schwingungseinleitung zu minimieren, wurde die Scherkrafteinleitung nicht als Schubstange wie in [60,185], sondern als Zugseil ausgeführt. Als Scherantrieb dient ein Gleichstrommotor mit mehrstufigem Planetengetriebe und Lineareinheit. Zur Gewährleistung einer lastunabhängigen Schergeschwindigkeit ist der Motor drehzahlregelt. Für das stoßfreie Aufsetzen größerer Normallasten ist ein elektrischer Hubzylinder vorgesehen. Die technischen Daten der Scherapparatur sind in **Tab. 6.1** zusammengestellt.



**Abb. 6.1:** Translations-Scherversuch nach JENIKE

Der Translations-Scherversuch nach JENIKE beinhaltet drei Schritte: Vorverfestigen, Anscheren und (Ab-) Scheren. Die ersten beiden Schritte, Vorverfestigen und Anscheren, dienen der Herstellung eines reproduzierbaren Ausgangszustandes mit der Beanspruchungsvorgeschichte stationäres Fließen, d.h. Fließen unter Volumenkonstanz (vgl. Abschn. 3.3). Beim Anscheren wird die Schüttgutprobe mit einer gewählten Normalspannung  $\sigma_{an}$  (simuliertes Eigengewicht des Schüttgutes z.B. im Silo) belastet und so lange geschert, bis die gemessene Scherkraft konstant bleibt. Das Erreichen dieses konstanten Scherkraftniveaus gilt als Indiz für stationäres Fließen.

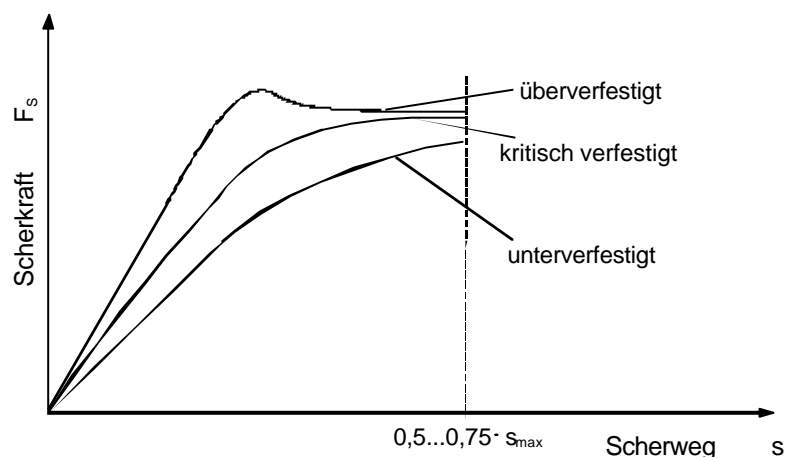
Aufgrund des begrenzten Scherweges der JENIKE-Scherzelle ist dieser Zustand nur nach einer dem Anscheren vorangestellten Vorverfestigung der Probe möglich. Dabei wird anstelle des Scherdeckels ein glatter Verfestigungsdeckel verwendet. Der Verfestigungsdeckel wird mit einer Normallast beaufschlagt und in Drehschwingungen versetzt („Twisten“). Die Bedingungen beim Vorverfestigen (Nor-



mallast und Anzahl der Drehschwingungen) werden solange variiert, bis beim anschließenden Anscheren eine „kritische Verfestigung“, **Abb. 6.2**, beobachtet wird (siehe ausführlich [185]).

**Tab. 6.1:** Technische Daten der verwendeten Translations-Scherapparatur

Scherzelle	Innen Durchmesser	95 mm
	Höhe Scherring	16 mm
	Höhe Scherboden (innen)	14 mm
	Material der Scherzelle	Aluminium
	Scherweg gesamt:	8 mm
Scherantrieb	Vorschubgeschwindigkeit schnell:	40 mm/min
	Meßvorschub:	1...10 mm/min
Hubzylinder:	Hubkraft	500 N
	Hubgeschwindigkeit	0...10 mm/s
Nutzbarer Spannungsbereich	Normalspannung	0,5...70 kPa
	Scherspannung	max. 70 kPa



**Abb. 6.2:** Mögliche Scherkraftverläufe beim Anscheren

Aus der aufgebrachten Normallast und der gemessenen Scherkraft beim Anscheren erhält man den ersten Punkt im Fließortdiagramm, siehe **Abb. 6.1**. Dieser Anscherpunkt mit dem dazugehörigen MOHR-Kreis repräsentiert die Beanspruchungsvorgeschichte, das stationäre Fließen.

Nach dem Anscheren wird der Schervorgang unter verminderter Normalspannung fortgesetzt, mit  $0,25 \cdot \sigma_{\text{an}} \leq \sigma_{\text{ab}} \leq 0,8 \cdot \sigma_{\text{an}}$  [185]. Bei kohäsiven Schüttgütern wird dieser Bereich nach unten vom Tangentialpunkt des Fließortes mit dem MOHR-Kreis der einaxialen Druckfestigkeit  $\sigma_c$  limitiert, **Abb. 6.1**. Man erhält beim Abscheren typischerweise ein Scherkraftmaximum wie in **Abb. 6.1**. Bei

leichtfließenden Schüttgütern kann die Probe auch ohne ausgeprägtes Maximum wieder in stationäres Fließen auf niedrigerem Niveau übergehen. Aus Scherspannung und Normalspannung beim Abscheren resultiert jeweils direkt ein Punkt des Fließortes unter der Annahme, daß die konstruktiv vorgegebene Scherebene mit der statischen Gleitebene zusammenfällt<sup>12</sup>. Mehrere Abscher-Punkte ergeben die Fließortlinie, die sich im meßbaren Bereich zwischen  $0,8 \cdot \sigma_{an}$  und dem genannten Tangentialpunkt meist durch eine Gerade approximieren läßt.

Durch Variation der Normalspannung beim Anscheren  $\sigma_{an}$  erhält man eine Schar von Fließorten. Als Schar-Parameter dient die Schüttgutdichte  $\rho_b$  bzw. Porosität  $\varepsilon$  (vgl. **Abb. 3.6**). Da die Schüttgutdichte in der linsenförmigen Scherzone unbekannter Größe nicht zugänglich ist, wird gemeinhin die mittlere Schüttgutdichte in der Scherzelle nach dem Vorverfestigen  $\rho_{b,v}$  verwendet. Diese mittlere Probedichte nach dem Vorverfestigen stimmt gut mit der Schüttgutdichte in der Scherzone überein, wie durch schichtweises Abtragen der Probe nach dem Vorverfestigen, SCHWEDES [138], sowie nach dem Anscheren, HÖHNE [56], gezeigt wurde.

Für die Reproduzierbarkeit des JENIKE-Versuchs werden i.allg.  $\pm 5\%$  angegeben, [56,163, 185]. Sie kann allerdings auch darüber liegen ( $\pm 10\%$ , [7]), insbesondere bei schwer handhabbaren Schüttgütern.

### Wandfließverhalten

Das Wandfließverhalten kann nach JENIKE [60] für jeweils eine Kombination Schüttgut / Wandmaterial durch einen einzigen Fließort beschrieben werden. D.h. die Wandschubspannung ist nur von der wirkenden Normalspannung abhängig, aber nicht von der vorausgegangen Verfestigung und damit unabhängig von  $\rho_b$ .

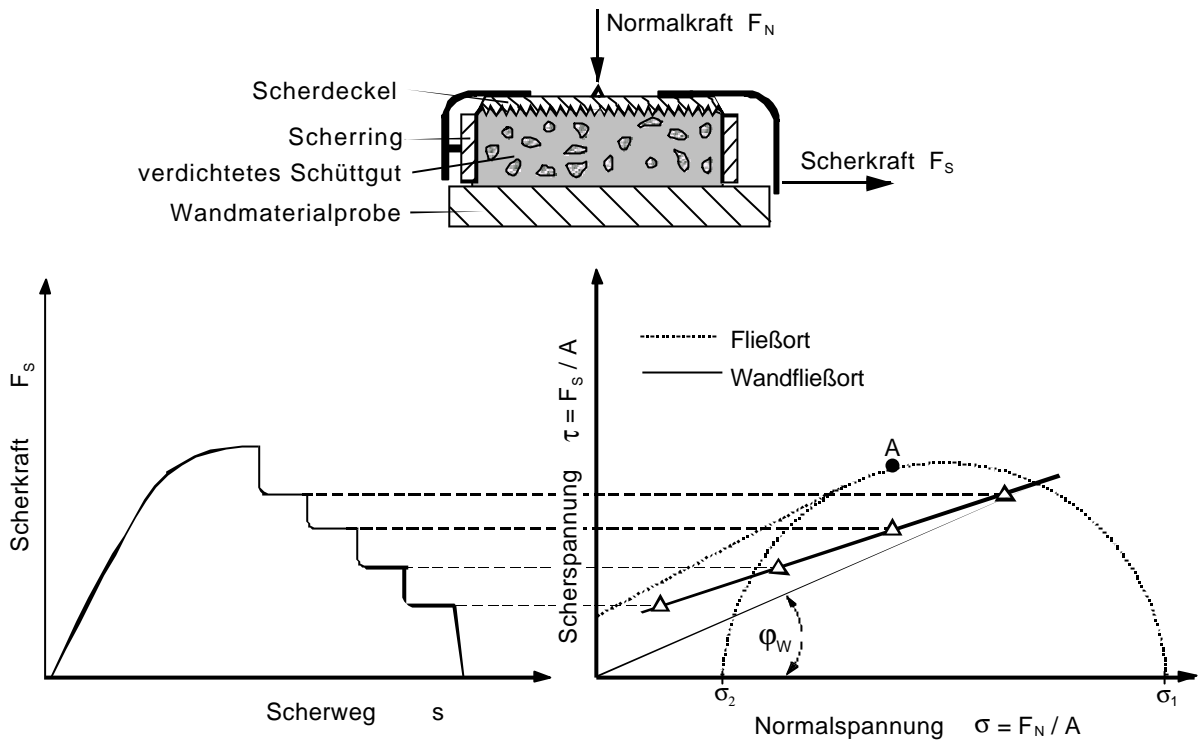
Zur Ermittlung des Wandfließortes wird der Scherboden gegen eine Probe des zu untersuchenden Wandmaterials ersetzt, **Abb. 6.3**. Die Schüttgutprobe wird mit einer gewählten Normallast vorverdichtet und angeschert. Anschließend wird die Normallast während des Schervorgangs stufenweise verringert, sobald sich ein stationärer Scherkraftverlauf eingestellt hat. So erhält man mehrere Wertepaare von aufgebrachtener Normalspannung und resultierender Scherspannung, mit der sich der Wandfließort in der  $\sigma$ - $\tau$ -Ebene konstruieren läßt, **Abb. 6.3**.

### Auswertung der Scherversuche

Für die Ermittlung der Fließkennwerte aus den gewonnenen Meßdaten wurde ein internes Rechnerprogramm verwendet (gemäß Abschn. 3 und 4). Die für die nachfolgenden Darstellungen genutzten Merkmale dieses Programms sind in Kurzform in Anlage II beschrieben (siehe auch [164] und Abschn. 4).

---

<sup>12</sup> Aufgrund der relativ unebenen Bruchzone (siehe auch **Abb. 8.2**) ist diese Annahme nicht ganz zutreffend. SCHWEDES [138] machte einen Korrekturvorschlag, der z.B. in [57], S. 34 diskutiert wird. Für praktische Anwendungen ist dieser geringfügige Unterschied jedoch vernachlässigbar [140], S. 16.



**Abb. 6.3:** Ermittlung des Wandfließortes und des Wandreibungswinkels

## 6.3 Vibrations-Scherapparatur

### 6.3.1 Versuchsaufbau

Die in Abschn. 6.2 beschriebene Translations-Scherapparatur wurde so erweitert, so daß während des Schervorgangs horizontale Schwingungen ins Schüttgut eingeleitet werden können. Für die Einleitung der Schwingungen ist ein elektrodynamischer Schwingerreger vorgesehen. Die maximal erreichbare Erregerkraft beträgt bei harmonischer Erregung 200 N. Über einen Synthesizer-Funktionsgenerator wird die Frequenz  $f$  sowie die Erregerkraft  $F_e$  vorgegeben. Für die Erfassung der Schwingungssignale können je nach Meßanordnung und Meßbereich verschiedene piezoelektrische Sensoren verwendet werden, vgl. **Tab. 6.2**. Die Schwingungssignale gelangen über ein analoges Bandpaßfilter (Hoch- und Tiefpaßfilter Typ: BUTTERWORTH 4. Ordnung, -3 dB - Eckfrequenzen: 10 / 600 Hz) auf eine A/D-Wandlertkarte (16 Bit, maximale Summenabtastrate: 20 kHz, maximale Abtastrate je Kanal: 4 kHz). Die so aufbereiteten Meßsignale wurden auf dem PC mittels handelsüblicher Software ausgewertet. **Abb. 6.4** zeigt das Blockschaltbild des nachfolgend als Vibrations-Scherapparatur bezeichneten Versuchsaufbaus einschließlich Meßtechnik. Die verwendeten Sensoren sind in **Tab. 6.2** spezifiziert.

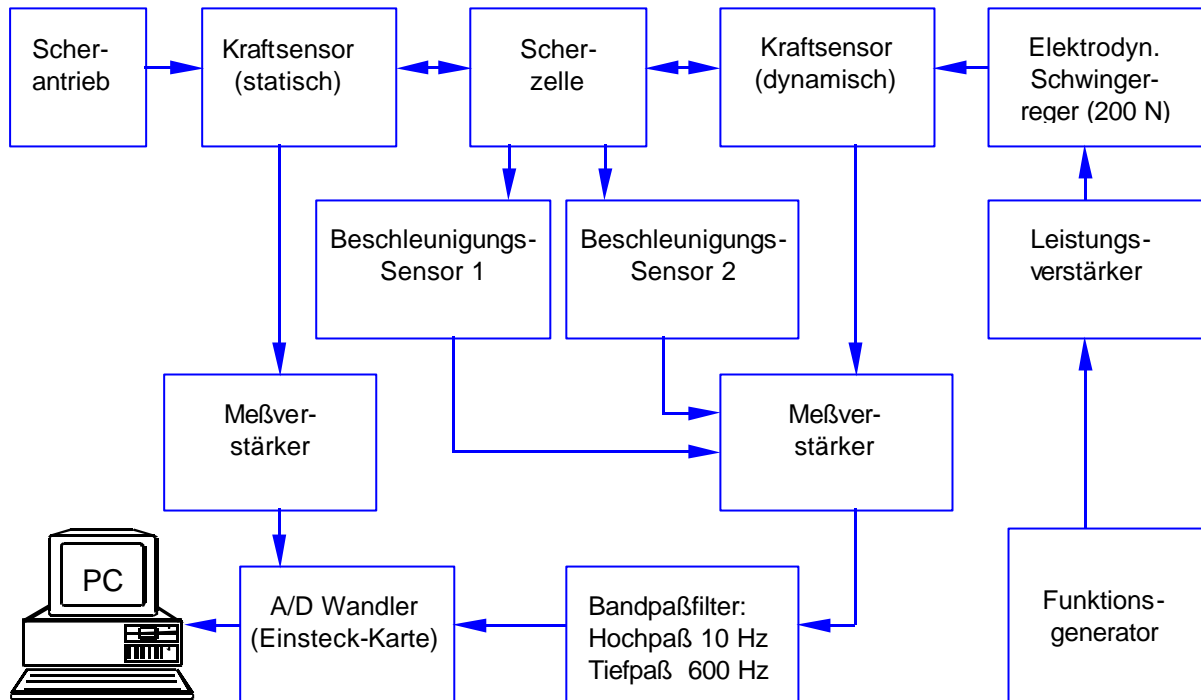


Abb. 6.4: Blockschaltbild der Vibrations-Scherapparatur

Tab. 6.2: Verwendete Sensoren

Meßgröße	Sensor-Bauart	Empfindlichkeit	Meßbereich	Abtastfrequenz	Bemerkungen
Scherkraft	DMS <sup>1</sup> -Brücke	50 mV / N	0...200 N	10 Hz	- Standardausstattung
		20 mV / N	0...500 N	10 Hz	- altern. für hohe Normallasten
Erregerkraft	Isotron <sup>®2</sup>	23 mV / N	± 220 N	2 / 4 kHz	
Beschleunigung	Isotron <sup>®</sup>	$100 \frac{\text{mV}}{1 \cdot \text{g}}$	± 50-g	2 / 4 kHz	1 Stk. gemäß <b>Abb. 6.5</b> und 2 Stk. gemäß <b>Abb. 6.6</b>
Beschleunigung	Isotron <sup>®</sup>	$500 \frac{\text{mV}}{1 \cdot \text{g}}$	± 10-g	4 kHz	optional, zur Überwachung von Vertikal- und Querbeschleunig.

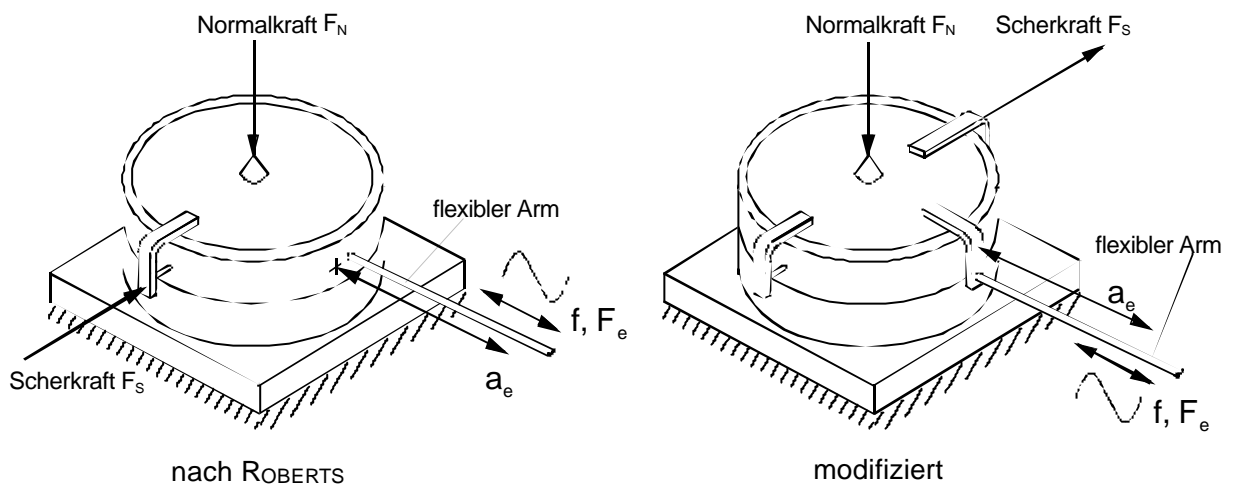
<sup>1</sup> Dehnungsmeßstreifen    <sup>2</sup> piezoelektrisch mit integriertem Ladungsverstärker

Für die Durchführung von Scherversuchen bei gleichzeitiger Schwingungseinwirkung (nachfolgend: Schwingungs-Scherversuche) schlug ROBERTS [115] zwei prinzipielle Versuchsanordnungen vor, die hier z.T. modifiziert wurden:

- I Schwingungseinleitung in den Scherring oder Scherdeckel („Scheroberteil schwingt“)
- II Schwingungseinleitung über den Scherboden („Gesamte Scherzelle schwingt“)

Im ersten Fall ist der Scherboden starr mit der Unterkonstruktion verbunden. Die Schwingungen werden über einen Erregerstab eingeleitet, der mit dem Scherring verschraubt ist, **Abb. 6.5, links**. Die Schwingungen werden über den Erregerstab auf den Scherring und von diesem auf die Schütt-

gut-Probe übertragen. Bei dieser Anordnung treten konstruktionsbedingt zwei Schwierigkeiten auf: Bei höheren Frequenzen (ab etwa 200 Hz) verschlechtert sich der Kontakt zwischen Scherring und Schüttgut. Im Extremfall vibriert der Scherring, ohne die Schwingungen auf das Schüttgut übertragen zu können, das diesen hochfrequenten Bewegungen des Ringes nicht folgen kann. Des weiteren stimmt die konstruktiv vorgegebene Schwingungsebene nicht mit der konstruktiven Scherebene überein. Um daraus eventuell resultierende Einflüsse zu unterdrücken, wurde alternativ eine modifizierte Anordnung erprobt, **Abb. 6.5, rechts**. Dabei werden die Schwingungen über einen Bügel in den Scherdeckel und von dort in die Schüttgutprobe eingeleitet, ähnlich wie die Scherkraft. Der Erregerstab wird nun mit dem Bügel verschraubt und zwar in Höhe der konstruktiven Scherebene. Wie bereits in Abschn. 6.2 beschrieben, wurde die Scherkraft über ein Zugseil aufgebracht.

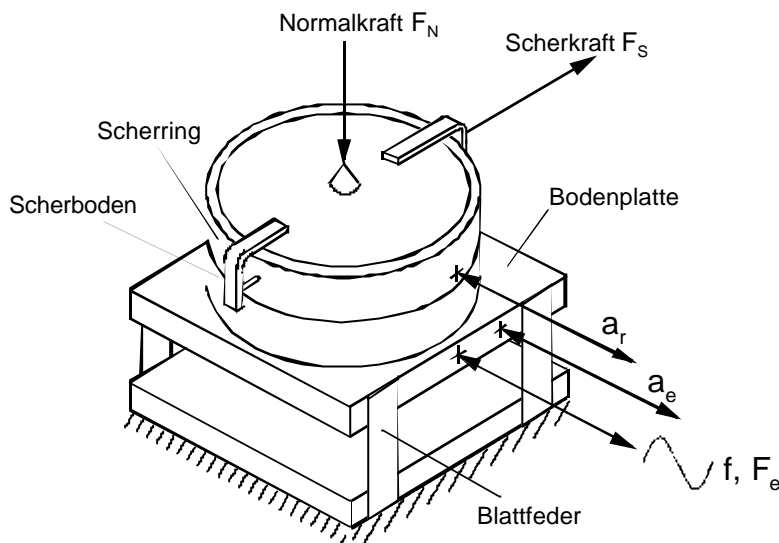


**Abb. 6.5:** Schwingungseinleitung über den Scherring (links) oder Scherdeckel (rechts)

Die Versuchsanordnung I, Schwingungseinleitung über den Scherring oder Scherdeckel, liefert die Fließkennwerte der zu untersuchenden Pulver bei zusätzlicher Variation der Schwingungsparameter, und zwar der Schwingungsparameter, die in der Scherzone wirken. Dabei bleibt unberücksichtigt, wie die Schwingungen dorthin gelangen. Das Übertragungsverhalten des Schüttgutes, also Dämpfung und Resonanz, werden hier nicht berücksichtigt<sup>13</sup>. Durch Austausch des Scherbodens gegen eine Wandmaterialprobe gemäß **Abb. 6.3** kann das Wandfließverhalten bei Schwingungseinwirkung untersucht werden.

Bei der Versuchsanordnung II, Schwingungseinleitung über den Scherboden, **Abb. 6.6**, befindet sich die gesamte Scherzelle auf einer Grundplatte, die über Blattfedern schwingfähig gelagert ist. Die Schwingungen werden an der Grundplatte und damit am Scherboden eingeleitet und über das Schüttgut auf den Ring übertragen (Scherboden und Scherring stehen nicht in direktem Kontakt!).

<sup>13</sup> Das Übertragungsverhalten ließe sich zusätzlich beobachten (Modell der Störkrafteerregung, Abschn. 5.1.3). Aufgrund der geringen Reproduzierbarkeit dieser Messungen ist dafür aber die Anordnung II, „Gesamte Scherzelle schwingt“ deutlich besser geeignet, siehe Abschn. 9.4.



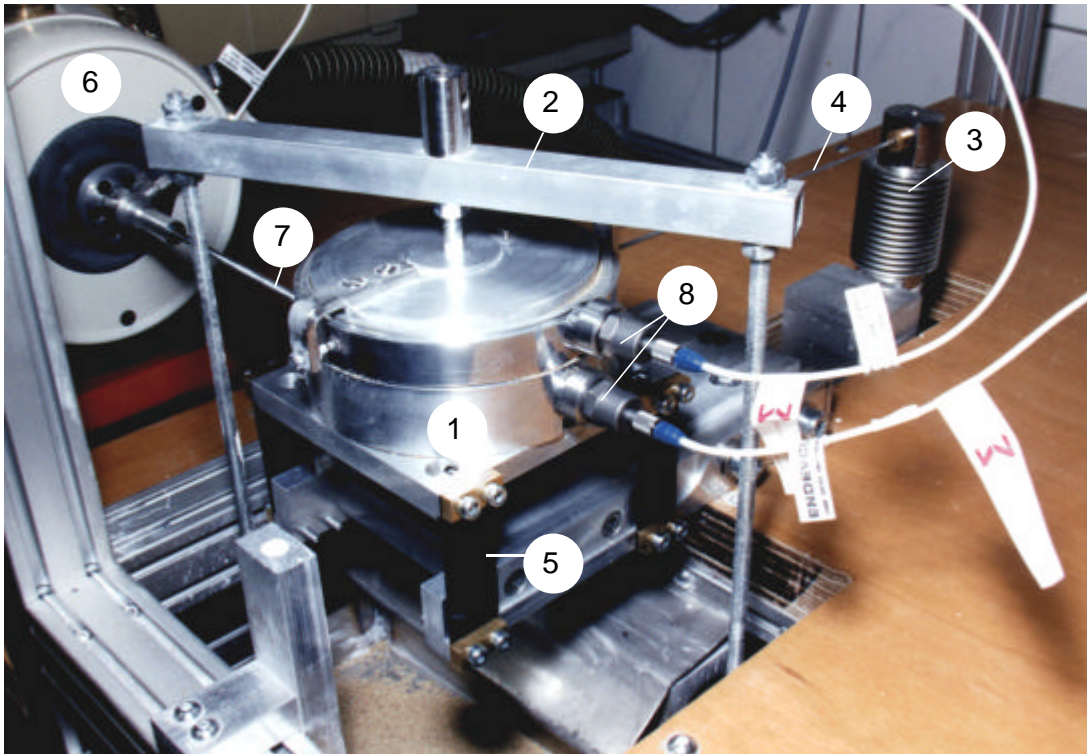
**Abb. 6.6:** Schwingungseinleitung über den Scherboden („Gesamte Scherzelle schwingt“)

Diese Anordnung gestattet Untersuchungen zum Übertragungsverhalten, also der Schwingungsdämpfung im Schüttgut und das Auftreten von Resonanzeffekten. Am Scherring und Scherboden befinden sich jeweils ein Beschleunigungssensor, **Abb. 6.7**. Die hier dargestellte Magnethalterung ist bis zu Frequenzen von ca. 1 kHz anwendbar [32,74,190]. Aus der Abschwächung oder Verstärkung und Phasenlage zwischen den Erreger- und den resultierenden Signalen  $a_e$  und  $a_r$  können die Parameter der in Abschn. 5 beschriebenen Schüttgut-Modelle gewonnen werden (Modell des fußpunkterregten Schwingers). Darüber hinaus steht der Einfluß von Schwingungsdämpfung und Resonanz auf das Fließverhalten im Vordergrund (siehe Abschn. 9.4).

Bei beiden Versuchsanordnungen greift die Erregerkraft orthogonal sowohl zur Scher- als auch zur Normalkraft an, um eine Beeinflussung der Scherkraftmessung durch die Schwingungen möglichst gering zu halten. Dies entspricht etwa den Verhältnissen in der Praxis. Für die Siloentleerung wirkt die Erregerkraft i.d.R. ebenfalls näherungsweise orthogonal zur Fließrichtung. Auch dort wird eine horizontale Schwingungseinleitung angestrebt, da vertikale Schwingungen zur Verdichtung des Schüttgutes führen können.

Die praktische Umsetzung des Konzeptes „Schwingende Scherzelle“ sowie die Anbindung von Schwingungserregung und Meßtechnik sind am Beispiel der Versuchsanordnung II in **Abb. 6.7** gezeigt. Dabei sind im einzelnen:

- |   |                                    |   |                         |
|---|------------------------------------|---|-------------------------|
| 1 | Scherzelle                         | 5 | Blattfeder              |
| 2 | Joch zum Aufbringen der Normallast | 6 | Schwingererger          |
| 3 | Kraftsensor (Scherkraft)           | 7 | Erregerstab             |
| 4 | Zugseil                            | 8 | Beschleunigungssensoren |



**Abb. 6.7:** Versuchsanordnung II, Schwingungseinleitung über den Scherboden, mit Schwingungserregung und Meßtechnik

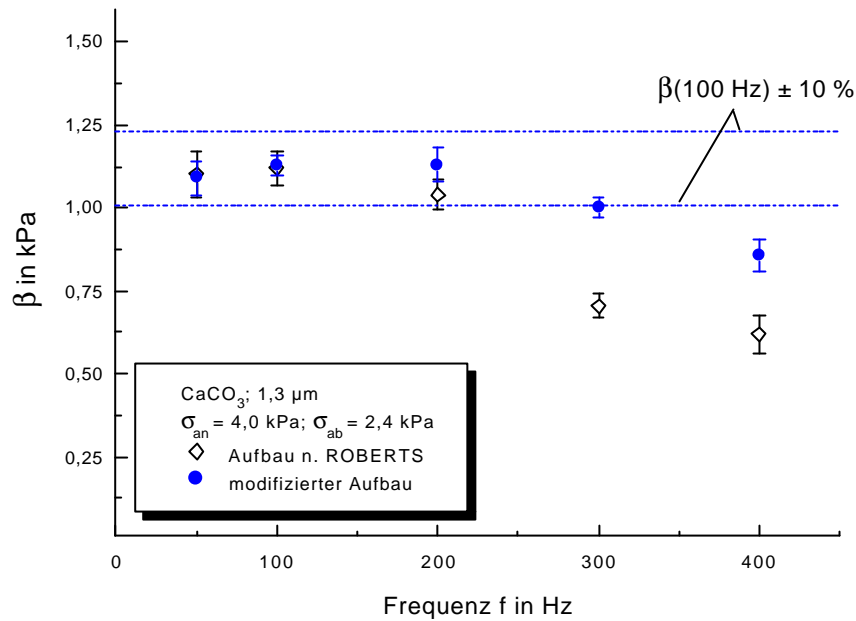
Die konstruktiven Besonderheiten der Vibrations-Scherapparatur bedingen einige systematische Einflüsse, die sich auf das Meßergebnis auswirken können. Diese zusätzlich zum herkömmlichen JENIKE-Versuch auftretenden Fehlermöglichkeiten werden nachfolgend diskutiert.

### 6.3.2 Konstruktive Einflüsse auf das Meßergebnis

#### „Scheroberteil schwingt“

Anhand von **Abb. 6.5** wurde bereits die Verwendung einer gegenüber des Aufbaus von ROBERTS modifizierten Schwingungseinleitung diskutiert. Die Schwingungen werden dabei ähnlich wie die Scherkraft über den Scherdeckel eingeleitet. **Abb. 6.8** vergleicht mit beiden Varianten gewonnene Meßergebnisse. Experimentell ermittelte Werte für den Modell-Parameter  $\beta$  (vgl. Abschn. 3.6.2 und Abschn. 8.2.3) sind über der Frequenz  $f$  aufgetragen. Erwartet würde ein von der Frequenz unabhängiger  $\beta$ -Wert. (Dies sei hier als gegeben betrachtet. Dieser Sachverhalt sowie Bedeutung, Bestimmung des Parameters  $\beta$  werden anhand von Abschn. 8 deutlich.). Dies trifft im Bereich  $f \leq 200$  Hz zu. Beide konstruktive Lösungen liefern das gleiche Ergebnis. Abweichungen treten erst oberhalb von 200 Hz auf. Dort liefert der modifizierte Aufbau deutlich höhere Werte, da sich der Kontakt zwischen Scherring und Pulver beim Aufbau nach ROBERTS verschlechtert. Mit der modifizierten Anordnung sind noch Messungen bis etwa 300 Hz möglich. Erst dann treten auch hier Abweichungen auf. Beide Anordnungen wirken bei hohen Frequenzen als mechanisches Tiefpaßfilter.

Die Schwingungen gelangen nicht mehr bis in die Scherzone. Die Modifikation des Schwingungseinleitung erweitert den Meßbereich um etwa 50 %.



**Abb. 6.8:** Einfluß der Schwingungseinleitung auf das Meßergebnis

Da sich Scherdeckel und Ring während des Versuchs in Scherrichtung bewegen, wird der Erregerstab bei der Versuchsanordnung I quer zur Schwingungsrichtung ausgelenkt. Der Erregerstab sollte daher in Scherrichtung möglichst flexibel sein, um die Scherkraftmessung nicht zu beeinflussen. Demgegenüber muß er in Schwingungsrichtung genügend Stabilität gegen Knickung besitzen.

Werden die Schwingungen beim Abscheren eingeleitet, siehe Abschn. 6.4, ist dies leicht zu realisieren, da für den Abschervorgang i.d.R. ein Scherweg von 1 mm ausreicht. In **Tab. 6.3** ist am Beispiel von Kalkstein-Pulver (siehe Abschn. 7) den jeweils ohne Schwingungen gemessenen Scherkräften beim Anscheren  $F_{an}$  sowie beim Abscheren mit der geringsten Abscher-Normalspannung  $F_{ab,min}$  die berechnete Biegekraft des Erregerstabes  $F_{Biege}$  gegenübergestellt. Dafür wurde die aus der Auslenkung des Erregerstabes resultierende Kraft  $F_{Biege}$  auf den Scherweg  $s$  bezogen. Im ungünstigsten Fall des niedrigsten Verfestigungsniveaus (Fließort 1), beträgt sie maximal 3,5 % der gemessenen Scherkraft, **Tab. 6.3**.

Beim Anscheren unter Schwingungseinwirkung, siehe Abschn. 6.4, ist eine stärkere Auslenkung des Erregerstabes erforderlich. Für einen Anscherweg von 4 mm wurde die Scherzelle so ausgerichtet, daß der Anschervorgang mit einer Negativauslenkung des Erregerstabes von 2 mm begann und mit einer Auslenkung von 2 mm in Scherrichtung endete. Dadurch blieb auch hier die mögliche Beeinflussung mit maximal 4,7 % bei Fließort 1 (geringstes Verfestigungsniveau) relativ gering.



**Tab. 6.3:** Kräfte am Erregerstab ( Stablänge 160 mm,  $\varnothing$  2,53 mm und 3,0 mm),  
verglichen mit gemessenen Scherkräften für  $\text{CaCO}_3$

Fließort Nr.	$s_{an}$ in kPa	$F_{an}$ in N	$F_{ab, min}$ in N	$F_{Biege} / s$ in N/mm	$F_{e,max}$ in N
1	1,94	$13,3 \pm 0,3$	$9,0 \pm 0,45$	0,31	$\leq 3$
2	4,0	$26,7 \pm 0,5$	$17,3 \pm 0,55$	0,31	$\leq 9$
3	8,0	$52,7 \pm 0,5$	$32,0 \pm 2,0$	0,31 / 0,61	$\leq 16$
4	16,3	$101 \pm 1,1$	$59,5 \pm 2,1$	0,61	$\leq 23$

Eventuelle Pendelschwingungen des Jochs sind unproblematisch, da bei praktischen Jochlängen dessen Eigenfrequenz bei etwa 1 Hz liegt. Deformationen des Scherrings bei der Versuchsanordnung I können ebenfalls unberücksichtigt bleiben, da bei den geringen Erregerkräften von  $F_e \leq 23 \text{ N}$  der Scherring im Vergleich zum Pulver als nicht deformierbar betrachtet werden kann.

#### „Scherzelle schwingt“

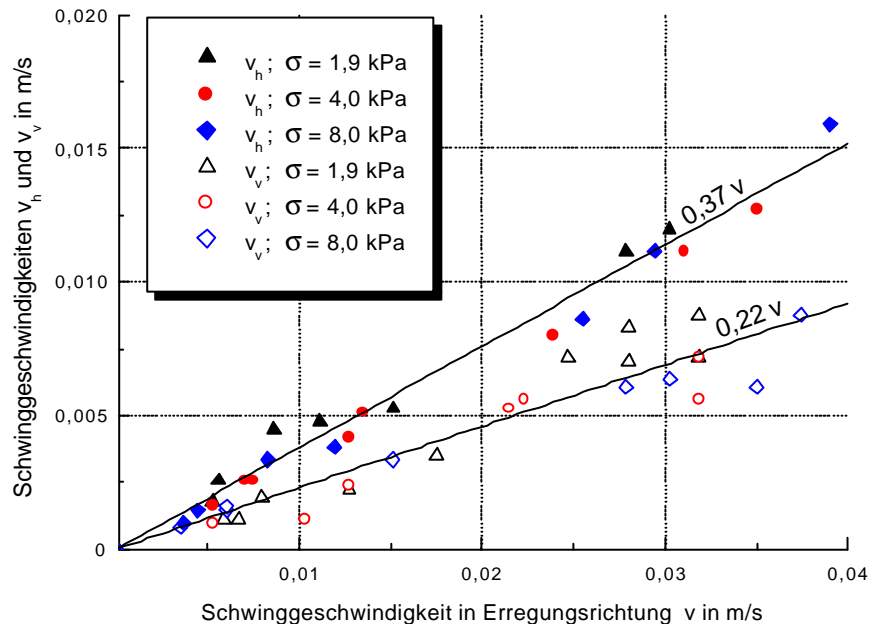
Bei der Versuchsanordnung II ist der Erregerstab mit dem Scherboden verschraubt, der während des Scherversuchs seine Position nicht ändert. Hier gilt den Blattfedern besonderes Augenmerk. Sie dürfen einerseits beim Vorverfestigen mit der z.T. recht hohen Verfestigungslast ( $\sigma_v / \sigma_{an} \leq 2,5$ ) nicht ausknicken. Andererseits müssen sie „weich“ genug sein, um die Eigenfrequenz der Scherzelle mit aufgelegter Abscherlast ( $\sigma_{ab} \geq 0,25 \cdot \sigma_{an}$ ) außerhalb des interessierenden Bereiches, d.h. mindestens unter 10 Hz zu halten. Im Extremfall kann die aufgelegte Normallast also allein für einen Fließort um den Faktor 10 variieren (hier max. um den Faktor 6 für  $\text{CaCO}_3$ ). Daher sind für jeden einzelnen Fließort Blattfedern individueller Stärke notwendig. Die verwendeten Blattfedern sind 20 mm breit, 50 mm lang und je nach Verfestigungsniveau 0,3 bis 0,6 mm stark.

Die auf dem Joch aufliegenden Normallasten werden aufgrund ihrer Trägheit ( $f_{0, \text{Joch}} \ll f$ ) nicht mitbeschleunigt. Mit steigender Auflast auf dem Joch steigt die wirkende Normalspannung, wohingegen sich die schwingende Masse nicht adäquat ändert. In die schwingende Masse gehen ein: die Masse des Schüttgutes im Scherring (näherungsweise), Scherring und Scherdeckel und zu einem Anteil die Eigenmasse des Jochs. D.h. die Masse von Scherring und Scherdeckel können die Lage der Resonanz und deren Ausprägung beeinflussen. Durch die Verwendung möglichst leichter Bauteile wurde versucht, die Auswirkungen gering zu halten. Bedingt durch den prinzipiellen Aufbau der JENIKE Apparatur ist dieser Effekt wahrscheinlich nicht völlig zu eliminieren. Zudem kann er nur sehr schwer quantifiziert werden, da auch Schüttguteigenschaften, Verfestigungs- und Abscher-Normalspannung eine Rolle spielen. MOLERUS formulierte: „Es ist...fraglich ob es überhaupt gelingt, ein Meßsystem zu realisieren, das wirklich nur Materialeigenschaften mißt. Es muß ge-

nerell damit gerechnet werden, daß jedes bisher benutzte Meßgerät in irgendeiner Form Materialeigenschaften plus Geräteeigenschaften mißt.“<sup>d</sup> Die in Abschn. 9 getroffenen prinzipiellen Aussagen sowie die daraus abgeleiteten Konsequenzen für die Apparateauslegung werden hierdurch jedoch nicht berührt.

### Schwingungskomponenten quer zur Erregungsrichtung

Schwingungen breiten sich nicht ebenförmig in nur einer Richtung aus, sondern es treten auch quer zur Schwingungseinleitung Schwingungskomponenten auf, also sowohl vertikal als auch in der horizontalen Ebene quer zur Erregungsrichtung. Diese Anteile konnten separat gemessen werden, da die Querempfindlichkeit der verwendeten Beschleunigungssensoren, vgl. **Tab. 6.2**, 2,0 % der Empfindlichkeit in Meßachse nicht übersteigt (Kalibrierdaten des Herstellers).



**Abb. 6.9:** Gemessene Schwingungskomponenten quer zur Erregungsrichtung (TiO<sub>2</sub>)

Die Größe der gemessenen Queranteile stieg im untersuchten Bereich mit wachsender Erregungsschwinggeschwindigkeit und war unabhängig von der aufgelegten Normalspannung, **Abb. 6.9**. Die Schwinggeschwindigkeit in horizontaler Querrichtung  $v_h$  betrug relativ zur Schwinggeschwindigkeit in Erregungsrichtung  $v$  etwa  $v_h / v = 0,35 \dots 0,4$ . Die vertikale Komponente war mit  $v_v / v = 0,2 \dots 0,25$  etwas geringer. Eine Auswirkung auf die Meßergebnisse konnte nicht festgestellt werden. Schließlich breiten sich Schwingungen auch bei technischen Anwendungen wellenförmig aus, so daß es sich hier nicht um eine spezielle Eigenschaft der verwendeten Apparatur handelt.

## 6.4 Durchführung der Schwingungs-Scherversuche

### 6.4.1 Mögliche Versuchsmethoden

Für die Durchführung von Schwingungs-Scherversuchen sind unterschiedliche Versuchsprozeduren möglich, je nachdem während welcher Teilschritte die Schwingungen eingetragen werden. Die daraus resultierenden Versuchsmethoden werden im einzelnen vorgestellt, **Tab. 6.4**. Im Rahmen dieser Arbeit stehen die Methoden A und B im Vordergrund.

**Tab. 6.4:** Versuchsmethoden und mögliche Anwendungen

Methode	Schwingungen	Anwendung, Beispiele
A <sup>1</sup>	nur beim Abscheren	Intervallbetrieb von Austraghilfen ("gepulste Vibration") z.B. zur Zerstörung von Schüttgutbrücken, vgl. Abschn. 2.4
B	beim An- und Abscheren	kontinuierlicher Betrieb von z.B. Schwingtrichtern, vgl. Abschn. 2.4
C <sup>1</sup>	beim Vorverfestigen	unerwünschte Schwingungen während des Befüllens bei geschlossenem Auslauf
D	zwischen An- und Abscheren	unerwünschte Schwingungen während Lagerung & Transport, z.B. Verfestigung beim Bahntransport

<sup>1</sup> ROBERTS et al. 1977...1986

Im ersten Fall, **Methode A**, wird ohne Schwingungen angeschert (vgl. Abschn. 6.2). Die Schwingungen werden nur während des Abscherens eingetragen. Mit dieser Methode kann der Intervallbetrieb schwingender Austraghilfen simuliert werden. Bei diesem häufigen Anwendungsfall wird das Silo ohne Schwingungen befüllt und während des Entleerens werden die Außen-Vibratoren, Schwingtrichter etc. jeweils kurzzeitig mit zwischengeschalteten Pausen betrieben (vgl. Abschn. 2.4).

**Methode B** beinhaltet den Schwingungseintrag sowohl beim Anscheren als auch beim Abscheren unter jeweils gleichen Bedingungen. Diese Vorgehensweise entspricht den Verhältnissen z.B. in einem kontinuierlich betriebenen Schwingtrichter. Hier wird nicht nur das beginnende, sondern auch das stationäre Fließen durch die Schwingungen beeinflusst.

KAADEN, zitiert in [116], beaufschlagte die Probe zwischen Vorverfestigen und Anscheren mit horizontalen oder vertikalen Schwingungen, **Methode C**. Dieser Fall steht für das Befüllen bei geschlossenem Auslauf. Als Ergebnis erhielt er Fließorte, die erwartungsgemäß oberhalb des Fließortes ohne Schwingungseinwirkung lagen.

Des weiteren können unerwünschte Schwingungen während der Lagerung bzw. während des Transports z.B. per Bahn untersucht werden, **Methode D**. Analog zur Vorgehensweise bei der Quantifizierung von Zeitverfestigungen (siehe z.B. [62,122,134,158,163-164,166]) wird die Probe zwischen An- und Abscheren einer Schwingungseinwirkung ausgesetzt. Der Schwingungseintrag im Ruhezustand verursacht i.allg. eine Verdichtung und damit Fließverschlechterung. Typische Beanspruchungen, die z.B. beim Bahntransport auftreten (siehe [189]), können mit Hilfe spezieller Schwingungsmodi berücksichtigt werden.

Schließlich können weitere Anwendungsfälle durch Kombination der einzelnen Methoden abgedeckt werden, z.B. Vibrationsverdichtung beim Bahntransport und anschließendes Entleeren des Waggons mit Hilfe schwingender Austraghilfen durch Kombination von Methode D mit Methode A.

Alle Methoden sind für beide Versuchsanordnungen anwendbar. Die Beschreibung der Versuchsdurchführung in Abschn. 6.4.2 und 6.4.3 bezieht sich in erster Linie auf die Versuchsanordnung I, „Scheroberteil schwingt“. Der Unterschied zur Anordnung II, „Scherzelle schwingt“ besteht lediglich darin, daß anstelle der Erregerkraft  $\hat{F}_e$  und Beschleunigung  $\hat{a}$  zwei Beschleunigungen,  $\hat{a}_e$  und  $\hat{a}_r$ , gemessen werden.

#### 6.4.2 Methode A – Schwingungen beim Abscheren

Aufgrund der verwendeten Kraftsteuerung für die Schwingungserregung (vgl. Abschn. 6.3) ist die Regelung einer vorgewählten Schwingungsgröße, wie der Schwinggeschwindigkeit nicht möglich. Die Messung bei einer bestimmten Schwinggeschwindigkeit sowie Wiederholversuche mit jeweils der gleichen Schwinggeschwindigkeit sind somit sehr aufwendig. Für die experimentelle Ermittlung von Vibrations-Fließorten wurde daher folgende Vorgehensweise gewählt:

1. Zunächst wird für je ein gewähltes  $\sigma_{an}$  und  $\sigma_{ab}$  ein Scherversuch ohne Schwingungseinwirkung durchgeführt, der ein Scherkraft-Weg-Diagramm liefert (vgl. Abschn. 6.2).
2. Anschließend wird eine frische Schüttgutprobe unter identischen Bedingungen vorverfestigt und angeschert. Beim Abscheren der Probe wird bei fest eingestellter Frequenz  $f$  eine Erregerkraft  $\hat{F}_e$  und damit eine Beschleunigung  $\hat{a}$  vorgegeben (wodurch auch der Schwingweg  $\hat{x}$  und die Schwinggeschwindigkeit  $\hat{v}$  festliegen, vgl. **Tab. 3.3**). Als Ergebnis erhält man das Abscherkraft-Weg-Diagramm für die jeweils gemessene Schwinggeschwindigkeit  $\hat{v}$ , **Abb. 6.10 oben** (linkes Diagramm).
3. Die Variation der Erregerkraft (= mehrere Schwingungs-Scherversuche bei konstantem  $\sigma_{an}$  und  $\sigma_{ab}$ ) liefert weitere Scherkraft-Weg-Verläufe und mit der Scherfläche  $A$  die Abscherspannung bei der jeweiligen Schwinggeschwindigkeit  $\tau_v = \tau(\hat{v})$ . Die so gewonnenen Werte für  $\tau_v$  werden über den dazugehörigen Werten der Schwinggeschwindigkeit  $\hat{v}$  aufgetragen, wie durch die vol-

len Symbole in **Abb. 6.10 oben** (mittleres Diagramm) illustriert wird. Um die Scherfestigkeit bei einer bestimmten Schwinggeschwindigkeit (Werte zwischen den Meßpunkten) zugänglich zu machen sowie Aussagen zur Streuung der Messungen zu gewinnen, wird die Modellgleichung (3-32) bzw. (3-33) an diese Meßpunkte angepaßt. Die Anpassung wurde mittels nichtlinearer Regression durchgeführt (Software Microcal™ Origin® 6.0), wie in Anlage III beschrieben. Die Kurvenanpassung liefert die Parameter  $\beta$  und  $\gamma$ , deren individuelle Vertrauensintervalle  $VB(\beta)$  und  $VB(\gamma)$  sowie das Bestimmtheitsmaß  $B_{xy}$  (siehe Anlage III).

4. Dieses Vorgehen wiederholt man für jede Abscher-Normalspannung  $\sigma_{ab}$  eines Fließortes (also  $\sigma_{an} = \text{konst.}$ ). Auf diese Weise gewinnt man weitere Kurven  $\tau_v = f(\hat{v})$  mit der Abscher-Normalspannung  $\sigma_{ab}$  als Kurven-Parameter. Für jede dieser Kurven kann je ein Parameter  $\beta$  und  $\gamma$  bestimmt werden. In **Abb. 6.10 oben** (mittleres Diagramm) zeigen die offenen Symbole exemplarisch eine weitere  $\tau_v = f(\hat{v})$ -Kurve bei verminderter Abscher-Normalspannung.
5. Aus mehreren  $\tau_v = f(\hat{v})$ -Kurven kann der zu einer gewählten Schwinggeschwindigkeit  $\hat{v}$  gehörende Schwingungs-Fließort konstruiert werden, **Abb. 6.10 oben** (rechtes Diagramm). Der Schwingungs-Fließort ist durch die gestrichelten Linien und die offenen Dreiecke symbolisiert. Die vollen Dreiecke mit den durchgezogenen Linien zeigen vergleichend den Fließort ohne Schwingungseinwirkung. Die Punkte der Fließortgeraden (offene Dreiecke) werden ermittelt, indem man den Wert der Modellkurve für die gewählte Schwinggeschwindigkeit, z.B. für  $\hat{v} = 20 \text{ mm/s}$ , über der korrespondierenden Abscher-Normalspannung aufträgt.
6. Die Schritte 1. bis 5. beruhen auf konstanten Verfestigungsbedingungen ( $\sigma_{an} = \text{konst.}$ ). Das Ergebnis umfaßt also die zu einem Fließort gehörenden Schwingungs-Fließorte für gewählte Schwinggeschwindigkeiten. Durch Variation von  $\sigma_{an}$  erhält man weitere Fließorte (ohne Schwingungseinwirkung). Für jede Abscher-Normalspannung benötigt man wiederum  $\tau_v = f(\hat{v})$ -Kurven mit je einem Parameter  $\beta$  und  $\gamma$  woraus sich Schwingungs-Fließorte gewinnen lassen (Wiederholen der Schritte 1. bis 5.).

#### 6.4.3 Methode B – Schwingungen beim An- und Abscheren

Im Gegensatz zur Methode A werden die Schwingungen bereits während des Anschers eingeleitet. Nach Erreichen des stationären Fließens wird die Normallast verringert und unter identischer Schwingungseinwirkung abgescher. Somit liegen auch für das Anscheren bei Schwingungseinwirkung Scherkraft-Weg-Verläufe vor, **Abb. 6.10 unten** (linkes Diagramm). Die weitere Vorgehensweise ergibt sich in Analogie zu Methode A, Schritt 3. bis 6. Genau wie für die Scherspannung  $\tau_v$  ermittelt man eine zusätzliche Kurve für die Anscher-Scherspannung unter Schwingungseinwirkung  $\tau_{an,v}$ , **Abb. 6.10 unten** (mittleres Diagramm). Die Parameter  $\beta$  und  $\gamma$  erhält man wie in Schritt 3. von Abschn. 6.4.2 beschrieben, zuzüglich eines Parametersatzes  $\beta_{an}$  und  $\gamma_{an}$  für die Anscherschubspannung  $\tau_{an,v}$ . Aus dieser, durch die offenen Rhomben gekennzeichnete Kurve, gewinnt man den An-

schwerpunkt im  $\tau$ - $\sigma$ -Diagramm, womit nun komplette Schwingungs-Fließorte, einschließlich des jeweiligen Verfestigungs-MOHR-Kreises, konstruiert werden können, **Abb. 6.10 unten** (rechtes Diagramm).

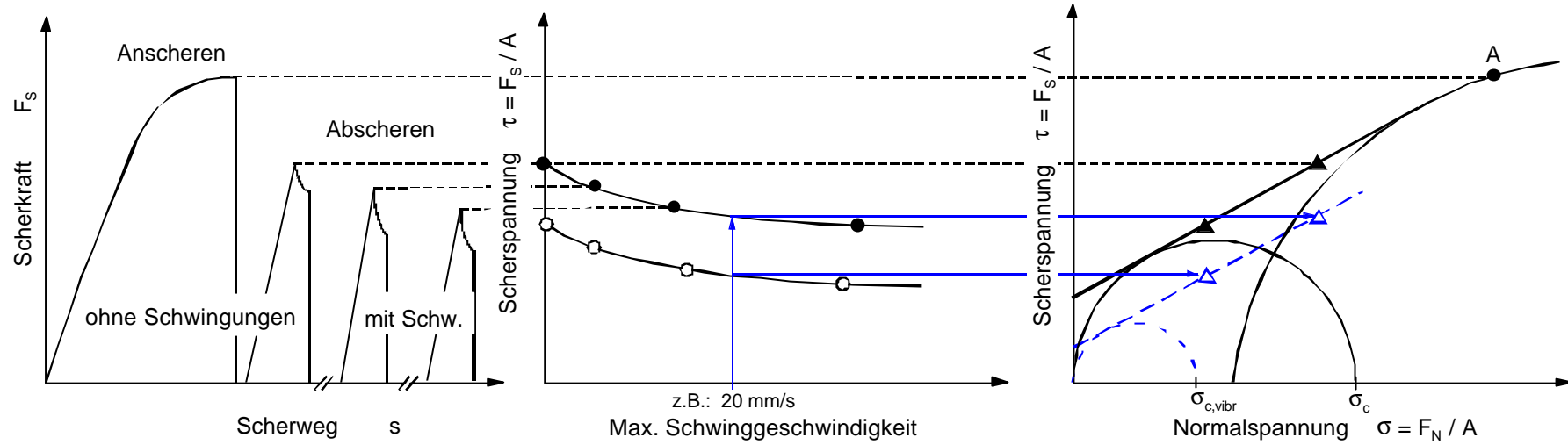
#### 6.4.4 Probenvorbereitung (Vorverfestigung)

Beim JENIKE-Scherversuch hängen die Versuchsergebnisse wesentlich von der Vorverfestigungsprozedur ab. In Anlehnung an *Standard shear testing technique* [185] wurde mit einem glatten Verfestigungsdeckel je 20 mal um  $90^\circ$  mit einer Frequenz von ca. 1-2 Hz „getwistet“ (siehe Abschn. 6.2). Zum Auffinden optimaler Verfestigungsbedingungen wurde die Normalspannung beim Vorverfestigen  $\sigma_{\text{vor}}$  variiert. Die Anzahl der Drehschwingungen  $N$  wurde konstant gehalten. Als Normalspannung beim Vorverfestigen  $\sigma_{\text{vor}}$  diente zunächst die Anscher-Normalspannung  $\sigma_{\text{an}}$ . Wurde damit keine kritische Verfestigung der Probe erreicht, wurde bei konstantem  $N$  die Normalspannung  $\sigma_{\text{vor}}$  vergrößert, und zwar im Bereich:

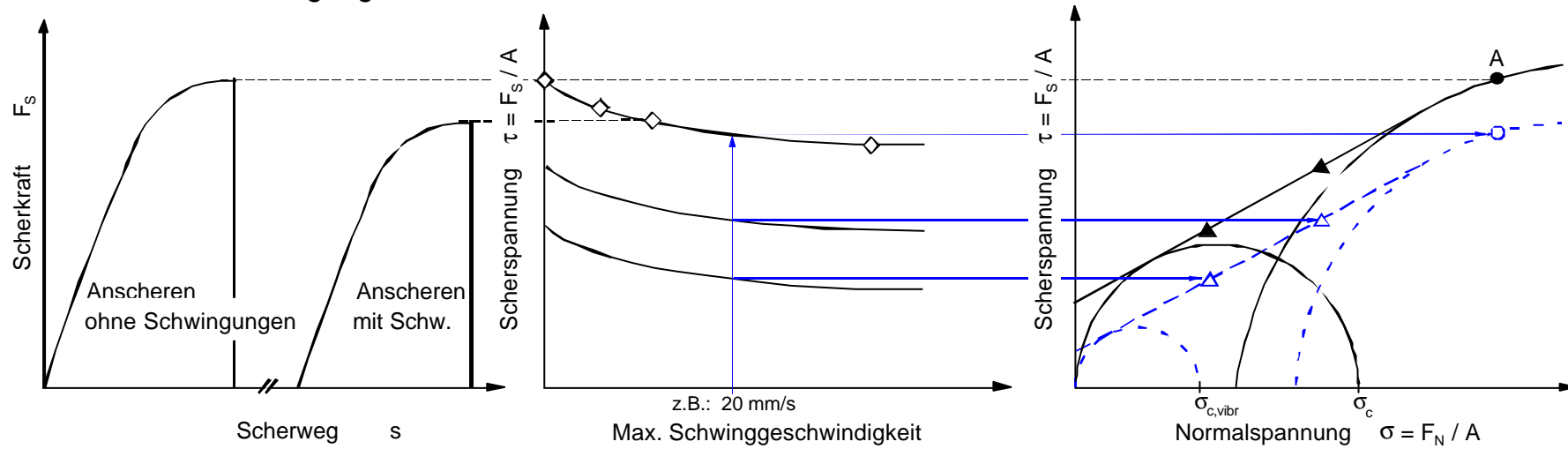
$$\frac{\sigma_{\text{vor}}}{\sigma_{\text{an}}} = 1 \dots 2 \text{ [185]} \dots 2,5 \text{ [57]}. \quad (6-1)$$

Besonders bei sehr feinkörnigen mineralischen Pulvern kann der Effekt auftreten, daß der für Überverfestigung typische Kurvenverlauf, **Abb. 6.2**, nicht nachweisbar ist bzw. daß sich in einem weiten Bereich von  $\sigma_{\text{vor}}/\sigma_{\text{an}}$  der prinzipielle Kurvenverlauf nicht ändert. D.h. von unterschiedlichen Experimentatoren werden unterschiedliche Verfestigungsbedingungen als kritisch angesehen (siehe HÖHNE et al. [57]). Dieses Phänomen trat auch bei dem hier verwendeten Kalkstein-Pulver auf. Daher wurde die mit den einmal als kritisch gefundenen Verfestigungsbedingungen korrespondierende Proben-dichte nach dem Vorverfestigen  $\rho_{\text{b,krit}}$  während der folgenden Versuchsreihen als zusätzliches Kriterium konstant gehalten und ggf. durch Erhöhung oder Verminderung von  $N$  ausgeglichen. Die schließlich verwendeten Vorverfestigungsbedingungen sind in Anlage IV aufgeführt.

### Methode A: Schwingungen beim Abscheren



### Methode B: Schwingungen beim An- und Abscheren



**Abb. 6.10:** Ermittlung von Schwingungs-Fließorten

## 6.5 Ermittlung der Übertragungsfunktion $H(f)$

In Abschnitt 5.2 wurden Frequenzgänge (Übertragungsfunktionen) für ausgewählte Schüttgutmodelle beschrieben. Für die Überprüfung und Bewertung der Modelle müssen die Gleichungen für den Betrag des Frequenzganges  $|H(f)|$  und / oder für das Argument des Frequenzganges  $\tan\psi$  an die Meßwerte angepaßt werden. Im Rahmen dieser Arbeit wurde der Betrag des Frequenzganges  $|H(f)|$  bevorzugt, da die Ermittlung der Phasenlage weniger gut reproduzierbar war, siehe Abschn. 9.1.4 .

$|H(f)|$  kann prinzipiell sowohl mit der Versuchsanordnung „Scheroberteil schwingt“ (störkrafterregter Schwinger) als auch mit der Anordnung „Scherzelle schwingt“ (fußpunkterregter Schwinger) ermittelt werden. Die Anordnung „Scherzelle schwingt“ eignet sich hierfür jedoch besser. Die Ursache liegt ebenfalls in der höheren Reproduzierbarkeit der Meßwerte (vgl. Abschn. 6.3 und 9.4). Die Messungen zu  $|H(f)|$  konzentrierten sich daher auf diese Anordnung, also das Modell des fußpunkterregten Schwingers. Als Ergebnis erhält man folglich Wertepaare  $|H(f)| = \hat{x}_r / \hat{x}_e = f(f)$  .

Als Versuchsprozedur wurde vorwiegend Methode A verwendet. Orientierende Untersuchungen mit Methode B zeigten nichts prinzipiell neues.

### Versuchsdurchführung

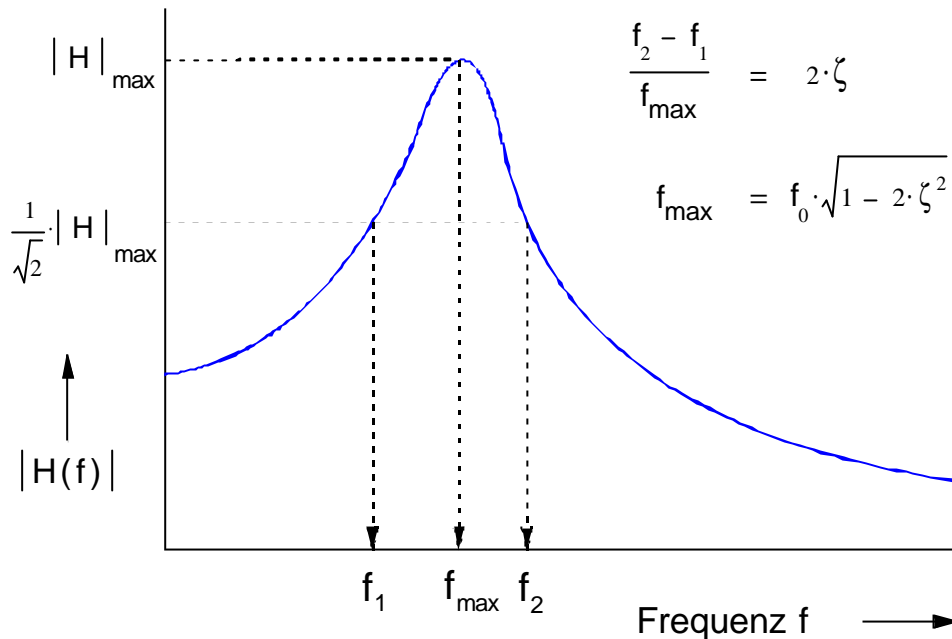
Aus den Schwingungs-Scherversuchen nach Abschn. 6.4.2 erhält man bei Verwendung der Versuchsanordnung „Scherzelle schwingt“ neben der Scherfestigkeit  $\tau_v$  auch die Wertepaare  $\hat{x}_r / \hat{x}_e = f(f)$  . Da diese Versuche sehr aufwendig sind, wurden zusätzliche Versuche nach einer vereinfachten Methode durchgeführt. Die angesicherte Schüttgut-Probe wurde während des Abschrens nacheinander mit mehreren Schwingungsparametern  $f$  und  $\hat{a}_e$  bzw.  $\hat{x}_e$  beaufschlagt. Die Scherfestigkeit kann auf diesem Wege zwar nicht bestimmt werden. Man erhält aber mit einer einzigen Probe mehrere Wertepaare  $\hat{x}_r / \hat{x}_e = f(f)$  , was den experimentellen Aufwand zur Bestimmung von  $|H(f)|$  verringert.

Das Verhältnis  $\hat{x}_r / \hat{x}_e$  blieb für eine bestimmte Frequenz auch bei variierendem  $\hat{x}_e$  i.d.R. konstant, siehe Abschn. 9.1.2.

### Versuchsauswertung - Modellanpassung

In der Festkörper- und Strukturmechanik werden die Modellparameter Eigenfrequenz  $f_0$  und Dämpfungsverhältnis  $\zeta$  üblicherweise nach der Methode der „Halbwertsbreite“ bestimmt, **Abb. 6.11**.





**Abb. 6.11:** Kurvenanpassung mittels „Halbwertsbreite“

Diese grafische Methode (siehe z.B. [36,53,74]) liefert meist bessere Ergebnisse als eine allgemeine Kurvenanpassung durch Regression. Sie ist hier aber aus folgenden Gründen nicht anwendbar:

- Die in **Abb. 6.11** aufgeführten Berechnungsgleichungen lassen sich nur für linear-viskose Dämpfung ableiten.
- Sie besitzen nur für geringe Dämpfungen ( $\zeta \leq 0,1$ ) hinreichende Genauigkeit (außer  $f_{\max}$  bei Störkrafteerregung).
- Für höhere Dämpfungen können die Werte  $|H|_{\max} / \sqrt{2}$  nicht ermittelt werden, da sie auf den flachen Kurvenästen oder gar nicht mehr auf der Kurve liegen.

Daher mußte auf eine Kurvenanpassung mittels nichtlinearer Regression zurückgegriffen werden. Die Parameterschätzung wurde durch Minimierung der Abweichungs-Quadratsumme mit der Software Microcal™ Origin® 6.0 durchgeführt (siehe Anlage III).

## 6.6 Bestimmung des relativen Schwingweges

Die Modellgleichungen des fußpunkterregten Schwingers in Abschn. 5 enthalten neben Erregerschwingweg  $x_e$  und resultierendem Schwingweg  $x_r$  auch den relativen Schwingweg  $\Delta x$ . Die Amplitude des relativen Schwingweges  $\Delta \hat{x}$  wurde soweit wie möglich substituiert, da sie nicht direkt aus den Messungen zugänglich ist.

Der relative Schwingweg  $\Delta x(t)$  hängt von den Schwingwegen  $x_e(t)$  und  $x_r(t)$  sowie vom Nullphasenwinkel  $\psi$  ab, also:

$$\Delta x(t) = \hat{x}_r \cdot \sin(\omega t + \psi) - \hat{x}_e \cdot \sin(\omega t) \quad (6-2).$$

Nullsetzen der 1. Ableitung von (6-2) führt auf

$$\Delta \hat{x} = \hat{x}_r \cdot \sin(\omega t_{\max} + \psi) - \hat{x}_e \cdot \sin(\omega t_{\max})$$

mit 
$$\tan(\omega t_{\max}) = \frac{\hat{x}_r \cdot \cos \psi - \hat{x}_e}{\hat{x}_r \cdot \sin \psi} \quad (6-3).$$

Die zweite Ableitung von (6-2) wird für beliebige  $\psi$  negativ. Mit (6-3) kann somit die Amplitude des relativen Schwingweges  $\Delta \hat{x}$  berechnet werden. Allerdings gehen die Fehler von  $\hat{x}_e$ ,  $\hat{x}_r$  und vor allem vom Phasenwinkel  $\psi$  ein, der nur wenig reproduzierbar gemessen werden konnte. Daher ist  $\Delta \hat{x}$  (und folglich auch  $\Delta \hat{v}$ ) nur schlecht und sehr ungenau zugänglich.

## 7 Charakterisierung der Versuchsmaterialien

### 7.1 Ausgewählte Versuchsgüter

Für die Untersuchungen zum Fließverhalten unter Schwingungseinwirkung wurden als Modellpulver je ein handelsübliches Kalksteinmehl (OMYA; 90 % < 2 µm) und ein Titandioxidpulver (KRONOS 1001) mit mittleren Partikelgrößen um 1 µm gewählt. Beide Produkte zeichnen sich durch hohe Konstanz ihrer mechanischen Eigenschaften aus:

- Lösungs-, Kristallisationsvorgänge und chemische Umwandlung treten an der Luftatmosphäre nicht auf.
- Der Einfluß sich ändernder Umgebungsbedingungen (Temperatur, relative Feuchte) ist gering, siehe Abschn. 7.3.
- Zeitverfestigungen und signifikante Setzungserscheinungen wurden während der Scherversuche nicht beobachtet.
- Partikelbruch bei den auftretenden Scherbeanspruchungen kann aufgrund der Partikelgröße ausgeschlossen werden, vgl. hierzu auch [45,133].

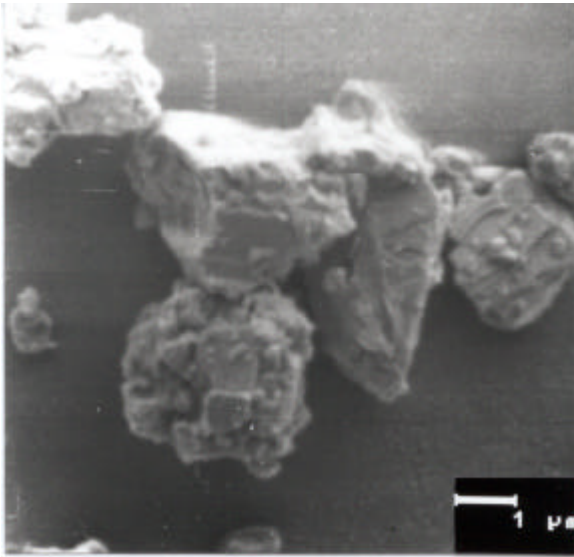
Darüber hinaus unterscheiden sich die Materialien in ihren mechanischen Eigenschaften sehr stark voneinander, **Tab. 7.1**. Neben der guten Eignung als Modell-Schüttgüter besitzen beide Produkte auch wirtschaftliche Relevanz, z.B. in der Papierindustrie.

**Tab. 7.1:** Ausgewählte mechanische Eigenschaften von  $\text{TiO}_2$  und  $\text{CaCO}_3$ ,  
nach [15,25,75,144,164,167,169]

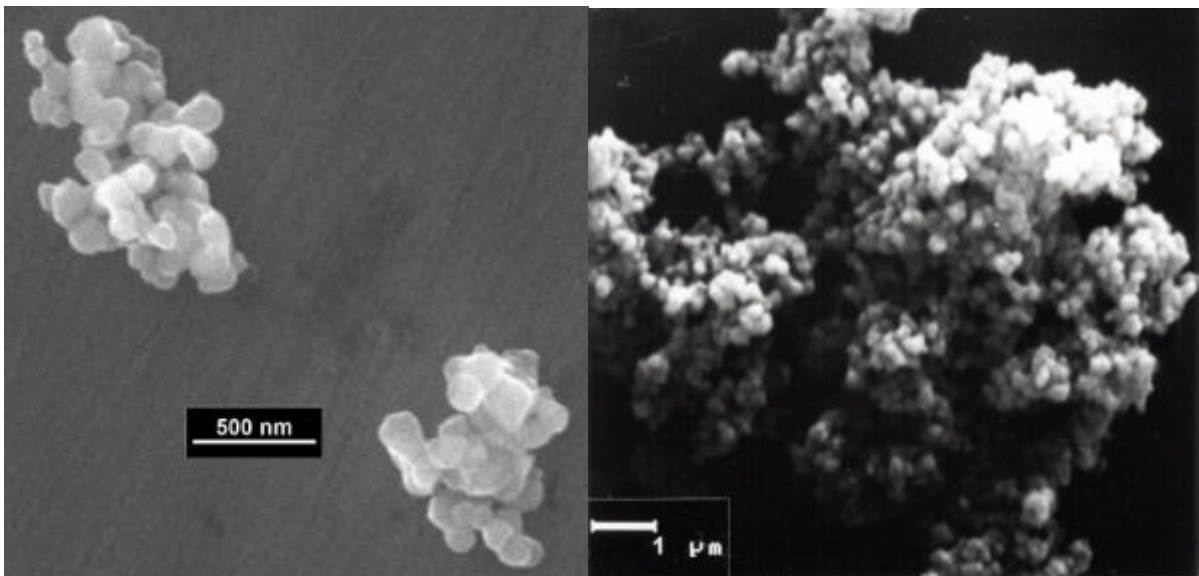
		$\text{CaCO}_3$	$\text{TiO}_2$ (Anatas)
Feststoffdichte $\rho_s$	in kg / m <sup>3</sup>	2650	3840
Elastizitäts-Modul E	in kN/mm <sup>2</sup>	80	280
HAMAKER- Konstante $C_H$ (Medium-Vakuum-Medium)	in 10 <sup>-20</sup> J	15	43
Mikrohärte $p_f$	in N/mm <sup>2</sup>	200	400
MOHS-Härte		3	5,5...6
VICKERS-Härte HV	in N/mm <sup>2</sup>	115...140	710...1120
POISSON-Zahl $\nu$		0,28	0,28

## 7.2 Granulometrie

Die  $\text{CaCO}_3$  - Partikeln zeigen für Zerkleinerungsprodukte typische unregelmäßige Bruchformen, **Abb. 7.1**. Das  $\text{TiO}_2$  – Pulver besteht aus kugeligen Primärpartikeln, deren Durchmesser ca. 100 nm beträgt, **Abb. 7.3**. Die Primärpartikeln bilden fest verwachsene dreidimensionale Kugelketten, nachfolgend als Aggregate bezeichnet, **Abb. 7. 2a**). Beide Produkte bilden nicht verwachsene Verbände (Agglomerate), deren Größe sich bis in den Millimeter-Bereich erstreckt. **Abb. 7. 2b**) zeigt  $\text{TiO}_2$  - Agglomerate; die kugelförmigen Primärpartikeln sind gut zu erkennen.



**Abb. 7.1:** Raster-Elektronenmikroskopische (REM) Aufnahme des  $\text{CaCO}_3$  - Pulvers



**Abb. 7. 2:** REM-Aufnahmen von  $\text{TiO}_2$ : a) Aggregate (links), b) Agglomerate (rechts)

## Partikelgrößenverteilung

Abb. 7.4 zeigt die mittels Laser-Beugungsspektrometrie (Sympatec Helos) gemessenen Partikelgrößenverteilungen. Beide Produkte wurden in Wasser dispergiert, um die Agglomerate aufzulösen. Beim  $\text{TiO}_2$  handelt es sich somit um die Größenverteilung der stabilen Aggregate.

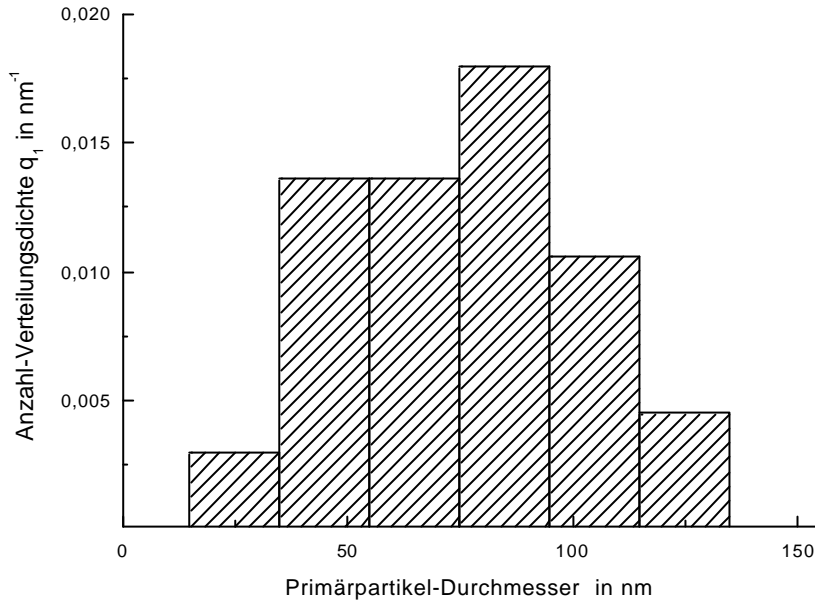


Abb. 7.3: Anzahl-Verteilungsdichte der kugelförmigen  $\text{TiO}_2$ - Primärpartikeln (Bildanalytische Auswertung von REM-Aufnahmen)

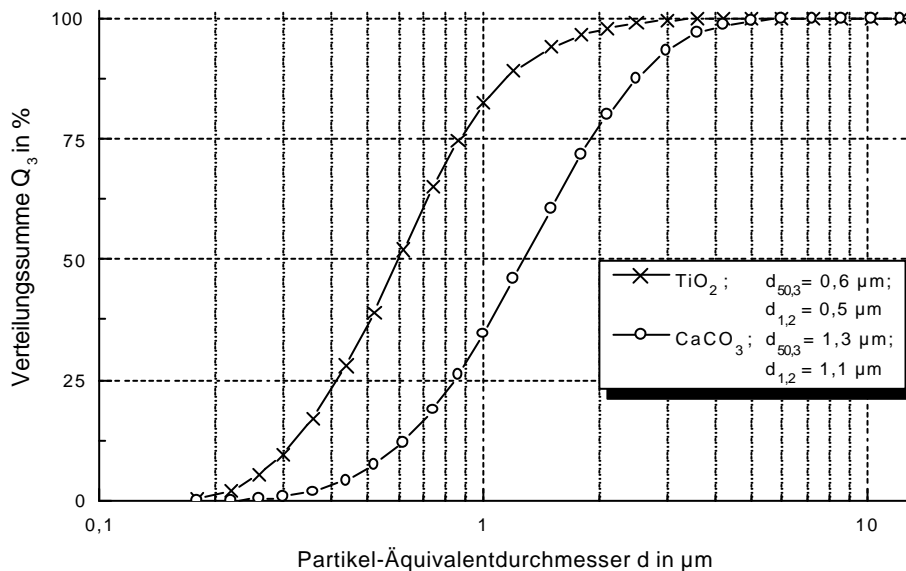


Abb. 7.4: Partikelgrößenverteilung der untersuchten Pulver, (Laser-Beugungsspektrometer Sympatec HELOS)

## Spezifische Oberfläche und Feststoffdichte

Die spezifische Oberfläche wurde mittels Durchströmungsmethode (BLAINE-Test nach DIN 66126) sowie durch Stickstoffadsorption (BET- Einpunktmethode nach DIN 66132) bestimmt. Im ersten

Fall wird nur die der Luftströmung zugängliche Teilchen-Oberfläche berücksichtigt, die vom Verdichtungszustand abhängt. Mit zunehmender Verdichtung strömt die Luft auch durch kleinere Poren, so daß die gemessene Oberfläche steigt, **Tab. 7.2**. Der Wert in geschweiften Klammern überschreitet die in DIN 66126 angegebene Meßbereichsgrenze von  $S_v \leq 1,2 \text{ m}^2/\text{cm}^3$ . Oberhalb dieses Wertes wird das Ergebnis durch den zunehmenden Einfluß der KNUDSEN-Diffusion verfälscht. Im Fall der Adsorptionsmethode sind auch kleine Poren der Bestimmung zugänglich. Die gemessene Oberfläche ist i. allg. größer.

Die Feststoffdichte wurde mit einem Helium-Pyknometer (Micromeritics) bestimmt. Für die Adsorptionsmethode und die Feststoffdichte-Bestimmung wurden die Proben jeweils ca. 24 h bei 200 °C im Ölpumpenvakuum getrocknet.

**Tab. 7.2:** Granulometrische Kenngrößen der verwendeten Pulver

		CaCO <sub>3</sub>	TiO <sub>2</sub>
mittlere Partikelgröße	$d_{50,3}$ in $\mu\text{m}$	1,3 (1 ± 0,05)	0,6 (1 ± 0,08)
SAUTER-Durchmesser	$d_{1,2}$ in $\mu\text{m}$	1,1	0,5
spez. Oberfl. (N <sub>2</sub> -Adsorpt.)	$S_{m,N_2}$ in $\text{m}^2/\text{g}$	8,4	9,9 (1 ± 0,05)
$d_{ST,N_2}$ (berechnet aus $S_{m,N_2}$ )	in $\mu\text{m}$	0,3	0,2
spez. Oberfl. (BLAINE-Test)	$S_{m,BI}$ in $\text{m}^2/\text{g}$		
unverdichtet (DIN 66 126)		0,18 (1 ± 0,025)	0,26 (1 ± 0,046)
		bei $\varepsilon = 0,79$	bei $\varepsilon = 0,86$
verdichtet mit $\sigma_1 = 5 \text{ kPa}$		0,42 (1 ± 0,036) <sup>2</sup>	{0,35 (1 ± 0,039)
		bei $\varepsilon = 0,73$	bei $\varepsilon = 0,82$ } <sup>1</sup>
Feststoffdichte	$\rho_s$ in $\text{g}/\text{cm}^3$	2,65 (1 ± 0,01)	3,86 (1 ± 0,013)

<sup>1</sup> entspr.  $S_v = 1,4 \text{ m}^2/\text{cm}^3 > S_{v,\text{max}}$  (DIN 66126)

<sup>2</sup> entspr.  $S_v = 1,1 \text{ m}^2/\text{cm}^3$

### 7.3 Gutfeuchte und Wasseradsorption

Die Gutfeuchte  $X_1$  ist als Verhältnis der Masse an Flüssigkeit  $m_l$  zur Masse an trockenem Feststoff  $m_s$  definiert:

$$X_1 = m_l / m_s \quad (7-1)$$

Für deren Bestimmung wurden zwei Meßmethoden verwendet:

- Thermogravimetrie
- KARL-FISCHER-Titration

Die thermogravimetrischen Messungen wurden mit einem Infrarot-Feuchtemeßgerät (Sartorius MA 30) durchgeführt. Die Trocknungstemperatur betrug 130 °C. Da die vorliegenden Gutfeuchten in der Größenordnung der unteren Nachweisgrenze des Gerätes von  $X_1 \approx 0,1 \%$  lagen und folgende systematische Fehler auftreten [77]:

- unvollständige Trocknung
- thermische Zersetzung der Probe,

wurde nachfolgend die KARL-FISCHER-Methode [127] bevorzugt (z.B. für Kontrollmessungen während der Scherversuche). Die Titration ist im Gegensatz zur Thermogravimetrie selektiv bezüglich Wasser. Die untere Nachweisgrenze beträgt hier  $X_1 \approx 0,01 \%$ . Die Proben wurden in Methanol dispergiert und bei 50 °C in einem automatischen Titrator titriert.

Für die Beurteilung der Haftmechanismen zwischen den Partikeln ist die Abschätzung der Anzahl der Molekülschichten auf der Partikeloberfläche wichtig. Die Gutfeuchte bei idealer Monoschichtbedeckung beträgt [164]:

$$X_{1,\text{mono}} = \frac{M \cdot A_m}{A_1 \cdot N_L} \quad (7-2)$$

- M Molmasse (Wasser: 18 kg / kmol)  
 $A_m$  spezifische Oberfläche, bestimmt durch Gas-Adsorption  
 $N_L$  AVOGADRO-Zahl;  $6,024 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$   
 $A_1$  Platzbedarf eines adsorbierten Moleküls

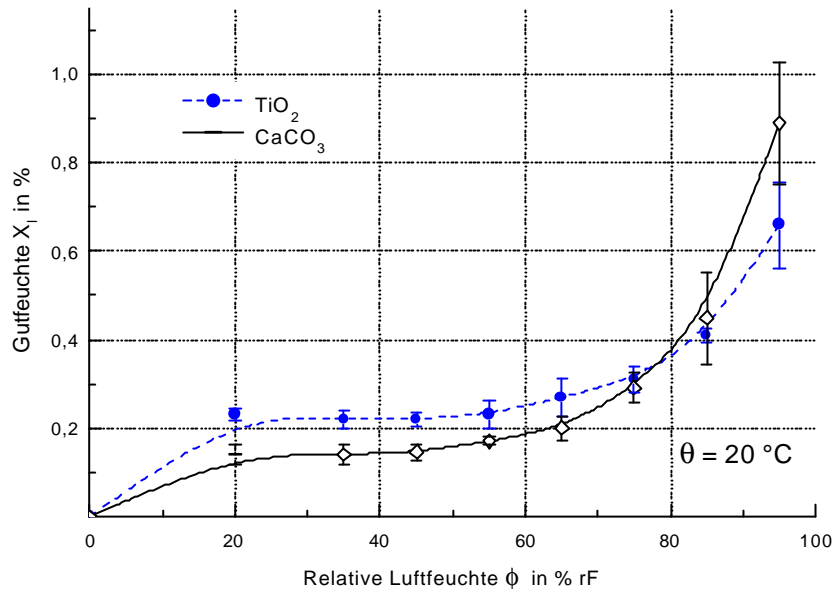
Der Platzbedarf eines Wasser-Moleküls kann mit Hilfe einiger Modellannahmen abgeschätzt werden zu  $A_1 = 0,106 \cdot 10^{-18} \text{ m}^2$  [21-22,43]. Daraus erhält man einen Anhaltswert für die Gutfeuchte bei Monoschichtbedeckung  $X_{1,\text{mono}}$ . Die gemessenen Feuchten für die  $\text{TiO}_2$ - und  $\text{CaCO}_3$ - Pulver liegen in der Größenordnung monomolekularer Bedeckung der Partikeloberfläche, **Tab. 7.3**. Unter Vernachlässigung elektrostatischer Effekte wird daher als dominierender Haftkraftmechanismus VAN DER WAALS- Wechselwirkung mit Verstärkung durch adsorbierte Oberflächenschichten angenommen. Flüssigkeitsbrücken können ausgeschlossen werden.

**Tab. 7.3:** Ergebnisse der Feuchtebestimmung

	Trocknung 130 °C $X_1$ in %	KARL-FISCHER-Titration $X_1$ in %	Monoschichtfeuchte $X_{1,\text{mono}}$ in %
<b>TiO<sub>2</sub></b>	0,4 (1 ± 0,14)	0,4 (1 ± 0,01)	0,24
<b>CaCO<sub>3</sub></b>	0,4 (1 ± 0,09)	0,4 (1 ± 0,03)	0,28

Schwankende Umgebungsbedingungen können das Fließverhalten von Pulvern nachhaltig beeinflussen [66-67,156]. Der Einfluß der Luftfeuchte wurde durch Messungen zur Wasserdampf-Adsorption quantifiziert. Die Proben wurden wie in Abschn. 7.2 beschrieben vorbereitet. Anschlie-

End wurde mittels KARL-FISCHER-Titration das noch anhaftende Restwasser bestimmt (um 0,1 %). Die Proben wurden in Schichten von ca. einem Millimeter im Klimaschrank bei vorgegebenen relativer Luftfeuchte gelagert, bis die Gutfeuchte konstant blieb. Die Gleichgewichtseinstellung dauerte jeweils ca. drei Tage.



**Abb. 7.5:** Adsorptions-Isothermen

Im Labor traten Luftfeuchten zwischen 30...60 % rF auf. In diesem Bereich blieb die Gutfeuchte nahezu konstant bei etwa 0,2 %, **Abb. 7.5**. Die Gleichgewichtsfeuchte der Adsorption liegt also geringfügig unterhalb der Gutfeuchte. Eine Feuchtezunahme der Pulver ist daher ausgeschlossen. Ebenso wenig ist eine Feuchteverminderung zu erwarten, da das Desorptions-Gleichgewicht aufgrund Hysterese etwas höher liegt. Kontrollmessungen der Gutfeuchte während der Scherversuche bestätigten diese Aussagen. Die Temperatur scheidet als systematischer Einfluß aus, da sie mittels Temperaturregelung bei  $\vartheta = 21 \text{ °C} \pm 1 \text{ K}$  konstant gehalten wurde.

#### 7.4 Pulvereigenschaften und Fließverhalten

Beide verwendeten Pulver weisen im unverdichteten Zustand geringe Packungsdichten auf, **Tab. 7.4**. Sie verhalten sich stark kompressibel, was sich im hohen Kompressibilitätsindex von  $n \approx 0,1$  (vgl. Abschn. 4.3.3) und in der ausgeprägten Klopferdichtbarkeit widerspiegelt.

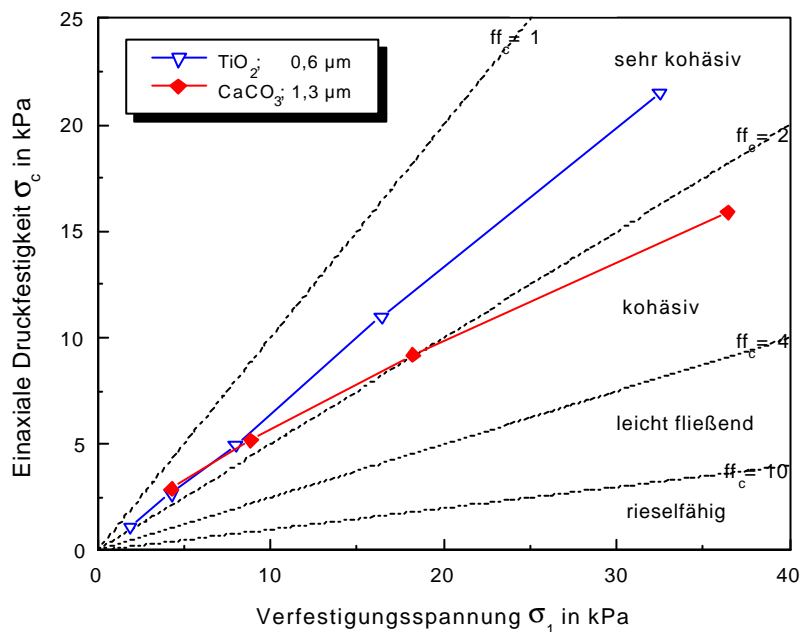
Bei den Messungen zum Fließverhalten (vgl. Abschn. 6.2) zeigten beide Pulver erwartungsgemäß sehr kohäsives Verhalten, **Abb. 7.6**. In beiden Fällen wird die Fließfähigkeitsgrenze von  $ff_c = 2$  unterschritten, zumindest in dem für Silotrichter relevanten Spannungsbereich. Somit sind beide Pulver nach der Klassifikation von JENIKE [60] unter alleiniger Schwerkraftwirkung nicht fließfähig. Dennoch treten Unterschiede auf. Das Kalksteinmehl zeigt einen relativ flachen Verlauf der Druckfestigkeit  $\sigma_c$  über der Verfestigungsspannung  $\sigma_1$ . Im Gegensatz dazu wird das Verhalten von TiO<sub>2</sub>



durch eine steile Kennlinie repräsentiert, die sich, für kohäsive Pulver untypisch, durch den Koordinatenursprung extrapolieren läßt. Für weitere Fließkennwerte siehe Anlage V.

**Tab. 7.4:** Schüttgutedichte und Fließfunktion der Versuchsgüter

		CaCO <sub>3</sub>	TiO <sub>2</sub>
Schüttgutedichte (Porosität $\varepsilon_0$ ) $\rho_{b,0}$ in kg / m <sup>3</sup> unverfestigt nach DIN ISO 679		540 (0,79) (1 ± 0,011)	571 (0,86) (1 ± 0,005)
Schüttgutedichte (Porosität $\varepsilon$ ) $\rho_b$ in kg / m <sup>3</sup> verfestigt mit $\sigma_1 = 10$ kPa		804 (0,70) (1 ± 0,023)	868 (0,78) (1 ± 0,02)
Kompressibilitätsindex (4-19) n		0,11 (1 ± 0,06)	0,09 (1 ± 0,19)
Klopfverdichtbarkeit <sup>14</sup> $\rho_{b,K} / \rho_{b,0}$		1,41 (1 ± 0,006)	1,43 (1 ± 0,006)
Fließfunktion ( $\sigma_1 = 10$ kPa) $ff_c$		1,8	1,6

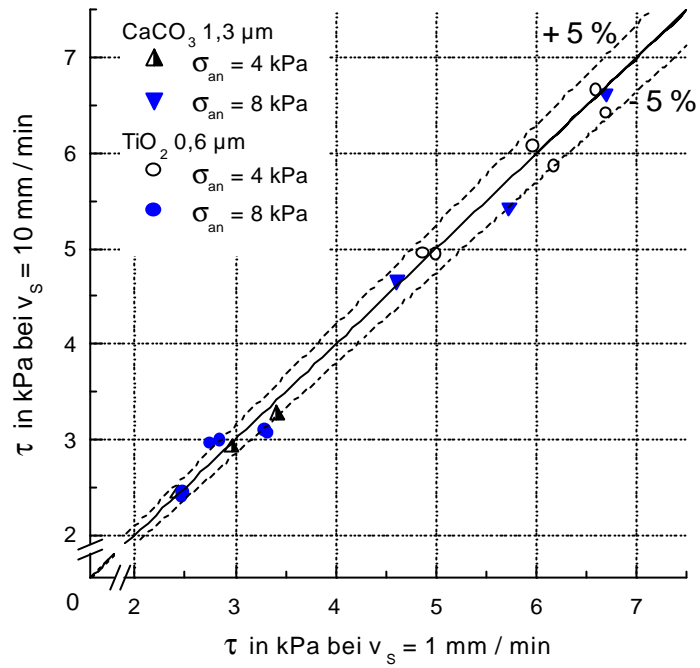


**Abb. 7.6:** Verlauf der Fließfunktion für TiO<sub>2</sub> und CaCO<sub>3</sub>

Ein Einfluß der Schergeschwindigkeit auf die Fließkennwerte konnte in dem beim JENIKE-Versuch zweckmäßigen Geschwindigkeitsbereich nicht festgestellt werden. Zwischen den bei

<sup>14</sup> Ermittelt wurde die Stampfdichte nach DIN EN ISO 787 T. 11. Abweichend von der verwendeten Norm wird hier der Begriff der Klopfedichte bevorzugt, da er nach Meinung des Autors den tatsächlichen Sachverhalt am besten wiedergibt. Die Normen für die Klopfedichte, DIN ISO 3953, Rütteldichte, DIN EN 1237, Stampfdichte, DIN EN ISO 787 T. 11 und Vibrationsdichte, DIN 25 491 sind weitgehend deckungsgleich. Sie unterscheiden sich hauptsächlich in den Abmessungen des Probengefäßes. Aus diesem Blickwinkel sind die vier Begriffe synonym. (Ergebnisse siehe Anlage V).

$v_s = 1 \text{ mm/min}$  und  $v_s = 10 \text{ mm/min}$  gemessenen Scherspannungen traten keine systematische Abweichung auf, **Abb. 7.7**.



**Abb. 7.7:** Einfluß der Schergeschwindigkeit

## 8 Einfluß harmonischer Schwingungen auf die Fließkennwerte feinstkörniger, kohäsiver Pulver

### 8.1 Schwingungsinduziertes Fließen

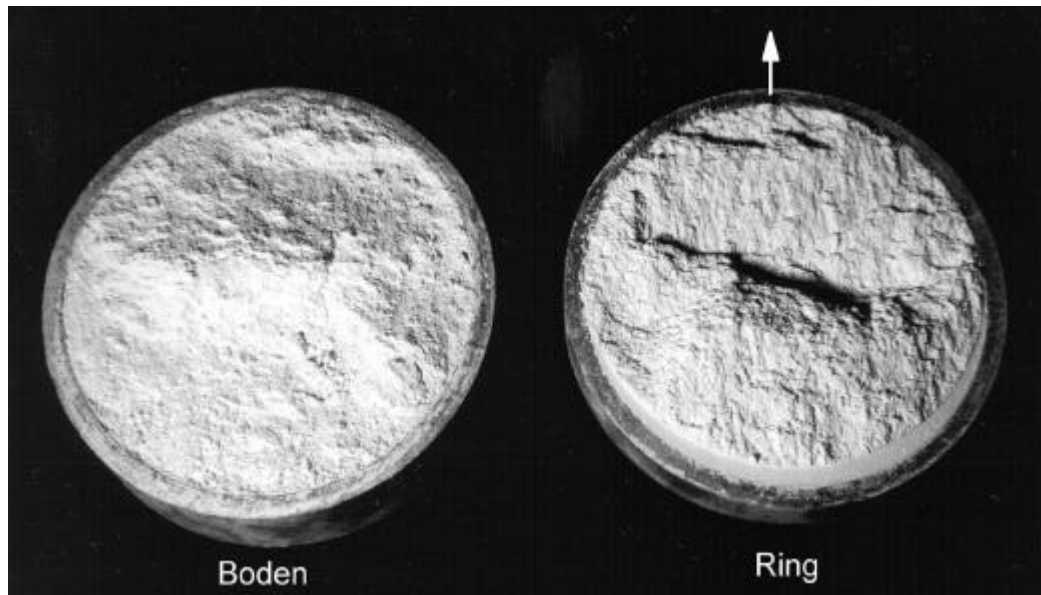
Die vorliegenden Untersuchungen beschränken sich auf das schwingungsinduzierte Fließen von Schüttgütern. Darunter soll das Fließen unter Schwerkraftwirkung verstanden werden, wobei durch überlagerte Schwingungseinwirkung der Schwerkraftfluß der Schüttgüter initiiert und unterstützt wird. Das bedeutet für die experimentellen Untersuchungen, daß der Bruch der Probe nicht durch die Schwingungen selbst hervorgerufen wird, sondern durch die Scherbewegung des JENIKE-Gerätes. ROBERTS [116,118] nahm dies als erfüllt an, wenn der Schwingweg  $\hat{x}$  klein gegenüber der Partikelgröße ( $d \approx 1 \text{ mm}$ ) ist, also  $\hat{x} \leq 0,1 \text{ mm}$ . Dieses Kriterium ist hier nicht praktikabel ( $d \approx 1 \mu\text{m}$ ) und, wie nachfolgend deutlich wird, auch nicht notwendig.

Um sicherzugehen, daß nicht die Schwingungen selbst zum Bruch der Probe führen, wurde nach jedem Versuch die Scherebene (Bruchfläche) kontrolliert.

**Abb. 8.1** zeigt die typische Bruchfläche nach einem herkömmlichen JENIKE-Versuch, siehe auch [138]. Bei überlagerter Schwingungseinwirkung mit geringen Schwingwegen von  $\hat{x} \leq 0,05 \text{ mm}$  konnte keine Veränderung der Bruchfläche festgestellt werden. Das Aussehen der Bruchfläche sei ein Indiz, daß der Bruch nicht durch die Schwingungen, sondern den Schervorgang hervorgerufen wurde.

Bei höheren Schwingwegen, insbesondere für  $\hat{x} \geq 0,1 \text{ mm}$ , wurden Veränderungen der üblicherweise quer zur Scherrichtung verlaufenden Aufwölbung oder „Bruchkante“ deutlich, **Abb. 8.2**. Diese Aufwölbung wurde aufgebrochen und / oder wie in **Abb. 8.2** in ihrer Richtung verschoben (schwarzer Pfeil). Stiegen die Schwingwege weiter, wurde schließlich das typische Bruchbild durch eine diffuse Oberfläche verdrängt. Diese Beobachtungen decken sich etwa mit der von ROBERTS in [118] vorgeschlagenen Grenze von  $\hat{x} \leq 0,1 \text{ mm}$ .

Daher wurde in der Regel nur mit Schwingwegen im Bereich  $0,01 \leq \hat{x} \leq 0,05 \text{ mm}$  gearbeitet. Bei geringen Frequenzen (25 Hz und 50 Hz) waren auch Versuche mit  $0,05 < \hat{x} < 0,1 \text{ mm}$  erforderlich. Dabei wurde sorgfältig die Bruchfläche beobachtet. Die Ergebnisse wurden nur verwendet, wenn die Scherebene ihr Aussehen nicht änderte. Versuche wie in **Abb. 8.2** wurden *nicht* ausgewertet.



**Abb. 8.1:** Typische Bruchfläche beim JENIKE-Versuch für  $\text{CaCO}_3$ ;  $1,3 \mu\text{m}$   
(Pfeil = Scherrichtung)

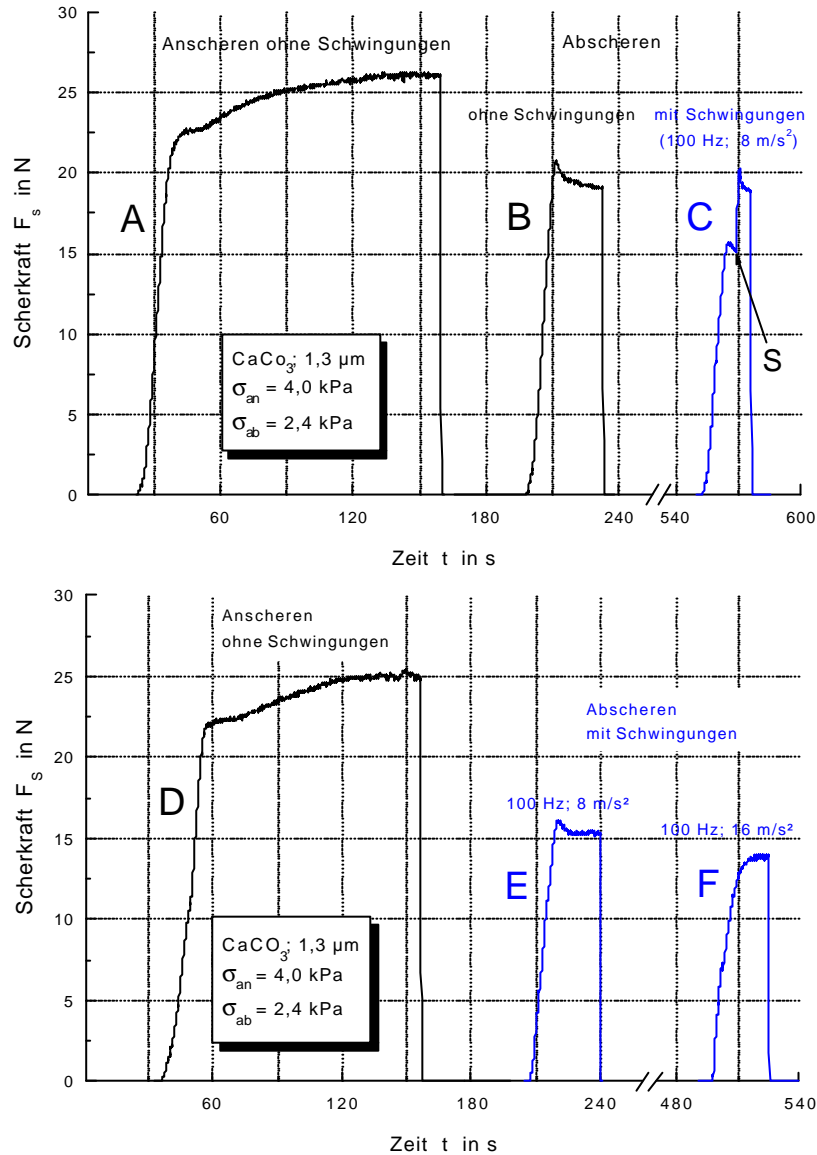


**Abb. 8.2:** Veränderungen der Bruchfläche bei hohen Schwingwegen ( $\text{CaCO}_3$ ;  $1,3 \mu\text{m}$ )

## 8.2 Beginnendes Fließen bei Schwingungseinwirkung

### 8.2.1 Scherkraftverläufe

Die nachfolgenden Ergebnisse wurden mit der Versuchsanordnung „Scheroberteil schwingt“ gewonnen. Abschn. 8.2 beschränkt sich auf Versuchsmethode A, Schwingungen beim Abscheren (vgl. Abschn. 6.4). Der Schwingungseinfluß soll zunächst an den elementaren Meßdaten, also den Scherkraft-Zeit-Kurven veranschaulicht werden, die aufgrund der konstanten Schergeschwindigkeit prinzipiell Scherkraft-Weg-Kurven entsprechen.



**Abb. 8.3:** Typische Scherkraft-Zeit-Verläufe („Scheroberteil schwingt“; Methode A, Schergeschwindigkeit: 2 mm/min)

Typische Scherkraft-Zeit-Verläufe der Schwingungs-Scherversuche sind in **Abb. 8.3** dokumentiert. Die beiden ersten Kurven (oberes Bild) zeigen zum Vergleich das Ergebnis eines herkömmlichen JENIKE-Versuchs: Anscheren (Kurve A) und Abscheren (Kurve B) je ohne Schwingungseinwirkung. Kurve C gibt das Abscheren mit Schwingungseinwirkung einer frischen Schüttgutprobe wieder, die unter identischen Bedingungen vorverfestigt und angeschert wurde. Während des Abschereins unter Schwingungseinwirkung, in diesem Beispiel mit einer Frequenz von  $f = 100 \text{ Hz}$  und einer Schwingbeschleunigung von  $\hat{a} = 8 \text{ m/s}^2$ , wird zunächst ein Scherkraftmaximum erreicht, das deutlich geringer ausfällt als beim Versuch ohne Schwingungseinwirkung (Kurve B). An der durch den Pfeil markierten Stelle (Punkt S) wurden die Schwingungen abgeschaltet. Die Scherkraft steigt erneut und erreicht ein zweites Maximum, das nahezu den Wert ohne Schwingungseinwirkung annimmt. Die Schwingungen führen offenbar nur zu einer „Aktivierung“ des Schüttgutes. Solange die Schwingun-

gen wirken, wird der Scherwiderstand durch den zusätzlichen Energieeintrag auf ein niedrigeres Niveau abgesenkt. Nach Abschalten der Schwingungen verhält sich das Pulver wie vor dem Schwingungseintrag.

Im unteren Diagramm in **Abb. 8.3** sind weitere charakteristische Beispiele zu sehen: Links wieder das Anscheren ohne Schwingungen (Kurve D) und der anschließende Abschervorgang mit Schwingungen (Kurve E). Da die Schwingungseinleitung nicht unterbrochen wurde, geht das Schüttgut nach Überschreiten des Scherkraft-Maximums in stationäres Fließen auf niedrigerem Niveau über. Kurve F zeigt schließlich einen Abschervorgang (frische Probe) bei höherer Schwingungsintensität,  $f = 100 \text{ Hz}$ ,  $\hat{a} = 16 \text{ m/s}^2$ . Hier tritt kein ausgeprägtes Scherkraft-Maximum auf. Das Pulver geht gleich in stationäres Fließen über, was für leicht- und freifließende Schüttgüter typisch ist.

Zur Interpretation der Kurve C soll an die Untersuchungen von PITCHUMANI; SHARMA und ENSTAD [109] erinnert werden. Die Autoren versuchten die JENIKE-Prozedur zu vereinfachen und einen kompletten Fließort (mehrere Abscherpunkte) mit nur einer einzigen Probe zu bestimmen. Sie schlugen folgende Methode vor: Die Probe wird vorverfestigt und angeschert und anschließend mit der höchsten Abscher-Normallast abgeschert. Sofort nach Überschreiten des Scherkraft-Maximums wird der Abschervorgang abgebrochen. Die nächst niedrigere Abscherlast wird aufgelegt und erneut abgeschert. Die Scherkraft erreicht ein Maximum auf niedrigerem Niveau, nach dessen Überschreitung sofort abgebrochen wird u.s.w. Abschließend wird wiederum die höchste Abscherlast aufgelegt. Die Scherkraft überschreitet erneut ein Maximum. Die hierbei gemessene Abscherkraft weicht unwesentlich von der des ersten Abschervorganges ab. Die Autoren argumentieren, daß sich die Probe bis zum Erreichen des Scherkraft-Maximums nicht merklich verändert und Volumendehnung erst nach dem Bruch einsetzt.<sup>15</sup> Eine vollständige Ausdehnung wird erst mit dem stationären Fließen erreicht.

Ähnlich kann Kurve C interpretiert werden. Die Probe wird mit Schwingungen abgeschert. Ungeachtet, ob Volumendehnung bereits vor oder erst nach Erreichen des Scherkraft-Maximums einsetzt, reicht der zurückgelegte Scherweg nicht für eine vollständige Ausdehnung der Probe. Die Schwingungen werden abgeschaltet und die Probe schert zum zweiten mal ab. Wie auch bei PITCHUMANI et al. ist erneut ein Scherkraft-Maximum zu beobachten.

### 8.2.2 Einfluß der Schwinggeschwindigkeit

Die Differenz zwischen Abscherkraft ohne und mit Schwingungseinwirkung hängt von der Intensität der eingeleiteten Schwingungen ab, wie auch anhand der Kurven E und F deutlich wird. In **Abb. 8.4** ist das Scherspannungsverhältnis  $\tau_v / \tau$  jeweils über dem Schwingweg  $\hat{x}$ , der Schwinggeschwindigkeit

<sup>15</sup> SCHULZE (zitiert aus [140]) zeigte, daß Volumendehnung bereits vor Erreichen des Scherkraft-Maximums auftritt und widerlegte so die Annahme von PITCHUMANI et al. Die Anwendbarkeit der vorgeschlagenen Meßmethode steht hier jedoch nicht zur Debatte, sondern lediglich die experimentellen *Beobachtungen* der Autoren.

keit  $\hat{v}$  und der Beschleunigung  $\hat{a}$  mit der Frequenz als Kurvenparameter aufgetragen. Hierbei wurde die Scherspannung bei Schwingungseinwirkung  $\tau_v$  mit der Scherspannung ohne Schwingungseinwirkung  $\tau$  normiert. Letztendlich zeigen alle drei Diagramme, daß die Scherspannung mit steigender Schwingungsintensität exponentiell sinkt. Für den Schwingweg und die Beschleunigung erhält man je eine Kurvenschar. Um den Schwingungseinfluß auf die Scherspannung mit nur einem einzigen Parameter zu erfassen, eignet sich die maximale Schwinggeschwindigkeit, da hier die Kurven für alle Frequenzen zusammenfallen. Ähnliche Aussagen trafen WEATHERS et al. [178] und WASSGREN et al. [177] sowie ROBERTS [116], vgl. Abschn. 3.6.

Greift man das Gedankenmodell der „Aktivierung“ auf, wird folgender Erklärungsversuch plausibel: Bei erzwungener Schwingung besteht ein Gleichgewicht aus Trägheitskraft  $F_T$ , Rückstellkraft der Feder  $F_R$ , Dämpfungskraft  $F_d$  und Erregerkraft  $F_e$ ,

$$F_T + F_R + F_d = F_e \quad (8-1)$$

und folglich der daraus resultierenden Energien:

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} + E_d = E_e \quad (8-2).$$

Im eingeschwungenen Zustand sind die freien Schwingungen abgeklungen. Die über die Systemgrenze zugeführte Energie  $E_e$  ist gleich der innerhalb des Systems dissipierten Energie  $E_d$ .

$$E_d = E_e \quad (8-3)$$

Abgesehen davon besitzt das System noch die während des Einschwingvorgangs zugeführte Energie in Form kinetischer Energie  $E_{\text{kin}}$  und potentieller Energie  $E_{\text{pot}}$ . Beide Größen wandeln sich periodisch mit der Frequenz  $2 \cdot f$  ineinander um, wobei deren Summe konstant bleiben muß.

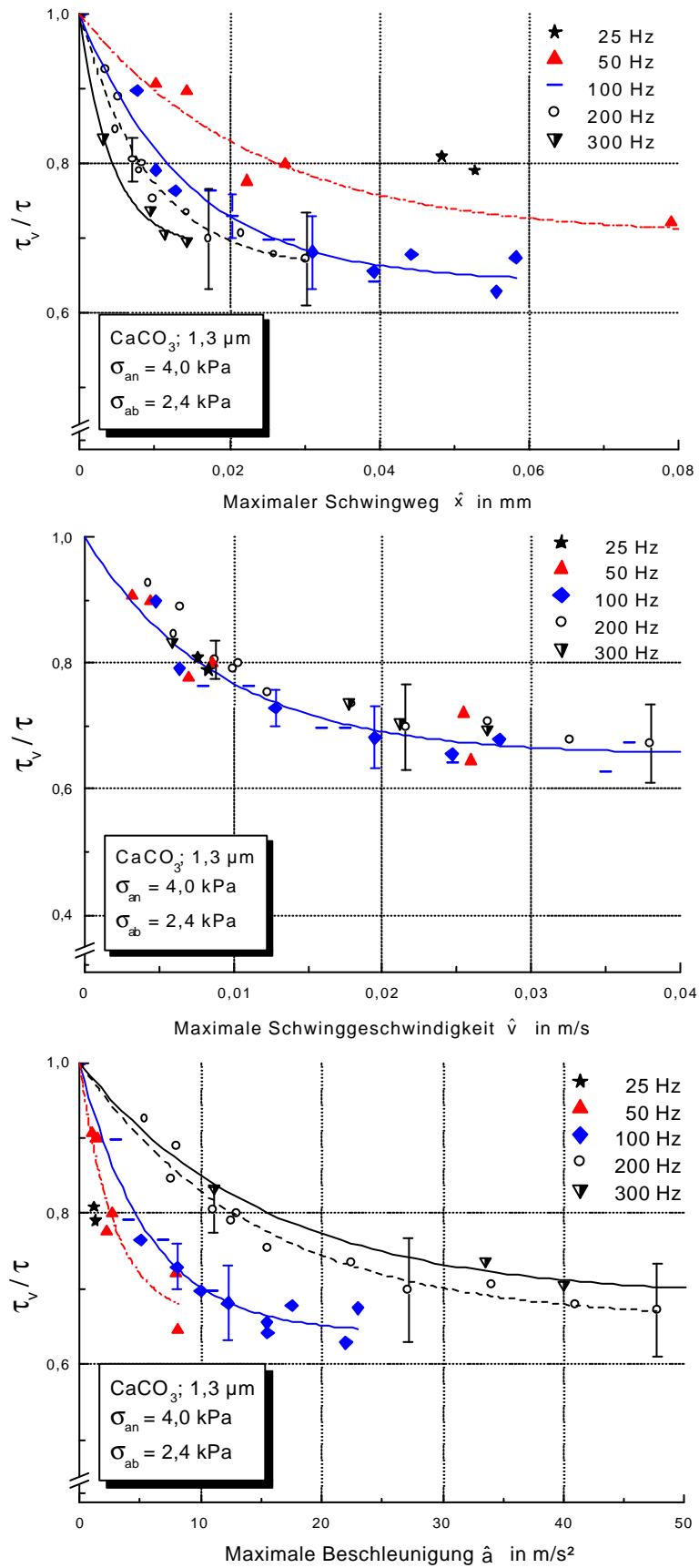
$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{konst.} \quad (8-4)$$

Mit der Einschränkung eines Einfreiheitsgrad-Schwingers mit linearer Elastizität erhält man:

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{m}{2} \omega^2 \cdot (\hat{x}^2 - x^2) + \frac{m}{2} \omega_0^2 \cdot x^2 \quad (8-5).$$

Für den Sonderfall der Resonanz, also  $\Omega = 1$ , vereinfacht sich Gl. (8-5) zu:

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{m}{2} \cdot \hat{v}^2 \quad (8-6).$$



**Abb. 8.4:** Bezogene Scherspannung über den Amplituden von Schwingweg, Schwinggeschwindigkeit und Schwingbeschleunigung



Außerhalb der Resonanz hängt der Energieinhalt des Schwingers außerdem von der Abstimmung des Systems ab, also:

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{m}{2} \cdot \hat{v}^2 \cdot [1 - f(\Omega)] \quad (8-7)$$

Wobei für die hier nicht näher definierte Funktion  $f(\Omega)$  gilt:

$$f(\Omega) = 0; \Omega = 1$$

$$f(\Omega) \neq 0; \Omega \neq 1$$

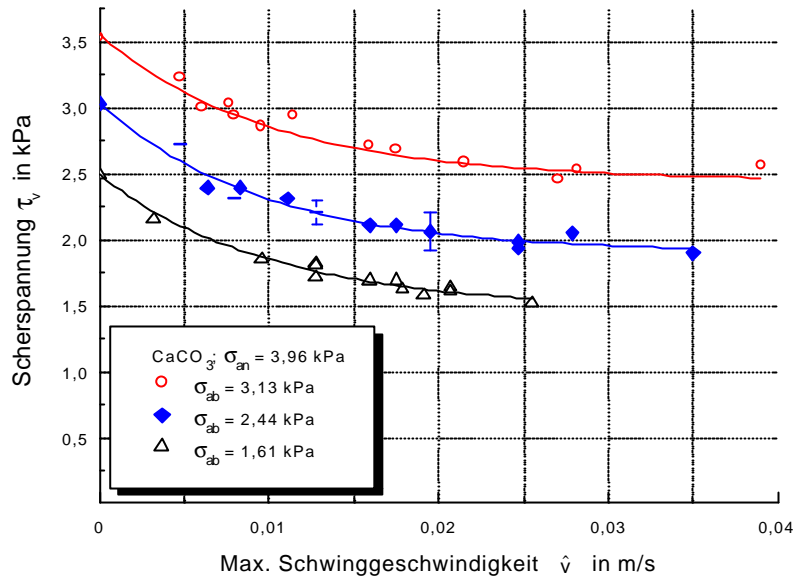
Die Abstimmung  $\Omega$  hat keinen Einfluß, wenn wie z.B. wie bei den Untersuchungen von MAISCH und TEJCHMAN [79] nur der Bereich  $f \gg f_0$  betrachtet wird.

Auch bei der hier verwendeten Versuchsanordnung „Scheroberteil schwingt“ gilt (8-6). Der Ausdruck (8-6) repräsentiert den Energieinhalt des Schwingers und somit den als „Aktivierung“ bezeichneten Zustand. Die „Aktivierung“ hängt demnach nur von der Schwinggeschwindigkeit  $\hat{v}$  ab! Dies spiegeln auch die experimentellen Ergebnisse zur Scherfestigkeit bei Schwingungseinwirkung wieder.

### 8.2.3 Bestimmung der Modellparameter $\mathbf{b}$ und $\mathbf{g}$

Einen Zusammenhang zwischen Scherspannungs-Verhältnis  $\tau_v / \tau$  und maximaler Schwinggeschwindigkeit  $\hat{v}$  sagt auch das Modell von ROBERTS (3-33) voraus. Die durchgezogene Linie im mittleren Diagramm in **Abb. 8.4** illustriert den Verlauf der Modellgleichung, die mit Hilfe der Materialgrößen  $\beta$  und  $\gamma$  an die experimentellen Daten angepaßt wurde (Modellanpassung vgl. Abschn. 6.4.2).

Nach ROBERTS hängt die charakteristische Schwinggeschwindigkeit  $\gamma$  nur vom Material ab, wohingegen die maximal mögliche Scherspannungs-Reduzierung  $\beta$  zusätzlich von der Verfestigungsniveau beeinflusst wird, Abschn. 3.6. Beide Parameter sind unabhängig von der wirkenden Normalspannung  $\sigma_{\text{ab}}$ . Bei identischer Verfestigung sinken mit steigender Schwinggeschwindigkeit folglich alle Abscherspannungen um den gleichen Absolutwert  $\beta \cdot [1 - \exp(-\hat{v} / \gamma)]$ . Trägt man nicht das Scherspannungsverhältnis  $\tau_v / \tau$ , sondern  $\tau_v$  gegen  $\hat{v}$  auf, verlaufen die Kurven für unterschiedliche Normalspannung  $\sigma_{\text{ab}}$  mit konstantem Abstand zueinander, **Abb. 8.5**. (Für weitere Beispiele siehe Anlage VI.)



**Abb. 8.5:** Scherspannung bei Schwingungseinwirkung für unterschiedliche Abscher-Normalspannungen

Die ermittelten Modellparameter  $\beta$  und  $\gamma$  und deren Vertrauensintervalle sind in **Tab. 8.1** für  $\text{CaCO}_3$  und in **Tab. 8.2** für  $\text{TiO}_2$  zusammengefaßt. Angegeben sind jeweils die dazugehörigen Normalspannungen beim An- und Abscheren  $\sigma_{\text{an}}$  und  $\sigma_{\text{ab}}$ , die Scherspannung ohne Schwingungseinwirkung  $\tau$  und das Bestimmtheitsmaß  $r_{xy}^2$ . In der letzten Spalte wurde  $\beta$  auf die Mittelpunktspannung  $\sigma_{\text{M,st}}$  bezogen, die das Spannungsniveau beim Verfestigen charakterisiert.

Im Rahmen der Meßgenauigkeit stimmen für das jeweilige Schüttgut alle  $\gamma$ -Werte überein. Lediglich ein Wert in **Tab. 8.1** weicht signifikant ab. Gleiches gilt für die  $\beta$ -Werte innerhalb je eines Fließortes. Diese Beobachtungen decken sich mit den Aussagen von ROBERTS (siehe oben). Darüber hinaus kann man erkennen, daß  $\beta$  proportional mit der Verfestigungsspannung zunimmt. Wird die Verfestigungsspannung verdoppelt, verdoppelt sich der Wert von  $\beta$ . Demzufolge bleibt das Verhältnis  $\beta/\sigma_{\text{M,st}}$  im untersuchten Spannungsbereich nahezu unverändert (ebenso  $\beta/\sigma_{\text{an}}$  oder  $\beta/\sigma_1$ ). Der Schwingungseinfluß auf die Scherspannung läßt sich also mit den zwei Parametern  $\gamma$  und  $\beta/\sigma_{\text{M,st}}$  beschreiben, die ausschließlich vom Schüttgut abhängen.

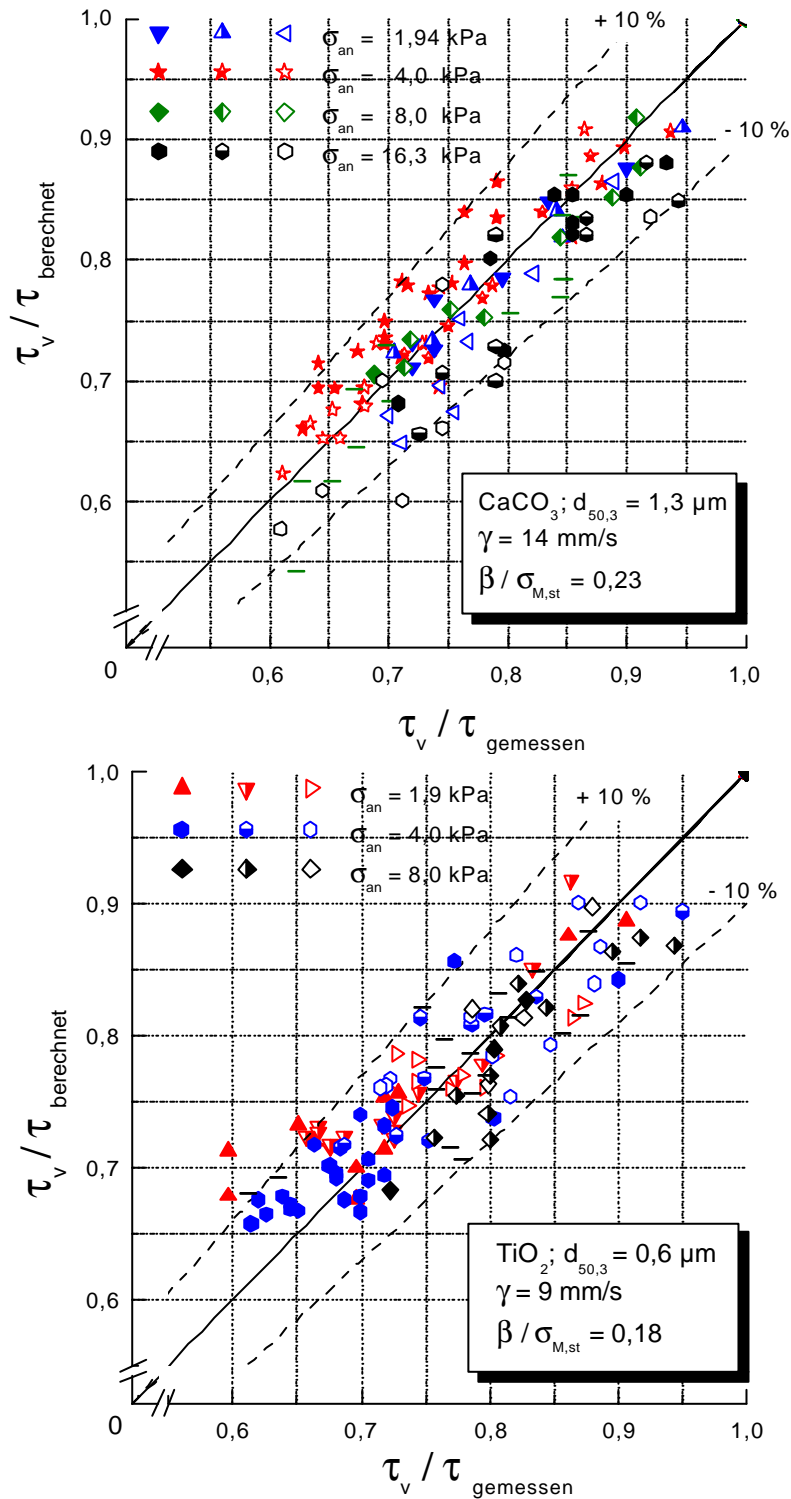
**Abb. 8.6** vergleicht die gemessenen Werte des Scherspannungs-Verhältnisses  $\tau_v/\tau$  mit Modellwerten nach (3-33). Für  $\gamma$  und  $\beta/\sigma_{\text{M,st}}$  wurden die gemittelten Werte aus der jeweils letzten Zeile in **Tab. 8.1** und **Tab. 8.2** verwendet. Die gemessenen  $\tau_v/\tau$ -Werte sind auf der Abszisse aufgetragen, die berechneten auf der Ordinate. Bei idealer Übereinstimmung von Experiment und Modell lägen alle Punkte auf der Diagonalen  $y = x$  (durchgezogene Linie). Gemessene und berechnete Werte stimmen gut überein. Nur wenige Werte weichen um mehr als  $\pm 10\%$  vom Idealwert ab. Eine Spannungsabhängigkeit ist nicht zu erkennen.

**Tab. 8.1:** Ermittelte Modellparameter für CaCO<sub>3</sub> (1,3 µm)

<b>s<sub>an</sub> in kPa</b>	<b>s<sub>ab</sub> in kPa</b>	<b>t in kPa</b>	<b>g in mm/s</b>	<b>b in kPa</b>	<b>r<sub>xy</sub><sup>2</sup></b>	<b>b/s<sub>M, st</sub></b>
1,94	0,84	1,27	12 ± 3	0,49 ± 0,06	0,978	0,21
	1,11	1,49	14 ± 3	0,55 ± 0,08	0,984	0,23
	1,53	1,74	18 ± 7	0,63 ± 0,14	0,975	0,27
4,0	1,61	2,49	10 ± 1	1,01 ± 0,05	0,989	0,20
	2,44	3,03	10 ± 1	1,12 ± 0,05	0,943	0,23
	3,13	3,45	13 ± 2	1,02 ± 0,06	0,972	0,21
8,0	3,15	4,52	12 ± 2	1,9 ± 0,16	0,975	0,18
	4,81	5,66	15 ± 5	2,2 ± 0,53	0,947	0,21
	6,33	6,75	(23 ± 7)	2,3 ± 0,52	0,965	0,22
16,3	6,34	8,3	15 ± 8	4,0 ± 1,22	0,92	0,19
	9,7	11,1	15 ± 6	3,7 ± 0,84	0,912	0,18
	12,8	12,6	14 ± 4	4,0 ± 0,61	0,927	0,19
<b>2...16</b>	<b>¾</b>	<b>¾</b>	<b>14</b>	<b>¾</b>	<b>¾</b>	<b>0,23</b>

**Tab. 8.2:** Ermittelte Modellparameter für TiO<sub>2</sub> (0,6 µm)

<b>s<sub>an</sub> in kPa</b>	<b>s<sub>ab</sub> in kPa</b>	<b>t in kPa</b>	<b>g in mm/s</b>	<b>b in kPa</b>	<b>r<sub>xy</sub><sup>2</sup></b>	<b>b/s<sub>M, st</sub></b>
1,92	0,85	1,28	8 ± 2	0,47 ± 0,04	0,937	0,20
	1,13	1,44	11 ± 2	0,50 ± 0,04	0,956	0,21
	1,54	1,65	10 ± 3	0,46 ± 0,05	0,932	0,19
4,0	1,63	2,32	9 ± 3	0,80 ± 0,08	0,743	0,18
	2,46	2,77	8 ± 2	0,83 ± 0,06	0,896	0,18
	3,15	3,2	9 ± 3	0,83 ± 0,10	0,775	0,18
8,0	3,16	5,02	9 ± 2	1,79 ± 0,14	0,926	0,19
	4,82	5,84	8 ± 2	1,57 ± 0,16	0,921	0,17
	6,34	6,62	8 ± 2	1,49 ± 0,12	0,897	0,16
<b>2...8</b>	<b>¾</b>	<b>¾</b>	<b>9</b>	<b>¾</b>	<b>¾</b>	<b>0,18</b>

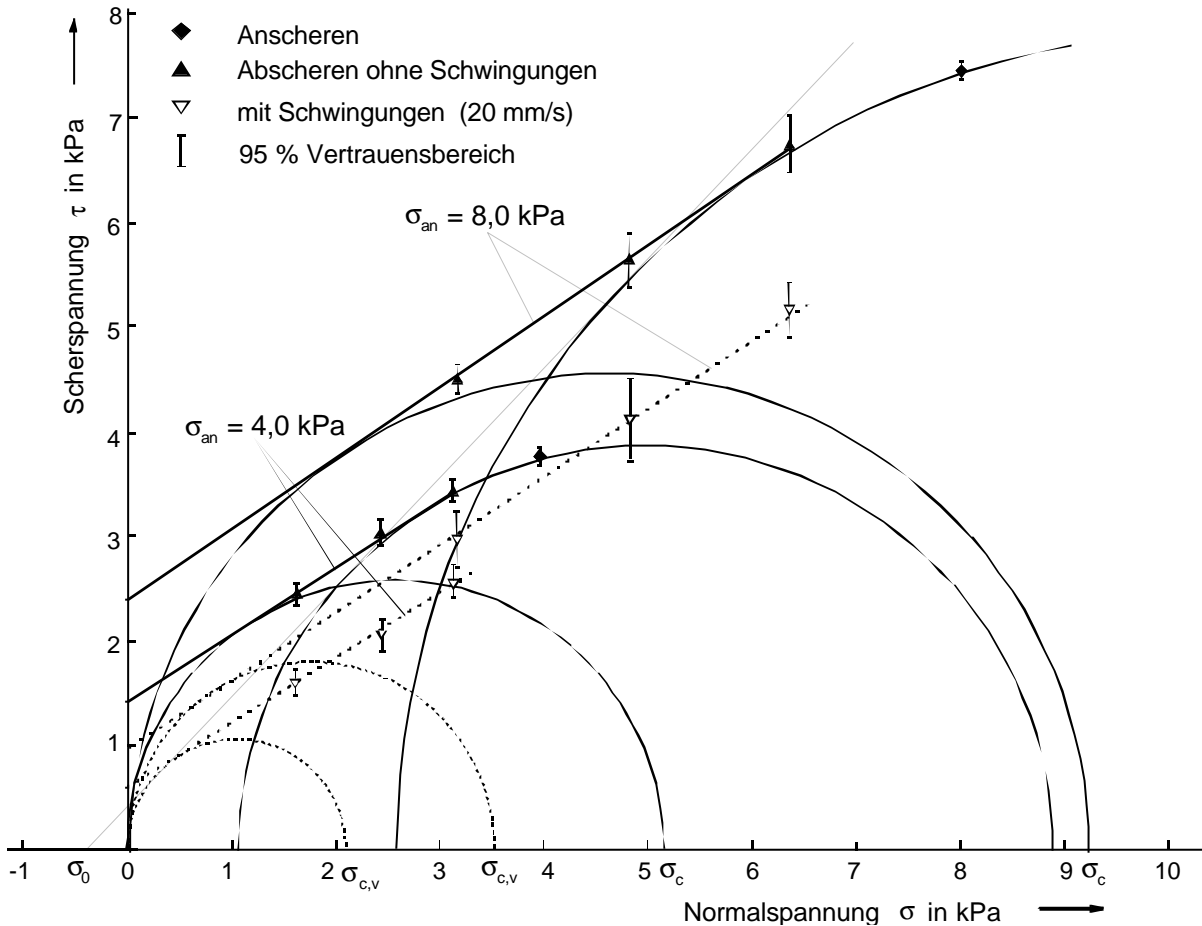


**Abb. 8.6:** Vergleich gemessener und berechneter Scherspannungs-Verhältnisse  $\tau_v / \tau$  für  $\text{CaCO}_3$  (oben) und  $\text{TiO}_2$  (unten)

### 8.2.4 Schwingungseinfluß auf die Fließkennwerte des beginnenden Fließens

Wie gezeigt wurde, sinken die Scherspannungen bei vorgegebener Schwinggeschwindigkeit innerhalb eines Fließortes um jeweils den gleichen Betrag. Das bedeutet für die Lage der Fließorte in der

MOHRschen Ebene, daß die Fließortgerade bei Schwingungseinwirkung zu kleineren Scherspannungen parallelverschoben wird, **Abb. 8.7**. Das Beispiel enthält zwei Fließorte für  $\text{CaCO}_3$  ohne Schwingungseinwirkung (durchgezogene Linien) und die dazugehörigen Schwingungs-Fließorte exemplarisch für eine Schwinggeschwindigkeit von  $\hat{v} = 20 \text{ mm/s}$ . Die Anstiege der Fließortgeraden mit und ohne Schwingungseinwirkung stimmen praktisch überein, wohingegen die Kohäsion  $\tau_c$  bei Schwingungseinwirkung deutlich sinkt.



**Abb. 8.7:** Fließorte mit (gestrichelt) und ohne Schwingungseinwirkung (durchgezogen) für  $\text{CaCO}_3$  ( $f = 100 \text{ Hz}$ ;  $\hat{a} = 12 \text{ m/s}^s$ )

Infolge des konstanten inneren Reibungswinkels  $\varphi_i$  muß mit  $\tau_c$  auch die einaxiale Druckfestigkeit  $\sigma_c$  abnehmen, da [164]:

$$\sigma_c = 2 \cdot \tau_c \frac{1 + \sin \varphi_i}{\cos \varphi_i} = 2 \cdot \sigma_z \frac{\sin \varphi_i}{1 - \sin \varphi_i} \quad (8-8).$$

Für die einaxiale Druckfestigkeit bei Schwingungseinwirkung folgt damit:

$$\sigma_{c,v} = 2 \cdot \tau_{c,v} \frac{1 + \sin \varphi_i}{\cos \varphi_i} = 2 \cdot \sigma_{z,v} \frac{\sin \varphi_i}{1 - \sin \varphi_i} \quad (8-9)$$

Mit  $\tau_{c,v}$  nach Gl. (3-32) wird Gl. (8-9) zu:

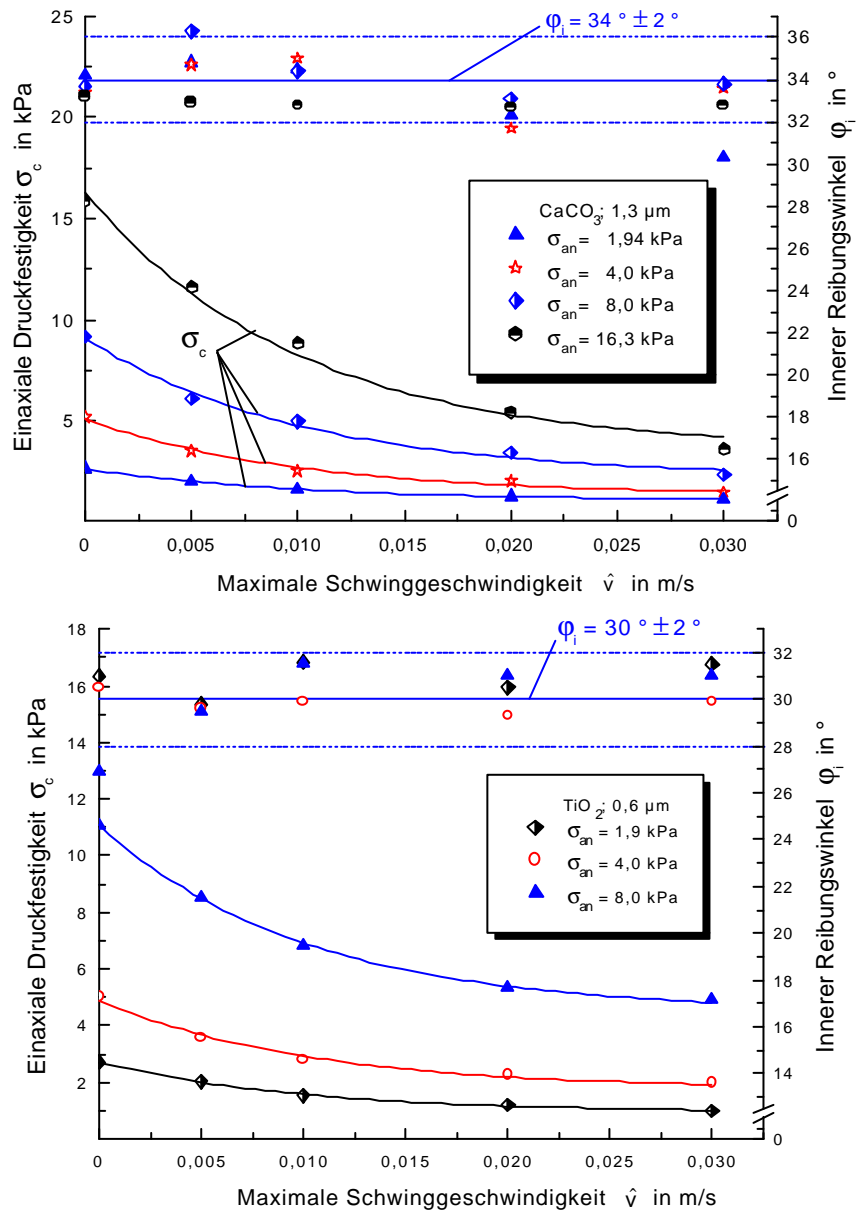
$$\sigma_{c,v} = 2 \cdot \tau_c \frac{1 + \sin \varphi_i}{\cos \varphi_i} \left\{ 1 - \frac{\beta}{\tau_c} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\hat{v}}{\gamma}\right) \right] \right\} \quad (8-10).$$

Die isostatische Zugfestigkeit  $\sigma_Z$  läßt sich durch die Kohäsion  $\tau_c$  und den inneren Reibungswinkel  $\varphi_i$  ausdrücken.

$$\sigma_Z = \tau_c / \tan \varphi_i \quad (8-11)$$

Die Kombination von Gl. (8-10) mit Gl. (8-11) führt schließlich auf:

$$\sigma_{c,v} = 2 \cdot \sigma_Z \frac{\sin \varphi_i}{1 - \sin \varphi_i} \left\{ 1 - \frac{\beta}{\sigma_Z \cdot \tan \varphi_i} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\hat{v}}{\gamma}\right) \right] \right\} \quad (8-12).$$



**Abb. 8.8:** Schwingungseinfluß auf die Fließkennwerte  $\varphi_i$  und  $\sigma_c$

**Abb. 8.8** veranschaulicht den Schwingungseinfluß auf die Fließkennwerte  $\varphi_i$  und  $\sigma_c$  für  $\text{CaCO}_3$  (oben) und  $\text{TiO}_2$  (unten). Der innere Reibungswinkel  $\varphi_i$  bleibt bei beiden Produkten weitestgehend in dem durch die gestrichelten Linien gekennzeichneten Streubereich für  $\varphi_i$ , der im Rahmen der Schwingungs-Scherversuche  $\pm 2^\circ$  beträgt (JENIKE-Versuch  $\pm 1^\circ$ ). Der innere Reibungswinkel  $\varphi_i$  kann also als invariant gegenüber Schwingungseinwirkung betrachtet werden.

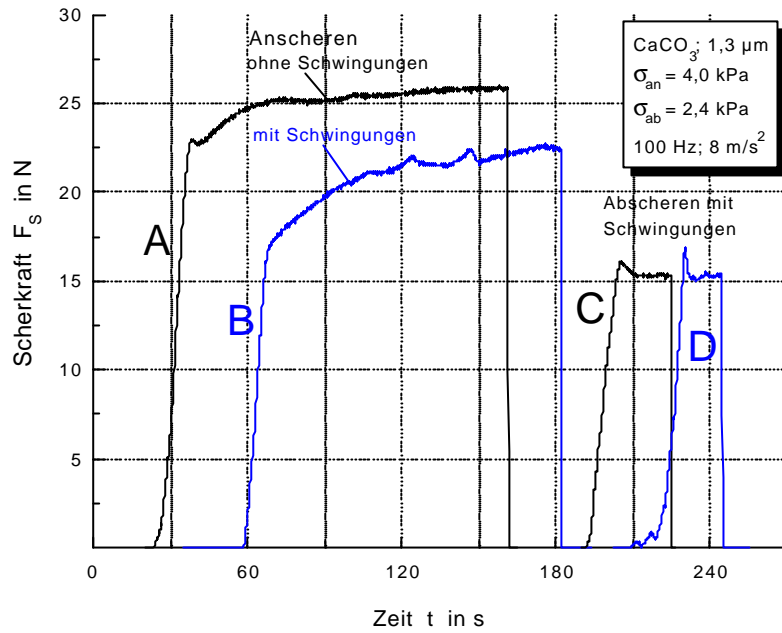
Die einaxiale Druckfestigkeit  $\sigma_c$  nimmt ähnlich wie die Scherspannung mit steigender Schwinggeschwindigkeit exponentiell ab und nähert sich einem Minimalwert, wie durch Gl. (8-10) vorausgesagt wird. Die einaxiale Druckfestigkeit ist eine wichtige Größe für die Silo-Dimensionierung. Sie bestimmt maßgeblich die minimale Auslaufweite eines Silotrichters, siehe Abschn. 4 und Abschn. 11.

### 8.3 Stationäres Fließen bei Schwingungseinwirkung

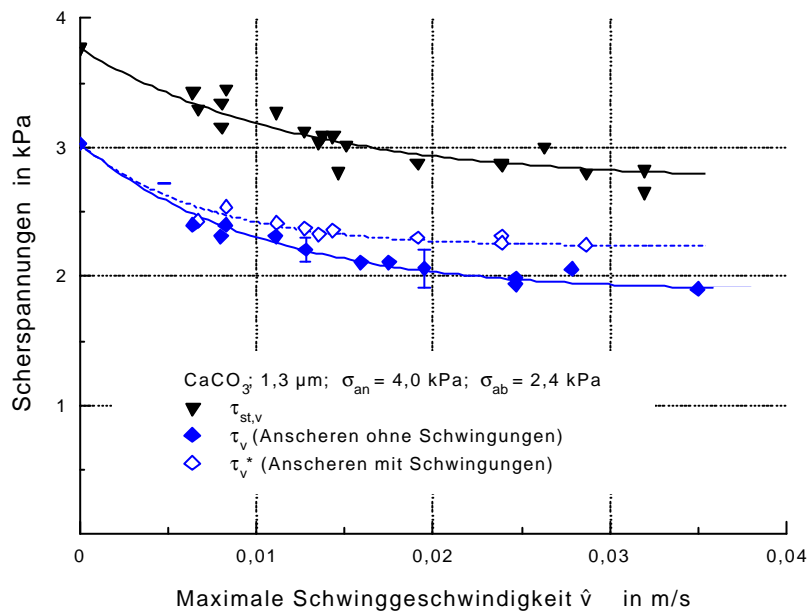
#### 8.3.1 Einfluß auf die Scherfestigkeit

Die nachfolgenden Ergebnisse wurden mit der Versuchsanordnung „Scheroberteil schwingt“ und Versuchsmethode B, also Schwingungseinleitung während des An- und Abscherens, ermittelt. **Abb. 8.9** zeigt typische Scherkraft-Verläufe. Die Kurven A und C repräsentieren die bisherige Vorgehensweise: Anscheren ohne, Abscheren mit Schwingungseinwirkung (hier mit  $f = 100 \text{ Hz}$  und  $\hat{a} = 8 \text{ m/s}^2$ ). Die Kurven B und D geben das Vorgehen nach Methode B wieder: Anscheren und Abscheren mit Schwingungseinwirkung. Beim Anscheren mit Schwingungseinwirkung fällt die erforderliche Scherkraft erwartungsgemäß geringer aus als beim Anscheren ohne Schwingungseinwirkung (Vergleich der Kurven A und B). Überraschenderweise unterscheiden sich die Abscherkräfte (Kurve C und D) nur um ca. 10 % voneinander. Die Scherkraft beim Abscheren hängt demnach nur geringfügig davon ab, ob während des stationären Fließens horizontale Schwingungen überlagert waren. Diese Beobachtung spricht ebenfalls für das Gedankenmodell der „Aktivierung“ (vgl. Abschn. 8.2.1). Die Schüttguteigenschaften werden durch den zusätzlichen geringfügigen Energieeintrag kaum bleibend verändert.

Der Unterschied der Abscherspannungen nach Anscheren mit Schwingungseinwirkung (Kurve D) betrug gegenüber den Ergebnissen nach Anscheren ohne Schwingungseinwirkung (Kurve C) maximal 10 % der Scherspannung  $\tau$ , **Abb. 8.10**. Die ausgefüllten Rhomben in **Abb. 8.10** stehen für die Scherfestigkeit bei Schwingungseinwirkung und vorausgegangenem stationärem Fließen ohne Schwingungseinwirkung (Methode A). Die offenen Rhomben zeigen das Verhalten nach Methode B, also nach stationärem Fließen mit Schwingungseinwirkung. Letztere liegen tendenziell etwas höher. Der Unterschied in den Abscherspannungen wird etwa ab Schwinggeschwindigkeiten von  $\hat{v} \approx 20 \text{ mm/s}$  signifikant, und verläuft dann gleichbleibend bei etwa  $\tau_v^* \approx 1,1 \cdot \tau_v$ .



**Abb. 8.9:** Typische Scherkraft-Zeit-Verläufe („Scheroberteil schwingt“; Schergeschwindigkeit: 2 mm/min)



**Abb. 8.10:** Vergleich nach Methode A und B gemessener Scherfestigkeiten

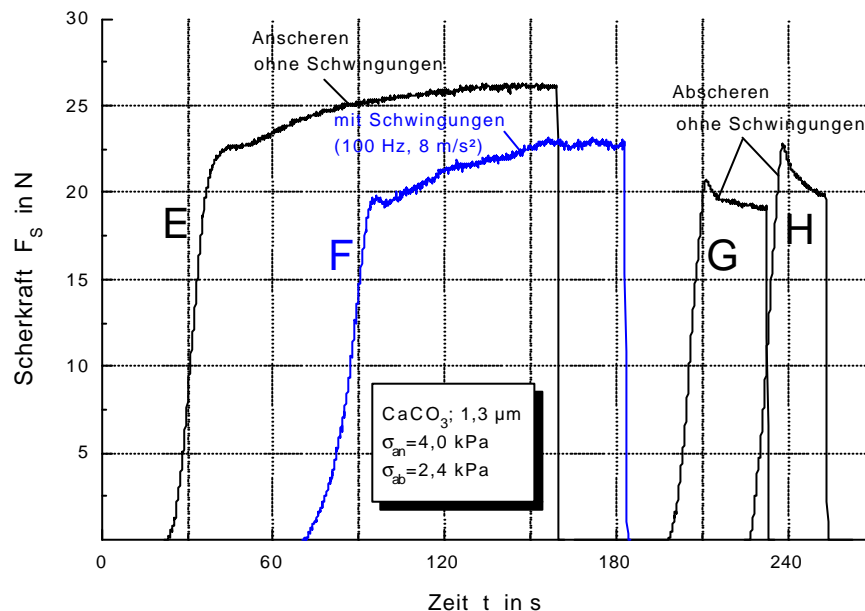
Die Anscherspannung bei Schwingungseinwirkung  $\tau_{st,v}$  wird durch die Dreiecke symbolisiert. Sie zeigt über der Schwinggeschwindigkeit den gleichen Verlauf wie die Abscherspannungen  $\tau_v$  in **Abb. 8.5**. Auch die Anpassung der Modellgleichung liefert mit **Tab. 8.1** übereinstimmende Werte für  $\beta$  und  $\gamma$ .

Um den Einfluß der Schwingungen beim Anscheren näher zu betrachten, wurden weitere Versuche mit einer modifizierten Prozedur durchgeführt. Dabei sollten die nach dem Anscheren mit Schwin-



gungseinwirkung eventuell vorhanden Unterschiede nicht durch die Schwingungseinleitung während des Abscherens verwischt werden. Bei diesen Versuchen wurden nur während des Anscherens Schwingungen eingeleitet. Das Abscheren erfolgte ohne Schwingungseinwirkung. Diese modifizierte Prozedur entspricht keiner der in **Tab. 6.4** definierten Methoden. Sie wurde dort nicht aufgenommen, da sie keine praktische Bedeutung besitzt. Sie soll lediglich das o.g. Argument entkräften, daß eigentlich vorhandene Unterschiede durch die Schwingungseinwirkung beim Abscheren verschleiert werden.

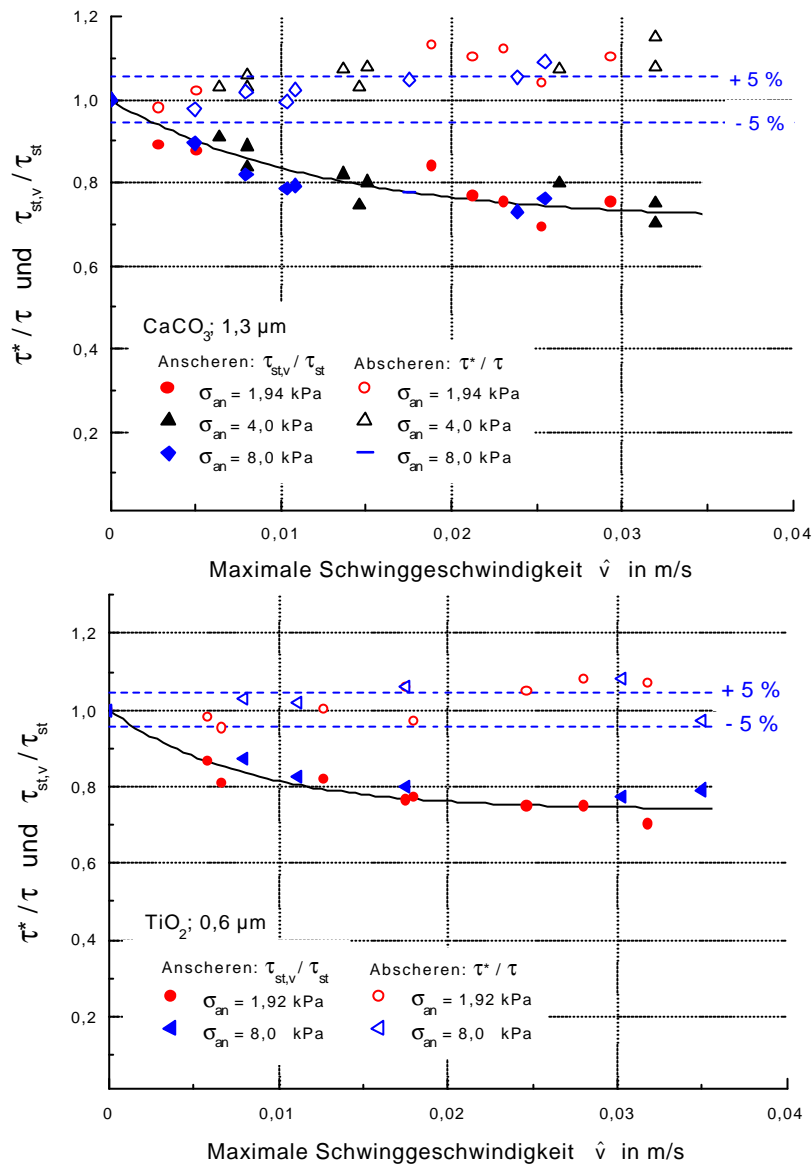
Die Scherkraft-Zeit-Kurven der modifizierten Versuche, **Abb. 8.11**, zeigen ein ähnliches Bild wie die Kurven in **Abb. 8.9**. Die Kurven E und G spiegeln den JENIKE-Versuch ohne Schwingungseinwirkung wider. Die Kurven F und H zeigen das Ergebnis der modifizierten Prozedur. Die Anscherkraft wird bei Schwingungseinwirkung erwartungsgemäß reduziert (Kurven E und F). Die Abscherkräfte – je ohne Schwingungseinwirkung – unterscheiden sich wieder um maximal 10 % (Kurven G und H).



**Abb. 8.11:** Scherkraft-Zeit-Verläufe bei modifizierter Versuchsdurchführung („Scheroberteil schwingt“, Schwingungen nur beim Anscheren, Schergeschw.: 2 mm/min)

Weitere Ergebnisse für unterschiedliche Anscher- und Abscher-Normalspannungen sind in **Abb. 8.12** zu sehen. Die ausgefüllten Symbole geben die Anscherspannung bei Schwingungseinwirkung  $\tau_{st,v}$  wieder, die hier mit der Anscherspannung ohne Schwingungseinwirkung  $\tau_{st}$  normiert wurde. Die offenen Symbole zeigen ein Scherspannungsverhältnis  $\tau^* / \tau$ . Durch  $\tau^*$  sind die Abscherspannungen der Versuche symbolisiert, bei denen die Probe während des Anscherens einer Schwingungseinwirkung ausgesetzt war, aber ohne Schwingungen abgescher wurde. Diese  $\tau^*$ -Werte sind auf die Abscherspannungen  $\tau$  des herkömmlichen ScherVersuchs bezogen. Die gestrichelten Linien kennzeichnen den Streubereich. Wie auch in **Abb. 8.10** offenbart sich ein geringfügiger Einfluß, der etwa

ab  $\hat{v} \approx 20 \text{ mm/s}$  signifikant wird. Darüber hinaus steigt  $\tau^* / \tau$  nicht weiter, sondern pendelt sich bei  $\tau^* / \tau \approx 1,1$  ein.



**Abb. 8.12:** Einfluß der Schwingungen beim Anscheren auf die Abscherspannung ohne Schwingungseinwirkung für  $\text{CaCO}_3$  (oben) und  $\text{TiO}_2$  (unten)

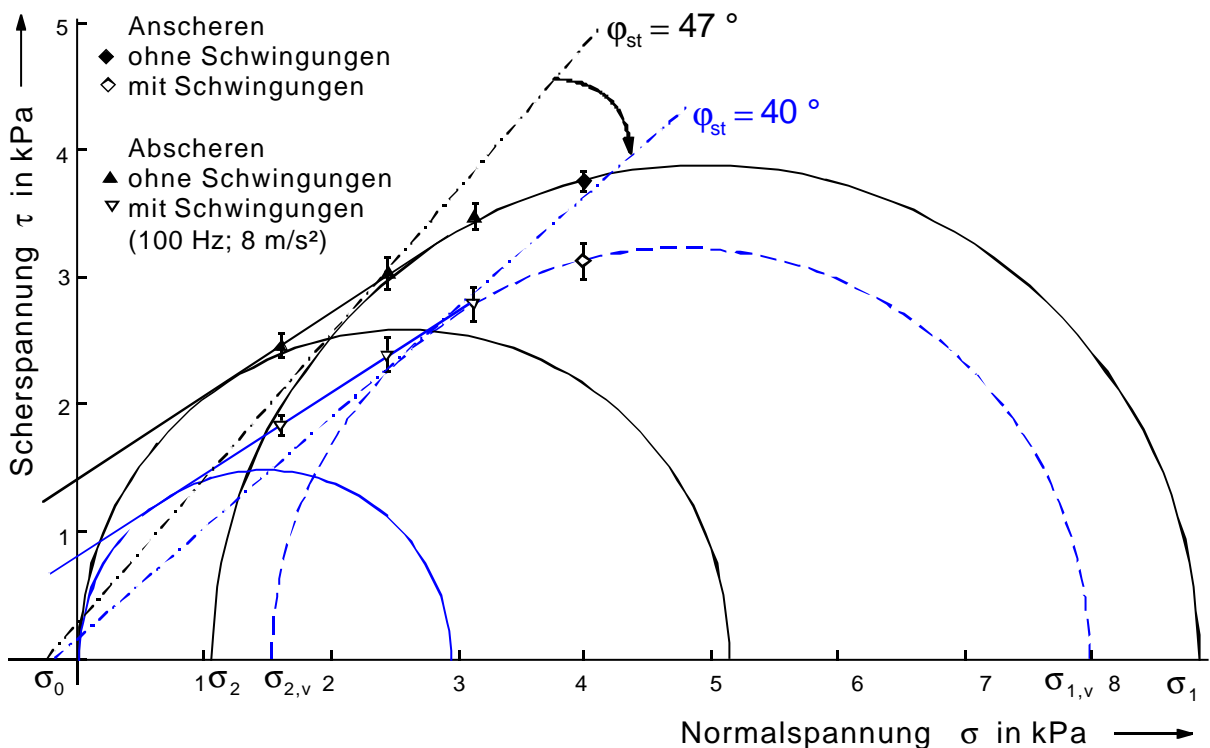
Die Ergebnisse der modifizierten Versuchsprozedur bestätigen die Aussage aus Methode B:

- Durch die Schwingungseinwirkung während des Anscherens wird der Scherwiderstand während des Anscherens reduziert.
- Nach Beendigung des Anscherens und Abschalten der Schwingungen unterscheidet sich die Scherfestigkeit der Proben nur geringfügig. Der Verfestigungszustand wird durch den Schwingungseintrag während des stationären Fließens nicht wesentlich beeinflusst. Die Abscherspannungen differieren um maximal 10 %. D.h., unabhängig davon, ob während des Anscherens Schwingungen eingeleitet werden, zeigt das Schüttgut im Anschluß annähernd gleiches Verhalten.

- Die geringen Unterschiede, die im untersuchten Bereich 10 % nicht überstiegen, können mit folgender Hypothese erklärt werden: Neben den horizontalen Schwingungen wirkt auch eine vertikale Schwingungskomponente, vgl. Abschn. 6.3.2. Die horizontalen Schwingungen beim stationären Fließen beeinflussen die Verfestigung der Probe nicht. Die etwas höhere Abscherkraft wird durch die vertikale Schwingungskomponente hervorgerufen. Diese wirkt während des Anscherens ausreichend lange (ca. 2 min), um bei höheren Schwinggeschwindigkeiten eine geringfügige Verdichtung zu verursachen. Dieser Sachverhalt muß z.B. bei kontinuierlich betriebenen Schwingtrichtern berücksichtigt werden.

### 8.3.2 Schwingungseinfluß auf die Fließkennwerte des stationären Fließens

Durch Einbeziehen der Anscherspannung bei Schwingungseinwirkung  $\tau_{st,v}$  werden die kompletten Fließorte einschließlich des MOHR-Kreises für stationäres Fließen zugänglich, **Abb. 8.13**. Gemäß (4-8) kann das stationäre Fließen durch folgende drei Parameter charakterisiert werden: Mittelpunktspannung des stationären Fließens  $\sigma_{M,st}$ , isostatische Zugfestigkeit des unverfestigten Gutes  $\sigma_0$  und stationärer Reibungswinkel  $\varphi_{st}$ .



**Abb. 8.13:** Schwingungseinfluß auf das stationäre Fließen für  $\text{CaCO}_3$ ; 1,3  $\mu\text{m}$

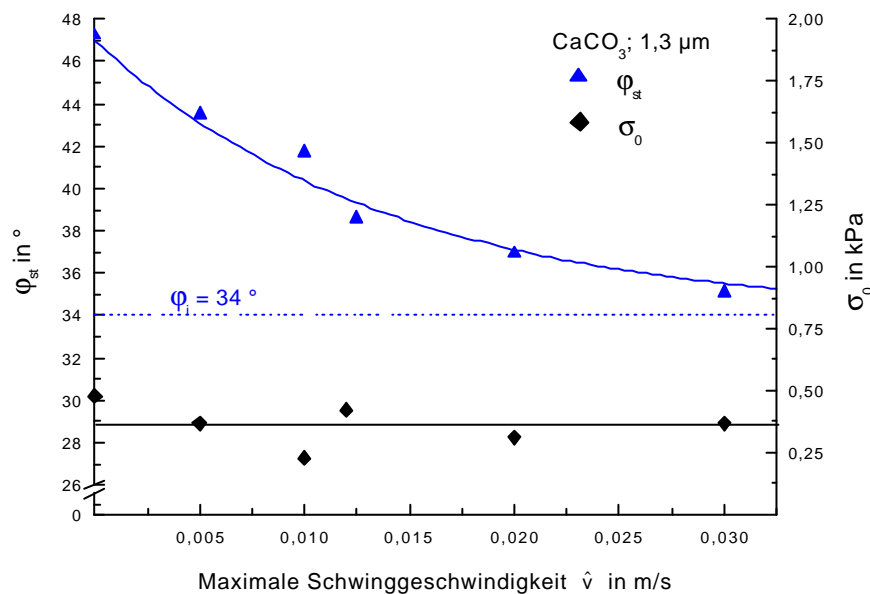
Wie in **Abb. 8.13** zu erkennen ist, verschiebt sich der Mittelpunkt des größten MOHR-Kreises  $\sigma_{M,st}$  bei Schwingungseinwirkung nur geringfügig. Die isostatische Zugfestigkeit des unverfestigten Gutes  $\sigma_0$  bleibt ebenfalls annähernd konstant. Beim stationären Reibungswinkel  $\varphi_{st}$  hingegen ist ein deutli-

cher Schwingungseinfluß zu beobachten, da  $\tau_{st}$  mit steigender Schwinggeschwindigkeit sinkt, während  $\sigma_{st}$  und  $\sigma_0$  unverändert bleiben, vgl. (4-9).

Die einzelnen Fließkennwerte  $\sigma_{M,st}$ ,  $\sigma_0$  und  $\varphi_{st}$  sind in **Abb. 8.14** bis **Abb. 8.16** jeweils über der maximalen Schwinggeschwindigkeit  $\hat{v}$  aufgetragen. **Abb. 8.14** zeigt den Verlauf von  $\varphi_{st}$  und  $\sigma_0$  für  $\text{CaCO}_3$ . Der stationäre Reibungswinkel bei Schwingungseinwirkung  $\varphi_{st,v}$  sinkt mit steigender Schwinggeschwindigkeit gemäß (4-9) und (3-32):

$$\tan \varphi_{st,v} = \frac{\tau_{st} - \beta \cdot [1 - \exp(-\hat{v}/\gamma)]}{(\sigma_{st} + \sigma_0)} \quad (8-13).$$

Wegen (4-12) kann  $\varphi_{st,v}$  nicht kleiner werden als der innere Reibungswinkel  $\varphi_i$ . Da der innere Reibungswinkel invariant gegenüber Schwingungseinwirkung war, Abschn. 8.2.4, ist  $\varphi_{st,v}$  durch den Wert des inneren Reibungswinkels limitiert. Im Falle des  $\text{CaCO}_3$ -Pulvers nähert sich  $\varphi_{st,v}$  mit steigender Schwinggeschwindigkeit asymptotisch dem Wert von  $\varphi_i$ , **Abb. 8.14**.

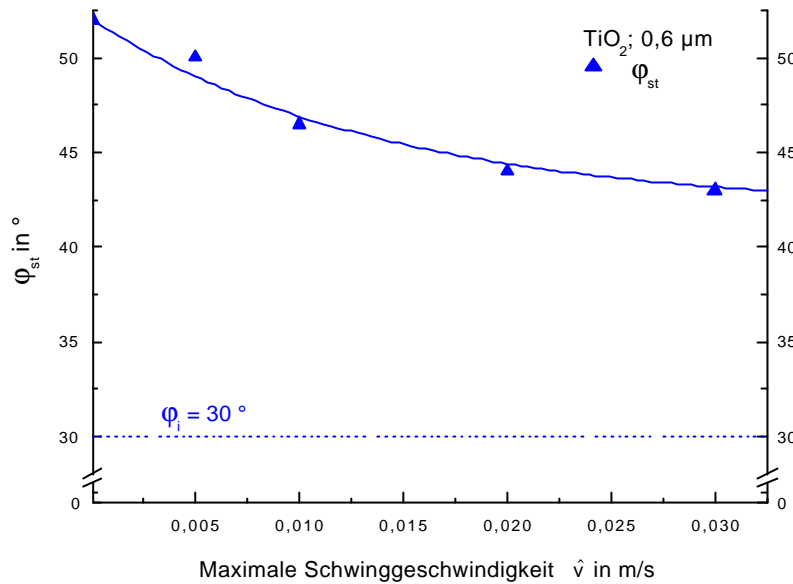


**Abb. 8.14:** Schwingungseinfluß auf die Fließkennwerte  $\varphi_{st}$  und  $\sigma_0$  für  $\text{CaCO}_3$

Das  $\text{TiO}_2$ -Pulver zeigt bezüglich des stationären Reibungswinkels ein ähnliches Verhalten wie  $\text{CaCO}_3$ , **Abb. 8.15**.  $\varphi_{st,v}$  sinkt mit steigender Schwinggeschwindigkeit und nähert sich einem Minimalwert, der hier allerdings deutlich höher ist als der Wert des inneren Reibungswinkels  $\varphi_i$ . Das heißt,  $\varphi_{st,v}$  wird durch den Wert des inneren Reibungswinkels limitiert. Dieser minimal mögliche Wert  $\varphi_{st,v,min} \approx \varphi_i$  wird aber abhängig vom Schüttgut nicht zwangsläufig erreicht.

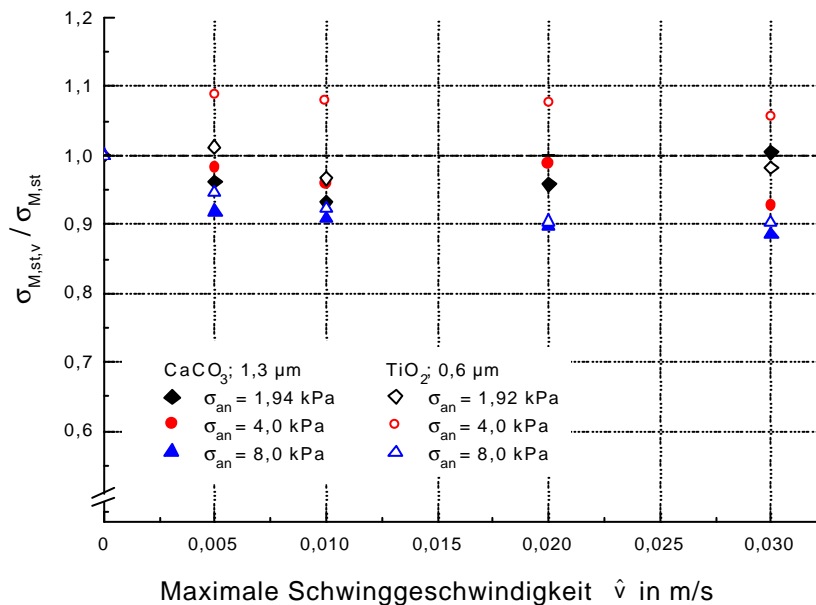
Im Hinblick auf die unverfestigte isostatische Zugfestigkeit  $\sigma_0$  zeigt das  $\text{TiO}_2$ -Pulver ein für kohäsive Schüttgüter eher untypisches Verhalten, vgl. Abschn. 7.4. Der stationäre Fließort verläuft durch den

Koordinatenursprung, also  $\sigma_0 \approx 0$ .  $\sigma_0$  ändert sich bei Schwingungseinwirkung nicht, also  $\sigma_0 \approx \text{konst.} \approx 0$ .



**Abb. 8.15:** Schwingungseinfluß auf den stationären Reibungswinkel  $\varphi_{st}$  für  $\text{TiO}_2$  ( $\sigma_0 \approx \text{konst.} \approx 0$ )

Der dritte Fließkennwert nach (4-8), die Mittelpunktspannung  $\sigma_{M,st}$ , ändert sich bei Schwingungseinwirkung nur geringfügig und kann für den jeweiligen Fließort als näherungsweise konstant angenommen werden, **Abb. 8.16**.

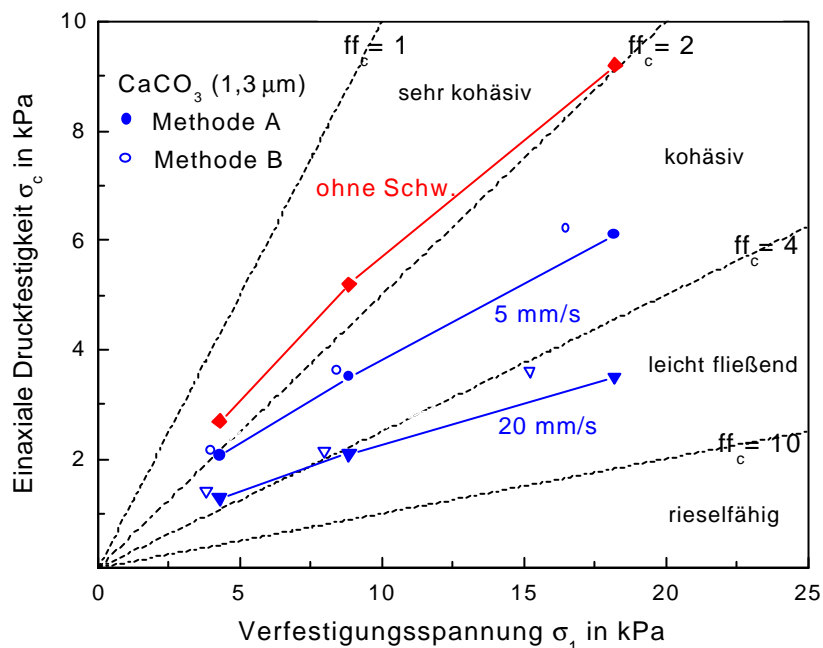


**Abb. 8.16:** Schwingungseinfluß auf die Mittelpunktspannung des stationären Fließens  $\sigma_{M,st}$  für  $\text{CaCO}_3$  und  $\text{TiO}_2$

## 8.4 Schwingungseinfluß auf die Fließfunktion

Der Einfluß der Schwingungseinwirkung auf die Fließfähigkeit von Schüttgütern läßt sich anhand der Fließfunktion  $ff_c$  veranschaulichen, vgl. Abschn. 3.4. **Abb. 8.17** zeigt exemplarisch Fließfunktionen für Kalksteinpulver in reziproker Darstellung, also im  $\sigma_c$ - über  $\sigma_1$ - Diagramm. Ohne Schwingungseinwirkung liegt die  $\sigma_c$  -  $\sigma_1$  - Kurve des Kalksteinpulvers oberhalb der sogen. Fließfähigkeitsgrenze, also im Gebiet  $ff_c < 2$ . Das bedeutet, nach der Klassifikation von JENIKE [60] ist das Pulver unter alleiniger Schwerkraftwirkung nicht fließfähig. Bereits bei geringen Schwingungsgeschwindigkeiten, z.B.  $\hat{v} = 5 \text{ mm/s}$ , erzielt man eine deutliche Fließverbesserung. Für  $\hat{v} = 20 \text{ mm/s}$  wird  $ff_c > 4$ . Die  $\sigma_c$  - Kurve verschiebt sich in den Bereich leicht fließenden Schüttgüter.

Für die Druckfestigkeits-Kurven bei Schwingungseinwirkung sind in **Abb. 8.17** jeweils volle und offene Symbole eingetragen. Die vollen Symbole wurden mit Methode A ermittelt, also Schwingungseinwirkung während des Abscherens. Die offenen Symbole resultieren aus Versuchen gemäß Methode B, Schwingungen beim An- und Abscheren. Letztere beinhalten sowohl die anscheinende Verringerung der Verfestigungsspannung  $\sigma_1$  durch den Schwingungseintrag während des Anscherens, als auch die etwa 10 %ige Erhöhung der Schüttgutfestigkeit nach dem Anscheren mit Schwingungseinwirkung, vgl. Abschn. 8.3.



**Abb. 8.17:** Schwingungseinfluß auf die Lage der Fließfunktion  $ff_c$ , dargestellt im  $\sigma_c$  -  $\sigma_1$  -Diagramm

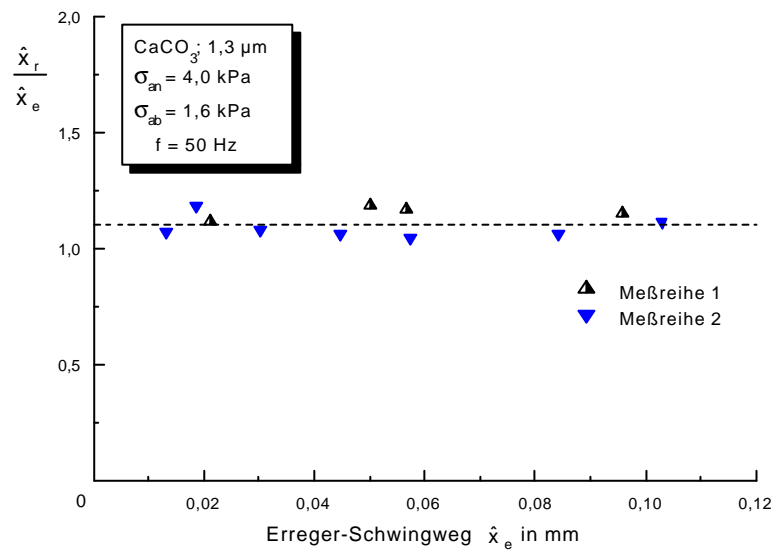
## 9 Dämpfung und Resonanz und deren Einfluß auf die Scherfestigkeit

### 9.1 Diskussion der Modelle

Die in Abschnitt 5.2 beschriebenen rheologischen Schüttgutmodelle werden hier mit experimentellen Ergebnissen verglichen. Im Vordergrund stehen experimentelle Untersuchungen zum Betrag des Frequenzganges für den fußpunkterregten Schwinger („Scherzelle schwingt“)  $|H(f)| = \hat{x}_r / \hat{x}_e = f(f)$ , vgl. Abschn. 6.5. Als Versuchsprozedur wurde vorwiegend Methode A, Schwingungseinleitung während des Abscherens, verwendet. Orientierende Untersuchungen mit Methode B zeigten nichts prinzipiell Neues.

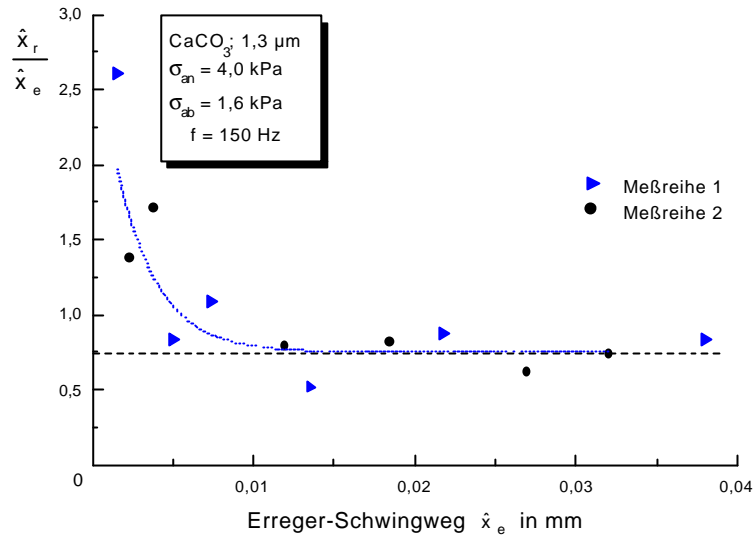
#### Auswertung des Schwingweg-Verhältnisses $\hat{x}_r / \hat{x}_e$

Das Verhältnis der Schwingweg-Amplituden  $\hat{x}_r / \hat{x}_e$  blieb i.d.R. für jeweils eine bestimmte Frequenz bei variierendem  $\hat{x}_e$  konstant, **Abb. 9.1**.



**Abb. 9.1:** Typisches experimentelles Ergebnis für  $\hat{x}_r / \hat{x}_e$  bei  $f = \text{konst.}$

Bei höheren Frequenzen als etwa 150 Hz traten Abweichungen vom beschriebenen Verhalten zutage, die jedoch konstruktionsbedingt sind. Sie konnten nur im Bereich  $\hat{x}_e < 10$  µm beobachtet werden, **Abb. 9.2**. Dieser Wert kann als „Spiel“ zwischen Schüttgut und Scherzelle interpretiert werden. Bewegungen in diesem Bereich werden noch nicht hinreichend durch das Schüttgut gedämpft. Die resultierenden Schwingwege  $\hat{x}_r$  sind aufgrund der Massendifferenz zwischen Scherring und Scherunterteil größer als die Erregerschwingwege  $\hat{x}_e$ . Dieser Effekt kommt besonders bei hohen Frequenzen zum Tragen, da sich der verwertbare Meßbereich mit steigender Frequenz zu kleineren Schwingwegen verschiebt.



**Abb. 9.2:** Meßwerte des Verhältnisses  $\hat{x}_r / \hat{x}_e$  über dem Erregerschwingweg  $\hat{x}_e$  mit konstruktiv bedingten Abweichungen im Bereich  $\hat{x}_e < 10 \mu\text{m}$

Der konstante Verlauf des Schwingweg-Verhältnisses  $\hat{x}_r / \hat{x}_e$  gemäß **Abb. 9.1** untermauert die a priori getroffene Annahme linear-viskoser Dämpfung. Im Unterschied dazu zeigt der quadratisch-viskose Dämpfer ein qualitativ anderes Verhalten. Für kleine Frequenzen sinkt  $\hat{x}_r / \hat{x}_e$  mit steigendem  $\hat{x}_e$ , während  $\hat{x}_r / \hat{x}_e$  für hohe Frequenzen mit steigendem  $\hat{x}_e$  wächst, vgl. **Abb. 5.15**.

### Die Frequenzgang-Beträge $\hat{x}_r / \hat{x}_e = f(f)$

ROBERTS [115-116] konnte das Verhalten der von ihm untersuchten Erze mit Partikelgrößen von 1 mm durch ausschließlich linear-viskose Dämpfung befriedigend wiedergeben. Dabei berief er sich auf folgende Modellvorstellung: Der Schwingweg ist klein gegenüber der Partikelgröße ( $\hat{x}_{\text{max}} \leq 0,1 \text{ mm}$ ;  $d \approx 1 \text{ mm}$ ). Die Dämpfung wird vorrangig durch Deformation der Partikeln und der adsorbierten Schichten hervorgerufen, nicht durch Reibung zwischen den Partikeln. Die Dämpfung wird durch den viskosen Anteil (Festkörperdämpfung) dominiert.

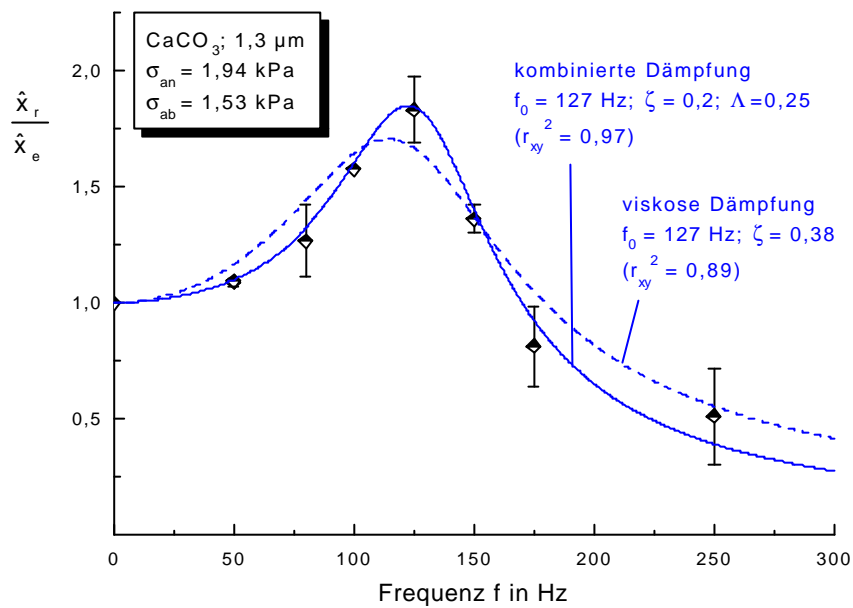
Die Annahme dominierender viskoser Dämpfung scheint gerechtfertigt, da ROBERTS relativ geringe Dämpfungen beobachtete, mit  $\zeta \approx 0,1$ . In diesem Bereich unterscheiden sich COULOMB- und viskose Dämpfung kaum, vgl. Abschn. 5.2. Die gesamte Dämpfung kann durch einen äquivalenten Dämpfungsfaktor wiedergegeben werden, vgl. [59].

$$\zeta_{\text{äqu}} = \zeta_{\text{vis}} + \zeta_{\text{Coul}} \quad (9-1)$$

Diese Betrachtungsweise führt schließlich auf das linear-viskose Modell (5-36). Die Einbeziehung von (9-1) hat weder Einfluß auf den Kurvenverlauf, noch sind Aussagen zum Anteil der einzelnen Dämpfungsmechanismen möglich.



Für die hier verwendeten Pulver trifft keine der beiden Aussagen zu. Folglich kann der Anteil der COULOMB-Dämpfung nicht vernachlässigt werden. **Abb. 9.3** zeigt ein typisches experimentelles Ergebnis für das Kalksteinmehl (weitere Ergebnisse siehe Anlage VII). Die Symbole repräsentieren die Meßergebnisse mit den 95 % Vertrauensintervallen. Die gestrichelte Linie gibt das viskose Modell, Gl. (5-36), wieder, das mittels nichtlinearer Regression angepaßt wurde, vgl. Abschn. 6.5. Bei allen Ergebnissen war die Flankensteilheit der gemessenen Kurve größer, als durch das viskose Modell wiedergegeben werden konnte. Das Modell mit kombinierter viskoser und COULOMB-Dämpfung, Gl. (5-82), (durchgezogene Linie) kann die Meßwerte besser beschreiben, da die Kurve durch den COULOMB-Einfluß bei gleichem Maximalwert schmaler wird, vgl. **Abb. 5.12**. Dies zeigt sich auch in den ermittelten Werten für das Bestimmtheitsmaß (siehe Anlage III)  $r_{xy}^2$ , **Tab. 9.1**.



**Abb. 9.3:** Vergleich der Modelle viskoser und kombinierter COULOMB- und viskoser Dämpfung anhand experimenteller Ergebnisse für CaCO<sub>3</sub>

**Tab. 9.1:** Bewertung der Modellanpassung für CaCO<sub>3</sub> anhand des Bestimmtheitsmaßes  $r_{xy}^2$

$\mathbf{s_{an}}$ in kPa	$\mathbf{s_{ab}}$ in kPa	$\mathbf{r_{xy}^2}$ viskose Dämpfung	$\mathbf{r_{xy}^2}$ kombinierte Dämpfung
1,94	0,84	0,911	0,966
	1,5	0,894	0,972
4,0	1,6	0,841	0,906
	3,1	0,774	0,852
	4,0	0,683	0,831

Erwartungsgemäß gibt das Modell reiner viskoser Dämpfung die experimentellen Ergebnisse nur unbefriedigend wieder. Das gleiche gilt für das Modell ausschließlicher COULOMB-Dämpfung. In diesem Fall treten unabhängig vom Betrag der Reibung an der Resonanzstelle keine endlichen Ausschläge auf. Es sind im wesentlichen nur die Zustände „unendlicher Ausschlag“ und „Stillstand“ möglich, vgl. Abschn. 5.2.4.

Genausowenig wie COULOMB-Reibung und Viskosität kann der elastische Anteil vernachlässigt werden, da ohne Elastizität keine Resonanz auftritt. Somit müssen alle drei Deformationsanteile des vorgeschlagenen Modells berücksichtigt werden.

### Auswertung der Phasenlage

Zusätzlich zum Betrag des Frequenzganges  $\hat{x}_r / \hat{x}_e$  liefern die Messungen die Phasendifferenz  $\psi$  zwischen Erreger- und Antwortsignal. Beide Diagramme basieren auf den selben experimentellen Ergebnissen. Die Auswertung des Phasensignal z.B. mit Gl. (5-38) für das linear-viskose Modell oder Gl. (5-83) für kombinierte Dämpfung kann ebenfalls für die Bestimmung von Eigenfrequenz und Dämpfungsparameter genutzt werden. Die gemessenen Phasenwinkel zeigten jedoch starke Streuungen, besonders in Resonanznähe. Als mögliche Ursache zeigen kleine Unterschiede in der gemessenen Zeit besonders bei hohen Frequenzen große Auswirkungen auf  $\psi$ . Z.B. beträgt die Dauer einer Viertelschwingung (also  $\pi/2$ ) bei einer Frequenz von 250 Hz nur  $T = 10^{-3}$  s. Aufgrund der deutlich besseren Reproduzierbarkeit der  $\hat{x}_r / \hat{x}_e = f(f)$ -Kurven wurde die Auswertung der Amplitudenwerte bevorzugt.

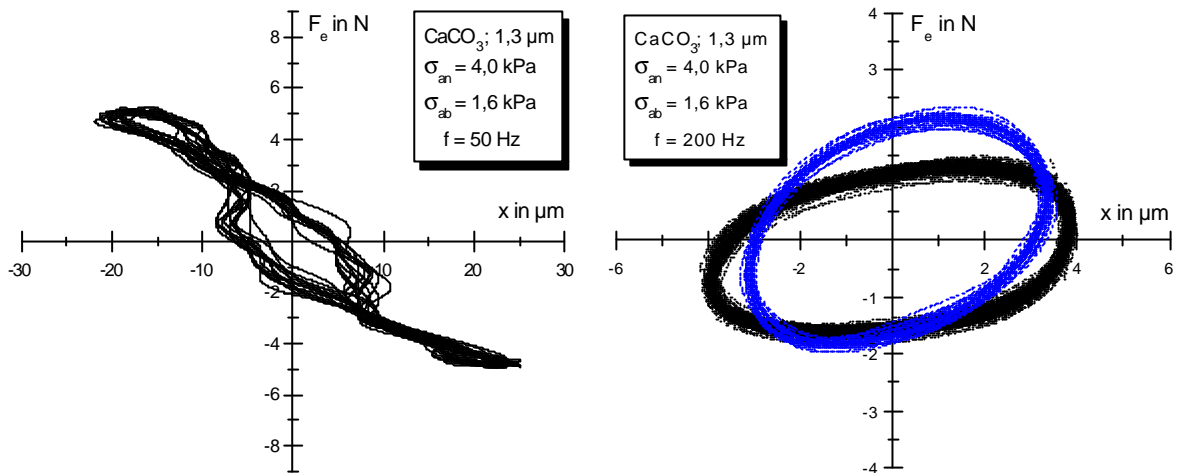
### Bewertung der Hystereseschleifen

Ein weiteres Indiz für die vorhandenen Dämpfungsmechanismen liefern die Hystereseschleifen. Im Fall reiner viskoser Dämpfung ist die Hystereseschleife eine Ellipse. Nichtlineare Anteile äußern sich z.B. in Spitzen, vgl. Abschn. 5.2.

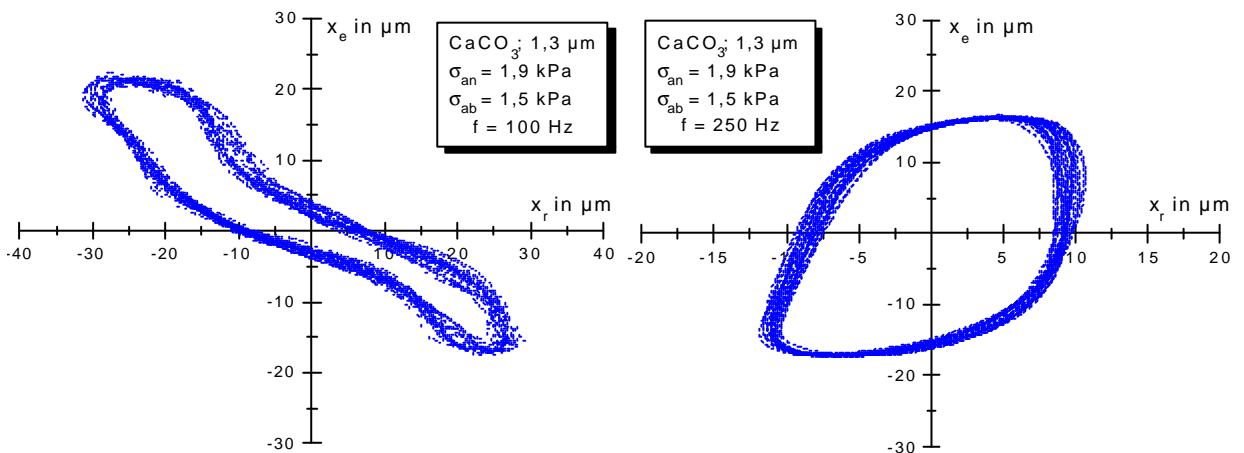
**Abb. 9.4** und **9.5** zeigen einige Beispiele für experimentell ermittelte Hystereseschleifen. Den Kurven in **Abb. 9.4** liegt die Versuchsanordnung „Scheroberteil schwingt“ zugrunde. Die linke Kurve zeigt starke Abweichungen von der Form einer idealen Ellipse, was ebenfalls auf nicht alleinige linear-viskose Dämpfung deutet. Bei steigenden Frequenzen (rechte Kurve) verschiebt sich die Phasenlage und die Kurve wird breiter, wie von der Theorie vorausgesagt. Abweichungen von der Ellipsenform sind hier nicht mehr zu erkennen, vgl. [91].

Für eine Parameterbestimmung eignen sich die Hystereseschleifen kaum, da sie mit der vorhandenen Versuchsanordnung nicht genau genug reproduzierbar sind, wie die zwei Beispielkurven (**Abb. 9.4** rechts) zeigen. Besonders in Resonanznähe, also  $\Omega \approx 0,9 \dots 1,1$ , traten noch deutlich größere Abweichungen auf.

Äquivalente Kurven für die Versuchsanordnung „Scherzelle schwingt“ sind in **Abb. 9.5** dargestellt. Anstelle der Erregerkraft  $F$  ist auf der Ordinate der Erregerschwingweg  $x_e$  aufgetragen. Qualitativ liefern die Kurven das gleiche Ergebnis. Bewegungen mit ausgeprägten Stillständen wurden im untersuchten Bereich nicht beobachtet, vgl. 5.2.4.



**Abb. 9.4:** Hystereseschleifen („Scheroberteil schwingt“) für  $\Omega \approx 0,4$  (links) und  $\Omega \approx 1,5$  (rechts)



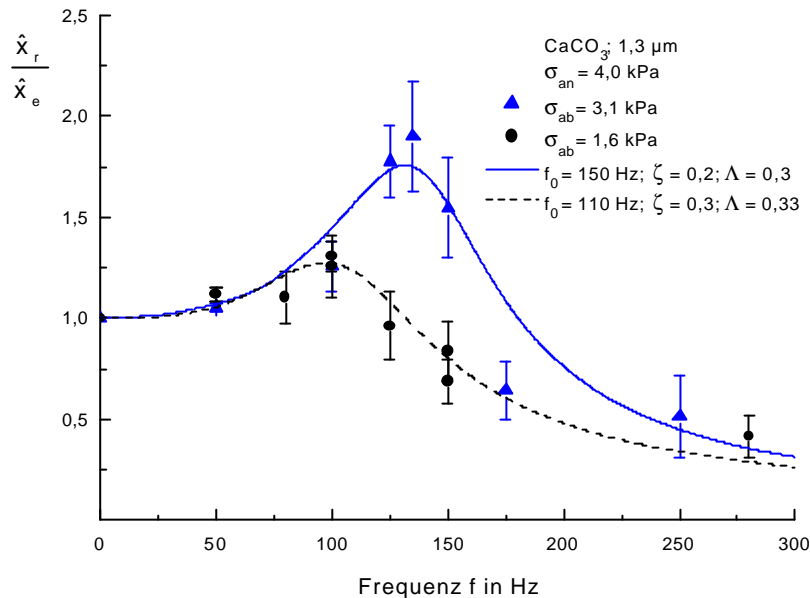
**Abb. 9.5:** Hystereseschleifen („Scherzelle schwingt“) für  $\Omega \approx 0,8$  (links) und  $\Omega \approx 2$  (rechts)

## 9.2 Bestimmung und Interpretation der Modellparameter $f_0$ , $\mathbf{z}$ und $\mathbf{L}$

### 9.2.1 Einfluß der Normalspannungen $\mathbf{s}_{ab}$ und $\mathbf{s}_{an}$

Bei konstanter Verfestigungsspannung  $\sigma_{an}$  kann der Einfluß der Abscher-Normalspannung  $\sigma_{ab}$  folgendermaßen gedeutet werden: Die Partikelkontakte werden bei steigendem  $\sigma_{ab}$  stärker zusammengepreßt. Die Resonanzstelle  $f_{max}$  wandert zu größeren Frequenzen und die Dämpfung verringert sich. Dies spiegelt sich in einem höheren Maximum der  $\hat{x}_r / \hat{x}_e$ -Kurve wieder, das zu höheren Frequenzen verschoben wird, **Abb. 9.6**.

Die steigende Masse der aufgebrachten Gewichte bei steigender Normalspannung ließe einen gegenteiligen Effekt erwarten, also Verschiebung der Resonanz zu kleineren Frequenzen. Die Masse spielt hier jedoch kaum eine Rolle, da sie über ein Joch aufgebracht wird, dessen Eigenfrequenz unter 1 Hz liegt. Die Erregerfrequenz ist zwei Größenordnungen größer. Die Gewichte werden praktisch nicht mitbeschleunigt, gehen somit nicht in die schwingende Masse  $m$  ein. Eine Erhöhung der Normalspannung ist somit nicht mit einer adäquaten Erhöhung der schwingenden Masse verbunden.

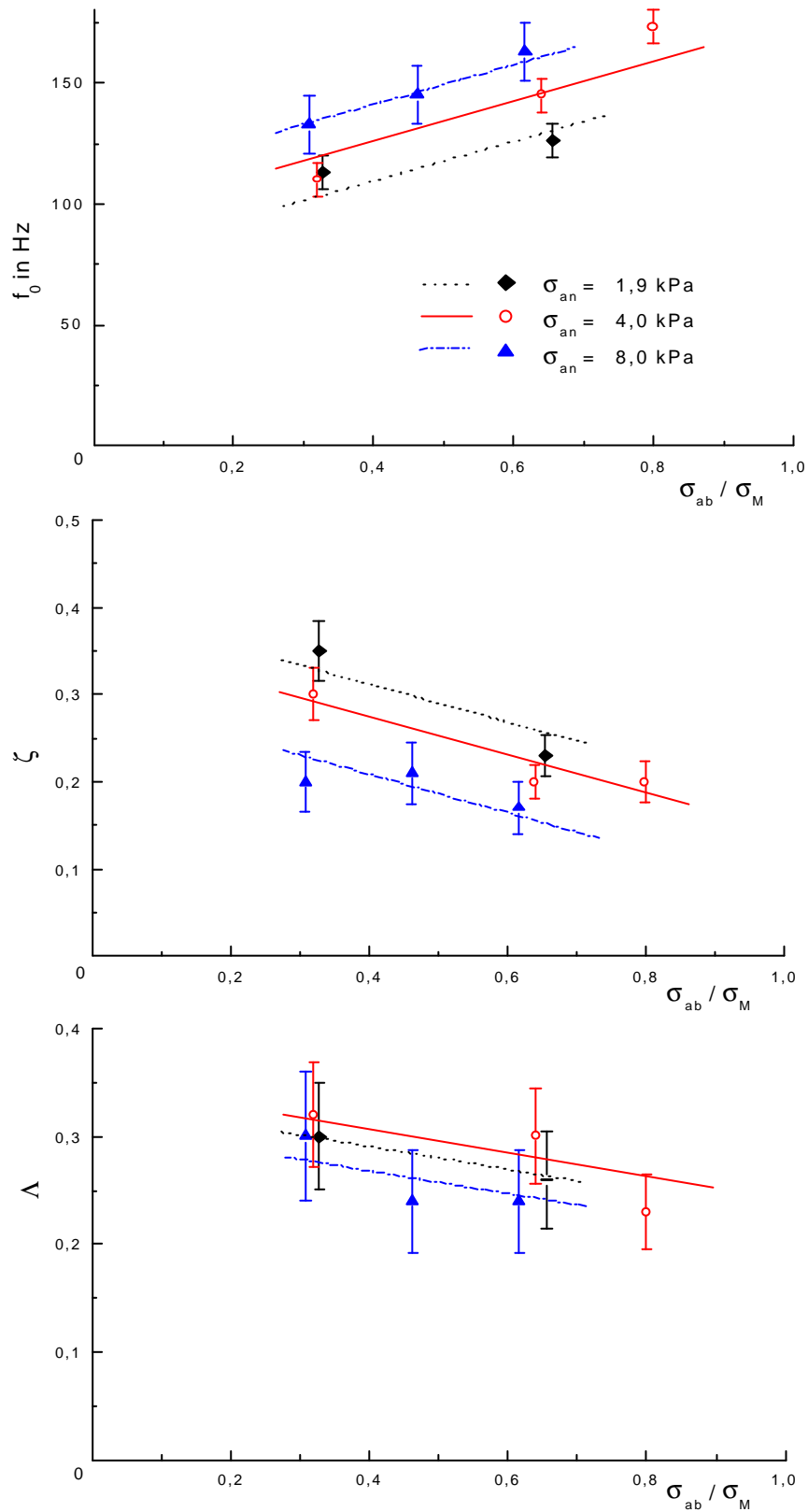


**Abb. 9.6:** Einfluß der Normalspannung  $\sigma_{ab}$  auf die Modellparameter  $f_0$ ,  $\zeta$  und  $\Lambda$

Eine Erhöhung der Anscher-Normalspannung  $\sigma_{an}$  zeigt eine ähnliche Wirkung wie eine steigende Spannung  $\sigma_{ab}$ . Sie führt zu einer stärkeren Verfestigung der Probe und das Pulver kommt mit zunehmendem  $\sigma_{an}$  dem Festkörperzustand näher. Folglich wächst die Resonanzfrequenz  $f_{max}$  und die Dämpfung wird geringer, d.h. der Maximalausschlag steigt.

Dieses Verhalten soll nun anhand der Modellparameter Eigenfrequenz des ungedämpften Schwingers  $f_0$ , dimensionsloses Dämpfungsmaß der viskosen Dämpfung  $\zeta$  und Dämpfungsverhältnis der COULOMB-Dämpfung  $\Lambda$  diskutiert werden. In **Abb. 9.7** sind die Parameter  $f_0$ ,  $\zeta$  und  $\Lambda$  über der Abscher-Normalspannung  $\sigma_{ab}$  aufgetragen, mit  $\sigma_{an}$  als Schar-Parameter. Hierfür wurde  $\sigma_{ab}$  auf die Mittelpunktsspannung des stationären Fließens  $\sigma_{M,st}$  bezogen.

Bei steigendem  $\sigma_{ab}$  steigt die Eigenfrequenz  $f_0$ , während sich die Dämpfungsmaße  $\zeta$  und  $\Lambda$  verringern. Wächst die Spannung  $\sigma_{an}$ , nimmt ebenfalls die Eigenfrequenz  $f_0$  zu. Entsprechend umgekehrt verhält sich das viskose Dämpfungsmaß  $\zeta$ . Aufgrund der relativ großen Versuchsstreuung ist dieser Einfluß nur tendenziell erkennbar. Signifikante Unterschiede treten nur für  $\zeta$  und  $f_0$  beim Vergleich der Fließorte 1 und 3 auf.



**Abb. 9.7:** Verlauf der Modellparameter  $f_0$ ,  $\Lambda$  und  $\zeta$  in Abhängigkeit von  $\sigma_{an}$  und  $\sigma_{ab}$  für  $\text{CaCO}_3$ ,  $1,3 \mu\text{m}$

Für  $\Lambda$  kann kein Einfluß von  $\sigma_{an}$  und damit der Verfestigung beobachtet werden. Dies wird plausibel, wenn man den Mechanismus der Schüttgutdeformation bei Schwingungseinwirkung näher betrachtet.

Für die Deformation durch Schwingungseinwirkung muß ein dem stationären Fließen vergleichbarer Zustand angenommen werden, abgesehen vom kurzzeitigen Einschwingvorgang. Nur so kann der Forderung nach zeitlich konstanten Schüttguteigenschaften genügt werden (Annahme 3), Abschn. 5.1.2). Diese Annahme scheint um so mehr gerechtfertigt, da die vorliegenden Analysen auf Bewegungen ohne Stillstände beschränkt sind, also in der Tat eine zumindest ununterbrochene harmonische Schüttgutdeformation vorliegt. Das stationäre Fließen kann gemäß (4-9) beschrieben werden durch

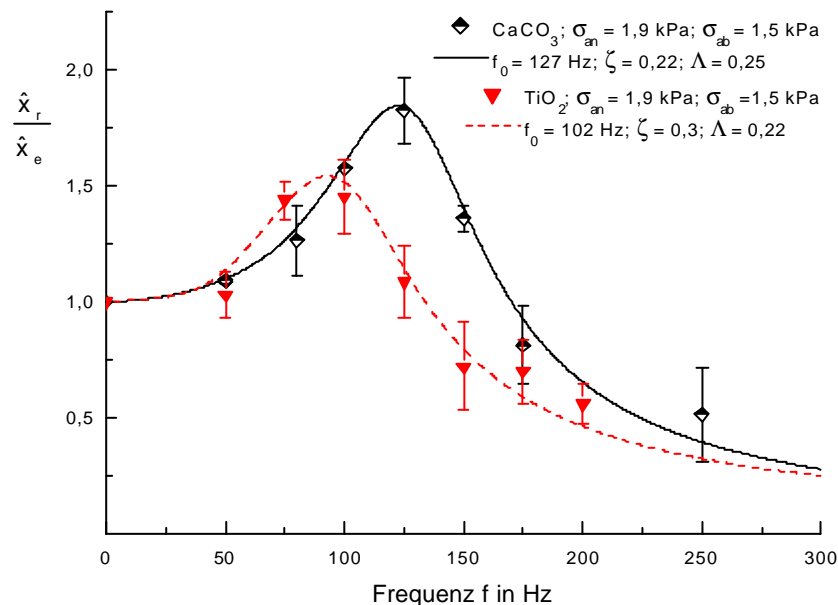
$$\tau_{st} = \tan \varphi_{st} (\sigma_{st} + \sigma_0) \quad (4-9).$$

D.h. die Kraft bzw. Scherspannung, die aus dem plastischen stationären Fließen resultiert, ist unabhängig vom Verfestigungsniveau.

Der Einfluß von  $\sigma_{ab}$  ist hier aufgrund der Streuung ebenfalls nicht signifikant, so daß man mit hinreichender Genauigkeit sagen kann:  $\Lambda \approx \text{konst.} \approx 0,28$ .

### 9.2.2 Einfluß des Schüttgutes – Vergleich von $\text{CaCO}_3$ mit $\text{TiO}_2$

Der Einfluß des Materials soll hier nur qualitativ diskutiert werden. **Abb. 9.8** enthält experimentelle Frequenzgang-Beträge für  $\text{CaCO}_3$  und  $\text{TiO}_2$  bei vergleichbaren Verfestigungs- und Abscherbedingungen.



**Abb. 9.8:** Vergleich der Frequenzgang-Beträge für  $\text{TiO}_2$ - und  $\text{CaCO}_3$ -Pulver bei vergleichbaren Verfestigungsbedingungen

Beim  $\text{TiO}_2$  trat gegenüber  $\text{CaCO}_3$  eine deutlich kleinere Resonanzfrequenz  $f_{\max}$  und eine insgesamt stärkere Dämpfung (Maximum ist niedriger) auf. Das  $\text{TiO}_2$ -Pulver zeigt also ein „weicheres“ Verhal-

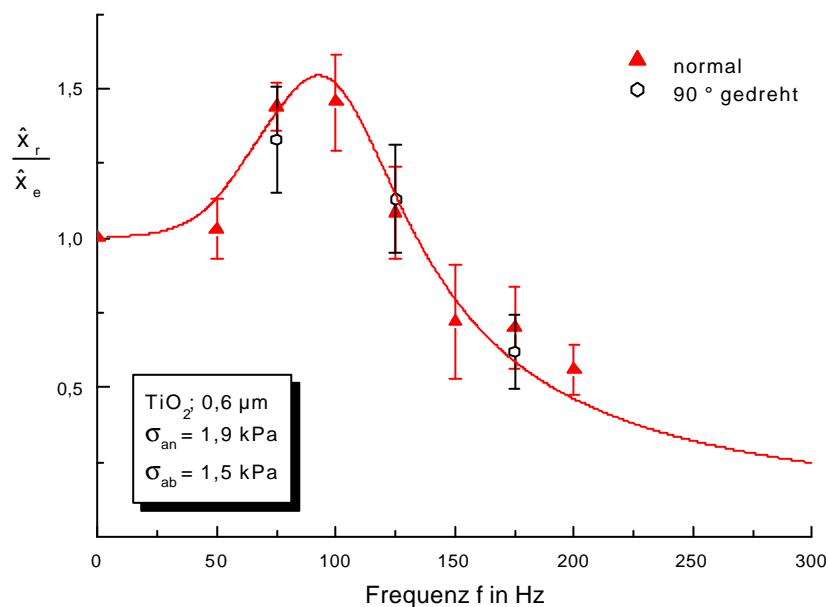
ten. Dies kann aus kontinuumsmechanischer Sicht mit der unterschiedlichen Porosität der Pulver erklärt werden, die bei diesen Verfestigungsspannungen für  $\text{TiO}_2$  etwa  $\varepsilon = 0,8$  betrug. Demgegenüber wies  $\text{CaCO}_3$  bei vergleichbaren Bedingungen eine Porosität von  $\varepsilon = 0,72$  auf, siehe Anlage V. Die Partikelmechanik liefert folgende Erklärung: Die Kontaktsteifigkeit der Partikel in Normalenrichtung hängt von der Partikelgröße und der Mikrohärtigkeit  $p_f$  ab [174]:

$$k_{N,pl} = \pi \cdot d_{1,2} \cdot p_f \quad (9-2).$$

Wenn man von der Primär-Partikelgröße des  $\text{TiO}_2$ -Pulvers ausgeht, unterscheiden sich die Partikelgrößen beider Pulver um eine Größenordnung. Die Werte für  $p_f$  unterscheiden sich nur um den Faktor Zwei, **Tab. 7.1** Die  $\text{TiO}_2$ -Partikeln weisen also insgesamt weichere Kontakte auf ( $\text{TiO}_2$ :  $k_{N,pl} \approx 0,06 \text{ N/mm}$ ;  $\text{CaCO}_3$ :  $k_{N,pl} \approx 0,7 \text{ N/mm}$ ). Folglich zeigt das  $\text{TiO}_2$ -Pulver ein „weicheres“ Verhalten.

### 9.2.3 Isotropie - Anisotropie

Bekanntlich werden beim JENIKE-Scherversuch bei variierender Abscherrichtung unterschiedliche Scherfestigkeiten gemessen, was in Abschn. 3.5 ausführlich dargelegt und diskutiert wurde. Ein ähnlicher Einfluß kann somit auch hinsichtlich Schwingungsübertragung vermutet werden. Im Mittelpunkt steht also die Frage, ob sich die Richtung der Schwingungseinleitung relativ zur Verfestigungsrichtung auf das Übertragungsverhalten und somit auf die Modellparameter auswirkt.



**Abb. 9.9:** Frequenzgang-Beträge bei bezüglich der Anscherrichtung veränderter Anregungsrichtung am Beispiel von  $\text{TiO}_2$

In Anlehnung an die von MOLERUS [94] beschriebene Methode wurden zusätzlich Versuche durchgeführt, im Rahmen derer die Scherzelle nach dem Anscheren (ohne Schwingungen) um  $\alpha = 90^\circ$  gedreht wurde. Die Probe wurde nun senkrecht zur Anscherrichtung abgeschert und die Schwingun-

gen in Anscherrichtung eingeleitet. Im Gegensatz zur Scherbeanspruchung sind bei der Schwingungseinleitung keine größeren Drehwinkel als  $90^\circ$  sinnvoll, da die Schwingungsbeanspruchung beidseitig verläuft. Der Drehwinkel  $90^\circ$  ist somit identisch mit der Anordnung  $270^\circ$  und die Anordnung  $180^\circ$  identisch mit  $0^\circ$  (vgl. Abschn. 3.5).

Wie anhand des Beispiels **Abb. 9.9** deutlich wird, traten gegenüber der herkömmlichen Vorgehensweise keine signifikanten Abweichungen zutage. Eine häufig gebrauchte Isotropie-Definition lautet: „...a material is called isotropic, if it possesses a reference configuration such that rotations of this configuration are mechanically undetectable.“<sup>e</sup>

Insofern kann das Übertragungsverhalten hier als isotrop betrachtet werden.

### 9.3 Abschätzung der Federkonstante c

#### 9.3.1 Zugänglichkeit der Größen b, c und k

Die primären Stoffgrößen b, c, k der Bewegungsgleichung (5-26) sind in den dimensionslosen Größen  $\zeta$  und  $\Lambda$  der Lösung (5-62) – (5-64) enthalten und zwar in der Form:

$$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{m \cdot c}} \quad (9-3)$$

und  $\Lambda = k / (c \cdot \hat{x}_e)$  (9-4).

Sie lassen sich jedoch anhand der obigen Meßwerte nicht explizit auflösen, da bestimmte Werte z.B. für  $\zeta$  mit unendlich vielen Kombinationen von c und b ausgedrückt werden können.

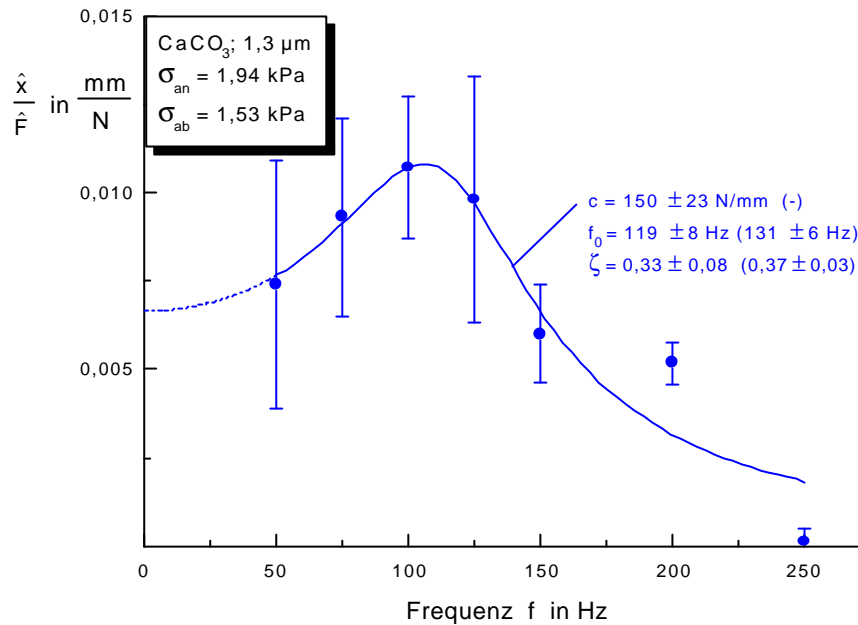
Am Beispiel der Federkonstante c sollen Möglichkeiten zur Abschätzung der Größenordnung diskutiert und hinsichtlich ihrer Anwendbarkeit auf die verwendeten Pulver und die verwendete Versuchsmethode bewertet werden. Diese Näherungen beruhen bis auf die Auswertung der Scherkraftverläufe alle auf der Annahme ausschließlicher linear-viskoser Dämpfung.

#### 9.3.2 Frequenzgang-Betrag bei Störkrafteerregung

Wie in Abschn. 6.5 erläutert wurde, lassen sich die Frequenzgänge sowohl mit der Anordnung „Scherzelle schwingt“ (Modell Fußpunkterregung), als auch mit der Anordnung „Scheroberteil schwingt“ (Modell Störkrafteerregung) ermitteln. **Abb. 9.10** zeigt exemplarisch einen gemessenen Frequenzgang-Betrag bei Störkrafteerregung („Scheroberteil schwingt“). Dabei handelt es sich um das gleiche Beispiel wie in **Abb. 9.3**. Die Anpassungsparameter  $f_0$  und  $\zeta$  stimmen gut mit denen des fußpunkterregten Schwingers überein (Werte in Klammern), wobei jeweils das linear-viskose Modell zugrunde liegt. Verglichen mit **Abb. 9.3** sind die Versuchsstreuungen jedoch erheblich größer.



Aus der Modellgleichung des störfrafterregten Schwingers (5-37) erhält man für  $\Omega \rightarrow 0$  den Ausdruck  $\hat{x} / \hat{F} = 1/c$ . Aus dem Ordinatenabschnitt in **Abb. 9.10** kann also die Federkonstante  $c$  ermittelt werden, die anhand des fußpunkterregten Schwingers nicht zugänglich ist.  $1/c$  liegt hier im Bereich  $0,005 \dots 0,01 \text{ mm/N}$ , also  $c = 100 \dots 200 \text{ N/mm}$ . Die Kurvenanpassung liefert einen Wert von  $150 \text{ N/mm}$  (weitere Werte in **Tab. 9.2**).



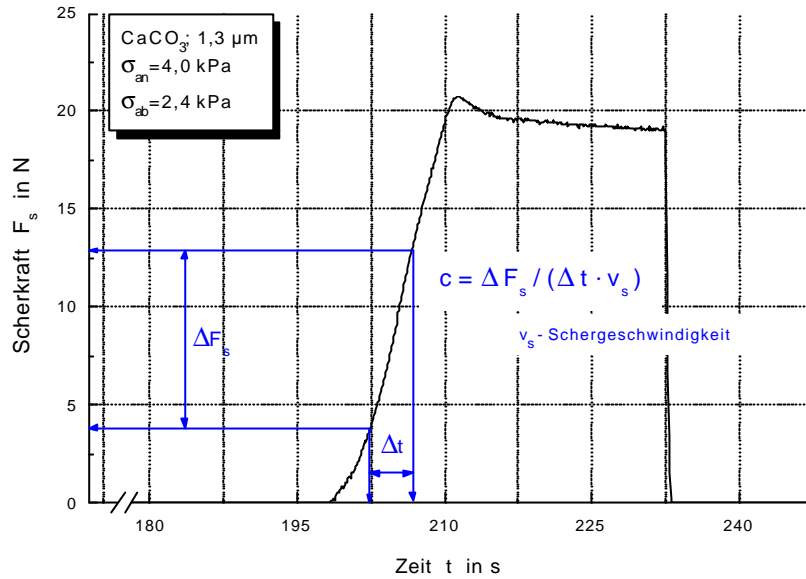
**Abb. 9.10:** Betrag des Frequenzganges bei Störfrafterregung

### 9.3.3 Auswertung der Scherkraftverläufe

**Tab. 9.2:** Vergleich unterschiedlich ermittelter Federkonstanten für CaCO<sub>3</sub>

$s_{an}$ in kPa	$s_{ab}$ in kPa	$c$ (aus $\hat{x} / \hat{F}$ -Kurve) in N/mm	$c$ (aus Scherkraft-Kurve) in N/mm
1,94	1,53	$150 \pm 23$	$33 \pm 5$
4,0	1,6	$343 \pm 151$	$56 \pm 4$
4,0	3,2	$321 \pm 60$	$73 \pm 5$

Die Federkonstante  $c$  spiegelt sich auch im linearen Ast der Abscherkurven des JENIKE-Versuchs wieder, **Abb. 9.11**. Allerdings besitzen Schüttgüter keinen ausgeprägten elastischen Bereich, **Tab. 3.1**. Vielmehr sind bereits im Abschnitt des linearen Anstiegs plastische Deformationen überlagert. Durch die aus den Scherkurven ermittelten Federkonstanten werden folglich zu niedrige Werte vorhergesagt. **Tab. 9.2** stellt die Ergebnisse beider Methoden am Beispiel gegenüber.



**Abb. 9.11:** Bestimmung der Federkonstante  $c$  aus gemessenen Scherkraftverläufen

Zum Vergleich: ROBERTS ermittelte die Federsteifigkeit  $c$  ebenfalls aus den Scherkraft-Kurven. Er fand für Pyrophyllit ( $d_{50} = 1 \text{ mm}$ ;  $X_w = 5 \%$ ;  $\sigma_{an} = 4 \dots 8 \text{ kPa}$ ) Werte im Bereich  $c \approx 50 \dots 120 \text{ N/mm}$  [116].

### 9.3.4 Auswertung der Hystereseschleifen

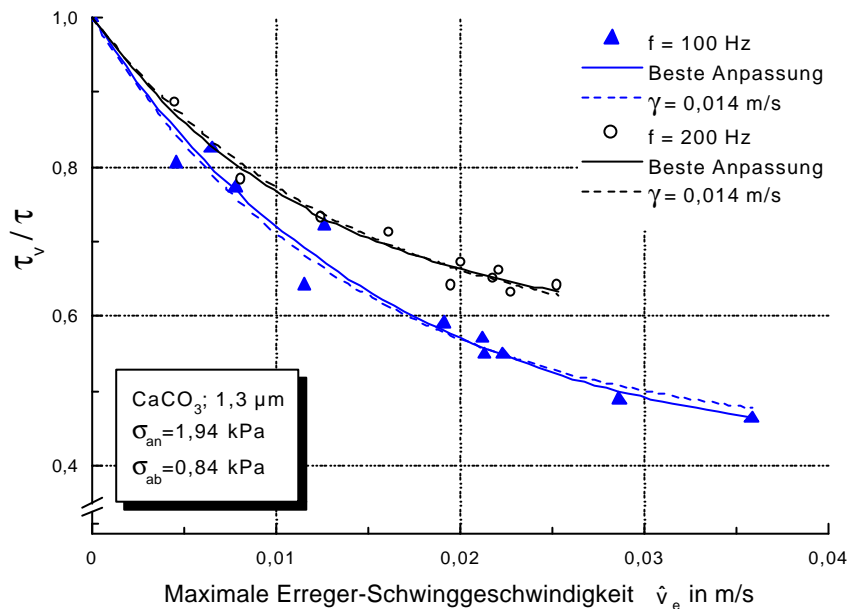
Eine dritte Möglichkeit, um  $b$  und  $c$  abzuschätzen, liefern die Hysteresekurven, siehe **Abb. 5.6**. Ungeachtet der großen Streuungen (vgl. Abschn. 9.2.4) erhält man für das Beispiel **Abb. 9.4** (rechts)  $c \approx 400 \dots 500 \text{ N/mm}$ , was in der Größenordnung mit den Ergebnissen des Frequenzganges, **Tab. 9.2**, übereinstimmt.

Alle genannten Methoden (außer Scherkraftverläufe) beruhen auf der Annahme ausschließlicher linear-viskoser Dämpfung. Die angegebenen Streuungen machen deutlich, daß die Parameter  $c$ ,  $b$  und  $k$  aus den Versuchen mit der JENIKE-Scherzelle nicht explizit zugänglich sind. Die Vorteile des JENIKE-Gerätes liegen eher in der praktischen Anwendbarkeit der Ergebnisse, die auch in dieser Arbeit im Vordergrund stand. Für die experimentelle Bestimmung des E-Moduls von Schüttgütern siehe z.B. [98,104,125, 138,184].

### 9.4 Einfluß von Resonanz auf die Scherfestigkeit

Die Versuche mit der Anordnung „Scherzelle schwingt“ liefern außer dem Schwingwegverhältnis, das in Abschn. 9.2 diskutiert wurde, die Scherfestigkeit bei Schwingungseinwirkung  $\tau_v$ , vgl. Abschn. 6.5. **Abb. 9.12** veranschaulicht typische Ergebnisse für  $\text{CaCO}_3$  bei Frequenzen von 100 Hz sowie 200 Hz. Die Ergebnisse sind über der Erreger-Schwinggeschwindigkeit  $\hat{v}_e$ , also der maximalen Schwinggeschwindigkeit am Scherboden aufgetragen. Die gemessenen Scherfestigkeiten  $\tau_v$  zeigten

ähnliche Verläufe, wie bereits in Abschn. 8 für die Anordnung „Scheroberteil schwingt“ beschrieben wurde. So erhält man für die charakteristische Schwinggeschwindigkeit  $\gamma$  nahezu identische Werte wie mit der Anordnung „Scherzelle schwingt“, vgl. Abschn. 8.2.3. Die durchgezogenen Linien in **Abb. 9.12** geben die jeweils beste Anpassung der Meßwerte wieder, wobei  $\gamma$  und  $\beta$  variiert wurden. Die gestrichelten Kurven dokumentieren die Anpassung unter alleiniger Variation von  $\beta$ . Für die charakteristische Schwinggeschwindigkeit wurde der Wert  $\gamma = 0,014$  m/s übernommen und konstant gehalten. Wie auch an Hand von **Tab. 9.3** deutlich wird, sind die geringfügigen Unterschiede nicht signifikant. Darauf aufbauend konnte der experimentelle Aufwand reduziert werden, indem für alle gemessenen Kurven ein konstanter Wert von  $\gamma = 0,014$  m/s angenommen wurde. Je vier bis sieben Meßpunkte bei höheren Schwinggeschwindigkeiten (0,02...0,03 m/s) genügte, um  $\beta$  zu bestimmen.



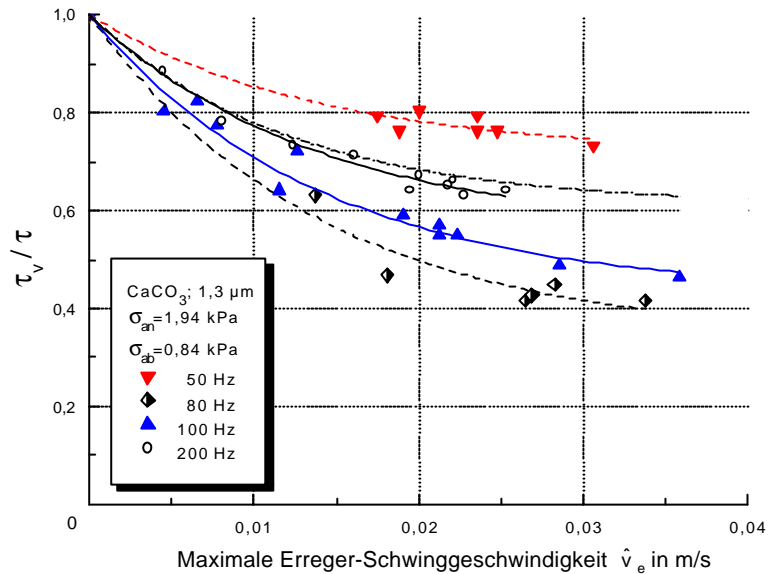
**Abb. 9.12:** Scherfestigkeitsverläufe über der Erreger-Schwinggeschwindigkeit („Scherzelle schwingt“)

Darüber hinaus enthält **Abb. 9.12** folgende Auffälligkeit: Im Gegensatz zu den Messungen mit der Anordnung „Scheroberteil schwingt“ fallen die Kurven für unterschiedliche Frequenzen *nicht* zusammen, was auch die  $\beta$ -Werte für 100 Hz und 200 Hz in **Tab. 9.3** untermauern. Weitere Kurven für ausgewählte Frequenzen sind in **Abb. 9.13** dargestellt. Zum Vergleich ist die Kurve der Anordnung „Scheroberteil schwingt“ als Strich-Punkt-Linie eingezeichnet. Offenbar wirkt hier die Resonanz als zusätzliche Einflußgröße.

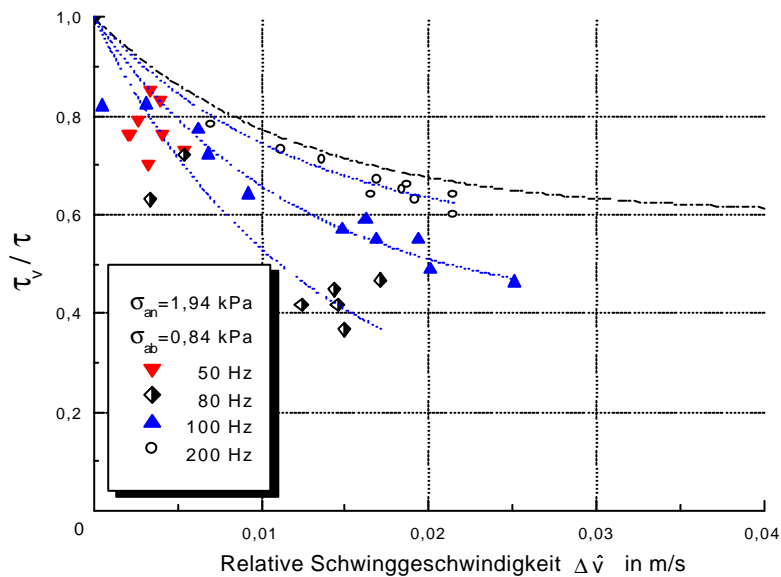
**Tab. 9.3:** Vergleich der Parameter  $\gamma$  und  $\beta$  nach **Abb. 9.12**

f in Hz	Bemerkung	b in kPa	g in m/s	$r_{xy}^2$
---------	-----------	----------	----------	------------

100 Hz	$\beta$ und $\gamma$ variiert	$0,834 \pm 0,057$	$0,0159 \pm 0,0022$	0,982
	$\gamma = \text{konst.} = 0,014 \text{ m/s}$	$0,787 \pm 0,016$	—	0,981
200 Hz	$\beta$ und $\gamma$ variiert	$0,585 \pm 0,030$	$0,0124 \pm 0,0015$	0,993
	$\gamma = \text{konst.} = 0,014 \text{ m/s}$	$0,620 \pm 0,008$	—	0,992



**Abb. 9.13:** Relative Scherfestigkeit über der Erreger-Schwinggeschwindigkeit



**Abb. 9.14:** Relative Scherfestigkeit über der Schwinggeschwindigkeit in der Scherzone für das gleich Beispiel wie in **Abb. 9.13**

Dieser Zusammenhang ist anhand der Darstellungsweise in **Abb. 9.12** und **Abb. 9.13** nur wenig anschaulich, da für die Scherfestigkeit nicht die Erreger-Schwinggeschwindigkeit am Scherboden, sondern die Schwinggeschwindigkeit in der Scherzone verantwortlich ist. Diese relative Schwingge-

schwindigkeit in der Scherzone  $\Delta\hat{v}$  ist jedoch nur sehr schlecht zugänglich, vgl. Abschn. 6.6. Sie wurde exemplarisch für die Ergebnisse aus **Abb. 9.13** berechnet. Das Resultat ist in **Abb. 9.14** aufgetragen. Abgesehen von der großen Streuung, die aus der ungenauen Bestimmung von  $\Delta\hat{v}$  herührt, ist folgendes zu erkennen:

- Für kleine Frequenzen, also  $\Omega \ll 1$ , verhält sich die Schüttgutprobe starr. Die Schwingwege am Boden und am Oberteil sind annähernd gleich. Das Verhältnis  $\hat{x}_r / \hat{x}_e$  geht gegen Eins, der Phasenwinkel ist nahe Null, vgl. Abschn. 9.2 oder Abschn. 5.2. Folglich wird auch die Relativbewegung in der Scherzone Null. Die gemessenen Scherspannung ist nahe dem Wert ohne Schwingungseinwirkung, da die Schwinggeschwindigkeit in der Scherzone gering ist.
- Für hohe Frequenzen, also  $\Omega \gg 1$ , kann das Scheroberteil den Bewegungen des Bodens nicht folgen. Die Bewegung des Oberteils wird durch das Schüttgut gedämpft. Das Verhältnis  $\hat{x}_r / \hat{x}_e$  geht gegen Null, da  $\hat{x}_r$  gegen Null geht. Das Scheroberteil befindet sich also nahezu in Ruhe. Folglich ist die Schwinggeschwindigkeit am Scherboden etwa gleich der in der Scherzone  $\hat{v}_e \approx \Delta\hat{v}$  und damit auch  $\hat{x}_e \approx \Delta\hat{x}$ . Dementsprechend stimmen die Ergebnisse, die mit der Anordnung „Scherzelle schwingt“ für hohe Frequenzen mit denen der Anordnung „Scheroberteil schwingt“ überein.

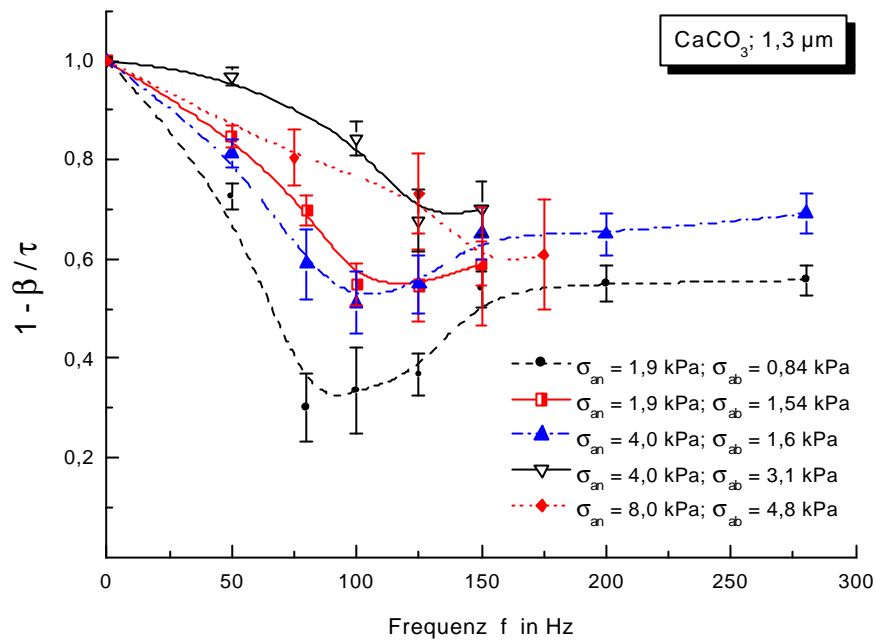
Wie dadurch deutlich wird, sind die mit den unterschiedlichen Anordnungen gewonnenen Ergebnisse konform. Berücksichtigt man die Unzulänglichkeiten und Annahmen bei der Ermittlung von  $\Delta\hat{v}$ , stimmen die Meßwerte gut überein, **Abb. 9.14**. Die Kurven für 200 Hz und 50 Hz entsprechen den Ergebnissen der Anordnung „Scheroberteil schwingt“ (Strich-Punkt-Linie). Die Kurve für 100 Hz liegt aufgrund Resonanznähe etwas unterhalb dieser beiden Kurven. Die Daten für 80 Hz geben ebenso wie in **Abb. 9.13** die geringsten Scherfestigkeiten, also den Resonanzfall wieder.

Es läßt sich zusammenfassen: Außerhalb der Resonanz stimmen die Scherfestigkeiten bezogen auf die Schwinggeschwindigkeit in der Scherzone mit den Ergebnissen in Abschn. 8 überein. Tritt Resonanz auf, kann die Scherfestigkeit weiter vermindert werden.

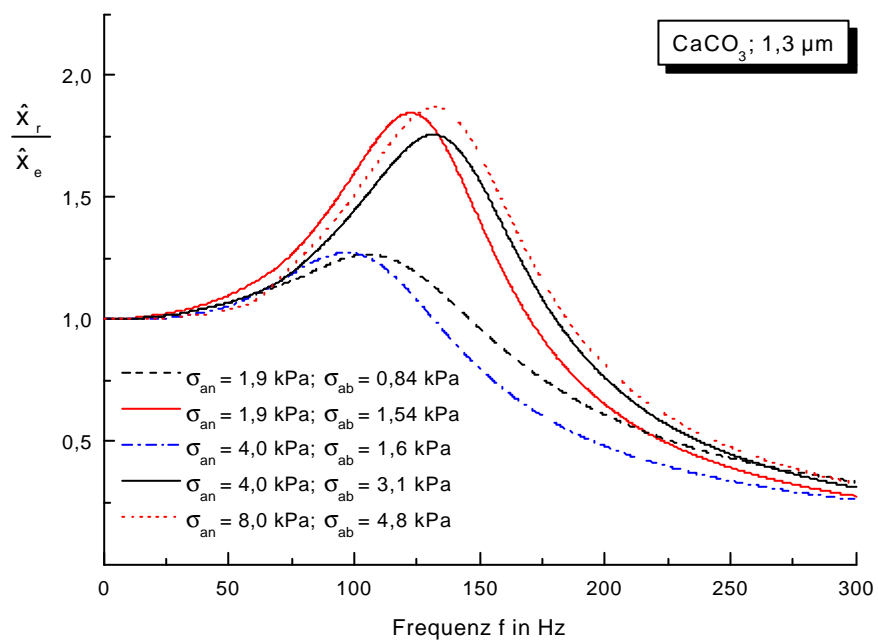
In **Abb. 9.15** sind die für jede  $\tau_v = f(\hat{v})$ -Kurve ermittelten  $\beta$ -Werte in Form der minimalen relativen Scherfestigkeit  $1 - \beta / \tau$  für unterschiedliche Abschernormal- und Verfestigungsspannungen über der Frequenz aufgetragen. Alle Kurven durchlaufen ein mehr oder minder stark ausgeprägtes Minimum, um sich bei höheren Frequenzen jeweils einem konstanten Wert zu nähern. Dieser stimmt mit den jeweiligen Werten überein, die mit der Anordnung „Scheroberteil schwingt“ gemessen wurden, **Tab. 9.5**.

Auch hier verschiebt sich die Lage des Extremums mit steigendem  $\sigma_{an}$  sowie  $\sigma_{ab}$  zu höheren Frequenzen. Bezüglich der Lage des Extremums korrespondieren die Kurven mit den Ergebnissen für

die Amplitudenverhältnisse, **Abb. 9.16**. Zur besseren Übersicht sind dort die Meßpunkte nicht eingezeichnet, sondern nur die Modellkurven, vgl. Abschn. 9.2, Anlage VII<sup>16</sup>.



**Abb. 9.15:** Minimale relative Scherfestigkeit über der Frequenz



**Abb. 9.16:** Zu Abb. 9.15 gehörende Schwingweg-Resonanz-Kurven

Die einzelnen Zahlenwerte für die Schwingweg-Resonanz  $f_{max}$  und die Frequenz der minimalen Scherfestigkeit  $f(\tau_{min})$  sind in **Tab. 9.4** zusammengefaßt. Die Abweichung zwischen beiden beträgt

<sup>16</sup> Für die Kurven des Schwingweg-Verhältnisses sind z.T. mehr Meßpunkte vorhanden als für die vergleichbaren Scherfestigkeits-Kurven. Das liegt an zusätzliche Messungen zum Schwingweg-Verhältnis, bei denen die Schüttgutproben mehrfach beansprucht wurden, vgl. Abschn. 6.5.

etwa 10 %. Eine exakte Übereinstimmung kann nicht erwartet werden, da die Schwingweg-Resonanz nicht zwingend mit der „Scherspannungs-Resonanz“ übereinstimmen muß. Die Lage der minimalen Scherfestigkeit wird aber hinreichend genau durch die Modellkurven in **Abb. 9.16** wiedergegeben.

**Tab. 9.4:** Vergleich der Lage von Schwingweg-Resonanz und minimaler Scherfestigkeit für CaCO<sub>3</sub>; 1,3 µm

$s_{an}$ in kPa	$s_{ab}$ in kPa	$f_{max}$ in Hz	$f(t_{min})$ in Hz
1,94	0,84	99	80...90
1,94	1,54	120	100...125
4,0	1,6	97	100
4,0	3,1	137	125
8,0	4,8	137	150

Die Zahlenwerte für  $f_{min} = f(1 - \beta/\tau)_{min}$  in **Tab. 9.4** wurden aus dem Diagramm **Abb. 9.15** abgelesen. Der z.T. angegebene Bereich rührt daher, daß das Minimum im Zwischenraum zwischen zwei Meßpunkten vermutet wird. Die Werte für  $f_{max}$  wurden anhand der Modellgleichung  $\hat{x}_r / \hat{x}_e = f(f)$  (analytische Lösung, nach DEN HARTOG für kombinierte viskose und COULOMB-Dämpfung, vgl. Abschn. 5.2) bestimmt. Dabei wurde die Nullstelle der 1. Ableitung

$$\frac{d}{df} \left[ \frac{\hat{x}_r}{\hat{x}_e}(f) \right] = 0 \quad (9-5)$$

numerisch ermittelt (MathSoft Mathcad 7).

Die Ausprägung des Extremums verhält sich bei den Kurven  $1 - \beta/\tau = f(f)$  gegenüber den Schwingweg-Verhältnissen invers. D.h. mit steigenden Spannungen und damit geringeren Dämpfungen wird das Maximum der Schwingweg-Verhältnisse höher, die zusätzliche Scherspannungsreduzierung durch Resonanz hingegen geringer, **Abb. 9.15** und **Abb. 9.16**. **Tab. 9.5** stellt das jeweilige  $\beta_{max}$ , also den Wert für  $\beta$  an der Stelle  $f_{min} = f(1 - \beta/\tau)_{min}$ , dem entsprechenden Wert von  $\beta$  aus Abschn. 8 gegenüber. Die Zahlenwerte verdeutlichen, daß die zusätzliche Scherspannungsreduzierung durch Resonanz mit steigenden Verfestigungs- sowie Abscher-Normalspannungen ihre Bedeutung verliert. Während man beim jeweils niedrigsten  $\sigma_{an}$ - und  $\sigma_{ab}$ - Niveau (erste Zeile in **Tab. 9.5**) immerhin ein um über 80 % größeres  $\beta$  erhält als ohne Resonanz, ist der Unterschied für die jeweils größten  $\sigma$ -Niveaus (letzte Zeile) nicht einmal signifikant. Eine zusätzliche Scherspannungsreduzierung infolge Resonanz ist nur für geringe Normalspannungen evident, wie sie aber gerade in Silotrichtern auftreten können.

Sowohl die stärkere Ausprägung des  $\hat{x}_r / \hat{x}_e$ -Maximums in **Abb. 9.16** als auch die geringere Ausprägung des  $1 - \beta / \tau$ -Minimums in **Abb. 9.15** mit jeweils steigenden Verfestigungs- und Abscher-Normalspannungen lassen sich auf die verminderte Beweglichkeit der Partikeln mit wachsendem Spannungsniveau zurückführen. Die beiden beobachteten Effekte bilden also keinen Widerspruch, sondern bedingen einander.

**Tab. 9.5:** Vergleich der  $\beta$ -Werte mit und ohne Resonanzeinfluß

$s_{an}$ in kPa	$s_{ab}$ in kPa	$b$ in kPa <sup>1)</sup>	$b_{max}$ in kPa	$b / b_{max}$
1,94	0,84	0,49 ± 0,06	0,91 ± 0,07	1,86
1,94	1,54	0,63 ± 0,14	0,82 ± 0,11	1,30
4,0	1,6	1,01 ± 0,05	1,22 ± 0,04	1,21
4,0	3,1	1,02 ± 0,06	1,14 ± 0,07	1,12
8,0	4,8	2,22 ± 0,37	2,35 ± 0,10	1,06

<sup>1)</sup>  $\beta(f \rightarrow \infty)$ ; ermittelt mit Anordnung „Scheroberteil schwingt“

Hinsichtlich der Silo-Auslegung ist die Resonanz schwierig zu berücksichtigen, da sie von der Verfestigungs- und Abscher-Normalspannung abhängt. Berücksichtigt man die Resonanz nicht, liegt man mit den Ergebnissen gemäß Abschn. 8 auf jeden Fall auf der „sicheren Seite“. Durch die Ausnutzung der Resonanz kann man besonders bei geringen Normalspannungen eine *zusätzliche* Fließverbesserung erwirken.

## 9.5 Vergleich mit den Ergebnissen anderer Autoren

### Eigenfrequenz $f_0$

Bezüglich der Eigenfrequenz  $f_0$  beobachtete ROBERTS einen Anstieg sowohl mit steigender Verfestigungs-Normalspannung  $\sigma_{an}$  als auch zunehmender Abscher-Normalspannung  $\sigma_{ab}$ , Anlage I. Dies deckt sich mit den in Abschn. 9.2 vorgestellten Ergebnissen. Wegen  $\omega_0 = \sqrt{c/m}$  hängt die Eigenfrequenz von der Federkonstante  $c$  und der schwingenden Masse  $m$  ab. Mit steigenden Spannungen  $\sigma_{an}$  oder  $\sigma_{ab}$  nimmt die Federsteifigkeit  $c$  zu, während  $m$  näherungsweise konstant bleibt (vgl. Abschn. 6.3.2).

### Dämpfung

Das Dämpfungsmaß  $\zeta$  des viskosen Dämpfers wird von ROBERTS als konstant angegeben, also unabhängig von  $\sigma_{an}$  oder  $\sigma_{ab}$ , Anlage I. Hingegen wurde hier eine Abnahme der Gesamtdämpfung mit steigendem  $\sigma_{an}$  oder  $\sigma_{ab}$  beobachtet, Abschn. 9.2. Die Spannungsabhängigkeit der Dämpfung ist plausibel. Durch hohe Spannungen nähert sich das Schüttgut dem Festkörperzustand. Dadurch wird



die Dämpfung vermindert, was mit der o.g. Erhöhung der Eigenfrequenz einhergeht. Diese qualitativen Unterschiede sind unabhängig vom gewählten Modell. Die Ursachen sind:

1. ROBERTS untersuchte relativ grobkörnige Schüttgüter mit Partikelgrößen um 1 mm. Solche Produkte besitzen im unverfestigten Zustand bereits geringe Porositäten von  $\varepsilon_0 \approx 0,4 \dots 0,5$  und weisen erfahrungsgemäß geringe Kompressibilitäten auf. Steigende Verfestigungsspannungen wirken sich nur geringfügig auf die Porosität und damit die Schüttguteigenschaften aus ( $\zeta \approx \text{konst.}$ ). Hier wurden hingegen feine Partikeln verwendet. Die Kontaktsteifigkeit ist gemäß (9-2) deutlich geringer. Diese sehr kompressiblen Pulver besitzen hohen Ausgangsporositäten von  $\varepsilon_0 \approx 0,8$ . Die Materialeigenschaften werden durch steigende Verfestigungsspannungen nachhaltig verändert ( $\zeta \neq \text{konst.}$ ).
2. Die von ROBERTS ermittelten Dämpfungen sind gering, mit  $\zeta \approx 0,1$ . In diesem Bereich haben Unterschiede im gemessenen Frequenzgang einen geringeren Einfluß auf das Dämpfungsmaß, **Abb. 5.3**. Z.B. verringert sich die Dämpfung von  $\zeta = 0,2$  auf  $\zeta = 0,1$ , wenn sich das Schwingweg-Verhältnis  $\hat{x}_r / \hat{x}_e$  bei Resonanz um ca. 90 % erhöht. Vermindert sich  $\zeta$  von  $\zeta = 0,3$  auf  $\zeta = 0,2$ , steigt  $\hat{x}_r / \hat{x}_e$  um lediglich 35 %.
3. Schließlich verwendete Roberts einen schmalen Spannungsbereich. Er variierte die Verfestigungsspannung um den Faktor 2 ( $\sigma_{\text{an}} \approx 4 \dots 7,8 \text{ kPa}$ ), während die Verfestigungsspannung hier um den Faktor 4 variiert wurde ( $\sigma_{\text{an}} \approx 2 \dots 8 \text{ kPa}$ ).

Vergleichbare Ergebnisse fand MATCHETT et al. [138]. Für die Mischungen aus Glaskugeln ( $d \approx 0,5 \dots 4 \text{ mm}$ ) und Polyethylen-Partikeln ( $d \approx 0,5 \text{ mm}$ ) blieb  $\zeta$  im Normalspannungsbereich  $\sigma \approx 300 \dots 1400 \text{ Pa}$  annähernd konstant. Gummi-Partikeln ( $d \approx 0,4 \text{ mm}$ ), also weiche Partikelkontakte, führte zu einer deutlichen Spannungsabhängigkeit, **Abb. 5.17**.

## 10 Wandfließverhalten bei Schwingungseinwirkung

### 10.1 Wandmaterialien

Bei der Auslegung von Silos spielt neben der inneren Reibung im Schüttgut das Wandfließverhalten eine wichtige Rolle. Der Wandreibungswinkel zwischen Schüttgut und Wandmaterial legt die Grenze zwischen Massen- und Kernfluß fest. Bei vorgegebener Trichterometrie bestimmt der Wandreibungswinkel das sich einstellende Fließprofil. Allgemeine Aussagen über das Wandreibungsverhalten von Schüttgütern und Rückschlüsse auf andere Wandmaterialien sind kaum möglich. Beispielsweise führt eine Verringerung der Oberflächenrauigkeit des selben Materials nicht zwangsläufig zu einer Fließverbesserung, sondern kann auch einen Anstieg des Wandreibungswinkels bedingen [16-17].

Daher wurden insgesamt sechs Schüttgut- / Wandmaterial-Kombinationen untersucht, um sicherzugehen, daß die gewonnenen Aussagen keine spezielle Eigenschaft einer bestimmten Wandmaterial-Probe oder einer bestimmten Kombination von Schüttgut und Wandmaterial sind. Bei den Wandmaterialien handelt es sich um drei Proben eines Chrom-Nickel-Stahls mit unterschiedlichen Oberflächen-Güten, **Tab. 10.1**. Durch diese Auswahl wird hinsichtlich der in der Literatur als wichtige Einflußgröße genannten Oberflächenrauigkeit ein weiter Bereich unspannt. Dies spiegelt sich in den deutlichen Unterschieden der gemessenen Wandreibungswinkel ohne Schwingungseinwirkung wieder, **Tab. 10.1**. Die gemessenen Wandfließorte zeigten im untersuchten Spannungsbereich einen geradlinigen Verlauf durch den Koordinaten-Ursprung, also  $\tau_a \approx 0$ , **Abb. 10.1**.

**Tab. 10.1:** Verwendete Wandmaterialien und gemessene Wandreibungswinkel

Benennung	Bemerkung	$R_z$ <sup>1</sup> in $\mu\text{m}$	$R_a$ <sup>2</sup> in $\mu\text{m}$	$j_w \text{ CaCO}_3$	$j_w \text{ TiO}_2$
X5CrNi18.10 (90 $\mu\text{m}$ )	warmgewalzt	570	90	36 °	37-38 °
X5CrNi18.10 (4 $\mu\text{m}$ )	kaltgewalzt	60	4	30 °	28 °
X5CrNi18.10 (0,7 $\mu\text{m}$ )	blankgeglüht	7	0,7	29 °	30 °

<sup>1</sup> maximale Rauheitsprofilhöhe nach DIN EN ISO 4287

<sup>2</sup> arithmetischer Mittenrauhwert nach DIN EN ISO 4287

### 10.2 Wandschubspannung bei Schwingungseinwirkung

Die Scherkraft-Zeit-Verläufe in **Abb. 10.2** am Beispiel von  $\text{CaCO}_3$  auf X5CrNi18.10 (4  $\mu\text{m}$ ) verdeutlichen, daß auch die Wandschubspannung  $\tau_w$  bei überlagerter Schwingungseinwirkung abnimmt. Links ist das Meßresultat ohne Schwingungseinwirkung aufgetragen, rechts ein typisches Ergebnis mit Schwingungseinwirkung. Die ersten beiden Teilschritte sind in beiden Kurven gleich: Anscheren und anschließendes Verringern der Normallast, wodurch die Scherkraft auf ein niedrigeres Niveau sinkt (ca. 60 N). An der in der rechten Kurve durch den Pfeil markierten Stelle beginnt die Schwin-

gungsanregung bei konstanter Wandnormalspannung  $\sigma_w$  und führt erwartungsgemäß zu einer niedrigeren Scherkraft.

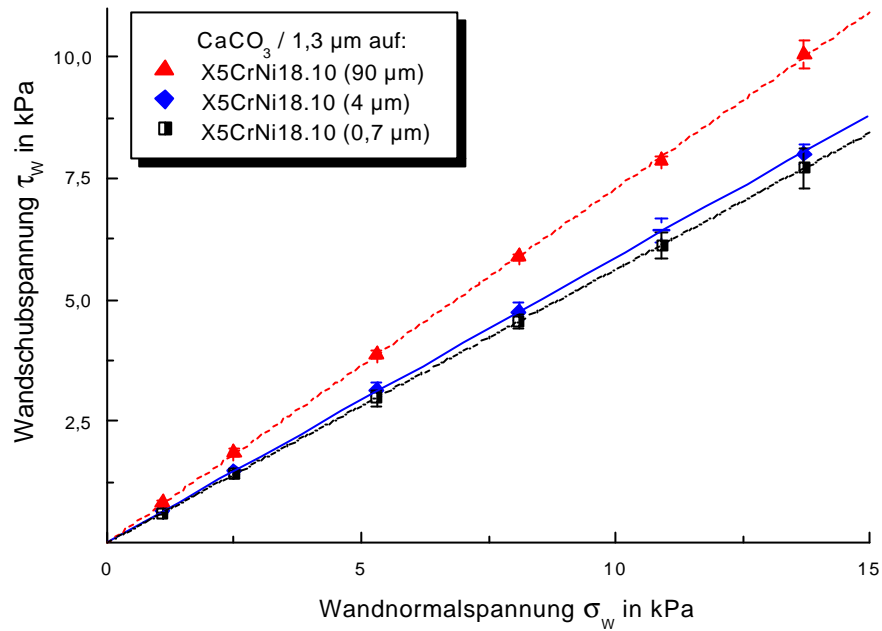


Abb. 10.1: Wandfließorte von CaCO<sub>3</sub>

Augenfällig ist der ausgeprägte Slip-Stick-Effekt, also ein ständiger Wechsel zwischen Haft- und Gleitreibung. Die Differenz zwischen Scherkraft-Maximum (Haftreibung) und Scherkraft-Minimum (Gleitreibung) wird bei Schwingungsanregung ebenfalls kleiner, was die vergrößerten Ausschnitte in Abb. 10.3 illustrieren. Die Scherkraft-Amplitude verringert sich um die Hälfte bei doppelter Ausschlag-Frequenz.

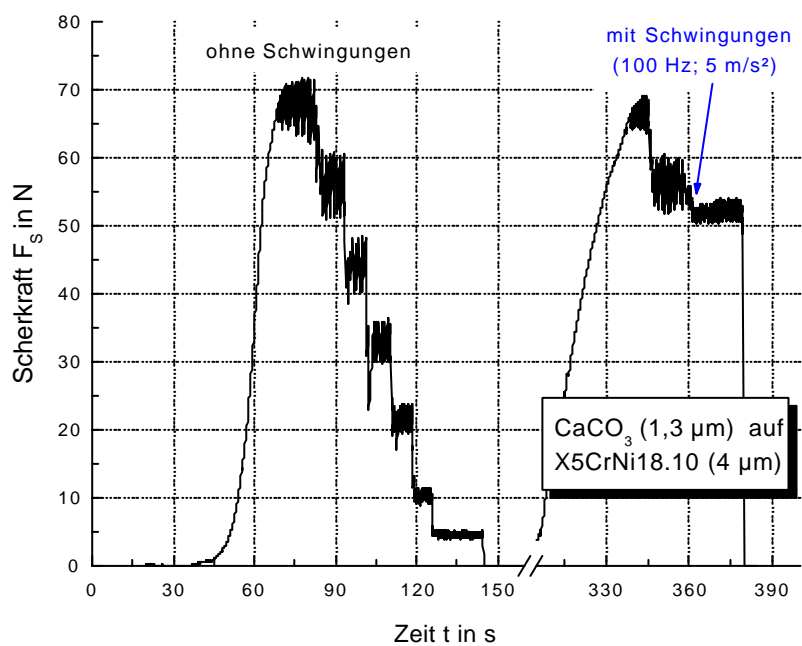
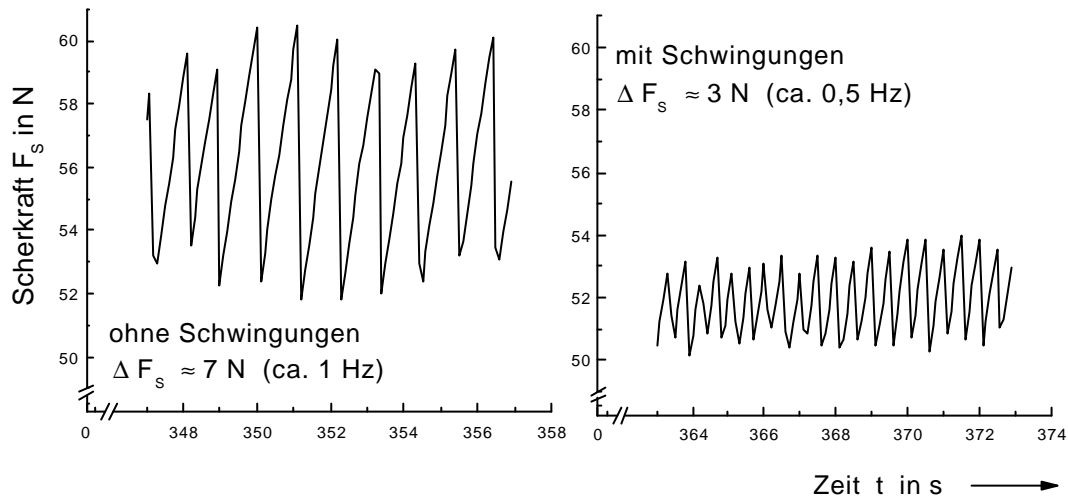


Abb. 10.2: Scherkraft-Zeit-Verläufe beim Wandscherversuch

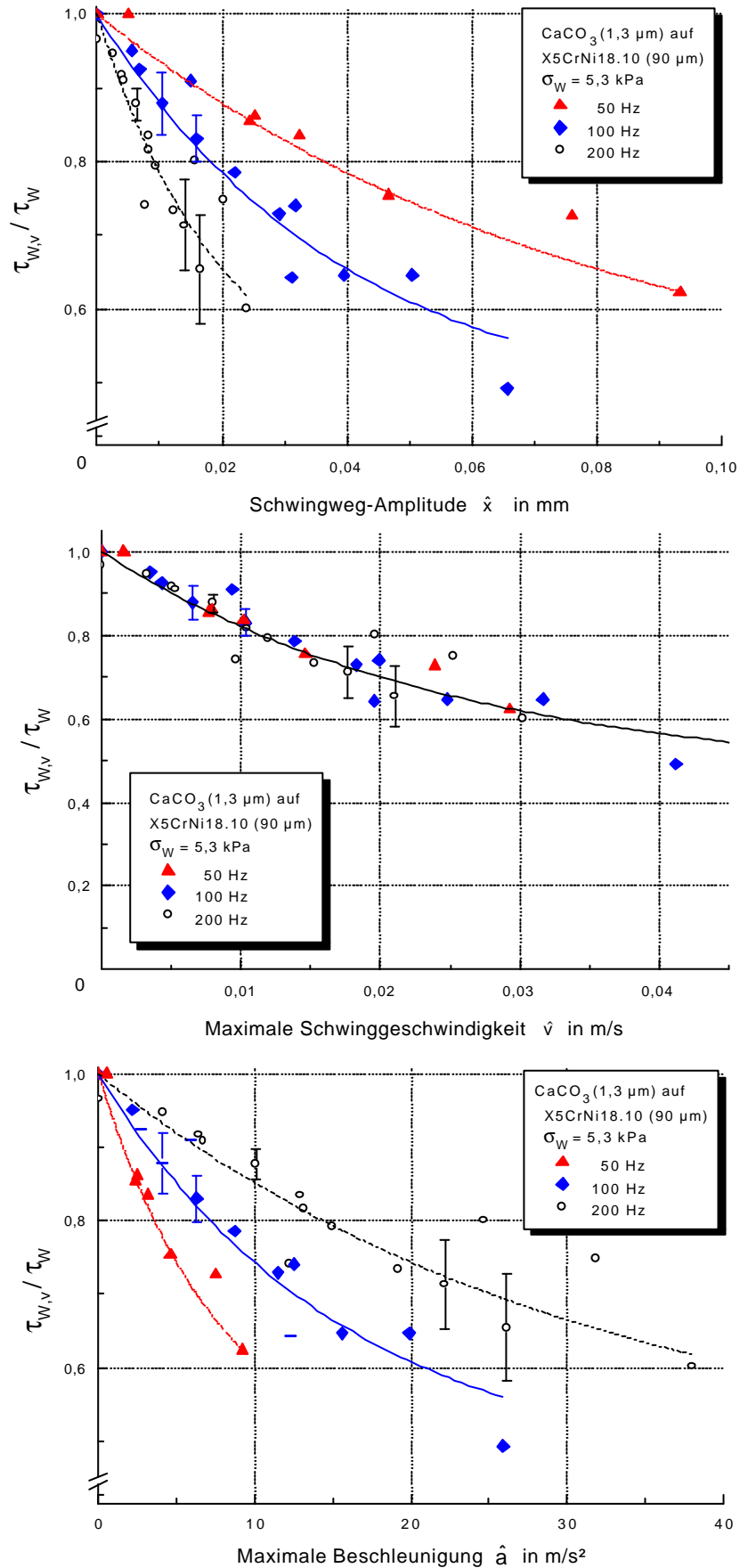
Der Slip-Stick-Effekt wird als eine mögliche Ursache des sogen. Silo-Brummens beschrieben [157]. Durch die Kraftimpulse, die beim Entleeren auf die Silowand übertragen werden, wird die Silokonstruktion in ihren Eigenfrequenzen angeregt. Besonders in hohen Metall-Silos, die auf Massenfluß ausgelegt sind, können Lärmpegel von über 100 dB auftreten [157]. Am Siloschaft angebrachte Vibratoren reduzieren das Silo-Brummen. Die Abschwächung der Kraft-Amplitude wie in **Abb. 10.3** und damit der Stöße auf die Silowandung liefern dafür eine mögliche Erklärung.



**Abb. 10.3:** Slip-Stick-Effekt mit und ohne Schwingungseinwirkung für  $\text{CaCO}_3$  auf X5CrNi18.10 ( $4 \mu\text{m}$ );  $\sigma_w = 13,7 \text{ kPa}$

In **Abb. 10.4** ist das Schubspannungsverhältnis  $\tau_{w,v} / \tau_w$  für unterschiedliche Frequenzen jeweils über den Amplituden von Schwingweg  $\hat{x}$ , Schwinggeschwindigkeit  $\hat{v}$  und Schwingbeschleunigung  $\hat{a}$  aufgetragen. Der prinzipielle Verlauf der Kurven deckt sich mit den Ergebnissen für die bezogene Scherfestigkeit  $\tau_v / \tau$  in Abschn. 8. Über dem Schwingweg oder der Beschleunigung liefert die Wandschubspannung und somit auch  $\tau_{w,v} / \tau_w$  eine Kurvenschar mit der Frequenz als Scharparameter. Um die Schubspannung mit einem einzigen Schwingungsparameter zu korrelieren, eignet sich auch hier die Schwinggeschwindigkeit.

KAADEN, in [116], und SIEBENHAAR [146] (vgl. Abschn. 3.6) schlugen die Apparat-Kennziffer  $Fr = \hat{a} / g$  zur Quantifizierung des Schwingungseinflusses auf die Wandreibung vor. Wie man in **Abb. 10.4** sieht, nimmt die Wandschubspannung auch mit steigender Beschleunigungs-Amplitude  $\hat{a}$  ab, einen eindeutigen Zusammenhang erhält man aber nur bei konstanter Frequenz. Offenbar ist auch für die Wandreibung die Schwinggeschwindigkeit am besten geeignet, den Schwingungseinfluß zu charakterisieren. Dies deckt sich mit den Ergebnissen von SHARMA et al. [145] für die Reibung zwischen Metallproben und landwirtschaftlichen Böden, vgl. Abschn. 3.6.



**Abb. 10.4:** Wandschubspannungsverhältnis über dem Schwingweg, der Schwinggeschwindigkeit und der Schwingbeschleunigung (von oben)

### 10.3 Bestimmung von $\beta_w$ und $\gamma_w$

Wegen des qualitativ gleichen Verhaltens von Scherfestigkeit des Pulvers (Abschn. 8) und Wandschubspannung soll das Modell von ROBERTS (3-32), (3-33) formal auf das Wandreibungsverhalten übertragen werden. Die Wandschubspannung bei Schwingungseinwirkung  $\tau_{w,v}$  hängt dann von der Wandschubspannung ohne Schwingungseinwirkung  $\tau_w$  und den beiden Parametern  $\beta_w$  und  $\gamma_w$  ab:

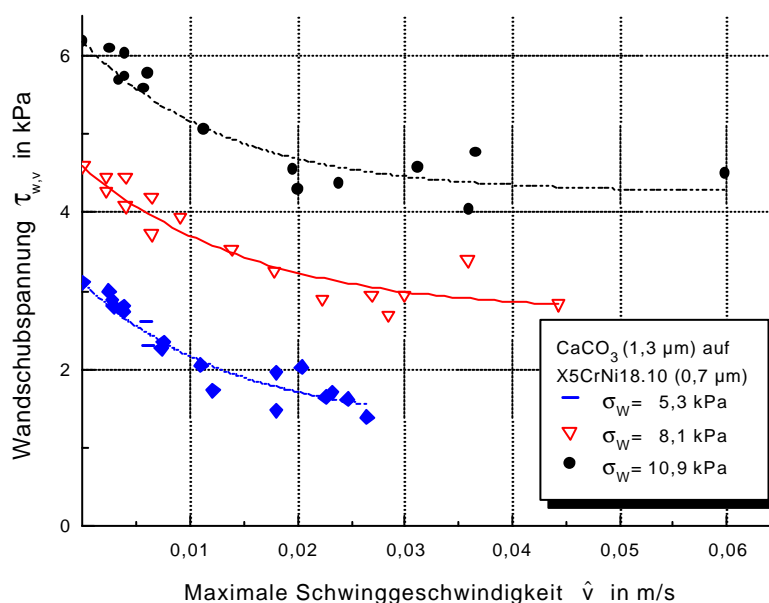
$$\tau_{w,v} = \tau_w - \beta_w [1 - \exp(-\hat{v}/\gamma_w)] \quad (10-1)$$

oder in dimensionsloser Schreibweise:

$$\frac{\tau_{w,v}}{\tau_w} = 1 - \frac{\beta_w}{\tau_w} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\hat{v}}{\gamma_w}\right) \right] \quad (10-2).$$

$\beta_w$  drückt die maximal mögliche Reduzierung der Wandschubspannung für  $\hat{v} \rightarrow \infty$  aus;  $\gamma_w$  ist eine charakteristische Schwinggeschwindigkeit. Da die Wandschubspannung nicht von der Verfestigungsspannung abhängt, entfällt die in Abschn. 8 vorgeschlagene Normierung von  $\beta_w$  mit einer repräsentativen Verfestigungsspannung.

Für eine vorgegebene Kombination aus Wandmaterial und Schüttgut sind  $\beta_w$  und  $\gamma_w$  unabhängig von der Wandnormalspannung, was in **Abb. 10.5** am Beispiel von  $\text{CaCO}_3$  auf X5CrNi18.10 (0,7  $\mu\text{m}$ ) zu sehen ist. Die drei Kurven verlaufen annähernd mit dem gleichen Abstand zueinander. **Tab. 10.2** zeigt die durch Kurvenanpassung ermittelten Parameter  $\beta_w$  und  $\gamma_w$  für die sechs untersuchten Materialpaarungen. Im untersuchten Meßbereich kann kein Einfluß der Wandnormalspannung auf  $\beta_w$  oder  $\gamma_w$  festgestellt werden. Die charakteristischen Schwinggeschwindigkeiten  $\gamma_w$  sind z.T. deutlich höher als die  $\gamma$ -Werte in Abschn. 8.

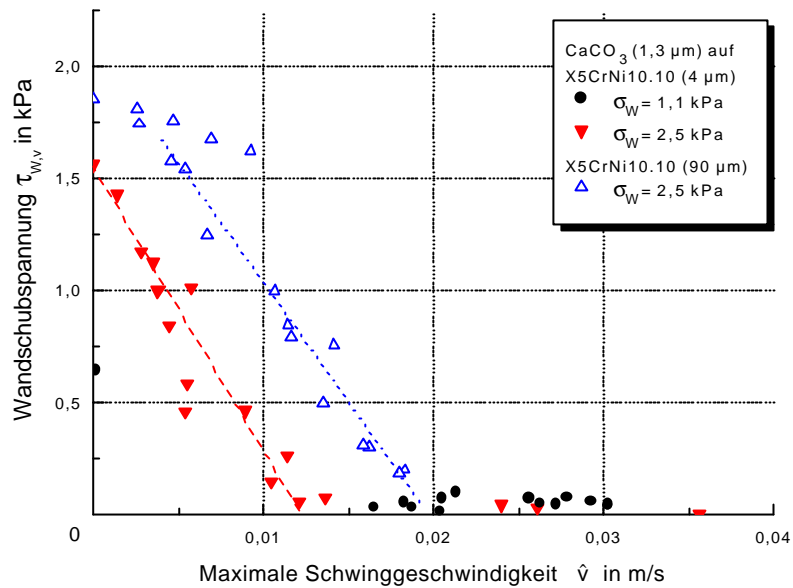


**Abb. 10.5:** Einfluß der Wandnormalspannung auf  $\tau_{w,v}$

**Tab. 10.2:** Modellparameter  $\beta_w$  und  $\gamma_w$  für verschiedene Schüttgut / Wand - Kombinationen

Schüttgut / Wandmaterial	$s_w = 5,3 \text{ kPa}$	$s_w = 8,1 \text{ kPa}$	$s_w = 10,9 \text{ kPa}$	
CaCO <sub>3</sub> / X5CrNi18.10 (90 $\mu\text{m}$ )	3,8	6,0	8,0	$\tau_w$ in kPa
	$2,4 \pm 0,4$	$2,1 \pm 0,2$	$2,5 \pm 0,4$	$\beta_w$ in kPa
	$33 \pm 17$	$30 \pm 6$	$24 \pm 6$	$\gamma_w$ in mm/s
CaCO <sub>3</sub> / X5CrNi18.10 (4 $\mu\text{m}$ )	3,25	—	6,8	$\tau_w$ in kPa
	$2,2 \pm 0,2$	—	$2,2 \pm 0,9$	$\beta_w$ in kPa
	$40 \pm 14$	—	$42 \pm 24$	$\gamma_w$ in mm/s
CaCO <sub>3</sub> / X5CrNi18.10 (0,7 $\mu\text{m}$ )	3,1	4,6	6,2	$\tau_w$ in kPa
	$1,8 \pm 0,2$	$1,9 \pm 0,2$	$1,9 \pm 0,2$	$\beta_w$ in kPa
	$14 \pm 4$	$15 \pm 4$	$13 \pm 3$	$\gamma_w$ in mm/s
TiO <sub>2</sub> / X5CrNi18.10 (90 $\mu\text{m}$ )	4,4	—	8,9	$\tau_w$ in kPa
	$2,0 \pm 0,4$	—	$2,0 \pm 0,2$	$\beta_w$ in kPa
	$20 \pm 8$	—	$32 \pm 6$	$\gamma_w$ in mm/s
TiO <sub>2</sub> / X5CrNi18.10 (4 $\mu\text{m}$ )	3,2	4,8	6,3	$\tau_w$ in kPa
	$2,0 \pm 0,2$	$1,8 \pm 0,2$	$1,7 \pm 0,2$	$\beta_w$ in kPa
	$12 \pm 2$	$13 \pm 3$	$15 \pm 4$	$\gamma_w$ in mm/s
TiO <sub>2</sub> / X5CrNi18.10 (0,7 $\mu\text{m}$ )	3,4	—	6,9	$\tau_w$ in kPa
	$2,0 \pm 0,1$	—	$1,9 \pm 0,3$	$\beta_w$ in kPa
	$14 \pm 2$	—	$13 \pm 4$	$\gamma_w$ in mm/s

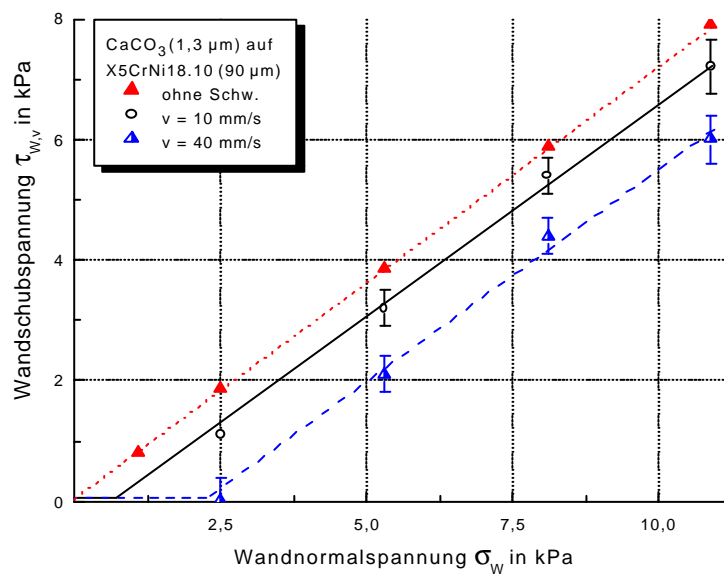
Die ohne Schwingungseinwirkung gemessenen Wandfließorte weisen keine spürbare Adhäsion auf, **Abb. 10.1**. Wenn  $\beta_w$  und  $\gamma_w$  für eine feste Materialpaarung konstant sind, ändert sich der Anstieg des Wandfließortes bei Schwingungseinwirkung nicht. Es folgt zwangsläufig, daß im Bereich kleiner Wandnormalspannungen die Reibung zwischen Schüttgut und Wand durch die Schwingungsanregung vollständig aufgehoben wird, **Abb. 10.6**. Das Schüttgut gleitet nahezu reibungsfrei über die Wandung. Der Wandreibungswinkel wird in diesem Bereich null (Abknicken des Wandfließortes). Dieser Zustand hängt von der Wandschubspannung ohne Schwingungseinwirkung  $\tau_w$  ab und kann auftreten, wenn  $\tau_w \leq \beta_w$ .



**Abb. 10.6:** Verlauf der Wandschubspannung  $\tau_{w,v}$  bei kleinen Wandnormalspannungen

#### 10.4 Bestimmung des Wandreibungswinkels

Wenn der Wandfließort nicht durch eine Ursprungsgerade approximiert werden kann, hängt der Wandreibungswinkel  $\varphi_w$  von der wirkenden Wandnormalspannung  $\sigma_w$  ab, vgl. **Abb. 6.3**. Im Falle eines Wandfließortes bei Schwingungseinwirkung steigt der Wandreibungswinkel mit steigender Wandnormalspannung, da die Wandschubspannung bei Schwingungseinwirkung für alle Wandnormalspannungen um den gleichen Absolutwert  $\beta_w [1 - \exp(-\hat{v} / \gamma_w)]$  vermindert wird, **Abb. 10.7**.

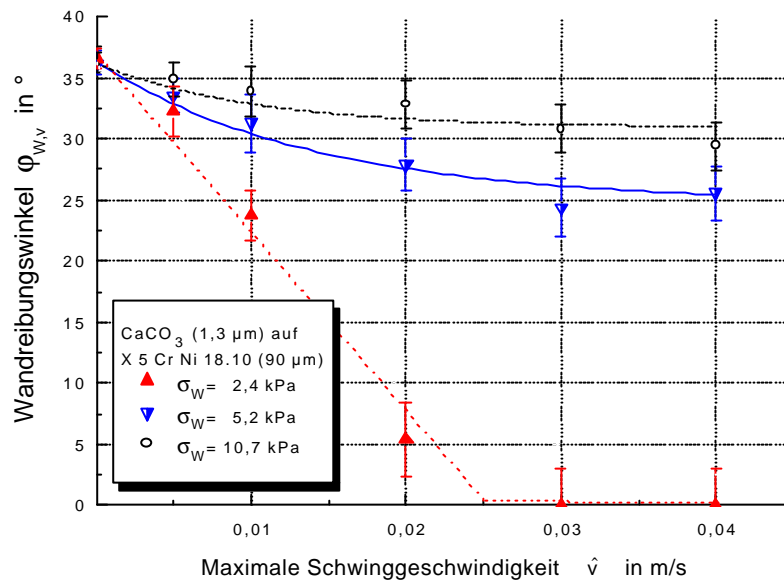


**Abb. 10.7:** Wandfließorte bei Schwingungseinwirkung



Der Wandreibungswinkels  $\varphi_w$  sinkt im Bereich kleiner Wandnormalspannungen stärker als bei großen Wandnormalspannungen und kann bei sehr kleinen Werten für  $\sigma_w$  null werden, **Abb. 10.8**. Wegen  $\tan \varphi_w = \tau_w / \sigma_w$  gilt für den Wandreibungswinkel bei Schwingungseinwirkung  $\varphi_{w,v}$ :

$$\tan \varphi_{w,v} = \frac{\tau_w}{\sigma_w} \cdot \left\{ 1 - \frac{\beta_w}{\tau_w} \cdot \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\hat{v}}{\gamma_w}\right) \right] \right\} \quad (10-3).$$



**Abb. 10.8:** Verlauf des Wandreibungswinkels bei Variation von Schwinggeschwindigkeit und Normalspannung am Beispiel von CaCO<sub>3</sub> / X5CrNi18.10 (90 μm)

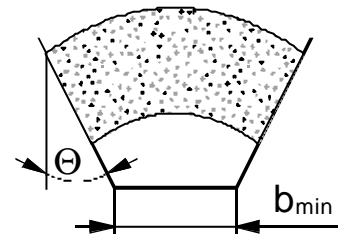
## 11 Konsequenzen für die Silo-Auslegung

Basierend auf den experimentell gewonnenen Ergebnissen lassen sich folgende Schlußfolgerungen für die Silo-Auslegung ableiten:

- Durch Einwirkung horizontaler Schwingungen lassen sich Schüttgutfestigkeit und Wandreibung verringern. Die mögliche Fließverbesserung ist limitiert. Ist diese minimale Scherspannung erreicht, bewirkt eine weitere Erhöhung der Schwingungsintensität keine weitere Fließverbesserung.
- Das Schüttgut wird durch horizontale Schwingungen, die während des Fließens wirken, nur „aktiviert“. Die Schüttguteigenschaften ändern sich nicht dauerhaft.
- Vertikale Schwingungen können insbesondere bei ruhendem Gut zum Verdichten führen. Dies deckt sich mit der allgemeinen Erfahrung, daß vertikale Schwingungen zu vermeiden sind und Vibratoren nur bei gleichzeitigem Produktabzug betrieben werden dürfen (vgl. Abschn. 2.4).
- Innerhalb des Schüttgutes tritt Resonanz auf. Besonders bei geringen Normalspannungen kann dies mit einer *zusätzlichen* Fließverbesserung einhergehen. Hinsichtlich der Silo-Auslegung ist die Resonanz schwierig zu berücksichtigen, da sie von der Normalspannung und der Schüttgutedichte abhängt. Berücksichtigt man die Resonanz nicht, liegt man auf der „sicheren Seite“.
- Die eingeleiteten Schwingungen werden besonders in kompressiblen Schüttgütern stark gedämpft. Hohe Frequenzen bewirken hohe spezifische Dämpfungen. Für eine Schwingungsübertragung durch das Schüttgut sind daher geringe Frequenzen zu bevorzugen.

Die verfahrenstechnische Trichter-Dimensionierung umfaßt die Bestimmung der Größen:

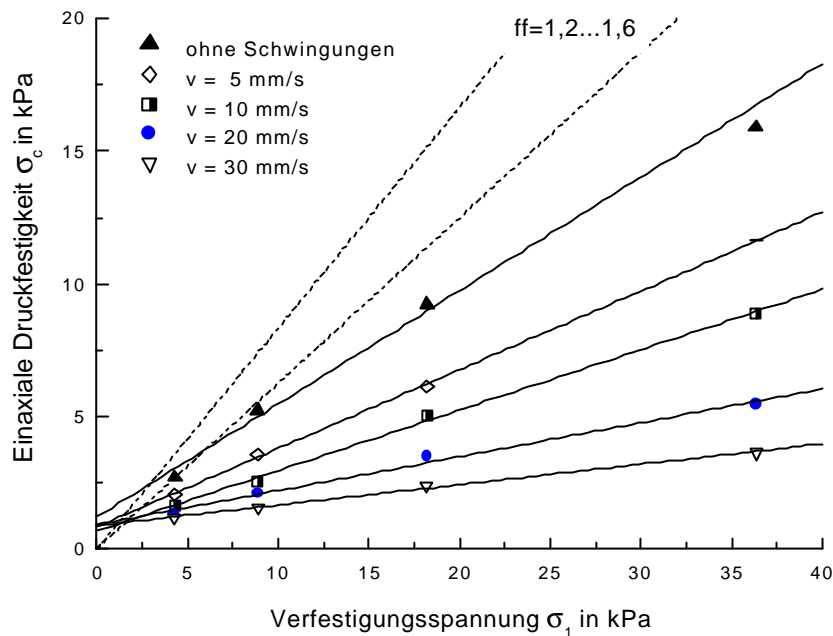
- Trichterneigungswinkel  $\Theta$
- minimale Öffnungsweite des Auslaufs  $b_{\min}$



Der erforderliche Trichterneigungswinkel für Massenfluß wird durch den Wandreibungswinkel festgelegt (siehe Anlage II). Die Verringerung des Wandreibungswinkels infolge Schwingungseinleitung ermöglicht flachere Silo-Trichter. So kann in vorhandenen Kernflußtrichtern durch eine Schwingungsanregung der Apparatewand Massenfluß erzielt werden.

Die minimale Öffnungsweite  $b_{\min}$  hängt maßgeblich von der einaxialen Druckfestigkeit  $\sigma_c$  ab. **Abb. 11.1** zeigt am Beispiel von  $\text{CaCO}_3$  den Verlauf der Druckfestigkeits-Kennlinien  $\sigma_c = f(\sigma_1)$  bei unterschiedlichen Schwingungsgeschwindigkeiten. Die gestrichelten Linien geben den Bereich des Fließfaktors  $ff$  für einen konischen Massenflußtrichter an. Der Ordinatenwert am Schnittpunkt von  $ff$ - und  $\sigma_c$ -Linie heißt kritische Schüttgutfestigkeit  $\sigma_{c,\text{krit}}$ . Mit  $\sigma_{c,\text{krit}}$  liegt die Größe von  $b_{\min}$  fest (vgl. Abschn. 4.4). Bei Schwingungseinleitung verringert sich  $\sigma_{c,\text{krit}}$  gegenüber dem Zustand ohne Schwingungsein-

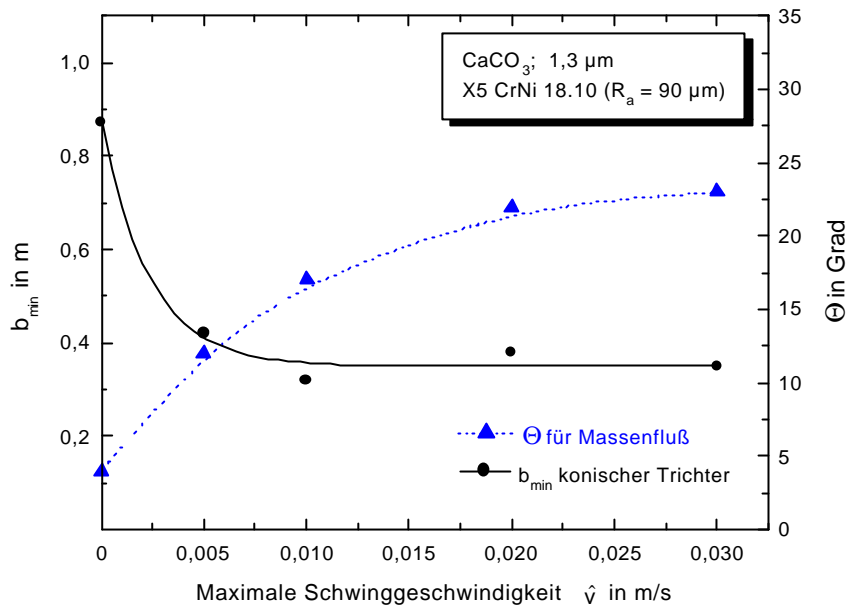
wirkung, **Abb. 11.1**. Bei Schwinggeschwindigkeiten oberhalb von 10 mm/s wird in diesem Beispiel keine weitere Verbesserung erreicht.



**Abb. 11.1:** Verlauf der Druckfestigkeits-Kennlinien für  $\text{CaCO}_3$  bei Variation der Schwinggeschwindigkeit

Dem Beispiel in **Abb. 11.1** liegen die Ergebnisse zugrunde, die mit der Versuchsanordnung „Scheroberteil schwingt“ gemessen wurden (Abschn. 8). Die experimentellen Ergebnisse setzen voraus, daß die ermittelten Schwinggeschwindigkeiten in der Scherzone bzw. am Ort der Fließstörung wirken. Dies trifft in jedem Fall für den Wandreibungswinkel und folglich für die Ermittlung von  $\Theta$  zu. Bei der Bestimmung von  $b_{\min}$  kommt die z.T. starke Dämpfung und damit Abschwächung der Schwingungen im Schüttgut zum tragen. Meßtechnisch zugänglich ist jedoch nur die Schwingung der Apparatewand. NEDDERMAN und LAOHAKUL [100] beobachteten bei Versuchen in Modellsilos, daß sich die Scherzone sehr nahe der Behälterwandung ausbildet (innerhalb weniger Millimeter). In diesem Fall sind die experimentellen Ergebnisse der Schwingungs-Scherversuche auch für die Berechnung von  $b_{\min}$  direkt anwendbar.

**Abb. 11.2** veranschaulicht den Schwingungseinfluß auf die mögliche Trichtergeometrie anhand des Verlaufs von  $b_{\min}$  und  $\Theta$  über der Schwinggeschwindigkeit. Die minimale Öffnungsweite zur Vermeidung von Brückenbildung in einem konischen Massenfluß-Trichter verringert sich hier immerhin von 0,9 m auf etwa 0,4 m. Dies wird bereits bei einer Schwinggeschwindigkeit von  $\hat{v} \approx 10$  mm/s erreicht. Für  $\Theta$  wird das Potential erst bei Schwinggeschwindigkeiten um  $\hat{v} \approx 30$  mm/s ausgeschöpft. Ohne Schwingungseinwirkung kann in einem Silo mit Trichter kein Massenfluß erreicht werden ( $\Theta < 5^\circ$ ), wohingegen mit Schwingungseinwirkung praktikable Neigungswinkel von  $\Theta \approx 20^\circ$  möglich sind.



**Abb. 11.2:** Möglichkeiten für die Silo-Auslegung am Beispiel von  $\text{CaCO}_3$  / X5 CrNi 18.10 (90  $\mu\text{m}$ )

Die Anwendung der Ergebnisse soll mit Hilfe zweier Apparatevarianten verdeutlicht werden:

1. Silo mit Außenvibratoren: Für Außenvibratoren sind höhere Frequenzen günstig, z.B. 100 Hz (vgl. Abschn. 2.2). Aus **Abb. 11.2** erhält man für die Schwinggeschwindigkeit:  $\hat{v} \approx 30 \text{ mm/s}$ . Dies entspricht einer maximalen Wandbeschleunigung von  $\hat{a} \approx 20 \text{ m/s}^2$  und einer moderaten Auslenkung der Apparatewand von  $\hat{x} \approx \pm 0,05 \text{ mm}$ . Die erforderliche Vibratorleistung hängt von der Trichterkonstruktion ab (Wandstärke, Versteifungen, Durchmesser...). Aufgrund der bei hohen Frequenzen starken Dämpfung sind mehrere Vibratoren am Umfang zu installieren, um ein asymmetrisches Fließprofil zu vermeiden. Die Vibratoren dürfen nur bei gleichzeitigem Produktabzug betrieben werden, möglichst im Intervallbetrieb. Der Trichtereneigungswinkel sollte  $20^\circ$  nicht übersteigen. Als Auslaufdurchmesser kann  $b = 0,4 \text{ m}$  gewählt werden.
2. Schwingtrichter (lt. **Abb. 2.8**): Bei Schwingtrichtern ist die Frequenz aufgrund der großen zu beschleunigenden Masse auf maximal 50 Hz begrenzt. In diesem Fall folgt für die erforderliche Beschleunigung:  $\hat{a} \approx 10 \text{ m/s}^2$ . Für den Auslaufdurchmesser gilt auch hier  $b = 0,4 \text{ m}$ . Die Wandnormalspannungen unterhalb des Umlenkkegels sind gering. Der Wandreibungswinkel nimmt hier Werte nahe Null an, vgl. **Abb. 10.8**. Mit  $\varphi_e = 50 \dots 60^\circ$  (Anlage V) erhält man  $\Theta \leq 45^\circ$ . Bezüglich der minimalen Spaltweite  $s_{\min}$  zwischen Umlenkkegel und Trichter kann vom ebenen Fließzustand ausgegangen werden, vgl. Abschn. 4.4. Aus (4-25) folgt:  $s_{\min} \approx b_{\min} / 2 = 0,2 \text{ m}$ .

Für Schwingtrichter ist auch ein kontinuierlicher Betrieb üblich. Für diesen Fall wurden etwa um 10 % höhere Schüttgutfestigkeiten bei Schwingungseinwirkung ermittelt, Abschn. 8.3.1. Folglich sind auch  $b_{\min}$  und  $s_{\min}$  etwa 10 % größer. Die Bedeutung dieses geringen Unterschieds ist fraglich, da man nach der JENIKE-Methode bekanntlich eher überdimensioniert.

GERICKE [40] nennt für Schwingtrichter einen üblichen Bereich der maximalen Beschleunigung von  $\hat{a} \approx 10 \dots 13 \text{ m/s}^2$ . Dies entspricht bei  $f = 25 \dots 50 \text{ Hz}$  einer Schwinggeschwindigkeit von  $\hat{v} \approx 30 \dots 80 \text{ mm/s}$ , was sich zumindest in der Größenordnung mit den hier ermittelten Werten deckt. Eine Überprüfung der vorgeschlagenen Übertragungskriterien im technischen oder halbertechnischen Maßstab steht noch aus.

## 12 Zusammenfassung

Das schwingungsinduzierte Fließen feinstkörniger, kohäsiver Pulver wurde anhand zweier Modellschüttgüter experimentell untersucht. Durch überlagerte harmonische Schwingungen kann das Fließverhalten dieser Produkte deutlich verbessert werden, was sich in den einzelnen Fließkennwerten widerspiegelt.

Die experimentellen Untersuchungen zum schwingungsinduzierten Fließen wurde mit Hilfe einer modifizierten Translations-Scherapparatur durchgeführt, bei der während des Schervorgangs horizontale Schwingungen in die Schüttgutprobe eingeleitet werden. Basierend auf diesem Konzept der „Schwingenden Translations-Scherzelle“ wurde eine Meßmethodik entwickelt, mit der sowohl der Einfluß der Schwingungen auf die einzelnen Fließkennwerte von Schüttgütern als auch die Schwingungsübertragung im Schüttgut meßtechnisch zugänglich sind. Für die Durchführung der Schwingungs-Scherversuche sind unterschiedliche Versuchsmethoden möglich, von denen hier im Vordergrund standen:

- A Schwingungseinfluß auf das beginnende Fließen: Die Schwingungen werden während des Abscherens in die Schüttgutprobe eingeleitet. Diese Methode spiegelt den häufigen Anwendungsfall kurzzeitig („gepulst“) betriebener Vibratoren zur Siloentleerung wieder.
- B Bei kontinuierlich betriebenen Austraghilfen, etwa Schwingtrichtern, wird auch das stationäre Fließen durch die Schwingungen beeinflusst. Dieser Anwendungsfall kann durch Schwingungseinleitung während des An- und Abscherens simuliert werden.

Die dem Schervorgang überlagerten Schwingungen vermindern die Scherfestigkeit  $\tau$ . Die Scherfestigkeit bei Schwingungseinwirkung  $\tau_v$  korreliert mit der maximalen Schwinggeschwindigkeit  $\hat{v}$ . Dieser Zusammenhang läßt sich mit zwei experimentell zu bestimmenden Größen beschreiben, die nur vom Schüttgut abhängen:

- einer charakteristischen Schwinggeschwindigkeit  $\gamma$  und
- dem Spannungsverhältnis  $\beta / \sigma_{M,st}$ , gebildet aus der Differenz zwischen Scherspannung ohne Schwingungseinwirkung und minimaler Scherspannung infolge Schwingungseinwirkung  $\beta = \tau - \tau_{v,min}$  und einer charakteristischen Verfestigungsspannung, hier der Mittelpunktspannung des MOHR-Kreises des stationären Fließens  $\sigma_{M,st}$ .

Die einaxiale Druckfestigkeit des Schüttgutes  $\sigma_c$  sinkt exponentiell mit steigender Schwinggeschwindigkeit, um sich asymptotisch einem Minimalwert zu nähern:

$$\sigma_{c,v} = 2 \cdot \tau_c \frac{1 + \sin \varphi_i}{\cos \varphi_i} \left\{ 1 - \frac{\beta}{\tau_c} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\hat{v}}{\gamma} \right) \right] \right\}$$

oder

$$\sigma_{c,v} = 2 \cdot \sigma_z \frac{\sin \varphi_i}{1 - \sin \varphi_i} \left\{ 1 - \frac{\beta}{\sigma_z \cdot \tan \varphi_i} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\hat{v}}{\gamma}\right) \right] \right\}.$$

Das Verfestigungsniveau wird hierbei durch die isostatische Zugfestigkeit  $\sigma_z$  des linearisierten Fließortes repräsentiert. Der innere Reibungswinkel  $\varphi_i$  bleibt nahezu konstant.

Ähnlich wie die Scherfestigkeit des Schüttgutes bei innerer Reibung kann auch die Reibung zwischen Schüttgut und Wandmaterial durch Schwingungseinwirkung herabgesetzt werden. Für den Wandreibungswinkel gilt analog dazu:

$$\tan \varphi_{w,v} = \frac{\tau_w}{\sigma_w} \cdot \left\{ 1 - \frac{\beta_w}{\tau_w} \cdot \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\hat{v}}{\gamma_w}\right) \right] \right\}$$

Die Modell-Parameter  $\gamma_w$  und  $\beta_w$  hängen von der jeweiligen Kombination Schüttgut / Wandmaterial ab. Für geringe Wandnormalspannungen  $\sigma_w$  kann die Wandschubspannung  $\tau_w$  durch den Schwingungseintrag nahezu völlig aufgehoben werden. Folglich geht der Wandreibungswinkel gegen Null.

Erstmals wurde das stationäre Fließen bei Schwingungseinwirkung untersucht. Das stationäre Fließen läßt sich beschreiben durch:

- den stationären Reibungswinkel  $\varphi_{st}$ ,
- die isostatische Zugfestigkeit des unverfestigten Gutes  $\sigma_0$  infolge der Haftkräfte zwischen den Partikeln und
- die Mittelpunktspannung des jeweiligen End-MOHR-Kreises  $\sigma_{M,st}$ , die das mittlere Spannungsniveau in der Partikelpackung während des stationären Fließens charakterisiert.

Während  $\sigma_0$  und  $\sigma_{M,st}$  näherungsweise invariant gegenüber der Schwingungseinwirkung sind, sinkt der stationäre Reibungswinkel  $\varphi_{st}$  mit steigender Schwinggeschwindigkeit gemäß:

$$\tan \varphi_{st,v} = \frac{\tau_{st} - \beta \cdot [1 - \exp(-\hat{v}/\gamma)]}{(\sigma_{st} + \sigma_0)}$$

Während des stationären Fließens wirkende horizontale Schwingungen zeigen keinen signifikanten Einfluß auf die Schüttgutfestigkeit  $\sigma_c$ . Das Schüttgut wird durch den geringfügigen zusätzlichen Energieeintrag nur „aktiviert“.

Innerhalb des Schüttgutes kann Resonanz auftreten. Diese ist mit einem Scherfestigkeitsminimum verbunden. Besonders bei geringen Normalspannungen kann so eine zusätzliche Scherspannungsreduzierung erzielt werden. Die Lage der Resonanzstelle hängt von der Verfestigungsspannung und der wirkenden Normalspannung ab.

Die Schwingungsübertragung im Schüttgut geht mit einer Dämpfung einher. Die feinstkörnigen, kohäsiven Pulver bewirken sehr starke Dämpfungen, verglichen mit Ergebnissen anderer Autoren für Par-

tikeln im Millimeterbereich. Folglich müssen die Schwingungen zum Zwecke einer Fließverbesserung möglichst nahe der Fließstörung bzw. der potentiellen Fließzone eingeleitet werden.

Resonanz und Dämpfung können mit einem eindimensionalen rheologischen Modell hinreichend genau wiedergegeben werden. Das verwendete Modell beruht auf einer Parallelschaltung je eines linear-elastischen, linear-viskosen und eines Reibungs-Anteils. Im Unterschied zum meist verwendeten ausschließlich linear-viskosen Dämpfungsmodell kann bei den hier untersuchten Pulvern der Dämpfungsanteil infolge COULOMB-Reibung nicht vernachlässigt werden.

Die ermittelten Ergebnisse tragen zum besseren Verständnis des schwingungsinduzierten Fließens feinstkörniger, kohäsiver Pulver bei. Es wurde eine einfache Möglichkeit vorgestellt, Kenngrößen des Schüttgutverhaltens in die bisher vorrangig empirische Auslegung und Anwendung schwingender Austraggeräte einzubeziehen.



## Literaturverzeichnis

- [1] ALSOP, S.; MATCHETT, A.J.; COULTHARD, J.M.; PEACE, J.: Elastic and cohesive properties of wet particulate materials. *Powder Technologie* 91(1997), S. 157-164.
- [2] ALTENBACH J.; ALTENBACH H.: Einführung in die Kontinuumsmechanik. Teubner, Stuttgart: 1994.
- [3] ARNOLD, P.C.; KAADEN, A.S.: Reducing hopper wall friction by mechanical vibrations. *Powder Technol.* 16(1977), S. 63-66.
- [4] ASHTON, M.D.; CHENG, D.C.; FARLEY, R.; VALENTIN, F.H.H.: Some investigations into the strength and flow properties of powders. *Rheological Acta* 4(1965) S. 206-218.
- [5] BANASZEWSKI, T.; SCHOLLBACH, A.E.: Schwingungsanalyse von Maschinen mit selbstsynchronisierenden Unwuchterregern. *Aufbereitungs-Technik* 39(1998), Nr. 8, S. 383-393.
- [6] BATES, L.: Solids flow generation and control. *World Congress on Particle Technology* 3, Brighton (UK): 1998
- [7] BELL, T.A.; GRYGO, R.J.: Selection of Jenike Tests – Yield Loci vs. Flow Function. *World Congress on Particle Technology* 3, Brighton (UK): 1998.
- [8] BELL, T.A.: Industrial Needs in Solids Flow for the 21<sup>st</sup> Century. *Powder Handling & Processing* 11(1999)1, S. 9-12.
- [9] BERTRAM, A.: Vorlesung Festigkeitslehre, Otto-v.-Guericke-Univ. Magdeburg: 2000.
- [10] BETTEN, J.: Zur Ermittlung der mechanischen Hysterese rheologischer Körper. *Zeitschrift für Naturforschung*, 27a(1972)4, S. 718-719.
- [11] BETTEN, J.: Tensorrechnung für Ingenieure. B.G. Teubner, Stuttgart: 1987.
- [12] BETTEN, J.: Kontinuumsmechanik - Elasto-, Plasto- und Kriechmechanik. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, u.a.: 1993.
- [13] BLEKHMANN, I.I.: Synchronisation in Science and Technology. ASME Press, New York: 1988.
- [14] BLEKHMANN, I.I.: Vibrationsmechanik (russ.). Nauka, Moskau: 1984.
- [15] BLOOR, D.; BROOK, R.J.; FLEMINGS, M.C.; MAHAJAN, S.: *The Encyclopaedia of Advanced Materials*. Pergamon, 1994.
- [16] TER BORG, L.: Erfahrungen aus Scherversuchen mit Schüttgütern der Chemie. *Chem.-Ing.-Tech.* 53(1981)8, S. 662-663.
- [17] TER BORG, L.: Einfluß des Wandmaterials auf das Auslaufverhalten von Schüttgütern aus Silos. *Chem.-Ing.-Tech.* 58(1986)7, S. 588-590.
- [18] BULAWA, J.; MICKIEWICZ, A.; WLODARSKI, A.: Eine Variante eines schwingenden Bunkertrichters für die kontrollierte Bunkerentleerung. *Physikalische Eigenschaften von Körnungen und Kornschüttungen*, Freiburger Forschungsheft A 634, Dt. Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig: 1980, S. 167-170.

- [19] BRIDGWATER, J.: Behaviour of Powders in a Condensed State. Handbook of Powder Science and Technology, FAYED, M.E.; OTTEN, L. (Hg.), Van Nostrand, New York: 1984, S. 169-180.
- [20] BUGGISCH, H.W.; STADLER, R.: On the relation between shear rate and shear stresses in one-dimensional steady shear flow of moist bulk solids. 1<sup>st</sup> World Congress Particle Technology, Preprints, Nürnberg: 1986.
- [21] CHIKAZAWA, M.; YAMAGUCHI, T.; KANAZAWA, T.: Adhesion Mechanism of Powder Particles Due to Water Vapour Adsorption. Powder Technology. Hemisphere Publishing Corporation, Washington, New York, London: 1984.
- [22] CHIKAZAWA, M.; TAKAI, T.; FUJI, M.: Physical properties of water adsorption layers formed on various particle surfaces. World Congress on Particle Technology 3, Brighton: 1998.
- [23] CRANDALL, S.H.; MCCALLEY, R.B., Jr.: Matrix Methods of Analysis. Shock and Vibration Handbook, HARRIS, C.M. (Hg.), 4. Aufl., McGraw-Hill, New York: 1996.
- [24] CREDE, C.E.; RUZICKA, J.E.: Theory of Vibration Isolation. Shock and Vibration Handbook, HARRIS, C.M. (Hg.), 4. Aufl., McGraw-Hill, New York: 1996.
- [25] CZICHOS, H. (Hg.): HÜTTE – Die Grundlagen der Ingenieurwissenschaften. 30. Aufl., Springer Berlin, Heidelberg u.a.: 1996.
- [26] DUCKSTEIN, H.; SCHMIDT, B.; SPERLING, L.: Bedingungen für selbstsynchronisierte Unwuchtvibratoren - Theorie und Beispiele. 4. Magdeburger Maschinenbau-Tage, Otto-v.-Guericke Universität Magdeburg: 22.-23.09.1999.
- [27] DUMBAUGH, G.D.: The Evolution of the „Universal“ Vibratory Drive System for Moving and Processing Bulk Solid Materials. Bulk Solids Handling 4(1984), Nr. 1, S.125-143.
- [28] DUMBAUGH, G.D.: The „Induced Vertical Flow“ of Bulk Solids from Storage. Bulk Solids Handling 4(1984), Nr. 1, S.153-171.
- [29] DUMBAUGH, G.D.: Applying the Vibratory Principles of „Induced Vertical Flow“ and „Induced Conveying“. Bulk Solids Handling 10(1998), Nr. 2, S.173-184.
- [30] EHRICH, F.; ABRAMSON, H.N.: Nonlinear Vibration. Shock and Vibration Handbook, HARRIS, C.M. (Hg.), 4. Aufl., McGraw-Hill, New York: 1996.
- [31] EISENHART ROTHE, M.v.; PESCHL, I.A.S.Z.: Schüttgutaustrag und Direkt dosierung. Aufbereitungs-Technik 18(1977), Nr. 11, S. 596-602.
- [32] EWINS, D.J.: Modal Testing: Theory and Practice. Nachdruck, Research Studies Press Ltd., Taunton, Somerset (UK): 1995.
- [33] FEISE, H.J.: Modellierung des mechanischen Verhaltens von Schüttgütern. Diss., TU Braunschweig: 1996.
- [34] FEISE, H.J.: A review of induced anisotropy and steady-state flow in powders. Powder Technol. 98(1998), S. 191-200.

- [35] FEISE, H.J. und SCHWEDES, J.: Constitutive laws for granular materials. Silos - Fundamentals of theory, behaviour and design, BROWN, C.J.; NIELSEN, J. (Hg.), E & FN Spon, London: 1998, S. 528-538.
- [36] FISCHER, U.; STEPHAN, W.: Mechanische Schwingungen. 3. Aufl., Fachbuchverlag, Leipzig, Köln: 1993.
- [37] FLEMING, A.: The Hogan Vibratory Bin Discharger. Bulk Solids Handling, 2(1982), Nr 1, S. 169-175.
- [38] FUCHS, Ch.: Unbalance Motors - The Reliable Drive for Modern Vibratory Systems. Bulk Solids Handling 4(1984), Nr. 1, S. 149-151.
- [39] FUNG, Y.C.: A First Course in Continuum Mechanics. 3. Aufl., Prentice-Hall, Englewood Cliffs (N.J.): 1994.
- [40] GERICKE, W.: Austragen von Schüttgütern mit Schwingtrichtern. Verfahrenstechnik 5(1971), Nr. 5, S. 212-216.
- [41] GERRITSEN, A.H.: The influence of the degree of stress anisotropy during consolidation on the strength of cohesive powder materials. Powder Technol. 43(1985) S. 61-70.
- [42] GOODMAN, L.E.: Material Damping and Slip Damping. Shock and Vibration Handbook, HARRIS, C.M. (Hg.), 4. Aufl., McGraw-Hill, New York: 1996.
- [43] GREGG, S.J.; SING, K.S.W.: Adsorption, Surface Area and Porosity. 2. Aufl. Academic Press, London: 1982.
- [44] GRÖGER, T.: Partikelmechanische Untersuchungen zur senkrechten Schlauchförderung. Diss., Otto-v.-Guericke-Universität Magdeburg: 1999.
- [45] HARDER, J.: Ermittlung der Fließeigenschaften kohäsiver Schüttgüter mit einer Zweiachsalbox. Diss., TU Braunschweig: 1986.
- [46] HARRIS, C.M. (Hg.): Shock and Vibration Handbook. 4. Aufl., McGraw-Hill, New York: 1996.
- [47] DEN HARTOG, J.P.: Mechanische Schwingungen. Julius Springer, Berlin: 1936.
- [48] DEN HARTOG, J.P.: Forced Vibrations with combined Viscous and Coulomb Damping. Phil. Mag. S. 7, 9(1930)59, S. 801-817.
- [49] DEN HARTOG, J.P.: Forced Vibrations with combined Coulomb and Viscous Friction. Trans. ASME, APM 53(1930)9, S. 107-115.
- [50] HEINRICI, H.: Discharge of bulk solids from silos - description of discharge systems. Silos - Fundamentals of theory, behaviour and design, BROWN, C.J.; NIELSEN, J. (Hg.), E & FN Spon, London: 1998, S. 221-230.
- [51] HEPWORTH, W.; MATCHETT, A.J. et al: Vibration Guidelines - The Effect of Vibration on Bulk Materials and Plant. Bulk Solids Handling 15 (1995), Nr. 2, S. 271-276.
- [52] HERRMANN, H.J.; LUDING, S.: Modelling granular media on the computer. Continuum Mech. Thermodyn. (1988)10, S. 189-231.

- [53] HEYMANN, J.; LINGENER, A.: Experimentelle Festkörpermechanik. Fachbuchverlag, Leipzig: 1986.
- [54] HIKEY, A.J.; CONCESSION, N.M.: Flow Properties of Selected Pharmaceutical Powders from a Vibrating Spatula. Part. Part. Syst. Charact. 11(1994), S. 457-462.
- [55] HÖHL, W.: Berechnung des Verformungsverhaltens kohäsiver Schüttgüter mit der Finite-Elemente-Methode. Diss., TU Braunschweig: 1988.
- [56] HÖHNE, D.: Beitrag zur Vergleichbarkeit von Scherversuchen mit einem JENIKE-Schergerät und einem Ringschergerät. Freiburger Forschungshefte A 694, Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig: 1984.
- [57] HÖHNE, D.; NOVOSAD, J.; SMID, J.; SCHÜNEMANN, U.: Untersuchungen zum Einfluß der Schüttgutdichte auf das Ergebnis von Scherfestigkeitsmessungen am JENIKE-Schergerät. Freiburger Forschungshefte A 703, Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig: 1985, S. 22-40.
- [58] JACOB, K.V.: Editorial. Bulk Solids Handling 21(2001)2, S. 121-123.
- [59] JACOBSEN, L.S.: Steady Forced Vibration as Influenced by Damping. Trans. ASME, APM 52(1930)15, S. 169-181.
- [60] JENIKE, A.W.: Storage and Flow of Solids. Bul. 123, Utah Engineering Experiment Station, University of Utah, Salt Lake City: 1964.
- [61] Kaliszky, S.: Plastizitätslehre, Theorie und technische Anwendungen. VDI-Verlag, Düsseldorf: 1984.
- [62] KAMATH, S. PURI, V.M. and MANBECK, H.B.: Flow property measurement using the Jenike cell for wheat flour at various moisture contents and consolidation times. Powder Technol. 81(1994), S. 293-297.
- [63] KEZDI, A.: Handbuch der Bodenmechanik, Bd. 1 Bodenphysik. Verlag für Bauwesen, Berlin: 1969.
- [64] KLOTTER, K.: Technische Schwingungslehre. Erster Band: Einfache Schwinger, Teil A: Lineare Schwingungen. 3. Aufl., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg u.a.: 1980.
- [65] KLOTTER, K.: Technische Schwingungslehre. Erster Band: Einfache Schwinger, Teil B: Nichtlineare Schwingungen. 3. Aufl., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg u.a.: 1980.
- [66] KÖHLER, Th.; TOMAS, J.; SCHUBERT, Heinrich: Einfluß der relativen Luftfeuchte auf das Fließverhalten von feinkörnigen Schüttgütern. 1. Weltkongreß Partikeltechnologie, Nürnberg: 1986.
- [67] KÖHLER, Th.: Beitrag zum Fließverhalten feiner Pulver geringer Feuchte. Diss., Bergakademie Freiberg: 1989.
- [68] KOLYMBAS, D.: Eine konstitutive Theorie für Böden und andere körnige Stoffe. Veröffentlichungen des Institutes für Bodenmechanik und Felsmechanik der Universität Karlsruhe: 1988.
- [69] KOLYMBAS, D.; WU, W.: Introduction to Hypoplasticity. Modern Approaches to Plasticity, KOLYMBAS, D. (Hg.), Elsevier Amsterdam, London, New York, Tokyo:

- 1993, S. 213-223.
- [70] KREIBIG, R.: Einführung in die Plastizitätstheorie. Fachbuchverlag, Leipzig: 1992.
- [71] KRÖGER, D.: Niederfrequente Vibrationsantriebe mit Druckluft. Vibration und Verfahrenstechnik, Universität Karlsruhe (TH), Karlsruhe:1998, S. II/17-II/22.
- [72] VAN KUIK, P. and MATCHETT, A.J.: The effects of vibration upon wet sand on a vibrating plane with a horizontal line of action. Powder Technol. 78(1994), S. 197-202.
- [73] LADE, P.V.: Effects of Voids and Volume Changes on the Behaviour of Frictional Materials. Int. J. Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 12(1988), 351-370.
- [74] LAUGWITZ, F.: Vorlesung Experimentelle Mechanik. Otto-v.-Guericke-Universität Magdeburg: 1997.
- [75] LEE, W.E.; RAINFORTH, W.M.: Ceramic Microstructures - Property control by processing. Chapman & Hall, London, Glasgow, Weinheim, u.a.: 1994.
- [76] LESCHONSKI, K.: Grundlagen und moderne Verfahren der Partikelmeßtechnik. Lehrstuhl für mechanische Verfahrenstechnik, TU Clausthal: 1981.
- [77] LÜCK, W.: Feuchtigkeit - Grundlagen, Messen, Regeln. R. Oldenbourg Verlag, München, Wien: 1964.
- [78] MAGNUS, K.; POPP, K.: Schwingungen. 5. Aufl., Teubner, Stuttgart: 1997.
- [79] MAISCH, K.; TEJCHMAN, J.: Behaviour of bulk solids in model silos under torsional vibrations. Reliable Flow of Particulate Solids III, Porsgrunn (Norwegen): 11.-13.8.1999, S. 237-244.
- [80] MALVERN, L.E.: Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. Prentice-Hall, Englewood Cliffs (N.J.): 1969.
- [81] MATCHETT, A.J.: Critical state model for vibration in particulate systems. Powder Technol. 70(1992), S. 63-70.
- [82] MATCHETT, A.J.; ALSOP, S.: A two-phase elastic model of vibration in a bed of particulates. Powder Technol. 83(1995) S. 13-28.
- [83] MATCHETT, A.J.; AUFAUVRE, M.; COULTHARD, J.M.; ALSOP, S.: The Elastic and Cohesive Properties of Particulate Beds. AIChE Symp. Ser., New York 93(1997)317, S. 92-96.
- [84] MATCHETT, A.J.; AUFAUVRE, M.; ALSOP, S.: An elastic shell model for wet particulate solids. Powder Technol. 96(1998), S. 106-115.
- [85] MATCHETT, A.J.; SHARIF, K.; COULTHARD, J.M.: A friction / dilation model of the effects of vibration upon beds of particulate solids. World Congress on Particle Technology 3, Brighton (UK): 1998.
- [86] MATCHETT, A.J.; YANAGIDA, T.; OKUDAIRA, Y.; KOBAYASHI, S.: Vibrating powder beds: a comparison of experimental and Distinct Element Method simulated data. Powder Technol. 107(2000), S. 13-30.

- [87] MATCHETT, A.J.; ARMSTRONG, B.; ROHNER, I.; ANDREWS, B.: A Vibratory Hopper for Reliable Flow. PARTEC 2001, Nürnberg: 27.-29.03.2001.
- [88] MARTENS, P. (Hg.): Silo-Handbuch. Ernst & Sohn Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin: 1988.
- [89] MC CONNELL, K.G.: Vibration Testing - Theory and Practice. John Wiley & Sons New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore 1995.
- [90] MC GLINCHEY D.; MATCHETT, A.J.; COULTHARD, J.M.: The failure properties of cohesive materials subject to sinusoidal vibration. Partec '95, Nürnberg: 21.-23. März 1995, S. 303-312.
- [91] MOGILEVSKI, R.I.; ORMONBEKOV, T.O.: Dynamics of rods with interfacial dry friction. Journal of the Mechanical Behaviour of Materials, 5(1993)1, S. 85-93.
- [92] MOLERUS, O.: Theory of yield of cohesive powders. Powder Technol. 12(1975), S. 259-275.
- [93] MOLERUS, O.: Fluid-Feststoff-Strömungen - Strömungsverhalten feststoffbeladener Fluide und kohäsiver Schüttgüter. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg: 1982.
- [94] MOLERUS, O.: Schüttgutmechanik, Grundlagen und Anwendungen in der Verfahrenstechnik. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg u.a.: 1985.
- [95] MOLERUS, O.; SIEBENHAAR, W.; GERICKE, W.: Entwicklung eines pneumatischen Förderverfahrens zum schonenden Transport bruchempfindlicher Güter. Chem.-Ing.-Tech. 61(1989)9, S. 752-753.
- [96] MOLERUS, O.: Verhalten feinkörniger Schüttgüter. Chem.-Ing.-Tech. 65(1993)6 S. 710-718.
- [97] MOREY, M.D. JAQUIN, G.; BARIGOU, M.; BECKETT, S.T.: : Vibration effects on rheology of food suspensions. World Congress on Particle Technology 3, Brighton (UK): 1998.
- [98] NAITO; M. et al.: Microscopic analysis on the consolidation process of granule beds. Powder Technology 95(1998), S. 214-219.
- [99] NARASIMHAN, M.N.L.: Principles of Continuum Mechanics. John Wiley & Sons. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore: 1992.
- [100] NEDDERMAN, R.M.; LAOHAKUL, C.: The Thickness of the Shear Zone of Flowing Granular Materials. Powder Technol. 25(1980), S. 91-100.
- [101] NEDDERMAN, R.M.; TÜZÜN, U.; SAVAGE, S.B.; HOULSBY, G.T.: The flow of granular materials. Teil I: Discharge rate from hoppers. Chem. Eng. Sc. 37(1982)11, S. 1597-1609.
- [102] NORMAN-GREGORY, G.M.; SELIG, E.T.: J. Volume Change Behaviour of Vibrated Sand Columns. Geotech. Eng. 115(1987), S. 289-303.
- [103] OTTL, D.: Schwingungen mechanischer Systeme mit Strukturdämpfung. VDI-Forsch.-Heft 603, VDI-Verlag, Düsseldorf: 1981.

- [104] PAGE, N.W.; KILLEN, P.D.; CARNAVAS; P.C.: On the Elastic Properties of Ductile Granular Materials. World Congress on Particle Technology 3, Brighton (UK): 1998.
- [105] PAHL, M.H.; WICKE, R.: Haftkräfte in kompaktierten Schüttgütern. Aufbereitungs-Technik 29(1988)7, S. 371-380.
- [106] PAHL, M.H.; ERNST, R.; WILMS, H.: Lagern, Fördern und Dosieren von Schüttgütern. 2. Aufl. Fachbuchverlag Leipzig / Verlag TÜV Rheinland, Leipzig: 1993.
- [107] PALMOV, V.: Vibrations of Elasto-Plastic Bodies. Springer, Berlin u.a.: 1998.
- [108] PEUKERT, W.: Entwicklungstendenzen in der Feststoffverfahrenstechnik. Chem.-Ing.-Tech. 6(1996)10, S. 1254-1263.
- [109] PITCHUMANI, B.; SHARMA, A.K.; ENSTAD, G.G.: A Simplified Procedure for Flow Property Testing Using the Jenike Shear Tester. 5<sup>th</sup> Internat. Conf. on Bulk Materials Storage, Handling and Transportation, Newcastle (Australien): 1995, S. 371-379.
- [110] PROFOS, P.; PFEIFER, T.: Handbuch der industriellen Meßtechnik. 6. Aufl., R. Oldenbourg Verlag, München, Wien: 1994.
- [111] PURUTYAN, H.; PITTENGER, B.H.; CARSON, J.W.: Solve Solids Handling Problems by Retrofitting. Chemical Engineering Progress, (1998), April, S. 27-39.
- [112] RADEMACHER, F.J.C.: On the application of vibratory disk feeders for silos. Bulk Solids Handling 16(1996), Nr. 1, S. 75-80.
- [113] RADEMACHER, F.J.C.: On the application of vibratory disk feeders for silos. Forschung im Ingenieurwesen - Engineering Research Bd. 62(1996), Nr. 5, S. 129-145.
- [114] ROBERTS, A.W.; SCOTT, O.J.: An Investigation into the Effects of Sinusoidal and Random Vibrations on the Strength and Flow Properties of Bulk Solids. Powder Technol. 21(1978), S. 45-53.
- [115] ROBERTS, A.W.: The Dynamik Properties of Bulk Solids in the Presence of Vibrations. Powder Technology, INOYA, K.; BEDDOW, J.K.; JIMBO, G. (Hg.), Hemisphere Publishing Corporation, Washington, New York, London: 1984.
- [116] ROBERTS, A.W.: Vibration of Powders and its Application. Handbook on Powder Science and Technology, FAYED, M.E.; OTTEN, L. (Hg.), Van Nostrand: 1984, S. 181-229.
- [117] ROBERTS, A.W., OOMS, M. and SCOTT, O.J.: Influence of Vibrations on the Strength and Boundary Friction Characteristics of Bulk Solids and the Effect on Bin Design and Performance. Bulk Solids Handling 6(1986)1, S. 161-169.
- [118] ROBERTS, A.W.: Energy excited gravity flow of particulate solids in silos and channels. World Congress of Chemical Engineering, Karlsruhe: 1991.
- [119] ROSCOE, K.H.; SCHOFIELD, A.N.; WROTH, C.P.: On the Yielding of Soils. Geotechnique, 8 (1958), S.22-53.
- [120] RUMPF, H.; HERMANN, W.: Eigenschaften, Bindungsmechanismen und Festigkeit von Agglomeraten. Aufbereitungs-Technik 11(1970)3, S. 117-127.

- [121] RUMPF, H.: Die Wissenschaft des Agglomerierens. Chem.-Ing.-Techn. 46(1974)1, S. 1-10.
- [122] RUNGE, J.: Messung und Klassifizierung der Zeitverfestigung von Schüttgütern. Schüttgut 1(1995)3, S. 473-480.
- [123] SARABER, F.; ENSTAD, G.G.; HAAKER, G.: Investigations on the anisotropic yield behaviour of a cohesive bulk solid. Powder Technol. 64(1991) S. 183-190.
- [124] SAUER, G.: Unwucht-Schubkurbel-Elektromagnet. Vibration und Verfahrenstechnik, Universität Karlsruhe (TH), Karlsruhe:1998, S. II/1-II/7.
- [125] SAWICKI, A.; SWIDZINSKI, W.: Elastic moduli of non-cohesive particulate materials. Powder Technology 96(1998), S. 24-32.
- [126] SCHEIBE, M.: Die Fördercharakteristik einer Zellenradschleuse unter Berücksichtigung der Wechselwirkung von Silo und Austragorgan. Diss., TU Bergakademie Freiberg: 1997.
- [127] SCHOLZ, E.: Karl-Fischer-Titration. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg u.a.: 1984.
- [128] SCHÖNERT, K.; STEIER, K.: Die Grenze der Zerkleinerung bei kleinen Korngrößen. Chem.-Ing.-Tech. 43(1971)13, S. 773-777.
- [129] SCHUBERT, Heinrich u.a.: Aufbereitung fester mineralischer Rohstoffe. Bd. 3, 2. Aufl., Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig, 1984.
- [130] SCHUBERT, Heinrich u.a.: Mechanische Verfahrenstechnik. 3. Aufl., Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig: 1990.
- [131] SCHUBERT, Heinrich: Zu einigen für die Aufbereitungstechnik relevanten Problemen der Partikelwechselwirkungen. Teil I: Aufbereitungs-Technik 38(1997)4, S. 175-184, Teil II: Aufbereitungs-Technik 38(1997)5, S. 231-236.
- [132] SCHUBERT, Helmar: Grundlagen des Agglomerierens. Chem.-Ing.-Techn. 51(1979)4, S. 266-277.
- [133] SCHULZE, D.: Untersuchungen zur gegenseitigen Beeinflussung von Silo und Austragorgan. Diss., TU Braunschweig: 1991.
- [134] SCHULZE, D.; SCHWEDES, J.: Das Fließverhalten und die Siloauslegung von REA-Gips. Chem.-Ing.-Tech. 63(1991)3, S. 256-257.
- [135] SCHULZE, D.: Feeders and flow-promoting devices. Silos - Fundamentals of theory, behaviour and design, BROWN, C.J.; NIELSEN, J. (Hg.), E & FN Spon, London: 1998, S. 200-220.
- [136] SCHÜTZ, W.; SCHUBERT, Helmar: Der Einfluß von Anpreßkräften auf die Partikelhaftung. Chem.-Ing.-Tech. 48(1976)6, S. 567.
- [137] SCHWEDES, J.: Fließverhalten von Schüttgütern in Bunkern. Verlag Chemie, Weinheim: 1968.
- [138] SCHWEDES, J.: Scherverhalten leicht verdichteter, kohäsiver Schüttgüter. Diss., Universität Karlsruhe: 1971.
- [139] SCHWEDES, J.: Hochschulkurs Lagern und Fließen von Schüttgütern. TU Braun-



schweig: 1995.

- [140] SCHWEDES, J.: Testers for measuring flow properties of particulate solids. Reliable Flow of Particulate Solids III, Porsgrunn (Norwegen): 11.-13.8.1999, S. 3-40.
- [141] SCHILLING, W.: Einfluß des Baugrundes auf die Schwingungen von Turbomaschinen. Diss., TH Darmstadt: 1986.
- [142] SEBER, G.A.F.: Nonlinear Regression. John Wiley & Sons, New York: 1989.
- [143] SHABANA, A.A.: Theory of Vibration, Vol. I: An Introduction. Springer Verlag, New York: 1991.
- [144] SHACKELFORD, J.F.; ALEXANDER, W.; PARK, J.S. (Hg.): CRC Materials Science and Engineering Handbook. CRC Press, Boca Raton, Ann Arbor, London, Tokyo: 1994.
- [145] SHARMA, V.K.; DREW, L.O.; NELSON, G.L.: High Frequency Vibrational Effects on Soil-Metal Friction. Trans. ASAE 20(1977)1, S. 46-51.
- [146] SIEBENHAAR, W.: Vibrationsinduzierte pneumatische Förderung. Diss., Universität Erlangen-Nürnberg: 1990.
- [147] DE SILVA, C.W.: Vibration, Fundamentals and Practice. SRS Press, Boca Raton, London, New York, Washington D.C.: 1999.
- [148] SOBE, A.: Untersuchungen über den Einfluß mechanischer Schwingungen auf ruhende und in Bewegung befindliche Schüttgüter. Diss., TU Braunschweig: 1982.
- [149] SPERLING, L.: Selbstsynchronisation von statisch und dynamisch unwuchtigen Rotoren. Teil I: Grundlagen, Technische Mechanik, 14(1994), Nr. 1, S. 9-24, Teil II: Ausführungen und Beispiele, ebenda, Nr. 2, S. 85-96.
- [150] SPERLING, L.; MERTEN, F.; DUCKSTEIN, H.: Analytical and Numerical Investigations of Rotation-Vibration-Phenomena. Nonlinear Oscillations in Mechanical Systems, IDEITSEV, D.A.; ZEITLIN, M.G. (Hg.), St. Petersburg: 1998, Vol. 1, S. 145-159.
- [151] SPRUNER V. MERTZ, G.: Unwuchtmotoren und Magnetvibratoren in der Vibrationstechnik - eine Gegenüberstellung. Aufbereitungs-Technik 39(1998), Nr. 11, S. 561-568.
- [152] STADLER, R.: Stationäres, schnelles Fließen von dicht gepackten trockenen und feuchten Schüttgütern. Diss., Universität Karlsruhe: 1986.
- [153] STEPHAN, W.; POSTL, R.: Schwingungen elastischer Kontinua. B.G. Teubner, Stuttgart, 1995.
- [154] SUZUKI, A.; TAKAHASHI, H.; TANAKA, T.: Behaviour of a Particle Bed in the Field of Vibration, II. Flow of particles through slits in the bottom of a vibrating vessel, Powder Technol. 2(1968), S. 72-77.
- [155] TAKAHASHI, H.; SUZUKI, A.; TANAKA, T.: Behaviour of a Particle Bed in the Field of Vibration, I. Analysis of particle motion in a vibrating vessel, Powder Technol. 2(1968), S. 65-71.
- [156] TARDOS, G.I.; NICOLAESCU, I.V.; AHTCHI-ALI, B.: Ingress of Atmospheric Moisture into Packed Bulk Powders. Powder Handling & Processing, Teil I: 8(1996)1, S. 7-15; Teil II: 8(1996)3, S. 215-220.

- [157] TEJCHMAN, J.: Technical concept to prevent the silo honking. *Powder Technology* 106(1997), S. 7-22.
- [158] TEUNOU, E.; VASSEUR, J.: Time Flow Function: Means to Estimate Water Effect on Dissoluble Bulk Materials Flow. *Powder Handling & Processing* 8(1996)2, S. 111-116.
- [159] TERZAGHI, K.: The shearing resistance of saturated soil and the angles between the planes of shear. *Proc. 1<sup>st</sup> Int. Conf. Soil Mech., Cambridge (Mass.): 1936*, S. 54-56.
- [160] TERZAGHI, K.; PECK, R.B.; MESRI, G.: *Soil Mechanics in Engineering Practice*. 3. Aufl., John Wiley & Sons, New York, Chichester, u.a.:1996.
- [161] THIEL, G.: *Steifigkeit und Dämpfung von wassergesättigtem Feinsand unter Erdbebenbelastung*. Diss., Ruhr-Universität Bochum: 1988.
- [162] THOMSON F.M.: Storage and flow of particulate solids. *Handbook of Powder Science and Technology*, FAYED, M.E.; OTTEN, L. (Hg.), 2. Aufl. Chapman & Hall, New York: 1997, S. 389-486.
- [163] TOMAS, J.: *Untersuchungen zum Fließverhalten von feuchten und leichtlöslichen Schüttgütern*. Freiburger Forschungsheft A 677, Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig: 1983.
- [164] TOMAS, J.: *Modellierung des Fließverhaltens von Schüttgütern auf der Grundlage der Wechselwirkungskräfte zwischen den Partikeln und Anwendung bei der Auslegung von Bunkeranlagen*. Diss. B, TU Bergakademie Freiberg: 1991.
- [165] TOMAS, J.: *Vorlesung Schüttguttechnik*, Otto-v.-Guericke-Univ. Magdeburg: 1995.
- [166] TOMAS, J.: *Zum Verfestigungsprozeß von Schüttgütern - Mikroprozesse, Kinetikmodelle und Anwendungen*. *Schüttgut* 2(1996)1, S. 31-51.
- [167] TOMAS, J.: *Aufbereitungstechnik und Recycling*. Vorlesung, Otto-v.-Guericke-Universität Magdeburg: 1997.
- [168] TOMAS, J.: *Zur Verfestigung von Schüttgütern -Mikroprozesse und Kinetikmodelle*. *Chem.-Ing.-Techn.* 69(1997)4, S. 455-467.
- [169] TOMAS, J.: *Fundamentals of particle adhesion and consolidation microprocesses*. AIChE-Symposium, Miami: 1998.
- [170] TOMAS, J.: *Particle Adhesion Fundamentals and Bulk Powder Consolidation*. *Reliable Flow of Particulate Solids III*, Porsgrunn (Norwegen): 11.-13.8.1999, S. 641-656.
- [171] TOMAS, J.: *Particle Adhesion Fundamentals and Bulk Powder Consolidation*. *Fine Powder Processing '99*, Huang, CC; Puri, V.M.; Adair, J.H.; Knobloch, C.L. (Hg.), Penn State University, PA (USA): 1999, S. 352-365.
- [172] TOMAS, J.: *Particle Adhesion and Powder Flow Behaviour*. *The 3<sup>rd</sup> Israeli Conference for Conveying and Handling of Particulate Solids*, Kalmann, H.; Levy, A.; Hubert, M. (Hg.), The Dead Sea (Israel): 29.5.-1.6.2000, S. 3.57-3.65.
- [173] TOMAS, J.: *Particle Adhesion Fundamentals and Bulk Powder Consolidation*. *KONA* 18(2000), S. 157-169.

- [174] TOMAS, J.: Particle Adhesion and Powder Flow Properties. Teil I: Instantaneous Elastic-Plastic Particle Contact Consolidation and Yield Loci, Powder Technol. (in Vorbereitung).
- [175] TROOST, A. und BETTEN, J.: Exakte Dämpfungskennwerte bei linearen Schwingungen. Zeitschrift für Naturforschung, 25a(1970)12, S. 1994-1996.
- [176] VOCK, F.: Zur Rührmechanik von Feststoffschüttungen. Diss., Universität Karlsruhe: 1975.
- [177] WASSGREN, C.R.; HUNT, M.L.; BRENNEN, C.E.: Effects of Vertical Vibration on Hopper Flows of Granular Materials. Mechanics of Deformation and Flow of Particulate Materials, CHANG, C.S. et al. (Hg.), ASCE, New York: 1997, S. 335-348.
- [178] WEATHERS, R.C. et al.: Effects of Horizontal Vibration on Hopper Flows of Granular Materials. Mechanics of Deformation and Flow of Particulate Materials, CHANG, C.S. et al. (Hg.), ASCE, New York: 1997, S. 349-360.
- [179] VAN DER WEL: Trends in Powder Technology. Powder Handling and Processing, 10(1998)2, S. 139-142.
- [180] WILLIAMS, J.C.; BIRKS, A.H.: The Comparison of the Failure Measurements of Powders with Theory. Powder Technology 1(1967) S. 199-206.
- [181] WILMS, H.; SCHWEDES, J.: Siloausläufe. Silo-Handbuch, MARTENS, P. (Hg.), Ernst & Sohn Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin: 1988, S. 87-110.
- [182] WÜRGES, R.: Universell steuerbarer Vibrationserreger. Vibration und Verfahrenstechnik, Universität Karlsruhe (TH), Karlsruhe:1998, S. II-9-II-16.
- [183] YANAGIDA, T.; MATCHETT, A.J.; COULTHARD, J.M.: Vibration in Systems of Binary Powder Mixtures – Elastic and Damping Properties and their Dependence upon Mixing Quality. PARTEC 2001, Nürnberg: 27.-29.03.2001.
- [184] YU, C.J.; PRUCHER, T.: Measuring Young's Modulus and Shear Modulus – A Comparison of Dynamic and Mechanical Techniques. in Advances in Metallurgy and Particulate Materials 1, Powders, Characterization, Testing and Quality Control, Metal Powder Industries Association, Princeton (N.J.): 1993; S. 273-286.
- [185] -: Standard shear testing technique for particulate solids using the Jenike shear cell. Institution of Chemical Engineers, European Federation of Chemical Engineering, 1989.
- [186] -: Marktübersicht Vibrationstechnik. Chemie Technik, 27(1998), Nr. 2, S. 45-48.
- [187] -: AVITEQ Vibrationstechnik GmbH, ehem. AEG Vibrationstechnik (Hg.): Grundbegriffe der Schwingfördertechnik. Firmenprospekt, Frankfurt/M.
- [188] -: Netter Vibrationstechnik GmbH, Mainz-Kastel: Firmenprospekt sowie Korrespondenz mit Herrn D. Kröger, ehem. Techn. Leiter.
- [189] -: Unebenheiten von Schiene und Straße als Schwingungsursache. VDI-Berichte 877, VDI-Verlag, Düsseldorf: 1991.
- [190] -: Handbuch der Schock- und Vibrationsmeßtechnik. Endevco, Heidelberg: 1992.

## DIN Normen

DIN 25 491	Bestimmung der Schüttdichte und der Vibrationsdichte von Kernbrennstoffpulver.	04/1989
DIN 66 126	Bestimmung der spezifischen Oberfläche disperser Feststoffe mit Durchströmungsverfahren. Teil 1: Grundlagen    Teil 2: Verfahren und Gerät nach Blaine	02/1989
DIN 66 131	Bestimmung der spezifischen Oberfläche von Feststoffen durch Gasadsorption nach Brunauer, Emmett und Teller (BET)	07/1993
DIN 66 132	Bestimmung der spezifischen Oberfläche von Feststoffen durch Stickstoffadsorption - Einpunkt-Differenzverfahren nach Haul und Dümbgen	07/1975
DIN EN 1237	Düngemittel: Bestimmung der Rütteldichte	08/1995
DIN EN ISO 787:	Allgemeine Prüfverfahren für Pigmente und Füllstoffe. Teil 11: Bestimmung des Stampfvolumens und der Stampfdichte.	10/1995
DIN EN ISO 4287:	Geometrische Produktspezifikationen (GPS) Oberflächenbeschaffenheit: Tastschnittverfahren – Benennung, Definition und Kenngrößen der Oberflächenbeschaffenheit.	10/1998
DIN ISO 697	Tenside, Waschmittel: Bestimmung der Schüttdichte - Verfahren durch Messen der Masse eines gegebenen Volumens.	01/1984
DIN ISO 3953	Metallpulver: Bestimmung der Klopfdichte.	02/1995

## Patente

- [191] Schutzrecht DE 295 05 342 U1 (1995-08-17). Stanelle, K.H., Silotrichter mit Rüttelkorb als Einsatz.
- [192] Schutzrecht DE 195 11 384 A1, (1996-09-19). Linde AG, Wiesbaden, Förder- und Eintragungssystem für Schüttgüter.
- [193] Schutzrecht DE 41 20 201A1, (1992-12-24). Gudehus, G., Karlsruhe, Vorrichtung zur stetigen Entleerung eines Silos.
- [194] Schutzrecht DE 39 35 961 A1, (1991-05-02). Metzeler GmbH München, Verfahren zur störungsfreien Entleerung eines Silos.
- [195] Schutzrecht EP 0 601 267 A1, (1994-06-15). Greif-Werk Maschinenfabrik GmbH Lübeck, Abfülleinrichtung für Ventilsäcke.
- [196] Schutzrecht EP 0 644 136 A1, (1995-03-22), Hemetsberger, H., Schwanenstadt (A), Austragvorrichtung zum dosierten Austrag pulverigen oder körnigen Gutes.
- [197] Schutzrecht EP 0 878 414 A1, (1998-11-18), PKA Umwelttechnik GmbH & Co. KG, Aalen, Austrageinrichtung für ein Silo.
- [198] Schutzrecht WO 98 14 392 A1, (1998-04-09), Comardo, M.P., Houston (US), Catalytic reactor charging system and method.

## Firmenprospekte

- Agrichema GmbH, Budenheim
- Altmayer, Rehlingen
- AViTEQ Vibrationstechnik GmbH, Frankfurt/M. (ehem. AEG Vibrationstechnik)
- AZO GmbH & Co., Osterburken
- Brabender Technologie KG, Duisburg
- Buck System GmbH, Neuenburg
- Dosiertechnik Münster GmbH, Greven
- EMDE Industrie-Technik, Nassau / Lahn
- Engelsmann AG, Ludwigshafen / Rhein
- HOGAN, Vertrieb durch Alval Maschinenbau GmbH, Freilassing
- JÖST GmbH & Co. KG, Dülmen-Buldern
- Kraft Fördertechnik, Düsseldorf
- MATCON-BULS, Vertrieb durch ANAG, Möckmühl
- Meser Schwingtechnik, Altlußheim
- MUCON Apparate Vertriebsges. mbH, Köln
- Netter Vibrationstechnik GmbH, Mainz-Kastel
- PWH Anlagen + Systeme GmbH, St. Ingbert-Rohrbach
- Schenck Process GmbH, Darmstadt
- Singold Gerätetechnik GmbH, Schwabmünchen
- Vibra Maschinenfabrik Schultheis GmbH & Co., Offenbach
- WAM GmbH, Altlußheim
- Webac Gesellschaft für Vibrationstechnik mbH, Euskirchen

## Verzeichnis der Zitate

- a* AUSTER, P.: Mond über Manhattan. Rowohlt Taschenbuch Verlag, Reinbek (b. Hamburg): 1992, S. 341.
- b* BELL, T.A.: Industrial Needs in Solids Flow for the 21<sup>st</sup> Century. Powder Handling & Processing 11(1999)1, S. 9 f.
- c* JACOB, K.V.: Editorial. Bulk Solids Handling 21(2001)2, S. 121 f.
- d* MOLERUS, O.: Schüttgutmechanik, Grundlagen und Anwendungen in der Verfahrenstechnik. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: 1985, S. 171.
- e* KOLYMBAS, D.; WU, W.: Introduction to Hypoplasticity. Modern Approaches to Plasticity, KOLYMBAS, D. (Hg.), Elsevier Amsterdam, London, New York, Tokyo: 1993, S. 217.

## Anlagenverzeichnis

Anlage I:	Ergebnisse von ROBERTS et al.	A-1
Anlage II:	Numerische Auswertung der Scherversuche	A-2
Anlage III:	Verwendete Streuungsmaße zur Kennzeichnung zufälliger Fehler	A-4
Anlage IV:	Verwendete Vorverfestigungsbedingungen	A-8
Anlage V:	Fließkennwerte der Versuchsgüter	A-9
Anlage VI:	Gemessene Scherfestigkeiten bei Schwingungseinwirkung	A-10
Anlage VII:	Gemessene Frequenzgang-Beträge für $\text{CaCO}_3$	A-23

## Anlage I: Ergebnisse von ROBERTS et al.

**Tab. I.1:** Untersuchte Schüttgüter und Modellparameter  $\gamma$  und  $\zeta$  nach [116]

Schüttgut	Partikelgröße mm	Feuchte $X_W$ %	$\gamma$ mm / s	$\zeta$ —
Pyrophyllit	1	5	7	0,095...0,11
Eisenerz	1	5	10	0,125...0,15

**Tab. I.2:** Modellparameter  $f_0$  und  $\beta$  für Pyrophyllit bei variierendem Verfestigungs- und Normalspannungsniveau nach [116]

$\sigma_{an}$ in kPa	$\sigma_{ab}$ in kPa	$f_n$ in Hz	$\beta$ in kPa	$1 - \beta / \tau$
7,81	4,69	100	0,94	0,807
	3,47	90	0,94	0,777
	2,20	80	0,94	0,720
5,94	4,06	90	0,80	0,803
	2,81	80	0,80	0,766
	1,57	70	0,80	0,691
4,06	2,81	75	0,70	0,762
	2,19	70	0,70	0,730
	1,57	65	0,70	0,685

**Tab. I.3:** Modellparameter  $f_n$  und  $\beta$  für Eisenerz bei variierendem Verfestigungs- und Normalspannungsniveau nach [116]

$\sigma_{an}$ in kPa	$\sigma_{ab}$ in kPa	$f_n$ in Hz	$\beta$ in kPa	$1 - \beta / \tau$
8,54	4,41	110	0,91	0,830
	3,04	100	0,91	0,795
6,44	3,72	100	0,81	0,814
	2,35	95	0,81	0,767



## Anlage II: Numerische Auswertung der Scherversuche

Nachfolgend sind in Kurzform die Grundlagen für die Ermittlung der verwendeten Fließkennwerte aus den Ergebnissen der Scherversuche dargestellt. Die Berechnungen wurden mit einem Lehrstuhl-internen Rechnerprogramm ausgeführt. (siehe auch Abschn. 4.3 und [164]).

Die ermittelten Fließorte ließen sich im meßbaren Bereich gut durch eine Gerade approximieren. Die Parameter  $\varphi_i$  und  $\tau_c$  der linearisierten Fließort-Gleichung (II-1) wurden durch lineare Regression bestimmt.

$$\tau_{ab} = \tan \varphi_i \cdot \sigma_{ab} + \tau_c \quad (\text{II-1})$$

Dabei sind  $\sigma_{ab}$  und  $\tau_{ab}$  die gemessenen Wertepaare beim Abscheren, zugänglich gemäß *Standard shear testing technique* [185]. Dabei wurde die Korrektur (II-2) verwendet.

$$\tau_{ab} = \tau_{ab, \text{gem}} \cdot \frac{\bar{\tau}_{an}}{\tau_{an, \text{gem}}} \quad (\text{II-2})$$

$\tau_{an, \text{gem}}$  und  $\tau_{ab, \text{gem}}$  sind die Meßwerte der An- und Abscher-Schubspannungen,  $\bar{\tau}_{an}$  der Mittelwert aller gemessenen Anscherspannungen eines Fließortes.

Die Hauptspannungen  $\sigma_1$ ;  $\sigma_2$ ;  $\sigma_c$  sowie den effektiven Reibungswinkel<sup>17</sup>  $\varphi_e$  liefern die Beziehungen (II-3) bis (II-6):

$$\sigma_1 = \frac{1}{(1 - \sin \varphi_i)} \left( \sigma_{an} + \tau_c \cdot \cos \varphi_i - \sqrt{(\sigma_{an} \cdot \sin \varphi_i + \tau_c \cdot \cos \varphi_i)^2 - \tau_{an}^2 \cdot \cos^2 \varphi_i} \right) \quad (\text{II-3})$$

$$\sin \varphi_e = \frac{\sigma_1 \cdot \sin \varphi_i + \tau_c \cdot \cos \varphi_i}{\sigma_1 - \tau_c \cdot \cos \varphi_i} \quad (\text{II-4})$$

$$\sigma_2 = \frac{1 - \sin \varphi_e}{1 + \sin \varphi_e} \cdot \sigma_1 \quad (\text{II-5})$$

$$\sigma_c = 2 \cdot \tau_c \cdot \frac{1 + \sin \varphi_i}{\cos \varphi_i} \quad (\text{II-6})$$

Der Wandreibungswinkel  $\varphi_w$  wurden nach:

$$\tan \varphi_w = \tau_w / \sigma_w \quad (\text{II-7})$$

ermittelt (vgl. auch Abb. 6.3).

---

<sup>17</sup> Für die Auswertung der Scherversuche ist es zweckmäßig das stationäre Fließen zunächst als kohäsionslos zu betrachten.

Die Kennwerte des kohäsiven stationären Fließens, den stationären Reibungswinkel  $\varphi_{st}$  und die isostatische Zugfestigkeit des unverfestigten Gutes  $\sigma_0$  (vgl. Abschn. 4), sind durch lineare Regression von (4-8) oder (4-9) zugänglich.

Den Kompressibilitätsindex  $n$  gewinnt man durch Anpassung von Gleichung (4-19).

Die Grenzen zwischen Massenfluß und Kernfluß und damit den Trichterneigungswinkel  $\Theta$  erhält man wie folgt (siehe [17] oder [164]):

- für den axialsymmetrischen Fließzustand (konischer Trichter):

$$\Theta \leq 0,5 \left[ 180^\circ - \arccos \left( \frac{1 - \sin \varphi_e}{2 \cdot \sin \varphi_e} \right) - \varphi_w - \arcsin \left( \frac{\sin \varphi_w}{\sin \varphi_e} \right) \right] \quad (\text{II-8})$$

- für den ebenen Fließzustand (keilförmiger Trichter):

$$\Theta \leq \left[ 60,5^\circ + \frac{1}{15,07} \cdot \arctan \left( \frac{50^\circ - \varphi_e}{7,73^\circ} \right) \right] \cdot \left[ 1 - \frac{\varphi_w}{42,3^\circ + 0,131^\circ \cdot \exp(0,06 \cdot \varphi_e)} \right] \quad (\text{II-9})$$

$$\text{mit } \varphi_w < \varphi_e - 3^\circ \text{ und } \Theta \leq 60^\circ \quad (\text{II-10})$$

wobei jeweils gilt:  $\varphi_e; \varphi_w = f(\sigma_1)$ .

Die minimale Öffnungsweite  $b_{min}$  zur Vermeidung von Brückenbildung bei Massenfluß wurde nach (4-26) berechnet. Wegen

$$\rho_b; \varphi_e; \varphi_w = f(\sigma_1)$$

ist ein iteratives Vorgehen erforderlich. Die Größe  $\sigma_{c,krit}$  erhält man durch Gleichsetzen von  $\sigma_c = f(\sigma_1)$  mit der Auflagerspannung der kohäsiven Schüttgutbrücke  $\sigma'_1 = \sigma_1 / ff$ . Dabei ist  $ff$  der Fließfaktor nach JENIKE [60]. Er nimmt bei konischer Trichterform üblicherweise Werte im Bereich  $ff = 1,2 \dots 1,6$  an, siehe [60].

## Anlage III: Verwendete Streuungsmaße zur Kennzeichnung zufälliger Fehler

### III.1 Direkte Messung

Für den arithmetischen Mittelwert  $\bar{x}$  aus den n Meßwerten  $x_i$  ( $i = 1 \dots n$ )

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (\text{III-1})$$

ist die Varianz  $s^2$  (Mittelwert der quadratischen Abweichungen) definiert als:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (\text{III-2}).$$

Mit (III-1) in (III-2) folgt die Berechnungsgleichung für  $s^2$ :

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left[ \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right] \quad (\text{III-3}).$$

Aus der Varianz erhält man die Standardabweichung  $s$  (mittlerer quadratischer Fehler der n Meßwerte  $x_i$  einer Stichprobe):

$$s = \sqrt{s^2} \quad (\text{III-4})$$

Als Maß für die zufälligen Fehler einer Meßgröße stehen zwei Vertrauensbereiche (Konfidenzintervalle) zur Verfügung, (III-5) und (III-6). Voraussetzung für deren Anwendung sind:

- Alle Meßwerte  $x_i$  sind normalverteilt.
- Alle Meßwerte  $x_i$  gehören ein und derselben Grundgesamtheit an.
- Die Meßwerte  $x_i$  sind unabhängig (homogen, nicht korreliert).

Der Vertrauensbereich VB (Konfidenzintervall) für die Einzelmessung:

$$\bar{x} \pm s \cdot t_{(1-\alpha/2; n-1)} \quad (\text{III-5})$$

ist sehr pessimistisch und wird selten verwendet [A4]. Daher wurde auch in der vorliegenden Arbeit auf den Vertrauensbereich (Konfidenzintervall) für den Mittelwert nach (III-6) zurückgegriffen:

$$\bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{(1-\alpha/2; n-1)} \quad (\text{III-6})$$

$\alpha$	Irrtumswahrscheinlichkeit (Konfidenzlevel); allgemein akzeptierter Wert: $\alpha = 0,05$
$1-\alpha$	Sicherheitswahrscheinlichkeit
$n-1$	Freiheitsgrad

$t_{(1-\alpha/2; n-1)}$  Wert der t-Verteilung für zweiseitige Verteilung;

$$t_{(1-\alpha/2; n-1)} = 1,96; \text{ für } n = \infty; \alpha = 0,05$$

Der verwendete Vertrauensbereich VB, (III-6) ist im Text vereinfachend als 95 % - *Vertrauensbereich* bezeichnet.

Beispiel:

$$n = 4; \alpha = 0,05 \Rightarrow t_{(1-\alpha/2; n-1)} = 3,18 \text{ (Tabellenwert, z.B. in [A2])}$$

$$\text{Vertrauensbereich: } \underline{\underline{\bar{x} \pm s \cdot 1,59}}$$

### III.2 Nichtlineare Regression

Die abhängige Variable  $y$  hängt nur von einer einzigen unabhängigen Variablen  $x$  sowie von den  $p$  Parametern  $a_j$  ( $j = 1 \dots p$ ) ab. Weiterhin besteht, wie in (3-32), zwischen der unabhängigen Größe  $y$  und mindestens einem Parameter  $a_j$  ein nichtlinearer Zusammenhang.

$$y = f(x; a_1; a_2; \dots a_p) \quad (\text{III-7})$$

Die Anpassung der Modellgleichung (Parameterschätzung) erfolgte durch Minimierung der ungewichteten Abweichungsquadratsumme  $S(\tilde{a}_j)$ , nach (III-9). Dafür wurde handelsübliche Software (Microcal™ Origin® 6.0) verwendet, die auf dem LEVENBERG-MARQUARDT-Algorithmus basiert (siehe [A1] oder ausführlich [A5]).

$$S(\tilde{a}_j) = \sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{y}_i)^2 \quad (\text{III-8})$$

$$= \sum_{i=1}^n y_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n y_i \cdot \tilde{y}_i + \sum_{i=1}^n \tilde{y}_i^2 \quad (\text{III-9})$$

- $y_i$      Meßwert der abhängigen Variablen
- $\tilde{y}_i$     Schätzwert der abhängigen Variablen
- $\tilde{a}_j$      Vektor der geschätzten Parameter.

Die Restvarianz  $s^2(\tilde{a}_j)$ , (III-10), verringert sich mit steigender Zahl der Freiheitsgrade ( $n-p$ ), worin  $n$  die Anzahl der Meßwerte und  $p$  die Anzahl der zu schätzenden Parameter sind.

$$s^2(\tilde{a}_j) = \frac{S(\tilde{a}_j)}{n - p} \quad (\text{III-10})$$

Als Streuungsmaß für die ermittelten Parameter ist im Text die Standardabweichung der einzelnen Parameter angegeben, (III-13). Für deren Berechnung werden die JACOBI-Matrix  $J_{ij}$ , (III-11), sowie die Präzisionsmatrix  $H_{ij}$ , (III-12), benötigt. Die JACOBI-Matrix  $J_{ij}$  wird aus den partiellen Ableitungen nach allen Parametern  $a_j$  an jedem Meßpunkt  $y_i$  gebildet:

$$J_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial a_j} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & \dots & J_{1p} \\ J_{21} & J_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ J_{n,1} & \dots & & J_{np} \end{pmatrix} \quad (\text{III-11})$$

1. Index: Meßpunkt;  $i = 1 \dots n$
2. Index: Parameter;  $j = 1 \dots p$ .

$$H_{ij} = (J_{ij}^T J_{ij})^{-1} \quad (\text{III-12})$$

$J_{ij}$	JACOBI-Matrix
$J_{ij}^T$	transponierte JACOBI-Matrix
$(J_{ij}^T J_{ij})^{-1}$	inverse Matrix von $J_{ij}^T J_{ij}$
$H_{ij}$	Präzisionsmatrix

Die Standardabweichung des Parameters  $\tilde{a}_p$  liefert dann das Intervall:

$$\tilde{a}_p \pm s(\tilde{a}_j) \cdot \sqrt{H_{pp}} \quad (\text{III-13})$$

$H_{pp}$  p-tes Hauptdiagonal-Element von  $H_{ij}$

Das Bestimmtheitsmaß  $r_{xy}^2$  erhält man aus (III-14).

$$r_{xy}^2 = 1 - \frac{S(\tilde{a}_j)}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (\text{III-14})$$

Dabei ist 
$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (\text{III-15}).$$

### III.3 Indirekte Messung (Fehlerfortpflanzung nach GAUß)

Bei der indirekten Messung kann der Wert der abhängigen Variablen  $y$  nicht direkt bestimmt werden, sondern nur über die Meßgrößen  $x_i$ .

$$y = (x_1; x_2 \dots x_m) \quad (\text{III-16})$$

Die Varianz  $s^2(y)$  des Funktionswertes  $y$  erhält man aus den Varianzen der Meßgrößen  $s^2(x_i)$ :

$$s^2(y) = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 \cdot s^2(x_i) \quad (\text{III-17})$$

Anstelle der Varianzen wurden die Quadrate der Vertrauensintervalle VB verwendet.

Beispiel: minimale relative Scherfestigkeit  $(1-\beta/\tau)$

Experimentell ermittelt wurden die Scherfestigkeit ohne Schwingungseinwirkung  $\tau$  und die maximal mögliche Scherspannungsreduzierung  $\beta$

$$\frac{\partial(1-\beta/\tau)}{\partial\beta} = -\frac{1}{\tau}$$

$$\frac{\partial(1-\beta/\tau)}{\partial\tau} = \frac{\beta}{\tau^2}$$

$$VB^2(1-\beta/\tau) = \frac{VB^2(\beta)}{\tau^2} - \beta^2 \left( \frac{VB^2(\tau)}{\tau^2} \right)$$

Versuchsordnung Scherzelle schwingt;  $\sigma_{an} = 1,9 \text{ kPa}$  ;  $\sigma_{ab} = 0,8 \text{ kPa}$  , Frequenz  $f = 80 \text{ Hz}$

$$\Rightarrow \tau \approx 1,3 \text{ kPa} ; (VB(\tau)/\tau) \approx 0,05 ;$$

$$\beta = 0,91 \text{ kPa} ; VB(\beta) = 0,068 \text{ kPa}$$

$$\underline{\underline{(1-\beta/\tau) = 0,3 \pm 0,069}}$$

### Literatur zu Anlage III

- [A1] -: Origin<sup>®</sup> - Data Analysis and Technical Graphics Software, Anwenderhandbuch. Version 6, Microcal Software, Inc., Northhampton, MA (USA): 1999.
- [A2] GRÄNICHER, H.: Messung beendet - was nun? - Einführung und Nachschlagewerk für die Planung und Auswertung von Messungen. 2. Aufl., vdf Hochschulverlag an der ETH Zürich / Teubner Verlag Stuttgart:1996.
- [A3] KATTANEK, S. u.a.: Experimente in der Verfahrenstechnik. Teil 8 der Reihe: Verfahrenstechnische Berechnungsmethoden. Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig: 1983.
- [A4] LUCKERT, K.: Numerische Methoden der Verfahrenstechnik. Vorlesung Otto-v.-Guericke-Universität Magdeburg, Magdeburg: 1993.
- [A5] SHRAGER, R.J.: Quadratic Programming for Nonlinear Regression. Communication of the ACM 15(1972) S. 41-45.
- [A6] TÄUBERT, P.: Abschätzung der Genauigkeit von Meßergebnissen. 2. Aufl., Verlag Technik, Berlin: 1987.

## Anlage IV: Verwendete Vorverfestigungsbedingungen

**Tab. IV.1:** Vorverfestigungsbedingungen für CaCO<sub>3</sub> (1,3 µm)

Fließort Nr.	$s_{an}$ in kPa	$s_{vor}$ in kPa	$s_{vor} / s_{an}$ $\frac{3}{4}$	N $\frac{3}{4}$	$r_b$ in kg/m <sup>3</sup>
1	1,94	4,65	2,4	15	739
2	3,96	9,5	2,4	15	784
3	8,0	19,2	2,4	10	859
4	16,3	31,0	1,9	10	932

**Tab. IV.2:** Vorverfestigungsbedingungen für TiO<sub>2</sub> (0,6 µm)

Fließort Nr.	$s_{an}$ in kPa	$s_{vor}$ in kPa	$s_{vor} / s_{an}$ $\frac{3}{4}$	N $\frac{3}{4}$	$r_b$ in kg/m <sup>3</sup>
1	1,92	2,88	1,5	20	777
2	3,98	5,33	1,34	15	854
3	8,0	11,2	1,4	10	911
4	16,05	21,5	1,34	12	938

## Anlage V: Fließkennwerte der Versuchsgüter

Tab. V.1: Gemessene Fließkennwerte von  $\text{CaCO}_3$  (1,3  $\mu\text{m}$ )

Fließort	$s_{\text{an}}$ in kPa	$s_M$ in kPa	$s_1$ in kPa	$s_c$ in kPa	$ff_c$ %	$j_i$ in °	$j_e$ in °
1	1,94	2,37	4,29	2,69	1,6	34	54
2	3,96	4,95	8,85	5,2	1,7	33	52
3	8,0	10,4	18,2	9,2	2,0	34	49
4	16,3	20,8	36,4	15,9	2,3	33	46

$j_{\text{st}} = 47^\circ$ ;  $s_0 = 0,35$  kPa

Tab. V.2: Gemessene Fließkennwerte von  $\text{TiO}_2$  (0,6  $\mu\text{m}$ )

Fließort	$s_{\text{an}}$ in kPa	$s_M$ in kPa	$s_1$ in kPa	$s_c$ in kPa	$ff_c$ %	$j_i$ in °	$j_e$ in °
1	1,92	2,39	4,28	0,27	1,6	31	52
2	3,98	4,5	8,0	5,0	1,6	30	51
3	8,0	9,2	16,4	11,1	1,5	27	51
4	16,05	18,5	32,5	21,5	1,5	25	50

$j_{\text{st}} = 51^\circ$ ;  $s_0 = 0,02$  kPa

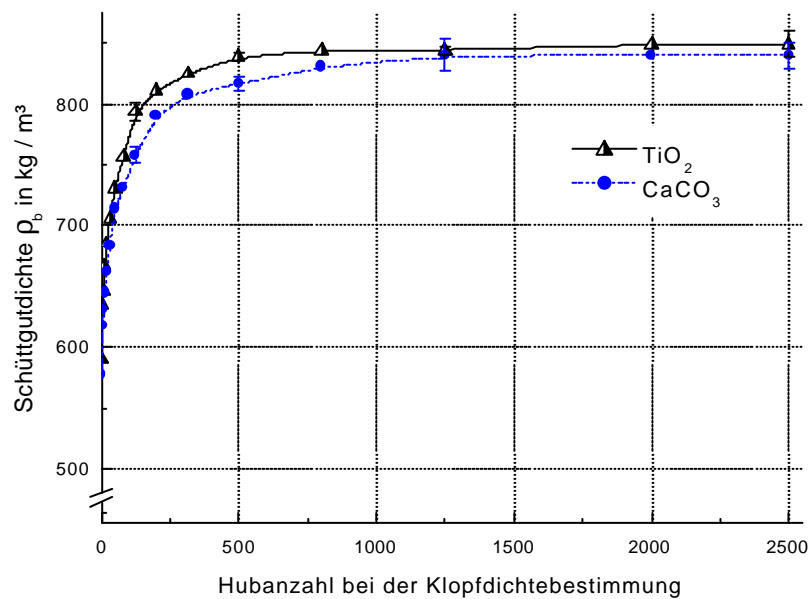


Abb. V.1: Verlauf der Schüttgutedichte  $\rho_b$  während der Klopfdichtung (250 ml Meßzylinder, Hubhöhe 3 mm, 250  $\text{min}^{-1}$ )

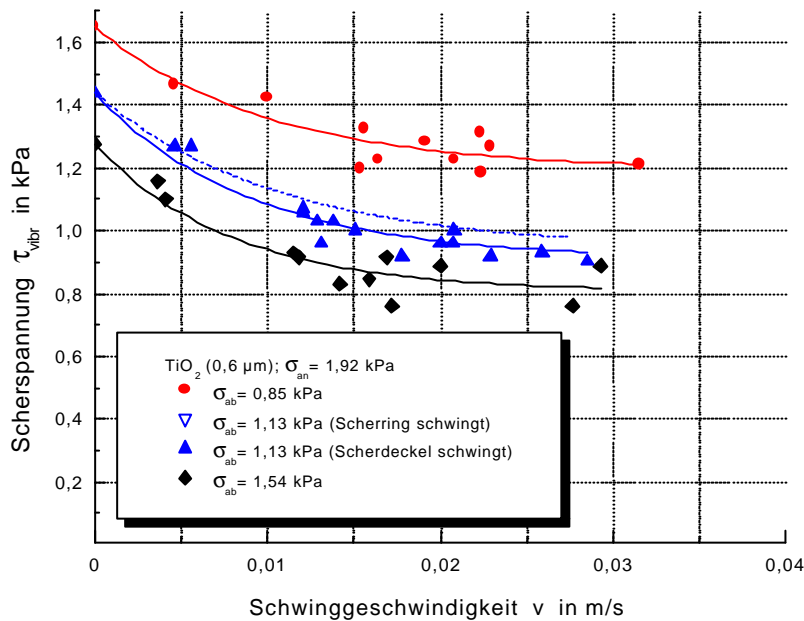


## Anlage VI: Gemessene Scherfestigkeiten bei Schwingungseinwirkung

Schüttgut:  $\text{TiO}_2$

Methode A: Schwingungen beim Abscheren; Frequenz 100 Hz

Fließort 1;  $\sigma_{\text{an}} = 1,92 \text{ kPa}$



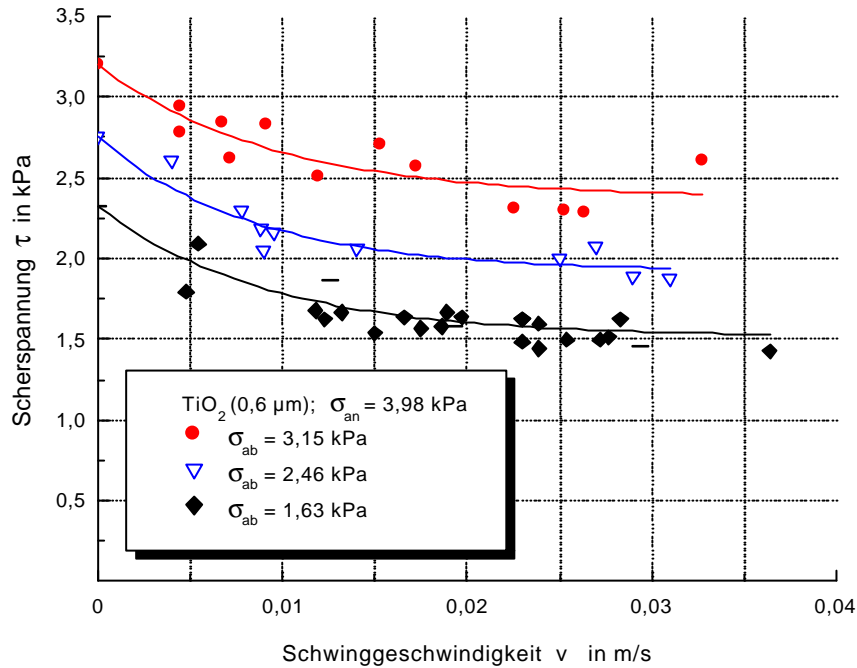
Tab. VI.1: Meßwerte für  $\text{TiO}_2$ ;  $\sigma_{\text{an}} = 1,92 \text{ kPa}$ ,  $f = 100 \text{ Hz}$

$\sigma_{\text{ab}} = 0,85 \text{ kPa}$		$\sigma_{\text{ab}} = 1,13 \text{ kPa}$ Scherring schwingt		$\sigma_{\text{ab}} = 1,13 \text{ kPa}$ Scherdeckel schwingt		$\sigma_{\text{ab}} = 1,54 \text{ kPa}$	
v in m/s	$\tau_{\text{ab}}$ in kPa	v in m/s	$\tau_{\text{ab}}$ in kPa	v in m/s	$\tau_{\text{ab}}$ in kPa	v in m/s	$\tau_{\text{ab}}$ in kPa
0	1,277	0	1,439	0	1,439	0	1,650
0,0037	1,157	0,0029	1,242	0,0046	1,270	0,0100	1,439
0,0041	1,100	0,0062	1,199	0,0056	1,270	0,0113	1,425
0,0115	0,931	0,0121	1,142	0,0121	1,058	0,0154	1,199
0,0118	0,917	0,0137	1,114	0,0121	1,072	0,0156	1,326
0,0142	0,832	0,0151	1,072	0,0129	1,030	0,0164	1,227
0,0159	0,847	0,0186	1,044	0,0131	0,959	0,0191	1,284
0,0169	0,917	0,0202	1,030	0,0138	1,030	0,0208	1,227
0,0172	0,762	0,0207	0,959	0,0151	1,000	0,0223	1,312
0,0200	0,889	0,0216	1,044	0,0178	0,917	0,0224	1,185
0,0277	0,762	0,0220	0,959	0,0200	0,959	0,0229	1,270
0,0293	0,889	0,0232	0,988	0,0207	0,959	0,0315	1,213
		0,0232	0,945	0,0208	1,000		
		0,0236	1,044	0,0229	0,917		
		0,0258	0,973	0,0259	0,931		
		0,0274	0,973	0,0285	0,903		

Schüttgut:  $\text{TiO}_2$

Methode A: Schwingungen beim Abscheren; Frequenz 100 Hz

Fließort 2;  $\sigma_{\text{an}} = 3,98 \text{ kPa}$



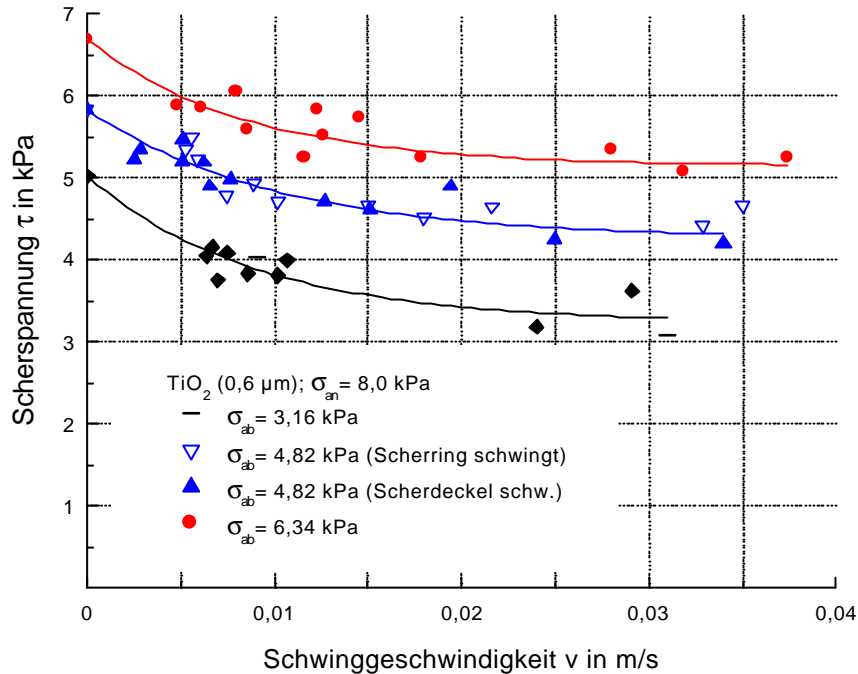
Tab. VI.2: Meßwerte für  $\text{TiO}_2$ ;  $\sigma_{\text{an}} = 3,98 \text{ kPa}$ ,  $f = 100 \text{ Hz}$

$\sigma_{\text{ab}} = 1,63 \text{ kPa}$		$\sigma_{\text{ab}} = 1,63 \text{ kPa}$ (Fortsetzung.)		$\sigma_{\text{ab}} = 2,46 \text{ kPa}$		$\sigma_{\text{ab}} = 3,15 \text{ kPa}$	
$v$ in m/s	$\tau_{\text{ab}}$ in kPa	$v$ in m/s	$\tau_{\text{ab}}$ in kPa	$v$ in m/s	$\tau_{\text{ab}}$ in kPa	$v$ in m/s	$\tau_{\text{ab}}$ in kPa
0	2,320	0,0197	1,637	0	3,770	0	3,200
0,0048	1,792	0,0230	1,622	0,0040	2,610	0,0045	2,935
0,0054	2,088	0,0230	1,622	0,0078	2,300	0,0045	2,779
0,0118	1,679	0,0230	1,481	0,0089	2,046	0,0067	2,836
0,0123	1,622	0,0239	1,594	0,0096	2,159	0,0072	2,624
0,0126	1,862	0,0239	1,439	0,0135	2,060	0,0091	2,822
0,0132	1,665	0,0254	1,495	0,0159	1,806	0,0119	2,511
0,0150	1,538	0,0272	1,495	0,0255	2,003	0,0153	2,709
0,0166	1,637	0,0277	1,510	0,0271	2,074	0,0172	2,568
0,0175	1,566	0,0283	1,622	0,0286	1,891	0,0226	2,314
0,0186	1,580	0,0294	1,453	0,0310	1,876	0,0253	2,300
0,0189	1,665	0,0364	1,425			0,0263	2,286
0,0193	1,580					0,0328	2,610

Schüttgut:  $\text{TiO}_2$

Methode A: Schwingungen beim Abscheren; Frequenz 100 Hz

Fließort 3;  $\sigma_{an} = 8,0 \text{ kPa}$



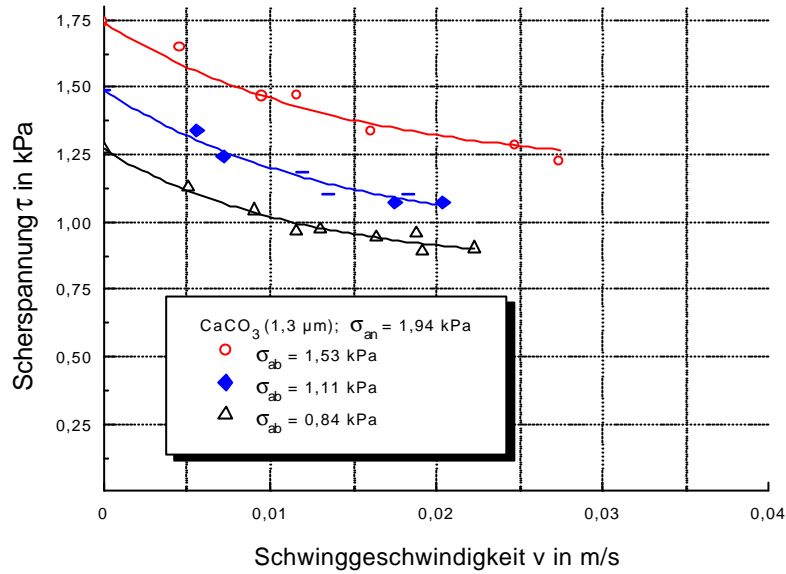
Tab. VI.3: Meßwerte für  $\text{TiO}_2$ ;  $\sigma_{an} = 8,0 \text{ kPa}$ ,  $f = 100 \text{ Hz}$

$\sigma_{ab} = 3,16 \text{ kPa}$		$\sigma_{ab} = 4,82 \text{ kPa}$ Scherring schwingt		$\sigma_{ab} = 4,82 \text{ kPa}$ Scherdeckel schwingt		$\sigma_{ab} = 6,34 \text{ kPa}$	
v in m/s	$\tau_{ab}$ in kPa	v in m/s	$\tau_{ab}$ in kPa	v in m/s	$\tau_{ab}$ in kPa	v in m/s	$\tau_{ab}$ in kPa
0	5,022	0	5,835	0	5,835	0	6,695
0,0064	4,049	0,0053	5,347	0,0026	5,220	0,0048	5,884
0,0067	4,162	0,0056	5,502	0,0029	5,347	0,0061	5,869
0,0070	3,753	0,0059	5,220	0,0051	5,474	0,0080	6,067
0,0075	4,091	0,0075	4,797	0,0051	5,209	0,0085	5,595
0,0086	3,837	0,0089	4,924	0,0062	5,192	0,0116	5,262
0,0091	4,035	0,0102	4,712	0,0065	4,896	0,0123	5,827
0,0102	3,809	0,0150	4,670	0,0076	4,980	0,0126	5,53
0,0107	4,000	0,0180	4,515	0,0127	4,726	0,0145	5,728
0,0240	3,188	0,0216	4,656	0,0151	4,613	0,0178	5,251
0,0291	3,626	0,0329	4,416	0,0194	4,896	0,0280	5,347
0,0310	3,076	0,0350	4,670	0,0340	4,206	0,0318	5,076
				0,0250	4,261	0,0374	5,262

Schüttgut:  $\text{CaCO}_3$

Methode A: Schwingungen beim Abscheren; Frequenz 100 Hz

Fließort 1;  $\sigma_{\text{an}} = 1,94 \text{ kPa}$



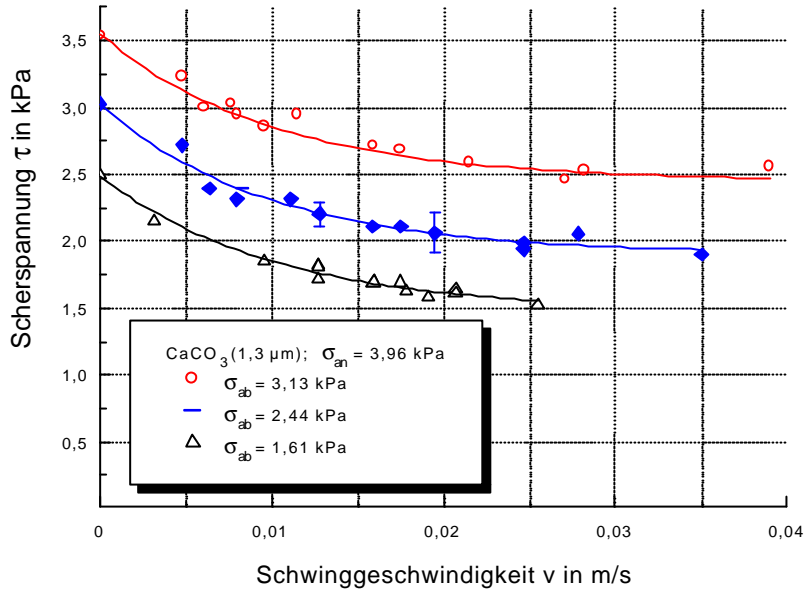
Tab. VI.4: Meßwerte für  $\text{CaCO}_3$ ;  $\sigma_{\text{an}} = 1,94 \text{ kPa}$ ,  $f = 100 \text{ Hz}$

$\sigma_{\text{ab}} = 0,84 \text{ kPa}$		$\sigma_{\text{ab}} = 1,11 \text{ kPa}$		$\sigma_{\text{ab}} = 1,53 \text{ kPa}$	
v in m/s	$\tau_{\text{ab}}$ in kPa	v in m/s	$\tau_{\text{ab}}$ in kPa	v in m/s	$\tau_{\text{ab}}$ in kPa
0	1,27	0	1,49	0	1,74
0,0051	1,129	0,0056	1,341	0,0046	1,648
0,0091	1,044	0,0072	1,243	0,0096	1,465
0,0116	0,966	0,0119	1,186	0,0116	1,472
0,0130	0,974	0,0135	1,101	0,0161	1,338
0,0164	0,945	0,0175	1,073	0,0247	1,282
0,0188	0,960	0,0183	1,101	0,0274	1,225
0,0191	0,889	0,0204	1,073		
0,0223	0,903				

Schüttgut:  $\text{CaCO}_3$

Methode A: Schwingungen beim Abscheren; Frequenz 100 Hz

Fließort 2;  $\sigma_{\text{an}} = 3,96 \text{ kPa}$



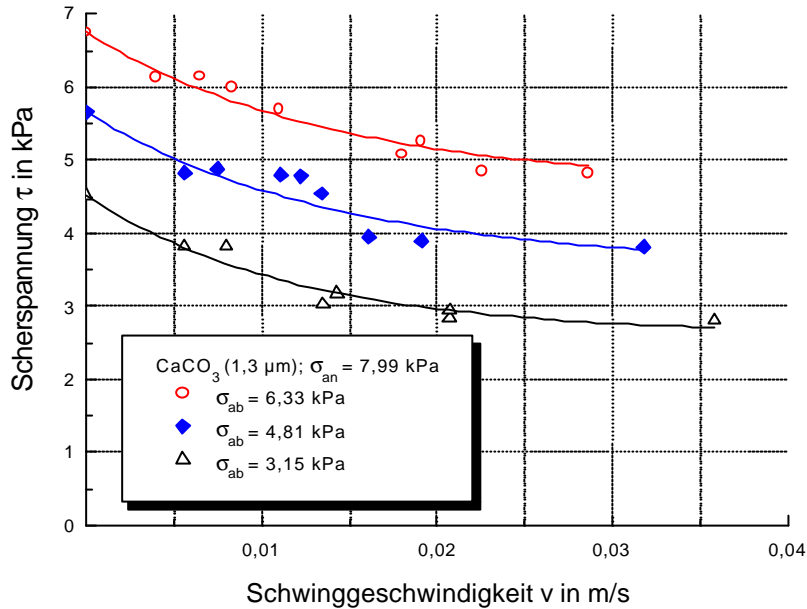
Tab. VI.5: Meßwerte für  $\text{CaCO}_3$ ;  $\sigma_{\text{an}} = 3,96 \text{ kPa}$ ,  $f = 100 \text{ Hz}$

$\sigma_{\text{ab}} = 1,61 \text{ kPa}$		$\sigma_{\text{ab}} = 2,44 \text{ kPa}$		$\sigma_{\text{ab}} = 3,13 \text{ kPa}$	
v in m/s	$\tau_{\text{ab}}$ in kPa	v in m/s	$\tau_{\text{ab}}$ in kPa	v in m/s	$\tau_{\text{ab}}$ in kPa
0	2,49	0	3,03	0	3,536
0,0032	2,154	0,0048	2,721	0,0048	3,233
0,0096	1,850	0,0064	2,397	0,0060	3,002
0,0127	1,820	0,0080	2,315	0,0076	3,033
0,0127	1,813	0,0083	2,397	0,0080	2,946
0,0127	1,718	0,0111	2,315	0,0096	2,860
0,0159	1,691	0,0128	2,154	0,0115	2,946
0,0159	1,693		2,282	0,0159	2,715
0,0175	1,693		2,169	0,0175	2,688
0,0178	1,626		2,224	0,0215	2,588
0,0191	1,579	0,0159	2,112	0,0271	2,460
0,0207	1,641	0,0175	2,112	0,0282	2,530
0,0207	1,606	0,0195	2,112	0,039	2,560
0,0254	1,521		2,042		
			2,154		
			1,942		
		0,0247	1,942		
		0,0247	1,985		
		0,0278	2,054		
		0,035	1,903		

Schüttgut:  $\text{CaCO}_3$

Methode A: Schwingungen beim Abscheren; Frequenz 100 Hz

Fließort 3;  $\sigma_{\text{an}} = 7,99 \text{ kPa}$



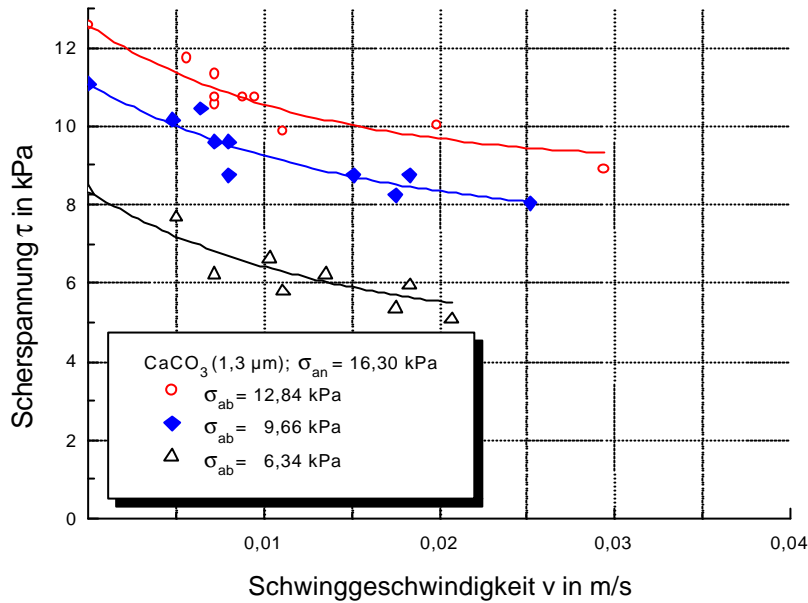
Tab. VI.6: Meßwerte für  $\text{CaCO}_3$ ;  $\sigma_{\text{an}} = 7,99 \text{ kPa}$ ,  $f = 100 \text{ Hz}$

$\sigma_{\text{ab}} = 3,15 \text{ kPa}$		$\sigma_{\text{ab}} = 4,81 \text{ kPa}$		$\sigma_{\text{ab}} = 6,33 \text{ kPa}$	
v in m/s	$\tau_{\text{ab}}$ in kPa	v in m/s	$\tau_{\text{ab}}$ in kPa	v in m/s	$\tau_{\text{ab}}$ in kPa
0	4,52	0	5,66	0	6,75
0,0056	3,824	0,0056	4,822	0,0040	6,136
0,0080	3,824	0,0075	4,879	0,0065	6,149
0,0135	3,033	0,0111	4,800	0,0083	5,994
0,0143	3,173	0,0122	4,783	0,0110	5,697
0,0207	2,947	0,0134	4,545	0,0180	5,076
0,0207	2,834	0,0161	3,951	0,0191	5,265
0,0358	2,811	0,0191	3,894	0,0226	4,853
		0,0318	3,809	0,0286	4,82

Schüttgut:  $\text{CaCO}_3$

Methode A: Schwingungen beim Abscheren; Frequenz 100 Hz

Fließort 4;  $\sigma_{\text{an}} = 16,30 \text{ kPa}$



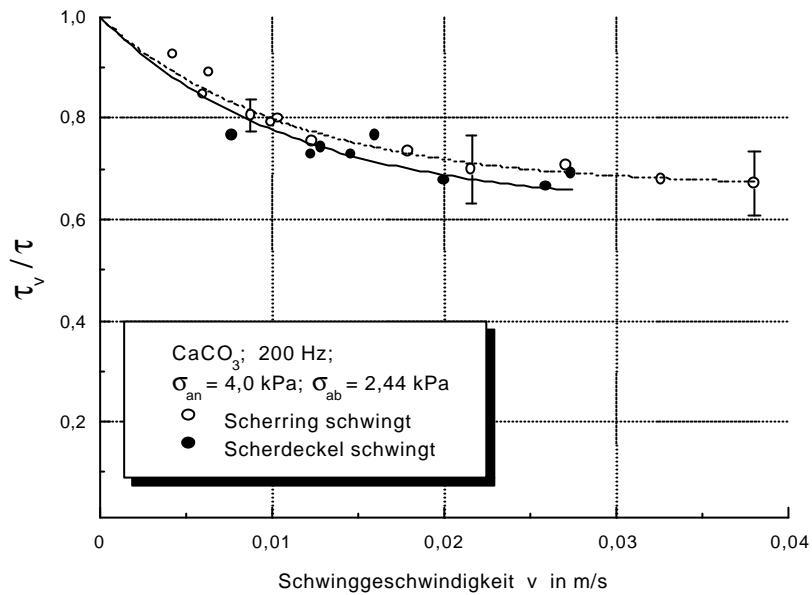
Tab. VI.7: Meßwerte für  $\text{CaCO}_3$ ;  $\sigma_{\text{an}} = 16,30 \text{ kPa}$ ,  $f = 100 \text{ Hz}$

$\sigma_{\text{ab}} = 6,34 \text{ kPa}$		$\sigma_{\text{ab}} = 9,66 \text{ kPa}$		$\sigma_{\text{ab}} = 12,84 \text{ kPa}$	
v in m/s	$\tau_{\text{ab}}$ in kPa	v in m/s	$\tau_{\text{ab}}$ in kPa	v in m/s	$\tau_{\text{ab}}$ in kPa
0	8,33	0	11,08	0	12,56
0,005	7,664	0,0048	10,160	0,0056	11,718
0,0072	6,214	0,0064	10,448	0,0072	10,726
0,0103	6,639	0,0072	9,595	0,0072	11,304
0,0111	5,789	0,0080	8,753	0,0072	10,550
0,0135	6,214	0,0080	9,595	0,0088	10,726
0,0175	5,364	0,0151	8,753	0,0095	10,726
0,0183	5,931	0,0175	8,255	0,0111	9,872
0,0207	5,081	0,0183	8,753	0,0199	10,023
		0,0252	8,044	0,0294	8,892

Schüttgut:  $\text{CaCO}_3$ ; Frequenz 200 Hz

Methode A: Schwingungen beim Abscheren;

$s_{\text{an}} = 3,96 \text{ kPa}$ ;  $s_{\text{ab}} = 2,44 \text{ kPa}$

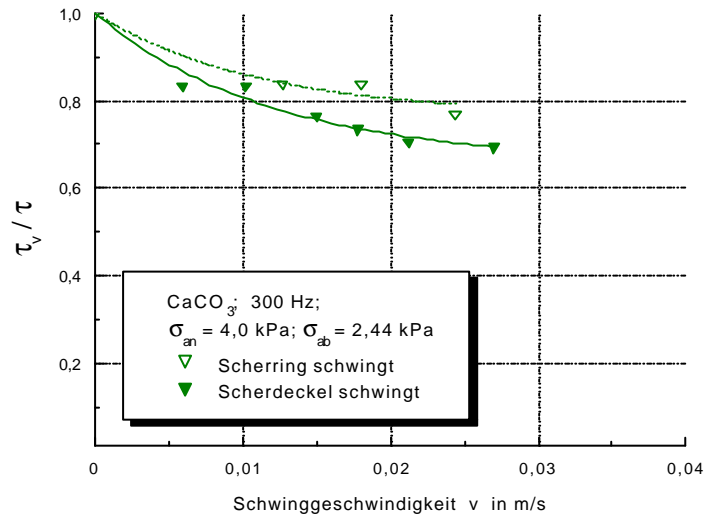


Tab. VI.8: Meßwerte für  $\text{CaCO}_3$ ;  $f = 200 \text{ Hz}$

Scherring schw.		Scherring schw. (Fortsetzung)		Scherdeckel schw.	
v in m/s	$\tau_{\text{ab}}$ in kPa	v in m/s	$\tau_{\text{ab}}$ in kPa	v in m/s	$\tau_{\text{ab}}$ in kPa
0	3,03	0,0179	2,224	0	3,03
0,0043	2,806	0,0216	2,157	0,0077	2,318
0,0060	2,563		2,254	0,0123	2,206
0,0064	2,694		2,112	0,0129	2,248
0,0088	2,451		1,942	0,0146	2,206
	2,512	0,0271	2,139	0,0160	2,318
	2,409	0,0326	2,054	0,0200	2,051
	2,382	0,038	2,139	0,0259	2,012
0,0010	2,394		1,970	0,0274	2,094
0,0104	2,424		2,127		
0,0123	2,282		1,900		



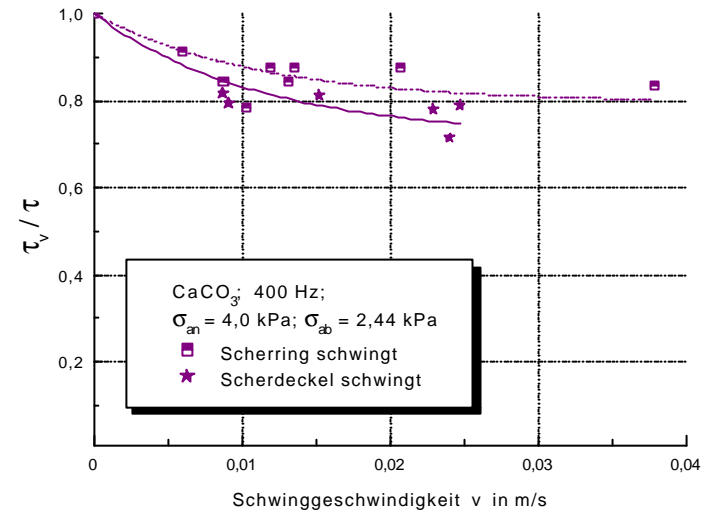
Schüttgut:  $\text{CaCO}_3$ ; Frequenz 300 Hz  
 Methode A: Schwingungen beim Abscheren;  
 $\mathbf{s}_{\text{an}} = 3,96 \text{ kPa}$ ;  $\mathbf{s}_{\text{ab}} = 2,44 \text{ kPa}$



Tab. VI.9: Meßwerte für  $\text{CaCO}_3$ ;  $f = 300 \text{ Hz}$

Scherring schw.		Scherdeckel schw.	
v in m/s	$\tau_{\text{ab}}$ in kPa	v in m/s	$\tau_{\text{ab}}$ in kPa
0	3,03	0	3,03
0,0244	2,33	0,0059	2,527
0,018	2,542	0,0102	2,527
0,0127	2,542	0,0150	2,318
		0,0178	2,233
		0,0212	2,136
		0,027	2,109

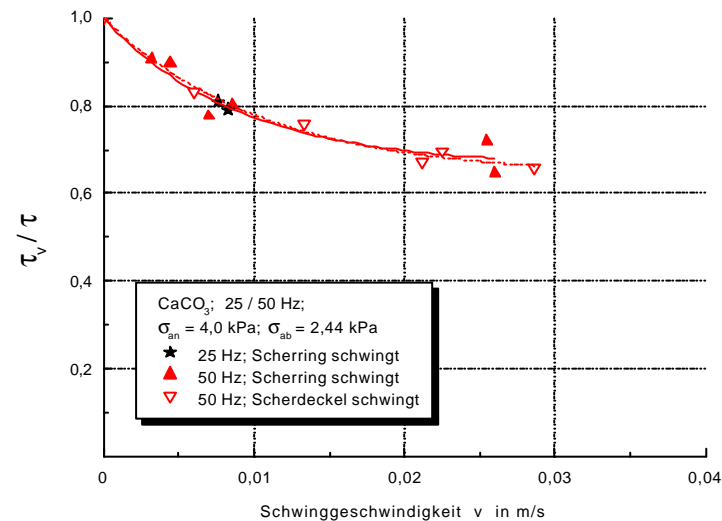
Schüttgut:  $\text{CaCO}_3$ ; Frequenz 400 Hz  
 Methode A: Schwingungen beim Abscheren;  
 $\mathbf{s}_{\text{an}} = 3,96 \text{ kPa}$ ;  $\mathbf{s}_{\text{ab}} = 2,44 \text{ kPa}$



Tab. VI.10: Meßwerte für  $\text{CaCO}_3$ ;  $f = 400 \text{ Hz}$

Scherring schw.		Scherdeckel schw.	
v in m/s	$\tau_{\text{ab}}$ in kPa	v in m/s	$\tau_{\text{ab}}$ in kPa
0,0060	2,76	0,0087	2,472
0,0088	2,55	0,0091	2,403
0,0104	2,38	0,0152	2,457
0,0119	2,65	0,0229	2,360
0,0131	2,55	0,0240	2,163
0,0135	2,65	0,0247	2,388
0,0207	2,65		
0,0378	2,52		

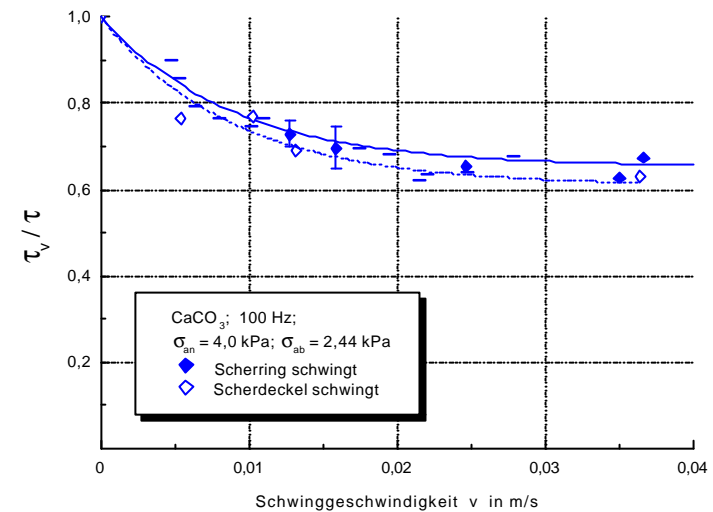
Schüttgut:  $\text{CaCO}_3$ ; Frequenz 25 Hz / 50 Hz  
 Methode A: Schwingungen beim Abschern;  
 $\mathbf{s}_{\text{an}} = 3,96 \text{ kPa}$ ;  $\mathbf{s}_{\text{ab}} = 2,44 \text{ kPa}$



Tab. VI.11: Meßwerte für  $\text{CaCO}_3$ ;  $f = 25 \text{ Hz} / 50 \text{ Hz}$

25 Hz Scherring schw.		50 Hz Scherring schw.		50 Hz Scherdeckel schw.	
v in m/s	$\tau_{\text{ab}}$ in kPa	v in m/s	$\tau_{\text{ab}}$ in kPa	v in m/s	$\tau_{\text{ab}}$ in kPa
0	3,03	0	3,03	0	3,03
0,0076	2,451	0,0032	2,748	0,0060	2,518
0,0083	2,394	0,0045	2,721	0,0133	2,297
		0,0070	2,351	0,0212	2,036
		0,0086	2,424	0,0225	2,112
		0,0255	2,181	0,0286	1,992
		0,026	1,954		

Schüttgut:  $\text{CaCO}_3$ ; Frequenz 100 Hz  
 Methode A: Schwingungen beim Abschern;  
 $\mathbf{s}_{\text{an}} = 3,96 \text{ kPa}$ ;  $\mathbf{s}_{\text{ab}} = 2,44 \text{ kPa}$



Tab. VI.12: Meßwerte für  $\text{CaCO}_3$ ;  $f = 100 \text{ Hz}$

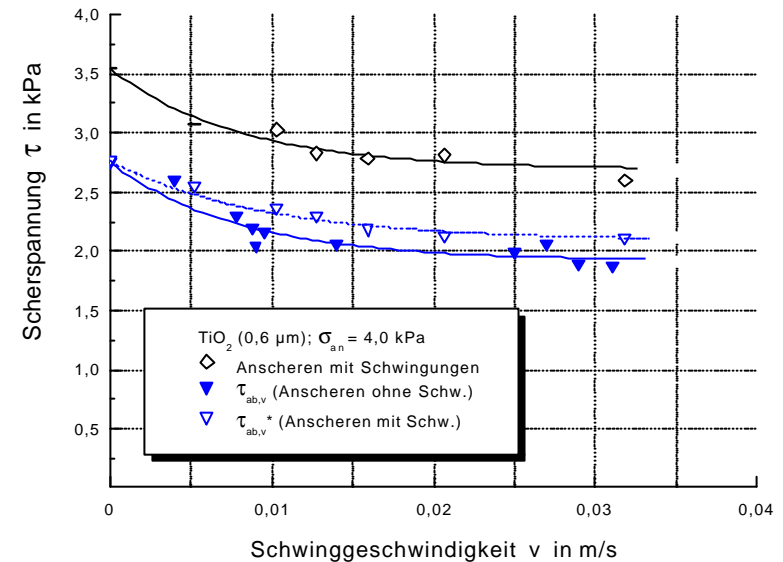
Scherring schw.		Scherdeckel schw.		Scherdeckel schw. (Fortsetzung)	
v in m/s	$\tau_{\text{ab}}$ in kPa	v in m/s	$\tau_{\text{ab}}$ in kPa	v in m/s	$\tau_{\text{ab}}$ in kPa
		0	3,03	0,0215	1,885
		0,0053	2,600	0,0220	1,927
siehe	Fließort 2	0,0054	2,318	0,0364	1,912
		0,0102	2,257		
		0,0102	2,327		
		0,0132	2,094		

Schüttgut:  $\text{CaCO}_3$   
 Methode B: Schwingungen beim An- und Abscheren;  
 Frequenz 100 Hz  
 $\mathbf{s}_{\text{an}} = 3,96 \text{ kPa}$ ;  $\mathbf{s}_{\text{ab}} = 2,44 \text{ kPa}$

Tab. VI.13: Meßwerte für  $\text{CaCO}_3$ ; Schwingungen beim An- und Abscheren,  $f = 100 \text{ Hz}$ , vgl. Abb. 8.10

$v$ in m/s	$\tau_{\text{an}}$ in kPa	$\tau_{\text{ab}}$ in kPa
0	3,77	3,03
0,0067	3,301	2,427
0,0083	3,457	2,540
0,0112	3,273	2,412
0,0127	3,132	2,370
0,0135	3,047	2,328
0,0143	3,090	2,356
0,0191	2,878	2,300
0,0239	2,878	2,257
0,0239	2,864	2,314
0,0287	2,808	2,243

Schüttgut:  $\text{TiO}_2$   
 Methode B: Schwingungen beim An- und Abscheren;  
 Frequ. 100 Hz;  $\mathbf{s}_{\text{an}} = 3,98 \text{ kPa}$ ;  $\mathbf{s}_{\text{ab}} = 2,46 \text{ kPa}$



Tab. VI.14: Meßwerte für  $\text{TiO}_2$ ;  $f = 100 \text{ Hz}$

$v$ in m/s	$\tau_{\text{an}}$ in kPa	$\tau_{\text{ab}}$ in kPa
0	3,538	2,77
0,0052	3,073	2,545
0,0103	3,026	2,359
0,0127	2,824	2,297
0,0159	2,778	2,188
0,0207	2,809	2,126
0,0318	2,592	2,111

**Schüttgut:** CaCO<sub>3</sub>  
**Methode:** Schwingungen beim Anscheren; Frequenz 100 Hz  
 Abscheren ohne Schwingungen

**Tab. VI.15:** Meßwerte für CaCO<sub>3</sub>; Schwingungen beim Anscheren, f = 100 Hz; vgl. **Abb. 8.12**

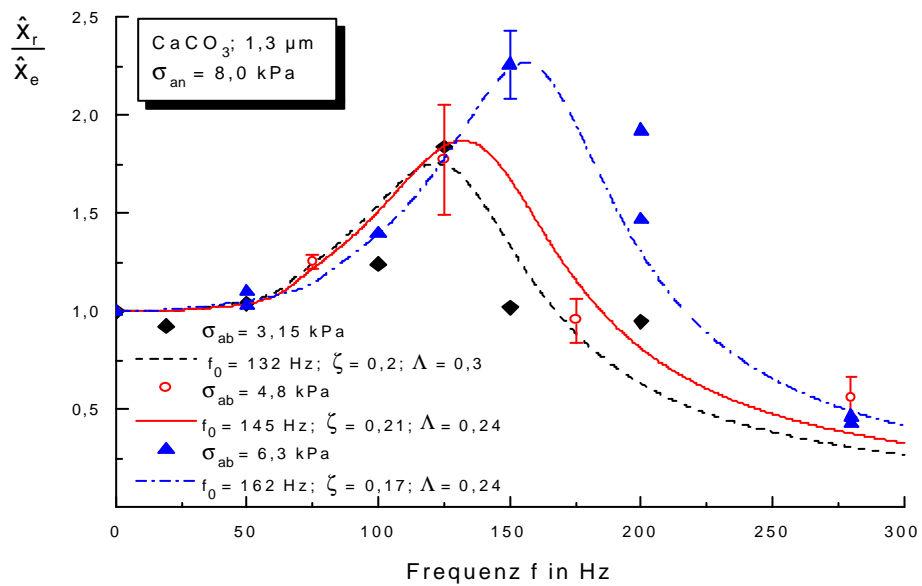
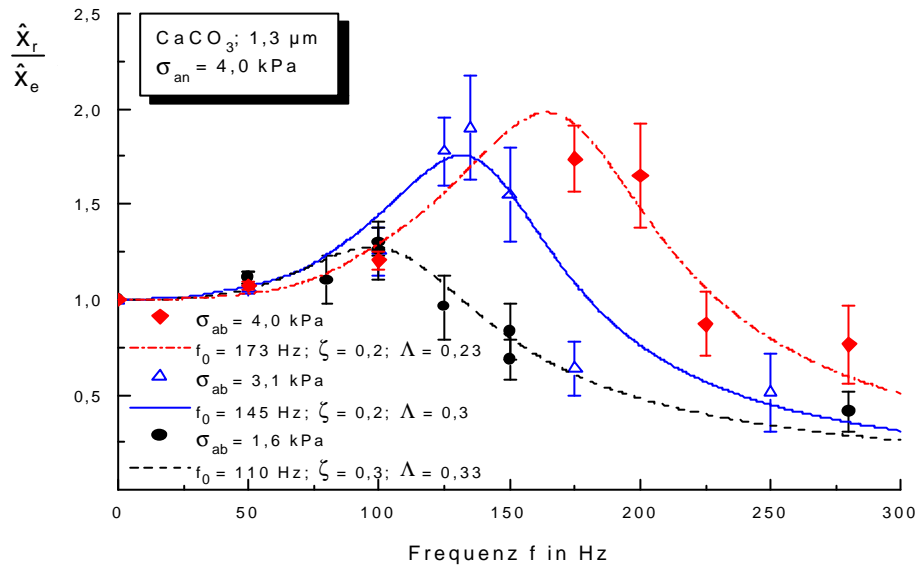
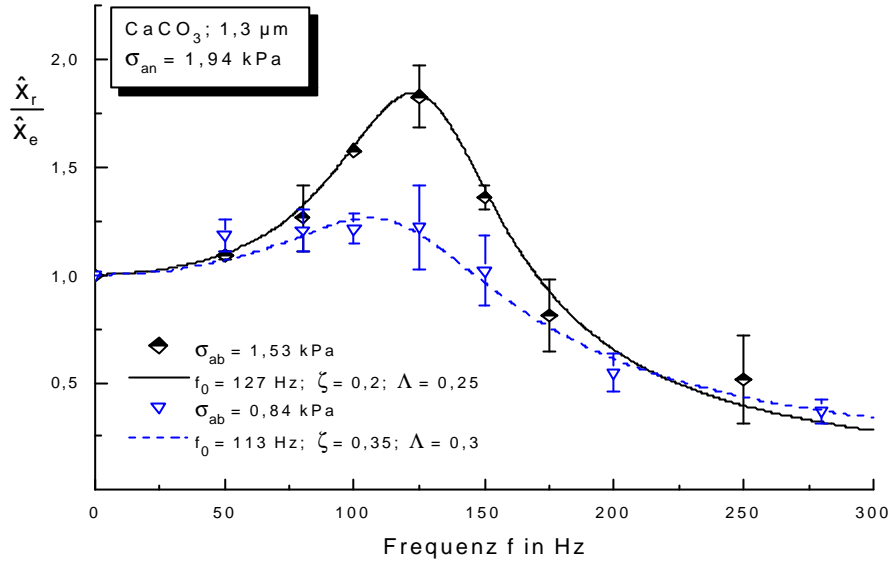
$\sigma_{an} = 1,94 \text{ kPa}; \sigma_{ab} = 1,11 \text{ kPa}$			$\sigma_{an} = 3,96 \text{ kPa}; \sigma_{ab} = 2,44 \text{ kPa}$			$\sigma_{an} = 7,99 \text{ kPa}; \sigma_{ab} = 4,81 \text{ kPa}$		
v in m/s	$\tau_{an}$ in kPa	$\tau_{ab}$ in kPa	v in m/s	$\tau_{an}$ in kPa	$\tau_{ab}$ in kPa	v in m/s	$\tau_{an}$ in kPa	$\tau_{ab}$ in kPa
0	1,87	1,49	0	3,77	3,03	0	7,44	5,66
0,0029	1,719	1,46	0,0064	3,431	3,121	0,0049	6,806	5,53
0,0051	1,690	1,520	0,0080	3,348	3,212	0,0080	6,236	5,768
0,0189	1,620	1,688	0,0080	3,163	3,121	0,0104	5,981	5,632
0,0213	1,479	1,642	0,0137	3,091	3,254	0,0108	6,026	5,796
0,0231	1,451	1,672	0,0146	2,809	3,121	0,0175	5,906	5,937
0,0253	1,338	1,551	0,0151	3,020	3,272	0,0239	5,546	5,966
0,0294	1,451	1,642	0,0263	3,008	3,254	0,0255	5,801	6,181
			0,032	2,654	3,272			
			0,032	2,824	3,484			

**Schüttgut:**  $\text{TiO}_2$   
**Methode:** Schwingungen beim Anscheren; Frequenz 100 Hz  
 Abscheren ohne Schwingungen

**Tab. VI.16:** Meßwerte für  $\text{TiO}_2$ ; Schwingungen beim Anscheren,  $f = 100$  Hz; vgl. **Abb. 8.12**

$\sigma_{\text{an}} = 1,94$ kPa; $\sigma_{\text{ab}} = 1,11$ kPa			$\sigma_{\text{an}} = 7,99$ kPa; $\sigma_{\text{ab}} = 4,81$ kPa		
v in m/s	$\tau_{\text{an}}$ in kPa	$\tau_{\text{ab}}$ in kPa	v in m/s	$\tau_{\text{an}}$ in kPa	$\tau_{\text{ab}}$ in kPa
0	1,82	0,144	0	7,90	5,835
0,0059	1,572	0,138	0,0080	6,895	6,010
0,0067	1,473	0,134	0,0112	6,518	5,952
0,0127	1,487	0,141	0,0175	6,314	6,190
0,0175	1,388	0,149	0,0302	6,110	6,302
0,0180	1,402	0,137	0,0350	6,251	5,660
0,0247	1,360	0,148			
0,0280	1,360	0,152			
0,0318	1,275	0,151			

## Anlage VII: Gemessene Frequenzgang-Beträge für $\text{CaCO}_3$



# Lebenslauf

## Persönliche Daten

Name, Vorname	Kollmann, Thomas
Geboren am	17.08.1967
Geburtsort	Magdeburg
Familie	verheiratet, ein Sohn

## Ausbildung

09/1974 - 08/1984	Allgemeinbildende Oberschule in Magdeburg, Abschluß 10. Klasse
09/1984 - 07/1987	Betriebsberufsschule des VEB Fahlberg-List Magdeburg, Abschluß als Facharbeiter für chemische Produktion mit Abitur
09/1990 - 09/1992	Technische Hochschule Köthen, Vordiplom
10/1992 - 07/1995	Otto-v.-Guericke-Universität Magdeburg, Abschluß als Diplomingenieur für Verfahrenstechnik
10/1993 - 01/1994	Industriepraktikum bei der Burger Knäcke GmbH
12/1994 - 05/1995	Diplomarbeit bei der Degussa AG in Hanau

## Beruf

07/1987 - 08/1990	Tätigkeit als Chemie-Anlagenfahrer beim VEB Fahlberg-List Magdeburg (abzgl. Wehrdienst)
11/1987 - 01/1990	Wehrdienst
08/1995 – 07/2001	wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Verfahrenstechnik der Otto-v.-Guericke-Universität Magdeburg,
seit 08/2001	Betreuungsingenieur bei der Wacker Chemie GmbH, Werk Nünchritz