

# **Dämpfungsverhalten ultrafeiner, kohäsiver Pulver beim langsamen, reibungsbefahenen Fließen**

**Dissertation**

zur Erlangung des akademischen Grades

**Doktoringenieur  
(Dr.-Ing.)**

von: Dipl.-Ing. Aimo Haack  
geb. am: 25. Januar 1974  
in: Haldensleben

genehmigt durch die Fakultät für Verfahrens- und Systemtechnik  
der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. Jürgen Tomas  
Prof. Dr.-Ing. Dietmar Schulze

eingereicht am: 29. August 2008

Promotionskolloquium am: 09. Januar 2009



Wo entspringt der Sinn für Technik  
Woher kommt maschinelles Gespür

Was ist das Gegenteil von skeptisch  
Wieso ist Unsymmetrisches präventios

Warum verfällt man in Hektik

Ist Ingenieursein nicht glamourös

...(a)

Herbert Grönemeyer – Kopf hoch, tanzen



## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Mechanische Verfahrenstechnik der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg. An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Jürgen Tomas für die Anregung zu dieser Arbeit, die wissenschaftliche Betreuung, die anregenden Diskussionen sowie die mir gelassenen Freiräume bedanken. Bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Dietmar Schulze bedanke ich mich für die Bereitschaft zur Begutachtung der Dissertation.

Allen Mitarbeitern des Institutes für Verfahrenstechnik insbesondere des Lehrstuhls für Mechanische Verfahrenstechnik gilt mein Dank. Ihre Unterstützung trug wesentlich zum Gelingen der Arbeit bei. Mein besonderer Dank gilt meinem Kollegen Guido, der mir gerade und vor allem in der letzten Phase der Arbeit mit Rat und Tat zur Seite stand. Weiterhin möchte ich mich bedanken bei Aneta, Bernd, Christoph, Daniela, Lilla, Mateusz, Nicolle, Peter, Rostyslav, Thomas und Werner.

Nicht vergessen werden sollen auch die Studenten, die im Rahmen von Studien-, Master- und Diplomarbeiten an der Gewinnung der umfangreichen experimentellen Daten großen Anteil hatten. Dafür Dank an Guido Kache, Stephanie Winkler, Christina Dengler, Praveen Goud Biragoni, Madhu Babu Mandava, Feras Al-Taweil sowie Ramesh Babu Gunde.

Vielen anderen ist noch zu danken. Sie sind eingeschlossen.

In besonderer Weise möchte ich mich bei meiner Familie bedanken. Ihre Unterstützung ist unschätzbar.

Magdeburg, im Januar 2009

Aimo Haack

## Kurzreferat

Die vorliegende Arbeit soll zum besseren Verständnis des Dämpfungsverhaltens beim Fließen ultrafeiner, kohäsiver Pulver beitragen. Der Beschreibung des Dämpfungsverhaltens dienen die Dämpfungsparameter Eigenfrequenz  $f_0$ , viskoses Dämpfungsmaß  $\zeta_b$  und Coulomb'sches Dämpfungsmaß  $\Lambda_b$ . Es wurden unterschiedliche Feuchtebeladungen und Partikeleigenschaften sowie der Einfluss verschiedener Scherrichtungen auf die genannten Dämpfungsparameter untersucht. Als Versuchsmaterialien wurden jeweils ein handelsübliches Kalksteinpulver (OMYA;  $d_{50} = 1,3\mu\text{m}$ ) und Titandioxidpulver (KRONOS 1001;  $d_{50} = 0,6\mu\text{m}$ ) verwendet.

Für die experimentellen Untersuchungen wurde eine Messmethodik angewandt, mit der sowohl der Einfluss von außen aufgeprägter Schwingungen auf die Fließkennwerte von Schüttgütern als auch die Schwingungsübertragung innerhalb der Scherzone des Schüttgutes messtechnisch erfasst werden können. Es handelt sich hierbei um eine auf Blattfedern gelagerte schwingende Translations-Scherapparatur, bei der während des Schervorganges horizontale Schwingungen unterschiedlicher Intensität in die Schüttgutprobe eingeleitet werden können. Dabei stehen Scher- und Schwingungsrichtung senkrecht aufeinander.

Generell ist festzuhalten, dass die eingeleiteten Schwingungen zu einem verbesserten Fließverhalten führen. Im untersuchten Bereich der Erregerfrequenz ( $50\text{ Hz} \leq f \leq 200\text{ Hz}$ ) nimmt die Fließverbesserung mit zunehmender Erregerfrequenz zu, da bei konstanter maximaler Schwingungsgeschwindigkeit die Intensität der eingeleiteten Schwingungen mit der Erregerfrequenz wächst. Höhere Frequenzen als 200 Hz wurden nicht untersucht.

Bei der Schwingungsübertragung im Schüttgut treten Dämpfungseffekte auf. Um diese zu quantifizieren, wurde am Scherboden und Scherring jeweils ein Beschleunigungssensor angebracht. Aus der Abschwächung oder Verstärkung zwischen dem Erreger- und dem resultierenden Antwortsignal können die Dämpfungsparameter Eigenfrequenz  $f_0$ , viskoses Dämpfungsverhältnis  $\zeta_b$  und Coulomb'sches Dämpfungsverhältnis  $\Lambda_b$  erhalten werden.

Die Ergebnisse der experimentellen Untersuchungen zeigen eine mit der jeweiligen Verfestigung ansteigende Eigenfrequenz und ein mit zunehmender Verfestigung abnehmendes viskoses Dämpfungsverhältnis. Das Coulomb'sche Dämpfungsverhältnis nimmt mit zunehmender Erregerfrequenz zu. D.h. der Anteil der Coulomb'schen Dämpfung an der Gesamtdämpfung steigt mit der Erregerfrequenz.

Mit zunehmender Pulverfeuchte wurden eine sinkende Eigenfrequenz und ein steigendes viskoses Dämpfungsmaß beobachtet, die Coulomb'sche Dämpfung wurde reduziert. Die zusätzlich eingetragene und an den Partikeloberflächen adsorbierte Feuchtigkeit hat somit einen signifikanten Einfluss auf das Dämpfungsverhalten kohäsiver Pulver.

Um den Einfluss unterschiedlicher Partikeleigenschaften zu bestimmen, wurden die Ergebnisse des Kalksteinpulvers den Ergebnissen der Dämpfungsuntersuchungen des Titandioxidpulvers gegenüber gestellt. Für das untersuchte Titandioxidpulver wurden eine deutlich kleinere

Eigenfrequenz sowie ein kleineres viskoses Dämpfungsverhältnis ermittelt. Die Coulomb'sche Dämpfung ist größer als beim untersuchten Kalksteinpulver.

Weiterhin wurde der Einfluss der Scherrichtung auf die Dämpfungsparameter untersucht. Im einfachsten Fall wurde die Scherzelle nach dem Anscheren um  $180^\circ$  gedreht, somit sind die An- und Abscherrichtung entgegengesetzt gerichtet. Die so ermittelten Eigenfrequenzen sind tendenziell etwas kleiner als die bei den Standardscherversuchen ermittelten. Bei einer geringen Normalbelastung führt die Umkehrung der Scherrichtung zu einem höheren viskosen Dämpfungsverhältnis sowie zu einem deutlich reduzierten Coulomb'schen Dämpfungsverhältnis. Bei größeren Normalbelastungen hat die Umkehrung der Scherrichtung keinen signifikanten Einfluss auf die Dämpfungsparameter.

Um den Einfluss eines veränderlichen Winkels zwischen Scher- und Schwingungsrichtung zu quantifizieren, wurde die Scherrichtung in Intervallen von je  $15^\circ$  relativ zur Schwingrichtung verändert. Anscher- und Abscherrichtung sind in diesem Fall wieder gleich. Ein signifikanter Einfluss des veränderten Winkels auf die Eigenfrequenz wurde nicht beobachtet. Es ist eine leichte Tendenz zu höheren Werten des viskosen Dämpfungsmaßes mit verändertem Winkel zu sehen. Die Auswertung des Coulomb'schen Dämpfungsverhältnisses zeigt ebenso keine deutliche Abhängigkeit von der Änderung der Scherrichtung.

## Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis.....	IV
Indizes.....	VIII
Abkürzungen .....	VIII
1 Einleitung und Aufgabenstellung .....	1
2 Mikromechanik der Partikelhaftung.....	4
2.1 Haftkräfte zwischen feinen Partikeln .....	4
2.1.1 Vergleich verschiedener Haftkräfte.....	6
2.1.2 Ausgewählte Methoden zur Bestimmung der Partikelhaftkräfte .....	8
2.2 Partikelkontaktverhalten.....	14
2.2.1 Elastisch-Plastische Kontaktdeformation unter Normalbelastung .....	14
2.2.2 Viskoelastische-viskoplastische Kontaktdeformation.....	21
2.2.3 Charakteristische Haftkraftfunktionen .....	23
2.3 Ein Partikelkontakt unter Tangentialbelastung mit lastabhängiger Haftung.....	25
2.4 Bindung von Partikeln mit adsorbierten Flüssigkeitsschichten.....	28
2.4.1 Adsorptionsschichtbindung .....	28
2.4.2 Flüssigkeitsbrückenbindung .....	30
3 Kontinuumsmechanische Grundlagen des Schüttgutverhaltens.....	38
3.1 Zweiachsige Spannungszustände in der fließenden Partikelpackung .....	38
3.2 Kennwerte des elastischen Schüttgutverhaltens .....	43
3.3 Mikro-Makro-Übergang und Fließbedingungen für stationäres und beginnendes Fließen .....	45
3.4 Verfestigungsfunktionen und Fließfunktion.....	54
3.5 Fließverhalten und Fließkennwerte von Schüttgütern.....	56
3.5.1 Wandfließverhalten .....	59
3.5.2 Zeitverfestigung.....	60
3.5.3 Fließverhalten bei höheren Pulverfeuchten .....	61
3.6 Kompressionsverhalten kohäsiver Schüttgüter .....	61
4 Schwingungsübertragung im Schüttgut.....	65
4.1 Einführung in die kennzeichnenden Parameter harmonischer Schwingungen .....	65
4.2 Freie Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad .....	68



4.2.1	Freie Schwingungen ungedämpfter Systeme .....	68
4.2.2	Freie Schwingungen gedämpfter Systeme .....	72
4.2.3	Ermittlung von Systemparametern aus den freien Schwingungen.....	79
4.3	Erzwungene Schwingungen von mechanischen Systemen mit einem Freiheitsgrad	80
4.3.1	Berechnung der stationären Bewegung bei harmonischer Erregung.....	81
4.3.2	Stationäre Bewegung bei periodischer Erregung .....	85
4.3.3	Ermittlung von Systemparametern aus den erzwungenen Schwingungen.....	86
4.4	Fließkriterium für das schwingungsinduzierte Fließen von Schüttgütern.....	89
4.5	Modell der schwingenden Scherzelle.....	92
4.6	Kombination von viskoser und Coulomb'scher Dämpfung.....	93
4.7	Arbeiten anderer Autoren zum Dämpfungsverhalten kohäsiver Pulver.....	96
5	Versuchsaufbau und Messmethoden .....	103
5.1	Translations-Scherapparatur .....	103
5.2	Aufbau der Vibrations-Scherapparatur.....	103
5.3	Der direkte Scherversuch.....	107
5.3.1	Durchführung eines Translations-Scherversuches nach Jenike.....	107
5.3.2	Mögliche Versuchsmethoden von Vibrations-Scherversuchen.....	109
5.3.3	Schwingungseinleitung beim An- und Abscheren .....	110
6	Beschreibung der Versuchspulver .....	112
7	Ergebnisse der experimentellen Untersuchungen .....	115
7.1	Beschreibung von Erreger- und Antwortschwingung .....	115
7.2	Einfluss der Vibrationen auf das Fließ- und Dämpfungsverhalten von kohäsivem Kalksteinmehl.....	117
7.2.1	Fließverhalten .....	117
7.2.2	Dämpfungsverhalten.....	123
7.3	Bestimmung der Federkonstante $c$ , der Dämpfungskonstanten $b$ und $k$ und der Erregerkraft $F_e$ .....	131
7.3.1	Federkonstante $c$ und Dämpfungskonstanten $b$ und $k$ .....	131
7.3.2	Berechnete Hystereseschleifen .....	137
7.4	Beurteilung der Anpassungsmethode .....	139
7.5	Einfluss der Vibrationen auf das Fließ- und Dämpfungsverhalten von feuchtem Kalksteinpulver.....	141
7.5.1	Fließverhalten von feuchtem Kalksteinpulver.....	142
7.5.2	Dämpfungsverhalten von feuchtem Kalksteinpulver .....	144
7.6	Vergleich des Fließ- und Dämpfungsverhaltens von Kalkstein und Titandioxid ..	147
7.6.1	Vergleich des Fließverhaltens von Kalkstein und Titandioxid .....	149
7.6.2	Vergleich des Dämpfungsverhaltens von Kalkstein und Titandioxid.....	151

### III

7.7	Untersuchungen zur Anisotropie am Beispiel von Kalkstein.....	157
7.7.1	Vergleich von Standardscherversuch und Anisotropietest.....	157
7.7.2	Einfluss des Winkels zwischen Scher- und Schwingrichtung.....	165
8	Zusammenfassung .....	172
	Literaturverzeichnis.....	176
	Verzeichnis der verwendeten Zitate .....	181
	Anhang .....	182

## Symbolverzeichnis

Symbole, die nur einmal im Text auftreten, sind ausschließlich dort erklärt.

A	$m^2$	Fläche
a	$m/s^2$	Schwingbeschleunigung
$a_0$	nm	Gleichgewichtsabstand
$a_c$	nm	Cantileverablenkung
$a_p$	nm	Position der Materialprobe
B	m	komplexe Amplitude ( $B = x_{\max} \cdot e^{j\psi}$ )
b	kg/s	Dämpfungskonstante des viskosen Dämpfers
$b_{\min}$	m	minimale Öffnungsweite eines Massenflusstrichters
$C_H$	J	Hamaker-Konstante
c	N/m	Feder-Konstante
$c_c$	N/m	Feder-Konstante des Cantilevers
d	$\mu m$	Partikel- (Äquivalent-) Durchmesser
$d_{ST}$	$\mu m$	Sauter-Durchmesser
$d_{50,3}$	$\mu m$	mittlere Partikelgröße (Medianwert der Partikel-Volumenverteilung)
E	GPa	Elastizitätsmodul
$E^*$	GPa	mittlerer Elastizitätsmodul
F	N	Kraft
$F_H$	nN	Haftkraft
$F_R$	nN	Randkraft
$F_{vdW}$	nN	van-der-Waals-Kraft
$F_Z$	N	Zentrifugalkraft
f	Hz	Frequenz
$f_{\max}$	Hz	Resonanzfrequenz (Schwingweg-Resonanz)
$f_0$	Hz	Eigenfrequenz des ungedämpften Schwingers
ff	—	Fließfaktor nach JENIKE
$ff_c$	—	Fließfunktion
G	$N/m^2$	Gleitmodul
$G^*$	$N/m^2$	mittlerer Gleitmodul
$G_b$	$N/m^2$	Schermodul eines kohäsiven Schüttgutes
g	$m/s^2$	Erdbeschleunigung ( $g = 9,81 m/s^2$ )
$h_K$	m	elastische Kontaktabplattung
$h_{r1,2}$	m	mittlere Rauigkeitstiefe
$h_{SZ}$	m	Höhe der Scherzone

V

$j$	—	imaginäre Einheit
$k$	N	Dämpfungskonstante der Coulomb-Dämpfung
$k_B$	J/K	Boltzmann-Konstante ( $k_B = 1,3807 \cdot 10^{-23}$ J/K)
$k_N$	Pa·m	Kontaktsteifigkeit in Normalrichtung
$k_T$	Pa·m	Kontaktsteifigkeit in Tangentialrichtung
$L$	—	Dämpfungsfunktion
$M$	—	Dämpfungsfunktion
$m$	kg	Masse
$n$	—	rheologischer Parameter
$n$	—	Kompressibilitätsindex
$p$	Pa	Druck
$p_D$	Pa	Partialdruck
$p_f$	Pa	Mikrofließspannung
$p_K$	Pa	Kapillardruck
$p_{vdW}$	Pa	van-der-Waals-Druck
$Q$	—	Dämpfungsfunktion
$q_{max}$	A·s/m <sup>2</sup>	Oberflächenladungsdichte
$R$	J/mol·K	allgemeine Gaskonstante ( $R = 8,314$ J/mol K)
$R$	m	Krümmungsradius
$Re$	—	Reynolds-Zahl
$r_K$	µm	Radius der Kontaktfläche
$r_{1,2}$	µm	mittlerer Kugelradius
$S$	m <sup>2</sup>	Oberfläche
$S$	—	Flüssigkeitssättigung
$s$	m	Weg
$T$	s	Schwingdauer
$T$	K	Temperatur
$t$	s	Zeit
$U$	—	Vergrößerungsfunktion des ungedämpften Schwingers
$U$	V	Kontakt-Potential
$u$	m/s	Strömungsgeschwindigkeit
$V$	—	Vergrößerungsfunktion
$V$	m <sup>3</sup>	Volumen
$v$	m/s	Schwinggeschwindigkeit
$\Delta v$	m	relative Schwinggeschwindigkeit ( $v_2 - v_1$ )
$W$	Nm	Arbeit
$w$	m	Pixelabstand
$X_1$	—	Feuchte (Flüssigkeitsbeladung) $X_1 = m_1 / m_s$

## VI

$x$	m	Schwingweg
$\dot{x}$	m/s	Schwinggeschwindigkeit (1. Zeitabl. von $x$ )
$\ddot{x}$	m/s <sup>2</sup>	Schwingbeschleunigung (2. Zeitabl. von $x$ )
$\Delta x$	m	relativer Schwingweg ( $x_2 - x_1$ )
$x, y, z$	—	Raumkoordinaten
$\alpha$	—	Irrtums-Wahrscheinlichkeit ( $\alpha = 0,05$ )
$\alpha$	Grad	Winkel
$\beta$	Grad	Hilfswinkel
$\beta$	Pa	maximale Scherspannungsreduzierung bei Schwingungseinwirkung ( $\tau - \tau_{v,\min}$ )
$\gamma$	m/s	charakteristische Schwinggeschwindigkeit
$\gamma$	—	Scherdeformation / Gleitung
$\dot{\gamma}$	—	Scherrate
$\delta$	1/s	Abklingkonstante des viskosen Dämpfers
$\varepsilon$	—	Porosität
$\Theta$	Grad	Randwinkel
$\theta$	° C	Temperatur
$\zeta$	—	dimensionsloses (kritisches) Dämpfungsmaß; viskoses Dämpfungsverhältnis
$\eta$	Pa·s	dynamische Viskosität
$\eta_K$	Pa·s	Kontaktviskosität
$\Theta$	Grad	Trichterneigungswinkel
$\vartheta$	—	Lehr'sches Dämpfungsmaß
$\kappa$	—	Haftkraftanstieg (Partikelverfestigungs-Koeffizient)
$\kappa_A$	—	elastisch-plastisches Kontaktflächenverhältnis
$\kappa_p$	—	plastischer Repulsionskoeffizient
$\Lambda$	—	logarithmisches Dekret
$\Lambda_b$	—	Dämpfungsverhältnis des Coulomb-Dämpfers
$\Lambda^*$	s	modifiziertes Coulomb'sches Dämpfungsverhältnis
$\mu$	—	Reibungsbeiwert der Coulomb-Reibung
$\nu$	—	Querdehnungs- (Poisson-) Zahl
$\nu$	Grad	Dilatanzwinkel
$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	Dichte
$\sigma$	Pa	Normalspannung
$\sigma_c$	Pa	einaxiale Druckfestigkeit
$\sigma_{lg}$	J/m <sup>2</sup>	Grenzflächenspannung
$\sigma_M$	kPa	Mittelpunktspannung

## VII

$\sigma_R$	kPa	Radiusspannung
$\sigma_Z$	kPa	isostatische Zugfestigkeit
$\sigma_{Z,1}$	kPa	einaxiale Zugfestigkeit
$\sigma_0$	kPa	isostatische Zugfestigkeit, unverfestigt
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	kPa	Hauptspannungen
$\tau$	kPa	Schubspannung
$\tau_c$	kPa	Kohäsion
$\tau_F$	kPa	Fließgrenze
$\tau_\omega$	kPa	Schubspannung unter Vibrationen
$\varphi$	rad	Phasenwinkel
$\varphi_e$	Grad	effektiver (innerer) Reibungswinkel
$\varphi_i$	Grad	innerer Reibungswinkel
$\varphi_{st}$	Grad	stationärer (innerer) Reibungswinkel
$\varphi_W$	Grad	Wandreibungswinkel
$\Phi$	% rF	relative Luftfeuchte
$\Phi$	—	Volumenanteil
$\Psi$	rad	Nullphasenwinkel
$\Psi$	—	Partikelformfaktor
$\Omega$	—	Abstimmungsverhältnis
$\omega$	1/s	Kreisfrequenz
$\omega_0$	1/s	Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Schwingers (Kennkreisfrequenz)

## Indizes

A	Ablösungs-	max	maximal
ab	Abscheren	min	minimal
an	Anscheren	N	Normal-
b	Schüttgut (bulk)	pl	plastisch
C	Coulombreibung	R	Radius-
d	Dämpfungs-	r	Antwort-, resultierend
e	Erreger-	S	Scher-
el	elastisch	S	spezifisch
f	Fluid (fluid)	s	Feststoff (solid)
G	Grenz-	st	stationäres Fließen
ges	gesamt	T	Tangential-
H	Haft-	V	Volumenbezogen
H	Hohlraum	v	bei Schwingungseinwirkung
i,j	Laufindizes		
K	Klopf-	vis	viskos
K	Kompressions-	vor	Vorverfestigen
krit	kritisch	W	Wand
l	Flüssigkeit (liquid)	Z	Zug-
M	Mittelpunkts-	0	unverfestigt
m	Massebezogen	1	Erreger-
		2	resultierend

## Abkürzungen

AFM	Atomic Force Microscopy
bspw.	beispielsweise
bzw.	beziehungsweise
DGL	Differentialgleichung
d.h.	das heißt
Gl.	Gleichung
inkl.	inklusive
RLF	relative Luftfeuchte
RPC	repräsentativer Partikelkontakt
RVE	repräsentatives Volumenelement
vdW	van-der-Waals-
z.B.	zum Beispiel

# 1 Einleitung und Aufgabenstellung

In vielen Bereichen einer heutigen Volkswirtschaft werden Schüttgüter erzeugt und verbraucht, transportiert und umgeschlagen, gelagert und verarbeitet sowie verfahrenstechnisch umgewandelt.

Festkörper oder Stückgüter, Flüssigkeiten und Gase lassen sich relativ einfach handhaben. Im Gegensatz dazu hängt jedoch das mechanische Verhalten eines Schüttgutes unmittelbar von dessen Beanspruchungsvorgeschichte ab, was sich ziemlich einfach mit einem Neigungsversuch eines Transportbehälters verdeutlichen lässt [34]. Das Schüttgut wird in den Behälter eingefüllt, geneigt und wieder zurück bewegt, und eine jeweils andere Form der Schüttoberfläche stellt sich ein, Abbildung 1-1. Die Abbildung zeigt ebenfalls, dass Schüttgüter ein „Gedächtnis“ haben, welches, wenn sie mineralischen Ursprunges sind, durchaus erdgeschichtliche Zeiträume umfassen kann hat [89].

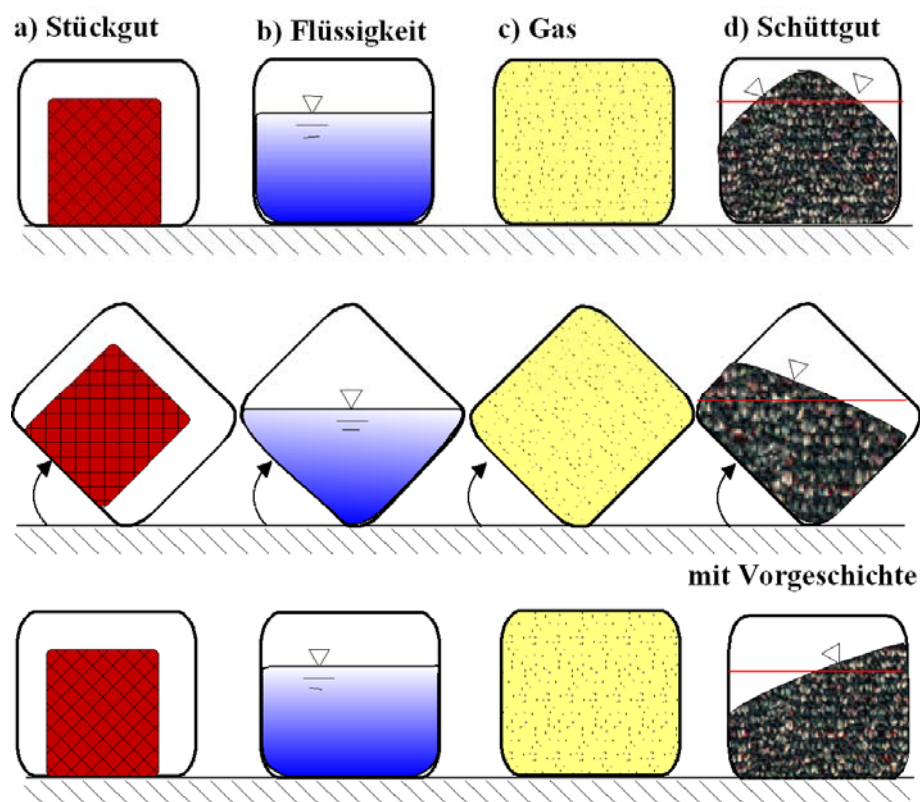


Abbildung 1-1: Lagerung in Behältern – Mechanisches Verhalten von Stückgut, Flüssigkeit, Gas und Schüttgut [34]

Ein Schüttgut kann sich wie ein unvollkommener Festkörper, wie eine Flüssigkeit oder wie ein Gas verhalten. Oftmals zeigt es dabei genau die Eigenschaften, die gerade am wenigsten erwartet werden und die so zu den meisten verfahrenstechnischen Problemen führen. Diese



sind dann auch zahlreich und schwerwiegend, bspw. Funktionsbehinderungen durch Fließstörungen durch Anbackungen, Selbstfluidisierung oder Lawinenbildung, schwankende Mengenströme und Entmischungen. Dazu können breite Verweilzeitverteilungen kommen, verbunden mit Zeitverfestigung, Stoffumwandlung, Explosionen sowie der Gefahr des Verderbens organischer Stoffe [89].

Bei der Silolagerung kann der Schüttgutfluss, der normalerweise nur durch Schwerkraftwirkung erzielt wird, durch Brücken- oder Schachtbildung zum Erliegen kommen. Kontinuierliches Dosieren mit konstanter Schüttguldichte ist damit kaum möglich. Als Lösung dieses Problems kann das Fließverhalten dieser Schüttgüter durch Anregung mit mechanischen Schwingungen erheblich verbessert werden.

In der Schüttguttechnik finden schwingende Austragorgane bzw. -hilfen weite Verbreitung, so zum Fördern und Dosieren von Schüttgütern oder als Fließ- und Austraghilfen in verfahrenstechnischen Apparaten. Sie dienen dazu, den Schwerkraftfluss der Schüttgüter zu initiieren und zu unterstützen. Der Eintrag von Schwingungen zielt sowohl auf eine bessere Produktqualität wie auch auf einen gleichmäßigen und störungsfreien Produktabzug, wie ihn die Industrie erfordert. Dabei ist nicht immer gegeben, dass die Austragunterstützung auch an jenem Punkt angewandt wird, an dem die Fließstörung auftritt. Die Schwingung wird erst einen bestimmten Weg durch das Schüttgut zurücklegen müssen, ehe sie die Störung erreicht. Dabei kommt es zur Dämpfung (zum Energieverlust) der Schwingung, was eine deutliche Verringerung ihrer Wirkung zur Folge hat.

An einer schwingenden Translationsscherzelle wird eben jene Schwingungsdämpfung beim langsamen, reibungsbehafteten Fließen kohäsiver Pulver untersucht. Während des Fließens werden gezielt Schwingungen in die Scherzone eingeleitet. Hierdurch wird die Scherfestigkeit erheblich reduziert, was eine deutliche Verbesserung der Fließfähigkeit nach sich zieht. Diese Aktivierung führt zu einer besseren Handhabbarkeit und weniger Problemen bei Lagerung und Transport von kohäsiven Schüttgütern. Allerdings wird der positive Effekt des zusätzlichen Energieeintrages durch auftretende Dämpfungseffekte zunichte gemacht.

Deshalb steht in dieser Arbeit die experimentelle Untersuchung des Dämpfungsverhaltens von kohäsiven Schüttgütern im Vordergrund. Dafür wurde eine Messmethodik angewandt, mit der sowohl der Einfluss der Schwingungen auf die Fließkennwerte von Schüttgütern als auch die Schwingungsübertragung innerhalb des Schüttgutes messtechnisch erfasst werden können. Es handelt sich um eine Jenike-Scherzelle, die in der Schüttguttechnik als Standardmessgerät etabliert ist, welche auf Blattfedern gelagert ist. Durch diese Modifizierung ist es möglich, während des Schervorgangs horizontale Schwingungen unterschiedlicher Intensität ins Schüttgut einzuleiten. Für die Versuche wurden die Proben in definierte Ausgangszustände versetzt (angeschert), um das im Silo fließende Schüttgut zu simulieren. Anschließend wurden die Proben abgeschert und die Scherkraftverläufe aufgezeichnet. Diese Diagramme waren die Grundlage der Versuchsauswertung. Bei den Vibrationsversuchen wurden das Anscheren und

das Abscheren jeweils unter Schwingungseinfluss durchgeführt. Mit dieser Versuchsmethode wird ein kontinuierlich schwingungsunterstützter Siloaustrag simuliert.

Zuvor jedoch werden im Kapitel 2 die Haftung von Partikeln und im Kapitel 3 die kontinuumsmechanischen Grundlagen des Schüttgutverhaltens behandelt. Kapitel 4 beschäftigt sich mit der Schwingungsübertragung im Schüttgut. Im Kapitel 5 wird die verwendete Messapparatur beschrieben. Im Kapitel 6 werden die für die Untersuchungen verwendeten Schüttgüter charakterisiert. Als Versuchsmaterialien wurden jeweils ein handelsübliches Kalksteinpulver (OMYA;  $d_{50} = 1,3\mu\text{m}$ ) und Titandioxidpulver (KRONOS 1001;  $d_{50} = 0,6\mu\text{m}$ ) ausgesucht.

Schließlich sind im Kapitel 7 die Ergebnisse der experimentellen Untersuchungen zusammenfassend dargestellt. Dabei dienen die Dämpfungsparameter Eigenfrequenz  $f_0$ , viskoses Dämpfungsmaß  $\zeta_b$  und Coulomb'sches Dämpfungsmaß  $\Lambda_b$  der Beschreibung des Dämpfungsverhaltens kohäsiver Schüttgüter.

## 2 Mikromechanik der Partikelhaftung

### 2.1 Haftkräfte zwischen feinen Partikeln

Die Eigenschaften feinkörniger Pulver werden bekanntlich von den Wechselwirkungen zwischen den Partikeln bestimmt, die für die Haftung zwischen Partikeln verantwortlich sind. Die interpartikulären Haftkräfte (van-der-Waals-Kräfte) dieser Partikelkollektive übersteigen die Gewichtskräfte um mehrere Größenordnungen, was u.a. zu einer unerwünschten Haftung von Staub- oder Schmutzpartikeln an Oberflächen führt. Werden Partikel auf eine feste Unterlage angepresst, steigen ihre Haftkräfte um ein Vielfaches an. So sind bspw. das Bedrucken von Papieroberflächen mit Farbpartikeln und die Herstellung und Anwendung von Tafelkreide alt bekannte Beispiele gewünschter Haftvorgänge. Die Haftkräfte zwischen feinen Partikeln sind somit bei einer Vielzahl industrieller Stoffwandlungsprozesse, makroskopischer Förder-, Transport- und Handhabungsvorgänge sowie bei den Produktanwendungen Prozess bestimmend.

Die Haftkräfte zwischen einzelnen Partikeln lassen sich mit den im Folgenden aufgeführten Bindungsmechanismen, Abbildung 2-1, beschreiben [4, 59, 61, 62, 64, 66, 67, 78, 80, 92]:

- Oberflächen- und Feldkräfte im direkten Partikelkontakt:
  - Van-der-Waals-Kräfte (alle trockenen Pulver, die aus polaren, induziert-polaren und nichtpolaren Molekülen bestehen, bspw. Mineralien, Chemikalien, Kunststoffe, Lebensmittel);
  - Elektrostatische Kräfte;
    - elektrische Leiter (Metallpulver),
    - elektrischer Isolator (Polymere, Kunststoffe),
  - Magnetische Kräfte (Eisenpulver);
- Materialbrücken zwischen den Kontaktflächen:
  - Wasserstoffbrückenbindungen durch kondensierte Adsorptionsschichten in feuchter Umgebungsluft (Pulver),
  - Organische Makromoleküle als Flockungsmittel in Suspensionen (im Abwasser);
  - Flüssigkeitsbrückenbindungen durch:
    - Flüssigkeiten niederer Viskosität durch Kapillarkräfte und Oberflächenspannungen (feuchter Sand, feuchte Erde),
    - Flüssigkeiten hoher Viskosität (Ölsand, heißer Asphalt);
  - Festkörperbrücken durch:
    - Rekristallisation von Flüssigkeitsbrücken, welche gelöste Stoffe (bspw. Salze) enthalten,

- Verfestigung von gequollenen Partikeln (Stärke, Ton),
  - Einfrieren von Flüssigkeitsbrücken (gefrorene Erde),
  - Chemische Reaktionen mit adsorbierten Wasserschichten (Hydratation im Zement) oder Zement mit Porenwasser (Beton),
  - Verfestigung von hochviskosen Bindemitteln (kalter Asphalt),
  - Kontaktverschmelzung durch Sintern (Aggregate von Nanopartikeln, Keramiken),
  - Chemische Bindungen durch Feststoff-Feststoff-Reaktionen (aktivierte Metall-Legierungen);
- Verhakungen durch makromolekulare und Partikelform-Effekte:
- Verhakungen durch funktionelle Ketten auf Makromolekülen (Proteine),
  - Verhakungen durch Überlappung von Unebenheiten (raue Partikel).

Abbildung 2-1 zeigt verschiedene Bindungsmechanismen, die Haftkräfte zwischen Partikeln hervor rufen.

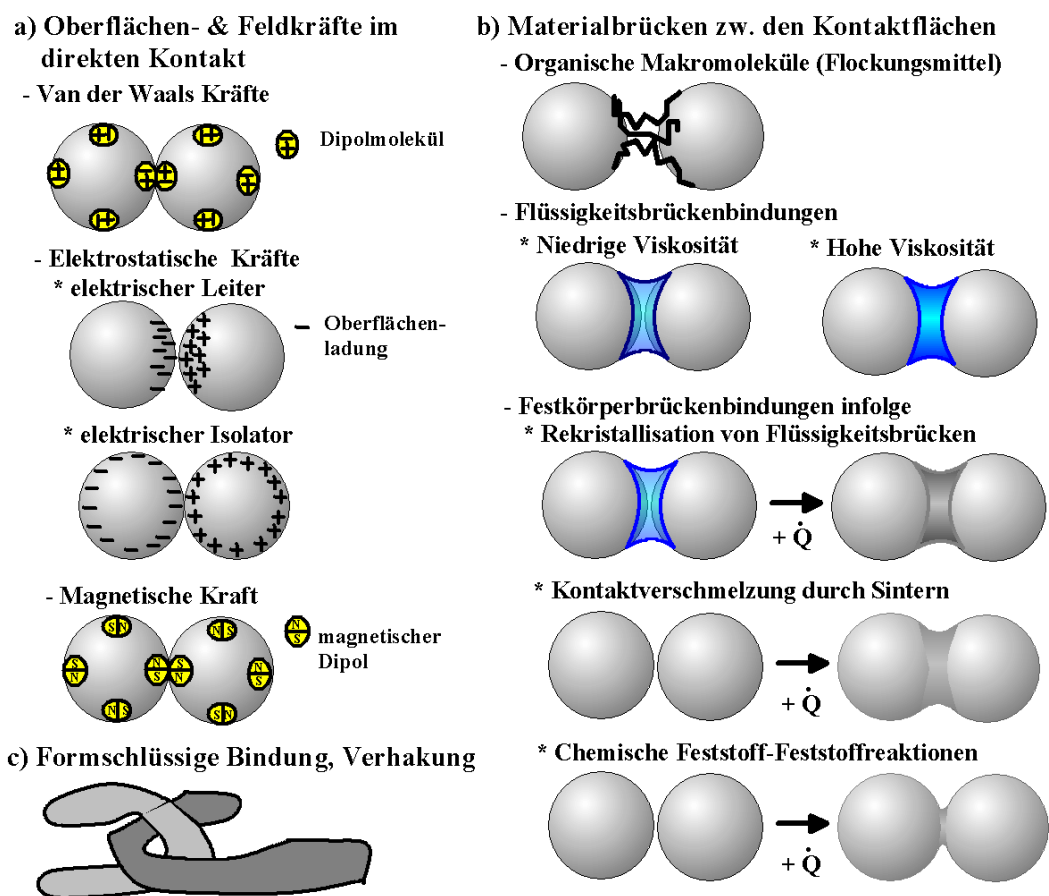


Abbildung 2-1: Partikelhaftung und Mikro-Prozesse der Partikelbindung im Partikelkontakt [92]

## 2.1.1 Vergleich verschiedener Haftkräfte

Die Festigkeit verschiedener Haftkräfte wird in Abbildung 2-2 verglichen. Bei Nichtbetrachtung der Festkörperbrücken ist die Flüssigkeitsbrückenbindung die dominierende Haftkraft [61], solange sie existiert [1, 12, 65, 73, 78].

Ohne Existenz einer Flüssigkeitsbrücke dominiert die van-der-Waals-Kraft. Diese Kraft kann in nasser Umgebung durch die Reduzierung der Hamaker-Konstante, hervorgerufen durch das Porenwasser, beträchtlich verringert werden. Dieser Effekt der Haftkraft-Reduzierung wird unter anderem für Waschprozesse ausgenutzt. Bei geladenen Partikeln, bspw. Toner-Partikel, ist die Coulomb-Kraft eine entscheidende Größe. Die Oberflächenladungsdichte kann mit  $q_{\max} = 16 \cdot 10^{-18} \text{ As}/\mu\text{m}^2$  angenähert werden. Dieser Wert entspricht dem Maximum der elektrischen Feldstärke bei Entladung. Es kommt vor, dass die Coulomb-Kraft größer ist als die van-der-Waals-Kraft, da das Maximum der Oberflächenladungsdichte stärker von der Spannung als von der Feldstärke abhängig ist [42].

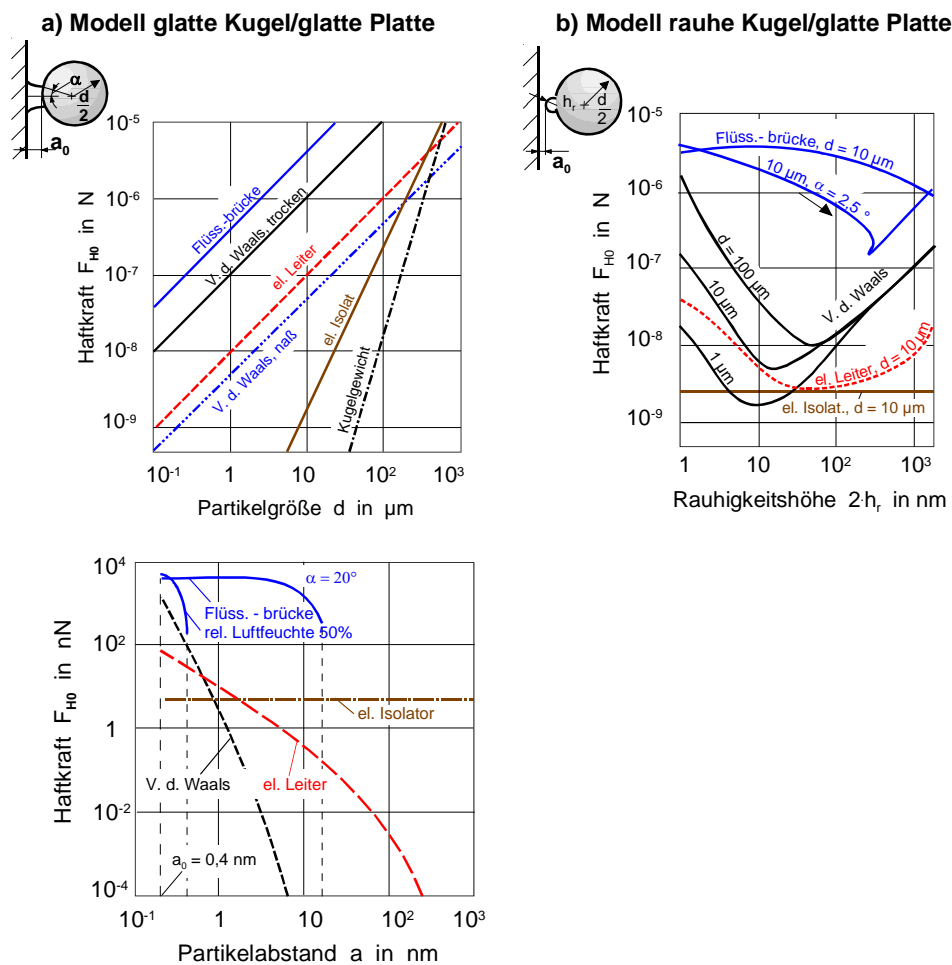


Abbildung 2-2: Haftkräfte zwischen steifen Partikeln und glatter Platte nach Rumpf [61]

Die in Abbildung 2-2 dargestellten Haftkräfte sind mit folgenden Werten berechnet: Gleichgewichtsabstand  $a_0 = 0,4 \text{ nm}$ , Benetzungswinkel  $\alpha = 20^\circ$ , Randwinkel  $\Theta = 0^\circ$ , Grenzflächenspannung  $\sigma_{lg} = 72 \text{ mJ/m}^2$ , Hamaker-Konstante nach Lifschitz  $C_H = 19 \cdot 10^{-20} \text{ J}$ , Oberflächenladungsdichte  $q_{\max} = 16 \cdot 10^{-18} \text{ As}/\mu\text{m}^2$ , Kontaktpotential  $U = 5 \text{ V}$ , Hamaker-Konstante Partikel-Wasser-Partikel  $C_{H,sls} = (C_{H,ss}^{1/2} - C_{H,ll}^{1/2})^2$ . Anstelle einer glatten Platte kann ebenso ein grobes Partikel mit einem großen Radius angenommen werden.

In der vorherigen Diskussion wurden die atmosphärischen Umgebungsbedingungen außer Acht gelassen. Durch die Feuchtigkeit der Umgebungsluft kondensiert Wasser aus und wird an den Partikeloberflächen adsorbiert. Durch diese Wasserschichten wird die zu betrachtende effektive Kontaktzone zwischen den Partikeln deutlich vergrößert. Durch molekulare Bindungen innerhalb dieser Schichten (bekannt als Oberflächenspannung) bilden sich Flüssigkeitsbrücken geringer Größe aus, die sich auf die Haftkräfte auswirken können [7, 59]. Die Feuchtigkeit wirkt sich ebenso auf die Dicke der adsorbierten Wasserschichten aus [7, 79], was wiederum Auswirkungen auf die Haftkräfte hat. Die Partikelhaftkräfte werden von mobilen Adsorptionsschichten durch die Umordnung von Molekülen und zusätzlichen Flüssigkeitsbrückenbindungen beeinflusst [67].

Solange die Flüssigkeitsbrücke stabil ist, wird die Bindungskraft nur unwesentlich vom Abstand beeinflusst [41]. Van-der-Waals- und Coulomb-Kraft (elektrischer Leiter) beschreiben ähnliche Kraft-Abstand-Kurven, Abbildung 2-2, a) unten. Die Coulomb-Kraft für elektrische Isolatoren ist unabhängig vom Partikelabstand. Das wird ausgenutzt, um bspw. Staubpartikel mit Hilfe eines elektrischen Feldes abzuschneiden.

Die van-der-Waals-Kraft wird sehr stark von der Partikelrauigkeit beeinflusst, Abbildung 2-2, b). Für verschiedene Partikelgrößen sind, abhängig von der Rauigkeit, minimale Werte der van-der-Waals-Kraft zu sehen. Der Einfluss der Rauigkeit bei Existenz von Flüssigkeitsbrücken und adsorbierten Flüssigkeitsschichten ist vergleichsweise gering. Die Partikelhaftung ist auch von der Temperatur abhängig [42].

Nicht unerwähnt soll bleiben, dass das Partikelgewicht bei Partikelgrößen  $d < 100 \mu\text{m}$  sehr klein im Vergleich zur auftretenden Haftkraft ist, und somit die Wechselwirkungen zwischen den Partikeln im Gravitationsfeld deutlich von den Haftkräften dominiert werden. Für das Verhältnis von Haft- zu Gewichtskraft gibt Tomas [in 93] folgende Gleichung an:

$$\frac{F_{H0}}{F_G} = \frac{C_{H,sls}}{2\pi g \cdot a_0^2 \cdot \rho_s \cdot d^2} \quad (2-1)$$

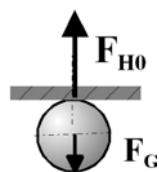


Abbildung 2-3:  
Physikalisches Wirkprinzip der Partikelhaftung

Abbildung 2-3 zeigt das physikalische Wirkprinzip der Partikelhaftung, Tabelle 2-1 gibt einen Überblick über den Bewertungsmaßstab der Produktqualität nach Gl. (2-1) [93]

Tabelle 2-1: Bewertungsmaßstab der Produktqualität [93]

Partikelgröße in $\mu\text{m}$	Wertebereich von $\frac{F_{H0}}{F_G}$	Bewertung des Pulvers
10 – 100	1 – 100	gering adhäsiv
1 – 10	$100 - 10^4$	adhäsiv
0,01 – 1	$10^4 - 10^8$	sehr adhäsiv

An den angegebenen Wertebereichen des Verhältnisses von Haft- zu Gewichtskraft lässt sich sehr deutlich ablesen, dass mit abnehmender Partikelgröße der Einfluss der Haftkraft zunimmt.

### 2.1.2 Ausgewählte Methoden zur Bestimmung der Partikelhaftkräfte

Abbildung 2-4 zeigt verschiedene Prinzipien, Partikelhaftkräfte zu messen. Sie basieren darauf, die Partikeln einer externen Belastung auszusetzen.

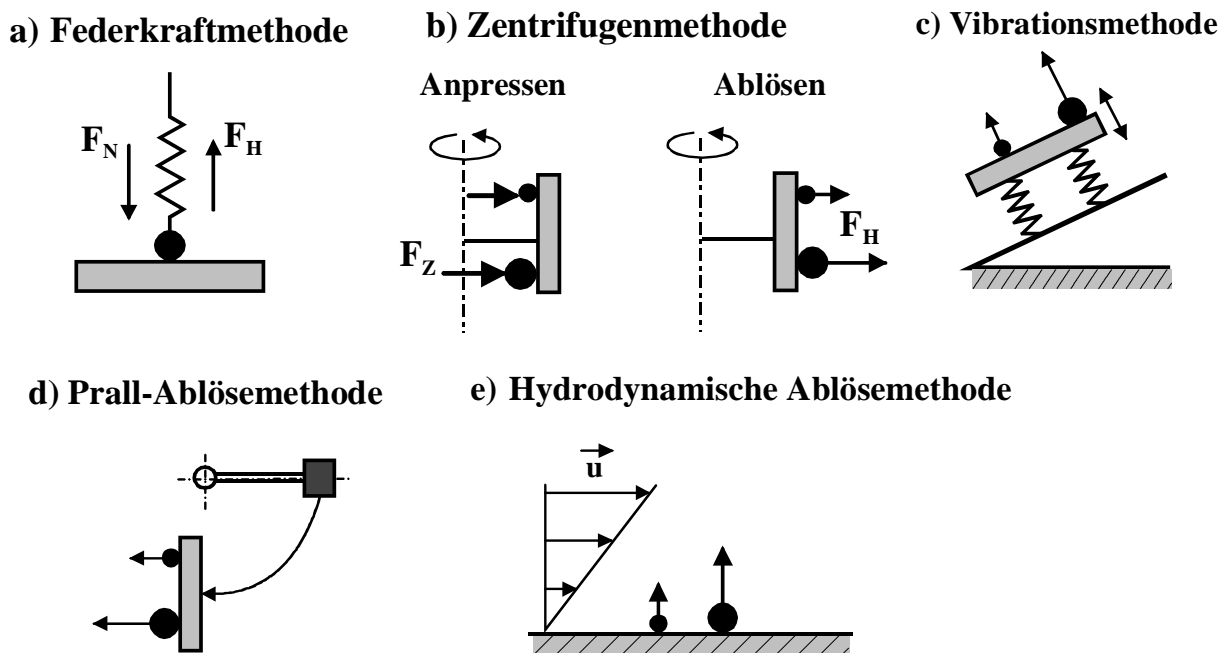


Abbildung 2-4: Messung der Haftkraft zwischen Partikel und Oberfläche [42]

Die Wechselwirkungskraft zwischen zwei mikroskopischen Körpern kann als direkte Messung mit der Federkraftmethode als Funktion der Dehnung der Feder zum Zeitpunkt der Ablösung bestimmt werden (a). Die Methoden (b) bis (e) hingegen ermöglichen eine indirekte Haftkraftmessung. Bei der Zentrifugenmethode (b) wird in einem ersten Schritt das zu untersuchende Partikel mittels Zentrifuge auf eine Oberfläche aufgebracht; es wirkt die Kompressions- bzw. Zentrifugalkraft  $F_Z$ . Nach dieser so genannten Kontakt-Vorverfestigung wird das Partikel mittels Zentrifuge abgelöst [39]. Bei Erreichen einer bestimmten Drehzahl wird die Zentrifugalkraft der Haftkraft entsprechen und das Partikel sich von der Oberfläche ablösen.

Die Vibrationsmethode (c), die erstmalig von Derjaguin [8] beschrieben wurde, beruht auf der Ablösung eines Partikels aufgrund seiner Trägheit von einer vibrierenden Oberfläche bei Erreichen einer bestimmten Beschleunigung. Die Vibrationen rufen nicht nur das Ablösen des Partikels hervor, sondern führen, im Falle der Nichtablösung des Partikels, zu einem zusätzlichen Anpressen des Partikels auf der Oberfläche. Diese abwechselnd wirkenden Anpress- und Ablösungskräfte treten auch bei der dynamischen Belastung von kohäsiven Pulvern durch eingeleitete mechanische Vibrationen in der verfahrenstechnischen Praxis auf [36].

Die Prall-Ablösemethode (d) nutzt die Beschleunigung einer Platte durch ein Geschoss- [9] oder einen Hammerschlag [51]. Bei Erreichen eines bestimmten Impulses, d.h. einer bestimmten Geschwindigkeit, beginnen sich die anhaftenden Partikel abzulösen. Somit kann die Haftkraft als Funktion der Stoßenergie betrachtet werden [44].

Vibrations- und hydrodynamische Ablösemethode wurden kürzlich vereint. Die Partikelablösung kann ununterbrochen aufgezeichnet und mit der wirkenden Beschleunigung, der Partikelmasse sowie Fließbedingungen korreliert werden [19, 21].

Eine weitere Methode zur Messung von Haftkräften zwischen Partikeln bzw. zwischen Partikeln und Oberflächen ist die Rasterkraftmikroskopie (engl. Atomic Force Microscopy, AFM) [5], deshalb soll an dieser Stelle eine kurze Erläuterung dieses Messprinzips folgen.

Als Primärergebnis erhält man eine graphische Darstellung der Cantileverablenkung  $\Delta a_c$  über der Position der Materialprobe  $\Delta a_p$  (Abbildung 2-5 unten). Ein Messzyklus beginnt bei großem Abstand zwischen Materialprobe und Cantileverspitze. Hier wirken keine Kräfte zwischen Spitze und Materialprobe, der Cantilever wird nicht gebogen. Bei geringerem Abstand wirkt zwischen der Spitze und der Materialprobe eine Abstoßungskraft, d.h. bei Annäherung der Materialprobe an die Spitze wird der Cantilever nach oben gebogen. An einem bestimmten Punkt springt die Spitze auf die Materialprobe. Das passiert, wenn der Gradient der Anziehungskraft größer ist als die Federkonstante plus des Gradienten der Abstoßungskraft. Wird die Materialprobe anschließend weiter bewegt, wird der Cantilever entsprechend auch weiter gebogen. Die vertikale Linie repräsentiert diese Kontaktregion inkl. Kontaktbelastung. Nach Erreichen des Punktes U beginnt die Entlastung des Partikelkontaktes. Bei Punkt A erfolgt die Ablösung des Kontaktes und der Cantilever nimmt die Ausgangsposition wieder ein [5].



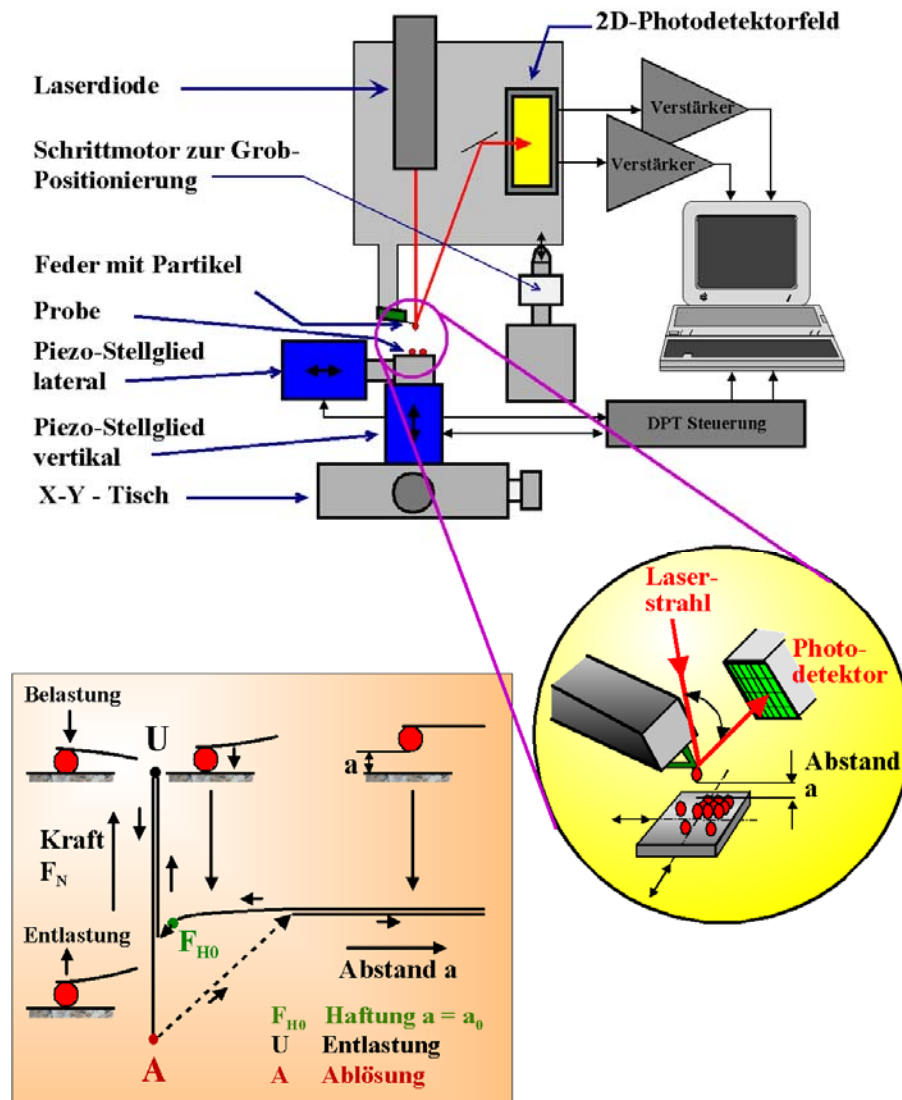


Abbildung 2-5: Messung der Haftkraft-Kontaktdeformations-Funktion mittels Particle Interaction Apparatus (PIA) nach Butt et al. [5].

Die Rasterkraftmikroskopie ist eine Methode, Haftkräfte zwischen Partikeln bzw. zwischen einem Partikel und einer Oberfläche direkt zu messen. Das zu untersuchende Partikel wird an die Spitze eines Cantilevers geklebt, Abbildung 2-5, Kreisausschnitt. Die Materialprobe wird mit Hilfe eines piezoelektrischen Elements gegen den fixierten Cantilever gefahren. Die dadurch hervorgerufene Ablenkung des Cantilevers  $\Delta a_C$  wird normal zur Oberfläche gegen die Position des Piezoelements  $\Delta a_p$  aufgenommen. Um eine Kraft-Weg-Kurve zu erhalten, müssen  $\Delta a_C$  und  $\Delta a_p$  in eine Normalkraft bzw. einen Weg umgewandelt werden. Die Normalkraft  $F_N = c_c \cdot \Delta a_C$  wird erhalten durch Multiplikation der Cantileverablenkung mit der Federkonstante des Cantilevers und der Abstand zwischen Spitze und Materialprobe  $D = \Delta a_C + \Delta a_p$  wird berechnet durch Addition der Ablenkung  $\Delta a_C$  und der Position des Piezoelements  $\Delta a_p$ .

Die Ablenkung des Cantilevers wird mit Hilfe eines Laserstrahls gemessen, welcher auf die Spitze fokussiert ist. Die Position des durch den Cantilever abgelenkten Laserstrahls wird mit einem Photodetektor aufgenommen. Die Oberseite des Cantilevers ist mit einer dünnen Goldschicht belegt, um die Reflexion zu verbessern. Bei Belastung der Materialprobe biegt sich der Cantilever und der reflektierte Laserstrahl bewegt sich um einen bestimmten Winkel [5]. Die Auflösung dieser Messmethode ist in etwa  $10^{-13} \cdot \Delta w / \sqrt{\Delta t}$  (mit  $\Delta w$  Pixelabstand im Photosensor,  $\Delta t$  Messzeit für einen Punkt auf der Kraft-Kurve). Bei einer typischen Messzeit von  $\Delta t = 0,1$  ns beträgt die Auflösung 0,01 nm. In der Praxis aber ist die Empfindlichkeit durch Wärmeschwingungen des Cantilevers, die sich berechnen mit  $\sqrt{4 \cdot k_B T / (3 \cdot c_c)}$ , begrenzt. Mit üblichen Federkonstanten zwischen 0,01 und 1 N/m ist die Amplitude des Wärmerauschens bei Raumtemperatur etwa 0,07 bis 0,7 nm [5].

Die präzisen Bewegungen des Cantilevers in alle drei Raumrichtungen werden durch Piezokristalle erreicht. Piezoelektrische Keramiken sind dadurch charakterisiert, dass sie sich in Gegenwart eines elektrischen Spannungsgradienten ausdehnen oder zusammenziehen können bzw. einen solchen Gradienten erzeugen, wenn auf sie Druck oder Zugspannung ausgeübt wird.

Die meisten Rasterelektronenmikroskope enthalten zylinderförmige Piezoelemente, da diese eine einfache Konstruktions- sowie Bedienungsweise, eine hohe Abtaststabilität sowie einen großen maximalen Abtastbereich vereinen. Mit dem Rasterelektronenmikroskop kann die horizontale und vertikale Auslenkung des Cantilevers bis in den Pikometer-Bereich hinein detektiert werden. Erreicht wird das durch die Verwendung einer optischen Vorrichtung, die einfach zu handhaben ist. Ein auf die Spitze des Cantilevers fokussierter Laserstrahl wird durch die Verbiegung des Cantilevers abgelenkt. Gemessen wird die Abweichung von der Totalreflexion des Lasers mit Hilfe eines wegeempfindlichen Fotodetektors, bestehend aus meist mehreren Photodioden. Das gleiche Messprinzip wird bei der Untersuchung von Haftkräften im Partikel-Partikel- oder Partikel-Wand-Kontakt verwendet. Ebenso können Reibungskräfte als Funktion der Normalbelastungen mit einem Rasterelektronenmikroskop gemessen werden, bspw. [6, 11, 29, 74].

Weth et al. [100] beschäftigten sich mit der Messung von Haftkräften zwischen Partikeln mittels Rasterelektronenmikroskopie am Beispiel von zwei  $\text{SiO}_2$ -Pulvern (Aerogel-Partikel mit  $d_{50} = 110 \mu\text{m}$  und gefälltes  $\text{SiO}_2$  mit  $d_{50} = 113 \mu\text{m}$ ) unter verschiedenen atmosphärischen Bedingungen (50% relative Luftfeuchte (RLF) und Vakuum (100Pa)). Die Ergebnisse sind in Tabelle 2-2 zusammengefasst. Dabei wurden Kräfte im nN-Bereich gemessen, die hauptsächlich von der Kontaktgeometrie und somit von der Oberflächenstruktur der Partikel abhängen. Aerogel-Partikel mit zerklüfteten Oberflächen (Rauigkeiten in  $\mu\text{m}$ -Bereich) rufen kleinere Haftkräfte hervor als gefällte  $\text{SiO}_2$ -Partikel, die eine homogenere Oberfläche (Rauigkeiten im nm-Bereich) aufweisen. Zusätzlich wurde das Fließverhalten der beiden Materialien anhand des Massenstromes beim Ausfließen aus einem Modellsilo nach DIN ISO 4324 [10]

untersucht. Im Gegensatz zu den gefällten SiO<sub>2</sub>-Partikeln zeigt das Aerogel einen deutlich höheren Massenstrom unter Vakuum als in feuchter Atmosphäre. Die Massenströme der gefällten SiO<sub>2</sub>-Partikel liegen in etwa auf dem gleichen Niveau.

Tabelle 2-2: Kontakthafkraft und Massenstrom der untersuchten Pulver [100]

	Aerogel-Partikel SiO <sub>2</sub> (d = 110 μm)		gefällte Partikel SiO <sub>2</sub> (d = 113 μm)	
Umgebungsbedingungen	RLF 50%	p = 100 Pa	RLF 50%	p = 100 Pa
Haftkraft zw. zwei Einzelpartikeln F <sub>ges</sub> in nN	23 ± 1	18 ± 2	38 ± 4	31 ± 3
Haftkraft pro Kontaktpunkt F <sub>i</sub> in nN	9 ± 1	7 ± 1	11 ± 1	12 ± 2
Anzahl der Partikelkontakte	2,5 ± 0,2	2,6 ± 0,2	3,3 ± 0,4	2,8 ± 0,3
Massenstrom v <sub>m</sub> in g/s	0,16 ± 0,03	1,3 ± 0,3	4,6 ± 0,9	3,9 ± 0,8

In Tabelle 2-2 werden zwei Werte für die gemessene Haftkraft angegeben: F<sub>ges</sub> bedeutet hier die zwischen zwei Einzelpartikeln gemessene Haftkraft. Aufgrund von Partikelrauigkeiten erfolgt der Partikelkontakt an mehr als einem Kontaktpunkt. Das konnten die Autoren an mehreren „Sprüngen“ des Cantilevers ablesen. Somit ergibt sich die Kraft F<sub>ges</sub> aus der Summe der Einzelkräfte F<sub>i</sub>. [100].

Jones et al. [28] nutzten die Rasterelektronenmikroskopie, um Haftkräfte und Reibung zwischen Einzelpartikeln kohäsiver Pulver zu messen. Die Autoren untersuchten verschiedene Schüttgüter, wie Tonerde (d = 6 μm und 60 μm), Kalkstein (d = 4 μm), verschiedene Chargen Titandioxid (d = 0,2 μm), Zeolith (d = 2 μm) und Glaskugeln (d = 6 μm und 35 μm) und erforschten den Partikel-Partikel- als auch den Partikel-(Stahl)Wand-Kontakt. Partikel-Partikel-Kontakte zeigten eine stark lastabhängige Reibung, große Rauigkeiten (außer Glaskugeln) und vergleichbare, geringe Adhäsionskräfte. Die Werte der Haftkräfte, entnommen der gemessenen Kraft-Weg-Kurve, der Reibung und der Rauigkeiten sind in Tabelle 2-3 zusammengefasst. Die Werte der Haftkräfte wurden ohne Fehlerintervall angegeben.

Pollock et al. [53] untersuchten den Einfluss der relativen Luftfeuchte auf die Partikelhaftkräfte von Glaskugeln (d = 6 μm und 35 μm), Tonerde (d = 6 μm und 60 μm), einem Silizium-Aerogel (d = 50 nm), Kalkstein (d = 4 μm), Titandioxid (d = 0,2 μm) und Zeolith (d = 2 μm).

Die mit einem sehr feinen Cantilever gemessenen Haftkräfte sind für alle untersuchten Pulver vergleichbar auf einem Niveau (Belastung rd. 20 nN). Bei Erhöhung der Belastung des Kontaktes (etwa 200 nN) erhöht sich auch die mit einem steiferen Cantilever gemessene Haftkraft zwischen den Partikeln. Die meisten Pulver (nicht Titandioxid) zeigen größere Haftkräfte an einer Stahlwand als zwischen zwei Partikeln. Eine starke Abhängigkeit von der Luftfeuchte konnte nur bei dem Zeolith beobachtet werden. In einer früheren Veröffentlichung [30] wurde hingegen eine deutliche Abhängigkeit für Glaskugeln und Silizium gezeigt.

Tabelle 2-3: Haftkräfte zwischen Einzelpartikeln, Reibung und Rauigkeiten [28]

Partikel	Haftkraft in nN		Reibungskoeffizient $\mu$		Rauigkeit in nm
	Partikel-Partikel	Partikel-Wand	Partikel-Partikel	Partikel-Wand	
Glaskugeln:					
unbeschichtet (d = 35 $\mu\text{m}$ )	9	10	$0,50 \pm 0,1$	klein	12
unbeschichtet (d = 6 $\mu\text{m}$ )	5	8	$0,39 \pm 0,1$	$0,18 \pm 0,07$	-
beschichtet (d = 35 $\mu\text{m}$ )	6	22	$0,38 \pm 0,1$	klein	19
beschichtet (d = 6 $\mu\text{m}$ )	8	5	$0,60 \pm 0,1$	$0,22 \pm 0,1$	-
Tonerde (d = 6 $\mu\text{m}$ )	6	22	$0,07 \pm 0,02$	$\approx 0,03$	189
Tonerde (d = 60 $\mu\text{m}$ )	9	-	-	-	-
Kalkstein (d = 4 $\mu\text{m}$ )	16	40	$0,67 \pm 0,15$	unsicher	102
Titandioxid (d = 0,2 $\mu\text{m}$ ):					
CE7359/1	8	10	$1,5 \pm 0,3$	$0,38 \pm 0,05$	131
CE7359/2	8	10	$0,67 \pm 0,08$	$0,44 \pm 0,1$	-
CE7359/3	11	13	$0,52 \pm 0,05$	$\approx 0,2$	147
CE7359/4	5	8	$0,063 \pm 0,01$	$0,039 \pm 0,01$	-
Zeolith 4A (d = 2 $\mu\text{m}$ )	10	40	$0,69 \pm 0,1$	unsicher	148

## 2.2 Partikelkontaktverhalten

### 2.2.1 Elastisch-Plastische Kontaktdeformation unter Normalbelastung

In diesem Abschnitt soll der Kontakt zweier monodisperser und isotroper Kugeln betrachtet werden. Diese bilden zwei Partikeln als typischen Bestandteil eine Schüttung oder Partikelpackung unter statischer Auflast ab. Die hervorgerufenen Kontaktflächen sind, verglichen mit der Querschnittsfläche der Kugeln, sehr klein. Aus diesem Grund sind ausschließlich die Kontaktkräfte und deren unmittelbares Antwortverhalten auf äußere Belastungen, d.h. die Mittelpunktsannäherung beider Kugeln  $h_k$ , Gegenstand dieses Abschnittes. Meistens sind Verdichtungen und Druckkräfte zu betrachten, die – im Gegensatz zur Technischen Mechanik – in der Schüttgutmechanik positiv definiert werden. Dehnungen und Zugkräfte sind negativ, Abbildung 2-6.

Anfangs müssen sich die beiden zu betrachtenden Kugeln bis zu einem unmittelbaren Kontakt mit einem Mindestabstand  $a_0$  annähern, Abbildung 2-6 a). Dabei wird eine van-der-Waals-Kraft zwischen den Kugeln aufgebaut. Mit Einführung einer mittleren Rauigkeitshöhe  $h_{r1,2} = (1/h_{r1} + 1/h_{r2})^{-1}$  als charakteristische Größe der unmittelbar wirksamen Geometrie eines einzelnen Rauigkeitskontaktes lässt sich für die Haftkraft  $F_{H0}$  schreiben [84]:

$$F_{H0} = \frac{C_{H,sls} \cdot h_{r1,2}}{6a_0^2} \cdot \left[ 1 + \frac{r_{1,2}/h_{r1,2}}{(1 + 2 \cdot h_{r1,2}/a_0)^2} \right] \approx \frac{C_{H,sls} \cdot h_{r1,2}}{6a_0^2} \quad (2-2)$$

In der Gleichung sind  $C_{H,sls}$  die Hamaker-Konstante und  $a_0$  der Gleichgewichtsabstand zwischen den beiden Partikeln. Die Haftkraft wird folglich von der Rauigkeitsabmessung beeinflusst, siehe Abbildung 2-2 b).

Dieses ursprünglich von Rumpf [61] und Schubert [64] entwickelte Modell gilt jedoch nur für ideal steife Kontakte ohne jede Kontaktdeformation, was in der Praxis der Handhabung von kohäsiven Schüttgütern wohl äußerst selten vorkommt.

Im Folgenden wird jedoch der Einfachheit halber nur die Wechselwirkung zwischen zwei glatten Kugeln angenommen. Durch die Haftkraft selbst und/oder durch eine zusätzliche statische Auflast  $F_N$  kommt es am unmittelbaren Partikelkontakt zu einer elastischen Kontaktabplattung  $h_K$ , die sich nach Hertz vergleichsweise einfach mathematisch beschreiben lässt [87]:

$$F_N = \frac{2}{3} \cdot E^* \cdot \sqrt{r_{1,2} \cdot h_K^3} - F_{H0} \quad (2-3)$$

Diese Gleichung ist in Abbildung 2-6 als gestrichelte Linie abgebildet. Aufgrund des parabolischen Verlaufes von  $F_N(h_K)$  verhält sich der Partikelkontakt mit zunehmender Abplattung  $h_K$  bzw. zunehmendem Radius der Kontaktfläche  $r_K$  steifer:

$$k_N = \frac{dF_N}{dh_K} = E^* \cdot \sqrt{r_{1,2} \cdot h_K} = E^* \cdot r_K \tag{2-4}$$

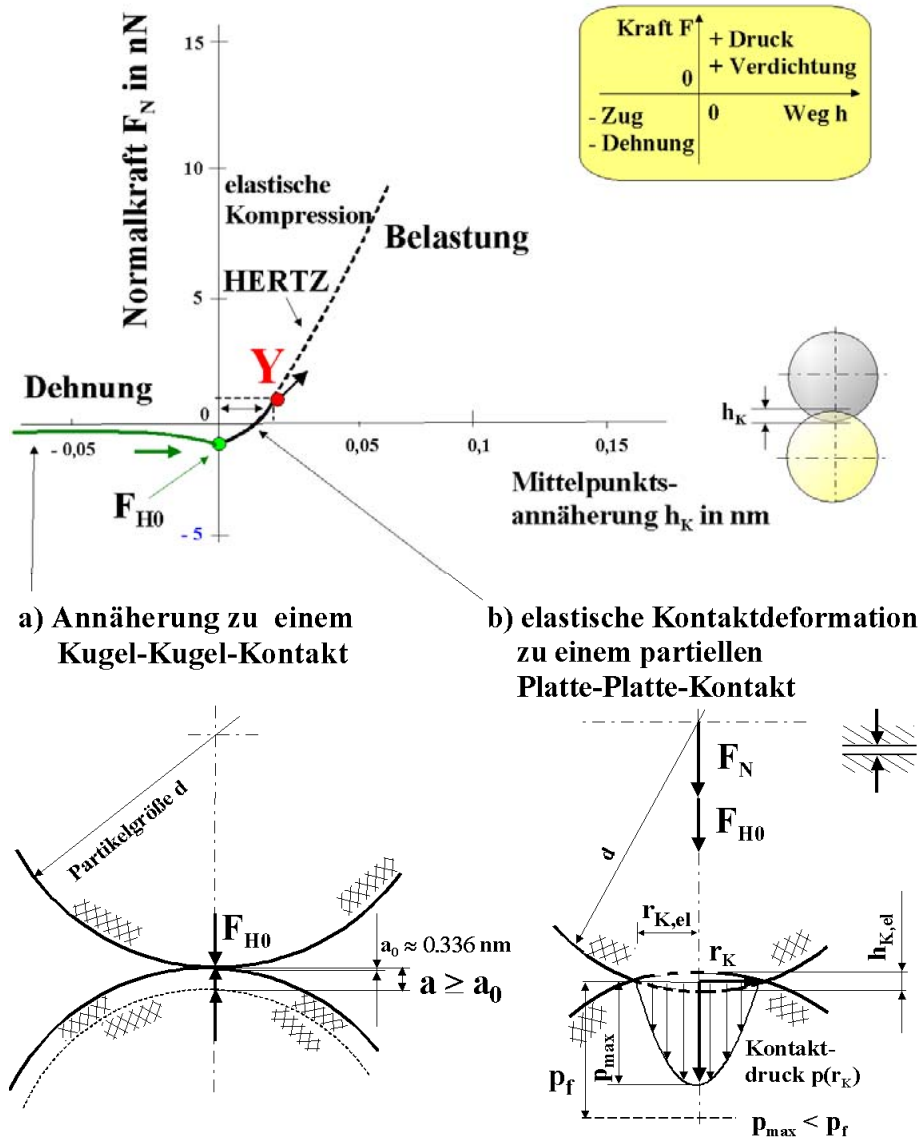


Abbildung 2-6: Charakteristische Partikelkontaktdeformation – Annäherung und elastische Kontaktdeformation ( $\text{TiO}_2$ ,  $d_{50} = 610 \text{ nm}$ , spez. Oberfläche  $A_{S,m} = 12 \text{ m}^2/\text{g}$ , Oberflächenfeuchte  $X_1 = 0,004$ , Temperatur  $\Theta = 20^\circ\text{C}$ ) [84]

Die Kontaktsteifigkeit  $k_N$  erhöht sich ebenso mit der Zunahme des mittleren Kugelradius'  $r_{1,2}$ :

$$r_{1,2} = \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)^{-1} \quad (2-5)$$

$E^*$  ist der mittlere Elastizitätsmodul der beiden Kontaktpartner 1 und 2:

$$E^* = 2 \cdot \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)^{-1} \quad (2-6)$$

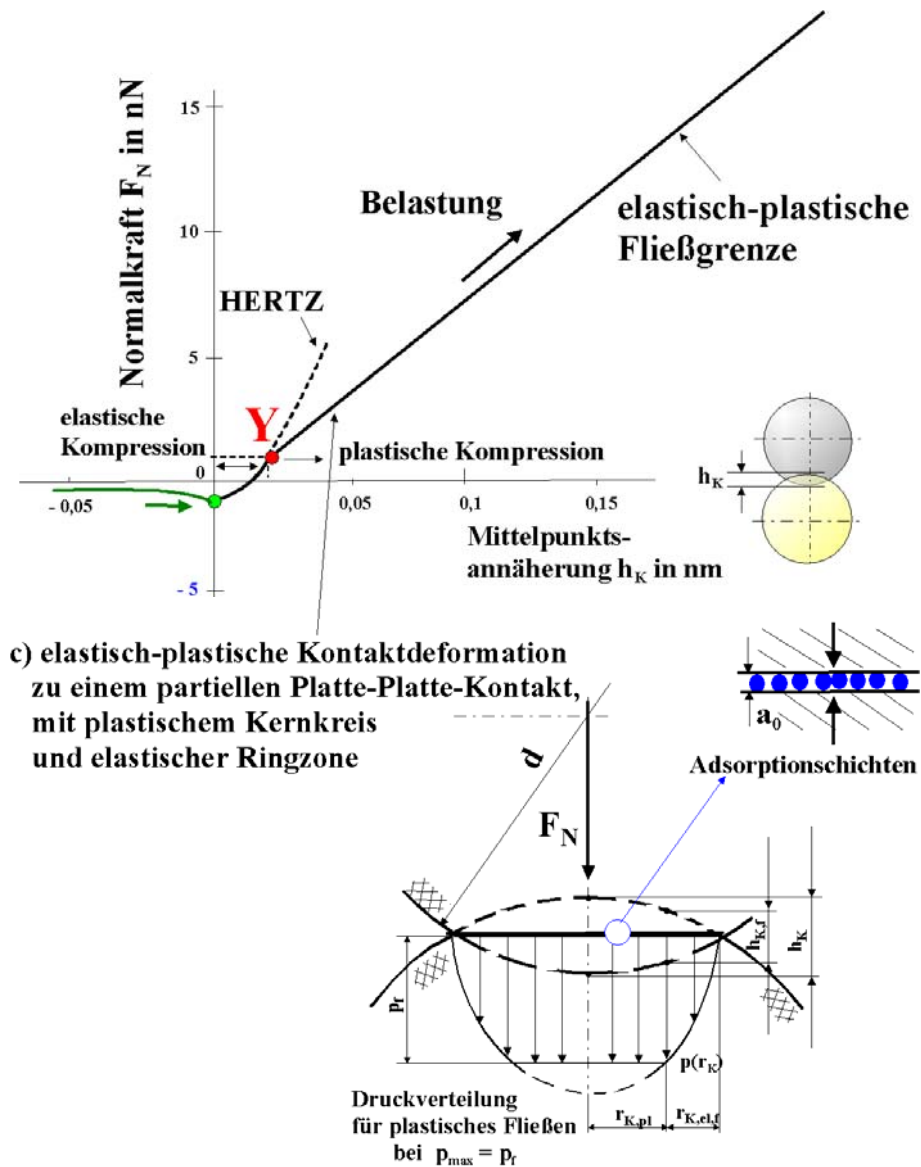


Abbildung 2-7: Charakteristische Partikelkontaktdeformation – elastisch-plastische Kompression (Titandioxid) [84]

Diese Mittelung führt dazu, dass kleine Krümmungsradien  $r$  und kleine Materialsteifigkeiten  $E$  besonders hoch bewertet werden. Das bedeutet, dass sich das steife Partikel in das

nachgiebigere und die kleine Kugel in die große bzw. in eine glatte Platte gleicher Steifigkeit (hier  $r_2 \rightarrow \infty$ ) hinein drückt.

Mit zunehmender Normalkraft wird der Punkt Y, Abbildung 2-7, erreicht. Bei weiterer Erhöhung von  $F_N$  beginnt hier das plastische Fließen im Zentrum des Kontaktes, d.h. der herrschende Maximaldruck entspricht dem erforderlichen Fließdruck (Mikrofließspannung)  $p_f$ . Die entsprechende Mittelpunktsannäherung  $h_{K,f}$  lässt sich ausdrücken mit [84]:

$$h_{K,f} = r_{1,2} \cdot \left( \frac{\pi \cdot p_f}{E^*} \right)^2 \quad (2-7)$$

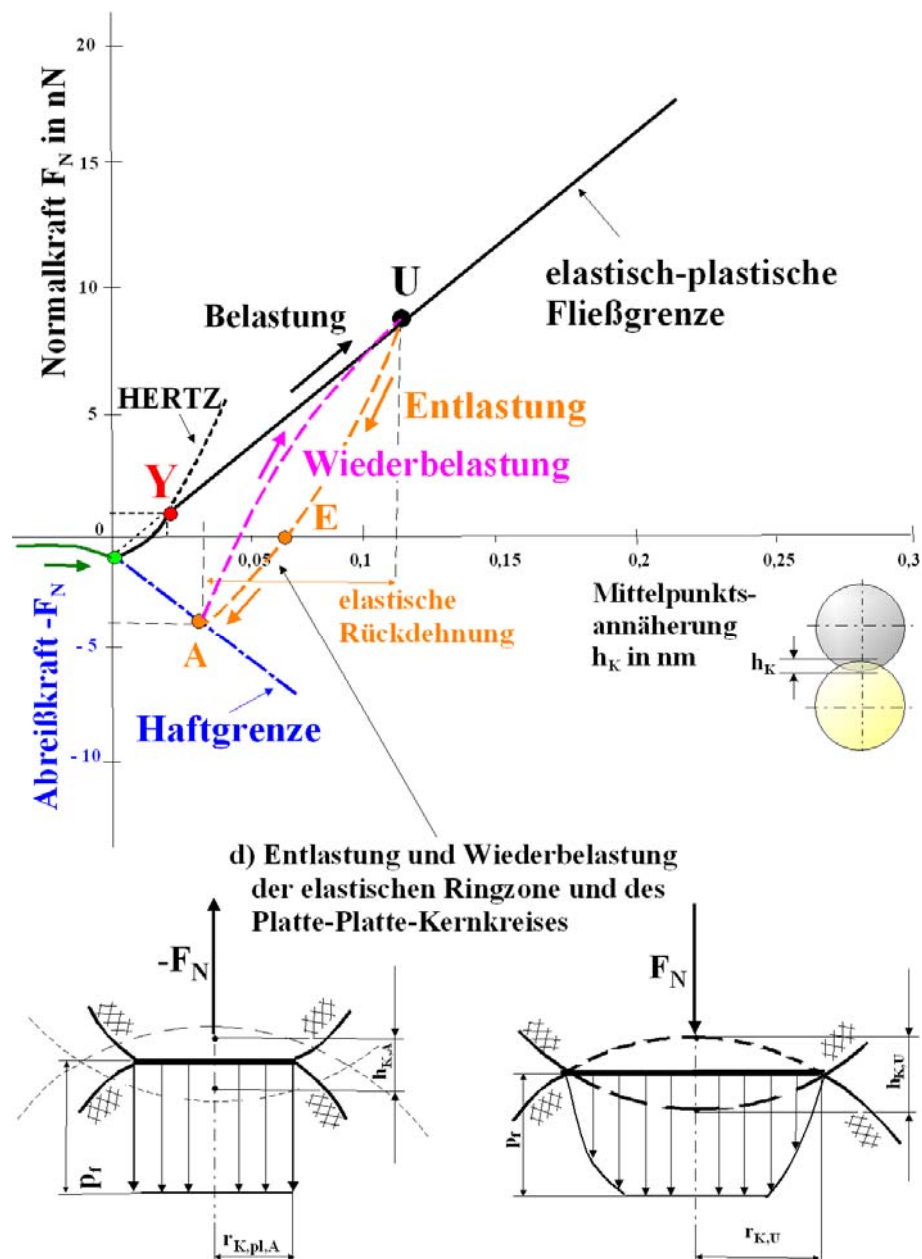


Abbildung 2-8: Charakteristische Kontaktdeformation – elastische Entlastung und Wiederbelastung mit Dissipation (Titandioxid) [84]



Gegenüber den gemittelten Materialsteifigkeiten wird die Mikrofließspannung ausschließlich durch das weichere der beiden Materialien bestimmt [38, 39], das härtere wird bleibend in das weichere Material hinein gedrückt. Bei Schüttungen aus einem bzw. vergleichbarem Partikelmaterial, welches über nur geringe Partikelgrößen- und Oberflächenrauigkeitsverteilungen verfügt, kommt es jedoch bei beiden Kontaktpartnern zu Kontaktabplattungen. Dies wird als typisch für das Gesamtverhalten einer fließenden Packung angesehen.

Bei Voraussetzung von ideal plastischem Verhalten in der Kontaktzone kann die innere Druckspannung nicht weiter gesteigert werden [87]. Als Antwort auf eine zunehmende äußere Druckkraft  $F_N$  kommt also nur eine zunehmende Abplattungshöhe  $h_K$  in Betracht, die sich mit einer charakteristischen Geraden Y-U in Abbildung 2-8 beschreiben lässt [82, 84]. Diese verhält sich im mikroskopischen Bereich analog einer Fließbedingung (Grenzspannungsfunktion) der Kontinuumsmechanik [17] und ist als elastisch-plastische Fließgrenze bezeichnet. Diese Linie kann nicht überschritten werden, da das Fließen schon vorher eingesetzt hatte.

Die elastisch-plastische Kontaktsteifigkeit wird durch den Anstieg dieser Geraden charakterisiert. Ein geringer Anstieg steht für plastisch weiches bzw. nachgiebiges Verhalten, ein steiler Anstieg hingegen bedeutet steifes Kontaktverhalten. Diese plastische Kontaktsteifigkeit bzw. -härte hängt direkt mit dem mittleren Kugelradius  $r_{1,2}$  (exakter ausgedrückt mit dem Krümmungsradius der ursprünglich unverformten Partikeloberflächen) zusammen:

$$k_{N,el-pl} = \frac{dF_N}{dh_K} = \pi \cdot r_{1,2} \cdot p_f \cdot (\kappa_A - \kappa_p) \quad (2-8)$$

Der so genannte plastische Repulsionskoeffizient  $\kappa_p$  beschreibt das dimensionslose Verhältnis von attraktivem van-der-Waals-Druck  $p_{vdW}$  (Haftkraft bezogen auf die wirksame Kontaktfläche) zur repulsiven Mikrofließgrenze  $p_f$  (Widerstand gegen plastische Deformation):

$$\kappa_p = \frac{p_{vdW}}{p_f} = \frac{C_{H,sls}}{6 \cdot \pi \cdot a_0^3 \cdot p_f} \quad (2-9)$$

Das elastisch-plastische Kontaktflächenverhältnis  $\kappa_A$  in Gl.(2-8) steht für den plastischen Deformationsanteil  $A_{pl}$  an der gesamten Kontaktfläche  $A_K = A_{pl} + A_{el}$ :

$$\kappa_A = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{A_{pl}}{A_K} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{h_{K,f}}{h_K}} \quad (2-10)$$

Für feine bis ultrafeine Pulver ( $d < 100 \mu m$ ) hat die rein elastische Deformation ( $A_{pl} = 0$ ;  $\kappa_A = 2/3$ ) keine Relevanz und kann hier ausgeschlossen werden. Für den anderen Grenzfall der ideal plastischen Deformation ( $A_{el} = 0$ ;  $A_K = A_{pl}$ ) wird  $\kappa_A$  zu 1 [87].

Mit Gl. (2-8) lässt sich das weiche bzw. nachgiebige Kontaktverhalten von sehr kleinen Partikeln recht gut erklären. Die abnehmende Kontaktsteifigkeit bei kleiner werdender

Partikelgröße verbunden mit der hohen spezifischen Oberfläche ist die Hauptursache für die zahlreich zu beobachtenden Adhäsionseffekte. Deshalb soll die Modellvorstellung „steife Partikel mit weichen Kontakten“ eingeführt werden [87]. Steife Partikel aus dem Grund, weil mit der nur mikroskopisch kleinen Kontaktabplattung von  $h_K = 0 \dots 0,25$  nm bzw. Kontaktkreisradien von  $r_K = 0 \dots 6$  nm bei mittlerer Partikelgröße von  $d_{50} = 610$  nm keine signifikante Änderung der ursprünglichen Partikelform zu erwarten ist.

Bei sehr großen Kontaktsteifigkeiten hingegen tritt plastische Deformation erst gar nicht auf. Das Kontaktverhalten ist ausschließlich elastisch. Dieses Verhalten zeigt sich vorrangig bei größeren Partikeln mit  $d > 100$   $\mu$ m. Verdeutlichen lässt sich dies mit dem Vergleich des mechanischen Verhaltens von trockenem, frei fließendem Ostseesand mit jenem eines kohäsiven Mahlproduktes mit der gleichen chemisch-mineralogischen Zusammensetzung.

Im kreisförmigen Kontaktzentrum wird ein begrenztes plastisches Feld erzeugt, wobei der äußere Ring elastisches Verhalten zeigt. Damit wird eine höhere Mikrofließspannung  $p_f \approx 3 \cdot \sigma_F$  als bei makroskopischer Beanspruchung erwartet [47]. Der elastische Anteil verschwindet bei Entlastung des Kontaktes, entsprechend der Kurve U-E in Abbildung 2-8. Eine weitere Entlastung unterhalb des Punktes E lässt sich nur mit Zugkräften realisieren. Der direkte Partikelkontakt würde bei Erreichen des Punktes A versagen. Entlang der Wiederbelastungs-Kurve A-U, Abbildung 2-8, kann der Kontakt aber wieder belastet werden. Die so entstandene linsenförmige Fläche zwischen Entlastungs- (U-A) und Wiederbelastungs-Kurve (A-U) ist ein Maß für die während eines Belastungszyklus' dissipierte Energie [84]. Der Kontakt zeigt eine typische Hysterese und bei dynamischen Belastungs-/Entlastungszyklen (Oszillationen) als Antwort eine Dämpfung, die von der angewandten Geschwindigkeit unabhängig ist.

Die Linie der Haftgrenze, Abbildung 2-8, ist ebenfalls eine Grenzspannungsfunktion

$$F_N = -\pi \cdot r_{1,2} \cdot p_{vdW} \cdot h_K - F_{H0} \quad (2-11)$$

mit der Steifigkeit:

$$k_{N,A} = \frac{dF_{N,Z}}{dh_{K,A}} = -\pi \cdot r_{1,2} \cdot p_{vdW} \quad (2-12)$$

Ihre Neigung charakterisiert die Haftsteifigkeit im Zugkraftbereich. Eine stark geneigte Haftgrenzlinie bedeutet nachgiebiges Kontaktverhalten mit einem hohen Haftverstärkungsvermögen des Partikelkontaktes. Eine geringe Neigung charakterisiert einen steifen Kontakt mit fast konstanter Haftkraft  $F_N \approx -F_{H,0}$ .

Alle Diagramme, Abbildung 2-6 bis Abbildung 2-8, beinhalten im Koordinatenursprung die Mittelpunktsannäherung  $h_K = 0$  für die Haftkraft  $F_{H,0}$  noch den Mindestabstand  $a_0$  zwischen den beiden Kugeln. Der Mindestabstand wird durch das Kräftegleichgewicht (Index  $F = 0$ ) zwischen Attraktion und Repulsion auf Molekülebene charakterisiert und hat eine

Größenordnung von 0,3...0,4 nm [86]. Dieser Mittelpunktsabstand bedeutet aber ebenso das Minimum des gesamten Wechselwirkungspotentials, die so genannte Bindungsenergie. Für die van-der-Waals-Wechselwirkungen ist das so genannte Lennard-Jones-Potential maßgebend [22].

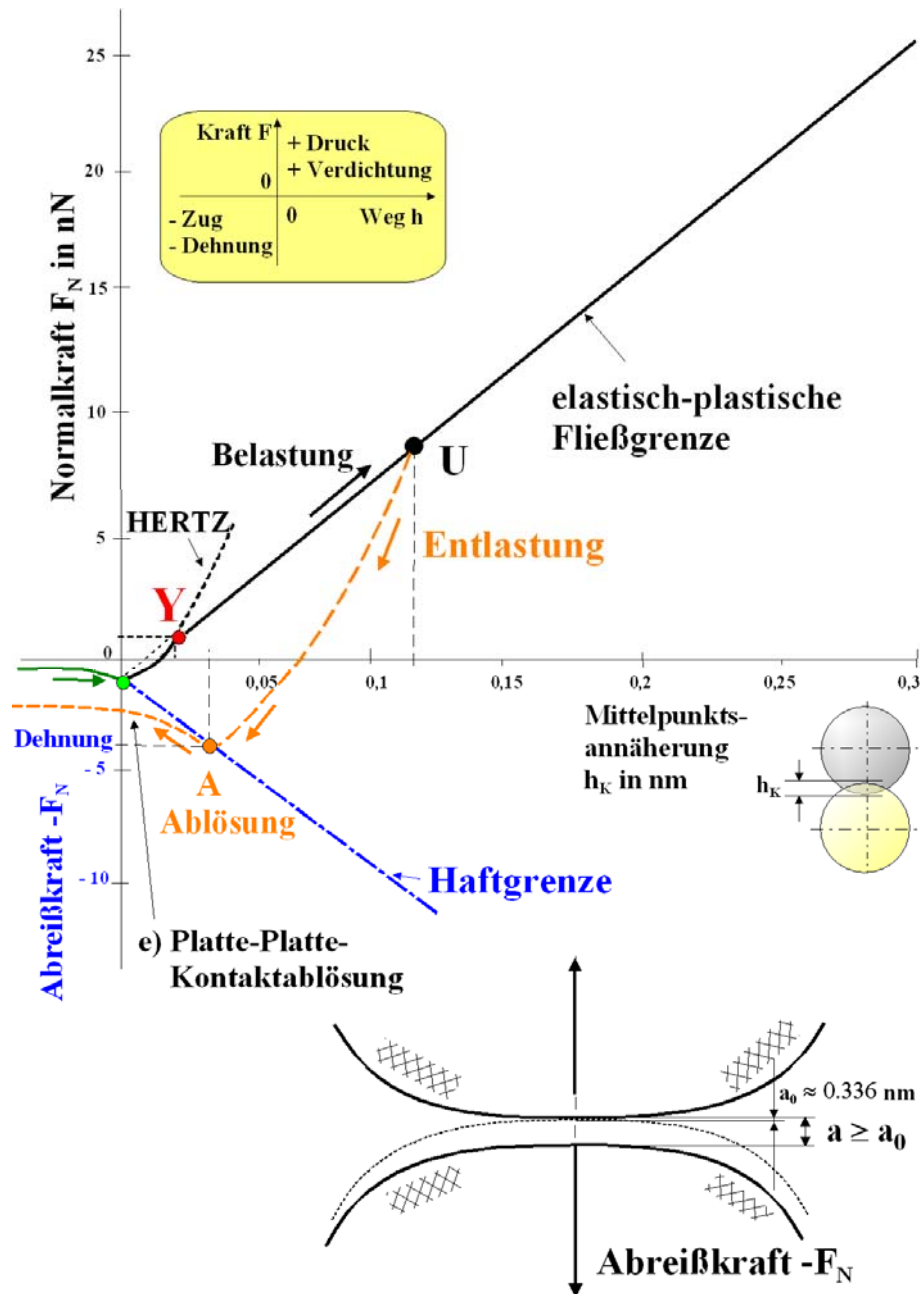


Abbildung 2-9: Charakteristische Kontaktdeformation – Kontaktablösung (Titandioxid) [84]

Daher wird bei der Modellbildung vereinfachend vorausgesetzt, dass bei den Belastungs-/Entlastungs-Mikroprozessen dieser molekulare Gleichgewichtsabstand unverändert bleibt.

Gerade dieser Kontaktabstand wird sich bei der Kontaktablösung vergrößern, d. h. in Gl. (2-9) ist demnach der Abstand des Platte-Platte-Kontaktes durch  $a = a_F + h_{K,A} - h_K$  zu ersetzen:

$$F_N(h_K) = -\frac{F_{H0} \cdot a_0^2}{(a_0 + h_{K,A} - h_K)^2} - \frac{\pi \cdot r_{1,2} \cdot p_{vdW} \cdot h_{K,A} \cdot a_0^3}{(a_0 + h_{K,A} - h_K)^3} \quad (2-13)$$

Dadurch wird in Richtung negativer Mittelpunktsannäherung  $h_K$  ein hyperbolisches Abklingen der Wirksamkeit der van-der-Waals-Haftung über die Entfernung einiger Nanometer Kontaktabstand hinweg erreicht, Abbildung 2-9. Vergleichbares gilt nach Gl. (2-2) mit  $a = a_F + |h_K|$  für die Haftkraft ohne Kontaktdeformation  $F_{H0}$ . Der Punkt der Haftkraft  $F_{H0}$  bei  $h_K = 0$  ist sozusagen der einzige des gesamten Diagramms, der keine Deformation und damit Beanspruchungsvorgeschichte kennt [87].

Mittels einer Energiebilanz der Kontaktablösung lässt sich der Zusammenhang von Aufprallgeschwindigkeit, Kontaktdeformation, Partikelhaftung und Kontaktablösung ermitteln [86]. Folglich kann ebenso die Haftkraftvergrößerung mit steigender Vorverfestigungslast mittels dynamischer Beanspruchungsvorgeschichte beschrieben werden.

So werden bspw. Haft- und Ablösewahrscheinlichkeiten von feinsten Staubteilchen auf Faserfiltern beeinflusst [50]. Derartige Staubpartikel sind das Resultat dynamischer Beanspruchungsbedingungen eines Schüttgutes bei Transport, Lagerung und Umschlag durch Lagerdruck, Aufprall und Zerkleinerungsvorgängen durch Schlag, Abrieb, Scherung usw. Ebenfalls beeinflusst werden solche Emissionen von Partikelfestigkeits- und Abriebverteilungen, Partikelsinkgeschwindigkeitsverteilungen, Luftgeschwindigkeiten, turbulenter Diffusion und Anhaftungsneigung potentieller Staubanteile an das Grobgut. Das Staubproblem lässt sich durch zusätzliche Windsichtung lösen.

## 2.2.2 Viskoelastische-viskoplastische Kontaktdeformation

Das Modell zur Beschreibung des elastisch-plastischen Kontaktverhaltens kann durch Implementierung einer Zeitabhängigkeit beim elastischen und auch beim plastischen Verhalten erweitert werden.

Damit ist es möglich, eine reversible Kontakt-Relaxation [39, 98] (das bedeutet so viel wie Entspannung bei bleibender Deformation) und eine so genannte Zeitverfestigung durch irreversibles viskoses Fließen (d.h. Kriechen bzw. zunehmende Deformation bei konstanter Spannung) zu beschreiben. Das irreversible viskose Fließen steht für eine zunehmende Nachgiebigkeit des Kontaktes durch die Zähigkeit der flüssigkeitsähnlichen Adsorptionsschichten auf der Partikeloberfläche, beschrieben hier durch die Kontaktviskosität  $\eta_K$ , siehe Tabelle 2-4 im folgenden Abschnitt 2.2.3.

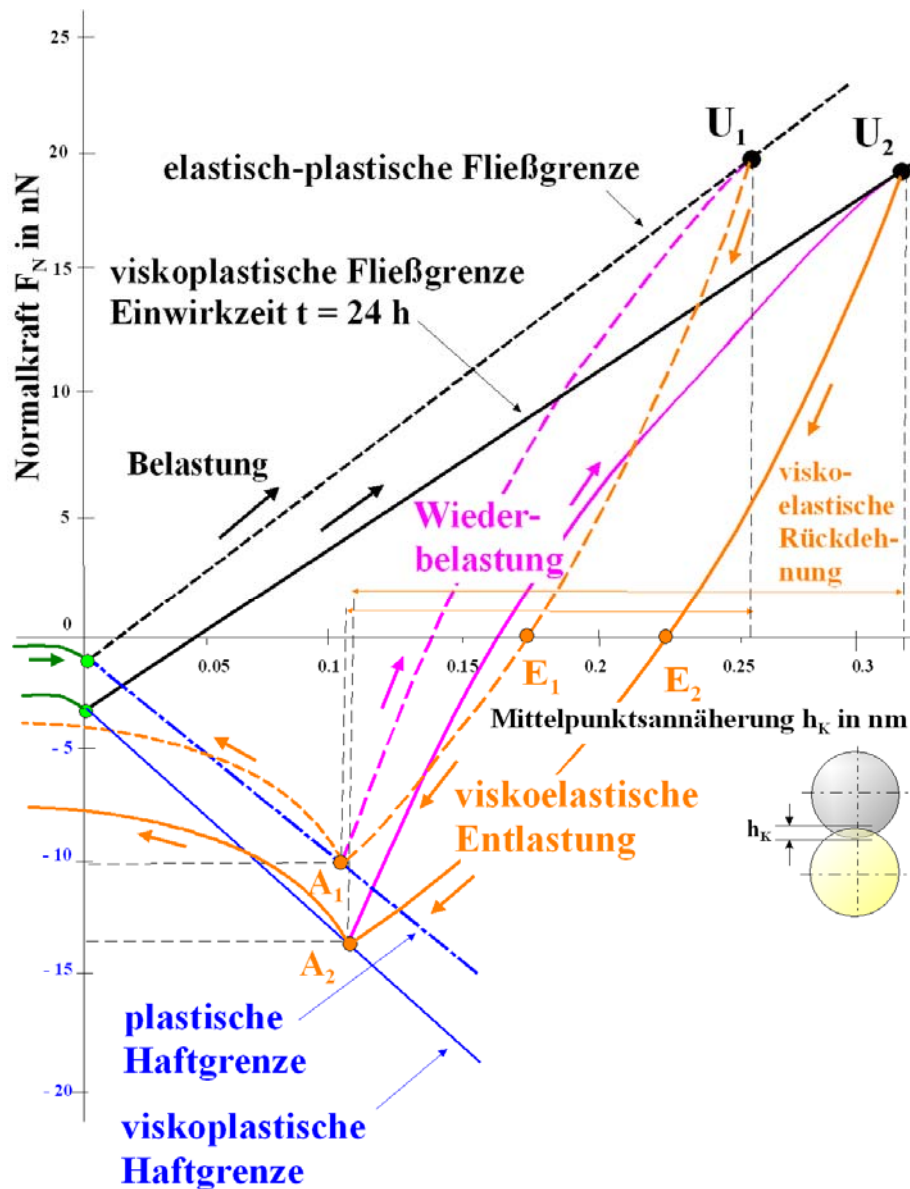


Abbildung 2-10: Viskoelastische-viskoplastische Partikelkontaktdeformation (Titandioxid) [87]

In Abbildung 2-10 werden zusammenfassend die charakteristischen viskoelastischen-viskoplastischen Partikelkontaktdeformationen für Titandioxid mit folgenden Kennwerten dargestellt:  $d_{50} = 610$  nm; Einwirkzeit  $t = 24$  h; Elastizitätsmodul  $E = 50$  kN/mm<sup>2</sup>; Relaxationsmodul  $E_{\infty} = 25$  kN/mm<sup>2</sup>; Relaxationszeit  $t_{\text{relax}} = 2,4$  min; plastische Mikrofließgrenze  $p_f = 400$  N/mm<sup>2</sup>; Kontaktviskosität  $\eta_K = 1,8 \cdot 10^{14}$  Pa·s; Querdehnungszahl  $\nu = 0,28$ ; Hamaker-Konstante  $C_{H,sls} = 12,6 \cdot 10^{-20}$  J; Mittelpunktsabstand für Dipole  $a_0 = 0,336$  nm; Kontaktflächenverhältnis  $\kappa_A = 5/6$ ; plastischer Repulsionskoeffizient  $\kappa_P = 0,44$ ; visko-elastische Repulsion  $\kappa_{p,t} = 0,09$ .

Die jeweiligen kleineren/größeren Anstiege von Fließ- bzw. Haftgrenzkurve sowie von Entlastungs-/Wiederbelastungskurven (0-U<sub>1</sub>-E<sub>1</sub>-A<sub>1</sub>-U<sub>1</sub> bzw. 0-U<sub>2</sub>-E<sub>2</sub>-A<sub>2</sub>-U<sub>2</sub>) charakterisieren eine zunehmende Nachgiebigkeit eines charakteristischen Partikelkontaktes während einer Einwirkzeit von t = 24 h bezüglich Plastizität und Elastizität. Die Hysteresefläche, d.h. die Fläche zwischen Be- und Entlastungskurve ist im zweiten Fall (Einwirkzeit von t = 24 h) deutlich größer. Das bedeutet, dass in diesem Fall die Energiedissipation ebenfalls erheblich zunimmt [84].

Dieses vergleichsweise umfangreiche Kontaktmodell schließt somit alle wesentlichen mechanischen Eigenschaften eines kohäsiven Schüttgutes im Mikromaßstab ein und stellt eine wesentliche Erweiterung der Erkenntnisse auf dem Gebiet der Partikelkontaktmechanik dar. Ausgewählte Modelle werden bei DEM-Simulationen granularer Medien [20] und auch bei AFM-Messungen methodisch genutzt [5].

### 2.2.3 Charakteristische Haftkraftfunktionen

Die Elimination der Mittelpunktsannäherung  $h_K$  der Be- und Entlastungsfunktionen [84], Abbildung 2-9, gibt einen impliziten nichtlinearen Zusammenhang von (hier positiver) Kontaktablösekraft  $F_{H,A}$  am Ablösepunkt A und einer eingepprägten Normalkraft  $F_N = F_{N,U}$ ,

$$F_{H,A,(1)} = F_{H0} + \kappa \cdot (F_N + F_{H0}) - \pi \cdot r_{1,2}^2 \cdot \kappa_p \cdot p_f \cdot \left[ \frac{3 \cdot (F_N + F_{H0})}{2 \cdot r_{1,2}^2 \cdot E^*} \cdot \left( 1 + \frac{F_{H,A,(0)} - F_{H0}}{F_N + F_{H0}} \right) \right]^{2/3} \quad (2-14)$$

die sich die Kontaktverfestigung an einem beliebig wählbaren Entlastungspunkt U „merkt“. Neben einem dimensionslosen, elastisch-plastischen Kontaktverfestigungskoeffizienten  $\kappa$

$$\kappa = \frac{\kappa_p}{\kappa_A - \kappa_p} \quad (2-15)$$

sind auch zusätzlich die Einflüsse der Haftsteifigkeit, einer mittleren Partikelgröße  $r_{1,2}$ , des mittleres Elastizitätsmoduls  $E^*$  im hinteren Term der Gleichung enthalten. Der Anstieg der Haftkraft wird mit ansteigendem mittleren Kontaktkrümmungsradius  $r_{1,2}$  vermindert, d.h. mit wachsender Kontaktsteifigkeit verringert sich der Haftkraftzuwachs. Zweckmäßig ist vorerst die Auswertung der linearisierten Haftkraftgleichung [82, 83, 84, 86], Abbildung 2-11:

$$F_H = (1 + \kappa) \cdot F_{H0} + \kappa \cdot F_N \quad (2-16)$$

Der elastisch-plastische Kontaktverfestigungskoeffizient  $\kappa$  charakterisiert die Kontaktsteifigkeit und die Zunahme der Haftkraft  $F_H$  bei Einwirkung einer Vorverfestigungskraft  $F_N$ , Abbildung 2-11, Strich-Punkt-Gerade. Ein geringer Anstieg  $\kappa$  steht für steifes

Kontaktverhalten mit gering ausgeprägtem Haftvermögen  $F_H \approx F_{H0}$ . Mit einem großen Anstieg hingegen ist ein nachgiebiger Kontakt mit großem Haftvermögen verbunden. Das ist das typische Verhalten eines kohäsiven Schüttgutes während der Verfestigung. Das linearisierte Modell zeigt mit  $\kappa \cdot F_{H0}$  die zusätzliche Haftkraftverstärkung als Antwort einer reinen Einwirkung der Haftkraft  $F_{H0}$  im unverfestigten Zustand auf. Dieses wurde immerhin bereits vor fast 50 Jahren von Krupp [38, 39] festgestellt.

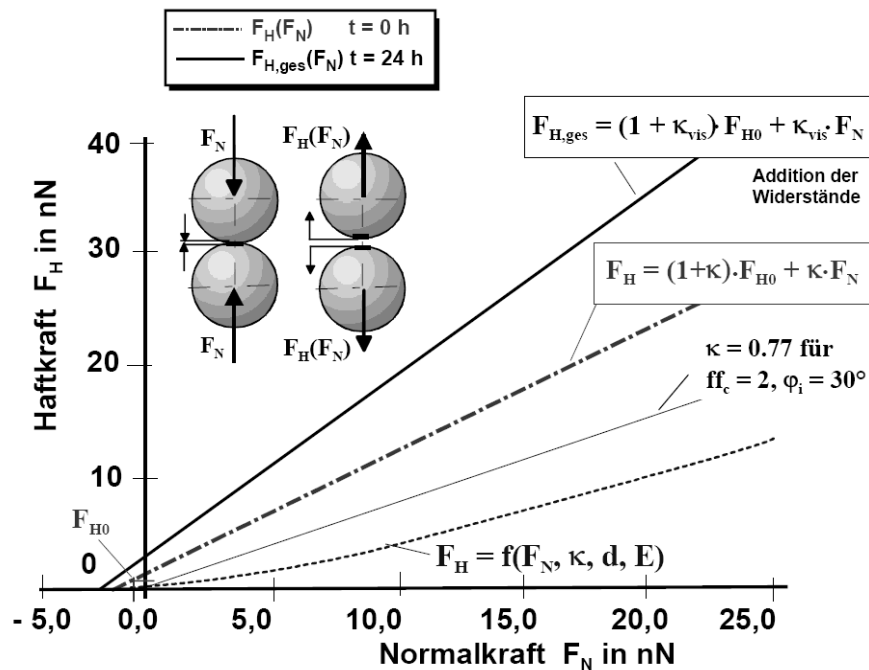


Abbildung 2-11: Partikelkontaktkräfte für Titandioxid ( $d_{50} = 610$  nm, spez. Oberfläche  $A_{S,m} = 12$  m<sup>2</sup>/g, Oberflächenfeuchte  $X_1 = 0,004$ , Temperatur  $\Theta = 20^\circ\text{C}$ ) [89]

Zunächst wurde das Zeitverfestigungsverhalten eines charakteristischen Partikelkontaktes [82, 83, 86, 84] durch eine Parallelschaltung der Haftkräfte betrachtet, wobei die Parallelschaltung eine Addition der Haftkräfte zur Folge hat. Diese Vorgehensweise orientierte sich am Sintern eines thermisch labilen Festkörperkontaktes [63]. Ferner ist die Haftkraftverstärkung durch eine Reihenschaltung rheologischer Modellkörper, d.h. Addition der Widerstände durch plastisches und viskoses Fließen, betrachtbar. Damit wird eine zeitabhängige Kontaktabplattung durch viskoplastisches, zähes Fließen der Adsorptionsschichten, welche auf der Oberfläche der Partikeln verteilt sind, eingeführt.

Die Kennwerte der Kontaktverformung sind Tabelle 2-4 entnehmbar und können mit dem elastisch-plastischen Kontaktmodell verglichen werden. Der Anstieg der gesamten Haftkraftfunktion  $F_{H,ges} = f(F_N)$  stellt einen so genannten elastisch-plastisch-viskoplastischen Kontaktkoeffizienten  $\kappa_{vis}$  dar und steht für eine zeitlich zunehmende Kontaktnachgiebigkeit,

Abbildung 2-11,  $F_{H,ges}$ -Gerade. Das nichtlineare Haftkraftmodell  $F_H(F_N, \kappa, d, E)$  entsprechend Gl. (2-14) ist ebenfalls in Abbildung 2-11 aufgetragen. Zusätzlich wurde der Anstieg der Haftkraftfunktion eines charakteristischen Partikelkontaktes eines sehr kohäsiven Schüttgutes  $\kappa = 0,77$  für eine Fließfunktion  $ff_c = 2$  eingetragen.

Tabelle 2-4: Koeffizienten der charakteristischen Haftkraftfunktionen in Abbildung 2-11 [87]

	<b>Momentanverfestigung</b>	<b>Zeitverfestigung</b>
Kontaktdeformation	plastisch	viskoplastisch
Repulsionskoeffizient	$\kappa_p = \frac{p_{vdW}}{p_f} = \frac{C_{H,sls}}{6 \cdot \pi \cdot a_{F=0}^3 \cdot p_f}$	$\kappa_{p,t} = \frac{p_{vdW} \cdot t}{\eta_K}$
Kontaktdeformation	elastisch-plastisch	elastisch-plastisch-viskoplastisch
Kontaktflächenverhältnis	$\kappa_A = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{A_{pl}}{A_K}$	$\kappa_{A,t} = \frac{2}{3} + \frac{A_{pl} + A_{vis}}{3 \cdot (A_K + A_{vis} + A_{el})}$
Kontaktverfestigungskoeffizient	$\kappa = \frac{\kappa_p}{\kappa_A - \kappa_p}$	$\kappa_{vis} = \frac{\kappa_p + \kappa_{p,t}}{\kappa_{A,t} - \kappa_p - \kappa_{p,t}}$
Abzissenschnittpunkt	$F_{N,Z} \approx -\pi \cdot a_{F=0} \cdot h_{r1,2} \cdot p_f \neq f(C_{H,sls})$	$F_{N,Z,ges} \approx -\frac{\pi \cdot a_{F=0} \cdot h_{r1,2} \cdot p_f}{1 + p_f \cdot t / \eta_K} \neq f(C_{H,sls})$

### 2.3 Ein Partikelkontakt unter Tangentialbelastung mit lastabhängiger Haftung

In diesem Abschnitt soll der wesentliche Einfluss der lastabhängigen Haftung vorgestellt und diskutiert werden [93]. Betrachtet wird hier die erste Phase der Belastung eines vorverfestigten (abgeplatteten) elastisch-plastischen Partikelkontaktes in tangentialer Richtung. Der Radius der erzeugten Kontaktfläche  $r_K$  hängt unmittelbar von der eingepprägten Normalkraft  $F_N$  der elastisch-plastischen Fließgrenze gemäß

$$F_N(h_K) = \pi \cdot r_{1,2} \cdot p_f \cdot (\kappa_A - \kappa_p) \cdot h_K - F_{H0} \quad (2-17)$$

ab:

$$r_K^2 = r_{1,2} \cdot h_K(F_N) = \frac{F_N + F_{H0}}{\pi \cdot p_f \cdot (\kappa_A - \kappa_p)} \quad (2-18)$$



Im Normalfall wird ein linear elastisches Verhalten des Kontaktes beim langsamen tangentialen Verschieben erwartet. Durch das Zusammenpressen der beiden Kontaktflächen wird jedoch ein zusätzlicher Beitrag zur Haftkraft erzeugt (Gl. (2-16)). Die Folge ist eine veränderliche Druckverteilung, hyperbolisch wird sie innerhalb eines Innenkreises angenommen. Im äußeren Ring wird jedoch die elliptische Druckverteilung nach Hertz benutzt. Dieses partielle innere Haften und Gleiten (microstick-microslip) hat einen zusätzlichen Scherwiderstand zur Folge [46]. Das wiederum führt zu einem nichtlinear elastischen Verhalten  $F_T(\delta)$  des Kugelkontaktes:

$$F_T(\delta) = F_{T,C,H} \cdot \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\delta}{\delta_{C,H}} \right)^{3/2} \right] \quad (2-19)$$

Für die Entlastung an einem beliebigen Punkt  $(\delta_U, F_{T,U})$  und Scheren in entgegengesetzter Richtung

$$F_T(\delta) = F_{T,U} - 2 \cdot F_{T,C,H} \cdot \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\delta_U - \delta}{2 \cdot \delta_{C,H}} \right)^{3/2} \right] \quad (2-20)$$

und für die Wiederbelastung in die ursprüngliche Scherrichtung, die an einem beliebigen negativen Punkt  $(-\delta_{\text{reload}}, -F_{T,\text{reload}})$  beginnt, erhält man:

$$F_T(\delta) = -F_{T,\text{reload}} + 2 \cdot F_{T,C,H} \cdot \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\delta + \delta_{\text{reload}}}{2 \cdot \delta_{C,H}} \right)^{3/2} \right] \quad (2-21)$$

Das nichtlineare elastische Verhalten wird nach oben durch eine Reibungsgrenze eingeschränkt, die makroskopisch im Sinne einer Grenzspannungsfunktion (Fließort) interpretiert werden kann. Diese Coulomb-Reibungsgrenze (Index C) der Tangentialkraft  $F_{T,C,H}(F_N)$  wird mit einem Koeffizienten der inneren Reibung ausgedrückt  $\mu_i$ :

$$F_{T,C,H}(F_N) = \mu_i \cdot [F_N + F_H(F_N)] = \mu_i \cdot (1 + \kappa) \cdot (F_{H0} + F_N) \quad (2-22)$$

Der Index H wird benutzt, um den haftenden Partikelkontakt besonders zu kennzeichnen. Der Reibungswiderstand kann nicht überschritten werden und ist jenseits von  $\delta_{C,H}$  konstant, waagerechte Linien in Abbildung 2-12. Eine höhere Beanspruchungsintensität führt hier nicht zu einer Zunahme der Gleitreibungskraft. Am Übergangspunkt  $(\delta_{C,H}, F_{T,C,H})$  verliert der Kontakt seine Steifigkeit  $dF_T/d\delta = 0$  und das voll entwickelte Kontaktgleiten setzt ein [93].

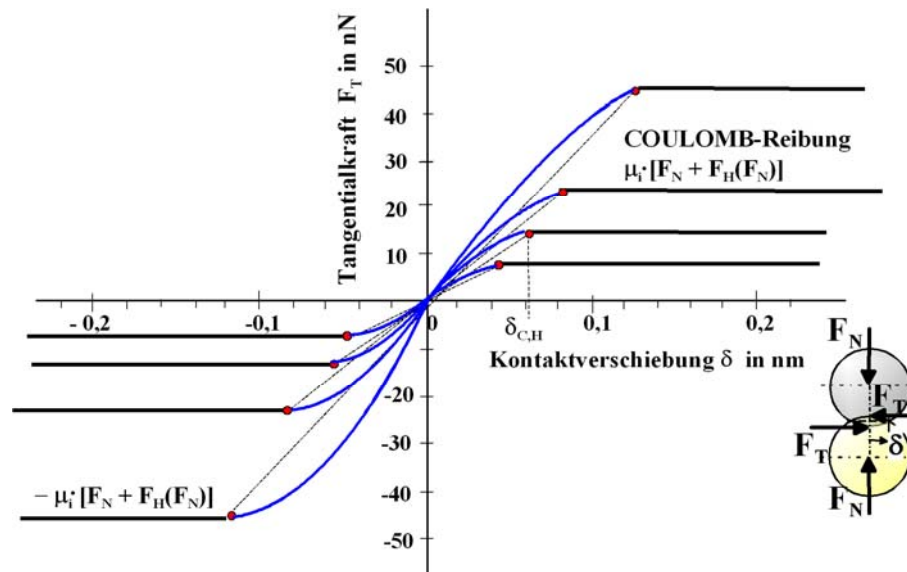


Abbildung 2-12: Charakteristisches Tangentialkraft-Verschiebungsweg-Diagramm mono-disperser glatter Kugeln mit den mechanischen Eigenschaften ultrafeiner Titandioxidpartikel [93].

Eine typische Tangentialkraft-Verschiebungsweg-Beziehung  $F_T(\delta)$  für elastisches, elastisch-plastisches und reibungsbehaftetes Verhalten unter einer jeweils konstanten quasistatischen Normallast ist in Abbildung 2-12 dargestellt. Je größer die eingepprägten Normalkräfte und die daraus resultierenden Haftkräfte sind, desto steifer reagiert der Kontakt, d.h. eine zunehmende Tangentensteifigkeit  $dF_T/d\delta$  ist am Koordinatenursprung  $\delta = 0$  zu beobachten, dünne gestrichelte Linien in Abbildung 2-12.

In Abbildung 2-12 sind nur die – infolge partieller Haftung und Mikroschlupf innerhalb der Kontaktebene – nichtlinearen elastischen Belastungskurven gezeigt. Die Hysteresekurven für Entlastung und Wiederbelastung sind nicht dargestellt worden. Infolge der Einwirkung von Normalkräften zwischen  $F_N = 6$  bis 40 nN beträgt der Radius des abgeflachten Kontaktes zwischen  $r_K = 3$  bis 9 nm. Diese Werte entsprechen den Druckniveaus der makroskopischen Fließorte 1 bis 4 [93].

Insgesamt spricht kann man in diesem Zusammenhang von einem kombinierten elastisch-plastischen und reibungsbehafteten Verhalten des Kugelkontaktes sprechen. Denn jenseits der Reibungsgrenze  $\delta > \delta_{C,H}$  wird die eingetragene mechanische Energie durch die Kontaktreibung absorbiert und in andere Energieformen umgewandelt bzw. dissipiert.

## 2.4 Bindung von Partikeln mit adsorbierten Flüssigkeitsschichten

### 2.4.1 Adsorptionsschichtbindung

In einer Partikelschüttung ist ein Zwischenraumvolumen vorhanden, das als verzweigtes, vielgestaltiges Kapillarsystem in Abhängigkeit von der Partikelgrößen- und Partikelformverteilung des Feststoffes sowie dessen Packungsstruktur vorliegt. Befindet sich eine solche Partikelschüttung im Kontakt mit umgebender Luft, so bilden sich zunächst Adsorptionsschichten von polaren Wassermolekülen und bei höheren relativen Luftfeuchten Flüssigkeitsbrücken infolge Kapillarkondensation an den Kontaktstellen der Partikeln. Eine solche Flüssigkeitsbrücke ist stabil, wenn ihr Dampfdruck – resultierend aus der Flüssigkeitsbindung mittels Kapillardruck  $p_K$  – dem Wasserdampfpartialdruck  $p_D$  der feuchten Umgebungsluft entspricht. Die Kelvin-Gleichung muss dabei erfüllt werden:

$$\frac{p_D}{p_{DS}} = \exp\left[-\frac{M_W \cdot p_K}{\rho_W \cdot RT}\right] \quad (2-23)$$

Damit können mit steigender Luftfeuchte Flüssigkeitsbrücken nur an den Kontaktstellen, an denen sich benachbarte Partikeln bzw. deren Adsorptionsschichten berühren, entstehen. Adsorptionsschichten können einen erheblichen Beitrag zu den Wechselwirkungen leisten, falls ihre Schichtdicke genügend groß ist, wobei sie sowohl verstärkend als auch vermindernd wirken können. Sie können die Kontaktgeometrie und damit den Oberflächenabstand der Partikel  $a$  beeinflussen, siehe Abbildung 2-13.

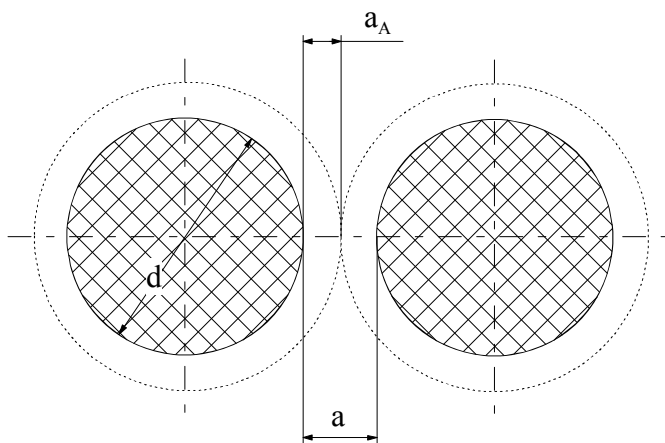


Abbildung 2-13:  
Partikelkontakt mit Adsorptionsschichten

Wenn sich die Adsorptionsschichten gegenseitig durchdringen ( $a_A \geq a/2$ ), dann wirken in ihnen die entsprechenden Kohäsionskräfte (z.B. Wasserstoffbrückenbindungen in wässrigen Adsorptionsschichten). Die Haftkraft berechnet sich dann zu:

$$F_H = \pi \cdot d \cdot \sigma_{Z,A} \cdot (a_A - a/2) \quad (2-24)$$

Die wirkende Haftkraft  $F_H$  wird im Wesentlichen von der idealen Zugfestigkeit  $\sigma_{Z,A}$  einander durchdringender adsorbierter Schichten beeinflusst, die sich unter anderem aus der maximalen Anziehungskraft der molekularen Wechselwirkungspotentiale  $F_{\max}$  abschätzen lässt.

Wenn man die Feuchte einer Partikelschüttung unabhängig von ihrer Herkunft betrachtet, lässt sich im Allgemeinen sagen, dass bei geringen Flüssigkeitssättigungsgraden  $S$  Adsorptionsschichten und Flüssigkeitsbrücken an den Kontaktstellen der Partikeln koexistieren können.

$$S = \frac{V_l}{V_H} = \frac{(1-\varepsilon) \cdot V_l}{\varepsilon \cdot V_s} = \frac{(1-\varepsilon) \cdot \rho_s}{\varepsilon \cdot \rho_l} \cdot X_l \quad (2-25)$$

mit dem Flüssigkeitsgehalt im Schüttgut  $X_l$

$$X_l = \frac{m_l}{m_s} \quad (2-26)$$

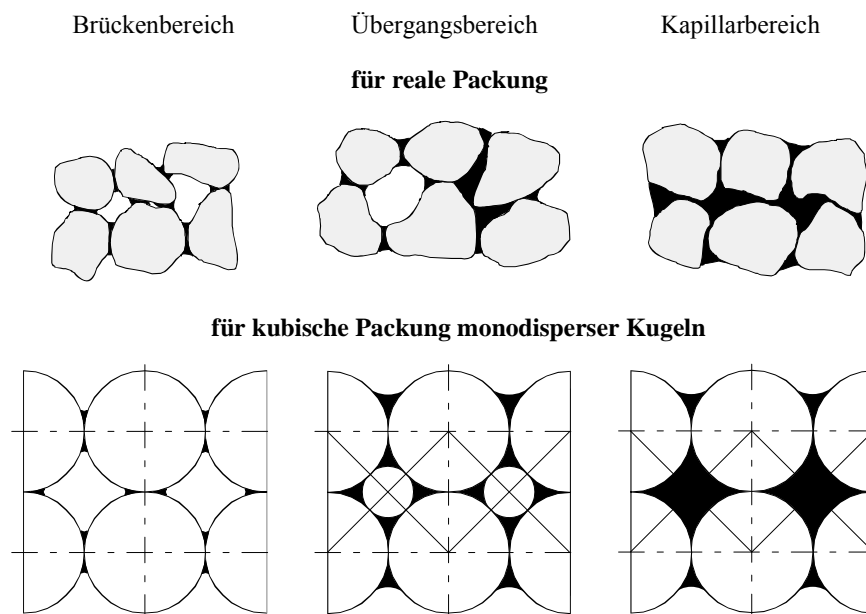


Abbildung 2-14: Flüssigkeitsbindung im Schüttgut

Flüssigkeitsbrücken binden dabei wesentlich höhere Flüssigkeitsanteile. Mit weiter steigendem  $S$  stellt sich zunächst ein Übergangsbereich ein, in dem Flüssigkeitsbrücken und gefüllte Zwischenräume nebeneinander vorliegen, bis alle Zwischenräume schließlich gefüllt sind (Kapillarbereich), siehe Abbildung 2-14. Für die Bindung dieser Flüssigkeitsanteile ist der Kapillardruck maßgebend, der von Flüssigkeitssättigungsgrad  $S$  abhängig ist.

Bei geringen Flüssigkeitsanteilen sind Flüssigkeitsbrücken zwischen benachbarten Partikeln vorhanden. Die Bindung hier beruht auf kapillarem Unterdruck in der Flüssigkeitsbrücke und auf der Randkraft  $F_R$  längs des Dreiphasenkontaktes. Wenn die Zwischenräume vollständig mit Flüssigkeit gefüllt sind, an der Oberfläche aber noch konkave Flüssigkeitsmenisken existieren, wirkt nur ein entsprechender kapillarer Unterdruck.

## 2.4.2 Flüssigkeitsbrückenbindung

In Abbildung 2-15 ist eine Flüssigkeitsbrücke zwischen zwei gleich großen Kugeln unter der vereinfachenden Annahme dargestellt, dass die Meridiankurven der Brücke einen Kreisbogen beschreiben. Die Flüssigkeitsbrücke wird somit als rotationssymmetrisch angesehen.

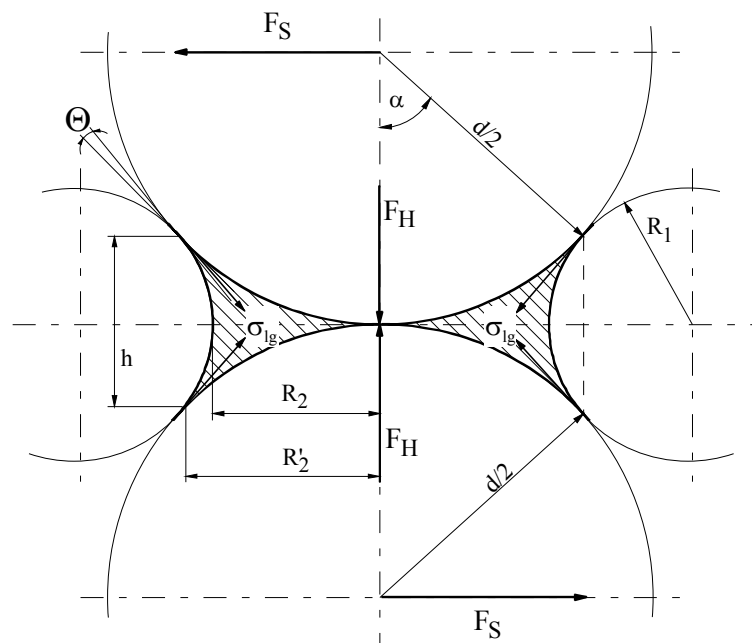


Abbildung 2-15: Flüssigkeitsbrücke im unmittelbaren Kontakt zweier gleich großer Kugeln

Für die Randkraft  $F_R$ , die die Haftkraft  $F_H$  vergrößert, gilt:

$$F_R = \sigma_{lg} \cdot \cos(90^\circ - \alpha - \Theta) \cdot \pi \cdot d \cdot \sin \alpha = \pi \cdot d \cdot \sigma_{lg} \cdot \sin(\alpha + \Theta) \cdot \sin \alpha \quad (2-27)$$

Die Oberflächenspannung der Flüssigkeit gegen Gas  $\sigma_{lg}$  ist im Wesentlichen von den van-der-Waals-Kräften in der kondensierten Flüssigkeitsoberfläche abhängig. Der Kapillardruck  $p_K$  ist die Differenz der äußeren Drücke zweier benachbarter Fluidphasen. Er wird durch die Grenzflächenspannung aufgenommen und berechnet sich mit einem mittleren Krümmungsradius:

$$p_K = \sigma_{lg} \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (2-28)$$

Die Hauptkrümmungsradien des Flüssigkeitsmeniskus  $R_1$  und  $R_2$  lassen sich wie folgt berechnen:

$$R_1 = \frac{a + d \cdot (1 - \cos \alpha)}{2 \cdot \cos(\alpha + \Theta)} \quad (2-29)$$

$$R_2 = d/2 \cdot \sin \alpha - R_1 \cdot [1 - \sin(\alpha + \Theta)] \quad (2-30)$$

Konkave Krümmungen erzeugen kapillaren Unterdruck, wohingegen konvexe Krümmungen kapillaren Überdruck hervorrufen. Bei, wie im vorliegenden Fall, positiv definiertem Unterdruck haben die Hauptkrümmungsradien unterschiedliche Vorzeichen. Es existiert solange ein Unterdruck und damit ein positiver Beitrag  $F_P$  des Kapillardrucks zur Haftkraft  $F_H$ , solange  $R_1 < R_2$  ist. Für diesen Fall gilt:

$$F_P = p_K \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot \sin^2 \alpha = \sigma_{lg} \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot \sin^2 \alpha \quad (2-31)$$

Daraus ergibt sich die gesamte Haftkraft  $F_H = F_R + F_P$  zu:

$$F_H = \pi \cdot d \cdot \sigma_{lg} \left[ \sin \alpha \cdot \sin(\alpha + \Theta) + \frac{d}{4} \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot \sin^2 \alpha \right] \quad (2-32)$$

bzw. für vollständige Benetzung ( $\Theta \approx 0$ ):

$$F_H = \pi \cdot d \cdot \sigma_{lg} \cdot \sin^2 \alpha \cdot \left[ 1 + \frac{d}{4} \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] \quad (2-33)$$

Die Hauptkrümmungsradien sind von  $\alpha$ ,  $\Theta$  und  $a/d$  abhängig (die maximale Haftkraft ergibt sich, wenn  $a/d = 0$ :  $F_H = \pi \cdot d \cdot \sigma_{lg}$ ). Allgemein lässt sich schreiben:

$$F_H = d \cdot \sigma_{lg} \cdot f \left( \alpha, \Theta, \frac{a}{d} \right) \quad (2-34)$$

Die Verformung der Flüssigkeitsbrücken unter dem Einfluss der Schwerkraft und deren Auswirkung auf die Haftkraft ist für Partikeln mit einem Durchmesser  $d < 1\text{mm}$  nicht signifikant. Schließlich lassen sich auch Brücken zwischen unregelmäßig geformten Partikeln in guter Näherung als rotationssymmetrisch auffassen.

Die Haftkräfte, die durch Flüssigkeitsbrücken hervorgerufen werden, sind im Vergleich zu anderen Wechselwirkungen die intensivsten und am unempfindlichsten gegenüber Oberflächenrauigkeiten.

Für die Bindung in feuchten Schüttgütern wird vereinfachend angenommen, dass vollständige Benetzung vorliegt und sich gleich große Kugeln berühren ( $a = 0$ ). Wenn man weiterhin als Vereinfachung auf die Krümmung der beiden Menisken verzichtet [80], ergibt sich für das Flüssigkeitsvolumen in der Brücke:

$$V_l \approx \frac{\pi}{4} \cdot 0,264 \cdot d^3 \cdot \sin^4 \alpha \quad (2-35)$$

Tomas [80] gibt eine Funktion an, mit welcher sich die einaxiale Zugfestigkeit  $\sigma_{Z,1}$  im voll ausgebildeten Brückenbereich für Sättigungsgrade  $S < 0,3$  direkt abschätzen lässt:

$$\sigma_{Z,1} = \frac{8,25 \cdot (1 - \varepsilon) \cdot (2 - \varepsilon) \cdot \sigma_{lg} \cdot \sin \varphi_i}{\varepsilon \cdot \sqrt{\varepsilon} \cdot d \cdot (1 - \sin \varphi_i)} \cdot \sqrt{\frac{\rho_s}{\rho_l} \cdot X_w} \quad (2-36)$$

Mehrere Autoren haben den Einfluss von Flüssigkeiten auf die Haftkraft zwischen den Partikeln untersucht. Dabei wurde angenommen, dass die Partikeln als gleich große Kugeln angesehen werden können.

Iveson und Litster [25] haben Versuche zur Bestimmung der Deformation von kugeligen und zylindrischen Agglomeraten aus feuchten Pulvern unter Stoßeinwirkung durchgeführt. Für diese Untersuchungen wurden die Agglomerate aus Höhen zwischen 10 und 30 cm fallen gelassen und die Deformationen wurden gemessen. Die Stöße waren überwiegend plastisch mit einer Rückdehnung von weniger als 1%. Die Agglomeratdeformationen beruhen auf Reibung zwischen den Partikeln sowie viskosen und kapillaren Kräften, wobei die beiden letztgenannten dominieren können. Es wurde fest gestellt, dass ein steigender Feuchtigkeitsgehalt die interpartikuläre Reibung herabsetzt und die Kapillarkräfte ansteigen lässt. Letzteres geschieht aber nur, bis die Sättigung erreicht ist. Darüber hinaus fällt die Kapillarkraft rapide ab. Für die Berechnung der Zugfestigkeit der Agglomerate  $\sigma_Z$  wird die folgende Gleichung angegeben:

$$\sigma_Z = S \cdot C \cdot \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \frac{\sigma_{lg} \cdot \cos \alpha}{d} \quad (2-37)$$

mit S: Sättigungsgrad; C: Konstante ( $C = 6$  für Kugeln gleicher Größe);  $\varepsilon$ : Porosität;  $\sigma_{lg}$ : Oberflächenspannung der Flüssigkeit;  $\alpha$ : Benetzungswinkel und d: Partikeldurchmesser.

Die Deformationen sind vom Gleichgewicht zwischen interpartikulären Reibungskräften und Kapillarkräften abhängig, welches wiederum von der Viskosität der Flüssigkeit und von der Größe und Rauheit der Partikeln abhängt. Bei kleiner werdendem Partikeldurchmesser nimmt

die Schüttgutedichte zu und gleichzeitig steigen sowohl Reibungs- als auch Kapillarkräfte an. Bei höherviskosen Bindemitteln hat der Partikeldurchmesser keinen signifikanten Einfluss auf die Deformation, hier dominieren die viskosen Kräfte.

Zu gleichen Ergebnissen kamen auch Iveson, Litster und Ennis [24], als sie die Verdichtung von Glaskugeln ( $d = 8, 15, 39 \mu\text{m}$ ) mit einer Mischung aus Glycerol und Wasser in einer Granulationstrommel ( $d = 0,3 \text{ m}$ ) untersuchten. Sie fanden ebenfalls eine kleiner werdende Reibungskraft und ansteigende viskose Dissipation bei steigendem Flüssigkeitsgehalt. Auch stellten sie fest, dass der Gehalt an Bindemittel sowie seine Viskosität nicht getrennt voneinander betrachtet werden können. Sowohl die Eigenschaften des Pulvers als auch die des Bindemittels beeinflussen den Grad der Verdichtung und damit die minimal erreichbare Porosität  $\varepsilon_{\min}$ . Es wurde eine einfache Beziehung zwischen der Porosität und der Anzahl der Trommelumdrehungen  $N$  aufgestellt, wobei  $k$  eine Konstante ist:

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon_{\min}}{\varepsilon_0 - \varepsilon_{\min}} = \exp[-k \cdot N] \quad (2-38)$$

Die Konstante  $k$  und die minimale Porosität  $\varepsilon_{\min}$  hängen als komplexe Funktion von der Umfangsgeschwindigkeit und Geometrie der Trommel, von den Partikeleigenschaften (z.B. Größe und Form), von den Eigenschaften des Bindemittels (Viskosität, Oberflächenspannung und Benetzungswinkel) und vom Bindemittelgehalt ab. Das Verdichtungspotential fällt mit kleiner werdenden Partikeln, Abbildung 2-16. Mit steigendem Flüssigkeitsgehalt nimmt die interpartikuläre Festkörperreibung ab, gleichzeitig steigt der Anteil der viskosen Dissipation an.

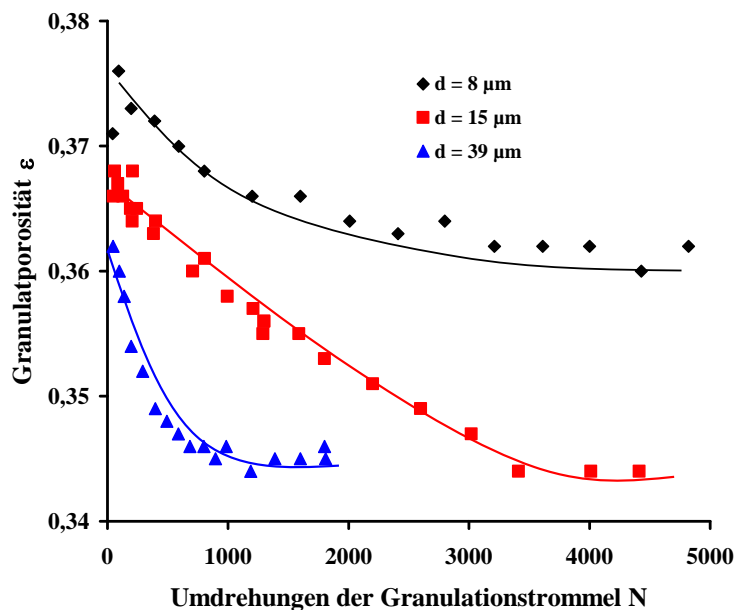


Abbildung 2-16: Der Einfluss der Partikelgröße auf die Granulatporosität mit Glycerol als Bindemittel ( $0,417 \text{ m}^3$  Glycerol /  $\text{m}^3$  trockenes Pulver) [24]



Abbildung 2-16 zeigt deutlich die Verringerung der Granulatporosität mit zunehmender Umdrehungsanzahl der Granulationstrommel bis zu einem jeweiligen stationären Endwert. Dieser Wert ist für die kleinsten Glaskugeln ( $d = 8\mu\text{m}$ ) deutlich größer als bei den beiden größeren Glaskugelfraktionen. Bei den größten Glaskugeln ( $d = 39\mu\text{m}$ ) wird der Endwert deutlich schneller erreicht als bei der mittleren Fraktion mit einem Durchmesser von  $d = 15\mu\text{m}$ .

Pietsch und Rumpf [52] stellten fest, dass der Haftkraftanteil durch die Randkraft  $F_R$  unabhängig und der Anteil durch den Kapillardruck  $F_p$  abhängig vom Verhältnis  $a/d$  ist, wobei  $F_p$  positiv als auch negativ sein kann. Bei einem Verhältnis  $a/d \geq 0,2$  (Abbildung 2-13) ist kapillarer Unterdruck nicht mehr möglich. Bei Dehnung der Flüssigkeitsbrücke bleibt ihr Volumen konstant, aber die Haftkraft  $F_H$  (als Summe aus  $F_R$  und  $F_p$ ) sinkt mit steigendem Abstand  $a$  bei gleichbleibendem Partikeldurchmesser  $d$ . Durch die in die Schüttung eingetragene Feuchtigkeit sind also größere interpartikuläre Haftkräfte zu erwarten, und zwar deutlich, wenn sich an den Kontaktstellen Flüssigkeitsbrücken ausbilden konnten.

Ein allgemeiner Überblick über den Einfluss erhöhter Gutfeuchte auf Partikelkontakte wurde von Iveson, Litster, Hargood und Ennis [26] veröffentlicht.

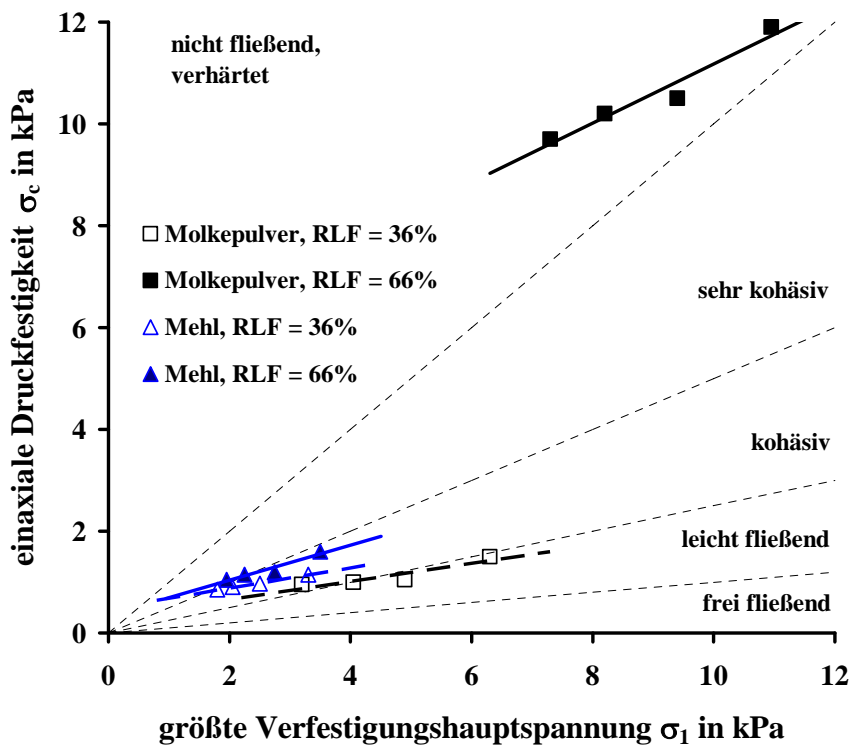


Abbildung 2-17: Einaxiale Druckfestigkeit über größter Verfestigungshauptspannung von Mehl und Molkepulver für relative Luftfeuchten von 36% und 66% [76]

Teunou et.al [76] untersuchten die Fließfähigkeit von Mehl ( $d_{50} = 73\mu\text{m}$ ;  $X_1 = 0,126$ ) und Molkepulver ( $d_{50} = 98\mu\text{m}$ ;  $X_1 = 0,038$ ) bei verschiedenen relativen Luftfeuchten (RLF = 36% und 66%). Sie stellten fest, dass die einaxiale Druckfestigkeit mit Zunahme der

RLF steigt und somit der Wert der Fließfunktion abnimmt. Die Ergebnisse sind in Abbildung 2-17 dargestellt. Bei der höheren relativen Luftfeuchte neigen beide Pulver zum Verklumpen, wobei dies beim Molkepulver stärker ausgeprägt ist als beim Mehl, so dass beim Molkepulver eine deutlichere Fließverschlechterung zu beobachten ist.

Fitzpatrick und Teunou [in 14] behandelten den Einfluss der relativen Luftfeuchte auf das Fließen von Mehl ( $d_{50} = 73\mu\text{m}$ ;  $X_1 = 0,126$ ), Teepulver ( $d_{50} = 25\mu\text{m}$ ;  $X_1 = 0,066$ ) und Molkepulver ( $d_{50} = 98\mu\text{m}$ ;  $X_1 = 0,038$ ). Für alle drei Pulver wurde mit zunehmender relativer Luftfeuchte eine Fließverschlechterung gemessen.

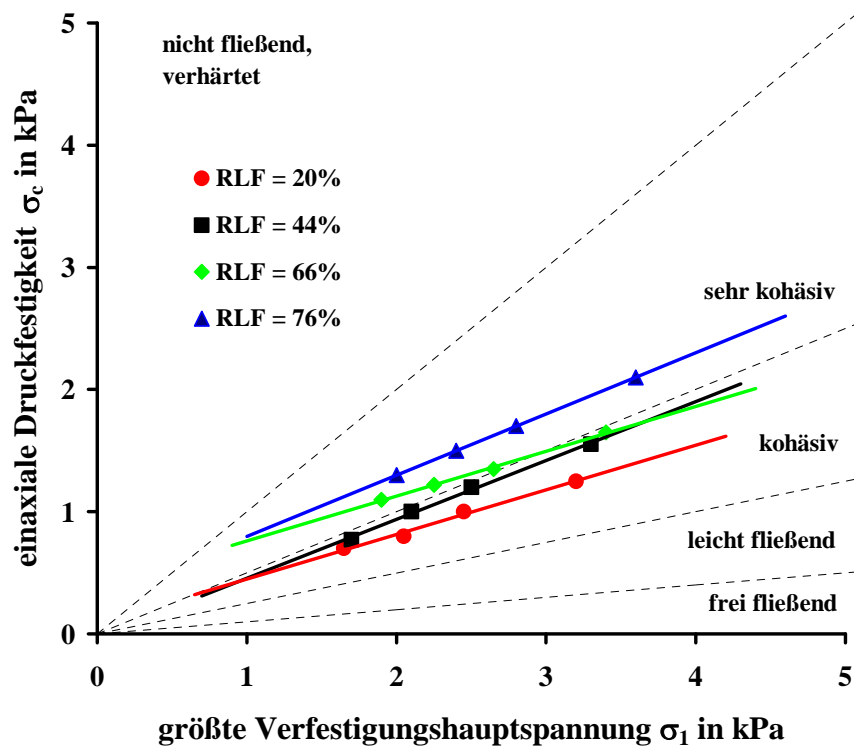


Abbildung 2-18: Einaxiale Druckfestigkeit über größter Verfestigungshauptspannung von Mehl bei verschiedenen relativen Luftfeuchten [14]

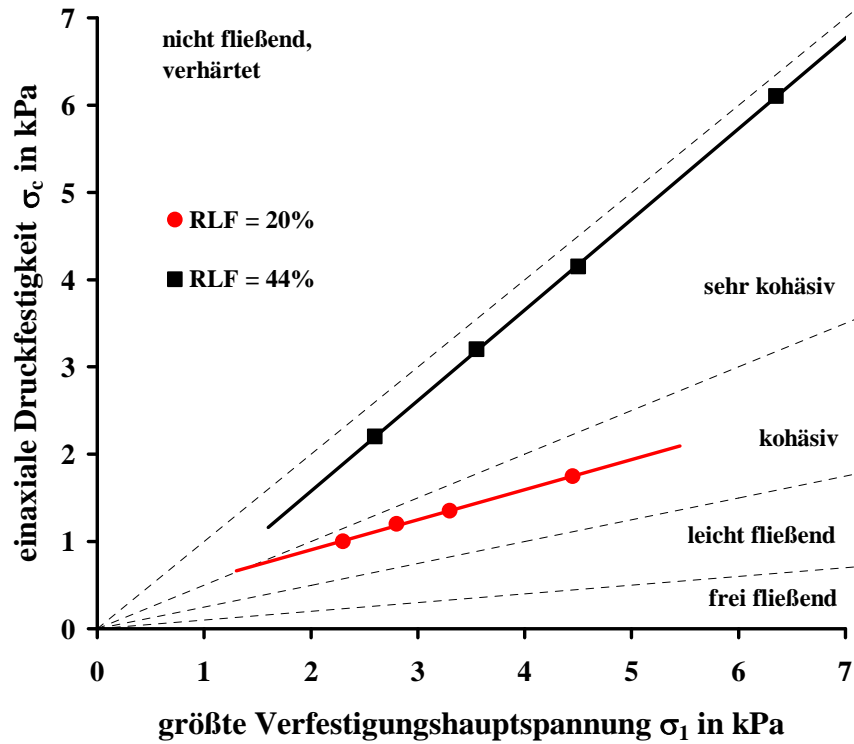


Abbildung 2-19: Einaxiale Druckfestigkeit über größter Verfestigungshauptspannung von Teepulver bei verschiedenen relativen Luftfeuchten [14]

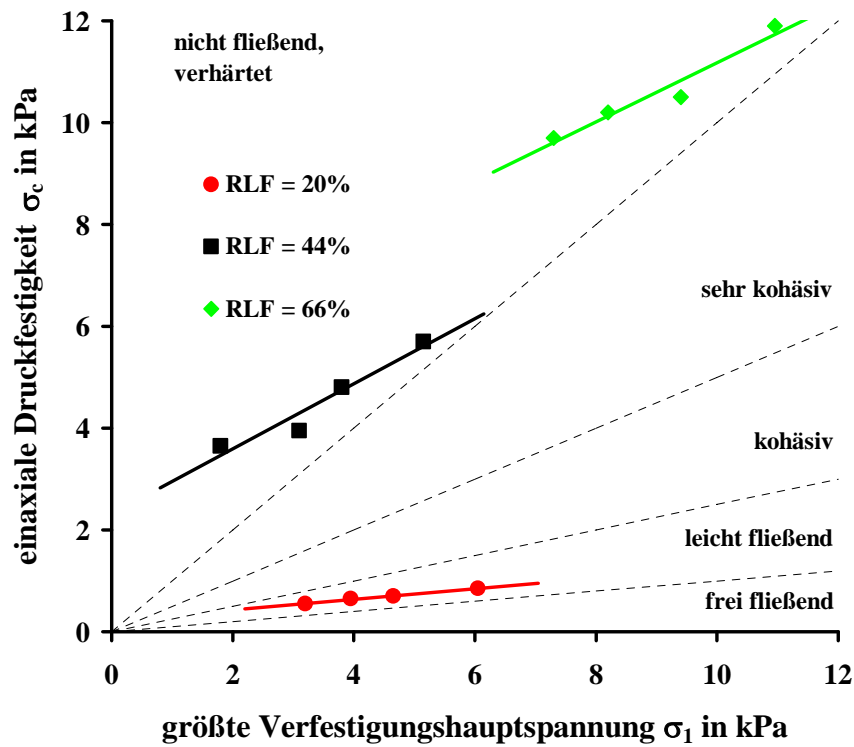


Abbildung 2-20: Einaxiale Druckfestigkeit (UYS) über größter Hauptspannung (MCS) von Molkepulver bei verschiedenen relativen Luftfeuchten [14]

Tomas [in 79] hat konkrete Gleichungen angegeben, um die einaxiale Druckfestigkeit  $\sigma_c$ , Gl. (2-39) und die Fließfunktion  $ff_c$ , Gl. (2-40) für feuchte Schüttgüter mit vorwiegend Flüssigkeitsbrückenbindungen abzuschätzen:

$$\sigma_c = \frac{8,25 \cdot (1 - \varepsilon) \cdot (2 - \varepsilon) \cdot \sigma_{lg} \cdot \sin \varphi_i}{\varepsilon \cdot \sqrt{\varepsilon} \cdot d \cdot (1 - \sin \varphi_i)} \cdot \sqrt{\frac{\rho_s}{\rho_l} \cdot X_1} \quad (2-39)$$

$$ff_c \approx \frac{0,0571 \cdot \sigma_1 \cdot d \cdot (1 - \sin \varphi_i)}{\sigma_{lg} \cdot \sin \varphi_i \cdot \sqrt{\frac{\rho_s}{\rho_l} \cdot X_1}} \quad (2-40)$$

Schulze [in 69] beschäftigt sich ebenfalls mit der Fließfähigkeit feuchter kohäsiver Pulver und stellt einen Zusammenhang zwischen Flüssigkeitsgehalt und Fließfähigkeit her. Bei kleinen Flüssigkeitsmengen bilden sich zunächst Flüssigkeitsbrücken an den Kontaktstellen der Partikeln. Damit steigt die Druckfestigkeit an und die Fließfähigkeit nimmt ab. Bei weiterer Flüssigkeitszugabe bilden sich örtlich gesättigte Bereiche und die Fließfähigkeit nimmt weiter ab, jedoch nicht so stark. Erreicht man den Bereich der Sättigung der gesamten Partikelpackung sind die Hohlräume vollständig mit Flüssigkeit gefüllt und die inneren Oberflächen mit den Randkräften verschwinden. Die Fließfähigkeit verbessert sich schlagartig, da das undrainierte Schüttgut in das Fließen eines hochviskosen Schlammes übergeht.

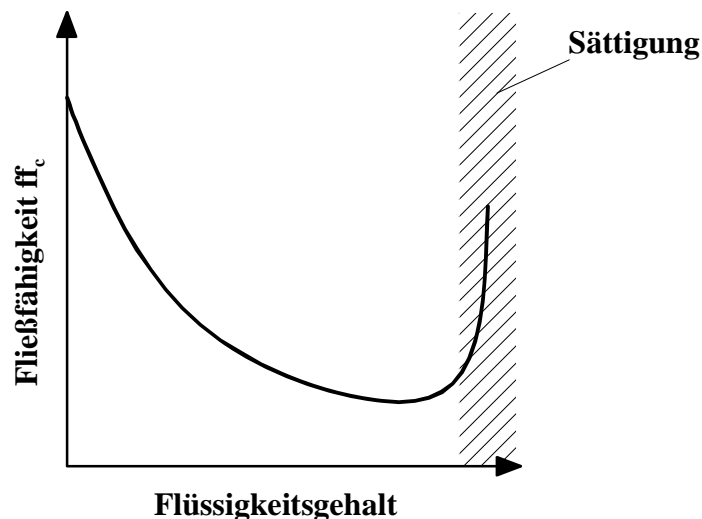


Abbildung 2-21: Prinzipielle Abhängigkeit der Fließfähigkeit vom Flüssigkeitsgehalt [69]

### 3 Kontinuumsmechanische Grundlagen des Schüttgutverhaltens

In diesem Kapitel wird ausschließlich das langsame (Schergeschwindigkeit  $v_s < 1$  m/s), reibungsbehaftete Fließen einer Partikelpackung betrachtet. Die Schüttgut-Reynoldszahl lässt sich wie folgt berechnen:

$$\text{Re}_b = \frac{v_s^2 \cdot \rho_b}{\tau} = \frac{1 \text{ m}^2 \cdot 1000 \text{ kg}}{\text{s}^2 \cdot \text{m}^3 \cdot 1 \text{ kPa}} = 1 \quad (3-1)$$

und ist für eine Scherspannung  $\tau > 1$  kPa kleiner als 1. Das reibungsbehaftete, langsame Fließen eines kohäsiven Schüttgutes kann so zu sagen als „laminar“ bezeichnet werden. Weitestgehend ausgeschlossen wird ein zusätzlicher Scherspannungsanteil durch Partikelkollision infolge „turbulenten“ Impulsaustauschs. Vernachlässigt werden sollen auch Wechselwirkungen mit Fluiden, die durch Partikelbewegungen hervorgerufen werden, bspw. Porenströmungen. Der Widerstand gegen das Scheren wird vor allem auf die Coulomb-Reibung zwischen den haftenden Partikelkontakten zurück geführt.

#### 3.1 *Zweiachsige Spannungszustände in der fließenden Partikelpackung*

Eine Schüttung stellt eine ruhende oder sich bewegende („fließende“) Packung von Partikeln dar, deren Zwischenräume mit Gasen und/oder Flüssigkeiten gefüllt sind. Trotz der daraus resultierenden Inhomogenitäten können Schüttgüter in mancher Hinsicht als Kontinuum aufgefasst werden, wenn die Abmessungen des beobachteten Volumens größer sind als der 25-fache Partikeldurchmesser [78]. Das Verhalten ein und desselben Schüttgutes kann unter bestimmten Bedingungen jeweils variieren. Ein fluidisiertes Schüttgut verhält sich ähnlich einer Newtonschen Flüssigkeit, während ein locker gepacktes mit einem plastischen Medium verglichen werden kann. Mit Zunahme der Packungsdichte nähern sich die Schüttguteigenschaften denen eines elastischen Festkörpers. Um den Spannungszustand und das Fließverhalten beschreiben zu können, sind verschiedene Kennwerte erforderlich.

Von wesentlichem Interesse für die Schüttgutmechanik ist der Spannungszustand, bei dem das Fließen (der Bruch bzw. das Versagen) des Schüttgutes eintritt. Ein Fließkriterium muss folglich eine Aussage über die Spannung machen, die zum Fließen, zum Bruch oder zu einer irreversiblen plastischen Verformung führt. Dazu ist das Kriterium Fließort geeignet. Der Fließort stellt die Abhängigkeit der Scherspannung  $\tau$  von der Normalspannung  $\sigma$  dar, wobei der Anstieg der Fließortgeraden ein Maß für die Reibung ist.

Zu Beginn sollen die wichtigsten Kennwerte des Pulverfließverhaltens erläutert werden [27, 48, 70]. In der Verfahrenstechnik liegt das Hauptaugenmerk auf dem Transport von Schüttgütern, d.h. auf dem Fließen der Materialien. Beim Fließen handelt es sich zugleich um irreversible Schervorgänge. Diese können mit direkten Scherversuchen punktweise ausgemessen werden, Abbildung 3-1 oben. Durch Verbinden der gemessenen Punkte erhält man unter festgelegten Beanspruchungsbedingungen eine Grenzspannungsfunktion, die nicht überschritten werden kann, den so genannten Fließort. Der Anstieg des Fließortes ist der innere Reibungswinkel  $\varphi_i$ , der  $\tan\varphi_i$  entspricht dem inneren Reibungskoeffizienten. Er stellt ein charakteristisches Maß für das Kontaktversagen beim Gleiten dar.

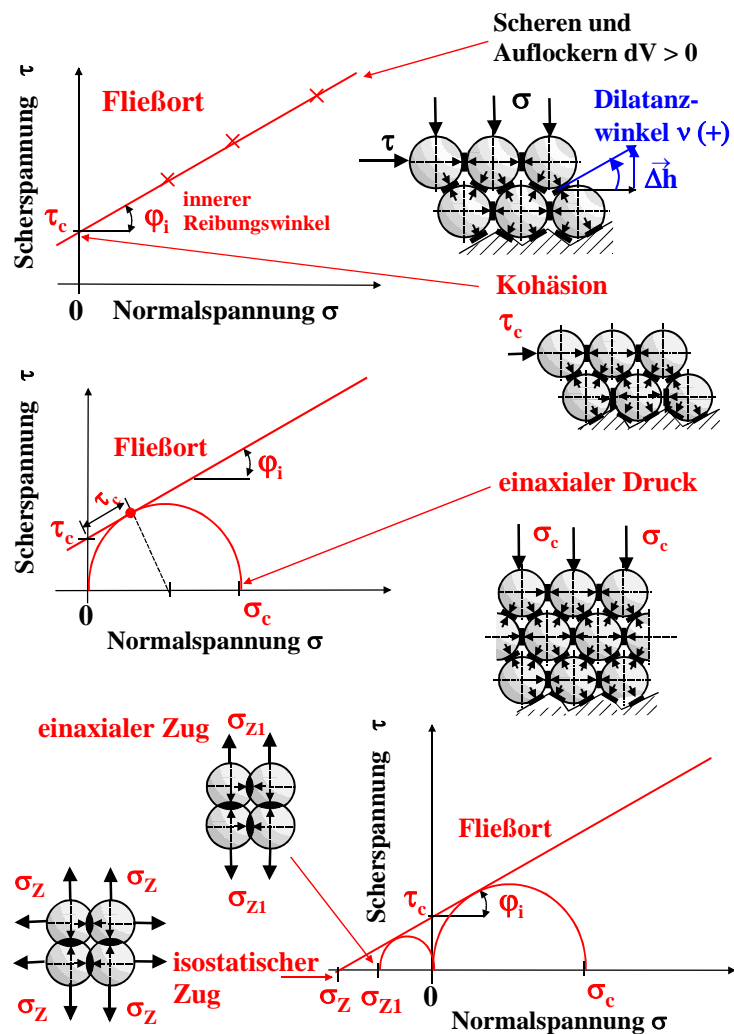


Abbildung 3-1: Zweiachsige Spannungszustände in einer gescherten Partikelpackung – Scheren und Auflockern, einaxialer Druck und Zug [87]

Eine typische Eigenart gescherter Partikelpackungen ist, dass das Fließen unter Volumenausdehnung vonstatten geht. Das ist dann der Fall, wenn die geometrisch vorgegebene, makroskopische Scherebene nicht den charakteristischen Tangentialebenen der Partikelkontakte in der Scherzone entspricht. Die obere Partikelschicht ist versetzt zu der unteren angeordnet, Abbildung 3-1. Das bedeutet, beim Fließen werden die oberen Partikel anschaulich „bergauf“ über die unten liegenden Partikel verschoben, was mit einer Vergrößerung des Pulvervolumens in der Scherzone einher geht,  $dV > 0$ . Dieses Verhalten wird als Dilatanz bezeichnet [58]. Es ist charakteristisch für die Ausbildung von Scherzonen in fließenden Schüttungen.

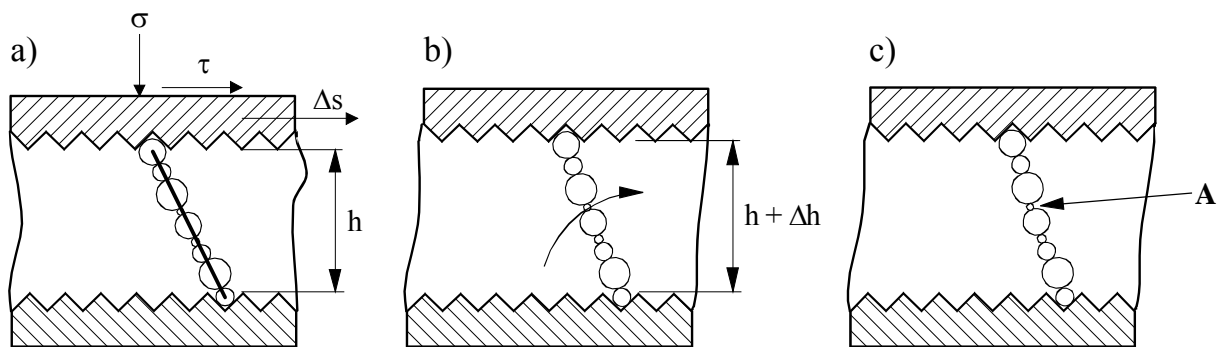


Abbildung 3-2: Modell zur Scherverformung eines grobkörnigen Schüttgutelements [69]

Ursächlich für diese Ausdehnung ist, dass Partikel während der Scherverformung andere Partikeln überqueren müssen, was bedeutet, dass sie aus der dicht gepackten Lage etwas nach oben bewegt werden (Abbildung 3-2, a). Bildet sich dann bspw. örtlich eine Kraftlinie (schematisch in (Abbildung 3-2, a)), richtete sich diese mit zunehmender Scherverformung immer steiler auf (Abbildung 3-2, b)). Dadurch vergrößert sich die Höhe der Schüttgutprobe bis es zum Abgleiten zwischen den einzelnen Partikeln kommt (Abbildung 3-2, c), Punkt A), und die Kraftlinie unwirksam wird. Während der Scherverformung bilden sich an vielen Stellen immer wieder neue Kraftlinien, an anderen verformen sich die Kraftlinien und versagen anschließend. Je größer die Partikeln sind, desto ausgeprägter ist die Ausdehnung in vertikaler Richtung, da bei größeren Partikeln ein größerer Weg zum Überqueren anderen Partikel notwendig ist [69].

Der Dilatanzwinkel im Mikromaßstab  $\nu$  ist positiv im mathematischen Sinn (d. h. entgegen dem Uhrzeigersinn) definiert und beschreibt die momentane Dilatanz (Ausdehnung), welche mit der Scherverformung verbunden ist. Dabei wird die momentane Bewegungsrichtung der Oberseite des Schüttgutelements gegenüber der Horizontalen angegeben [69].

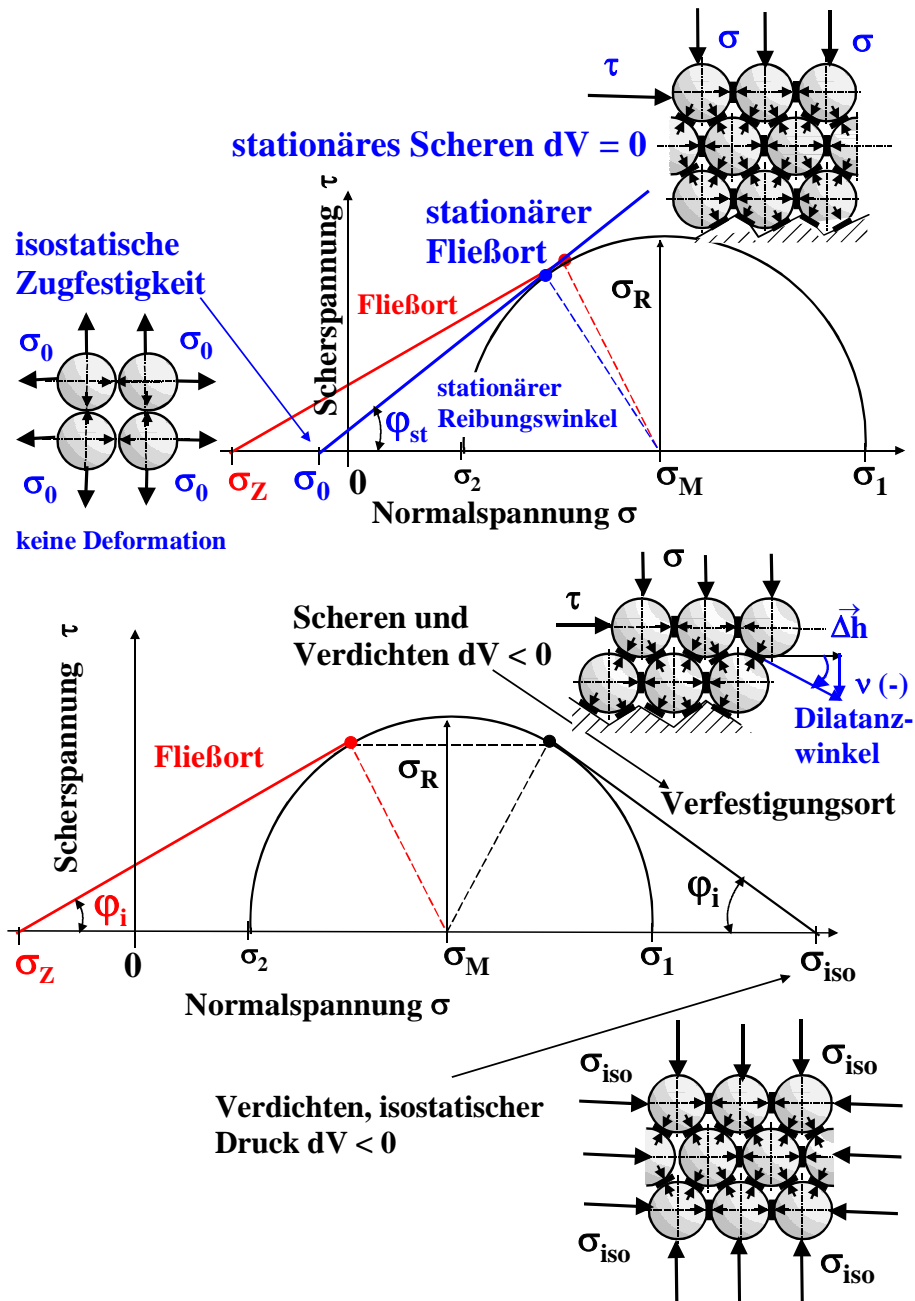


Abbildung 3-3: Zweiachsige Spannungszustände in einer gescherten Partikelpackung – stationäres Fließen, Scheren und Verdichten [87]

Der Ordinatenabschnitt des Fließortes wird als Kohäsion  $\tau_c$  bezeichnet und entspricht dem Scherwiderstand ohne zusätzliche äußere Normalspannung ( $\sigma = 0$ ), und wird ausschließlich durch die Wirkung der Kontaktdeformationen (in Abbildung 3-1 hervorgehoben) und den daraus resultierenden Haftkraftverstärkungen erzeugt. Damit wird ein innerer Druck  $-\sigma_Z$  in den Kontakten generiert, der zur äußeren Normalbelastung ( $\sigma + \sigma_Z$ ) absolut hinzuzufügen ist. Daraus resultieren wiederum die einaxiale Druckfestigkeit  $\sigma_c$  der Partikelpackung (Mohr-Kreis rechts der Ordinate mit  $\sigma_2 = 0$ ) sowie die einaxiale Zugfestigkeit  $\sigma_{Z,1}$  (Mohr-Kreis links



der Ordinate), Abbildung 3-1. Der Schnittpunkt mit der Abszisse links der Ordinate bei Scherspannung  $\tau = 0$  (oder auch: die Nullstelle der Fließortgeraden) bildet eine zweiachsige bzw. isostatische Zugfestigkeit  $\sigma_Z$  ab [87].

Beim Scheren fließt eine kritisch vorverfestigte Partikelpackung stationär unter Volumenkonstanz ( $dV = 0$ ), Abbildung 3-3 oben. Verdichtung und Auflockerung (Dilatanz) befinden sich im dynamischen Gleichgewicht. Das heißt, die Volumenzunahme durch Dilatanz und die Volumenabnahme durch Verdichtung heben sich im Mittel gegeneinander auf. Die entsprechende Grenzspannungsfunktion wird stationärer Fließort genannt. Dessen Anstiegswinkel ist der stationäre innere Reibungswinkel  $\varphi_{st}$ . Der Winkel  $\varphi_{st}$  charakterisiert das stationäre Gleichgewicht aus Kontaktannäherung, -bildung und -versagen sowie Partikelablösung. Der Schnittpunkt der Geraden des stationären Fließortes mit der Abszisse im Negativen bei  $\tau = 0$  stellt die isostatische Zugfestigkeit  $\sigma_0$  der unverfestigten Kontakte dar. In Abbildung 3-3 oben fehlen die hervorgehobenen Kontaktdeformationen. Die Kugeln „durchdringen“ sich nicht, was einen idealisierten Zustand darstellt, der sich nur durch die Extrapolation des stationären Fließortes quantifizieren lässt, sondern berühren sich gerade auf einem Mindestabstand von  $a_0 \approx 0,3 - 0,4$  nm. Bei Erreichen einer Normalspannung  $\sigma_0$  versagen die Kontakte unmittelbar ohne nennenswerte Dehnung und/oder makroskopische Volumenänderung [87].

Die Mittelpunktspannung  $\sigma_M$  (bspw. des größten Mohr-Kreises in Abbildung 3-3, unten) errechnet sich aus den beiden, scherspannungsfreien Hauptnormalspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  des zweiachsigen Spannungszustandes. Im dreiachsigen Spannungsraum handelt es sich um einen Kugeltensor [17]. Die Mittelpunktspannung berechnet sich aus der Summe von  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ :

$$\sigma_M = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad (3-2)$$

Die Radiusspannung lässt sich aus der Differenz der beiden Hauptspannungen berechnen und charakterisiert das Scherspannungsniveau, welches das Fließen hervorruft, Abbildung 3-3 unten.

$$\sigma_R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (3-3)$$

Wird eine Schüttgutprobe unter Normalspannung geschert, die unterverfestigt ist, so fließt sie unter Volumenabnahme ( $dV < 0$ ), bis der kritische Verfestigungszustand erreicht ist, Abbildung 3-3 unten. Durch die Verdichtung wird der Dilatanzwinkel in diesem Fall negativ, die Partikeln werden anschaulich „bergab“ gegeneinander verschoben. Die Verbindungsgerade zwischen isostatischem Druck und Mohrkreis des stationären Fließens wird Verfestigungsort genannt. Die Neigung des Verfestigungsortes wird durch die Verhältnisse der Tangential- zu den Normalkräften bestimmt. Dem zu Folge ist auch hier beim Verfestigen der innere Reibungswinkel  $\varphi_i$  das charakteristische Maß des Kontaktgleitens [87].

### 3.2 Kennwerte des elastischen Schüttgutverhaltens

Ausgehend vom Partikelkontaktverhalten ohne Vorbelastung (Abbildung 2-9) kann mit Hilfe des Mikro-Makro-Überganges der Elastizitätsmodul eines kohäsiven Schüttgutes  $E_b$  erhalten werden (Gl.(3-4)), und zwar streng nach der Definition der Mechanik [17] als Anstieg der Tangente der Spannungs- bzw. Kraft-Dehnungs-Kurve bei Zugbeanspruchung [84]:

$$E_b = \left. \frac{d\sigma}{d(h_K/d)} \right|_{\sigma \rightarrow 0} = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon \cdot d} \cdot \left. \frac{dF_N}{dh_K} \right|_{F_N \rightarrow 0} = \frac{1-\varepsilon}{4 \cdot \varepsilon} \cdot \left( \frac{3 \cdot E^* \cdot F_{H0}}{2 \cdot r_{1,2}^2} \right)^{1/3} \quad (3-4)$$

Ein frei fließendes Schüttgut ist nicht in der Lage, Zugspannungen bzw. -kräfte aufzunehmen oder zu übertragen. Das bedeutet, dass die Haftkraft zwischen den Einzelpartikeln nahe Null ist ( $F_{H0} \rightarrow 0$ ). Die Steifigkeit dieses Materials in Druckrichtung wird nur auf eine Schüttung mit seitlicher Einspannung bezogen, sei es durch Wände oder umgebendes Schüttgut. Die erwähnte makroskopische Drucksteifigkeit beruht auf der Übertragung sowohl von Normal- als auch von Scherspannungen bzw. auf Tangential- oder Reibkräften in den Partikelkontakten. Die Tangentialsteifigkeit eines Kugelkontaktes lässt sich wie folgt errechnen [46, 77]:

$$k_T = \frac{dF_T}{d\delta} = 4 \cdot G^* \cdot \sqrt{r_{1,2} \cdot h_K} \quad (3-5)$$

Davon ausgehend ist es möglich, unter Verwendung des mittleren Gleitmoduls beider Materialien  $G_i = E_i / 2 \cdot (1 + \nu_i)$ ;  $i = 1, 2$

$$G^* = 2 \cdot \left( \frac{2-\nu_1}{G_1} + \frac{2-\nu_2}{G_2} \right)^{-1} \quad (3-6)$$

ebenfalls den Schermodul eines kohäsiven Schüttgutes anzugeben [86]:

$$G_b = \left. \frac{d\tau}{d(s/h_{Sz})} \right|_{\tau \rightarrow 0} = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon \cdot d} \cdot \left. \frac{dF_T}{d\delta} \right|_{F_T \rightarrow 0} = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \cdot G^* \cdot \left( \frac{3 \cdot F_{H0}}{2 \cdot E^* \cdot r_{1,2}^2} \right)^{1/3} \quad (3-7)$$

Das Verhältnis von Scher- und Elastizitätsmodul des Pulvers entspricht dem Verhältnis der Kontaktsteifigkeiten in tangentialer und normaler Richtung der wirkenden Kräfte. Für eine (angenommene) Querdehnungszahl des Partikelmaterials von  $\nu = 0,3$  ist  $G_b / E_b = 0,82$ :

$$\frac{G_b}{E_b} = \frac{k_T}{k_N} = \frac{2 \cdot (1-\nu)}{2-\nu} \quad (3-8)$$

Somit lässt sich schlussfolgern, dass bei kohäsiven Schüttgütern die Normal- und Schersteifigkeiten im Mittel annähernd gleich groß sind im Gegensatz zu Festkörpern. Die Steifigkeiten sind mindestens drei Größenordnungen kleiner als die des Festkörpermaterials, aus dem die Partikeln bestehen [87].

Von wesentlichem Interesse für die Schüttgutmechanik ist, bei welchem Spannungszustand das Fließen, d.h. der Bruch bzw. das Versagen, des Schüttgutes eintritt. Spannungen, die zum Fließen führen, sind immer Zug- oder Schubspannungen und keine Druckspannungen. Die elastische Schersteifigkeit eines verdichteten kohäsiven Schüttgutes wird durch sein Kompressionsverhalten und natürlich auch von der aufgetragenen Verfestigungslast bestimmt. Gerade die Verfestigungslast bzw. die durch sie erzeugten Normalspannungen beeinflussen die Kontakt- bzw. Partikeldeformation in starkem Maße. Der Scherwiderstand ist umso größer, je höher die verfestigende Vorbeanspruchung des Schüttgutes gewesen ist. Durch die Vorbeanspruchung entstehen Deformationen im Schüttgut. Deformationen sind Bewegungen (Translation und Rotation) der Einzelpartikel sowie Verzerrungen, welche sich darin von den Starrkörperbewegungen unterscheiden, dass sich durch sie die Lage der materiellen Punkte gegeneinander ändert [37]. Mit wachsenden Normalspannungen nehmen die Deformationen zu und führen damit zu höheren Haftkräften zwischen den Partikeln, was gleichzeitig eine höhere elastische Schersteifigkeit zur Folge hat.

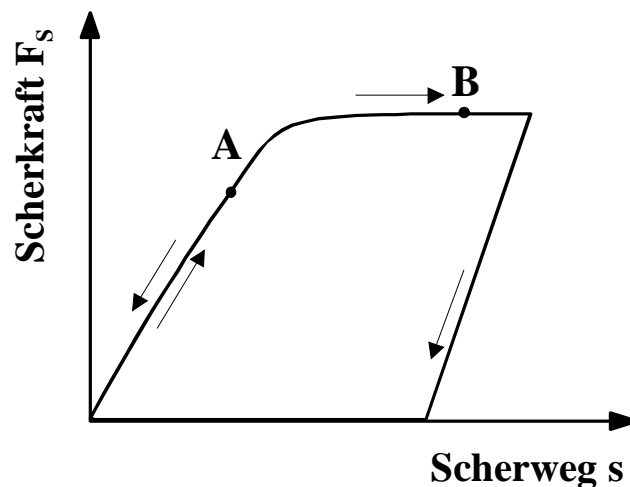


Abbildung 3-4: Elastisch-plastischer Scherkraft-Verlauf für das Anscheren einer Schüttgutprobe

Beim Scheren tritt zunächst eine elastische Verformung des Schüttgutes ein (linearer Teil der Anscherkurve bis Punkt A in Abbildung 3-4). Im weiteren Verlauf des Anscherens verfestigt sich die Probe (Punkt B in Abbildung 3-4), bis der konstante Endwert der Scherkraft, d.h. stationäres Fließen, erreicht ist. Das Volumen des Schüttgutes in der Scherzone verändert sich während des Schervorganges, abhängig von der Schergeschwindigkeit und der aufgelegten

Normallast. Die in der Schüttgutmechanik verwendete Translations-Scherzelle nach Jenike liefert den bei einer aufgetragenen Normalspannung  $\sigma$  jeweils größtmöglichen Wert der Schubspannung  $\tau$ , Abbildung 5-5. Da die Abmessungen der Scherzone nicht explizit zugänglich sind, sind weder Deformationen noch Volumenänderung bestimmbar. Das Schüttgut beginnt zu fließen, wenn die angreifende Schubspannung ausreicht, die Haftkräfte zwischen den Partikeln zu zerstören. Damit ist die Fließgrenze erreicht. Die in der Fließebene wirkenden Schub- und Normalspannungen entsprechen den vom Schüttgut aufnehmbaren Spannungen.

### **3.3 Mikro-Makro-Übergang und Fließbedingungen für stationäres und beginnendes Fließen**

Die Konsequenz aus weichen Partikelkontakten und ihren mikroskopischen Haftkräften ist die Ausbildung einer makroskopischen Verfestigung, die von der Vorverdichtung des Pulvers abhängt [91].

Die Kontaktgesetze  $F_H(F_N)$  sollen nun für die Modellierung von Verfestigung und Fließen von ultrafeinen, kohäsiven Pulvern angewendet werden. Allerdings soll der Übergang von der mikroskopischen zur makroskopischen Betrachtungsweise hier so einfach wie möglich erfolgen, um analytische Lösungen der Fließgrenzen zu erhalten, die ihrerseits entscheidende Fließparameter beinhalten [91]. Bei computergestützter Berechnung der Mikromechanik granularer Medien, bspw. in [20], wird die mehr übergreifende volumennormierte Tensorschreibweise benutzt, um alle Kraftvektoren multipliziert mit Ortsvektoren gleich verteilt in einem repräsentativen Volumenelement einer Partikelpackung (RVE) unter mechanischer Beanspruchung darzustellen.

Anstelle dieses repräsentativen Volumenelements (RVE) wird hier das Modell des charakteristischen bzw. repräsentativen Partikelkontaktes (RPC) verwendet. Es dient der Umwandlung der Normal- und Tangentialkräfte in einen zweidimensionalen Spannungszustand  $\tau = f(\sigma)$ . Um die Bruchkriterien am repräsentativen Partikelkontakt zu beschreiben, kann die Theorie von Molerus verwendet werden [47]. Aber anstatt das Modell für perfekt plastisches Verhalten, Gl. (3-9), zu verwenden,

$$F_H = F_{H0} + \kappa_p \cdot F_N \quad (3-9)$$

wird hier das realistischere Modell des elastisch-plastischen Partikelkontaktes verwendet, um die Bruchkriterien des repräsentativen Partikelkontaktes zu beschreiben:

$$F_H = \frac{\kappa_A}{\kappa_A - \kappa_p} \cdot F_{H0} + \frac{\kappa_p}{\kappa_p - \kappa_A} \cdot F_N = (1 + \kappa) \cdot F_{H0} + \kappa \cdot F_N \quad (3-10)$$

Dafür sind folgende Annahmen und Voraussetzungen nötig [89]:

- 1) Die Kontaktfläche ist klein gegenüber dem charakteristischen Partikeldurchmesser.
- 2) Die Partikelkontakte sind aufgrund der Kugelsymmetrie gleichmäßig über die gesamte Partikeloberfläche verteilt.
- 3) Die Packungsstruktur wird als isotrop und zufällig mit gleicher Porosität in allen Raumrichtungen der Schüttung angenommen.
- 4) Aus den Annahmen 1) bis 3) ergibt sich, dass in den gleichförmig verteilten Partikelkontakten auch die isotropischen Normal- und Tangentialkräfte gleichförmig verteilt sind. Die mittlere Tangentialkraft entspricht der resultierenden Scherkraft im Schüttgut  $\bar{F}_T = F_S$ .
- 5) Es existiert ein direkter Zusammenhang zwischen den isostatischen Spannungen und den Kontaktkräften als Überlagerung dreier einaxialer Normalspannungen, die jeweils senkrecht aufeinander stehen.
- 6) Die Zugfestigkeit einer Partikelpackung  $\sigma_Z$  kann mit der Porosität  $\varepsilon$ , dem Partikelformfaktor  $\Psi$  als dem Verhältnis der Oberflächen von volumengleichen kugeligen und nicht kugeligen Partikeln  $\Psi_A = A_{S,sp} / A_{S,p}$ , der Anzahlfunktion der Partikelkontakte (Erwartungswert der Koordinationszahl)  $k(d)$ , dem mittleren Kugelvolumen  $\bar{V}_p$ , welches mit dem 3. Moment der Anzahlverteilung  $M_{3,0}$

$$\bar{V}_p = \frac{\pi}{6} \cdot M_{3,0} = \frac{\pi}{6} \cdot \int_{d_{\min}}^{d_{\max}} d^3 \cdot q_0(d) d(d) \quad (3-11)$$

ausgedrückt werden kann, sowie der Haftkraftverteilung  $F_H [d, q_0(d)]$  aller Partikelkontakte in der Scherzone

$$\sigma_Z = \frac{1 - \varepsilon}{6 \cdot \Psi_A \cdot \bar{V}_p} \cdot \int_{d_{\min}}^{d_{\max}} k(d) F_H [d, q_0(d)] \cdot d \cdot q_0(d) d(d) \approx \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \frac{F_H}{d} \quad (3-12)$$

dargestellt werden.

- 7) Der allgemeine Zusammenhang zwischen Spannungen und Kontaktkräften für charakteristische monodisperse Partikel gleicher Größe  $d \approx d_{ST}$  ( $d_{ST}$  – Sauter-Durchmesser) in einem Kontinuum beträgt [47]:

$$\sigma, \tau = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \frac{F_N, F_S}{d^2} \quad (3-13)$$

$$\sigma_M, \sigma_R = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \frac{F_M, F_R}{d^2} \quad (3-14)$$

- 8) Die Normal- und Scherkräfte, die gegenüber den Richtungen der Hauptspannungen um den Winkel  $\alpha$  geneigt sind, können allgemein wie folgt ausgedrückt werden:

$$F_N = F_M + F_R \cdot \cos 2\alpha \quad (3-15)$$

$$F_S \leq F_R \cdot \sin 2\alpha \quad (3-16)$$

- 9) Im Falle des Versagens der Kontakte in der Scherzone durch Gleiten gilt in Gl. (3-16) das Gleichheitszeichen.
- 10) Durch die Gleichverteilung der Kontaktkräfte und -spannungen auf der Partikeloberfläche können die Reibungskoeffizienten an den Partikelkontakten  $\mu_i$  und die inneren Reibungswinkel  $\varphi_i$  im Schüttgut als  $\mu_i = \tan \varphi_i \approx$  konstant angenommen werden.

Diese genannten Voraussetzungen sind erforderlich, um handhabbare algebraische Gleichungen für die Belastungsgrenzen des kohäsiven Schüttgutfließens zu erhalten. Nach der Bedingung für die Coulomb-Reibung

$$F_{T,C,H} = \mu_i \cdot [F_N + F_H(F_N)] = \mu_i \cdot (1 + \kappa) \cdot (F_{H0} + F_N) \quad (3-17)$$

wird das Verhältnis von Scherkraft und Summe aller Normalkräfte verwendet, um simultan Gleiten oder stationäres Fließen an Partikelkontakten unter Druckbeanspruchung zu beschreiben:

$$\frac{F_S}{\sum F_{N,i}} = \frac{F_R \cdot \sin 2\alpha}{(1 + \kappa) \cdot F_{H0} + (1 + \kappa) \cdot (F_M + F_R \cos 2\alpha)} \leq \tan \varphi_i \quad (3-18)$$

Der Winkel  $\alpha$  in (3-18) beschreibt eine gebräuchliche Beziehung zwischen der Orientierung der Scherflächennormalen zur Richtung der Hauptspannung:

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_{st}}{2} \quad (3-19)$$

Der innere Reibungswinkel  $\varphi_i$  für beginnendes Kontaktversagen (Anstieg des Fließortes) und der stationäre Reibungswinkel können folgendermaßen verknüpft werden [47, 84]:

$$\tan \varphi_{st} = (1 + \kappa) \cdot \tan \varphi_i \quad (3-20)$$

Je weicher die Partikelkontakte sind, desto größer ist die Differenz zwischen diesen Reibungswinkeln, und das Pulver zeigt sich kohäsiver.

Die Bedingung für beginnendes und stationäres Kontaktversagen unter Druckbelastung ist demzufolge das Verhältnis der Summe der Scherkräfte zur Summe der Normalkräfte:

$$\frac{\sum F_{S,i}}{\sum F_{N,i}} = \frac{F_R \cdot [\sin 2\alpha - (1 + \kappa \cdot F_{HR} / F_R) \cdot \tan \varphi_i \cdot \cos 2\alpha]}{(1 + \kappa) \cdot F_{H0} + F_M + \kappa \cdot F_{HM}} \leq \tan \varphi_i \quad (3-21)$$

mit einem Hilfswinkel  $\beta$

$$\tan \beta = (1 + \kappa \cdot F_{HR} / F_R) \cdot \tan \varphi_i \quad (3-22)$$

Das Gleichheitszeichen in Gl. (3-21) gilt nur für einen Winkel  $\alpha$ , bei dem die linke Seite zu einem Maximum wird. In diesem Fall entspricht der Bruchwinkel  $\alpha$  der charakteristischen Ausrichtung der Kontaktkräfte in der Scherzone [84]:

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \quad (3-23)$$

Je größer der Klammerterm ( $\kappa \cdot F_{HR} / F_R \geq 0$ ) in Gl. (3-22) wird, desto größer wird der Unterschied zum normalerweise erwarteten Zusammenhang:

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_i}{2} \quad (3-24)$$

Letzteres (Gl. (3-24)) wird ausschließlich für steife Partikelkontakte ohne jegliche Kontaktverfestigung ( $\kappa = 0$ ) als gültig angesehen. Als nächstes muss der Hilfswinkel  $\beta$  wieder aus Gl. (3-22) eliminiert werden und man erhält eine quadratische Funktion mit einem positiven Wurzelausdruck:

$$F_R = \sin \varphi_i \cdot \left[ \sqrt{((1 + \kappa) \cdot F_{H0} + \kappa \cdot F_{HM} + F_M)^2 - \kappa^2 \cdot F_{HR}^2 \cdot \cos^2 \varphi_i} - \kappa \cdot F_{HR} \cdot \sin \varphi_i \right] \quad (3-25)$$

Dieses Modell soll nun in Spannungen ausgedrückt werden. Die Vorverfestigungskräfte  $F_{HR}$  und  $F_{HM}$  werden umgewandelt in die Radiusspannung  $\sigma_{VR}$  bzw. die Mittelpunktspannung  $\sigma_{VM}$  des Verfestigungszustandes. Mit den Gln. (3-20) und (3-25) erhält man eine allgemeine nicht-lineare Gleichung des Fließortes eines kohäsiven Pulvers:

$$\sigma_R = \sin\varphi_i \cdot \sigma_{VR} \cdot \left[ \sqrt{\left( \frac{\tan\varphi_{st} \cdot (\sigma_{VM} + \sigma_0) - \sigma_{VM} + \sigma_M}{\tan\varphi_i \cdot \sigma_{VR}} \right)^2} - \frac{\sin^2(\varphi_{st} - \varphi_i)}{\cos^2\varphi_{st} \cdot \tan^2\varphi_i} - \frac{\sin(\varphi_{st} - \varphi_i)}{\cos\varphi_{st}} \right] \quad (3-26)$$

Dieses grundlegende Modell (Gl. (3-26) kombiniert die Radius- und Mittelpunktspannung des Mohr-Kreises für beginnendes Fließen  $\sigma_R$  bzw.  $\sigma_M$  mit der Radius- und Mittelpunktspannung des Mohr-Kreises einer beliebigen Vorverfestigung als Einhüllende. Diese recht komplizierte nichtlineare Gleichung des Momentanfließortes beschreibt die Grenze der beginnenden plastischen Verformung während des Fließens, Abbildung 3-5. Der elastische Bereich ist unterhalb der Fließgrenze zu finden und hängt von der aufgebrauchten Vorverfestigung ab [91].

Um diese Gl. (3-26) besser handhabbar zu gestalten ist es wesentlich zu wissen, dass die Belastungsvorgeschichte eines kohäsiven Pulvers das stationäre Fließen ist, was sich in einem kohäsiven stationären Fließort zeigt. Dieser stationäre Fließort wird auf Radius- und Mittelpunktspannung als Koordinaten bezogen (Radiusspannung  $\sigma_{VR} = \sigma_{R,st}$  und Mittelpunktspannung  $\sigma_{VM} = \sigma_{M,st}$  des Mohr-Kreises für stationäres Fließen):

$$\sigma_{R,st} = \tan\varphi_{st} \cdot (\sigma_{M,st} + \sigma_0) \quad (3-27)$$

Dieses stationäre Pulverfließen ist durch ein dynamisches Gleichgewicht von gleichzeitigem Kontaktgleiten, Entlastung und Kontaktversagen, Bildung neuer Kontakte, und wiederholtem Be- und Entlasten und Scheren in der Scherzone charakterisiert [94]. Der stationäre Fließort ist die Einhüllende aller Mohr-Kreise für stationäres Fließen mit einem Abszissenschnittpunkt  $\sigma_0$ , welcher die isostatische Zugfestigkeit des unverdichteten Pulvers charakterisiert:

$$\sigma_0 = \frac{1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} \cdot \frac{F_{H0}}{d^2} \quad (3-28)$$

$F_{H0}$  steht für eine mittlere Kontaktkraft ohne jegliche Kontaktdeformation im Pulver und  $\varepsilon_0$  ist die Porosität der unverdichteten Partikelpackung.

Mit zunehmender Vorverdichtung verschiebt sich der Fließort in Abbildung 3-5 nach oben, d.h. größere Fließwiderstände sind mit zunehmender Verfestigung zu erwarten. Das Einsetzen von Gl. (3-27) in Gl. (3-26) ergibt eine nichtlineare Fließortgleichung eines kohäsiven Pulvers mit stationärem Fließen als Belastungsvorgeschichte:

$$\sigma_R = \sin\varphi_i \cdot (\sigma_{M,st} + \sigma_0) \cdot \frac{\tan\varphi_{st}}{\tan\varphi_i} \cdot \left[ \sqrt{\left( 1 - \frac{\tan\varphi_i}{\tan\varphi_{st}} \cdot \frac{\sigma_{M,st} - \sigma_M}{\sigma_{M,st} + \sigma_0} \right)^2} - \sin^2(\varphi_{st} - \varphi_i) - \tan\varphi_i \cdot \sin(\varphi_{st} - \varphi_i) \right] \quad (3-29)$$



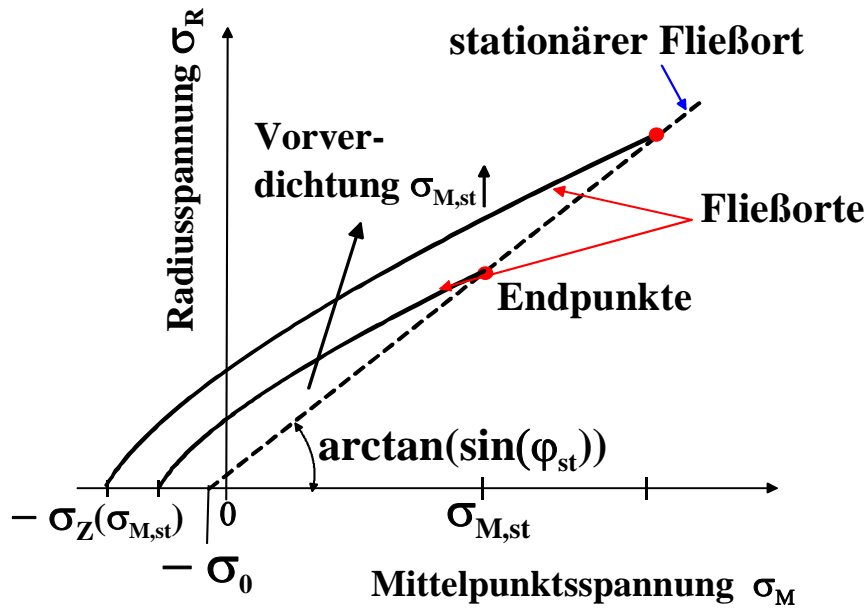


Abbildung 3-5: Radiusspannung über Mittelpunktsspannung der Fließcharakteristiken kohäsiver Pulver [91]

Diese nichtlineare Gleichung erscheint für einfache Kurvenanpassungen immer noch zu unhandlich. Deshalb wird Gl. (3-29) mit einer Taylor-Reihenentwicklung

$$\sigma_R = \sigma_R(\sigma_M = \sigma_{M,st}) + \left. \frac{d\sigma_R}{d\sigma_M} \right|_{\sigma_M = \sigma_{M,st}} \cdot (\sigma_M - \sigma_{M,st}) \quad (3-30)$$

am Übergang zum stationären Fließen linearisiert. Trotz oder wegen der ziemlich aufwändigen Herleitung erhält man bequeme und sehr gut handhabbare lineare  $\sigma_R(\sigma_M)$ - oder  $\tau(\sigma)$ -Fließortgleichungen [93]:

$$\sigma_R = \sin \varphi_i \cdot (\sigma_M + \sigma_Z) = \sin \varphi_i \cdot \left( \sigma_M + \frac{\sigma_{R,st}}{\sin \varphi_i} - \sigma_{M,st} \right) \quad (3-31)$$

$$\tau = \tan \varphi_i \cdot (\sigma + \sigma_Z) = \tan \varphi_i \cdot \left( \sigma + \frac{\sigma_{R,st}}{\sin \varphi_i} - \sigma_{M,st} \right) \quad (3-32)$$

Die Plausibilität der beiden Gln. (3-31) und (3-32) lässt sich wie folgt verdeutlichen. Für die Gleichheit der beiden Mittelpunktsspannungen  $\sigma_M = \sigma_{M,st}$  folgen jeweils unmittelbar die Radiusspannung des Mohrkreises für stationäres Fließen  $\sigma_{R,st} = \sigma_R$  [93].

Werden einer Partikelpackung Scherspannungen aufgeprägt, so haben diese Scherverzerrungen (Winkeländerungen  $\gamma = ds / dh_{Sz}$ ) zur Folge. Diese verlaufen zunächst reversibel, d.h. im Bereich elastischer Verformung. Es ist möglich, aus dem Anstieg des linearen Teils der Abscherkurve (Abbildung 3-6, linkes Diagramm  $F_S = f(s)$ ) den Schüttgutleitmodul  $G_b$  experimentell zu ermitteln. Mit Gleichung (3-8) kann anschließend der Elastizitätsmodul des Schüttgutes  $E_b$  bestimmt werden.

In der Verfahrenstechnik ist primär das mechanische Verhalten des fließenden Schüttgutes von Interesse. Die aufgeprägten Scherspannungen erreichen das Niveau einer Fließspannung bzw. Fließspannungsfunktion, was zu irreversiblen Scherverzerrungen in der Scherzone führt. Im Mikromaßstab bedeutet dies: massenhaftes Kontaktversagen [20]. Mit dieser physikalisch begründeten, theoretischen Vorbereitung können direkte Scherversuche sehr bequem ausgewertet werden [78], Abbildung 3-6.

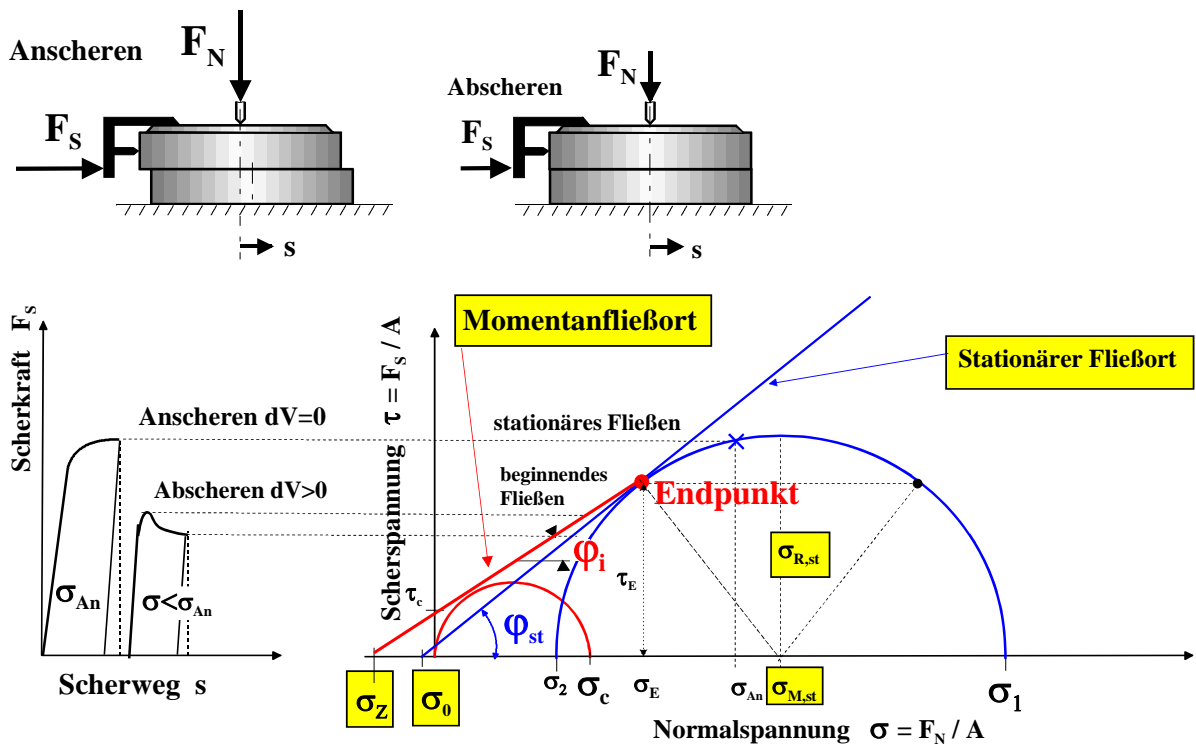


Abbildung 3-6: Direkter Scherversuch und linearisierte Grenzspannungsfunktion für beginnendes und stationäres Fließen [87]

Die wesentlichen Kennwerte des Fließverhaltens sind nunmehr in einem Satz überschaubarer, linearer konstitutiver Gleichungen

für die momentane Verfestigung (Verfestigungsort)

$$\sigma_R = \sin\varphi_i \cdot (-\sigma_M + \sigma_{M,st}) + \sigma_{R,st} \quad (3-33)$$

für das beginnende Fließen (Fließort)

$$\sigma_R = \sin\varphi_i \cdot (\sigma_M - \sigma_{M,st}) + \sigma_{R,st} \quad (3-34)$$

sowie das stationäre Fließen (stationärer Fließort)

$$\sigma_{R,st} = \sin\varphi_{st} \cdot (\sigma_{M,st} + \sigma_0) \quad (3-35)$$

enthalten [85]. Im Falle der Gleichheit von  $\sigma_M = \sigma_{M,st}$  in den Gln. (3-33) und (3-34) folgt unmittelbar für die Radiusspannung des Mohrkreises für stationäres Fließen  $\sigma_{R,st} = \sigma_R$ , Abbildung 3-7. Es lässt sich ablesen, dass zur Beschreibung von beginnender Verfestigung, beginnendem und stationärem Fließen vier physikalisch begründete Parameter ausreichend sind, drei Materialparameter und der Einfluss der Vorverfestigungsspannung [85]:

1. innerer Reibungswinkel  $\varphi_i$  – beginnende Partikelreibung versagender Partikelkontakte, bspw. Coulomb-Reibung
2. stationärer Reibungswinkel  $\varphi_{st}$  – stationäre Partikelreibung versagender Partikelkontakte, zunehmende Kohäsion durch deformierte Partikelkontaktflächen (beschrieben mit dem Kontaktverfestigungskoeffizient  $\kappa$  oder mithilfe der Reibungswinkel  $\varphi_{st} - \varphi_i$ , (3-26). Je weicher die Partikelkontakte sind, desto größer ist der Unterschied zwischen diesen beiden Reibungswinkeln und desto ausgeprägter verhält sich das Pulver kohäsiv.
3. isostatische Zugfestigkeit  $\sigma_0$  – extrapolierte isostatische Zugfestigkeit der unverfestigten Partikelkontakte ohne jegliche Deformation, entspricht einer charakteristischen Haftkraft innerhalb eines unverdichteten Pulvers.
4. Mittelpunktspannung während des stationären Fließens  $\sigma_{M,st}$  – Einfluss der Vorverfestigung als zusätzliche Normalkraft im Partikelkontakt, hängt direkt mit der durch die Vorverfestigung erhöhten Pulverdichte zusammen.

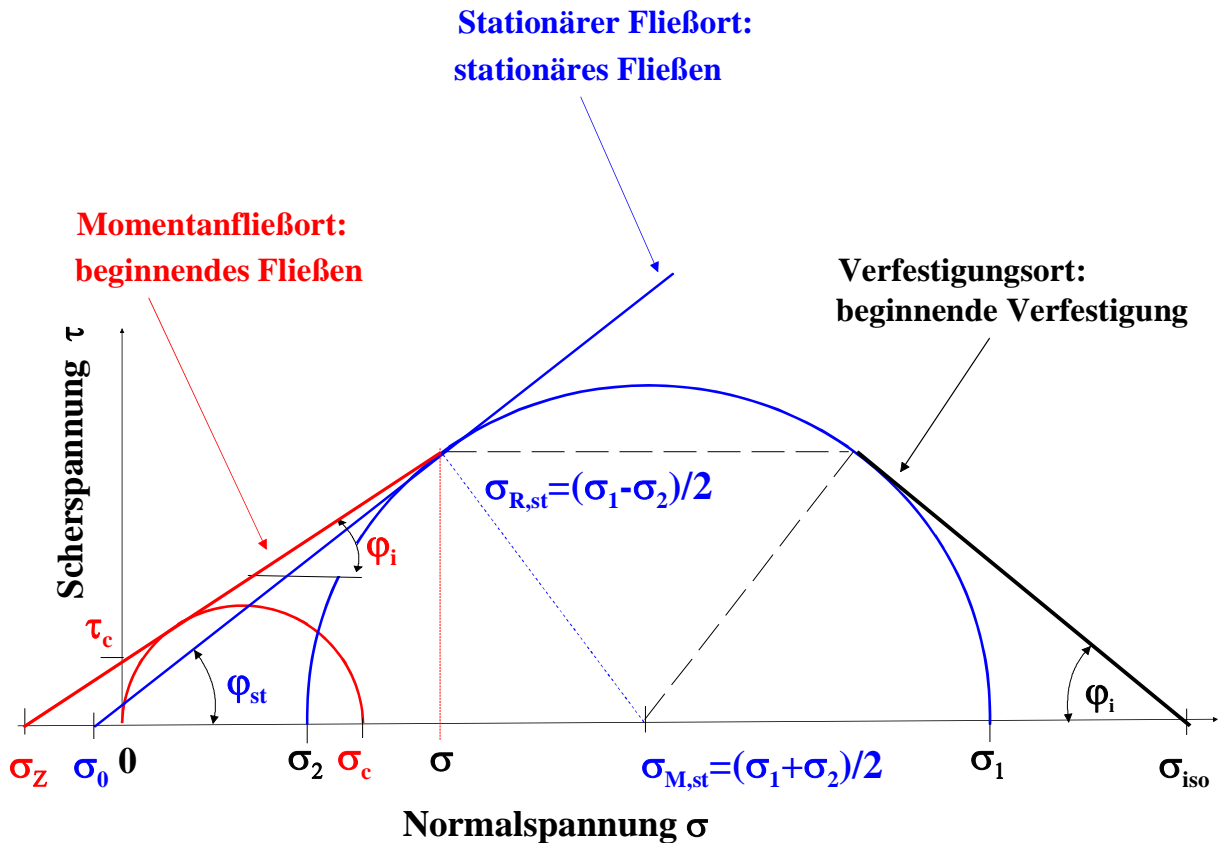


Abbildung 3-7: Fließbedingungen für Verfestigung, beginnendes und stationäres Fließen [87]

Mit diesen Parametern als physikalischer Basis wurden Modelle für beginnende Pulververfestigung, Fließen und stationäres Fließen entwickelt. Die Fließoberfläche aus der Plastizitätstheorie wird durch einfache lineare Kombination von Radius- und Mittelpunktspannungen beschrieben [85, 89, 90, 91,].

Diese Kontaktmodelle werden ebenso für die Simulation der Scherdynamik kohäsiver Pulver mit der Diskreten-Elemente-Methode sowie für die Kalibrierung dieser Simulationen mit Messungen in der Scherzelle gebraucht [94, 95].

Der wichtigste Parameter der Vorgeschichte ist der äußere mittlere Druck  $\sigma_{M,st}$  beim stationären Fließen. Alternativ wäre es auch möglich, die Normalspannung des Endpunktes des Fließortes  $\sigma_E$ , Abbildung 3-6, die Normalspannung beim Anscheren  $\sigma_{an}$  oder die größte Hauptspannung  $\sigma_1$  zu nutzen. Letzt genannte ist für die Trichterauslegung nötig und drückt einen scheinbaren einaxialen Spannungszustand bzw. eine Vergleichsspannung aus.

Der messbare Zusammenhang zwischen den zwei Reibungswinkeln kann wie folgt ausgedrückt werden [47, 48, 87]:

$$\tan\varphi_{st} = (1 + \kappa) \cdot \tan\varphi_i \quad (3-20)$$

Je größer die Differenz zwischen den Reibungswinkeln ausfällt, desto kohäsiver verhält sich das Schüttgut. Ist das Schüttgut leicht fließend bis rieselfähig fallen alle Fließorte nahezu auf einer einzigen Gerade zusammen, d.h. beide Winkel sind praktisch gleich ( $\varphi_i \approx \varphi_{st}$ ) und die Partikelkontakte zeigen sehr steifes Verhalten ( $\kappa \rightarrow 0$ ).

Ein Spezialfall des kohäsiven, stationären Schüttgutfließens stellt das kohäsionslose, stationäre Fließen nach Jenike [27] dar, welches durch effektiven Fließort beschrieben wird:

$$\sigma_{R,st} = \sin\varphi_e \cdot \sigma_{M,st} \quad (3-36)$$

Durch Gleichsetzen der Gln. (3-35) und (3-36) erhält man den Zusammenhang zwischen dem effektiven Reibungswinkel, der druckabhängig ist, und dem stationären Reibungswinkel:

$$\sin\varphi_e = \sin\varphi_{st} \cdot \left( 1 + \frac{\sigma_0}{\sigma_{M,st}} \right) \quad (3-37)$$

Für große mittlere Spannungen  $\sigma_{M,st}$  nähern sich beide Winkel an ( $\varphi_e \rightarrow \varphi_{st}$ ). Dies stimmt mit Erfahrungen realer Schertests überein.

### 3.4 Verfestigungsfunktionen und Fließfunktion

Mit der Gleichung des linearen Fließortes, Gl. (3-34), lässt sich im positiven Druckbereich die einaxiale Druckfestigkeit  $\sigma_c$  ermitteln:

$$\sigma_c = \frac{2 \cdot (\sin\varphi_{st} - \sin\varphi_i)}{1 - \sin\varphi_i} \cdot \sigma_{M,st} + \frac{2 \cdot \sin\varphi_{st}}{1 - \sin\varphi_i} \cdot \sigma_0 \quad (3-38)$$

Entsprechend ist es möglich, ebenfalls mit Gl. (3-34), den Betrag der einaxialen Zugfestigkeit im Bereich der Zugspannung (negative Normalspannung) zu berechnen:

$$\sigma_{Z,1} = \frac{2 \cdot (\sin\varphi_{st} - \sin\varphi_i)}{1 + \sin\varphi_i} \cdot \sigma_{M,st} + \frac{2 \cdot \sin\varphi_{st}}{1 + \sin\varphi_i} \cdot \sigma_0 \quad (3-39)$$

Mittels beider Verfestigungsfunktionen kann physikalisch begründet die lineare Zunahme der einaxialen Druck- und Zugfestigkeit mit der Zunahme der mittleren Spannung  $\sigma_{M,st}$  beschrieben werden. Der Anstieg beider Funktionen, der auch ein Maß der Fließfähigkeit für das fließende Kontinuum darstellt, wird vor allem durch den Unterschied zwischen den Reibungswinkeln  $\varphi_i$  und  $\varphi_{st}$  bestimmt. Gl. (3-20) verdeutlicht ebenso, dass dieser Anstieg auch die Nachgiebigkeit der Partikelkontakte im Mikromaßstab charakterisiert [87], Tabelle 3-2.

Bei der Trichterdimensionierung wird, statt der bisher verwendeten, mittleren Spannung  $\sigma_{M,st}$ , die größte Hauptspannung  $\sigma_1$  benutzt [27]. Beide charakterisieren in ausreichendem Maße im Falle des stationären Fließens die Beanspruchungsvorgeschichte. Die beiden Spannungen lassen sich mit der Fließbedingung für stationäres Fließen gegenseitig ersetzen:

$$\sigma_{M,st} = \frac{\sigma_1 - \sigma_0 \cdot \sin\varphi_{st}}{1 + \sin\varphi_{st}} \quad (3-40)$$

Bei Beachtung der gemeinsamen Auftragung von Druck- und Zugspannungen in Abbildung 3-7 sowie von Druck- und Zugkräften in Abbildung 2-6 bis Abbildung 2-9 werden die linearen Verläufe der Verfestigungsfunktionen in Abbildung 3-8 zusammen über die größte Hauptspannung  $\sigma_1$  dargestellt. Die charakteristischen Geraden der Momentan- und der Zeitverfestigung begegnen sich jeweils im gleichen Abschnitt der Abszisse ( $\sigma_1$ -Achse), welcher, ähnlich wie die Zugfestigkeit in Abbildung 3-1, ein inneres Verfestigungsvermögen ohne äußere Spannung, ausschließlich aufgrund der Partikelhaftung, charakterisiert.

Den Zusammenhang zwischen dem elastisch-plastischen Partikelkontaktverfestigungskoeffizienten  $\kappa = f(ff_c)$  und der Fließfunktion nach Jenike [27] erhält man mit Hilfe des Anstieges der Druckfestigkeitsfunktion  $\sigma_c(\sigma_1)$ :

$$\kappa = \frac{1 + (2 \cdot ff_c - 1) \cdot \sin\varphi_i}{\tan\varphi_i \cdot (2 \cdot ff_c - 1 + \sin\varphi_i)} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 - \left( \frac{1 + (2 \cdot ff_c - 1) \cdot \sin\varphi_i}{2 \cdot ff_c - 1 + \sin\varphi_i} \right)^2} - 1} \quad (3-41)$$

Tabelle 3-2 beinhaltet halbempirische Werte gemäß Jenike und die Ergänzung „nicht fließend, verhärtet“ für  $ff_c \leq 1$  nach Tomas [78]. Kleine Werte der Fließfunktion bedeuten kohäsives bis nicht fließendes Verhalten des Schüttgutes, welches durch Kontaktnachgiebigkeiten hervorgerufen wird. Im Gegensatz dazu erzeugen steife Kontakte frei fließendes Schüttgutverhalten.

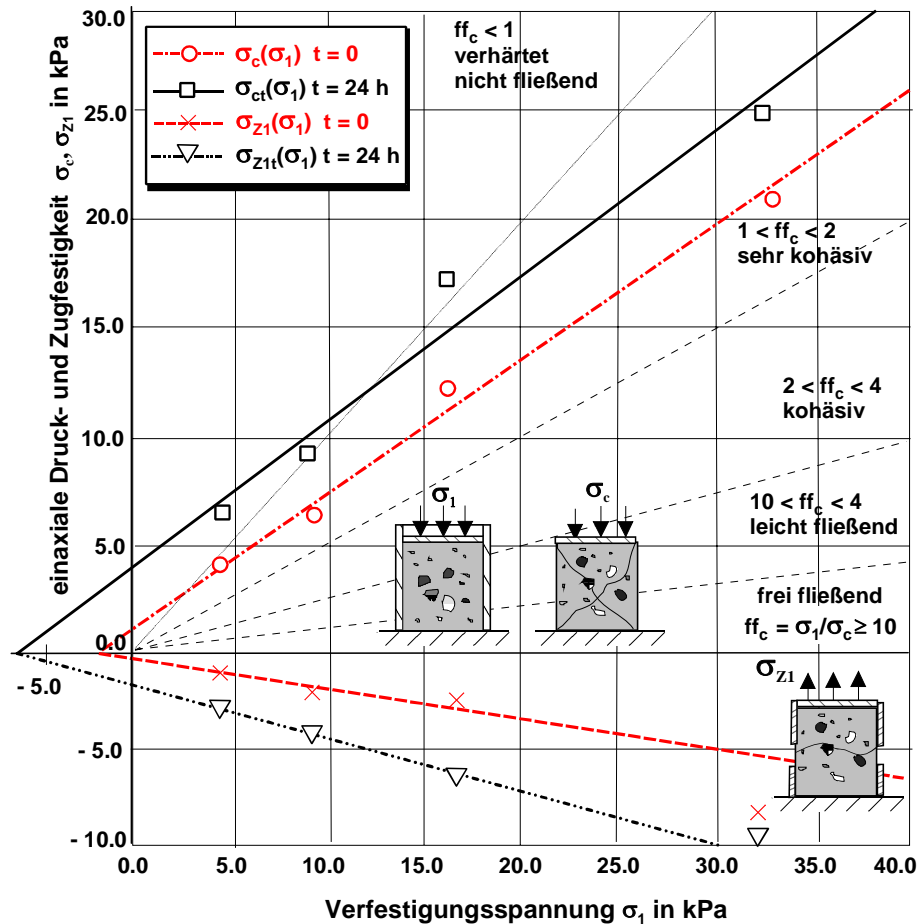


Abbildung 3-8: Verfestigungsfunktionen von Titandioxid-Pulver bei Lagerzeiten von  $t = 0$  und  $t = 24$  h [87]

### 3.5 Fließverhalten und Fließkennwerte von Schüttgütern

Tabelle 3-1 enthält die verschiedenen Fließorte, die Beschreibungen und die entsprechenden Reibungswinkel. In Abbildung 3-9 sind die Fließorte und die Fließkennwerte von Schüttgütern dargestellt.

Tabelle 3-1: Fließorte [87]

Fließort	beschreibt:	Reibungswinkel
Fließort für $t = 0$	beginnendes Fließen	innerer Reibungswinkel $\varphi_i$
Zeitfließort, $t > 0$	Fließen nach Lagerzeit	innerer Reibungswinkel $\varphi_{it}$
Stationärer Fließort	stationäres Fließen	stationärer innerer Reibungswinkel $\varphi_{st}$
Effektiver Fließort	stationäres Fließen	effektiver innerer Reibungswinkel $\varphi_e$
Wandfließort	Wandreibung	Wandreibungswinkel $\varphi_w$

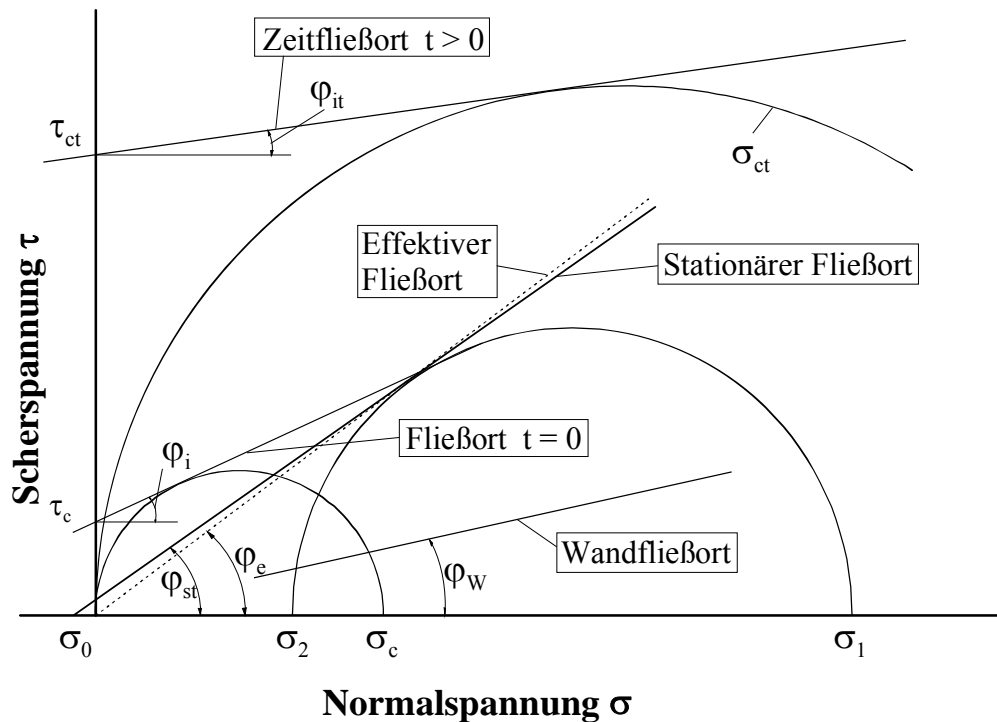


Abbildung 3-9: Fließkennwerte von Schüttgütern

Die in Abbildung 3-9 gezeigten Fließkennwerte sind im Einzelnen:

- $\sigma_0$  isostatische Zugfestigkeit
- $\sigma_c$  einaxiale Druckfestigkeit
- $\sigma_1$  größte Verfestigungshauptspannung
- $\sigma_2$  kleinste Verfestigungshauptspannung
- $\tau_c$  Kohäsion
- $\tau_{ct}$  Kohäsion nach Zeitverfestigung

Die Reibungswinkel  $\varphi_i$ ,  $\varphi_e$ ,  $\varphi_{st}$  sowie  $\varphi_w$  sind in Tabelle 3-1 erläutert.

Für die Kennzeichnung der Festigkeitseigenschaften kohäsiver Schüttgüter ist vor allem die einaxiale Druckfestigkeit  $\sigma_c$  bedeutsam, die vom Schüttgut aufgrund der größten Verfestigungshauptspannung  $\sigma_1$  aufgebracht wird, und die als Ergebnis der interpartikulären Kontaktkräfte entsteht. Die einaxiale Druckfestigkeit entspricht der Spannung, die in einem mit  $\sigma_1$  verfestigten Schüttgutzyylinder bei einachsigem Druck zum Bruch bzw. Fließen führt. Ein Schüttgut fließt somit umso leichter, je geringer  $\sigma_c$  bei vorhandener Verfestigungsspannung  $\sigma_1$  ist. Für die Charakterisierung der Fließfähigkeit kohäsiver Schüttgüter eignet sich deshalb besonders der Quotient aus der größten Verfestigungshauptspannung  $\sigma_1$  und der einaxialen Druckfestigkeit  $\sigma_c$ , der als Fließfunktion  $ff_c$  (im Sinne einer dimensionslosen Kennzahl) bezeichnet wird:



$$ff_c = \frac{\sigma_1}{\sigma_c} \quad (3-42)$$

Tabelle 3-2: Fließverhalten und elastisch-plastischer Kontaktverfestigungskoeffizient  $\kappa$  für einen inneren Reibungswinkel  $\varphi_i = 30^\circ = \text{konstant}$  [87]

Fließfunktion	$\kappa$ -Werte	$\varphi_{st}$ in $^\circ$	Bewertung	Beispiele
$10 < ff_c$	0,01006 – 0,107	30,3 – 33	frei fließend (rieselfähig)	trockener Sand
$4 < ff_c < 10$	0,107 – 0,3	33 – 37	leicht fließend	feuchter Sand
$2 < ff_c < 4$	0,3 – 0,77	37 – 46	kohäsiv	trockener Zement
$1 < ff_c < 2$	0,77 – $\infty$	46 – 90	sehr kohäsiv	feuchte Pulver
$ff_c < 1$	$\infty$	-	nicht fließend	gealterter Zement

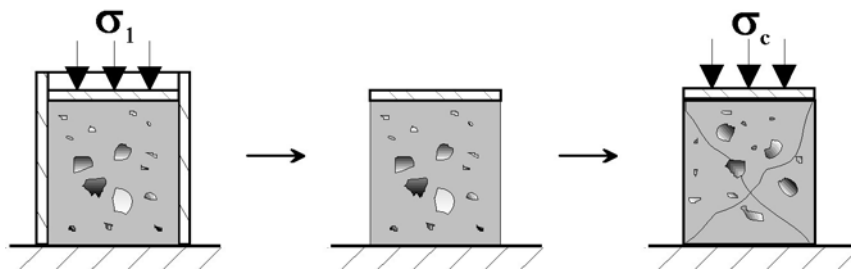


Abbildung 3-10: Prinzipielle Darstellung der Fließfunktion als Verhältnis von Verfestigung ( $\sigma_1$ ) zu Festigkeit ( $\sigma_c$ )

Abbildung 3-10 veranschaulicht auf einfache Weise die Fließfunktion  $ff_c$ . Ein Schüttgut wird in einem Zylinder mit ideal reibungsfreien Wänden mit der Spannung  $\sigma_1$  verdichtet. Anschließend wird der so erzeugte Schüttgutzylinder belastet, bis er zerstört wird. Damit ist seine Festigkeit  $\sigma_c$  erreicht. Aus diesem Verhältnis lässt sich mit Gl. (3-42) die Fließfunktion bestimmen.

Bei kohäsionslosem Gut ist keine Druckfestigkeit vorhanden ( $\sigma_c = 0$ ), so dass der Wert der Fließfunktion gegen unendlich strebt. Die Klasse „verhärtet“ wird dadurch abgegrenzt, dass hier die einaxiale Druckfestigkeit  $\sigma_c$  größer als die Verfestigungsspannung  $\sigma_1$  ist.

Für die experimentelle Bestimmung der genannten Fließkennwerte kohäsiver Schüttgüter finden alle direkten und indirekten Schergeräte Verwendung [71]. Tabelle 3-3 zeigt die Systematik der Schergeräte [72].

Tabelle 3-3: Systematik der Schergeräte [72]

Schergeräte	direkte		indirekte		
	Translation	Rotation	einachsig (einaxial)	zweiachsig (biaxial)	dreiachsig (triaxial)
Belastung	Translation	Rotation	einachsig (einaxial)	zweiachsig (biaxial)	dreiachsig (triaxial)
Beispiele	Rahmen- schergerät	Torsions- schergerät	einachsiger Druckver- such	Biaxialgerät Biaxialbox	Triaxialgerät Triaxialbox
	Jenike- schergerät	Ringscherge- rät			
	Einfach- schergerät				

### 3.5.1 Wandfließverhalten

Mit Wandreibung wird die Reibung zwischen einem Schüttgut und einem Festkörper (z.B. die Behälterwand eines Silos) beschrieben. Das Wandfließverhalten kann für jeweils eine Kombination von Schüttgut und Wandmaterial durch einen einzigen Wandfließort beschrieben werden. Damit ist die Wandschubspannung  $\tau_w$  nur von der wirkenden Normalspannung  $\sigma_w$  abhängig, aber nicht von der vorausgegangenen Verfestigung und damit unabhängig von der Schüttgutdichte  $\rho_b$ .

Zur Ermittlung des Wandfließortes wird der Scherboden gegen eine Probe des zu untersuchenden Wandmaterials ersetzt, Abbildung 3-11. Die Schüttgutprobe wird mit einer gewählten Normallast vor verdichtet und angesichert. Anschließend wird die Normallast während des Schervorgangs stufenweise reduziert, sobald sich ein stationärer Scherkraftverlauf eingestellt hat. So erhält man mehrere Wertepaare von aufgebrachtener Normalspannung und resultierender Scherspannung, mit denen der Wandfließort in der  $\sigma$ - $\tau$ -Ebene dargestellt werden kann, Abbildung 3-11.

Der Wandfließort ist, ebenso wie der Fließort, eine Fließgrenze und beschreibt, welche Wandschubspannung  $\tau_w$  benötigt wird, um ein Schüttgut unter einer vorgegebenen Wandnormalspannung  $\sigma_w$  auf einer Fläche zu verschieben. Der Anstieg des Wandfließortes ist der Wandreibungswinkel  $\varphi_w$  [3, 33]:

$$\varphi_w(\sigma_w) = \arctan \frac{\tau_w(\sigma_w)}{\sigma_w} \quad (3-43)$$

Der Wandreibungswinkel ist der Winkel, den eine Gerade durch einen Punkt des Wandfließortes und den Koordinatenursprung mit der Achse der Wandnormalspannung einschließt. Einfluss auf die Wandreibung und damit auf den Wandreibungswinkel  $\varphi_w$  nehmen unter anderem [54]:

- die Oberflächenbeschaffenheit des Wandmaterials  
(Rauigkeit, chemische und mechanische Behandlung)
- das Schüttgut  
(chem. Zusammensetzung, Feuchtigkeit, Temperatur, Lagerzeit, Partikelgrößenverteilung)

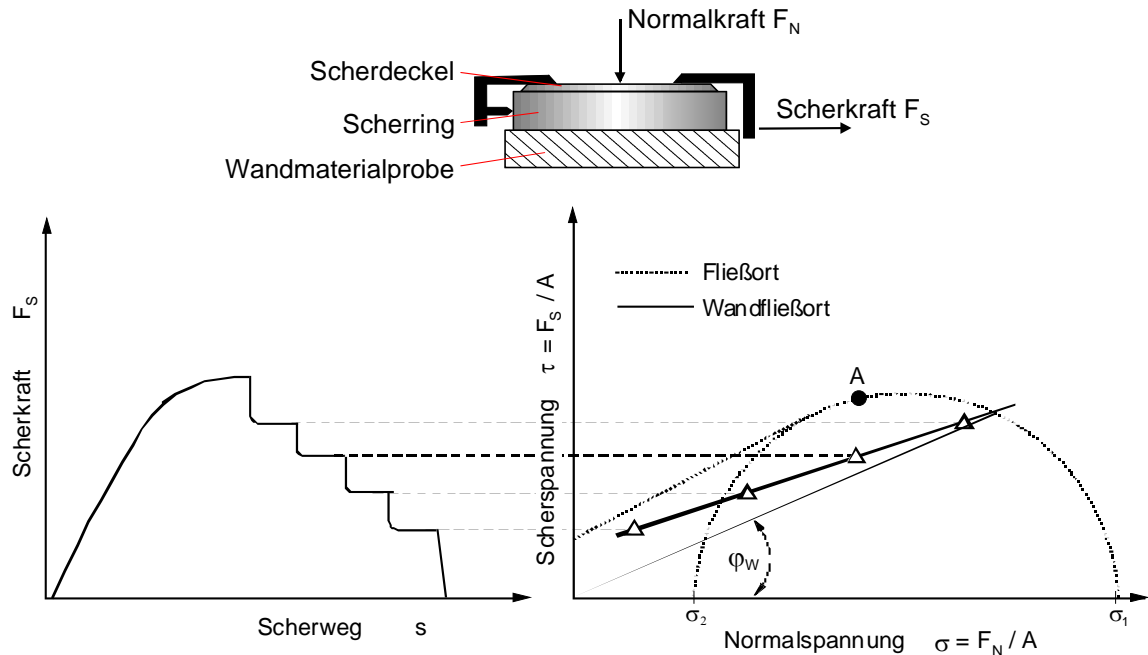


Abbildung 3-11: Ermittlung des Wandfließortes und des Wandreibungswinkels  $\varphi_W$

Zwischen dem Schüttgut und dem Wandmaterial kann es zu Adhäsionseffekten kommen. Dies ist an dem dann vorhandenen Schnittpunkt der Wandfließortgeraden mit der Scherspannungsachse zu erkennen (Ordinatenabschnitt: Adhäsion  $\tau_a$ ).

### 3.5.2 Zeitverfestigung

Manche Schüttgüter tendieren dazu, sich bei längerer Lagerung in Ruhe und unter zusätzlichen Druckspannungen (z.B. in einem Silo oder Transportcontainer) zu verfestigen. Dieses Verhalten wird als Zeitverfestigung bezeichnet und beruht auf dem allmählichen Anwachsen der Haftkräfte zwischen benachbarten Partikeln.

Um die Zeitverfestigung zu quantifizieren, wird von dem entsprechenden Schüttgut ein Zeitfließort bestimmt. Jedem Momentanfließort wird hierbei ein Zeitfließort zugeordnet. Das Ansicheren erfolgt mit den gleichen Normalspannungen wie bei dem entsprechenden Momentanfließort. Anschließend wird die Scherzelle unter einer Normallast, die der größten

Hauptspannung  $\sigma_1$ , die aus den Ergebnissen der Momentanfließorte ermittelt wird, entspricht, für einen bestimmten Zeitraum gelagert. Nach dieser Zeit werden die Proben abgeschert und die Veränderung zum Fließen ohne vorherige Lagerung dokumentiert.

### 3.5.3 Fließverhalten bei höheren Pulverfeuchten

Die Betrachtungen in Abschnitt 2.4 zeigen, dass auf der Oberfläche adsorbierte Flüssigkeitsschichten einen erheblichen Einfluss auf die Haftung von Partikeln haben. Dabei ist die genaue Wirkung der Adsorptionsschichten sehr schlecht vorhersagbar. Auf der einen Seite wird die Partikelhaftung durch die zusätzlich eingetragenen Wechselwirkungspotentiale verstärkt, auf der anderen Seite kann aber auch eine Verringerung der Haftung eintreten. Dies kann dann geschehen, wenn bspw. mehr Flüssigkeit in die Schüttung eingetragen wird, als die Flüssigkeitsbrücken aufnehmen können. Dann kann es zu „Schmiereffekten“ kommen, die die Bindung zwischen den Partikeln lockern. Das gleiche kann auch passieren, wenn das mit Flüssigkeit beladene Schüttgut verfestigt wird. Die Flüssigkeit wird aus den Zwischenräumen der Schüttung heraus gepresst und bildet einen Schmierfilm aus, der unter anderem die Reibung zwischen den Partikeln herab setzt.

## 3.6 Kompressionsverhalten kohäsiver Schüttgüter

Gekennzeichnet ist das Kompressionsverhalten eines kohäsiven Schüttgutes durch die Druckabhängigkeit der Packungsdichte. Es ist verbunden mit dem Fließverhalten und wird von den nachfolgend aufgeführten Mikrovorgängen beeinflusst [18]:

- Umlagerung steifer Partikeln mit steifen Kontakten zu einer dichteren Zufallspackung
- Inelastische Deformation von weichen Kontakten von harten Partikeln (bspw. mineralischer Herkunft)
- Inelastische Deformation weicher Partikeln (bspw. biologisches Material)

Soll ein Schüttgut hinsichtlich Tablettier- bzw. Brikettierfähigkeit unter hohem Druck beurteilt werden, ist außerdem notwendig, zwischen folgenden Eigenschaften zu unterscheiden

- Kompressibilität: das Vermögen einer bleibenden Volumenreduktion unter Druckbeanspruchung

- Verpressbarkeit: das Vermögen, unter Druck einen Pressling mit ausreichender Festigkeit zu erzeugen

Zur Beschreibung des Kompressionsverhaltens kohäsiver Schüttgüter wird eine isentropische Schüttgutkompression in dem Sinne angenommen, dass sich während der Verdichtung der Ordnungszustand der Zufallspackung nicht ändert, d.h. ein Übergang in eine reguläre Packungsstruktur findet nicht statt [18, 87].

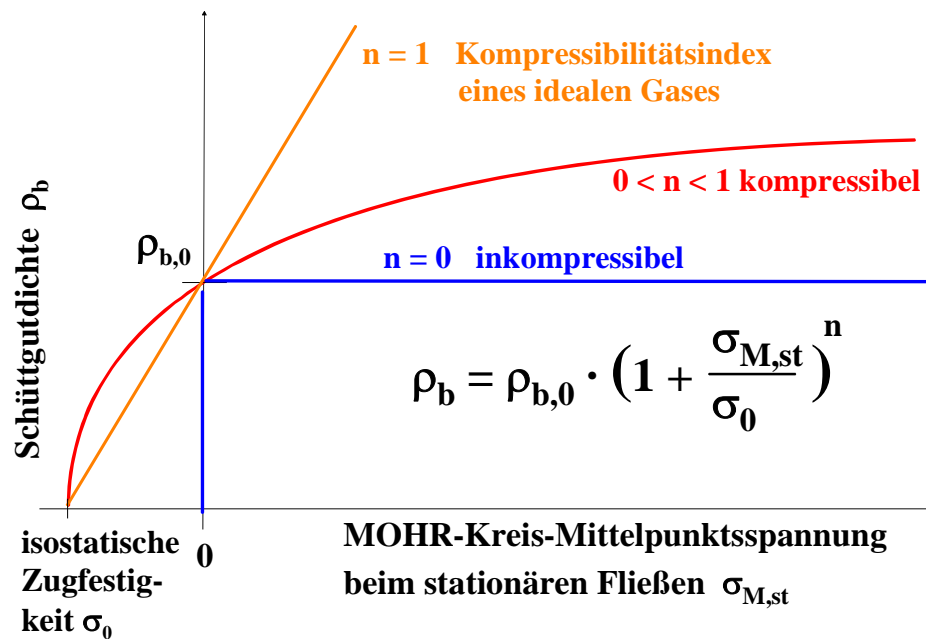


Abbildung 3-12: Isentropische Kompression eines kohäsiven Schüttgutes [18]

Es kann die Gleichung für adiabate Gaskompression genutzt werden, wobei noch die innere Haftung zwischen den Partikeln berücksichtigt werden muss [83, 85]. Unter diesen Voraussetzungen können die folgenden Funktionen zur Beschreibung des Kompressionsverhaltens eingeführt werden [87]:

1. Die Auswertung der so genannten Kompressionsrate als eine inkrementale *Verdichtungsrate* ist besonders in den Fällen geeignet, wenn sich der Kompressibilitätsindex  $n$  über mehrere Größenordnungen des mittleren Kompressionsdruckes  $p = \sigma_{M,st}$  ändern kann, Abbildung 3-12.

$$\frac{d\rho_b}{d\sigma_{M,st}} = n \cdot \frac{\rho_b}{\sigma_0 + \sigma_{M,st}} \quad (3-44)$$

Verantwortlich hierfür ist eine Änderung der Prozess bestimmenden Mikrovorgänge, bspw. bei großen Pressdrücken der Übergang der Kontaktdeformation zur Deformation des gesamten Partikels. Eine Übersicht, Schüttgüter hinsichtlich ihrer Kompressibilität einzuteilen, ist in Tabelle 3-4 zu finden.

- Die Kompressionsfunktion, erhältlich durch Integration der Kompressionsrate (Gl. (3-44)), beschreibt den Zusammenhang zwischen Schüttgutdichte  $\rho_b$  und angewandtem mittlerem Druck  $\sigma_{M,st}$  nach Entlastung und elastischer Rückdehnung [83, 85]:

$$\frac{\rho_b}{\rho_{b,0}} = \left( 1 + \frac{\sigma_{M,st}}{\sigma_0} \right)^n \quad (3-45)$$

- Die spezifische Kompressionsarbeit  $W_{m,b}$  eines kohäsiven Schüttgutes, erhältlich durch erneute Integration der Kompressionsfunktion (Gl. (3-45), mit  $n \neq 1$ ), beschreibt die Abhängigkeit der äußeren massenbezogenen Arbeit (untere Grenze  $\sigma_{M,st} = 0$ ) vom mittleren Druck  $\sigma_{M,st}$  beim Verdichten:

$$W_{m,b} = n \cdot \int_0^{\sigma_{M,st}} \frac{d\sigma_{M,st}}{\rho_b(\sigma_{M,st})} = \frac{n}{1-n} \cdot \frac{\sigma_0}{\rho_{b,0}} \cdot \left[ \left( 1 + \frac{\sigma_{M,st}}{\sigma_0} \right)^{1-n} - 1 \right] \quad (3-46)$$

Tabelle 3-4: Der Kompressibilitätsindex  $n$  von Schüttgütern [18]

Index $n$	Bewertung	Beispiele
$0 < n \leq 0,01$	inkompressibel	Kies
$0,01 < n \leq 0,05$	wenig kompressibel	feiner Sand
$0,05 < n \leq 0,1$	kompressibel	trockene Pulver
$0,1 < n \leq 1$	sehr kompressibel	feuchte Pulver

Die Gleichungen (3-45) und (3-46) zur Auswertung von Kompressionsversuchen kohäsiver Schüttgüter setzen eine isostatische Zugfestigkeit  $\sigma_0$  verschieden von Null voraus. Es existieren nun einige Schüttgüter, bei denen die Extrapolation des stationären Fließortes einen Wert von praktisch Null ergibt. Dies wird durch den effektiven Fließort nach Jenike [27] als spezieller Fall des stationären Fließens beschrieben. Für derartige Schüttgüter ist die Verwendung einer Auswertemethodik ratsam, die von Tomas in [80] und [81] publiziert wurde.

Es ist ebenso möglich, im Falle von  $\sigma_0 = 0$  das Drucker-Prager-Modell mit Ergänzungen [13] zu nutzen. Das verwendete Gleichungssystem ist aufgrund der verwendeten 9 Stoffparameter

jedoch überbestimmt. Tatsächlich sind nur 5 Parameter ausreichend für ein überschaubares Stoffgesetz des Fließens kohäsiver Schüttgüter Gln. (3-33), (3-34), (3-35) und (3-45) [87]. Beispielsweise werden die partikelmechanischen Modellvorstellungen genutzt, den Einfluss mechanischer Schwingungen [35] oder das Auspressen flüssigkeitsgesättigter Filterkuchen unter hohem Druck [55] physikalisch konsistent zu beschreiben und zu verstehen.

## 4 Schwingungsübertragung im Schüttgut

### 4.1 Einführung in die kennzeichnenden Parameter harmonischer Schwingungen

Der einfachste Schwingungsvorgang ist die harmonische Schwingung. Die in den experimentellen Untersuchungen dieser Arbeit aufgegebenen Schwingungen sind ebenfalls harmonisch, so dass sich in diesem Kapitel auf diese Art Schwingungen beschränkt werden soll. Harmonische Schwingungen (Abbildung 4-1) können entweder durch eine Sinus- (Gl. (4-1)) oder Cosinus-Funktion (Gl. (4-2)) beschrieben werden, und es können folgende kinematische Größen verwendet werden: die Schwingungsdauer  $T$  (bzw. die davon abgeleiteten Größen Frequenz  $f$  oder Kreisfrequenz  $\omega$ ), der Schwingweg  $x$  sowie dessen zeitliche Ableitungen Schwinggeschwindigkeit  $\dot{x}$  (bzw.  $v$ ) und Beschleunigung  $\ddot{x}$  (bzw.  $a$ ). Den Zusammenhang zwischen den kinematischen Größen zeigt Tabelle 4-1.

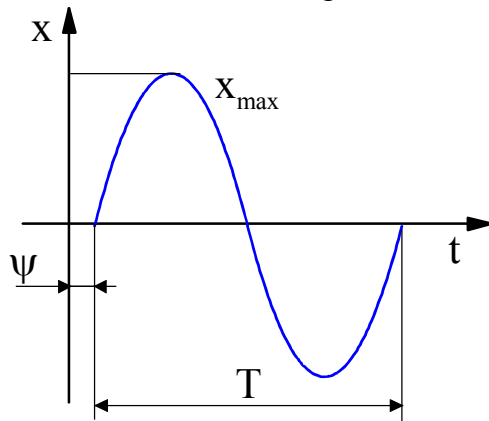


Abbildung 4-1:  
Harmonische Schwingung (hier  $\Psi \neq 0$ )

$$x = x_{\max} \cdot \sin\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (4-1)$$

$$x = x_{\max} \cdot \cos(\omega t + \psi) \quad (4-2)$$

$\psi$  ist der Nullphasenwinkel, der von der Wahl des Nullpunktes der Zeitachse abhängt, deshalb willkürlich und für Einzelschwingungen unwichtig ist [16]. Beide Schwingungen kann man sich mit Hilfe eines Zeigers der Länge  $x_{\max}$  veranschaulichen, der mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um einen festen Punkt rotiert, Abbildung 4-2. Ist  $(\omega t + \psi)$  der Winkel, den der Zeiger mit der Abszisse einschließt, so sind  $x = x_{\max} \cos(\omega t + \psi)$  und  $y = x_{\max} \sin(\omega t + \psi)$  die Projektionen von  $x_{\max}$  auf die Koordinatenachsen. Beide können zur Beschreibung der rotierenden Bewegung des Zeigers verwendet werden. Der Schwingweg und dessen Zeitableitungen ändern ihren Wert periodisch mit der Zeit  $t$ . Die Maximalwerte heißen Amplitude (z.B. Schwingweg-Amplitude  $x_{\max}$ ), Abbildung 4-1. Es werden genau zwei dieser vier Größen ( $x$ ,  $v$ ,  $a$ ,  $f$ ) benötigt, um die Schwingung eindeutig zu beschreiben. Alle weiteren Größen legt man



dadurch zwangsläufig fest. Wird beispielsweise die Frequenz  $f$  variiert und der Schwingweg  $x$  konstant gehalten, so steigt mit der Frequenz gleichzeitig die Beschleunigung, und zwar quadratisch, (Gl. (4-9)), sowie linear mit der Frequenz die Schwinggeschwindigkeit, (Gl. (4-7)). Hält man hingegen die Beschleunigung konstant, sinkt mit steigender Frequenz der Schwingweg mit dem Faktor  $1/\omega^2$  und die Schwinggeschwindigkeit mit dem Faktor  $1/\omega$ .

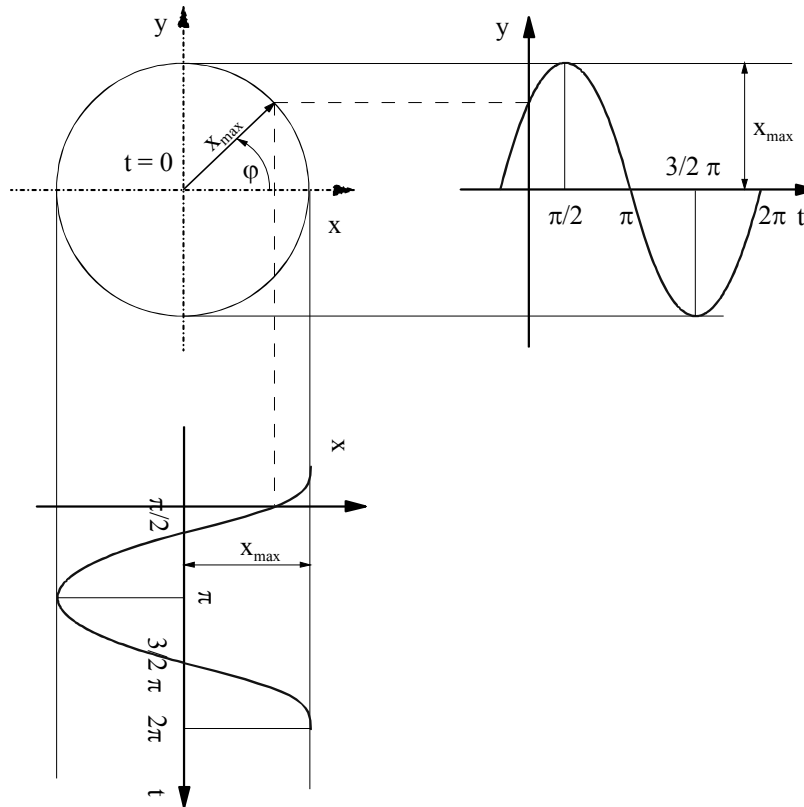


Abbildung 4-2: Kreisdiagramm harmonischer Schwingungen

Tabelle 4-1: Kinematische Größen harmonischer Schwingungen

Parameter	Symbol	Einheit	Gleichung	Bemerkungen
Frequenz bzw. Kreisfrequenz	$f, \omega$	Hz, 1/s	$f = 1/T$	(4-3) T-Schwingungsdauer, Abbildung 4-1
			$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$	(4-4)
Schwingweg	$x$	m	$x = x_{\max} \cdot \sin(\omega t)$	(4-5) $x_{\max}$ lt. Abbildung 4-1
Schwinggeschwindigkeit	$v, \dot{x}$	m/s	$\dot{x} = dx/dt$ $= x_{\max} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$	(4-6) $\dot{x}_{\max} = x_{\max} \cdot \omega$ (4-7)
Schwingbeschleunigung	$a, \ddot{x}$	m/s <sup>2</sup>	$\ddot{x} = d^2x/dt^2$ $= -x_{\max} \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t)$	(4-8) $\ddot{x}_{\max} = x_{\max} \cdot \omega^2$ (4-9)

Für die rechnerische Untersuchung von Schwingungsvorgängen ist oft die komplexe Darstellung vorteilhaft. Sie ermöglicht neben einer übersichtlichen Berechnung die anschauliche Darstellung der einzelnen Terme linearer Bewegungsgleichungen und wird deshalb in der Elektrotechnik fast ausschließlich verwendet. Stellt man sich das Kreisdiagramm der Schwingung, Abbildung 4-2, als eine Figur in der komplexen Zahlenebene vor, so lässt sich der Spitze des Zeigers  $x_{\max}$  die komplexe Zahl  $z$  zuordnen:

$$\begin{aligned} z &= x + j \cdot y = x_{\max} \cdot \cos(\omega t + \psi) + j \cdot x_{\max} \cdot \sin(\omega t + \psi) \\ &= x_{\max} \cdot [\cos(\omega t + \psi) + j \cdot \sin(\omega t + \psi)] \end{aligned} \quad (4-10)$$

wobei

$$j^2 = -1 \quad (4-11)$$

Nach der Euler'schen Formel [16]

$$\cos \alpha + j \cdot \sin \alpha = e^{j\alpha} \quad (4-12)$$

kann Gl. (4-10) in der einfachen Form

$$z = x_{\max} \cdot e^{j(\omega t + \psi)} = x_{\max} \cdot e^{j\psi} \cdot e^{j\omega t} \quad (4-13)$$

geschrieben werden. Mit Einführung der komplexen Amplitude  $B$

$$B = x_{\max} \cdot e^{j\psi} \quad (4-14)$$

folgt

$$z = B \cdot e^{j\omega t} \quad (4-15)$$

Die komplexe Darstellung der Geschwindigkeit ist somit

$$\frac{dz}{dt} = \dot{z} = B \cdot j\omega \cdot e^{j\omega t} \quad (4-16)$$

Wird in Gl. (4-12)  $\alpha$  durch  $\pi / 2$  ersetzt [16], so folgt  $j = e^{j\pi/2}$ . Somit wird Gl. (4-16) zu

$$\dot{z} = B \cdot \omega \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\omega t} = B \cdot \omega \cdot e^{j\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)} \quad (4-17)$$

Entsprechend gilt für die Beschleunigung

$$\ddot{z} = B \cdot \omega^2 \cdot e^{j(\omega t + \pi)} \quad (4-18)$$

Gegenüber dem Amplitudenvektor eilen somit der Geschwindigkeitsvektor um  $90^\circ$  und der Beschleunigungsvektor um  $180^\circ$  voraus. Tabelle 4-2 stellt zusammenfassend die

unterschiedlichen Schreibweisen der Schwingungsparameter dar. So wird deutlich, dass es sich hier nur um unterschiedliche Schreibweisen für den jeweils gleichen Parameter handelt.

Tabelle 4-2: Gegenüberstellung von trigonometrischer und komplexer Schreibweise für Schwingungsparameter

Parameter	trigonometrisch	komplex
Schwingweg	$x(t) = x_{\max} \cdot \sin(\omega t + \psi)$	$x(t) = x_{\max} \cdot e^{j\psi} \cdot e^{j\omega t}$
Schwinggeschwindigkeit	$\dot{x}(t) = x_{\max} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \psi)$	$\dot{x}(t) = x_{\max} \cdot e^{j\psi} \cdot j\omega \cdot e^{j\omega t}$
Schwingbeschleunigung	$\ddot{x}(t) = -x_{\max} \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \psi)$	$\ddot{x}(t) = -x_{\max} \cdot e^{j\psi} \cdot \omega^2 \cdot e^{j\omega t}$

## 4.2 Freie Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad

### 4.2.1 Freie Schwingungen ungedämpfter Systeme

In Tabelle 4-3 sind mehrere Schwingungssysteme mit einem mechanischen Freiheitsgrad sowie die den Koordinaten entsprechenden Bewegungsgleichungen dargestellt. Diese lassen sich alle auf die Grundform

$$\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = 0 \quad (4-19)$$

bringen. Zur vollständigen Beschreibung gehören Anfangsbedingungen, d.h. bei der Zeit  $t = 0$  ist  $x = x_0$  (Anfangsauslenkung aus dem Ruhezustand) und  $\dot{x} = v_0$  (Anfangsgeschwindigkeit). Die Lösung der Differentialgleichung (Gl. (4-19)) kann mit zwei verschiedenen Methoden erfolgen.

#### 1. Lösungsmethode:

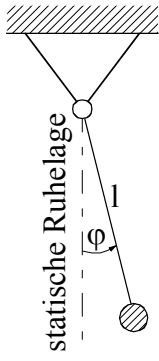
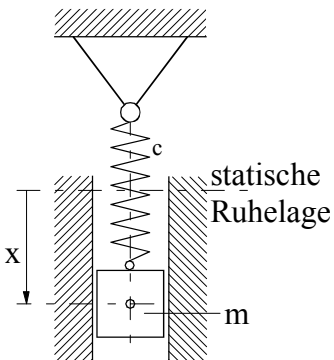
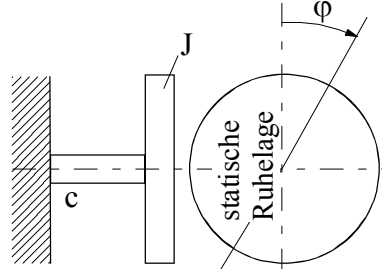
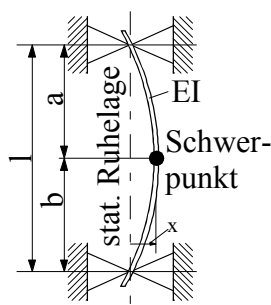
Ausgegangen wird von einer Anschauung, die besagt, dass die Masse eine Schwingung ausführt, deren einfachstes Gesetz die harmonische Schwingung ist. Da eine DGL 2-ter Ordnung vorliegt, muss der Lösungsansatz zwei Konstanten enthalten, die sich mit Hilfe der Anfangsbedingungen bestimmen lassen. Der Lösungsansatz kann somit wie folgt aussehen:

$$x = x_{\max} \cdot \cos(\omega t - \psi) \text{ und} \quad (4-20)$$

$$\dot{x} = v = -x_{\max} \cdot \omega \cdot \sin(\omega t - \psi) \quad (4-21)$$

Der Ansatz erfüllt die Bewegungsgleichung, damit stellen die Gln. (4-20) und (4-21) die allgemeine Lösung dar [16].

Tabelle 4-3: Schwingungssysteme mit einem Freiheitsgrad [16]

System	Bezeichnung	Art der Rückstellkraft, Bewegungsgleichung
	Mathematisches Pendel	Schwerkraftmoment (nur für kleine $\varphi$ linear) $M = -m \cdot g \cdot l$ $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \varphi = 0$
	Geführtes Fe- der-Masse- System	Federkraft $F = -c(x + x_0)$ ( $x_0$ Federverlängerung in der statischen Ruhelage) $\ddot{x} + \frac{c}{m} \cdot x = 0$
	Torsions- schwinger	Federmoment $M = -c \cdot \varphi$ $\ddot{\varphi} + \frac{c}{J} \cdot \varphi = 0$ $J$ – Trägheitsmoment des Torsionsschwingers
	Biege- schwinger	Balkenfederkraft $F = -\frac{1}{\alpha} \cdot x$ mit $\alpha = \frac{a}{b}$ $\ddot{x} + \frac{1}{\alpha \cdot m} \cdot x = 0$

Werden die Anfangsbedingungen in Gln. (4-20) und (4-21) eingesetzt, so folgt

$$x_0 = x_{\max} \cdot \cos \psi$$

sowie

$$v_0 = x_{\max} \cdot \omega \cdot \sin \psi$$

und daraus durch Quadrieren und Addieren beider Beziehungen ( $\cos^2\psi + \sin^2\psi = 1$ )

$$\left(\frac{x_0}{x_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{x_{\max} \cdot \omega}\right)^2 = 1 \quad (4-22)$$

mit

$$x_{\max} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \quad (4-23)$$

wobei

$$\tan \varphi = \frac{v_0}{x_0 \cdot \omega} \quad (4-24)$$

Die gesuchte Lösung lautet somit [16]

$$x = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \cdot \cos\left(\omega t - \arctan \frac{v_0}{x_0 \cdot \omega}\right) \quad (4-25)$$

Wird diese harmonische Schwingung in eine Summe zweier harmonischer Teilschwingungen zerlegt, so ergibt sich

$$x = x_0 \cdot \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \cdot \sin \omega t \quad (4-26)$$

Die Diskussion dieser Lösung erfolgt im Anschluss an die Darstellung des zweiten möglichen Lösungsweges.

## 2. Lösungsmethode:

Es soll die in der Mathematik allgemein zur Lösung linearer Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten übliche Methode heran gezogen werden. Es wird dabei von dem Ansatz

$$x = a \cdot e^{pt} \quad (4-27)$$

ausgegangen. Somit werden

$$\dot{x} = p \cdot a \cdot e^{pt} \quad \text{und} \quad (4-28)$$

$$\ddot{x} = p^2 \cdot a \cdot e^{pt} \quad (4-29)$$

Werden die Gln. (4-27) und (4-29) in Gl. (4-19) eingesetzt, ergibt sich die Gleichung

$$a \cdot x^{pt} \cdot (p^2 + \omega^2) = 0 \quad (4-30)$$

und das charakteristische Polynom

$$p^2 + \omega^2 = 0 \quad (4-31)$$

mit den Lösungen

$$p_1 = +j\omega \quad \text{und} \quad p_2 = -j\omega$$

Es gilt

$$j^2 = -1 \quad (4-11)$$

Da die Differentialgleichung, Gl. (4-19), linear ist, lässt sich die Gesamtlösung aus dem Fundamentalsystem unter Hinzufügung von Konstanten, die die Anfangsbedingungen erfüllen müssen, zusammen setzen. Somit ergibt sich die allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} x &= a_1 \cdot e^{j\omega t} + a_2 \cdot e^{-j\omega t} \\ \dot{x} &= j\omega \cdot (a_1 \cdot e^{j\omega t} - a_2 \cdot e^{-j\omega t}) \end{aligned} \quad (4-32)$$

Die Berechnung der Konstanten liefert für die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} x_0 &= a_1 + a_2 \\ v_0 &= j\omega(a_1 - a_2) \end{aligned}$$

und daraus:

$$a_1 = \frac{1}{2} \left( x_0 - j \frac{v_0}{\omega} \right) \quad (4-33)$$

und

$$a_2 = \frac{1}{2} \left( x_0 + j \frac{v_0}{\omega} \right) \quad (4-34)$$

Werden die Gln. (4-33) und (4-34) in Gl. (4-32) eingesetzt, so folgt

$$x = x_0 \cdot \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} - \frac{v_0}{\omega} \cdot \frac{j(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})}{2} \quad (4-35)$$

Nach der Euler'schen Formel gilt

$$\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} = \cos \omega t \quad (4-36)$$

sowie

$$j \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2} = -\sin \omega t \quad (4-37)$$

Damit ergibt sich wiederum (4-26)

$$x = x_0 \cdot \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \cdot \sin \omega t \quad (4-26)$$

Die auf unterschiedlichen Wegen gefundenen Lösungen (Gln. (4-25) und (4-26)) sollen nun kurz diskutiert werden. Aus Gl. (4-25) ist zu erkennen, dass eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz  $\omega$ , welche auch als Eigenkreisfrequenz bezeichnet wird, vorliegt. Die Eigenfrequenz berechnet sich zu  $f = \omega / 2\pi$ . Diese Kreisfrequenz hängt nur von den Parametern des Systems und nicht von den Anfangsbedingungen ab. Sie kann unmittelbar aus der Bewegungsgleichung abgelesen werden. Mit der Kreisfrequenz ist auch die Periodendauer gegeben. Diese Aussagen gelten jedoch nur für lineare dämpfungsfreie Systeme. Gl. (4-26) zeigt, dass sich die harmonische Bewegung bei vorgegebenem Anfangsaus Schlag und vorgegebener Anfangsgeschwindigkeit aus zwei harmonischen Komponenten gleicher Frequenz zusammensetzt, deren Amplitude von den Anfangsbedingungen bestimmt wird. Es soll jedoch darauf hingewiesen werden, dass nur bei ungedämpften Schwingungen der Anfangsaus Schlag allein den Cosinusanteil und die Anfangsgeschwindigkeit den Sinusteil bestimmen [16].

#### 4.2.2 Freie Schwingungen gedämpfter Systeme

Alle realen Schwingungssysteme enthalten Bewegungswiderstände. In der Schwingungslehre werden diese Widerstände als Dämpfung bezeichnet. Um auf eine lineare Bewegungsgleichung zu kommen, wird am häufigsten auf einen geschwindigkeitsproportionalen Ansatz zurück gegriffen. Wird der Proportionalitätsfaktor mit  $b$  bezeichnet, ergibt sich für das System Abbildung 4-3:

$$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + c \cdot x = 0 \quad (4-38)$$

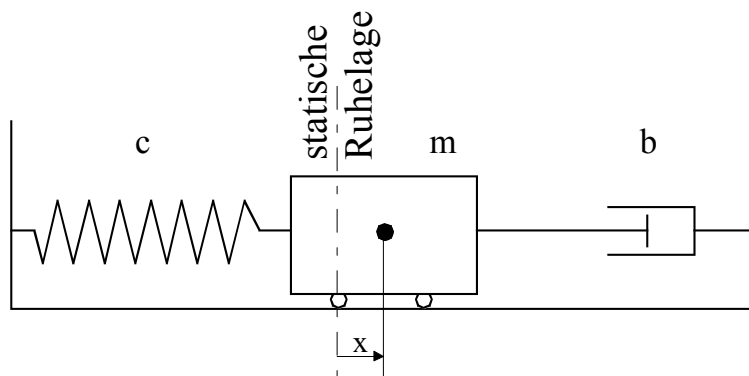


Abbildung 4-3: Schwingungssystem mit Dämpfung

Eingeführt werden soll nun die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad (4-39)$$

sowie die Abklingkonstante

$$\delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{m} \quad (4-40)$$

Damit gilt

$$\ddot{x} + 2 \cdot \delta \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0 \quad (4-41)$$

Die Anfangsbedingungen entsprechen denen im Abschnitt 4.2.1 ( $t = 0$ :  $x = x_0$ ,  $\dot{x} = v_0$ ). Es wurden bei der Lösung der ungedämpften linearen Schwingungsgleichung zwei Lösungsmethoden vorgestellt. Für Gl. (4-41) ist 1. Lösungsmethode nicht geeignet, da der entstehende Abklingvorgang schlecht analytisch eingestuft werden kann. Die 2. Lösungsmethode benutzte die allgemein in der Mathematik zur Lösung linearer Differentialgleichungen n-ter Ordnung benutzte Vorgehensweise und wird auch in diesem Fall zum Ziel führen. Es wird von dem Ansatz

$$x = a \cdot e^{pt} \quad (4-27)$$

ausgegangen. Setzt man ihn in Gl. (4-41) ein, erhält man die Gleichung

$$a \cdot e^{pt} \cdot (p^2 + 2 \cdot \delta \cdot p + \omega_0^2) = 0 \quad (4-42)$$

und das charakteristische Polynom

$$p^2 + 2 \cdot \delta \cdot p + \omega_0^2 = 0 \quad (4-43)$$

mit den Wurzeln

$$p_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \quad (4-44)$$

und

$$p_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \quad (4-45)$$

Führt man  $a_1$  und  $a_2$  als Integrationskonstanten ein, lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung Gl. (4-41)

$$x = a_1 \cdot e^{p_1 t} + a_2 \cdot e^{p_2 t} \quad (4-46)$$



$$\dot{x} = p_1 \cdot a_1 \cdot e^{p_1 t} + p_2 \cdot a_2 \cdot e^{p_2 t} \quad (4-47)$$

oder nach Einsetzen der Gln. (4-44) und (4-45) in Gl. (4-46)

$$x = e^{-\delta t} \left[ a_1 \cdot e^{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} + a_2 \cdot e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} t} \right] \quad (4-48)$$

Die Lösung ist aus zwei Faktoren zusammen gesetzt. Der erste Faktor  $e^{-\delta t}$  geht mit wachsender Zeit  $t$  gegen Null, er bestimmt also das Abklingen der durch die Anfangsbedingungen ausgelenkten Schwinggröße;  $\delta$  wird deshalb als Abklingkonstante bezeichnet. Der Klammerausdruck gibt die Form der Bewegung an. Es ist zu erkennen, dass diese wesentlich davon beeinflusst wird, ob der Wurzelausdruck  $(\delta^2 - \omega_0^2)^{0,5}$  reelle oder komplexe Lösungen hat. Da er dimensionsbehaftet ist, wird das Lehr'sche Dämpfungsmaß  $\mathfrak{D}$  eingeführt [16]

$$\mathfrak{D} = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{b}{2 \cdot m \cdot \omega_0} = \frac{b}{2\sqrt{mc}} \quad (4-49)$$

Es sei darauf hingewiesen, dass die Dämpfung von den Parametern des gesamten Systems mechanisch abhängig ist. Wenn sie experimentell an einem System bestimmt werden soll, ist die Kenntnis der anderen Systemparameter ( $m$ ,  $c$ ) nötig, um den kennzeichnenden Dämpfungswiderstand  $b$  angeben zu können. Mit Gl. (4-49) gilt

$$\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = \omega_0 \cdot \sqrt{\mathfrak{D}^2 - 1} \quad (4-50)$$

Demnach wird die Form der Bewegung durch drei Fälle bestimmt [16]:

$\mathfrak{D} > 1$	starke Dämpfung
$\mathfrak{D} = 1$	Grenzfall, kritische Dämpfung
$\mathfrak{D} < 1$	schwache Dämpfung

Die drei Fälle sollen nun einzeln untersucht werden. Die Integrationskonstanten folgen aus den Anfangsbedingungen

$$t = 0: x = x_0 \text{ ergibt } x_0 = a_1 + a_2 \quad (4-51)$$

und

$$t = 0: \dot{x} = v_0 \text{ ergibt } v_0 = p_1 a_1 + p_2 a_2 \quad (4-52)$$

Daraus findet man

$$a_1 = \frac{v_0 - p_2 x_0}{p_1 - p_2} \quad (4-53)$$

und

$$a_2 = \frac{p_1 x_0 - v_0}{p_1 - p_2} \quad (4-54)$$

Für starke Dämpfung ( $\mathfrak{D} > 1$ ) gilt:

$$\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = \mu \quad (4-55)$$

$$p_1 = -\delta + \mu \quad (4-56)$$

$$p_2 = -\delta - \mu \quad (4-57)$$

Werden die Gln. (4-53) bis (4-57) in Gl. (4-48) eingesetzt, ergibt sich

$$x = e^{-\delta t} \left[ x_0 \frac{e^{\mu t} + e^{-\mu t}}{2} + \frac{v_0 + x_0 \delta}{\mu} \cdot \frac{e^{\mu t} - e^{-\mu t}}{2} \right] \quad (4-58)$$

Wird auch noch der Zusammenhang zwischen den Exponential- und den hyperbolischen Funktionen

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (4-59)$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (4-60)$$

berücksichtigt, so gilt:

$$x = e^{-\delta t} \left[ q_0 \cosh \mu t + \frac{v_0 + q_0 \delta}{\mu} \cdot \sinh \mu t \right] \quad (4-61)$$

Da hyperbolische Funktionen nicht periodisch sind, liegt für  $\mathfrak{D} > 1$  keine Schwingung sondern ein Kriechvorgang vor [16]. Weiterhin kann im Vergleich mit Gl. (4-26) festgestellt werden, dass die beiden Teilbewegungen nicht einer Anfangsbedingung allein zugeordnet werden können. Zur Beschreibung des Verlaufes der Schwinggröße ist eine dimensionslose Schreibweise besser geeignet. Mit

$$\bar{x} = \frac{x}{x_0}; \quad \tau = \omega_0 t; \quad \mu = \omega_0 \cdot \sqrt{\mathfrak{D}^2 - 1}; \quad \mathfrak{D} = \frac{\delta}{\omega_0}; \quad \bar{v}_0 = \frac{v_0}{x_0 \cdot \omega_0} \quad (4-62)$$

ergibt sich aus Gl. (4-61)

$$\bar{x} = e^{-\mathfrak{D}\tau} \left[ \cosh \left( \sqrt{\mathfrak{D}^2 - 1} \cdot \tau \right) + \frac{\bar{v}_0 + \mathfrak{D}}{\sqrt{\mathfrak{D}^2 - 1}} \cdot \sinh \left( \sqrt{\mathfrak{D}^2 - 1} \cdot \tau \right) \right] \quad (4-63)$$

Maschinentechnisch hat der Fall der starken Dämpfung nur marginale Bedeutung, was ebenso für den Grenzfall  $\vartheta = 1$  zutreffend ist. Bei starker Dämpfung schwingt das ausgelenkte System ohne Überschwingen in den Ausgangszustand zurück. Bei Kriechvorgängen in kohäsiven Pulvern hingegen treten mit der Zeit zunehmende Kontaktabplattungen und damit eine zunehmende Verdichtung des Pulvers auf.

Der Vollständigkeit halber soll aber der Grenzfall  $\vartheta = 1$  mit erwähnt werden. Hier gilt  $\delta^2 = \omega_0^2$  und  $p_1 = p_2 = -\delta$ . Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen  $t = 0: q = q_0; \dot{q}_0 = v_0$  folgt

$$x = e^{-\delta t} [x_0 + (v_0 + \delta \cdot x_0) \cdot t] \quad (4-64)$$

Auch diese Beziehung stellt einen Kriechvorgang dar [16].

Der schwachen Dämpfung  $\vartheta < 1$  fällt die größte Bedeutung zu. Für sie gilt

$$\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = j\omega \quad (4-65)$$

sowie

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \vartheta^2} \quad (4-66)$$

und somit

$$p_1 = -\delta + j\omega \quad (4-67)$$

$$p_2 = -\delta - j\omega \quad (4-68)$$

Für die Integrationskonstanten  $a_1$  und  $a_2$  folgt damit

$$a_1 = \frac{v_0 + x_0(\delta + j\omega)}{2j\omega} = \frac{x_0}{2} - j \frac{(v_0 + x_0\delta)}{2\omega} \quad (4-69)$$

$$a_2 = \frac{x_0(j\omega - \delta) - v_0}{2j\omega} = \frac{x_0}{2} + j \frac{(v_0 + x_0\delta)}{2\omega} \quad (4-70)$$

Werden die Gln. (4-67) bis (4-70) in Gl. (4-48) eingesetzt, so ergibt sich

$$x = e^{-\delta t} \left[ x_0 \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} - \frac{v_0 + x_0\delta}{\omega} \cdot j \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2} \right] \quad (4-71)$$

oder nach Einführung der trigonometrischen Funktionen

$$x = e^{-\delta t} \left[ x_0 \cdot \cos \omega t + \frac{v_0 + x_0\delta}{\omega} \cdot \sin \omega t \right] \quad (4-72)$$

Werden wiederum die dimensionslosen Größen

$$\bar{x} = \frac{x}{x_0}; \quad \tau = \omega_0 t; \quad \bar{v}_0 = \frac{v_0}{x_0 \cdot \omega_0} \quad (4-62)$$

eingeführt, ergibt sich

$$\bar{x} = e^{-\vartheta \tau} \left[ \cos(\sqrt{1-\vartheta^2} \cdot \tau) + \frac{\vartheta}{\sqrt{1-\vartheta^2}} \cdot \sin(\sqrt{1-\vartheta^2} \cdot \tau) + \bar{v}_0 \frac{1}{\sqrt{1-\vartheta^2}} \cdot \sin(\sqrt{1-\vartheta^2} \cdot \tau) \right] \quad (4-73)$$

Gl. (4-72) kann ebenso durch Zusammenfassen der beiden harmonischen Funktionen gleicher Kreisfrequenz in der folgenden Form geschrieben werden

$$x = e^{-\delta t} \cdot Q \cdot \cos(\omega t - \alpha) \quad (4-74)$$

Darin bedeuten

$$Q = \sqrt{x_0^2 + \left( \frac{v_0 + x_0 \delta}{\omega} \right)^2} \quad (4-75)$$

und

$$\alpha = \arctan \left( \frac{\delta}{\omega} + \frac{v_0}{x_0 \omega} \right) \quad (4-76)$$

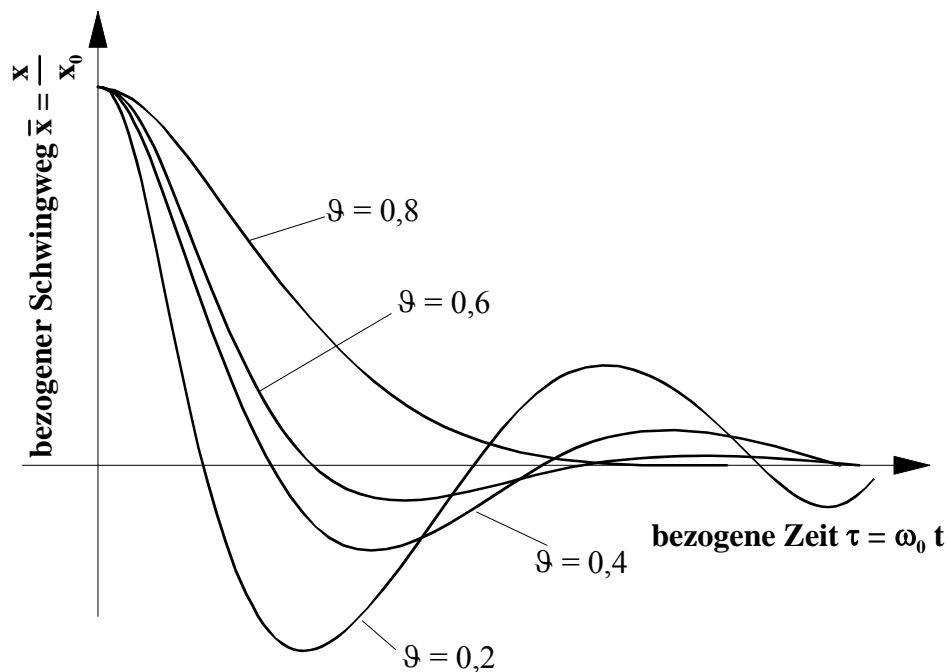
Tabelle 4-4 fasst für die drei Dämpfungsfälle noch einmal die erhaltenen Lösungen zusammen. Abbildung 4-4 zeigt den Ausschwingvorgang für verschiedene Dämpfungen mit  $v_0 = 0$ . In Maschinensystemen wirken häufig nur geringe Dämpfungen, so dass meist  $\vartheta < 0,2$  vorliegt. Die in Gl. (4-66) dargestellte Abhängigkeit der Schwingfrequenz von der Dämpfung  $\omega = \omega_0 \cdot (1-\vartheta^2)^{0,5}$  kann deshalb häufig vernachlässigt werden. Die Periodendauer des gedämpften Schwingers

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\vartheta^2}} \quad (4-77)$$

weicht somit in den meisten Fällen nur unwesentlich von der des ungedämpften Systems ab [16].

Tabelle 4-4: Freie Schwingungen gedämpfter Systeme [16]

DGL	$\ddot{x} + 2 \cdot \delta \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0$
Anfangsbedingungen	$t = 0: x = x_0; \dot{x} = v_0$
Lösungsansatz	$x = a \cdot e^{pt}$
dim.-lose Koordinaten	$\bar{x} = \frac{x}{x_0}; \tau = \omega_0 t; \mu = \omega_0 \cdot \sqrt{\vartheta^2 - 1}; \vartheta = \frac{\delta}{\omega_0}; \bar{v}_0 = \frac{v_0}{x_0 \cdot \omega_0}$
Lösung für	$\vartheta > 1 \quad \bar{x} = e^{-\vartheta \tau} \left[ \cosh(\sqrt{\vartheta^2 - 1} \cdot \tau) + \frac{\bar{v}_0 + \vartheta}{\sqrt{\vartheta^2 - 1}} \cdot \sinh(\sqrt{\vartheta^2 - 1} \cdot \tau) \right]$ $\vartheta = 1 \quad x = e^{-\delta t} [x_0 + (v_0 + \delta \cdot x_0) \cdot t]$ $\vartheta < 1 \quad \bar{x} = e^{-\vartheta \tau} \left[ \cos(\sqrt{1 - \vartheta^2} \cdot \tau) + \frac{\vartheta}{\sqrt{1 - \vartheta^2}} \cdot \sin(\sqrt{1 - \vartheta^2} \cdot \tau) + \bar{v}_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \vartheta^2}} \cdot \sin(\sqrt{1 - \vartheta^2} \cdot \tau) \right]$

Abbildung 4-4: Ausschwingvorgang für verschiedene Dämpfungen mit  $v_0 = 0$  [16]

### 4.2.3 Ermittlung von Systemparametern aus den freien Schwingungen

Systemparameter, die aus freien Schwingungen experimentell ermittelt werden können, sind z.B. Masse, Federkonstante sowie Dämpfungskonstante. Dabei gestaltet sich die Bestimmung der Massenkennwerte oft relativ unkompliziert. Federkonstante  $c$  und Dämpfungsparameter  $b$  lassen sich nun experimentell folgendermaßen bestimmen. Es wird von den Umkehrpunkten der Ausschwingkurve ausgegangen. Der Scheitelwert  $x_k$  trete zu der Zeit  $t_k$  auf. Es gilt nach Gl. (4-74)

$$x_k = e^{-\delta t_k} \cdot Q \cdot \cos(\omega t_k - \alpha) \quad (4-78)$$

Der benachbarte Scheitelwert  $x_{k+2}$ , der durch das Abklingen kleiner als  $x_k$  ist, tritt dann zu der Zeit  $t_{k+2}$

$$t_{k+2} = t_k + T = t_k + \frac{2\pi}{\omega} \quad (4-79)$$

auf. Für ihn gilt

$$x_{k+2} = e^{-\delta \left( t_k + \frac{2\pi}{\omega} \right)} \cdot Q \cdot \cos(\omega t_k + 2\pi - \alpha) \quad (4-80)$$

Das Verhältnis beider Scheitelwerte ergibt

$$\frac{x_k}{x_{k+2}} = e^{\delta \frac{2\pi}{\omega}} \quad (4-81)$$

Dieses Verhältnis ist von der Zeit  $t_k$  abhängig. Somit ist es möglich, daraus den Dämpfungswert (die Abklingkonstante)  $\delta$  zu bestimmen

$$2\pi \cdot \frac{\delta}{\omega} = \ln \left( \frac{x_k}{x_{k+2}} \right) \quad (4-82)$$

Der Logarithmus des Scheitelwert-Verhältnisses wird als logarithmisches Dekret  $\Lambda$  bezeichnet; es gilt

$$\Lambda = \ln \left( \frac{x_k}{x_{k+2}} \right) = 2 \ln \left| \frac{x_k}{x_{k+1}} \right| \quad (4-83)$$

Mit  $[\delta / \omega_0 = \vartheta]$  und  $[\omega = \omega_0 \cdot (1 - \vartheta^2)^{1/2}]$  ergibt sich

$$\Lambda = 2\pi \cdot \frac{\vartheta}{\sqrt{1 - \vartheta^2}} \quad (4-84)$$

und

$$\vartheta = \frac{\Lambda}{\sqrt{4\pi^2 + \Lambda^2}} \quad (4-85)$$

bzw. bei kleiner Dämpfung

$$\Lambda = 2\pi\vartheta \quad (4-86)$$

Aus der Ausschwingkurve ist zunächst zu erkennen, ob eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfung vorliegt. Es ist dann das Verhältnis zweier aufeinander folgender Extremwerte über den ganzen Ausschwingvorgang konstant. Zum anderen kann das Lehr'sche Dämpfungsmaß des Systems  $\vartheta$  unmittelbar angegeben werden. Anschließend erfolgt die Bestimmung der Federkonstante  $c$ . Dazu wird die Periodendauer  $T$  erfasst. Bei bekannter Masse kann die Federkonstante  $c$  mit Gln. (4-77) und (4-39) zu

$$c = \frac{4\pi^2 m}{T^2 \cdot (1 - \vartheta^2)} = \frac{m}{T^2} \cdot (4\pi^2 + \Lambda^2) \quad (4-87)$$

bestimmt werden. Für die Berechnung der Dämpfungskonstanten  $b$  gilt

$$b = 2 \cdot m \cdot \vartheta \cdot \omega_0 \quad (4-88)$$

Werden die Gln. (4-84) und (4-77) eingesetzt, folgt [16]

$$b = \frac{2 \cdot m \cdot \Lambda_0}{T} \quad (4-89)$$

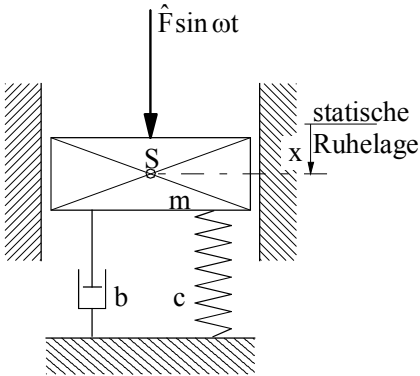
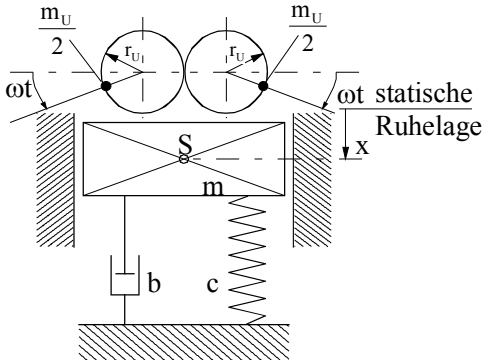
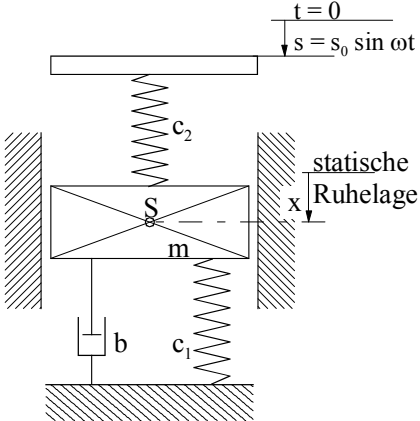
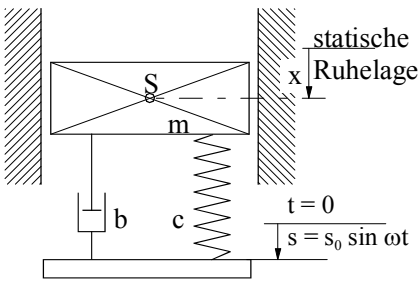
### **4.3 Erzwungene Schwingungen von mechanischen Systemen mit einem Freiheitsgrad**

Das Schwingungssystem bewegt sich nach einer durch die Systemparameter und die Anfangsbedingungen festgelegten Zeitfunktion. Bei Bestimmung der Bewegung durch äußere Kräfte, wie bspw. Erregerkräfte, Stützenbewegungen, wird von erzwungenen Schwingungen gesprochen. In den Bewegungsgleichungen tritt dann die Zeit explizit auf, hierbei handelt es sich um inhomogene Differentialgleichungen. An dieser Stelle soll nur auf Bewegungsgleichungen mit konstanten Koeffizienten und periodischer Erregung eingegangen werden.

### 4.3.1 Berechnung der stationären Bewegung bei harmonischer Erregung

Die Erregung eines mechanischen Systems kann einerseits durch Kräfte, die an der Masse angreifen, oder andererseits durch Stützenbewegung erfolgen.

Tabelle 4-5: Mechanische Schwingungssysteme bei harmonischer Erregung [16]

System	Bezeichnung	Bewegungsgleichung
	Erregerkraft mit konstanter Amplitude	$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = \hat{F} \cdot \sin \omega t \quad (4-90)$
	Erregung durch Unwucht	$(m + m_U)\ddot{x} + b\dot{x} + cx = m_U r_U \omega^2 \sin \omega t \quad (4-91)$
	Erregerkraft durch Federfußbewegung	$m\ddot{x} + b\dot{x} + c_1 x + c_2(x - s) = 0 \quad (4-92)$ <p>bzw.</p> $m\ddot{x} + b\dot{x} + (c_1 + c_2)x = c_2 s_0 \sin \omega t \quad (4-93)$
	Stützererregung	$m\ddot{x} + b(\dot{x} - \dot{s}) + c(x - s) = 0 \quad (4-94)$ $m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = b\omega s_0 \cos \omega t + cs_0 \sin \omega t \quad (4-95)$ $m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = s_0 \sqrt{(c^2 + b^2 \omega^2)} \sin(\omega t + \Psi) \quad (4-96)$



In Gl. (4-96) ist:

$$\Psi = \arctan \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2} \quad (4-97)$$

Für die Relativbewegung (x-s) kann man aus Gl. (4-94) mit der Substitution  $\ddot{y} = \ddot{x} - \ddot{s}$  finden

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = m \cdot s_0 \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t \quad (4-98)$$

Die genannten Bewegungsgleichungen lassen sich alle auf die Form

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = a \sin \omega t \quad (4-99)$$

bringen. Es handelt sich um eine inhomogene, lineare Differentialgleichung, deren Lösung sich durch Überlagerung/Superposition der Lösung der homogenen Differentialgleichung sowie der partikulären Lösung ergibt:

$$x = x_{\text{hom}} + x_{\text{part}} \quad (4-100)$$

Nach Gl. (4-72) lautet die Lösung der homogenen Gleichung für schwache Dämpfung

$$x_{\text{hom}} = e^{-\delta t} [D_1 \cos \omega t + D_2 \sin \omega t] \quad (4-101)$$

$D_1$  und  $D_2$  sind hierbei Integrationskonstanten, die unter Zuhilfenahme der Anfangsbedingungen aus Gl. (4-100) bestimmt werden können. Dazu ist jedoch noch das partikuläre Integral notwendig. Dieses kann über einen Ansatz, der die Bewegungsgleichung erfüllt und keine freien Konstanten enthält, gefunden werden.

Für einen ungedämpften Schwinger ( $\delta = 0$ ) würde der Ansatz  $q = x_{\text{max}} \cdot \sin \omega t$ , eingesetzt in Gl. (4-99), eine Bestimmungsgleichung für  $x_{\text{max}}$  liefern und somit die Differentialgleichung erfüllen. Für das gedämpfte System ist ein zweites Glied im Ansatz erforderlich, um auch die Cosinusanteile, die durch das Dämpfungsglied entstehen, zu erfassen. Es wird gesetzt

$$q_{\text{part}} = A \cdot \cos \omega t + B \cdot \sin \omega t \quad (4-102)$$

Das Einsetzen in Gl. (4-99) bringt

$$-A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t - 2\delta\omega(A \sin \omega t - B \cos \omega t) + \omega_0^2(A \cos \omega t + B \sin \omega t) = a \sin \omega t \quad (4-103)$$

Die Bestimmungsgleichungen für A und B lauten [16]

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\delta\omega B = 0 \quad (4-104)$$

$$-2\delta\omega A + B(\omega_0^2 - \omega^2) = a \quad (4-105)$$

Daraus ergeben sich

$$A = -\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)} \cdot B \quad (4-106)$$

$$B = \frac{a}{\omega_0^2 \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{4\delta^2\omega^2}{\omega_0^4 \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}\right]} \quad (4-107)$$

Es sollen folgende Abkürzungen eingeführt werden

$$\text{Lehr'sches Dämpfungsmaß } \vartheta = \frac{\delta}{\omega_0} \quad (4-62)$$

und

$$\text{bezogene Kreisfrequenz } \Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (4-108)$$

Damit werden die Gln. (4-106) bzw. (4-107) zu

$$A = -\frac{2\vartheta\Omega}{1 - \Omega^2} \cdot B \quad (4-109)$$

bzw.

$$B = \frac{a}{\omega_0^2} \cdot \frac{1 - \Omega^2}{(1 - \Omega^2)^2 + 4\vartheta^2\Omega^2} \quad (4-110)$$

Werden nun die beiden harmonischen Teilschwingungen gleicher Frequenz für den Sonderfall zweier rechtwinklig aufeinander stehender Komponenten (Phasenverschiebung  $\psi = \pi/2$ ) zusammen gefasst, dann gilt

$$x_{\text{part}} = A \cdot \cos \omega t + B \cdot \sin \omega t = C \cdot \sin(\omega t - \psi) \quad (4-111)$$

wobei

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{a}{\omega_0^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 4\vartheta^2\Omega^2}} \quad (4-112)$$

und

$$\tan \varphi = \frac{A}{B} = -\frac{2\vartheta\Omega}{1-\Omega^2} \quad (4-113)$$

Die spezielle Lösung der allgemeinen Bewegungsgleichung (Gl. (4-99)) lautet [16]:

$$x = e^{-\delta t} (D_1 \cos \omega t + D_2 \sin \omega t) + \frac{a}{\omega_0^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + 4\vartheta^2\Omega^2}} \cdot \sin(\omega t - \psi) \quad (4-114)$$

Die spezielle Lösung zeigt eine gedämpfte Schwingung mit der Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$ , die so genannte Eigenschwingung, und eine stationäre, eingeschwungene Bewegung mit der Erregerkreisfrequenz  $\omega$ . Durch die Dämpfung nähert sich die Eigenbewegung Null an.

Tabelle 4-6: Vergrößerungsfunktionen und Phasenverschiebungen für verschiedene Erregungsarten [16]

Gleichung	(4-90)	(4-93)	(4-91)	(4-98)	(4-96)
Beschleunigung a	$\frac{\hat{F}}{m}$	$\frac{c_2 s_0}{m}$	$\frac{m_U r_U}{m + m_U} \cdot \omega^2$	$s_0 \cdot \omega^2$	$\frac{s_0}{m} \cdot \sqrt{c^2 + b^2 \cdot \omega^2}$ $= s_0 \omega_0^2 \cdot \sqrt{1 + 4\vartheta^2 \Omega^2}$
Amplitude der stationären Schwingung	$\frac{\hat{F}}{c} \cdot V_1$	$\frac{c_2}{c_1 + c_2} \cdot s_0 \cdot V_1$	$\frac{m_U r_U}{m + m_U} \cdot V_3$	$s_0 \cdot V_3$	$s_0 \cdot V_2$
Vergrößerungsfunktion	$V_1 = \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + 4\vartheta^2\Omega^2}}$		$V_3 = \Omega^2 \cdot V_1$		$V_2 = \frac{\sqrt{1+4\vartheta^2\Omega^2}}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + 4\vartheta^2\Omega^2}}$
Zeitfunktion und Phasenverschiebung			$\sin(\omega t - \varphi)$ $\tan \varphi = \frac{2\vartheta\Omega}{1-\Omega^2}$		$\sin(\omega t + \gamma - \varphi)$ $\gamma - \varphi = \varphi^*$ $\tan \varphi^* = \frac{-2\vartheta\Omega^3}{1-\Omega^2(1-4\vartheta^2)}$

Für praktische Aufgaben kann festgestellt werden, dass, insbesondere bei kleinen Ausschlägen, der Dämpfungsansatz nicht voll zutreffend ist. Der eingeschwungene Zustand erfolgt demnach mit der Erregerfrequenz. Zwischen Bewegung und Erregung tritt eine Phasenverschiebung auf; die Bewegung läuft der Erregung um den Phasenwinkel  $\varphi$  nach. Für den Fall, dass  $\Omega = 1$  ist, beträgt die Phasenverschiebung  $\varphi = \pi/2$ , der Phasenwinkel ist dabei

unabhängig von der Dämpfung  $\delta$ . Die Schwingungsamplitude wird durch die Erregergröße und eine Vergrößerungsfunktion, die von der Dämpfung und dem Frequenzverhältnis abhängig ist, bestimmt (siehe Tabelle 4-6).

### 4.3.2 Stationäre Bewegung bei periodischer Erregung

Überlagern sich verschiedene harmonische Schwingungsfunktionen, spricht man von periodischen Schwingungen. Bei Vorliegen einer periodischen Erregung kann diese stets in einer Fourier-Reihe geschrieben werden. Die allgemeine Bewegungsgleichung (Gl. (4-99)) lautet in diesem Fall [16]

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega t \quad (4-115)$$

Es handelt sich hierbei um eine lineare Differentialgleichung, so dass sich ihre vollständige Lösung aus der Lösung der homogenen Differentialgleichung und der Partikulärlösung zusammensetzt. Im vorherigen Abschnitt wurde dargestellt, dass die freie Schwingung aufgrund der Dämpfung abklingt. Die stationäre Lösung wird gebildet durch die Partikulärlösung. Der Ansatz dafür muss entsprechend dem Störglied in Gl. (4-115) in Form einer Fourier-Reihe erfolgen.

$$x = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sin k\omega t \quad (4-116)$$

Werden die Koeffizienten von  $\sin(k\omega t)$  und  $\cos(k\omega t)$  verglichen, so erhält man ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Unbekannten  $c_0$ ,  $c_k$  und  $d_k$

$$\omega_0^2 c_0 = a_0 \quad (4-117)$$

$$[\omega_0^2 - (k\omega)^2] \cdot c_k + 2\delta k\omega d_k = a_k \quad (4-118)$$

$$-2\delta k\omega c_k + [\omega_0^2 - (k\omega)^2] \cdot d_k = b_k \quad (4-119)$$

Daraus folgt die Parameter der Fourier-Reihen-Entwicklung:

$$c_0 = \frac{a_0}{\omega_0^2} \quad (4-120)$$

$$c_k = \frac{[\omega_0^2 - (k\omega)^2] \cdot a_k - 2\delta k\omega b_k}{[\omega_0^2 - (k\omega)^2]^2 + 4\delta^2 k^2 \omega^2} \quad (4-121)$$

$$d_k = \frac{[\omega_0^2 - (k\omega)^2] \cdot b_k + 2\delta k\omega a_k}{[\omega_0^2 - (k\omega)^2]^2 + 4\delta^2 k^2 \omega^2} \quad (4-122)$$

Obwohl die Fourier-Reihen in den Gln. (4-115) und (4-116) theoretisch unendlich viele Glieder haben, beschränkt sich ihre Anzahl für praktische Anwendungen auf einen endlichen Wert. So wird bspw. bei Erregung von Torsionsschwingungen an Kolbenmaschinen durch Gaskräfte mit etwa 16 Harmonischen numerisch gerechnet. Es kann somit  $k = 1, \dots, 16$  gesetzt werden [16].

### 4.3.3 Ermittlung von Systemparametern aus den erzwungenen Schwingungen

Im Abschnitt 4.2.3 wurden bereits Methoden vorgestellt, die eine Ermittlung der Kennwerte mittels des Ausschwingversuches ermöglichen. Für die Kennwertermittlung bei erzwungenen Schwingungen wird von der stationären Lösung nach Gl. (4-114) mit  $a = \hat{F}/m$  ausgegangen. Nachfolgend wird die zugehörige Vergrößerungsfunktion  $V_1$  (Tabelle 4-6 und Abbildung 4-5) diskutiert.

Abbildung 4-5 ist zu entnehmen, dass die Maxima der Vergrößerungsfunktion je nach Dämpfungsmaß bei verschiedenen Frequenzverhältnissen liegen. Die Lage der Extremwerte lässt sich mit  $dV_1/d\Omega = 0$

$$V_1 = \left[ (1 - \Omega^2)^2 + 4 \cdot \vartheta^2 \cdot \Omega^2 \right]^{-1/2} \quad (4-123)$$

bestimmen. Demnach gilt:

$$-2 \cdot \frac{\Omega \cdot (2\vartheta^2 - 1) + \Omega^3}{\left[ (1 - \Omega^2)^2 + 4\vartheta^2 \Omega^2 \right]^{3/2}} = 0 \quad (4-124)$$

Das bedeutet

$$\Omega \cdot (2\vartheta^2 - 1) + \Omega^3 = 0 \quad (4-125)$$

Demnach liegen die Extremwerte vor für

$$\Omega_1 = 0 \quad (4-126)$$

und

$$\Omega_2 = \sqrt{1 - 2\vartheta^2} \quad (4-127)$$

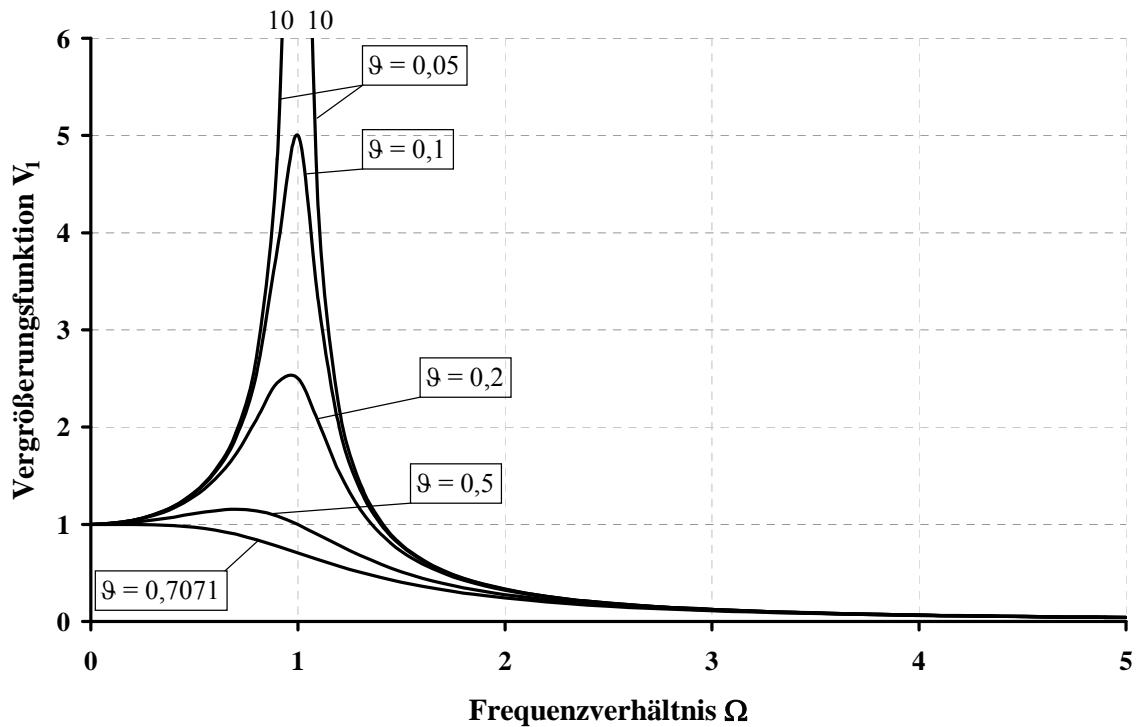


Abbildung 4-5: Vergrößerungsfunktion  $V_1$  für verschiedene Dämpfungsmaße  $\vartheta$

Wie aus Abbildung 4-5 zu entnehmen ist, liegt bei  $\Omega_1 = 0$  ein Minimum vor. Das Maximum von  $V_1$  liegt somit bei  $\Omega_2 = \sqrt{1 - 2\vartheta^2}$ . Für  $\vartheta = \sqrt{2}/2 = 0,7071$  fällt es in den Punkt  $\Omega_2 = 0$ . Für  $\vartheta = 0$  ergibt sich  $\Omega_2 = 1$ , das bedeutet Resonanz.

Der entsprechende Maximalwert  $V_{1,\max}$  für  $\vartheta \neq 0$  beträgt

$$V_{1,\max} = \frac{1}{2\vartheta \cdot \sqrt{1 - \vartheta^2}} \quad (4-128)$$

bzw. folgt im Falle der Resonanz

$$V_{1,\max} \rightarrow \infty \quad (4-129)$$

Soll Gl. (4-128) zur Bestimmung der Dämpfung Verwendung finden, kann dies nur über die Messung der Amplitude  $x_{\max}$  erfolgen. Nach Gl. (4-114) gilt

$$x_{\max} = \frac{F_{e,}}{c} \cdot V_{1,\max} \quad (4-130)$$

bzw.

$$V_{1,\max} = \frac{X_{\max} \cdot c}{F_{e,\max}} \quad (4-131)$$

In den häufigsten Fällen kann die Erregerkraft  $F_{e,\max}$  nur sehr schwer bestimmt werden, so dass eine direkte Anwendung der Gln. (4-128) bis (4-131) kaum möglich ist. Unter der Voraussetzung kleiner Dämpfungen kann die Bestimmung der Erregerkraft umgangen werden. Es wird also angenommen, dass für  $\vartheta \ll 1$  der Maximalwert der Amplitude und somit auch  $V_{1,\max}$  bei  $\Omega = 1$  liegen. Es werden die Frequenzverhältnisse  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  bestimmt, die zu einem Vergrößerungsfaktor

$$V_{1,D} = \frac{V_{1,\max}}{\sqrt{2}} \quad (4-132)$$

gehören. Mit Gl. (4-129) gilt

$$\frac{2}{V_{1,\max}^2} = (1 - \Omega_{1,2}^2)^2 + \frac{1}{V_{1,\max}^2} \cdot \Omega_{1,2}^2 \quad (4-133)$$

Daraus ergibt sich

$$\Omega_{1,2}^2 = 1 - \frac{1}{2V_{1,\max}^2} \pm \frac{1}{V_{1,\max}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4V_{1,\max}^2}} \quad (4-134)$$

Da  $\frac{1}{4} \cdot V_{1,\max}^2 \ll 1$  ist, kann der Wurzelausdruck in eine Taylor-Reihe entwickelt werden. Bei Vernachlässigung aller quadratischen Glieder von  $1/V_{1,\max}$  folgt

$$\Omega_1^2 = 1 - \frac{1}{V_{1,\max}} \quad (4-135)$$

und

$$\Omega_2^2 = 1 + \frac{1}{V_{1,\max}} \quad (4-136)$$

Eine erneute Reihenentwicklung der entstehenden Wurzelausdrücke bringt

$$\Omega_1 = 1 - \frac{1}{2V_{1,\max}} \quad (4-137)$$

und

$$\Omega_2 = 1 + \frac{1}{2V_{1,\max}} \quad (4-138)$$

Eine Differenzbildung liefert folgendes

$$\Omega_2 - \Omega_1 = \frac{2}{2V_{1,\max}} \quad (4-139)$$

sowie

$$V_{1,\max} = \frac{1}{\Omega_2 - \Omega_1} = \frac{1}{2\vartheta} \quad (4-140)$$

und

$$\vartheta = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2} \quad (4-141)$$

Bei der Ermittlung der Kennwerte kann folgendermaßen vorgegangen werden: Zunächst wird das Element, dessen Dämpfungs- und Federkennwerte bestimmt werden sollen, durch Anbringen einer bekannten Masse in ein Schwingungssystem einbezogen. Dieses System wird durch eine Erregerkraft in Resonanzschwingungen versetzt. Dabei werden die Resonanzfrequenz und die Resonanzamplitude gemessen. Die Resonanzfrequenz liefert die Eigenfrequenz, da  $\Omega = 1$  und  $\omega = \omega_0$  gelten. Damit kann bei Kenntnis der Masse die Federkonstante bestimmt werden:  $c = \omega_0^2 \cdot m$ .

Anschließend wird die Erregerfrequenz so eingeregelt, dass sich eine Amplitude  $x_{\max} / \sqrt{2}$  einstellt. Die dabei auftretenden, oft nur geringen Verschiebungen der Frequenz in Richtung  $\Omega_1$  bzw.  $\Omega_2$  lassen sich unter anderem mit einem Frequenzzähler bestimmen. Damit ergibt sich der Dämpfungskennwert mit Gl. (4-141) und unter Beachtung von  $b = 2 \cdot \vartheta \cdot m \cdot \omega_0$  zu [16]

$$b = m \cdot (\Omega_2 - \Omega_1) \quad (4-142)$$

#### **4.4 Fließkriterium für das schwingungsinduzierte Fließen von Schüttgütern**

Mechanische Schwingungen, die auf fließende Schüttgüter einwirken, verringern deren Scherwiderstand und führen somit zu einer Fließverbesserung. Durch diesen zusätzlichen Energieeintrag erreichen die Schüttgüter eine bessere Fließfähigkeit. Ebenfalls herabgesetzt wird der Reibungswiderstand an den Apparatewänden. So können beispielsweise in einem Kernflusssilo Massenfluss erzeugt (durch Verringerung der Wandreibung) oder Schüttgutbrücken im Silotrichter zerstört werden (Reduzierung der Schüttgutfestigkeit).

Roberts et.al. [56, 57] schlug ein phänomenologisches Fließkriterium für das schwingungsinduzierte Fließen von Schüttgütern vor. Als Ausgangspunkt diente die Fließfläche von Roscoe. Diese beschreibt die Scherspannung  $\tau$  für ein gegebenes Material als Funktion der Normalspannung  $\sigma$  und der Porosität in der Scherzone  $\varepsilon_s$



$$\tau = f(\sigma, \varepsilon_s) = \mu \cdot \sigma + \beta \cdot \exp\left(-\frac{1}{\gamma} \cdot \varepsilon_s\right) \quad (4-143)$$

Mit steigender Schwinggeschwindigkeit fällt die Scherfestigkeit zunächst stark ab und nähert sich asymptotisch einem Minimalwert. Der Parameter  $\beta$  liefert den Wert für die maximal mögliche Scherspannungsverminderung durch Schwingungseinwirkung und damit auch den Grenzfall der minimalen Scherfestigkeit  $1-\beta/\tau$  (gestrichelte Linie in Abbildung 4-6).  $\beta$  ist eine Materialkonstante, hängt aber wie auch die übrigen Materialeigenschaften von der Verfestigungsspannung ab.

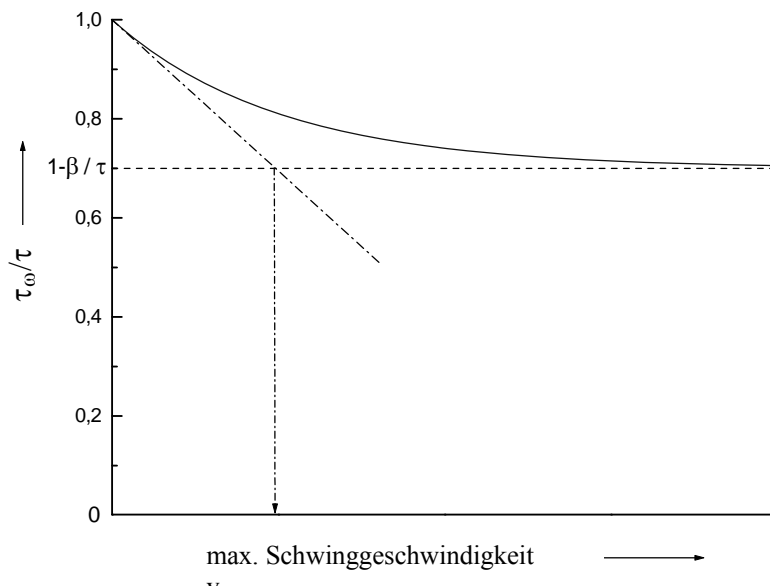


Abbildung 4-6: Mathematische Bedeutung der Modellparameter  $\beta$  und  $\gamma$

Die Konstante  $\gamma$  gibt den Anstieg der Tangente an der Stelle  $v_{\max} = 0$  an;  $\gamma$  kann als charakteristische Schwinggeschwindigkeit interpretiert werden, bei der 63 % der maximal möglichen Scherspannungsreduzierung erreicht werden (Strich-Punkt-Linie in Abbildung 4-6). Die charakteristische Schwinggeschwindigkeit  $\gamma$  ist unabhängig von der Verfestigungsspannung. Roberts fand für die von ihm untersuchten Schüttgüter (Pyrophyllit mit  $d_{50,3} = 1\text{mm}$  und Eisenerz mit  $d_{50,3} = 1\text{mm}$ ) charakteristische Schwinggeschwindigkeiten von  $\gamma = 7 \dots 10 \text{ mm/s}$  [57]. Nach Li [57] korreliert die Porosität in der Scherzone  $\varepsilon_s$  für gegebene Verfestigungsparameter mit der Intensität der eingeleiteten Schwingungen, die durch die maximale Schwinggeschwindigkeit  $v_{\max}$  charakterisiert werden kann

$$\varepsilon_s \sim v_{\max} \quad (4-144)$$

$$\tau_{\omega} = f(\sigma, v_{\max}) = \mu \cdot \sigma + \beta \cdot \exp\left(-\frac{1}{\gamma} \cdot v_{\max}\right) \quad (4-145)$$

Die minimale Scherfestigkeit  $\tau_{\infty}$  erhält man beim Grenzfall  $v_{\max} \rightarrow \infty$

$$\tau_{\omega}(v_{\max} \rightarrow \infty) = \mu \cdot \sigma = \tau_{\infty} \quad (4-146)$$

und für  $v_{\max} = 0$  die Scherfestigkeit ohne Schwingungseinwirkung

$$\tau = \tau_{\infty} + \beta \quad (4-147)$$

Damit ergibt sich Gl. (4-145) zu

$$\tau_{\omega} = \tau - \beta \left[ 1 - \exp\left(-\frac{v_{\max}}{\gamma}\right) \right] \quad (4-148)$$

oder in dimensionsloser Schreibweise

$$\frac{\tau_{\omega}}{\tau} = 1 - \frac{\beta}{\tau} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{v_{\max}}{\gamma}\right) \right] \quad (4-149)$$

Für die Auswirkungen der Schwingungen auf das Fließen wurde von Kollmann [37] das Gedankenmodell der „Aktivierung“ eingeführt. Das bedeutet, die Schwingungen selber rufen keinen Bruch der Schüttgutprobe hervor. Da die maximal erreichbaren Schwingwege für das Versagen der Probe nicht ausreichen, unterstützen sie nur das Fließen des Pulvers.

Die Differenz zwischen Abscherkraft ohne und mit Schwingungseinwirkung hängt von der Intensität der eingeleiteten Schwingungen ab. Trägt man die Scherspannungsreduzierung für verschiedene Frequenzen auf, erhält man für den Schwingweg und die Beschleunigung je eine Kurvenschar. Um den Schwingungseinfluss auf die Scherspannung mit nur einem einzigen Parameter zu erfassen, eignet sich die maximale Schwinggeschwindigkeit, da hier die Kurven für alle Frequenzen zusammenfallen [37]. Ähnliche Aussagen trafen Wassgren et al. [96] und Weathers et al. [97] sowie Roberts [57], (der die Scherfestigkeit ebenfalls mit der maximalen Schwinggeschwindigkeit  $v_{\max}$  korrelierte). Auch die „Aktivierung“ hängt nur von der Schwinggeschwindigkeit ab [37].

## 4.5 Modell der schwingenden Scherzelle

Die in dieser Arbeit verwendete Versuchsanordnung (schwingend gelagerte Translations-Scherzelle nach Jenike) kann bei der Versuchsanordnung „Gesamte Scherzelle schwingt“, siehe Abschnitt 5.2, mit Hilfe des Modells des fußpunkterregten Schwingers beschrieben werden, Abbildung 4-7, a). Hier ist  $m_1$  die Masse des Joches mit Gewichten, des Scherdeckels, des Scherringes sowie des Pulvers im Scherring und in der Scherzone. Die Masse  $m_2$  setzt sich aus der Grundplatte, dem Scherboden und dem Pulver im Scherboden zusammen.

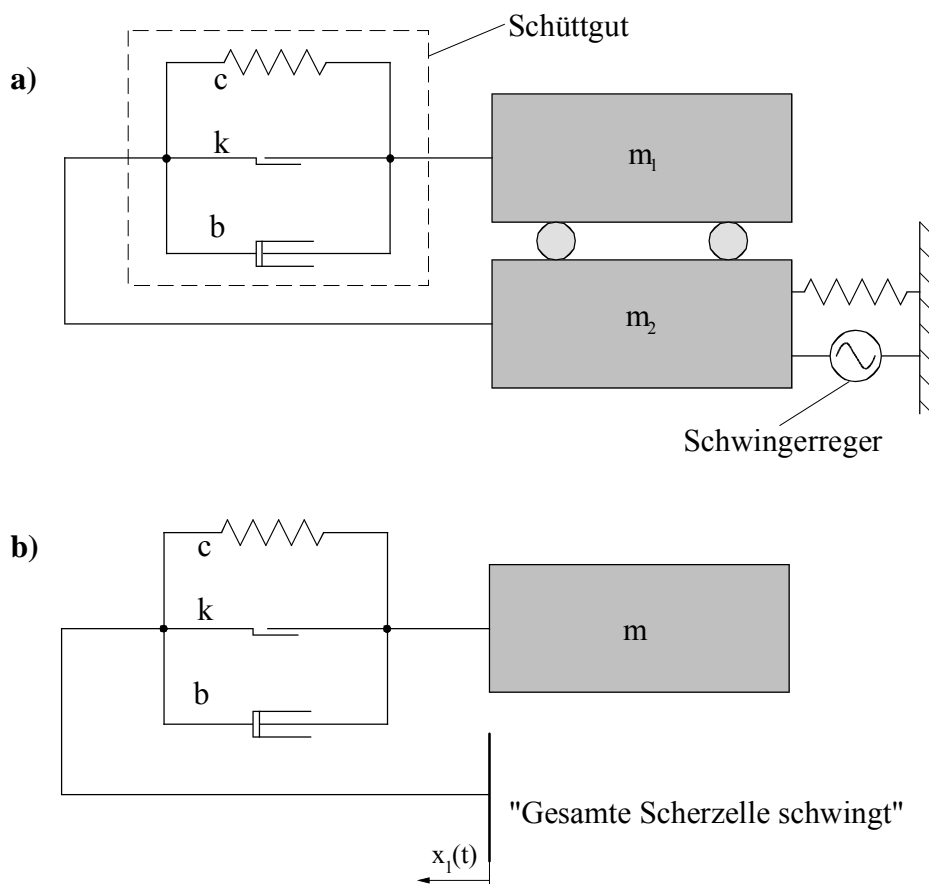


Abbildung 4-7: Modell der schwingenden Scherzelle

Die Masse  $m_2$  ist nicht fixiert, sondern elastisch aufgehängt. Diese Aufhängung ist so abgestimmt, dass die Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$  weit unter der Erregerkreisfrequenz  $\omega$  liegt. Da die Eigenkreisfrequenz der Masse  $m_2$  viel kleiner ist als die Erregerkreisfrequenz, kann  $m_2$  unberücksichtigt bleiben. Daher wird im Folgenden  $m_1$  als  $m$  dargestellt und es genügt ein Freiheitsgrad, Abbildung 4-7, b). Die Bewegungsgleichung für das Modell der schwingenden Translations-Scherzelle lautet in diesem Fall [37]:

$$\Delta \ddot{x} + \frac{b}{m} \cdot (\Delta \dot{x})^n \cdot \operatorname{sgn} \Delta \dot{x} + \frac{k}{c} \cdot \omega_0^2 \cdot \operatorname{sgn} \Delta \dot{x} + \omega_0^2 \cdot \Delta x = \ddot{x}_1(t) \quad (4-150)$$

In der Gleichung ist  $\Delta x$  die Differenz von Antwortamplitude  $x_2$  und Erregeramplitude  $x_1$  ( $\Delta x = x_2 - x_1$ ). Die Vorzeichenfunktion, auch Signum-Funktion,  $\operatorname{sgn}(\Delta \dot{x})$  beschreibt das Vorzeichen von  $\Delta \dot{x}$  :

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\Delta \dot{x}) &= 1, & \Delta \dot{x} &\geq 0 \\ \operatorname{sgn}(\Delta \dot{x}) &= -1, & \Delta \dot{x} &< 0 \end{aligned}$$

Durch Parameteranpassung an die gemessenen Wertepaare  $x_{\max,2} / x_{\max,1} = f(f)$  können das viskose Dämpfungsverhältnis

$$\zeta_b = \frac{b}{2\sqrt{m \cdot c}} \quad (4-151)$$

und das Coulomb'sche Dämpfungsverhältnis

$$\Lambda_b = \frac{k}{c \cdot x_{\max,1}} \quad (4-152)$$

bestimmt werden. Gl. (4-152) beschreibt das Verhältnis der Coulomb'schen Reibungs- zur Federkraft (Plastizität zu Elastizität). Durch anschließende Rückrechnung können die zugehörigen Dämpfungskonstanten  $b$  und  $k$  ermittelt werden.

## 4.6 Kombination von viskoser und Coulomb'scher Dämpfung

Kollmann [37] gibt eine analytische Lösung von den Hartog [31, 32] für kombinierte Coulomb'sche und viskose Dämpfung an

$$V = -L \cdot \Lambda_b + \sqrt{V_{\text{vis}}^2 - M^2 \cdot \Lambda_b^2} \quad (4-153)$$

In Gl. (4-153) sind  $L$  und  $M$  Dämpfungsfunktionen für Bewegungen ohne Stillstände.

$$L = \frac{\sinh\left(\frac{\pi \cdot \zeta_b}{\Omega}\right) - \frac{\zeta_b}{\sqrt{1-\zeta_b^2}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\Omega} \cdot \sqrt{1-\zeta_b^2}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi \cdot \zeta_b}{\Omega}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{\Omega} \cdot \sqrt{1-\zeta_b^2}\right)} \quad (4-154)$$

und

$$M = \frac{1}{\Omega \cdot \sqrt{1 - \zeta_b^2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\Omega} \cdot \sqrt{1 - \zeta_b^2}\right)}{\cosh\left(\pi \cdot \zeta_b / \Omega\right) + \cos\left(\frac{\pi}{\Omega} \cdot \sqrt{1 - \zeta_b^2}\right)} \quad (4-155)$$

Weiterhin sind das Abstimmungsverhältnis

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (4-108)$$

und die Vergrößerungsfunktion

$$V = \frac{x_{\max,2}}{x_{\max,1}} \quad (4-156)$$

sowie die Vergrößerungsfunktion für rein viskose Dämpfung ( $\Lambda_b = 0$ )

$$V_{\text{vis}} = \sqrt{\frac{1 + 4\zeta_b^2 \cdot \Omega^2}{(1 - \Omega^2)^2 + 4\zeta_b^2 \cdot \Omega^2}} \quad (4-157)$$

in der Lösung enthalten.  $\Omega$  ist das Verhältnis aus Erreger- und Eigenfrequenz des Schwingers. Mit den Ausdrücken für die Vergrößerungsfunktion  $V$  und die Dämpfungsgröße  $\Lambda_b$  kann die Lösung für Fußpunkterregung in den Koordinaten der absoluten Schwingwegamplitude  $x_{\max,2}$  angegeben werden. Für  $\Lambda_b = 0$  erhält man die Lösung für rein viskose Dämpfung und mit  $\zeta_b = 0$  jene für reine Coulomb'sche Dämpfung.

Kollmann [37] zeigte, dass der entscheidende Parameter zur Beschreibung der Reduzierung der Scherfestigkeit die maximale Schwinggeschwindigkeit ist, d.h. es kann erregerfrequenzunabhängig die Abnahme der Scherfestigkeit mit zunehmender Schwinggeschwindigkeit aufgetragen werden. Das bedeutet, dass die bezogenen Scherfestigkeiten  $\tau_\omega / \tau$  (Schubspannung unter Vibrationen / Schubspannung ohne Vibrationen) unabhängig von der Erregerfrequenz auf einer Kurve liegen:

$$\tau_\omega / \tau = f(v_{\max}) \neq f(f) \quad (4-158)$$

Aus diesem Grund wurde für die experimentellen Untersuchungen dieser Arbeit die Schwinggeschwindigkeit (Gl. (4-7)) als konstant vorgegeben (hier  $v_{\max} = 20$  mm/s), um den Einfluss weiterer Parameter (bspw. Erregerfrequenz, Materialfeuchte, Schwingrichtung usw.) quantifizieren zu können. Diese Vorgehensweise hatte zur Folge, dass der von den Hartog definierte Dämpfungsparameter  $\Lambda_b$  nach Gl. (4-152) bei veränderter Erregerfrequenz wegen

$$x_{\max,1} \neq \text{konstant für } v_{\max} = \text{konstant} \quad (4-159)$$

keine Konstante, sondern immer eine Funktion von  $\omega$ , ist. Um dies zu vermeiden, wird bei der Parameteranpassung an die Messwerte Gl. (4-153) erweitert. Dafür wurde ein modifiziertes Coulomb'sches Dämpfungsmaß  $\Lambda^*$  eingeführt:

$$\Lambda_b = \frac{k}{c \cdot v_{\max}} \cdot \omega = \Lambda^* \cdot \omega \quad (4-160)$$

Für  $\Lambda^*$  ergibt sich nunmehr die Dimension [s]. Dieser Ausdruck kann nun in Gl. (4-153) eingesetzt werden. Damit ergibt sich

$$V = -L \cdot \Lambda^* \cdot \omega + \sqrt{V_{\text{vis}}^2 - M^2 \cdot (\Lambda^* \cdot \omega)^2} \quad (4-161)$$

Damit können nun konstante Dämpfungswerte (Eigenfrequenz  $f_0$ , viskoses Dämpfungsmaß  $\zeta_b$  und modifiziertes Coulomb'sches Dämpfungsmaß  $\Lambda^*$ ) bestimmt werden. Durch Rückrechnung mit Gl. (4-160) kann dann das Coulomb'sche Dämpfungsmaß  $\Lambda_b$  erhalten werden. Mit der Einführung von  $\Lambda^*$  muss gewährleistet sein, dass der Wurzelausdruck in Gl. (4-161) nicht kleiner als Null ist. Somit ergibt sich eine Randbedingung, d.h.

$$V_{\text{vis}}^2 - M^2 \cdot (\Lambda^* \cdot \omega)^2 \geq 0 \quad (4-162)$$

Erfüllt der Wurzelausdruck die Gleichung, erhält man den Grenzfall. Es ist aber nicht möglich, eine exakte Grenzfunktion zu definieren, da sowohl die Vergrößerungsfunktion für rein viskoses Verhalten  $V_{\text{vis}}$  als auch die Dämpfungsfunktion  $M$  von den Stoffwerten  $\zeta_b$  und  $f_0$  sowie das modifizierte Coulomb'sche Dämpfungsmaß  $\Lambda^*$  von  $k$  und  $c$ ; die nicht explizit zugänglich sind, abhängen. Es muss gelten

$$\omega \leq \sqrt{\frac{V_{\text{vis}}^2}{M^2 \cdot \Lambda^{*2}}} \quad (4-163)$$

Nach Tabelle 4-1 bedeutet dies: bei konstanter maximaler Schwinggeschwindigkeit  $v_{\max}$  und steigender Erregerfrequenz  $f$  verringert sich die Amplitude  $x_{\max,1}$ . Dies führt dazu, dass Gl. (4-161) nur Messwerte, die bei geringer Schwingungsamplitude bestimmt wurden, mit ausreichender Genauigkeit wiedergeben kann. Da bei sehr kleinen Amplituden das Kontinuum Schüttgut fast ausschließlich elastisch verformt wird [37], muss als Startwert bei der Messwertanpassung ein sehr kleines  $\Lambda^*$  gewählt werden ( $\Lambda^* < 0,001$ ).

#### 4.7 Arbeiten anderer Autoren zum Dämpfungsverhalten kohäsiver Pulver

Flemmer et. al [15] betrachteten die Haftung innerhalb einer Partikelpackung unter horizontalen Vibrationen mit kleiner Beschleunigung (hier  $a = 0,02 \text{ g}$ ). Unter den Vibrationen kann es zum Scheren innerhalb der Partikelpackung kommen, was zu einer Verdichtung und höherer Festigkeit führt. Es wurde eine Gleichung für Eindringtiefe der Schervorgänge  $D_c$  angegeben, wobei  $D_c$  von der Packungshöhe  $H$  (angenommene Gesamtmasse der Schüttung 2000 kg), der Kantenlänge des Siloauslaufes  $b$  (angenommene Grundfläche  $1,5 \text{ m}^2$ ), von der Beschleunigung  $a$  und vom inneren Reibungswinkel  $\varphi_i$  abhängt:

$$D_c = H - \sqrt{H^2 - 2 \cdot b \cdot H \cdot a \cdot \frac{1 - \sin\varphi_i}{1 + \sin\varphi_i} \cdot \frac{1}{g}} \quad (4-164)$$

Mit folgenden angenommenen Werten [15] (Gesamtmasse der Schüttung 2000 kg;  $H = 1 \text{ m}$ ;  $b = 1,225 \text{ m}$ ;  $a = 0,02 \text{ g} = 0,196 \text{ m/s}^2$ ;  $\varphi_i = 30^\circ$ ) erhält man eine Eindringtiefe von  $D_c = 8,1 \text{ mm}$ , d. h. bis zu dieser Tiefe dringen die Schervorgänge in die Partikelpackung ein und zerstören diese, was dann lokal zu einer Verdichtung und höherer Festigkeit führt.

Yanagida et. al [102] beschäftigten sich mit der Energiedissipation von Partikelpackungen bei geringen Beschleunigungen ( $a = 0,1 \text{ g}$ ). Sie verwendeten dazu einen nach oben offenen Zylinder ( $d = 75 \text{ mm}$ , Pulverbetthöhe  $50 \text{ mm}$ ), der mit vertikalen Schwingungen mit Frequenzen von  $50 \text{ Hz}$  bis  $1 \text{ kHz}$  beaufschlagt wurde. Untersuchte Pulver sind Glaskugeln ( $d_{50,3} = 232; 463 \text{ und } 1060 \mu\text{m}$ ) und Polyethylen-Pulver ( $d_{50,3} = 395 \mu\text{m}$ ). Gemessen wurde Energiedissipation als Funktion der Erregerfrequenz. Ergebnis ist für jedes Pulver ein Maximum der Energiedissipation im untersuchten Frequenzbereich zu beobachten: für Glaskugeln ( $d_{50,3} = 232 \mu\text{m}$ ) bei  $f = 593 \text{ Hz}$ , für Glaskugeln ( $d_{50,3} = 463 \mu\text{m}$ ) bei  $f = 467 \text{ Hz}$ , für Glaskugeln ( $d_{50,3} = 1060 \mu\text{m}$ ) bei  $f = 667 \text{ Hz}$  und für das Polyethylen-Pulver bei  $f = 157 \text{ Hz}$ . Die maximale Energiedissipation lag bei allen Pulvern zwischen  $10^{-7}$  und  $10^{-6} \text{ J}$  pro Schwingungsperiode.

Yanagida et. al [103] untersuchten auch Mischungen zweier kohäsiver Pulver hinsichtlich der Dämpfungseigenschaften. Dazu verwendeten sie einen mit der Pulvermischung gefüllten, vertikal erregbaren Zylinder ( $d = 78 \text{ mm}$ , Pulverbetthöhe  $20 \text{ mm}$ ), an dem sie die Erreger-schwingung am Boden und die Antwortschwingung einer auf der Oberfläche des Pulvers platzierten Masse maßen. Die Erregerfrequenzen lagen im Bereich von  $10 \text{ Hz}$  bis  $1 \text{ kHz}$ . Die Mischung bestand aus Glaskugeln (Komponente A,  $d_{50,3} = 1049 \mu\text{m}$ ) und Polyethylen-Pulver (Komponente B,  $d_{50,3} = 320 \mu\text{m}$ ) mit Volumenanteilen des Polyethylenpulvers  $\Phi_B$  von  $0,2$ ;  $0,4$ ;  $0,6$  und  $0,8$ . Auch die einzelnen Pulver wurden untersucht. Es wurde eine

Dämpfungsfunktion  $V$  als Verhältnis der Antwort- zur Erregerschwingungsamplitude bestimmt. Dabei zeigte sich je nach Pulver bzw. Pulvermischung ein anderer Maximalwert  $V_{\max}$ . Tabelle 4-7 zeigt die erhaltenen Ergebnisse.

Tabelle 4-7: Maximalwerte der Dämpfungsfunktion und Eigenfrequenzen [103]

Pulver/Pulvermischung	Maximalwert der Vergrößerungsfunktion $V_{\max}$	bei $f_0$ in Hz
nur Glaskugeln ( $\Phi_B = 0$ )	23	580
Mischung mit $\Phi_B = 0,2$	6,5	300
Mischung mit $\Phi_B = 0,4$	4,5	160
Mischung mit $\Phi_B = 0,6$	4,5	140
Mischung mit $\Phi_B = 0,8$	4	120
nur PE-Pulver ( $\Phi_B = 1$ )	4	100

Es ist abzulesen, dass mit Erhöhung von  $\Phi_B$ , d.h. Zunahme des Anteils des Polyethylenpulvers, der Maximalwert der Vergrößerungsfunktion  $V_{\max}$  mit zugehöriger Frequenz  $f_0$  sinkt. Ein höherer Anteil des weicheren Polyethylenpulvers führt also zu größerer Dämpfung ( $V_{\max}$  sinkt) und zu kleinerer Eigenfrequenz  $f_0$ .

Levy et. al [40] und Xu [101] ermittelten experimentell die Fluidisierbarkeit verschiedener Pulver mit und ohne zusätzliche Vibrationen. Als Parameter diente jeweils die minimale Fluidisierungsgeschwindigkeit.

Levy [40] untersuchte ein Aerosil ( $d_{50,3} = 0,012 \mu\text{m}$ ), Quarzstaub ( $d_{50,3} = 0,2 \mu\text{m}$ ), Talgpulver ( $d_{50,3} = 0,2 \mu\text{m}$ ) und Flugasche ( $d_{50,3} = 8,1 \mu\text{m}$ ). Oberhalb der Partikelpackung war ein Lautsprecher angebracht, der Vibrationen mit  $f = 80 \text{ Hz}$  mit einer maximalen Lautstärke von 148 dB aussandte. Die Wirbelschicht ( $d = 152 \text{ mm}$ ) war auf einer Grundplatte aufgebaut, die mit horizontalen Schwingungen ( $f_{\max} = 9,5 \text{ Hz}$ ;  $x_{\max} = 10 \text{ mm}$ ) beaufschlagt werden konnte. Tabelle 4-8 zeigt die minimalen Fluidisierungsgeschwindigkeiten ohne und mit Vibrationen.

Tabelle 4-8: Minimale Fluidisierungsgeschwindigkeiten mit und ohne Vibrationen [40]

Pulver	minimale Fluidisierungsgeschwindigkeit	
	ohne zusätzliche Vibrationen	mit zusätzlichen Vibrationen
Aerosil	5 cm/s	1,5 cm/s
Quarzstaub	1 cm/s	> 0,1 cm/s
Talgpulver		
Flugasche		



Die aufgebrachten Vibrationen verbessern die Fluidisierbarkeit der untersuchten Pulver. Es wurde jedoch festgestellt, dass bei vergleichbaren Schwingungsparametern die von oben auf die Partikelpackung wirkenden akustischen Vibrationen deutlicher die Fluidisierbarkeit verbessern als die am Boden eingeleiteten mechanischen Vibrationen.

Auch Xu [101] stellte eine Wirbelschichtapparatur ( $d = 100$  mm) auf eine vibrierende Unterlage ( $f = 50$  Hz,  $x_{\max} = 0,3$  mm) und verwendete Aluminiumoxid ( $d_{50,3} = 4,8$   $\mu\text{m}$ ), Titandioxid ( $d_{50,3} = 5,2$   $\mu\text{m}$ ) und Glaskugeln ( $d_{50,3} = 6,1; 10; 39; 65$  und  $216$   $\mu\text{m}$ ) als Versuchspulver. Tabelle 4-9 zeigt die Ergebnisse dieser Untersuchungen.

Tabelle 4-9: Minimale Fluidisierungsgeschwindigkeiten mit und ohne Vibrationen [101]

Pulver	minimale Fluidisierungsgeschwindigkeit	
	ohne zusätzliche Vibrationen	mit zusätzlichen Vibrationen
Aluminiumoxid	nicht fluidisierbar	0,5 cm/s
Titandioxid	nicht fluidisierbar	1,5 cm/s
Glaskugeln ( $d_{50,3} = 6,1$ $\mu\text{m}$ )	nicht fluidisierbar	0,1 cm/s
Glaskugeln ( $d_{50,3} = 10$ $\mu\text{m}$ )	nicht fluidisierbar	0,1 cm/s
Glaskugeln ( $d_{50,3} = 39$ $\mu\text{m}$ )	0,3 cm/s	0,1 cm/s
Glaskugeln ( $d_{50,3} = 65$ $\mu\text{m}$ )	0,7 cm/s	0,4 cm/s
Glaskugeln ( $d_{50,3} = 216$ $\mu\text{m}$ )	4 cm/s	2 cm/s

Auch bei diesen Untersuchungen führen die zusätzlich eingetragenen Vibrationen zu einer besseren Fluidisierbarkeit. Es wurde festgestellt, dass die Vibrationen „dramatisch“ [101] die Druckfestigkeit herab setzen, damit können die Vibrationen die Partikelhaftkräfte überwinden, das Pulver auflockern und die Fluidisierbarkeit verbessern.

McGlinchey et. al [45] stellen einen vibrierenden Druckfestigkeitstester für kohäsive Pulver vor, Abbildung 4-8. Es wurde feuchter Sand ( $d_{50,3} = 1000$   $\mu\text{m}$ ) untersucht und die ermittelten Werte der Druckfestigkeit bei Versuchen mit und ohne Vibrationen verglichen. Die Schüttgutproben wurden zwischen vibrierendem Boden und oberer Masse platziert. Die Vibrationen mit vorgegebener Frequenz und Beschleunigung wurden eingeleitet und anschließend bewegte der Kolbenantrieb den Kolben abwärts, bis die jeweilige Schüttgutprobe brach.

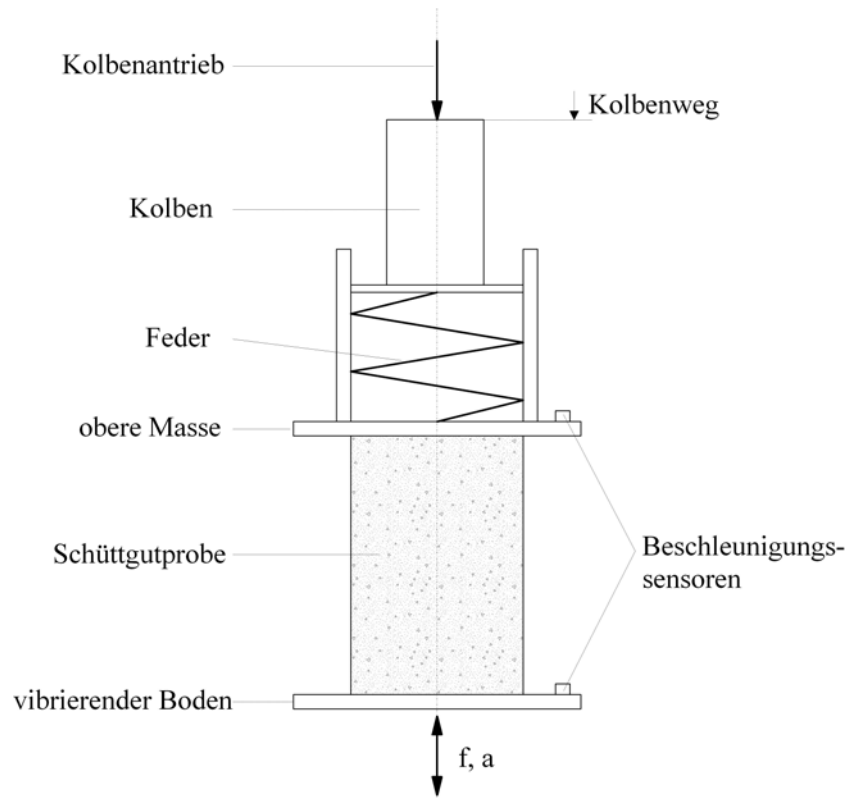


Abbildung 4-8: Prinzip des vibrierenden Druckfestigkeitstesters [45]

Es wurde festgestellt, dass die gemessene Druckfestigkeit bei Versuchen mit Vibrationen  $P_v$  kleiner ist, als der bei Versuchen ohne Vibrationen  $P_{ov}$ , wobei es auch Versuche gab, in denen  $P_{ov}$  und  $P_v$  nicht signifikant voneinander abwichen, Tabelle 4-10.

Tabelle 4-10: Druckfestigkeiten von feuchtem Sand ohne und mit Vibrationen [45]

Feuchte- gehalt in %	Erregerfre- quenz in Hz	Beschleu- nigung in $m/s^2$	Antriebsge- schwindigkeit in mm/s	Druckfestigkeit in Pa		$P_{ov} / P_v$
				ohne Vibrationen, $P_{ov}$	mit Vibrationen $P_v$	
6	25	7,85	0,62	8873	7025	0,79
	50			8873	8124	0,92
	100			8873	9051	1,02
	200			8873	8260	0,93
	300			8873	8777	0,99
3	25	4,91	0,62	16973	12672	0,75
6				8873	7025	0,79
9				8338	6416	0,77

Matchett et. al [43] verglichen experimentelle Daten vibrierender Partikelbetten mit Daten aus 2-D-DEM-Simulationen auf der Basis der Energiedissipation. Die Experimente wurden in einem nach oben offenen, vertikal vibrierenden Plexiglasbehältern verschiedener Größe (quadratisch mit 30, 40 und 80 mm Kantenlänge, kreisrund mit 30, 40 und 84 mm Durchmesser und rechteckig 60 x 30 mm und 80 x 40 mm) durchgeführt. Bei konstanter Frequenz wurde mit 0,3 bis 50  $\text{m/s}^2$  beschleunigt. Untersuchte Pulver waren Glaskugeln ( $d = 425 - 600 \mu\text{m}$ ), Bronzekugeln ( $d = 600 - 1000 \mu\text{m}$ ), Acrylkugeln ( $d = 425 - 600 \mu\text{m}$ ) und Gummi ( $d = 425 - 600 \mu\text{m}$ ). Die jeweiligen Ergebnisse wurden hinsichtlich der Energiedissipation ausgewertet. Für die Simulation wurde eine kommerzielle Software (P-TAK der Fa. IEA, Japan) verwendet.

Abbildung 4-9 zeigt experimentelle und Abbildung 4-10 zeigt Simulationsergebnisse der ermittelten Energiedissipation. Abbildung 4-11 und Abbildung 4-12 vergleichen experimentelle und Simulationsergebnisse.

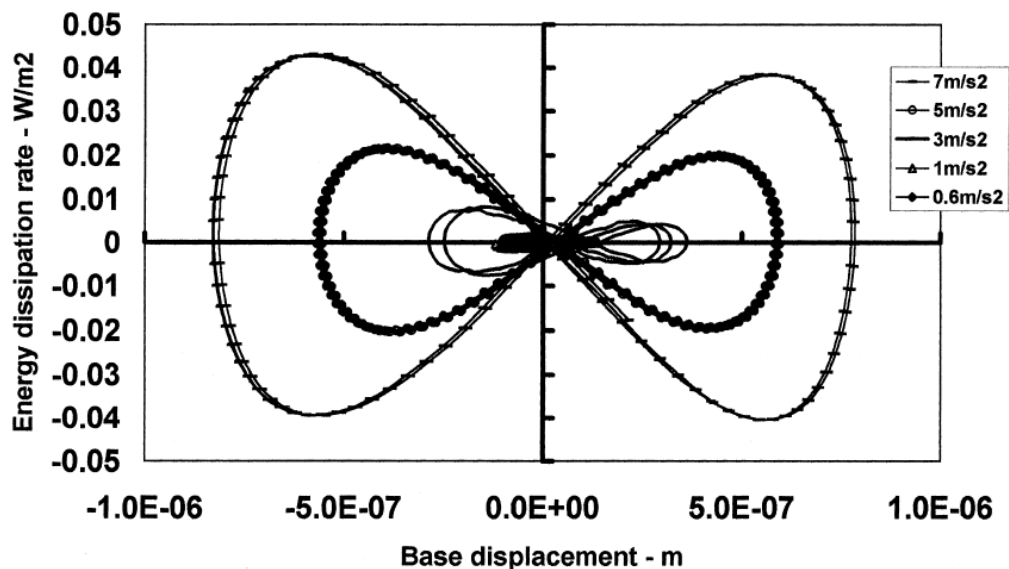


Abbildung 4-9: Energiedissipation (Energy dissipation rate) über vertikaler Behälterbewegung (base displacement) für verschiedene Beschleunigungen, experimentelle Ergebnisse (Glaskugeln,  $d = 425 - 600 \mu\text{m}$ , 10 Schichten,  $f = 500 \text{ Hz}$ , kreisrunde Zelle mit 84 mm Durchmesser) [43]

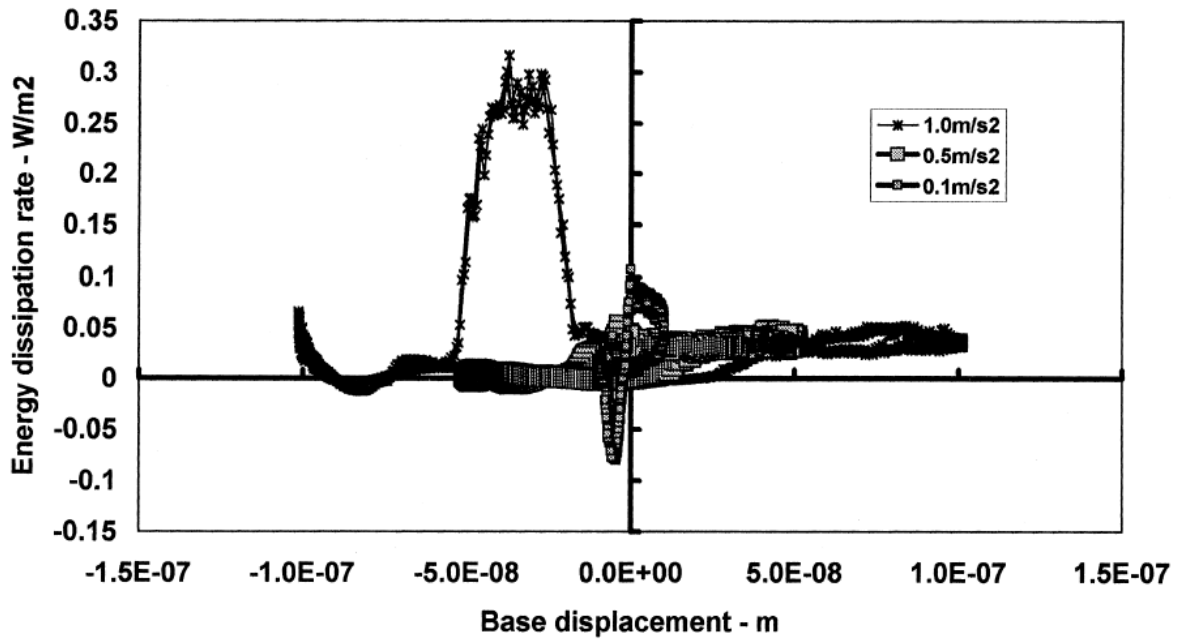


Abbildung 4-10: Energiedissipation (Energy dissipation rate) über vertikaler Behälterbewegung (base displacement) für verschiedene Beschleunigungen, Simulationsergebnisse ( $d = 500 \mu\text{m}$ , 10 Schichten,  $f = 500 \text{ Hz}$ , kreisrunde Zelle mit  $80 \text{ mm}$  Durchmesser) [43]

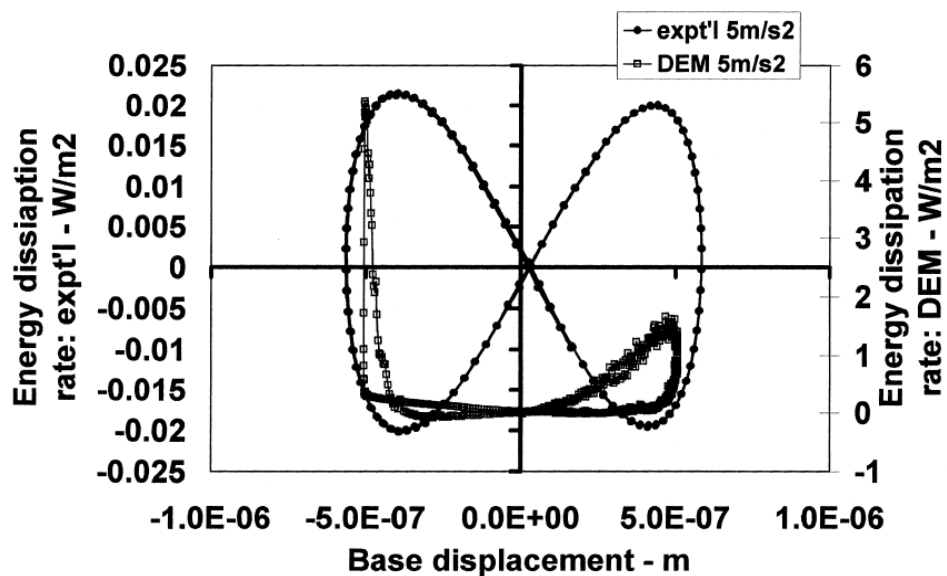


Abbildung 4-11: Energiedissipation (Energy dissipation rate) über vertikaler Behälterbewegung (base displacement) für  $a = 5 \text{ m/s}^2$ , Vergleich von experimentellen und Simulationsergebnissen ( $d = 500 \mu\text{m}$ , 10 Schichten,  $f = 500 \text{ Hz}$ , kreisrunde Zelle mit  $80 \text{ mm}$  Durchmesser) [43]

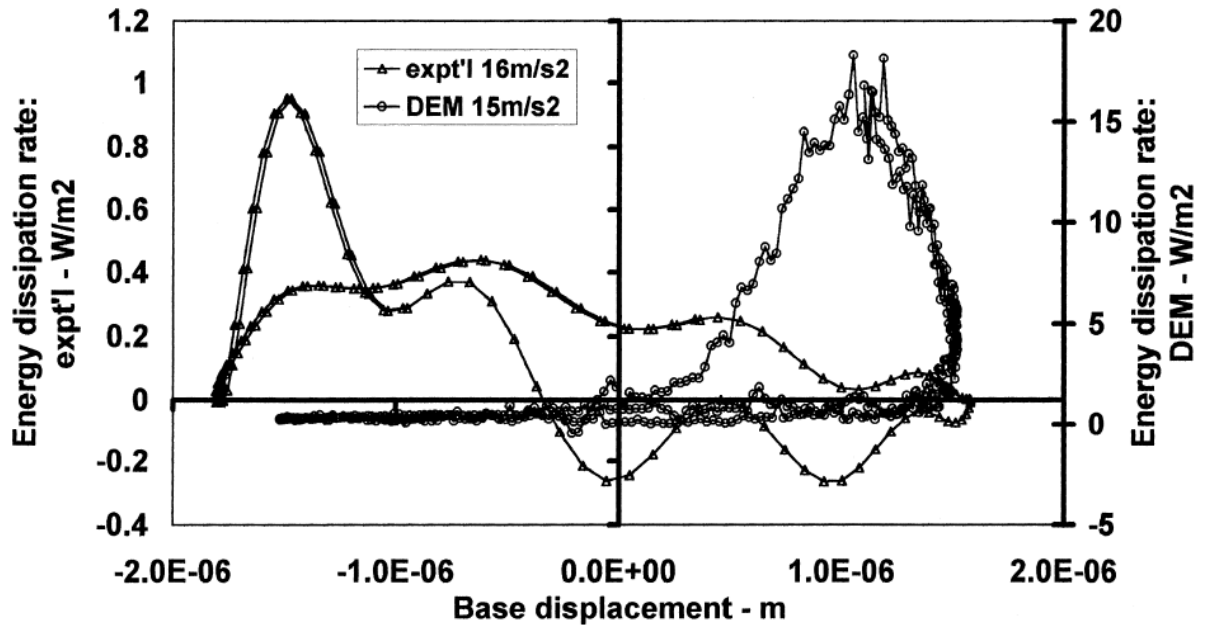


Abbildung 4-12: Energiedissipation (Energy dissipation rate) über vertikaler Behälterbewegung (base displacement) für  $a = 15 \text{ m/s}^2$ , vergleich von experimentellen und Simulationsergebnissen ( $d = 500 \text{ }\mu\text{m}$ , 10 Schichten,  $f = 500 \text{ Hz}$ , kreisrunde Zelle mit 80 mm Durchmesser) [43]

Es ist abzulesen, dass die DEM in der Lage ist, qualitativ die experimentellen Ergebnisse wieder zu geben. Jedoch wurde festgestellt, dass die Simulation gerade im Bereich kleiner Beschleunigungen weniger erfolgreich angewendet werden kann. Der Vergleich der Ergebnisse in Abbildung 4-11 (für kleine Beschleunigungen, hier  $a = 5 \text{ m/s}^2$ ) liegt die gemessene Energiedissipation bei etwa  $0,02 \text{ W/m}^2$ , die simulierte hingegen bei etwa  $5 \text{ W/m}^2$ . Der Wert der Simulation ist also ca. 250-mal größer als der experimentell ermittelte. Bei höherer Beschleunigung (Abbildung 4-12) ist der Wert der Simulation nur etwa 18-mal größer als der experimentell ermittelte.

## 5 Versuchsaufbau und Messmethoden

### 5.1 Translations-Scherapparatur

Die verwendete Translations-Scherapparatur setzt sich aus den Komponenten Scherzelle, Scherantrieb und Kraftsensor zusammen. Kernstück der Versuchsanordnung ist die Scherzelle, bestehend aus Scherring, Scherboden und Scherdeckel, wie sie in Tabelle 5-1 beschrieben und in Abbildung 5-4 dargestellt ist. Die Unterseite des Scherdeckels und die Oberseite des Scherbodens sind jeweils mit Rillen versehen, um ein Gleiten des Schüttgutes an der Wandung zu unterbinden. Durch Verschieben des Scherringes relativ zum Scherboden werden von den zu untersuchenden Schüttgütern Scherkraftverläufe aufgezeichnet, siehe dazu Abbildung 5-5. Um eine Beeinflussung der Scherkraftmessung durch die Schwingungseinleitung zu minimieren, wird die Scherkrafteinleitung als Zugseil ausgeführt. Als Scherantrieb dient ein Gleichstrommotor mit Stirnradgetriebe und Lineareinheit. Zur Gewährleistung einer lastunabhängigen Schergeschwindigkeit ist der Motor drehzahl geregelt. Für das stoßfreie Aufsetzen größerer Normallasten ist ein elektrischer Hubantrieb vorgesehen.

Tabelle 5-1: Technische Daten der verwendeten Translations-Scherapparatur

<b>Scherzelle</b>	Innendurchmesser:	95 mm
	Höhe des Scherringes:	16 mm
	Höhe des Scherbodens (innen):	14 mm
	Material der Scherzelle:	Aluminium
	maximaler Scherweg:	8 mm
<b>Scherantrieb</b>	Vorschubgeschwindigkeit schnell:	40 mm/min
	Messvorschub:	1...10 mm/min
<b>Hubantrieb</b>	Hubkraft:	500 N
	Hubgeschwindigkeit:	0...10 mm/s
<b>Nutzbarer Spannungsbereich</b>	Normalspannung:	0,5...70 kPa
	Scherspannung:	max. 70 kPa

### 5.2 Aufbau der Vibrations-Scherapparatur

Die in Abschnitt 5.1 beschriebene Translations-Scherapparatur wurde von Kollmann [37] so erweitert, dass während des Schervorgangs horizontale Schwingungen ins Schüttgut eingeleitet werden können. Für die Einleitung der Schwingungen ist ein elektrodynamischer Schwinngerer vorgesehen. Die maximal erreichbare Erregerkraft beträgt bei harmonischer

Erregung  $F_{e,max} = 196 \text{ N}$ . Der verwendbare Frequenzbereich liegt bei  $5 \text{ Hz} \leq f \leq 9000 \text{ Hz}$ . Die maximal erreichbaren Werte von Beschleunigung und Geschwindigkeit sind  $a_{max} = 980 \text{ m/s}^2$  und  $v_{max} = 1,78 \text{ m/s}$ . Die Maximalamplitude beträgt  $x_{max} = 17,6 \text{ mm}$ . Über einen Synthesizer-Funktionsgenerator wird die Frequenz  $f$  sowie die Erregerkraft  $F_e$  vorgegeben. Für die Erfassung der Schwingungssignale werden zwei piezoelektrische Sensoren verwendet. Die Schwingungsmesssignale gelangen über ein analoges Bandpassfilter (Hoch- und Tiefpassfilter Typ: Butterworth 4. Ordnung, -3 dB - Eckfrequenzen: 10 / 600 Hz) auf eine A/D-Wandlernkarte (16 Bit, maximale Summenabtastrate: 20 kHz, maximale Abtastrate je Kanal: 4 kHz). Die so aufbereiteten Messsignale wurden auf dem PC mittels handelsüblicher Software ausgewertet. Abbildung 5-1 zeigt das Blockschaltbild des nachfolgend als Vibrations-Scherapparat bezeichneten Versuchsstandes einschließlich der Messtechnik. Die verwendeten Sensoren sind in Tabelle 5-2 spezifiziert.

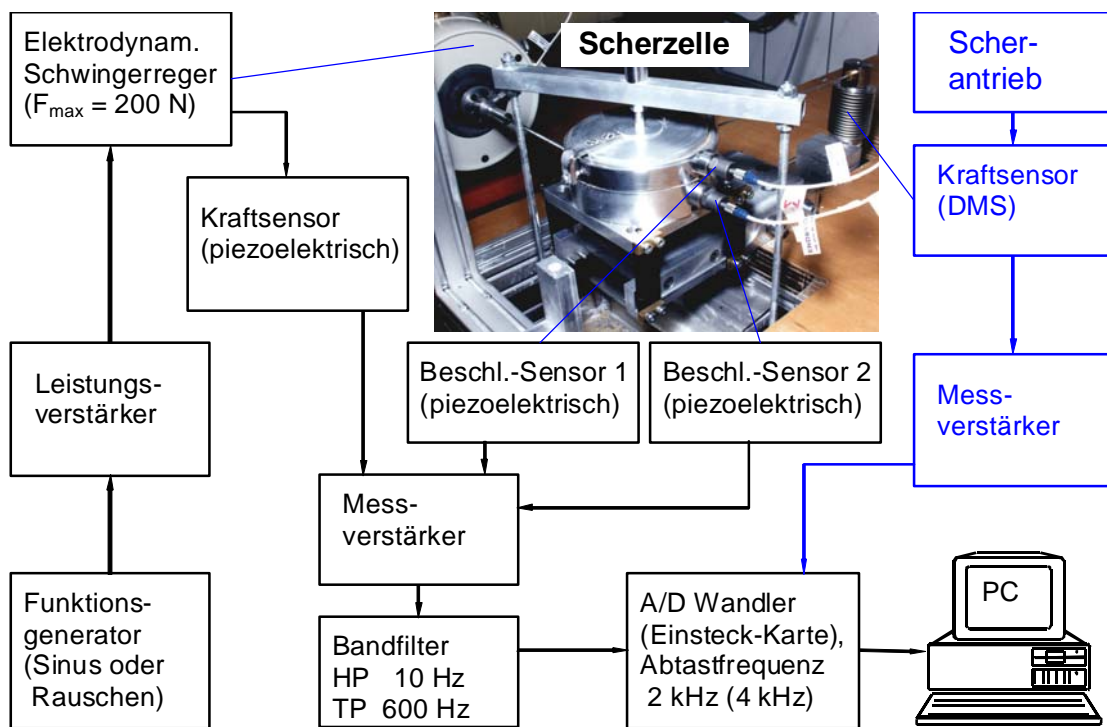


Abbildung 5-1: Blockschaltbild der Vibrations-Scherapparatur

Tabelle 5-2: Verwendete Sensoren

Messgröße	Sensor-Bauart	Empfindlichkeit	Messbereich	Abtastfrequenz
Scherkraft	DMS <sup>1</sup> -	50 mV / N	0...200 N	10 Hz
	Brücke	20 mV / N	0...500 N	10 Hz
Beschleunigung	Isotron <sup>®</sup>	100 $\frac{\text{mV}}{1 \cdot \text{g}}$	$\pm 50 \cdot \text{g}$	2 / 4 kHz

<sup>1</sup> Dehnungsmessstreifen

Für die Durchführung von Scherversuchen bei gleichzeitiger Schwingungseinwirkung (nachfolgend als Vibrations-Scherversuche bezeichnet) wurden von Roberts [57] zwei prinzipielle Versuchsanordnungen vorgeschlagen:

- I Schwingungseinleitung über den Scherring („Scherring schwingt“)
- II Schwingungseinleitung über den Scherboden („Gesamte Scherzelle schwingt“)

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ausschließlich die Versuchsanordnung II verwendet. Die Schwingungen werden jeweils senkrecht zur Scherrichtung eingetragen, um eine Beeinflussung der Scherkraftmessung durch die Schwingungen möglichst gering zu halten. Aus dem gleichen Grund wird zur Scherkrafteinleitung ein Zugseil verwendet.

Bei der Versuchsanordnung I ist der Scherboden starr mit der Unterkonstruktion verbunden. Die Schwingungen werden über einen Erregerstab, der mit dem Scherring verschraubt ist, auf diesen übertragen und gelangen von dort ins Schüttgut, Abbildung 5-2, links. Der modifizierte Aufbau, Abbildung 5-2, rechts, zeichnet sich dadurch aus, dass der Scherring gezogen und nicht geschoben wird. Das hat den Vorteil, dass vor allem bei höheren Normallasten ein Abklappen des Scherdeckels unterbunden wird.

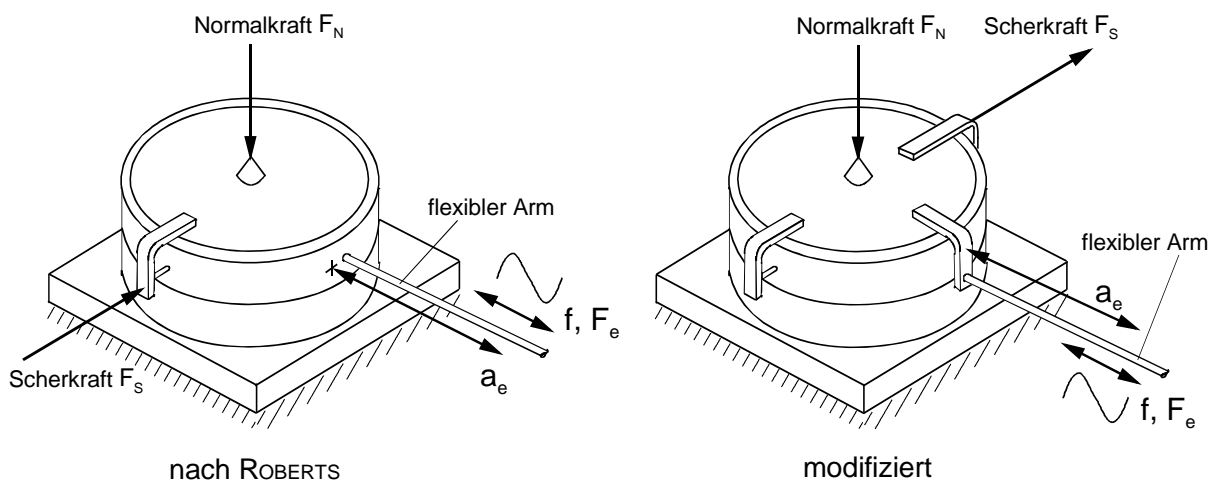


Abbildung 5-2: Schwingungseinleitung über den Scherring (links) oder Scherdeckel (rechts)

Bei der Versuchsanordnung II, Schwingungseinleitung über den Scherboden, Abbildung 5-3, befindet sich die gesamte Scherzelle auf einer Grundplatte, die über Blattfedern schwingfähig gelagert ist. Die Schwingungen werden an der Grundplatte und damit am Scherboden eingeleitet und über das Schüttgut auf den Ring übertragen (Scherboden und Scherring stehen nicht in direktem Kontakt!).

Diese Anordnung gestattet Untersuchungen zum Übertragungsverhalten, also der Schwingungsdämpfung im Schüttgut und dem Auftreten von Resonanzeffekten. Am Scherring und Scherboden befindet sich jeweils ein Beschleunigungssensor. Aus der Abschwächung oder



Verstärkung und der Phasenlage zwischen dem Erreger- und den resultierendem Signal  $a_e$  und  $a_r$  können die Parameter des in Abschnitt 4 beschriebenen Modells des fußpunkterregten Schwingers gewonnen werden. Darüber hinaus steht der Einfluss von Schwingungsdämpfung und Resonanz auf das Fließverhalten im Vordergrund.

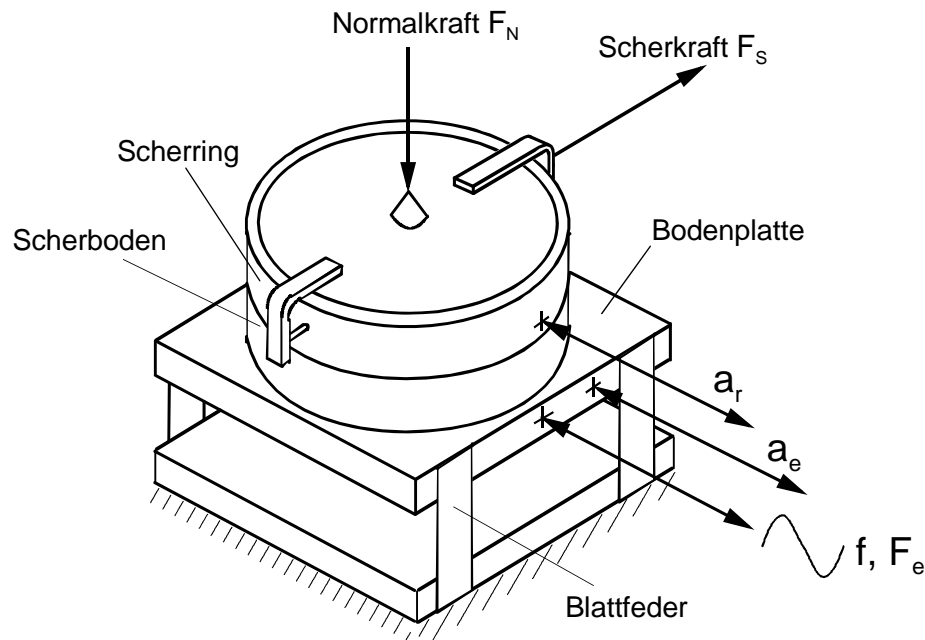


Abbildung 5-3: Schwingungseinleitung über den Scherboden („Gesamte Scherzelle schwingt“)

Bei beiden Versuchsanordnungen greift die Erregerkraft orthogonal sowohl zur Scher- als auch zur Normalkraft an, um eine Beeinflussung der Scherkraftmessung durch die Schwingungen möglichst gering zu halten. Dies entspricht etwa den Verhältnissen in der Praxis. Für die Siloentleerung wirkt die Erregerkraft in der Regel ebenfalls näherungsweise orthogonal zur Fließrichtung. Auch dort wird eine horizontale Schwingungseinleitung angestrebt, da vertikale Schwingungen zur Verdichtung des Schüttgutes führen können.

Die praktische Umsetzung des Konzeptes „Schwingende Scherzelle“ sowie die Anbindung von Schwingungserregung und Messtechnik sind am Beispiel der Versuchsanordnung II in Abbildung 5-4 gezeigt.

Bei der Versuchsanordnung II gilt den Blattfedern besonderes Augenmerk. Sie dürfen einerseits beim Vorverfestigen mit der zum Teil recht hohen Verfestigungslast ( $\sigma_v/\sigma_{an} \leq 2,5$ ) nicht ausknicken. Andererseits müssen sie „weich“ genug sein, um die Eigenfrequenz der Scherzelle mit aufgelegter Abscherlast ( $\sigma_{ab} \geq 0,25 \sigma_{an}$ ) außerhalb des interessierenden Bereiches, d.h. mindestens unter 10 Hz zu halten. Daher sind für jeden einzelnen Fließort Blattfedern individueller Stärke notwendig. Die bei diesen Untersuchungen verwendeten Blattfedern sind 20 mm breit, 50 mm lang und abhängig von der Verfestigungslast 0,3 mm bis 0,7 mm stark.

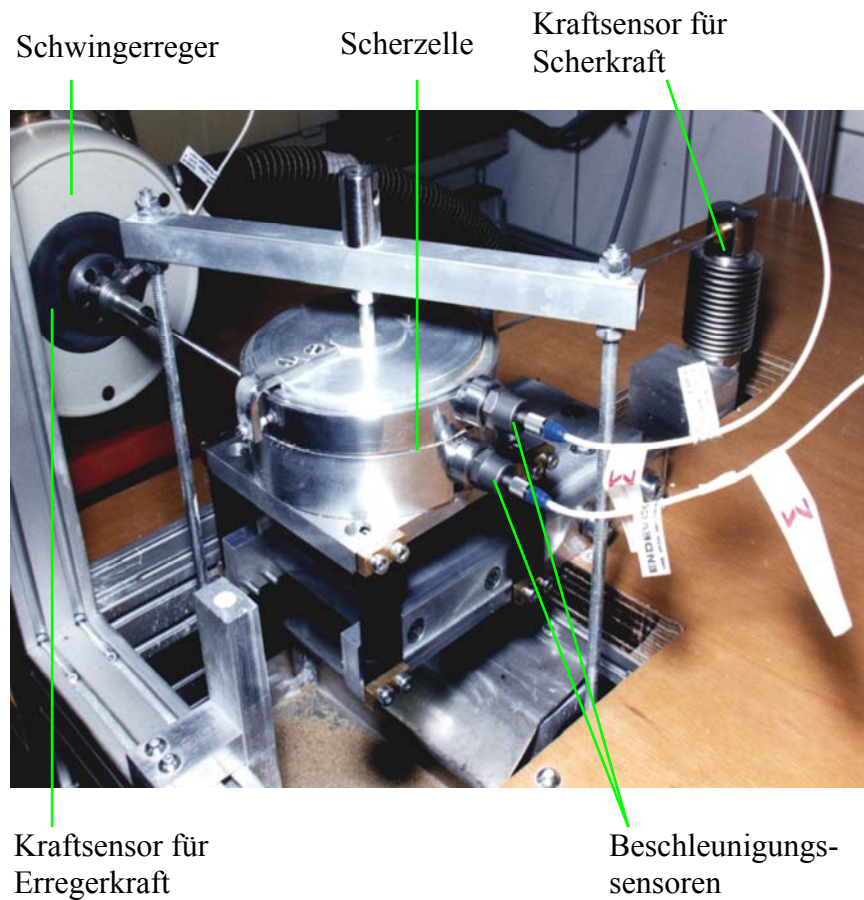


Abbildung 5-4: Versuchsanordnung II, Schwingungseinleitung über den Scherboden, mit Schwingungserregung und Messtechnik

### 5.3 Der direkte Scherversuch

#### 5.3.1 Durchführung eines Translations-Scherversuches nach Jenike

Der Translations-Scherversuch nach Jenike [27] beinhaltet drei Schritte: Vorverfestigen, Anscheren und (Ab-) Scheren. Die ersten beiden Schritte, Vorverfestigen und Anscheren, dienen der Herstellung eines reproduzierbaren Ausgangszustandes mit der Beanspruchungsvorgeschichte „Stationäres Fließen“, d.h. Fließen unter Volumenkonstanz. Beim Vorverfestigen wird das locker eingefüllte Schüttgut mit einer dem Fließort entsprechenden Normallast verdichtet. Dabei dienen Drehschwingungen (das so genannte Twisten) der Vergleichmäßigung der Verdichtung des Schüttgutes in der Scherzelle. Beim Anscheren wird die Schüttgutprobe mit einer gewählten Normalspannung  $\sigma_{an}$  (simuliertes Eigengewicht des Schüttgutes z.B. im

Silo) belastet und so lange mit konstanter Geschwindigkeit geschert, bis die gemessene Scherkraft konstant bleibt. Hier sollen Scherring und Scherboden genau übereinander liegen. Das Erreichen dieses konstanten Scherkraftniveaus gilt als Indiz für stationäres Fließen, Abbildung 5-5.

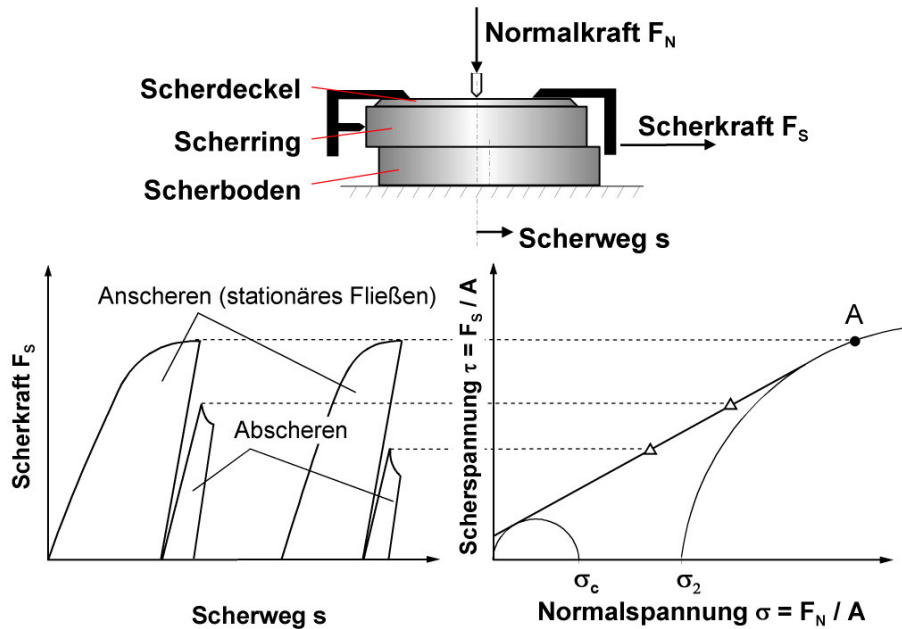


Abbildung 5-5: Translationsscherversuch nach Jenike [27]

Aufgrund des begrenzten Scherweges der Jenike-Scherzelle ist dieser Zustand nur nach einer dem Anscheren vorangestellten Vorverfestigung der Probe möglich. Die Bedingungen beim Vorverfestigen werden solange variiert, bis beim anschließenden Anscheren eine „kritische Verfestigung“, Abbildung 5-6, beobachtet wird.

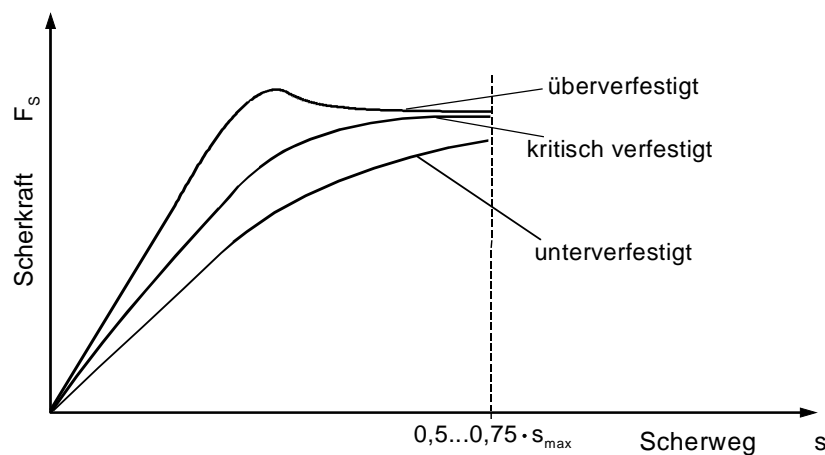


Abbildung 5-6: Mögliche Scherkraftverläufe beim Anscheren

Aus der aufgebrachten Normallast und der gemessenen Scherkraft beim Anscheren erhält man den ersten Punkt im Fließortdiagramm, Anscherpunkt „A“ siehe Abbildung 5-5, rechts. Dieser Anscherpunkt mit dem dazugehörigen Mohr-Kreis repräsentiert das stationäre Fließen als Beanspruchungsvorgeschichte. Beim Abscheren ergibt sich ein Scherkraft-Verlauf einer überverfestigten Probe mit einem Scherkraftmaximum (Punkt C in Abbildung 3-4), dem Beginn der plastischen Verformung.

Nach dem Anscheren wird der Schervorgang unter verminderter Normalspannung mit  $0,25 \leq \sigma_{ab} / \sigma_{an} \leq 0,8$  fortgesetzt. Bei kohäsiven Schüttgütern wird dieser Bereich nach unten vom Tangentialpunkt des Fließortes mit dem Mohr-Kreis der einaxialen Druckfestigkeit  $\sigma_c$  limitiert, Abbildung 5-5, rechts. Für kohäsive Schüttgüter erhält man beim Abscheren typischerweise ein Scherkraftmaximum wie in Abbildung 5-5, links, die Probe kann aber auch ohne ausgeprägtes Maximum wieder in stationäres Fließen auf niedrigerem Niveau über gehen. Aus Scherspannung und Normalspannung beim Abscheren resultiert jeweils direkt ein Punkt des Fließortes. Mehrere Abscherpunkte ergeben die Fließortlinie, die sich im gemessenen Spannungsbereich ( $0,25 \leq \sigma_{ab} / \sigma_{an} \leq 0,8$ ) meist durch eine Gerade approximieren lässt. Durch Variation der Normalspannung beim Anscheren  $\sigma_{an}$  erhält man eine Schar von Fließorten. Als Schar-Parameter dienen Schüttgutdichte  $\rho_b$  bzw. Porosität  $\varepsilon$ .

### 5.3.2 Mögliche Versuchsmethoden von Vibrations-Scherversuchen

Für die Durchführung von Vibrations-Scherversuchen sind unterschiedliche Versuchsprozeduren möglich, je nachdem während welcher Teilschritte die Schwingungen eingetragen werden. Die daraus resultierenden Versuchsmethoden werden im Einzelnen vorgestellt, Tabelle 5-3.

Tabelle 5-3: Versuchsmethoden und mögliche Anwendungen [37]

Method	Schwingungen	Anwendung, Beispiele
A <sup>1</sup>	nur beim Abscheren	Intervallbetrieb von Austraghilfen („gepulste Vibration“) z.B. zur Zerstörung von Schüttgutbrücken
B	beim An- und Abscheren	kontinuierlicher Betrieb von z.B. Schwingtrichtern
C <sup>1</sup>	bei der Vorverfestigung	unerwünschte Schwingungen während der Silobefüllung und Lagerung ohne Austrag
D	zwischen An- und Abscheren	unerwünschte Schwingungen während Lagerung und Transport, z.B. Verfestigung beim Bahntransport

<sup>1</sup> Roberts [56, 57]

Im Rahmen dieser Arbeit steht vorrangig die **Methode B**, Schwingungen beim An- und Abscheren, im Vordergrund, um die Einflüsse von mechanischen Schwingungen auf das Fließverhalten von kohäsiven Schüttgütern zu beurteilen.

Im ersten Fall, **Methode A**, erfolgt das Anscheren ohne Schwingungen. Die Schwingungen werden nur während des Abscherens eingetragen. Mit dieser Methode kann der Intervallbetrieb schwingender Austraghilfen simuliert werden. Bei diesem häufig auftretenden Anwendungsfall wird das Silo ohne zusätzlich aufgegebene Schwingungen befüllt und während des Entleerens werden die Außen-Vibratoren, Schwingtrichter etc. jeweils kurzzeitig mit zwischengeschalteten Pausen betrieben.

In **Methode B** werden die Schwingungen sowohl beim Anscheren als auch beim Abscheren unter jeweils gleichen Bedingungen aufgegeben. Dieses Vorgehen entspricht den Verhältnissen bspw. in einem kontinuierlich betriebenen Schwingtrichter. Hier wird nicht nur das beginnende, sondern auch das stationäre Fließen durch die Schwingungen beeinflusst.

Kaaden, in [57], beaufschlagte die Schüttgutprobe zwischen Vorverfestigen und Anscheren mit horizontalen oder vertikalen Schwingungen, **Methode C**. Dieser Fall simuliert das Befüllen bei geschlossenem Auslauf. Als Ergebnis erhielt er Fließorte, die erwartungsgemäß oberhalb des Fließortes ohne Schwingungseinwirkung lagen, das bedeutet, hier wirken die eingetragenen Schwingungen der normalerweise erwarteten Fließverbesserung entgegen. Sie führen offenbar zu einer zusätzlichen Verdichtung des Schüttgutes.

Des Weiteren können unerwünschte Schwingungen während der Lagerung bzw. während des Transports z.B. per Bahn untersucht werden, **Methode D**. Analog zur Vorgehensweise bei der Quantifizierung von Zeitverfestigungen wird die Probe zwischen An- und Abscheren einer Schwingungseinwirkung ausgesetzt. Der Schwingungseintrag im Ruhezustand verursacht i.allg. eine Verfestigung und damit Fließverschlechterung. Typische Beanspruchungen, die z.B. beim Bahntransport (siehe [37]) auftreten, können mit Hilfe spezieller Schwingungsmodi berücksichtigt werden.

Schließlich können weitere mögliche Anwendungen durch geschickte Kombination der einzelnen Methoden abgedeckt werden, bspw. Vibrationsverdichtung beim Transport und anschließendes Entleeren des Waggons mit Hilfe schwingender Austraghilfen durch Kombination von Methode D mit Methode A.

### 5.3.3 Schwingungseinleitung beim An- und Abscheren

Die Schüttgutprobe wird vorverfestigt und angeschert. Sowohl beim An- als auch beim Abscheren der Probe wird bei fest eingestellter Frequenz  $f$  eine Beschleunigung  $a$  vorgegeben (wodurch auch der Schwingweg  $x$  und die Schwinggeschwindigkeit  $v$  definiert sind, vgl. Tabelle 4-1). Als Ergebnis erhält man die Scherfestigkeit bei Schwingungseinwirkung als

gemessene Scherspannung  $\tau_v(\sigma)$  für die jeweils verwendete Schwinggeschwindigkeit  $v_{\max}$ . Aufgrund der verwendeten Kraftsteuerung für die Schwingungserregung ist die exakte Vorgabe einer vorgewählten Schwingungsgröße, wie der Schwinggeschwindigkeit nicht möglich. Die Messung bei einer bestimmten Schwinggeschwindigkeit sowie Wiederholversuche mit jeweils der gleichen Schwinggeschwindigkeit sind somit sehr aufwändig.

Nach Erreichen des stationären Fließens wird die Normallast verringert und unter identischer Schwingungseinwirkung abgeschert. Zusätzlich zu den Kurven für die Scherspannung  $\tau_\omega$  erhält man eine Kurve für die Anscher-Scherspannung unter Schwingungseinwirkung  $\tau_{an,\omega}$ . Damit können nun komplette Schwingungs-Fließorte, einschließlich des jeweiligen Verfestigungs-Mohr-Kreises, konstruiert werden.

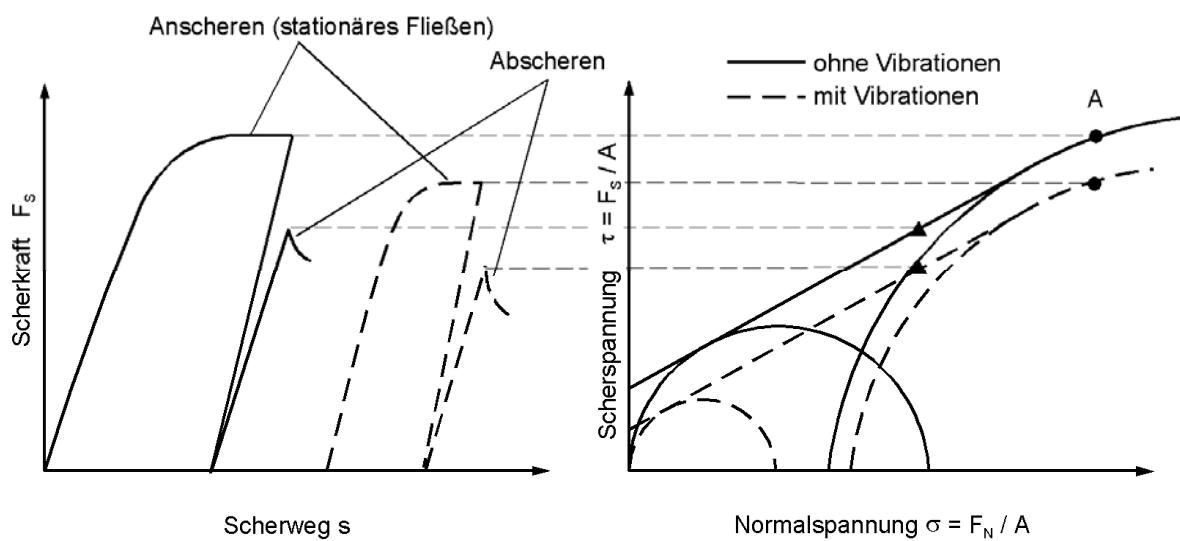


Abbildung 5-7: Ermittlung von Fließorten unter Schwingungseinwirkung

## 6 Beschreibung der Versuchspulver

Im Rahmen dieser Arbeit wurden die Pulver Kalkstein ( $\text{CaCO}_3$ , OMYA) und Titandioxid ( $\text{TiO}_2$ , KRONOS 1001) untersucht. Die charakteristischen Merkmale dieser Pulver sind in Tabelle 6-1 aufgeführt. Abbildung 6-1 zeigt die Partikelgrößenverteilungen der Schüttgüter.

Tabelle 6-1: Stoffkennwerte der verwendeten Pulver und Partikel [37]

Merkm <sup>al</sup>	Symbol	Einheit	$\text{CaCO}_3$	$\text{TiO}_2$
mittlerer Durchmesser	$d_{50}$	$\mu\text{m}$	1,3	0,6
Sauterdurchmesser	$d_{ST}$	$\mu\text{m}$	1,1	0,5
spezifische Oberfläche (BET)	$A_{sp,BET}$	$\text{m}^2/\text{g}$	8,4	10,2
Feststoffdichte	$\rho_S$	$\text{kg}/\text{m}^3$	2650	3860
Feuchtegehalt	$X_l$	--	0,004	0,003
unverfestigte Schüttgutdichte	$\rho_{b,0}$	$\text{kg}/\text{m}^3$	540	571
Porosität (unverfestigt)	$\varepsilon_0$	--	0,79	0,86
Elastizitätsmodul	E	$\text{kN}/\text{mm}^2$	80	280
Mohs-Härte	--	--	3	5,5 ... 6
Vickers-Härte	HV	$\text{N}/\text{mm}^2$	115 ... 140	710 ... 1120
Kompressibilitätsindex	n	--	0,08	0,06
Hamaker-Konstante [22]	$C_{H,sls}$	J	$3,6 \cdot 10^{-20}$	$12,6 \cdot 10^{-20}$

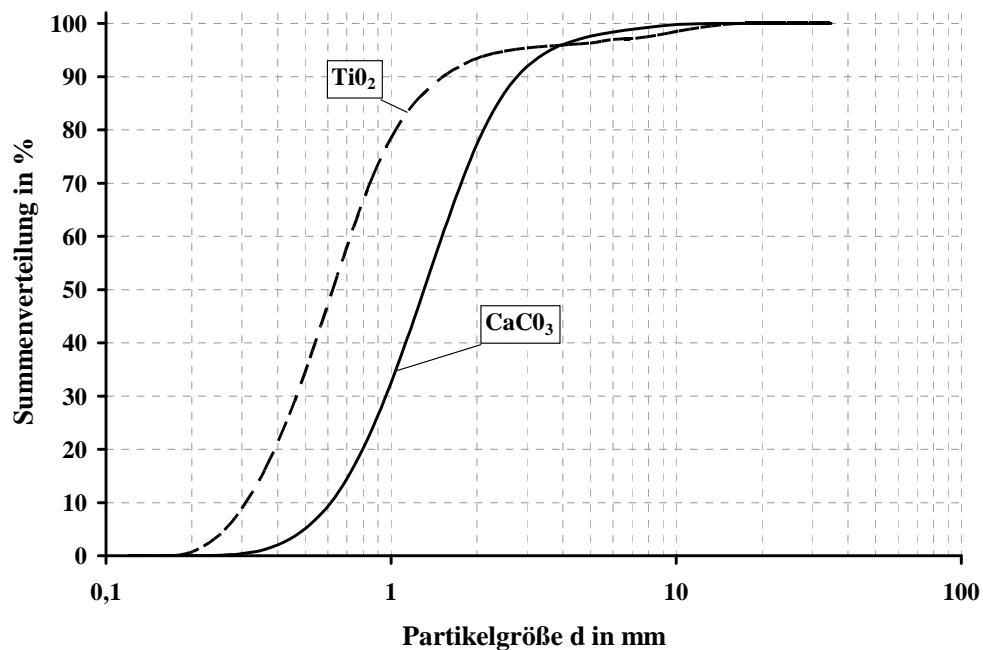


Abbildung 6-1: Partikelgrößenverteilung der verwendeten Pulver

Die ausgewählten Pulver zeichnen sich durch eine hohe Konstanz in ihren mechanischen Eigenschaften aus [37] und finden breite industrielle Anwendung. Darüber hinaus unterscheiden sich die Pulver in ihren mechanischen Eigenschaften voneinander, Tabelle 6-1, und sind daher gut als Modell-Schüttgüter geeignet.

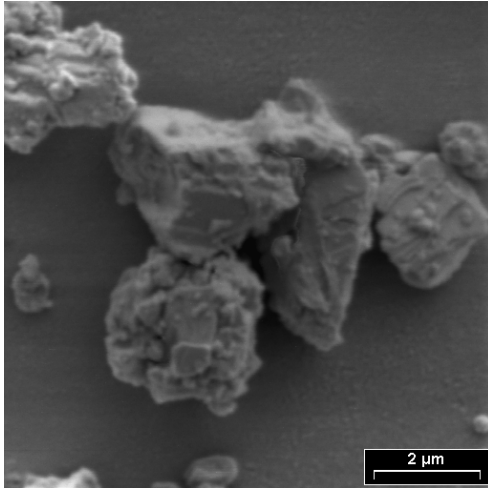


Abbildung 6-2: REM-Aufnahme des Kalksteinpulvers

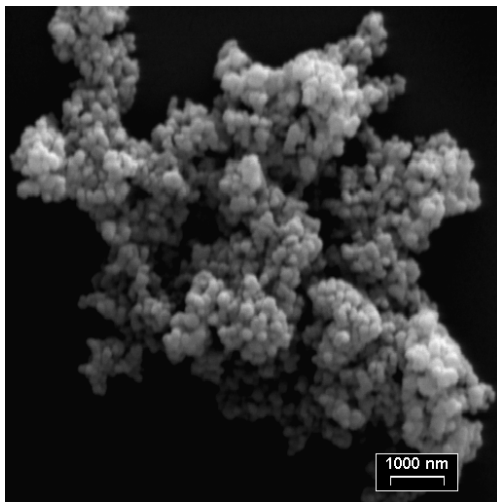


Abbildung 6-3: REM-Aufnahme des Titandioxids: Agglomerate

Abbildung 6-2 zeigt eine REM-Aufnahme des Kalksteinpulvers. Die Partikeln sind unregelmäßig geformt, wie es für Zerkleinerungsprodukte typisch ist. Das Titandioxidpulver (Abbildung 6-3) besteht aus kugelförmigen Primärpartikeln mit einem Durchmesser von ca. 100 nm. Diese bilden fest verwachsene dreidimensionale Kugelketten, die als Aggregate bezeichnet werden). Beide Produkte bilden nicht verwachsene aber haftende Verbände von Partikeln (Agglomerate), deren Größe sich bis in den Millimeter-Bereich erstrecken kann. Abbildung 6-3 zeigt  $\text{TiO}_2$  - Agglomerate; die kugelförmigen Primärpartikeln sind gut zu erkennen. Die Partikelgrößenverteilung wurde mittels Laser-Beugungsspektrometrie (Sympatec Helos) gemessen. Die Produkte wurden in Wasser dispergiert, um die vorhandenen Agglomerate zu



zerstören. Beim Titandioxidpulver handelt es sich somit um die Größenverteilung der stabilen Aggregate.

Die spezifische Oberfläche wurde durch Stickstoffadsorption (BET- Einpunktmethode nach DIN 66132) und die Feststoffdichte mit einem Helium-Pyknometer (Micromeritics) bestimmt. Für die Adsorptionsmethode und die Feststoffdichte-Bestimmung wurden die Proben jeweils ca. 24 h bei 200 °C getrocknet.

Die Gutfeuchte  $X_1$  ist als Verhältnis der Masse an Flüssigkeit  $m_l$  zur Masse an trockenem Feststoff  $m_s$  definiert, Gl. (2-26). Die Werte wurden thermogravimetrisch mit einem Infrarot-Feuchtemessgerät (Sartorius MA 30) durchgeführt. Die Trocknungstemperatur betrug 110 °C. Während der gesamten Untersuchungen wurde der Feuchtegehalt der Pulver regelmäßig überprüft. Bei im Labor auftretenden relativen Luftfeuchtigkeiten  $40\% \leq \text{RLF} \leq 60\%$  konnte keine signifikante Schwankung von  $X_1$  gemessen werden. Eine Änderung der Gutfeuchte der Pulver aufgrund der schwankenden Luftfeuchtigkeiten kann daher ausgeschlossen werden.

Die Messungen zum Fließverhalten ergaben, dass sich beide Pulver kohäsiv bis sehr kohäsiv verhalten. Dabei ist beim Kalksteinpulver ein flacherer Verlauf der Verfestigungsfunktion zu sehen als beim Titandioxid.

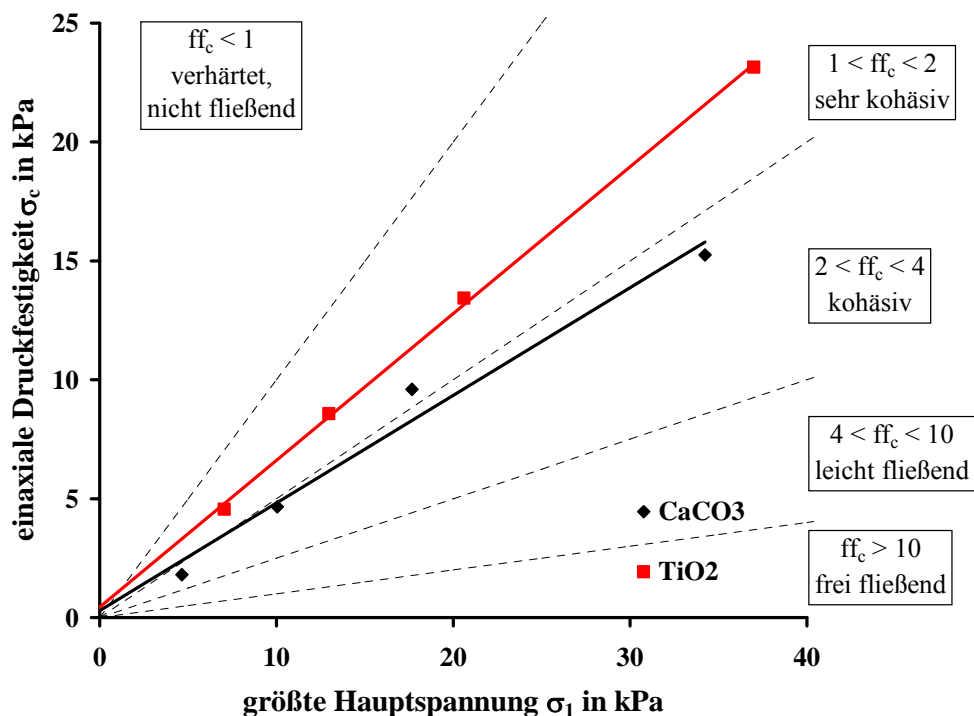


Abbildung 6-4: Fließverhalten von Kalkstein und Titandioxid

## 7 Ergebnisse der experimentellen Untersuchungen

In diesem Kapitel sollen die wesentlichen und aussagekräftigsten Ergebnisse der experimentellen Untersuchungen zum Fließ- und Dämpfungsverhalten kohäsiver Pulver unter dem Einfluss mechanischer Schwingungen dargestellt und diskutiert werden. Darunter wird in der Silopraxis das Fließen unter Schwerkraftwirkung verstanden, wobei der Schwerkraftfluss der Schüttgüter durch überlagerte Schwingungseinwirkung initiiert und unterstützt wird.

Die nachfolgend gezeigten Ergebnisse wurden mit der Versuchsanordnung „Gesamte Scherzelle schwingt“ (siehe Abschnitt 5.2) erzielt. Die aufgebrauchten Schwingungen hatten Erregerfrequenzen zwischen 50 Hz und 200 Hz. In Anlehnung an die Untersuchungen von Kollmann [37] wurde dabei eine maximale Schwinggeschwindigkeit von  $v_{\max} = 20 \text{ mm/s}$  verwendet.

### 7.1 Beschreibung von Erreger- und Antwortschwingung

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass es sich sowohl bei der Erregung des Scherbodens als auch bei der Antwortschwingung des Scherringes um eine sinusförmige Schwingung handelt. Das ist die Voraussetzung, damit die Beschreibung als harmonische Schwingung und die Parameteranpassung nach der in Abschnitt 4.6 beschriebenen Methode erfolgen kann. Abbildung 7-1 zeigt die gemessenen Kurven der Erreger- und Antwortschwingung, die am Scherboden bzw. Scherring bei einer Erregerfrequenz von  $f = 100 \text{ Hz}$  und einer Amplitude der Erregerbeschleunigung von  $a = 12,9 \text{ m/s}^2$  aufgenommen wurden.

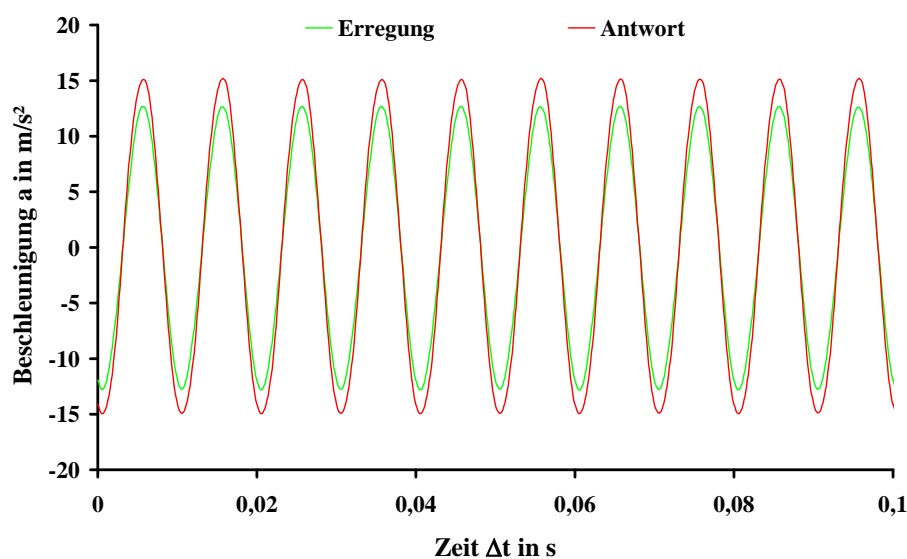


Abbildung 7-1: Gemessene Erreger- und Antwortschwingung für die Erregerfrequenz  $f = 100 \text{ Hz}$  und eine Erregerbeschleunigungsamplitude  $a_{\max,1} = 12,9 \text{ m/s}^2$  ( $v_{\max} = 20,5 \text{ mm/s}$ )

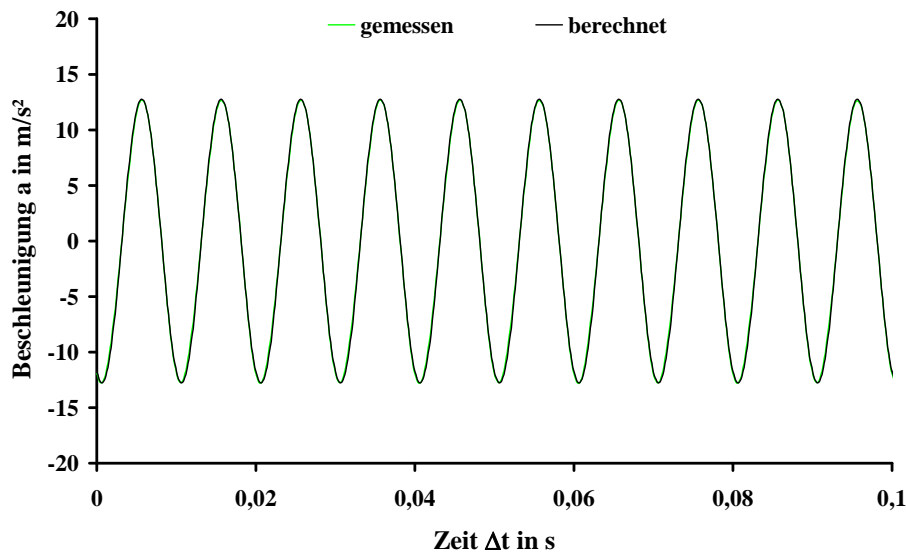


Abbildung 7-2: Gemessene und berechnete Erregerschwingung für die Erregerfrequenz  $f = 100 \text{ Hz}$  und eine Erregerbeschleunigungsamplitude  $a_{\max,1} = 12,9 \text{ m/s}^2$  ( $v_{\max} = 20,5 \text{ mm/s}$ )

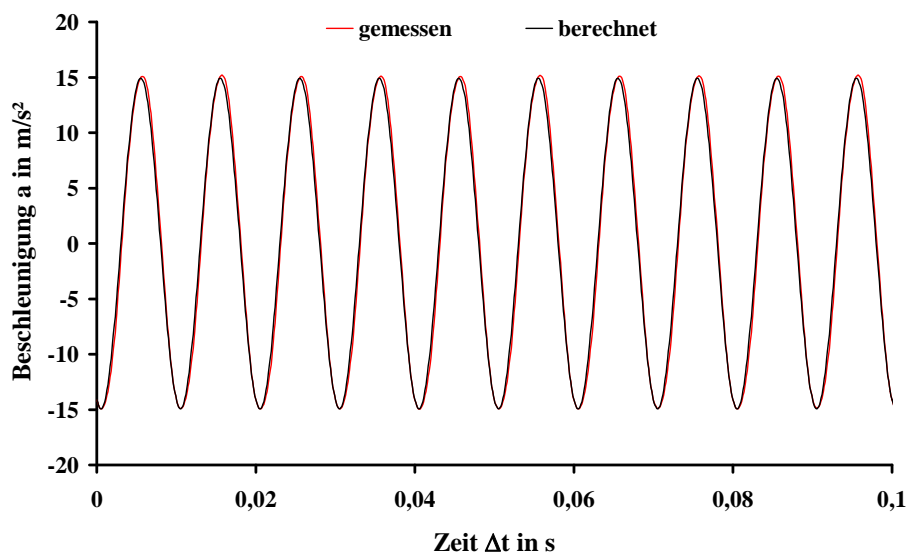


Abbildung 7-3: Gemessene und berechnete Antwortschwingung für die Erregerfrequenz  $f = 100 \text{ Hz}$  und eine Erregerbeschleunigungsamplitude  $a_{\max,1} = 12,9 \text{ m/s}^2$  ( $v_{\max} = 20,5 \text{ mm/s}$ )

In Abbildung 7-2 und Abbildung 7-3 werden die gemessenen Kurven der Erreger- bzw. Antwortschwingung mit Sinuskurven verglichen, die mit den gleichen Parametern berechnet wurden. Gemessene und berechnete Kurven sind praktisch deckungsgleich. Das zeigt sehr deutlich, dass es sich bei der Erreger- und bei der Antwortschwingung jeweils um Sinusschwingungen handelt. Somit kann die Parameteranpassung nach der in Abschnitt 4.6 beschriebenen Methode erfolgen.

## 7.2 Einfluss der Vibrationen auf das Fließ- und Dämpfungsverhalten von kohäsivem Kalksteinmehl

### 7.2.1 Fließverhalten

Um den Einfluss der Schwingungen auf das Fließverhalten zu veranschaulichen, soll zunächst beispielhaft die Darstellung der Scherkraft-Zeit-Kurven als elementare Messdaten erfolgen.

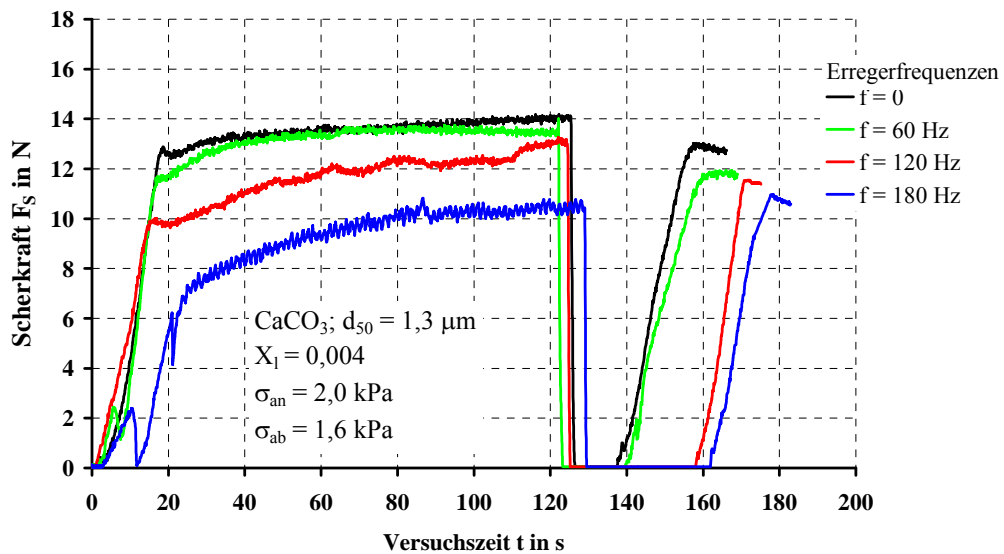


Abbildung 7-4: Typische Scherkraft-Zeit-Kurven („Gesamte Scherzelle schwingt“, Fließort 1, Methode „B“, maximale Schwinggeschwindigkeit 20 mm/s, Schergeschwindigkeit 2mm/min)

Abbildung 7-4 zeigt typische Scherkraft-Zeit-Kurven für Versuche mit Kalksteinpulver (OMYA) bei einer Anscherspannung von  $\sigma_{\text{an}} = 2 \text{ kPa}$  und einer Abscherspannung von  $\sigma_{\text{ab}} = 1,6 \text{ kPa}$  bei unterschiedlichen Erregerfrequenzen (Methode „B“, Schwingungseinleitung beim An- und Abscheren). Sehr deutlich ist die Abnahme der gemessenen Scherkraft durch die eingeleiteten Schwingungen sowohl beim An- als auch beim Abscheren zu sehen. Je größer die Erregerfrequenz, d.h. je größer die Schwingungsintensität ist, desto deutlicher ist die Scherspannungsreduzierung ausgeprägt.

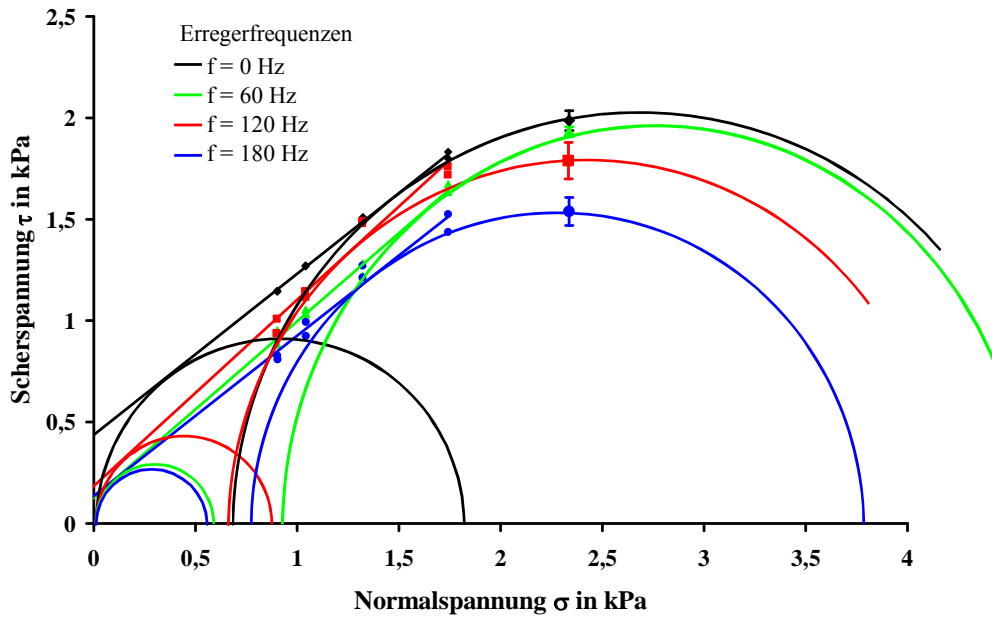


Abbildung 7-5: Lage der Fließorte 1 ohne Schwingungseinwirkung und bei verschiedenen Erregerfrequenzen  $f$  für Kalksteinpulver bei maximaler Schwinggeschwindigkeit  $v_{\max} = 20 \text{ mm/s}$

Abbildung 7-5 zeigt die Lage der Fließortgeraden bei unterschiedlichen Erregerfrequenzen und maximaler Schwinggeschwindigkeit  $v_{\max} = 20 \text{ mm/s}$  am Beispiel des Fließortes 1. Weitere Fließorte befinden sich im Anhang. Durch den Einfluss der Schwingungen werden die Fließortgeraden weitgehend parallel zu kleineren Scherspannungen verschoben. Das bedeutet, der innere Reibungswinkel  $\varphi_i$  kann als annähernd invariant gegenüber der Schwingungseileitung betrachtet werden. Die Kohäsion  $\tau_c$  hingegen wird unter Schwingungseinwirkung deutlich kleiner. Das hat ebenfalls zur Folge, dass bei konstantem innerem Reibungswinkel  $\varphi_i$  die einaxiale Druckfestigkeit  $\sigma_c$  ebenfalls abnimmt, da gilt [80]

$$\sigma_c = 2 \cdot \tau_c \frac{1 + \sin \varphi_i}{\cos \varphi_i} \quad (7-1)$$

Abbildung 7-6 zeigt den Einfluss der eingeleiteten Schwingungen auf das Fließverhalten von Kalksteinpulver anhand der erhaltenen Verfestigungsfunktionen  $\sigma_c = \sigma_c(\sigma_1)$ . Deutlich erkennbar ist die Verbesserung des Fließverhaltens an den größer werdenden Werten der Fließfunktion  $ff_c$  mit zunehmender Schwingungsintensität. Diese nimmt mit steigender Frequenz zu, da die Schwinggeschwindigkeit konstant (hier  $v_{\max} = 20 \text{ mm/s}$ ) gehalten wurde. Durch die eingeleiteten Schwingungen kommt es zu einer Aktivierung des Schüttgutes, wobei die Schwingungen selbst nicht zu einem Bruch der Probe führen, sondern lediglich das Fließen des Pulvers unterstützen [37]. Schneidet eine der eingezeichneten Funktionen die Achse der

Verfestigungsspannung  $\sigma_1$ , so bedeutet dies, dass das Schüttgut durch den Schwingungseintrag soweit aktiviert wurde, dass es sich nahezu frei fließend verhält.

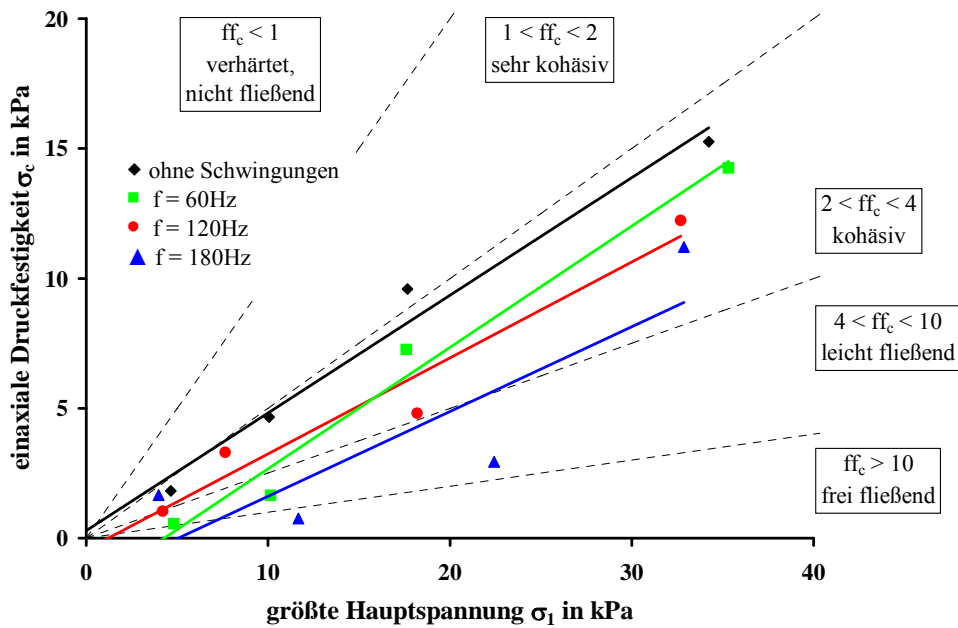


Abbildung 7-6: Fließfähigkeit von Kalksteinpulver, abhängig von der Erregerfrequenz  $f$  bei konstanter maximaler Schwinggeschwindigkeit  $v_{\max} = 20 \text{ mm/s}$

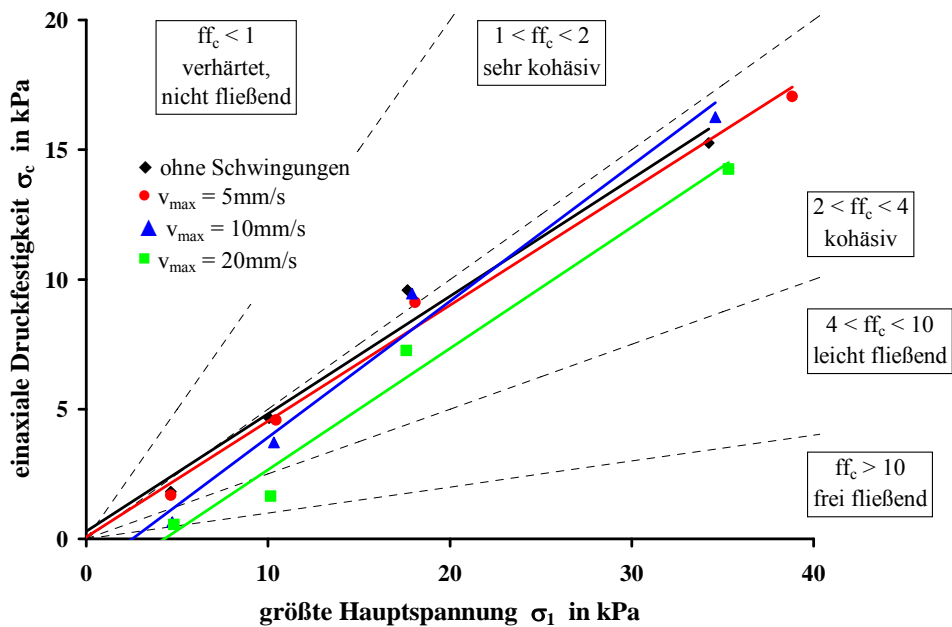


Abbildung 7-7: Fließfähigkeit von Kalksteinpulver, abhängig von der maximalen Schwinggeschwindigkeit bei konstanter Erregerfrequenz  $f = 60 \text{ Hz}$

In Abbildung 7-7 ist der Einfluss der maximalen Schwinggeschwindigkeit auf das Fließverhalten von Kalksteinpulver zu sehen. Auch hier verbessert sich mit zunehmender Schwingungsintensität das Fließverhalten des Pulvers, was an den zu größeren Werten der Fließfunktion verschobenen Funktionsgeraden abzulesen ist.

In Tabelle 7-1 und Tabelle 7-2 sind die in Abbildung 7-6 und Abbildung 7-7 graphisch dargestellten Werte der einaxialen Druckfestigkeit und der Fließfunktion zusammen gefasst.

Tabelle 7-1: Einaxiale Druckfestigkeit und Fließfunktion von Kalksteinpulver abhängig von der Erregerfrequenz  $f$  bei konstanter maximaler Schwinggeschwindigkeit  $v_{\max} = 20 \text{ mm/s}$

FO	ohne Schwingungen			f = 60 Hz			f = 120 Hz			f = 180 Hz		
	$\sigma_1$ in kPa	$\sigma_c$ in kPa	ff <sub>c</sub>	$\sigma_1$ in kPa	$\sigma_c$ in kPa	ff <sub>c</sub>	$\sigma_1$ in kPa	$\sigma_c$ in kPa	ff <sub>c</sub>	$\sigma_1$ in kPa	$\sigma_c$ in kPa	ff <sub>c</sub>
1	4,7	1,8	2,6	4,8	0,6	8,6	4,2	1,0	4,1	4,0	1,7	2,4
2	10,0	4,7	2,2	10,2	1,6	6,2	7,6	3,3	2,3	11,7	0,8	15,5
3	17,7	9,6	1,8	17,6	7,3	2,4	18,2	4,8	3,8	22,4	2,9	7,7
4	34,2	15,3	2,2	35,3	14,3	2,5	32,7	12,2	2,7	32,9	11,2	2,9

Tabelle 7-2: Einaxiale Druckfestigkeit und Fließfunktion von Kalksteinpulver abhängig von der maximalen Schwinggeschwindigkeit  $v_{\max}$  bei konstanter Erregerfrequenz  $f = 60 \text{ Hz}$

FO	ohne Schwingungen			$v_{\max} = 5 \text{ mm/s}$			$v_{\max} = 10 \text{ mm/s}$			$v_{\max} = 20 \text{ mm/s}$		
	$\sigma_1$ in kPa	$\sigma_c$ in kPa	ff <sub>c</sub>	$\sigma_1$ in kPa	$\sigma_c$ in kPa	ff <sub>c</sub>	$\sigma_1$ in kPa	$\sigma_c$ in kPa	ff <sub>c</sub>	$\sigma_1$ in kPa	$\sigma_c$ in kPa	ff <sub>c</sub>
1	4,7	1,8	2,6	4,7	1,7	2,8	4,7	0,6	7,3	4,8	0,6	8,6
2	10,0	4,7	2,2	10,4	4,6	2,3	10,3	3,7	2,8	10,2	1,6	6,2
3	17,7	9,6	1,8	18,1	9,1	2,0	17,9	9,5	1,9	17,6	7,3	2,4
4	34,2	15,3	2,2	38,8	17,1	2,3	34,6	16,3	2,1	35,3	14,3	2,5

Neben mechanischen Schwingungen hat auch die Materialfeuchte einen nicht unerheblichen Einfluss auf das Fließverhalten kohäsiver Pulver. Im Folgenden soll kurz auf den Einfluss unterschiedlicher Materialfeuchte auf das Fließverhalten am Beispiel von kohäsiven Kalksteinpulvers eingegangen werden.

Abbildung 7-8 zeigt die Lage der jeweiligen Fließborte 1 für verschiedene Materialfeuchten  $X_1$ . Weitere Fließborte befinden sich im Anhang. Mit zunehmender Materialfeuchte verschieben sich die Fließbortgeraden zu höheren Werten der Scherspannungen, am deutlichsten ist dies bei der höchsten Materialfeuchte von  $X_1 = 0,08$  zu sehen. Die Erhöhung der Materialfeuchte hat im untersuchten Bereich zu einer Zunahme der Haftkräfte zwischen den einzelnen Partikeln geführt, was an den höher liegenden Fließbortgeraden gut abzulesen ist.

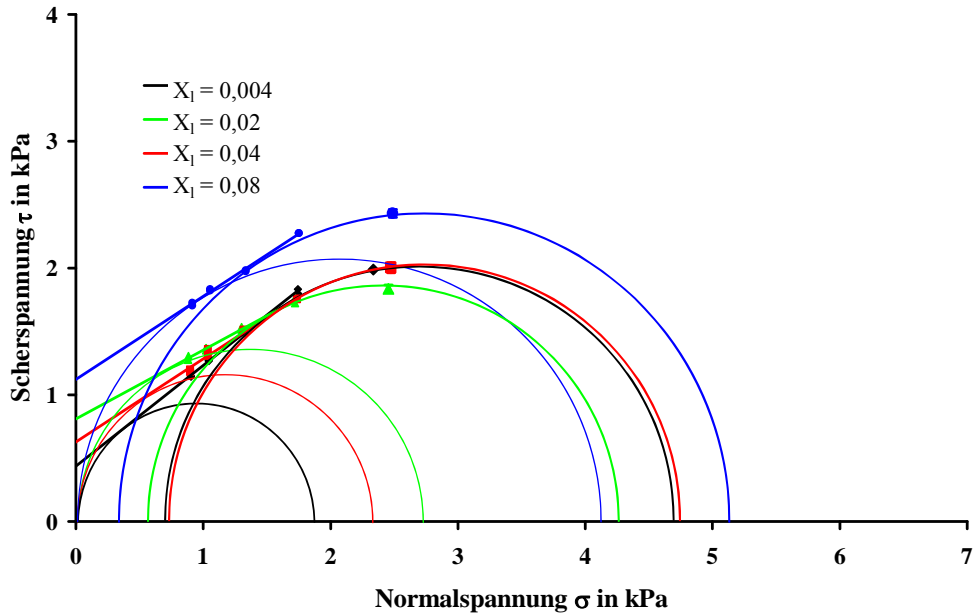


Abbildung 7-8: Lage der Fließorte 1 bei verschiedenen Materialfeuchten  $X_1$  für Kalksteinpulver

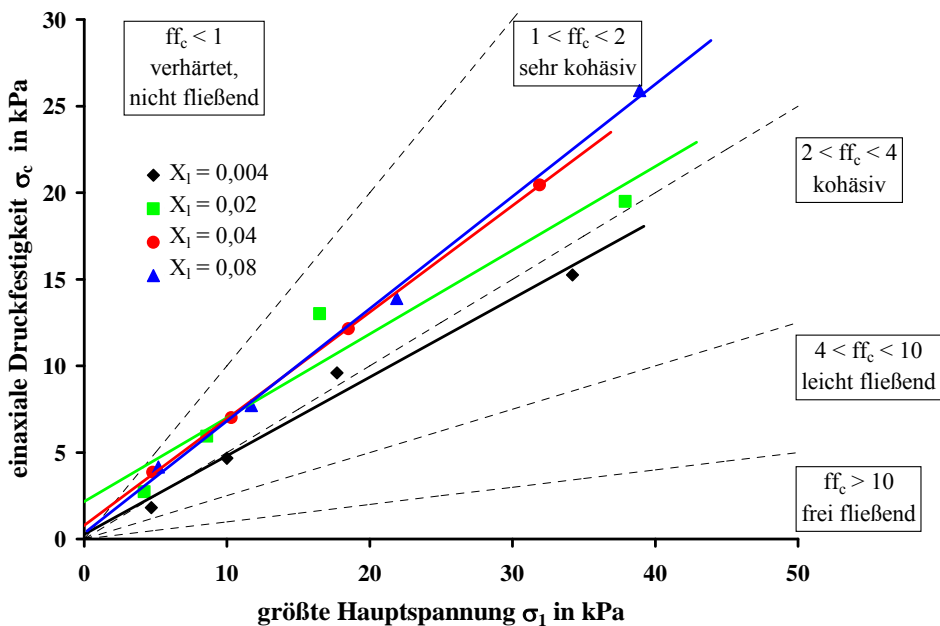


Abbildung 7-9: Fließfähigkeit von Kalksteinpulver, abhängig von der Materialfeuchte  $X_1$  bei Scherversuchen ohne Schwingungseinwirkung

In Abbildung 7-9 ist die Fließfähigkeit von Kalksteinpulver bei verschiedenen Materialfeuchten  $X_1$  bei Scherversuchen ohne Schwingungseinwirkung dargestellt. Mit zunehmender Materialfeuchte verschlechtert sich das Fließverhalten, d.h. die Verfestigungsfunktion  $\sigma_c(\sigma_1)$  verschiebt sich im Diagramm nach oben, zu kleineren Werten der Fließfunktion  $ff_c$ . Die in



Abbildung 7-9 graphisch dargestellten Werte der einaxialen Druckfestigkeit und der Fließfunktion sind in Tabelle 7-3 zusammen gefasst.

Tabelle 7-3: Einaxiale Druckfestigkeit und Fließfunktion von Kalksteinpulver abhängig von der Materialfeuchte  $X_1$  bei Scherversuchen ohne Schwingungseinwirkung

FO	$X_1 = 0,004$			$X_1 = 0,02$			$X_1 = 0,04$			$X_1 = 0,08$		
	$\sigma_1$ in kPa	$\sigma_c$ in kPa	$ff_c$	$\sigma_1$ in kPa	$\sigma_c$ in kPa	$ff_c$	$\sigma_1$ in kPa	$\sigma_c$ in kPa	$ff_c$	$\sigma_1$ in kPa	$\sigma_c$ in kPa	$ff_c$
1	4,7	1,8	2,6	4,2	2,7	1,5	4,8	3,9	1,2	5,2	4,2	1,2
2	10,0	4,7	2,2	8,6	5,9	1,5	10,3	7,0	1,5	11,7	7,7	1,5
3	17,7	9,6	1,8	16,5	13,0	1,3	18,5	12,1	1,5	21,9	13,9	1,6
4	34,2	15,3	2,2	37,9	19,5	1,9	31,9	20,5	1,6	38,9	25,9	1,5

Tabelle 7-1 zeigt die einaxialen Druckfestigkeit und die Fließfunktion für unbefeuchtetes Kalksteinpulver ( $X_1 = 0,004$ ). Tabelle 7-4 zeigt die entsprechenden Werte für befeuchtetes Kalksteinpulver ( $X_1 = 0,04$ ).

Tabelle 7-4: Einaxiale Druckfestigkeit und Fließfunktion von befeuchtetem Kalksteinpulver ( $X_1 = 0,04$ ) abhängig von der Erregerfrequenz  $f$  bei konstanter maximaler Schwinggeschwindigkeit  $v_{\max} = 20$  mm/s

FO	ohne Schwingungen			$f = 60$ Hz			$f = 120$ Hz			$f = 180$ Hz		
	$\sigma_1$ in kPa	$\sigma_c$ in kPa	$ff_c$	$\sigma_1$ in kPa	$\sigma_c$ in kPa	$ff_c$	$\sigma_1$ in kPa	$\sigma_c$ in kPa	$ff_c$	$\sigma_1$ in kPa	$\sigma_c$ in kPa	$ff_c$
1	4,8	3,9	1,2	4,8	0,01	>100	4,1	0,01	>100	3,8	1,7	2,3
2	10,3	7,0	1,5	9,4	1,3	7,3	7,1	3,6	2,0	11,3	2,0	5,8
3	18,5	12,1	1,5	18,0	11,4	1,6	21,2	5,2	4,1	20,8	6,4	3,2
4	31,9	20,5	1,6	31,5	19,7	1,6	35,0	17,8	2,0	34,3	18,1	1,9

Abbildung 7-10 vergleicht die in Tabelle 7-1 und Tabelle 7-4 angegebenen Werte der einaxialen Druckfestigkeit  $\sigma_c$  und der Fließfunktion  $ff_c$  von unbefeuchtetem ( $X_1 = 0,004$ ) und befeuchtetem Kalksteinpulver ( $X_1 = 0,04$ ) bei verschiedenen Erregerfrequenzen  $f$  und konstanter maximaler Schwinggeschwindigkeit  $v_{\max} = 20$  mm/s. Zu sehen ist, dass die Werte der einaxialen Druckfestigkeit des befeuchteten Kalksteinpulvers größer sind als die jeweiligen Wer-

te der unbefeuchteten Pulvers. Bei sehr kleinen Normalspannungen (FO 1) sind die Unterschiede zwischen unbefeuchtetem und befeuchtetem Kalksteinpulver nicht so deutlich.

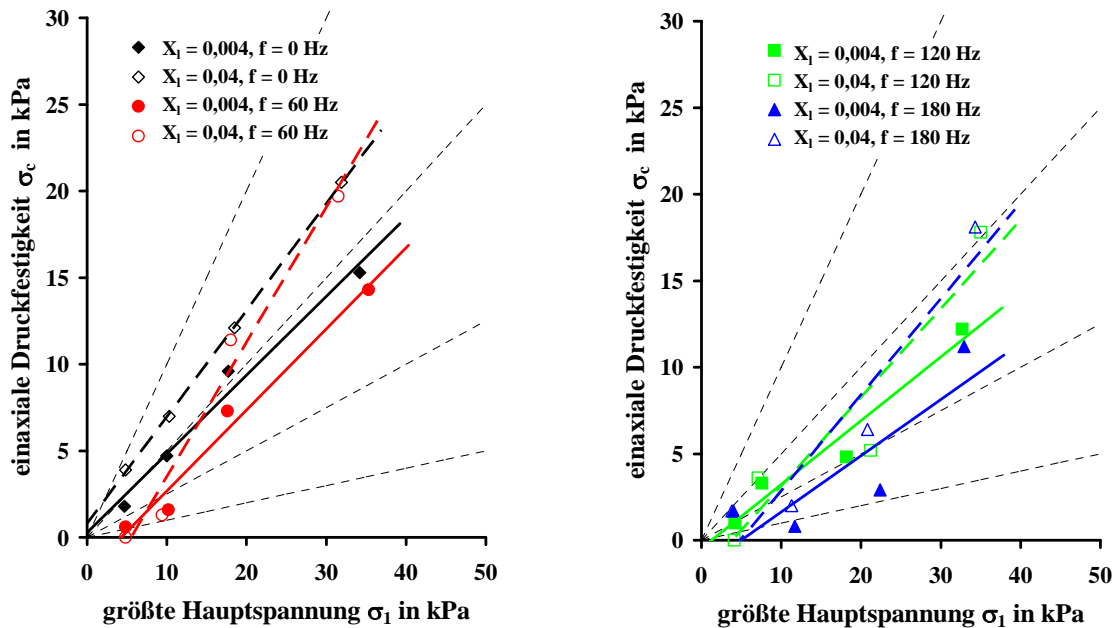


Abbildung 7-10: Fließfähigkeit von unbefeuchtetem ( $X_1 = 0,004$ ) und befeuchtetem Kalksteinpulver ( $X_1 = 0,04$ ) bei verschiedenen Erregerfrequenzen  $f$  und konstanter maximaler Schwinggeschwindigkeit  $v_{\max} = 20$  mm/s

Generell ist festzustellen, dass sich das Fließverhalten von kohäsiven Pulvern mit dem Einleiten von mechanischen Schwingungen in das Schüttgut erheblich verbessern lässt. Das hat zur – positiven – Folge, dass sich das so aktivierte Schüttgut besser handhaben lässt. Es kommt zu weniger Fließproblemen und Störungen. Allerdings wird der positive Effekt des zusätzlichen Energieeintrages durch Dämpfungseffekte reduziert, deshalb steht im nächsten Abschnitt die Untersuchung des Dämpfungsverhaltens von kohäsiven Schüttgütern im Vordergrund.

## 7.2.2 Dämpfungsverhalten

Um das Dämpfungsverhalten kohäsiver Schüttgüter quantifizieren zu können, wurden die Parameter Eigenfrequenz  $f_0$ , viskoses Dämpfungsverhältnis  $\zeta_b$ , Coulomb'sches Dämpfungsverhältnis  $\Lambda_b$  und als Hilfsparameter das modifizierte Coulomb'sche Dämpfungsverhältnis  $\Lambda^*$  bestimmt. Als Anpassungsfunktion diente die modifizierte analytische Lösung nach den Hartog [37], die hier noch einmal aufgeschrieben ist

$$V = -L \cdot \Lambda^* \cdot \omega + \sqrt{V_{\text{vis}}^2 - M^2 \cdot (\Lambda^* \cdot \omega)^2} \quad (4-161)$$

Die Parameteranpassung an die Messwerte erfolgte mittels handelsüblicher Software (Microcal™ Origin® 7.5) durch Minimierung der Abweichungs-Quadratsumme. Die Software nutzt dafür den Levenberg-Marquardt-Algorithmus, benannt nach Kenneth Levenberg und Donald Marquardt [75]. Dieser numerische Optimierungsalgorithmus kombiniert die Gauß-Newton-Methode mit einer Regularisierungstechnik, die absteigende Funktionswerte erzwingt. Der Levenberg-Marquardt-Algorithmus ist deutlich robuster als das Gauß-Newton-Verfahren, das heißt er konvergiert mit einer hohen Wahrscheinlichkeit auch bei schlechten Startbedingungen, allerdings ist auch hier Konvergenz nicht garantiert. Ferner ist er bei Anfangswerten, die nahe dem Minimum liegen oft etwas langsamer (siehe auch [99]).

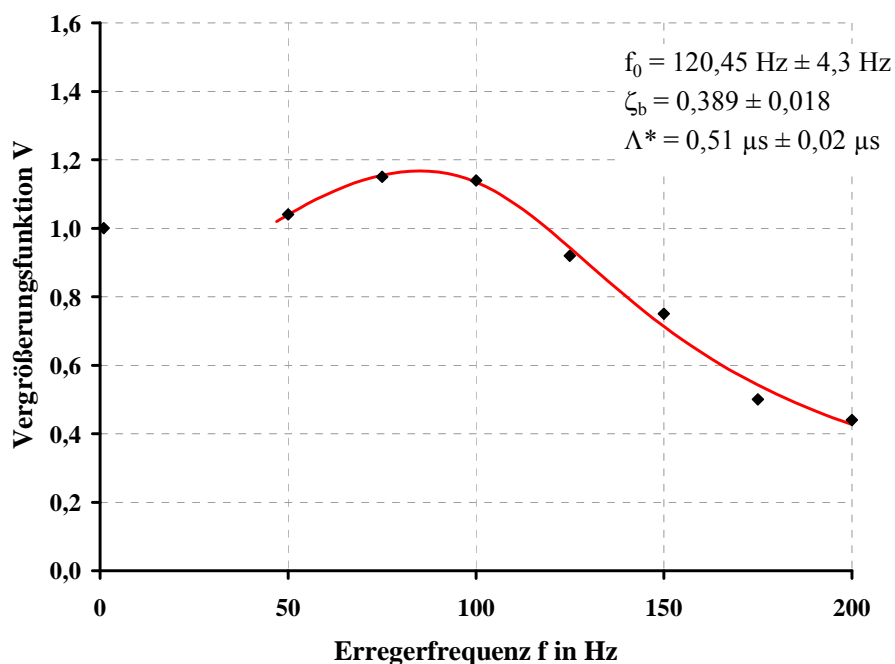


Abbildung 7-11: Beispiel zur Bestimmung der Dämpfungsparameter Eigenfrequenz  $f_0$ , viskoses Dämpfungsverhältnis  $\zeta_b$  und modifiziertes Coulomb'sches Dämpfungsverhältnis  $\Lambda^*$

Abbildung 7-11 zeigt an einem Beispiel die Parameteranpassung der Dämpfungsparameter Eigenfrequenz  $f_0$ , viskoses Dämpfungsverhältnis  $\zeta_b$  und modifiziertes Coulomb'sches Dämpfungsverhältnis  $\Lambda^*$  an die Vergrößerungsfunktion. Die Werte  $x_{\max,2}/x_{\max,1}$  sind als Punkte in der Abbildung dargestellt. Die rote Kurve zeigt den Verlauf von Gl. (4-161) mit den folgenden erhaltenen Dämpfungsparametern:

$$f_0 = 120,45 \text{ Hz} \pm 4,3 \text{ Hz}$$

$$\zeta_b = 0,389 \pm 0,018$$

$$\Lambda^* = 0,51 \text{ } \mu\text{s} \pm 0,02 \text{ } \mu\text{s}$$

Mit Hilfe von Gl. (4-160) kann nunmehr das dimensionslose Coulomb'sche Dämpfungsverhältnis  $\Lambda_b$  berechnet werden.

$$\Lambda_b = \frac{k}{c \cdot v_{\max}} \cdot \omega = \Lambda^* \cdot \omega \quad (4-160)$$

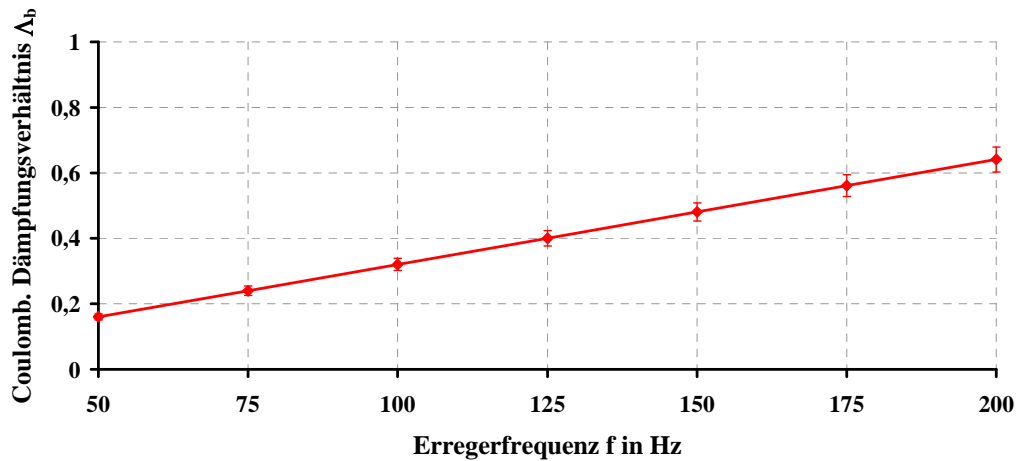


Abbildung 7-12:

Beispiel zur Bestimmung des Coulomb'schen Dämpfungsverhältnisses  $\Lambda_b$  aus dem modifizierten Coulomb'schen Dämpfungsverhältnis  $\Lambda^*$  in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz  $f$

Abbildung 7-12 zeigt das Ergebnis dieser Berechnung. Es ist zu sehen, dass das Coulomb'sche Dämpfungsverhältnis mit der Erregerfrequenz zunimmt. Das zeigt auch die Definition von  $\Lambda_b$ .

$$\Lambda_b = \frac{k}{c \cdot x_{\max,1}} \quad (4-152)$$

Bei größer werdender Erregerfrequenz  $f$  verringert sich bei konstanter maximaler Schwinggeschwindigkeit  $v_{\max}$  die Schwingwegamplitude der Erregerschwingung  $x_{\max,1}$  (Tabelle 4-1), was zu einem größeren Coulomb'schen Dämpfungsverhältnis  $\Lambda_b$  führt, da  $c$  und  $k$  für einen Fließort konstante Stoffwerte sind. Das bedeutet, dass mit wachsender Erregerfrequenz der Anteil der Coulomb-Dämpfung (zunehmende Häufigkeit der Kontaktreibung zwischen den Partikeln) an der Gesamtdämpfung zunimmt, da der viskose Anteil (Deformation der adsorbierten Schichten zwischen den Partikeln) konstant bleibt, was sich aus Gl. (4-151) ergibt.

$$\zeta_b = \frac{b}{2\sqrt{m \cdot c}} \quad (4-151)$$

Die in Gln. (4-151) und (4-152) enthaltenen dimensionsbehafteten Dämpfungsparameter  $b$  und  $k$  geben, ebenso wie die dimensionslosen Dämpfungsverhältnisse  $\zeta_b$  und  $\Lambda_b$ , das Dämpfungsverhalten des untersuchten Kalksteinpulvers wieder. Nach Kollmann [37] lassen sich die Dämpfungsparameter jedoch nicht explizit aus den vorhandenen Messwerten bestimmen, da bestimmte Werte von  $\zeta_b$  und  $\Lambda_b$  mit unendlich vielen Kombinationen von  $b$  bzw.  $k$  und der Federkonstante  $c$  darstellbar sind. Zudem ist die schwingende Masse in der Scherzone  $m$  nicht unmittelbar zugänglich.

Nachfolgend wird das Dämpfungsverhalten kohäsiver Schüttgüter am Beispiel des untersuchten Kalksteinpulvers anhand der ermittelten Dämpfungsparameter Eigenfrequenz  $f_0$ , viskoses Dämpfungsverhältnis  $\zeta_b$  und Coulomb'sches Dämpfungsverhältnis  $\Lambda_b$  dargestellt und diskutiert. In den gezeigten Abbildungen ist unter anderem der Fließort (FO) als Parameter aufgetragen, deshalb sollen an dieser Stelle (Tabelle 7-5) die aufgeprägten Normalspannungen zusammenfassend dargestellt werden.

Tabelle 7-5: Aufgeprägte Normalspannungen bei den Versuchen mit Kalksteinpulver

Fließort	Anschernormalspannung		Abschernormalspannung			
	$\sigma_{an}$ in kPa		$\sigma_{ab}$ in kPa			
FO1	2		1,6	1,2	0,8	0,5
FO2	4		3,2	2,4	1,6	1
FO3	8		6,4	4,8	3,2	2
FO4	16		12,8	9,6	6,4	4

Tabelle 7-6 und Abbildung 7-13 zeigen die Schüttgutdichte des Kalksteinpulvers in Abhängigkeit von der Mittelpunktspannung beim stationären Fließen. Es ergibt sich ein Kompressibilitätsindex von  $n = 0,079$ , damit kann das Kalksteinpulver nach Tabelle 3-4 als *kompressibel* eingestuft werden, die Dichte der unverfestigten Schüttung ( $\sigma_{M,st} = 0$ ) beträgt  $\rho_{b,0} = 671 \text{ kg/m}^3$ .

Tabelle 7-6: Mittelpunktspannung und Schüttgutdichte des Kalksteinpulvers

Fließort	Mittelpunktspannung $\sigma_{M,st}$ in kPa	Schüttgutdichte $\rho_b$ in $\text{kg/m}^3$
FO1	3,17	743,7
FO2	5,88	795,9
FO3	10,17	832,1
FO4	16,45	833,6

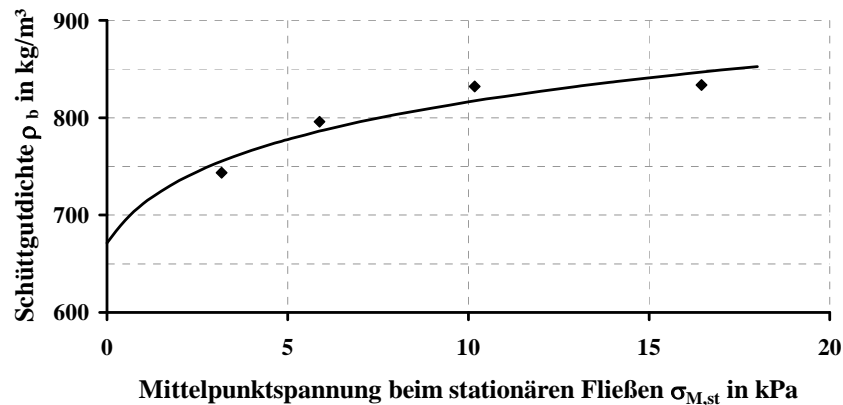


Abbildung 7-13: Schüttgutedichte in Abhängigkeit von der Mittelpunktspannung beim stationären Fließen für Kalksteinpulver

Abbildung 7-14 zeigt die ermittelten Eigenfrequenzen des untersuchten Kalksteinpulvers in Abhängigkeit von der Normalbelastung. Zwei Trends sind deutlich zu sehen:

- Mit Zunahme der Normalspannung beim Anscheren  $\sigma_{an}$ , das heißt mit größer werdender Vorverfestigung  $\sigma_{M,st}$ , steigt auch die ermittelte Eigenfrequenz an. Weiterhin kann abgelesen werden, dass
- mit zunehmender Normalspannung beim Abscheren  $\sigma_{ab}$  ebenso die ermittelte Eigenfrequenz zunimmt.

Wegen des folgenden Zusammenhanges

$$\omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot f_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad (7-2)$$

ist die Eigenfrequenz von der Federkonstante  $c$  und der schwingenden Schüttgutmasse in der Scherzone  $m$  abhängig. Mit zunehmenden Normalspannungen  $\sigma_{an}$  bzw.  $\sigma_{ab}$  nimmt die Federsteifigkeit  $c$  zu, während die schwingende Schüttgutmasse in der Scherzone  $m$  näherungsweise konstant bleibt.

Mit der Proportionalität von Federsteifigkeit  $c$  und Schermodul  $G_b$  ( $c \sim G_b$ ) kann ein Zusammenhang zwischen Eigenfrequenz  $f_0$  und Zugfestigkeit  $\sigma_Z = f(\sigma_{M,st})$  [90] gefunden werden

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{h_{SZo}} \sqrt{\frac{G^*}{\rho_s}} \cdot \left[ \frac{1}{\varepsilon^2 \cdot (1 - \varepsilon)} \cdot \frac{6 \cdot \sigma_Z}{E^*} \right]^{1/6} \quad (7-3)$$

$G^*$  und  $E^*$  sind die mittleren Scher- bzw. Elastizitätsmodule der Partikel. Mit Erhöhung der Normalbelastung auf das Pulver erhöht sich auch die Zugfestigkeit, und die Eigenfrequenz erhöht sich näherungsweise mit

$$f_0 \sim \sigma_Z^{1/6} \quad (7-4)$$

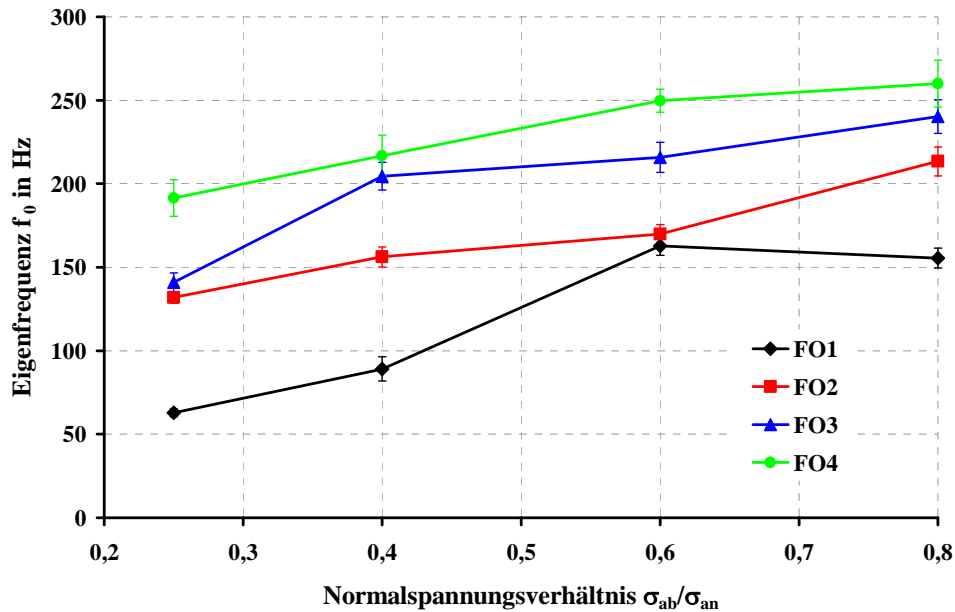


Abbildung 7-14: Ermittelte Eigenfrequenz  $f_0$  des Kalksteinpulvers für vier Fließorte in Abhängigkeit des Normalspannungsverhältnisses  $\sigma_{ab}/\sigma_{an}$  und der Mittelpunktsspannung  $\sigma_{M,st} = 3$  (FO1), 6 (FO2), 10 (FO3) und 16,5 kPa (FO4)

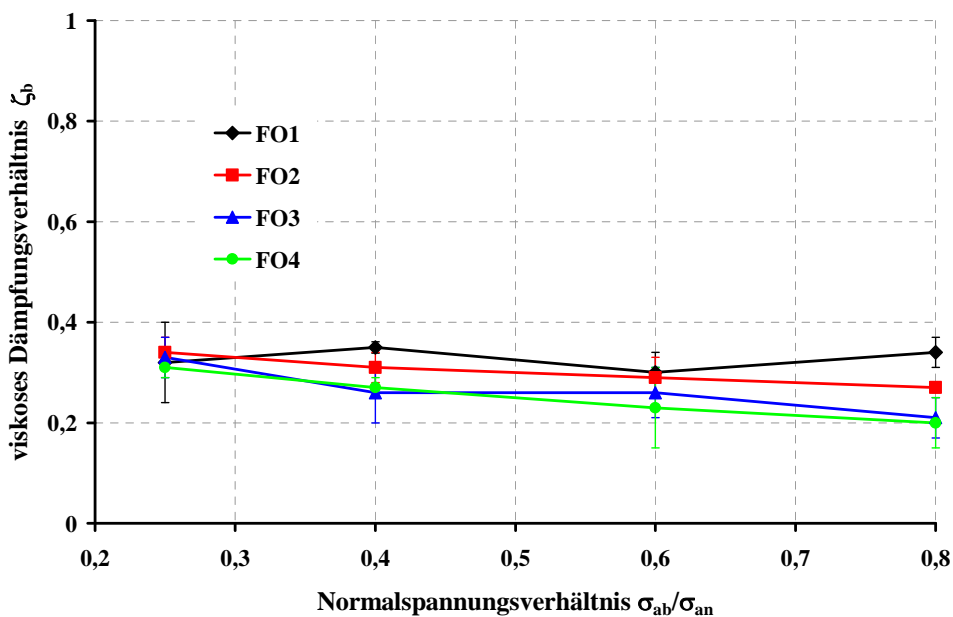


Abbildung 7-15: Ermittelte viskose Dämpfungsverhältnisse  $\zeta_b$  des Kalksteinpulvers für vier Fließorte in Abhängigkeit des Normalspannungsverhältnisses  $\sigma_{ab}/\sigma_{an}$

In Abbildung 7-15 sind die ermittelten viskosen Dämpfungsverhältnisse des untersuchten Kalksteinpulvers in Abhängigkeit von der Normalbelastung dargestellt. Zu sehen ist, dass sich sowohl mit zunehmender Anscher- als auch Abschernormalspannung die viskose Dämpfung verringert, d.h. ein kleinerer Wert von  $\zeta_b$  kann abgelesen werden.

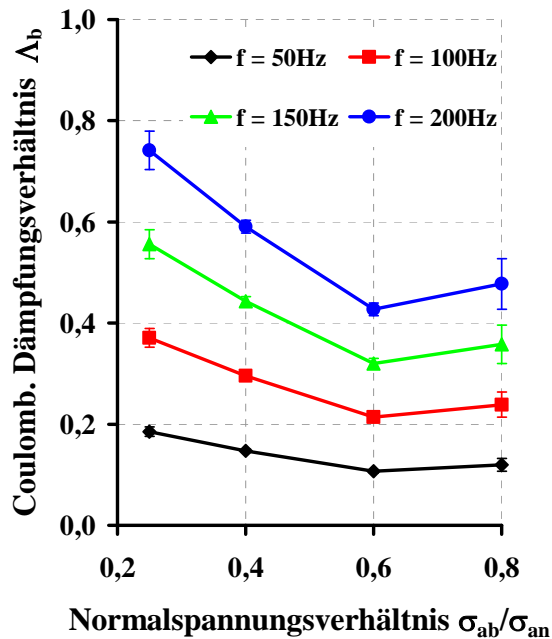


Abbildung 7-16: Ermittelte Coulomb'sche Dämpfungsverhältnisse  $\Lambda_b$  des Kalksteinpulvers bei Fließort 1 in Abhängigkeit vom Normalspannungsverhältnis  $\sigma_{ab}/\sigma_{an}$  für verschiedene Erregerfrequenzen  $f$

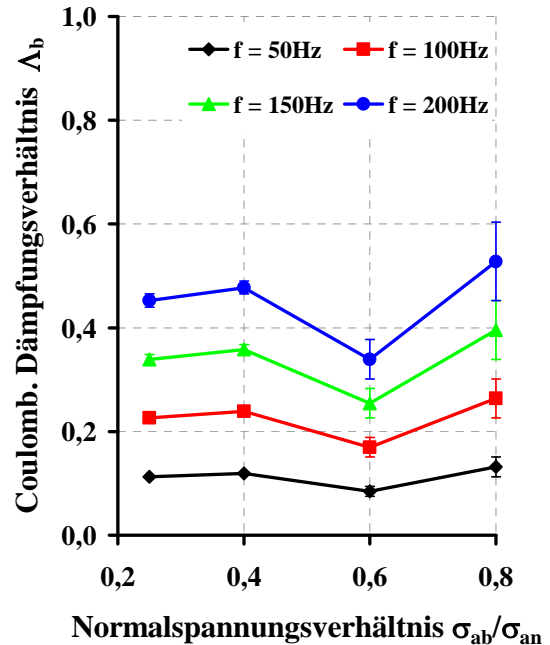


Abbildung 7-17: Ermittelte Coulomb'sche Dämpfungsverhältnisse  $\Lambda_b$  des Kalksteinpulvers bei Fließort 4 in Abhängigkeit vom Normalspannungsverhältnis  $\sigma_{ab}/\sigma_{an}$  für verschiedene Erregerfrequenzen  $f$

Abbildung 7-16 und Abbildung 7-18 stellen die ermittelten Coulomb'schen Dämpfungsverhältnisse  $\Lambda_b$  des untersuchten Kalksteinpulvers bei Fließort 1 dar, die mit (4-160) aus den modifizierten Coulomb'schen Dämpfungsverhältnissen  $\Lambda^*$  berechnet wurden. Mit zunehmender Erregerfrequenz kann für alle Fließorte ein Anstieg von  $\Lambda_b$  beobachtet werden, das heißt der Anteil der Coulomb-Dämpfung an der Gesamtdämpfung nimmt mit steigender Erregerfrequenz zu. Mit zunehmender Erregerfrequenz  $f$  nimmt – bei konstanter maximaler Schwinggeschwindigkeit  $v_{max}$  – die Schwingungsamplitude  $x_{max}$  ab. Damit wird das Coulomb'sche Dämpfungsverhältnis  $\Lambda_b$  größer, da nach (4-152):  $\Lambda_b \sim 1/x_{max}$ .

Das ist auch bei höheren Verfestigungsspannungen, bspw. Fließort 4 (Abbildung 7-17 und Abbildung 7-19) zu sehen. Der Vergleich von Abbildung 7-16 mit Abbildung 7-17 zeigt, dass



bei höherer Belastung (FO4) das Coulomb'sche Dämpfungsverhältnis über den untersuchten Spannungsbereich als konstant angesehen werden kann.

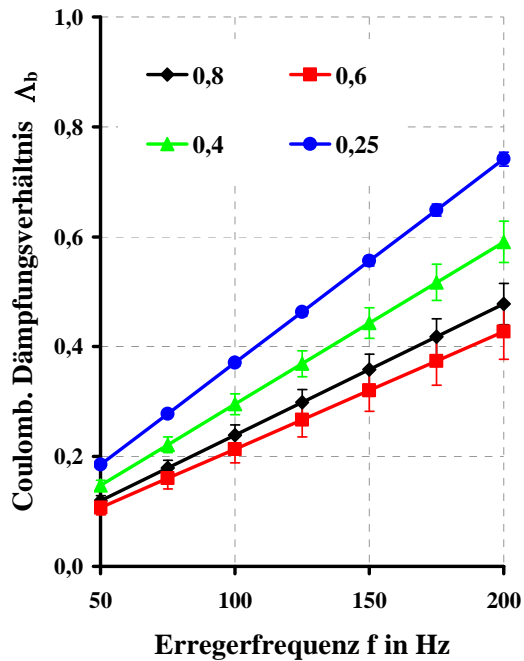


Abbildung 7-18: Ermittelte Coulomb'sche Dämpfungsverhältnisse  $\Lambda_b$  des Kalksteinpulvers bei Fließort 1 in Abhängigkeit Erregerfrequenz  $f$  für verschiedene Normalspannungsverhältnisse  $\sigma_{ab}/\sigma_{an}$

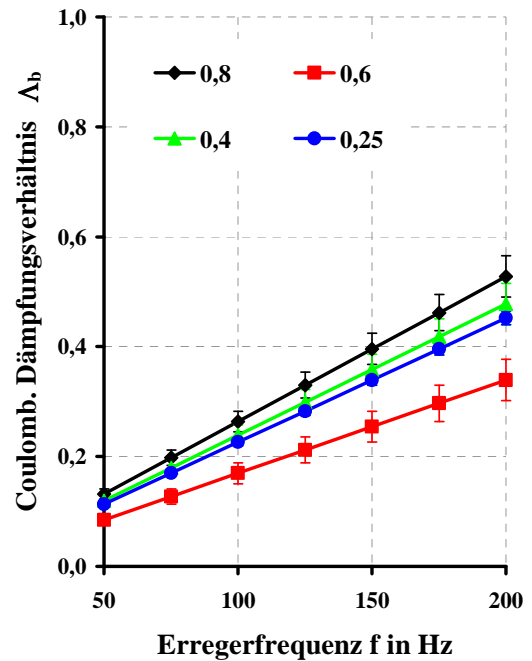


Abbildung 7-19: Ermittelte Coulomb'sche Dämpfungsverhältnisse  $\Lambda_b$  des Kalksteinpulvers bei Fließort 4 in Abhängigkeit Erregerfrequenz  $f$  für verschiedene Normalspannungsverhältnisse  $\sigma_{ab}/\sigma_{an}$

Damit wird auch deutlich, dass insgesamt der Coulomb'sche Anteil an der Gesamtdämpfung nicht vernachlässigt werden darf. Tabelle 7-7 fasst die ermittelten Dämpfungsparameter für das untersuchte Kalksteinpulver zusammen.

Tabelle 7-7: Ermittelte Dämpfungsparameter des untersuchten Kalksteinpulvers

Fließort	$\sigma_{ab}/\sigma_{an}$	Eigenfrequenz $f_0$ in Hz	visk. Dämpfungs- verhältnis $\zeta_b$	Coulomb. Dämpfungs- verhältnis $\Lambda_b(f)$	
				$f = 50\text{Hz}$	$f = 200\text{ Hz}$
1	0,8	$155,5 \pm 6$	$0,34 \pm 0,03$	$0,12 \pm 0,01$	$0,48 \pm 0,04$
	0,6	$162,7 \pm 5,6$	$0,3 \pm 0,04$	$0,11 \pm 0,01$	$0,43 \pm 0,05$
	0,4	$89,1 \pm 7,2$	$0,35 \pm 0,01$	$0,15 \pm 0,01$	$0,59 \pm 0,04$
	0,25	$62,9 \pm 2,3$	$0,32 \pm 0,08$	$0,19 \pm 0,01$	$0,74 \pm 0,01$
2	0,8	$213,4 \pm 8,7$	$0,27 \pm 0,01$	$0,10 \pm 0,02$	$0,41 \pm 0,06$
	0,6	$169,8 \pm 5,8$	$0,29 \pm 0,04$	$0,12 \pm 0,01$	$0,47 \pm 0,05$
	0,4	$156,2 \pm 6$	$0,31 \pm 0,03$	$0,12 \pm 0,01$	$0,47 \pm 0,04$
	0,25	$131,9 \pm 3,4$	$0,34 \pm 0,03$	$0,12 \pm 0,01$	$0,47 \pm 0,04$
3	0,8	$240,3 \pm 10$	$0,21 \pm 0,04$	$0,11 \pm 0,01$	$0,45 \pm 0,06$
	0,6	$215,8 \pm 9$	$0,26 \pm 0,05$	$0,11 \pm 0,01$	$0,44 \pm 0,01$
	0,4	$204,5 \pm 8,3$	$0,26 \pm 0,06$	$0,10 \pm 0,01$	$0,4 \pm 0,01$
	0,25	$140,9 \pm 5,8$	$0,33 \pm 0,04$	$0,12 \pm 0,01$	$0,47 \pm 0,04$
4	0,8	$260 \pm 14$	$0,2 \pm 0,05$	$0,13 \pm 0,02$	$0,53 \pm 0,07$
	0,6	$249,8 \pm 6,9$	$0,23 \pm 0,08$	$0,09 \pm 0,01$	$0,34 \pm 0,04$
	0,4	$216,9 \pm 12,3$	$0,27 \pm 0,02$	$0,12 \pm 0,01$	$0,48 \pm 0,01$
	0,25	$191,4 \pm 10,9$	$0,31 \pm 0,02$	$0,11 \pm 0,01$	$0,45 \pm 0,01$

### 7.3 Bestimmung der Federkonstante $c$ , der Dämpfungskonstanten $b$ und $k$ und der Erregerkraft $F_e$

#### 7.3.1 Federkonstante $c$ und Dämpfungskonstanten $b$ und $k$

Die primären Stoffgrößen Dämpfungskonstante des viskosen Dämpfers  $b$ , Federkonstante  $c$  und Dämpfungskonstante der Coulomb-Dämpfung  $k$  der Bewegungsgleichung (4-150) sind in den dimensionslosen Größen  $\zeta_b$  und  $\Lambda_b$  enthalten und zwar in der Form:

$$\zeta_b = \frac{b}{2\sqrt{m \cdot c}} \quad (4-151)$$

und

$$\Lambda_b = \frac{k}{c \cdot x_{\max,1}} \quad (4-152)$$

Sie lassen sich jedoch anhand der obigen Messwerte nicht explizit auflösen, da bestimmte Werte z.B. für  $\zeta$  mit unendlich vielen Kombinationen von  $c$  und  $b$  ausgedrückt werden können. Zudem ist die Größe  $m$  (schwingende Masse) praktisch nicht zugänglich. Dennoch soll in diesem Abschnitt die Federkonstante von Kalksteinpulver sowie der Einfluss von maximaler Schwinggeschwindigkeit  $v_{\max}$ , Materialfeuchte  $X_1$  und Erregerfrequenz  $f$  dargestellt werden. Es werden auch beispielhaft berechnete Werte von  $b$  und  $k$  gezeigt.

Für die Bestimmung der Federkonstante wurde aus dem linearen Ast der jeweiligen Abscherkurve nach

$$c = \frac{\Delta F_s}{\Delta s} \quad (7-5)$$

bzw.

$$c = \frac{\Delta F_s}{v_s \cdot \Delta t} \quad (7-6)$$

die Federkonstante bestimmt. Die Federkonstante  $c$  ist allgemein der Quotient aus Federkraft und Federweg und beschreibt die Steifigkeit eines Materials. In diesem Fall sind die Federkraft mit der Scherkraft  $F_s$  und der Federweg mit dem Scherweg  $s$  gleichzusetzen. Damit kommt man zu Gl.(7-5). Das bedeutet, mit stärker ansteigender Scherkraft steigt die Federkonstante bei gleichem Scherweg. Dies ist bei den Versuchsergebnissen zu beobachten. Mit wachsender Verfestigung liegt bei sonst gleichen Parametern (Gutfeuchte, Schwinggeschwindigkeit, Erregerfrequenz) die Federkonstante auf einem jeweils höheren Niveau.

Wie bereits beschrieben, wurde die Federkonstante aus dem linearen Ast der jeweiligen Abscherkurve bei Versuchen mit und ohne Schwingungseinwirkung bestimmt. Allerdings besitzen Schüttgüter keinen ausgeprägten elastischen Bereich. Vielmehr sind bereits im Abschnitt des linearen Anstieges plastischen Deformationen überlagert, die sich im Mikroskopischen auf das teilweise Versagen von einigen Partikelkontakten durch Coulombreibung (siehe Abschnitt 2.3) begründen lassen, wobei der reversible Anteil der Scherdeformation sehr wohl beobachtbar ist. Die Auswertung der Scherkraftverläufe liefert somit ein reales Abbild des Verhaltens des Kalksteinpulvers.

Die hier bestimmten Federkonstanten repräsentieren nicht das gesamte Kalksteinpulver in der Scherzelle, sondern nur das Pulver in der Scherzone. Ihre Ausdehnung in der Scherzelle ist nicht explizit zugänglich. Dies ist hier auch nicht erforderlich, da nur das Pulver in der Scherzone am Schervorgang teilnimmt. Damit wird ausschließlich das Verhalten des Pulvers in der Scherzone ausgewertet.

Abbildung 7-20 zeigt die berechnete Federkonstante von Kalksteinpulver bei Versuchen ohne mechanische Vibrationen für unbefeuchtetes ( $X_1 = 0,004$ ) und befeuchtetes ( $X_1 = 0,04$ ) Pulver. Zu sehen ist ein Anstieg der Federkonstante mit zunehmender Normalbelastung. Die Federkonstanten des befeuchteten Pulvers unterscheiden sich nicht signifikant von denen des unbefeuchteten Pulvers.

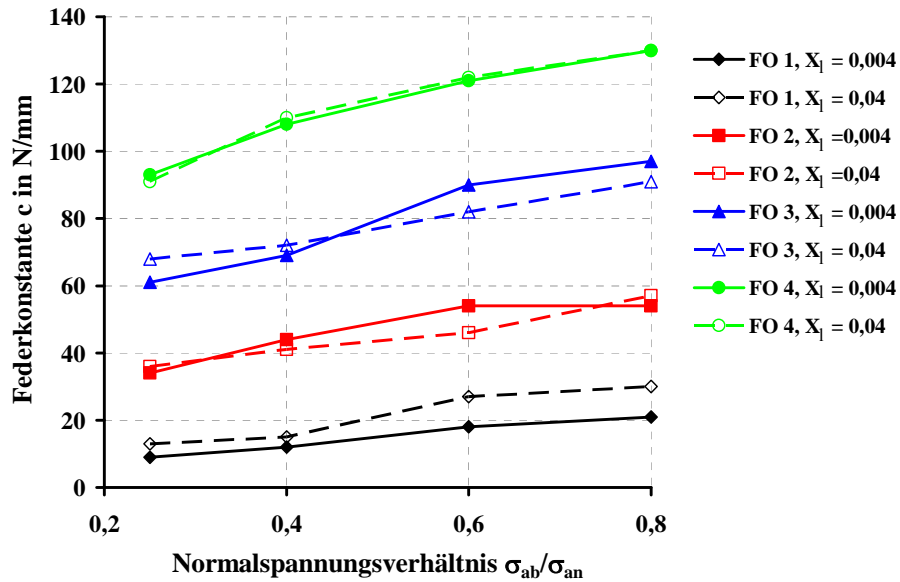


Abbildung 7-20: Federkonstante von Kalksteinpulver bei Versuchen ohne mechanische Vibrationen für unbefeuchtetes ( $X_1 = 0,004$ ) und befeuchtetes ( $X_1 = 0,04$ ) Pulver

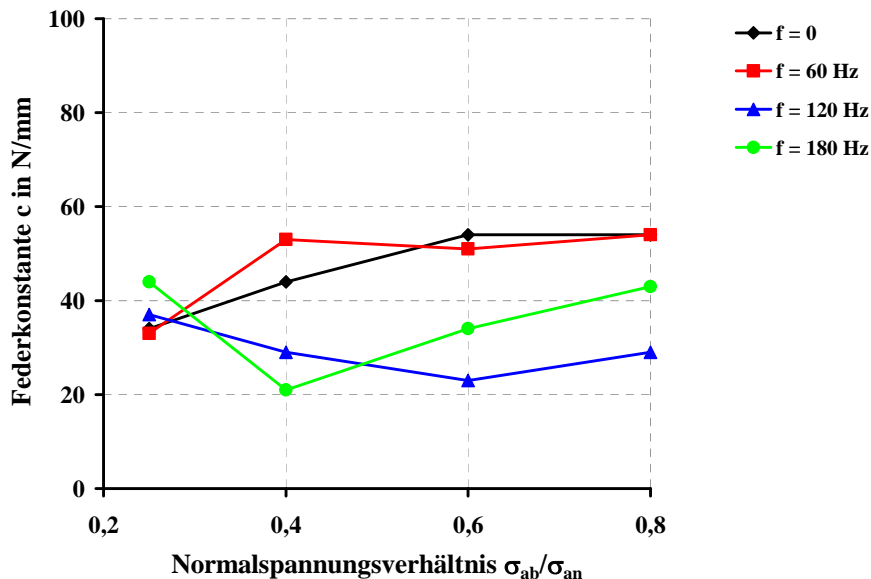


Abbildung 7-21: Einfluss der Erregerfrequenz auf die Federkonstante des unbefeuchteten Kalksteinpulvers beispielhaft für den Fließort 2 ( $\sigma_{an} = 4$  kPa) bei konstanter maximaler Schwinggeschwindigkeit  $v_{max} = 20$  mm/s

Abbildung 7-21 zeigt den Einfluss der Erregerfrequenz auf die Federkonstante des unbefeuchteten Kalksteinpulvers beispielhaft für den Fließort 2 ( $\sigma_{an} = 4 \text{ kPa}$ ) bei konstanter maximaler Schwinggeschwindigkeit  $v_{max} = 20 \text{ mm/s}$ . Die mechanische Erregung mit  $f = 60 \text{ Hz}$  führt nicht zu einer signifikanten Änderung der Federkonstante. Die Werte sind vergleichbar mit denen aus den Versuchen ohne mechanische Vibrationen. Bei höheren Frequenzen kann jedoch eine deutliche Abnahme der Federkonstante beobachtet werden. Dabei hat die Federkonstante je nach Normalspannungsverhältnis ein Minimalwert, und zwar in dem Bereich, in dem die gemessene Vergrößerungsfunktion  $V = x_{max,2} / x_{max,1}$  ein Maximum aufweist. Hier ist die Auflockerung in der Scherzone am deutlichsten ausgeprägt und es wird eine kleinere Federkonstante ermittelt. Die Federkonstanten der Versuche mit  $f = 60 \text{ Hz}$  sind größer als die der  $180 \text{ Hz}$ -Versuche. Bei den Versuchen mit der Erregerfrequenz von  $60 \text{ Hz}$  hat das Pulver unter diesen Bedingungen also die größere Steifigkeit. Im Bereich  $\sigma_{ab} = 0,4 \cdot \sigma_{an}$  fällt die Federkonstante ab, d.h. mit zunehmender Erregerfrequenz verringert sich die Steifigkeit des Pulvers. Hingegen im Bereich der kleinsten Abscherlast ( $\sigma_{ab} = 0,25 \cdot \sigma_{an}$ ) steigt die Federkonstante etwas an, hier nimmt sie mit der Erregerfrequenz zu.

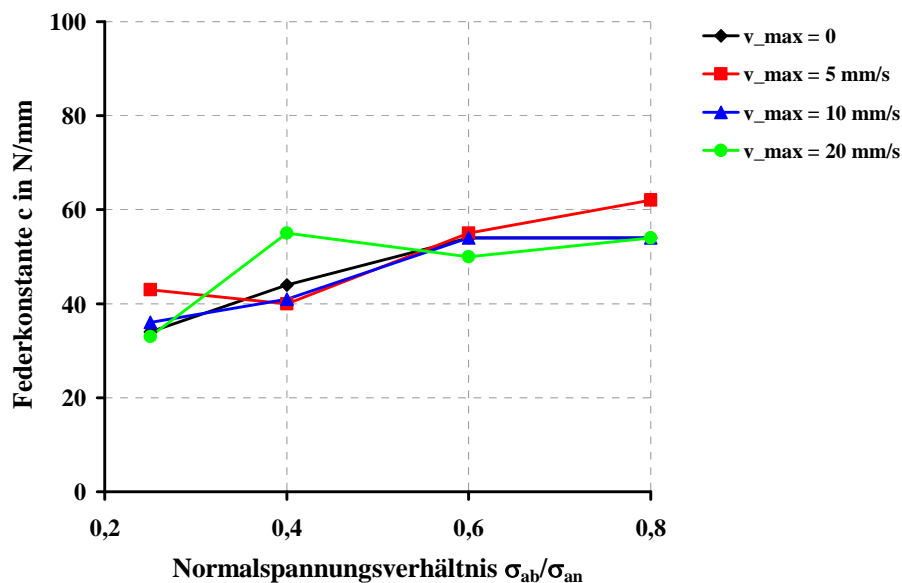


Abbildung 7-22: Einfluss der maximalen Schwinggeschwindigkeit auf die Federkonstante des unbefeuchteten Kalksteinpulvers beispielhaft für den Fließort 2 ( $\sigma_{an} = 4 \text{ kPa}$ ) bei konstanter Erregerfrequenz  $f = 60 \text{ Hz}$

In Abbildung 7-22 ist der Einfluss der maximalen Schwinggeschwindigkeit auf die Federkonstante des unbefeuchteten Kalksteinpulvers beispielhaft für den Fließort 2 ( $\sigma_{an} = 4 \text{ kPa}$ ) bei konstanter Erregerfrequenz  $f = 60 \text{ Hz}$  gezeigt. Gut zu sehen ist, dass sich die Veränderung der

maximalen Schwinggeschwindigkeit nicht signifikant auf die Federkonstante des Kalksteinpulvers auswirkt.

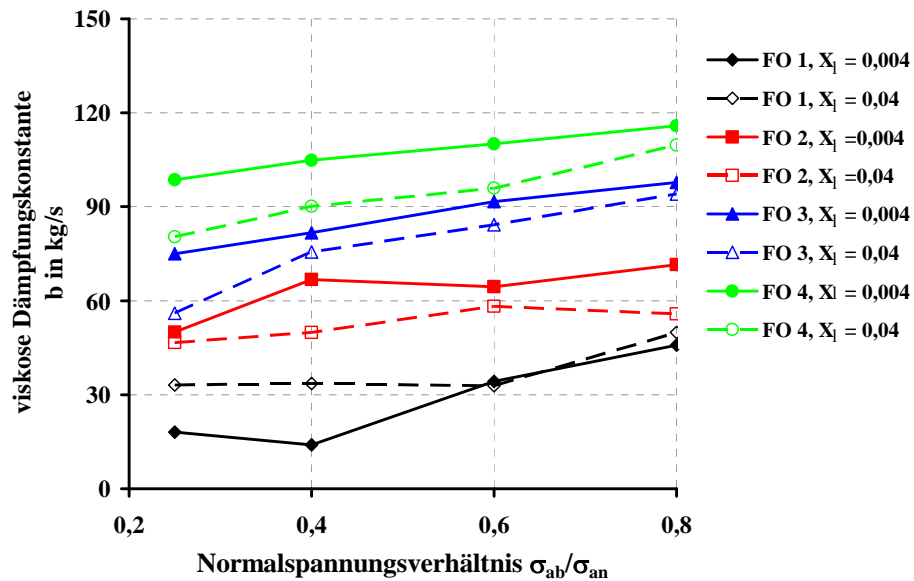


Abbildung 7-23: viskose Dämpfungskonstante  $b$  von Kalksteinpulver bei Versuchen mit mechanischen Vibrationen bei  $f = 60$  Hz ( $v_{\max} = 20$  mm/s) für unbefeuchtetes ( $X_1 = 0,004$ ) und befeuchtetes ( $X_1 = 0,04$ ) Pulver

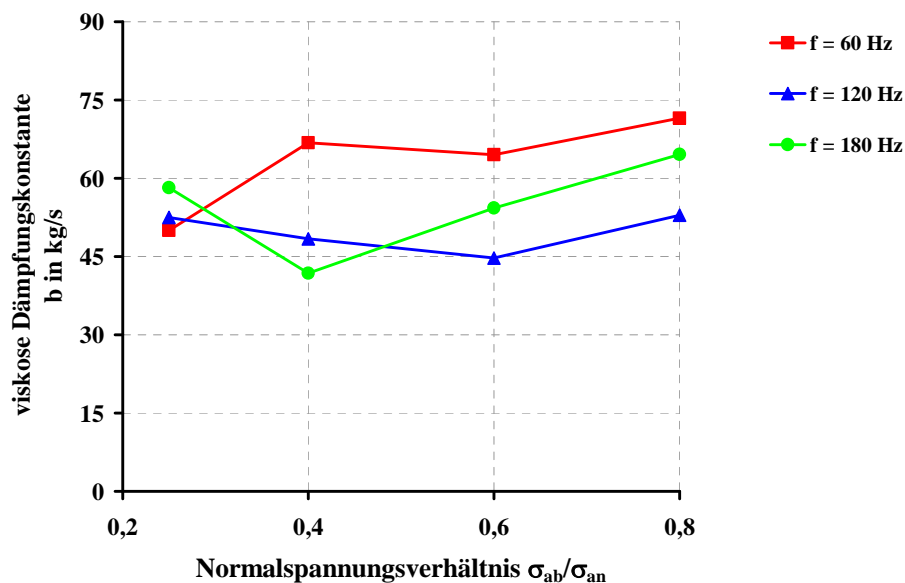


Abbildung 7-24: Einfluss der Erregerfrequenz auf die viskose Dämpfungskonstante des unbefeuchteten Kalksteinpulvers beispielhaft für den Fließort 2 ( $\sigma_{an} = 4$  kPa) bei konstanter maximaler Schwinggeschwindigkeit  $v_{\max} = 20$  mm/s

Abbildung 7-23 zeigt die viskose Dämpfungskonstante  $b$  von Kalksteinpulver bei Versuchen mit mechanischen Vibrationen bei  $f = 60$  Hz für unbefeuchtetes ( $X_1 = 0,004$ ) und befeuchtetes

( $X_1 = 0,04$ ) Pulver. Mit zunehmender Normalbelastung steigt auch die viskose Dämpfungskonstante  $b$  an. Außer bei der geringsten Normalbelastung (FO1) liegen die Werte von  $b$  des befeuchteten Kalksteinpulvers unter denen des unbefeuchteten Kalksteins. In Abbildung 7-24 ist der Einfluss der Erregerfrequenz auf die viskose Dämpfungskonstante des unbefeuchteten Kalksteinpulvers beispielhaft für den Fließort 2 ( $\sigma_{an} = 4 \text{ kPa}$ ) bei konstanter maximaler Schwinggeschwindigkeit  $v_{max} = 20 \text{ mm/s}$  zu sehen. Hier führt eine höhere Erregerfrequenz zu einer kleineren viskosen Dämpfungskonstante.

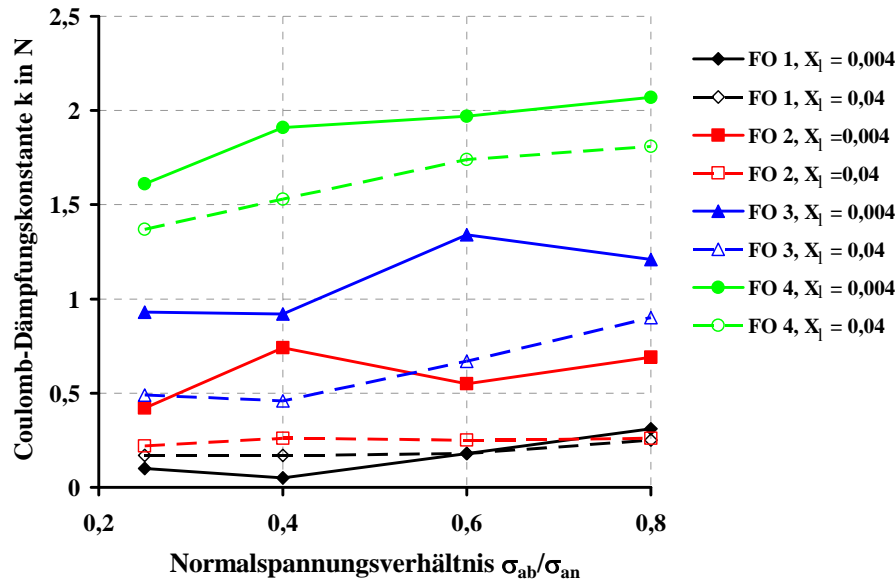


Abbildung 7-25: Coulomb-Dämpfungskonstante  $k$  von Kalksteinpulver bei Versuchen mit mechanischen Vibrationen bei  $f = 60 \text{ Hz}$  ( $v_{max} = 20 \text{ mm/s}$ ) für unbefeuchtetes ( $X_1 = 0,004$ ) und befeuchtetes ( $X_1 = 0,04$ ) Pulver

In Abbildung 7-25 ist die Dämpfungskonstante der Coulomb'schen Dämpfung  $k$  von Kalksteinpulver bei Versuchen mit mechanischen Vibrationen bei  $f = 60 \text{ Hz}$  für unbefeuchtetes ( $X_1 = 0,004$ ) und befeuchtetes ( $X_1 = 0,04$ ) Pulver dargestellt. Auch hier ist mit höherer Normalbelastung eine höhere Dämpfungskonstante ablesbar. Die Werte von  $k$  für das befeuchtete Kalksteinpulver liegen, außer bei FO1, auf einem niedrigeren Niveau als die  $k$ -Werte des unbefeuchteten Kalksteins. Wie in Abbildung 7-26 zu sehen, ist auch  $k$  von der Erregerfrequenz abhängig. Eine höhere Erregerfrequenz hat eine kleinere Erregeramplitude zur Folge und führt damit zu einer kleineren Coulomb-Dämpfungskonstante, jedoch ist der ermittelte Unterschied der Werte von  $k$  zwischen  $f = 120 \text{ Hz}$  und  $f = 180 \text{ Hz}$  nicht signifikant.

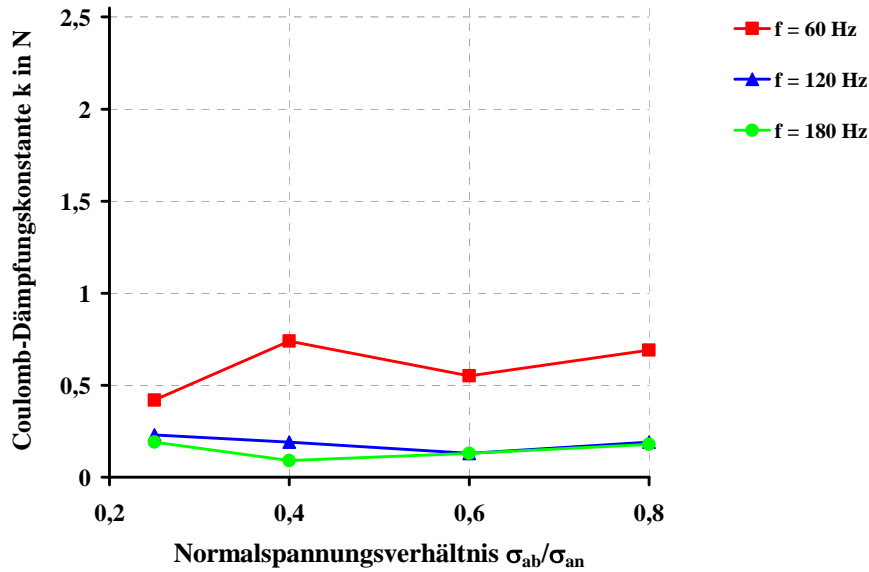


Abbildung 7-26: Einfluss der Erregerfrequenz auf die viskose Dämpfungskonstante des unbefeuchteten Kalksteinpulvers beispielhaft für den Fließort 2 ( $\sigma_{an} = 4$  kPa) bei konstanter maximaler Schwinggeschwindigkeit  $v_{max} = 20$  mm/s

### 7.3.2 Berechnete Hystereseschleifen

Für den Grenzfall ausschließlich linear-viskoser Dämpfung gibt Kollmann [37] eine Ellipsengleichung von Betten [2] an:

$$0 = (1 + 4\zeta_b^2 \cdot \Omega^2) \cdot x_e^2 - 2x_e \cdot \left(\frac{F_e}{c}\right) + \left(\frac{F_e}{c}\right)^2 - 4\zeta_b^2 \cdot \Omega^2 \cdot x_{e,max}^2 \quad (7-7)$$

und damit

$$F_e = c \cdot x_e \pm 2 \cdot c \cdot \zeta_b \cdot \Omega \cdot \sqrt{x_{e,max}^2 - x_e^2} \quad (7-8)$$

Die Hystereseschleife des linearen Modells ist durch eine Ellipse darstellbar.  $F_e$  ist die Erregerkraft und  $x_e$  der Erregerschwingweg. Das positive Vorzeichen des zweiten Terms in Gl. (7-8) gibt den oberen, das negative Vorzeichen den unteren Kurvenast wieder. Falls keine Ermüdungs- oder Setzungserscheinungen auftreten, schließen sich die Schleifen bei harmonischer Erregung [37].

Abbildung 7-27 zeigt beispielhaft berechnete Hystereseschleifen für unterschiedliche Werte von  $\Omega$  für Kalksteinpulver, FO 2, bei einem Normalspannungsverhältnis  $\sigma_{ab}/\sigma_{an} = 0,8$ . Für die jeweiligen Berechnungen wurden die zugehörigen Werte von Federkonstante  $c$  und viskosem Dämpfungsverhältnis  $\zeta_b$  verwendet. Das Abstimmungsverhältnis  $\Omega$  ist das Verhältnis von Erregerfrequenz  $f$  zu ermittelter Eigenfrequenz  $f_0$ , Gl. (4-108). Die maximale horizontale



Ausdehnung der Hystereseschleifen entspricht der Amplitude der Erregerschwingung  $x_{e,max}$ . Je kleiner die Erregerfrequenz, desto größer die Amplitude der Erregerschwingung. Die Erregerkraft  $F_e$  berechnet sich für jedes  $x_e$  nach Gl. (7-8). Die Neigung der berechneten Hystereseschleife hängt von der jeweiligen Federkonstante  $c$  ab. Je größer die Federkonstante, desto steiler ist die Hystereseschleife.

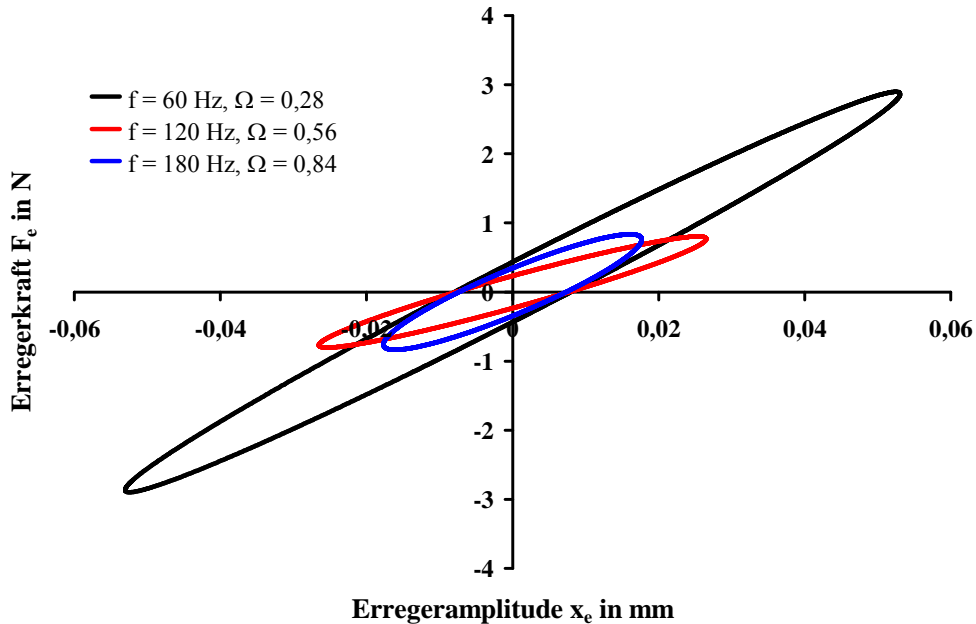


Abbildung 7-27: berechnete Hystereseschleifen für unterschiedliche Werte von  $\Omega$  für Kalksteinpulver, FO 2, Normalspannungsverhältnis  $\sigma_{ab}/\sigma_{an} = 0,8$

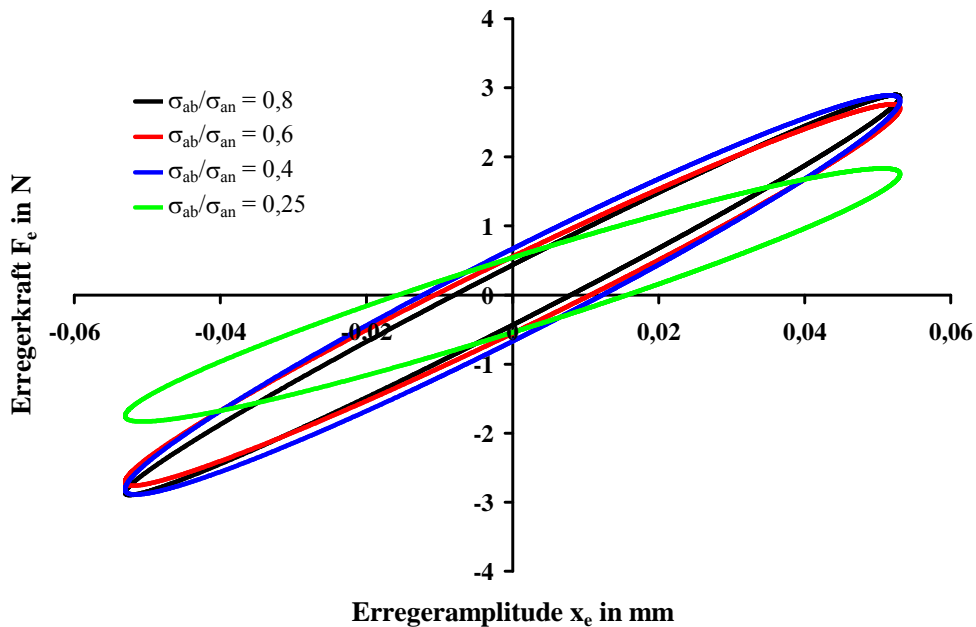


Abbildung 7-28: berechnete Hystereseschleifen bei unterschiedlichen Normalspannungsverhältnissen  $\sigma_{ab}/\sigma_{an}$  für Kalksteinpulver, FO 2,  $f = 60$  Hz,  $\Omega = 0,28$

Abbildung 7-28 stellt berechnete Hystereseschleifen bei unterschiedlichen Normalspannungsverhältnissen  $\sigma_{ab}/\sigma_{an}$  für Kalksteinpulver bei  $f = 60$  Hz dar. Da hier die Erregerfrequenz konstant ist, ist auch die Amplitude der Erregerschwingung jeweils gleich groß. Die berechneten Hysteresekurven liegen, bis auf die bei  $\sigma_{ab}/\sigma_{an} = 0,25$ , fast aufeinander, was an der jeweils vergleichbaren Federkonstante liegt. Die ermittelte Federkonstante bei den Versuchen mit  $\sigma_{ab}/\sigma_{an} = 0,25$  ist kleiner. Auch die maximale Erregerkraft  $F_{e,max}$  liegt für die Versuche bei  $\sigma_{ab}/\sigma_{an} = 0,8$  bis  $\sigma_{ab}/\sigma_{an} = 0,4$  auf einem ähnlichen Niveau von  $F_{e,max} \approx 3$  N, bei dem kleinsten Normalspannungsverhältnis wurde  $F_{e,max}$  zu etwa 1,8 N ermittelt.

Abbildung 7-29 vergleicht berechnete Hystereseschleifen bei unterschiedlichen Fließorten für Kalksteinpulver bei  $f = 60$  Hz und einem Normalspannungsverhältnis  $\sigma_{ab}/\sigma_{an} = 0,8$ . Mit steigender Normalbelastung, d.h. größer werdendem Fließort (FO), wird die jeweilige Federkonstante größer, was an der stärkeren Neigung der Hystereseschleifen zu sehen ist. Auch steigt mit stärkerer Normalbelastung die ermittelte maximale Erregerkraft  $F_{e,max}$ .

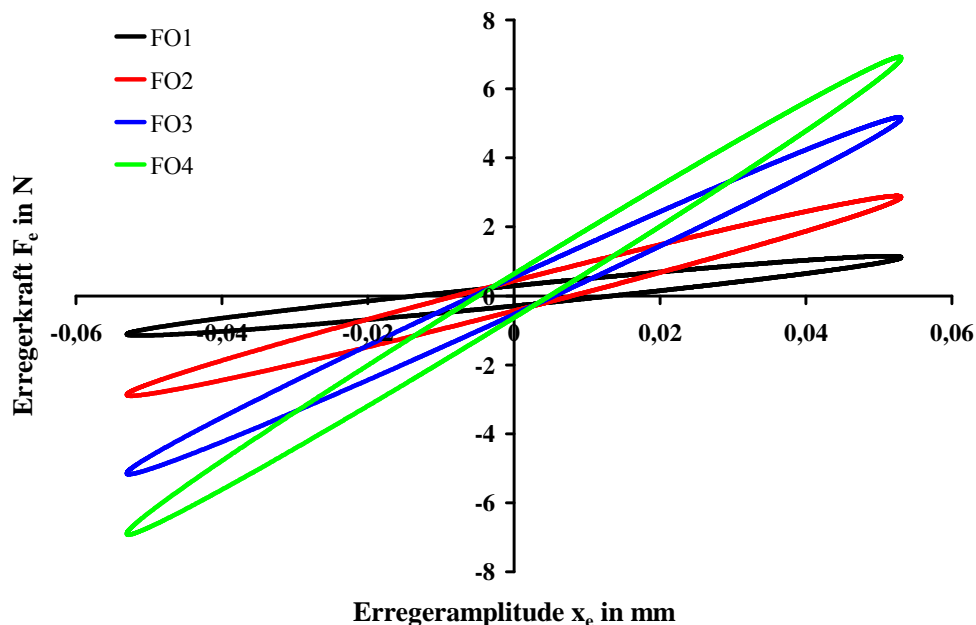


Abbildung 7-29: berechnete Hystereseschleifen bei unterschiedlichen Fließorten für Kalksteinpulver,  $f = 60$  Hz,  $\Omega = 0,28$ ,  $\sigma_{ab}/\sigma_{an} = 0,8$

## 7.4 Beurteilung der Anpassungsmethode

In diesem kurzen Abschnitt wird überprüft, wie genau die beschriebene Parameteranpassung an die gemessenen Wertepaare  $x_{max,2} / x_{max,1} = f(f)$  erfolgt. Dazu wurde ein „perfekter“, virtueller Datensatz von Wertepaaren  $x_{max,2} / x_{max,1}$  für die untersuchten Frequenzen von  $f = 50$  Hz bis  $f = 200$  Hz mit vorgegebenen Dämpfungsparametern

- viskoses Dämpfungsverhältnis  $\zeta_b = 0,35$
- modifiziertes Dämpfungsverhältnis  $\Lambda^* = 0,3 \mu\text{s}$
- Eigenfrequenz  $f_0 = 125 \text{ Hz}$

durch Rückrechnung mit Gl. (4-161) erzeugt. Als erstes wurden die Parameter an den virtuellen Datensatz angepasst. Die Parameteranpassung lieferte das folgende Ergebnis:

- viskoses Dämpfungsverhältnis  $\zeta_b = 0,35 \pm 0,0006$
- modifiziertes Dämpfungsverhältnis  $\Lambda^* = 0,3 \mu\text{s} \pm 0,0086 \mu\text{s}$
- Eigenfrequenz  $f_0 = 125 \text{ Hz} \pm 0,008 \text{ Hz}$

Die erhaltenen Werte sollen an dieser Stelle und im Hinblick auf die allgemeine Messgenauigkeit als „perfekt“ bzw. „ideal“ übereinstimmend angesehen werden.

Anschließend wurden Datensätze mit maximalen Streuungen von 2,5%, 5% und 10% mit Hilfe der in MICROSOFT®EXCEL implementierten Zufallszahlenmethode erzeugt. Für jeden erhaltenen Datensatz wurden die Dämpfungsparameter bestimmt und die Streuung der erhaltenen Parameter mit der Streuung der Datensätze verglichen. Die Streuungen und die jeweilige anschließende Anpassung wurden jeweils 50mal durchgeführt. Die erhaltenen Resultate sind in Tabelle 7-8 zusammengefasst.

Tabelle 7-8: Ergebnisse der Parameteranpassung mit gestreuten Datensätzen

maximale Streuung		$f_0$ in Hz	$\zeta_b$	$\Lambda^*$ in $\mu\text{s}$
2,5%	Wert	$124,7 \pm 0,9$	$0,35 \pm 0,006$	$0,299 \pm 0,009$
	Abweichung	0,7 %	1,7 %	3,1 %
5%	Wert	$124,8 \pm 1,6$	$0,35 \pm 0,014$	$0,296 \pm 0,002$
	Abweichung	1,3 %	3,9 %	6,8 %
10%	Wert	$124,9 \pm 3,0$	$0,35 \pm 0,021$	$0,297 \pm 0,035$
	Abweichung	2,4 %	6,0 %	11,8 %

In Tabelle 7-8 ist zu sehen, dass die auftretenden Abweichungen bei der Parameteranpassung der Eigenfrequenz  $f_0$  sowie des viskosen Dämpfungsverhältnisses  $\zeta_b$  kleiner sind, als die aufgegebene Streuung der virtuellen Datensätze. Allerdings ist beim modifizierten Coulomb'schen Dämpfungsverhältnis  $\Lambda^*$  eine größere Abweichung als die aufgegebene Streuung zu verzeichnen.

Insgesamt kann aber fest gehalten werden, dass die verwendete Anpassungsmethode sehr gut geeignet ist, die Dämpfungsparameter aus den gemessenen Wertepaaren  $x_{\text{max},2} / x_{\text{max},1}$  zu bestimmen.

## 7.5 Einfluss der Vibrationen auf das Fließ- und Dämpfungsverhalten von feuchtem Kalksteinpulver

Für die Untersuchungen zum Einfluss der Materialfeuchte auf das Dämpfungsverhalten wurde das Kalksteinpulver in einem Zwangsmischer mit Wasser versetzt. Es handelt sich hierbei um einen Mischer der Fa. Eirich, Modell R02 mit einem maximalen Fassungsvermögen von 5 l. Das Kalksteinpulver hat im Lieferzustand eine Materialfeuchte (Beladung) von  $X_1 = 0,004$ . Eingestellt für die Experimente wurden Feuchtebeladungen von  $X_1 = 0,02$ ; 0,04; 0,08 und 0,16. Eine bestimmte Menge Kalksteinpulver wurde in den Mischtroge eingefüllt und während des Mischvorganges eine vorher nach Gl. (2-26) berechnete entsprechende Wassermenge mit einer Sprühflasche nebel fein eingesprüht. Nach intensivem Mischen (Dauer 10 min) sowie im Verlauf der Untersuchungen wurde die Materialfeuchte thermogravimetrisch bestimmt. Damit konnte eine konstante Materialfeuchte gewährleistet werden. Aus den Feuchtegehalten können nun mit Gl. (2-25) die Sättigungsgrade berechnet werden. Dabei ist zu beachten, dass sich bei Schüttgütern durch veränderliche Normallasten die Porosität ändert. Ein sehr feuchtes aber noch nicht gesättigtes Schüttgut kann allein durch Erhöhung der Auflast in einen gesättigten oder sogar übersättigten Zustand überführt werden. Deshalb lässt sich der Sättigungszustand nicht durch einen bestimmten Wert angeben, sondern nur durch einen Wertebereich. Die errechneten Sättigungsgrade sind in Tabelle 7-9 aufgeführt. Die Experimente zur Bestimmung des Einflusses unterschiedlicher Materialfeuchten auf das Fließ- und Dämpfungsverhalten wurden im Spannungsbereich des zweiten Fließortes durchgeführt.

Tabelle 7-9: Eingestellte Feuchtegehalte und zugehörige Sättigungsgrade des untersuchten Kalksteinpulvers

Beladung $X_1$	Sättigungsgrade S für			
	FO1 ( $\varepsilon = 0,734$ )	FO2 ( $\varepsilon = 0,718$ )	FO3 ( $\varepsilon = 0,700$ )	FO4 ( $\varepsilon = 0,692$ )
0,004	0,0041	0,0044	0,0046	0,0048
0,02	0,020	0,022	0,023	0,024
0,04	0,041	0,044	0,046	0,048
0,08	0,082	0,089	0,092	0,096
0,16	0,163	0,177	0,183	0,191

### 7.5.1 Fließverhalten von feuchtem Kalksteinpulver

Abbildung 7-30 zeigt den Einfluss unterschiedlicher Feuchtebeladung auf die Lage des zweiten Fließortes für das untersuchte Kalksteinpulver ohne zusätzlich eingetragene Schwingungen. Auf die Darstellung der jeweiligen Mohr-Kreise für stationäres Fließen soll hier für eine bessere Übersichtlichkeit ausnahmsweise verzichtet werden. Höhere Feuchtebeladungen verschieben die Fließortgeraden weitgehend parallel zu Werten von höheren Scherfestigkeiten, d.h. die Kohäsion  $\tau_c$  wird größer.

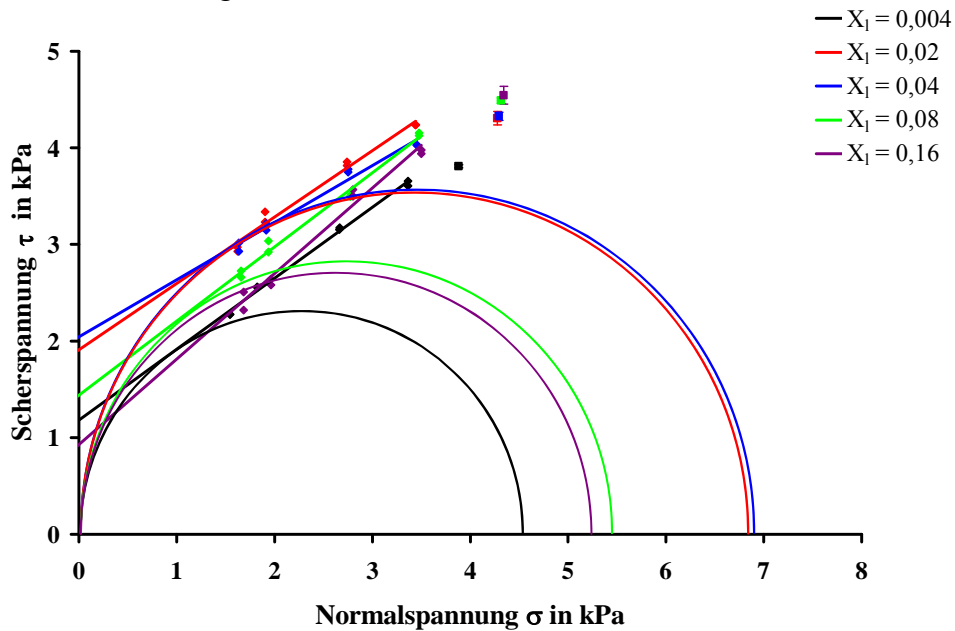


Abbildung 7-30: Lage der Fließorte 2 für Kalksteinpulver ohne mechanische Vibrationen für verschiedene Feuchtebeladungen

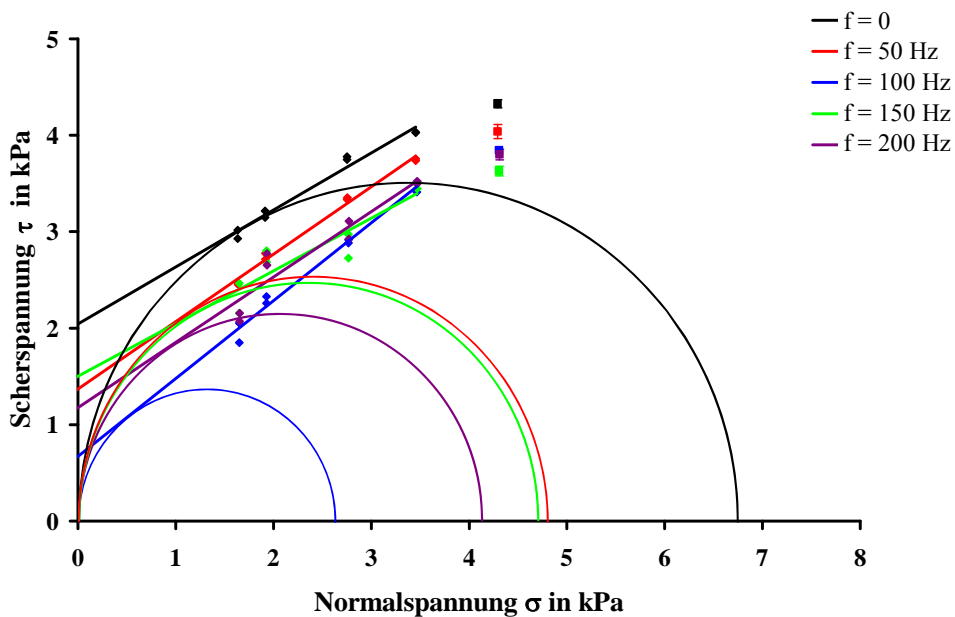


Abbildung 7-31: Lage der Fließorte 2 für befeuchtetes Kalksteinpulver ( $X_1 = 0,04$ ) bei versch. Erregerfrequenzen und konst. max. Schwinggeschwindigkeit

In Abbildung 7-31 wird der Einfluss der eingeleiteten Schwingungen auf die Lage der Fließortgeraden von befeuchtem Kalksteinpulver, in diesem Beispiel ist  $X_1 = 0,04$ , dargestellt. Weitere Fließorte befinden sich im Anhang. Ebenso wie beim unbefeuchteten Kalksteinpulver führen auch hier die mechanischen Schwingungen zu einer Verschiebung der Fließortgeraden zu kleineren Scherfestigkeiten, die Kohäsion  $\tau_c$  nimmt ab. Tabelle 7-10 fasst die Werte der einaxialen Druckfestigkeit und der Fließfunktion von unbefeuchtetem und befeuchtem Kalksteinpulver bei unterschiedlichen Erregerfrequenzen für den zweiten Fließort zusammen.

Tabelle 7-10: Einaxiale Druckfestigkeit und Fließfunktion von unbefeuchtetem und befeuchtem Kalksteinpulver abhängig von der Erregerfrequenz  $f$  bei konstanter maximaler Schwinggeschwindigkeit  $v_{\max} = 20$  mm/s für Fließort 2

<b>f in Hz</b>	<b>0</b>	<b>50</b>	<b>75</b>	<b>100</b>	<b>125</b>	<b>150</b>	<b>175</b>	<b>200</b>
<b><math>X_1 = 0,004</math></b>								
$\sigma_1$ in kPa	9,77	9,05	8,88	9,82	-	7,81	7,55	7,29
$\sigma_c$ in kPa	6,04	4,28	4,41	1,28	-	4,64	4,94	5,61
$ff_c$	1,6	2,1	2,0	7,7	-	1,7	1,5	1,3
<b><math>X_1 = 0,02</math></b>								
$\sigma_1$ in kPa	9,26	8,74	11,72	8,76	9,39	8,94	7,61	9,8
$\sigma_c$ in kPa	7,26	4,14	2,48	4,13	1,96	4,49	4,78	4,68
$ff_c$	1,3	2,1	4,7	2,1	4,8	2,0	1,6	2,1
<b><math>X_1 = 0,04</math></b>								
$\sigma_1$ in kPa	9,67	9,48	10,64	12,69	8,79	9,41	8,91	9,16
$\sigma_c$ in kPa	7,32	5,25	0,75	2,64	2,81	5,12	4,96	4,42
$ff_c$	1,3	1,8	14,2	4,8	3,1	1,8	1,8	2,1
<b><math>X_1 = 0,08</math></b>								
$\sigma_1$ in kPa	10,8	11,15	11,83	9,12	10,07	9,48	9,6	9,76
$\sigma_c$ in kPa	5,84	3,39	1,22	0,64	1,42	4,25	4,25	3,46
$ff_c$	1,8	3,3	9,7	14,3	7,1	2,2	2,3	2,8
<b><math>X_1 = 0,16</math></b>								
$\sigma_1$ in kPa	11,73	12,2	9,35	9,95	11,18	10,22	10,53	10,85
$\sigma_c$ in kPa	3,73	0,73	0,91	0,64	4,33	4,89	4,95	4,68
$ff_c$	3,1	16,6	10,3	15,3	2,6	2,1	2,1	2,3

Einaxiale Druckfestigkeit und Fließfunktion sind nicht konstant. Erregerfrequenzen im Bereich von 75 Hz bis 125 Hz führen zu geringeren Festigkeiten bzw. zu größeren Werten der Fließfunktion, was auf ein besseres Fließverhalten hindeutet. Besonders erwähnt werden soll an diese Stelle, dass das unbefeuchtete Kalksteinpulver bei einer Erregerfrequenz von 125 Hz

dermaßen aktiviert wurde, dass eine Schertestdurchführung unmöglich war. Daher sind dort keine Werte eingetragen. Erregerfrequenzen oberhalb 125 Hz führen nicht zu einer weiteren Fließverbesserung, teilweise verschlechtert sich das Fließverhalten wieder.

## 7.5.2 Dämpfungsverhalten von feuchtem Kalksteinpulver

Abbildung 7-32 zeigt die ermittelten Eigenfrequenzen des Kalksteinpulvers für verschiedene Materialfeuchten in Abhängigkeit des Normalspannungsverhältnisses. Die an den Partikeloberflächen adsorbierte Flüssigkeit verringert die Eigenfrequenz. Es kann auch tendenziell abgelesen werden, dass mit Erhöhung der Materialfeuchte die Eigenfrequenz weiter abnimmt. Hier führt offenbar die adsorbierte Flüssigkeit zu einer Herabsetzung der Federkonstante  $c$ , was nach Gl. (7-2) zu einer Abnahme der Eigenfrequenz führt. Die Beeinflussung der Eigenfrequenz durch die veränderte Normallast folgt der in Abschnitt 7.2.2 beschriebenen Tendenz. Eine Vergrößerung der Normallast führt zu einer Erhöhung der Eigenfrequenz.

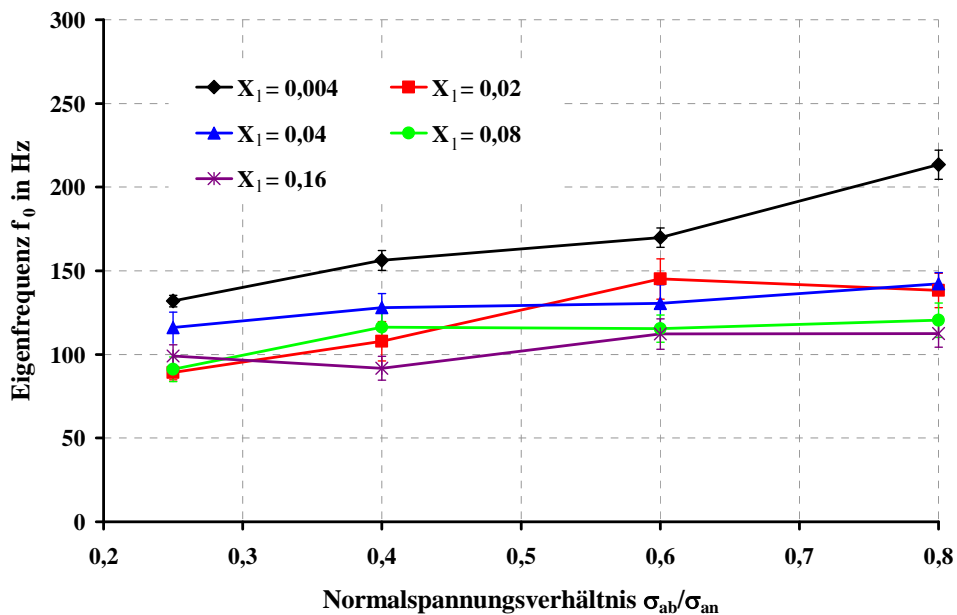


Abbildung 7-32: Ermittelte Eigenfrequenz  $f_0$  des Kalksteinpulvers bei Fließort 2 für verschiedene Materialfeuchten in Abhängigkeit des Normalspannungsverhältnisses  $\sigma_{ab}/\sigma_{an}$

In Abbildung 7-33 sind die ermittelten viskosen Dämpfungsverhältnisse des Kalksteinpulvers für verschiedene Materialfeuchten in Abhängigkeit des Normalspannungsverhältnisses aufgetragen. Ein höheres viskoses Dämpfungsverhältnis mit höherer Materialfeuchte kann abgelesen werden. Hier führt offenbar das Wasser der Adsorptionsschichten ( $X_1 = 0,004$ ) und

Flüssigkeitsbrücken ( $X_1 > 0,004$ ) zu einer zusätzlichen Energiedissipation, was sich letztendlich in größeren Werten von  $\zeta_b$  nieder schlägt.

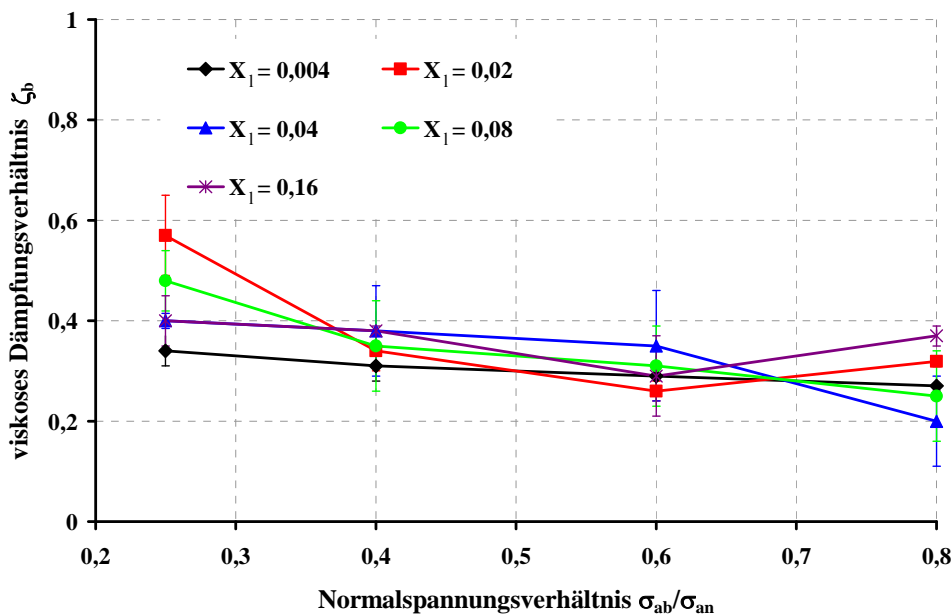


Abbildung 7-33:

Ermittelte viskose Dämpfungsverhältnisse  $\zeta_b$  des Kalksteinpulvers bei Fließort 2 für verschiedene Materialfeuchten in Abhängigkeit des Normalspannungsverhältnisses  $\sigma_{ab}/\sigma_{an}$

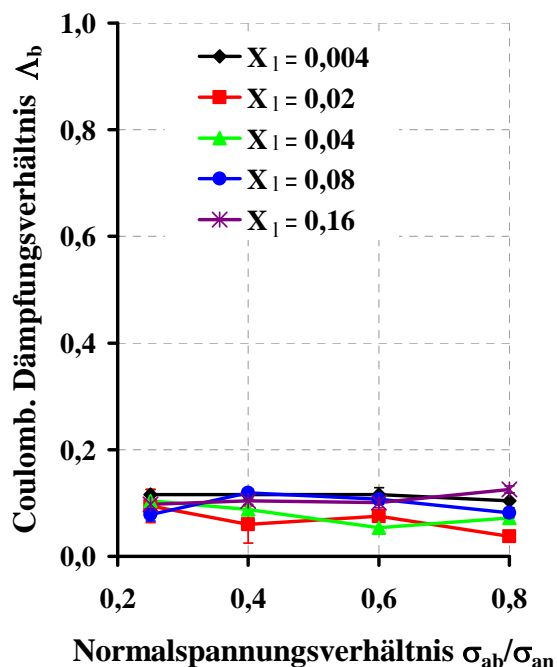


Abbildung 7-34: Ermittelte Coulomb'sche Dämpfungsverhältnisse  $\Lambda_b$  des feuchten Kalksteinpulvers bei Fließort 2 in Abhängigkeit vom Normalspannungsverhältnis  $\sigma_{ab}/\sigma_{an}$  für  $f = 50$  Hz

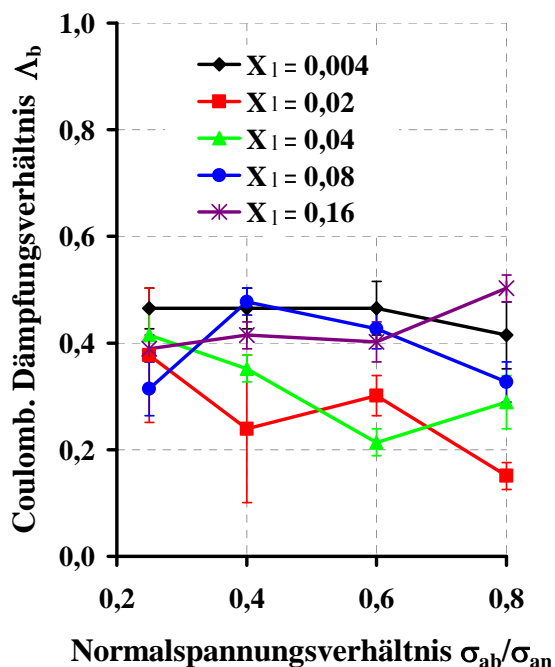


Abbildung 7-35: Ermittelte Coulomb'sche Dämpfungsverhältnisse  $\Lambda_b$  des feuchten Kalksteinpulvers bei Fließort 2 in Abhängigkeit vom Normalspannungsverhältnis  $\sigma_{ab}/\sigma_{an}$  für  $f = 200$  Hz



Abbildung 7-34 und Abbildung 7-35 zeigen die ermittelten Coulomb'schen Dämpfungsverhältnisse  $\Lambda_b$  des feuchten Kalksteinpulvers bei Fließort 2 in Abhängigkeit vom Normalspannungsverhältnis  $\sigma_{ab}/\sigma_{an}$  für  $f = 50$  Hz bzw.  $f = 200$  Hz. Es ist gut zu sehen, besonders in Abbildung 7-35, dass die Werte von  $\Lambda_b$  mit zunehmender Materialfeuchte abnehmen. Das zeigt auch Abbildung 7-36. Sie stellt beispielhaft die ermittelten Coulomb'schen Dämpfungsverhältnisse des Kalksteinpulvers für verschiedene Materialfeuchten bei dem Normalspannungsverhältnis  $\sigma_{ab}/\sigma_{an} = 0,6$  dar. Hier ist ebenfalls zu sehen, dass die zusätzliche Feuchtigkeit zu kleineren Werten von  $\Lambda_b$  führt. Durch das Wasser bildet sich also ein „Schmierfilm“ zwischen den Partikeln aus, und die Reibung zwischen den Partikeln wird herab gesetzt.

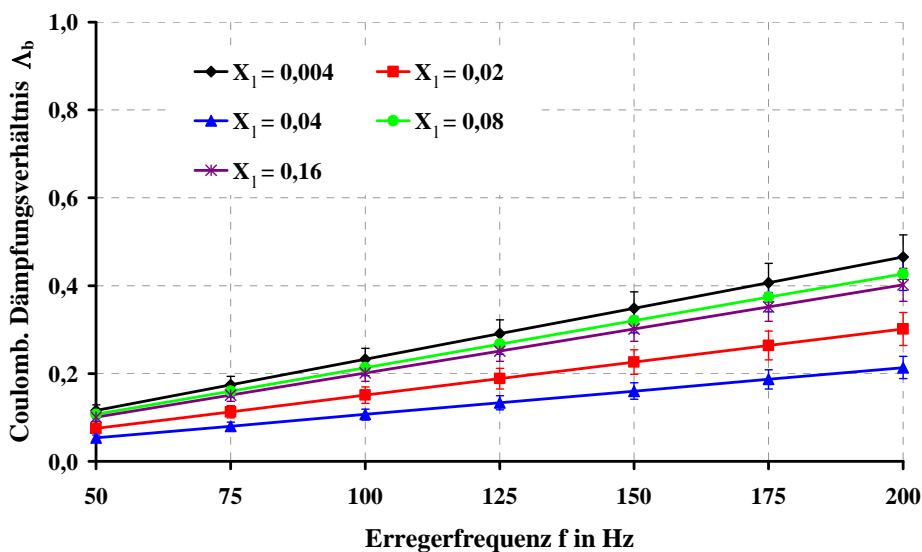


Abbildung 7-36:

Ermittelte Coulomb'sche Dämpfungsverhältnisse  $\Lambda_b$  des Kalksteinpulvers bei Fließort 2 für verschiedene Materialfeuchten bei  $\sigma_{ab}/\sigma_{an} = 0,6$

In Tabelle 7-11 sind die ermittelten Dämpfungsparameter des untersuchten Kalksteinpulvers für verschiedene Materialfeuchten zusammen gefasst. Im Vergleich mit den ermittelten Dämpfungsparametern des unbefeuchteten Kalksteinpulvers (Tabelle 7-7) zeigt sich folgendes Bild: Eine erhöhte Materialfeuchte führt zu einer kleineren Eigenfrequenz und zu einem größeren viskosen Dämpfungsverhältnis des Kalksteinpulvers. Es tritt eine zusätzliche viskose Dämpfung durch die Adsorptionsschichtfeuchte ( $X_1 = 0,004$ ) und die Flüssigkeitsbrücken ( $X_1 > 0,004$ ) hervorgerufene zusätzliche Energiedissipation auf. Durch die höhere Materialfeuchte wird die Partikelreibung reduziert, was an kleineren Werten des Coulomb'schen Dämpfungsverhältnissen abzulesen ist.

Tabelle 7-11: Ermittelte Dämpfungsparameter des untersuchten Kalksteinpulvers bei Fließort 2 für verschiedene Materialfeuchten

Material- feuchte $X_1$	$\sigma_{ab}/\sigma_{an}$	Eigenfrequenz $f_0$ in Hz	visk. Dämpfungs- verhältnis $\zeta_b$	Coulomb. Dämpfungs- verhältnis $\Lambda_b(f)$	
				f = 50Hz	f = 200 Hz
0,004	0,8	213,4 ± 8,7	0,27 ± 0,01	0,10 ± 0,02	0,41 ± 0,06
	0,6	169,8 ± 5,8	0,29 ± 0,04	0,12 ± 0,01	0,47 ± 0,05
	0,4	156,2 ± 6	0,31 ± 0,03	0,12 ± 0,01	0,47 ± 0,04
	0,25	131,9 ± 3,4	0,34 ± 0,03	0,12 ± 0,01	0,47 ± 0,04
0,02	0,8	138,2 ± 10,3	0,32 ± 0,01	0,04 ± 0,01	0,15 ± 0,02
	0,6	145,1 ± 12,1	0,26 ± 0,02	0,05 ± 0,01	0,30 ± 0,04
	0,4	107,9 ± 11,8	0,34 ± 0,04	0,09 ± 0,01	0,24 ± 0,14
	0,25	89,2 ± 4,3	0,57 ± 0,08	0,10 ± 0,01	0,38 ± 0,13
0,04	0,8	142,2 ± 6,8	0,2 ± 0,09	0,08 ± 0,01	0,29 ± 0,05
	0,6	130,6 ± 11,1	0,35 ± 0,11	0,05 ± 0,01	0,21 ± 0,02
	0,4	128 ± 8,3	0,38 ± 0,09	0,09 ± 0,01	0,35 ± 0,02
	0,25	116 ± 9,3	0,40 ± 0,02	0,10 ± 0,01	0,42 ± 0,05
0,08	0,8	120,4 ± 10,3	0,25 ± 0,09	0,08 ± 0,01	0,33 ± 0,04
	0,6	115,4 ± 8,1	0,31 ± 0,08	0,11 ± 0,01	0,43 ± 0,04
	0,4	116,2 ± 11,1	0,35 ± 0,09	0,12 ± 0,01	0,48 ± 0,02
	0,25	91,1 ± 7,4	0,48 ± 0,06	0,08 ± 0,01	0,31 ± 0,05
0,16	0,8	112,4 ± 8,1	0,37 ± 0,02	0,13 ± 0,01	0,50 ± 0,03
	0,6	112,2 ± 9,1	0,29 ± 0,08	0,10 ± 0,01	0,40 ± 0,04
	0,4	91,8 ± 7,1	0,38 ± 0,01	0,10 ± 0,01	0,42 ± 0,03
	0,25	99 ± 6,8	0,40 ± 0,05	0,10 ± 0,01	0,39 ± 0,03

## 7.6 Vergleich des Fließ- und Dämpfungsverhaltens von Kalkstein und Titandioxid

In diesem Kapitel wird der Einfluss unterschiedlicher Pulvereigenschaften auf das Dämpfungsverhalten von kohäsiven Pulvern diskutiert. Als Versuchsschüttgüter dienen die in

Abschnitt 6 beschriebenen Kalkstein- und Titandioxidpulver. Tabelle 7-12 fasst die aufgeprägten Normalspannungen bei den Versuchen mit Titandioxid zusammen.

Tabelle 7-12: Aufgeprägte Normalspannungen bei den Versuchen mit Titandioxid

Fließort	Anschernormalspannung		Abschernormalspannung	
	$\sigma_{an}$ in kPa		$\sigma_{ab}$ in kPa	
FO1	2		1,6	1,2
FO2	4		3,2	2,4
FO3	8		6,4	4,8
FO4	16		12,8	9,6

Tabelle 7-13 und Abbildung 7-37 **Abbildung 7-13** zeigen die Schüttgutedichte des Titandioxidpulvers in Abhängigkeit von der Mittelpunktspannung beim stationären Fließen. Es ergibt sich ein Kompressibilitätsindex von  $n = 0,061$ , damit kann das Titandioxidpulver nach Tabelle 3-4 ebenso wie das Kalksteinpulver als *kompressibel* eingestuft werden, die Dichte der unverfestigten Schüttung beträgt  $\rho_{b,0} = 785 \text{ kg/m}^3$ . Das Titandioxid hat demzufolge eine höhere Schüttgutedichte als das Kalksteinpulver.

Tabelle 7-13: Mittelpunktspannung und Schüttgutedichte des Titandioxidpulvers

Fließort	Mittelpunktspannung $\sigma_{M,st}$ in kPa	Schüttgutedichte $\rho_b$ in $\text{kg/m}^3$
FO1	3,85	849,9
FO2	7,16	902,7
FO3	11,26	925,9
FO4	20,32	934,6

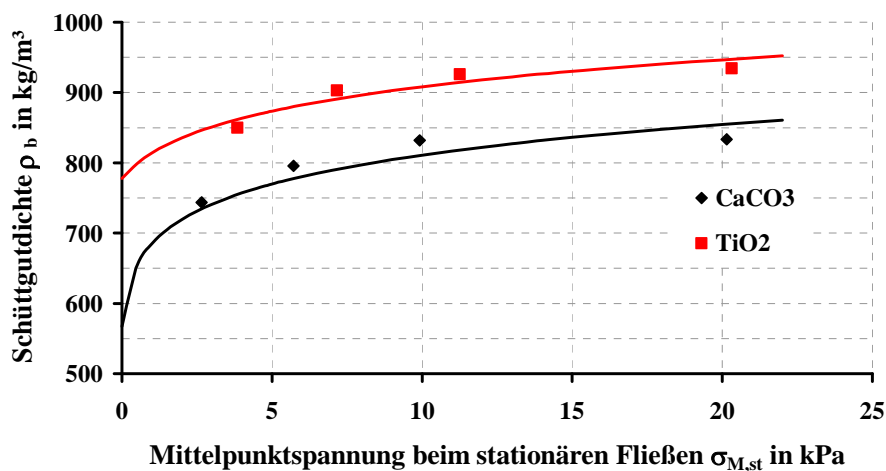


Abbildung 7-37: Schüttgutedichte in Abhängigkeit von der Mittelpunktspannung beim stationären Fließen für Kalkstein- und Titandioxidpulver

### 7.6.1 Vergleich des Fließverhaltens von Kalkstein und Titandioxid

Tabelle 7-14 fasst die einaxiale Druckfestigkeit und die Werte der Fließfunktion für die untersuchten Kalkstein- und Titandioxidpulver zusammen. Die einaxiale Druckfestigkeit von Titandioxid ist stets größer als die von Kalksteinpulver.

Tabelle 7-14: Einaxiale Druckfestigkeit und Fließfunktion von Kalksteinpulver und Titandioxid ohne mechanische Vibrationen

FO	Kalkstein			Titandioxid		
	$\sigma_1$ in kPa	$\sigma_c$ in kPa	$ff_c$	$\sigma_1$ in kPa	$\sigma_c$ in kPa	$ff_c$
1	4,7	1,81	2,6	7,1	2,63	2,7
2	9,77	6,04	1,6	13,0	7,87	1,6
3	17,7	9,59	1,8	20,6	13,42	1,5
4	34,2	15,26	2,2	35,4	25,89	1,4

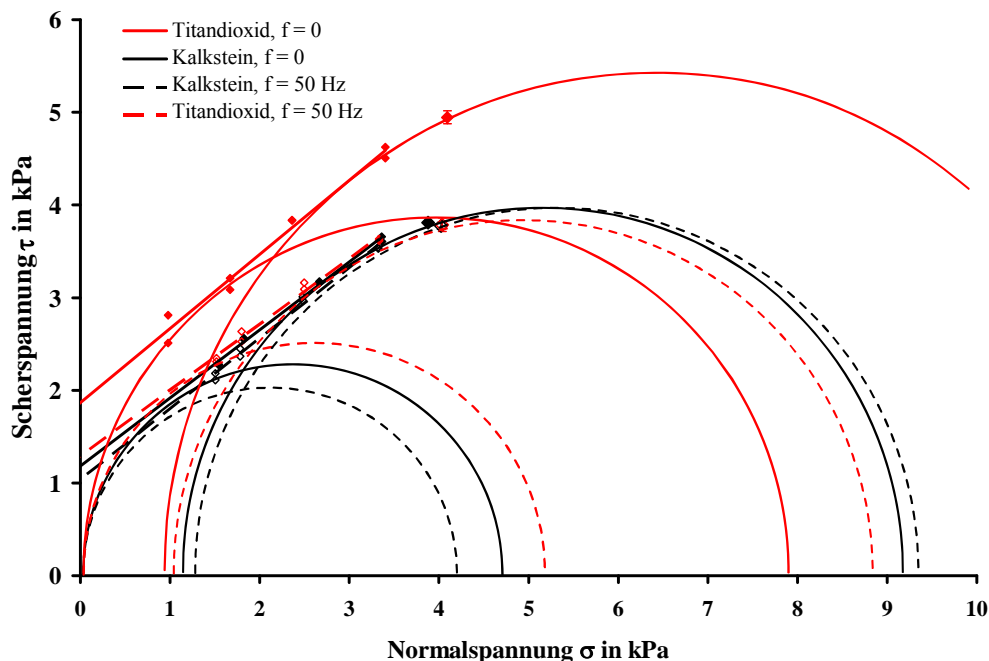


Abbildung 7-38: Lage der Fließorte 2 von Kalkstein und Titandioxid ohne mechanische Vibrationen ( $f = 0$ ) und bei Erregung mit  $f = 50$  Hz bei einer maximalen Schwinggeschwindigkeit von  $v_{\max} = 20$  mm/s

Abbildung 7-38 zeigt beispielhaft die Lage der Fließorte 2 von Kalkstein und Titandioxid ohne mechanische Vibrationen und bei Erregung mit  $f = 50$  Hz bei einer maximalen Schwinggeschwindigkeit von  $v_{\max} = 20$  mm/s. Weitere Fließorte befinden sich im Anhang. Ohne zusätzlich eingetragene Vibrationen liegt der gemessene Fließort des Titandioxides

deutlich über dem Fließort des Kalksteins. Titandioxid hat eine größere Hamaker-Konstante und verfügt damit über ein größeres Haftvermögen als Kalkstein unter vergleichbaren Belastungsbedingungen. Jedoch sind die berechneten Werte der Fließfunktion auf dem gleichen Niveau, Tabelle 7-15.

Tabelle 7-15: Einaxiale Druckfestigkeit und Fließfunktion von Kalksteinpulver und Titandioxid abhängig von der Erregerfrequenz  $f$  bei konstanter maximaler Schwinggeschwindigkeit  $v_{\max} = 20 \text{ mm/s}$  für Fließorte 1, 2 und 3

<b>f in Hz</b>	<b>0</b>	<b>50</b>	<b>75</b>	<b>100</b>	<b>125</b>	<b>150</b>	<b>175</b>	<b>200</b>
<b>Kalkstein, FO1</b>								
$\sigma_1$ in kPa	4,7	5,4	5,7	5,3	3,8	3,4	4,1	4,1
$\sigma_c$ in kPa	1,81	1,81	1,93	2,56	2,15	2,56	2,46	2,56
$ff_c$	2,6	3,0	2,9	2,1	1,8	1,5	1,7	1,6
<b>Titandioxid, FO1</b>								
$\sigma_1$ in kPa	7,1	5,2	5,42	3,7	3,5	3,4	3,5	3,5
$\sigma_c$ in kPa	2,63	0,51	0,12	1,88	1,34	2,01	1,94	2,19
$ff_c$	2,7	10,2	44,3	2,0	2,6	1,7	1,8	1,6
<b>Kalkstein, FO2</b>								
$\sigma_1$ in kPa	9,8	9,1	8,9	9,8	-	7,8	7,6	7,3
$\sigma_c$ in kPa	6,04	4,28	4,41	1,28	-	4,64	4,94	5,61
$ff_c$	1,6	2,1	2,0	7,7	-	1,7	1,5	1,3
<b>Titandioxid, FO2</b>								
$\sigma_1$ in kPa	13,0	8,6	11,6	10,5	7,9	6,5	7,4	7,5
$\sigma_c$ in kPa	7,87	5,06	1,49	1,91	4,16	4,64	5,29	4,69
$ff_c$	1,6	1,7	7,8	5,5	1,9	1,4	1,4	1,6
<b>Kalkstein, FO3</b>								
$\sigma_1$ in kPa	18,2	17,3	16,6	17,2	16,8	17,4	17,7	16,9
$\sigma_c$ in kPa	9,03	9,45	9,81	9,62	3,54	3,86	1,56	2,52
$ff_c$	2,0	1,8	1,7	1,8	4,8	4,5	11,3	6,7
<b>Titandioxid, FO3</b>								
$\sigma_1$ in kPa	20,6	16,5	17,0	17,5	18,6	19,9	15,7	18,3
$\sigma_c$ in kPa	13,42	11,79	12,14	7,96	3,58	7,37	9,24	6,78
$ff_c$	1,5	1,4	1,4	2,2	5,2	2,7	1,7	2,7

Die Fließorte, die unter zusätzlich eingetragenen mechanischen Vibrationen gemessen wurden, liegen für beide Pulver auf einem vergleichbaren Niveau. Durch die Vibrationen lässt

sich das Titandioxid besser auflockern als das Kalksteinpulver, d.h. die Partikelhaftung des Titandioxides lässt sich durch die aufgegebenen Vibrationen deutlicher reduzieren. Die Gerade des „Vibrations-Fließortes“ von Titandioxid ist weiter in Richtung kleinerer Kohäsionswerte verschoben, als die von Kalkstein bei gleichen Erregungsparametern. Diese bessere Auflockerung lässt sich auch an den teilweise deutlich größeren Werten der Fließfunktion von Titandioxid im Vergleich zu den Werten des Kalksteines in Tabelle 7-15 ablesen.

Tabelle 7-15 fasst die Werte der einaxialen Druckfestigkeit und der Fließfunktion für Kalkstein und Titandioxid zusammen.

### 7.6.2 Vergleich des Dämpfungsverhaltens von Kalkstein und Titandioxid

Abbildung 7-39 zeigt die ermittelten Eigenfrequenzen des Titandioxidpulvers in Abhängigkeit von der Normalbelastung. Auch hier nimmt die Eigenfrequenz mit der Normalbelastung zu: Sowohl eine höhere Anscherspannung  $\sigma_{an}$  als auch ein größeres Normalspannungsverhältnis  $\sigma_{ab}/\sigma_{an}$  führen zu einer höheren Eigenfrequenz.

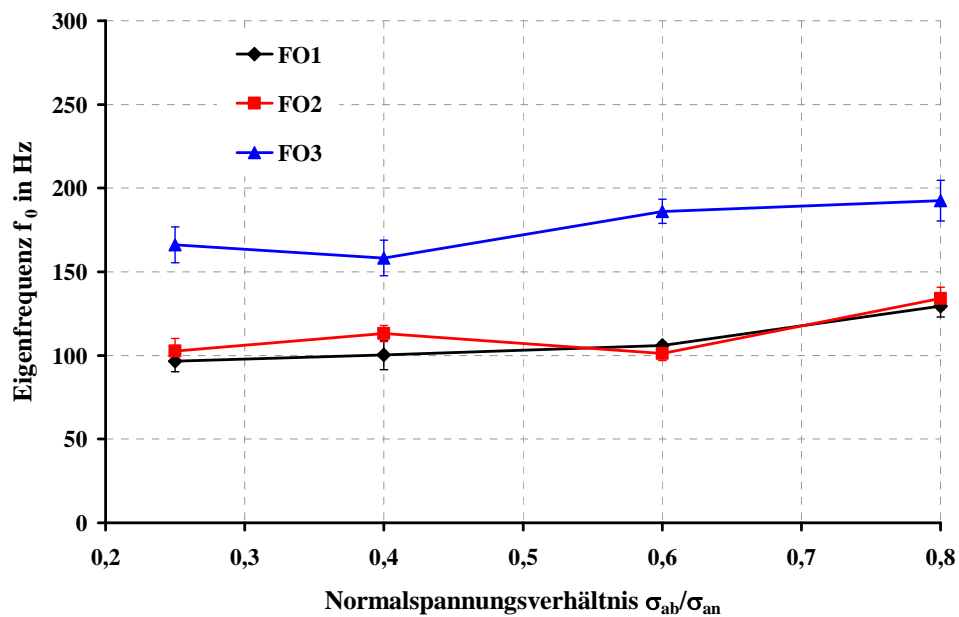


Abbildung 7-39:  
Ermittelte Eigenfrequenz  $f_0$  des Titandioxids für drei Fließorte in Abhängigkeit des Normalspannungsverhältnisses  $\sigma_{ab}/\sigma_{an}$

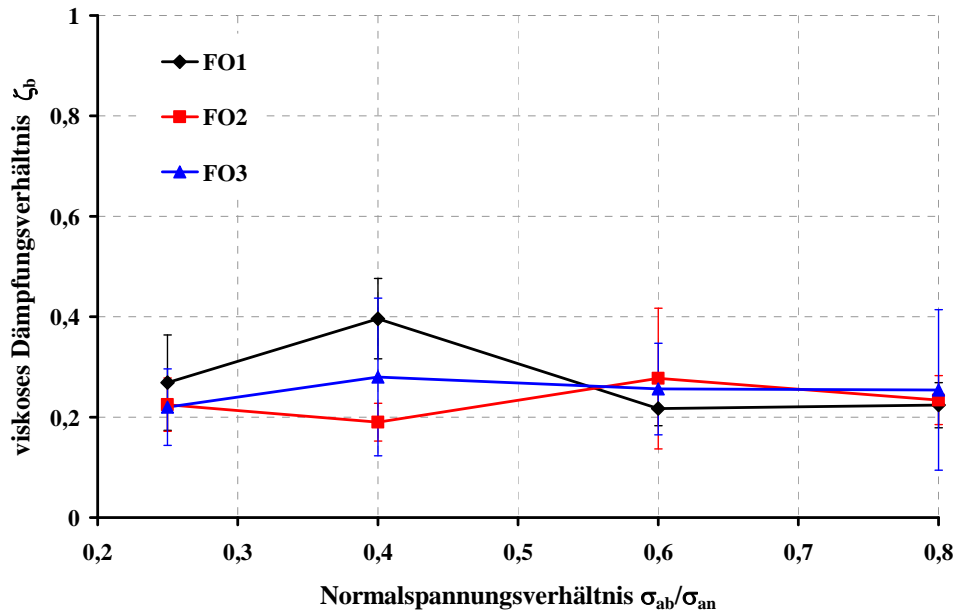


Abbildung 7-40:

Ermittelte viskose Dämpfungsverhältnisse  $\zeta_b$  des Titandioxids für drei Fließorte in Abhängigkeit des Normalspannungsverhältnisses  $\sigma_{ab}/\sigma_{an}$

Abbildung 7-40 stellt die ermittelten viskosen Dämpfungsverhältnisse von Titandioxid dar. Zu sehen ist, ähnlich wie beim Kalkstein, dass sich sowohl mit zunehmender Anscher- als auch Abschernormalspannung die viskose Dämpfung verringert. Jedoch ist die Abhängigkeit nicht so deutlich wie bei dem Kalksteinpulver.

Abbildung 7-41 und Abbildung 7-42 zeigen die ermittelten Coulomb'schen Dämpfungsverhältnisse  $\Lambda_b$  des Titandioxidpulvers bei Fließort 1 bzw. Fließort 3 in Abhängigkeit vom Normalspannungsverhältnis  $\sigma_{ab}/\sigma_{an}$  für verschiedene Erregerfrequenzen  $f$ . Auf einem geringen Belastungsniveau (FO1) wird mit zunehmendem Normalspannungsverhältnis das Coulomb'sche Dämpfungsverhältnis größer. Bei höherer Belastung (FO3) wurde das größte  $\Lambda_b$  bei dem kleinsten Normalspannungsverhältnis ermittelt. Bei größeren Normalspannungsverhältnissen liegt das Coulomb'sche Dämpfungsverhältnis auf einem konstanten tieferen Niveau.

Abbildung 7-43 enthält beispielhaft die ermittelten Coulomb'schen Dämpfungsverhältnisse  $\Lambda_b$  des untersuchten Titandioxidpulvers bei Fließort 1, die mit Gl. (4-160) aus den modifizierten Coulomb'schen Dämpfungsverhältnissen  $\Lambda^*$  berechnet wurden. Eine steigende Erregerfrequenz führt bei allen Fließorten zu einem Anstieg von  $\Lambda_b$ . Das bedeutet eine Zunahme der Coulomb'schen Dämpfung an der Gesamtdämpfung. In Tabelle 7-16 sind die ermittelten Dämpfungsparameter des Titandioxids zusammengefasst.

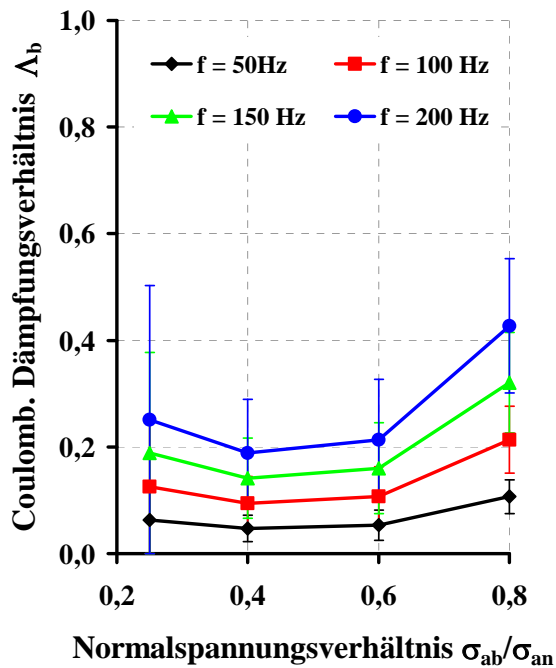


Abbildung 7-41: Ermittelte Coulomb'sche Dämpfungsverhältnisse  $\Lambda_b$  des Titandioxidpulvers bei Fließort 1 in Abhängigkeit vom Normalspannungsverhältnis  $\sigma_{ab}/\sigma_{an}$  für verschiedene Erregerfrequenzen  $f$

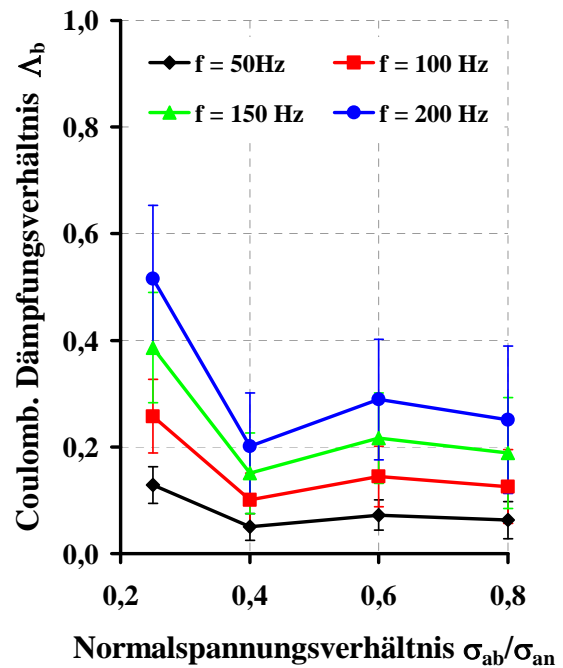


Abbildung 7-42: Ermittelte Coulomb'sche Dämpfungsverhältnisse  $\Lambda_b$  des Titandioxidpulvers bei Fließort 3 in Abhängigkeit vom Normalspannungsverhältnis  $\sigma_{ab}/\sigma_{an}$  für verschiedene Erregerfrequenzen  $f$

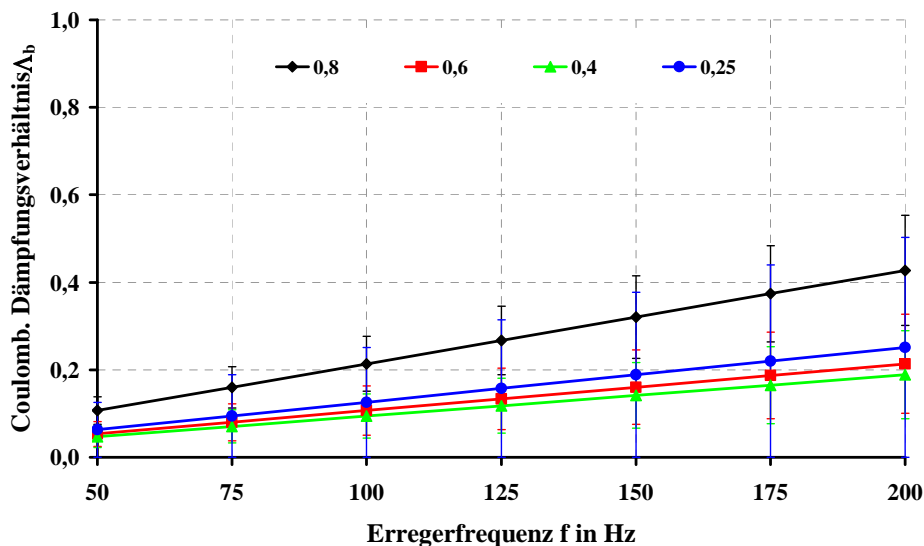


Abbildung 7-43: Ermittelte Coulomb'sche Dämpfungsverhältnisse  $\Lambda_b$  des Titandioxids bei Fließort 1 in Abhängigkeit Erregerfrequenz  $f$  für verschiedene Normalspannungsverhältnisse  $\sigma_{ab}/\sigma_{an}$



Tabelle 7-16: Ermittelte Dämpfungsparameter des untersuchten Titandioxids

Fließort	$\sigma_{ab}/\sigma_{an}$	Eigenfrequenz $f_0$ in Hz	visk. Dämpfungs- verhältnis $\zeta_b$	Coulomb. Dämpfungs- verhältnis $\Lambda_b(f)$	
				f = 50Hz	f = 200 Hz
1	0,8	129,5 ± 6,5	0,22 ± 0,05	0,11 ± 0,03	0,43 ± 0,13
	0,6	106,0 ± 2,2	0,22 ± 0,03	0,05 ± 0,03	0,21 ± 0,11
	0,4	100,3 ± 8,7	0,39 ± 0,08	0,05 ± 0,03	0,19 ± 0,10
	0,25	96,5 ± 6,2	0,27 ± 0,10	0,06 ± 0,10	0,25 ± 0,25
2	0,8	134,1 ± 6,7	0,23 ± 0,05	0,12 ± 0,03	0,48 ± 0,11
	0,6	101,2 ± 4,1	0,28 ± 0,14	0,10 ± 0,04	0,39 ± 0,14
	0,4	113,2 ± 4,8	0,19 ± 0,04	0,14 ± 0,01	0,55 ± 0,14
	0,25	102,7 ± 7,6	0,23 ± 0,05	0,14 ± 0,04	0,54 ± 0,14
3	0,8	192,5 ± 12,2	0,25 ± 0,16	0,06 ± 0,03	0,25 ± 0,14
	0,6	186,1 ± 7,2	0,26 ± 0,09	0,07 ± 0,03	0,29 ± 0,11
	0,4	158,2 ± 10,6	0,28 ± 0,16	0,05 ± 0,02	0,20 ± 0,10
	0,25	166,2 ± 10,7	0,22 ± 0,08	0,13 ± 0,07	0,51 ± 0,14

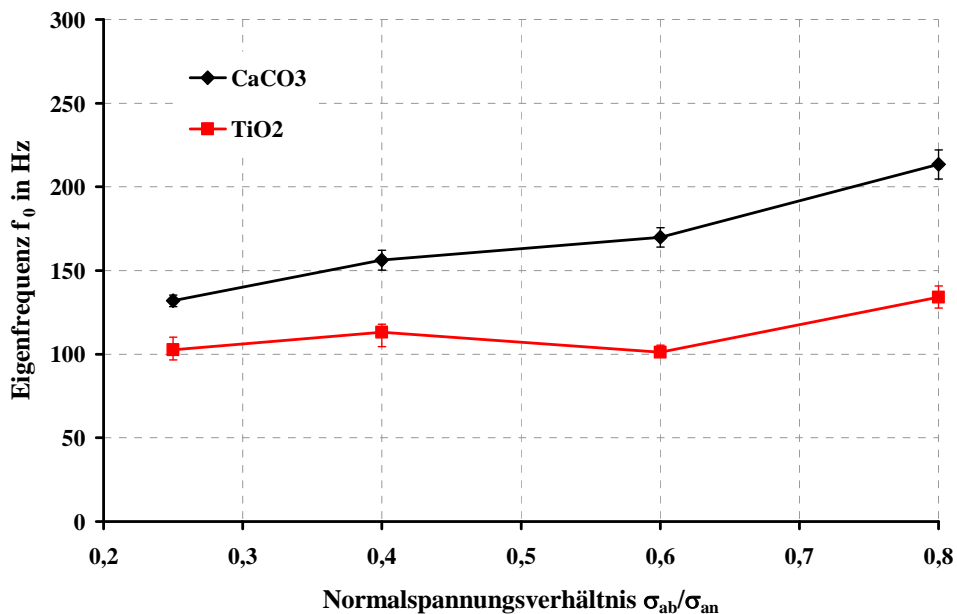


Abbildung 7-44:  
Ermittelte Eigenfrequenzen  $f_0$  von Kalksteinpulver und Titandioxid für Fließort 2 in Abhängigkeit des Normalspannungsverhältnisses  $\sigma_{ab}/\sigma_{an}$

Abbildung 7-44 vergleicht die ermittelten Eigenfrequenzen von Kalkstein- und Titandioxidpulver. Das Kalksteinmehl zeigt eine deutlich größere Eigenfrequenz, als das Titandioxid. Offenbar verhält sich das Kalksteinpulver bei vergleichbaren Normallasten etwas steifer als das Titandioxidpulver. Das Titandioxid hat eine deutlich größere Partikelhärte und einen deutlich größeren Partikelelastizitätsmodul als Kalkstein (Tabelle 6-1). Trotz größerer Partikelhärte und Partikelsteifigkeit von Titandioxid verhält sich das Pulver weicher als Kalkstein, da das Titandioxid als weiche bis nachgiebige Aggregate, Abbildung 6-3, vorliegt.

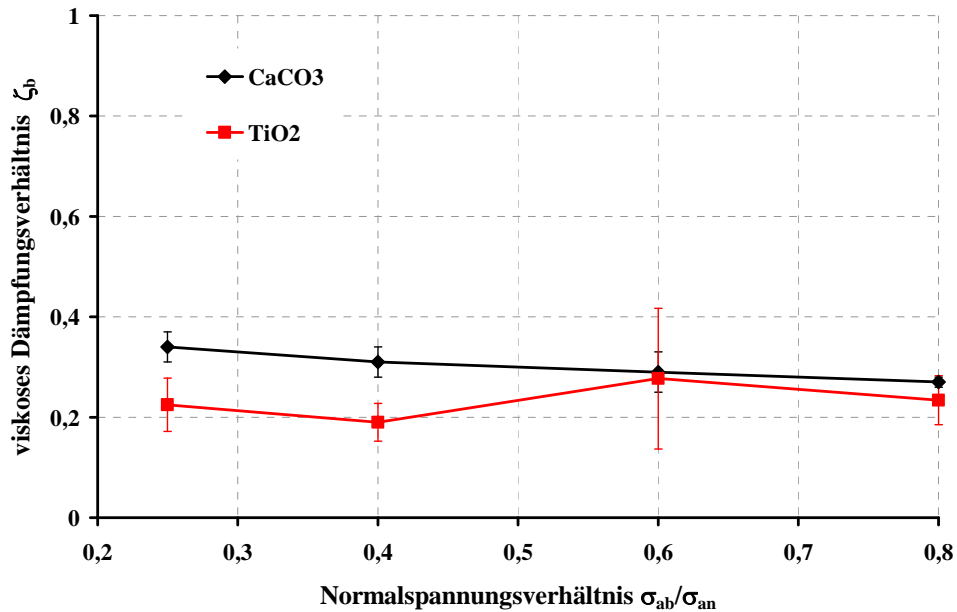


Abbildung 7-45:

Ermittelte viskose Dämpfungsverhältnisse  $\zeta_b$  von Kalksteinpulver und Titandioxid für Fließort 2 in Abhängigkeit des Normalspannungsverhältnisses  $\sigma_{ab}/\sigma_{an}$

In Abbildung 7-45 stehen sich die ermittelten viskosen Dämpfungsverhältnisse von Kalkstein und Titandioxid in Abhängigkeit von der Normalbelastung gegenüber. Das Diagramm zeigt, dass beide untersuchten Schüttgüter ein etwa gleich großes viskoses Dämpfungsverhältnis haben, das zeigt sich auch beim Vergleich der Dämpfungsparameter für die anderen Fließorte in Tabelle 7-7 (Kalkstein) und Tabelle 7-16 (Titandioxid).

Abbildung 7-46 und Abbildung 7-47 zeigen, dass die ermittelten Coulomb'schen Dämpfungsverhältnisse des Titandioxidpulvers auf einem höheren Niveau als die von Kalksteinpulver. je größer die Erregerfrequenz, desto größer ist auch der absolute Abstand zwischen den Werten von Titandioxid und Kalkstein.

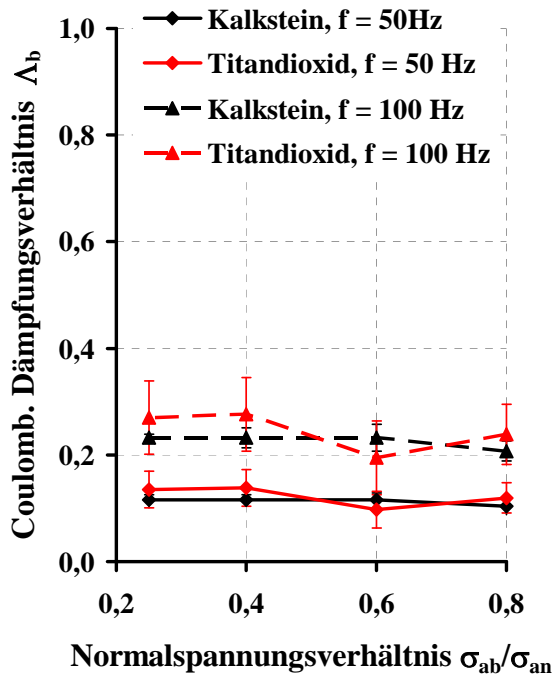


Abbildung 7-46: Ermittelte Coulomb'sche Dämpfungsverhältnisse  $\Lambda_b$  von Kalkstein und Titandioxidpulvers bei Fließort 2 in Abhängigkeit vom Normalspannungsverhältnis  $\sigma_{ab}/\sigma_{an}$  für  $f = 50$  Hz und  $f = 100$  Hz

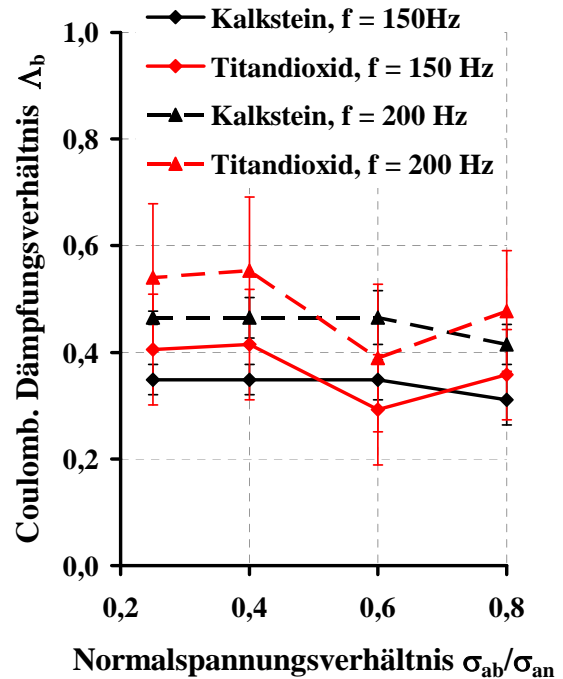


Abbildung 7-47: Ermittelte Coulomb'sche Dämpfungsverhältnisse  $\Lambda_b$  von Kalkstein und Titandioxidpulvers bei Fließort 2 in Abhängigkeit vom Normalspannungsverhältnis  $\sigma_{ab}/\sigma_{an}$  für  $f = 150$  Hz und  $f = 200$  Hz

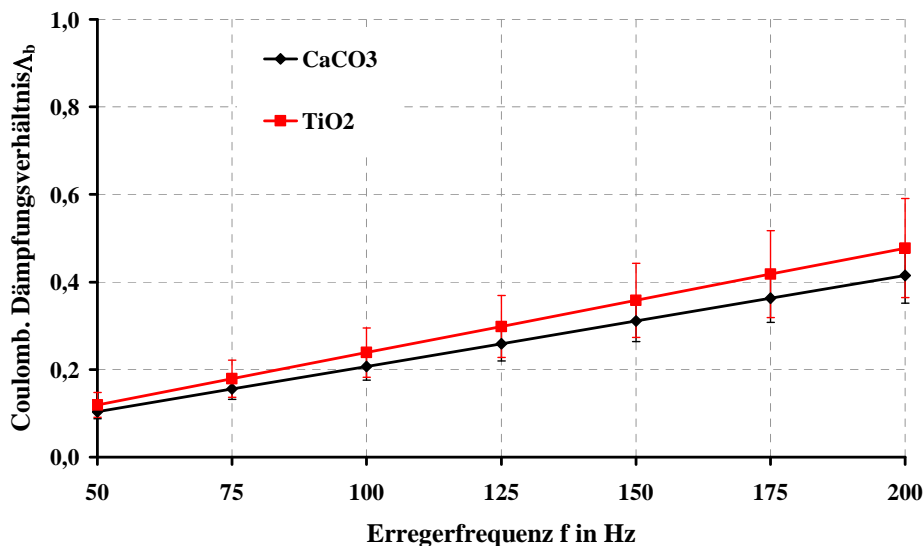


Abbildung 7-48: Ermittelte Coulomb'sche Dämpfungsverhältnisse  $\Lambda_b$  von Kalksteinpulver und Titandioxid für Fließort 2 und dem Normalspannungsverhältnis  $\sigma_{ab}/\sigma_{an} = 0,8$

Abbildung 7-48 zeigt beispielhaft die ermittelten Coulomb'schen Dämpfungsverhältnisse von Kalkstein und Titandioxid für den zweiten Fließort bei dem Normalspannungsverhältnis  $\sigma_{ab}/\sigma_{an} = 0,8$ . In diesem Fall zeigt das Titandioxid einen größeren Wert von  $\Lambda_b$ , das bedeutet, dass der Anteil der Coulomb-Dämpfung an der Gesamtdämpfung beim Titandioxid etwas größer ist. Im Vergleich der Dämpfungsparameter für Kalkstein in Tabelle 7-7 und Titandioxid in Tabelle 7-16 zeigen sich die Werte in etwa auf dem gleichen Niveau.

Kalkstein und Titandioxid haben unterschiedliche Partikeleigenschaften (Tabelle 6-1). Im Gegensatz zu Kalksteinpartikeln sind Titandioxidpartikeln härter und bilden stabile Aggregate aus den Primärpartikeln, die vermutlich ein nachgiebigeres Verhalten des Pulvers zur Folge haben.

Für das Kalksteinpulver ist eine deutlich größere Eigenfrequenz bei vergleichbarer Normalbelastung zu beobachten. Die Dämpfungsparameter  $\zeta_b$  und  $\Lambda_b$  zeigen hingegen keine so deutlichen Unterschiede.

## **7.7 Untersuchungen zur Anisotropie am Beispiel von Kalkstein**

### **7.7.1 Vergleich von Standardscherversuch und Anisotropietest**

Um den Einfluss der Drehung der Scherzelle um  $180^\circ$  zwischen An- und Abscheren zu quantifizieren, wurden die Ergebnisse zwei verschiedener Messprozeduren verglichen, die hier als „Standardscherversuch“ und „Anisotropietest“ bezeichnet und im Folgenden kurz erläutert werden:

- Standardscherversuch: Diese Prozedur entspricht dem im Abschnitt 5.3.1 beschriebenen Translationsscherversuch nach Jenike [27], An- und Abscherrichtung sind gleich
- Anisotropietest: Dieser Test folgt ebenso dem im Abschnitt 5.3.1 beschriebenen Translationsscherversuch nach Jenike [27], jedoch mit dem Unterschied, dass die Scherzelle zwischen An- und Abscheren um einen Verdrehwinkel  $\alpha = 180^\circ$  gedreht wird. Damit ist die Anscherrichtung der Abscherrichtung entgegengesetzt.

Die Auswirkungen der Drehung der Scherzelle zwischen An- und Abscheren auf die einaxiale Druckfestigkeit von Kalksteinpulver sind in Tabelle 7-17 dokumentiert. Es ist eine deutliche Verringerung der Festigkeit des Kalksteinpulvers bei den Anisotropietests zu verzeichnen. Das ist ein eindeutiges Zeichen dafür, dass das Pulver sehr viel stärker in Scherrichtung vorverfestigt wurde als in die entgegengesetzte Richtung, d.h. das Pulver in der Scherzelle wird

durch das Vorverdichten und das Anscheren nicht homogen, sondern richtungsabhängig, vorverfestigt.

Tabelle 7-17: einaxiale Druckfestigkeit von Kalkstein bei Standardscherversuch und Anisotropietest

Fließort	Anscherenspannung $\sigma_{an}$ in kPa	einaxiale Druckfestigkeit $\sigma_c$ in kPa	
		Standardscherversuch ( $\alpha = 0$ )	Anisotropietest ( $\alpha = 180^\circ$ )
1	2	1,68	0
2	4	6,32	1,90
3	8	9,03	2,96

Abbildung 7-49 zeigt am Beispiel des Fließortes 2 die Lage der gemessenen Fließortgeraden für Kalksteinpulver bei Standardscherversuchen und Anisotropietests. Weitere Fließorte befinden sich im Anhang. Deutlich ist die in Tabelle 7-17 aufgeführte kleinere einaxiale Druckfestigkeit bei den Anisotropietests zu sehen.

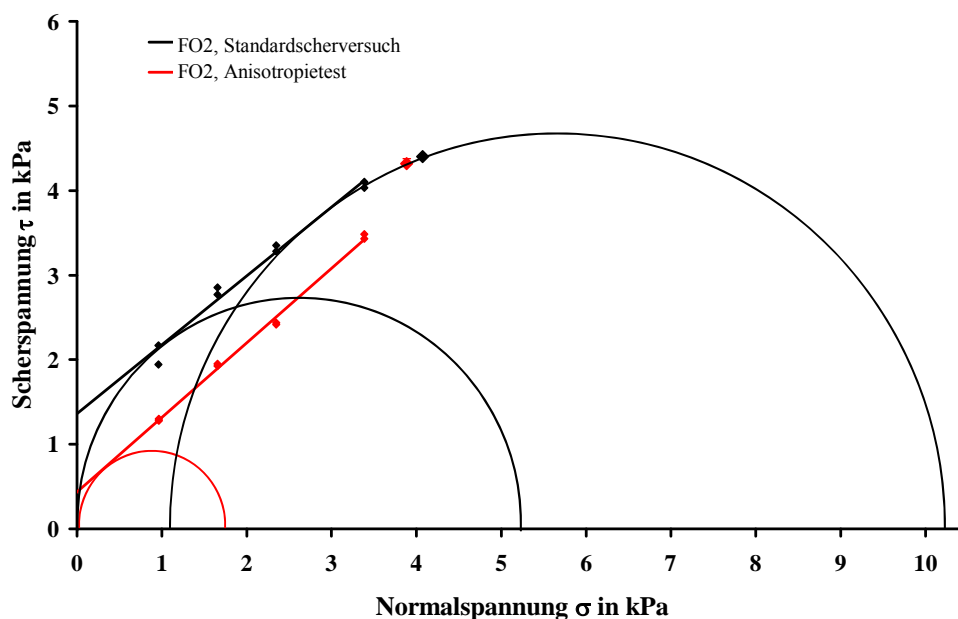


Abbildung 7-49: Lage der Fließortgeraden des Fließortes 2 von Kalksteinpulver gemessen mit dem Standardscherversuch und dem Anisotropietest

Ittershagen [23] und Morgeneyer [49] untersuchten den Einfluss der Anisotropie auf die Festigkeit von Kalksteinpulver ( $d_{50} = 1,9 \mu\text{m}$ ) sowie den kritischen Durchmesser eines Siloauslaufes. Ittershagen zeigte, dass das untersuchte Kalksteinpulver bei einer Verdichtung, deren

Richtung um  $90^\circ$  gegen die Messrichtung verdreht ist, eine kleinere Festigkeit aufweist [23]. Morgenerer ermittelte kleinere kritische Auslaufdurchmesser bei Anisotropieuntersuchungen [49]. Das untersuchte Kalksteinpulver zeigt also bei den Anisotropieuntersuchungen eine kleinere Festigkeit.

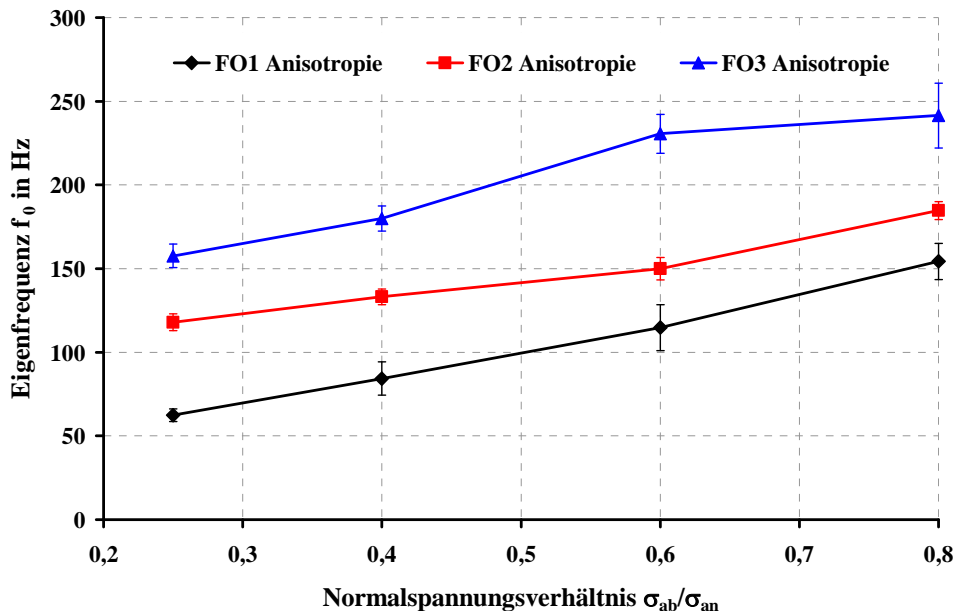


Abbildung 7-50:  
Ermittelte Eigenfrequenzen  $f_0$  von Kalkstein in Abhängigkeit des Normalspannungsverhältnisses  $\sigma_{ab}/\sigma_{an}$  bei Anisotropietests

In Abbildung 7-50 sind die ermittelten Eigenfrequenzen des Kalksteinpulvers in Abhängigkeit von der Normalbelastung dargestellt. Auch hier sind größere Eigenfrequenzen sowohl mit größerer Anspannung (höherer Fließort) als auch mit größerer Abscherspannung (größeres Normalspannungsverhältnis) zu sehen, somit folgt die Eigenfrequenz den schon bekannten Abhängigkeiten, d.h. mit höherer Normalbelastung bzw. Verfestigung steigt die Eigenfrequenz an (vergleiche auch Abbildung 7-14 und Abbildung 7-32). Abbildung 7-51 zeigt die ermittelten viskosen Dämpfungsverhältnisse des Kalksteinpulvers in Abhängigkeit des Normalspannungsverhältnisses. Ähnlich wie bei den bisher beschriebenen Ergebnissen folgt das viskose Dämpfungsverhältnis der Tendenz mit wachsender Normalbelastung abzunehmen.

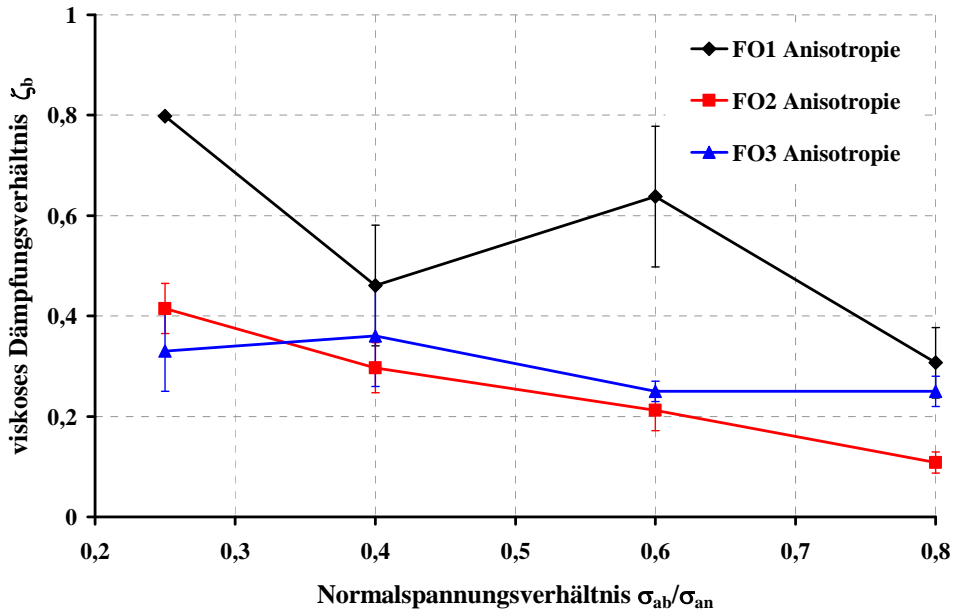


Abbildung 7-51:

Ermittelte viskose Dämpfungsverhältnisse  $\zeta_b$  von Kalkstein in Abhängigkeit des Normalspannungsverhältnisses  $\sigma_{ab}/\sigma_{an}$  bei Anisotropietests

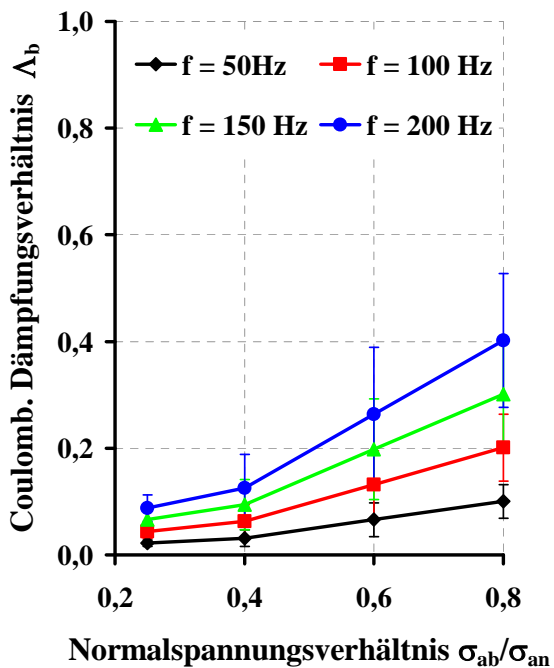


Abbildung 7-52: Ermittelte Coulomb'sche Dämpfungsverhältnisse  $\Lambda_b$  von Kalkstein bei Fließort 1 in Abhängigkeit vom Normalspannungsverhältnis  $\sigma_{ab}/\sigma_{an}$  bei Anisotropietests

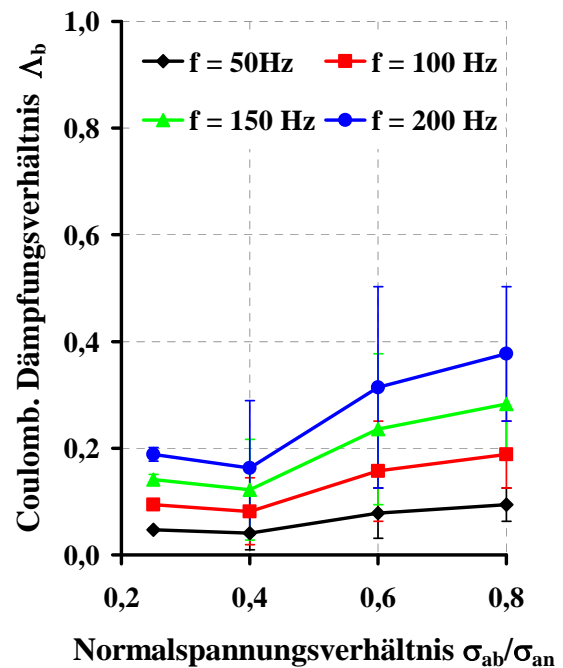


Abbildung 7-53: Ermittelte Coulomb'sche Dämpfungsverhältnisse  $\Lambda_b$  von Kalkstein bei Fließort 3 in Abhängigkeit vom Normalspannungsverhältnis  $\sigma_{ab}/\sigma_{an}$  bei Anisotropietests

Abbildung 7-52 und Abbildung 7-53 zeigen die bei der Auswertung der Anisotropietests ermittelten Coulomb'schen Dämpfungsverhältnisse  $\Lambda_b$  von Kalkstein bei Fließort 1 bzw. Fließort 3 in Abhängigkeit vom Normalspannungsverhältnis  $\sigma_{ab}/\sigma_{an}$ . Das Coulomb'sche Dämpfungsverhältnis nimmt in beiden Fällen sowohl mit der Erregerfrequenz als auch mit dem Normalspannungsverhältnis zu.

Abbildung 7-54 enthält die ermittelten Coulomb'schen Dämpfungsverhältnisse des Kalksteinpulvers bei Fließort 1. Bei geringerer Normalbelastung des Pulvers ist auch ein kleineres  $\Lambda_b$  abzulesen. In Tabelle 7-18 sind die ermittelten Dämpfungsparameter des Kalksteinpulvers zusammengefasst.

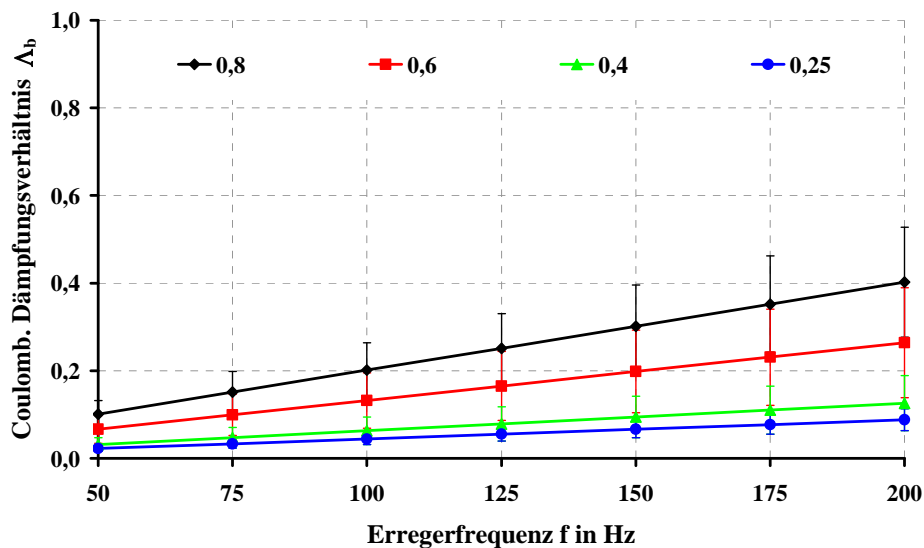


Abbildung 7-54: Ermittelte Coulomb'sche Dämpfungsverhältnisse  $\Lambda_b$  von Kalkstein bei Fließort 1 in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz  $f$  bei Anisotropietests für verschiedene Normalspannungsverhältnisse  $\sigma_{ab}/\sigma_{an}$

Der Vergleich der mit dem Standardscherversuch ermittelten Dämpfungsparameter für Kalkstein (Tabelle 7-7) mit jenen, die mit dem Anisotropietest ermittelt wurden (Tabelle 7-18), zeigt bezüglich der ermittelten Dämpfungsparameter Folgendes:

- Eigenfrequenz  $f_0$ :

Ein Einfluss der entgegen gesetzten Scherrichtungen auf die ermittelten Eigenfrequenzen des Kalksteinpulvers ist insofern zu erkennen, dass die Eigenfrequenzen bei den Anisotropietests tendenziell etwas kleiner sind als die bei den Standardscherversuchen ermittelten, Abbildung 7-55. In der der Anscherrichtung entgegen gesetzten Abscherichtung hat das untersuchte Kalksteinpulver eine geringere Verfestigung. Das bedeutet eine geringere Steifigkeit, somit weist das Kalksteinpulver bei den Anisotropietests eine kleinere Eigenfrequenz auf.



Ein etwas anderes Bild zeigt sich beim Vergleich der Dämpfungsverhältnisse:

- viskoses Dämpfungsverhältnis  $\zeta_b$ :  
Bei einer geringen Normalbelastung, wie sie bei FO 1 auftritt, führt die Umkehrung der Scherrichtung zu einem höheren viskosen Dämpfungsverhältnis, Abbildung 7-56. Bei größeren Normalbelastungen (FO2 und FO3) hat die Umkehrung der Scherrichtung keinen signifikanten Einfluss auf die viskose Dämpfung.
- Coulomb'sches Dämpfungsverhältnis  $\Lambda_b$ :  
Ebenso wie beim viskosen Dämpfungsverhältnis zeigt sich bei der Coulomb'schen Dämpfung der deutlichste Einfluss bei kleinen Normalbelastungen (FO1): ein deutlich reduziertes Coulomb'sches Dämpfungsverhältnis wurde ermittelt, Abbildung 7-59 und Abbildung 7-60, wobei die Reduzierung mit sinkendem Normalspannungsverhältnis stärker zutage trat, d.h. bei  $\sigma_{ab}/\sigma_{an} = 0,8$  ist die Reduzierung weniger ausgeprägt als bei  $\sigma_{ab}/\sigma_{an} = 0,25$ . Bei höheren Normalbelastungen (FO2 und FO3) liegen die ermittelten Werte von  $\Lambda_b$  auf einem vergleichbaren Niveau.

Tabelle 7-18: Ermittelte Dämpfungsparameter des Kalksteinpulvers bei Anisotropietests

Fließort	$\sigma_{ab}/\sigma_{an}$	Eigenfrequenz $f_0$ in Hz	visk. Dämpfungs- verhältnis $\zeta_b$	Coulomb. Dämpfungs- verhältnis $\Lambda_b(f)$	
				$f = 50\text{Hz}$	$f = 200\text{ Hz}$
1	0,8	$154,3 \pm 10,7$	$0,31 \pm 0,07$	$0,10 \pm 0,03$	$0,40 \pm 0,13$
	0,6	$114,7 \pm 13,7$	$0,64 \pm 0,14$	$0,07 \pm 0,03$	$0,26 \pm 0,13$
	0,4	$84,3 \pm 9,9$	$0,46 \pm 0,12$	$0,03 \pm 0,02$	$0,13 \pm 0,06$
	0,25	$62,5 \pm 3,8$	$0,80 \pm 0,001$	$0,02 \pm 0,01$	$0,09 \pm 0,03$
2	0,8	$184,7 \pm 5,4$	$0,11 \pm 0,02$	$0,15 \pm 0,01$	$0,60 \pm 0,05$
	0,6	$150,0 \pm 6,6$	$0,21 \pm 0,04$	$0,08 \pm 0,03$	$0,31 \pm 0,13$
	0,4	$133,2 \pm 4,7$	$0,30 \pm 0,05$	$0,06 \pm 0,03$	$0,25 \pm 0,13$
	0,25	$117,9 \pm 5,0$	$0,42 \pm 0,05$	$0,06 \pm 0,02$	$0,24 \pm 0,09$
3	0,8	$241,5 \pm 19,4$	$0,25 \pm 0,03$	$0,10 \pm 0,03$	$0,38 \pm 0,13$
	0,6	$230,6 \pm 11,6$	$0,25 \pm 0,02$	$0,08 \pm 0,04$	$0,31 \pm 0,19$
	0,4	$180,0 \pm 7,5$	$0,36 \pm 0,10$	$0,04 \pm 0,03$	$0,16 \pm 0,13$
	0,25	$157,6 \pm 7,0$	$0,33 \pm 0,08$	$0,05 \pm 0,01$	$0,19 \pm 0,01$

Das beobachtete Dämpfungsverhalten kann darin begründet liegen, dass die Umkehrung der Scherrichtung eine Verminderung der Vorverfestigung und folglich größere Dilatanz

(Auflockerung des Pulvers bzw. Reduzierung der lokalen Schüttgutdichte) in der Scherzone beim Abscheren hervor rufen kann, als beim Standardscherversuch, bei dem An- und Abscherrichtung übereinstimmen. Dadurch kann die Anzahl der wirkenden Partikelkontakte reduziert werden. Somit steht weniger Kontaktfläche zur Schwingungsweiterleitung zur Verfügung, denn nur bestehende Kontakte können auch die Schwingungen weiterleiten. Daraus folgt ein verändertes Dämpfungsverhalten, was sich in geringeren Eigenfrequenzen, größeren viskosen Dämpfungsverhältnissen und reduzierter Coulomb'scher Dämpfung, besonders im Bereich kleiner Spannungen, äußert. Bei höheren Normalbelastungen wird offenbar das Ausbilden der größeren Dilatanz durch eine stärkere Normalbelastung auf das Schüttgut unterdrückt und das Dämpfungsverhalten ändert sich nicht so deutlich.

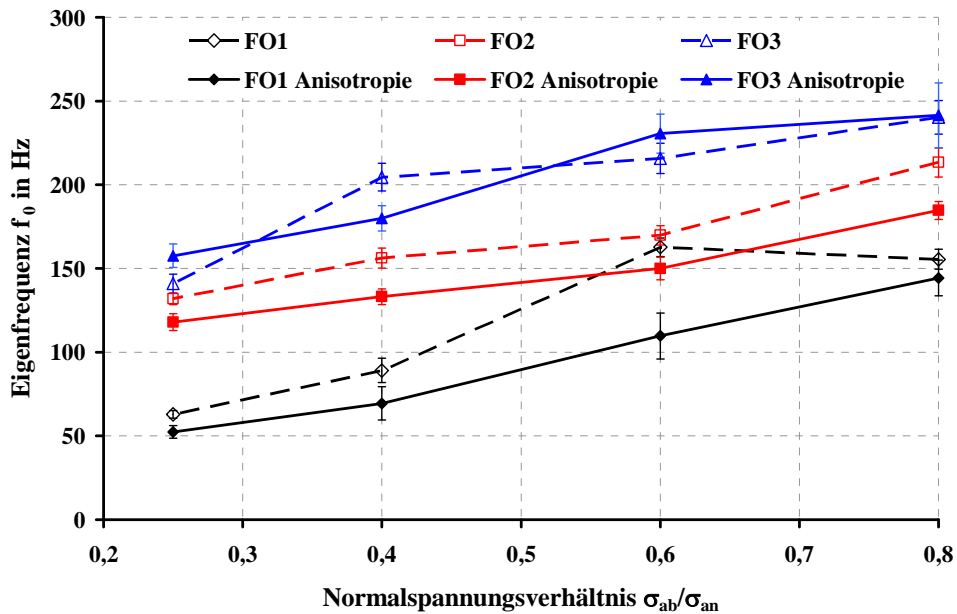


Abbildung 7-55:  
Ermittelte Eigenfrequenzen  $f_0$  von Kalkstein bei Standardscherversuch und Anisotropietest in Abhängigkeit des Normalspannungsverhältnisses  $\sigma_{ab}/\sigma_{an}$

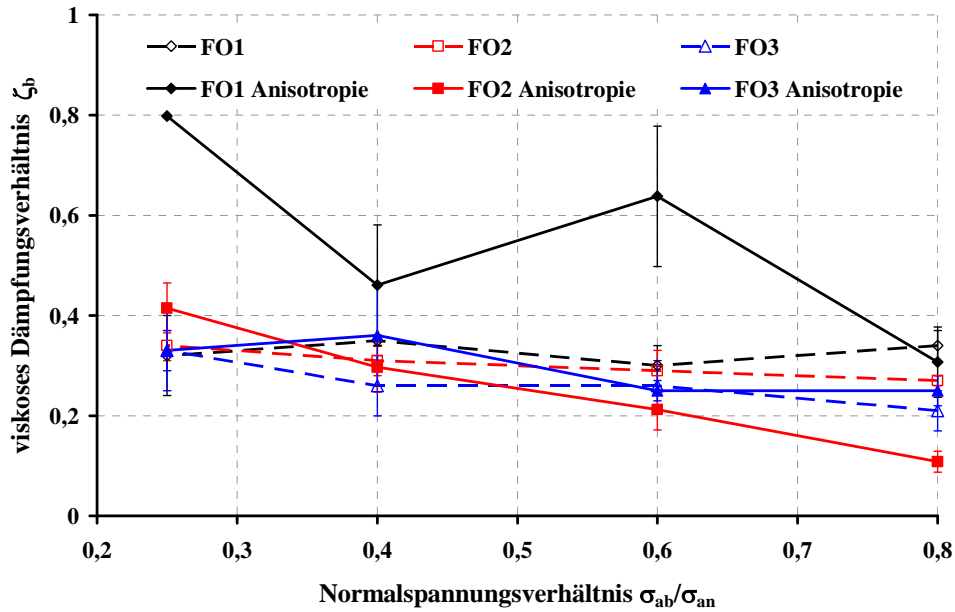


Abbildung 7-56:

Ermittelte viskose Dämpfungsverhältnisse  $\zeta_b$  von Kalkstein bei Standardscherversuch und Anisotropietest in Abhängigkeit des Normalspannungsverhältnisses  $\sigma_{ab}/\sigma_{an}$

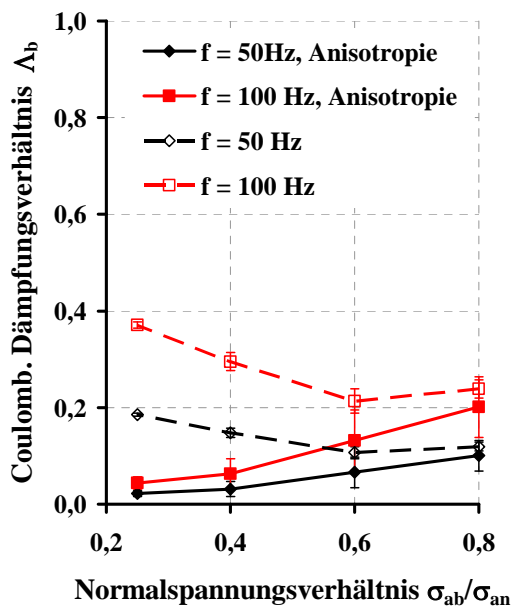


Abbildung 7-57: Vergleich der ermittelten Coulomb'schen Dämpfungsverhältnisse  $\Delta_b$  von Kalkstein bei Fließort 1 in Abhängigkeit vom Normalspannungsverhältnis  $\sigma_{ab}/\sigma_{an}$

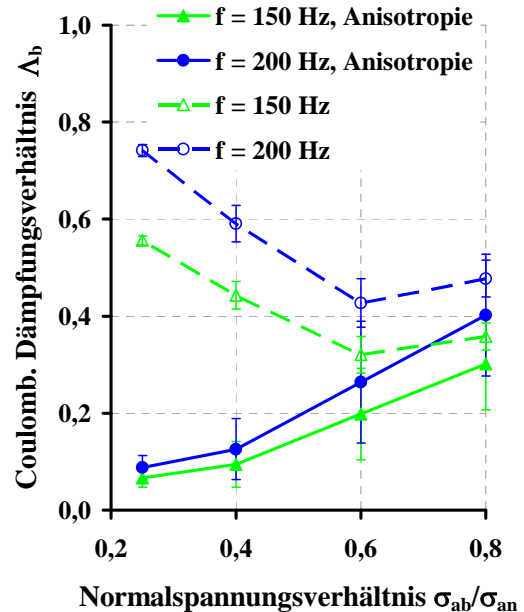


Abbildung 7-58: Vergleich der ermittelten Coulomb'schen Dämpfungsverhältnisse  $\Delta_b$  von Kalkstein bei Fließort 1 in Abhängigkeit vom Normalspannungsverhältnis  $\sigma_{ab}/\sigma_{an}$

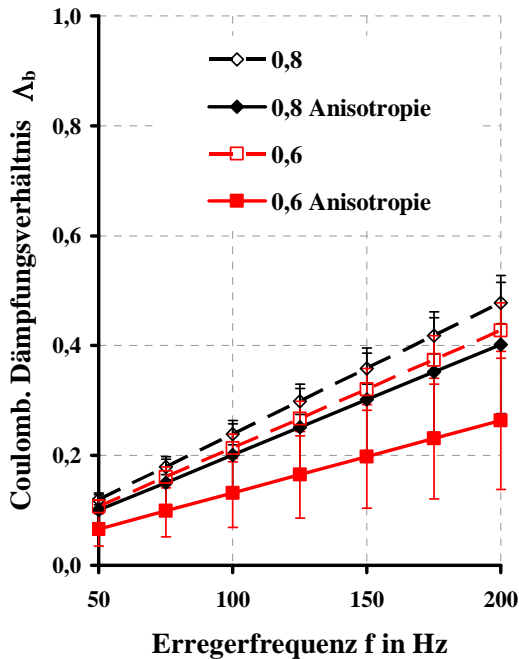


Abbildung 7-59:  
Ermittelte Coulomb'sche Dämpfungsverhältnisse  $\Lambda_b$  von Kalkstein bei Fließort 1 in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz  $f$  bei Standardscherversuch und Anisotropietest für  $\sigma_{ab}/\sigma_{an} = 0,8$  und  $\sigma_{ab}/\sigma_{an} = 0,6$

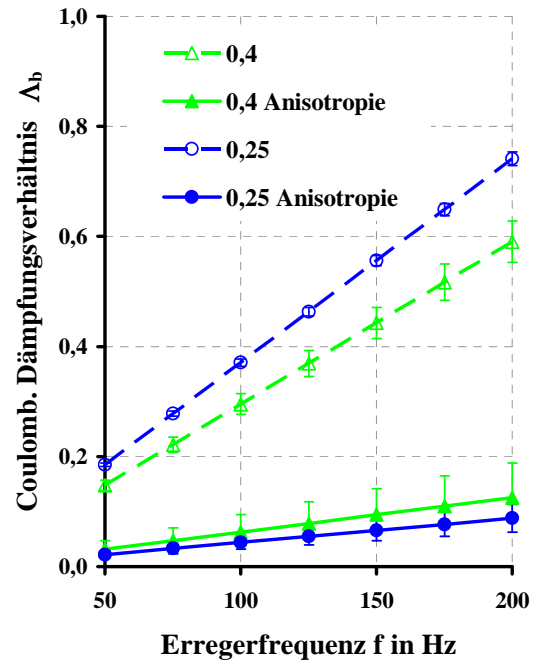


Abbildung 7-60:  
Ermittelte Coulomb'sche Dämpfungsverhältnisse  $\Lambda_b$  von Kalkstein bei Fließort 1 in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz  $f$  bei Standardscherversuch und Anisotropietest für  $\sigma_{ab}/\sigma_{an} = 0,4$  und  $\sigma_{ab}/\sigma_{an} = 0,25$

## 7.7.2 Einfluss des Winkels zwischen Scher- und Schwingrichtung

Bei den bisher beschriebenen Versuchen standen Schwingerrichtung und Scherrichtung orthogonal aufeinander. Um den Einfluss eines veränderlichen Winkels zwischen Scher- und Schwingrichtung zu quantifizieren, wurde die Vibrationsscherapparatur so erweitert, dass die Scherrichtung in Intervallen von je  $15^\circ$  relativ zur Schwingrichtung verändert werden kann. Die gesamte Scherzelle wurde vor dem eigentlichen Scherversuch gedreht, d.h. Anscher- und Abscherrichtung sind in diesem Fall wieder gleich. Die in den Diagrammen angegebenen Winkel bezeichnen den Winkel, um den die Scherzelle verdreht wurde. Das bedeutet, bei einem angegebenen Winkel von  $\alpha = 0$  stehen Scher- und Schwingrichtung senkrecht aufeinander. Je größer der angegebene Winkel, desto mehr wird die Scherzelle gedreht. Konstruktionsbedingt kann ein Verdrehwinkel von  $\alpha = 90^\circ$ , d.h. Scher- und Schwingrichtung sind gleich, nicht realisiert werden, die maximale Drehung der Scherzelle beträgt  $\alpha = 75^\circ$ . Die Untersuchungen fanden im Spannungsbereich von FO 2 (siehe Tabelle 7-5) statt. Dabei ergaben sich bei den Versuchen ohne mechanische Vibrationen und ohne Verdrehen der

Scherzelle folgende Werte für die größte Verfestigungshauptspannung  $\sigma_1$ , die einaxiale Druckfestigkeit  $\sigma_c$  und die Fließfunktion  $ff_c$ :

$$\sigma_1 = 11,3 \text{ kPa} \quad \sigma_c = 5,71 \text{ kPa} \quad ff_c = 2,0$$

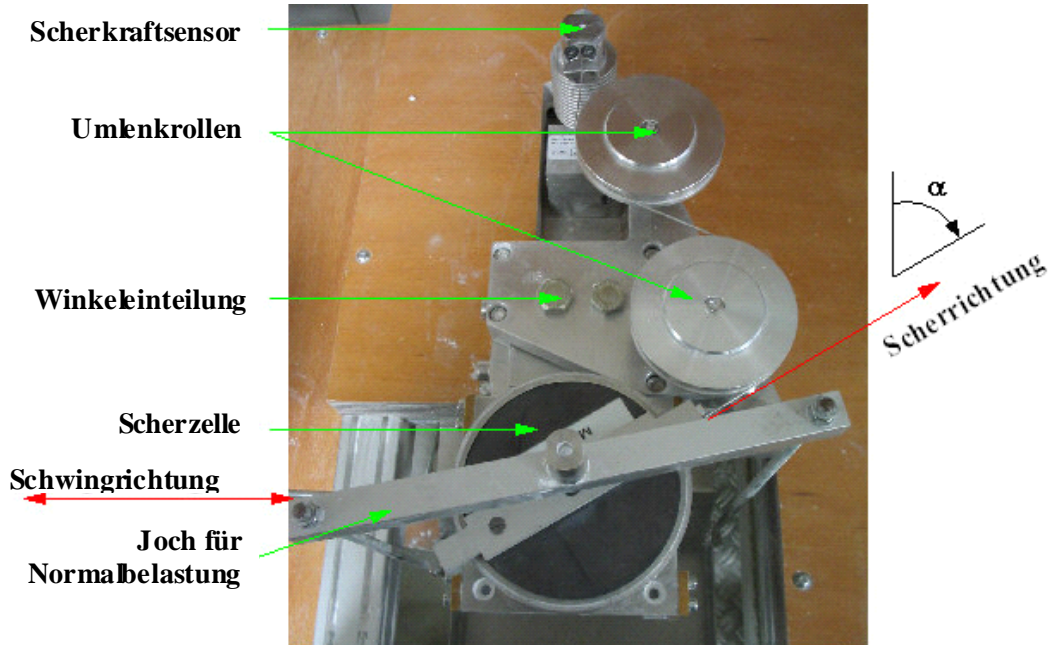


Abbildung 7-61: Erweiterung der Vibrationscherapparatur für die Variation des Winkels zwischen Scher- und Schwingrichtung (hier Verdrehung der Scherzelle um  $\alpha = 60^\circ$ , d.h. der Winkel zwischen Scher- und Schwingrichtung beträgt  $30^\circ$ )

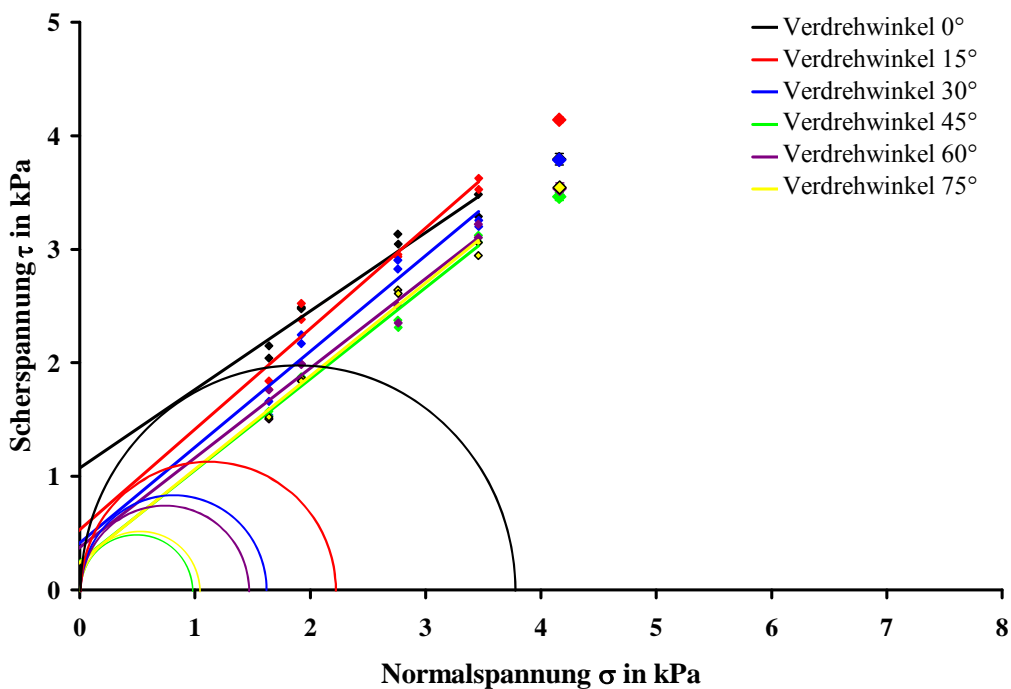


Abbildung 7-62: Lage der Fließortgeraden (FO 2) für verschiedene Verdrehwinkel bei  $f = 100 \text{ Hz}$

Abbildung 7-62 zeigt die Lage der gemessenen Fließorte (FO 2) bei den verschiedenen Verdrehwinkeln bei einer Erregerfrequenz von  $f = 100$  Hz und einer maximalen Schwinggeschwindigkeit von  $v_{\max} = 20$  mm/s. Auf die Darstellung der Mohr-Kreise für stationäres Fließen soll hier einer besseren Übersichtlichkeit wegen verzichtet werden. Weitere Fließorte befinden sich im Anhang. Mit zunehmendem Drehwinkel werden die Fließortgeraden zu kleineren Scherspannungen verschoben. D.h. je weiter die Scherrichtung in die Schwingrichtung hinein gedreht wird, desto mehr wirken die Schwingungen als zusätzliche Scherunterstützung und die gemessenen Scherspannungen verringern sich.

Tabelle 7-19: Einaxiale Druckfestigkeit und Fließfunktion von Kalksteinpulver abhängig von der Erregerfrequenz  $f$  bei konstanter maximaler Schwinggeschwindigkeit  $v_{\max} = 20$  mm/s für verschiedene Verdrehwinkel der Scherzelle (Fließort 2)

<b>f in Hz</b>	<b>50</b>	<b>75</b>	<b>100</b>	<b>125</b>	<b>150</b>	<b>175</b>	<b>200</b>
<b>Verdrehwinkel der Scherzelle 0°</b>							
$\sigma_1$ in kPa	8,7	9,1	9,7	10,0	10,6	9,9	11,0
$\sigma_c$ in kPa	4,35	4,51	4,6	1,96	5,5	6,08	3,5
$ff_c$	2,0	2,0	2,1	5,1	1,9	1,6	3,1
<b>Verdrehwinkel der Scherzelle 15°</b>							
$\sigma_1$ in kPa	10,5	9,7	11,2	10,2	7,3	7,3	12,3
$\sigma_c$ in kPa	2,58	3,21	1,48	4,23	2,22	1,89	2,23
$ff_c$	4,1	3,0	7,6	2,4	3,3	3,8	5,5
<b>Verdrehwinkel der Scherzelle 30°</b>							
$\sigma_1$ in kPa	10,5	12,3	10,4	11,8	12,0	10,9	11,3
$\sigma_c$ in kPa	4,34	1,01	1,78	1,98	0,27	2,56	1,53
$ff_c$	2,4	12,2	5,9	6,0	44,6	4,3	7,4
<b>Verdrehwinkel der Scherzelle 45°</b>							
$\sigma_1$ in kPa	11,1	12,1	11,2	10,0	10,5	8,7	7,8
$\sigma_c$ in kPa	2,99	0,25	0,99	0,25	2,32	3,22	2,60
$ff_c$	3,7	48,2	11,3	40,0	4,5	2,7	3,0
<b>Verdrehwinkel der Scherzelle 60°</b>							
$\sigma_1$ in kPa	10,5	12,4	9,8	11,0	10,7	9,9	9,2
$\sigma_c$ in kPa	4,92	0,42	1,54	0,51	1,80	3,09	3,45
$ff_c$	2,1	29,1	6,4	21,5	5,9	3,2	2,7
<b>Verdrehwinkel der Scherzelle 75°</b>							
$\sigma_1$ in kPa	12,0	10,3	10,0	9,7	11,4	9,1	9,8
$\sigma_c$ in kPa	2,50	1,14	1,02	0,46	1,32	2,77	1,90
$ff_c$	4,8	9,0	9,8	21,3	8,6	3,3	5,2

In Tabelle 7-19 sind die gemessenen Werte der einaxialen Druckfestigkeit und der Fließfunktion für verschiedene Verdrehwinkel der Scherzelle sowie verschiedenen Erregerfrequenzen bei einer maximalen Schwinggeschwindigkeit von  $v_{\max} = 20 \text{ mm/s}$  bei Fließort 2 zusammen gefasst.

Abbildung 7-63 zeigt die ermittelten Eigenfrequenzen bei Fließort 2 des Kalksteinpulvers für verschiedene Winkel zwischen Scher- und Schwingrichtung abhängig vom Normalspannungsverhältnis. Die Eigenfrequenz steigt, wie bereits mehrfach beobachtet, mit der Normalbelastung des Pulvers, jedoch ist ein Einfluss der Scherrichtungsänderung nicht zu sehen.

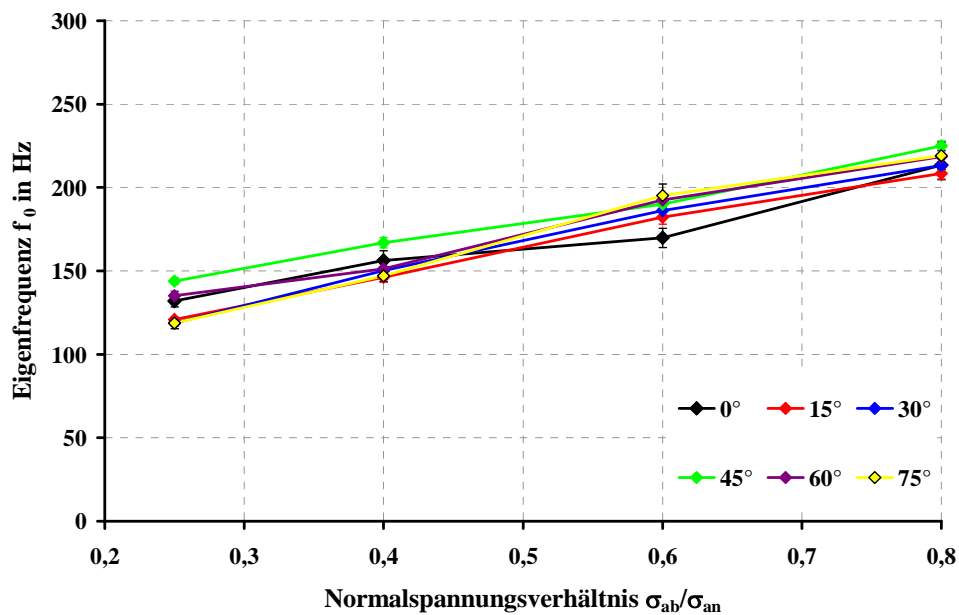


Abbildung 7-63: Ermittelte Eigenfrequenzen  $f_0$  von Kalkstein bei verändertem Winkel zwischen Scher- und Schwingrichtung in Abhängigkeit des Normalspannungsverhältnisses  $\sigma_{ab}/\sigma_{an}$ , Fließort 2

In Abbildung 7-64 sind die ermittelten viskosen Dämpfungsverhältnisse von Kalkstein bei verändertem Winkel zwischen Scher- und Schwingrichtung in Abhängigkeit von der Normalbelastung dargestellt. Es ist eine leichte Tendenz zu höheren Werten von  $\zeta_b$  mit verändertem Winkel zu sehen, jedoch ist keine klare Korrelation zwischen Winkelveränderung und viskosem Dämpfungsverhältnis abzulesen. Tabelle 7-20 fasst die ermittelten Dämpfungsparameter des Kalksteinpulvers bei Änderung des Winkels zwischen Scher- und Schwingrichtung zusammen.

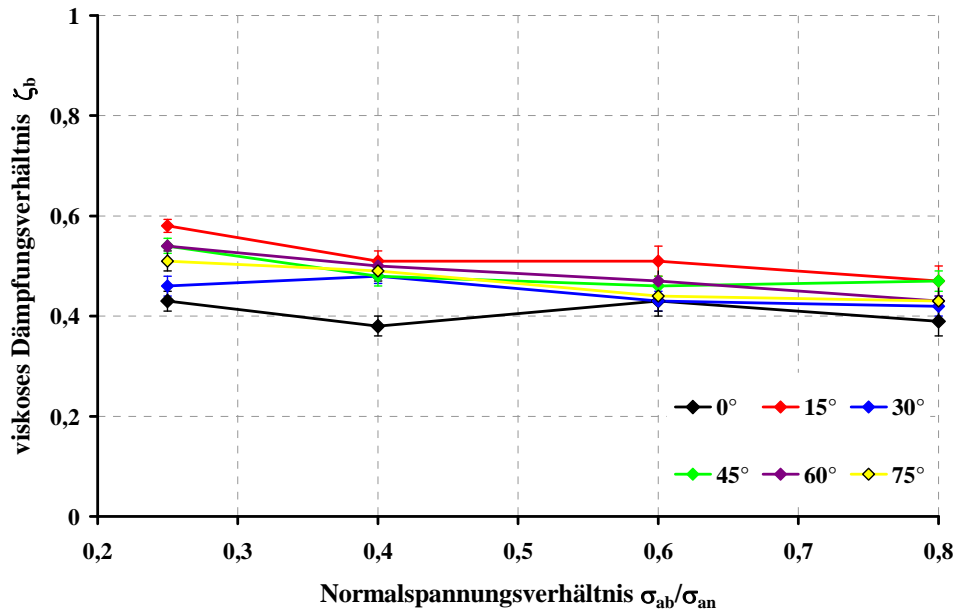


Abbildung 7-64: Ermittelte viskose Dämpfungsverhältnisse  $\zeta_b$  von Kalkstein bei verändertem Winkel zwischen Scher- und Schwingrichtung in Abhängigkeit des Normalspannungsverhältnisses  $\sigma_{ab}/\sigma_{an}$ , Fließort 2

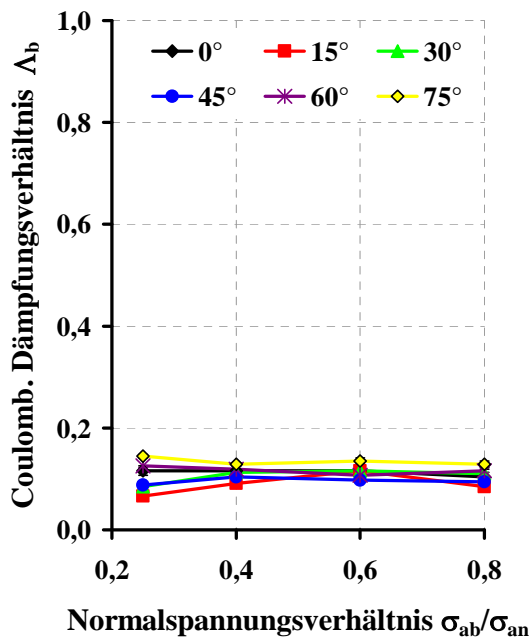


Abbildung 7-65: Ermittelte Coulomb'sche Dämpfungsverhältnisse  $\Lambda_b$  von Kalkstein bei verändertem Winkel zwischen Scher- und Schwingrichtung bei  $f = 50$  Hz, Fließort 2

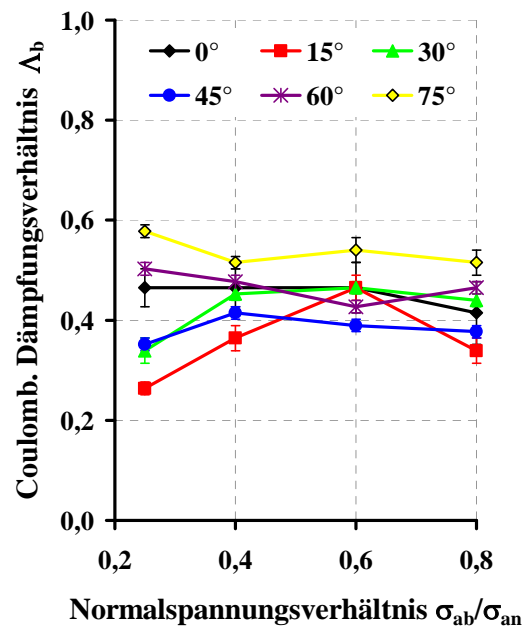


Abbildung 7-66: Ermittelte Coulomb'sche Dämpfungsverhältnisse  $\Lambda_b$  von Kalkstein bei verändertem Winkel zwischen Scher- und Schwingrichtung bei  $f = 200$  Hz, Fließort 2



Abbildung 7-65 und Abbildung 7-66 zeigen die ermittelten Coulomb'schen Dämpfungsverhältnisse bei verändertem Winkel zwischen Scher- und Schwingrichtung bei  $f = 50$  Hz bzw.  $f = 200$  Hz. Zu sehen ist, dass  $\Lambda_b$  bei  $f = 200$  Hz auf einem höheren Niveau liegt als bei einer Erregung mit  $f = 50$  Hz. Jedoch ist eine Abhängigkeit von  $\Lambda_b$  vom Verdrehwinkel der Scherzelle nicht abzulesen.

Die Auswertung des Coulomb'schen Dämpfungsverhältnisses (siehe auch Abbildung 7-67 und Abbildung 7-68) zeigt ebenso wie bei der Auswertung des viskosen Dämpfungsverhältnisses keine deutliche Korrelation zwischen der Änderung der Scherrichtung und der Dämpfung durch Partikelreibung. Bei einem Normalspannungsverhältnis von  $\sigma_{ab}/\sigma_{an} = 0,25$  ist eine größere Streuung von  $\Lambda_b$  zu sehen. Dies und die in Abbildung 7-64 zu sehende leichte Tendenz zu höheren Werten von  $\zeta_b$  mit veränderter Scherrichtung lässt ebenfalls eine höhere Dilatanz in der Scherzone vermuten. Allerdings dürfte diese Volumenänderung weniger deutlich ausfallen, als bei den Anisotropietests (Abschnitt 7.7.1).

Durch die Drehung der Scherzelle bzw. Änderung des Winkels zwischen Scher- und Schwingrichtung wirkt jeweils ein mit dem Verdrehwinkel wachsender Anteil der Schwingenergie zusätzlich in Scherrichtung. Dieser Energieeintrag unterstützt offenbar das Lösen bestehender Partikelkontakte und erschwert die Bildung von neuen Kontakten, was zu einer höheren Dilatanz in der Scherzone und den beschriebenen Beobachtungen führt.

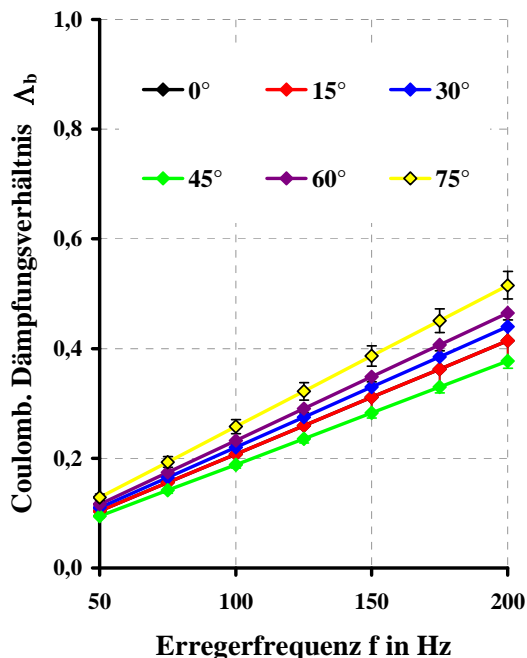


Abbildung 7-67: Ermittelte Coulomb'sche Dämpfungsverhältnisse  $\Lambda_b$  von Kalkstein bei verändertem Winkel zwischen Scher- und Schwingrichtung bei  $\sigma_{ab}/\sigma_{an} = 0,8$ , Fließort 2

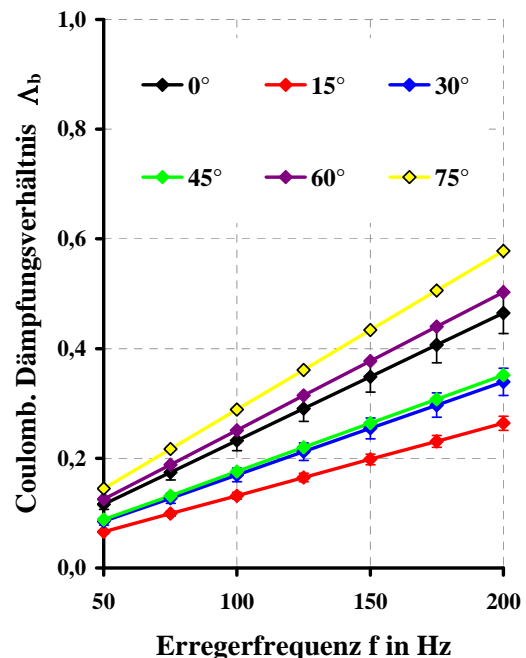


Abbildung 7-68: Ermittelte Coulomb'sche Dämpfungsverhältnisse  $\Lambda_b$  von Kalkstein bei verändertem Winkel zwischen Scher- und Schwingrichtung bei  $\sigma_{ab}/\sigma_{an} = 0,25$ , FO 2

Tabelle 7-20: Ermittelte Dämpfungsparameter des Kalksteinpulvers bei Änderung des Winkels zwischen Scher- und Schwingrichtung bei Fließort 2

Winkel	$\sigma_{ab}/\sigma_{an}$	Eigenfrequenz $f_0$ in Hz	visk. Dämpfungs- verhältnis $\zeta_b$	Coulomb. Dämpfungs- verhältnis $\Lambda_b(f)$	
				f = 50Hz	f = 200 Hz
0°	0,8	213,4 ± 8,7	0,39 ± 0,03	0,10 ± 0,02	0,42 ± 0,06
	0,6	169,8 ± 5,8	0,43 ± 0,03	0,12 ± 0,01	0,47 ± 0,05
	0,4	156,2 ± 6,0	0,38 ± 0,02	0,12 ± 0,01	0,47 ± 0,04
	0,25	131,9 ± 3,4	0,43 ± 0,02	0,12 ± 0,01	0,47 ± 0,04
15°	0,8	208,5 ± 3,4	0,47 ± 0,03	0,09 ± 0,01	0,34 ± 0,03
	0,6	182,3 ± 4,3	0,51 ± 0,03	0,12 ± 0,01	0,47 ± 0,03
	0,4	146,2 ± 2,7	0,51 ± 0,02	0,09 ± 0,01	0,36 ± 0,03
	0,25	120,8 ± 3,8	0,58 ± 0,01	0,07 ± 0,01	0,26 ± 0,01
30°	0,8	213,2 ± 3,5	0,42 ± 0,02	0,11 ± 0,01	0,44 ± 0,01
	0,6	186,3 ± 3,5	0,43 ± 0,02	0,12 ± 0,01	0,47 ± 0,01
	0,4	150,2 ± 2,7	0,48 ± 0,02	0,11 ± 0,01	0,45 ± 0,01
	0,25	118,8 ± 2,7	0,46 ± 0,02	0,09 ± 0,01	0,34 ± 0,02
45°	0,8	225,1 ± 2,8	0,47 ± 0,02	0,09 ± 0,01	0,38 ± 0,01
	0,6	190,0 ± 3,0	0,46 ± 0,02	0,10 ± 0,01	0,39 ± 0,01
	0,4	167,0 ± 3,2	0,48 ± 0,02	0,10 ± 0,01	0,42 ± 0,01
	0,25	144,0 ± 2,0	0,54 ± 0,02	0,09 ± 0,01	0,35 ± 0,01
60°	0,8	218,6 ± 3,6	0,43 ± 0,02	0,12 ± 0,01	0,47 ± 0,01
	0,6	192,5 ± 3,2	0,47 ± 0,02	0,10 ± 0,01	0,43 ± 0,01
	0,4	151,3 ± 3,1	0,50 ± 0,02	0,12 ± 0,01	0,48 ± 0,01
	0,25	135,1 ± 2,8	0,54 ± 0,01	0,13 ± 0,01	0,50 ± 0,01
75°	0,8	219,1 ± 8,3	0,43 ± 0,04	0,13 ± 0,01	0,52 ± 0,02
	0,6	195,3 ± 6,8	0,44 ± 0,03	0,14 ± 0,01	0,54 ± 0,02
	0,4	147,0 ± 3,5	0,49 ± 0,02	0,13 ± 0,01	0,52 ± 0,01
	0,25	118,8 ± 3,4	0,51 ± 0,02	0,15 ± 0,01	0,58 ± 0,01

## 8 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit stand die Untersuchung der Dämpfungseigenschaften kohäsiver Pulver beim langsamen, reibungsbehafteten Fließen unter verschiedenen Bedingungen im Vordergrund. Es wurden unterschiedliche Feuchtebeladungen und Partikeleigenschaften sowie der Einfluss verschiedener Scherrichtungen auf das Dämpfungsverhalten untersucht. Dabei dienten die Dämpfungsparameter Eigenfrequenz  $f_0$ , viskoses Dämpfungsmaß  $\zeta_b$  und Coulomb'sches Dämpfungsmaß  $\Lambda_b$  der Beschreibung des Dämpfungsverhaltens kohäsiver Schüttgüter. Als Versuchsmaterialien wurden jeweils ein handelsübliches Kalksteinpulver (OMYA;  $d_{50} = 1,3\mu\text{m}$ ) und Titandioxidpulver (KRONOS 1001;  $d_{50} = 0,6\mu\text{m}$ ) verwendet.

Die experimentellen Untersuchungen wurden an einer auf Blattfedern gelagerten schwingenden Translations-Scherapparatur durchgeführt, bei der während des Schervorganges horizontale Schwingungen unterschiedlicher Intensität in die Schüttgutprobe eingeleitet werden können. Für die Versuche wurden die Proben in definierte Ausgangszustände versetzt (angeschert), um das im Silo fließende Schüttgut zu simulieren. Anschließend wurden die Probe abgeschert und die Scherkraftverläufe aufgezeichnet. Diese Diagramme waren die Grundlage der Versuchsauswertung. Bei den Vibrationsversuchen wurden das Anscheren und das Abscheren jeweils unter Schwingungseinfluss durchgeführt. Mit dieser Versuchsmethode wird ein kontinuierlich schwingungsunterstützter Siloaustrag simuliert.

Generell ist festzuhalten, dass die eingeleiteten Schwingungen zu einem verbesserten Fließverhalten führen. Im untersuchten Bereich der Erregerfrequenz ( $50 \text{ Hz} \leq f \leq 200 \text{ Hz}$ ) nimmt die Fließverbesserung mit zunehmender Erregerfrequenz zu, da bei konstanter maximaler Schwinggeschwindigkeit die Intensität der eingeleiteten Schwingungen mit der Erregerfrequenz wächst.

Bei der Schwingungsübertragung im Schüttgut treten Dämpfungseffekte auf. Um diese zu quantifizieren, wurde am Scherboden und Scherring jeweils ein Beschleunigungssensor angebracht. Aus der Abschwächung oder Verstärkung zwischen dem Erreger- und den resultierenden Signal  $a_1$  und  $a_2$  können die Dämpfungsparameter Eigenfrequenz  $f_0$ , viskoses Dämpfungsverhältnis  $\zeta_b$  und Coulomb'sches Dämpfungsverhältnis  $\Lambda_b$  durch Messwertanpassung an die Vergrößerungsfunktion  $V$  erhalten werden. Die Vergrößerungsfunktion  $V$  ist eine von den Hartog angegebene analytische Lösung für kombinierte Coulomb'sche und viskose Dämpfung [37] und entspricht dem frequenzabhängigen Verhältnis der maximalen Schwingungsamplituden am Scherring  $x_{\text{max},2}$  und Scherboden  $x_{\text{max},1}$ .

$$V = \frac{x_{\text{max},2}}{x_{\text{max},1}} = -L \cdot \Lambda_b + \sqrt{V_{\text{vis}}^2 - M^2 \cdot \Lambda_b^2} \quad (4-153)$$

Der entscheidende Parameter zur Beschreibung der Reduzierung der Scherfestigkeit ist die maximale Schwinggeschwindigkeit [37], d.h. es kann frequenzunabhängig die Abnahme der Scherfestigkeit mit zunehmender Schwinggeschwindigkeit aufgetragen werden. Das bedeutet, dass die bezogenen Scherfestigkeiten  $\tau_{\omega}/\tau$  (Schubspannung unter Vibrationen/Schubspannung ohne Vibrationen) unabhängig von der Erregerfrequenz auf einer Kurve liegen. Aus diesem Grund wurde für die experimentellen Untersuchungen dieser Arbeit die Schwinggeschwindigkeit (Gl. (4-7)) als konstant vorgegeben (hier  $v_{\max} = 20$  mm/s), um den Einfluss weiterer Parameter (Feuchtebeladungen, Partikeleigenschaften, verschiedene Scherrichtungen) untersuchen zu können. Diese Vorgehensweise hatte zur Folge, dass der von den Hartog definierte Dämpfungsparameter  $\Lambda_b$  nach Gl. (4-152) bei veränderter Erregerfrequenz durch die unveränderte maximale Schwinggeschwindigkeit keine Konstante, sondern eine Funktion der Erregerkreisfrequenz  $\omega$  ist. Bei der Parameteranpassung an die Messwerte wurde also eine Erweiterung von Gl. (4-153) notwendig. Dafür wurde ein modifiziertes Coulomb'sches Dämpfungsmaß  $\Lambda^*$  eingeführt, das von der maximalen Schwinggeschwindigkeit unabhängig ist. Die Vergrößerungsfunktion (Gl. (4-153)) ergibt sich folglich zu

$$V = -L \cdot \Lambda^* \cdot \omega + \sqrt{V_{\text{vis}}^2 - M^2 \cdot (\Lambda^* \cdot \omega)^2} \quad (4-161)$$

Damit können nun konstante Dämpfungswerte (Eigenfrequenz  $f_0$ , viskoses Dämpfungsmaß  $\zeta_b$  und modifiziertes Coulomb'sches Dämpfungsmaß  $\Lambda^*$ ) bestimmt werden. Durch Rückrechnung kann dann das frequenzabhängige Coulomb'sche Dämpfungsmaß  $\Lambda_b$  erhalten werden, das mit steigender Erregerfrequenz zunimmt.

Die Ergebnisse der Untersuchungen zum Dämpfungsverhalten kohäsiver Pulver wurden vorrangig mit dem beschriebenen Kalksteinpulver durchgeführt. Als erstes wurde das Kalksteinpulver in seinem Anlieferungszustand, d.h. ohne weitere Manipulation bspw. durch zusätzliche Feuchtigkeit, untersucht. Die Ergebnisse zeigen eine mit der jeweiligen Verfestigung ansteigende Eigenfrequenz und ein mit zunehmender Verfestigung abnehmendes viskoses Dämpfungsverhältnis. Das Coulomb'sche Dämpfungsverhältnis nimmt mit zunehmender Verfestigung zu. Der Anteil der Coulomb'schen Dämpfung an der Gesamtdämpfung steigt mit zunehmender Verfestigungsspannung und zunehmender Normalspannung.

Folgende Parameter wurden untersucht:

#### *Einfluss der Pulverfeuchte:*

Die Feuchtebeladung im Anlieferungszustand betrug  $X_1 = 0,004$ . Um den Einfluss erhöhter Materialfeuchte zu quantifizieren, wurde  $X_1$  auf 0,02; 0,04; 0,08 und 0,16 erhöht.

Mit zunehmender Pulverfeuchte sank die Eigenfrequenz und stieg das viskose Dämpfungsmaß, die Coulomb'sche Dämpfung wurde ebenfalls reduziert. Die an den Partikeloberflächen adsorbierte Feuchtigkeit hat somit einen Einfluss auf das Dämpfungsverhalten kohäsiver

Pulver. Das befeuchtete Kalksteinpulver verhält sich viskoser als das unbefeuchtete Kalksteinpulver bei gleichzeitig reduzierter Reibung zwischen den Einzelpartikeln.

*Einfluss der Pulvereigenschaften:*

Um den Einfluss unterschiedlicher Partikeleigenschaften zu bestimmen, wurden die Ergebnisse des untersuchten Kalksteinpulvers den Ergebnissen der Dämpfungsuntersuchungen des beschriebenen Titandioxidpulvers gegenüber gestellt. Das Titandioxidpulver unterscheidet sich vom Kalksteinpulver durch einen kleineren mittleren Durchmesser und durch eine größere Materialhärte. Im Gegensatz zu Kalkstein, das aus einzelnen Partikeln besteht, besteht das Titandioxidpulver aus fest verwachsenen Aggregaten, die aus kugeligen Einzelpartikeln zusammengesetzt sind. Titandioxid hat eine größere Hamaker-Konstante und verfügt damit über ein größeres Haftvermögen als Kalkstein unter vergleichbaren Belastungsbedingungen.

Für das untersuchte Titandioxidpulver wurden eine deutlich kleinere Eigenfrequenz sowie ein kleineres viskoses Dämpfungsverhältnis ermittelt. Die Coulomb'sche Dämpfung ist größer als beim untersuchten Kalksteinpulver. Hier zeigt sich der Einfluss vor allem der größeren Partikelhaftung des Titandioxids. Anscheinend ist bei Pulvern aus Partikeln mit größerem Haftvermögen der Coulomb'sche Anteil an der Gesamtdämpfung größer als bei Pulvern, die aus weniger adhäsiven Partikeln bestehen.

*Einfluss der Scherrichtung – Anisotropie:*

Um den Einfluss der Drehung der Scherzelle um  $180^\circ$  zwischen An- und Abscheren zu quantifizieren, wurden die Ergebnisse zwei verschiedener Messprozeduren verglichen, die hier als „Standardscherversuch“ und „Anisotropietest“ bezeichnet werden. Es ist eine deutliche Verringerung der Festigkeit des Kalksteinpulvers bei den Anisotropietests zu verzeichnen. Das ist ein eindeutiges Zeichen dafür, dass sich das Pulver sehr viel stärker in Scherrichtung verfestigt als in die entgegengesetzte Richtung, d.h. das Pulver in der Scherzelle wird durch das Vorverdichten und das Anscheren nicht homogen, sondern richtungsabhängig, verfestigt.

Die ermittelten Eigenfrequenzen bei den Anisotropietests sind tendenziell etwas kleiner als die bei den Standardscherversuchen ermittelten. Bei einer geringen Normalbelastung führt die Umkehrung der Scherrichtung zu einem höheren viskosen Dämpfungsverhältnis. Bei größeren Normalbelastungen hat die Umkehrung der Scherrichtung keinen signifikanten Einfluss auf die viskose Dämpfung. Bezüglich des Coulomb'schen Dämpfungsverhältnisses zeigt sich der deutlichste Einfluss bei kleinen Normalbelastungen: ein deutlich reduziertes Coulomb'sches Dämpfungsverhältnis wurde ermittelt. Bei höheren Normalbelastungen sind die ermittelten Werte von  $\Lambda_b$  mit jenen aus den Standardscherversuchen vergleichbar.

Das beobachtete Dämpfungsverhalten lässt sich mit einer Verminderung der Verfestigung und damit verbundener Erhöhung der Dilatanz (Auflockerung des Pulvers bzw. Reduzierung der

lokalen Schüttgutedichte) in der Scherzone im Vergleich zu den Standardscherversuchen erklären. Die Anzahl der wirkenden Partikelkontakte wird vergleichsweise reduziert, was zu einem veränderten Dämpfungsverhalten, besonders im Bereich kleiner Spannungen, führt. Bei höheren Normalbelastungen wird offenbar das Ausbilden einer größeren Dilatanz auf das Schüttgut unterdrückt und das Dämpfungsverhalten ändert sich nicht so deutlich.

*Unterschiedlicher Winkel zwischen Scher- und Schwingrichtung:*

Bei den bisher beschriebenen Versuchen standen Schwingerregung und Scherrichtung orthogonal aufeinander. Um den Einfluss eines veränderlichen Winkels zwischen Scher- und Schwingrichtung zu quantifizieren, wurde die Vibrationsscherapparatur so erweitert, dass die Scherrichtung in Intervallen von je  $15^\circ$  relativ zur Schwingrichtung verändert werden kann. Die gesamte Scherzelle wurde vor dem eigentlichen Scherversuch gedreht, d.h. Anscher- und Abscherrichtung sind in diesem Fall wieder gleich.

Ein Einfluss des veränderten Winkels auf die Eigenfrequenz wurde nicht beobachtet. Es ist eine leichte Tendenz zu höheren Werten des viskosen Dämpfungsmaßes mit verändertem Winkel zu sehen, jedoch ist keine klare Korrelation zwischen Winkelveränderung und viskosen Dämpfungsverhältnis abzulesen. Die Auswertung des Coulomb'schen Dämpfungsverhältnisses zeigt ebenso keine deutliche Korrelation zwischen der Änderung der Scherrichtung und der Dämpfung durch Partikelreibung. Dies und die leichte Tendenz zu höheren Werten von  $\zeta_b$  mit veränderter Scherrichtung lässt ebenfalls eine Verminderung der Verfestigung und damit eine höhere Dilatanz in der Scherzone vermuten. Allerdings dürfte diese Volumenänderung weniger deutlich ausfallen, als bei den Anisotropietests.

Die ermittelten Ergebnisse tragen zum besseren Verständnis des Dämpfungsverhaltens ultrafeiner, kohäsiver Pulver beim langsamen, reibungsbehafteten Fließen bei. Es wurde eine Möglichkeit vorgestellt, Kenngrößen des Dämpfungsverhaltens (Eigenfrequenz  $f_0$ , viskoses Dämpfungsverhältnis  $\zeta_b$  und Coulomb'sches Dämpfungsverhältnis  $\Lambda_b$ ) zu ermitteln, und damit das Dämpfungsverhalten zu beschreiben.

Ausgehend von den vorliegenden Ergebnissen sollte in künftigen Untersuchungen zum Dämpfungsverhalten ultrafeiner, kohäsiver Pulver beim langsamen, reibungsbehafteten Fließen nicht die maximale Schwinggeschwindigkeit  $v_{\max}$ , sondern die Erregerschwingamplitude  $x_{\max,1}$  bei Veränderung der Erregerfrequenz konstant gehalten werden. Das führt dazu, dass die Dämpfungsparameter  $f_0$ ,  $\zeta_b$  und  $\Lambda_b$  direkt über die Auswertung der Vergrößerungsfunktion  $V$  mit Hilfe von Gl. (4-153) ermittelt werden können. Weiterhin sollten künftige Untersuchungen eine Variation des Verdichtungs-niveaus, d.h. die Fließorte 1 bis 4, beinhalten.

## Literaturverzeichnis

- [1] Adams, M.J.; Briscoe, B.J. (Eds.): Tribology in Particulate Technology, Adam Hilger, 1987, Bristol
- [2] Betten, J.: Zur Ermittlung der mechanischen Hysterese rheologischer Körper. Zeitschrift für Naturforschung, 27a(1972)4, 718-719
- [3] Blight G. E.: Silo Wall Friction and Wall Roughness, South Africa, powder handling & processing, Volume 2, Nr. 3, 1990
- [4] Borho, K; Polke, R; Wintermantel, K; Schubert, H; Sommer K.: Produkteigenschaften und Verfahrenstechnik. Chemie-Ingenieur-Technik 63, 1991, 792-808
- [5] Butt, H.-J.; Jaschke, M.; Ducker, W.: Measuring surface forces in aqueous electrolyte solution with the atomic force microscope. Bioelectrochem. and Bioenergetics 38, 1995, 191-201
- [6] Carpick, R.W.; Agrait, N.; Ogletree, D.F.; Salmeron, M.: Variation of the Interfacial Shear Strength and Adhesion of a Nanometer-sized Contact. Langmuir 12, 1996, 3334-3340
- [7] Chigazawa, M.; Yamaguchi, T.; Kanazava, T.: Proc. Int. Symp. Powder Technol., Kyoto, 1981, 202-207.
- [8] Derjaguin, B.V.; Zimon, A.D.: Adhesion of Powder Particles to Plane surfaces. Kolloidn. Zhurnal 23, 1961, 454-460
- [9] Derjaguin B.V.; Aleinikova, I.N.; Toporov, Y.P.: On the role of electrostatic forces in the adhesion of polymer particles to solid surfaces. Powder Technology. 2, 1968, 154-158
- [10] D. Norm: Tenside; Pulver und Granulate; Bestimmung des Schüttwinkels. 1983
- [11] Ecke, S.; Butt, H.-J.: Friction between individual micro-contacts. J. Colloid Interface Sci., 2001, 244: 432-435
- [12] Ennis, B.J.; Li, J.; Tardos, G.I.; Pfeffer, R.: The influence of viscosity on the strength of an axially strained pendular liquid bridge. Chem. Eng. Sci. 45, 1990, 3071-3088
- [13] Feise, H.J.; Daiß, A.: Building a numerical model for bulk materials from standard shear test data. International Congress for Particle Technology PARTEC2001, Nürnberg 2001
- [14] Fitzpatrick, J.J.; Teunou, E.: Effect of relative humidity and temperature on food powder flowability. Journal of Food Engineering 42, 1999, 109-116
- [15] Flemmer, R.C.; Yule, I.J.: Coherence of a packed bed under lateral oscillation. Powder Technology 171, 2007, 154-165
- [16] Göldner, H.; Holzweißig, F.: Leitfaden der technischen Mechanik. Fachbuchverlag Leipzig, 11. Auflage, 1989
- [17] Göldner, H.: Lehrbuch höhere Festigkeitslehre, Bd. 1 und 2, Fachbuchverlag Leipzig, 1992

- [18] Grossmann, L.: Modellierung der Pressagglomeration feinkörniger, kohäsiver und kompressibler Schüttgüter. Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Diss., 2006
- [19] Hein, K.; Hucke, T.; Stinz, M.; Ripperger, S.: Analysis of Adhesion Forces Between Particles and Wall Based on the Vibration Method. Part. Part. Syst. Charact. 19, 2002, 269-276
- [20] Herrmann, H. J.; Luding, S.: Modeling granular media on the computer. Continuum Mechanics and Thermodynamics 10, 1998, 189-231
- [21] Hucke, T.; Hein, K.; Stinz, M.; Ripperger, S.: Die Vibrationsmethode zur Messung der Haftkräfte von Partikeln an Wänden. Chem.-Ing.-Techn. 74, 2002, 809-812
- [22] Israelachvili, J. N.: Intermolecular and surface forces, Academic Press London, 1992
- [23] Ittershagen, T.; Schwedes, J.; Kwade, A.: Investigation of the anisotropic behaviour of bulk solids. Proceedings – RELPOWFLOW IV, Tromso, NOR, 56-61
- [24] Iveson, S.M.; Litster, J.D.; Ennis, B.J.: Fundamental Studies of granule consolidation, Part 1: Effects of binder content and binder viscosity. Powder Technology 88, 1996, 15-20
- [25] Iveson, S.M.; Litster, J.D.: Liquid-bound granule impact deformation and coefficient of restitution. Powder Technology 99, 1998, 234-242
- [26] Iveson, S.M.; Litster, J.D.; Hapgood, K.; Ennis, B.J.: Nucleation, growth and breakage phenomena in agitated wet granulation processes: a review. Powder Technology 117, 2001, 3-39
- [27] Jenike, A. W.: Storage and flow of solids. Engineering Exp. Station, Bull. No. 123, University of Utah, 1964
- [28] Jones, R.; Pollock, H.; Geldart, D.; Verlinden-Luts, A.: Frictional forces between cohesive powder particles studied by AFM. Ultramicroscopy 100 (2004), 59-78
- [29] Jones, R.: From Single Particle AFM Studies of Adhesion and Friction to Bulk Flow: Forging the Links. Granular Matter 4, 2003, 191-204
- [30] Jones, R.; Pollock, H.; Cleaver, J.; Hodges, C.: Adhesion Forces between Glass and Silicon Surfaces in Air Studied by AFM: Effects of Relative Humidity, Particle Size, Roughness, and Surface Treatment. Langmuir 18 (2002), 8045-8055
- [31] Den Hartog, J.P.: Forced Vibrations with combined Viscous and Coulomb Damping. Phil. Mag. S. 7, 9(1930)59, S. 801-817
- [32] Den Hartog, J.P.: Forced Vibrations with combined Coulomb and Viscous Friction. Trans. ASME, APM 53(1930)9, S. 107-115
- [33] Kache, G., Kollmann, Th., J. Tomas: Wandreibungsverhalten hochdispenser, kohäsiver Pulver unter Schwingungseinwirkung. Schüttgut 11, 2005, 156-163
- [34] Kalman, H.: Particle Technology in the Chemical Industry, Vortrag, Verfahrenstechnisches Kolloquium, Magdeburg, 2002
- [35] Kollmann, Th.; Tomas, J.: Vibrational Flow of Cohesive Powders. in Levy, A.; Kalman, H.: Handbook of Conveying and Handling of Particulate Solids. Elsevier, Amsterdam, 2001, 45-56
- [36] Kollmann, Th.; Tomas, J.: Effect of applied vibration on silo hopper design. Particulate Sci. Technol. 20, 2002, 15-31
- [37] Kollmann, Th.: Untersuchungen zum Fließverhalten feinstkörniger Pulver unter dem Einfluss mechanischer Schwingungen. Dissertation, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, 2002



- [38] Krupp, H., Sperling, G.: Haftung kleiner Teilchen an Feststoffen – Teil II: Theorie, *Z. Angew. Phys.* 19, 1965, 259-265
- [39] Krupp H.: Particle adhesion theory and experiment. *Adv. Colloid Interface Sci.* 1, 1967, 111-239
- [40] Levy, E.K.; Celeste, B.: Combined effects of mechanical and acoustic vibrations on fluidization of cohesive powders. *Powder Technology* 163, 2006, 41-50
- [41] Lian, G.; Thornton, C.; Adams, M.J.: A Theoretical Study of the Liquid Bridge Forces between Two Rigid Spherical Bodies. *J. Colloid. Interf. Sci.* 161, 1993: 138-147
- [42] Masuda H.; Gotoh, K.: *Powder Technology Handbook*. Marcel Dekker, New York, 1997
- [43] Matchett, A.J.; Yanagida, T.; Okudaira, Y.; Kobayashi, S.: Vibrating powder beds: a comparison of experimental and Distinct Element Method simulated data. *Powder Technology* 107, 2000, 13-30
- [44] Matsusaka S.; Mizumoto, K.; Koumura, M.; Masuda, H.: Evaluation of adhesive strength distribution based on reentrainment phenomena -discrimination between particle-particle and particle-wall interaction. *J. Soc. Pow. Technol. Jp.* 31, 1994, 719-723
- [45] McGlinchey, D.; Matchett, A.J.; Coulthard, J.M.: The vibratory unconfined compression tester (VUCT) for cohesive solids. *Trans IChemE, Vol 75, Part A*, 1997, 271-277
- [46] Mindlin, R.D.; Deresiewicz, H.: Elastic spheres in contact under varying oblique forces. *J. Appl. Mech., Trans. ASME* 20, 1953, 327-344
- [47] Molerus, O., Theory of yield of cohesive powders, *Powder Technology* 12, 1975, 259-275
- [48] Molerus, O.: *Schüttgutmechanik – Grundlagen und Anwendungen in der Verfahrenstechnik*. Springer Verlag, Berlin – Heidelberg- New York – Tokyo, 1985
- [49] Morgeneyer, M.; Schwedes, J.; Cannavacciuolo, A.; Ittershagen, T.; Kwade, A.: Pipe stability in silos. *Proceedings – RELPOWFLOW IV*, Tromso, NOR, 50-55
- [50] Löffler, F.: *Staubabscheiden*, G. Thieme Verlag Stuttgart, 1988
- [51] Otsuka A.; Iida, K.; Danjo, K.; Sunada, H.: Measurement of the adhesive force between particles and polymer films. *Chem. Pharm. Bull.* 31, 1983, 4483-4487
- [52] Pietsch, W.; Rumpf, H.: Haftkraft, Kapillardruck, Flüssigkeitsvolumen und Grenzwinkel einer Flüssigkeitsbrücke zwischen zwei Kugeln. *Chemie Ingenieur Technik* 15, 1967, 885-893
- [53] Pollock, H.; Jones, R.; Geldart, D.; Verlinden, A.: Inter-particle forces in cohesive powders studied by AFM: effects of relative humidity, particle size and wall adhesion. *Powder Technology* 132 (2003), 196-210
- [54] Prescott J.K., Ploof D.A., Carson J.W.: *Developing a Better Understanding of Wall Friction. powder handling & processing*, Volume 11, No. 1 January/March 1999
- [55] Reichmann, B.; Tomas, J.: Expression behaviour of fine particle suspensions and the consolidated cake strength. *Powder Technology* 121, 2001, 182-189
- [56] Roberts, A.W., Scott, O.J.: An Investigation into the Effects of Sinusoidal and Random Vibrations on the Strength and Flow Properties of Bulk Solids. *Powder Technology* 21, 1978, 45-53

- [57] Roberts, A.W.: Vibration of Powders and its Application. Handbook of Powder Science and Technology. Fayed, M.E., Otten, L. (Hg), Van Nostrand, 1984, 181-229
- [58] Rowe, P.W.: The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact. Proc. Royal Soc. A 269, 1962, 500-527
- [59] Rumpf, H.: Grundlagen und Methoden des Granulierens. Chemie Ingenieur Technik 30, 1958, 144-158
- [60] Rumpf, H.: Zur Theorie der Zugfestigkeit von Agglomeraten bei Kraftübertragung an Kontaktpunkten. Chemie Ingenieur Technik – CIT, 8, 1970, 538-540
- [61] Rumpf, H.: Die Wissenschaft des Agglomerierens. Chemie- Ingenieur-Technik 46, 1974, 1-11.
- [62] Rumpf, H.: Mechanische Verfahrenstechnik. Carl Hanser, München, 1975
- [63] Rumpf, H.; Sommer, K.; Steier, K.: Mechanismen der Haftkraftverstärkung bei der Partikelhaftung durch plastisches Verformen, Sintern und viskoelastisches Fließen. Chemie Ingenieur Technik 48, 1976, 300-307
- [64] Schubert, H.: Grundlagen des Agglomerierens. Chemie- Ingenieur-Technik 51, 1979, 266-277
- [65] Schubert, H.: Kapillarität in porösen Feststoffsystemen. Springer Verl., Berlin, 1982
- [66] Schubert, H.: Dezembertagung Agglomerations- und Schüttguttechnik, Preprints, GVC-VDI Düsseldorf, 1991, 1-27
- [67] Schubert, H. in H. Schubert, (Hg.): Handbuch der Mechanischen Verfahrenstechnik. Wiley-VCH, Weinheim, 2003, 213-256.
- [68] Schulze D.: Untersuchungen zur gegenseitigen Beeinflussung von Silo und Austragorgan. Dissertation, Technische Universität Carolo-Wilhelmina Braunschweig, überarbeitete Version 2006
- [69] Schulze D.: Pulver und Schüttgüter. Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 2006
- [70] Schwedes, J.; Wilms, H.: Fließeigenschaften von Schüttgütern. in Martens, P.: Silo-Handbuch, Ernst&Sohn, Berlin, 1988
- [71] Schwedes, J.; Schulze, D.: Measurement of flow properties of cohesive powders. Powder Technology 61, 1990, 59-68
- [72] Schwedes, J.; Schulze, D. in H. Schubert, (Hg.): Handbuch der Mechanischen Verfahrenstechnik. Wiley-VCH, Weinheim, 2003, 1137-1253
- [73] Seville, J.P.K.; Simons, S.J.R.: An Analysis of the Rupture Energy of Pendular Liquid Bridges. Chem. Eng. Sci. 49, 1994, 2331-2339.
- [74] Schwarz, U.; Zwörner, O.; Köster, P.; Wiesendanger, R.: Quantitative analysis of the frictional properties of solid materials at low loads. I. Carbon compounds. Phys. Rev. B 56, 1997, 6987-6996
- [75] Stöcker, H.: Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1995
- [76] Teunou, E.; Fitzpatrick, J.J.; Synnott, E.C.: Characterisation of food powder flow-ability. Journal of Food Engineering 39, 1999, 31-37
- [77] Thornton, C.; Yin, K. K.: Impact of elastic spheres with and without adhesion. Powder Technology 65, 1991, 153-166
- [78] Tomas, J.; Schubert, H.: Proc. Intern. Symp. on Pow. Technol., Kyoto, 1981, 18-125

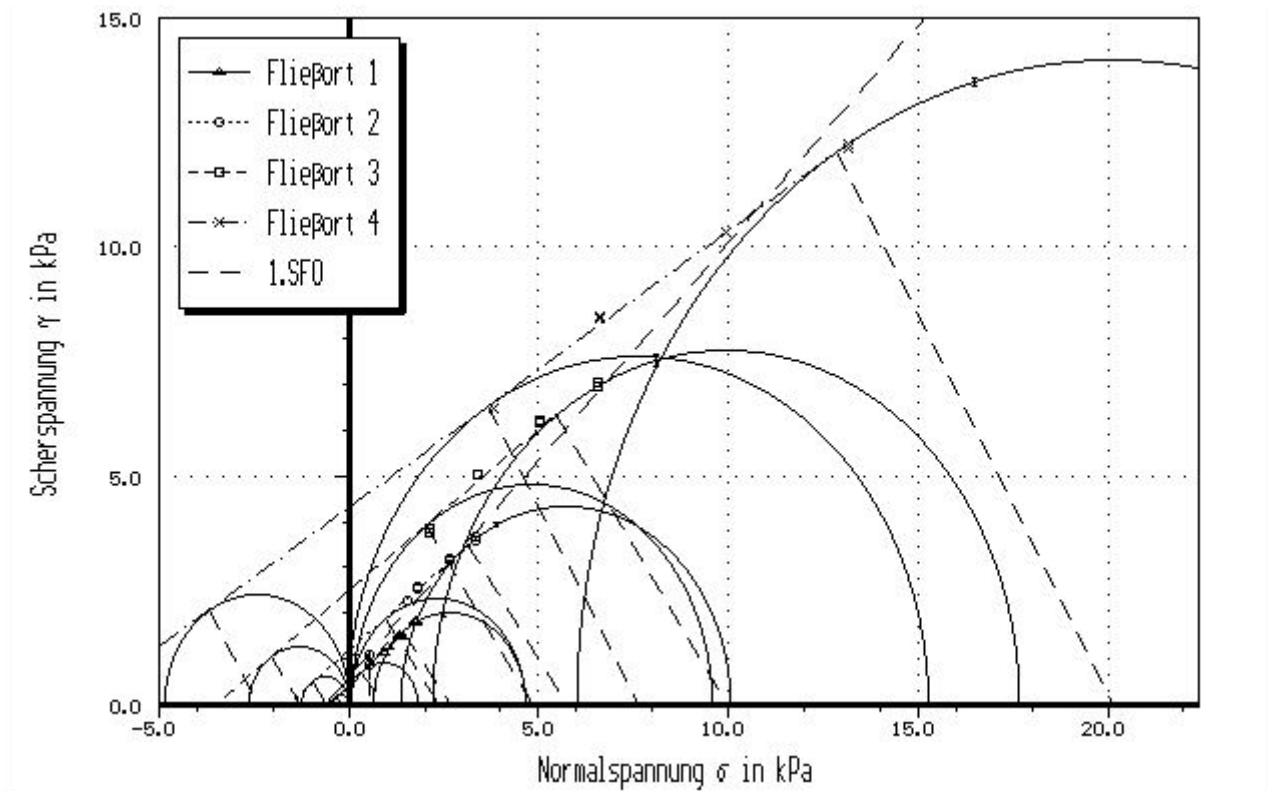
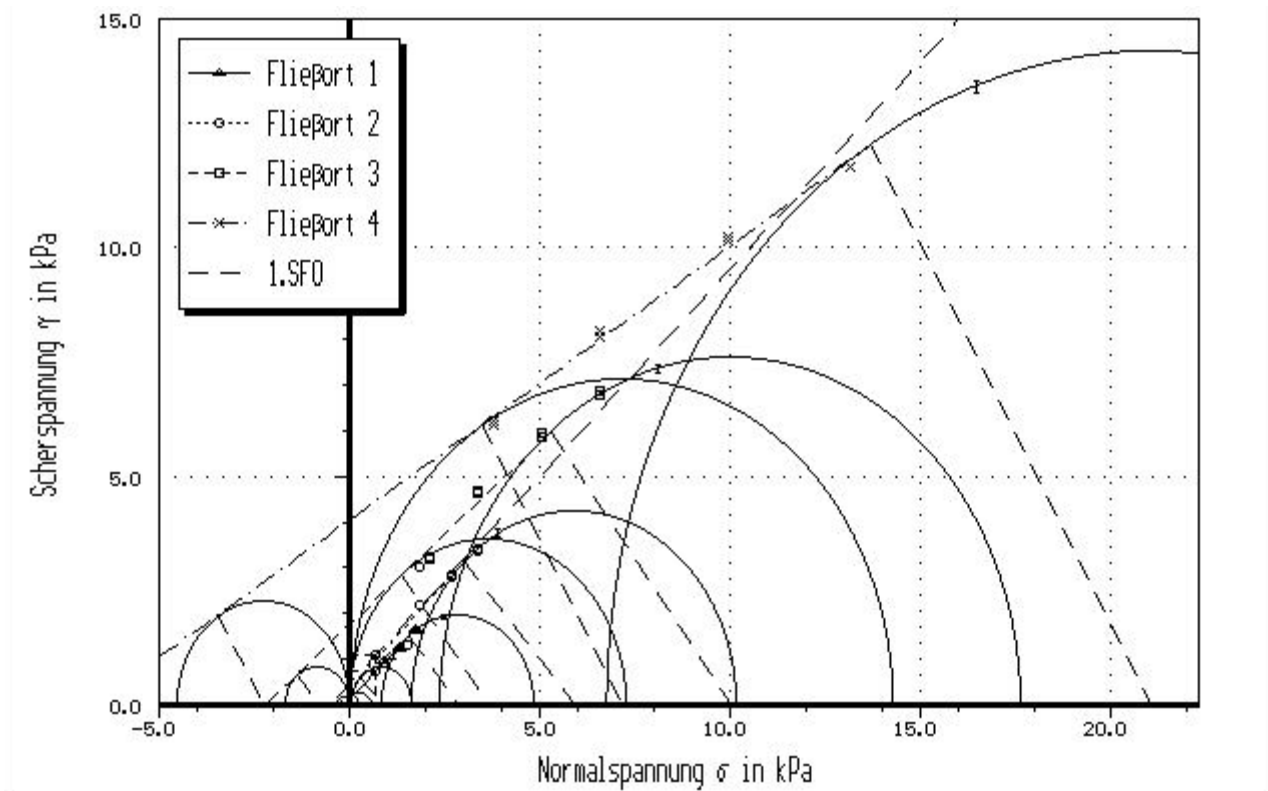
- [79] Tomas, J.: Untersuchungen zum Fließverhalten von feuchten und leichtlöslichen Schüttgütern. Dissertation, 1983, Freiburger Forschungshefte A 677: 1 – 133
- [80] Tomas, J., 1991. Modellierung des Fließverhaltens von Schüttgütern auf der Grundlage der Wechselwirkungskräfte zwischen den Partikeln und Anwendung bei der Auslegung von Bunkeranlagen. Habilitation, Bergakademie Freiberg, 1991
- [81] Tomas, J.: Zum Verfestigungsprozeß von Schüttgütern – Mikroprozesse, Kinetikmodelle und Anwendungen. Schüttgut 1, 1996, 31-51
- [82] Tomas, J.: Particle Adhesion Fundamentals and Bulk Powder Consolidation. powder handling & processing 12, 2000, 2, 131-138
- [83] Tomas, J.: Particle Adhesion Fundamentals and Bulk Powder Consolidation, KONA – Powder and Particle 18, 2000, 157-169
- [84] Tomas, J.: Assessment of mechanical properties of cohesive particulate solids – part 1: particle contact constitutive model, Particulate Sci. & Techn. 19, 2001 2, 95-110
- [85] Tomas, J.: Assessment of mechanical properties of cohesive particulate solids – part 2: powder flow criteria, Particulate Sci. & Techn. 19, 2001 2, 111-129
- [86] Tomas, J., Characterisation of the Rheo-Mechanical Properties of Wet-Mass Powders, IFPRI Review, Magdeburg 2001 (unveröffentlichter Bericht)
- [87] Tomas, J.: Zur Mechanik trockener, kohäsiver Schüttgüter. Schüttgut 8, 2002, 522-537
- [88] Tomas, J.: Mechanics of Nanoparticle Adhesion – a Continuum Approach. 8th Intern. Symp. on Particles on Surfaces: Detection, Adhesion and Removal, VSP Utrecht, 2003, 183-229,
- [89] Tomas, J.: Fundamentals of cohesive powder consolidation and flow. Granular Matter 6, 2004, 75-86
- [90] Tomas, J.: The mechanics of dry, cohesive powders. powder handling & processing 15, 2003, 296-314
- [91] Tomas, J.: Product Design of Cohesive Powders – Mechanical Properties, Compression and Flow Behaviours. Chemical Engineering & Technology 27, 2004, 605-618 (review)
- [92] Tomas, J.: Adhesion of ultrafine particles - A micromechanical approach. Chem. Engng. Science 62, 2007, 1997-2010.
- [93] Tomas, J.: Produkteigenschaften ultrafeiner Partikel – Mikromechanik, Fließ- und Kompressionsverhalten kohäsiver Pulver. Vortrag auf der Plenarsitzung der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, 2007
- [94] Tykhoniuk, R.; Tomas, J.; Luding, S.: Simulation der Scherdynamik kohäsiver Pulver. Chemie Ingenieur Technik 76, 2004, 59-62
- [95] Tykhoniuk, R.; Tomas, J.; Luding, S.; Kappl, M.; Heim, L.; Butt, H.-J.: Ultrafine cohesive powders: from interparticle contacts to continuum behaviour. Chemical Engineering Science 62, 2007, 2843-2865
- [96] Wassgren, C.R.; Hunt, M.L.; Brennen, C.E.: Effects of Vertical Vibration on Hopper Flows of Granular Materials. Mechanics of Deformation and Flow of Particulate Materials, Chang, C.S. et. al. (Hg.), ASCE, New York, 1997, 335-348
- [97] Weathers, R.C. et. al. : Effects of Horizontal Vibration on Hopper Flows of Granular Materials. Mechanics of Deformation and Flow of Particulate Materials, Chang, C.S. et. al. (Hg.), ASCE, New York, 1997, 349-360

- [98] Wei H. Y.: The contact problem for viscoelastic bodies. *J. Appl. Mech., Trans. ASME* 33, 1966, 395-401
- [99] Weller, F.: *Numerische Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Braunschweig/Wiesbaden, Friedr. Vieweg & Sohn, 1996
- [100] Weth, M.; Hofmann, M.; Kuhn, J.; Fricke, J.: Measurement of attractive forces between single aerogel powder particles and the correlation with powder flow. *Journal of Non-crystalline Solids* 285 (2001), 236-243
- [101] Xu, C.; Zhu, J.: Parametric study of fine particle fluidization under mechanical vibrations. *Powder Technology* 161, 2006, 135-144
- [102] Yanagida, T.; Matchett, A.J.; Coulthard, J.M.: Dissipation energy of powder beds subject to vibration. *Trans IChemE, Vol 79, Part A*, 2001, 655-662
- [103] Yanagida, T.; Matchett, A.J.; Coulthard, J.M.: Damping and elastic properties of binary powder mixtures. *Powder Technology* 127, 2002, 107-115
- [104] Yanagida, T.; Matchett, A.J.; Coulthard, J.M.: Effective mass of powder beds subjected to low magnitude vibration and its application to binary systems: Part 1 – experimental methodology. *Chemical Engineering Science* 57, 2002, 2653-2661
- [105] Yanagida, T.; Matchett, A.J.; Coulthard, J.M.: Effective mass of powder beds subjected to low magnitude vibration and its application to binary systems: Part 2 – comparison of segregated and well-mixed binary powder mixtures. *Chemical Engineering Science* 57, 2002, 2663-2671

## Verzeichnis der verwendeten Zitate

- <sup>(a)</sup> Herbert Grönemeyer: *Kopf hoch, tanzen*. aus: „12“, Groenland (EMI), 2007

## Anhang

Abbildung A- 1: Kalkstein,  $X_1 = 0,004$ , ohne VibrationenAbbildung A- 2: Kalkstein,  $X_1 = 0,004$ ,  $f = 60$  Hz,  $v_{\max} = 20$  mm/s

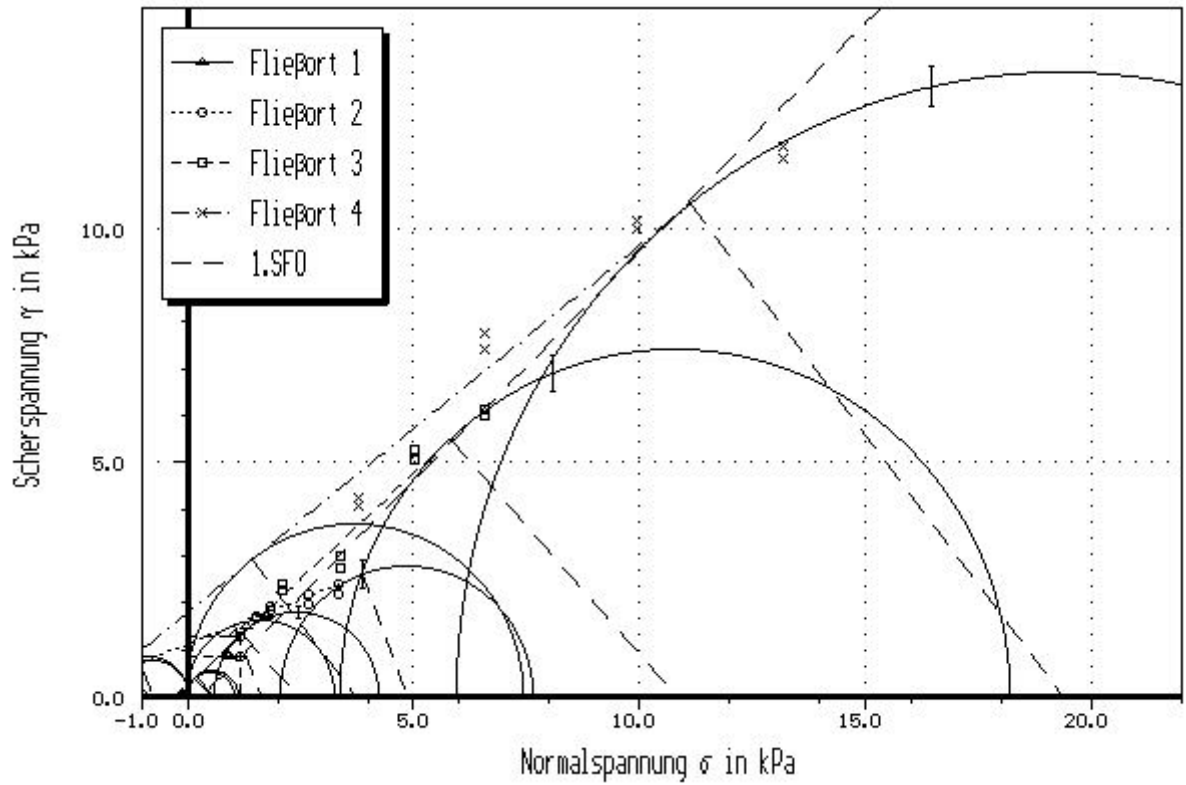


Abbildung A- 3: Kalkstein,  $X_1 = 0,004$ ,  $f = 120$  Hz,  $v_{\max} = 20$  mm/s

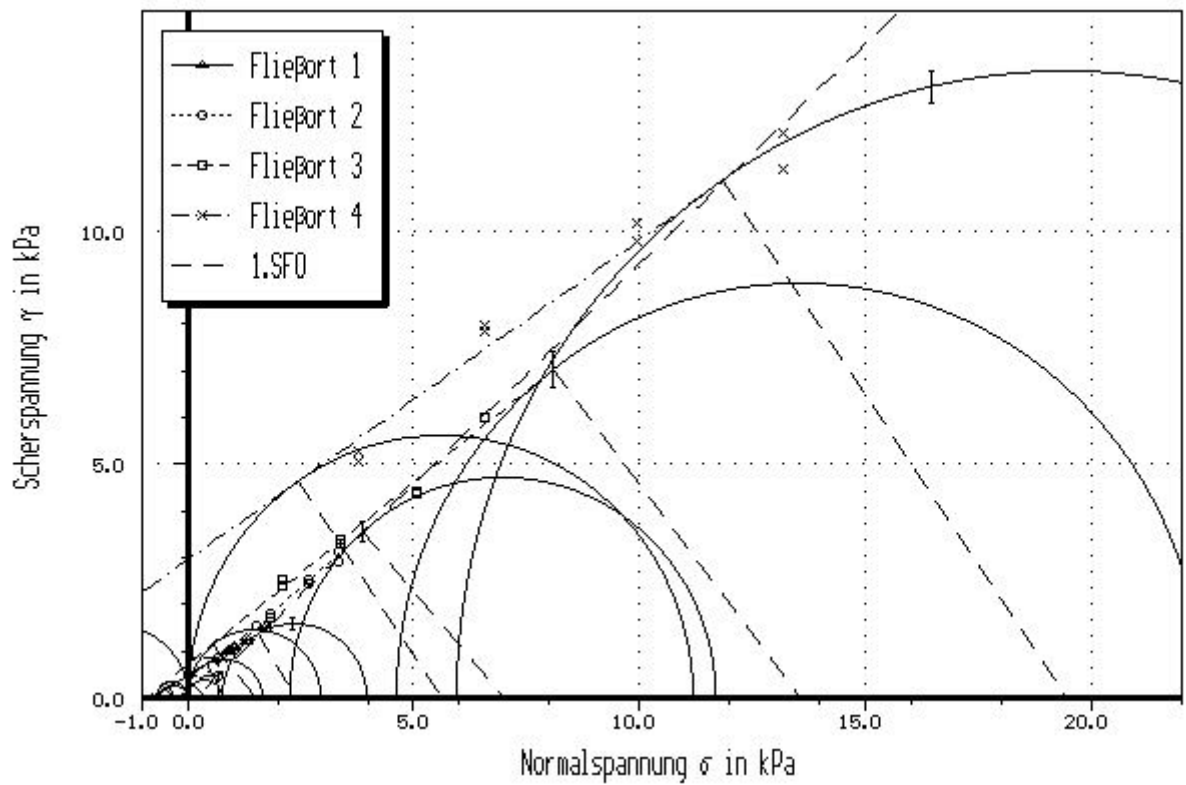
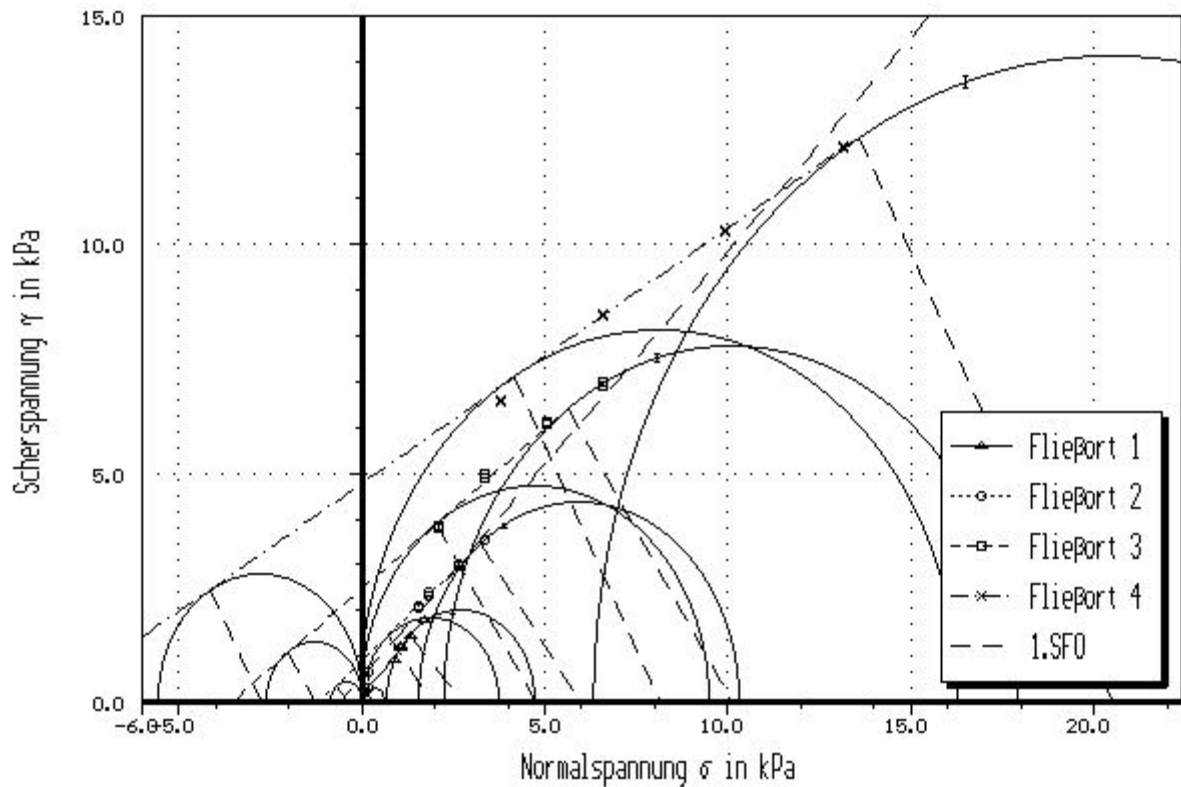
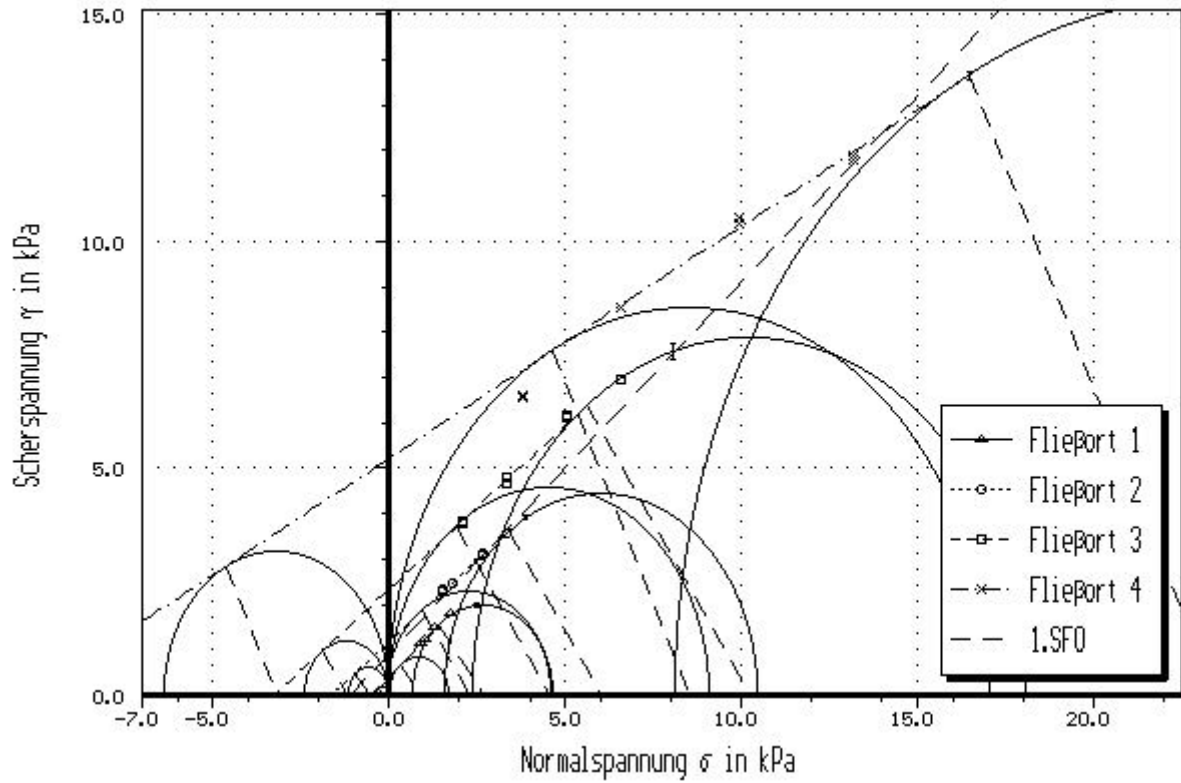
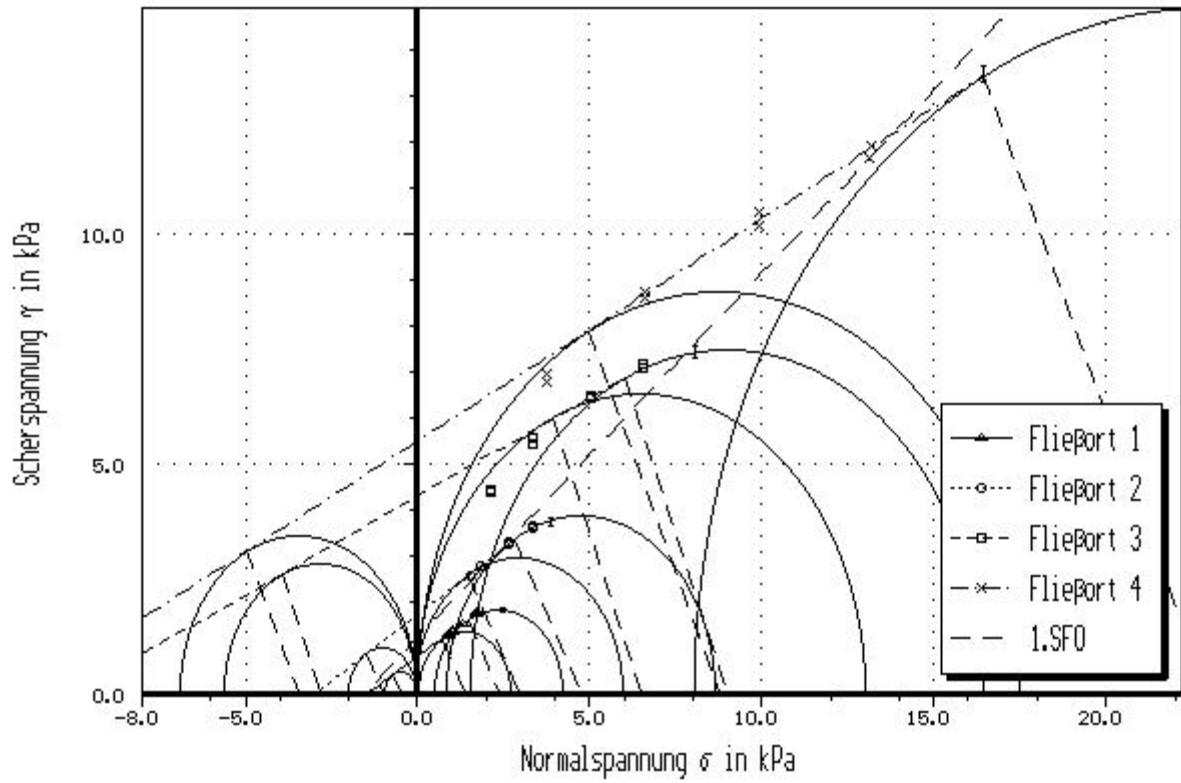
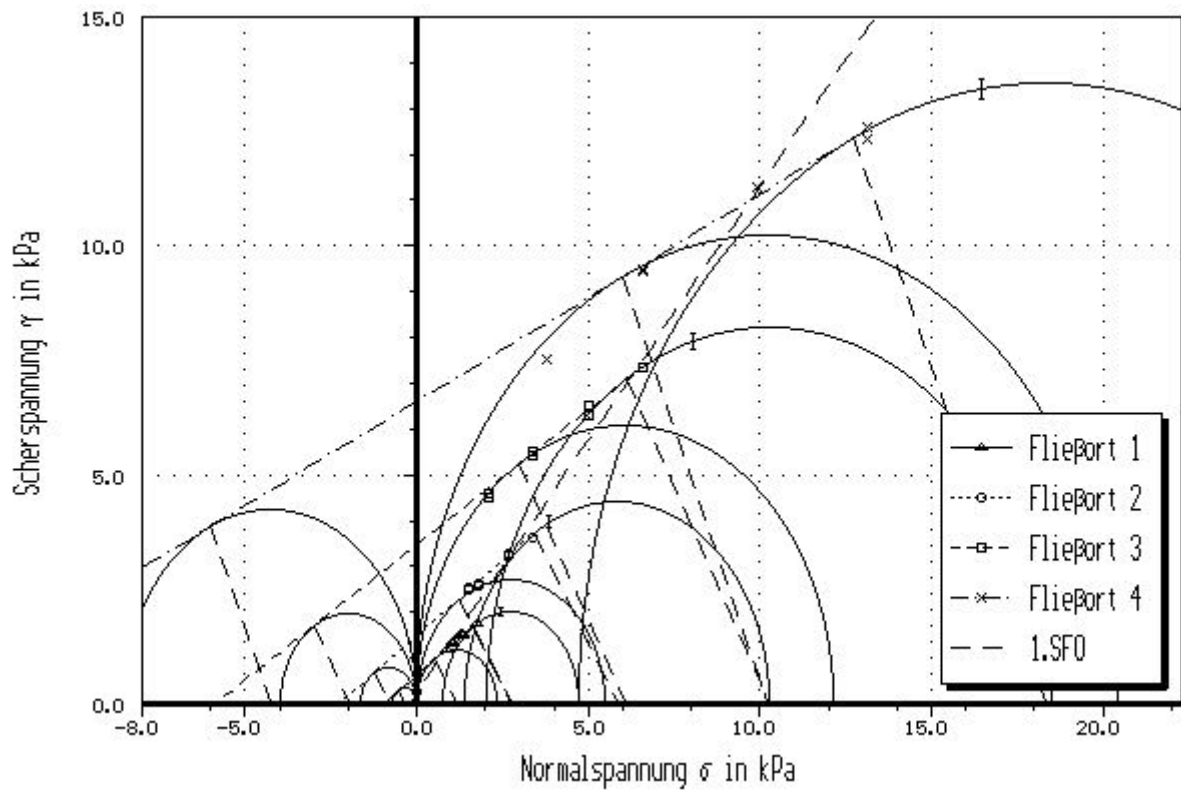
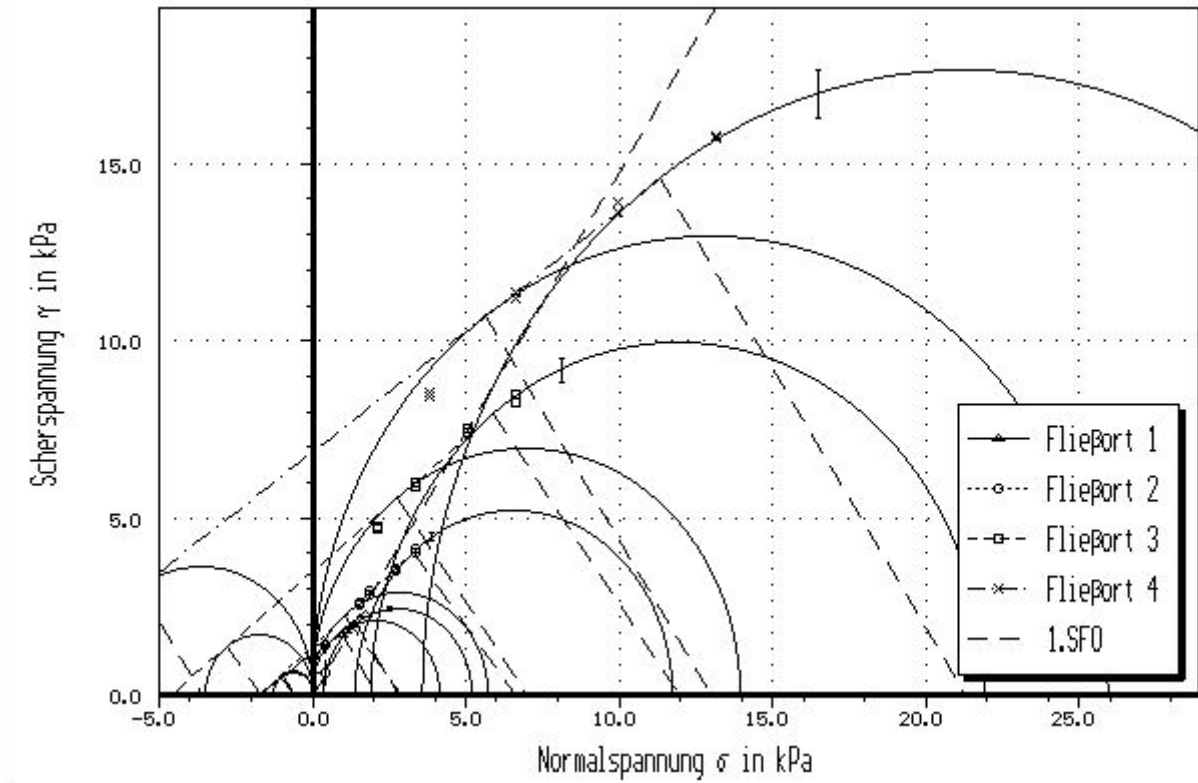
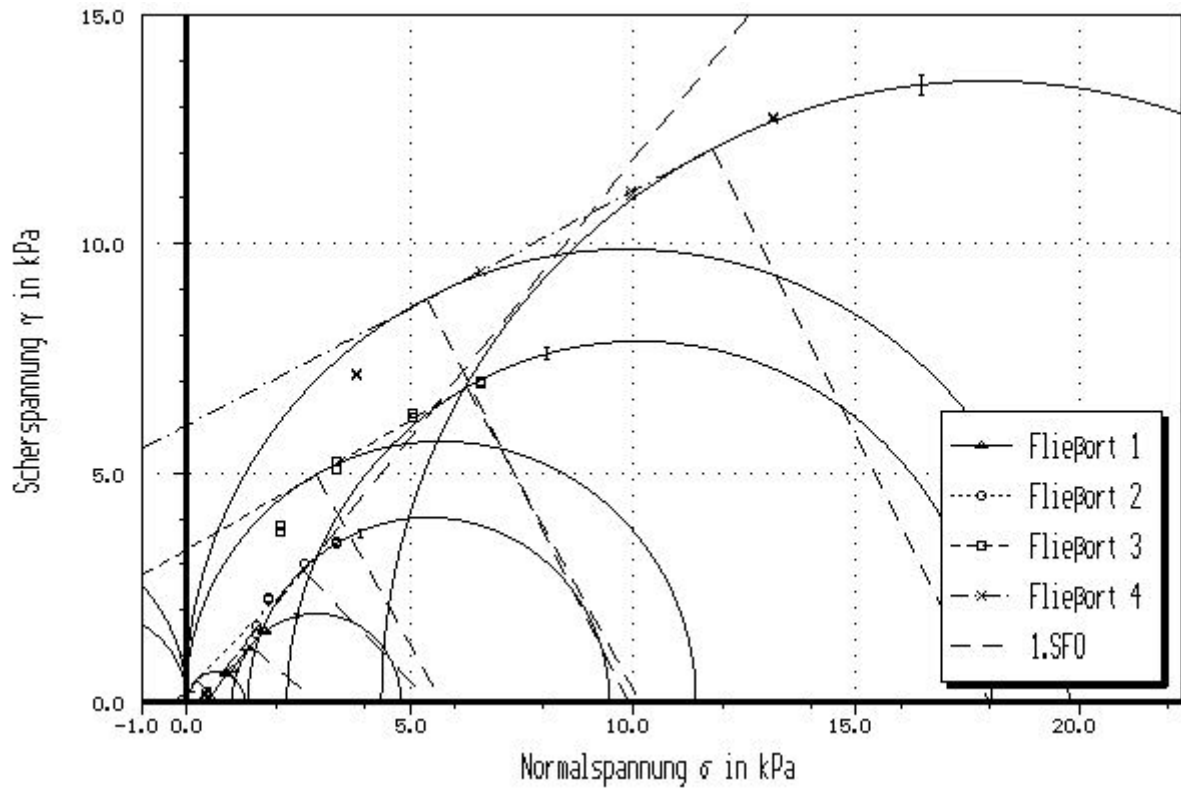


Abbildung A- 4: Kalkstein,  $X_1 = 0,004$ ,  $f = 180$  Hz,  $v_{\max} = 20$  mm/s



Abbildung A- 7: Kalkstein,  $X_1 = 0,02$ , ohne VibrationenAbbildung A- 8: Kalkstein,  $X_1 = 0,04$ , ohne Vibrationen



Abbildung A- 9: Kalkstein,  $X_1 = 0,08$ , ohne VibrationenAbbildung A- 10: Kalkstein,  $X_1 = 0,04$ ,  $f = 60$  Hz,  $v_{\max} = 20$  mm/s

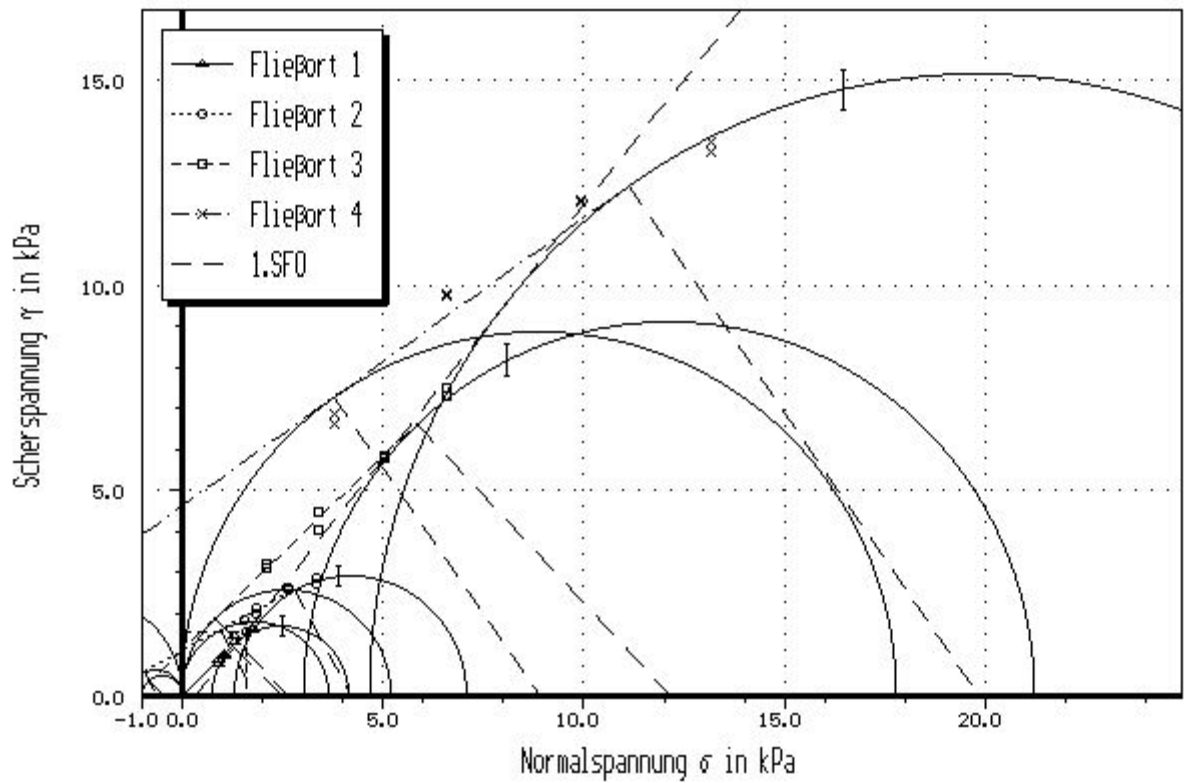


Abbildung A- 11: Kalkstein,  $X_1 = 0,04$ ,  $f = 120$  Hz,  $v_{\max} = 20$  mm/s

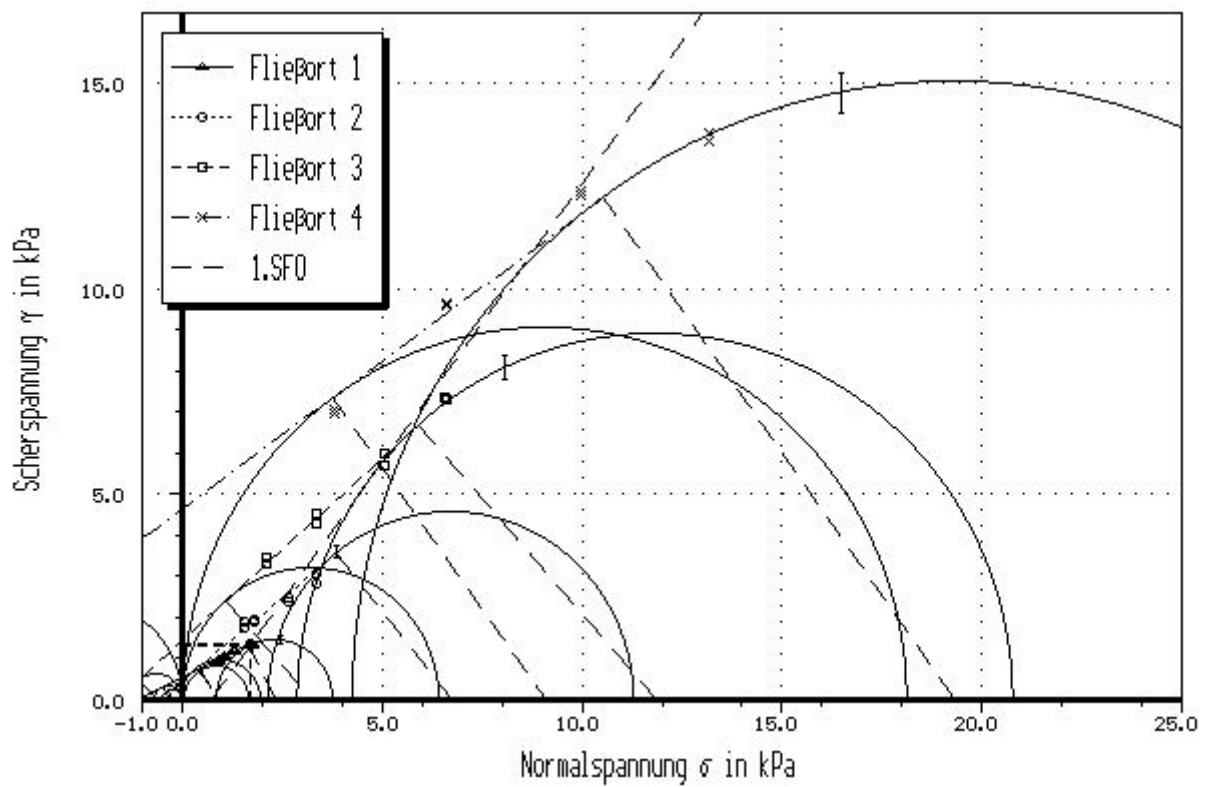


Abbildung A- 12: Kalkstein,  $X_1 = 0,04$ ,  $f = 180$  Hz,  $v_{\max} = 20$  mm/s

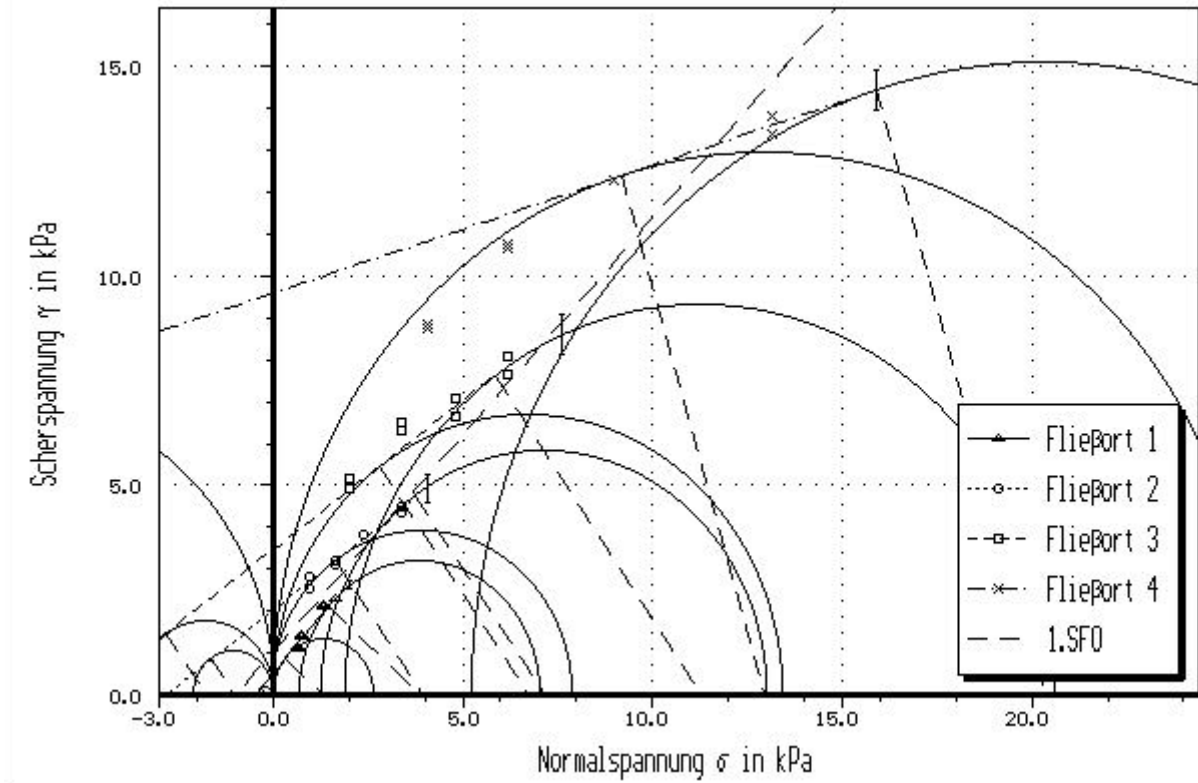
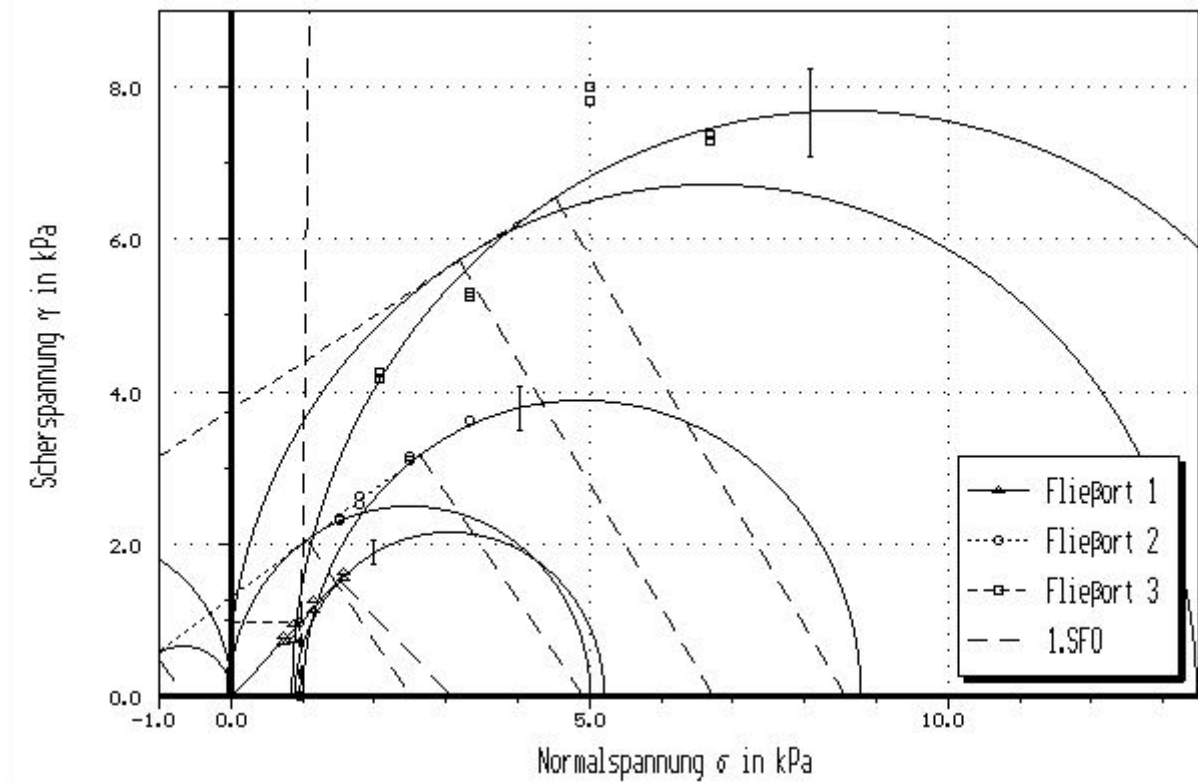


Abbildung A-13: Titandioxid, ohne Vibrationen

Abbildung A-14: Titandioxid,  $f = 50 \text{ Hz}$ ,  $v_{\text{max}} = 20 \text{ mm/s}$

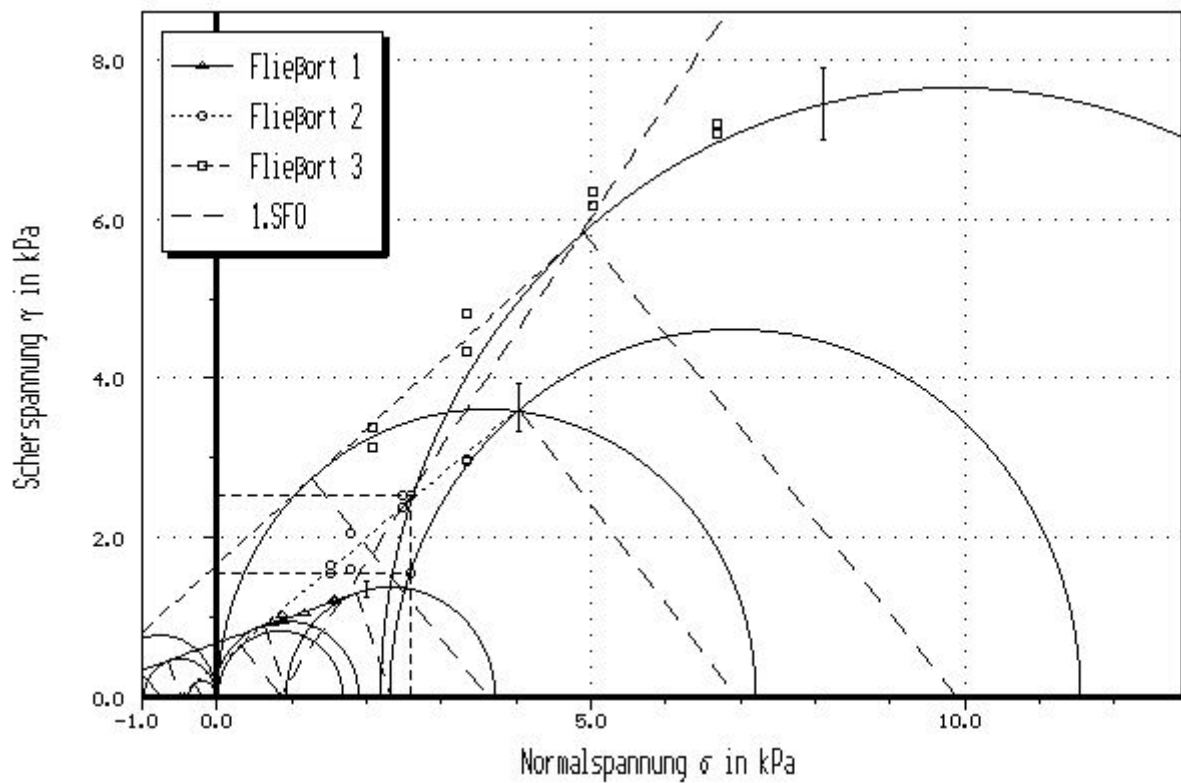


Abbildung A- 15: Titandioxid,  $f = 100 \text{ Hz}$ ,  $v_{\text{max}} = 20 \text{ mm/s}$

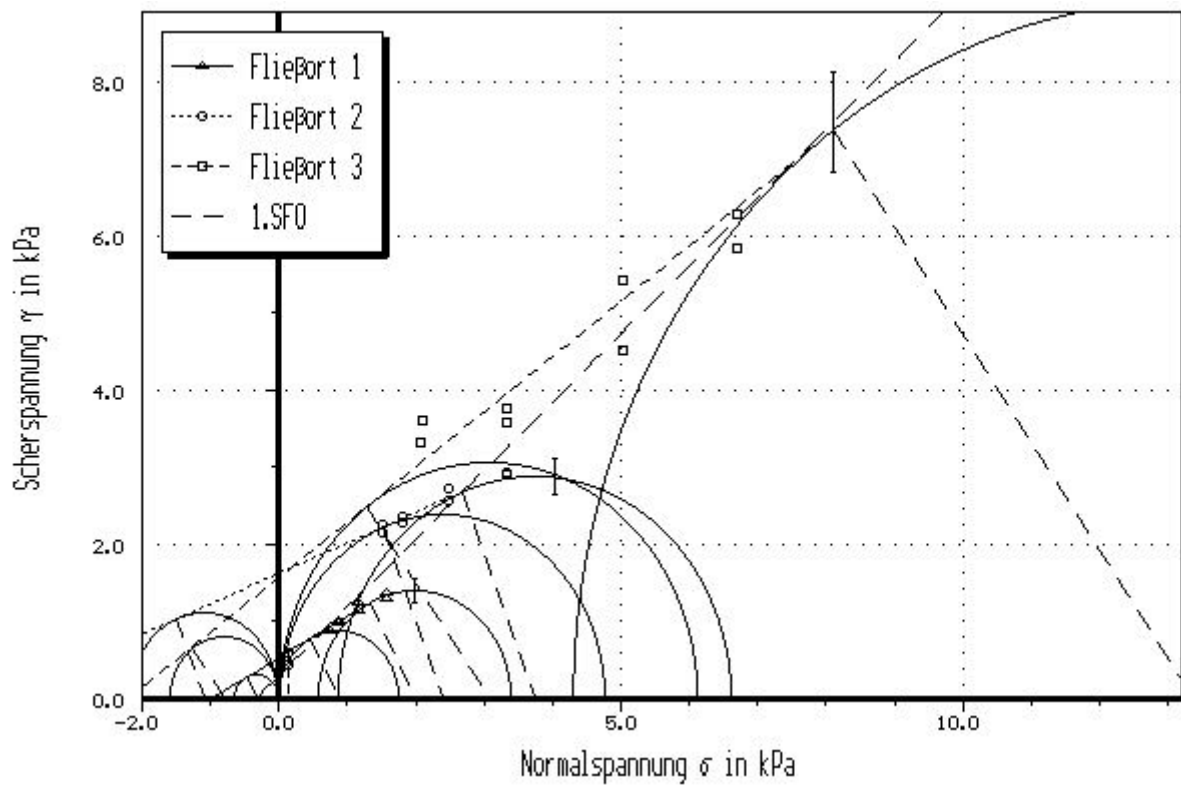


Abbildung A- 16: Titandioxid,  $f = 150 \text{ Hz}$ ,  $v_{\text{max}} = 20 \text{ mm/s}$

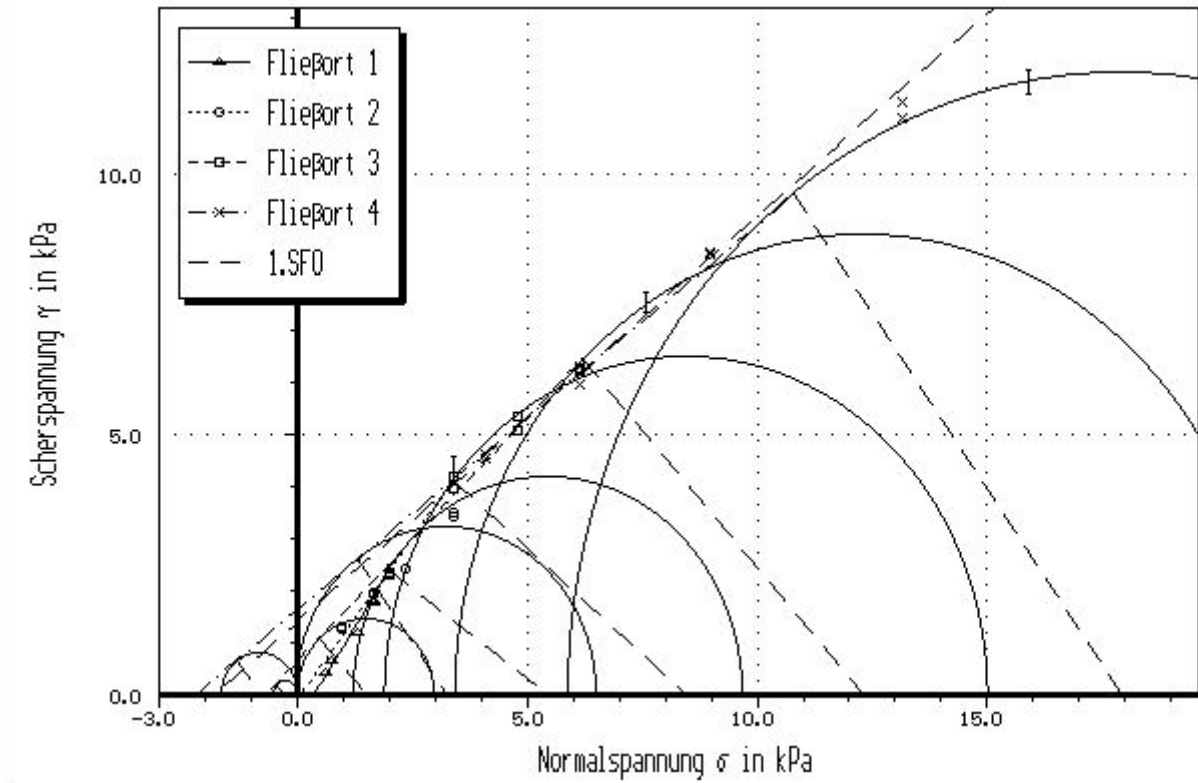


Abbildung A- 17: Kalkstein,  $X_1 = 0,004$ , Anisotropieversuch, ohne Vibrationen

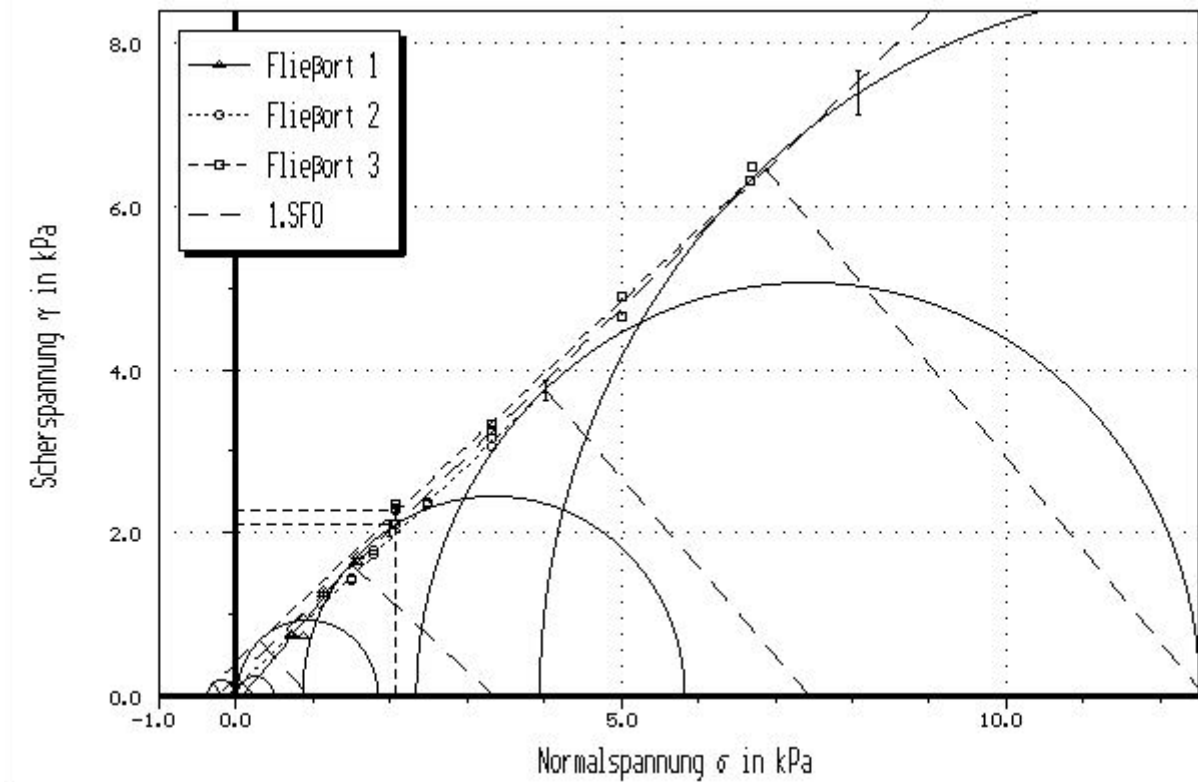


Abbildung A- 18: Kalkstein,  $X_1 = 0,004$ , Anisotropieversuch,  $f = 50 \text{ Hz}$ ,  $v_{\text{max}} = 20 \text{ mm/s}$

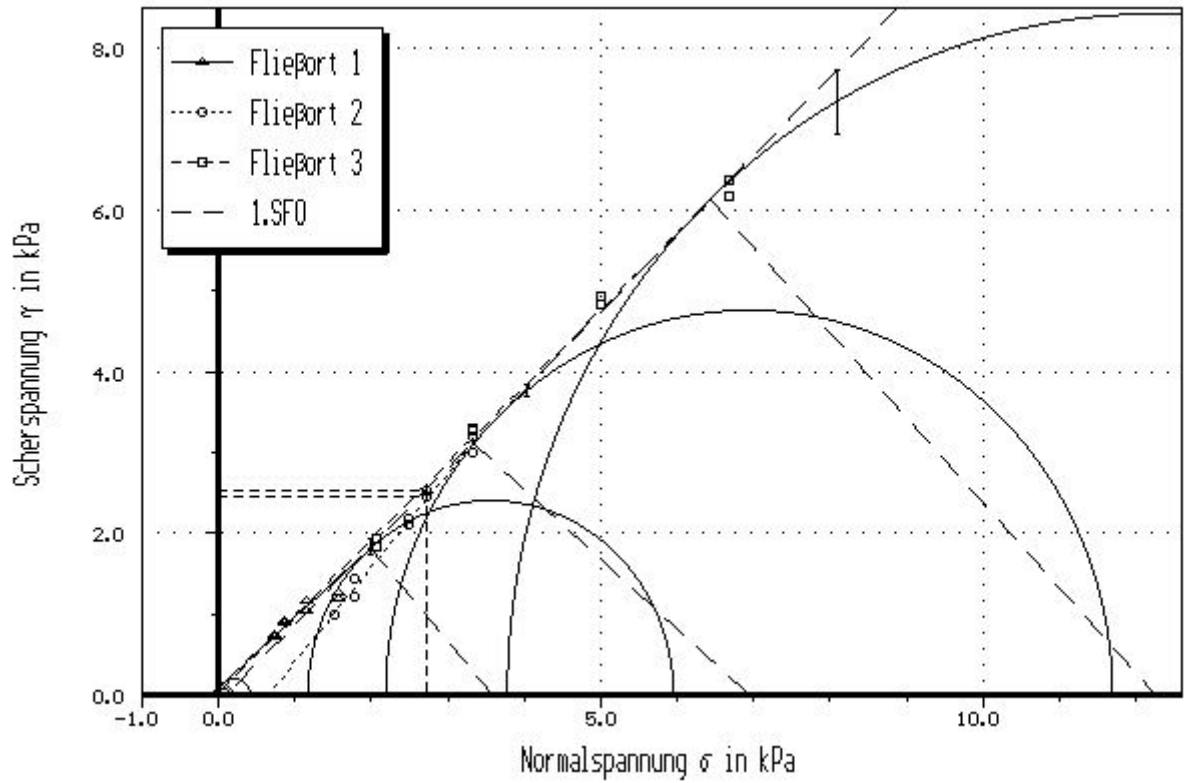


Abbildung A- 19: Kalkstein,  $X_1 = 0,004$ , Anisotropieversuch,  $f = 100 \text{ Hz}$ ,  $v_{\max} = 20 \text{ mm/s}$

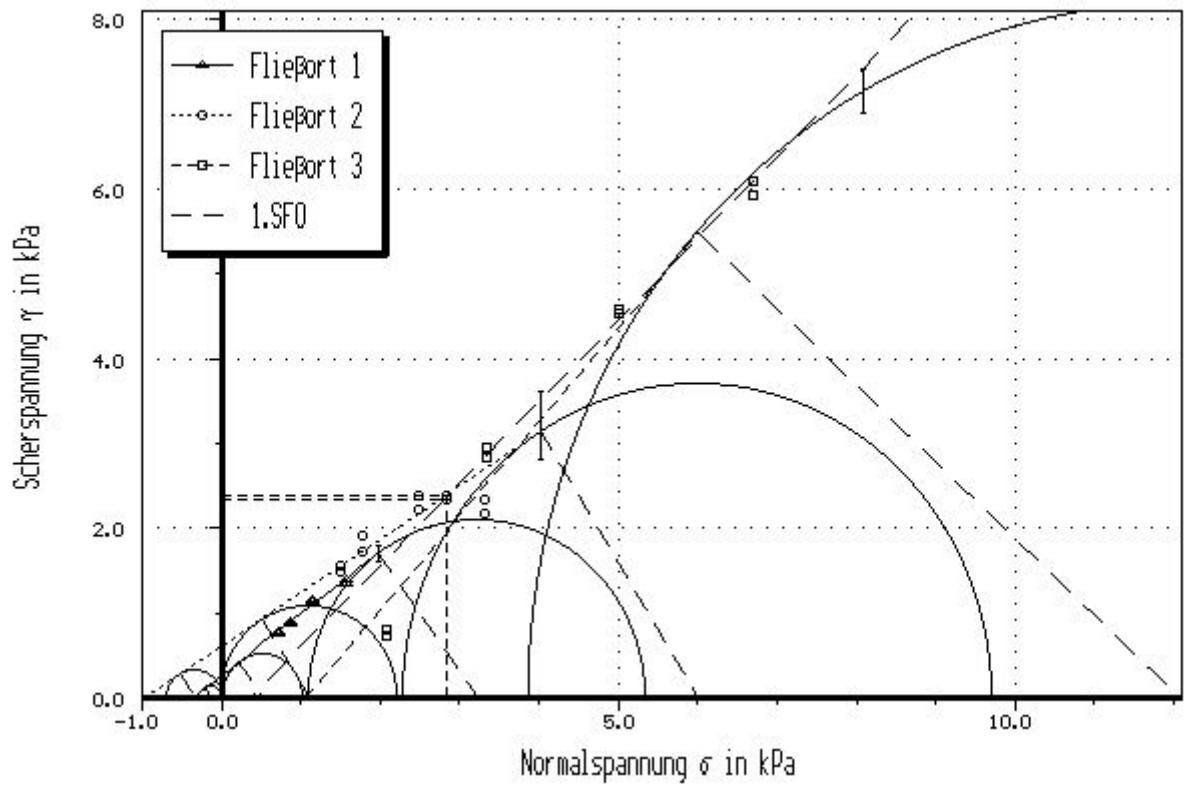


Abbildung A- 20: Kalkstein,  $X_1 = 0,004$ , Anisotropieversuch,  $f = 150 \text{ Hz}$ ,  $v_{\max} = 20 \text{ mm/s}$

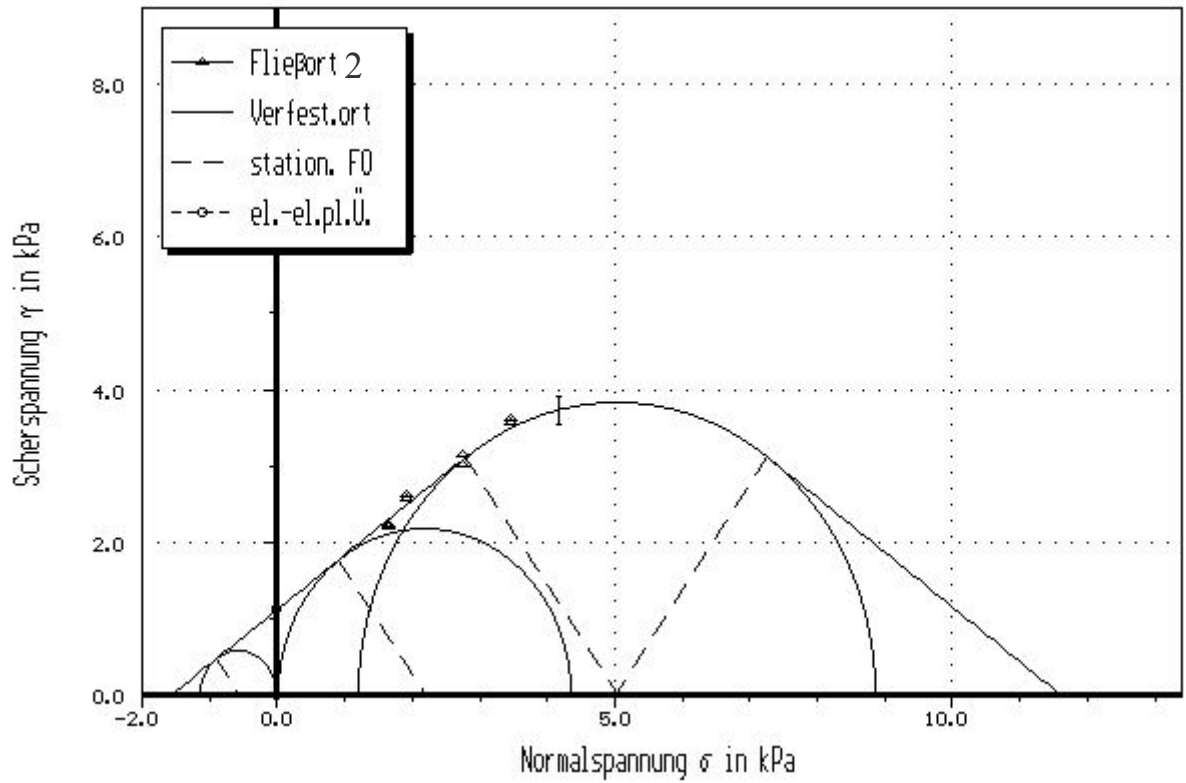


Abbildung A- 21: Kalkstein,  $X_1 = 0,004$ , FO2, Verdrehwinkel der Scherzelle  $0^\circ$ ,  $f = 50$  Hz,  $v_{\max} = 20$  mm/s

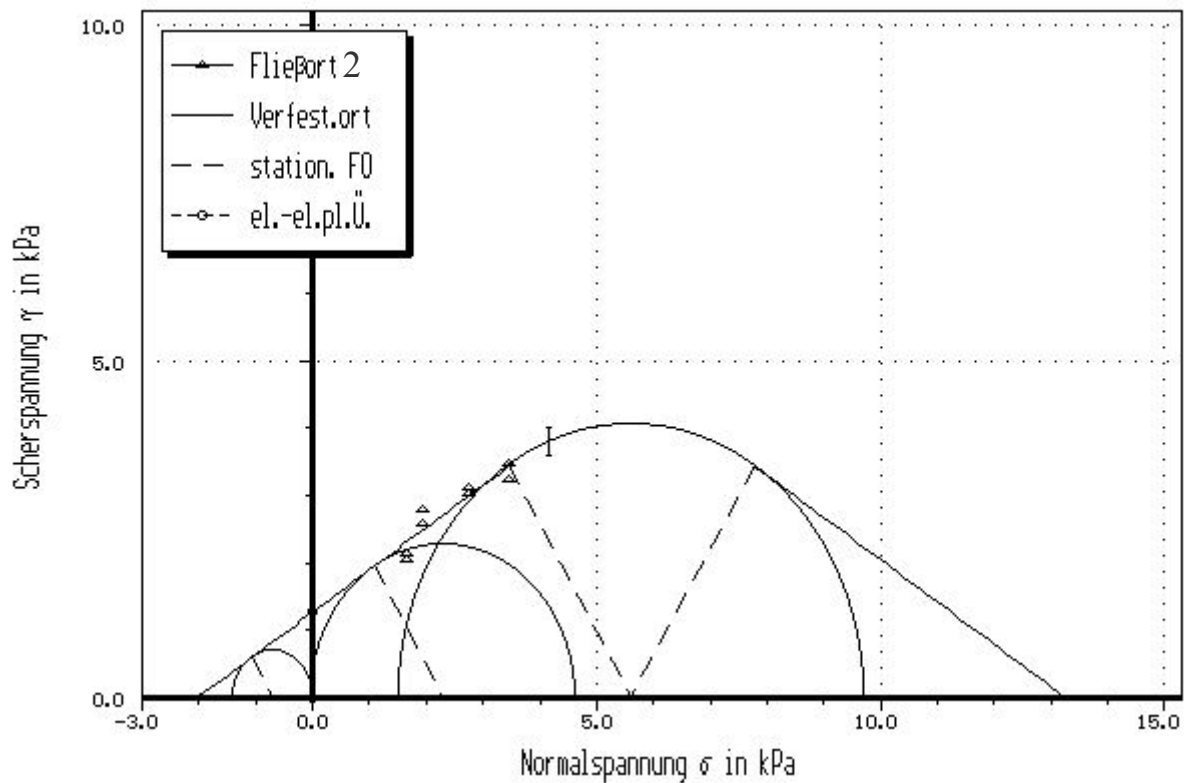


Abbildung A- 22: Kalkstein,  $X_1 = 0,004$ , FO2, Verdrehwinkel der Scherzelle  $0^\circ$ ,  $f = 100$  Hz,  $v_{\max} = 20$  mm/s

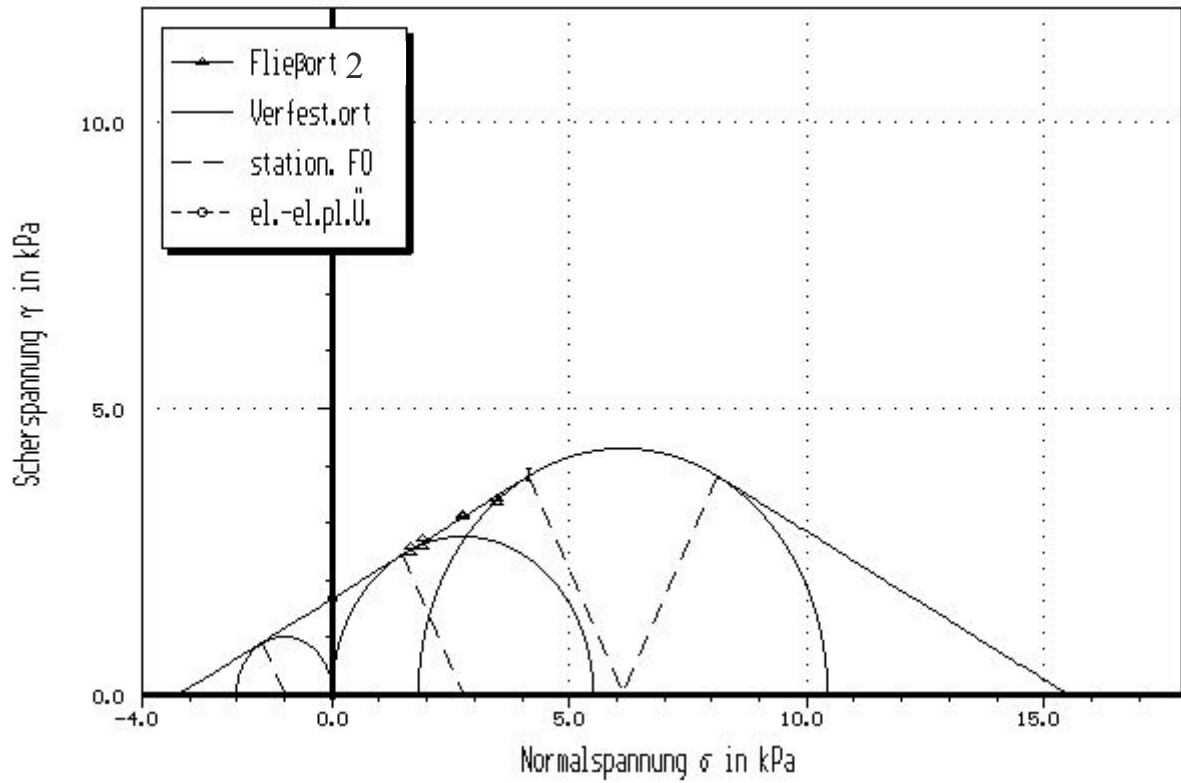


Abbildung A- 23: Kalkstein,  $X_1 = 0,004$ , FO2, Verdrehwinkel der Scherzelle  $0^\circ$ ,  $f = 150$  Hz,  $v_{\max} = 20$  mm/s

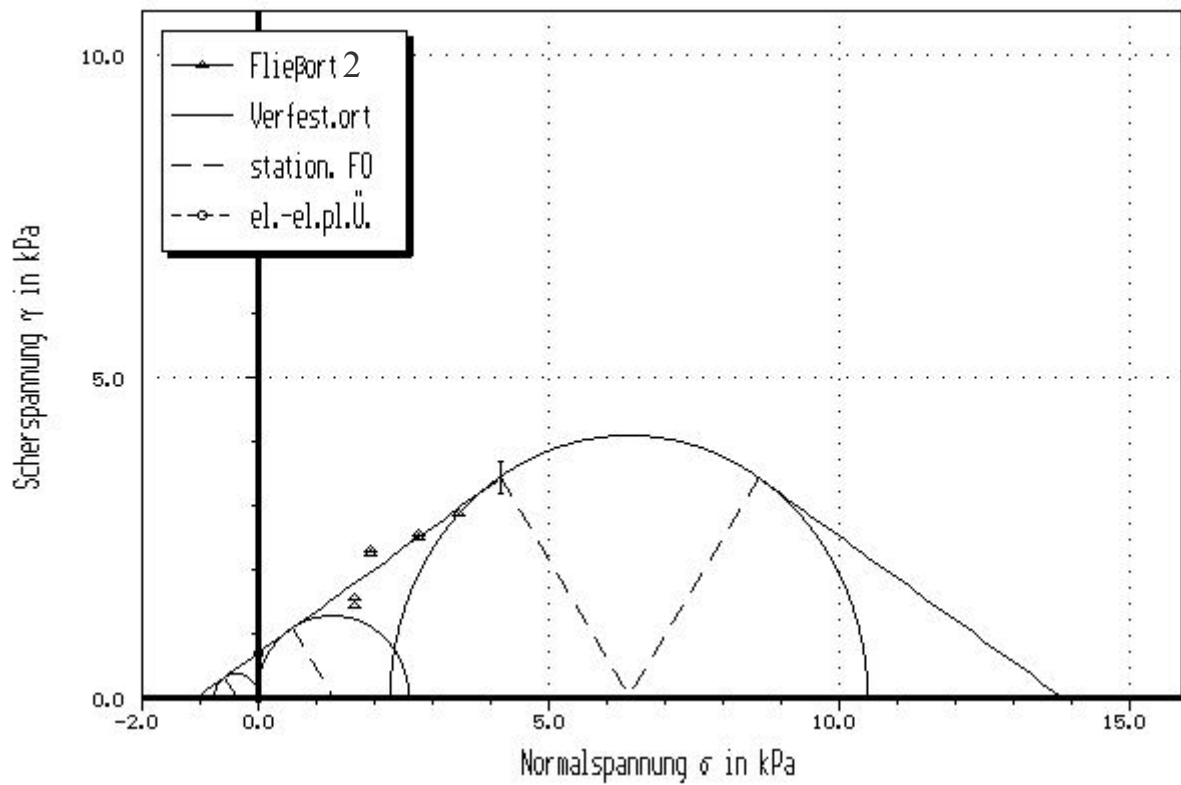


Abbildung A- 24: Kalkstein,  $X_1 = 0,004$ , FO2, Verdrehwinkel der Scherzelle  $15^\circ$ ,  $f = 50$  Hz,  $v_{\max} = 20$  mm/s



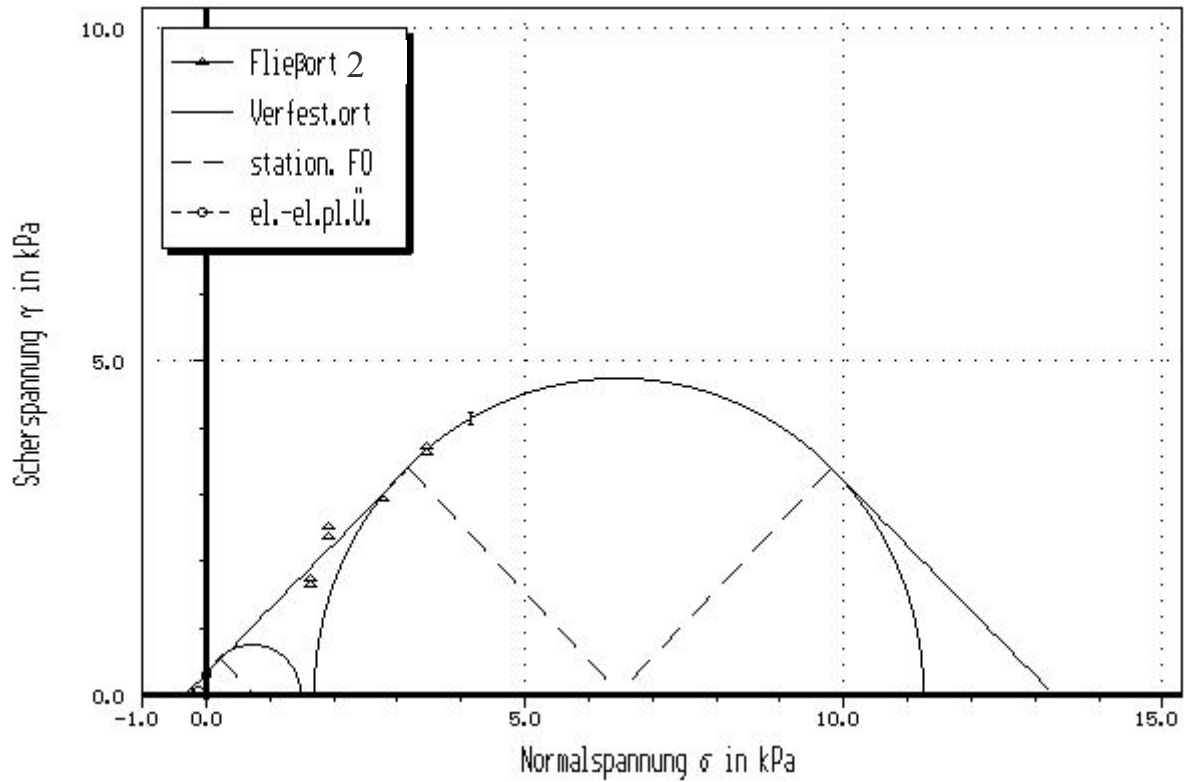


Abbildung A- 25: Kalkstein,  $X_1 = 0,004$ , FO2, Verdrehwinkel der Scherzelle  $15^\circ$ ,  $f = 100$  Hz,  $v_{\max} = 20$  mm/s

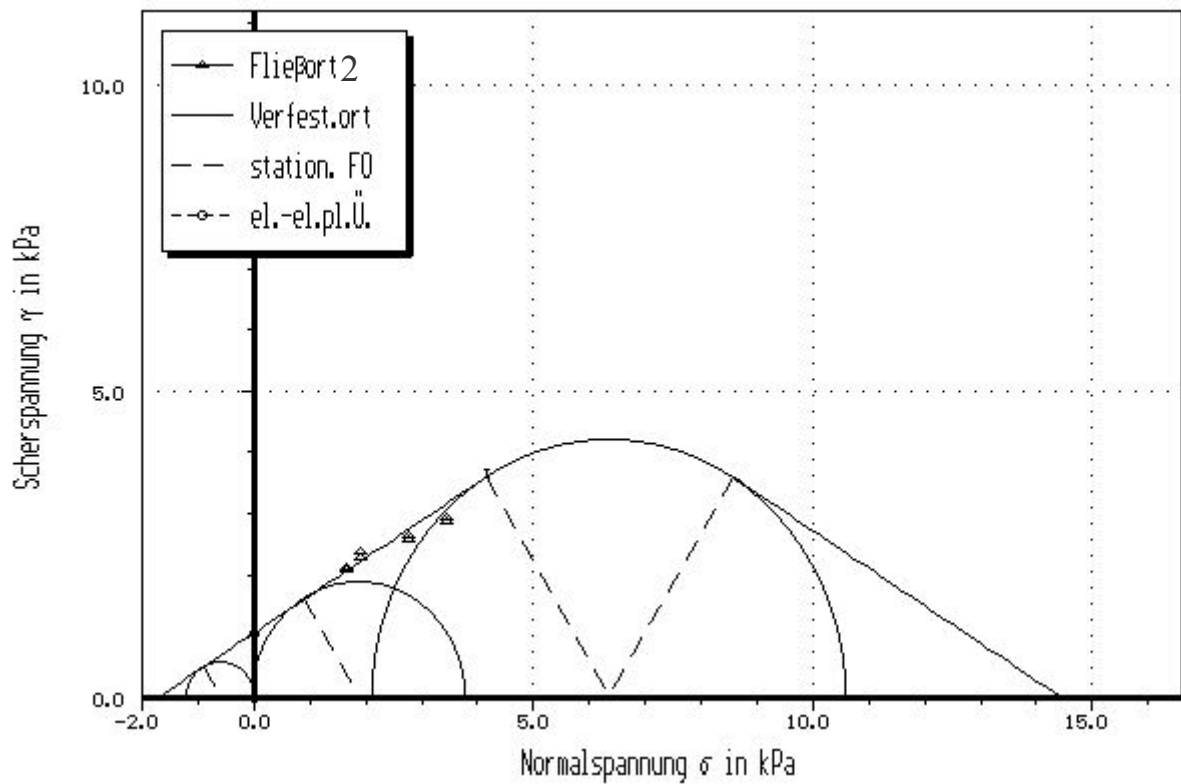


Abbildung A- 26: Kalkstein,  $X_1 = 0,004$ , FO2, Verdrehwinkel der Scherzelle  $15^\circ$ ,  $f = 150$  Hz,  $v_{\max} = 20$  mm/s

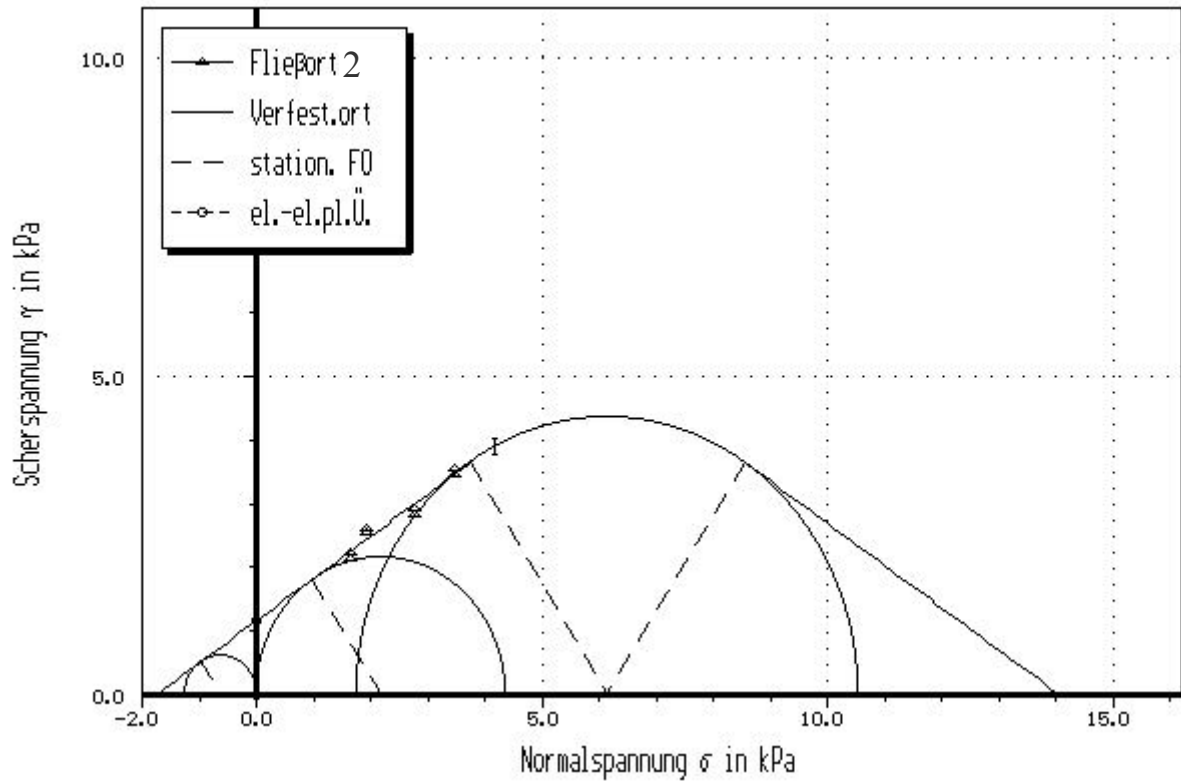


Abbildung A- 27: Kalkstein,  $X_1 = 0,004$ , FO2, Verdrehwinkel der Scherzelle  $30^\circ$ ,  $f = 50$  Hz,  $v_{\max} = 20$  mm/s

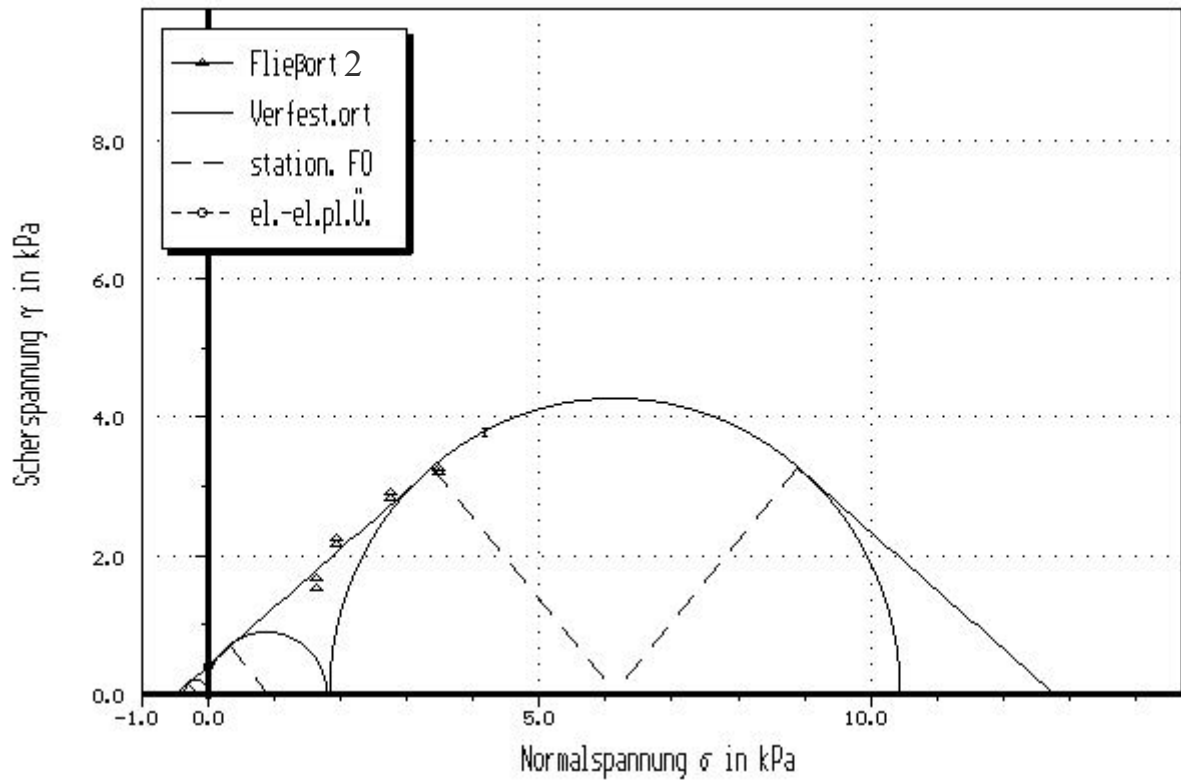


Abbildung A- 28: Kalkstein,  $X_1 = 0,004$ , FO2, Verdrehwinkel der Scherzelle  $30^\circ$ ,  $f = 100$  Hz,  $v_{\max} = 20$  mm/s

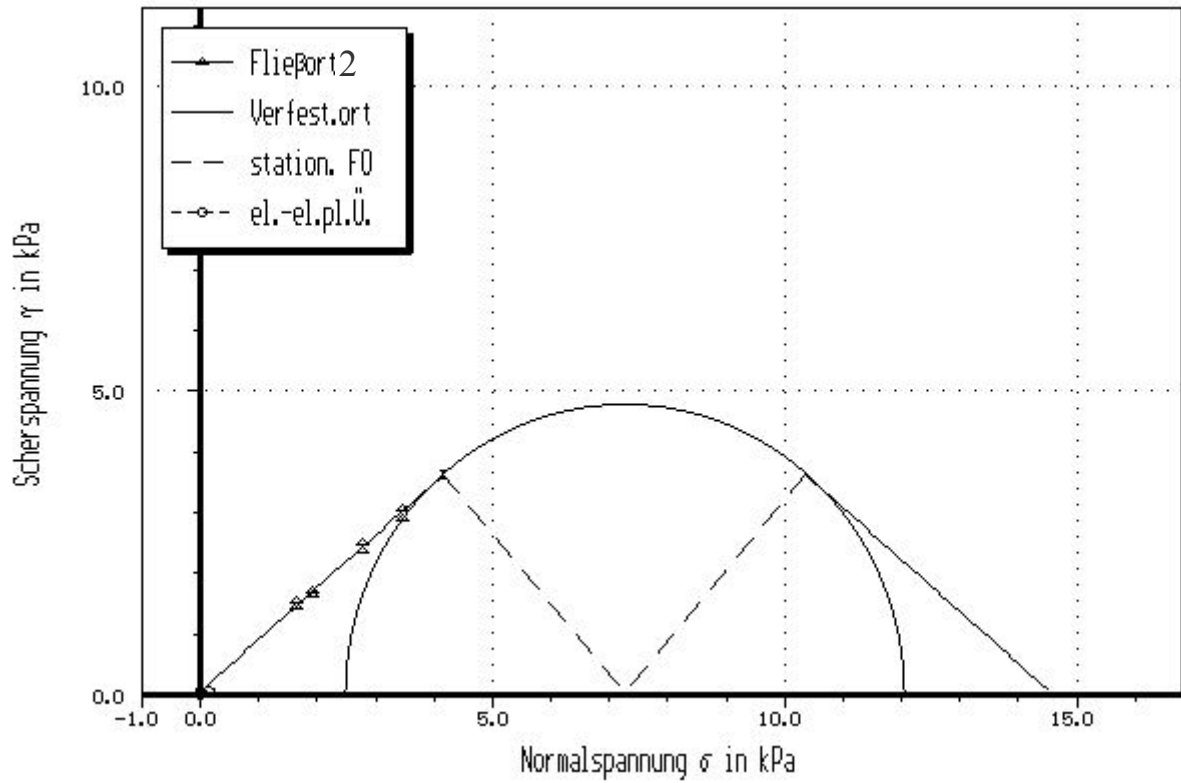


Abbildung A- 29: Kalkstein,  $X_1 = 0,004$ , FO2, Verdrehwinkel der Scherzelle  $30^\circ$ ,  $f = 150$  Hz,  $v_{\max} = 20$  mm/s

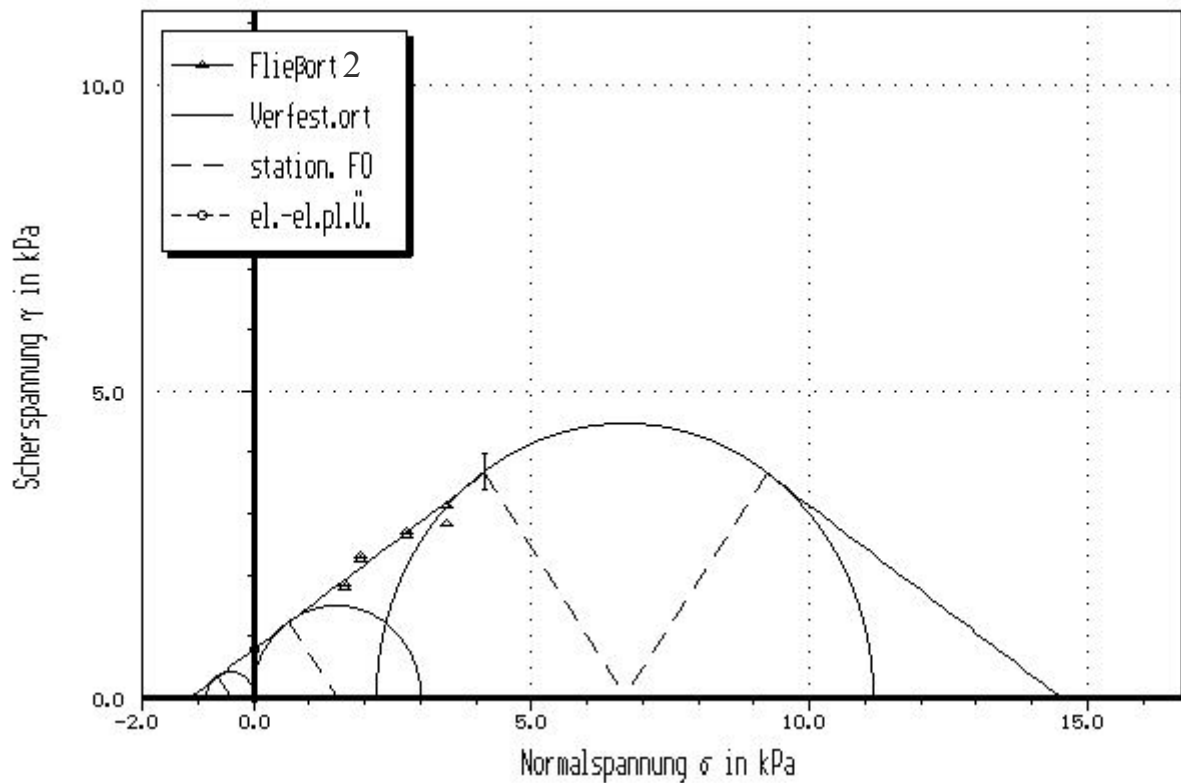


Abbildung A- 30: Kalkstein,  $X_1 = 0,004$ , FO2, Verdrehwinkel der Scherzelle  $45^\circ$ ,  $f = 50$  Hz,  $v_{\max} = 20$  mm/s

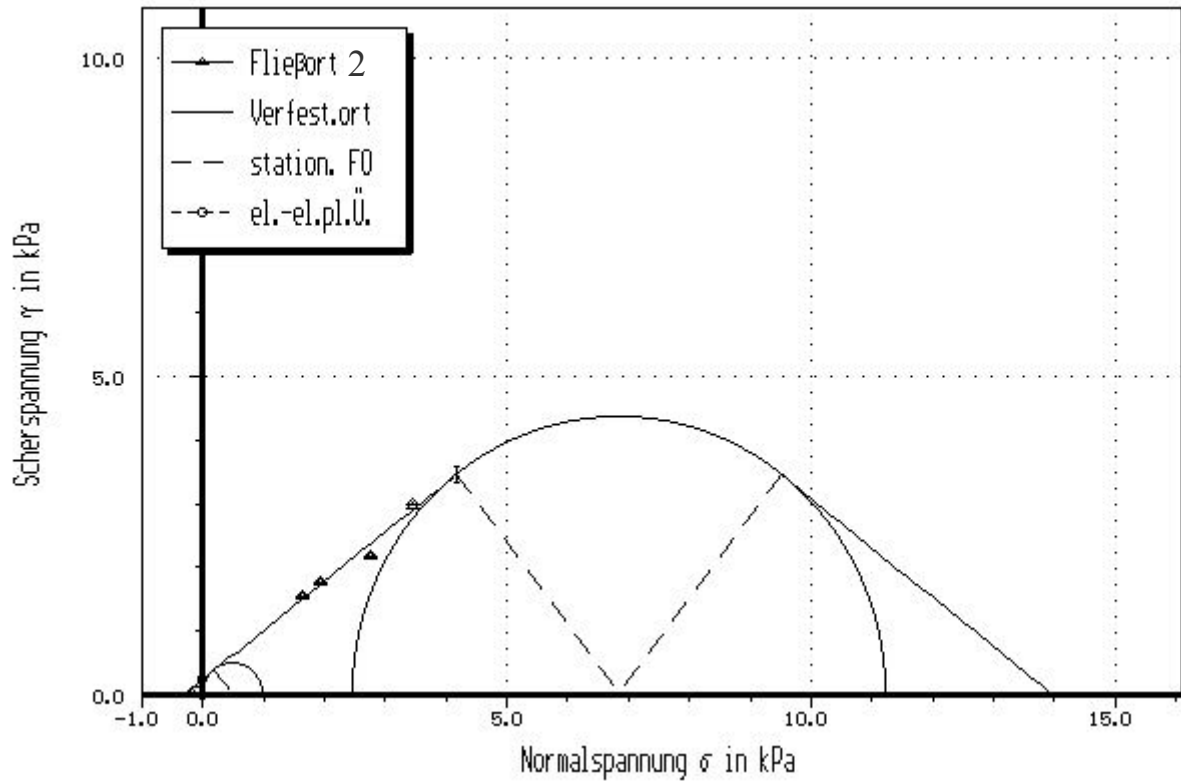


Abbildung A- 31: Kalkstein,  $X_1 = 0,004$ , FO2, Verdrehwinkel der Scherzelle  $45^\circ$ ,  $f = 100$  Hz,  $v_{\max} = 20$  mm/s

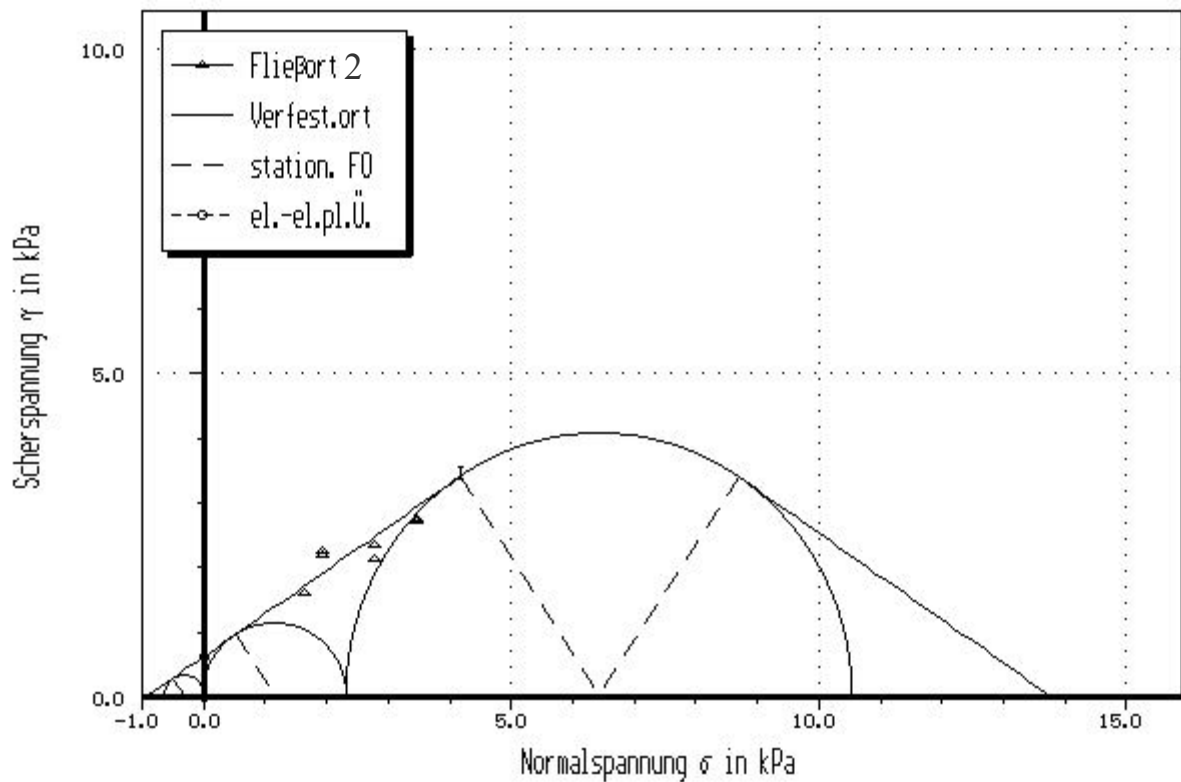


Abbildung A- 32: Kalkstein,  $X_1 = 0,004$ , FO2, Verdrehwinkel der Scherzelle  $45^\circ$ ,  $f = 150$  Hz,  $v_{\max} = 20$  mm/s

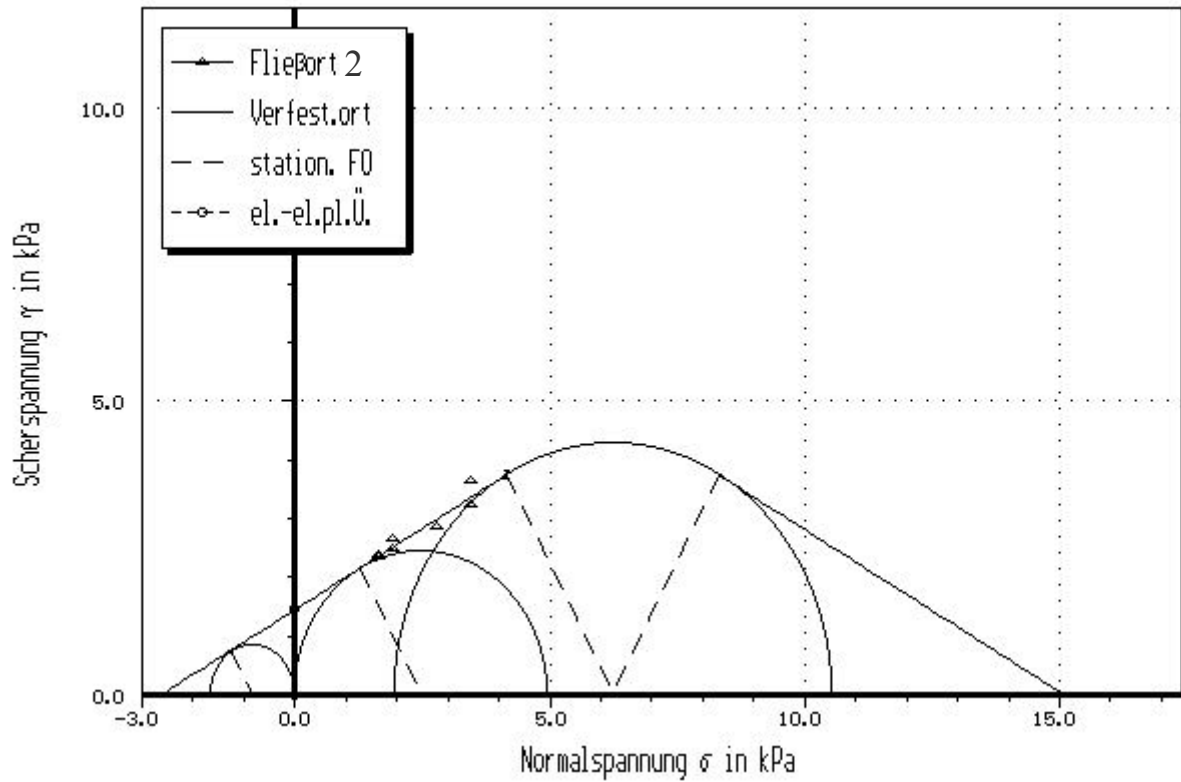


Abbildung A- 33: Kalkstein,  $X_1 = 0,004$ , FO2, Verdrehwinkel der Scherzelle  $60^\circ$ ,  $f = 50$  Hz,  $v_{\max} = 20$  mm/s

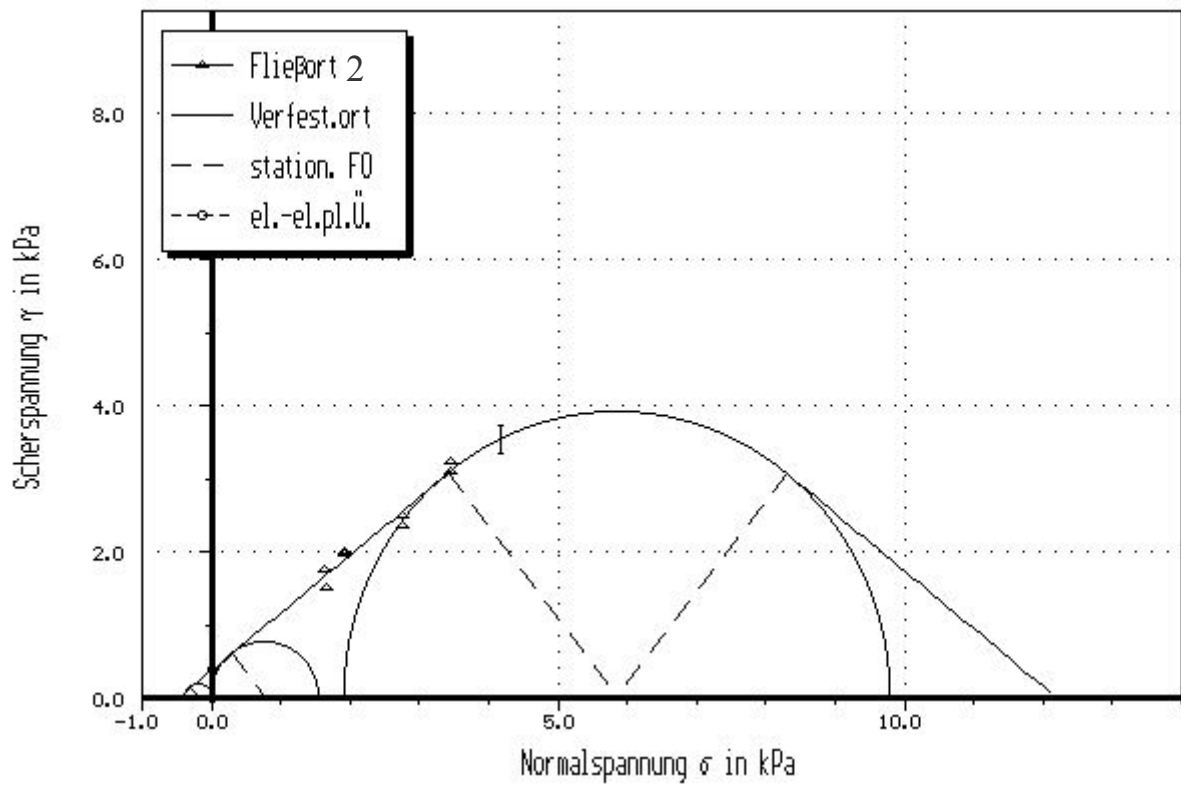


Abbildung A- 34: Kalkstein,  $X_1 = 0,004$ , FO2, Verdrehwinkel der Scherzelle  $60^\circ$ ,  $f = 100$  Hz,  $v_{\max} = 20$  mm/s

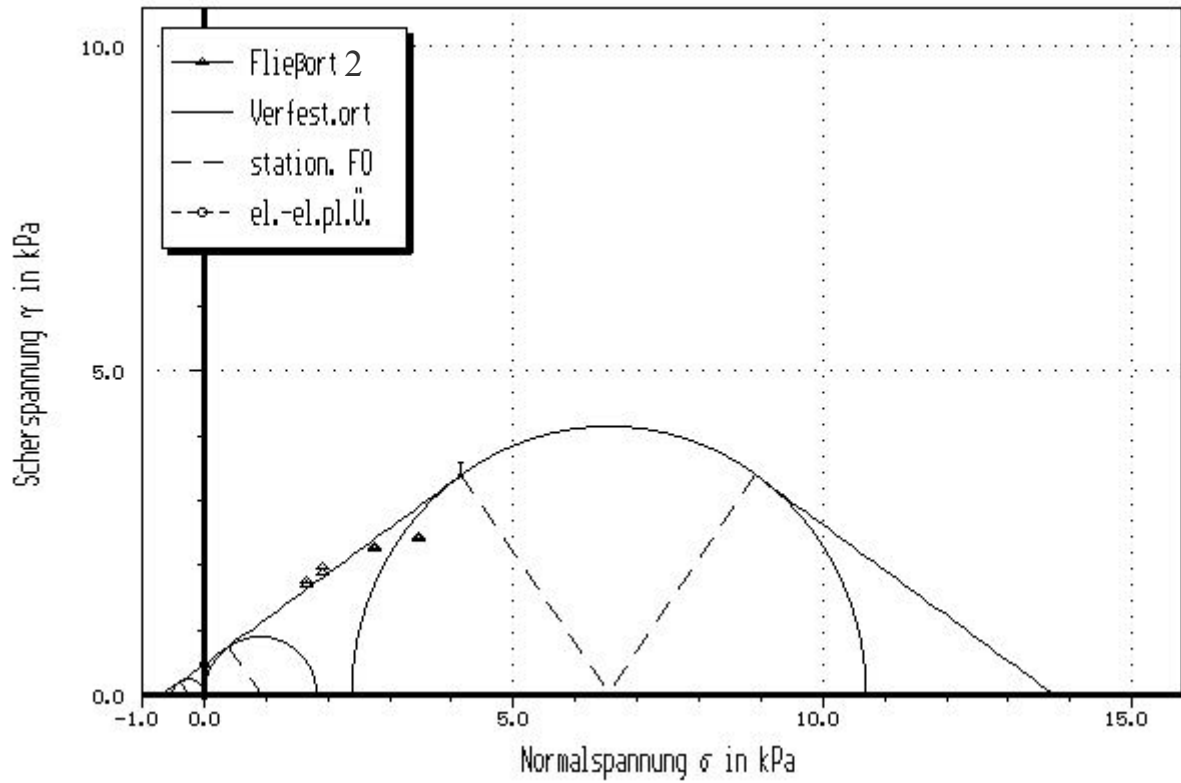


Abbildung A- 35: Kalkstein,  $X_1 = 0,004$ , FO2, Verdrehwinkel der Scherzelle  $60^\circ$ ,  $f = 150$  Hz,  $v_{\max} = 20$  mm/s

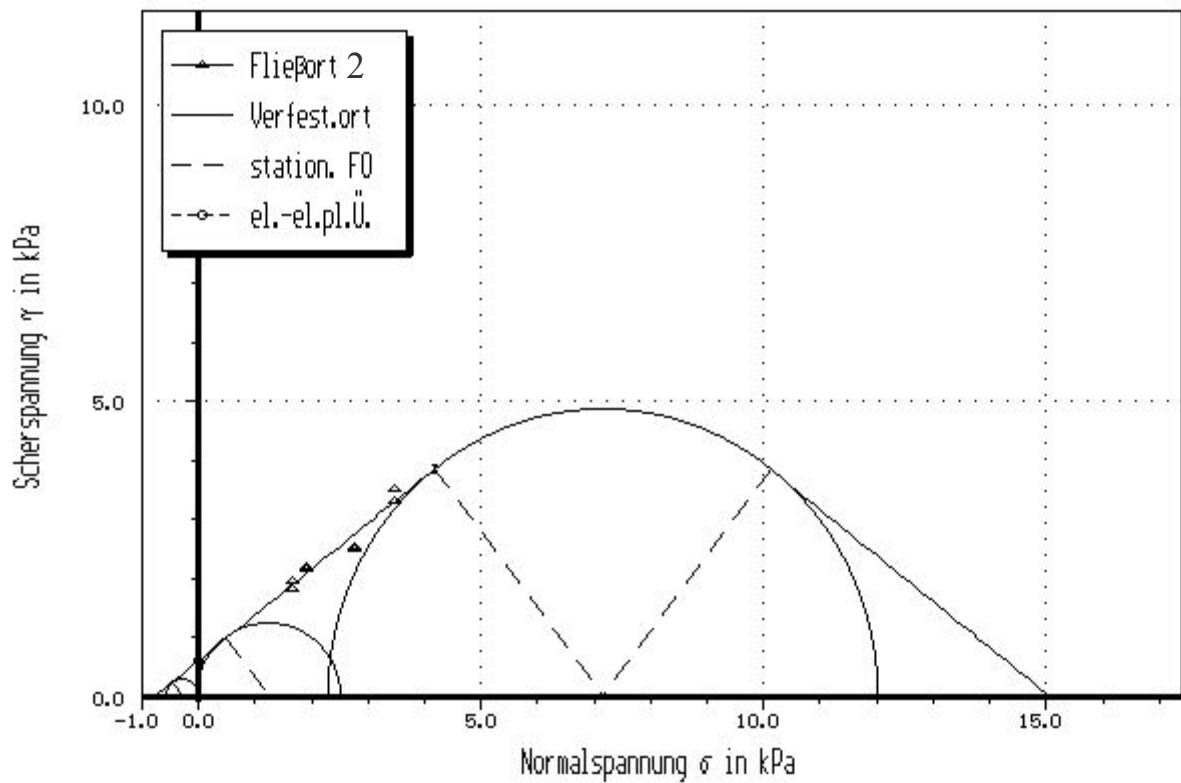


Abbildung A- 36: Kalkstein,  $X_1 = 0,004$ , FO2, Verdrehwinkel der Scherzelle  $75^\circ$ ,  $f = 50$  Hz,  $v_{\max} = 20$  mm/s

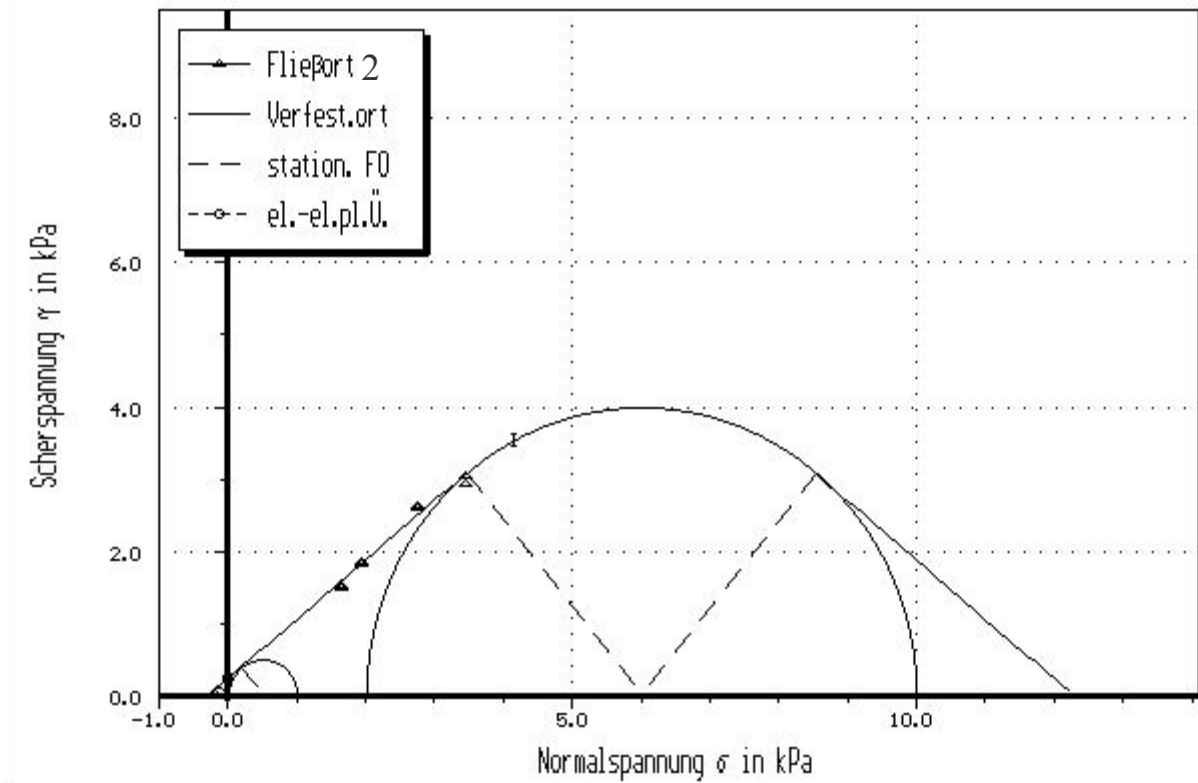


Abbildung A- 37: Kalkstein,  $X_1 = 0,004$ , FO2, Verdrehwinkel der Scherzelle  $75^\circ$ ,  $f = 100$  Hz,  $v_{\max} = 20$  mm/s

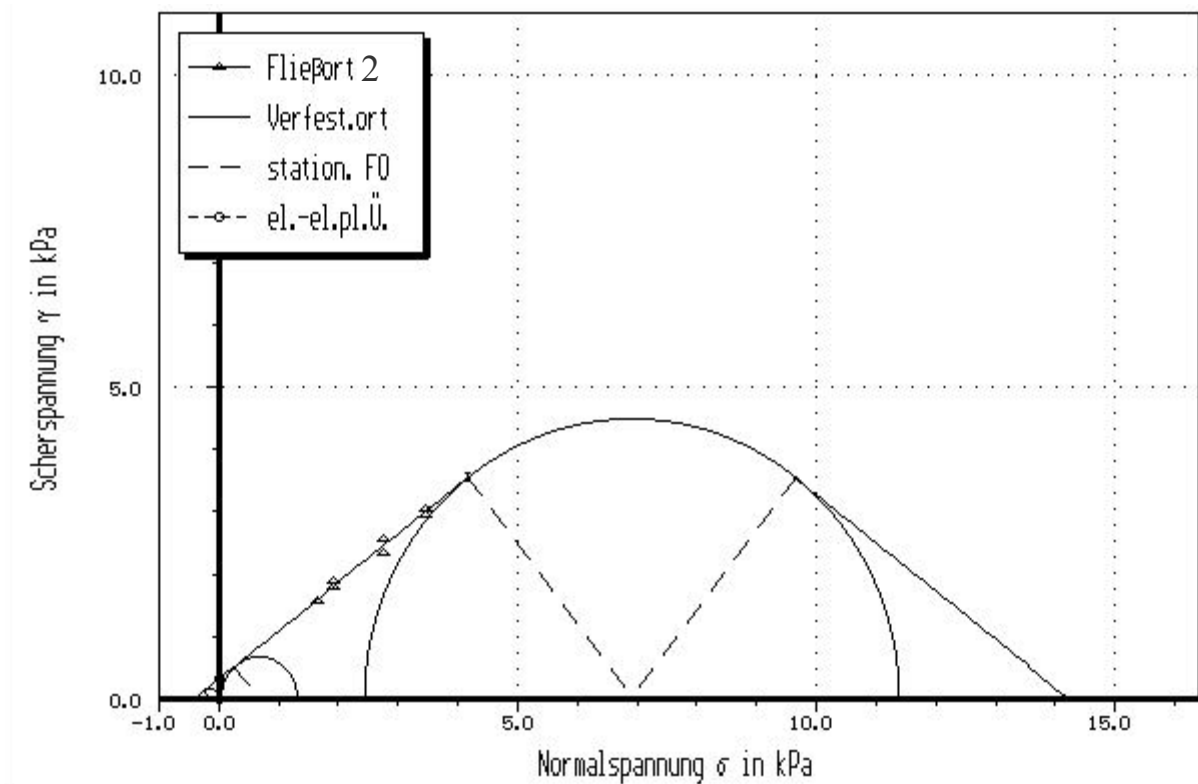


Abbildung A- 38: Kalkstein,  $X_1 = 0,004$ , FO2, Verdrehwinkel der Scherzelle  $75^\circ$ ,  $f = 150$  Hz,  $v_{\max} = 20$  mm/s

# Lebenslauf

## *Persönliche Daten*

Name, Vornamen: Haack, Aimo Dirk  
Geboren am: 25. Januar 1974  
Geburtsort: Haldensleben  
Familienstand: verheiratet, eine Tochter, ein Sohn

## *Ausbildung*

07/1992 Allgemeine Hochschulreife am „Cracauer Gymnasium“,  
Magdeburg  
08/1992 – 01/1996 Ausbildung zum Kommunikationselektroniker in der Fachrich-  
tung Telekommunikationstechnik  
bei der Deutschen Telekom AG, Magdeburg  
10/1997 – 08/2002 Studium der Verfahrenstechnik an der  
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

## *Wehrdienst*

11/1996 – 08/1997 Grundwehrdienst in Höxter/Weser

## *Beruf*

02/1996 – 10/1996 Fernmeldemonteur bei der Deutschen Telekom AG, Magdeburg  
10/2002 – 09/2008 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Verfahrenstechnik  
der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg  
ab 10/2008 Projektingenieur bei Polysius AG, Beckum-Neubeckum