

**Anschauungsmodelle in der mathematischen Forschung  
deutscher Gelehrter 1860–1877**

**Dissertation**

zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften

(Dr. rer. nat.)

der

Naturwissenschaftlichen Fakultät II

Chemie, Physik und Mathematik

der Martin-Luther-Universität

Halle-Wittenberg

vorgelegt von

Herrn Hannes Junker

geb. am 12. Juni 1989 in Schwerin

Die Verteidigung der Arbeit erfolgte am 16. März 2023.

Gutachter:

Prof. Dr. Karin Richter

Prof. Dr. Frank Loose

Prof. David Rowe (PhD)

<b>I</b>	<b>Anschauungsmodelle in der mathematischen Forschung deutscher Gelehrter 1860–1877</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Mathematische Modelle im 19. Jahrhundert</b>	<b>15</b>
2.1	Polytechnische Tradition . . . . .	16
2.2	Anfänge des wissenschaftlichen Modellbaus 1860–1877 . . . . .	20
2.3	Hochphase des Modellbaus 1877–1898 . . . . .	32
2.4	Niedergang des Vertriebs . . . . .	39
2.5	Zusammenfassung . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Kummers Quartiken</b>	<b>43</b>
3.1	Fresnelsche Wellenfläche . . . . .	43
3.2	Modelle von Strahlenbündeln und Brennflächen . . . . .	49
3.3	Schwarz' Gipsmodell einer Centrafläche . . . . .	58
3.4	Steiners Fläche . . . . .	61
3.5	Die Entdeckung der Kummerschen Fläche 1864 . . . . .	68
3.6	Merkwürdige Flächen vierten Grades . . . . .	71
3.7	Rohns Gestalten der Kummerschen Fläche . . . . .	74
<b>4</b>	<b>Plückersche Komplexflächen</b>	<b>81</b>
4.1	Auf dem Weg zur <i>Neuen Geometrie</i> . . . . .	82
4.2	Von quadratischen Komplexen zu Komplexflächen . . . . .	86
4.3	Plückers Klassifikation der Äquatorialflächen . . . . .	89
4.4	Die Plückerschen Holz- und Metallmodelle . . . . .	95
4.5	Kleins Dissertation . . . . .	102
4.6	Kleins Modellserie . . . . .	104
<b>5</b>	<b>Flächen dritter Ordnung</b>	<b>109</b>
5.1	Die 27 Linien . . . . .	110
5.2	Ludwig Schläfli „On the Distribution of Surfaces“ . . . . .	114
5.3	Wieners Gipsmodell . . . . .	122

5.4	Clebsche Diagonalfäche . . . . .	125
5.5	Felix Klein „Über Flächen dritter Ordnung“ . . . . .	129
5.6	Rodenbergs Modelle . . . . .	139
<b>6</b>	<b>Modelle in der wissenschaftlichen Arbeit</b>	<b>149</b>
6.1	Verwendung in der Forschungspraxis . . . . .	149
6.2	Konzeptionelle Fragen der Herstellung . . . . .	159
6.3	Aspekte der handwerklichen Konstruktion . . . . .	163
<b>7</b>	<b>Verlust der Anschauung</b>	<b>169</b>
7.1	Geordnete Erscheinungen 1820–1849 . . . . .	169
7.2	Neue Geometrien 1849–1891 . . . . .	179
7.3	Wissenschaftliche Neuorientierung nach 1891 . . . . .	196
7.4	Zusammenfassung . . . . .	201
<b>8</b>	<b>Anhang</b>	<b>205</b>
8.1	Projektive Geometrie . . . . .	205
8.2	Plückers Komplexflächen . . . . .	215
8.3	Steinersche Fläche . . . . .	220
8.4	Kummers Fadenmodell . . . . .	221
8.5	Centrafläche eines dreiachsigen Ellipsoids . . . . .	221
8.6	Kummers Drahtmodell . . . . .	222
8.7	Rohns Konstruktion . . . . .	222
	Modellverzeichnisse . . . . .	225
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>231</b>
	<b>Primärquellen</b>	<b>233</b>
	<b>Sekundärquellen</b>	<b>247</b>
	<b>Lebenslauf</b>	<b>253</b>
<b>II</b>	<b>Modellfotografien</b>	<b>261</b>



Teil I

Anschauungsmodelle in der  
mathematischen Forschung  
deutscher Gelehrter 1860–1877



# 1. Einleitung

Das Institut für Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg verfügt über eine umfangreiche Sammlung mathematischer Anschauungsmodelle aus dem ausgehenden 19. Jahrhundert. Der gesamte Bestand umfasst mehr als 200 Objekte – hierunter Gipsformen, Fadenkonstruktionen und Drahtgestelle – aus verschiedenen Materialien und unterschiedlicher Größe, von denen viele in Vitrinen des Institutes ausgestellt sind. Trotz ihres Alters sind die meisten Anschauungsmodelle der Sammlung in einem guten Zustand. Dem Betrachter geben sie immer noch Auskunft über eine Periode in der Geschichte der Mathematik, in der die Veranschaulichung geometrischer Formen eine besondere Bedeutung besaß. Die Objekte werfen historische Fragen auf, denen in dieser Dissertation nachgegangen wird.

## Forschungsstand

In den vergangenen Jahren riefen geometrische Modelle verstärkt wissenschaftliches Interesse hervor. Die historische Forschung befasste sich vorrangig mit der Zeit nach 1877, in der die Objekte vornehmlich als Lehrmittel große Verbreitung fanden. Anja Sattelmacher beschäftigte sich in ihrer Dissertation, die im vergangenen Jahr (2021) erschienen ist, mit kulturwissenschaftlichen Aspekten der Geschichte mathematischer Modelle.<sup>1</sup> Sie betrachtet die Entwürfe als Ausdruck einer Wissens- und Ausstellungskultur des ausgehenden 19. Jahrhunderts. Die wissenschaftliche Verwendung der Modelle spielt bei ihr indes nur eine untergeordnete Rolle. Weitaus näher an dem Thema der vorliegenden Arbeit ist ein Sammelband, der anlässlich einer Ausstellung mathematischer Modelle der Tübinger Universität im Jahr 2018 erschienen ist.<sup>2</sup> Der Katalog versammelt mehrere Beiträge, in denen auch auf die wissenschaft-

<sup>1</sup> Sattelmacher, Anja. *Anschauen, Anfassen, Auffassen: Eine Wissensgeschichte Mathematischer Modelle*. Mathematik im Kontext. Berlin Heidelberg: Springer Spektrum, 2021.

<sup>2</sup> Seidl, Ernst, Loose, Frank und Bierende, Edgar, Hrsg. *Mathematik mit Modellen: Alexander von Brill und die Tübinger Modellsammlung*. Schriften des Museums der Universität Tübingen. Tübingen: Verlag Museum der Universität Tübingen, 2018.

liche Verwendung der Objekte eingegangen wird.<sup>3</sup> Neben den längeren Artikeln sind kürzere Texte einzelnen Modellserien gewidmet, wobei Fragen zur Provenienz im Mittelpunkt stehen. Die Beiträge legen allerdings weniger Gewicht auf eine Einordnung der Objekte in den mathematischen Entstehungskontext.

Der Mathematikhistoriker David E. Rowe hat sich mit verschiedenen Modellen der Jahre 1860–1890 befasst.<sup>4</sup> In seinen Artikeln hat er den wissenschaftlichen Kontext erhellt, in dem die betrachteten Entwürfe entstanden sind. Außerdem wies Rowe nachdrücklich darauf hin, dass viele Modelle wissenschaftlichen Zwecken dienen, bevor sie in der Lehre Verwendung fanden. Sein Blick richtet sich jedoch weniger auf übergreifende Fragen zur Geschichte der Anschauungsmodelle. Außerhalb seines Fokus liegt auch die Problematik der geometrischen Anschauung, welche mit der Konzeption und Verwendung der Objekte verbunden ist. Vor Rowe hatte bereits Herbert Mehrtens auf die heuristische Bedeutung der Objekte in Felix Kleins Untersuchungen hingewiesen.<sup>5</sup> Jüngst hob Klaus Volkert die Bedeutung der polytechnischen Tradition für die Praxis des wissenschaftlichen Modellbaus hervor.<sup>6</sup> Er wirft Licht auf die Zeit vor 1860, in der Modelle an Technischen Hochschulen bereits für Lehr- und Übungszwecke Verwendung fanden. Neben den genannten Artikeln gibt es einige Beiträge zu Personen, die als Hersteller und Förderer von Modellen auftraten.<sup>7</sup> Des Weiteren sind einige Übersichtsartikel zu dem mathematischen Modellbau

<sup>3</sup> Loose, Frank. „Bahnbrechende Ideen in der Geometrie“. In: *Mathematik mit Modellen: Alexander von Brill und die Tübinger Modellsammlung*. Hrsg. von Seidl, Ernst, Loose, Frank und Bierende, Edgar. Schriften des Museums der Universität Tübingen. Tübingen: Verlag Museum der Universität Tübingen, 2018.

<sup>4</sup> Rowe, David E. „Mathematical Models as Artefacts for Research: Felix Klein and the Case of Kummer Surfaces“. In: *Mathematische Semesterberichte* 60.1 (2013); Rowe, David E. „On Models and Visualizations of Some Special Quartic Surfaces“. In: *The Mathematical Intelligencer* 40.1 (2018).

<sup>5</sup> Mehrtens, Herbert. „Mathematical Models“. In: *Models: The Third Dimension of Science*. Hrsg. von Chadarevian, Soraya de und Hopwood, Nick. Stanford University Press, 2004.

<sup>6</sup> Volkert, Klaus. „Mathematische Modelle und die polytechnische Tradition“. In: *Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik*. Hrsg. von Krömer, Ralf und Nickel, Gregor. Bd. 10. Siegen: Universitätsverlag Siegen, 2018.

<sup>7</sup> Barrow-Green, June. „Knowledge gained by experience”: Olaus Henrici—Engineer, Geometer and Maker of Mathematical Models“. In: *Historia Mathematica* 54 (2021); Hervé, J. M. „Théodore Olivier (1793–1853)“. In: *Distinguished Figures in Mechanism and Machine Science: Their Contributions and Legacies*. Hrsg. von Ceccarelli, Marco. History of Mechanism and Machine Science. Springer Netherlands, 2007; Bierende, Edgar. „Geometrie gegossen in Gips“. In: *Mathematik mit Modellen: Alexander von Brill und die Tübinger*

in verschiedenen Ländern erschienen.<sup>8</sup>

Die angeführten Arbeiten haben das Verständnis für die Herkunft und Bedeutung vieler Modelle aus der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts verbessert. Inzwischen ist bekannt, dass die Objekte im weitaus größeren Maße wissenschaftliche Instrumente waren, als es lange Zeit vermutet wurde. An diese Erkenntnisse schließt die vorliegende Arbeit an. In ihrem Fokus steht die Herstellung und Verwendung geometrischer Anschauungsmodelle in der mathematischen Forschung während der Zeit 1860–1877. Sie öffnet jedoch auch den Blick für die historische Verflechtung dieser Praxis mit verschiedenen Entwicklungen, welche die Geschichte der Geometrie während des 19. Jahrhunderts prägten. Hierbei werden wesentliche Motive herausgearbeitet, die das Interesse an handgreiflichen Objekten zur Veranschaulichung geometrischer Gegenstände während jener Zeit prägten, wodurch die Geschichte der Modelle in einem neuen Licht erscheint. Ausgehend von den Anschauungsmodellen wird überdies nachgezeichnet, wie sich der Blick deutscher Gelehrter auf die Geometrie während des 19. Jahrhunderts wandelte.

## Historischer Hintergrund

Der Bau mathematischer Modelle etablierte sich Ende des 18. Jahrhunderts in Frankreich im Umfeld der *École polytechnique*. Nach 1860 begannen auch deutsche Gelehrte, sich der Technik zu bedienen, um Flächen zu veranschaulichen, mit deren Untersuchung sie befasst waren. Die ersten Modelle jener Zeit wurden für die Forschung hergestellt. Die Geometer nahmen ihre Entwürfe aber auch zu Vorträgen bei Versammlungen und Sitzungen wissenschaftlicher Akademien mit, wo sie die Ergebnisse ihrer Arbeit vorstellten. Im Laufe der 1860er Jahre fand die Konstruktion von Modellen als Praxis langsam Verbreitung unter deutschen Mathematikern. Neue Entwürfe wurden im kleinen Maßstab vervielfältigt und ihre Erscheinung in Fachzeitschriften angekündigt. Mitte der 1870er Jahre lässt sich dann eine gewisse Professionalisierung der Modellherstellung beobachten.

*Modellsammlung*. Hrsg. von Seidl, Ernst und Loose, Frank. Schriften des Museums der Universität Tübingen. Tübingen: Verlag Museum der Universität Tübingen, 2018.

<sup>8</sup> Giacardi, Livia. „Models in Mathematics Teaching in Italy (1850–1950)“. In: *Mathematics and Arts III*. Hrsg. von Bruter, Claude Paul. Cassini, 2015; Kidwell, Peggy A. „American Mathematics Viewed Objectively: The Case of Geometric Models“. In: *Vita Mathematica: Historical Research and Integration with Teaching*. Hrsg. von Calinger, Ronald. Cambridge: Cambridge University Press, 1996; Palladino, Nicla. „I modelli matematici costruiti per l’insegnamento delle matematiche superiori pure e applicate.“ In: *Ratio Mathematica* 19 (2009).

An der Technischen Hochschule in München wurde 1875 auf Bestreben Felix Kleins eine Werkstatt eingerichtet, in der Studenten als Seminararbeit Modelle anfertigten. Wenig später organisierte eine Darmstädter Verlagshandlung den Vertrieb der studentischen Entwürfe innerhalb und außerhalb des Deutschen Reichs. Sie wendete sich zuerst an wissenschaftliche Kreise. An Hochschulen und Universitäten wurden Modellsammlungen angelegt, wodurch die Modelle an Popularität gewannen. In den 1880er Jahren fanden sie als Lehrmittel für den höheren Unterricht großen Absatz. Gleichzeitig jedoch entstanden immer seltener neue Entwürfe für die Forschung. Das Münchener Projekt schief nach dem Weggang von Alexander Brill und Felix Klein ein, die gemeinsam das Modellierkabinett aufgebaut hatten. Andernorts fand die Idee nur wenig Nachahmung. Spätestens 1890 zeichnete sich ein Nachlassen des Interesses an Anschauungsmodellen geometrischer Formen unter Mathematikern ab. Neue Entwürfe entstanden in Deutschland fast nur noch für die Lehre.

Die Praxis des wissenschaftlichen Modellbaus blieb während der Jahre 1860–1890 nicht auf die deutschen Länder beschränkt, besaß dort jedoch ihr Zentrum. Unter den Konstrukteuren finden sich prominente Namen wieder. Zu den Pionieren auf dem Gebiet des Modellbaus gehörten Ernst Kummer, Julius Plücker, Felix Klein, Hermann Amandus Schwarz und Christian Wiener. Außerhalb Deutschlands waren es Arthur Cayley und Giuseppe Veronese, die in ihren Heimatländern die Entwurfspraxis bekannt machten. In Frankreich gab es seit dem ausgehenden 18. Jahrhundert wiederum eine eigenständige Tradition, was Gegenstand eines anderen Promotionsvorhabens an der Universität Halle ist. Obwohl die Herstellung geometrischer Modelle dort auch nach der Jahrhundertmitte weiterging, entstanden jenseits des Rheins nur wenige Entwürfe für wissenschaftliche Zwecke.

Die Geschichte der Objekte ist innig verwoben mit den Entwicklungen der Mathematik während des 19. Jahrhunderts. Die Modelle führten den Gelehrten vor Augen, was sich ihrem unmittelbaren Vorstellungsvermögen entzog. Sie vermittelten ihnen ein anschauliches Bild der geometrischen Formen und Zusammenhänge, mit deren Untersuchung sie befasst waren. Die Herstellung von Anschauungsmodellen war ein wichtiges Hilfsmittel geometrischer Forschung. Die Modelle waren jedoch nicht nur Instrumente sondern auch Produkte wissenschaftlicher Arbeit. Die Konstruktion eines Modells verlangte mehr als nur handwerkliches Geschick. Sie hielt Probleme bereit, deren Überwindung weitreichende Überlegungen verlangte. Oftmals war nicht einmal eine Gleichung des Gebildes bekannt, das dargestellt werden sollte. In diesem Fall musste erst eine passende Methode entwickelt werden, mit der sich ein Modell anfertigen ließ. Nicht selten vergingen Jahre nach der Entdeckung einer interessanten geometrischen Fläche bis zu ihrer Veranschaulichung durch eine

handgreifliche Form. In dem Problem der mathematischen Konstruktion spiegeln sich auch die inneren Widersprüche der Geometrie, die im Laufe des 19. Jahrhunderts immer abstraktere Züge annahm. Die Anschauungsmodelle werfen jedoch nicht nur Licht auf die Entwicklung der Wissenschaft während dieser Zeit, sie geben auch Auskunft über die damalige Arbeits- und Sichtweise deutscher Geometer. Als Mittel der Veranschaulichung reflektieren sie den Blick, mit dem die Gelehrten den Gegenstand ihrer Forschung betrachteten.

### **Forschungsfragen und -ziele**

Das Augenmerk dieser Arbeit liegt auf den wissenschaftlichen Aspekten des mathematischen Modellbaus. Im Zentrum stehen die Jahre 1860–1877, in denen es noch keinen institutionalisierten Vertrieb gab, sich die Praxis jedoch im wissenschaftlichen Umfeld verbreitete. Da es vor allem deutsche Mathematiker waren, die während dieser Zeit Modelle für die Forschung herstellten, werden auf den folgenden Seiten häufig ihre Entwürfe besprochen.

Für die Arbeit werden mehrere Entwürfe aus der betrachteten Zeitspanne betrachtet, die Aufschluss über die Rolle von Anschauungsmodellen in der wissenschaftlichen Praxis deutscher Geometer geben. Für einige Modelle, wie die Entwürfe Julius Plückers, deren genaue Bedeutung bislang unbekannt war, wird erstmals eine mathematische Beschreibung gegeben. Es wird jeweils untersucht, welche wissenschaftlichen Fragen Anlass zur Anfertigung der Modelle gaben, welche Probleme ihre mathematische Konstruktion hervorrief, wie sie nach der Herstellung verwendet worden sind und welche Erkenntnisse sie vermittelten. Hierüber wird die wissenschaftliche Herstellung und Verwendung der Objekte erschlossen.

Vor dem Hintergrund dieser Fallstudien werden die historischen Wechselbeziehungen zwischen den Modellen und der Geometrie herausgearbeitet. Zum einen geht es um die Frage nach der zeitlichen Entwicklung: Warum wuchs das wissenschaftliche Interesse an mathematischen Anschauungsmodellen nach 1860 und weshalb nahm es bereits dreißig Jahre später wieder ab? Zum anderen wird die geographische Verbreitung des wissenschaftlichen Modellbaus problematisiert: Wieso konzentrierte sich die Praxis in den Jahren 1860–1890 vor allem auf die deutschsprachigen Länder Mitteleuropas? Diese Fragen lenken den Blick auf die Geschichte der Geometrie während des 19. Jahrhunderts. Am Ende der Arbeit werden die wissenschaftlichen Motive aufgezeigt, welche für die Entwicklung und Verbreitung des mathematischen Modellbaus nach 1860 in Deutschland von besonderer Wichtigkeit waren.

Die Ziele der vorliegenden Dissertation lassen sich folgendermaßen zusammenfassen: (1.) die Untersuchung der Herstellung und Verwendung geometrischer Modelle

für wissenschaftliche Zwecke nach 1860, (2.) die Einordnung dieser Praxis in den wissenschaftshistorischen Zusammenhang und (3.) die Beschreibung ausgewählter und bislang wenig verstandener Objekte.

### **Umsetzung, Methoden und Quellen**

Die vorliegende Arbeit stützt sich auf die Auswertung verschiedenster Quellen, allen voran auf die Betrachtung der Modelle selbst. Von den meisten Objekten gibt es immer noch Exemplare in verschiedenen Sammlungen deutscher Universitäten. Trotz fehlerhafter Konstruktionen, altersbedingter Schäden und fragwürdiger Ausbesserungen befinden sich viele Modelle noch immer in einem guten Zustand. Die Objekte geben wichtige Hinweise auf den wissenschaftlichen Hintergrund, in dem sie entstanden sind, aber auch auf die Sicht der Konstrukteure.

Um die Bedeutung der Modelle zu ergründen, wurden historische Quellen genutzt. In erster Linie waren dies wissenschaftliche Abhandlungen, die häufig zusammen mit den Objekten veröffentlicht worden sind, aber auch Herstellerannoncen und Verlagsangaben. Auskunft gaben nicht zuletzt die Forschungsartikel, in denen die Ergebnisse der Untersuchungen erschienen sind. Sie halfen auch dabei, die Gestalt und Bedeutung der Modelle zu rekonstruieren, wenn genaue Angaben fehlten. Auf diesem Wege entstanden einige virtuelle Nachbildungen der Modelle mithilfe von Computer-Algebra-Systemen, welche die Originalformen veranschaulichen. In der Arbeit sind teilweise Ansichten dieser Computergrafiken verwendet worden, um gewisse Aspekte der betrachteten Modelle hervorzuheben.

Um die Herstellung und Verwendung der Entwürfe zu erschließen, wurden verschiedene Arten historischer Textquellen herangezogen. Die Verlage versendeten zusammen mit den Modellen auch Abhandlungen, die auf den mathematischen Hintergrund eingehen und Informationen zur Entstehung der Objekte enthalten. Verschiedene Exemplare dieser Beitexte befinden sich noch heute in den Archiven der Tübinger Universität. Auch am Deutschen Museum in München fanden sich einige nützliche Unterlagen zu verschiedenen Modellen. Anlässlich mehrerer Ausstellungen wissenschaftlicher Instrumente und Modelle Ende des 19. Jahrhunderts sind Kataloge erschienen, die Teil der Recherche waren.

Außerdem wurden die Modelle häufig nach ihrer Fertigstellung in wissenschaftlichen Akademien präsentiert. Die Mitglieder nutzten regelmäßig Sitzungen, um über ihre Forschung Mitteilung zu machen. Die Berichte der Treffen geben Auskunft über den wissenschaftlichen Entstehungskontext der Objekte. Nicht selten enthalten sie Angaben zur mathematischen Konstruktion. Zuweilen ließen sie auch Rückschlüsse auf die Motive der Hersteller und die Verwendung der Modelle zu. Sie bildeten

neben den Verlagsmaterialien die wichtigste Quelle für die vorliegende Arbeit. Um den Hintergrund zu erhellen, vor dem die Modelle entstanden sind, waren auch die in Fachzeitschriften publizierten Abhandlungen hilfreich, in denen die Forschungsergebnisse veröffentlicht worden sind.

Private Notizen und Korrespondenzen spielten insgesamt nur eine untergeordnete Rolle. Mit der Arbeit soll weniger die persönliche Sicht der Akteure – Forscher, Konstrukteure und Verleger – ergründet werden, als vielmehr der historische und wissenschaftliche Zusammenhang, in dem sie wirkten. Deswegen wurde vor allem auf publizierte Äußerungen zurückgegriffen, auch wenn zuweilen Passagen aus Briefwechseln und Tagebüchern zitiert werden, wenn sie ein besonderes Licht auf die Modelle und deren Entstehungskontext werfen.

## **Aufbau**

Am Anfang der Arbeit wird ein Abriss über die Geschichte der mathematischen Modelle im 19. Jahrhundert gegeben, um den wissenschaftsgeschichtlichen Kontext zu erhellen. Danach wird anhand verschiedener Beispiele aus der Zeit 1860–1877 die Herstellung und Verwendung von Anschauungsmodellen in der wissenschaftlichen Praxis untersucht. Hierfür werden zuerst Entwürfe Ernst Kummers, Hermann Schwarz', Arthur Cayleys und Karl Rohns betrachtet, die im Zusammenhang zur Erforschung quartischer Flächen stehen. Anschließend folgen Entwürfe von Julius Plücker und Felix Klein zur Theorie quadratischer Linienkomplexe. Schlussendlich werden mehrere Modelle besprochen, mit denen Christian Wiener, Wilhelm Fiedler und verschiedene Schüler Felix Kleins Flächen der dritten Ordnung dargestellt haben. Nach dieser Betrachtung folgt ein Kapitel, in dem wissenschaftliche Aspekte des Modellbaus und -gebrauchs untersucht werden. Am Ende der Arbeit geht es um die wissenschaftshistorischen Verbindungen zwischen den Objekten und der Geometrie.



## 2. Mathematische Modelle im 19. Jahrhundert

Die Geschichte mathematischer Anschauungsmodelle für die höhere Mathematik weist zurück in die Zeit der Französischen Revolution. Nach der Gründung der Pariser *École polytechnique* im Jahr 1794 gewannen die Objekte als Lehrmittel in der Ausbildung von Ingenieuren eine zentrale Bedeutung. In der Darstellenden Geometrie übten die Schüler mithilfe von Modellen das Zeichnen räumlicher Gebilde. Am Anfang des 19. Jahrhunderts gründeten sich diesseits des Rheins zahlreiche Schulen nach dem Vorbild der Pariser Schule. Im Zuge dessen verbreitete sich auch in den deutschen Ländern die Herstellung von Modellen, zuerst im Rahmen des technischen Unterrichts, nach der Jahrhunderthälfte dann auch im wissenschaftlichen Umfeld. Ab den 1860er Jahren begannen deutsche Mathematiker damit, handliche Modelle von ihren Studienobjekten anzufertigen. Ernst Kummer (1810–1893), Julius Plücker (1801–1868) und Christian Wiener (1826–1896) und ihre Schüler Hermann A. Schwarz (1843–1921) und Felix Klein (1849–1925) gehörten zu den Pionieren auf diesem Feld. Sie präsentierten ihre Entwürfe regelmäßig auf Sitzungen wissenschaftlicher Akademien. In den 1870er Jahren waren des öfteren kleinere Ausstellungen geometrischer Modelle anlässlich verschiedener Zusammenkünfte deutscher Mathematiker zu sehen. Unterdessen begannen technische Hochschulen damit, spezielle Sammlungen anzulegen und Werkstätten einzurichten. Im Jahr 1877 gründete sich in Deutschland die erste Verlagshandlung, die mathematische Modelle für Forschung und Lehre im In- und Ausland vertrieb. In dieser Zeit genoss die deutsche Wissenschaft einen ausgezeichneten Ruf. Vor allem Gelehrte aus den Vereinigten Staaten und Italien reisten nach Deutschland, um vor Ort ihre mathematische Bildung zu vertiefen.<sup>1</sup> Zwei große internationale Ausstellungen in München und Chicago des Jahres 1893 trugen zur weiteren Popularisierung des Modellbaus bei. Während immer mehr Hochschulen dies- und jenseits des Atlantiks gegen Ende des Jahrhunderts neue Lehrsammlungen anlegten, verschwanden die Anschauungsmittel langsam aus

<sup>1</sup> Siegmund-Schultze, Reinhard. „The Emancipation of Mathematical Research Publishing in the United States from German Dominance (1878–1945)“. In: *Historia Mathematica* 24.2 (1997).

der mathematischen Forschung. Als die Geometrie immer abstraktere Züge annahm, verlor sich auch das Interesse an anschaulichen Modellen. Zwar gingen die Herstellung und der Vertrieb auch nach der Jahrhundertwende weiter, ehe sie mit Beginn des ersten Weltkrieges de facto zum Erliegen kamen, aber für die wissenschaftliche Arbeit deutscher Mathematiker besaßen die Objekte nur noch wenig Wert.

## 2.1 Polytechnische Tradition

Die Geschichte des wissenschaftlichen Modellbaus im 19. Jahrhundert reicht zurück bis zur Französischen Revolution. Gaspard Monge (1746–1818), Mitbegründer der *École polytechnique* in Paris, nutzte in seinen Vorlesungen regelmäßig Modelle geometrischer Körper, um das räumliche Denken seiner Schüler zu üben. Sie fertigten technische Zeichnungen der Objekte an, um auf die Lösung praktischer Konstruktionsprobleme hinzuwirken. Die grafische Abbildung räumlicher Gebilde mithilfe von Projektionen und Schnitten bildete das zentrale Thema in Monges *Géométrie descriptive*.<sup>2</sup>

Über die Modelle, die Gaspard Monge für den Unterricht verwendet hat, ist leider nur wenig bekannt. Von den Entwürfen seines Schülers Théodore Olivier (1793–1853) sind jedoch zahlreiche Nachbauten erhalten. Sie sind von Fabre de Lagrange angefertigt worden, der vermutlich eine feinmechanische Werkstatt führte. Er verkaufte 1872 eine umfassende Sammlung dieser Kopien an das *South Kensington Museum* in London, das die Objekte für Lehrzwecke erwarb. Ein Katalog gibt detailliert Auskunft über die 45-teilige Serie.<sup>3</sup> Olivier gehörte 1829 zu den Mitbegründern der *École Centrale des Arts et Manufactures* in Paris. In dieser Zeit begann er mit der Herstellung geometrischer Lehrmodelle.<sup>4</sup> Seine Entwürfe unterscheiden sich stark von denen, die nach 1860 in den deutschen Ländern entstanden.<sup>5</sup> Es handelt sich weniger um plastische Vollkörper, sondern eher um großformatige und bewegliche Apparaturen (vgl. Abb. 2.1). Olivier verwendete häufig Fäden, um die Geradenschar von Regelflächen

<sup>2</sup> Zur Geschichte der Darstellenden Geometrie siehe: Barbin, Évelyne, Menghini, Marta und Volkert, Klaus, Hrsg. *Descriptive Geometry, The Spread of a Polytechnic Art*. International Studies in the History of Mathematics and its Teaching. Springer Cham, 2019.

<sup>3</sup> Lagrange, Fabre de und Merrifield, C. W. *A catalogue of a collection of models of ruled surfaces. With an appendix, containing an account of the application of analysis to their investigation and classification by C. W. Merrifield*. London: George E. Eyre und William Spottiswoode, 1872.

<sup>4</sup> Hervé, „Théodore Olivier (1793–1853)“, S. 297 f.

<sup>5</sup> Eine umfassende Sammlung von Oliviers Modellen befindet sich am *Musée des Arts et Métiers* in Paris. Eine Übersicht über den Bestand gibt: ebd., S. 301 f.

darzustellen. Die mechanischen Teile ließ er aus Messing fertigen, für den Unterbau griff er zu Holz. Bei der Herstellung legte er Wert darauf, dass die Gestalt der Modelle sich verändern ließ, wie aus der Einleitung eines Katalogs hervorgeht, der die Objekte bewarb: „The models are constructed with especial reference to the possibility of changing their shape, by moving some of the supports of the strings, by altering the lengths or positions of certain parts, or by converting upright forms into oblique. The possibility of deformation, as the process is technically called, greatly enhances the value of the models, by allowing them to represent a much greater variety of surfaces than if they were fixed.“<sup>6</sup> Ein bewegliches Fadenmodell Oliviers veranschaulicht etwa den Übergang vom Zylinder über das einschalige Hyperboloid hin zum Doppelkegel. Andere Objekte des französischen Mathematikers zeigen verschiedene Raumkurven als Durchschnitt zweier Regelflächen. Er nutzte die Modelle primär als Lehrobjekte.<sup>7</sup>

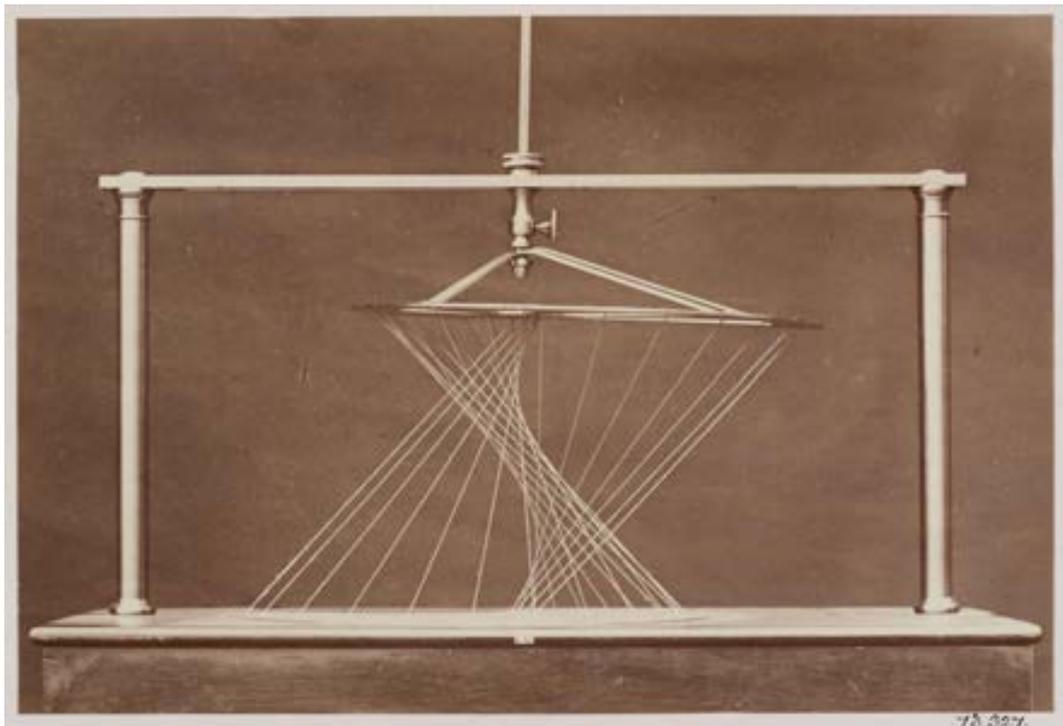
Die meisten seiner Modelle zeigen Regelflächen, mit denen sich bereits Gaspard Monge intensiv beschäftigt hat. Es handelt sich dabei um Flächen, die von einer Schar von Geraden erzeugt werden. Im technischen Bereich bilden sie zusammen mit den Rotationsflächen eine wichtige Klasse geometrischer Gebilde. Regelflächen sind in Monges *Géométrie descriptive* nicht zuletzt deshalb von Interesse, weil sie Projektionen beschreiben. Die einzelnen Geraden stehen hierbei für die Strahlen der zugehörigen Abbildung. *Surface réglée* treten vielerorts auch in der geometrischen Optik auf, darüber hinaus jedoch auch in der Mechanik. Einerseits besitzen Regelflächen einen technischen Vorteil gegenüber anderen Flächen, weil sie sich mithilfe steifer und gerader Elemente formen lassen. Dies begründet auch das Interesse an ihnen in der Architektur. Andererseits sind sie für mechanische Systeme von Bedeutung.<sup>8</sup> Michel Chasles (1793–1880), ein Zeitgenosse Oliviers, formulierte 1830 ein Theorem, das wohl zuerst von dem Italiener Giulio G. Mozzi (1730–1813) aufgestellt worden ist.<sup>9</sup> Es besagt, dass sich die Bewegung eines starren Körpers auffassen lässt

<sup>6</sup> Lagrange und Merrifield, *A catalogue of a collection of models of ruled surfaces. With an appendix, containing an account of the application of analysis to their investigation and classification by C. W. Merrifield*. S. 4.

<sup>7</sup> Xavier, João Pedro und Pinho, Eliana Manuel. „Olivier String Models and the Teaching of Descriptive Geometry“. In: *Dig where you stand 4: Proceedings of the Fourth International Conference on the History of Mathematics Education, September 23-26, 2015, at University of Turin, Italy*. Hrsg. von Bjarnadóttir, Kristín u. a. Rom: Edizioni Nuova Cultura, 2017.

<sup>8</sup> Darauf weist J. M. Hervé hin: Hervé, „Théodore Olivier (1793–1853)“, S. 313.

<sup>9</sup> Chasles, Michel. „Note sur les propriétés générales du système de deux corps semblables entr’eux“. In: *Bulletin des Sciences Mathématiques, Astronomiques, Physiques et Chimiques* 14 (1830).



**Abb. 2.1:** Die Fotografie zeigt ein Modell Fabre de Lagranges aus der Sammlung des South Kensington Museums. Foto: Isabel Agnes Cowper, 1872. © Victoria and Albert Museum, London

als Kombination einer Bewegung entlang und einer Rotation um eine gerade Linie.<sup>10</sup> Zusammen entspricht dies einer Schraubenbewegung um eine Achse. Die kontinuierliche Bewegung eines Körpers lässt sich so durch eine einparametrische Familie von Linien beschreiben, die zusammen eine Regelfläche bilden.<sup>11</sup>

Viele von Oliviers Konstruktionen fanden nach seinem Tod 1853 ihren Weg an amerikanische Universitäten, wo noch heute Sammlungen existieren.<sup>12</sup> Die von Lagrange angefertigten Nachbauten wurden zusammen mit anderen französischen Wer-

<sup>10</sup> Die Aussage ist heute als *Satz von Chasles* bekannt.

<sup>11</sup> Chasles Beitrag zur geometrischen Mechanik wird behandelt in: Ziegler, Rhenatus. *Die Geschichte der geometrischen Mechanik im 19. Jahrhundert: Eine historisch-systematische Untersuchung von Möbius und Plücker bis zu Klein und Lindemann*. Stuttgart: Franz Steiner Verlag, 1985.

<sup>12</sup> Eine größere Anzahl von Oliviers Entwürfen befindet sich am *Union College* in New York. Sie stammen aus dem Nachlass von Professor William M. Gillespie (1794–1881), der sie 1855 von Oliviers Witwe für die Lehre erworben hat: Xavier und Pinho, „Olivier String Models and the Teaching of Descriptive Geometry“, S. 410.

ken von dem Verlag Charles Delagraves (1842–1934) vertrieben, der 1865 in Paris gegründet wurde. Darunter auch die Charles Murets (1852–1910), die in Deutschland große Verbreitung fanden.<sup>13</sup>

## Die Ausgangssituation in Deutschland

Der deutsche Mathematiker Carl Gustav Jacobi (1804–1851) erinnerte sich 1835 an einen Besuch der *École polytechnique*. Sein Bericht fällt in eine Zeit, in der preußische Beamte die Gründung einer Hochschule nach französischem Muster diskutierten.<sup>14</sup> Vor einem Kreis von Gelehrten in Königsberg, wo er eine Professur innehatte, zeigte sich Jacobi beeindruckt von den praktischen Arbeiten, die in Paris zu Übungszwecken entstanden sind: „Die von den Schülern in einem Jahre angefertigten geometrischen Zeichnungen übertreffen durch ihre Zahl und Schwierigkeit jede Vorstellung. (...) Im Jahre 1829 hatte ich durch die Gefälligkeit des damaligen Studiendirectors, Herrn Binet, Gelegenheit, diese Zeichnungen selbst in Augenschein zu nehmen, die ich nicht ohne Verwunderung betrachten konnte, sowie die mancherlei Modelle in Gips und Holz, welche die Zöglinge selbst ausführen mussten.“<sup>15</sup>

Über die Modelle, die Jacobis Bericht nach an der französischen Vorzeigeschule entstanden sind, ist leider nur wenig bekannt. Es gab jedoch auch an Hochschulen in den deutschen Ländern Bemühungen, die Herstellung plastischer Anschauungsmittel in die Lehre zu integrieren. An dem Karlsruher Polytechnikum, das 1825 gegründet worden ist, ließ Guido Schreiber (1799–1871) ab 1830 seine Schüler Modelle anfertigen.<sup>16</sup> Die Verwendung geometrischer Anschauungsmittel in der Lehre war jedoch unter Schreibers Zeitgenossen nicht unumstritten. Einige seiner deutschen Kollegen lehnten den Gebrauch von Figuren und Modellen in der Lehre rundherum ab, da sie

<sup>13</sup> Murets Sortiment umfasste mehr als 600 verschiedene Modelle, wie ausgeführt wird in: Apéry, François. „The Cabinet de mathématiques of the Henri Poincaré Institute in Paris“. In: *Kwartalnik Historii Nauki i Techniki* 65.3 (2020). Die Sammlungen in Göttingen und Tübingen besitzen jeweils einige Objekte der *Collection Muret*. Einen aufschlussreichen Beitrag über Charles Muret, über den nur wenig bekannt ist, findet sich in dem Katalog zur Tübinger Ausstellung: Lehleiter, Janine. „Charles Muret“. In: *Mathematik mit Modellen: Alexander von Brill und die Tübinger Modellsammlung*. Hrsg. von Seidl, Ernst, Loose, Frank und Bierende, Edgar. Schriften des Museums der Universität Tübingen. Tübingen: Verlag Museum der Universität Tübingen, 2018.

<sup>14</sup> Lorey, Wilhelm. *Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhundert*. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner, 1916, S. 31.

<sup>15</sup> Jacobi, Carl Gustav. „Über die Pariser polytechnische Schule“. In: *Gesammelte Werke*. Hrsg. von Weierstrass, Karl. 1. Aufl. Bd. 7. Berlin: Georg Reimer, 1891, S. 363.

<sup>16</sup> Volkert, „Mathematische Modelle und die polytechnische Tradition“, S. 171.

die Ausbildung einer inneren Anschauung bei den Schülern verhindern würden. Dieser Ansicht waren etwa Bernhard Gugler (1843–1880) und Carl Wolff (1803–1861), die jeweils Lehrbücher zur Darstellenden Geometrie verfasst haben.<sup>17</sup> Trotz dieser Vorbehalte fanden die Modelle eine gewisse Verbreitung an den technischen Hochschulen. Christian Wiener, der 1851 Schreibers Nachfolge in Karlsruhe antrat, schuf ein Seminar, in dem zahlreiche Entwürfe entstanden sind.<sup>18</sup>

## 2.2 Anfänge des wissenschaftlichen Modellbaus 1860–1877

Nach 1860 begann der wissenschaftliche Modellbau in Deutschland. Ernst Kummer (1810–1893) war einer der ersten deutschen Gelehrten, der auf die handwerkliche Praxis zurückgriff, um die Gegenstände seiner Forschung zu veranschaulichen. Der Professor an der Berliner Universität präsentierte in den 1860er Jahren regelmäßig Entwürfe bei Sitzungen der *Preußischen Akademie der Wissenschaften* in Berlin. Auch Julius Plücker (1801–1868), der in Bonn einen Lehrstuhl innehatte, begann in jener Zeit mit der Herstellung eigener Modelle, die er bei verschiedenen Vorträgen präsentierte. Die Arbeiten der beiden deutschen Mathematiker besitzen nur wenig Ähnlichkeit mit den großformatigen und mechanischen Fabrikaten Théodore Oliviers.

### Instrumente der Wissenschaft

Ernst Kummer und Julius Plücker begründeten eine eigenständige Praxis des wissenschaftlichen Modellbaus, die von ihren Schülern Hermann Amandus Schwarz (1843–1921) und Felix Klein (1849–1925) in den 1870er Jahren fortgeführt worden ist. Sie bildete sich im Umfeld geometrischer Studien aus, die ab 1860 von deutschen Mathematikern durchgeführt worden sind.

Ziel dieser Untersuchungen war die Erforschung unbekannter Kurven und Flächen. Obwohl diesen Studien oftmals ein rein geometrisches Interesse an der Gestalt zugrunde lag, gaben zuweilen auch physikalische Arbeiten den Anstoß für die Betrachtungen. Insbesondere Forschung auf dem Gebiet der Optik lenkte die Aufmerk-

<sup>17</sup> Nadine Benstein untersuchte die Ausgestaltung des Fachs an deutschen Hochschulen. In ihrer Dissertation zeigt sie auch, dass es über die Verwendung von Anschauungsmodellen verschiedene Ansichten gab: Benstein, Nadine. „Zwischen Zeichenkunst und Mathematik: Die darstellende Geometrie und ihre Lehrer an den Technischen Hochschulen und deren Vorgängern in ausgewählten deutschen Ländern im 19. Jahrhundert“. Diss. Wuppertal: Bergische Universität Wuppertal, 2019.

<sup>18</sup> Volkert, „Mathematische Modelle und die polytechnische Tradition“, S. 171.

samkeit auf Flächen der höheren Ordnung. Ernst Kummer war bei Untersuchungen optischer Phänomene auf Brennflächen gestoßen, die er im Nachgang unter geometrischen Gesichtspunkten studierte. Im Rahmen seiner Forschung stellte er mehrere Draht- und Gipsmodelle her, die er bei Sitzungen der Berliner Akademie der Wissenschaften präsentierte, wo er über die Ergebnisse seiner Forschung sprach.<sup>19</sup> In den Jahren 1860–1872 stellte er mindestens sechsmal Modelle vor, darunter auch Entwürfe, zu denen er seinen Schüler Hermann Amandus Schwarz angeregt hat. Obwohl die Objekte ein wichtiges Anschauungsmittel bei Vorträgen waren, dienten sie nicht nur der Präsentation. Stattdessen halfen sie den Mathematikern dabei, sich eine Anschauung von den Formen zu entwickeln, deren Gestalt ihnen bis zur Herstellung eines Modells unbekannt war. Julius Plücker entwarf in den Jahren 1864–1868 mehrere Darstellungen von Flächen der vierten Ordnung, die er selbst entdeckt hatte. Die Modelle gaben ihm eine bessere Vorstellung von den Gebilden. Wie bei Ernst Kummer auch, begleitete die Herstellung der Modelle seine Forschung an den Flächen. In die Konstruktion der Objekte floss erworbenes Wissen ein, gleichzeitig verhalfen sie aber auch zu neuen Einsichten. Auch Plücker nutzte die Modelle bei Vorträgen. Er nahm mehrere Holzmodelle mit nach England, wo er 1866 beim Treffen der *British Association for the Advancement of Science* in Nottingham über seine Forschung sprach. Die Originale stießen bei dem Publikum auf reges Interesse. Nach seiner Rückkehr ließ er bei Johannes Epkens, einem Bonner Handwerker, weitere Exemplare anfertigen, die er auf Bitten nach London sandte. Sie befinden sich heute im Besitz der *London Mathematical Society*. Epkens vertrieb Plückers Modelle auf An-

<sup>19</sup> Interessanterweise schrieb der Mathematiker Kurt Hensel (1861–1941) in seiner Würdigung von Kummers Werk anlässlich dessen 100. Geburtstags: „Er hatte in hohem Maße das Talent, Figuren in der Luft mit der Hand vor seinen Zuhörern gleichsam entstehen zu lassen. Modelle benutzte er nie, sprach sich sogar über deren Gebrauch mißbilligend aus.“ Hensel, Kurt. „Kummer und sein Lebenswerk“. In: *Festschrift zur Feier des 100. Geburtstages Eduard Kummers mit Briefen an seine Mutter und an Leopold Kronecker*. Hrsg. von Berliner Mathematischen Gesellschaft. Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner, 1910, S. 16. Es ist nicht bekannt, worauf Hensel diese Aussage stützt. Womöglich bezog sich Ernst Kummers Missbilligung nur auf die Verwendung von Modellen in Vorlesungen, wenn er sie überhaupt jemals so ausgesprochen hat. Vorstellbar wäre, dass er den Gebrauch anschaulicher Modelle ablehnte, weil er sie für ungeeignet hielt, die Entwicklung der inneren Anschauung zu fördern. Diesen Gedanken teilten einige deutsche Gelehrte: Benstein, „Zwischen Zeichenkunst und Mathematik: Die darstellende Geometrie und ihre Lehrer an den Technischen Hochschulen und deren Vorgängern in ausgewählten deutschen Ländern im 19. Jahrhundert“, S. 109 ff.

frage. Mit seinen Arbeiten war er auf der Pariser Weltausstellung 1867 vertreten.<sup>20</sup> Plücker ließ außerdem noch eine umfangreiche Serie von Metallmodellen derselben Klasse von Flächen bei Johann Eigel in Köln herstellen, von denen sich heute noch Exemplare an der Universität Tübingen befinden.<sup>21</sup>

Die technische Ausarbeitung der Entwürfe übernahmen häufiger Handwerker, Instrumentenbauer und Feinmechaniker. Julius Plücker hatte gemeinsam mit seinem Assistenten Felix Klein Prototypen hergestellt, nach denen Johannes Epkens und Johann Eigel die Modelle bauten. Nicht immer waren jedoch Handwerker an der Herstellung der Anschauungsmodelle beteiligt. Ernst Kummer griff selbst zu Draht, um die Konfiguration von Kegelschnitten zu veranschaulichen, die seine Flächen charakterisiert. Christian Wiener (1826–1896), der ab 1852 in Karlsruhe eine Professur für darstellende Geometrie innehatte, stellte 1868 ein großformatiges Gipsmodell einer Fläche dritter Ordnung mit 27 Geraden her, über dessen Konstruktion er en détail Auskunft gab. Er hatte Architektur in Gießen studiert und besaß die nötigen Fertigkeiten, um den Entwurf ohne Zuhilfenahme eines Handwerkers auszuarbeiten. Wie diese Beispiele zeigen, übernahmen Mathematiker die technische Herstellung der Objekte nicht selten selbst. Die Beauftragung eines Dritten erfolgte häufig nur dann, wenn die Modelle in größerer Stückzahl vervielfältigt werden sollten.

Die regelmäßige Präsentation von Anschauungsmodellen bei mathematischen Vorträgen in den 1860er Jahren trug zur Popularisierung der Praxis bei. Einen entscheidenden Anteil daran hatte auch Plückers Assistent Felix Klein, der seinem Lehrer bei der Konstruktion seiner Modelle geholfen hat. Nach Plückers Tod 1868 veröffentlichte Klein 1871 vier neue Metallmodelle, um die bestehende Serie zu komplementieren.<sup>22</sup> Bereits im März 1870 präsentierte er einen Entwurf bei der *Physikalischen Gesellschaft zu Berlin*. Zwei Jahre später, als er Privatdozent in Göttingen war, stellte er gemeinsam mit Alfred Clebsch (1833–1872) bei einer Sitzung der *Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften* mehrere Gips- und Drahtmodelle vor, die zwei Studenten in einem Seminar unter der Leitung von Clebsch und Klein angefertigt hatten.

<sup>20</sup> Chevalier, Michel. *Rapports du jury international*. Bd. 2. Paris: Paul Dupont, 1868, S. 541.

<sup>21</sup> Eine Auskunft über die Tübinger Modelle gibt: Diedrichs, Hanna Gabriela. „Julius Plücker: Meridian- und Äquitorialflächen, vor 1866 und um 1870 sowie 1880“. In: *Mathematik mit Modellen: Alexander von Brill und die Tübinger Modellsammlung*. Hrsg. von Seidl, Ernst, Loose, Frank und Bierende, Edgar. Schriften des Museums der Universität Tübingen. Tübingen: Verlag Museum der Universität Tübingen, 2018. Weitere Metallmodelle befinden sich an den mathematischen Instituten in Göttingen und Karlsruhe. Zudem besitzt das Deutsche Museum eine Sammlung.

<sup>22</sup> Klein, Felix. *Vier Modelle zur Theorie der Linien-Complexe zweiten Grades*. 1871.

Auch bei den jährlichen Versammlungen der *Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte* sind in der Sektion der Mathematik ab dem Jahr 1863 häufiger Modelle präsentiert worden, wie es aus einem Verzeichnis der Vorträge hervorgeht.<sup>23</sup> Die Vortragstitel lassen vermuten, dass die Objekte mal selbst Gegenstand der Beiträge waren, mal aber auch zur Veranschaulichung des Vortrages dienten. Christian Wiener stellt dort 1868 sein Gipsmodell der Flächen mit 27 Geraden erstmals vor, das er im selben Jahr hergestellt hatte. Felix Klein sprach 1877 über die „Gestalten der Kummer’schen Fläche“. Bei dieser Gelegenheit zeigte er Gipsmodelle, die sein Doktorand Karl Rohn (1855–1920) während seiner Promotion zu dem Thema hergestellt hat. Es war häufig so, dass die Betreuer Entwürfe ihrer Studenten vorzeigten, wie diese Beispiele zeigen.

Der mathematische Modellbau etablierte sich in den 1860er Jahren im Zusammenhang mit geometrischen Studien. Namhafte Gelehrte begannen während dieser Zeit, eigene Entwürfe herzustellen. Währenddessen fand die Praxis langsam Verbreitung. Die Anfertigung eines Modells war jedoch eine anspruchsvolle Arbeit, die viel Zeit und ein hohes Maß an Geschick erforderte. Trotz dieser Hürden, wuchs das Interesse an der Herstellung und Verwendung der Objekte in den folgenden Jahren weiter.

## **Ausstellungen mathematischer Modelle**

Einen wesentlichen Beitrag zur Verbreitung und Anerkennung des wissenschaftlichen Modellbaus leisteten zwei Ausstellungen, bei denen viele Entwürfe zu sehen waren. Während 1873 in Göttingen die Mathematiker noch unter sich blieben, sahen drei Jahre später Tausende ihre Modelle bei einer internationalen Ausstellung über wissenschaftliche Apparate des *South Kensington Museums* in London.

### **Zusammentreffen in Göttingen 1873**

Die Modelle von Ernst Kummer, Julius Plücker, Christian Wiener und ihren Schülern waren 1873 in Göttingen zu sehen, wo die erste Ausstellung geometrischer Modelle stattfand. Anlass war das mehrtägige Zusammentreffen deutscher Gelehrter im April, bei dem die Gründung einer Vereinigung deutscher Mathematiker beschlossen werden sollte. Die Organisation der Modellausstellung übernahm Felix Klein, der

<sup>23</sup> Eine Chronologie der mathematischen Vorträge mit Titel und Referenten findet sich in: Tobias, Renate und Volkert, Klaus. *Mathematik auf den Versammlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte : 1843–1890*. Bd. 7. Schriftenreihe zur Geschichte der Versammlungen Deutscher Naturforscher und Ärzte. Stuttgart: Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft mbH, 1998.

zu jener Zeit als Privatdozent an der Göttinger Universität lehrte. Er gehörte auch einem 13-köpfigen Komitee an, das eingerichtet worden war, um die Versammlung vorzubereiten.<sup>24</sup> Während der dreitägigen Zusammenkunft war im Physikalischen Institut von Göttingen eine Sammlung mathematischer Modelle zu sehen. Wie sich einem Bericht Felix Müllers (1843–1928) in der *Voisschen Zeitung* entnehmen lässt, wurden dort auch Plückers Metallmodelle und die vier Modelle Kleins gezeigt. Kummers Schüler, Hermann Amandus Schwarz, zu jener Zeit Professor am Polytechnikum in Zürich, war ebenfalls mit Entwürfen vertreten: „Hr. Prof. Schwarz aus Zürich hatte sehr schöne Gypsmodelle der von ihm untersuchten Minimalflächen gesandt. Die Herren Ohrtmann und Müller aus Berlin hatten eine Anzahl Pariser Fadenmodelle mitgebracht, die jetzt im Besitz der kgl. Kriegsakademie sind. Leider war durch Nachlässigkeit der Eisenbahn-Verwaltung ein Transport von Gyps- und Fadenmodellen nicht zur rechten Zeit angelangt, welche Hr. Charles Muret aus Paris der Versammlung geschickt hatte. Ein ausführlicher Katalog und ein Album mit photographischen Abbildungen dieser Modelle lag zur Ansicht aus.“<sup>25</sup> Bei den Pariser Fadenmodellen handelt es sich um Arbeiten Oliviers. Neben den genannten waren auch noch Entwürfe Adolf Weilers (1815–1916) zu sehen, die 1872 in dem Göttinger Seminar unter Leitung Felix Kleins und Alfred Clebschs entstanden waren.<sup>26</sup>

### **Ausstellung am South Kensington Museum 1876**

Drei Jahre später fand dann die erste internationale Ausstellung statt, bei der auch eine Vielzahl an mathematischen Anschauungsmodellen zu sehen war. Die Schau am *South Kensington Museum* in London 1876 zeigte wissenschaftliche Apparate aus Europa und Nordamerika.<sup>27</sup> Neben vielen Instrumenten für die Lehre und Untersu-

<sup>24</sup> In dem Komitee saßen neben Felix Klein auch Alexander Brill (1842–1935), Alfred Ennper (1830–1885), Ludwig Kiepert (1846–1934), Emil Lampe (1840–1918), Adolf Mayer, Felix Müller, Friedrich Neesen (1849–1923), Max Nöther (1844–1921), Carl Ohrtmann (1839–1885), Friedrich J. P. Riecke (1794–1876), Hermann Schubert (1848–1911) und Friedrich Tietjen (1832–1895). Gutzmer, August. „Geschichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*. Hrsg. von Gutzmer, August und Mehmke, Rudolf. Bd. 10. Leipzig: B. G. Teubner, 1909, S. 2.

<sup>25</sup> Müller, Felix. „Die erste deutsche Mathematiker-Versammlung“. In: *Sonntagsbeilage der Königl. privilegierten Berlinischen Zeitung (Vossische Zeitung)* 115 (18. Mai 1873).

<sup>26</sup> Gutzmer, „Geschichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“, S. 23.

<sup>27</sup> In Belgien, Frankreich, Deutschland, Italien, den Niederlanden, Norwegen, dem Russischen Kaiserreich, der Schweiz, Österreich-Ungarn, Spanien und den Vereinigten Staaten bildeten sich Komitees, um die Beteiligung vor Ort zu organisieren: South Kensington Museum, Hrsg. *Catalogue of the Special Loan Collection of Scientific Apparatus at the South*

chungen aus den Bereichen Mechanik, Physik, Chemie, Biologie und Geologie waren auch mehrere mathematische Instrumente und geometrische Modelle zu sehen. Die gesamte Ausstellung war untergliedert in 18 Abteilungen, die alle Bereiche aus den Naturwissenschaften abdeckten.<sup>28</sup>

In der Sektion Geometrie waren vor allem Zeichengeräte, daneben aber auch eine Reihe von Modellen ausgestellt. Zu den Exponaten gehörten die Nachbauten der Entwürfe Fabre de Lagranges, die sich seit 1872 im Besitz des Museums befinden. Die *London Mathematical Society* zeigte ihre Sammlung Plückerscher Holzmodelle. Der Engländer Arthur Cayley (1821–1895) präsentierte seine Darstellung der Steiner'schen Fläche. Auffallend ist die große Anzahl an Modellen deutscher Konstrukteure. Zu ihnen zählten Olaus Henrici (1840–1918), der allerdings seit 1865 in London lebte, Joseph Oppel (1815–1894) aus Frankfurt am Main, Alexander Brill aus München, Christian Wiener aus Karlsruhe, der Bildhauer Ludwig Lohde (1806–1875) und Karl Wilhelm Borchardt (1817–1880) aus Berlin, Eduard Heis (1806–1877) aus Münster, sowie Paul Wiecke aus Kassel.<sup>29</sup> Gemeinsam mit den Plückerschen Entwürfen bildeten ihre Arbeiten einen Großteil der Exponate in der Unterabteilung „Models of Figures in Space“.

In einem Bericht über die Londoner Ausstellung für preußische Minister wird dieser große Beitrag Deutschlands hervorgehoben.<sup>30</sup> Er enthält auch einen ausführlichen Beitrag über die Ausstellungsstücke der Sektion Geometrie. Wilhelm Stahl (1846–1894), der zu jener Zeit Professor für Geometrie an der Königlich Rheinisch-Westphälischen polytechnischen Schule in Aachen war, ging auf die Modelle räumlicher Gebilde ein. In seiner allgemeinen Einführung hebt er die Mühen hervor, die mit der Anfertigung eines gelungenen Entwurfs verbunden sind: „Die Herstellung solcher Modelle ist eine Arbeit, für welche die Geometrie vielfach zu hohem Dank verpflichtet ist. Denn meistens gehört, abgesehen natürlich von den einfacheren Fällen, schon eine ziemlich grosse Gewandtheit und Uebung in den Methoden der analytischen und synthetischen Geometrie dazu, um sich den Verlauf einer Fläche oder Raumcurve in einem anschaulichem Bilde aus den einzelnen analytischen oder synthetischen

*Kensington Museum*. 3. Aufl. London: George E. Eyre und William Spottiswoode, 1877, S. XIV.

<sup>28</sup> Ebd., S. XIX.

<sup>29</sup> Paul Wiecke war lange Zeit Direktor der Gewerbeschule in Kassel: S. 115 Anonym. *Königlich Preußischer Staatsdienst-Kalender für den Regierungsbezirk Cassel*. Cassel: Verlag des reformirten Waisenhauses, 1871.

<sup>30</sup> Für die Abteilung Geometrie werden 35 Exponate von 13 Ausstellern aus Deutschland angegeben: Hofmann, A. W., Hrsg. *Bericht über die wissenschaftlichen Apparte auf der Londoner internationalen Ausstellung im Jahre 1876*. Braunschweig: Vieweg, 1878, S. XVI.

Elementen zu construieren.“<sup>31</sup> Ein ausgearbeitetes Modell erleichtere es erheblich, eine Anschauung von den dargestellten Gebilden zu gewinnen. Außerdem erspare es Arbeit für andere, die sich mit demselben Gegenstand beschäftigen. „Allerdings sind bisher nicht selten wichtige Eigenschaften geometrischer Gebilde, z.B. der Flächen dritter Ordnung, erkannt und untersucht worden, bevor man ein anschauliches Bild besass; gleichwohl ist der Werth solcher Modelle als Hilfsmittel für den geometrischen Unterricht nicht zu unterschätzen, zumal da in complicirteren Fällen die Meisten von ihrer Phantasie völlig im Stiche gelassen werden.“<sup>32</sup> Wilhelm Stahl relativiert den Wert von Modellen für die mathematische Forschung, die nicht auf sie angewiesen sei. Den Platz der ausgestellten Anschauungsmittel verortet er stattdessen in der Lehre.

In seinem Beitrag zum Ausstellungskatalog betont der irische Mathematiker Henry Smith (1826–1883), der ab 1874 das Universitätsmuseum in Oxford leitete, dagegen den allgemeinen Wert der Modelle für die Geometrie. Er hebt hervor, dass sie die Gestalt geometrischer Gegenstände wiedergeben, von denen sich nur schwer eine Vorstellung machen lässt. Smith benennt zugleich auch historische Tendenzen, durch die das Interesse an geometrischen Betrachtungen verloren gegangen war: „So great has been the influence of the Cartesian mode of representation upon geometrical speculation that it has perhaps, to a certain extent, and in certain cases, unduly led away the minds of geometricians from that direct intuition of space upon which geometry must after all be founded. And there can be no doubt that an Exhibition of models such as those included in the present Catalogue is calculated to render a great service to geometrical science by calling attention to the concrete shapes of objects, which are too apt, even in the mind of the serious student, to exist only as conceptions very imperfectly realised.“<sup>33</sup> Später spricht Smith über die große Entwicklung der geometrischen „Spekulation“ in jüngerer Zeit, wodurch sich das Interesse an Modellen auf ein größeres Spektrum an Gegenständen erweitert habe.<sup>34</sup>

Die Londoner Schau von 1876 gibt einen Überblick über die regen Aktivitäten, die es auf dem Gebiet des mathematischen Modellbaus zu jener Zeit gab. Sie machte auch die nationalen Differenzen sichtbar, die in dieser Hinsicht bestanden. Mit

<sup>31</sup> Hofmann, *Bericht über die wissenschaftlichen Apparte auf der Londoner internationalen Ausstellung im Jahre 1876*, S. 135.

<sup>32</sup> Ebd., S. 136.

<sup>33</sup> Smith, Henry. „Geometrical Instruments and Models“. In: *Handbook to the Special Loan Collection of Special Apparatus*. Hrsg. von South Kensington Museum. London: Chapman und Hall, 1876, S. 35.

<sup>34</sup> Ebd., S. 45.

Abstand die meisten Exponate kamen aus Deutschland, das zu jener Zeit zum Zentrum mathematischer Forschung avancierte. Zwar dauerte es noch bis 1893, ehe dort die erste große Modellausstellung stattfand, in der Mitte der 1870er Jahre begannen jedoch viele deutsche Hochschulen und Universitäten damit, Sammlungen für die Forschung und Lehre anzulegen.

## **Modellsammlungen an deutschen Hochschulen**

Der mathematische Modellbau ist in den 1870er Jahren untrennbar mit dem Namen Felix Klein verbunden. Er trug maßgeblich dazu bei, dass sich im Laufe des Jahrzehnts gewerbsmäßige Strukturen zur Herstellung und zum Vertrieb von Modellen ausbildeten. Vor dem Hintergrund seiner eigenen Erfahrungen bemühte er sich, Anschauungsmodelle in die Lehre zu integrieren. Sobald er 1872 seine erste Professur in Erlangen antrat, legte Felix Klein eine Modellsammlung an. Nach seiner Berufung an die Polytechnische Hochschule in München 1875 ließ er dann eine Werkstatt einrichten, in der Studenten selber Entwürfe anfertigen konnten. Klein wollte mit diesen Initiativen nicht nur die Lehre, sondern auch die Forschung fördern.

### **Universität Erlangen**

Eine der ersten Modellkolektionen ist von Felix Klein in Erlangen eingerichtet worden, nachdem er dort 1872 seine Professur angetreten hat.<sup>35</sup> Zu jener Zeit gab es bereits kleinere Sammlungen an verschiedenen Hochschulen. Im mathematischen Seminar in Berlin befanden sich Ernst Kummers Entwürfe. An der technischen Hochschule in Karlsruhe wurden die Arbeiten von Guido Schreibers und Christian Wieners Schülern aufbewahrt. Felix Klein schwebte indes eine andere Art von Sammlung vor. In seiner Erlanger Antrittsrede äußerte er den Wunsch, dass Übungen abgehalten werden, in denen Studenten selbstständig Modelle anfertigen. Offenbar wusste er um die Vorbehalte, welche es unter deutschen Gelehrten gegenüber der Verwendung von Anschauungsmitteln gab: „Wenn man gelegentlich gesagt hat, die räumliche Anschauung beduerfe solcher Huelfsmittel nicht, so gilt das doch erst von einer geuebten Anschauung, die eben durch Zeichnen, durch Modellieren sich ausgebildet hat. Mir scheint eine wenn auch voruebergehende Beschaeftigung des Studirenden in dieser Richtung in unserem Fache eben so nothwendig, als es in den einzelnen natur-

<sup>35</sup> Lorey, *Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhundert*, S. 324.

wissenschaftlichen Faechern die Practica sind.“<sup>36</sup> Durch Übungen im Zeichnen und Modellieren sollte das räumliche Denken der Studenten geschult werden. Felix Klein erhoffte sich allerdings auch, dass sie zu neuen Ideen anregen und das allgemeine Verständnis fördern. In seiner Rede legte er dar, welchen Anteil die Anschauung bei dem Auffinden neuer Sätze spielt.<sup>37</sup>

Die Einrichtung einer Sammlung sollte in Erlangen demnach mit der Herstellung von Modellen zu Lern- und Übungszwecken Hand in Hand gehen. Erst ab 1874 standen dafür Räumlichkeiten zur Verfügung: „In einem Schrank, der anfangs nur im Auditorium Platz fand, konnte er Modelle unterbringen.“<sup>38</sup> Die Modelle für den Aufbau der Sammlung bezog Felix Klein auch von der Pariser Verlagsbuchhandlung *Delagrave*. Weitere Exponate hatte er von seiner Reise nach Großbritannien 1873 mitgebracht, u.a. Modelle des deutschen Mathematikers Olaus Henrici (1840–1918) und eine Gezeitenmaschine des britischen Physikers William Thomson (1824–1907).<sup>39</sup>

### **Modellierkabinett an der Polytechnischen Hochschule München**

In München fand Felix Klein nach seiner Berufung an die Polytechnische Schule 1875 wesentlich bessere Verhältnisse für die Umsetzung seiner Pläne vor. Die Hörerzahlen waren viel größer als in dem kleinen Erlangen.<sup>40</sup> Außerdem war ein Kurs in Darstellender Geometrie am Polytechnikum obligatorisch, an dem außerdem mehr Kapazitäten vorhanden waren, um Übungen durchzuführen. Gemeinsam mit Alexander Brill (1842–1935), der im selben Jahr wie Klein an die Münchener Hochschule berufen wurde, strebte er den Aufbau eines neuen Instituts für Mathematik an. Noch bevor er seine Professur antrat, wendete er sich an das Direktorium der Hochschule, um die Einrichtung einer Modellierwerkstatt zu erwirken. In einem Antrag von Ende 1874 verweist Klein auf seine eigenen Erfahrungen: „Es ist für mich zu wiederholten Malen Gegenstand andauernder Beschäftigung gewesen, durch wirkliche Herstellung von Modellen abstracte geometrische Verhältnisse zu versinnlichen und so unmittel-

<sup>36</sup> Rowe, David E und Klein, Felix. „Felix Klein’s ‘Erlanger Antrittsrede’“. In: *Historia Mathematica* 12.2 (1985), S. 135.

<sup>37</sup> Ebd., S. 131.

<sup>38</sup> Tobies, Renate. *Felix Klein: Visionen für Mathematik, Anwendungen und Unterricht*. Berlin Heidelberg: Springer Spektrum, 2019, S. 125.

<sup>39</sup> Ebd., S. 127.

<sup>40</sup> Renate Tobies berichtet von elf Studenten, die 1874 in Mathematik und Physik in Erlangen eingeschrieben waren. Dagegen studierten in München im Studienjahr 1875–1876 mehrere hundert angehende Ingenieure und Lehramtsstudenten: ebd., S. 137.

bar eindringender Forschung zugänglich zu machen“.<sup>41</sup> Daneben beantragte Klein die Einrichtung eines Sammlungszimmers.

Offenbar hatte er damit auf Erfolg. Ab 1875 stand eine kleine Modellsammlung und auch ein Arbeitsraum für die Studenten zur Verfügung, wie sich den Jahresberichten des Polytechnikums entnehmen lässt.<sup>42</sup> Die Sammlung untergliederte sich in zwei Abteilungen. Neben einer für „Reine Geometrie“, worunter die Theorie algebraischer Kurven und Flächen verstanden worden ist, gab es noch eine Sektion mit Lehrmitteln zu „Differentialrechnung, Mechanik und mathematische Physik“. In dem Jahresbericht der Hochschule heißt es: „Diese Modelle kommen bei den betreffenden Vorlesungen zur Verwendung, wenn es gilt, die Anschauung der Zuhörer zu unterstützen oder zu beleben, andererseits dienen sie als Vorbilder bei selbstständigen Arbeiten, die von vorgeschrittenen Zuhörern zu Hause oder in dem (vorab nur provisorisch eingerichteten) mit dem Institute verbundenen Arbeitsraume gefertigt werden.“<sup>43</sup> Anschließend wird ein Überblick über die Gegenstände gegeben, die von der Modellsammlung abgedeckt werden.<sup>44</sup> Anfang des nächsten Studienjahres besaß das neue Institut ein eigenes Modellierkabinett. Die Leitung der Übungen übernahm Alexander Brill, der Architektur und Mathematik in Karlsruhe studiert hatte, wo sein Onkel Christian Wiener lehrte. Im Wintersemester des Studienjahres 1876–1877 betreute er sechs, im Sommersemester bereits acht Studenten, wie sich dem Bericht der Hochschule entnehmen lässt.<sup>45</sup> Die Teilnehmer stellten häufig Modelle der geometrischen Gegenstände her, die sie zur selben Zeit im mathematischen Seminar behandelten. Ihre Arbeit war demnach mit eigenständigen Studien verbunden. Die Modelle veranschaulichten Flächen, regelmäßige Körper und Raumkurven, die in der Geometrie aber auch in der Mechanik und mathematischen Physik auftraten. Zumeist ist Gips verwendet worden, um den Verlauf von Flächen nachzubilden, hin

<sup>41</sup> Der Antrag ist abgedruckt als Anhang in: Tobies, Renate. „Felix Klein in Erlangen und München: ein Beitrag zur Biographie“. In: *Amphora: Festschrift für Hans Wussing zu seinem 65. Geburtstag*. Hrsg. von Demidov, Sergei S. u. a. Basel: Birkhäuser, 1992.

<sup>42</sup> In dem Bericht für das Studienjahr 1875–1876 finden sich auch Angaben über die Beteiligung an Kleins und Brills mathematischen Seminar. Im Wintersemester saßen dort zwölf, im Sommersemester 35 Zuhörer. Anonym. *Bericht über die Königl. Polytechnische Schule zu München 1875-1876*. Hrsg. von Königlich-Bayerische Polytechnische Schule zu München. München: F. Straub, 1876, S. 16, 27.

<sup>43</sup> Ebd., S. 27.

<sup>44</sup> Flächen der dritten Klasse, Rotationsflächen mit konstantem Krümmungsmaß, Fadenmodelle zur Theorie linearer Komplexe und Regelflächen dritten Grades, Brennflächen usw.

<sup>45</sup> Anonym. *Bericht über die Königl. Technische Hochschule zu München 1877-1878*. Hrsg. von Königl. Technische Hochschule zu München. München: F. Straub, 1878, S. 16.

und wieder aber auch Holz.

Bis zum Weggang Brills 1884 entstanden etwa 10-20 Modelle jährlich in den Übungen während der gesamten Zeit 1875-1884.<sup>46</sup> Klein und Brill strebten schon 1876 eine Veröffentlichung gelungener und interessanter Erzeugnisse an. Sie beauftragten einen ortsansässigen Gipsmodelleur damit, Abgüsse der Modelle herzustellen, mit denen sie eine Sammlung am Institut aufbauten.<sup>47</sup> Der Bericht des Studienjahres 1876–1877 erwähnt die Publikation einer ersten Serie im Buchhandel: „Bei dem unbestreitbar grossen Mangel an Anschauungsmitteln für den mathematischen Unterricht an Hochschulen glauben die Vorstände des Institutes durch diese Verbreitung einem lebhaft gefühlten Bedürfnisse entgegenzukommen.“<sup>48</sup> Max Noether (1844–1921), der mit Brill befreundet war, verfasste mehrere Rezensionen der Modelle für die *Zeitschrift für Mathematik und Physik*.<sup>49</sup>

### Geometrische Spezialstudien

Ab 1878 führte Alexander Brill die Leitung der Werkstätten und der Sammlung weitestgehend alleine fort.<sup>50</sup> Er hatte bereits zuvor ein Großteil der Projekte im Modellierkabinett betreut. Bei einer Rede über die Münchener Sammlung in Tübingen 1887 erklärte er: „Die Meisten dieser Modelle sind jedoch bestimmt zur Förderung geometrischer Spezialstudien. Die Untersuchung der gestaltlichen Verhältnisse auch von Gebilden, die dem Geometer sonst wohl bekannt sind, fordert zu neuen und oft folgenreichen Fragestellungen auf. Selbst eine Frucht oft mühsamer Einzelforschungen wenden sich viele dieser Modelle von Flächen und räumlichen Kurven mit ihren

<sup>46</sup> Diese Schätzung beruht auf den Angaben über die hergestellten Objekte, die sich in den Berichten der Hochschule wiederfinden. Renate Tobies spricht von 300 neu gefertigten Modellen bis 1877. Vermutlich bezieht sich die Zahl auf den gesamten Bestand der Sammlung, die auch durch Schenkungen und Ankäufe erweitert worden ist: Tobies, *Felix Klein*, S. 153. In seinen Erinnerungen spricht Brill von hundert Modellen, die während seiner Zeit entstanden seien. Womöglich bezieht er dabei auch die relativ kleine Anzahl an Entwürfen mit ein, die unter der Leitung Felix Kleins angefertigt worden: Brill, Alexander. *Aus meinem Leben*. Bd. 1-2. 3 Bde. Tübingen, 1887, S. 27.

<sup>47</sup> Auskunft über den besagten Modelleur Joseph Kreittmayr gibt Edgar Bierende in seinem Beitrag: Bierende, „Geometrie gegossen in Gips“, S. 109.

<sup>48</sup> Anonym. *Bericht über die Königl. Polytechnische Schule zu München 1876-1877*. Hrsg. von Königlich-Bayerische Polytechnische Schule zu München. München: F. Straub, 1877, S. 16.

<sup>49</sup> Noether, Max. „Mathematische Modelle“. In: *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 23 (1878).

<sup>50</sup> Tobies, „Felix Klein in Erlangen und München“, S. 153.

meist vorher unbekannten oder schwer vorstellbaren Formen an den Forscher, dem sie Aufschluss geben über Fragen, die ihn vielleicht sonst schon beschäftigten oder zu denen das Modell selbst Anlass gab. In diesem Sinn ist eine solche Sammlung wie eine Bibliothek anzusehen oder wie ein Naturalienkabinett, nur dass sie nicht mit Zufälligkeiten und Unwesentlichem zu kämpfen hat, wie auch die beste systematische Anordnung eines solchen.<sup>51</sup> Für Brill war die Münchener Sammlung mehr als eine bloße Zusammenstellung von Lehrmitteln. Mithilfe der Modelle fand er den Einstieg in die Differentialgeometrie, wie er sich in seinen autobiographischen Schriften erinnert.<sup>52</sup>

Tatsächlich waren viele der Münchener Modelle mit Untersuchungen verbunden (Tab. 8.3). Karl Rohn (1855–1920) modellierte unter Leitung von Brill den Verlauf der geodätischen Linien auf einem Rotationsellipsoid (IV) mit Gips.<sup>53</sup> Später stellte er unterschiedliche Gestalten der Kummerschen Flächen dar, während er bei Felix Klein zu dem Thema promovierte. Walther Dyck (1856–1934) formte erstmals die Fläche der Krümmungsmittelpunkte eines einschaligen Hyperboloids (III) nach. Wie seines, so zeigten nicht wenige Modelle erstmals unbekannte Formen. Teilweise sind in der Werkstatt auch neue Gebilde entdeckt worden. Theodor Kuen fand dort als Brills Assistent die heute nach ihm benannte Fläche konstant negativer Gaußkrümmung. Nach seiner Entdeckung ließ er ein berühmtes Gipsmodell von einem Studenten gestalten.<sup>54</sup> Die Herstellung der Entwürfe war oftmals auch ein mathematisches Problem, wie auch die Abhandlungen zeigen, die mit den Modellen heraus-

<sup>51</sup> Brill, Alexander. „Über die Modellsammlung des mathematischen Seminars der Universität Tübingen [1887]“. In: *Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen*. Hrsg. von Böklen, Otto. Bd. 2. Stuttgart, 1889.

<sup>52</sup> „Meine Modellbestrebungen, sowie eine Vorlesung über Oberflächenkrümmung, führten mich in ein neues Kapitel der Geometrie ein, das ich bis dahin kaum dem Namen nach kannte: Theorie der Krümmung der Oberflächen, ihrer Krümmungs-Asymptoten- und geodätischen Linien. Zwar hat es mir bis jetzt nur Stoff zu einer kleinen Arbeit über krumme Räume (Math. Ana. Bd. 25) geliefert, aber die Themata zu mehreren der unter meiner Leitung entstandenen Studenten-Arbeiten entsprangen aus dem Wunsche, gewisse gestaltliche Eigenschaften dieser Gebilde genauer zu erforschen. Eine Vorlesung über Krümmungs-Theorie läßt sich an der Hand meiner zahlreichen Modelle, die ich zu verschiedenen Teilen dieser Theorie anfertigen ließ, farbenreich und lebendig gestalten.“ Brill, *Aus meinem Leben*, S. 30.

<sup>53</sup> Die folgende Nummerierung bezieht sich auf die Angaben im Katalog des Brill-Verlages von 1885. Dort sind alle Modelle der Münchener Hochschule durch römische Ziffern indiziert. Ein Abguss des Rohnschen Entwurfs befindet sich in der Göttinger Sammlung.

<sup>54</sup> Auch dieses Modell nahm Brill in sein Verlagsprogramm mit auf. Zur Entstehungsgeschichte des Objekts siehe: Loose, „Bahnbrechende Ideen in der Geometrie“, S. 67.

gegeben worden sind.<sup>55</sup> Die Berechnung geodätischer Linien und die Bestimmung von Brennflächen waren schwierig und verlangten teilweise die Entwicklung neuer Methoden. Insofern waren die Münchener Modelle auch das Ergebnis wissenschaftlicher Arbeiten. In den seltensten Fällen war ihre Herstellung ein bloßes Mittel, um das Anschauungsvermögen zu schulen. Stattdessen gaben die plastischen Modelle Antworten auf offene Fragen, welche auf die Gestalt und Geometrie der untersuchten Gebilde abzielten.

### 2.3 Hochphase des Modellbaus 1877–1898

Ende der 1870er Jahre begannen dann auch andere Universitäten systematisch Modelle zu sammeln. Hermann Amandus Schwarz ließ während seiner Professur in Göttingen 1875–1892 regelmäßig Formen für die Lehre anschaffen. Dort entstand in den folgenden Jahrzehnten eine der größten Sammlungen in Deutschland, die seit dem Neubau des Instituts in den 1920er Jahren in der Bunsenstraße im Foyer ausgestellt ist.<sup>56</sup> Anfang des 20. Jahrhunderts besaß nach Wilhelm Lorey vermutlich jedes Institut in Deutschland wenigstens ein paar Vitrinen mit verschiedenen Anschauungsmodellen.<sup>57</sup> Der Aufbau von Modellsammlungen wurde dabei durch die Tätigkeit eines Darmstädter Verlages 1877 wesentlich erleichtert, der sich in den Händen der Familie Brill befand. In diesem Jahr begann Ludwig Brill die Geschäfte seines Vaters zu übernehmen und Abgüsse von Gipsformen, die an der Münchener Hochschule unter der Leitung seines Bruders Alexander entstanden sind, zu vertreiben. Mit der Ausbildung geschäftsmäßiger Vertriebs- und Fertigungsstrukturen begann sogleich die Hochphase in der Geschichte des mathematischen Modellbaus.

#### Ludwig Brills Modellverlag 1877–1898

Über die Anfangsjahre des Verlages ist allerdings nur wenig bekannt. Ludwig Brill übernahm das Geschäft von seinem Vater, der seit 1869 eine Buchhandlung für Unterrichtsmaterialien in Darmstadt führte.<sup>58</sup> Gemeinsam mit seinem Bruder begann

<sup>55</sup> Eine unvollständige Kollektion dieser Beihefte befindet sich in gebundener Form in Tübingen.

<sup>56</sup> Sattelmacher, Anja. „Zwischen Ästhetisierung und Historisierung: Die Sammlung geometrischer Modelle des Göttinger mathematischen Instituts“. In: *Mathematische Semesterberichte* 61 (2014).

<sup>57</sup> Lorey, *Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhunderts*, S. 324.

<sup>58</sup> Bierende, „Geometrie gegossen in Gips“, S. 111.

er im Jahr 1877 damit, Anschauungsmodelle über den Verlag zu vertreiben. In diesem Jahr wird das Erscheinen der 1. Serie von Modellen des Verlages in den *Mathematischen Annalen* beworben.<sup>59</sup> Von da an erweiterten die Geschwister nach und nach das Programm, wobei Alexander Brill den Kontakt in die mathematische Welt hielt. Er wirkte als wissenschaftlicher Beirat. Von den Arbeiten, die unter seiner und Kleins Betreuung in München entstanden, wählte er geeignete Entwürfe aus. Außerdem trat er an andere Konstrukteure heran, um sie für den Verlag zu gewinnen. Ludwig Brill führte indes die Geschäfte des Unternehmens. Er veröffentlichte in regelmäßigen Abständen Kataloge, die auch kurze Angaben zu den gehandelten Modellen enthielten. Zusammen mit den Formen wurden mehrseitige Beschreibungen der Konstrukteure versandt. Sie geben auch einen Einblick in die umfangreichen Vorarbeiten, welche der handwerklichen Ausgestaltung vorausgingen.

Die Kataloge geben wiederum Aufschluss über die inhaltliche Ausrichtung des Verlagsprogramms. In den Jahren 1877–1898 erschienen insgesamt fünf Auflagen.<sup>60</sup> In der Einleitung der dritten Ausgabe von 1885 heißt es: „Wie seither, so wird es auch künftig das Bestreben der Verlagshandlung sein, denjenigen wissenschaftlichen Kreisen zu dienen, welche in dem Gebrauch von Modellen und Zeichnungen ein Hilfsmittel und eine kräftige Stütze zur Förderung und Belebung mathematischer Studien erblicken.“<sup>61</sup> Das Programm des Verlages orientierte sich in den Anfangsjahren sehr an dem Konzept, das Klein und Brill gemeinsam in München erprobt haben. Die Modelle sind primär als Mittel der Forschung beworben worden. Ihre Eignung für die Lehre war dagegen aus Verlagssicht nachrangig. Im Jahr 1885 umfasste das Programm bereits 160 Objekte, die in mehrere Serien unterteilt waren. Der übergroße Teil geht auf Vorlagen aus dem Münchener Modellierkabinett zurück. Neben den Entwürfen Karl Rohns und Theodor Kuens sind auch die Arbeiten Rudolf Diesels (1858–1913) in dem Verlag erschienen. Seine 18-teilige Serie von Gipsmodellen stellt verschiedene Typen von Quadriken dar, teilweise mit Krümmungslinien.<sup>62</sup>

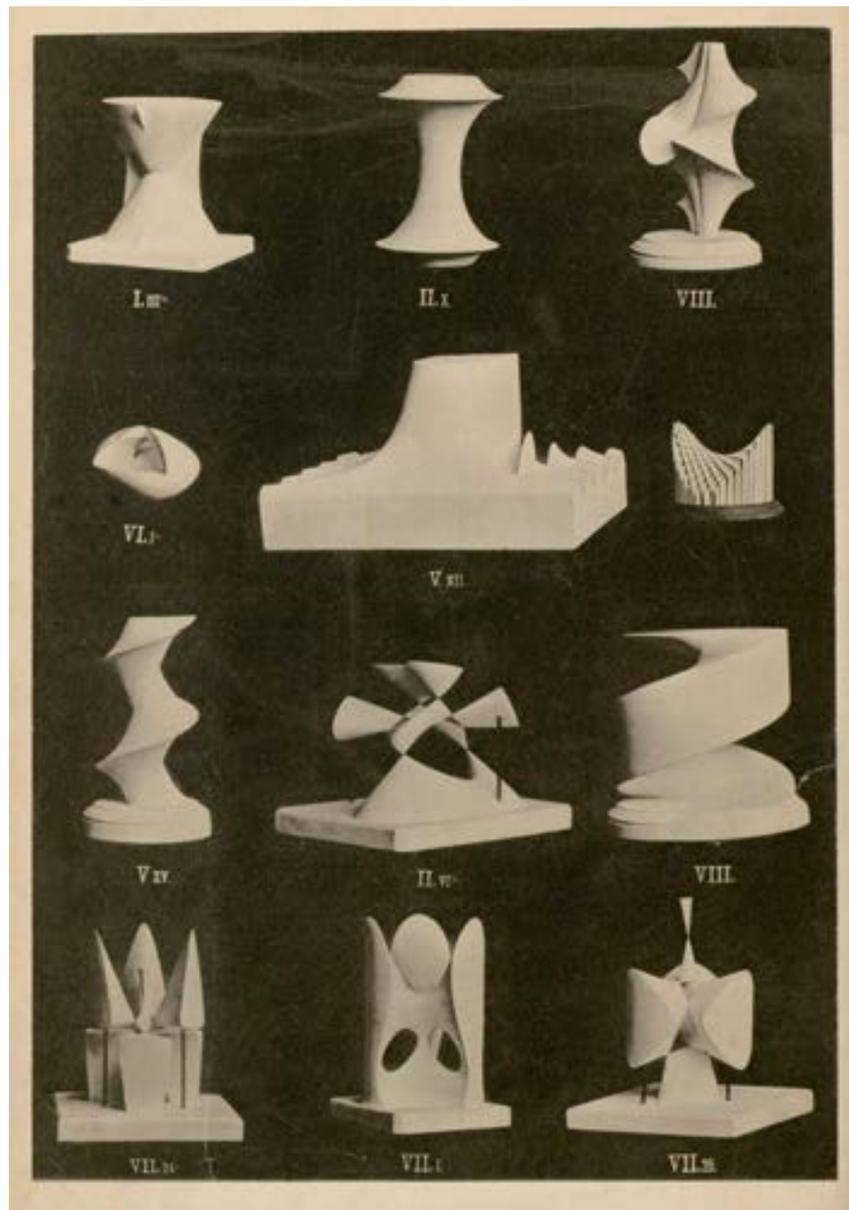
Nach dem Weggang Alexander Brills aus München 1884 wuchs das Verlagsprogramm nur noch langsam. Die meisten Neuerscheinungen stammten nun aus dem Karlsruher Seminar, in dem Christian Wiener Modelle herstellen ließ. Allein sein

<sup>59</sup> Ebd., S. 108.

<sup>60</sup> Die erste Auflage ist 1881 veröffentlicht worden, die nachfolgenden sind in den Jahren 1882, 1885, 1888 und 1892 erschienen. Die Angaben sind den *Jahrbüchern über die Fortschritte der Mathematik* entnommen.

<sup>61</sup> Brill, Ludwig. *Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht*. 3. Aufl. Darmstadt: Verlagshandlung Brill, 1885, S. IV.

<sup>62</sup> Ebd., S. 7.



**Abb. 2.2:** Ausschnitt aus dem Katalog Ludwig Brills (3. Auflage). 1. Reihe, links: Krümmungsmittelpunktsfläche eines einschaligen Hyperboloids (Walther Dyck); 1. Reihe, rechts: Fläche von konstant negativer Krümmung (Theodor Kuen); 3. Reihe, Mitte: Modell einer Kummerschen Fläche (Karl Rohn).

Student Carl Tesch entwarf vier Serien. Während immer weniger Modelle erschienen, erweiterte Ludwig Brill jedoch den Kundenkreis. Im Jahr 1893 präsentierte er den Verlag auf der Weltausstellung in Chicago im Auftrag der Königlich Preußischen Un-

terrichtsverwaltung.<sup>63</sup> Nebenher ließ er Annoncen in amerikanischen Fachzeitschriften schalten.<sup>64</sup> Noch heute befinden sich größere Sammlungen der Brillischen Modelle an amerikanischen Universitäten.<sup>65</sup> Brill vertrieb die Objekte nun auch verstärkt im Ausland. Ende der 1890er Jahren verkaufte er dennoch die Verlagshandlung. Möglicherweise waren persönliche Gründe ausschlaggebend, wie es die biographischen Aufzeichnungen seines Bruders nahelegen.<sup>66</sup> Vorstellbar ist aber auch, dass nachlassendes Interesse an den Modellen sich in den Verkaufszahlen niederschlug. Zwar gibt es dafür kein direktes Anzeichen. In den Schwierigkeiten jedoch, Produzenten für neue wissenschaftliche Modelle zu finden, welche sich für die Jahre 1885–1898 beobachten lassen, spiegelt sich möglicherweise eine allgemeine Tendenz wider, die sich auch in den Bestellbüchern des Verlages bemerkbar machte. Mit dem Inhaberwechsel erfolgte jedenfalls auch ein Wandel in der Ausrichtung des Programms, wie später gezeigt wird. Zuerst soll jedoch auf eine Ausstellung eingegangen werden, die 1893 in München zu sehen war.

### Münchener Ausstellung 1893

Die Gründung einer deutschen Mathematiker-Vereinigung in Göttingen 1873 war aus verschiedenen Gründen gescheitert. Es dauerte noch bis 1890, ehe sie gelang. Auf der ersten regulären Versammlung der neugegründeten Vereinigung in Halle (Saale) ein Jahr später wurde die Organisation einer Ausstellung mathematischer Instrumente und Modelle beschlossen, deren Planung Walther Dyck (1856–1934) übernahm.<sup>67</sup> Dyck hatte bei Felix Klein in Leipzig habilitiert, bevor er 1884 die Nachfolge von Alexander Brill an der Technischen Hochschule in München antrat. Die Ausstellung sollte 1892 beim Nürnberger Treffen der *Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte* zu sehen sein, musste jedoch aufgrund der damals grassierenden Cholera ausfallen. Da in München Räume für eine längere und größere Ausstellung zur Verfügung

<sup>63</sup> Kidwell, „American Mathematics Viewed Objectively: The Case of Geometric Models“.

<sup>64</sup> Eine Anzeige ist im 12. Band des *American Journal of Mathematics* abgedruckt, der im Juli 1890 erschienen ist.

<sup>65</sup> Die *University of Illinois in Urbana und Champaign* besitzt einen umfangreichen Bestand.

<sup>66</sup> Alexander Brill erwähnt 1888 wirtschaftliche Schwierigkeiten, in denen sich die Druckerei seines Bruders befindet. Zwei Jahre später schreibt er seiner Frau: „Mit Ludwig hatte ich heute eine Unterredung, die sich auf die Modelle bezog. – Er will sich von mir loslösen, und ich will ihm nicht entgegen sein, sondern auf einen Vergleich eingehen, der ihn der Verpflichtung gegen mich erledigt.“ Brill, *Aus meinem Leben*, S. 86.

<sup>67</sup> Hashagen, Ulf. *Walther von Dyck (1856–1934): Mathematik, Technik und Wissenschaftsorganisation an der TH München*. Stuttgart: Franz Steiner Verlag, 2003, S. 419 ff.

standen, entschloss sich die Vereinigung, ihre nächste Jahresversammlung ebenfalls in der bayrischen Hauptstadt abzuhalten. Am 5. September 1893 wurde die Ausstellung für einen Monat eröffnet. In mehreren Sälen der Hochschule waren mehr als 500 Exponate aus der ganzen Welt zu sehen.<sup>68</sup> Dazu erschien ein umfangreicher Katalog mit Zeichnungen und Beschreibungen der ausgestellten Instrumente und Modelle. Er enthält auch Fotografien der Ausstellungsräume, die Dyck glücklicherweise anfertigen ließ (vgl. Abb. 2.3).



**Abb. 2.3:** Fotografie des Saals zur Geometrie bei der Münchener Ausstellung 1893. Rechts im Hintergrund ist erhöht eine quadratische Vitrine mit Christian Wieners Gipsmodell einer kubischen Fläche mit 27 Geraden zu erkennen. Auf der linken Seite im Vordergrund sind mehrere Gipsmodelle ausgestellt, die an der Hochschule in München entstanden sind. Auszug aus: Dyck, Walther, Hrsg. *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente (Nachdruck)*. Hildesheim: Georg Olms, 1994.

Der gesamte Rundgang war in vier Abteilungen untergliedert: Analysis, Geometrie, Mechanik und Mathematische Physik. Die Geometrie nahm mit Abstand den größten Teil der Ausstellung ein. In der Sektion waren Zeichenapparate wie Perspektivlineale und Ellipsenzirkel zu sehen. Es überwogen jedoch Modelle und Zeichnungen, die sich über mehrere Unterabteilungen erstreckten.<sup>69</sup> Der Saal der Geometrie war Descartes gewidmet. In dem übervollen Raum waren die Modelle Julius Plücker-

<sup>68</sup> Fischer, Joachim. „Vorwort“. In: *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente (Nachdruck)*. Hrsg. von Dyck, Walther. Hildesheim: Georg Olms, 1994.

<sup>69</sup> In dem Katalog zur Ausstellung findet sich folgende Gliederung für die Geometrie wie-

ers, Ernst Kummers und Christian Wieners aus den 1860er Jahren zu sehen. Dazwischen standen aber auch viele Objekte, die von Studenten an Hochschulen entworfen worden sind. Walther Dyck erwähnt vor allem neben Alexander Brills Tätigkeit in München die Sammlungen und Initiativen von Otto Wilhelm Fiedler (1832–1912) in Zürich, Christian Wiener in Karlsruhe und Hermann Schwarz in Göttingen, die viel zur Entwicklung des Modellbaus in Deutschland beigetragen hätten.

### Internationale Beteiligung

Walther Dyck war um internationale Beiträge bemüht gewesen ist.<sup>70</sup> Insbesondere aus dem Vereinigten Königreich sind zahlreiche Objekte nach Bayern übersandt worden. Auffallend ist, dass zwar insgesamt viele Exponate aus dem Ausland kamen. Von diesen waren jedoch nur wenige in der Geometrie ausgestellt. In der gesamten zweiten Abteilung waren nur einige Modelle des in London lebenden Deutschen Olaus Henrici, des Iren Robert Stawell Ball (1840–1913) und des Niederländers Diederik J. Korteweg (1848–1941) zu sehen.<sup>71</sup> Mit Abstand die meisten geometrischen Anschauungsmodelle der Ausstellung sind von Deutschen entworfen worden. Die vielen Beiträge englischsprachiger Hersteller verteilen sich auf die anderen beiden Abteilungen.

Das Übergewicht deutscher Exponate unter den Modellen lässt sich nicht alleine mit dem Ort erklären. Immerhin war das Bild bei der Londoner Ausstellung 1876 ähnlich gewesen. Stattdessen spiegelte die Herkunft der Modelle – zumindest tendenziell – die realen Verhältnisse wider. Zwar gab es auch außerhalb der deutschsprachigen Länder Mitteleuropas Initiativen, um den Bau mathematischer Modelle für Forschung und Hochschullehre zu fördern. In Großbritannien war die Herstellung

der: Zeichenapparate; Modelle für den Elementar-Unterricht; Polyeder, Polygon- und Polyedereinteilung von Flächen und Räumen; Ebene Kurven; Algebraische Flächen; Raumkurven und abwickelbare Flächen, Regelflächen; Modelle zur Liniengeometrie; Modelle und Zeichnungen zur Krümmungstheorie; Singuläre Vorkommnisse bei Kurven und Flächen. Dyck, Walther, Hrsg. *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente (Nachdruck)*. Hildesheim: Georg Olms, 1994, S. 243 ff.

<sup>70</sup> In einem Vortrag zur Eröffnung der Ausstellung hebt Dyck ein Komitee hervor, das in Großbritannien unter Führung von Lord Kelvin (William Thomson) und den beiden Mathematikern Alfred G. Greenhill (1847–1927) und Olaus Henrici (1840–1918) gebildet worden sei, um verschiedene Exemplare für die Sammlung in München zusammenzutragen. Dyck, Walther. *Einleitender Bericht über die mathematische Ausstellung in München*. Sonderabdr. München: Cotta, 1893.

<sup>71</sup> Diese Beschreibung bezieht sich auf die Exponatserien Nr. 115 – 232 im Katalog, die Modelle der Abteilung „Geometrie“ zeigen. ebd., S. 243–306.

plastischer Anschauungsmittel in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts unter Physikern durchaus verbreitet. Doch trotz der guten Voraussetzungen änderte auch die Gründung des *Cambridge Modelling Club* 1873 durch Arthur Cayley (1821–1895) und James Clerk Maxwell (1831–1879), die nach einem Besuch Felix Kleins erfolgte, nichts grundlegend daran, dass nur wenige geometrische Modelle in England entstanden.<sup>72</sup> Die italienischen Mathematiker besaßen enge Verbindungen nach Deutschland. Der Geometer Giuseppe Veronese (1854–1917) warb für die Einrichtung einer nationalen Werkstatt zur Herstellung von Modellen in Italien nach dem Vorbild des Münchener Kabinetts, scheiterte jedoch mit seinem Versuch.<sup>73</sup> Der Bau geometrischer Modelle für die Forschung fand vor allem in den deutschsprachigen Ländern Verbreitung.<sup>74</sup>

Jenseits des Atlantiks scheint der Modellbau mehr Nachahmung gefunden zu haben. Einen wichtigen Beitrag dazu lieferte auch eine große Ausstellung in Chicago im Frühjahr 1893, mit deren Organisation ebenfalls Walther Dyck vom Preußischen Kultusministerium beauftragt war.<sup>75</sup> Anlässlich der *World's Columbian Exposition* wurden zahlreiche Objekte bei der deutschen Universitätsausstellung gezeigt. Bei der Gelegenheit ist auch Einblick in die Sammlungen mathematischer Institute in Deutschland gegeben worden. „Die mathematische Ausstellung will von unserer modernen Forschung und von unseren gegenwärtigen Methoden und Hilfsmitteln des höheren mathematischen Unterrichts Zeugnis geben, und fasst dabei, wie dies in unserem Fache den gemeinsamen Aufgaben entspricht, die Thätigkeit unserer Deutschen Universitäten und Technischen Hochschulen zusammen.“<sup>76</sup> Im August hielt Felix Klein, der als offizieller Vertreter der Regierung zur Weltausstellung in Chicago angereist war, bei einem Kolloquium an der Universität Evanston eine Reihe von Vorträgen über den Entwicklungsstand der Mathematik.<sup>77</sup> Das Interesse der Vereinigten Staaten an mathematischen Modelle belegen nicht nur die diversen Sammlungen, die

<sup>72</sup> Barrow-Green, „Knowledge gained by experience“.

<sup>73</sup> Der Artikel von Nicola Palladino geht auf die Bemühungen von Giuseppe Veronese und sein Scheitern ein: Palladino, „I modelli matematici costruiti per l'insegnamento delle matematiche superiori pure e applicate.“ Livia Giacardi diskutiert ebenfalls die Frage, weshalb es in Italien nicht zu einer nennenswerten Produktion geometrischer Modelle kam: Giacardi, „Models in Mathematics Teaching in Italy (1850–1950)“.

<sup>74</sup> Die Frage nach den Gründen hierfür, wird in dem letzten Kapitel dieser Arbeit wieder aufgegriffen.

<sup>75</sup> Hashagen, *Walther von Dyck (1856–1934): Mathematik, Technik und Wissenschaftsorganisation an der TH München*, S. 427.

<sup>76</sup> Dyck, Walther. *Deutsche Unterrichts-Ausstellung in Chicago 1893: Specialkatalog der mathematischen Ausstellung*. Buchdr. v. Wolfen S. in München, 1893, v.

<sup>77</sup> Tobies, *Felix Klein*, S. 362 ff.

noch heute an amerikanischen Universitäten zu finden sind. Nach der Jahrhundertwende stellten die Mathematiker Albert Harry Wheeler (1873–1950) und Richard P. Baker (1866–1937) zahlreiche Modelle her. Insbesondere Baker orientierte sich offenbar an den deutschen Produkten.<sup>78</sup>

## 2.4 Niedergang des Vertriebs

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts ließ das Interesse an plastischen Modellen langsam nach. Eine Ausstellung wie in München gab es nicht noch einmal.<sup>79</sup> Das langsame Verschwinden der Modelle aus der Wissenschaft wurde noch einige Zeit überdeckt durch den Vertrieb und Verkauf plastischer Lehrmittel, der noch bis zum Beginn des ersten Weltkrieges auf ähnlichem Niveau weiterlief. Aber auch bei den Verlagen machte sich der Wandel bemerkbar.

### Verlagshandlung Martin Schilling 1899–1929

Nachdem Ludwig Brill den Verlag und die Druckerei 1898 abgetreten hatte, ging das Geschäft über Umwege ein Jahr später in den Besitz der Firma Martin Schillings über, die zu jener Zeit in Halle an der Saale ansässig war, bevor sie einige Jahre später in das nahegelegene Leipzig übersiedelte.<sup>80</sup> Der neue Inhaber erweiterte den Umfang des Programms nochmal erheblich. Die sechste Auflage des Kataloges von 1902 listet 321 Einzelstücke. Gleichzeitig weitete Schilling das Profil des Verlages. In der Einleitung heißt es: „Und so übergeben wir denn diesen neuen Katalog, der Zeugnis davon ablegt, welche Bedeutung das mathematische Modell als belebendes und das Verständnis des Vortrages förderndes Element bei den Vorlesungen gewonnen hat, der mathematischen Welt in der zuversichtlichen Hoffnung, damit den Kreis der Gönner und Freunde unseres Unternehmens wiederum zu erweitern, und mit der ergebenen Bitte, nun auch unseren Bestrebungen durch umfangreiche Bestellungen

<sup>78</sup> Eine große Anzahl der Arbeiten Wheelers und Bakers befinden sich heute an der *Smithsonian Institution* in Washington: <https://www.si.edu/spotlight/geometric-models-baker> und <https://www.si.edu/spotlight/maa-charter/geometric-models-a-harry-wheeler> (21. Juni 2022).

<sup>79</sup> Nach der Schau sind jedoch noch im kleineren Umfang Modelle bei verschiedenen Versammlungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung zu sehen gewesen. August Gutzmer (1860–1924) erwähnt Ausstellungen in Frankfurt, Braunschweig, Hamburg, Karlsbad und Kassel. Gutzmer, August und Mehmke, Rudolf, Hrsg. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*. Bd. 10. Leipzig: B. G. Teubner, 1909, S. 8.

<sup>80</sup> Bierende, „Geometrie gegossen in Gips“, S. 114.

die wünschenswerte Förderung angeheißen zu lassen.“<sup>81</sup> Von einer Belebung wissenschaftlicher Studien, die Ludwig Brill noch als Ziel ausgegeben hatte, ist nun keine Rede mehr. Von seinem Nachfolger werden die Modelle stattdessen als anschauliche Lehrmittel angepriesen. Aus den Sätzen spricht aber auch die Sorge, den Anschluss an die mathematische Welt zu verlieren. Das Interesse an den Modellen seitens der Mathematiker war zu diesem Zeitpunkt bereits abgekühlt. Möglicherweise auch deshalb kündigt Schilling an, dass die angewandte Mathematik in seinem Verlag zukünftig stärker vertreten sein wird. Als wissenschaftlicher Beirat wirkt nun Friedrich G. Schilling (1868–1950) an der Ausgestaltung des Programms mit. Der Bruder des Verlegers war ein Schüler Felix Kleins. Zum Zeitpunkt der Übernahme war er Professor in Göttingen für Darstellende Geometrie, wo er auch die Sammlung mathematischer Modelle und Instrumente kuratierte. Im Jahr 1904 ging er dann an die technische Hochschule nach Danzig. In der Einleitung des Kataloges wird zudem Guido Hauck (1845–1905), den beiden Söhnen Christian Wieners, Hermann Wiener (1857–1939) und Otto Wiener (1862–1927), sowie Hermann Grassmann (1857–1922) und Walther Ludwig (1876–1946) gedankt, die neue Modelle beigezeichnet haben.<sup>82</sup> Im Gegensatz zu den früheren Konstrukteuren bewegten sich die Genannten fast alle im Umfeld der technischen Hochschulen. Hauck war Professor an der Berliner, Hermann Wiener an der Darmstädter Schule. Auch sein Bruder Otto stand als Physiker der Anwendung nahe. Nachdem Martin Schilling die Geschäfte 1899 übernommen hat, sind nur noch wenige Objekte veröffentlicht worden, die Gegenstände aus der reinen Mathematik veranschaulichen (vgl. Tab. 8.4).

Die nächste Auflage des Kataloges erschien erst 1911, acht Jahre nach der Veröffentlichung der sechsten Ausgabe. Zu jenem Zeitpunkt ist der Verlag bereits von Karoline Schilling geführt worden, die nach dem Tod ihres Manns 1908 die Geschäfte übernahm.<sup>83</sup> Das Programm wurde um elf Serien (XXX–XL) erweitert (Tab. 8.3). Auffallend ist, dass Friedrich Schilling an der Herausgabe fast aller neu veröffentlichter Modelle beteiligt war. Unter seiner Mitwirkung erschienen die Entwurfsserien von Wilhelm Ihlenburg (geb. 1884), Karl Doehlemann (1864–1926), Ernst Meissner (1883–1939).<sup>84</sup> An der Herstellung dreier weiterer Serien war Schilling selbst unmit-

<sup>81</sup> Schilling, Martin. *Catalog mathematischer Modelle*. 6. Aufl. Halle an der Saale: Verlagshandlung Martin Schilling, 1903, S. IV.

<sup>82</sup> Bei Hermann Grassmann handelt sich um den Sohn des gleichnamigen Begründers der Ausdehnungslehre.

<sup>83</sup> Bierende, „Geometrie gegossen in Gips“, S. 114.

<sup>84</sup> Wilhelm Ihlenburg war Doktorand bei Felix Klein in Göttingen. Seine Dissertation trug den Titel: „Über die geometrischen Eigenschaften der Kreisbogenvierecke“.

telbar beteiligt. Neben der zentralen Bedeutung seiner Person für das Unternehmen bestätigte sich eine weitere Tendenz in der neuen Auflage. Viele Modelle, die nach dem Besitzerwechsel erschienen sind, behandeln randständige und bekannte Themen der Mathematik. Nur die Serie xxxv von Ihlenburg entstand im Zusammenhang mit einer Forschungsarbeit.

Während und nach dem ersten Weltkrieg erschienen nur noch wenige Modelle. Ein Werbeschreiben aus dem Jahr 1934 lässt vermuten, dass weniger als vier Serien seit 1911 zum Programm hinzugekommen sind. Trotzdem führte Karoline Schilling die Geschäfte bis 1929 fort.<sup>85</sup> Im Jahr 1932 teilte die Verlagshandlung dem Göttinger Institut für Mathematik mit, dass in den vergangenen Jahren keine neuen Modelle erschienen seien.<sup>86</sup> Wie Edgar Bierende herausfinden konnte, existierte der Verlag noch bis 1960 weiter.<sup>87</sup> Die Universität Dresden kaufte in diesem Jahr offenbar eine Vielzahl an Originalformen und Modellen aus dem Bestand auf.

## 2.5 Zusammenfassung

In dem historischen Abriss zeichnen sich bereits einige wichtige Entwicklungslinien ab, die nun resümiert werden sollen, bevor in den folgenden Kapiteln ausgewählte Modellserien der Jahre 1860–1877 im Detail betrachtet werden.

(1.) Noch bevor die Modellherstellung ab 1877 einen organisierten Zug annahm und sich gewerbsmäßige Verlagsstrukturen etablierten, sind Anschauungsmittel im Umfeld geometrischer Untersuchungen für wissenschaftliche Zwecke hergestellt, verwendet und im kleinen Umfang vertrieben worden. (2.) Die Geschichte der beiden Verlagshandlungen von Ludwig Brill und Martin Schilling dokumentiert auch, wie sich das Interesse an den Objekten bereits vor der Jahrhundertwende langsam von der Forschung löste. Spätestens mit dem Beginn des 20. Jahrhunderts zeichnete sich deutlich ab, dass die Anschauungsmittel kaum noch in der Wissenschaft Verwendung fanden, auch wenn das Interesse an den plastischen Modellen als Lehrmittel fortbestand. (3.) Felix Klein trug sehr zur Verbreitung von mathematischen Modellen bei. Die Anschauungsmittel waren mit seiner frühen Karriere verbunden. Nicht zuletzt

<sup>85</sup> Richter, Karin. „... Modelle wurden mir in den Vorlesungen unentbehrlich.“ Zum 100. Todestag des Verlegers Martin Schilling der Modellfirma M. Schilling“. In: *Cantor-Hefte* 10 (2008), S. 39.

<sup>86</sup> Fischer, Gerd, Hrsg. *Mathematical Models. From the Collections of Universities and Museums – Photograph Volume and Commentary*. 2. Aufl. Springer Spektrum, 2017, S. XIII f.

<sup>87</sup> Bierende, „Geometrie gegossen in Gips“, S. 121.

mit der Einrichtung verschiedener Werkstätten und Sammlungen in Erlangen, München und Leipzig in den 1870er Jahren förderte er die Verbreitung mathematischer Modelle erheblich. Zwar betreute Alexander Brill mit Abstand die meisten Arbeiten in München. Aber es lässt sich bezweifeln, ob es ohne die Initiative Felix Kleins jemals zur Einrichtung eines Modellierkabinetts gekommen wäre. Selbst nachdem sich Klein Ende der 1870er Jahre verstärkt von der Geometrie algebraischer Gebilde entfernte, um sich der Funktionentheorie zuzuwenden, führten seine Studenten die Tradition fort.<sup>88</sup> Gleichwohl sollte nicht übergangen werden, dass sich an dem Bau geometrischer Modelle viele deutsche Mathematiker beteiligten. (4.) Unabhängig von dem Wirken Kleins gab es allerdings auch eine polytechnische Tradition in den deutschen Ländern, wie Klaus Volkert und Nadine Benstein gezeigt haben, die ihren Ursprung in Frankreich hatte. Christian Wiener konnte in Karlsruhe an die Arbeit seines Vorgängers Guido Schreiber anknüpfen. Wilhelm Fiedler (1832–1912), der zuerst in Prag, ab 1867 dann in Zürich Professor für Darstellende Geometrie war, stand ebenfalls in dieser Traditionslinie. An den Hochschulen in Karlsruhe und Darmstadt entstanden ebenfalls Modelle. Parallel hierzu war die Herstellung von Modellen unter Physikern bereits vor 1860 verbreitet gewesen ist. Auch diese Tradition übte Einfluss auf die deutschen Mathematiker aus. Immerhin entstanden Plückers und Kummers frühe Entwürfe im Umfeld physikalischer Arbeiten.

<sup>88</sup> Friedrich Schilling, Karl Rodenberg, Karl Rohn, Adolf Weiler, Walther Dyck haben bei Felix Klein zeitweise studiert.

### 3. Kummers Quartiken

Ende der 1850er Jahre beschäftigte sich Ernst E. Kummer (1810–1893), seinerzeit Professor an der *Friedrich-Wilhelms-Universität Berlin*, mit Problemen der geometrischen Optik, die bereits vor der Jahrhunderthälfte Anlass für die Untersuchung höherer Flächen gab. Mit seinen Untersuchungen zu Strahlensystemen und -bündeln knüpfte Kummer an Arbeiten William R. Hamiltons (1805–1865) aus den 1830er Jahren an. Während seiner Forschung stellte Ernst Kummer eine dreiteilige Serie von Fadenmodellen her. Das Thema führte ihn auf Flächen der vierten Ordnung, die er ab 1862 untersuchte. Er entdeckte hierbei eine Klasse spezieller Quartiken, die immer noch unter seinem Namen bekannt sind. Während seiner geometrischen Untersuchungen stellte er wiederholt verschiedene Draht- und Gipsmodelle her, die er bei Vorträgen an der Berliner Akademie der Wissenschaften präsentierte. Seine Entdeckungen riefen unter deutschen Geometern große Aufmerksamkeit hervor. Als Felix Klein auf einen unvermuteten Zusammenhang zu den Plückerischen Komplexflächen stieß (vgl. Kap. 4), wuchs das Interesse der Mathematiker an den Kummerschen Flächen weiter. Mitte der 1870er Jahre befasste sich Karl Rohn (1855–1920) mit ihren gestaltlichen Ausprägungen. Auch er stellte Gipsmodelle her, um verschiedene Typen dieser Gebilde zu veranschaulichen. In diesem Kapitel geben wir eine Übersicht über die verschiedenen Modelle, die im Zusammenhang mit der Erforschung quartischer Flächen während der Jahre 1860–1877 entstanden sind.

#### 3.1 Fresnelsche Wellenfläche

Dem Franzosen August J. Fresnel (1788–1827) gelang Anfang 1820er Jahren die Beschreibung des Brechungsverhaltens von Licht in Kristallen.<sup>1</sup> Wenn Lichtbündel auf anisotrope Medien treffen, werden sie in zwei Richtungen abgelenkt. Mit der Wellen-

<sup>1</sup> Ein Abriss zur Geschichte der Optik findet sich in dem Lehrbuch des Nobelpreisträgers Max Born (1882–1970): Born, Max und Wolf, Emil. *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. 6. Aufl. Cambridge: Cambridge University Press, 1986.

fläche konnte Fresnel dieses Phänomen der Doppelbrechung erklären, das bereits im 17. Jahrhundert bei bestimmten Kristallen wie Calcit beobachtet worden war. Sie weckte das Interesse für Gebilde höherer Ordnung, die zu jener Zeit studiert wurden. Durch eigene Untersuchungen zur Geometrie der Fresnelschen Wellenfläche gelang es 1832 dem Iren William R. Hamilton (1805–1865), das Phänomen der konischen Refraktion vorherzusagen. Wenn ein Lichtstrahl in einem bestimmten Winkel auf den Kristall tritt, bricht er in unendlich viele Strahlen, die den Mantel eines Kegels bilden.<sup>2</sup>

### MacCullaghs Konstruktion

August Fresnel selber war es nur mühsam gelungen, die Gleichung der Wellenfläche herzuleiten. Er plagte sich mit den schwierigen und umständlichen Berechnungen, weswegen er ihre Mitteilung ausließ, wie der Ire James MacCullagh (1809–1847) erläuterte.<sup>3</sup> Zusammen mit William R. Hamilton entwickelte MacCullagh die Theorie in den 1830er Jahren maßgeblich weiter. MacCullagh entwarf eine elegante Konstruktion der Wellenfläche, die vom Indexellipsoid ausging. Dieses Ellipsoid hatte ebenfalls Fresnel eingeführt, um die Richtung und Stärke der Lichtbrechung in einem Kristall zu beschreiben. Seine Gleichung kann auf die Form

$$\epsilon_x x^2 + \epsilon_y y^2 + \epsilon_z z^2 = 1 \quad (3.1)$$

gebracht werden, wobei  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  und  $\epsilon_z$  Hauptdielektrizitätskonstanten heißen. Sie hängen vom Medium ab, in dem sich das Licht ausbreitet.

MacCullagh verwendete nun folgende Konstruktion, um die Form der zugehörigen Wellenfläche zu finden (Abb. 3.1). Das Ellipsoid wird von Ebenen durch seinen Mittelpunkt im Allgemeinen in Ellipsen geschnitten, wenn die Längen aller drei Halbachsen

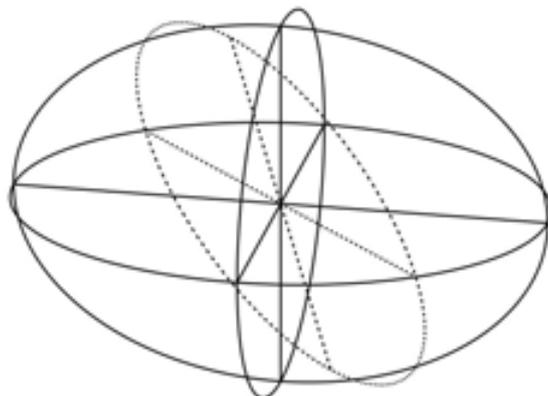
$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_x}}, \frac{1}{\sqrt{\epsilon_y}}, \frac{1}{\sqrt{\epsilon_z}} \quad (3.2)$$

verschieden sind. Nur für zwei ausgezeichnete Lagen handelt es sich um Kreise. Die beiden Halbachsen einer Ellipse seien nun  $\alpha$  und  $\beta$  mit  $\alpha > \beta$ . Wenn diese Längen nun in den beiden entgegengesetzten Richtungen der Normalen der Ebene abgetragen

<sup>2</sup> Die Ergebnisse seiner Arbeit erschienen erst 1837 im 17. Band der *Transaction of the Royal Irish Academy*. Hamilton, William. „Third Supplement to an Essay on the Theory of Surfaces of Rays“. In: *The Transactions of the Royal Irish Academy* 17 (1832).

<sup>3</sup> MacCullagh, James. „On the Double Refraction of Light on a crytallized Medium, according to the Principles of Fresnel“. In: *The Transactions of the Royal Irish Academy* 16 (1830), S. 65.

werden, in der die Ellipse liegt, so entstehen zwei Punktepaare. Die beiden Punkte eines jeden Paares haben dabei den gleichen Abstand zum Mittelpunkt des Ellipsoids. Sie liegen auf der Fresnelschen Wellenfläche, wie MacCullagh zeigte. Alle Punkte der Fläche lassen sich auf diesem Wege konstruieren.<sup>4</sup>



**Abb. 3.1:** Die Grafik zeigt die Hauptschnitte eines Indexellipsoids mit  $\epsilon_x : \epsilon_y : \epsilon_z = 2 : 3 : 4$ . Die gestrichelte Ellipse zeigt den Schnitt mit einer Ebene durch den Ursprung des Ellipsoids. Dargestellt sind ihre beiden Halbachsen. Grafik: H. Junker

### Hamiltons Entdeckung der konischen Refraktion

Wenn sämtliche Punkte der Wellenfläche in einem Koordinatensystem abgetragen werden, dessen Ursprung mit der Lichtquelle zusammenfällt, so ergeben sich zwei Schalen für die beiden Wellenfronten. Die Geschwindigkeit des Lichts entlang einer festen Richtung  $k = (\xi_x, \xi_y, \xi_z)$  hängt hier von den Hauptdielektrizitätskonstanten  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  des Kristalls ab. Die Fresnelsche Normalengleichung für die Normalengeschwindigkeit  $v$  lautet:

$$\frac{\xi_x}{v^2 - a} + \frac{\xi_y}{v^2 - b} + \frac{\xi_z}{v^2 - c} = 0.^5 \quad (3.3)$$

<sup>4</sup> Ebd., S. 75.

<sup>6</sup> Die Hauptlichtgeschwindigkeiten

$$a = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_x}}, \quad b = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_y}}, \quad c = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_z}}$$

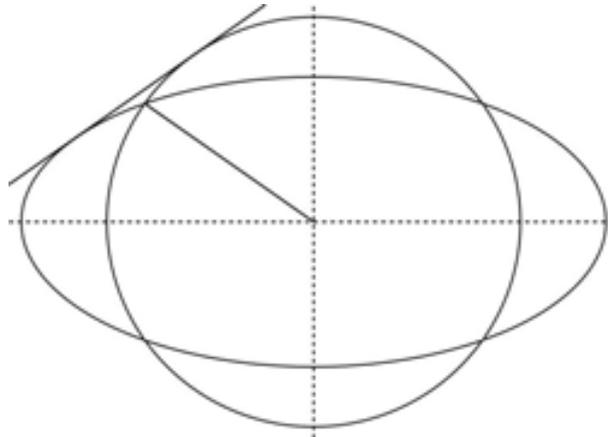
hängen für monochromatisches Licht nur von den Eigenschaften des Mediums ab, durch welches die Welle propagiert.<sup>7</sup> Die Gleichung 3.3 ist quadratisch in  $v^2$ . Für jede feste Richtung  $k = (\xi_x, \xi_y, \xi_z)$  breitet sich das Licht in zwei Geschwindigkeiten aus. Wenn die Koordinaten angepasst werden,

$$\xi_x = a \cdot x, \quad \xi_y = b \cdot y, \quad \xi_z = c \cdot z,$$

dann lässt sich die Gleichung mit  $v^2 = x^2 + y^2 + z^2$  zu

$$a^2 b^2 c^2 + (x^2 + y^2 + z^2)(a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2) = a^2 (b^2 + c^2) x^2 + b^2 (a^2 + c^2) y^2 + c^2 (a^2 + b^2) z^2$$

umformen.<sup>8</sup> Diese implizite Gleichung vierten Grades definiert die Fresnelsche Wellenfläche.



**Abb. 3.2:** Die Abbildung zeigt einen Schnitt  $y = 0$  durch die Wellenfläche für  $a : b : c = 1 : \sqrt{2} : 2$ . Die punktierten Linien zeigen die beiden Koordinatenachsen an. Die durchgezogenen Geraden stellen eine der beiden optischen Achsen und die Schnittgerade der Doppelebene mit  $y = 0$  dar. Grafik: H. Junker

<sup>6</sup> Born und Wolf, *Principles of Optics*, S. 671.

<sup>7</sup> Mit  $c_0$  wird hierbei die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum bezeichnet.

<sup>8</sup> Auf diesem Wege leitete vermutlich erstmals Hamilton die Fresnelsche Wellengleichung her: Hamilton, „Third Supplement to an Essay on the Theory of Surfaces of Rays“, S. 130.

In seinen ergänzenden Bemerkungen zu seiner *Theory of Systems of Rays* untersucht Hamilton die Gestalt dieser quartischen Fläche näher.<sup>9</sup> Für  $a < b < c$  besteht sie aus zwei verschiedenen Schalen. Sie beschreiben die beiden Wellenfronten, die sich aus den beiden Normalengeschwindigkeiten ergeben, mit denen sich das Licht in einem biaxialen Kristall in eine feste Richtung ausbreitet. Die Schnitte mit den Koordinatenebenen bestehen jeweils aus einem Kreis und einer Ellipse (Abb. 3.2). Die beiden Schalen der Fläche treffen sich genau in vier Punkten:

$$x = \pm c \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad y = 0, \quad z = \pm a \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}.$$

Es handelt sich zum die Schnittpunkte des Kreises und der Ellipse in der Ebene  $y = 0$ . Sie haben die Gleichung

$$x^2 + z^2 - b^2 = 0, \quad a^2 x^2 + c^2 z^2 - a^2 c^2 = 0.$$

Entlang der Richtungen, die von den vier Schnittpunkten der beiden Schalen definiert werden, sind beide Normalengeschwindigkeiten gleich. Es gibt demnach genau zwei Richtungen in einem biaxialen Kristall, in denen sich das Licht nur mit einer festen Geschwindigkeit ausbreitet. Nach Hamilton wäre es Fresnel gewesen, der sie als optische Achsen des Kristalls bezeichnet hat.<sup>10</sup>

Hamilton untersuchte die Fläche in der Nähe der vier ausgezeichneten Punkte näher. In der Tiefe seiner Betrachtungen ging er über Fresnel hinaus. Analytisch stellte er fest, dass der Tangentenkegel an die Fläche in den Punkten nicht zerfällt, weswegen es sich um gewöhnliche Doppelpunkte (conoidal cusp) handeln muss.<sup>11</sup> Außerdem wird die Fläche in der Umgebung dieser Punkte jeweils von einer Doppelsebene entlang eines Kreises berührt, wie er zeigen konnte.<sup>12</sup> Demnach gibt es neben den vier Doppelpunkten ebensoviele Doppelkreise, die Fresnel unbekannt geblieben sind. Aus diesen geometrischen Resultaten schließt Hamilton nun auf ein neues Brechungsgesetz. Alle Strahlen, die aus einem biaxialen Kristall austreten, werden im Allgemeinen in zwei Strahlen zerlegt. Strahlen jedoch, die in Richtung der optischen Achsen verlaufen, müssen beim Austritt aus der Fläche kegelförmig aufgespreizt werden. Die Lichtstrahlen verlaufen auf dem Mantel, der durch den Tangentenkegel in

<sup>9</sup> Die folgenden Bemerkungen zu Hamiltons Entdeckung stützen sich auf: O'Hara, J. G. „The Prediction and Discovery of Conical Refraction by William Rowan Hamilton and Humphrey Lloyd (1832-1833)“. In: *Proceedings of the Royal Irish Academy* 82.2 (1982).

<sup>10</sup> Hamilton, „Third Supplement to an Essay on the Theory of Surfaces of Rays“, S. 130.

<sup>11</sup> Ebd., S. 133.

<sup>12</sup> Ebd., S. 134.

den Doppelpunkten beschrieben wird.<sup>13</sup> Hamilton nannte dieses Phänomen (externe) konische Refraktion.<sup>14</sup>

Nach seiner Entdeckung bat Hamilton seinen Kollegen am Dubliner Trinity College, den Physiker Humphrey Lloyd (1800–1881), um eine experimentelle Bestätigung seiner Vermutung, die er wenig später auch erhielt.<sup>15</sup> Die Ergebnisse sind im Anschluss an Hamiltons Artikel in den *Transactions of the Royal Irish Academy* abgedruckt.<sup>16</sup>

## Modelle der Fresnelschen Wellenfläche

Es ist nicht bekannt, ob James MacCullagh oder William Hamilton anschauliche Modelle der Wellenfläche besaßen. In ihrer Forschung, die sich auf analytische Berechnungen stützte, spielte die Anschauung jedenfalls keine tragende Rolle. Hamilton sagte das Phänomen der konischen Lichtbrechung durch das Studium der singulären Punkte auf der Fresnelschen Wellenfläche vorher. Seine Erkenntnisse regten zur weiteren Forschung auf dem Gebiet der geometrischen Optik an, belebten aber auch das Studium von Flächen der höheren Ordnung.<sup>17</sup>

Nach 1870 entstanden mehrere Gipsmodelle, die die Konstruktion Fresnels veranschaulichten. Eine vierteilige Reihe von Modellen entstand vor 1880 an der Hochschule in München auf Veranlassung von Alexander Brill. Sie sind in der Verlagshandlung von Ludwig Brill als Teil der sechsten Serie erschienen (Abb. 8.4).<sup>18</sup> Das Londoner *Science Museum* besitzt außerdem ein Gipsmodell von 1876 des Pariser Verlages *Delagrave*.

<sup>13</sup> Born und Wolf, *Principles of Optics*, S. 684 ff.

<sup>14</sup> Hamilton, „Third Supplement to an Essay on the Theory of Surfaces of Rays“, S. 136.

<sup>15</sup> Ebd., S. VII.

<sup>16</sup> Lloyd, Humphrey. „On the Phenomena Presented by Light in Its Passage along the Axes of Biaxial Crystals“. In: *The Transactions of the Royal Irish Academy* 17 (1833).

<sup>17</sup> In den ersten Ausgaben des *Cambridge Mathematical Journal* sind mehrere Artikel mit geometrischen Betrachtungen erschienen, die explizit auf die Arbeiten zur Wellenfläche verweisen: Gregory, Duncan F. „Circular Section in Surfaces of the Second Order“. In: *The Cambridge Mathematical Journal* 1.2 (1837); Greatheed, Samuel S. „On the Condition that a Surface may be Touched by a Plane in a Curved Line“. In: *The Cambridge Mathematical Journal* 2.7 (1839); Gregory, Duncan F. „Singular Points in Surfaces“. In: *The Cambridge Mathematical Journal* 2.12 (1841).

<sup>18</sup> Brill, *Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht*, S. 13.

## 3.2 Modelle von Strahlenbündeln und Brennflächen

Philipp Ludwig von Seidel (1821–1896) war seit 1855 ordentlicher Professor in München. Seinerzeit war er bekannt für seine Untersuchungen über Abbildungsfehler, die bei optischen Apparaten auftreten.<sup>19</sup> Im Januar 1857 hielt er einen Vortrag an der Bayerischen Akademie der Wissenschaften unter dem Titel „Theorie der kaustischen Flächen, welche in Folge der Spiegelung oder Brechung von Strahlenbüscheln an den Flächen eines optischen Apparates erzeugt werden“.<sup>20</sup> Bei seiner Rede zeigte Ludwig Seidel ein Modell, das später Anlass für Diskussionen gab. Sein Entwurf gehört zu den ersten Anschauungsmodellen, die in dieser Phase entstanden sind.

### Seidels Vortrag

Zu Beginn seines Vortrages erklärt Seidel, wie ein leuchtender Punkt eine ebene Fläche in großer Entfernung gleichmäßig erhellt. Er interessiert sich jedoch für die Verteilung des Lichtes auf einem Schirm, wenn die Strahlen zuvor eine Abfolge von „Spiegelung oder Brechung an einer regelmäßig gerundeten und polirten Fläche“ durchlaufen haben. Denn „abgesehen von ganz speziellen Ausnahmefällen findet man alsdann die Vertheilung der Helligkeit auf dem erleuchteten Schirme ungleich, und namentlich bemerkt man darin gewisse Linien von ausgezeichnetem Glanze, von eigenthümlicher, meist mit Spitzen versehener Figur, die sich um so deutlicher hervorheben, je näher die Gestalt der Flächen, an welchen das Licht gebrochen wurde, sich mathematischer Regelmäßigkeit nähert. (. . .) Man hat diese Linien größter Helligkeit *kaustische Linien* genannt, oder *Brennlinien*.“ Was sich auf dem Schirm abzeichnet, entspricht dem Schnitt durch eine unsichtbare Fläche, wie Seidel ausführt, denn „wenn man den Apparat optischer Flächen, an welchem die Strahlen abgelenkt wurden, so wie den leuchtenden Punkt unverrückt lässt, die Lage des Schirmes, auf welchem die Lichtfigur betrachtet wird, aber etwas verändert, so bemerkt man noch immer eine ähnliche Brennlinie, und es ist klar, dass alle solchen Linien, die gleichzeitig in der Luft schwe-

<sup>19</sup> Seidel, Philipp Ludwig. „Ueber die Theorie der Fehler, mit welchen die durch optische Instrumente gesehenen Bilder behaftet sind und über die mathematischen Bedingungen ihrer Aufhebung“. In: *Abhandlungen der Naturwissenschaftlich-Technischen Commission bei der Königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften in München*. Bd. 1. München: J. G. Cotta'schen Buchhandlung, 1857.

<sup>20</sup> Seidel, Philipp Ludwig. „Betreffend die Theorie der kaustischen Flächen, welche in Folge der Spiegelung oder Brechung von Strahlenbüscheln an den Flächen eines optischen Apparates erzeugt werden“. In: *Gelehrte Anzeigen der K. Bayerischen Akademie der Wissenschaften* 34 (1857). Hrsg. von Königlich Bayerische Akademie der Wissenschaften.

ben, und von welchen uns nur diejenige sichtbar ist, die wir gerade auffangen, zusammen im Raume eine krumme Fläche bedecken, die sogenannte *kaustische Fläche*, deren Durchschnitte mit verschiedenen Ebenen die einzelnen Brennlinien sind.“<sup>21</sup> Nach dieser Beschreibung des Phänomens, erläutert Seidel die optischen Gründe für die ungleichmäßige Verteilung der gebrochenen und abgelenkten Lichtstrahlen.

Seidel interessierte sich für die kaustische Fläche, die bei einem optischen Apparat entsteht, dessen Linsen kugelförmig und entlang einer gemeinsamen Achse ausgerichtet sind, sobald sich die punktförmige Lichtquelle nicht auf der optischen Achse befindet. Wenn der Punkt stattdessen auf der Achse liegt, wird das gesamte System der Strahlen rotationssymmetrisch, was die Betrachtung wesentlich erleichtert. Für den komplizierten Fall, mit dem er sich befasst, teilt Seidel seine Rechnungen nicht mit. Er verweist stattdessen auf einen Artikel in den *Astronomischen Nachrichten*, in dem er den Gang der Strahlen berechnet.<sup>22</sup> Auf der Sitzung bemüht er sich nur darum, die Gestalt der resultierenden Brennfläche zu veranschaulichen. Für diesen Zweck konstruierte er ein Modell, „um eine deutlichere Vorstellung von dem Verlauf der beiden Flächen zu erhalten“.<sup>23</sup> Sein Entwurf ist mutmaßlich verschollen. In der Hallenser Sammlung befindet sich jedoch eine dreiteilige Serie von Gipsmodellen einer „Brennfläche eines Strahlensystems“ aus dem Programm der Verlagshandlung Martin Schilling, die 1877 von Alexander Brills Schwager an der Münchener Hochschule hergestellt worden ist.<sup>24</sup> Ludwig Schleiermacher (1855–1927) orientierte sich bei der Herstellung stark an den Angaben Seidels, wie sich der beigegebenen Abhandlungen entnehmen lässt.<sup>25</sup> Er stellte im Wesentlichen dieselbe Fläche dar, veranschaulichte aber außerdem noch die beiden Schalen getrennt voneinander. Auch die bildhafte Beschreibung des vorgezeigten Modells, die Ludwig Seidel auf der Sitzung 1857 gab,

<sup>21</sup> Die Hervorhebungen wurden aus dem Original übernommen: Seidel, „Theorie der kaustischen Flächen“, S. 242.

<sup>22</sup> Seidel, Philipp Ludwig. „Ueber die Entwicklung der Glieder 3ter Ordnung, welche den Weg eines ausserhalb der Ebene der Axe gelegenen Lichtstrahles durch ein System brechender Medien bestimmen“. In: *Astronomische Nachrichten* 43.1027 (1856).

<sup>23</sup> Seidel, „Theorie der kaustischen Flächen“, S. 250.

<sup>24</sup> Alexander Brill war ab 1875 mit der älteren Schwester Joh. Christiane Schleiermacher von Ludwig Schleiermacher verheiratet. Schleiermachers Modelle sind in dem Verlag als Teil der ersten Serie erschienen (Nr. 2): Schilling, Martin. *Catalog mathematischer Modelle*. 7. Aufl. Leipzig: Schilling, 1911, S. 3.

<sup>25</sup> Schleiermacher, Ludwig. „II. Die Brennfläche eines Strahlensystems, welche mit der Fläche der Krümmungscentra des elliptischen Paraboloids in collinearer Verwandtschaft steht“. In: *Mathematische Modelle angefertigt im mathematischen Institut des k. Polytechnikums zu München* (1877).

lassen auf eine große Ähnlichkeit mit der Fläche schließen, die Schleiermacher später modelliert hat (Abb. 8.5).

Ludwig Seidel hatte die beiden Mäntel seiner Brennfläche unterschiedlich eingefärbt, wie er in seinem Vortrag erklärte, damit die Zuhörer sie besser voneinander trennen können. „Die eine von ihnen, welche ich die *vordere* nennen will, hat einige Ähnlichkeit mit einer vielseitigen Pyramide: Sie bietet wie diese vier Fronten dar, von welchen je zwei in scharfen Kanten (den Aesten der beiden appollonischen Parabeln) auf einander treffen. Nach der Seite, welche ich die *vordere* nenne, verjüngen sich nach und nach ihre transversalen Dimensionen; zuletzt runden sich von ihren vier Kanten diejenigen beiden gegenüberliegenden ab, welche einander näher als die anderen stehen, und die Nappe läuft [sic] von da an mehr flach, um es so auszudrücken, zungenförmig zu bis zu ihrem Ende. Die zweite oder *hintere* Nappe hat im Ganzen ein kegelförmiges Aussehen.“<sup>26</sup> Die beiden verschiedenen Mäntel, die Seidel als Nappen bezeichnet, durchdringen sich in einer mit „vier Spitzen versehenen Curve doppelter Krümmung“, wie er ausführt. Trotz seiner Bemühungen um Anschaulichkeit, war er sich bewusst, dass die bloße Betrachtung nur wenig über die eigentümliche Fläche verrät: „Die genaue Einsicht in die Natur dieser Flächen gewährt natürlich nur die mathematischen Untersuchung, für welche die Gleichungen sich sehr bequem darbieten.“<sup>27</sup>

Ludwig Seidel erläutert, dass die Gestalt der Fläche nicht wesentlich von der Anordnung und Form der einzelnen Kugeln abhängt.<sup>28</sup> Die unterschiedlichen Brennflächen würden sich im Maßstab unterscheiden – abgesehen von einer Ausnahme, auf die Seidel jedoch nicht weiter eingeht.

### **Kummers *Theorie gradliniger Strahlensysteme***

Ludwig Seidel verwies in seiner Abhandlung immer wieder auf das frühe Werk Gauß' zur Dioptrik. Vermutlich kannte er Hamiltons Arbeiten über Strahlensysteme nicht. Obwohl er um den Zusammenhang zur Theorie der Flächenkrümmung wusste, betrachtete Seidel das Problem ohnehin weniger vom geometrischen Standpunkt aus.

Ernst Kummer begann Ende der 1850er Jahre damit, sich intensiver mit der Optik zu befassen. Er interessierte sich vor allem für das geometrische Problem, dass die Beschreibung von Strahlensystemen bereitet. Seine *Theorie der gradlinigen Strah-*

<sup>26</sup> Hervorhebungen im Original: Seidel, „Theorie der kaustischen Flächen“, S. 248.

<sup>27</sup> Ebd., S. 250.

<sup>28</sup> Ebd., S. 247.

*lensysteme* erschien 1860 in *Crelles Journal*.<sup>29</sup> Kummer wollte sie als Ergänzung und Vervollständigung zu Hamiltons frühen Arbeiten verstanden wissen, die verstreut über einen längeren Zeitraum erschienen sind. Außerdem wollte er die Theorie auf der analytischen Geometrie gründen, wie er in dem Vorwort seiner Abhandlung schreibt.<sup>30</sup> Ein wichtiger Referenzpunkt für ihn war für seine Untersuchung der allgemeinen Strahlensysteme das Werk Carl Friedrich Gauß' (1777–1855), der mit seiner Schrift *Disquisitiones generales circa superficies curvas* von 1827 die Theorie der Flächenkrümmungen geprägt hat.

Unter einem Strahlensystem verstand Kummer „Systeme gerader Linien, welche den ganzen Raum oder einen Theil des Raumes so ausfüllen, daß durch jeden Punkt ein Strahl oder eine gewisse Anzahl discreter Strahlen geht“.<sup>31</sup> Mit solchen Systemen ist seinerzeit die Ausbreitung von Licht in der Optik beschrieben worden. Für isotrope Medien deckt sich die Theorie vollständig mit der geometrischen Lehre von den Normalen einer Fläche, die wesentlich von Gaspard Monge und Carl Friedrich Gauß begründet worden ist. Wenn Licht von einem Punkt ausgestrahlt wird, breiten sich die Strahlen orthogonal zu der Oberfläche einer Kugel aus, solange sie nicht gebrochen werden. Die beiden französischen Mathematiker Étienne-Louis Malus (1775–1823) und Charles Dupin (1784–1873) haben gezeigt, dass solch ein System von Normalen bei Refraktion und Reflexionen an den meisten Medien erhalten bleibt. Treten die Strahlen jedoch in Kristalle ein, so gilt dies nicht uneingeschränkt, was seit der Entdeckung der Doppelbrechung dem 17. Jahrhundert bekannt ist.<sup>32</sup> Strahlensysteme, die sich nicht durch die Normalen einer Fläche beschreiben lassen, nennt Ernst Kummer irregulär. In seiner Abhandlung verallgemeinert er die Theorie für diesen Fall.

Im Zuge seiner Untersuchungen diskutiert Kummer vor allem das Verhalten von Systemen gerader Linien im Kleinen. Strahlenbündel beschreiben die Ausbreitung des Lichtes in der infinitesimalen Umgebung einer Achse, die Hauptstrahl des Bündels genannt wird. Geometrisch versteht Kummer darunter alle Strahlen des betrachteten Systems, die der Achse beliebig nahe kommen. In seiner Abhandlung spricht er von „unendlich dünnen Strahlenbündeln“.<sup>33</sup> Um einen Strahl des Systems zu beschreiben,

<sup>29</sup> Kummer, Ernst E. „Allgemeine Theorie der gradlinigen Strahlensysteme“. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 1860.57 (1860).

<sup>30</sup> Ebd., S. 190.

<sup>31</sup> Ebd., S. 189.

<sup>32</sup> Wangerin, A. „Optik. Ältere Theorie“. In: *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*. Hrsg. von Sommerfeld, Arnold. Bd. 5. Leipzig: B.G. Teubner, 1909, S. 6.

<sup>33</sup> Kummer, „Allgemeine Theorie der gradlinigen Strahlensysteme“, S. 213.

nutzt Kummer verschiedene Koordinaten. Mit  $x, y, z$  beschreibt er die Punkte, durch die der Strahl hindurchgeht. Um die Richtung des Strahls auszudrücken, verwendet er Punkte  $\xi, \eta, \zeta$  auf der Sphäre mit Radius Eins im Ursprung, d.h.  $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ . Jeder Punkt auf einem Strahl ist dann durch seinen Abstand  $r$  zum Ausgangspunkt  $(x, y, z)$  bestimmt. Kummer nimmt nun an, dass die Koordinaten Funktionen von unabhängigen Variablen  $u$  und  $v$  sind. Anschließend bestimmt er die partiellen Ableitungen, wobei er sich an Gauß' Notation orientiert. Für  $\Phi := (\xi, \eta, \zeta)$  und  $X := (x, y, z)$  schreibt Kummer:

$$E = \Phi_u \Phi_u, F = \Phi_u \Phi_v, G = \Phi_v \Phi_v, e = \Phi_u X_u, f = \Phi_v X_u, f' = \Phi_u X_v, g = \Phi_v X_v.$$

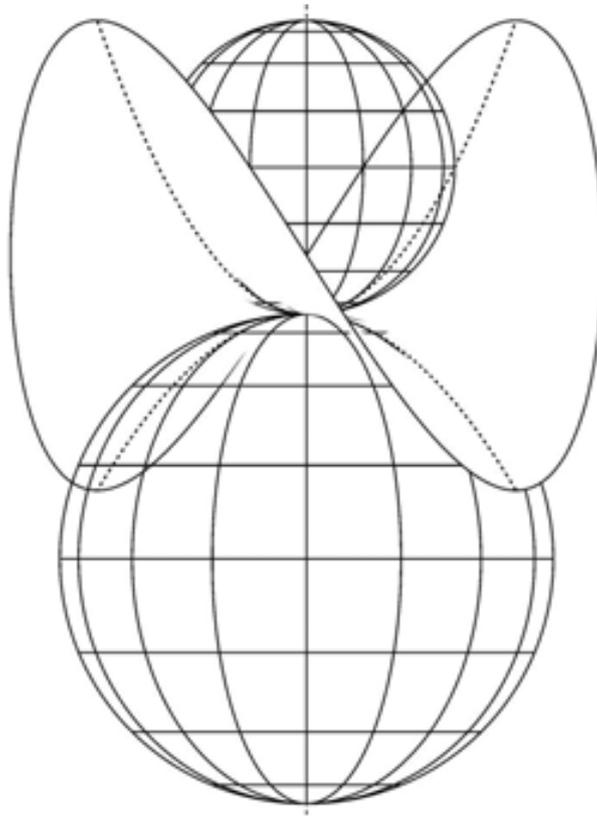
Wenn es sich um ein Normalensystem handelt, dann ist  $\Phi$  die normierte Normale  $X_u \times X_v$  an die Fläche in dem Punkt  $(x, y, z)$ . In diesem Fall liegen auf jedem Strahl des Systems zwei Brennpunkte, die mit den Mittelpunkten der Hauptkrümmungskugeln an die Fläche im Fußpunkt des Strahls zusammenfallen. Für allgemeine Strahlensysteme leitet Kummer nun eine quadratische Gleichung her, deren Lösungen die Abzissen möglicher Brennpunkte eines Strahls angeben:

$$r^2 + \frac{gE - (f + f')F + eG}{\Delta} r + \frac{eg - ff'}{\Delta} = 0, \quad \Delta = EG - F^2. \quad (3.4)$$

Die Lösungen dieser Gleichung können auch konjugiert imaginär sein. Die zugehörigen Punkte auf dem Strahl bezeichnet Kummer in Übereinstimmung mit Gauß' Theorie als Brennpunkte. Nach ihm werde der Strahl in diesen Punkten von unendlich nahen Linien des Systems geschnitten.<sup>34</sup> Wenn die Punkte reell sind, so gibt es zwei Ebenen, die durch den betrachteten Strahl und seine Schnittlinien gehen. Kummer nennt sie die Fokalebene des Strahls. Er gibt eine Formel für den Winkel  $\omega$  an, den sie miteinander bilden. Für Normalensysteme werden die beiden Fokalebene von den Haupttangente im Fußpunkt des Strahls definiert. Dementsprechend ist  $\omega = 90^\circ$ . Die Abzissen der Brennpunkte sind dann die Kehrwerte der beiden Hauptkrümmungen des Punktes, in dem der Strahl normal auf der Fläche steht, so dass die Brennpunkte mit den beiden Mittelpunkten der Schmiegekekugeln zusammenfallen.

Ernst Kummer betrachtet nun alle Strahlen, die einer festen Linie des Systems beliebig nahe kommen. Er spricht von einem Strahlenbündel und seiner Achse. Alle Strahlen des Bündels schneiden eine Ebene, die auf der Achse senkrecht steht. Die Schnittpunkte liegen dabei in unmittelbarer Nähe zum Fußpunkt der Linie. Kummer betrachtet nun alle Strahlen, die durch eine Kurve in der Ebene gehen, welche die Achse umschließt. Sie würden eine Fläche erzeugen, die das Bündel umhüllt. Die

<sup>34</sup> Ebd., S. 200f.



**Abb. 3.3:** Die Abbildung zeigt die beiden Schmiegekekugeln für einen hyperbolischen Punkt. Die Mittelpunkte der Sphären liegen auf der vertikalen Normalen an das Flächenstück. Die beiden gestrichelten Linien zeigen die Hauptkrümmungslinien durch den Punkt. Grafik: H. Junker

parallelen Querschnitte seien Ellipsen, die in den beiden Brennpunkten der Achse jedoch zu unendlich kleinen geraden Linien werden würden, wie Kummer in seiner Abhandlung schreibt: „Hieraus folgt auch, dass die umgränzende Fläche eines jeden unendlich dünnen Strahlenbündels mit realen Brennpunkten durch Bewegung einer geraden Linie construirt werden kann, welche stets durch eine unendlich kleine ebene Curve und durch zwei grade Linien hindurchgeht, die auf einem im Inneren der kleinen Curve auf der Ebene desselben errichteten Perpendikels senkrecht stehen.“<sup>35</sup> Anschließend zeigt er, dass die beiden geraden Linien in den Fokalebene der Achse liegen. Demnach ist die Gestalt eines Bündels vollständig durch die Lage der beiden Brennpunkte und den Winkel der Fokalebene bestimmt, die zu seiner Achse gehören.

Ernst Kummer unterscheidet nun mehrere Arten von Strahlenbündeln. Die beiden

<sup>35</sup> Kummer, „Allgemeine Theorie der gradlinigen Strahlensysteme“, S. 222.

Fokalebene der Achse können wie bei Normalensystemen senkrecht aufeinander stehen. Sie können aber auch einen spitzen Winkel bilden. Dann gehen alle Linien durch zwei Geraden. Wenn die beiden Lösungen der Gleichung (3.4) imaginär werden, kann es auch keine reellen Fokalebene geben. In diesem Fall ähnelt das Strahlenbündel einem einschaligen Hyperboloiden. Neben diesen drei Möglichkeiten zählt Kummer noch zwei weitere Arten von Strahlenbündeln auf. Sie treten auch bei den Systemen auf, die von den Normalen an eine Fläche gebildet werden. Wenn im Fußpunkt der Achse die beiden Hauptkrümmungen gleich sind, so fallen die Brennpunkte zusammen. Die umhüllende Fläche nimmt dann die Gestalt eines Doppelkegels an. Es sei denn, die beiden Krümmungen der Fläche verschwinden. In diesem Fall ähnelt die Fläche einem Zylinder.

### Kummers Fadenmodelle von Strahlenbündeln

Zur Veranschaulichung der verschiedenen Arten solcher Bündel entwarf Kummer mehrere Fadenmodelle, die er im Juli 1860 bei einer Sitzung der Preußischen Akademie der Wissenschaften in Berlin präsentierte.<sup>36</sup> Später sind sie von dem Göttinger Universitätsmechaniker W. Apel gefertigt worden, wie es sich dem Katalog zur Münchener Ausstellung von 1893 entnehmen lässt, bei der die Kummerschen Modelle zu sehen waren.<sup>37</sup> Vor der Sitzung hat Kummer bereits seinem Freund, dem Mathematiker Leopold Kronecker (1823–1891), angekündigt, worüber er demnächst vortragen möchte, „nämlich über die drei Arten von Strahlenbündel (deren Modelle ich vorzeigen werde), in wiefern dieselben in der Natur wirklich vorkommen.“<sup>38</sup> Tatsächlich zeigte er in seinem Vortrag auch, unter welchen Bedingungen die dargestellten Strahlenbündel auftreten.

Es ist leider weder bekannt, ob Kummer selbst die Entwürfe angefertigt hat, noch ob es die ersten Modelle waren, die der Berliner Professor für seine Arbeit benutzt hat.<sup>39</sup> Mit den Fadenmodellen stellte er jedenfalls drei Arten von Strahlenbündeln dar, welche er in seiner Abhandlung anhand der beiden Brennlinien und Fokalebene unterschieden hat. Die Fäden sind zwischen zwei horizontale Holzplatten gespannt,

<sup>36</sup> Kummer, Ernst E. „30. Juli 1860. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse.“ In: *Monatsberichte der Königlich-Preussischen Akademie zu Berlin (1860)*. Berlin: Ferd. Dümmler’s Verlags-Buchhandlung, 1860.

<sup>37</sup> Dyck, *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente (Nachdruck)*, S. 280.

<sup>38</sup> Hensel, „Kummer und sein Lebenswerk“, S. 97.

<sup>39</sup> Ernst Kummer war ab 1855 bis 1883 Professor für Mathematik an der Berliner Friedrich-Wilhelms-Universität.

welche die Unter- und Oberseiten eines langgezogenen Quaders bilden. Die Achse des Bündels ist als vertikaler roter Faden dargestellt. Am unteren und oberen Ende der Konstruktion schneidet er die Mittelpunkte zweier ellipsenförmiger Kurven. Zwischen ihnen sind von Punkt zu Punkt Fäden gespannt. Zusammen würden sie eine Regelfläche des vierten Grades erzeugen, wie Kummer erläutert. Sie umhüllt das Strahlenbündel. Die waagerechten Querschnitte durch die drei Flächen sind alle Ellipsen. Das erste Modell zeigt ein Bündel eines Normalensystems, bei dem die beiden Fokalebene senkrecht aufeinander stehen. Sie gehen jeweils durch die Achse des Bündels und eine Brennlinie. Die beiden Brennlinien zeichnen sich deutlich ab, wenn das Modell um die vertikale Achse gedreht wird. Ein zweites Modell veranschaulicht den Fall, in dem die beiden Fokalebene einen spitzen Winkel miteinander bilden. Der letzte Entwurf seiner Serie zeigt ein Strahlenbündel mit zwei imaginären Brennpunkten. Die Fokalebene und Brennlinien sind ebenfalls imaginär, wodurch die umhüllte Fläche einem einschaligen Hyperboloiden ähnelt (Abb. 8.6).

### **Quinckes Experimente und Matthiessens Einwand**

In seinem Bericht vor der Preußischen Akademie erläuterte Ernst Kummer auch, wie sich Strahlenbündel aller Arten erzeugen ließen. Die Gestalt eines Strahlenbündels in einem homogenen Medium hängt von der Richtung der Achse ab, dann aber auch von dem Winkel der beiden Fokalebene. Sie wird dann bestimmt durch das Aussehen der Wellenfläche des jeweiligen Mediums in dem Endpunkt des Radiusvektors, der zur Achse parallel ist. Für isotrope Medien ist die Wellenfläche eine Kugel. Für doppelt brechende Kristalle wird die Ausbreitung des Lichts hingegen durch zweischalige Flächen beschrieben. Bei einachsigen Kristallen zerfällt die Wellenfläche in eine Kugel und ein Rotationsellipsoid, für zweiachsige Körper ist sie von Fresnel beschrieben worden. Nachdem er die verschiedenen Strahlenbündel untersucht hatte, bat Ernst Kummer seinen Kollegen Georg Hermann Quincke (1834–1924), der den Lehrstuhl für Physik an der Berliner Universität innehatte, um eine experimentelle Bestätigung seiner Theorie.<sup>40</sup> Quincke maß bei Experimenten an Calcit und Aragonit Winkel, die nur geringfügig von den Größen abwichen, die sich aus Kummers Formeln ergaben.<sup>41</sup>

Bei Kummers Modellen stehen die Brennlinien jeweils senkrecht auf der Achse, die durch einen Faden darstellt ist. Kummer beweist diese Beziehung in seiner Abhandlung. In einer Mitteilung an die *Akademie der Wissenschaften zu München* erklärte der Physiker Ludwig Matthiessen (1830–1906) 1883, mehr als zwei Jahr-

<sup>40</sup> Hensel, „Kummer und sein Lebenswerk“, S. 101.

<sup>41</sup> Quincke, Georg Hermann. „Experimentelle Untersuchungen über Kummersche Strahlenbündel“. In: *Annalen der Physik*. 4. Ser. 27 (1862).

zehnte später, dass die Brennlinien nicht notwendigerweise orthogonal auf der Achse stehen müssten.<sup>42</sup> Als Gegenbeispiel führte er den Fall an, bei dem ein homogenes Bündel paralleler Strahlen an der Oberfläche einer Sphäre gebrochen wird, auf die es schräg trifft. Anschließend, so Matthiessen, ergäbe sich zwar ein Strahlenbündel mit zwei Leitlinien, die senkrecht aufeinander ständen (1. Art). Diese trafen jedoch den Hauptstrahl des Bündels nicht im rechten Winkel. Demnach sei es falsch, was Kummer bei der Präsentation seiner Modelle erklärt habe: „Die durch diese Modelle dargestellten drei Arten von Strahlenbündeln mit ihren Gränzfällen [sic], nämlich dem conischen und dem cylindrischen, sind, wie ich in der angeführten Abhandlung nachgewiesen habe, die einzigen mathematisch möglichen.“<sup>43</sup> Nach Matthiessen, zu jener Zeit Professor in Rostock, müsste noch der Fall betrachtet werden, dass die Brennlinien in einem spitzen Winkel die Achse des Bündels schneiden.

Obwohl der späte Einwand von Matthiessen gegen die Theorie Kummers richtig erscheint, beruht er auf einer irrtümlichen Vorstellung, wie Julius Weingarten (1836–1910) erläuterte.<sup>44</sup> Weingarten war damals Professor an der Bauakademie Charlottenburg. Heute ist er bekannt für seine Arbeiten auf dem Gebiet der Differentialgeometrie. In einer Note erläutert Weingarten, dass es sich bei den beiden Brennlinien nicht um zwei Geraden handelt, durch die tatsächlich alle Strahlen eines unendlich dünnen Strahlenbündels im geometrischen Sinne hindurchgehen. Stattdessen handele sich es um Linien, welche die Achse des Bündels so schneiden, dass an ihnen alle Strahlen des Bündels „in einem kürzesten Abstand“ vorbeigehen. Weingarten weist mit analytischen Mitteln für ein Normalbündel mit vertikaler Achse nach, dass es beliebig viele Strahlen des Bündels gibt, die auch diese Eigenschaft erfüllen. Neben diesen gibt es jedoch genau zwei eindeutig bestimmte Geraden, welche die Achse senkrecht in den beiden Brennpunkten schneiden, welche in demselben Sinne Brennlinien genannt werden können. „Wenn der Nachweis der Existenz von Brennlinien, welche die Axe eines unendlich dünnen Normalenbündels nicht unter rechten Winkel durchschneiden, sich in der erwähnten classischen Theorien nicht findet, so erscheint dies dadurch ohne Weiteres gerechtfertigt, dass für die Zielpunkte jener Untersuchungen grade die Auswahl gewisser, durch ihre Lage bevorzugter, Brennlinien angezeigt war.“<sup>45</sup> Matthiessen hat mit anderen Worten nicht berücksichtigt, dass

<sup>42</sup> Matthiessen, Ludwig. „Ueber die Form der unendlich dünnen astigmatischen Strahlenbündel und über die Kummerschen Modelle“. In: *Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München* 2 (1883).

<sup>43</sup> Kummer, „30. Juli 1860. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse.“, S. 469.

<sup>44</sup> Mehrere Begriffe sind heute mit Julius Weingartens Namen verbunden.

<sup>45</sup> Weingarten, J. „Note über die Brennlinien eines unendlich dünnen Strahlenbündels.“

die Orthogonalität der Brennlilien zur Achse eine Forderung ist, die sie erst unter unendlich vielen anderen Linien auszeichnet.

### 3.3 Schwarz' Gipsmodell einer Centrafläche

Im Jahr 1861 wechselte Hermann Amandus Schwarz (1843–1921) für das Studium der Mathematik an die Universität Berlin. Schwarz fand sich schnell zurecht. Gemeinsam mit anderen Studenten gründete er den Mathematischen Verein.<sup>46</sup> Im Jahr 1864 promovierte er bei Ernst Kummer.

Kummer führte Schwarz auch an die Herstellung von Modellen heran. Im Jahr 1862 präsentierte Kummer bei der Preußischen Akademie ein Gipsgussmodell seines begabten Schülers, das die sogenannte Krümmungsmittelpunktsfläche eines dreiachsigen Ellipsoiden zeigt.<sup>47</sup> Es ist nicht klar, bei welchem Anlass Schwarz' Entwurf entstanden ist. Ebensowenig ist bekannt, ob noch Kopien seiner Modelle existieren. Für die Ausstellung in München 1893 sind welche von einem Berliner Bildhauer angefertigt worden, wie sich dem Katalog entnehmen lässt.<sup>48</sup> Möglicherweise sind die Modelle nie in das Programm des Schilling-Verlages aufgenommen worden.<sup>49</sup> Schwarz originaler Entwurf besteht aus vier einzelnen Formen. Zwei Modelle zeigen die beiden

In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 98 (1885).

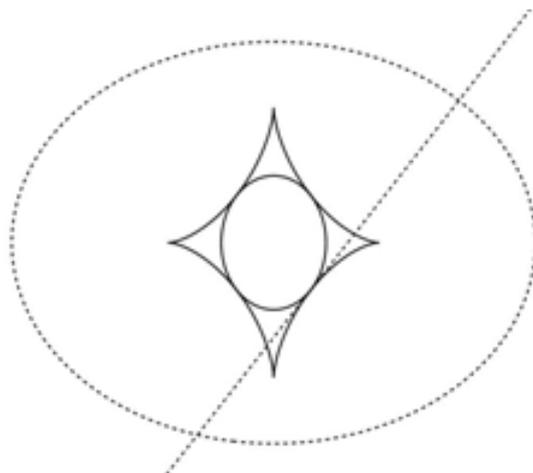
<sup>46</sup> Calinger, Ronald. „The Mathematics Seminar at the University of Berlin: Origins, Founding, and the Kummer-Weierstrass Years“. In: *Vita Mathematica: Historical Research and Integration with Teaching*. Hrsg. von Calinger, Ronald. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

<sup>47</sup> Kummer, Ernst E. „30. Juni 1862. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse.“ In: *Monatsberichte der Königlich-Preussischen Akademie zu Berlin (1862)*. Berlin: Ferd. Dümmler's Verlags-Buchhandlung, 1863.

<sup>48</sup> Dyck, *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente (Nachdruck)*, S. 282.

<sup>49</sup> In der Sammlung des Instituts Halle befinden sich jedoch zwei Modelle der Serie XLIII, die die Centrafläche eines Ellipsoids zeigen. Sie stammen vermutlich von Hans Schröder (gebr. 1887), der 1913 eine Dissertation mit dem Titel „Die Zentraflächen der Paraboloiden und Mittelpunktsflächen“ bei Albert Wangerin (1844–1933) verfasst hat, zu der er nach eigener Auskunft von Friedrich Schilling (1868–1950) angeregt worden sei. In seiner Arbeit beschreibt Schröder die Konstruktion u.a. dreier Modelle, die alle Zentraflächen unterschiedlicher Ellipsoide zeigen. An der entsprechenden Stelle erwähnt er auch Schwarz' Modell von 1862, das im mathematischen Institut der Technischen Hochschule in München vorhanden sei: Schröder, Hans. *Die Zentraflächen der Paraboloiden und Mittelpunktsflächen zweiten Grades*. Halle an der Saale: Heinrich John, 1913, S. 72. Mein Dank für diesen Hinweis gilt Karin Richter.

Schalen der Fläche, die von den Kehrwerten der kleinsten und größten Krümmung definiert werden. Auf ihnen liegen die Mittelpunkte der beiden Krümmungskugeln, die für jeden Punkt des Ellipsoids definiert sind. Ein weiteres Modell zeigte offenbar beide Schalen zusammen. Eine andere Form muss das Innere der Fläche wiedergegeben haben. Der Bericht enthält die Angaben Kummers zu dem Verhältnis, in dem die Längen der Halbachsen des Ellipsoids standen (3 : 4 : 5). Dadurch ist es heute immer noch möglich, die Gestalt der dargestellten Fläche zu rekonstruieren (Abb. 3.5).



**Abb. 3.4:** Die Abbildung zeigt den Schnitt  $y = 0$  durch die Centralfläche eines dreiachsigen Ellipsoids mit Halbachsen  $a : b : c = \sqrt{3} : \sqrt{4} : \sqrt{5}$ . Die gestrichelte Gerade ist normal an die Ellipse, in der das Ellipsoid geschnitten wird, und tangential an die Centralfläche. Grafik: H. Junker

In dem Sitzungsbericht heißt es, das Modell wäre geeignet, einige Unklarheiten und falsche Vorstellungen über die Gestalt der Centralfläche eines Ellipsoids zu beseitigen. „Es ist bei dieser Fläche, welche, wie Joachimsthal gezeigt hat, die Räume von einander trennt, in denen die Punkte liegen, durch welche zwei, oder vier, oder sechs reale Normalen an das Ellipsoid gezogen werden können, nicht leicht, eine genaue Vorstellung zu gewinnen, und das angefertigte Modell kann dazu dienen, falsche Vorstellungen über diese besondere Fläche, so wie über die Krümmungsmittelpunktsflächen im allgemeinen, zu berichtigen.“<sup>50</sup> Ferdinand Joachimsthal (1818–1861) war ein Schüler von Ernst E. Kummer, als dieser von 1833–1842 Lehrer an einem Gymnasium in Liegnitz (Legnica) war. Der Artikel, auf den Kummer hier anspielt, ist in dem Todesjahr von Joachimsthal in *Crelles Journal* erschienen.<sup>51</sup> Kummer wies in seinem Vortrag weiter darauf hin, dass die beiden Schalen der Fläche sich nicht nur in

<sup>50</sup> Kummer, „30. Juni 1862. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse.“, S. 427.

<sup>51</sup> Joachimsthal, Ferdinand. „Ueber die Anzahl reeller Normalen, welche von einem Punkte

vier Stellen berühren, obwohl es auf jedem Ellipsoid genau vier Punkte (sog. Nabelpunkte) gibt, in denen die beiden Hauptkrümmungen gleich sind. Die vier Punkte entsprechen stattdessen nur den Spitzen einer Raumkurve, in der sich die beiden Mäntel treffen. Zu allen anderen Punkten dieser Kurve gehören jedoch jeweils zwei Normale an das Ellipsoid. Nach Kummer hätte bereits Gaspard Monge in der Annahme geirrt, dass einer gemeinsamen Kurve der beiden Schalen einer Centrafläche immer eine Kurve von Nabelpunkten auf der Fläche entsprechen müsse. Er zitiert eine Passage aus dem Werk des französischen Mathematikers.<sup>52</sup>

Über die Konstruktion der Fläche ist wenig bekannt. Kummer erwähnt jedoch am Ende eine geläufige Parametrisierung der Centrafläche, die erstmals von George Salmon angegeben worden ist.<sup>53</sup> Vermutlich verwendete Hermann Schwarz diese Darstellung, um das mehrteilige Modell zu konstruieren.<sup>54</sup> Kummer erklärt nach seiner Bemerkung zur Parametrisierung, dass es ihm gelungen sei, eine implizite Punkt- und Ebenengleichung für die Fläche zu bestimmen, ohne sie jedoch mitzuteilen. Sie zeigen, dass die Krümmungsmittelpunktsfläche eines dreiachsigen Ellipsoids von zwölfter Ordnung und vierter Klasse ist.

### Seidels Brief an Kummer

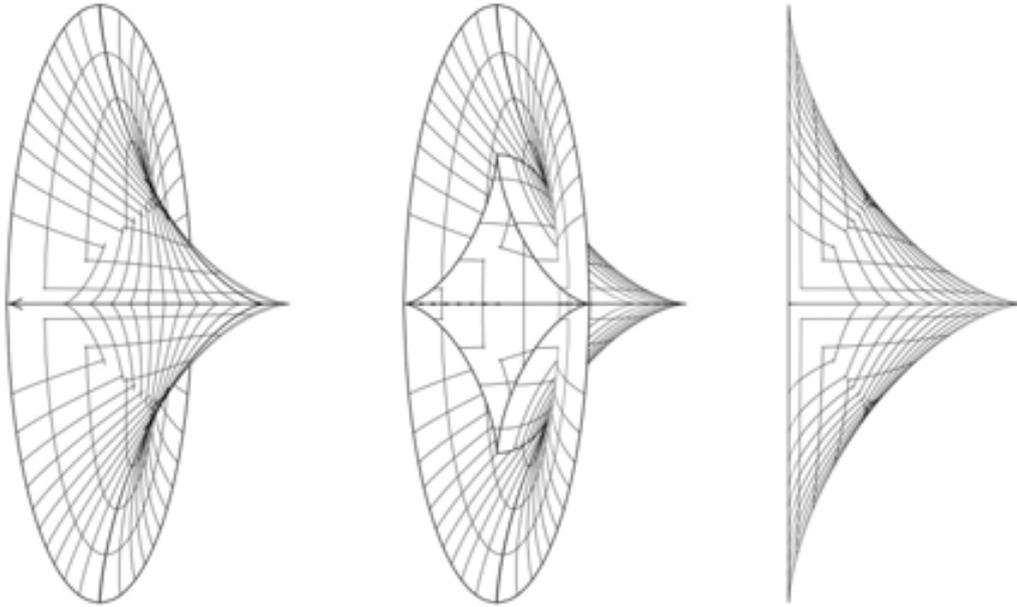
Ludwig Seidel kam im September des Jahres 1862 nach Berlin, wo auch er Kummer traf, der ihm Schwarz' Modelle zeigte. Der Entwurf sorgte für rege Diskussionen zwischen den beiden, da Seidel eine große Ähnlichkeit zu seinen eigenen Modellen der Brennfläche feststellte, das er 1857 angefertigt hatte, wie aus einem längeren Brief von Seidel an den Mathematiker vom Dezember hervorgeht, aus dem Kummer bei einer Sitzung der Preußischen Akademie vortrug.<sup>55</sup> Beide hegten die Vermutung, an ein Ellipsoid gezogen werden können“. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 59 (1861).

<sup>52</sup> Kummer, „30. Juni 1862. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse.“, S. 427 f.

<sup>53</sup> Salmon, George. „On the Equation of the Surface of Centres of an Ellipsoid“. In: *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* 2 (1858).

<sup>54</sup> Als Student an der Hochschule München verwendete Walther Dyck später dieses Verfahren, um unter der Betreuung von Alexander Brill die Krümmungsmittelpunktsfläche eines Hyperboloids zu konstruieren. Er berechnete neben den Hauptschnitten noch zwei horizontale Schnitte: Dyck, Walther. „III. Die Centrafläche des einschaligen Hyperboloids“. In: *Mathematische Modelle angefertigt im mathematischen Institut des königlichen Polytechnikums zu München* (1878).

<sup>55</sup> Seidel, Philipp Ludwig. „30. Dezember 1862. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse.“ In: *Monatsberichte der Königlich-Preußischen Akademie zu Berlin (1862)*. Berlin: Ferd. Dümmler's Verlags-Buchhandlung, 1863.



**Abb. 3.5:** Die Abbildungen veranschaulichen die Centrafläche eines Ellipsoids mit den Halbachsenverhältnissen  $a : b : c = \sqrt{3} : \sqrt{4} : \sqrt{5}$ . Zu sehen sind drei verschiedene Ansichten einer Hälfte der doppelschaligen Fläche. Grafik: H. Junker

dass es eine enge Beziehung zwischen Seidels Entwürfen und der Centrafläche eines Paraboloiden bestehen muss. Irritiert waren sie jedoch davon, dass es gewisse Abweichungen gab, die sich nicht erklären ließen.

Nach seiner Rückkehr ging Seidel seine alten Aufzeichnungen über die Berechnung der Fläche durch. Er stellte bald fest, dass seine und Kummers Vermutung richtig war. Tatsächlich hatte er die Fläche der Krümmungsmittelpunkte eines Paraboloiden berechnet, ohne sich dessen bewusst gewesen zu sein.

### 3.4 Steiners Fläche

Der Schweizer Mathematiker Jakob Steiner (1796–1863) entdeckte während seines Aufenthalts in Rom 1844 eine merkwürdige Fläche, die nach seinem Tod Gegenstand zahlreicher Abhandlungen geworden ist. Sie ist heute unter seinem Namen bekannt, aber auch unter der Bezeichnung Römerfläche, die Steiner selbst verwendet hat. Nachdem der Schweizer verstorben war, teilte Karl Weierstraß (1815–1897) der Nachwelt mit, was er über den Hintergrund dieser Entdeckung wusste. Es waren auch diese Mitteilungen des Berliner Mathematikers, die Ernst Kummer dazu bewogen, sich eingehender mit Flächen der vierten Ordnung zu befassen.

## Steiners Konstruktion

Jakob Steiner war auf die Römerfläche nicht durch eine Gleichung gestoßen, sondern mittels einer Konstruktion. „Es waren ihm nämlich Zweifel darüber geblieben, ob die Fläche, wie er durch Betrachtungen, die ihm selbst nicht genügten, gefunden hatte, wirklich vom vierten, und nicht etwa vom sechsten Grade sei. Möglicherweise nämlich, meinte er, könne der Durchschnitt der Fläche mit jeder ihrer Tangentialebenen aus zwei reellen und einem beständig imaginär bleibenden Kegelschnitt bestehen, so dass die Fläche, wie er sich selbst ausdrückte, von einem ‚Gespenst‘ begleitet wäre.“<sup>56</sup> Karl Weierstraß (1815–1897), der Herausgeber der *Gesammelten Schriften* Jakob Steiners, berichtet weiter: „Dass er über diesen Punct mit den ihm gewohnten Betrachtungsweisen nicht in’s Klare zu kommen vermochte, verdross ihn so sehr, dass er lange Zeit sich nicht entschliessen konnte, einem Analytiker die Sache zur Prüfung vorzulegen. Erst etwa ein Jahr vor seinem Tode sprach er mit mir über seine Fläche und ersuchte mich, was er darüber gefunden, analytisch zu verificiren.“<sup>57</sup> Weierstraß berichtet von den Schwierigkeiten Steiners, dem es nicht gelungen war, die Frage nach der Ordnung zweifelsfrei zu beantworten. Die Schilderung verweist auf die grundlegenden Schwierigkeiten, auf welche die Anschauung immer wieder stieß.

Steiner hat Weierstraß auch eine Konstruktion der Fläche mitgeteilt. Sie basiert auf einem Satz, den vor Steiner schon Otto Hesse (1811–1874) im Jahr 1837 bewiesen hat, wie Weierstraß erklärte.<sup>58</sup> Weierstraß scheint seinerseits übersehen zu haben, dass Hesse an der betreffenden Stelle auf eine Arbeit des französischen Mathematikers Frégier verweist, der die Aussage bereits 1817 gekannt und bewiesen hat.<sup>59</sup>

Der Satz verwendet den Begriff der konjugierten Durchmesser. Wenn  $v$  eine Sehne durch den Mittelpunkt einer Quadrik (Durchmesser) ist, dann liegen die Mittelpunkte aller zu  $v$  orthogonalen Sehnen in einer Ebene. Wenn wir einen weiteren Durchmesser  $w$  in dieser Ebene wählen, dann liegen die Mittelpunkte aller zu  $w$  parallelen Sehnen auf einer weiteren Ebene. Die gemeinsame Achse der beiden Ebenen definiert einen dritten Durchmesser  $u$  der Quadrik. Die drei Geraden  $v, w, u$  werden

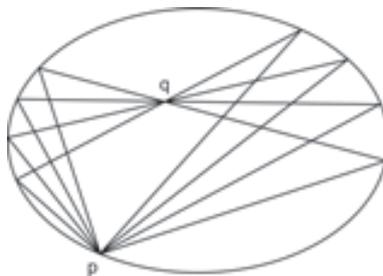
<sup>56</sup> Weierstrass, Karl. „Anmerkungen und Zusätze“. In: *Jacob Steiner’s Gesammelte Werke*. Hrsg. von Weierstrass, Karl. Bd. 2. Cambridge Library Collection - Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press, 2013, S. 741.

<sup>57</sup> Ebd., S. 741.

<sup>58</sup> Hesse, Otto. „Ueber Oberflächen zweiter Ordnung“. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 18 (1838), S. 110.

<sup>59</sup> Frégier. „Géométrie analytique. Théorèmes nouveaux, sur les lignes et surfaces du second ordre“. In: *Annales de mathématiques pures et appliquées* 7 (1816).

konjugierte Durchmesser der Quadrik genannt.<sup>60</sup>



**Abb. 3.6:** Die Grafik veranschaulicht Steiners Konstruktion für Kegelschnitte. Die Durchmesser sind hier konjugiert in Bezug auf einen Kreis  $\mathfrak{F}$ . Sie stehen demnach senkrecht aufeinander. Alle Geraden, die Schnittpunkte konjugierter Sehnen durch  $p$  mit der Ellipse  $\mathfrak{P}$  verbinden, treffen sich in einem ausgezeichneten Punkt  $q$ . Eingezeichnet sind vier Paare konjugierter Durchmesser. Grafik: H. Junker

Der Satz besagt das Folgende:

Wenn durch einen beliebigen Punkt  $p$  einer Quadrik  $\mathfrak{P}$  ein System konjugierter Durchmesser einer beliebigen anderen Quadrik  $\mathfrak{F}$  gelegt wird, dann geht die Ebene, welche die drei Schnittpunkte der Durchmesser mit  $\mathfrak{P}$  verbindet, durch einen festen Punkt  $q$ . Die Lage dieses Punkte hängt für feste  $p$  und  $\mathfrak{P}$  nur von  $\mathfrak{F}$  ab, nicht jedoch von dem System konjugierter Durchmesser.

Steiner nennt den Punkt  $q$  Pol von  $\mathfrak{F}$  in Beziehung auf  $\mathfrak{P}$  und  $p$ . Für seine Konstruktion wählt er eine feste Quadrik  $\mathfrak{P}$  mit einem Punkt  $p$ . Nun betrachtet er eine 2-parametrische Familie von Quadriken  $\mathfrak{F}_{\lambda,\mu}$ . Die Pole bezüglich dieser Quadriken in Beziehung zu  $\mathfrak{P}$  und  $p$  würden eine Fläche bilden, auf der eine unendliche Schar von Kegelschnitten liegt.

### Kummers Kegelschnittflächen

Offenbar hatte Steiner nie ein Modell der Fläche anfertigen lassen. Eine Gleichung war ihm außerdem nicht bekannt. Nachdem Weierstraß auf die Entdeckung Steiners aufmerksam machte, widmete sich Ernst Kummer dem Thema. Im Juli 1863, wenige Monate nach dem Tod Steiners, trug er in der Akademie über Flächen vierter Ordnung vor, auf denen eine Familie von Kegelschnitten liegt.<sup>61</sup> Kummer verstand

<sup>60</sup> Wenn  $x^t Ax = 1$  die Gleichung einer Quadrik in geeigneten Koordinaten ist, dann gilt für drei konjugierte Durchmesser  $v, u, w$  gerade:  $u^t Av = w^t Au = v^t Aw = 0$ .

<sup>61</sup> Kummer, „30. Juni 1862. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse.“

darunter Quartiken, die von der Bewegung eines veränderlichen Kegelschnitts erzeugt werden. Ihm war bewusst, dass diese Klasse von Flächen auch jene umfasste, auf die Steiner gestoßen war, wie sich dem Bericht entnehmen lässt.

Dem Bericht nach beginnt er mit folgenden Überlegungen: „Wenn eine Ebene aus irgend einer Fläche eine Curve mit Doppelpunkten ausschneidet, so ist jeder dieser Doppelpunkte entweder ein Doppelpunkt der Fläche, oder ein Berührungspunkt der Ebene und der Fläche.“<sup>62</sup> Eine Ebene schneidet aus einer quartischen Fläche eine Kurve der vierten Ordnung aus. Wenn die Fläche von Kegelschnitten erzeugt wird, liegt jeder Punkt auf mindestens einem Kegelschnitt. Die Ebene durch diesen Kegelschnitt muss aus der Fläche – aufgrund ihrer Ordnung – noch einen zweiten Kegelschnitt ausschneiden. Diese beiden Kegelschnitte haben im Allgemeinen vier Punkte gemeinsam, die nach Kummers Überlegung entweder Doppelpunkte der Fläche sein müssen oder aber Berührungspunkte der Ebene bilden. Ernst Kummer leitet hieraus nun drei Fälle ab. Er betrachtet zum einen die Flächen, bei denen die Ebenen mit den erzeugenden Kegelschnitten die Fläche nie, einmal oder doppelt berühren. Im ersten Fall geht jede Ebene durch vier, im zweiten durch drei und im dritten durch zwei Doppelpunkte. Kummer untersucht nun jede dieser verschiedenen Möglichkeiten der Reihe nach. Er teilt hierbei Gleichungen mit, ohne sie jedoch herzuleiten.

Wenn jede Ebene der Schar die Fläche in genau einem Punkt berührt (2. Fall), dann bilden die drei verbleibenden Schnittpunkte des zugehörigen Kegelschnittpaars Doppelpunkte der Fläche. Zu diesem Fall gehört auch die Steinersche Fläche, wie Kummer erwähnt.<sup>63</sup> Sie besitzt drei Doppelpunktgeraden, die sich in einem Punkt schneiden. Ihre allgemeine Gleichung wäre nach Kummer

$$Aq^2r^2 + Br^2p^2 + Cp^2q^2 + 2Dpqrs = 0,$$

wobei  $p, q, r$  und  $s$  Polynome ersten Grades,  $A, B, C$  und  $D$  indes Konstanten sind. Die Doppelgeraden sind hierbei gerade die Schnittlinien der Ebenen  $p = 0, q = 0$  und  $r = 0$ . Eine Ebene schneidet aus der Fläche im Allgemeinen drei Doppelpunkte aus. Demnach muss auf ihr ein Kegelschnitt liegen. Die Steinerschen Flächen würden deswegen von einer unendlichen Schar von Kegelschnitten erzeugt werden, wie Kummer darlegt.

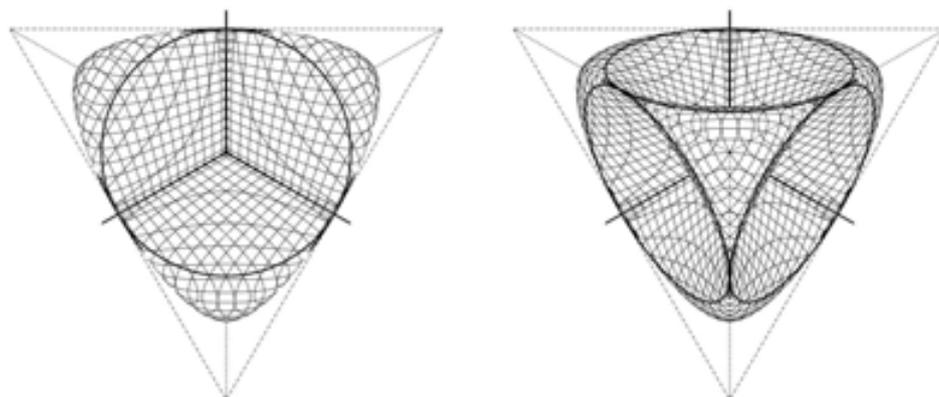
## Modell der Steinerschen Fläche

Im Anschluss an den Vortrag erläutert Weierstraß, wie Steiner zur Konstruktion seiner Flächen gekommen war. Ernst Kummer griff das Thema im November desselben

<sup>62</sup> Kummer, „30. Juni 1862. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse.“, S. 324.

<sup>63</sup> Ebd., S. 332.

Jahres bei einem zweiten Vortrag nochmal auf.<sup>64</sup> Diesmal führte er auch ein Gipsmodell der Steinerschen Fläche vor, das er dem Bericht zufolge selber angefertigt hat. Er überließ es zusammen mit anderen später der Verlagshandlung Ludwig Brill, die Abgüsse seiner Entwürfe nahm, um sie zu vervielfältigen.<sup>65</sup>



**Abb. 3.7:** Die Grafik zeigt eine Steinersche Fläche, die in einem Tetraeder eingeschrieben ist. Die Seitenflächen des Polyeders berühren die Fläche entlang von Doppelkreisen. Die durchgezogenen Linien zeigen die Doppelgeraden an. Grafik: H. Junker

Kummer legte bei der Herstellung Wert darauf, dass die dargestellte Fläche „eine endliche, allseitig begränzte ist, daß in ihren Teilen die größtmögliche Symmetrie herrscht, und daß alle Haupteigenschaften der allgemeinen Steinerschen Fläche an ihr in realer Weise sichtbar hervortreten.“<sup>66</sup> Er teilt anschließend die Gleichung der dargestellten Fläche mit:

$$y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2 - 2xyz = 0.$$

<sup>64</sup> Kummer, Ernst E. „26. November 1863. Gesamtsitzung der Akademie.“ In: *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie zu Berlin (1863)*. Berlin: Ferd. Dümmler’s Verlags-Buchhandlung, 1864.

<sup>65</sup> Das Modell ist in das Programm des Verlages als Nr. 3 in die Serie IX von Kummerschen Entwürfen aufgenommen worden. Schilling, *Catalog mathematischer Modelle*, S. 19. Die Abgüsse des Verlages zeigen auch die Asymptotenkurven der Fläche. Als Kummer das Modell präsentierte, erwähnte er sie nicht. Möglicherweise sind die Kurven erst später eingezeichnet worden.

<sup>66</sup> Kummer, „26. November 1863. Gesamtsitzung der Akademie.“, S. 539.

Die drei Doppelgeraden der Steinerschen Fläche fallen mit den Koordinatenachsen zusammen. Sie liegen nur teilweise auf der Fläche, wie Kummer dem Publikum erläutert. In einer gewissen Entfernung vom Koordinatenursprung bilden sie isolierte Geraden. Außerdem besäßen die Modelle konvex-konvex und konkav-konvexe Partien. Alle Tangentialebenen würden sie in einem Paar von Kegelschnitten treffen. Wenn die Fläche im Berührungspunkt konvex-konvex (elliptisch) gekrümmt ist, so sind beide Kegelschnitte imaginär. Im Falle einer konkav-konvexen Krümmung wären sie indes real, wie Kummer erklärt. Vier ausgezeichnete Ebenen berühren die Fläche indes jeweils entlang eines zusammenfallenden Paares von Kreisen. Die vier Kreise trennen den elliptischen vom hyperbolischen Teil der Fläche (vgl. Abb. 3.7).<sup>67</sup>

### Cayleys Modell

Arthur Cayley (1821–1895) war einer der produktivsten Mathematiker des viktorianischen Zeitalters in England. Seine Arbeiten fanden weit über die Grenzen des Königreichs hinaus Anerkennung.<sup>68</sup> Noch heute ist sein Name mit zahlreichen Begriffen und Sätzen auf den unterschiedlichsten Gebieten – Gruppentheorie, Invariantentheorie, Lineare Algebra, Geometrie – der Mathematik verbunden. Cayley verfolgte die Entwicklungen auf dem Kontinent mit großem Interesse.

Im Dezember 1873 stellte er bei einer Sitzung der *London Mathematical Society* eine Konstruktion der Steinerschen Fläche vor, die er offenbar selbst dafür genutzt hatte, ein Modell herzustellen. Er wollte damit der Zuhörerschaft die allgemeine Form dieser Flächen beschreiben, um dann mit ihrer analytischen Theorie anschließen zu können. Die Konstruktion beginnt mit der Wahl eines regelmäßigen Tetraeders (vgl. Abb. 3.7). Anschließend wird auf jeder dreieckigen Seitenfläche der Innenkreis eingezeichnet. Da die Dreiecke gleichseitig sind, berühren sich die vier Kreise jeweils in den Mittelpunkten der Tetraederkanten. Wie Cayley dem Publikum erläutert, würden die drei Geraden zwischen den gegenüberliegenden Mittelpunkten sich im Zentrum des Tetraeders schneiden. Die vier Kreise und diese drei Verbindungslinien liegen vollständig auf der Fläche. Um die Konstruktion fertigzustellen, muss ein weiteres Tetraeder konstruiert werden, dessen Seitenflächen parallel zu denen des ersten liegen, deren Abstand zum Zentrum jedoch nur  $\frac{3}{4}$  der ursprünglichen Länge betrage.

<sup>67</sup> Dies ist später von Alfred Clebsch bestätigt worden, der die Asymptotenkurven der Fläche explizit berechnet hat: Clebsch, Alfred. „Ueber die Steinersche Fläche“. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 67 (1867).

<sup>68</sup> Tony Crilly hat eine Biographie über das Leben und Werk des englischen Mathematikers verfasst, in der auch Cayleys Modelle besprochen werden: Crilly, Tony. *Arthur Cayley : Mathematician Laureate of the Victorian Age*. 2006.

Die Form der Steinerschen Fläche lässt sich bereits erahnen. Von den Mittelpunkten des inneren Tetraeders müsse die Form nun zu den begrenzenden Kreisen hin symmetrisch abgerundet werden. Die übrige Form muss anschließend vom Kreis ausgehend hinab zum Mittelpunkt des Tetraeders so ausgehöhlt werden, dass die drei Verbindungslinien auf der Fläche liegen. Die parallelen Schnitte entlang der Achse, die den Mittelpunkt der jeweiligen Seitenfläche mit dem des Tetraeders verbindet, müssen dabei langsam von Kreisen in gleichseitige Dreiecke übergehen.<sup>69</sup>

Die fertige Form zeigt eine Steinersche Fläche. Cayley führt nun aus, dass die Punkte der drei Geraden, die die sechs Mittelpunkte der Tetraederkanten verbinden, singulär sind. Die Mittelpunkte selbst bilden Zwickpunkte der Fläche, das Zentrum des Tetraeders ist ein Dreifachpunkt. In diesem verschwinden die zweiten Ableitungen, der Tangentenkegel zerfällt in drei Ebenen. Erst nachdem er so ausführlich die plastische Konstruktion der Fläche beschrieben hat, behandelt Cayley sie mit analytischen Methoden. Er untersucht zwei verschiedene Systeme von parallelen Schnittkurven. Zuerst betrachtet er alle Kurven, die auf der Steinerschen Fläche parallel zu einer der Tetraederseiten liegen. Danach dann jene, die parallel zu den Ebenen verlaufen, die von den Richtungen zweier gegenüberliegender Kanten definiert werden. Für beide Familien von Kurven wählt er angepasste Koordinatensysteme für die Fläche. Wenn die Achsen des Koordinatensystems in die drei Doppelpunktgeraden gelegt werden, so lautet die Gleichung der Steinerschen Fläche

$$y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2 + rxyz = 0,$$

wobei  $r$  der Abstand zwischen zwei gegenüberliegenden Kanten ist.

Cayleys Modell wurde später auch bei der großen Ausstellung des *South Kensington Museums* unter dem vielsagenden Titel „Rough Model of Steiner’s Surface“ ausgestellt.<sup>70</sup> Offenbar gab es nur die groben Züge der Fläche wieder. Es dürfte von der Ausführungsqualität nicht an das Modell der Steinerschen Fläche heran gereicht haben, das im Auftrage Kummers entstanden ist. Die Beschreibung in dem Katalog

<sup>69</sup> „Now truncate the tetrahedron by planes parallel to the faces so as to reduce the altitudes each to three-fourths of the original value, and from the centre of each new face round off symmetrically up to the adjacent three circles; and within each circle scoop down to the centre of the tetrahedron, the bounding surface of the excavation passing through the three right lines, and the sections (by planes parallel to the face) being in the neighbourhood of the face nearly circular, but as they approach the centre, assuming a trigonoidal form, and being close to the centre an indefinitely small equilateral triangle.“ Cayley, Arthur. „On Steiner’s Surface“. In: *Proceedings of the London Mathematical Society* s1-5.1 (1873), S. 14.

<sup>70</sup> South Kensington Museum, Hrsg. *Handbook to the Special Loan Collection of Special Apparatus*. London: Chapman und Hall, 1876, S. 34.

der Ausstellung orientiert sich stark an Cayleys eigenen Ausführungen. An einer Stelle wird jedoch ein Problem erwähnt, das bei der Herstellung geometrischer Modelle häufiger auftrat. Das Modell zeigt zwar scheinbar die gesamte Fläche, tatsächlich fehlen jedoch Teile der drei Doppelgeraden. Sie gehören ihrer ganzen Länge nach der Fläche an, was sich anhand ihrer Gleichungen

$$x = 0 \text{ und } y = 0, \quad y = 0 \text{ und } z = 0, \quad x = 0 \text{ und } z = 0$$

leicht erkennen lässt. Außerhalb des zugrunde gelegten Tetraeders verlaufen sie jedoch als isolierte Geraden. Diese Strecken sind nicht dargestellt worden.

### 3.5 Die Entdeckung der Kummerschen Fläche 1864

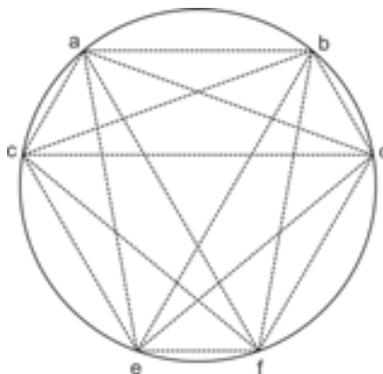
Auf einer Sitzung der Preußischen Akademie der Wissenschaften im April des Jahres 1864 hielt Kummer erneut einen Vortrag über Flächen des vierten Grades, auf denen 16 Doppelpunkte liegen.<sup>71</sup> Vermutlich ist er auf diese spezielle Klasse von Gebilden durch die Kegelschnittflächen gestoßen, mit denen er sich zuvor befasst hat.

Zu Beginn spricht er über die Fresnelsche Wellenfläche, die von allen Ebenen durch eine ihrer Hauptachsen in zwei Ellipsen geschnitten wird. Sie besitzt außerdem 16 Doppelpunkte, von denen jedoch nur vier reell sind, wie Ernst Kummer seinen Zuhörern mitteilt. In dem Bericht zu seinem Vortrag heißt es: „Die Fresnelsche Wellenfläche ist eine Fläche vierten Grades, welche 16 singuläre Punkte hat, von denen vier in der einen Hauptebene liegende real, acht in den beiden anderen Hauptebenen liegende imaginär sind und die übrigen vier in einer unendlich entfernten Ebene liegen.“<sup>72</sup> Die Formulierung zeigt, wie stark Kummer in geometrischen Bildern dachte. Die drei Hauptebenen schneiden die Wellenfläche jeweils in einem Paar von Ellipsen, die sich nur für eine dieser Ebenen in vier reellen Punkten treffen. In den anderen beiden Fällen sind die algebraischen Lösungen komplex. Deswegen nennt Kummer die Punkte imaginär. Wie er allerdings darauf schließt, dass die vier verbleibenden Punkte in der unendlich fernen Ebene liegen müssen, wird nicht ersichtlich. Vermutlich bezieht er sich hier auf die Gleichung der Fläche, die im Bericht jedoch nicht erwähnt wird. Mehr als 16 isolierte Doppelpunkte können auf einer quartischen Fläche nicht liegen. Kummer begründet dies mit der Klasse, die für eine

<sup>71</sup> Kummer, Ernst E. „18. April 1864. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse.“ In: *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie zu Berlin (1864)*. Berlin: Ferd. Dümmler's Verlags-Buchhandlung, 1864.

<sup>72</sup> Ebd., S. 246.

allgemeine Fläche diesen Grades 36 ist.<sup>73</sup> Da jeder gewöhnliche Doppelpunkt diese Zahl um zwei reduziert, könne die Klasse – sprich die Ordnung der dualen Flächen – für mehr als 16 Doppelpunkte nicht größer als zwei sein.



**Abb. 3.8:** Schematische Darstellung von einer Doppelebene einer Kumperschen Fläche. Die gestrichelten Linien zeigen die Schnittgeraden mit den anderen Doppelebenen an. Sie gehen jeweils durch Paare der 6 Doppelpunkte a–f, die auf dem Kegelschnitt (hier als Kreis dargestellt) liegen, in dem die Ebene die Fläche schneidet. Grafik: H. Junker

Nach diesen Vorbemerkungen erläutert Kummer die allgemeine Geometrie von quartischen Flächen mit der Maximalanzahl an isolierten Doppelpunkten. Der einhüllende Tangentialkegel ist in einem Doppelpunkt von sechster Ordnung.<sup>74</sup> Auf diesem Kegel muss jede Linie liegen, die den Doppelpunkt im Apex mit einem anderen singulären Punkt der Fläche verbindet. Diese Linien müssen außerdem Doppelkanten des Kegels sein. Ein Kegel der sechsten Ordnung kann jedoch nur dann 15 Doppelkanten besitzen, wenn er in sechs Ebenen zerfällt. Da jede dieser Ebenen von den anderen fünf in einer Kante geschnitten wird, müssen auf ihr sechs Doppelpunkte der Fläche liegen (s. Abb. 3.8). Sie gehören dem Schnitt der Ebene mit der Fläche an und müssen demnach auf einer Kurve der vierten Ordnung liegen. Bei dieser Kurve kann es sich nur um einen doppelten Kegelschnitt handeln, da die Ebene in jedem Punkt der Kurve die Fläche berührt.

In seinem Vortrag nennt Kummer die besagten Ebenen „Doppelebenen“ der Quartik. Insgesamt gibt es 16 ausgezeichnete Ebenen, auf denen jeweils sechs Doppelpunkte der Fläche liegen.<sup>75</sup> Alles in allem hat Kummer gezeigt: „Jede Fläche des vierten

<sup>73</sup> Für eine allgemeine Fläche der  $n$ -ten Ordnung ist die Klasse  $n(n-1)^2$ . Salmon, George. *A Treatise on the Analytic Geometry of Three Dimensions*. Cambridge: Hodges, Smith & Co., 1862, S. 193.

<sup>74</sup> Für einen beliebigen Punkt ist der Kegel von der Ordnung  $n(n-1)$ .

<sup>75</sup> Auf jeder Doppelebene liegen sechs Punkte. Jede andere Doppelebene schneidet notwen-

Grades mit 16 singulären Punkten hat zugleich 16 singuläre Tangentialebenen, und diese Punkte und Ebenen liegen so, daß jede der 16 Ebenen 6 von den Punkten enthält, und daß durch jeden der 16 Punkte 6 von den Ebenen hindurchgehen.“<sup>76</sup>

### Kummers Drahtmodell

Nachdem Kummer so die Geometrie der Flächen diskutiert hat, leitet er eine allgemeine Gleichung vierten Grades für sie her. Er wählt dafür vier Doppelebenen, die er fortan Fundamentelebenen nennt. Er bezeichnet sie mit  $p, q, r, s$ , und zeigt dass alle Flächen diesen Typs einer Gleichung der Form

$$\phi^2 = 16Kpqrs$$

genügen, wobei  $\phi$  ein Polynom des zweiten Grades von der Gestalt

$$\phi = p^2 + q^2 + r^2 + s^2 + 2a(qr + ps) + 2b(rp + qs) + 2c(pq + rs)$$

ist und  $K = a^2 + b^2 + c^2 - 2abc - 1$  von drei reellen Parametern  $a, b, c$  abhängt.<sup>77</sup> Anschließend präsentierte er den Anwesenden der Sitzung ein Drahtmodell, das er offenbar selber hergestellt hatte. In dem Bericht heißt es: „Um über die Lage dieser 16 Punkte, 16 Ebenen und 16 Kegelschnitte eine möglichst klare Anschauung zu gewinnen, habe ich dieselben in dem vorliegenden aus Drähten angefertigten Modell dargestellt.“<sup>78</sup> Leider ist der Verbleib von Kummers Entwurf ungeklärt. Da er jedoch genaue Angaben zur Wahl der Fundamentelebenen und der freien Konstanten machte, wäre ein Nachbau möglich. Die Abb. 3.9 zeigt die Projektion des Kegelschnittgerüsts, das sich bei Kummers Wahl der Parameter ergibt. Die Drähte gaben offenbar den Verlauf der Kegelschnitte wieder, die sich zu sechst in den Doppelpunkten der Fläche treffen. Kummer erläuterte den Zuhörern anhand der Konstruktion den Verlauf der Fläche:

Die Fläche besteht aus 12 gesonderten Theilen, welche unter einander nur mittels der 16 singulären Punkte in Verbindung stehen. Vier von diesen Theilen, welche von einander vollständig getrennt sind, setzen sich mit

digerweise diese Ebene in einer Geraden, die zwei der sechs Punkte miteinander verbindet. Umgekehrt liegt jede dieser Geraden auf einer der Doppelebenen. Es gibt 15 verbindende Geraden, die auf der betrachteten Ebene liegen. Demnach muss es insgesamt 16 Doppelebenen geben.

<sup>76</sup> Kummer, „18. April 1864. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse.“, S. 247.

<sup>77</sup> Ebd., S. 253.

<sup>78</sup> Ebd., S. 253.

je drei Punkten an vier andere Teile an, die Basis eines jeden derselben geht bis nahe an eine der vier Tetraederflächen heran, sie werden in größerer Entfernung von dieser Basis immer dicker und erstrecken sich jeder für sich in's Unendliche. Vier andere Theile der Fläche sind endlich und ihre Gestalt kommt der von dreiseitigen Pyramiden nahe, jeder derselben steht mit dreien der vorherbestimmten Theile durch je einen singulären Punkt in Verbindung und außerdem in einem singulären Punkte noch mit einem der übrigen Flächentheile. Jeder dieser letzteren sieht im Ganzen kegelförmig aus, steht mit den übrigen Theilen nur in einem einzigen Punkte in Verbindung, und erstreckt sich von diesem Punkte aus in's Unendliche.<sup>79</sup>

Trotz des Drahtgestells vor Augen und deiktischer Gesten des Referenten muss es für die Zuhörer schwer gewesen sein, sich anhand dieser Beschreibung die Gestalt der vielgliedrigen Fläche vorzustellen. Kummers Erläuterungen dürften den Wunsch nach einem plastischen Modell, das die Fläche selbst darstellt, noch befördert haben. Seine ausführliche und detaillierte Beschreibung zeigt jedoch auch, dass er mithilfe der Konstruktion in der Lage gewesen ist, sich selbst *nach und nach* ein genaues Bild von der Gestalt der gesamten Fläche zu machen. Ohne diese Stütze wäre es ihm vermutlich nicht gelungen, sich auch nur ansatzweise die Form zu erschließen.

### 3.6 Merkwürdige Flächen vierten Grades

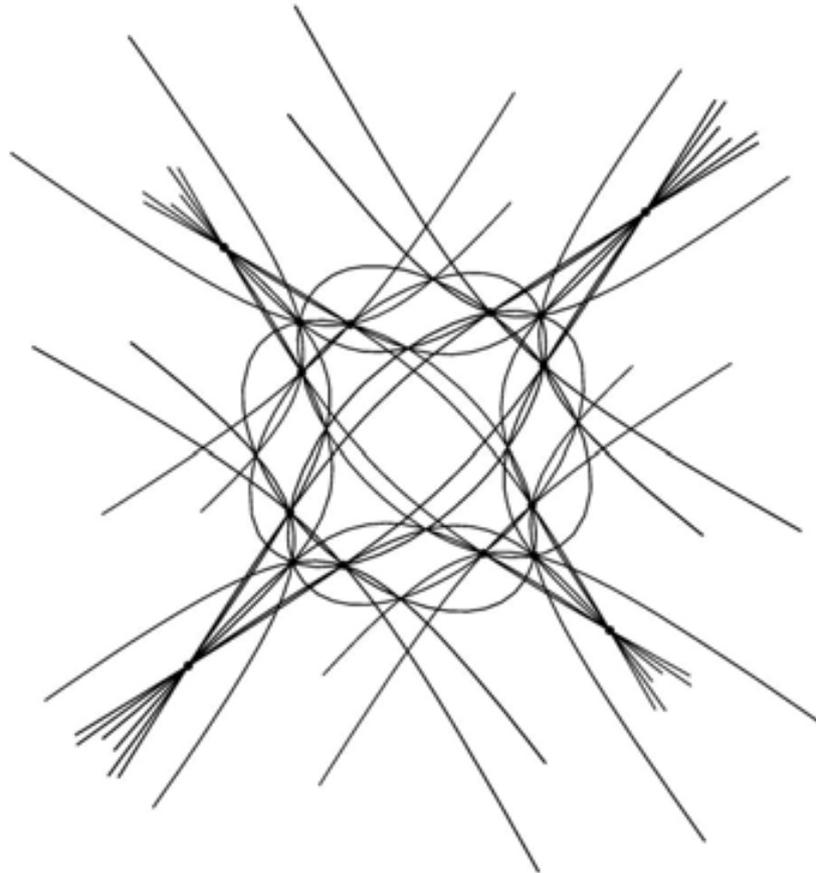
Nachdem Ernst Kummer seine verblüffende Entdeckung der Öffentlichkeit präsentiert hat, forschte er weiter an Quartiken. Im April 1866 las Ernst Kummer erneut „über zwei merkwürdige Flächen vierten Grades“ bei einer Sitzung der Preußischen Akademie. Wie es in dem Bericht heißt, zeigte er dabei zwei „von ihm selbst angefertigte“ Gipsmodelle vor.<sup>80</sup> Die dargestellten Gebilde gehörten zu einer Klasse von quartischen Flächen, deren Gleichung sich in der Form

$$\phi^2 - 4\lambda pqr s = 0$$

schreiben lässt, wobei  $p, q, r, s$  Polynome erster Ordnung bezeichnen, während  $\phi = 0$  eine Quadrik und  $\lambda$  eine reelle Konstante sei. Die sechs Schnittkanten des Tetraeders,

<sup>79</sup> Ebd., S. 254.

<sup>80</sup> Kummer, Ernst E. „23. April 1866. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse.“ In: *Monatsberichte der Königlich-Preussischen Akademie zu Berlin (1866)*. Berlin: Ferd. Dümmler's Verlags-Buchhandlung, 1867.



**Abb. 3.9:** Die Grafik zeigt eine orthogonale Projektion der 16 Kegelschnitte einer Kummerschen Fläche. Grafik: H. Junker

das von den vier Ebenen  $p = 0$ ,  $q = 0$ ,  $r = 0$  und  $s = 0$  gebildet wird, treffen die Quadrik  $\phi = 0$  jeweils in zwei Doppelpunkten. Im generischen Fall besitzt die betrachtete Fläche demnach mindestens zwölf Doppelpunkte, die aber unter besonderen Umständen zusammenfallen können. Die Kummersche Fläche, die von Kummer zwei Jahre zuvor erstmals beschrieben worden ist, gehört auch dieser Klasse an. Auf ihr liegen vier weitere Doppelpunkte auf den verlängerten Achsen des Tetraeders.

Durch die Form der Gleichung gelingt es Kummer, sich einen Überblick über die gesamte Klasse an Flächen zu verschaffen. Er diskutierte auf der Sitzung der Reihe nach mehrere Fälle, die er anhand der wechselseitigen Lagebeziehungen von Quadrik und Tetraeder unterschied. Seine Arbeitsweise erinnert an Plückers Methode der abkürzenden Bezeichnung. Zuerst betrachtete Kummer die Flächen, bei denen

die Quadrik das Tetraeder in den vier Ecken schneidet, wodurch jeweils drei Doppelpunkte in einem uniplanaren Punkt zusammenfallen. Bei der Sitzung im Jahre 1866 zeigte er ein Gipsmodell, das diesen Typ veranschaulicht (Nr. 5, Abb. 3.11). Bei der Gestaltung legte er erneut großen Wert auf Symmetrie. Für die Darstellung wählte er deswegen eine Kugel, die einem regulären Tetraeder umschrieben ist. Er erhielt als Gleichung

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 3k)^2 - \lambda((z - k^2)^2 - 2x^2)((z + k)^2 - 2y^2) = 0, \quad \lambda = \frac{1}{2}.$$

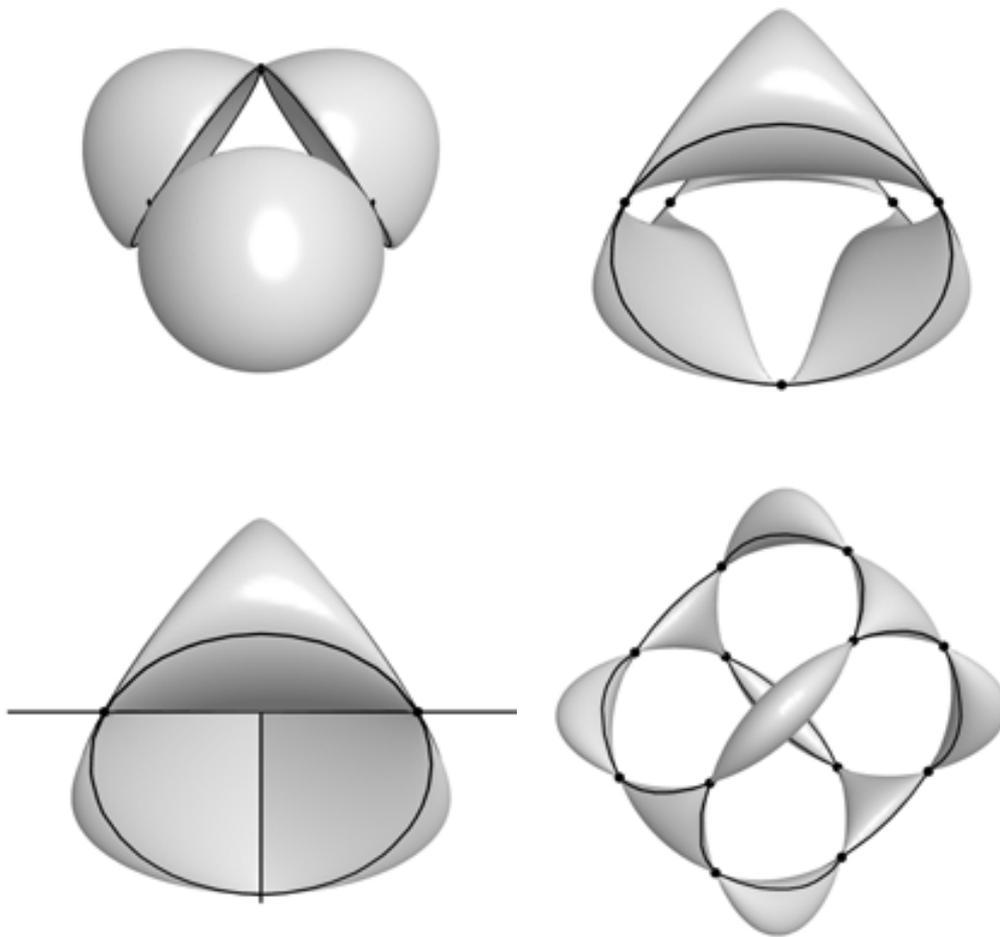
Kummer wählte die Fläche so, „daß die Knotenpunkte real sind und daß die Fläche möglichst symmetrisch wird und nicht in's Unendliche geht“, wie es im Bericht heißt. Die Gipsform zeigt sechs kongruente Flächenteile.<sup>81</sup> Jeweils drei Segmente treffen sich in den vier uniplanaren Punkten. Wie Kummer seinen Zuhörern auf der Sitzung erläuterte, seien die Punkte von der allgemeinsten Art. Die Doppelebene, in der ihr Tangentialkegel zerfallen ist, schneide die Fläche in einer reellen Kurve mit Dreifachpunkt.

Das zweite Modell, das Kummer zu dieser Sitzung mitgebracht hat, zeigt eine Fläche, bei dem die Kugel in dem Tetraeder liegt (Nr. 1, Abb. 3.10). In den sechs Berührungspunkten entlang der Kanten fallen jeweils zwei Doppelpunkte in biplanare Punkte zusammen. Die Punkte liegen in der Mitte der Kanten. Durch sie gehen jeweils zwei Seiten des Tetraeders, die die beiden Bieebenen der Punkte bilden. Auf ihnen liegen jeweils drei biplanare Punkte, weswegen sie aus der Quartik quadratische Doppelkurven ausschneiden, wie Kummer ausführt. Das Modell besteht aus vier kongruenten Teilen, die in den Knotenpunkten verbunden sind. Kummer wies darauf hin, dass alle Ebenen durch eine Biachse die Fläche in Kurven treffen, die sich in dem singulären Punkte selbst berühren. Er erwähnt außerdem, dass die Steinersche Fläche ein Spezialfall einer Quartik mit sechs biplanaren Punkten sei. Von dieser Fläche hatte Kummer bereits früher ein Modell entworfen (Nr. 3, Abb. 3.10). Die biplanaren Punkte liegen hier auf den drei Doppelgeraden, die sich im Symmetriezentrum der Fläche schneiden.

Später ließ Ernst Kummer weitere Gipsmodelle von anderen Arten dieser Flächen anfertigen. Er präsentierte sie zusammen mit den früheren Entwürfen bei einer Sitzung 1872. Sie sind 1883 zusammen mit anderen Modellen Kummers in das Verlagsprogramm von Ludwig Brill aufgenommen worden. Abgüsse dieser Entwürfe befinden sich heute u.a. in der Tübinger Sammlung (Abb. 8.7).<sup>82</sup>

<sup>81</sup> Kummer, „23. April 1866. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse.“, S. 217.

<sup>82</sup> David E. Rowe hat den Briefwechsel aus dem Frühjahr und Sommer 1883, in dem Alexander Brill und Karl Weierstraß die Vervielfältigung und Veröffentlichung der Modelle

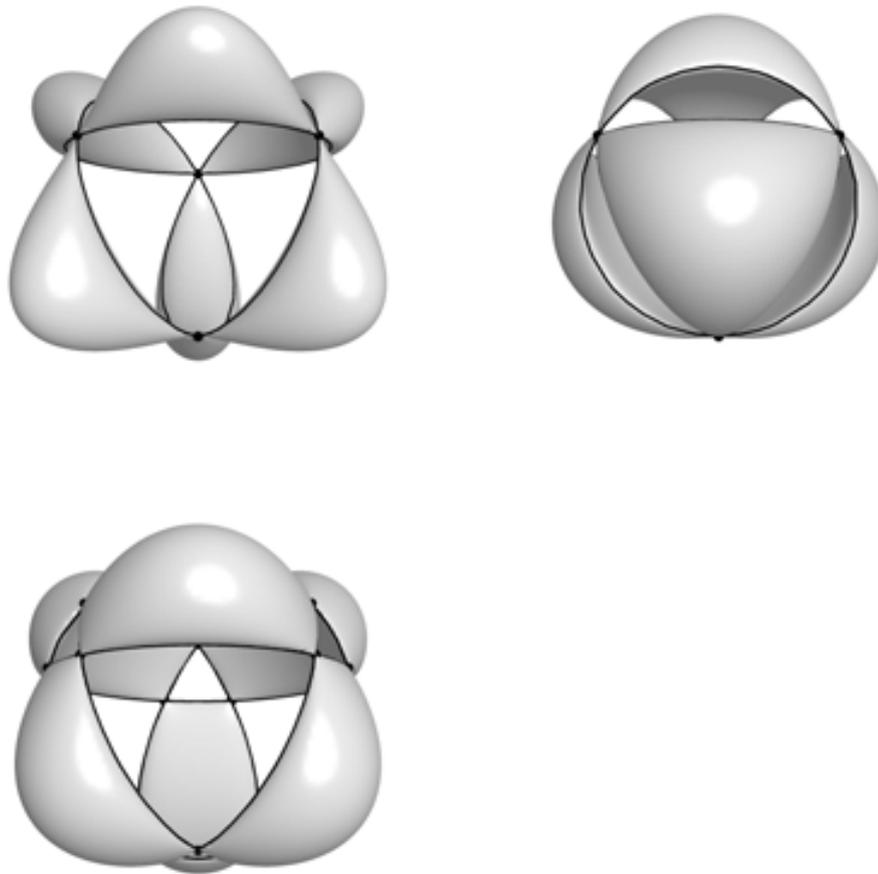


**Abb. 3.10:** Die Grafiken veranschaulichen die Flächen, die von Ernst Kummers Modellen Nr. 1–4 der Serie IX der Verlagshandlung Ludwig Brill dargestellt werden. Grafiken: H. Junker

### 3.7 Rohns Gestalten der Kummerschen Fläche

Karl Rohn (1855–1920) begann sein Studium der Ingenieurswissenschaften 1872 in Darmstadt. Alexander Brill, der zu jener Zeit dort Professor war, überzeugt ihn, sich der Mathematik zu widmen. Nachdem er für ein Jahr in Leipzig studiert hatte, wechselte er im Sommer 1875 nach München, wo er unter anderem Kurse bei Felix

besprachen, abgedruckt: Rowe, David E. *A Richer Picture of Mathematics: The Göttingen Tradition and Beyond*. Springer Cham, 2018, S. 93. In der Auflage von 1885 werden sie als neunte Serie geführt: Brill, *Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht*, S. 19.



**Abb. 3.11:** Die Grafiken veranschaulichen die Flächen, die von Ernst Kummers Modellen Nr. 5–7 der Serie IX der Verlagshandlung Ludwig Brill dargestellt werden. Grafiken: H. Junker

Klein, Alexander Brill und Ludwig Seidel belegte.<sup>83</sup> Zwei Jahre später legte er die Prüfung für Lehrer ab. Er entwarf während seiner Zeit an der Universität München mehrere Modelle. Dazu gehören auch drei Gipsmodelle Kummerscher Flächen, die er im Sommer 1877 unter der Betreuung von Felix Klein herstellte (Abb. 8.8). Sie sind – wie viele andere Entwürfe Karl Rohns – in das Programm des Brill-Verlages als Teil der zweiten Serie aufgenommen worden.<sup>84</sup>

Felix Klein hatte sich seinerseits mit den Kummerschen Flächen beschäftigt. Er

<sup>83</sup> Tobies, *Felix Klein*, S. 171.

<sup>84</sup> Brill, *Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht*, S. 35.

hatte festgestellt, dass die Komplexflächen seines Lehrers Julius Plücker zu derselben Klasse von Quartiken gehören. In München interessierte er Karl Rohn für die Frage, wie die Gestalt der Flächen sich ändert, wenn nicht alle der 16 Doppelpunkte reell sind. Anlässlich der 50. Jahresversammlung der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte, die im September 1877 in München abgehalten wurde, hielt Klein einen Vortrag unter dem Titel „Ueber die Gestalten der Kummer’schen Fläche“, bei dem er Rohns Modelle präsentierte.<sup>85</sup> Wie sich dem offiziellen Bericht entnehmen lässt, unterschied er vier Arten der allgemeinen Kummerschen Fläche anhand der Realitätsverhältnisse der sechs Fundamentalkomplexe, die ihr zugrunde liegen. Er verweist damit auf einen Zusammenhang, den er bereits 1870 hergeleitet hat.<sup>86</sup> Die Menge aller singulären Punkte (Singularitätenfläche) eines quadratischen Komplexes, der sich als Summe

$$\chi_1 x_1^2 + \dots + \chi_6 x_6^2 = 0 \text{ mit } x_1^2 + \dots + x_6^2 = 0$$

von Quadraten linearer Komplexe  $x_i$  schreiben lässt, ist eine Kummersche Fläche (vgl. Abschn. 4.2). Er nennt die  $x_i$  Fundamentalkomplexe der Fläche. Karl Rohn verwendete diese Darstellung später, um die verschiedenen Gestalten der Kummerschen Fläche herzuleiten.<sup>87</sup> In seiner Klassifikation zählt er vier verschiedene Typen I–IV auf, die er anhand der Realitätsverhältnisse der Fundamentalkomplexe  $x_i$  und der Koeffizienten  $\chi_i$  unterscheidet.

Wenn  $\chi_1, \dots, \chi_6$  reell sind, so können entweder alle 16 Doppelpunkte und -ebenen reell sein (I a), alle imaginär, die Fläche jedoch reell (I b), oder die gesamte Fläche imaginär (I c). Sind von den Koeffizienten  $\chi_i$  wiederum genau zwei paarweise konjugiert, dann sind entweder acht reelle Doppelpunkte und -ebenen reell (II a), oder alle sind imaginär, die Fläche jedoch reell (II b). Bei dem dritten Typus sind nur zwei Koeffizienten reell, die anderen paarweise konjugiert. Die Kummersche Fläche besitzt nun vier reelle Doppelpunkte und -ebenen (III). Wenn alle Koeffizienten imaginär sind (IV), dann lassen sich zwei Fälle unterscheiden. Entweder vier Punkte und Ebenen sind reell, aber im Gegensatz zu dem dritten Typ gehen die Ebenen nicht durch die

<sup>85</sup> Klein, Felix. „Ueber die Gestalten der Kummerschen Fläche“. In: *Amtlicher Bericht der 50. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte in München*. Hrsg. von Klein, Felix. München: F. Staub, 1877.

<sup>86</sup> Klein, Felix. „Zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades“. In: *Mathematische Annalen* 2.2 (1870), S. 213.

<sup>87</sup> Rohn, Karl. „Die verschiedenen Gestalten der Kummer’schen Fläche“. In: *Mathematische Annalen* 18.1 (1881).

Punkte (IV a).<sup>88</sup> Oder die Fläche ist imaginär, abgesehen von vier singulären Punkten und Ebenen (IV b).<sup>89</sup> Mit den Modellen, die Felix Klein bei seinem Vortrag zeigte, hat Karl Rohn jeweils die Fälle (a) der Typen I, II und III veranschaulicht.

## Rohns Modelle

Das erste Modell Karl Rohns zeigt eine symmetrische Fläche, die aus acht tetraederförmigen Teilen besteht (Nr. 1, Abb. 8.8). Die äußeren drei Teile sind durch das unendlich Ferne allerdings getrennt. Die Fläche besitzt 16 reelle Doppelpunkte und -ebenen. Jede Doppelebene berührt die Fläche in einem Kegelschnitt (Kreise und Hyperbeln), auf dem jeweils sechs Doppelpunkte liegen. Durch jeden Doppelpunkt gehen umgekehrt wiederum sechs Doppelebenen.

Der zweite Entwurf der dreiteiligen Serie zeigt eine Fläche vom zweiten Typ mit acht singulären Punkten und Ebenen (Nr. 2). Auf jeder Ebene liegen nun vier Punkte, durch jeden Punkt gehen nur noch vier Ebenen. Insgesamt besteht die unsymmetrische Fläche aus vier Teilen, die in den Doppelpunkten zusammenhängen. Nach Karl Rohn würde die allgemeine Plücker'sche Komplexfläche, wie sie Felix Klein mit seinem Modell Nr. 1 dargestellt hat, einen Übergang zwischen den Fällen bilden, die von den ersten beiden Modellen seiner Serie veranschaulicht werden.<sup>90</sup>

Bei der Plücker'schen Komplexfläche sind jeweils zwei Doppelpunkte entlang der 16 Kegelschnitte paarweise ineinander gefallen. Dasselbe gilt auch für die 16 Doppelebenen, die ebenfalls zu acht Paaren zusammengefallen sind. Zwei der acht Flächenteile des ersten Rohnschen Modells sind dadurch zu isolierten Stücken der Doppelgerade degeneriert. Bei Rohns zweitem Modell sind die zusammengefallenen Doppelpunkte imaginär geworden, die auf der Doppelgeraden der Plücker'schen Fläche lagen.

Das dritte Gipsmodell Rohns besteht nur noch aus zwei Teilen (Nr. 3). Um sie aus der Fläche des zweiten Modells zu erzeugen, müssen von den vier Doppelpunkten auf einer Ebene wieder zwei paarweise zusammenfallen. Nun gibt es nur noch vier (einfache) Doppelpunkte und -ebenen, wenn die zweifachen Doppelpunkte imaginär sind.

<sup>88</sup> Von dieser Art ist die Wellenfläche, für welche Felix Klein eine explizite Darstellung für die sechs zugehörigen Fundamentalkomplexe angibt. Klein, „Zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades“, S. 214.

<sup>89</sup> Pascal, Ernesto. *Repertorium der höheren Mathematik: Geometrie*. Hrsg. von Timerding, H. E. Übers. von Schepp, Adolf. 1. Aufl. Bd. 2. Leipzig: Teubner, 1902, S. 307.

<sup>90</sup> Rohn, Karl. „VI. Drei Modelle der Kummer'schen Fläche“. In: *Mathematische Modelle angefertigt im mathematischen Institut des königlichen Polytechnikums zu München* (1877), S. 2.

## Konstruktion

In dem kurzen Begleittext, der zusammen mit den Modellen von dem Brill-Verlag vertrieben worden ist, geht Karl Rohn mit knappen Worten auf die Herstellung der Modelle ein. Zuerst wählte er vier Doppelebenen, die ein (echtes) Tetraeder bilden. Danach schrieb er auf einer dieser Ebenen einen beliebigen Kegelschnitt ein, der die drei Tetraederkanten in sechs Punkten  $p_1, \dots, p_6$  schneidet. Von den sechs Kanten des Tetraeders liegen drei nicht auf der betrachteten Ebene. Wenn auf ihnen ein Doppelpunkt  $p_7$  willkürlich gewählt wird, wäre die Fläche eindeutig festgelegt. An dieser Stelle schreibt Karl Rohn, dass sich die verbleibenden fünf Doppelpunkte auf den Kanten ermitteln ließen, weil „sich die Verbindungslinien zweier Punkte einer Doppelebene und der entsprechenden Punkte einer anderen Doppelebene schneiden müssen.“<sup>91</sup> Es ist nicht verständlich, was Karl Rohn als entsprechende Punkte betrachtet. Außerdem ist unklar, was es mit dem gemeinsamen Schnittpunkt der beiden Verbindungsgeraden auf sich hat. Das erste Problem scheint darin zu bestehen, mithilfe der Verbindungsgeraden des Punktes  $p_7$  zu den anderen sechs Doppelpunkten weitere Doppelebenen zu ermitteln (vgl. Abb. 3.12). Mithilfe dieser Ebenen ließen sich dann wiederum die restlichen fünf Doppelpunkte bestimmen, die auf den Kanten des Tetraeders liegen. Ausgehend von den zwölf Doppelpunkten lässt sich nun die Lage aller 16 Doppelebenen und schlussendlich auch die Position der restlichen vier Doppelpunkte ermitteln.<sup>92</sup>

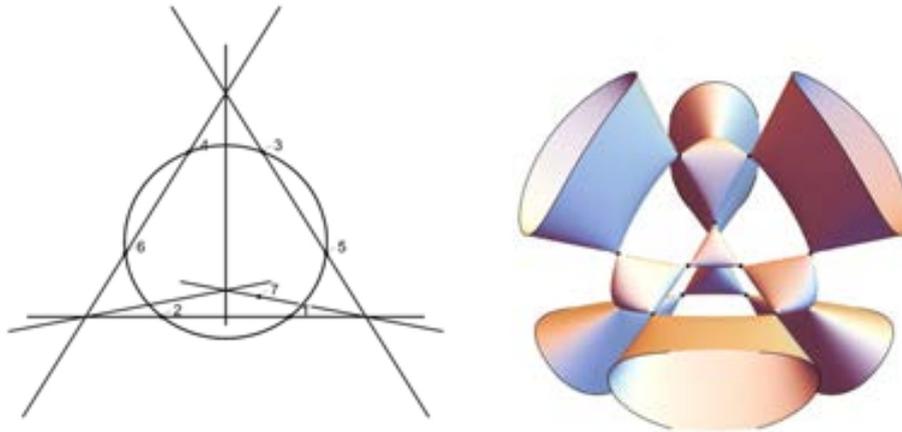
Nachdem Karl Rohn das Gerüst aller Punkte und Ebenen festgelegt hat, bestimmte er die 16 Kegelschnitte. Wie er hierbei vorging, teilt er allerdings nicht mit. In seinem Lehrbuch zur Darstellenden Geometrie beschreibt er jedoch die konstruktive Lösung dieser Aufgabe.<sup>93</sup> Möglicherweise berechnet er jedoch auch Gleichungen. Anschließend bestimmte er dann die Form der Flächenteile. Offenbar stellte er zuerst die grobe Lage der Flächenteile fest, die in Kammern von zwölf, acht oder vier Doppelebenen eingeschlossen sind. Auch hier verliert er kein Wort darüber, wie er die Ebenen identifiziert hat, zwischen denen die Teile liegen. Stattdessen sagt er nur, dass die Form der Teile von den Kegelschnitten umrissen wird. Sie ließen sich demnach „leicht“ aus den eckigen Körpern „ausschälen“, wie er schreibt.<sup>94</sup> Offenbar baute er die Form nicht plastisch auf, sondern arbeitete sie – wie es auch Arthur Cayley bei seinem Modell der Steinerschen Fläche getan hatte – skulptural heraus.

<sup>91</sup> Rohn, „VI. Drei Modelle der Kummer’schen Fläche“, S. 3.

<sup>92</sup> Hier sei auf den Anhang verwiesen, in welchem das Problem der Konstruktion eingehender behandelt wird.

<sup>93</sup> Rohn, Karl. *Lehrbuch der Darstellenden Geometrie*. Bd. 2. Leipzig: Veit & Comp., 1901.

<sup>94</sup> Rohn, „VI. Drei Modelle der Kummer’schen Fläche“, S. 3.



**Abb. 3.12:** Die Grafik links veranschaulicht die Konstruktion von Karl Rohn. Dargestellt sind die sechs Kanten eines regelmäßigen Tetraeders. Auf einer Seitenfläche des Tetraeders liegt ein Kreis, der drei Kanten in sechs Punkten schneidet. Auf einer der übrigen drei Kanten ist ein beliebiger Punkt als siebenter Doppelpunkt abgetragen. Rechts ist die Fläche in derselben Orientierung dargestellt. Grafiken: H. Junker

Wie er bei den Flächen mit imaginären Punkten vorging, teilt er in einem Satz mit: „Sind die Knotenpunkte zum Theil imaginär, so nimmt man die zugehörige Involution zu Hilfe und construirt so die Berührungskegelschnitte.“<sup>95</sup> In dem ersten Band seines Lehrbuches über Darstellende Geometrie zeigt Rohn, wie sich ein Kegelschnitt mit imaginären Punkten konstruieren lässt.<sup>96</sup> Er nutzte hierfür eine Darstellung imaginärer Punkte mithilfe reeller Punktepaare, die auf Karl von Staudt (1898–1867) zurückgeht.<sup>97</sup>

<sup>95</sup> Ebd., S. 3.

<sup>96</sup> Rohn, *Lehrbuch der Darstellenden Geometrie*, S. 230.

<sup>97</sup> Felix Klein beschreibt das Vorgehen in seiner *Elementargeometrie*: Klein, Felix. *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*. Bd. 2. Berlin: Julius Springer, 1925, S. 133ff.



## 4. Plückersche Komplexflächen

Der Name Julius Plücker (1801–1868) ist heute nicht nur Mathematikern, sondern auch vielen Physikern geläufig. Während einer langen Phase seines Lebens beschäftigte sich der gebürtige Elberfelder ausschließlich mit physikalischen Fragen.<sup>1</sup> Mit der Verleihung der Copley-Medaille im Jahr 1866 würdigte die *Royal Society* neben Plückers Forschung auf dem Gebiet der analytischen Geometrie auch seine Arbeit zum Magnetismus und zur Spektralanalyse von Gasen. Zu jener Zeit, Mitte der 1860er Jahre, war der Professor für Experimentalphysik an der Bonner Universität jedoch wieder zur Geometrie zurückgekehrt. Im Jahr 1864 hielt er auf einer Versammlung der *Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte* einen Vortrag unter dem Titel „Über eine neue Auffassung des Raumes vermöge der Geraden als Raumelement“.<sup>2</sup> In seinem Vortrag beschrieb Plücker, wie sich anstelle von Punkten Linien verwenden lassen, um eine neue Geometrie zu begründen. Dieser fundamentale Gedanke beschäftigte ihn die letzten Jahre seines Lebens. Der erste Band seiner *Neuen Geometrie* erschien noch zu seinen Lebzeiten. Mit der Ausarbeitung seines Manuskriptes für den zweiten Band beauftragte Plücker seinen jungen Assistenten. Felix Klein (1849–1925) gelang die Veröffentlichung genau ein Jahr nach dem Todestag seines Lehrers im Mai 1869.

In Plückers Forschung fiel der geometrischen Anschauung eine große Bedeutung zu. Gemeinsam mit Felix Klein entwarf er in der Zeit 1865–1868 mehrere Modelle von Gebilden, die ihn im Zusammenhang mit seinen Untersuchungen interessierten. Sie bekundeten seine Vorliebe für die Gestalt geometrischer Formen, halfen ihm aber

<sup>1</sup> In ihrer Dissertation gibt Mechthild U. Plump eine Darstellung des mathematischen Werks Julius Plückers: Plump, Mechthild Ulrike. „Julius Plücker - Leben und Werk eines analytischen Geometers im 19. Jahrhundert“. Dissertation. Wuppertal: Universität Wuppertal, 2014. Michael Wieschers Artikel beschreibt die frühen Jahre des Physikers und Mathematikers: Wiescher, Michael. „Julius Plücker, Familie und Studienjahre“. In: *Sudhoffs Archiv* 100.1 (2016).

<sup>2</sup> Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte, Hrsg. *Amtlicher Bericht über die Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte. 39. 1864 (1865)*. Bd. 39. Giessen: Wilhelm Keller, 1865, S. 58.

auch dabei, sich auf dem unbekanntem Terrain zurecht zu finden, in das ihn seine Überlegungen geführt hatten. Plückers Modelle gehörten zu den frühesten Anschauungsmitteln, die in Deutschland während jener Zeit von Mathematikern hergestellt worden sind. Sie sind auch deshalb von Interesse, weil sie später Anlass für Felix Klein waren, selber Entwürfe anzufertigen. In diesem Kapitel soll zuerst der mathematische Kontext erörtert werden, in dem Plückers und Kleins Modelle entstanden sind, bevor anschließend eine Beschreibung der einzelnen Objekte gegeben wird. Später soll dann die wissenschaftliche Verwendung und Bedeutung der Modelle diskutiert werden.

## 4.1 Auf dem Weg zur *Neuen Geometrie*

Julius Plückers Liniengeometrie beruhte auf Ideen, die bis an den Anfang des 19. Jahrhunderts zurückweisen. Die beiden französischen Mathematiker Joseph D. Gergonne (1771–1859) und Jean-Victor Poncelet (1788–1867) hatten in den 1820er Jahren festgestellt, dass gewisse Sätze ihre Gültigkeit behielten, wenn nur die Worte Punkte und Linien vertauscht werden. Um die Entdeckung dieses Prinzips, das innerhalb der projektiven Geometrie gilt, entbrannte zwischen beiden eine Auseinandersetzung, die hauptsächlich in den *Annales des Mathématique* ausgetragen wurde. Es gelang ihnen jedoch nicht, eine triftige Begründung für den Dualismus anzugeben.<sup>3</sup> Erst Julius Plücker, der mit den Arbeiten französischer Mathematiker vertraut war, gelang eine Herleitung des Prinzips. Er wies auf die Symmetrie hin, die sich in der homogenen Gleichung einer Linie wiederfindet. Damit vollzog er einen ersten Schritt auf dem Weg zu einer neuen Geometrie, in der Linien im Zentrum stehen.

### Oerter zweiter Classe

Plücker veröffentlichte 1830 in dem *Journal für reine und angewandte Mathematik*, das drei Jahre zuvor erstmals von August L. Crelle (1780-1855) herausgegeben worden ist, eine Abhandlung mit dem vielsagenden Titel „Über eine neue Art, in der

<sup>3</sup> Nach Carl B. Boyer entwickelte Poncelet die Idee der reziproken Polaren. Jeder nicht-degenerierte Kegelschnitt  $\mathcal{C}$  (*Conic directrice*) stiftet eine eindeutige Korrespondenz zwischen den Punkten und Linien in der projektiven Ebene. Durch einen Punkt  $p$  verlaufen zwei Tangenten an  $\mathcal{C}$ . Die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte wird *Polare* des *Pols*  $p$  genannt. Gergonne wiederum hatte den Gedanken ausgesprochen, dass gewisse Sätze in der planaren Geometrie auch dann noch ihre Gültigkeit bewahren, wenn die Worte Linie und Punkt vertauscht werden. Er erblickte darin eine allgemeine Symmetrie, deren Beweis ihm jedoch nicht gelang. Siehe: Boyer, Carl B. *History of Analytic Geometry*. New York: Scripta Mathematica, 1956, S. 238ff.

analytischen Geometrie Punkte und Curven durch Gleichungen darzustellen“.<sup>4</sup> In dem Artikel betrachtet er die homogene Gleichung

$$au + bv + cw = 0, \quad (4.1)$$

in der zwischen den Variablen  $a, b, c$  und  $u, v, w$  eine Symmetrie besteht. Die gleichzeitige Vertauschung von  $a$  mit  $u$ ,  $b$  mit  $v$  und  $c$  mit  $w$  ändert den Ausdruck nicht. Werden  $a, b$  und  $c$  als homogene Koordinaten von Punkten in der Ebene betrachtet, so lässt sich die Gleichung auf zweierlei Arten interpretieren. Für feste Werte von  $u, v, w$  definiert sie eine Gerade in der projektiven Ebene. Wenn jedoch  $u, v, w$  als Variablen betrachtet werden, so beschreibt die Gleichung die Gesamtheit aller Linien, die durch den festen Punkt mit homogenen Koordinaten  $a, b, c$  laufen. Auf diese Weise lassen sich  $u, v, w$  als die Koordinaten einer Linie auffassen. Julius Plücker spricht in seinem 1832 erschienen Werk *Analytisch-geometrische Entwicklungen* erstmals von Linienkoordinaten.<sup>5</sup>

In dem angesprochenen Artikel aus *Crelles Journal* zeigt Plücker, dass es zwei verschiedene Möglichkeiten gibt, um eine plane Kurve zu beschreiben. Nach ihm ließ sie sich einerseits mithilfe einer Gleichung zwischen Punktkoordinaten darstellen. Die Kurve erscheine so als „unendliche Menge stetig aufeinander folgender Punkte“. Andererseits könne die Kurve aber auch durch unendlich viele Linien dargestellt werden, die „nach einem Gesetze stetig aufeinander“ folgend, sie umhüllen, was nach dem Autor in einer ebenso „einfache(n) Gleichung zwischen veränderlichen Größen“ resultiere.<sup>6</sup> Obwohl er noch nicht von Linienkoordinaten sprach, betrachtete er bereits in

<sup>4</sup> Plücker, Julius. „Über eine neue Art, in der analytischen Geometrie Punkte und Curven durch Gleichungen darzustellen“. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 6 (1830).

<sup>5</sup> Zur Verwendung des Begriffs vergleiche Plump, „Julius Plücker - Leben und Werk eines analytischen Geometers im 19. Jahrhundert“, S. 226. Gemeint ist hier: Plücker, Julius. *Analytisch-geometrische Entwicklungen*. Bd. 2. Essen: G. D. Baedeker Verlag, 1831.

<sup>6</sup> „Man denkt sich nämlich, indem man eine Curve wie gewöhnlich durch eine Gleichung zwischen veränderlichen Grössen darstellt, welche, wenn man bestimmte Werthe beilegt, die Coordinaten eines bestimmten *Punktes* bedeuten, diese Curve als aus einer unendlichen Menge stetig auf einander folgender Punkte bestehend, oder, wenn man lieber will, als durch die Bewegung eines Punktes beschrieben. Man kann aber auch durch nicht minder einfache und bequeme Gleichungen zwischen veränderlichen Grössen, durch welche, wenn man ihnen bestimmte Werthe beilegt, eine bestimmte *gerade Linie* gegeben ist, unendlich viele gerade Linien darstellen, die nach einem Gesetze stetig aufeinander folgen, und also eine bestimmte Curve *umhüllen*.“ Die Hervorhebungen sind aus dem Original übernommen worden: Plücker, „Über eine neue Art, in der analytischen Geometrie Punkte und Curven durch Gleichungen darzustellen“, S. 107.

seiner Abhandlung homogene Gleichungen der Form

$$f(u, v, w) = 0,$$

wobei  $(u, v, w)$  Geraden repräsentieren. Die Gesamtheit aller Linien, deren Koordinaten  $u, v, w$  dieser Gleichung genügen, umhüllen im Allgemeinen eine stetige Kurve. Julius Plücker fasst nicht die Linien selbst ins Auge, sondern betrachtet sie nur in Hinblick auf diese Kurve, deren Tangenten sie bilden.<sup>7</sup> Den Grad der Gleichung  $f = 0$  bezeichnet er als die Klasse der zugehörigen Kurve.<sup>8</sup> Wie er in einer Fußnote anmerkt, entlehnte Plücker diesen Begriff Joseph Gergonne, der darunter die Anzahl an Tangenten verstand, die sich von einem beliebigen Punkt aus an die Kurve legen lassen. Gergonne ging jedoch fälschlicherweise davon aus, dass die Klasse und die Ordnung einer Kurve übereinstimmen.<sup>9</sup> Plücker erkannte darin einen Fehler. Er nannte Punkte „Orte erster Classe“, da ihre Darstellung mithilfe umhüllender Linien auf eine Gleichung entsprechender Ordnung führt. Als „Orter zweiter Classe“ bezeichnete er demnach Kurven, deren Tangenten einer Gleichung der Form

$$au^2 + 2buv + cv^2 + 2duw + 2evw + fw^2 = 0$$

genügen. Über weite Strecken seiner Abhandlung diskutiert Julius Plücker Kurven der zweiten Klasse anhand dieser Gleichung.

## Linienkoordinaten

Im Jahr 1830 war Plücker dem Gedanken, anstelle von Punktmengen Gebilde aus Linien zu betrachten, bereits nahe gekommen. Dennoch blieben seine Überlegungen zu jenem Zeitpunkt immer auf Kurven bezogen. Er machte zwar ausführlich Gebrauch von Linienkoordinaten. Sie dienten ihm jedoch nur zur Beschreibung von Punktmengen. Mitte der 1840er Jahren dehnte Plücker seine Gedanken auf den Raum aus. Wie zuvor Linien-, so führte er homogene Ebenenkoordinaten ein. Mit der Veröffentlichung seines *Systems der Geometrie des Raumes* im Jahr 1846 und einiger weiterer Artikel im darauffolgenden Jahr brachte er seine Überlegungen zu einem vorläufigen Abschluss. Bis 1865 erschienen von ihm keine Arbeiten mehr zur Geometrie.

Zu jener Zeit lag der Gedanke einer Geometrie der Liniengebilde in der Luft. Bereits 1859 hatte Arthur Cayley (1821–1895) erklärt, dass sich die Ebene als der

<sup>7</sup> Plücker, „Über eine neue Art, in der analytischen Geometrie Punkte und Curven durch Gleichungen darzustellen“, S. 180.

<sup>8</sup> Ebd., S. 109.

<sup>9</sup> Boyer, *History of Analytic Geometry*, S. 251.

locus quo der zweidimensionalen Geometrie sowohl aus Punkten als auch aus Linien aufbauen ließe.<sup>10</sup> Ein Jahr später entwickelte er ein System von sechs homogenen Koordinaten, die ihm nützlich erschienen, um Kurven im Raum zu beschreiben.<sup>11</sup> Julius Plücker verwendete dann 1865 dieselben Koordinaten für die Darstellung von Liniengebilden. Wie er mitteilte, war es nicht zuletzt das Interesse englischer Geometer an seinen Arbeiten, die ihn seine frühere Forschung wieder aufnehmen ließ.<sup>12</sup> Julius Plücker publizierte 1865 die Grundzüge seiner neuen Theorie unter dem Titel „On a New Geometry of Space“ in den *Philosophical Transactions* der *Royal Society of London*, nachdem er in demselben Jahr einen Vortrag bei einer Versammlung in Nottingham gehalten hatte.<sup>13</sup> Einleitend beschreibt Plücker in seiner Abhandlung zwei unterschiedliche Auffassungsweisen des Raumes, die sich beide auf die Linie als zentrales Element beziehen. Nach der einen wird die Linie als Verbindungsstrecke zweier Punkte betrachtet, nach der anderen als gemeinsame Schnittlinie eines Paares von Ebenen. Je nach Perspektive spricht Julius Plücker von Strahlen oder Achsen. Für die beiden unterschiedlichen Sichtweisen leitet er Koordinaten her. Als Strahlenkoordinaten einer Linie, die von den Gleichungen

$$x = rz + \rho, \quad y = sz + \sigma$$

definiert wird, fasst er die vier Größen  $r, s, \rho, \sigma$  auf.<sup>14</sup> Er nutzt jedoch noch eine fünfte Variable

$$\eta = s\rho - r\sigma$$

als Koordinate, um eine größere Symmetrie zu erreichen, wie er schreibt.<sup>15</sup> In analoger Weise führt er anschließend fünf Achsenkoordinaten ein, indem er von den Gleichungen zweier Ebenen ausgeht.

<sup>10</sup> Cayley, Arthur. „A Sixth Memoir upon Quantics“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 149 (1859).

<sup>11</sup> Cayley, Arthur. „On a New Analytical Representation of Curves in Space“. In: *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* 3 (1860).

<sup>12</sup> Plücker, Julius. „Fundamental Views regarding Mechanics (Abstract)“. In: *Proceedings of the Royal Society of London* 15 (1866).

<sup>13</sup> Plücker, Julius. „On a New Geometry of Space“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 155 (1865).

<sup>14</sup> Ebd., S. 726.

<sup>15</sup> Das Problem besteht darin, dass die vier Größen alleine nicht genügen, um für feste Punktkoordinaten  $x, y, z$  jede Linie darzustellen. Die Linie zum Beispiel, die in den Koordinaten die Gleichung  $x = 0, z = 0$  erfüllt, lässt sich mithilfe der Parameter  $r, \rho, s, \sigma$  alleine nicht beschreiben. ebd., S. 733.

## 4.2 Von quadratischen Komplexen zu Komplexflächen

Das System dieser Linienkoordinaten war bereits Arthur Cayley bekannt. Der entscheidende Schritt ist jedoch, dass Plücker nun erstmals beliebige Gleichungen zwischen ihnen ins Auge fasste. Überdies betrachtete er nun die Liniengebilde für sich, anstatt sie bloß zur Beschreibung von Punktmengen zu verwenden. Nachdem seine Abhandlung erschienen war, begann er Liniengebilde in systematischer Weise zu studieren. Im Zentrum seines Interesses standen hierbei Linienkomplexe, worunter Plücker das Ensemble von Geraden verstand, deren Koordinaten  $r, \rho, s, \sigma, \eta$  einer Gleichung der Form

$$f(r, \rho, s, \sigma, \eta) = 0$$

genügen.<sup>16</sup>

### Komplexe zweiten Grades

Die Linien eines Komplexes des  $n$ -ten Grades, die durch einen festen Punkt des Raumes gehen, bilden einen Kegel desselben Grades. Alle Linien des Komplexes wiederum, die auf einer Ebene liegen, umhüllen eine Kurve der  $n$ -ten Klasse.<sup>17</sup> Julius Plücker begann seine Untersuchungen mit linearen Komplexen. Sie werden von den Tangenten an Schraubenlinien beschrieben, die auf coaxialen Zylindern liegen, wie er bald zeigen konnte.<sup>18</sup> Ein Sonderfall tritt allerdings ein, wenn die Koeffizienten von  $f$  einer quadratischen Bedingung genügen. Diese speziellen Komplexe bestehen aus allen Linien, die eine feste Gerade schneiden. Nachdem Plücker sich eine Anschauung von den Komplexen ersten Grades gemacht hatte, führte er seine Untersuchung der Liniengebilde mit quadratischen Komplexen fort.

Sie bildeten das Thema eines Vortrages, den Julius Plücker beim 36. Treffen der *British Association for the Advancement of Science* im August 1866 in Nottingham hielt.<sup>19</sup> Während ein linearer Komplex von sechs homogenen Größen abhängt, liegen einem quadratischen Komplex zwanzig homogene Koeffizienten zugrunde. Die große Anzahl an Parametern brachte Schwierigkeiten mit sich, die Plückers Untersuchungen im Wege standen: „Bei der grossen Complication eines Complexes des zweiten

<sup>16</sup> Plücker, „On a New Geometry of Space“, S. 741.

<sup>17</sup> Plücker, Julius. *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement*. Hrsg. von Clebsch, Alfred. Bd. 1. Leipzig: Teubner, 1868, S. 17ff.

<sup>18</sup> Eine geometrische Charakterisierung der linearen Komplexe findet sich in: Ebd., S. 56f.

<sup>19</sup> Anonym. „On Complexes of the Second Order“. In: *Report of the British Association for the Advancement of Science. 36th Meeting (1866)*. London, 1866.

Grades müssen wir darauf Bedacht nehmen, dass wir die Uebersicht erleichtern, und dadurch der Anschauung zu Hülfe kommen.“<sup>20</sup> Anstatt alle Komplexlinien zu betrachten, beschränkte er sich vorerst auf jene Linien des Komplexes, die durch eine feste Gerade des Raumes gehen. Die Gesamtheit dieser Linien umhüllt eine gewöhnliche Punktmenge, welche Plücker Komplexfläche nannte. Die ausgezeichnete Gerade bezeichnete er als Achse.

## Geometrie der Komplexflächen

Ein Großteil seiner *Neuen Geometrie* ist diesen Komplexflächen gewidmet. Von ihrem Studium erhoffte sich Plücker, Einblicke in die Natur quadratischer Komplexe zu erhalten. Aber auch ungeachtet dessen, rief ihre Geometrie sein Interesse hervor. Plücker unterschied zwei Arten von Komplexflächen anhand der Lage ihrer Achsen. Wenn die Achse ins unendlich Ferne rückt, liegen alle Komplexkurven auf parallelen Ebenen. Bleibt sie indes im Endlichen, so drehen sich alle Komplexkurven in ihren Ebenen um sie herum. In Anlehnung an das Gradnetz der Erde sprach Plücker von Äquatorial- und Meridianflächen.<sup>21</sup>

Eine Komplexfläche ist im Allgemeinen von vierter Ordnung und Klasse, wie Plücker zeigte.<sup>22</sup> Ihre Achse bildet eine Doppelpunktlinie der Fläche. Alle Ebenen durch die Achse treffen die zugehörige Komplexfläche in Kurven zweiter Klasse, die Plücker als Komplexkurven bezeichnet. Gemeinsam mit der Achse beschreibt die Familie dieser Kurven die gesamte Fläche.

Eine Kurve der zweiten Klasse artet unter bestimmten Umständen in ein Punktepaar aus.<sup>23</sup> Wie Plücker zeigt, zerfallen vier Kurven einer generischen Komplexfläche derart.<sup>24</sup> Diese vier Punktepaare bilden acht Doppelpunkte der Fläche.<sup>25</sup> Die Linie zwischen den Punkten eines Paares liegt außerdem auch auf der Fläche, wo sie die Achse trifft. Diese vier Linien werden von Plücker als singuläre Strahlen bezeichnet. Er unterscheidet zwischen zwei Arten. Wenn das Doppelpunktepaar reell ist, spricht er von singulären Strahlen der ersten Art, andernfalls von Strahlen der zweiten Art.

<sup>20</sup> Plücker, *Neue Geometrie Bd. 1*, S. 158.

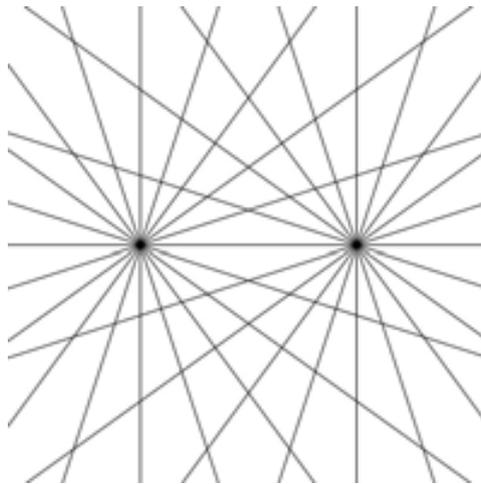
<sup>21</sup> Ebd., S. 161 ff.

<sup>22</sup> Ebd., S. 171.

<sup>23</sup> Die Gleichung  $f(u, v, w) = 0$  einer degenerierten Kurve zweiter Klasse zerfällt in das Produkt zweier linearer Gleichungen. Jede dieser Gleichungen beschreibt eine Schar von Linien mit Koordinaten  $u, v, w$ , die jeweils durch einen festen Punkt gehen.

<sup>24</sup> Plücker, *Neue Geometrie Bd. 1*, S. 188.

<sup>25</sup> Ebd., S. 180.



**Abb. 4.1:** Die Grafik veranschaulicht eine degenerierte Kurve zweiter Klasse. Grafik: H. Junker

Plücker führt in seiner *Neuen Geometrie* eine doppelte Diskussion der Komplexflächen durch, indem er ihre zweifache Darstellung in Strahlen- und Achsenkoordinaten verwendet. Wie Liniengebilde im Allgemeinen, so sind auch Komplexflächen zu sich selbst dual. Demnach besitzt jede Fläche nicht nur acht Doppelpunkte, sondern auch dieselbe Anzahl an Doppelebenen. Sie berühren die Komplexfläche entlang eines Kegelschnitts. Unter den acht Doppelebenen gibt es vier Paare. Die beiden Ebenen eines Paares treffen sich in einer ausgezeichneten Linie, die Plücker singuläre Achsen nennt. Außerdem gehen durch jeden Doppelpunkt vier Doppelebenen, während auf jeder Doppelebene genau vier Doppelpunkte liegen. Diese Symmetrie regte Plückers Interesse an den Flächen weiter an.

Alle Punkte entlang der Achse sind Doppelpunkte der zugehörigen Komplexfläche. Es gibt jedoch vier ausgezeichnete Punkte, in denen die Doppelpunktlinie von den singulären Achsen geschnitten wird, in denen der Tangentialkegel in ein Paar übereinstimmender Ebenen zerfällt.<sup>26</sup> Es handelt sich um singuläre Punkte des quadratischen Komplexes. Hierunter verstand Plücker Punkte, in denen der Kegel zweiten Grades aller Komplexlinien entartet. Die Menge aller derartigen Punkte ist eine Fläche, die Plücker schlicht  $\Phi$  nannte. Später bezeichnete sie Klein als die Singularitätenfläche des Komplexes. Für einen quadratischen Komplex ist sie von

<sup>26</sup> Zu Plückers Lebzeiten sind diese speziellen Arten von uniplanaren Punkten als „pinch points“ (dt. Zwickpunkte) bezeichnet worden, da sich in ihnen zwei verschiedene Zweige der Fläche berühren. Die Bezeichnung geht auf Arthur Cayley zurück. Cayley, Arthur. „On the Singularities of Surfaces“. In: *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* 7 (1852), S. 332.

vierter Ordnung und Klasse. Die vier Punkte markieren den Schnitt der Achse mit  $\Phi$ .<sup>27</sup>

### 4.3 Plückers Klassifikation der Äquatorialflächen

Von Äquatorialflächen lässt sich wesentlich leichter eine Anschauung als von Meridianflächen gewinnen, da die Komplexkurven in parallelen Ebenen liegen. Plücker begann damit, sie systematisch zu untersuchen. In diesem Zusammenhang konstruierte er auch gemeinsam mit Felix Klein mehrere Modelle, um sich wesentliche Typen zu veranschaulichen. Die *Neue Geometrie* endet mit einer umfassenden Klassifikation einer speziellen Klasse von Äquatorialflächen, die mit den Worten eingeleitet wird: „Es leitet uns daher die doppelte Absicht, einmal, an leicht und übersichtlich konstruierbaren Flächen eine Bestätigung der bisherigen Resultate zu finden; dann aber besonders, durch diese Flächen in etwa eine Anschauung von der Vielgestaltigkeit der Complexflächen überhaupt und dadurch von der Vertheilung der geraden Linie in einem Complexe des zweiten Grades zu gewinnen.“<sup>28</sup> Wie es Plückers Arbeitsweise entsprach, begann er seine Untersuchungen mit einer Betrachtung besonderer Flächen, von denen er sich leichter eine Vorstellung bilden konnte. Wenn er dann eine innere Anschauung entwickelt hatte, schritt er zu den allgemeinen Fällen fort. Obwohl sie in seinem Werk nicht enthalten ist, muss Plücker auch noch eine umfassende Klassifikation der Meridianflächen in mehr als 600 verschiedene Arten vorgenommen haben.<sup>29</sup> In diesem Abschnitt wollen wir einen Überblick über seine Klassifikation der Äquatorialfläche geben, bevor wir eine Beschreibung seiner Holz- und Metallmodelle geben.

#### Geometrie einer Äquatorialfläche

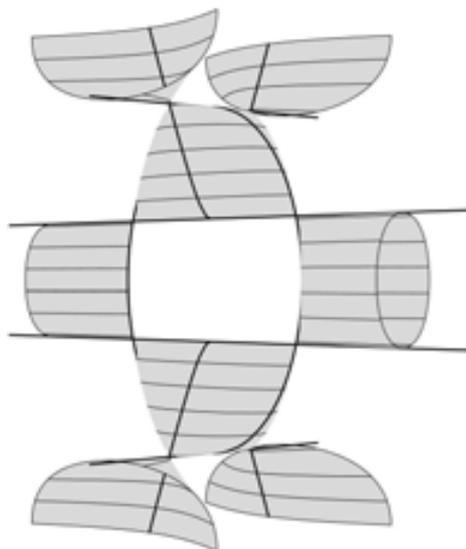
Die Mittelpunkte der Breitenkurven – so bezeichnet Plücker die Komplexkurven von Äquatorialflächen – liegen alle auf einer geraden Linie, dem Durchmesser der Flä-

<sup>27</sup> Plücker erläutert die gesamte Konfiguration der singulären Punkte, Linien und Ebenen am Ende des zweiten Abschnitts seiner *Neuen Geometrie*: Plücker, *Neue Geometrie Bd. 1*, S. 205 ff.

<sup>28</sup> Ebd., S. 344.

<sup>29</sup> Am Ende des zweiten Bandes der *Neuen Geometrie* heißt es nur: „Es hat uns genügt, an dem Beispiele der Äquatorialflächen gezeigt zu haben, wie leicht es im Anschlusse an die Theorie der Complexe zweiten Grades gelingt, die so vielgestaltigen Flächen dieser Complexe der geometrischen Anschauung zu unterwerfen.“ ebd., S. 372.

che.<sup>30</sup> Für Meridianflächen befinden sich wiederum die Pole der Achse bezüglich der Komplexkurven auf einer geraden Linie, die Plücker als Polare der Fläche bezeichnet.<sup>31</sup>



**Abb. 4.2:** Die Abbildung zeigt den Ausschnitt einer nicht tordierten Äquatorialfläche. Der Durchmesser steht senkrecht auf der Achse, die horizontal im unendlich Fernen verläuft. Die Breitenkurven liegen in parallelen Ebenen. Sie sind zusammen mit den beiden Charakteristiken als durchgehende Linie eingezeichnet. Außerdem lassen sich die acht Doppelpunkte erkennen, die jeweils paarweise auf einem singulären Strahl liegen. Grafik: H. Junker

Die Achse von Äquatorialflächen verläuft im unendlich Fernen, weswegen alle Breitenkurven in parallelen Ebenen liegen. Die Gestalt dieser Flächen wird durch eine Schar paralleler Kegelschnitte beschrieben, deren Mittelpunkt in den Durchmesser fällt. Solange die Achse nicht dem zugrundeliegenden Komplex angehört, handelt es sich – im Allgemeinen – um reelle oder imaginäre Ellipsen und Hyperbeln. Die Aus-

<sup>30</sup> Plücker, *Neue Geometrie Bd. 1*, S. 161.

<sup>31</sup> Jeder nicht-entartete Kegelschnitt in der Ebene stiftet eine eindeutige Korrespondenz zwischen den Punkten und Linien. Durch einen Punkt der Ebene lassen sich im Allgemeinen genau zwei Tangenten an den Kegelschnitt legen. Die Verbindungsgerade der beiden Berührungspunkte wird Polare genannt: Salmon, George. *Analytische Geometrie der Kegelschnitte : mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden*. Übers. von Fiedler, Wilhelm. Leipzig : B.G. Teubner, 1878, S. 147.

nahme bilden nur vier singuläre Ebenen, auf denen die Breitenkurven zu Punktepaaren entarten.

Plücker beschränkt sich bei seiner Diskussion auf Äquatorialflächen, deren Durchmesser senkrecht auf den parallelen Breitenebenen steht. Außerdem nimmt er an, dass die Hauptachsen aller Kegelschnitte gleich gerichtet sind. Sie liegen dann auf zwei Ebenen, die sich im Durchmesser kreuzen. Wenn die Breitenkurven von Ebenen zu Ebene hingegen gegeneinander gedreht sind, spricht Plücker von tordierten Äquatorialflächen. Er entwarf auch einige Modelle dieser Flächen, die ansonsten jedoch in der Klassifikation nicht weiter behandelt werden. In seinem Werk heißt es lediglich: „Wir erhalten eine Anschauung von einer allgemeinen Äquatorialfläche, wenn wir uns die Breiten-Curven einer der bisher betrachteten Flächen in ihren Ebenen gegeneinander gedreht denken.“<sup>32</sup>

### Charakteristiken einer Äquatorialfläche

Für die algebraische Darstellung der Äquatorialflächen wählt Plücker ein System orthogonaler Punktkoordinaten  $x, y, z$  so, dass die  $x$ -Achse mit dem Durchmesser der betrachteten Fläche zusammenfällt. Eine nicht-tordierte Äquatorialfläche genügt dann einer Gleichung der Form

$$\alpha(x)y^2 + \beta(x)z^2 + \alpha(x)\beta(x) = 0,$$

wobei  $\alpha$  und  $\beta$  quadratische Polynome mit reellen Koeffizienten sind.<sup>33</sup> In dieser Gleichung parametrisiert  $x$  die Breitenebenen, welche alle parallel zur  $yz$ -Ebene liegen. Für einen festen Wert auf der Achse beschreibt sie einen Kegelschnitt. Plücker betrachtet nun die beiden Kegelschnitte, die in der  $xy$ - und der  $xz$ -Ebene aus der Fläche ausgeschnitten werden:

$$y^2 + \beta(x) = 0, \quad z^2 + \alpha(x) = 0.$$

Zusammen mit jeweils zwei Geraden, die von den Nullstellen von  $\alpha$  und  $\beta$  definiert werden, bilden diese beiden quadratischen Kurven den vollständigen Schnitt der Äquatorialfläche mit jenen Ebenen. Ihr Typ und die gegenseitige Lage bestimmen die Gestalt der Fläche, weswegen Plücker sie Charakteristiken nennt.

Die Nullstellen von  $\alpha$  und  $\beta$  definieren die vier singulären Strahlen der Fläche, auf denen jeweils zwei Doppelpunkte in gleichem Abstand zur Achse liegen. Entlang

<sup>32</sup> Plücker, *Neue Geometrie Bd. 1*, S. 363.

<sup>33</sup> Plücker, Julius. *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement*. Hrsg. von Klein, Felix. Bd. 2. Leipzig: Teubner, 1869, S. 346.

des Durchmessers ändert sich der Typ der zugehörigen Breitenkurven erst, wenn ein singulärer Strahl passiert wird.<sup>34</sup> Plücker unterscheidet nun die einzelnen Flächenteile nach dem Typ der zugehörigen Breitenkurve. Imaginäre Ellipsen bestimmen imaginäre, reelle Ellipsen elliptische und Hyperbeln hyperbolische Flächenteile.<sup>35</sup> Demnach besteht die Äquatorialfläche aus einem Teil, falls die Nullstellen von  $\alpha$  und  $\beta$  imaginär sind. Wenn es dagegen ein Paar reeller Wurzeln gibt, dann existieren drei affine Flächenteile, von denen sich jedoch die Äußeren im unendlich Fernen treffen. Falls es keine imaginären Nullstellen gibt, so besteht die Fläche aus fünf verschiedenen Teilen.

Die Koeffizienten von  $\alpha$  und  $\beta$  bestimmen über den jeweiligen Typ der Charakteristik. Indem Plücker beide in einer Ebene übereinander legt, sprich das Bild der beiden Kurven  $y^2 + \beta(x) = 0$  und  $z^2 + \alpha(x) = 0$  zusammen betrachtet, erhält er ein aussagekräftiges Diagramm für jede Fläche (vgl. Abb. 4.3). An ihm lässt sich die Gestalt der Fläche ablesen. Die vertikale Linie sei die  $x$ -Achse. Sie zeigt den Durchmesser an, auf dem die Mittelpunkte aller Breitenkurven liegen. Ein fester Punkt  $x = c$  auf der Linie entspricht genau einer Kurve, deren Gleichung durch

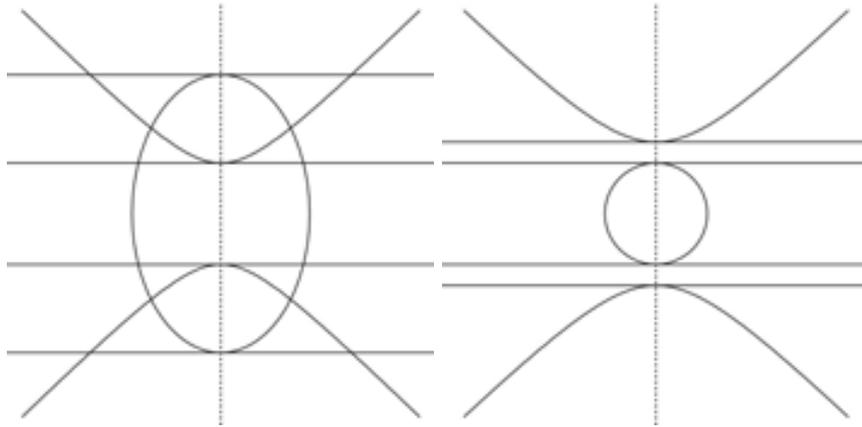
$$\alpha(c)y^2 + \beta(c)z^2 + \alpha(c)\beta(c) = 0,$$

gegeben ist. Ihr Typ lässt sich anhand der Ausdrücke  $\alpha(c)$  und  $\beta(c)$  bestimmen. Sind beide negativ, so handelt es sich um eine reelle Ellipse. Wenn nur eine Größe negativ ist, bildet die zugehörige Breitenkurve indes eine Hyperbel. Sind wiederum beide Werte positiv, so ist die Kurve eine imaginäre Ellipse.

In ähnlicher Weise lassen sich die beiden Arten singulärer Strahlen unterscheiden. Wenn  $c$  eine Nullstelle von  $\alpha$ , während  $\beta(c)$  negativ ist, so handelt es sich um einen Strahl erster Art, andernfalls um einen der zweiten Art. Jeder Strahl der ersten Art

<sup>34</sup> Plücker, *Neue Geometrie Bd. 1*, S. 348.

<sup>35</sup> Die Abfolge der Flächenteile entlang des Durchmessers notiert Plücker für jeden Typ schematisch mithilfe der Symbole I, E und H, die er aneinanderreichte. Zwei aufeinanderfolgende Komponenten werden stets von einem singulären Strahl getrennt. Wenn in dem zugehörigen Punkt auf dem Durchmesser ein Paar gerader Linien ihren Schnittpunkt haben, was die II. und III. Gruppe von Äquatorialflächen auszeichnet, so kennzeichnet dies Plücker durch die Einfügung eines oder zweier vertikaler Striche, je nachdem um welche Art von Strahl es sich handelt. Wenn sich jedoch zwei Charakteristiken schneiden (IV. Gruppe), verwendet er ein Kreuz (Bsp.:  $I \times E H_2 I$ , Nr. 34), um auf die sich absondernde Ebene hinzuweisen. Punkte, in denen sich ein Paar gerader Linien und eine Charakteristik treffen (Gruppe V), entsprechen ebenfalls sich absondernden Breitenebenen, die Plücker jedoch mit einem waagerechten Strich notiert (Bsp.:  $H_2 - E_2$ , Nr. 61). Siehe: ebd., S. 351f.



**Abb. 4.3:** Die Abbildung zeigt zwei verschiedene Plückersche Diagramme. Links: Die erste Charakteristik ist eine Ellipse, die zweite eine Hyperbel, deren Hauptachse in den Durchmesser (gestrichelte Linie) der Fläche fällt. Ein Scheitel der Hyperbel liegt innerhalb der Ellipse. Der Durchmesser wird in vier Punkten von den Charakteristiken geschnitten, daher gibt es vier singuläre Strahlen erster Art (Abb. 4.2). Es handelt sich um die Nr. 14 der Plückerschen Klassifikation. Rechts: Die Charakteristiken sind von demselben Typ. Der Scheitel der Hyperbel liegt nun jedoch außerhalb der Ellipse, wodurch alle singulären Strahlen von der zweiten Art sind.

trennt einen hyperbolischen von einem elliptischen Flächenteil, während zwischen imaginären und hyperbolischen Flächenteilen immer ein Strahl der zweiten Art liegt.

### Plückers Einteilung der nicht-tordierten Äquatorialflächen

Plückers Klassifikation in dem letzten Abschnitt der *Neuen Geometrie* umfasst 78 Arten von nicht tordierten Äquatorialflächen. Es werden nur Flächen ohne parabolische Breitenkurven berücksichtigt. Seine Einteilung folgt keinem strengen Prinzip. Stattdessen unterscheidet er die Flächen anhand gestaltlicher Merkmale. Er nutzte hierfür das Diagramm mit den beiden Charakteristiken: „Das Princip der Eintheilung der Aequatorialflächen dieser Art ist also zu entlehnen aus der verschiedenen Natur und der gegenseitigen Lage der Charakteristiken.“<sup>36</sup> Mit der graphischen Methode ist es leichter, den Überblick über die verschiedenen Fälle zu bewahren. Für die Charakteristiken lässt sich jede beliebige Kombination affiner Kegelschnitte wählen. Maßgeblich für die Gestalt sind auch die Lage der beiden Charakteristiken entlang des Durchmessers und die Punkte, in denen sie diese Linie treffen. Die Punkte entsprechen singulären Strahlen der zugehörigen Äquatorialflächen (Abb. 4.3). Da alle

<sup>36</sup> Ebd., S. 346.

Breitenkurven zwischen zwei benachbarten Strahlen vom gleichen Typ sind, markieren sie Änderungen im Flächentyp.

Gr.	Typen	$\Phi$	Charakteristiken
I	1–17	1	Hyperbeln und Ellipsen
II	18–29	2	eine Hyperbel oder Ellipse und ein Paar nicht paralleler Geraden
III	30–32	3	zwei Paare nicht paralleler Geraden
IV	33–39	4	Hyperbeln und Ellipsen mit einem gemeinsamen Punkt
V	40–43	-	eine Hyperbel oder Ellipse und ein Paar nicht paralleler Geraden mit einem gemeinsamen Punkt
VI	44–61	-	eine Parabel
VII	62–73	-	ein Paar paralleler Geraden
VIII	74–76	-	zwei Parabeln
IX	77–78	-	eine Parabel und ein Paar paralleler Geraden

**Tab. 4.1:** Die Tabelle zeigt die Gruppierung der nicht-tordierten und nicht-parabolischen Äquatorialflächen, wie sie Plücker vornahm.

Plücker teilt die Flächen zuerst anhand des Typs der beiden Charakteristiken in Gruppen ein (Tab. 4.1). Die I. Gruppe (Typ 1–17) umfasst alle Flächen, bei denen beide Charakteristiken Hyperbeln, reelle oder imaginäre Ellipsen sind. Plücker ordnet sie in drei Untergruppen, je nach Anzahl der reellen singulären Strahlen. Die II. Gruppe (Typ 18–29) umfasst Flächen, in denen genau eine Charakteristik zu einem Paar gerader Linien ausartet, die sich auf dem Durchmesser schneiden. In diesem Fall fallen zwei singuläre Strahlen in Doppelgeraden unmittelbar zusammen. Bei den drei Flächen (Typ 30–32) der dritten Gruppe (III) sind beide Charakteristiken Paare sich schneidender Geraden, wodurch es zwei Doppelgeraden gibt. In der IV. Gruppe (Typ 33–39) sind alle Äquatorialflächen versammelt, bei denen sich die beiden Charakteristiken in einem Punkt auf dem Durchmesser schneiden. In diesem Fall gehen zwei der singulären Strahlen in derselben Breitenebene, die eine abgesonderte Doppelebene der Fläche bildet.<sup>37</sup>

Die Flächen der v. Gruppe (Typ 40–43) sind durch ein Paar reeller oder imaginärer Linien charakterisiert, die in einem Punkt auf dem Durchmesser einen Kegelschnitt schneiden. Wenn eine Charakteristik zur Parabel wird, so liegt ein singulärer Strahl im unendlich Fernen. Flächen dieser Art zählt Plücker zur VI. Gruppe (Typ 44–61). Falls die Parabel zu einem Paar gerader Linien ausartet, die reell oder imagi-

<sup>37</sup> Die beiden Polynome  $\alpha$  und  $\beta$  haben einen gemeinsamen linearen Faktor.

när sind, so wird der unendlich ferne Strahl zur Doppelgeraden. Diesen Fall stellt die VII. Gruppe (Typ 62–73) vor. Sind beiden Charakteristiken Parabeln, wodurch sich die Flächen (Typ 74–76) der Gruppe VIII auszeichnen, so wird die unendlich ferne Ebene zur abgesonderten Doppelebene. In der letzten Gruppe (Nr. IX) fasst Plücker alle Flächen (Typ 77–78) zusammen, bei denen die eine Charakteristik eine Parabel ist, die andere hingegen ein Paar gerader paralleler Linien.

#### 4.4 Die Plückerschen Holz- und Metallmodelle

Julius Plücker entwarf parallel zu seiner Erforschung der Äquatorial- und Meridianflächen eine Vielzahl von Modellen. Zwischen 1865 und 1866 konstruierte er mehrere Holzmodelle (Tab. 8.5), deren Herstellung er Johannes Epkens in Bonn überließ. Er präsentierte sie unter anderem beim Nottingham Meeting der *British Association for the Advancement of Science* 1866, wo sie großes Interesse hervorriefen. Auf Bitten von Thomas Archer Hirst (1830–1892), dem damaligen Vorsitzenden der neugegründeten *London Mathematical Society*, sandte er nach seiner Rückkehr 14 Modelle nach England. In vier Briefen an Hirst erläuterte Plücker die verschiedenen Entwürfe seiner Serie.<sup>38</sup> Dennoch blieben bei den englischen Mathematikern einige Fragen offen. Arthur Cayley verfasste 1868 eine detailliertere Beschreibung einiger Holzmodelle für die *Proceedings* der Society.<sup>39</sup> Aber auch ihm gelang es nicht, für alle Modelle der Serie eine Darstellung zu geben. Zu der Serie gehören auch Nachbildungen von tordierten und parabolischen Äquatorialflächen, die in der *Neuen Geometrie* nur flüchtig besprochen werden. Überdies war die Ausführung zweier Modelle falsch, was das Verständnis insgesamt erschwerte.

Nach 1866 ließ Plücker zudem noch eine umfangreiche Serie an Metallmodellen bei den mechanischen Werkstätten von Johann Eigel Sohn in Köln herstellen, um seine Theorie der Komplexflächen zu veranschaulichen. Er übernahm fast alle Entwürfe, die bereits zuvor in Holz ausgeführt worden waren, fügte aber eine Vielzahl neuer Entwürfe hinzu.<sup>40</sup> Mehrere Modelle der 27-teiligen Serie zeigen Meridianflächen, die Plücker ebenfalls zuvor klassifiziert haben muss, wie es sich den Briefen an Thomas A. Hirst entnehmen lässt. Auf den nächsten Seiten wird eine Beschreibung

<sup>38</sup> Fotos der Modelle und Abschriften von Plückers Briefen befinden sich auf der Internetseite der Gesellschaft: [www.lms.ac.uk/archive/plucker-collection](http://www.lms.ac.uk/archive/plucker-collection) (18. Juli 2022).

<sup>39</sup> Cayley, Arthur. „On Plücker’s Models of certain Quartic Surfaces“. In: *Proceedings of the London Mathematical Society* 3.1 (1869).

<sup>40</sup> Die arabischen Ziffern beziehen sich auf die Holzmodelle der Tab. 8.5, die römischen Ziffern indes auf die Metallmodelle der Tab. 8.6–8.7.

der Plücker'schen Holz- und Metallmodelle gegeben. Von den erstgenannten werden nur die beiden Nummern behandelt, die nicht nochmal als Gussmodelle umgesetzt worden sind. Für die Beschreibung aller anderen Holzmodelle wird auf das entsprechende Metallmodell verwiesen.

## Holzmodelle

Von den 14 Holzmodellen der *London Mathematical Society* zeigen acht Äquatorialflächen (Nr. 1–7 und 14), deren Breitenkurven alle gleichgerichtet sind. In allen Fällen steht der Durchmesser senkrecht auf der Standfläche. Die Breitenkurven liegen demnach horizontal. Die restlichen Modelle der Serie stellen tordierte oder parabolische Äquatorialflächen dar. Bis auf die Nummern 11 und 12 ließ Plücker später alle Entwürfe nochmal in Metall ausführen.<sup>41</sup>

**Nr. 11** Das Modell zeigt eine parabolische Äquatorialfläche, wobei die Brennpunkte der Parabeln auf den horizontalen Breitenebenen auf einer senkrechten Linie liegen. Zu sehen sind zwei reelle Doppelpunkte.

## Metallmodelle

Die Modellnummern beziehen sie im Folgenden auf die Tab. 8.6 – 8.7, sofern nicht anders gekennzeichnet. Wenn im nachstehenden Text von Typ die Rede ist, so bezieht sich dies auf die 78 verschiedenen Typen von Äquatorialflächen, die Plücker in seiner *Neuen Geometrie* klassifiziert hat.

<sup>41</sup> Vermutlich sind dies gerade jene Modelle, über die Plücker in einen der Briefe an Hirst erklärt: „Here I must signalise a mistake made in connecting the single parts of the two last models. The singular lines are not double lines. Each singular line is an infinite one, consisting of two parts joining in one point. Accordingly for instance, the extreme parts of the last model are to be turned through an angle of 180°.“ Plücker, Julius. *Four letters written by Julius Plücker to Thomas Archer Hirst: September 1866 – October 1867*. Es scheint so, als wäre der Fehler bei den Modellen behoben worden. Womöglich geschah dies im Vorfeld der Ausstellung im South Kensington Museum, die 1876 stattfand. In dem Katalogtext heißt es, dass die Objekte unter Aufsicht von Olaus Henrici von einem Studenten des *University Colleges* ummontiert worden seien. South Kensington Museum, *Catalogue of the Special Loan Collection of Scientific Apparatus at the South Kensington Museum*, S. 34. Bei Modell Nr. 11 – von dem Plücker vermutlich in dem Zitat spricht –, sind die beiden äußeren Teile jedenfalls in der richtigen Anordnung zu sehen.

## Nicht-tordierte Äquatorialflächen I–XVI

**Nr. I** Eine Hyperbel und reelle Ellipse bilden hier die beiden Charakteristiken (Typ 13). Die Hauptachse der Hyperbel fällt mit dem vertikalen Durchmesser der dargestellten Fläche zusammen. Ihre Scheitel liegen innerhalb der Ellipse. Die nicht-entarteten Breitenkurven der Fläche sind demnach Hyperbeln und Ellipsen. Das Modell zeigte eine allgemeine Äquatorialfläche.

Es lassen sich vier reelle singuläre Strahlen erster Art erkennen, die jeweils zwei reelle Doppelpunkte miteinander verbinden. Neben den acht Doppelpunkten liegen noch vier Zwickpunkte auf der unendlich fernen Achse. In der Plückerschen Serie gibt es ein weiteres Modell einer allgemeinen Meridianfläche (Nr. XX), auf dem die Zwickpunkte entlang der Doppelgeraden zu sehen sind.

**Nr. II** Das Modell zeigt eine Äquatorialfläche mit zwei Paaren von Linien als Charakteristiken, die sich in zwei verschiedenen Punkten auf dem horizontalen Durchmesser schneiden (Typ 32).<sup>42</sup> Es handelt sich um eine Regelfläche der vierten Ordnung. Die Breitenkurven sind alle Ellipsen, abgesehen von zwei singulären Strahlen erster Art, die senkrecht aufeinander stehen. Sie sind zugleich Doppelgeraden der dargestellten Fläche. Es handelt sich demnach um das Modell einer Komplexfläche mit drei Doppelgeraden, von denen eine hier im unendlich Fernen liegt. Die acht Doppelpunkte fallen paarweise in vier biplanare Punkte zusammen, welche die reellen Teilstücke beider Strahlen begrenzen.

**Nr. III** Im Gegensatz zu dem zweiten Modell sind hier die Geraden eines Paares parallel (Typ 73).<sup>43</sup> Außerdem steht der Durchmesser vertikal. Die dargestellten Flächen beider Modelle sind projektiv äquivalent. Die horizontalen Breitenkurven bei Nr. III sind alle reelle Ellipsen, abgesehen von der nach wie vor sichtbaren Doppelgeraden. Die andere Doppelgerade von Nr. II liegt bei dieser Darstellung ebenfalls im unendlich Fernen, wo sie sich mit der Achse orthogonal schneidet.

**Nr. IV** Das vierte Modell der Serie stellt eine Äquatorialfläche mit zwei reellen Ellipsen als Charakteristiken dar. Die Scheitel einer Ellipse liegen dabei zwischen denen der anderen (Typ 9). Als Breitenkurven treten reelle und imaginäre Ellipsen sowie Hyperbeln auf. Zwischen den hyperbolischen und elliptischen Teilen liegen zwei singuläre Strahlen erster Art. Unterdessen lassen sich am oberen und unteren Ende des Modells zwei der zweiten Art erkennen, die sich im Unendlichen treffen. Sie verbinden jeweils zwei imaginäre Knotenpunkte. Von den acht Doppelpunkten

<sup>42</sup> Bei dem Modell der Tübinger Sammlung fehlt leider der Mittelteil.

<sup>43</sup> Bei dem Tübinger Modell fehlt der obere Teil, der spiegelsymmetrisch auf dem vorhandenen Flächenstück saß.

sind nur vier reell, während alle Zwickpunkte imaginär sind. Die Fläche ist außerdem noch als Meridianfläche gestaltet worden (Nr. XXIII).

**Nr. v** Die modellierte Fläche Nr. v veranschaulicht den Typ 31 von Plückers Klassifikation der Äquatorialflächen. Die Charakteristiken: Zwei Linienpaare schneiden sich auf dem horizontalen Durchmesser, wobei eines der beiden Linienpaare imaginär ist (vgl. Nr. II). Neben der Achse im unendlich Fernen lassen sich zwei windschiefe Doppelgeraden erkennen. Die acht Doppelpunkte fallen paarweise in vier biplanaren Punkten zusammen, von denen jedoch nur zwei reell sind. Sie liegen auf den beiden zusammengefallenen singulären Strahlen erster Art, die horizontal zur Grundfläche verlaufen und zwei hyperbolische Flächenteile trennen. In der senkrechten Doppelgeraden sind wiederum zwei singuläre Strahlen der zweiten Art zusammengefallen. Auch sie trennt zwei hyperbolische Flächenteile.

**Nr. vi** Das Modell zeigt eine Äquatorialfläche der vierten Gruppe in Plückers Klassifikation. Die Charakteristiken sind zwei Hyperbeln, deren Hauptachsen in den Durchmesser fallen, und die sich dort in einem Scheitel schneiden (Typ 38). Von der Fläche hat sich hierdurch eine Ebene mit vier Doppelpunkten, zwei Zwickpunkten und zwei singulären Strahlen abgespalten, die den elliptischen Teil im Durchmesser berührt. Diese Ebene ist nicht dargestellt. Wird sie nicht mitgezählt, so ist die Fläche von dritter Ordnung.

Der Schnittpunkt beider Hyperbeln auf dem Durchmesser markiert die Lage der abgesonderten Ebene. Sie befindet sich dort, wo der elliptische in den imaginären Flächenteil übergeht. Die beiden übrig gebliebenen Strahlen sind von der ersten und zweiten Art. Es sind nur zwei Doppelpunkte reell.

**Nr. vii** Die dargestellte Fläche ist eine Äquatorialfläche vom Typ 34, die projektiv äquivalent zu Nr. vi ist. Die beiden Flächen unterscheiden sich nur hinsichtlich ihrer Lage gegenüber der unendlich fernen Ebene. Für Nr. vii geht sie durch den imaginären Teil der Fläche von Nr. vi. Die Charakteristiken sind hier dementsprechend zwei Ellipsen, die sich in einem Punkt auf dem Durchmesser schneiden.

**Nr. viii** Die dargestellte Äquatorialfläche entsteht, wenn eine der beiden reellen Ellipsen von Nr. vii zu einem imaginären Paar von Linien entartet, die sich in einem der beiden Schnittpunkte der anderen Ellipse mit dem Durchmesser schneiden (Typ 40). Der elliptische Teil von Nr. vii verschwindet dadurch. Als nicht-entartete Breitenkurven treten nur noch Hyperbeln und imaginäre Ellipsen auf.

Es lassen sich immer noch zwei windschiefe Strahlen erkennen, einer der ersten Art und einer der zweiten Art. Sie begrenzen den hyperbolischen Teil der Fläche. In dem singulären Punkt, der oberhalb des elliptischen Durchgangs sichtbar wird, sind die beiden Doppelpunkte von Nr. vii zusammengefallen. Währenddessen sind

die anderen beiden Doppelpunkte imaginär.<sup>44</sup>

**Nr. IX** Eine Parabel und zwei reelle Geraden bilden die Charakteristiken der modellierten Äquatorialfläche. Die Geraden schneiden sich in dem Scheitel der Parabel (Typ 61). Die Fläche gehört demnach zur sechsten Gruppe in Plückers Einteilung. Der Durchmesser verläuft waagrecht zur Grundfläche des Modells. Ein singulärer Strahl erster Art trennt die hyperbolische von der elliptischen Partie. Seine beiden reellen Doppelpunkte sind in dem Berührungspunkt der Fläche zusammengefallen, der sich deutlich erkennen lässt. Der Strahl liegt zusammen mit diesem Punkt in einer Doppelebene, die sich von der Fläche abgesondert hat. Ein weiterer Strahl erster Art ist wiederum zusammen mit zwei reellen Doppelpunkten in das unendlich Ferne gerückt. Wie bei den vorangegangenen Modellen auch (Nr. VI–IX) ist die dargestellte Fläche von dritter Ordnung.

**Nr. X** Das Modell zeigt eine allgemeine Äquatorialfläche der ersten Gruppe, die aus zwei hyperbolischen Teilen besteht, von denen einer durch die unendlich ferne Ebene geht. Die Charakteristiken sind an der Form zu erkennen. Es handelt sich um eine reelle Ellipse und eine Hyperbel, deren Hauptachse in den Durchmesser fällt. Die Ellipse liegt (im Unterschied zu Nr. I) zwischen ihren Scheiteln (Typ 11). Demnach gibt es vier singuläre Strahlen der zweiten Art, welche den Übergang zwischen reellen und imaginären Breitenkurven entlang des senkrechten Durchmessers anzeigen. Hiernach sind alle acht Doppelpunkte imaginär.

**Nr. XI** Die Charakteristiken der dargestellten Äquatorialfläche sind hier zwei reelle Hyperbeln, deren Hauptachsen sich auf dem vertikalen Durchmesser schneiden (Typ 7). Die Fläche besteht aus einem elliptischen und hyperbolischen Teil, die durch zwei singuläre Strahlen der ersten Art getrennt sind. Demnach sind vier der acht Doppelpunkte reell.

**Nr. XII** Das Modell lässt einen hyperbolischen Flächenteil erkennen, der vollständig im Endlichen liegt. Die dargestellte Äquatorialfläche wird durch eine reelle und imaginäre Ellipse charakterisiert (Typ 4). Demnach gibt es zwei Strahlen der zweiten Art. Alle acht Doppelpunkte sind imaginär. Die Achse gehört nicht zum Komplex.<sup>45</sup>

<sup>44</sup> Die Fläche ist auch von Karl Rodenberg (1851–1933) innerhalb seiner Serie kubischer Flächen dargestellt worden (Nr. XIII).

<sup>45</sup> In der Seminararbeit von Clausen heißt es, dass dieses eines der Modelle sei, die aufgrund von „ungenauer und fehlerhafter Herstellung“ aus der Sammlung entfernt worden sind: Clausen. *Klassifikation der Plückerschen Komplexflächen und der vier Kleinschen Modelle*. 1919, S. 8. Neben diesen werden noch die Nummern III, XIII und XVI aufgezählt. Vermutlich hat Felix Klein selbst die Aussortierung der Modelle veranlasst. Die genauen Gründe dafür sind unbekannt. Bei der Betrachtung der Modelle XII, XIII und XVI der Tübinger Sammlung fällt jedoch auf, dass die Übergänge von den hyperbolischen zu den imaginären Flächenteilen

**Nr. XIII** Bei diesem Modell liegt der Durchmesser horizontal. Die Fläche besteht aus einem hyperbolischen Teil, der durch die unendlich ferne Ebene geht. Die Charakteristiken sind eine Hyperbel, deren Hauptachse in den Durchmesser fällt, und eine imaginäre Ellipse (Typ 5). Der hyperbolische Teil wird von zwei singulären Strahlen zweiter Art begrenzt. Sämtliche Doppelpunkte sind imaginär.

**Nr. XIV** Das Modell zeigt wie Nr. XIII eine Äquatorialfläche der ersten Gruppe (Typ 3). Ihre Charakteristiken sind zwei Hyperbeln, deren Nebenachsen in den Durchmesser fallen. Demnach sind sämtliche singulären Strahlen und Doppelpunkte imaginär.

**Nr. XV** Die dargestellte Fläche gehört – wie bei den vorangegangenen Modellen – ebenfalls in die erste Gruppe von Plückers Klassifikation der Äquatorialflächen. Sie wird durch eine Hyperbel und eine imaginäre Ellipse charakterisiert (Typ 2). Die Nebenachse der Hyperbel fällt in den Durchmesser der Äquatorialfläche. Auch hier sind alle singulären Strahlen und Doppelpunkte imaginär, weswegen die Fläche nur aus einem hyperbolischen Teilstück besteht, das sich durch die unendlich ferne Ebene zieht. Nach Clausen wäre das Modell projektiv äquivalent zur Meridianfläche Nr. XXV.<sup>46</sup>

**Nr. XVI** Das Modell veranschaulicht die Form einer parabolischen Äquatorialfläche.<sup>47</sup> Alle Breitenkurven sind unterschiedlich geöffnete Parabeln, deren Hauptachsen jedoch in einer Ebene liegen. Die Achse der Komplexfläche gehört dem zugrundeliegenden Komplex an. Sie ist demnach eine singuläre Linie der Fläche, in die zwei Strahlen zusammengefallen sind. Die verbliebenen beiden Strahlen liegen parallel in einer Ebene, die durch den Durchmesser geht. Auf ihnen liegt jeweils ein reeller Doppelpunkt im Endlichen und einer im unendlich Fernen.

### **Tordierte Äquatorialflächen XVII–XIX**

**Nr. XVII** Der Entwurf gibt die Fläche des Modells Nr. IV in tordierter Form wieder. Die singulären Strahlen stehen hier senkrecht aufeinander.

**Nr. XVIII** Das Modell zeigt eine tordierte Äquatorialfläche, deren Achse nicht dem Komplex angehört. Alle Breitenkurven sind Hyperbeln.<sup>48</sup> Sie verlaufen waagrecht

abrupt erfolgen. Insbesondere bei der Nr. XII wirkt es so, als wäre die Fläche in den Punkten des singulären Strahls nicht regulär. Sie ist es jedoch, auch wenn Plückers Bezeichnung und die Darstellung etwas anderes suggerieren.

<sup>46</sup> Clausen, *Klassifikation der Plückerschen Komplexflächen und der vier Kleinschen Modelle*, S. 17.

<sup>47</sup> Plücker, *Neue Geometrie Bd. 2*, S. 372.

<sup>48</sup> Die Beschreibung von Clausen passt hier nicht zu dem Modell.

zur Grundfläche. Von ihren Asymptoten liegt jeweils eine in einer festen Ebene. In ihr liegt auch ein singulärer Strahl.

**Nr. XIX** Bei dieser Äquatorialfläche bildet die Achse eine Cuspidallinie der Fläche. Die Breitenkurven sind dementsprechend alle Parabeln, die in horizontalen Ebenen liegen. Ihre Achsen drehen sich um den Durchmesser, welcher senkrecht auf der Grundfläche steht. Alle singulären Strahlen und Punkte sind imaginär.

### **Meridianflächen XX–XXVII**

**Nr. XX** Es handelt sich um eine symmetrische Darstellung einer allgemeinen Meridianfläche mit acht reellen Doppelpunkten und -ebenen, die aus sechs Partien besteht. Ein Paar von singulären Strahlen verläuft parallel zur senkrechten Achse, auf der sich vier reelle Zwickpunkte erkennen lassen. Die anderen beiden Strahlen liegen in einer horizontalen Ebene. Sie kreuzen sich auf der Achse.

Die entsprechende Äquatorialfläche wird von Nr. I dargestellt. Beim Übergang zu dieser Fläche rückt die Achse ins unendliche Ferne. Die beiden Strahlen, welche sich bei dem Modell Nr. XX auf der Achse schneiden, werden hierbei parallel. Die anderen beiden Strahlen bleiben indes gleich gerichtet.<sup>49</sup>

**Nr. XXI** Alle vier Zwickpunkte der modellierten Flächen sind imaginär. Von den acht Doppelpunkten sind nur vier reell, die auf einem Paar reeller Strahlen liegen. Sie verlaufen waagrecht. Ein anderes Paar von Strahlen verläuft parallel zur senkrechten Achse. Es handelt sich um Strahlen der zweiten Art. Die gesamte Form ist symmetrisch. Äquatorialflächen desselben Typs zeigen die Modelle Nr. XVII und Nr. IV.

**Nr. XXII** Die dargestellte Meridianfläche ist projektiv äquivalent zur Nr. XXI, wobei die Achse bei diesem Modell waagrecht liegt.

**Nr. XXIII** Das Modell stellt eine Meridianfläche dar, bei der nur ein Paar von singulären Strahlen erster Art reell ist. Sie verlaufen parallel zur vertikalen Achse, auf der sich neben den vier Doppelpunkten noch zwei Zwickpunkte erkennen lassen.

**Nr. XXIV** Bei der modellierten Fläche liegt die Achse waagrecht.<sup>50</sup> Sie ist eine Selbstberührungsgerade. Auf ihr liegen vier Zwickpunkte, wobei zwei in einen Punkt zusammenfallen. In diesem Punkt wird die Achse von einer reellen Doppelgeraden

<sup>49</sup> Eine weitere Darstellung der allgemeinen Komplexfläche gibt das zweite Modell der Kleinschen Serie.

<sup>50</sup> Das Tübinger Modell ist beschädigt. Die obere und untere Hälfte sind getrennt, gehören jedoch zusammen. Das Göttinger Modell Nr. 108 zeigt die zusammengesetzte Form.

senkrecht geschnitten. Am anderen Ende der besagten Doppelgerade sind zwei Doppelpunkte zusammengefallen.<sup>51</sup>

**Nr. xxv** Das Modell zeigt eine Meridianfläche mit Ellipsen als Komplexkurven. Die Achse liegt waagrecht zur Grundfläche. Auf ihr lassen sich vier Zwickpunkte erkennen. In den äußeren Punkten sind die beiden Doppelebenen jeweils reell. Sie berühren die Fläche entlang von Kreisen. Alle acht Doppelpunkte sind indes imaginär. Die Nr. xv der Serie veranschaulicht eine Äquatorialfläche mit denselben Realitätsverhältnissen.

**Nr. xxvi** Die modellierte Fläche unterscheidet sich von jener, die von Nr. xxv dargestellt wird, nur durch eine reelle projektive Transformation. An den Realitätsverhältnissen hat sich dementsprechend nichts geändert.

**Nr. xxvii** Während bei den vorangegangenen Modellen sämtliche Komplexkurven Kreise sind, wird die Fläche dieses Modells durch Ellipsen erzeugt. Außerdem gibt es zwei reelle Doppelgeraden, die sich in einem Punkt schneiden. Von ihnen kommt jede als Achse der Fläche infrage.

## 4.5 Kleins Dissertation

Nach Plückers Tod arbeitete Felix Klein das Manuskript seines Lehrers für den Druck des zweiten Bandes aus und begann nach einem geeigneten Thema für seine Dissertation zu suchen.<sup>52</sup> Über die Arbeit an der *Neuen Geometrie* kam er in Kontakt mit Alfred Clebsch, der zu jener Zeit in Gießen Professor war. Clebsch machte Klein auf Arbeiten des italienischen Mathematikers Giuseppe Battaglini (1826–1894) aufmerksam, die in seinem *Giornale di Matematiche* erschienen sind.<sup>53</sup> In dem Artikel gab der Neapolitanische Professor für höhere Geometrie eine einfache Gleichung für den allgemeinen Komplex zweiten Grades an. Sie umfasste jedoch nicht alle Fälle, wie Klein beim Lesen von Battaglinis Arbeit erkannte. Er entschied sich, die Herleitung einer allgemeinen kanonischen Form zu dem Gegenstand seiner Dissertation zu machen. Klein verwendete dafür sechs (redundante) homogene Koordinaten  $p_1, \dots, p_6$

<sup>51</sup> Wie Clausen erläutert, entsteht die Fläche durch eine Deformation der Meridianfläche Nr. III, die von Felix Klein hergestellt worden ist. Wenn ihre beiden reellen Doppelpunkte zusammengehen, so entsteht neben der Selbstberühungsgeraden eine Doppelgerade.

<sup>52</sup> Felix Klein erinnert sich an diese Zeit im ersten Band seiner *Gesammelten Mathematischen Abhandlungen*: Klein, Felix. *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*. Hrsg. von Vermeil, Hermann und Fricke, R. Bd. 1. Berlin: Springer-Verlag Berlin, 1921, S. 2. Renate Tobies schildert diese Episode in ihrer Biographie: Tobies, *Felix Klein*, S. 33ff.

<sup>53</sup> Battaglini, Giuseppe. „Intorno ai Sistemi di Rette di Secondo Grado“. In: *Giornale di Matematiche* 6 (1868).

zur Beschreibung einer Linie, was sich an vielen Stellen als vorteilhaft erwies. Sie sind über eine quadratische Gleichung der Form  $P = p_1p_4 + p_2p_5 + p_3p_6 = 0$  verbunden. Anschließend betrachtete er quadratische Komplexe als verallgemeinerte Quadriken in diesen Koordinaten, nicht als Gebilde von Linien im dreidimensionalen Anschauungsraum. Von Rudolf Lipschitz (1832–1903), der Professor für Mathematik in Bonn war, erhielt Klein die Korrekturbögen zu einem Artikel von Karl Weierstraß (1815–1897) über quadratische und bilineare Formen.<sup>54</sup> Die dort entwickelte Theorie der Elementarteiler enthielt die Lösung für Kleins eigenes Problem.

Felix Kleins Dissertation wurde später erneut in den *Mathematischen Annalen* abgedruckt.<sup>55</sup> Unter der Voraussetzung, dass  $\Omega(p_1, \dots, p_6) = 0$  die homogene Gleichung eines quadratischen Komplexes ist, betrachtete Klein die Determinante der Form  $\Omega + \lambda P$ , wie es Karl Weierstraß in seinem Artikel für eine beliebige Anzahl von Variablen getan hatte. Er interessierte sich für die Wurzeln  $c$  der Determinante und ihrer Vielfachheiten  $l$ . Die Potenzen der Linearfaktoren  $(\lambda - c)^l$  lassen sich in das Produkt von Elementarteilern  $(\lambda - c)^{e_i}$  zerlegen. Wenn  $l_i$  die größtmögliche Potenz ist, für die  $\lambda - c$  alle Unterdeterminanten der Ordnung  $6 - i$  teilt, dann ist  $e_i = l_i - l_{i-1}$ . Felix Klein spricht von der Ordnung des Elementarteilers zur Wurzel  $c$  der Determinante.

Nun konnte er sich auf einen Satz Weierstraß' berufen, nach dem eine Transformation der Koordinaten  $p_1, \dots, p_6$  die sechs Elementarteiler der Determinante unverändert lässt. Besitzen umgekehrt zwei Paare  $\Omega, P$  und  $\Omega', P'$  wiederum dieselben Elementarteiler, so existiert eine reguläre Transformation, welche die Formen überführt.<sup>56</sup> Anhand dieser Elementarteiler unterschied Felix Klein elf Arten quadratischer Komplexe. Denn es gibt genau elf Möglichkeiten, die Zahl 6 in Summanden zu zerlegen. Felix Kleins Klassifikation ist von seinem Schüler Adolf Weiler (1851–1916) verfeinert worden.<sup>57</sup> Später wies der italienische Mathematiker Corrado Segre

<sup>54</sup> Die Abhandlung ist in den 1869 veröffentlichten Monatsberichten der *Preußischen Akademie der Wissenschaften* enthalten: Weierstrass, Karl. „Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen“. In: *Monatsberichte der Königlich Preussische Akademie des Wissenschaften zu Berlin* (1868). Weierstraß hatte im Mai 1868 darüber bei einer Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse vorgetragen. Lipschitz betreute Kleins Dissertation.

<sup>55</sup> Klein, Felix. „Ueber die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Linien-Coordinaten auf eine canonische Form“. In: *Mathematische Annalen* 23.4 (1884).

<sup>56</sup> Klein, Felix. „Ueber die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Linien-Coordinaten auf eine canonische Form“. In: *Mathematische Annalen* 23.4 (1884), S. 557.

<sup>57</sup> Weiler hat unter Klein seine Dissertation zu dem Thema verfasst. Ihre Ergebnisse sind

(1863–1924) auf Fehler hin, die Weiler bei seiner Einteilung unterlaufen waren.<sup>58</sup> Weiler unterteilte Kleins Arten weiter, indem er den Elementarteilern ihre Wurzeln zuordnete, wodurch er insgesamt 58 Fälle erhielt.

Die systematische Einteilung quadratischer Komplexe lieferte auch Kriterien für die Klassifikation Kummerscher Flächen. Die Singularitätenfläche eines allgemeinen Komplexes des zweiten Grades gehört zu jener Klasse quartischer Flächen, die Ernst Kummer erstmals beschrieben hat. Felix Klein bewies diesen Zusammenhang in einem Artikel, der 1869 in den *Mathematischen Annalen* erschienen ist.<sup>59</sup> Die Plücker'schen Komplexflächen sind wiederum spezielle Arten Kummerscher Flächen. Bei ihnen sind von den 16 Doppelpunkten acht paarweise zusammenfallen, so dass vier Zwickpunkte entstehen, welche auf einer Doppelgeraden (der ausgezeichneten Achse der Komplexfläche) liegen. Auf diesem Wege lässt sich die Klassifikation der quadratischen Komplexe auch für die Einteilung der Komplexflächen verwenden.

## 4.6 Kleins Modellserie

Im März 1870 präsentierte Felix Klein bei der *Berliner Physikalischen Gesellschaft* ein Modell der Plücker'schen Komplexfläche, bei dessen Herstellung ihm sein Schulfreund Alfred Wenker geholfen hat.<sup>60</sup> Insgesamt entwarfen die beiden Düsseldorf'er vier verschiedene Metallmodelle, die nach Wenkers frühem Tod 1871 in den Kölner Werkstätten von Johann Eigel Sohn hergestellt worden sind (Abb. 8.9).<sup>61</sup> Ein Entwurf zeigt die allgemeine Kummersche Fläche. Die anderen drei Modelle zeigen

im siebten Band der *Mathematischen Annalen* erschienen: Weiler, Adolf. „Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades“. In: *Mathematische Annalen* 7.2 (1874).

<sup>58</sup> David E. Rowe hat die Entstehung der Theorie quadratischer Linienkomplexe in einem Beitrag nachgezeichnet: Rowe, David E. „Segre, Klein, and the Theory of Quadratic Line Complexes“. In: *From Classical to Modern Algebraic Geometry*. Hrsg. von Casnati, Gianfranco u. a. Trends in the History of Science. Springer International Publishing, 2016. Eine Erläuterung der Klassifikation mitsamt einer Tabelle, in der alle Arten aufgeführt sind, die Segre unterschied, findet sich in: Pascal, Ernesto. *Repertorium der höheren Mathematik: Geometrie*. Hrsg. von Timerding, H. E. Übers. von Schepp, Adolf. 1. Aufl. Bd. 2. Leipzig: Teubner, 1902, S. 393 ff.

<sup>59</sup> Klein, Felix. „Zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades“. In: *Mathematische Annalen* 2.2 (1870).

<sup>60</sup> Ein entsprechender Verweis findet sich im 24. Band der Zeitschrift *Die Fortschritte der Physik*, die von der Gesellschaft herausgegeben wird: „Inhaltsverzeichnis“. In: *Die Fortschritte der Physik* 24 (1872). Hrsg. von Physikalische Gesellschaft zu Berlin, XII.

<sup>61</sup> Tobies, Renate. *Felix Klein: Visionen für Mathematik, Anwendungen und Unterricht*. Berlin Heidelberg: Springer Spektrum, 2019, S. 50.

verschiedene Typen von Komplexflächen, die Plücker in seiner generellen Einteilung unterschieden hat. Sie sind als eine Serie zusammen mit einer Beschreibung vertrieben worden. In den *Mathematischen Annalen* erschienen zudem Anzeigen.<sup>62</sup>

Später erläuterte Felix Klein, was ihn dazu veranlasst hat, weitere Modelle von Komplexflächen herzustellen. Er kommt auch auf die Entwürfe seines Lehrers zu sprechen: „Bekanntlich hat Plücker in den letzten Jahren seines Lebens bei seinem Studium der Liniencomplexe zweiten Grades zahlreiche auf deren Theorie bezügliche Modelle anfertigen lassen. Das allgemeine Interesse an den wirklichen Gestalten auch complicirterer Flächen war ihm aus seiner physikalischen Beschäftigung erwachsen [Fußnote im Zitat]; die nähere Gliederung seiner Ansätze habe ich hernach, so gut das unter Benutzung des Nachlasses gelingen wollte, in der 1869 erschienenen zweiten Abteilung der *Neuen Geometrie des Raumes* zur Darstellung gebracht. Die so auf Plücker selbst zurückgehenden Modelle bildeten indess keine vollständige Serie, waren auch im einzelnen ungleichwertig, und es lag gewiss nicht im Sinne ihres Urhebers, wenn dieselben später trotzdem verschiedentlich als zusammengehörige Collection verbreitet worden sind. Ich habe deshalb im Herbst 1891, um das Wesentliche der Sache herauszuheben, von mir aus vier neue Modelle der hauptsächlich in Betracht kommenden Flächentypen veröffentlicht, wobei ich die Verhältnisse so wählte, dass die jedesmal in Betracht kommenden singulären Punkte und Ebenen sämtlich reell ausfielen.“<sup>63</sup>

Felix Klein weist nicht nur darauf hin, dass in der Kollektion von Metallmodellen der rote Faden fehlt. Die Plückerschen Modelle bringen zwar einige Fälle zur Anschauung. Unklar ist jedoch, warum *diese* Typen von Äquatorialflächen nachgebildet worden sind, während andere in der Serie fehlen. Kleins Äußerungen werfen allerdings die Frage auf, weshalb die Modelle trotzdem in dieser Form veröffentlicht worden sind, wenn es nicht im Sinne ihres Urheber war. Immerhin hat Felix Klein später seine Entwürfe bei derselben Kölner Werkstatt veröffentlicht, bei der auch die Modelle Plückers erschienen sind. Mit seinen eigenen Entwürfen versuchte Klein nicht nur Lücken zu füllen. Stattdessen ging er bei der Auswahl völlig anderes als sein Lehrer vor. Während Plücker die Motive anscheinend so wählte, dass er am Ende einen repräsentativen Eindruck von den verschiedenen Gestalten der Äquatorial-

<sup>62</sup> Seidl, Ernst, Loose, Frank und Bierende, Edgar, Hrsg. *Mathematik mit Modellen: Alexander von Brill und die Tübinger Modellsammlung*. Schriften des Museums der Universität Tübingen. Tübingen: Verlag Museum der Universität Tübingen, 2018, S. 198.

<sup>63</sup> Klein, Felix. „Vier Modelle zur Theorie der Liniencomplexe zweiten Grades“. In: *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente*. Hrsg. von Dyck, Walther. München: K. Hof- und Universitätsdruckerei, 1892, S. 283 f.

und Meridianflächen bekam, orientierte sich Felix Klein an einer übergreifenderen Einteilung der Flächen. Er interessierte sich nicht für den besonderen, sondern für den allgemeinen Fall. Dementsprechend wählte er als Achse eine beliebige Gerade im Raum, weshalb seine Modelle alle Meridianflächen darstellen. In dem weiteren Text verweist er auf einen Vortrag, den er 1877 auf der Versammlung der Naturforscher in München gehalten hat.

## Metallmodelle

Die Nummerierung der Modelle bezieht sich im folgenden auf die ursprüngliche Beschreibung, welche mit der Serie vertrieben worden ist.<sup>64</sup> Sie wurde später von Felix Klein so abgeändert, dass die Nachbildung einer allgemeinen Singularitätenfläche zur Nr. 1 wurde.

**Nr. 1** Das erste Modelle der Serie zeigt eine allgemeine Komplexfläche (Abb. 8.9). Die vertikale Achse ist eine Doppellinie der Fläche, die nicht zum zugehörigen Komplex gehört. An dem Modell lassen sich sechs verschiedene Partien erkennen, von denen allerdings einige durch die unendlich ferne Ebene hindurchgehen. Zwei besitzen die Form eines Tetraeders. Sie liegen vollständig im Endlichen. Ihre Ecken bilden jeweils vier Doppelpunkte der Fläche. Die anderen vier Teile grenzen an die Achse. Sie werden jeweils von zwei Doppelpunkten und zwei Zwickpunkten begrenzt, die auf der Achse den Übergang von reellen zu imaginären Teilstücken markieren. Drei dieser Teile ziehen sich durch das unendlich Ferne, während eines vollständig sichtbar ist.

Bei den Komplexkurven handelt es sich um Ellipsen und Hyperbeln. In vier ausgezeichneten Lagen der zugehörigen Ebenen degenerieren sie zu vier reelle singulären Strahlen erster Art, welche die Achse in den Zwickpunkten treffen. Auf jeder dieser vier Geraden liegt ein Paar von Doppelpunkten der Fläche. Unter diesen acht Punkten gibt es acht Quadrupel, die jeweils auf einer Ebene liegen. Diese acht Ebenen heißen Doppelebenen. Sie berühren die Fläche jeweils in einem Kegelschnitt, die auf dem Modell eingezeichnet sind.<sup>65</sup> Die zugehörige Äquatorialfläche wird von dem Modell Nr. 1 der Plückerschen Serie dargestellt. Das Modell Nr. xx zeigt wiederum dieselbe (allgemeine) Meridianfläche wie Kleins Nr. 1, allerdings in symmetrischer Gestalt. Zwei der singulären Strahlen sind dort parallel.

<sup>64</sup> Klein, Felix. *Vier Modelle zur Theorie der Linien-Complexe zweiten Grades*. 1871.

<sup>65</sup> Die Fläche ähnelt dem zweiten Entwurf der dreiteiligen Reihe von Modellen zur Kummerschen Flächen, die Karl Rohn (1855–1920) an der Münchener Hochschule hergestellt hat, und die 1877 im Brill-Verlag als Teil der zweiten Serie erschienen ist. Schilling, Martin. *Catalog mathematischer Modelle*. 7. Aufl. Leipzig: Schilling, 1911, S. 5.

**Nr. II** Die zweite Form der Serie zeigt die Gestalt einer Meridianfläche, deren Achse dem quadratischen Komplex selbst angehört (Abb. 8.9).<sup>66</sup> Eine beliebige Ebene schneidet die Quartik in einer Kurve, die auf der Geraden eine Spitze hat. Eine Meridianebene schneidet die Fläche wiederum in einem Kegelschnitt, der die Achse in einem Punkt berührt. Von den acht Doppelpunkten der allgemeinen Komplexfläche, die paarweise auf den vier singulären Strahlen lagen, ist nun ein Punkt von jedem Paar in den zugehörigen Zwickpunkt auf die Achse gefallen, der dadurch zu einem uniplanaren Punkt degeneriert ist. Demnach gibt es nur noch vier Doppelpunkte und Doppelenen. Die Ebenen begrenzen gerade das Tetraeder, welches von den Punkten gebildet wird.

**Nr. III** Das dritte Modell stellt eine spezielle Komplexfläche dar, deren Achse eine singuläre Linie des zugehörigen Komplexes ist (Abb. 8.9).<sup>67</sup> Es existiert folglich ein fester Punkt auf der Achse, in dem alle Komplexkurven die Gerade berühren.<sup>68</sup> Es handelt sich um einen Selbstberührungspunkt der Fläche.

**Nr. IV** Der Entwurf zeigt die Singularitätenfläche eines allgemeinen quadratischen Komplexes (Abb. 8.10).<sup>69</sup> Es handelt sich um eine allgemeine Kummersche Fläche mit 16 Doppelpunkten, die auf 16 Doppelenen von 16 Kegelschnitten verbunden werden. Die Fläche besteht aus acht tetraederförmigen Teilen, wobei drei Partien durch das unendlich Ferne getrennt sind.

<sup>66</sup> Plücker, Julius. *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement*. Hrsg. von Klein, Felix. Bd. 2. Leipzig: Teubner, 1869, S. 216 ff.

<sup>67</sup> Plücker bezeichnet damit solche Geraden des Komplexes, welche die zugehörige Singularitätenfläche  $\Phi$  in einem Punkt berühren und in zwei anderen schneiden. Solche Komplexflächen vertreten demnach der zweiten Art in Plückers allgemeinen Einteilung. ebd., S. 339.

<sup>68</sup> Ebd., S. 300ff.

<sup>69</sup> Das hier angesprochene Modell ist in einer vierteiligen Serie im Herbst 1871 als Nr. I veröffentlicht worden: Klein, *Vier Modelle zur Theorie der Linien-Complexe zweiten Grades*. In einem späteren Beitrag bezeichnet es Felix Klein jedoch als Nr. II. Diese Bezeichnung stimmt mit der Nummerierung der Modelle in der Göttinger Sammlung überein. Klein, „Vier Modelle zur Theorie der Liniencomplexe zweiten Grades“. Außerdem ist das Modell später von Karl Rohn in seine Serie von Gipsmodellen Kummerscher Flächen übernommen worden.



## 5. Flächen dritter Ordnung

Im Jahr 1849 machten die beiden Mathematiker Arthur Cayley (1821–1895) und George Salmon (1819–1904) eine bahnbrechende Entdeckung. Sie hatten sich ein Jahr zuvor in Dublin kennengelernt, wo Salmon Vorträge am Trinity College hielt. Cayley war als Fellow von Cambridge im Juni 1848 für eine Reise in die irische Hauptstadt aufgebrochen. Während seines Aufenthalts hörte er Salmon über dessen Theorie der Reziprokalflächen sprechen.<sup>1</sup> Zwischen den beiden Mathematikern begann ein äußerst fruchtbarer Briefwechsel. Nicht lange nach seinem Besuch äußerte Cayley gegenüber Salmon die Vermutung, dass auf jeder Fläche dritten Grades eine endliche Anzahl an Geraden liege. Der Ire erwiderte ihm, dass es genau 27 verschiedene Linien seien müssten. Gemeinsam gelang ihnen ein Beweis der verblüffenden Aussage, den Cayley ein Jahr später im *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* veröffentlichte.<sup>2</sup>

Ihr merkwürdiges Resultat rief bald das Interesse anderer Mathematiker an Flächen des dritten Grades, aber auch an Singularitäten von Flächen hervor. Immer mehr interessante Zusammenhänge kamen ans Tageslicht. Trotzdem sollte es noch längere Zeit dauern, bis es den Gelehrten gelang, sich ein vollständiges Bild von dem System der 27 Linien zu machen. Nun entstanden auch die ersten Modelle, die einen Eindruck von der Gestalt einer allgemeinen kubischen Fläche gaben. In diesem Kapitel wird gezeigt, wie die Objekte wissenschaftliche Arbeiten anregten. Am Anfang wird ein grober Abriss der wichtigsten Forschungsarbeiten gegeben, die der Herstellung von Modellen vorausging. Das Kapitel schließt mit der Diskussion von Modellen, die Karl Friedrich Rodenberg (1851–1933) zur Veranschaulichung kubischer Flächen entworfen hat.

<sup>1</sup> Crilly, Tony. „The Young Arthur Cayley“. In: *Notes and Records of the Royal Society of London* 52.2 (1998).

<sup>2</sup> Cayley, Arthur. „On the Triple Tangent Planes of Surfaces of the Third Order“. In: *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal* 4 (1849).

## 5.1 Die 27 Linien

„A surface of the third order contains in general a certain number of straight lines.“<sup>3</sup> Mit diesem Satz beginnt ein Artikel, der 1849 im *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* erschienen ist. Er war das Ergebnis einer gemeinsamen Diskussion von Arthur Cayley und George Salmon. Der Satz blieb zunächst unbewiesen. Cayley konnte jedoch zeigen, dass es genau 27 Linien sein müssen, wenn die Aussage wahr ist. Er betrachtete dafür alle Ebenen durch eine Linie, die auf der Fläche liegt. Jede von ihnen schneidet aus der Fläche neben der Linie noch einen Kegelschnitt aus. Unter all den Ebenen befänden sich nach Cayley genau fünf, für die dieser in ein Paar von Geraden zerfällt. Er bewies diese Aussage an der Stelle nicht, sondern erwähnte nur, sie ließe sich einfach nachweisen.<sup>4</sup> Jede dieser Ebenen trifft die Fläche in drei Linien.<sup>5</sup> Cayley nannte sie deshalb Tritangentialebenen (engl. *triple tangent planes*), da sie die Fläche in den Schnittpunkten dieser Linien berühren.

Er betrachtete eine feste Ebene, welche die Fläche in drei Linien schneidet. Jede Linie wird von acht weiteren Geraden geschnitten, die paarweise auf den vier Tritangentialebenen liegen, die neben der ausgezeichneten Ebene durch jene Linie gehen. Demzufolge wird die Ebene von  $3 \cdot 8 = 24$  Linien geschnitten. Zusammen mit den drei Geraden, die auf ihr verlaufen, ergeben sich 27 Linien, welche auf der Fläche liegen müssen. Cayley zeigte anschließend durch einen Widerspruchsbeweis, dass es auch nicht mehr Linien sein können. Denn jede zusätzliche Linie muss auch die betrachtete Ebene treffen. Der Schnittpunkt fiel dann in eine der drei Linien. Zusammen mit dieser Linie würde die Gerade jedoch eine weitere Ebene definieren, die ebenfalls eine

<sup>3</sup> Cayley, „On the Triple Tangent Planes of Surfaces of the Third Order“, S. 118.

<sup>4</sup> „The number of lines and triple tangent planes is determined by means of a theorem very easily demonstrated, viz. that through each line there may be drawn five (and only five) triple tangent planes.“ ebd., S. 118. Die Aussage lässt sich zeigen, indem die quadratische Gleichung  $\alpha = 0$  des Kegelschnittes bestimmt wird, in welchem die Ebene die Fläche schneidet. Sie hängt von einem Winkel  $\theta$  ab, der die Ebene durch die Linie parametrisiert. Die Bedingungsgleichung für das Zerfallen des Kegelschnitts ist vom fünften Grad in  $\theta$ . Es muss jedoch noch gezeigt werden, dass die fünf Nullstellen nicht zusammenfallen, wenn die Fläche regulär ist. Der britische Mathematiker Miles Reid gibt in seinem Lehrbuch zur Algebraischen Geometrie einen mehrseitigen Beweis zur Existenz der 27 Linien an, der auf analytischen Methoden basiert. Ein Vergleich verdeutlicht, welche problematischen Schlussfolgerungen Cayleys Argumentation impliziert: Reid, Miles. *Undergraduate Algebraic Geometry*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge: Cambridge University Press, 1988, S. 110.

<sup>5</sup> Von diesen Linien können nie zwei zusammenfallen, solange die Fläche nicht singuläre Punkte einschließt. Arthur Cayley erwähnt dies jedoch nicht explizit.

Tritangentialebene sein müsste. Mehr als fünf jener Ebenen können aber nicht durch eine Linie gehen.

### Salmons Herleitung

Arthur Cayley präsentierte im Anschluss daran eine Herleitung, welche die Existenz einer Linie auf der Fläche nicht voraussetzt. Die Idee für den Beweis kam von George Salmon. Der Dubliner hatte sich seit etwa 1846 intensiv mit der Theorie der Reziprokalflächen befasst und in diesem Zuge auch die Tangentenkegel an Flächen studiert. Unter der Reziprokalfläche einer algebraischen Fläche  $f = 0$  verstanden Salmon und seine Zeitgenossen, was heute unter dem Namen Dualfläche behandelt wird. Ihre Gleichung  $\phi = \phi(u_0, u_1, u_2, u_3) = 0$  ergibt durch Elimination von  $x_0, x_1, x_2, x_3$  aus dem System homogener Gleichungen

$$\rho u_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Der Tangentenkegel wiederum besteht aus allen Tangenten an die Fläche, die durch einen festen Punkt des Raumes gehen.<sup>6</sup> Der Kegel war unter anderem deswegen für Salmon von Interesse, weil sich mit ihm gewisse Aussagen über die Fläche auf solche über ebene Kurven zurückführen lassen. Jede Bitangentialebene an den Kegel ist auch eine an die Fläche. Sie berührt die Fläche in zwei Punkten und den Tangentenkegel in den beiden Linien, die diese Punkte mit seinem Scheitel verbinden. Cayley schrieb nun, dass jede dieser Bitangentialebenen durch eine Linie auf der Fläche geht und das *visa versa* jede Ebene durch solch eine Linie, die außerdem den Scheitel des Kegels enthält, diesen entlang zweier Linien berührt.<sup>7</sup> Deshalb ist die Anzahl der doppelten Tangentialebenen eines Tangentenkegels dieselbe wie die der Linien auf der Fläche. Dieser Zusammenhang ermöglichte es Salmon, von seinen früher gefundenen Resultaten über die Geometrie eines Tangentenkegels an eine Fläche der  $n$ -ten

<sup>6</sup> Der Tangentenkegel ist auch unter den allerdings seltener gebrauchten Namen Berührkegel bekannt. Kuno Fladt und Arnold Baur zeigen in ihrem Lehrbuch, wie sich seine Gleichung berechnen lässt: Fladt, Kuno und Baur, Arnold. *Analytische Geometrie spezieller Flächen und Raumkurven*. Sammlung Vieweg. Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, 1975, S. 238.

<sup>7</sup> Cayley ließ unerwähnt, dass die beiden Berührungspunkte einer Bitangentialebene an die Fläche zugleich Doppelpunkte der Kurve sein müssen, welche die Ebene aus der Fläche ausschneidet. Die Ordnung der Schnittkurve wiederum ist dieselbe wie die der Fläche. Jede Kurve dritter Ordnung jedoch, welche zwei Doppelpunkte enthält, muss in eine Linie und einen weiteren (möglicherweise entarteten) Kegelschnitt zerfallen. Die Linie verbindet die beiden Punkte. Deswegen schneidet jede Bitangentialebene des Kegels die Fläche in einer Geraden.

Ordnung Gebrauch zu machen. Er hatte Formeln für die Ordnung und die Anzahl der Rückkehr- und Doppelpanten im allgemeinen Fall gefunden.<sup>8</sup> Mit diesen Größen ließ sich auch die Anzahl der Bitangentialebenen mithilfe einer weiteren Formel bestimmen, welche Julius Plücker für algebraische Kurven hergeleitet hatte, die sich jedoch auch auf Kegel anwenden lässt.

Salmons Beweis ist elegant, verrät allerdings nur wenig über die Konfiguration der 27 Linien. Möglicherweise zog sein Freund aus Cambridge deshalb die erste Herleitung vor, bei der die Existenz einer Linie vorausgesetzt wird. Sie verdeutlicht, dass es neben den Linien auch eine endliche Anzahl von Ebenen gibt, welche die Fläche in drei Geraden schneiden. Von diesen Ebenen gehen fünf durch jede Linie. Demnach gehören  $45 = 27 \cdot 5/3$  Tritangentialebenen zu einer (regulären) Fläche dritten Grades, wie Cayley in seiner Abhandlung nachwies. Obwohl er Gleichungen für sämtliche Ebenen angeben konnte, ließ sich die Anordnung der Linien nur schwer erfassen. Cayley ahnte, dass die Schwierigkeiten, welche die 27 Linien und 45 Ebenen der Anschauung bereiten, eng mit der mathematischen Beschreibung des gesamten Systems zusammenhingen: „There is a great difficulty in conceiving the complete figure formed by the twenty-seven lines, indeed this can hardly I think be accomplished until a more perfect notation is discovered.“<sup>9</sup> Zwar fiel es leicht, verschiedene Sätze über die Beziehungen eines Teils der Linien zu beweisen, was der Engländer auch im Anschluss an seiner Bemerkung demonstrierte. Sie halfen jedoch beim Verständnis des gesamten Systems nur wenig.

## Schläflis Doppelsechs

Die Situation verbesserte sich erst neun Jahre nach Cayleys und Salmons Veröffentlichung entscheidend. Der Schweizer Mathematiker Ludwig Schläfli (1814–1895) konnte mit einem Artikel im *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* 1858 zeigen, dass sich unter den Linien einer kubischen Fläche immer zwölf finden lassen, die das gesamte System beschreiben.<sup>10</sup> Sie bestehen aus zwei Mengen von

<sup>8</sup> Im Allgemeinen ist die Ordnung eines Kegels, der eine (reguläre) Fläche  $n$ -ter Ordnung umhüllt, wenn dessen Spitze nicht auf der Fläche selbst liegt,  $n(n-1)$ . Für kubische Flächen ( $n=3$ ) besitzt er keine Doppellinien, dafür jedoch sechs Rückkehrkanten.

<sup>9</sup> Cayley, „On the Triple Tangent Planes of Surfaces of the Third Order“, S. 127.

<sup>10</sup> Schläfli, Ludwig. „An Attempt to Determine the Twenty-Seven Lines upon a Surface of the Third Order, and to divide such Surfaces into Species in reference to the Reality of the Lines upon the Surface. (1. Teil)“. Übers. von Cayley, Arthur. In: *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* 2 (1858). Schläfli hatte die Theorie der „Doppelsechser“ bereits 1854 entworfen, wie aus Briefen Schläflis an seinen Freund Jakob Steiner (1796–1863)

jeweils sechs paarweise windschiefen Linien. Jeder Linie der einen Menge ist zudem eindeutig eine der anderen Menge zugeordnet, die von ihr nicht geschnitten wird. Abgesehen von dieser trifft sie jedoch jede der verbleibenden fünf Linien. Schläfli nannte dieses symmetrische System eine *Doppelsechs*. Er notiert es in einem  $2 \times 6$ -Schema:

$$\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6. \end{array}$$

In die erste Zeile schrieb der Berner Professor die Linien der ersten Sechs, darunter die der zweiten, wobei er die Paare einander windschiefer Linien in dieselbe Spalte eintrug.

Eine Doppelsechs bestimmt die Lage der übrigen Linien auf einer kubischen Fläche vollständig. Ein Paar  $a_i$  und  $b_j$  sich schneidender Linien definiert eine Ebene, in der notwendigerweise noch eine weitere Linie  $c_{ij}$  liegen muss. Sie schneidet beide, kann daher selber nicht zur Doppelsechs gehören. Zusammen mit  $a_i$  und  $b_j$  bildet diese dritte Linie den vollständigen Schnitt der Ebene mit der Fläche. Da die Linie  $b_i$  weder  $a_i$  noch  $b_j$  schneidet, jedoch die Ebene treffen muss, passiert sie  $c_{ij}$ . Dasselbe gilt für  $a_j$ . Demnach liegt  $c_{ij}$  im Schnitt der beiden Ebenen, die von dem Paar  $a_i$  und  $b_j$  und dem Paar der ihnen korrespondierenden Linien  $a_j$  und  $b_i$  definiert werden. Da es insgesamt 15 dieser Doppelpaare gibt, bestimmt eine Doppelsechs alle übrigen Linien auf einer Fläche der dritten Ordnung eindeutig. Schläfli zeigte auch, dass sich unter den 27 Geraden genau 36 verschiedene Doppelsechsen finden lassen.<sup>11</sup>

### Schläflis Konstruktion

In seinem Aufsatz beschrieb der Schweizer auch die Konstruktion einer Doppelsechs, die er in Form eines Satzes formulierte.<sup>12</sup> Nach ihr genügt es, durch eine gegebenen Linie  $a_1$  fünf weitere  $b_2, \dots, b_6$  zu legen, die sie in einem Punkt treffen, um das hervorgeht: Steiner, Jakob und Schläfli, Ludwig. *Der Briefwechsel zwischen Jakob Steiner und Ludwig Schläfli*. Hrsg. von Graf, Johann Heinrich. Bern: Wyss, 1896, S. 68 ff.

<sup>11</sup> George Salmon wusste Schläflis Entdeckung zu schätzen: „Prof. Schläfli has made a new arrangement of the lines (Quarterly Journal of Mathematics, Vol. II, p. 116) which leads to a simpler notation, and gives a clearer conception how they lie.“ Salmon, George. *A Treatise on the Analytic Geometry of Three Dimensions*. Cambridge: Hodges, Smith & Co., 1862, S. 389.

<sup>12</sup> „The double-sixes give rise to the remark that there is here to exposed the view an apparently very elementary theorem which may be thus enuntiated: ‚Drawing at pleasure five lines  $a, b, c, d, e$  which meet a line  $F$ , then may any four of the five lines be intersected by another line besides  $F$ . Suppose that  $A, B, C, D, E$  are the other lines intersecting  $(b, c, d, e), (c, d, e, a), (d, e, a, b), (e, a, b, c)$ , and  $(a, b, c, d)$  respectively. Then  $A, B, C, D$  are in-

System der beiden Sechsen eindeutig festzulegen. Nach einem bekannten Satz, werden vier paarweise windschiefe Linien in allgemeiner Lage von genau zwei Geraden geschnitten.<sup>13</sup> Deswegen sind die Linien  $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  durch die Konstruktion bereits bestimmt. Es handelt sich jeweils um die zweite Linie, welche neben  $a_1$  vier der fünf  $b$ -Linien  $b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$  trifft. Die vier Linien  $a_2, a_3, a_4, a_5$  werden neben  $b_6$  von einer zweiten Linie  $b_1$  geschnitten. Schläflis Theorem besagt nun, dass diese Linie auch  $a_6$  trifft und somit das gesamte System eine Doppelsechs bildet. Er gibt jedoch keine nähere Begründung an.<sup>14</sup>

Schläflis Anleitung verdeutlicht, dass das gesamte System der 27 Linien bereits eindeutig festgelegt ist, wenn fünf Linien bestimmt werden, die eine gemeinsame Transversale haben und von denen keine vier auf einem Hyperboloid liegen. Seine Doppelsechs vermittelte nicht nur ein besseres Bild über die Inzidenzstruktur der Linien, wie George Salmon später hervorhob. Sie zeigte auch den Weg auf, wie sich ein plastisches Modell herstellen lässt. Es vergingen allerdings noch einige Jahre, bis es Christian Wiener (1826–1896) gelang, die schwierige Konstruktion umzusetzen. Zuvor war es abermals Schläfli, der mit seiner Arbeit zur Beantwortung einer anderen Frage beitrug, die mit der Entdeckung der 27 Linien verbunden war.

## 5.2 Ludwig Schläfli „On the Distribution of Surfaces“

Arthur Cayley wusste bei seiner Publikation, dass der Satz über die 27 Linien nicht für jede Fläche dritten Grades uneingeschränkt gültig war, wie er mit den Worten „contains in general“ angezeigt hat. Es schloss das Vorhandensein von singulären

tersected by the line  $e$ ; there must be another line  $f$  intersecting these four lines, and this line will of itself intersect the remaining line  $E$ ; i.e. there will be a line  $f$  intersecting the five lines  $A, B, C, D, E$ .“ Schläfli, „An Attempt to Determine the Twenty-Seven Lines upon a Surface of the Third Order“, S. 117.

<sup>13</sup> Drei windschiefe Geraden  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  definieren ein einschaliges Hyperboloid. Jede Linien, welche diese drei Geraden schneidet, liegt ebenfalls auf der Fläche. Sie gehört jedoch der zweiten Schar von Erzeugenden an. Wenn nun eine vierte Gerade  $\alpha_4$  gegeben ist, dann kann sie entweder (a) das Hyperboloid in zwei Punkten schneiden, (b) es in einem Punkt doppelt berühren, (c) ihm ganz angehören oder (c) es überhaupt nicht treffen. Nur in dem ersten Fall gibt es zwei verschiedene Linien  $\beta_1$  und  $\beta_2$ , die alle vier Geraden passieren. Es handelt sich um die beiden Erzeugenden der zweiten Schar, welche durch die Schnittpunkt von  $\alpha_4$  mit dem Hyperboloid gehen. Demnach muss es nicht immer zwei *reelle* und *verschiedene* Linien geben, die alle vier schneiden. Hilbert, David und Cohn-Vossen, Stephan. *Anschauliche Geometrie*. Bd. 37. Reihe Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1996, S. 146.

<sup>14</sup> Ein anschaulichen Beweis dieses Satzes findet sich in: ebd., S. 146 ff.

Doppelpunkten aus. In seiner Abhandlung erwähnte er außerdem, dass die gesamte Theorie grundlegend abgeändert werden müsse, wenn die Fläche einen oder mehrere konische Punkte besäße.<sup>15</sup> Unter einem konischen Punkt verstanden er und George Salmon gewissermaßen die allgemeine Form eines Doppelpunktes. Die Bezeichnung rührt daher, dass die Fläche in der Nähe eines solchen Punkte einem Doppelkegel ähnelt.

### Salmons Zählweise

In einem ergänzenden Beitrag, der zusammen mit Cayleys Ausführungen in derselben Ausgabe des *Cambridge and Dublin Mathematical Journals* erschienen ist, ging George Salmon näher auf die Frage nach dem singulären Fall ein.<sup>16</sup> Er zeigte, wie sich die Theorie der 27 Linien für Flächen mit Doppelpunkten und höheren Singularitäten erweitern lässt, wenn die Zählweise angepasst wird. Ihm war bekannt, dass durch jeden konischen Punkt auf einer Fläche dritten Grades sechs Linien gingen. Wenn nun diese Geraden auf eine bestimmte Art und Weise mehrfach gezählt werden, bleiben es in der Summe 27. Um dies zu zeigen, betrachtete Salmon verschiedene Konfigurationen von singulären Punkten, die auf Flächen dritten Grades auftreten können.

Er unterschied dafür zuerst verschiedene Typen von Doppelpunkten. Salmon betrachtete dafür den Tangentenkegel in einem dieser Punkte  $p$ , dessen Gleichung

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) x_i x_j = 0$$

für algebraische Flächen  $f = 0$  lautet. Solange dieser quadratische Kegel nicht zu einem Paar von Ebenen ausartet, sprach der Ire von einem konischen Punkt (engl. *conical point*). Zerfällt er jedoch, so nannte er  $p$  wiederum einen bi- oder uniplanaren Punkt (engl. *bi- and uniplanar point*), je nachdem ob die beiden Ebenen zusammenfallen.<sup>17</sup>

<sup>15</sup> „It should be remarked that the preceding theory is very materially modified when the surface of the third order has one or more conical points; and in the case of a double line (for which the surface becomes a rules surface) the theory entirely ceases to be applicable.“ Cayley, „On the Triple Tangent Planes of Surfaces of the Third Order“, S. 132.

<sup>16</sup> Salmon, George. „Notes: On the Triple Tangent Planes of Surfaces of the Third Order“. In: *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal* 4 (1849).

<sup>17</sup> Diese Unterscheidung lässt sich mit der Hesse-Matrix  $H(p) = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p))$  in dem Punkt  $p$  formulieren. Für einen konischen Punkt hat  $H(p)$  den Rang drei, für einen biplanaren zwei und für einen uniplanaren Punkt eins: Fladt und Baur, *Analytische Geometrie spezieller Flächen und Raumkurven*, S. 147.

Salmon passt nun seine Zählweise der Geraden an. Jede Linie durch einen konischen Punkt zählt er doppelt, jede durch zwei konische Punkte indes vierfach. Eine Linie durch einen biplanaren Punkt wertet er dreifach, jede durch zwei biplanare Punkte neunfach. Verbindet eine Linie einen konischen mit einem biplanaren Punkt, so zählt Salmon sie sechsfach. Alle Linien durch einen uniplanaren Punkt, berücksichtigt er wiederum achtfach. Für seine Zählweise gibt Salmon keine nähere Begründung an. Offenbar gewichtete er die Passage durch einen bestimmten Doppelpunkt mit einem Faktor. Verband die Linie zwei Doppelpunkte miteinander, so zählte er sie gemäß des Produktes der entsprechenden Faktoren. Nach der Erläuterung seiner Zählweise gab Salmon die Anordnung der Linien für verschiedene Kombinationen von Doppelpunkten an, die auf einer Flächen der dritten Ordnung auftreten können. Insgesamt betrachtete er elf Fälle (s. Tab. 5.2). Salmon teilte die zugehörigen Rechnungen allerdings nicht mit, sondern präsentierte lediglich die Ergebnisse seiner Überlegungen.

Er stellt nur am Rande seiner Fallbetrachtungen fest, dass durch jeden Doppelpunkt sechs Linien der kubischen Fläche gehen müssen. In diesen schneidet der quadratische Tangentenkegel die Fläche. Bei einem biplanaren Punkt liegen jeweils drei Linien auf den beiden Hauptebenen. Wenn die Ebenen zusammenfallen (uniplanarer Punkt), so koinzidieren auch die Linien paarweise. Unerwähnt lässt er, dass die Linie zwischen zwei Doppelpunkten immer der Fläche angehören muss, auch wenn er von der Aussage Gebrauch macht. Zudem bewies er nicht die Vollständigkeit der Fälle, an denen er seine Überlegungen aufzeigte. Dennoch enthielt Salmons Beitrag die erste grobe Einteilung von Flächen dritten Grades nach den Doppelpunkten, die bei ihnen auftreten können. Er bildete auch einen wichtigen Ausgangspunkt für das Studium von singulären Punkten.

## Schläflis Klassifikation

Ludwig Schläfli war bereits am Ende seines Artikel über die Doppelsechs von 1858 in einer kurzen Randnotiz auf den singulären Fall eingegangen. In Übereinstimmung mit Salmon erwähnte er, dass durch jeden Doppelpunkt einer Fläche dritten Grades sechs Linien gehen müssten. Ohne Angabe eines Beweises stellte er fest, dass in ihnen Paare nicht-inzidenter Geraden einer Doppelsechs zusammen fallen würden.<sup>18</sup>

<sup>18</sup> „In conclusion I remark that the double-sixes play a part in the theory of the nodes of a cubic surface. (...) If a surface of the third order  $f = 0$  has a proper node  $(w, x, y, z)$  then the six lines passing through such node and represented by the equations  $D^2 f = 0$ ,  $D^3 f = 0$  form a double-six, in which each two corresponding (non-intersecting) lines of the sixes coincide.“ Schläfli, „An Attempt to Determine the Twenty-Seven Lines upon a Surface of the Third Order“, S. 216. Diese Ansicht hat Schläfli bereits in einen Brief 1855 an seinen Freund

Der Schweizer beließ es jedoch nicht bei dieser Anmerkung, sondern entwarf in den folgenden Jahren eine systematische Klassifikation für die singulären Flächen dritten Grades. Seine Arbeit ist 1863 unter dem Titel „On the Distribution of Surfaces of Third Order“ von Arthur Cayley übersetzt und in den *Philosophical Transactions* veröffentlicht worden.<sup>19</sup> Sie enthielt eine vollständige Auflistung der Typen und möglichen Konfigurationen von Doppelpunkten, die auf einer kubischen Fläche auftreten können. Insgesamt gab Schläfli 21 verschiedene Arten an, die er mit römischen Ziffern (I–XXI) bezeichnete. Für jeden Typ von Fläche untersuchte er außerdem die Möglichkeiten, die für die Anzahl an reellen Linien und Ebenen bestanden. Die Diskussion der Realitätsfrage führte Schläfli insgesamt auf 59 Unterarten (vgl. Tab. 5.2).

### Problem der Klasse

Für seine Klassifikation verfeinerte Schläfli zuerst die frühere Unterteilung George Salmons, der bei Punkt singularitäten nur zwischen konischen, bi- und uniplanaren Doppelpunkten unterschieden hatte. Außerdem berücksichtigte er bei seiner Einteilung die Klasse der Fläche. Schläflis Zeitgenossen verstanden darunter den Grad der Reziprokalfläche, der wiederum der Anzahl an Tangentialebenen entspricht, welche sich durch eine Linie in allgemeiner Lage an eine reguläre Fläche legen lassen. In seiner Abhandlung von 1847 hatte George Salmon bereits gezeigt, dass die Klasse einer algebraischen Fläche des  $n$ -ten Grades im Allgemeinen  $n(n-1)^2$  ist.<sup>20</sup> Sobald Doppelpunkte auftreten, verringert sich diese Zahl jedoch um einen gewissen Grad. Das war bereits seit Julius Plückers Untersuchungen algebraischer Kurven bekannt, bei denen die Klasse allerdings die Anzahl an Tangenten repräsentiert, welche durch einen generischen Punkt gehen.

Salmon war es gelungen, den Grad der Verminderung für seine drei Arten von Doppelpunkten zu bestimmen. Nach ihm verringert sich die Klasse um zwei Einheiten für jeden konischen, um drei für jeden biplanaren und um sechs für jeden uniplanaren

Jakob Steiner geäußert. Steiner und Schläfli, *Der Briefwechsel zwischen Jakob Steiner und Ludwig Schläfli*, S. 134.

<sup>19</sup> Cayley nahm auch eine Anpassung in der Terminologie vor, um die Begriffe an den Sprachgebrauch der englischen Mathematiker anzupassen. Schläfli, Ludwig. „On the Distribution of Surfaces of the Third Order into Species, in Reference to the Absence or Presence of Singular Points, and the Reality of their Lines“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 153 (1863).

<sup>20</sup> Salmon, George. „On the Degree of a Surface Reciprocal to a Given One“. In: *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal* 2 (1847).

Punkt auf der Fläche.<sup>21</sup> Die Ordnung der Reziprokalfläche ist demnach ein wichtiges Merkmal, um verschiedene Typen von singulären Flächen zu unterscheiden. Die Klasse zeigt außerdem, welche Kombinationen von Doppelpunkten überhaupt nur auftreten können. Sie muss positiv sein, was die Anzahl der prinzipiell möglichen Kombinationen auf endlich viele Fälle beschränkt.

Dies war auch Ludwig Schläfli bekannt, der Salmons Formeln jedoch vermutlich nicht gekannt hat.<sup>22</sup> Um alle möglichen Typen von Doppelpunkten zu bestimmen, die auf einer algebraischen Fläche dritten Grades auftreten können, untersuchte er systematisch ihre allgemeine Gleichung  $f = 0$ . Wenn der Koordinatenursprung in den Doppelpunkt der Fläche gelegt wird, so ist

$$f(x, y, z, w) = wP(x, y, z) + Q(x, y, z), \quad (5.1)$$

wobei  $P$  für ein homogenes Polynom vom zweiten Grad und  $Q$  für ein solches vom dritten Grad steht. Die Gleichung des Tangentenkegels in dem Ursprung ist  $P = 0$ . Für einen konischen Punkt bildet er einen quadratischen Kegel, andernfalls ein Paar von Ebenen. Schläfli berechnet nun die Klasse der Fläche für alle möglichen Fälle. Dafür geht er von einer Linie in allgemeiner Lage aus. Er wählt nun passende (homogene) Koordinaten  $x, y, z, w$ , für die diese Linie der Gleichungen  $z = 0, w = 0$  genügt. Anschließend schreibt er die Bedingungen nieder, welche von den Punkten  $q$  der Fläche erfüllt werden müssen, in denen die Tangentialebene durch die generische Linie geht:

$$f(q) = 0, f_x(q) = 0, f_y(q) = 0.$$

Schläfli ermittelt die Anzahl der Lösungen dieses Gleichungssystem, um hierüber die Klasse der Fläche zu bestimmen. Indem er verfolgt, wie sich dieser Zahl ändert, wenn der Tangentenkegel in dem singulären Punkt weiter zerfällt, bestimmt er den Index, um den sich die Klasse der Fläche verringert.

### Schläflis Arten

Schläfli erhielt so eine Liste aller möglichen Arten von singulären Punkten, welche auf kubischen Flächen auftreten können. Die Tab. 5.1 gibt eine summarische Übersicht über seine Klassifikation. Im Folgenden geben wir hier Schläflis geometrische

<sup>21</sup> Salmon, „On the Degree of a Surface Reciprocal to a Given One“, S. 70.

<sup>22</sup> Das legt ein Brief an Jakob Steiner vom 13. März 1855 nahe, in dem Schläfli dieselben Zahlen verkündet: Steiner und Schläfli, *Der Briefwechsel zwischen Jakob Steiner und Ludwig Schläfli*, S. 138.

Beschreibung der einzelnen Arten wieder, wobei wir auf eine eingängige Notation zurückgreifen, die Arthur Cayley eingeführt hat.<sup>23</sup> Mit dem beigestellten Index wird angegeben, um welchen Grad die Klasse der Fläche reduziert wird. Bei dem gewöhnlichen Doppelpunkt ( $C_2$ ) ist der Tangentenkegel nicht entartet. Er vermindert die Klasse um den Index 2. In einem biplanaren Punkt fallen die beiden Ebenen des Tangentenkegels nicht zusammen. Ihre gemeinsame Achse gehört im Allgemeinen der Fläche nicht an (Not.  $B_3$ ). Wenn sie jedoch auf ihr liegt, so berühren die beiden Ebenen die Fläche entweder längs der Achse nicht ( $B_4$ ), oder eine berührt sie dort einfach ( $B_5$ ) oder zweifach ( $B_6$ ). Wenn die beiden Ebenen zusammenfallen, so entsteht ein uniplanarer Punkt. Für kubische Flächen lässt sich nun unterscheiden, ob die doppelte Ebene die Fläche in drei verschiedenen ( $U_6$ ), in zwei koinzidenten und einer weiteren ( $U_7$ ), oder in drei zusammengefallenen Geraden ( $U_8$ ) trifft. Andere Arten von bi- oder uniplanaren Punkten können bei kubischen Flächen nicht auftreten. Schläfli fand so insgesamt acht verschiedene Typen von Singularität.<sup>24</sup>

Nachdem er die verschiedenen Typen von Doppelpunkten bestimmt hatte, gab er eine Liste aller möglichen Kombinationen an, die bei Flächen des dritten Grades auftreten können. Schläfli bewies die Vollständigkeit seiner Aufzählung nicht extra. So zeigte er beispielsweise nicht, dass neben einem uniplanaren Punkt kein anderer Doppelpunkt auf der Fläche liegen kann. Stattdessen begnügte er sich mit der Angabe aller möglichen Fälle.<sup>25</sup>

Er begann mit dem allgemeinen Fall einer regulären Fläche (I), um dann zu immer spezielleren Typen fortzuschreiten, bei denen mehrere und höhere Punktsingularitäten auftreten (II–XXI). Am Ende betrachtete Schläfli außerdem noch zwei verschiedene Arten von Regelflächen dritten Grades (XXII–XXIII). Es handelt sich

<sup>23</sup> Sie wurde von ihm in seiner bekannten Abhandlung über Flächen dritten Grades genutzt: Cayley, Arthur. „A Memoir on Cubic Surfaces“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 159 (1869).

<sup>24</sup> Eine moderne Formulierung von Schläflis Klassifikation findet sich in dem Artikel: Bruce, J. W. und Wall, C. T. C. „On the Classification of Cubic Surfaces“. In: *Journal of the London Mathematical Society* s2-19.2 (1979). Die beiden britischen Autoren zeigen, dass der Schweizer alle *einfachen Singularitäten* beschrieben hat. Sie zeigen die Vollständigkeit seiner Auflistung unter Verwendung von Methoden und Begriffen der modernen Singulartätentheorie, wie sie von Wladimir I. Arnold (1937–2010) geprägt worden ist: Arnold, V. I. „Normal Forms for Functions near Degenerate Critical Points, the Weyl Groups of  $A_k$ ,  $D_k$ ,  $E_k$  and Lagrangian Singularities“. In: *Functional Analysis and Its Applications* 6.4 (1972).

<sup>25</sup> Eine strenge Klassifikation, die heutigen Maßstäben genügt und sich zugleich an der Arbeit des Schweizer orientiert, enthält: Knörrer, Horst und Miller, Thomas. „Topologische Typen reeller kubischer Flächen“. In: *Mathematische Zeitschrift* 195.1 (1. März 1987).

## Singularitäten einer kubischen Flächen $F$

Singularität	Typ	Gleichung	Tangentenkegel
Konischer Doppelpunkt	$C_2$	$P + Q$	Doppelkegel
Biplanarer Punkt	$B_3$	$xy + Q$	zwei Ebenen mit Achse $b$
	$B_4$	–	$b$ liegt auf $F$
	$B_5$	–	eine Ebene berührt $F$ längs $b$
	$B_6$	–	eine Ebene berührt $F$ längs $b$ doppelt
Uniplanarer Punkt	$U_6$	$x^2 + Q$	eine doppelte Ebene
	$U_7$	–	die Ebene schneidet $F$ in zwei Linien
	$U_8$	–	die Ebene schneidet $F$ in einer Linie

**Tab. 5.1:** Die Tabelle zeigt unterschiedliche Typen von Doppelpunkten, die von Ludwig Schläfli unterschieden worden sind (vgl. Abschnitt 5.2).

um kubische Flächen, auf denen eine Doppelpunktlinie liegt. Für alle seiner 23 verschiedenen Arten gab er eine allgemeine Gleichung an. Außerdem bestimmte er die Anzahl der Linien und Ebenen, wobei er sich an der Salmonschen Zählweise orientierte. Er betrachtete dabei Linien, welche zwei Doppelpunkte miteinander verbinden, nur einen passieren oder keinen enthalten, getrennt voneinander. Er sprach von Achsen, Strahlen und Transversalen. Überdies gab Schläfli für jede Art die Gleichung der zugehörigen Reziprokalfläche, der Hesseschen Fläche und der parabolischen Kurve (engl. spinode curve) an.<sup>26</sup>

### Realitätsfragen

In seiner Abhandlung diskutierte Schläfli für alle Arten von kubischen Flächen ohne Doppelpunktlinie die Frage, wie viele der vorhandenen Linien und Ebenen reell sein können. Am Ende der seiner 1858 veröffentlichten Abhandlung, in der er die Doppelsechs einführte, hatte er bereits eine Antwort für den allgemeinen Fall gegeben, in dem keine Singularitäten vorhanden waren: „The question however arises, how

<sup>26</sup> Die Hessesche Fläche umfasst alle Punkte des Raumes, in denen die Determinante der Hesse-Matrix von  $f$  verschwindet. Sie trifft die Fläche in der parabolischen Kurve, welche wiederum durch alle Doppelpunkte geht. Der Begriff spinode curve, welcher in Schläflis Arbeit verwendet wird, geht auf Arthur Cayley zurück: Cayley, Arthur. „On the Singularities of Surfaces“. In: *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* 7 (1852), S. 167. In der Arbeit fasste Cayley parabolische Punkte noch als Singularitäten auf, daher die Bezeichnung.

many of the twenty-seven lines and forty-five planes may be imaginary? The complete investigation would be tedious, and I content myself giving a mere survey of the species into which the general surface of the third order divides itself in regard to the reality of the 27 lines.“<sup>27</sup> Wie er anschließend ausführt, könne es nur fünf verschiedene Möglichkeiten geben. Entweder sind alle oder jeweils 15 oder 7 Linien und 5 Ebenen oder 3 Linien und 13 Ebenen oder 3 Linien und 7 Ebenen reell.

Zur Herleitung schrieb er die Gleichung dritten Grades in der Form

$$uvw + xyz = 0, \quad (5.2)$$

wobei  $u, v, w$  und  $x, y, z$  jeweils für lineare Polynome in drei Variablen stehen. Diese Darstellung war bereits 1849 von Arthur Cayley und George Salmon hergeleitet worden, um die Linien und Ebenen einer kubischen Fläche zu beschreiben.<sup>28</sup> Sie bringt den großen Vorteil mit sich, dass auf Anhieb neun Linien der Fläche bekannt sind. Es handelt sich um die gemeinsamen Achsen jeweils zweier Ebenen, von denen eine zu dem Triple  $u, v, w$ , die andere aber zu  $x, y, z$  gehört. Schläfli bezeichnet diese Linien mit  $ux, uy, uz, vx, vy, vz, wx, wy, wz$ . Durch die Linie  $ux$  müssen neben  $u = 0$  und  $x = 0$  noch drei weitere dreifache Tritangentialebenen gehen. Ihre Gleichungen seien

$$a_i u + d_i x = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Aus (5.2) folgt damit unmittelbar, dass es jeweils noch zwei weitere Linien in jeder dieser drei Ebene geben muss, von denen eine neben  $ux$  noch durch  $vy$  und  $wz$ , eine noch durch  $vz$  und  $wy$  geht. Wenn wir nun noch die  $2 \cdot 3$  Ebenen miteinbeziehen, die durch  $uy$  und  $uz$  gehen, erhalten wir insgesamt  $3 \cdot 3$  Ebenen mit jeweils zwei weiteren Linien, alles in allem demnach  $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$  zusätzliche Linien.

Die Darstellung (5.2) ist jedoch nicht eindeutig. Außerdem müssen die linearen Polynome  $u, v, w, x, y, z$  nicht reell sein, damit das Polynom  $uvw + xyz$  nur reelle Koeffizienten umfasst. Und selbst wenn alle dieser Polynome reell sind, so kann dennoch eine gewisse Anzahl der 18 Linien imaginär sein, die nicht auf den Ebenen  $u = 0, v = 0$  etc. liegen. Schläfli betrachtet systematisch alle Möglichkeiten für die Realitätsverhältnisse der sechs Ebenen, für die alle Koeffizienten des Polynoms  $uvw + xyz$  reell bleiben. Am Ende findet er so die fünf möglichen Kombinationen.

Bei der Bestimmung der Realitätsverhältnisse aller anderen Arten II–XXII kubischer Flächen stellt Ludwig Schläfli ähnliche Überlegungen an. Die Existenz der

<sup>27</sup> Schläfli, „An Attempt to Determine the Twenty-Seven Lines upon a Surface of the Third Order“, S. 214.

<sup>28</sup> Cayley, „On the Triple Tangent Planes of Surfaces of the Third Order“, S.451.

Doppelpunkte gibt ihm Bedingungen vor, die er in die Gleichung (5.2) einfließen lässt. Insgesamt erhält er so für jede Art mehrere Unterarten, die sich hinsichtlich der Realitätsverhältnisse der Linien und Ebenen unterscheiden. Alles in allem umfasst seine Klassifikation der Flächen dritten Grades so 59 unterschiedliche Typen.

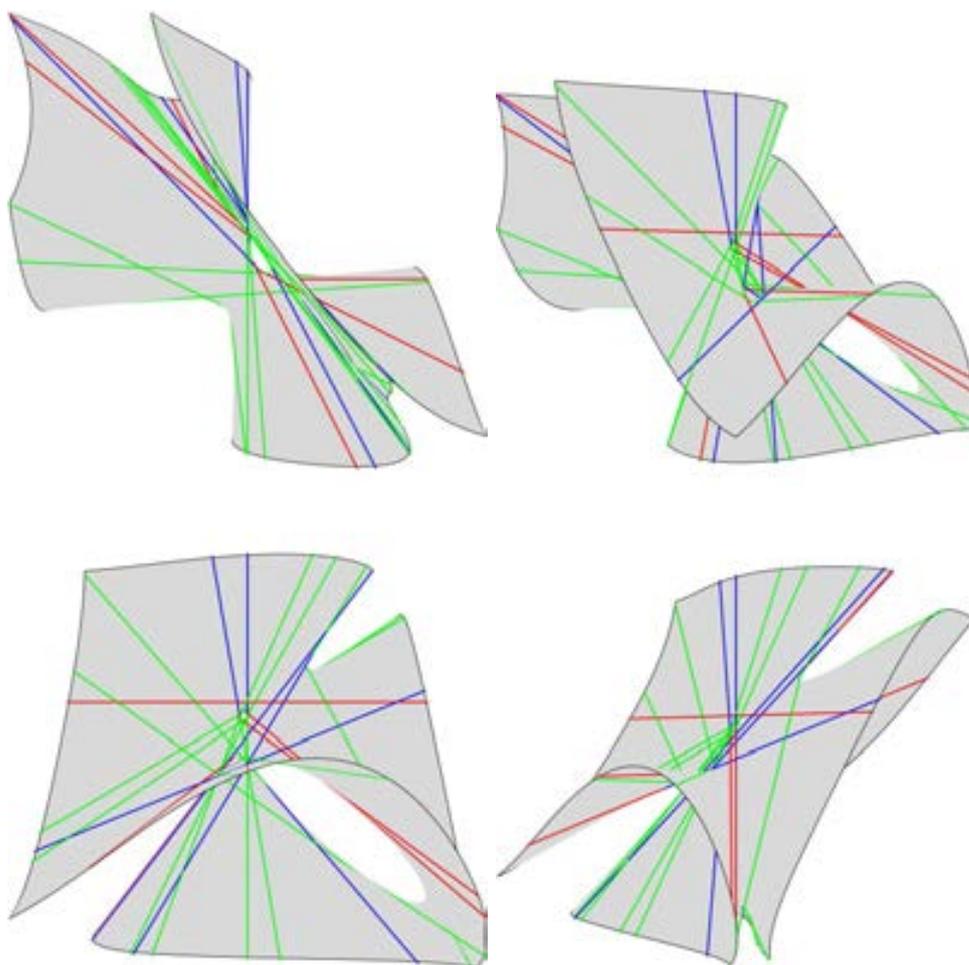
### 5.3 Wieners Gipsmodell

Im September 1867 tagte die *Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte* in Frankfurt. Die Mitglieder der mathematischen Sektion sprachen über die 27 Geraden einer kubischen Fläche, die der Gegenstand eines Vortrages waren. Es wurde Interesse an einem plastischen Modell geäußert, welches das gesamte System der 27 Linien darstellt. Später berichtete Christian Wiener, dass die anwesenden Mathematiker mit der Bitte an ihn heran getreten seien, einen passenden Entwurf anzufertigen. Wiener war zu jener Zeit Professor für darstellende Geometrie in Karlsruhe, wo er Modelle für die Lehre verwendete. Nach seiner Rückkehr aus Frankfurt begann er mit der Ausarbeitung eines Gipsmodells. Er beendete seine Arbeit im Frühjahr 1868. Bei einer Wanderung, die ein Kreis deutscher Mathematiker über Pfingsten auf der Bergstraße unternahm, präsentierte er seinen Entwurf (Abb. 8.11). Wiener ließ Abgüsse des Modells anfertigen, die er zusammen mit zwei stereoskopischen Fotografien und einem erläuternden Text vertrieb.<sup>29</sup>

Für den Entwurf nutzte Wiener eine Konstruktion, die in Schläffis Abhandlung 1858 beschrieben worden ist (Absch. 5.1). Bei der Anfertigung seines Modells ging er von einem Würfel mit Seitenlänge von 46 Zentimetern aus. Die Geraden bildete er mit gespannten Seidenfäden unterschiedlicher Farbe nach. Nachdem er sich auf die Geraden  $a_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$  festgelegt hatte, welche die Doppelsechs eindeutig bestimmen, musste Wiener mehrmals Transversalen durch jeweils vier gegebene Linien bestimmen. In seinem Begleittext beschrieb er, wie ihm eine zeichnerische Lösung des Problems gelang.<sup>30</sup> Nachdem er so alle Linien der Doppelsechs bestimmte hatte, suchte er die verbleibenden 15 Geraden  $c_{ij}$  des Systems auf. In ihnen schneiden sich die beiden Ebenen, die durch  $a_i$  und  $b_j$  sowie  $a_j$  und  $b_i$  definiert werden. Danach ermittelte Wiener die Form der Fläche. Er betrachtete dafür verschiedene Ebenen durch eine der Linien. Sie schneiden aus der kubischen Fläche einen weiteren Kegelschnitt aus. Auf ihm liegen 16 der insgesamt 26 Schnittpunkte, in denen die Ebene von den verbleibenden Linien getroffen wird. Wiener erwähnt, dass er so 16 Ke-

<sup>29</sup> Wiener, Christian. *Stereoscopische Photographien des Modelles einer Fläche dritter Ordnung mit 27 reellen Geraden: mit erläuterndem Texte*. Leipzig: Teubner, 1869.

<sup>30</sup> Ebd., S. 6f.



**Abb. 5.1:** Die Grafiken zeigen vier unterschiedliche Ansichten einer virtuellen Kopie von Wieners Modell. Die roten und blauen Geraden gehören zu einer Doppelsechs. Die 15 grünen Linien liegen jeweils mit einer roten und blauen Gerade in einer Ebene. Grafik: H. Junker

gelschnitte bestimmte, welche auf Ebenen mit gleichen Winkelabstand zueinander lagen. Er fertigte Zeichnungen an, und ließ die Fläche in Gips formen, um sie vervielfältigen zu können. Auf dem Gipsmodell wurden jeweils die Linien und ermittelten Kegelschnitte eingeritzt.

### **Fiedlers und Cayleys Mühen**

Ein Abguss von Wieners Modell befindet sich heute in der mathematischen Modellsammlung in Tübingen. Die Doppelsechs lässt sich gut erkennen, ebenso die restlichen Linien. Dennoch besitzt die Darstellung einige unverkennbare Schwächen. Das Modell weist keine Symmetrien auf. Dadurch wird es erschwert, die Anordnung der 27 Linien

auf einen Blick zu erfassen. Trotz der Größe des Modells liegen viele Schnittpunkte der Linien nahe beieinander, während sich einige völlig außerhalb des dargestellten Bereiches befinden. Vieles spielt sich auf einem kleinen Raum ab, manches tritt gar nicht in Erscheinung. Das Modell büßt dadurch an Übersichtlichkeit ein.

Die Nachteile der Darstellung sind der Konstruktionsmethode geschuldet. Bei der Wahl der sechs Linien  $a_1, b_2, \dots, b_6$  konnte Wiener nicht absehen, wie die restlichen Geraden verlaufen würden. Die Form des Modells ließ sich mit der Methode nicht planen. Die ungewollte Nähe der Schnittpunkte beeinträchtigte jedoch nicht nur die Wahrnehmung der gesamten Konfiguration, sondern erschwerte auch die Konstruktion. In seiner Besprechung des Gipsmodells und der stereoskopischen Fotografien erwähnte Wilhelm Fiedler (1832–1912) seine eigenen Mühen, die er mit der Anfertigung eines Drahtmodells der 27 Linien hatte. Einen ersten Versuch unternahm er im Sommer 1861, nachdem er einem Bericht in der *Comptes Rendus* gelesen hatte.<sup>31</sup> Er scheiterte offenbar daran, dass es ihm nicht gelang eine geeignete Doppelsechs zu bestimmen, so dass am Ende die zehn Schnittpunkte auf einer jeden Geraden weit genug auseinander liegen, um sie zeichnerisch darzustellen.<sup>32</sup>

Fiedler erwähnt in dem Zusammenhang einen Artikel Arthur Cayleys, der 1870 im *Quarterly Journal of Mathematics* erschienen war.<sup>33</sup> Der Text enthält ausschweifende Rechnungen, mit denen der Autor ausgehend von vier Linien die verbleibenden einer Doppelsechs ermittelte. Cayley hatte sie in der Absicht unternommen, ein Modell anzufertigen. Er musste jedoch bald feststellen, dass zwei Paare der berechneten Linien sich so nahe kamen, dass eine Darstellung trotz größtmöglicher Genauigkeit nicht möglich war. Offenbar waren Fiedler und Cayley bei ihren Versuchen unabhängig voneinander an demselben Problem gescheitert. Später unternahm Fiedler einen erneuten Anlauf, um ein Modell anzufertigen, wie er selbst in seiner Besprechung berichtet.<sup>34</sup> Anstatt jedoch abermals zu versuchen, die Geraden vorab zu berechnen, ging er wie Wiener Schritt für Schritt vor. So arbeitete er keinen Konstruktionsplan aus, sondern bestimmte die Linien am Entwurf, teilweise offenbar durch Einvisieren. Bei der Umsetzung half Fiedler nach seinen Angaben Rafael Morstadt, der Assistent

<sup>31</sup> Fiedler spricht vermutlich von dem Beitrag des britischen Mathematikers James J. Sylvesters (1814–1897): Sylvester, James J. „Note sur les 27 droites d’une surface du 3e degré“. In: *Comptes Rendus de l’Académie des sciences* (1861).

<sup>32</sup> Fiedler, Wilhelm. „Stereoskopische Photographien des Modelles einer Fläche dritter Ordnung mit 27 reellen Geraden“. In: *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 14 (1869).

<sup>33</sup> Cayley, Arthur. „On the Double-Sixers of a Cubic Surface“. In: *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* 10 (1870).

<sup>34</sup> Fiedler, „Stereoskopische Photographien des Modelles einer Fläche dritter Ordnung mit 27 reellen Geraden“.

der darstellenden Geometrie am Prager Polytechnikum gewesen war.<sup>35</sup> Sein Stabmodell aus zusammen gelöteten Drähten maß nach seiner Auskunft etwa 60 Zentimeter in jede Raumrichtung. Ob es heute noch existiert, ist leider nicht bekannt.

Auch Cayley beschäftigte sich später intensiv mit dem Gipsmodell Wieners. Er vermaß es gründlich, um die Gleichungen der Linien zu bestimmen, die zur Doppelsechs gehörten. Dafür ermittelte er die Punkte, in denen die zwölf Geraden die Seiten des zugrundeliegenden Quaders trafen. So erhielt er Gleichungen, die er allerdings noch anpassen musste, um die Ungenauigkeiten der Ausführung auszugleichen, damit die Inzidenzbedingungen der Doppelsechs erfüllt sind. Er präsentierte seine Untersuchung bei einer Sitzung der *Cambridge Philosophical Society* im Jahr 1871.<sup>36</sup> Im Anschluss seiner Besprechung des Wienerschen Modells, stellte er einen weiteren Ansatz für eine Konstruktion vor, den er nach seinem ersten missglückten Versuch verfolgt hatte. Er war dabei von einer Gleichung dritten Grades ausgegangen, die neun Parametern umfasste. Aus ihr ließen sich die Darstellungen von acht Linien einer Doppelsechs sofort ablesen. Für die verbleibenden vier teilte Cayley die Gleichungen mit, welche er aufgestellt hatte. Nachdem er sich auf Parameter festgelegt hatte, fertigte er ein Fadenmodell der zugehörigen Doppelsechs an. Trotz seiner sorgfältigen Wahl, sind sich zwei Linien sehr nahe gekommen, wie er berichtete. Offenbar gelang es ihm auch bei seinem zweiten Versuch nicht, ein Modell aller 27 Linien fertigzustellen.

## 5.4 Clebsche Diagonalfäche

Trotz seiner angesprochenen Mängel stieß Wieners Modell auf viel Interesse. Seinem Konstrukteur war etwas gelungen, was andere vor große Probleme gestellt hatte. Nicht nur bei Arthur Cayley und Wilhelm Fiedler hinterließ das Modell deswegen einen tiefen Eindruck. Auch Felix Klein erinnerte sich an es viele Jahre später. Er erwähnt es in seiner Vorbemerkung zu seinen Arbeiten zur anschaulichen Geometrie, die 1922 im zweiten Band seiner *Gesammelten Mathematischen Abhandlungen* veröffentlicht worden sind, in der er von seinem eigenen Interesse an Modellen berichtet: „Einen wesentlichen Impuls hatten meine hier in Betracht kommenden Bestre-

<sup>35</sup> Wilhelm Fiedler befand sich während der Jahre 1864–1867 Professor für darstellende Geometrie in Prag: Stark, Franz, Gintl, Wilhelm und Grünwald, Anton, Hrsg. *Die K. K. Deutsche Technische Hochschule in Prag 1806-1906: Festschrift zur Hundertjahrfeier*. Prag: A. Haase, 1906, S. 358. Rafael Morstadt war Assistent an dem Polytechnikum: ebd., S. 39.

<sup>36</sup> Cayley, Arthur. „On Dr. Wiener’s Model of a Cubic Surface with 27 Real Lines; And on the Construction of a Double-Sixer“. In: *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 12 (1873).

bungen auch dadurch erhalten, daß ich Pfingsten 1868, gelegentlich der damaligen Zusammenkunft von Mathematikern auf der Bergstraße, das später vielbesprochene (auch noch ganz unsymmetrische, durch empirische Konstruktion hergestellte) Modell Christian Wieners einer Fläche dritter Ordnung mit 27 reellen Graden hatte kennen lernen.“<sup>37</sup>

Klein benannte die Nachteile des Entwurfs, wobei er auf das Vorgehen bei der Konstruktion verwies. Für die Herstellung eines übersichtlicheren und handlicheren Modells war eine andere Herangehensweise nötig. Zwei Jahre nach der Zusammenkunft auf der Bergstraße, bei der Wiener sein Gipsmodell präsentiert hatte, gelang Alfred Clebsch (1833–1872) eine Entdeckung, die Abhilfe versprach. Am Rande einer Arbeit über polynomiale Gleichungen fünften Grades war er auf eine spezielle Klasse merkwürdiger Flächen der dritten Ordnung gestoßen.<sup>38</sup> Sie besaßen eine Darstellung der Form

$$\xi_1^3 + \dots + \xi_5^3 = 0, \quad \xi_1 + \dots + \xi_5 = 0 \quad (5.3)$$

wobei  $\xi_i = \xi_i(x, y, z)$  lineare Polynome erster Ordnung sind. Die Gleichungen der Fläche hingen somit einzig und alleine von der Wahl der fünf Ebenen  $\xi_i = 0$  ab, weshalb Clebsch von  $\xi_1, \dots, \xi_5$  als Pentaederkoordinaten sprach. Die Gesamtheit der Ebenen bildet ein Pentaeder im Raum. Clebsch wählte den Begriff auch mit Gedanken an James J. Sylvester (1814–1897). Sylvester hatte 1851 den Satz aufgestellt, dass sich die Gleichung jeder Fläche der dritten Ordnung in die Form  $a_1\xi_1^3 + \dots + a_5\xi_5^3 = 0$  bringen lässt, ohne ihn zu beweisen. Demnach war Clebsch auf einen Spezialfall dieses allgemeinen Ausdrucks gestoßen, bei der die Koeffizienten  $a_1, \dots, a_5$  bis auf gemeinsame Vielfache gleich waren. In seiner Arbeit gab er eine geometrische Interpretation für seine Gleichung an. Jede Fläche  $\xi_i = 0$  des Pentaeders wird von den anderen Ebenen in vier Geraden geschnitten. Im Allgemeinen bilden sie ein Vierseit mit sechs Ecken, die paarweise von drei Diagonalen verbunden werden. Die Gleichungen dieser Diagonalen in der Ebene  $\xi_1 = 0$  lauten beispielsweise

$$\xi_2 + \xi_4 = 0, \quad \xi_2 + \xi_3 = 0, \quad \xi_3 + \xi_4 = 0.$$

Da  $\xi_1 + \dots + \xi_5 = 0$  gilt, erfüllt jede davon auch die Gleichung  $\xi_1^3 + \dots + \xi_5^3 = 0$  der Fläche. Auf den fünf Seiten des Pentaeders verlaufen jeweils drei Diagonalen.

<sup>37</sup> Klein, Felix. „Vorbemerkungen zu den Arbeiten zur Anschaulichen Geometrie“. In: *Felix Klein – Gesammelte Mathematische Abhandlungen*. Hrsg. von Vermeil, Hermann und Fricke, R. Bd. 2. Berlin: Springer-Verlag Berlin, 1922.

<sup>38</sup> Clebsch, Alfred. „Ueber die Anwendung der quadratischen Substitution auf die Gleichungen 5ten Grades und die geometrische Theorie des ebenen Fünfseits“. In: *Mathematische Annalen* 4.2 (1871).

Insgesamt lassen sich somit die Gleichungen von 15 Linien sofort hinschreiben, die vollständig auf der Fläche liegen. Die restlichen zwölf Linien sind durch sie eindeutig bestimmt, wie Clebsch schreibt.

Noch bevor seine Arbeit in den *Mathematischen Annalen* erschien, präsentierte er bereits im Juni 1871 seine Ergebnisse bei einer Sitzung der *Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften*.<sup>39</sup> In der zugehörigen Mitteilung legte Clebsch nahe, ein Modell einer seiner Diagonalfächen anzufertigen, um die Anordnung der Linien auf einer Fläche der dritten Ordnung zu veranschaulichen: „Für die wirkliche Darstellung des Systems der 27 Geraden einer Oberfläche dritter Ordnung, welche ein sehr verwickeltes System bilden, giebt die Diagonalfäche ein einfaches und leicht construierbares Beispiel, welches zugleich die grösste Zahl der Eigenschaften des allgemeinen Systems ohne zu grosse Modification aufweist. Es dürfte sich daher zu Herstellung bequemer Modelle dieser Fläche besonders empfehlen.“<sup>40</sup> Clebsch war sich offenbar der Möglichkeiten bewusst, die seine Darstellung bot. Schon im Sommer des nächsten Jahres konnte er an derselben Stelle ein Gipsmodell vorstellen, das die Anordnung der Linien auf einer Diagonalfäche zeigte, und das hinsichtlich der Übersichtlichkeit der Darstellung nur wenig Spielraum für Verbesserungen ließ.

## Weilers Gipsmodell

Zwischen Mai und Juli 1872 hielten Clebsch und Klein in Göttingen gemeinsam ein Seminar ab, in dem auch Flächen dritter Ordnung behandelt worden sind. Zu den Teilnehmern gehörten u.a. die Studenten Adolf Weiler (1851–1916), Friedrich Neesen (1849–1923) und Karl Fr. Rodenberg (1851–1933).<sup>41</sup> In dem Seminar entstanden mindestens drei Modelle, die Clebsch und Klein bei einer Sitzung der *Göttinger Akademie der Wissenschaften* im August präsentierten.<sup>42</sup>

Weiler hatte auf Clebschs Anregung hin zwei Modelle entworfen. Eines aus Gips, das eine Diagonalfäche zeigt, auf dem die alle Linien eingeritzt waren (Abb. 8.12). Und eines, welches nur das zugehörige System der 27 Linien darstellte.<sup>43</sup> Bei der

<sup>39</sup> Clebsch, Alfred. „Ueber die geometrische Interpretation der höheren Transformationen binärer Formen und der Formen 5ter Ordnung insbesondere.“ In: *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität* 12 (1871).

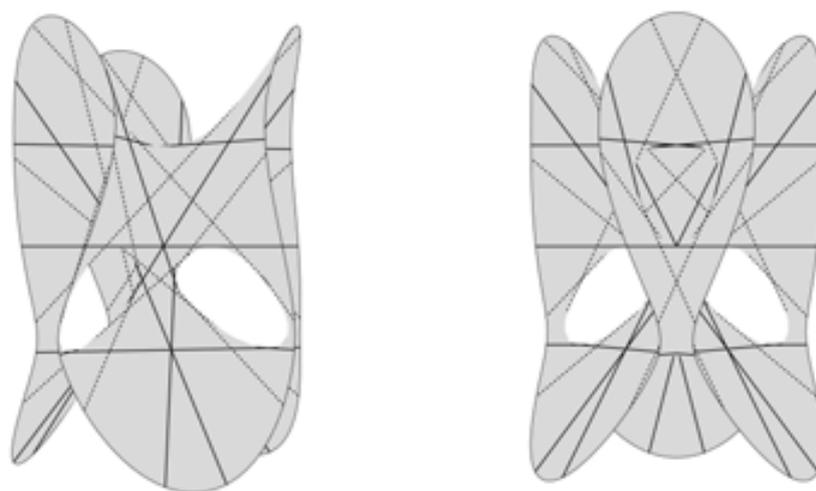
<sup>40</sup> Ebd., S. 342.

<sup>41</sup> Tobies, *Felix Klein*, S. 95.

<sup>42</sup> Klein, Felix und Clebsch, Alfred. „Modelle von Flächen dritter Ordnung.“ In: *Nachrichten von der königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der George-August-Universität aus dem Jahre 1872* 20 (1872).

<sup>43</sup> Noch heute existieren mehrere Abgüsse des Gipsmodells. Ob sich das zweite Modell

Vorstellung beschrieb Clebsch die beiden Modelle ausführlich, vor allem die Wahl des verwendeten Pentaeders.<sup>44</sup> Ihm liegt ein reguläres Tetraeder mit horizontaler Grundebene zugrunde. Die drei anschließenden Seitenflächen sind kongruent. Die fünfte Ebene ist so gewählt worden, dass sie parallel zur Grundebene liegt. Sie teilt die Pyramide in halber Höhe zwischen Spitze und Basis. Durch diese Wahl des Pentaeders ergibt sich eine symmetrische Fläche, die bei einer Drehung von 120 Grad um die Achse, welche senkrecht auf der Basis steht und durch die Spitze des Tetraeders geht, in sich selbst überführt wird.



**Abb. 5.2:** Die Grafiken geben unterschiedliche Ansichten eines digitalen Modells von Weilers Entwurf wieder. Die gestrichelten Linien bilden eine Doppelsechs, während die durchgezogenen Geraden die 15 Kanten des zugehörigen Pentaeders anzeigen. Grafik: H. Junker

Das Modell zeigt – wie das von Wiener auch – drei Durchgänge. Sie sind gleichförmig und liegen außerdem symmetrisch zur senkrechten Achse. Die beiden Darstellungen unterscheiden sich jedoch noch in anderer Hinsicht. Auf der Clebschen Diagonalfäche liegen zehn ausgezeichnete Punkte, in denen sich jeweils drei Geraden treffen. Diese speziellen Punkte auf kubischen Flächen, in denen drei Schnittpunkte von Geradenpaaren zusammenfallen, sind heute nach F. E. Eckardt benannt, der sie ausgiebig studiert hat.<sup>45</sup> Die zehn Eckardt-Punkte der Diagonalfäche sind gerade

noch irgendwo befindet, konnte leider nicht festgestellt werden.

<sup>44</sup> Ob sie durch Weiler selbst erfolgt war, teilte er allerdings nicht mit.

<sup>45</sup> Eckardt hat seine Untersuchung 1876 veröffentlicht: Eckardt, F. E. „Ueber diejenigen Flächen dritten Grades, auf denen sich drei gerade Linien in einem Punkte schneiden“. In: *Mathematische Annalen* 10.2 (1876).

die Ecken des zugehörigen Pentaeders. In ihnen treffen sich drei der fünf Ebenen und damit auch jeweils drei Diagonalen, die auf einer der 45 Tritangentialebene der Fläche liegen. Weilers Modell zeigt sieben Eckardt-Punkte. Die verbleibenden drei befinden sich im unendlich Fernen. Hingegen existiert bei der von Wiener konstruierten Fläche nur ein derartiger Punkt. Es handelt sich bei ihr um einen anderen Typ von Kubik.<sup>46</sup>

Weilers Entwurf weist klare Vorzüge gegenüber dem Gipsmodell Wieners auf, nicht nur hinsichtlich der Maße. Die Symmetrie vereinfacht das Erfassen der Linien und ihrer Schnittkonfiguration erheblich. Die erzielten Verbesserungen bei der Darstellung des gesamten Systems sind erst durch Clebschs Arbeit möglich geworden. Bei der Nachbildung der Diagonalfäche reduzierte sich das Problem der Konstruktion weitestgehend auf die Wahl eines geeigneten Pentaeders. Verglichen mit dem Verfahren Wieners, der von sechs Geraden ausging, ließ sich so wesentlich leichter eine übersichtliche Anordnung der 27 Linien finden. Bei dem Vergleich beider Modelle muss auch berücksichtigt werden, dass sie unterschiedliche Typen von Fläche zeigen. Ob es überhaupt eine symmetrische Kubik mit nur einem Eckardt-Punkt gibt, scheint eine offene Frage zu sein. Unter diesem Gesichtspunkt ließe sich sogar sagen, dass Wieners Modell besser geeignet ist, eine Vorstellung von der Gestalt einer *allgemeinen* Fläche dritter Ordnung mit 27 reellen Linien zu geben, eben weil es keine Symmetrien aufweist.

## 5.5 Felix Klein „Über Flächen dritter Ordnung“

Auf der angesprochenen Sitzung der *Göttinger Akademie der Wissenschaften* präsentierte auch Felix Klein ein Modell, das von Friedrich Neesen während des Seminars angefertigt worden war. Es zeigte eine Fläche dritter Ordnung mit vier isolierten Doppelpunkten. Sie stand im Zentrum von Kleins eigenen Untersuchungen über kubische Flächen. Wenig später ließ er ein weiteres Modell entwerfen, um eine Darstellung zu erhalten, die er für geeigneter hielt.<sup>47</sup>

<sup>46</sup> Die mögliche Anzahl an Eckardt-Punkte auf einer nicht-singulären Kubik hat 1942 Beniamino Segre (1903–1977) angegeben: Segre, Beniamino. *The Non-singular Cubic Surfaces*. Oxford: Oxford University Press, 1942, S. 152. Siehe auch: Dolgachev, Igor V. *Classic Algebraic Geometry*. Cambridge: Cambridge University Press, 2012, S. 491 ff.

<sup>47</sup> Diese spezielle Fläche ist heute im englischen Sprachraum unter dem Namen Cayleys bekannt, der 1869 eine umfangreiche Arbeit zu kubischen Flächen veröffentlicht hat: Cayley, „A Memoir on Cubic Surfaces“. Sie basiert auf Schläfflis Klassifikation von 1862, in der bereits gezeigt worden ist, dass auf einer kubischen Fläche höchstens vier konische Doppelpunkte liegen können.

## Neesens und Weilers Modelle

Bei der Präsentation gab Felix Klein den Anwesenden der Sitzung eine detaillierte Beschreibung des Modells. Neesens Originalentwurf scheint verschollen zu sein. Um so wichtiger ist deshalb der Bericht des Göttinger Privatdozenten. Seine Ausführungen legen nahe, dass die Arbeit einem späteren Entwurf (Nr. 5) Karl Rodenbergs ähnlich gewesen sein muss, der 1878 eine mehrteilige Serie von Modellen verschiedener Typen von Flächen dritter Ordnung herausgab (Abb. 8.14).<sup>48</sup>

## Das Unendlichferne

Nach Klein bilden die vier singulären Punkte der dargestellten Fläche die Ecken eines Tetraeders, dem Neesen eine symmetrische Form gegeben hat. Die Grundfläche sei von ihm horizontal gewählt worden. Anschließend fährt Felix Klein fort: „Die Fläche besteht aus einem überall elliptisch gekrümmten, endlichen Theile, der das von den vier Knoten begränzte Tetraeder ausfüllt, und aus einem, sich in's Unendliche erstreckenden, hyperbolisch gekrümmten Theile.“ Bei dem Rodenbergschen Modell lassen sich drei Flächenteile erkennen, die in den Ecken des Tetraeders in der Form eines Doppelkegels zusammenstoßen. Klein betrachtet die beiden an das Vielfach angrenzenden Flächenstücke jedoch als ein zusammengehöriges Teil. „Letzterer wird durch's Unendliche in zwei Partien zerlegt; in einen Kegel, der sich oberhalb des höchstgelegenen Knotenpunctes erhebt, und in ein sich wesentlich horizontal ausbreitendes Flächenstück, das sich an die drei in der Grundfläche des Tetraeder's gelegenen Knoten hinanhebt, von ihnen ab sich in der Mitte in's Unendliche trichterartig hinabsenkt, und dadurch die Vereinigung mit dem nach oben gehenden Kegel herstellt.“

Dieses Zitat beschreibt Felix Kleins Sichtweise. Er ist sich bewusst, dass die Gestalt im Endlichen und unendlich Fernen nichts ist, was eine Fläche innerhalb der projektiven Geometrie auszeichnet. Direkt im Anschluss an das Zitat erwähnt er sogar, dass alle kubischen Flächen mit vier reellen Knotenpunkten sich mithilfe einer Kollineation ineinander überführen lassen, da sie keine absoluten Invarianten besäßen, wie er schreibt.<sup>49</sup> Dennoch interessiert er sich für die Lage der Fläche in Bezug

<sup>48</sup> Dafür spricht auch, dass Rodenberg für seine Serie Weilers Entwurf der Clebschen Diagonalfäche übernommen hat. Außerdem hatte er zusammen mit Neesen und Weiler in dem Seminar gesessen, das von Alfred Clebsch und Felix Klein 1872 veranstaltet worden ist.

<sup>49</sup> Mit dem Begriff Kollineation bezeichnet Klein eine bijektive Abbildung, die Geraden auf Geraden abbildet. Gemeint ist hier, dass es für zwei (kubische) Flächen  $f_1 = 0$  und  $f_2 = 0$  mit jeweils vier konischen Doppelpunkten immer eine Kollineation  $\sigma$  mit  $f_1 \circ \sigma = f_2$  gibt.

aus das Unendliche. Bei der Sitzung erklärte er, dass diesbezüglich fünf Haupttypen unterschieden werden müssten. Der Bericht enthält jedoch an dieser Stelle keine weiteren Erläuterungen.<sup>50</sup> Felix Klein dürfte genau an die fünf verschiedenen Fälle gedacht haben, die Rodenberg später innerhalb seiner Serie mit den Modellen Nr. 2–6 zur Anschauung gebracht hat. Sie zeigen alle Ansichten einer Fläche dritter Ordnung mit vier reellen Knotenpunkten, welche sich aus der Wahl spezieller affiner Koordinaten ergeben. Wenn

$$f(x, y, z, w) = 0 \tag{5.4}$$

die zugehörige Gleichung in homogenen Koordinaten ist, so ergeben sich die verschiedenen Darstellungen durch die Wahl einer unendlich fernen Ebene  $ax+by+cz+dw = 0$ . Ist  $d \neq 0$ , so ergibt sich der zugehörige Gleichung in den affinen Koordinaten  $x, y, z$  durch die Substitution

$$w = -\frac{1}{d}(1 - ax + by + cz) \tag{5.5}$$

in den Ausdruck (5.4). In einer Beschreibung seiner Serie erklärt Rodenberg die Unterschiede zwischen den fünf dargestellten Fällen. Er geht dafür von dem zweiten Modell aus. Anschließend beschreibt er für die restlichen vier Entwürfe die jeweilige Lage der sogenannte Gegenebene der Kollineation, welche das Modell aus Nr. 2 überführt. In diesem Sinne heißt es etwa über die Entstehung der fünften Ansicht (Nr. 5), dass die Darstellung entstünde, wenn die Gegenebene das Knotentetraeder des zweiten Modells oberhalb der untersten Ecke parallel zur Grundfläche in einem Oval schneide.<sup>51</sup> Das Oval fällt dann bei der entstandenen Fläche ins unendlich Ferne.

Die Lage der Fläche bezüglich des unendlich Fernen spielt für die Anschauung eine große Bedeutung. Bei einer unpassenden Wahl der zugehörigen Ebene können wichtige Merkmale der Fläche aus dem sichtbaren Bereich verschwinden. Dennoch ist die Situation nicht vergleichbar mit den imaginären Elementen innerhalb der Geometrie. Oftmals erlaubt das, was durch die Wahl affiner Koordinaten sichtbar wird, Rückschlüsse auf die Gestalt der Fläche im Unendlichen. Sie wird beschrieben durch das asymptotische Verhalten des sichtbaren Teils. Auf algebraischer Seite

<sup>50</sup> Wortwörtlich heißt es: „Da eine Fläche mit 4 Knoten keine absolute Invariante hat, so lassen sich aus der vorliegenden alle anderen mit 4 reellen Knoten durch reelle Collineation ableiten. Hinsichtlich des Verhaltens im Unendlichen muss man dabei fünf Haupttypen unterscheiden.“ Klein und Clebsch, „Göttinger Nachrichten“, S. 404.

<sup>51</sup> Brill, Ludwig. *Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht*. 3. Aufl. Darmstadt: Verlagshandlung Brill, 1885, S. 30.

entspricht dies dem Verhalten der Terme höchster Ordnung in der zugehörigen Gleichung (5.4). Wenn  $f$  ein homogenes Polynom  $n$ -ten Grades ist, so lässt es sich in der Form  $f = f_0 + f_1 + \dots + f_n$  schreiben, wobei  $f_d$  aus allen Monomen von  $f$  vom Grad  $d$  besteht. Die Gleichung  $f_n = 0$  beschreibt einen Kegel (Asymptotenkegel), dem sich die zugehörige Fläche nach der Substitution (5.5) asymptotisch annähert. Das Verhalten einer Fläche im Unendlichen lässt sich durch die punktsymmetrische Kurve veranschaulichen, die sich beim Schnitt des Kegels mit einer Sphäre um den Ursprung ergibt. Die Gestalt dieser Kurve, welche alleine von den höchsten Termen in der Flächengleichung abhängt, beschreibt die Richtungen der Asymptoten.

### Ein zweites Modell

Für Felix Klein waren die Unterschiede in der Darstellungsweise der Flächen nicht unerheblich. Sein Interesse an Neesens Modell war eng verbunden mit einer Idee, die er auf der Sitzung schildert: „Deformirt man eine solche Fläche im Endlichen durch stetige Prozesse, wobei die in einem Knotenpunkte an einander stossenden Theile sich entweder vereinigen oder sich vollends treffen können, so erhält man schematisch die Gestalten anderer Flächen dritten Grades. Man beweist, dass man alle Flächen dritten Grades auf diese Weise erzeugen kann, so dass man auf diesem Wege eine vollständige Uebersicht der bei Flächen dritten Grades überhaupt möglichen Gestalten erhält.“<sup>52</sup>

In dem Bericht führt Felix Klein den Gedanken nicht weiter aus, der ihn jedoch darüber hinaus beschäftigte. Aufgrund seiner neuen Professur in Erlangen und des Todes Alfred Clebschs im November 1872 kam er erst im darauffolgenden Jahr dazu, seine Idee auszuarbeiten.<sup>53</sup> Im Mai des Jahres 1873 griff er das Thema bei einer Sitzung der *Physikalisch-Medizinische Sozietät zu Erlangen* wieder auf.<sup>54</sup> Am Beginn des Protokolls wird erwähnt, dass Klein Modelle von Herrn Weiler vorgelegt habe, welche Flächen dritter und vierter Ordnung zeigen. Neesens Werk wurde zwar auf der Sitzung erwähnt, aber offenbar hatte es Klein nicht mitgebracht. Stattdessen wird auf den Bericht in den *Göttinger Nachrichten* verwiesen, der die Beschreibung des Modells enthält. Felix Klein hatte in der Zwischenzeit Adolf Weiler darum gebeten, ein neues Modell herzustellen, das die Fläche mit vier reellen Knotenpunkten in einer anderen Lage bezüglich der unendlich fernen Ebene zeigt. Weiler kam seiner

<sup>52</sup> Klein und Clebsch, „Göttinger Nachrichten“, S. 404.

<sup>53</sup> Tobies, *Felix Klein*, S. 96.

<sup>54</sup> Klein, Felix. „Ueber Flächen dritter Ordnung“. In: *Physikalisch-Medizinische Sozietät zu Erlangen: Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät zu Erlangen* 5 (1873).

Bitte nach.<sup>55</sup> Es ist nicht bekannt, wo sein Originalentwurf verblieben ist. In einem Artikel, der im Dezember desselben Jahres in den *Mathematischen Annalen* unter dem Titel „Über Flächen dritter Ordnung“ veröffentlicht hat, gibt Felix Klein jedoch eine Beschreibung des Weilerschen Modells. Offenbar bildete es später die Vorlage für Rodenbergs zweite Form (vgl. Abb. 8.13).

Die Knotenpunkte bilden ein gleichseitiges Tetraeder, das nach unten gekehrt ist. Daneben besteht die Fläche noch aus einem zweiten Teil. Er ist überall hyperbolisch gekrümmt, während das Tetraeder abgesehen von den Ecken nur aus elliptischen Punkten besteht. Im Gegensatz zu Neesens Modell besteht Weilers Modell nur aus zwei Flächenstücken. Das elliptische Tetraeder verbleibt im Endlichen. „Der hyperbolische Teil setzt sich nach außen an die vier Knotenpunkte an und breitet sich von diesen ab wesentlich horizontal aus, so daß er die unendlich ferne Ebene in einem symmetrischen Kurvenzuge schneidet, der drei auf einer Horizontalen gelegene Wendungen besitzt.“ Das unendlich Ferne schneidet hier nur einen Teil der Fläche, währenddessen er bei Neesen zwei Flächenstücke voneinander trennte. Für Felix Klein war dies nicht unerheblich, auch wenn beide Flächen „für die projektivische Auffassung“ zu derselben Art gehören. Denn: „Die räumliche Anschauung löst sich aber nur schwer von der gewöhnlichen Weise ab, für welche das Unendlich-Weite seine besondere Geltung beansprucht.“<sup>56</sup>

### „Über Flächen dritter Ordnung“

Die Modelle spielten in Felix Kleins Forschung eine tragende Rolle. Er entwickelte an ihnen seine Idee von der Deformation kubischer Fläche. In seinem Artikel „Über Flächen dritter Ordnung“ schildert er zwei unterschiedliche Prozesse, mit denen sich die singulären Punkte auflösen lassen. In einem reellen Doppelpunkt kommen zwei verschiedene Partien der Fläche zusammen. In einer Umgebung des Punktes ähnelt die Fläche einem doppelseitigen Kegel, dem Tangentenkegel in diesem Punkt.<sup>57</sup> Wenn die beiden Partien in dem Punkt miteinander verbunden werden, geht der Tangentenkegel gewissermaßen in ein einschaliges Hyperboloid über. Werden sie stattdessen getrennt, so entsteht anstelle des Kegels ein zweisechaliges Hyperboloid. Durch beide Formen der lokalen Deformationen wird der betreffende Doppelpunkt aufgelöst, wie

<sup>55</sup> Wann genau Weiler das Modell fertig gestellt hat und ob es zu denen gehörte, die Klein zur Erlanger Sitzung mitbrachte, ist allerdings unklar.

<sup>56</sup> Klein, Felix. „Ueber Flächen dritter Ordnung“. In: *Mathematische Annalen* 6.4 (1873), S. 555.

<sup>57</sup> Der Tangentenkegel einer Fläche  $f = 0$  in einem singulären Punkte  $p$  wird von dem quadratischen Teil des Taylorpolynoms von  $f$  in  $p$  definiert.

Klein erläutert. Die neu entstandene Fläche besitzt einen singulären Punkt weniger. Ohne es explizit zu erwähnen, zieht Felix Klein offenbar nur solche Deformationen in Betracht, die den Grad der Fläche unverändert lassen.

Wenn die beiden Prozesse des Trennen und Verbindens der Reihe nach auf  $n$  der vier Knoten angewendet werden, so entstehen  $n + 1$  verschiedene Typen von Flächen mit  $4 - n$  Knoten. Felix Klein bezeichnet sie mit römischen Ziffern. Er enthält demnach fünf verschiedene Typen von regulären Flächen. Um sie in Schläflis Klassifikation einzuordnen, versucht er anschließend, die Anzahl der reellen Linien zu bestimmen, die beim Auflösen eines Doppelpunktes durch Verbinden und Trennen der angrenzenden Flächenpartien hinzukommen oder verschwinden. Je zwei Doppelpunkte werden von einer Linie verbunden, die ihrer ganzen Länge nach auf der Fläche liegt. Nach Klein würde jede reelle Linie, die durch einen Doppelpunkt läuft, sich beim Trennen in zwei neue aufspalten, während sie beim Verbinden imaginär werde.<sup>58</sup> Werden demnach zwei Punkte aufgelöst, indem die Partien an ihrer Stelle zusammengeführt werden, so würden demnach vier neue Geraden aus der gemeinsamen Verbindungslinie hervorgehen. Die Linien jedoch, die nicht durch den aufgelösten Doppelpunkt gehen, blieben durch die Deformation erhalten.

### Doppeltangenten

Was Felix Klein über die Anzahl der Linien erläutert, die bei den beiden Prozessen des Auflösens jeweils entstehen und verschwinden, lässt sich nicht ohne Weiteres nachvollziehen. Er war sich der Schwierigkeiten bewusst, die der Versuch hervorruft, sich den Prozess der Deformation vorzustellen. Deshalb suchte er nach einem anderen Weg, um die Änderungen an der Fläche zu veranschaulichen: „Um dies sicherer einzusehen, als es bei der geringen Uebung, welche unsere räumliche Anschauung in solchen Dingen besitzt, gelingen will, bilde ich die Fläche dritten Grades von einem ihrer Punkte durch Projection auf eine Doppelebene ab.“<sup>59</sup> Anstatt demnach die Veränderung an der Fläche zu verfolgen, betrachtet er ihr Bild unter einer Projektion.

Felix Klein verweist in diesem Zusammenhang auf eine Arbeit des Schweizer Mathematikers Carl F. Geiser (1843–1934), die einige Jahre zuvor in den *Annalen* veröffentlicht worden ist.<sup>60</sup> In dem Artikel bewies Geiser, dass die 27 Linien einer kubischen Fläche in einer engen Beziehung zu den Doppeltangenten einer Quartik

<sup>58</sup> Klein, „Ueber Flächen dritter Ordnung“, S. 564.

<sup>59</sup> Ebd., S. 564.

<sup>60</sup> Geiser. „Ueber die Doppeltangenten einer ebenen Curve vierten Grades“. In: *Mathematische Annalen* 1.1 (1869).

standen. Julius Plücker hatte 1839 gezeigt, dass es für eine reguläre Kurve vierten Grades genau 28 Geraden gibt, die sie in zwei Punkten die Kurven tangential berühren. Er konnte auch die Gleichung einer Quartik angeben, für die alle Geraden reell sind.

Geiser ging bei seinem Beweis in mehreren Schritten vor. Der Projektionskegel in einem beliebigen Punkt besteht aus allen Tangenten, die sich durch den Punkt an die Fläche legen lassen. Zu ihm gehören auch alle Geraden, welche seine Spitze mit den singulären Flächenpunkten verbinden. Für Flächen dritten Grades ist dieser Kegel von sechster Ordnung. Arthur Cayley hat gezeigt, dass dieser Projektionskegel im Allgemeinen 27 Doppelebenen besitzt.<sup>61</sup> Wenn jedoch das Zentrum der Projektion auf der Fläche liegt, so zerfällt er in eine doppelzählende Tangentialebene in diesen Punkt und einen Kegel der vierten Ordnung. Geiser betrachtete den Schnitt des Kegels mit einer festen Ebene. Diese Kurve (Schattenriss) ist von vierter Ordnung. Doppelpunkte der Fläche werden auf Doppelpunkte der Kurve projiziert. Für eine kubischen Fläche mit vier reellen Doppelpunkten muss der Schattenriss deswegen in zwei Kegelschnitte zerfallen.

Felix Klein möchte nun die Änderungen der Flächenform unter einer Deformation anhand der Projektionskurve nachvollziehen. Er verweist seine Leser auf eine Zeichnung, die Adolf Weiler von seinem Modell angefertigt hat (s. Abb. 5.3). Sie zeigt das Tetraeder, welches von den vier Doppelpunkten gebildet wird. Klein legt das Zentrum des Projektionskegel in den höchsten Punkt dieses Polyeder. Der Vorteil dieser Wahl besteht darin, dass der elliptische Teil der Fläche innerhalb des Kegels liegt.<sup>62</sup> Die Tangenten an Punkte des Tetraeders liegen deshalb nicht auf dem Projektionskegel. Klein folgert, dass die beiden Kegelschnitte des Schattenrisses imaginär sind. Sein reeller Teil besteht allein aus vier Schnittpunkten.<sup>63</sup> Die sechs Verbindungslinien dieser Punkte sind Doppeltangenten der Kurve. Sie sind die Bilder der Tetraederkanten.

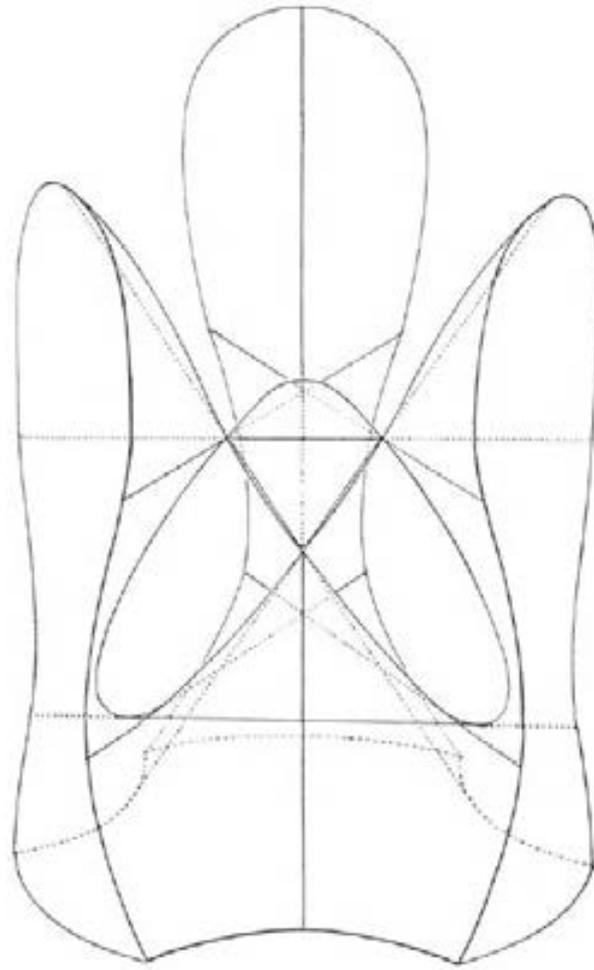
### **Auflösung der Doppelpunkte**

Anschließend beschreibt Klein, wie sich die Gestalt der Projektionskurve ändert, wenn die Fläche in der Nähe eines Doppelpunktes deformiert wird. Der zugehörige Punkt auf der Bildebene verschwände, sobald die Fläche im zugehörigen Knoten getrennt werde. Werden die angrenzenden Flächenteile jedoch verbunden, so ginge der Bildpunkt der Projektion in ein Oval über. Beim Trennen werde jede Doppeltangente

<sup>61</sup> Cayley, „On the Triple Tangent Planes of Surfaces of the Third Order“.

<sup>62</sup> Klein, „Ueber Flächen dritter Ordnung“, S. 564.

<sup>63</sup> Felix Klein macht hier keine Angaben zur Wahl der Bildebene.



**Abb. 5.3:** Weilers Zeichnung seines Modells. Quelle: Klein, Felix. „Ueber Flächen dritter Ordnung“. In: *Mathematische Annalen* 6.4 (1873).

imaginär, die zuvor durch den besagten Punkt ging. Beim Verbinden spalte sie sich hingegen in zwei neue auf. Ausgehend davon bestimmt Klein die Gesamtanzahl der reellen Linien, die auf den Flächen liegen, die beim sukzessiven Anwenden der beiden Prozesse auf die vier reellen Doppelpunkte entstehen. Er bemerkt am Rande, dass beim Auflösen eines singulären Punktes alle Geraden der Fläche erhalten blieben, die nicht durch den betreffenden Doppelpunkt gingen. Deshalb berücksichtigt er nur die Änderungen, welche die Verbindungslinien zweier Knoten betreffen. Die Tabelle 5.3 gibt für jeden Typ, der durch die Deformationen entsteht, die jeweilige Anzahl an reellen Linien an.

In fast allen Fällen ist es möglich, den zugehörigen Typ von kubischer Flächen der Schläffischen Klassifikation anhand dieser Zahl zu bestimmen. Die einzige Ausnahme

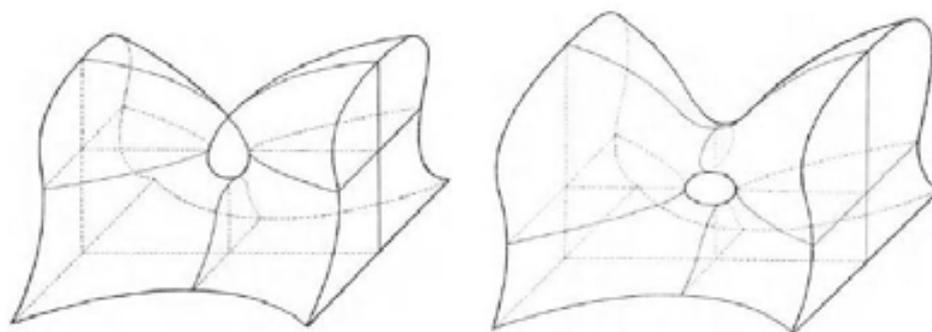
bilden die Flächen mit vier aufgelösten Knoten (vgl. Tab. 5.3), unter denen sich zwei Typen IV und V mit derselben Anzahl an reellen Linien befinden. Bei einem wurde einmal der Prozess des Verbindens zur Auflösung verwendet, bei dem anderen nie. Demnach bestehen alle Flächen des Typs V aus zwei Teilen, während die des erstgenannten nur aus einer zusammenhängenden Komponenten bestehen. Klein verweist an dieser Stelle auf Ludwig Schläfli, der bereits gezeigt hat, dass seine fünfte Art einer zweiteiligen Fläche entspricht.

Klein fasst alle Flächen unter einer Art, die sich (stetig) ineinander überführen ließen, ohne dass sich dabei die Anzahl und der Typ der auftretenden Singularitäten ändert. Im modernen Sinne ließe sich dies folgendermaßen formulieren: Jede Fläche kann mit einem Punkt im 19-dimensionalen projektiven Raum identifiziert werden. Zwei Flächen heißen dann in Kleins Sinne äquivalent, wenn es zwischen den ihnen entsprechenden Punkten  $f_1$  und  $f_2$  einen stetigen Pfad gibt, der beide miteinander verbindet, und der zudem nur solche Punkte durchläuft, die Flächen mit derselben Konfiguration an Singularitäten repräsentieren.<sup>64</sup>

<sup>64</sup> Diese Vorstellung war Klein durchaus vertraut, der schrieb: „Eine Fläche dritter Ordnung hängt von 19 Konstanten ab. Die Gesamtheit aller Flächen dritter Ordnung (wobei nur an Flächen mit reellen Koeffizienten gedacht sein soll) bilden also eine Mannigfaltigkeit von 19 Dimensionen. In dieser Mannigfaltigkeit füllen die Flächen mit Knotenpunkten einen Raum von nur 18 Dimensionen aus, welcher die ganze Mannigfaltigkeit zerlegt, so daß man aus einem Gebiete in ein anderes nur dadurch treten kann, daß man diesen Raum von 18 Dimensionen durchsetzt. Jedes dieser Gebiete repräsentiert nun eine Art von Flächen ohne Knotenpunkt.“ In ähnlicher Weise, so führt er aus, würde die 18-dimensionale Mannigfaltigkeit der Flächen mit singulären Punkten durch die Mannigfaltigkeit der Flächen mit zwei konischen Punkten oder einem biplanaren Punkt (Typ  $B_3$ ) in disjunkte Gebiete zerlegt werden. Felix Kleins Ausführungen erinnern bereits sehr an die moderne Sichtweise. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Fläche dritter Ordnung  $\{f = 0\}$  Singularitäten hat, ist die Existenz einer gemeinsamen Nullstelle aller 4 partiellen Ableitung von  $f$ . Diese existiert dann und nur dann, wenn ihre gemeinsame Diskriminante  $\Delta(f)$  verschwindet. Im Allgemeinen ist  $\Delta$  ein Polynom vom Grad 32 in den Koeffizienten von  $f$ . George Salmon und Alfred Clebsch veröffentlichten 1860 jeweils eine Darstellung für  $\Delta$  als Polynom in 4 fundamentalen Invarianten, die sie unabhängig von einander entwickelt hatten: Salmon, George. „On Quaternary Cubics“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 150 (1860). Der britische Mathematiker William Edge wies 1980 darauf hin, dass die Formel Salmons falsch ist, und gab eine Korrektur: Edge, W. L. „The Discriminant of a Cubic Surface“. In: *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences* 80A.1 (1980).

## Durchgang durch einen Biknoten

Felix Klein betrachtet in seiner Arbeit auch die Transformation eines Doppelpunktes in einem biplanaren Punkt durch Deformationen. In einem biplanaren Punkt ist der Tangentenkegel in ein Paar von Biebenen zerfallen, die auch beide imaginär sein können, deren gemeinsame Achse jedoch immer reell ist.<sup>65</sup>



**Abb. 5.4:** Weilers Zeichnungen zeigen eine Fläche mit Doppelpunkt (links), der durch den Prozess des Verbindens aufgelöst wird (rechts). Quelle: Klein, Felix. „Ueber Flächen dritter Ordnung“. In: *Mathematische Annalen* 6.4 (1873).

Klein beschreibt zuerst, wie eine Fläche dritten Grades in der Nähe eines biplanaren Punktes aussehen kann. Abermals unterstützt er seine Erläuterungen mithilfe zweier Zeichnungen, die Weiler angefertigt hat (Abb. 5.5). Sie zeigen verschiedene Formen einer Fläche mit reellen Biebenen. Gleichzeitig beschreibt er die Gestalt von charakteristischen Kurven, in denen die Fläche von Ebenen geschnitten wird, welche durch die Achse der beiden Biebenen gehen. Für den Fall zweier imaginärer Biebenen erklärt er nur, dass die Fläche dann an die Form erinnere, die bei der Rotation einer Kurve mit Spitze um deren Tangente entstünde. Er verzichtet auf eine Abbildung.

Felix Klein beschreibt unterschiedliche Deformationen, bei denen biplanare Punkte entstehen. Ein biplanarer Punkt mit imaginären Biebenen bilde den Übergang zwischen einer Fläche mit isoliertem und einer mit nicht isoliertem Doppelpunkt. Hier verzichtet Klein auf eine Veranschaulichung. Schwieriger sind die Verhältnisse bei einem biplanaren Punkt mit reellen Ebenen. Er entstünde durch das Zuziehen des Durchganges, der an den Punkt anschließt. Felix Klein verweist an dieser Stelle auf Weilers Zeichnung, die hier als Abb. 5.4 wiedergegeben ist. Wird der biplanare Punkt weiter deformiert, so entstünde abermals eine Fläche mit Doppelpunkt, deren

<sup>65</sup> Die beiden verschiedenen Typen sind später von Karl Rodenberg dargestellt worden. Es handelt sich um die Modelle Nr. 10 (imaginäre Biebenen) und Nr. 11 (reelle Biebenen) seiner Serie.

Öffnung jedoch anders orientiert sei. Wenn eine Fläche in der Nähe eines Doppelpunktes verformt wird, indem der Punkt durch einen biplanaren Punkt hindurchgeht, entsteht wieder eine Fläche mit derselben Anzahl an Doppelpunkten. Die Doppelpunkte besitzen jedoch eine andere Orientierung. Wenn diese Deformation gestattet wird, dann lassen sich mithilfe der beschriebenen Prozesse alle kubischen Flächen mit Doppelpunkten gewinnen.



**Abb. 5.5:** Weilers Zeichnungen zeigen jeweils eine Fläche mit unterschiedlichen Arten von biplanaren Punkt. Seine Bieebenen können die Fläche in nur einer (links) oder in drei reellen Geraden (rechts) schneiden. Quelle: Klein, Felix. „Ueber Flächen dritter Ordnung“. In: *Mathematische Annalen* 6.4 (1873).

## 5.6 Rodenbergs Modelle

Karl Rodenberg konstruierte 1878 eine Serie von 26 Gipsmodellen, um die verschiedenen Singularitäten darzustellen, die bei kubischen Flächen auftreten können (Abb. 8.12 – 8.26). Sie entstand während seiner Arbeit an einer Dissertation zur Klassifikation kubischer Flächen, die Rodenberg bei Felix Klein schrieb.<sup>66</sup> Er orientierte sich bei seiner Einteilung an Klein, der von der Fläche mit vier einfachen Knoten ausgegangen war, um aus ihr andere Typen durch Deformationen zu erzeugen.

Rodenberg fasste jene Flächen als gleich auf, die sich durch kontinuierliche Deformationen ineinander überführen ließen, ohne dass dabei eine neue Singularität auftritt oder vorhandene ihren Typ verändern, wie er in seiner Beschreibung festhält.<sup>67</sup> Seine Modellsreihe zeigt 13 verschiedene Typen der Schläflischen Klassifikation. Bei der Auswahl der dargestellten Typen orientierte sich Rodenberg an der Ordnung, die Felix Klein in seiner Arbeit entworfen hatte. Für die Fläche mit vier reellen Knoten gab er fünf verschiedene Darstellungen (Nr. 2–6). Von den Konfigurationen hoher

<sup>66</sup> Rodenberg, Carl. „Zur Classification der Flächen dritter Ordnung“. In: *Mathematische Annalen* 14.1 (1878).

<sup>67</sup> Rodenberg, Carl. „VII: Modelle von Flächen 3. Ordnung“. In: *Mathematische Modelle angefertigt im mathematischen Institut des königlichen Polytechnikums zu München* (1878).

Kodimension entwarf er mehrere Modelle, von den Typen mit niedriger hingegen nur wenige (Tab. 5.2).

Im Folgenden werden die Modelle der Serie beschrieben. Die Nummern beziehen sich auf die Reihenfolge, die Rodenberg verwendet hat, und welche im Katalog des Verlages von Martin Schilling beibehalten worden ist.<sup>68</sup> Die Farbangaben zu den Linien beziehen sich auf dieselbe Quelle. Im Katalog ist von weißen, roten, blauen und grünen Linien die Rede. Weiß steht – in der Regel – für unäre, die restlichen Farben hingegen für mehrfach zählende und andersartige Linien.

**Nr. 1** Das erste Modell der Serie zeigt eine Clebsche Diagonalfäche (Abb. 8.12). Es handelt sich um eine spezielle Fläche des Schläflischen Typs 1. Sie besitzt zehn Eckardt-Punkte, während die allgemeine Fläche dritten Grades nur einen Punkt aufweist. Von den zehn Punkten befinden sich jedoch drei im unendlich Fernen. Es handelt sich um die Eckpunkte des zugrundeliegenden Pentaeders, dessen 15 Diagonalen weiß dargestellt sind.

Die verbleibenden zwölf roten Linien formen eine Schläflische Doppelsechs. Sie tragen die Nummern 1–6 mit und ohne Apostroph, je nachdem zu welcher der beiden Sechsen sie gehören. Rote Linien mit gleicher Nummer schneiden sich nicht, während alle übrigen Paare zusammen mit einer weißen Linie in einer Ebene liegen. Die Diagonalen sind mit einer zweistelligen Nummer gekennzeichnet, die sich aus den beiden Ziffern der roten Linien zusammensetzen, von denen sie getroffen werden.

Die 45 Tritangentialebenen unterteilen sich in die fünf Seiten- und zehn Diagonalfächen des Pentaeders und 30 Ebenen, die von Paaren inzidenter Linien der Doppelsechs bestimmt werden. Die Ecken des Pentaeders bilden die einzig reellen Punkte der parabolischen Kurve. Von ihnen liegen drei im unendlich Fernen. Die Fläche ist überall hyperbolisch gekrümmt.

**Nr. 2–6** Diese Modelle zeigen alle unterschiedliche affine Ansichten einer Fläche mit vier gewöhnlichen Doppelpunkten (Abb. 8.13 – 8.14). Sie bilden ein Tetraeder, dessen verlängerte Kanten vollständig auf der Fläche liegen. Diese sechs Linien zählen vierfach, da sie jeweils zwei Doppelpunkte verbinden. Daneben verlaufen drei weitere Linien auf einer separaten Ebene, wobei eine davon beim Modell Nr. 6 im unendlich Fernen liegt.

Die fünf Modelle unterscheiden sich nur durch die Lage der unendlich fernen Ebene. Zwischen ihnen gibt es jeweils eine reelle Kollineation, welche die Flächen ineinander überführt. Das Bild der unendlich fernen Ebene unter dieser Abbildung wird von Rodenberg Gegenebene der Kollineation genannt. Die Form der Modelle

<sup>68</sup> Brill, *Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht*, S. 30.

Nr. 3–6 entstehen, wenn eine Gegenebene in Bezug auf das zweite Modell gewählt wird. Wenn sie das Tetraeder nicht (Nr. 3), es oberhalb der vier Doppelpunkte (Nr. 4), zwischen ihnen und dem untersten Punkt (Nr. 5) oder zwischen zwei Knotenpaaren in einer der weißen Linien (Nr. 6) schneidet, entstehen die jeweils dargestellten Flächen.

Der Asymptotenkegel trifft das unendlich Ferne für die Modelle Nr. 3–6 in einer Kurve mit Oval, beim zweiten jedoch in einem zusammenhängenden Kurvenzug. Dementsprechend bestehen die zuerst genannten aus drei Komponenten, das letzte hingegen nur aus zwei Teilen, die in den Knotenpunkten zusammenhängen. Bei den Formen 3, 4 und 6 liegt allerdings jeweils ein Flächenstück unter dem Gips verborgen, das sich kegelförmig nach unten erstreckt. Die parabolische Kurve besteht bei allen Modellen aus den doppelt zählenden Kanten des Tetraeders, dessen Punkte sonst jedoch elliptisch gekrümmt sind. Der andere Flächenteil ist dagegen hyperbolisch gekrümmt.

**Nr. 7–8** Die Modelle stellen jeweils eine Fläche mit drei gewöhnlichen Doppelpunkten dar (Abb. 8.15). Sie ist vom Schläflischen Typ VIII. Das siebente verhält sich zu dem achten Modell der Serie wie eine Positiv- zu einer Negativform. Die Fläche zerlegt den Raum in zwei Kammern, von denen jede einmal als Gussform verwendet worden ist.<sup>69</sup>

Von den zwölf reellen Linien, die auf den Modellen zu sehen sind, verbinden drei Doppelpunktpaare. Sie zählen vierfach. Durch jeden Doppelpunkt gehen zudem noch zwei doppelt zählende Linien. Es handelt sich um die blau eingefärbten Geraden. Unterhalb des Dreiecks, das von den drei Doppelpunkten gebildet wird, liegen noch drei einfache (weiße) Linien. Sie schneiden sich in einem Eckardt-Punkt. Im Allgemeinen treffen sie sich jedoch nicht in einem Punkt. Ihre Schnittpunkte bilden stattdessen ein echtes Dreieck.

Der Asymptotenkegel schneidet hier das unendlich Ferne in einer durchgehenden Kurve. In dem Katalog des *Schilling-Verlages* heißt es, dass die parabolische Kurve aus den drei jeweils doppelt zählenden roten Linien und einer Kurve der sechsten Ordnung bestände.<sup>70</sup> Sie habe drei Doppelpunkte in den  $C_2$ -Punkten. Möglicherweise war Karl Rodenberg hier bei seinem ursprünglichen Entwurf ein Fehler unterlaufen, wie es später der Münchener Professor Gustav Bauer (1820–1906) im Mai 1883

<sup>69</sup> Rodenberg beschreibt seine Entscheidung, einen zweiten Entwurf anzufertigen, mit den Worten: „Modell 8 wurde ausgeführt, um das Kegelförmige der Parthien in der Nähe der Knoten besser zur Anschauung zu bringen, man erkennt die Uebereinstimmung der Art beider, wenn man eines mit seinem Fusse nach oben kehrt.“ Rodenberg, „VII: Modelle von Flächen 3. Ordnung“, S. 6.

<sup>70</sup> Schilling, *Catalog mathematischer Modelle*, S. 117.

bei einer Sitzung der *Münchener Akademie der Wissenschaften* behauptet hat.<sup>71</sup> Ob Rodenbergs Darstellung der parabolischen Kurve tatsächlich falsch war und erst nachträglich korrigiert worden ist, ließ sich in dieser Arbeit nicht klären. Auf dem Modell ist die Kurve jedenfalls richtig und gemäß Bauers Beschreibung dargestellt.

**Nr. 9** Das Modell zeigt drei biplanare Punkte vom Typ  $B_3$  mit reellen Bi- oder Hauptebenen (Abb. 8.16). Es handelt sich um eine Darstellung des Schläffischen Typs XXI. Die drei Linien, welche auf der Fläche liegen und die singulären Punkte miteinander verbinden, zählen neunfach. Gemeinsam bilden sie die parabolische Kurve, die elliptisch gekrümmte Regionen der Fläche trennt. Ihr Asymptotenkegel zerfällt nicht.

**Nr. 10–11** Die beiden Formen stellen eine kubische Fläche mit einem biplanaren Punkt dar (Abb. 8.18). Demnach veranschaulichen sie den Schläffischen Typ III. Allerdings unterscheiden sie sich hinsichtlich der Realitätsverhältnisse. Bei Nr. 10 sind die beiden Biebenen reell, bei Nr. 11 hingegen konjugiert imaginär. Rodenberg weist darauf hin, dass das elfte Modell einen Spezialfall veranschaulicht.<sup>72</sup>

In dem ersten Fall reeller Biebenen sind 15 reelle Linien vorhanden, in dem anderen hingegen nur drei. Von den fünfzehn Linien bei Nr. 10 gehen sechs durch den singulären Punkt, die jeweils dreifach zu zählen sind. Daneben gehören noch neun unäre Geraden zur Fläche, von denen jedoch im vorliegenden Fall drei in der unendlich fernen Ebene liegen. Wenn die Haupt- oder Biebenen imaginär sind (Nr. 11), so gibt es nur drei einfache reelle Linien,

Beim zehnten Modell zerfällt der Asymptotenkegel in drei Ebenen, beim elften schneidet er das unendlich Ferne hingegen in einem Kurvenzug. Der reelle Anteil der parabolischen Kurve besteht bei Nr. 10 aus einer Kurve, von der vier Zweige durch den biplanaren Punkt hindurchgehen. Sie besteht aus zwei ovalförmigen Schleifen, die seitlich am Knoten anliegen, und zwei parabelförmigen Zügen, welche sich auf den beiden Flügeln der Fläche ins unendlich Ferne erstrecken. Bei Nr. 11 zerfällt die parabolische Kurve (wie die Hessesche Fläche auch) in zwei Teile: Der Schnittkurve eines Kegels dritter Ordnung mit unendlich ferner Spitze und der Schnittkurve einer horizontalen Ebene mit der Fläche, die durch ihren biplanaren Punkt hindurchgeht.

**Nr. 12** Das Modell zeigt eine Fläche mit einem biplanaren und zwei konischen Punkten. Die Achse, in der sich die beiden reellen Biebenen schneiden, verläuft auf der Fläche. Der Punkt ist demnach vom Typ  $B_4$ . In ihm haben sich zwei Doppel-

<sup>71</sup> Bauer, Gustav. „Von den gestaltlichen Verhältnissen der parabolischen Curve auf einer Fläche dritter Ordnung“. In: *Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München (1883)*. Bd. 13. München: F. Straub, 1884.

<sup>72</sup> Rodenberg, „VII: Modelle von Flächen 3. Ordnung“, S. 23.

punkte vereinigt, deren Verbindungsgerade dann zur Achse geworden ist.

Die beiden Doppelpunkte sind mit dem biplanaren Punkt durch zwei Geraden verbunden, die jeweils achtfach zählen. Eine weitere Gerade komplimentiert das Knotendreieck. Sie zählt vierfach und geht durch die beiden konischen Punkte. Neben der grünen sechsfach zählenden Achse liegt noch eine unäre (weiße) Linie auf der Fläche.

**Nr. 13** Im Gegensatz zu dem vorherigen Modell, sind hier beide Doppelpunkte imaginär (Abb. 8.20). Dasselbe gilt für die Bieebenen, die sich jedoch nach wie vor in einer Linie treffen, die auf der Fläche liegt. Sie zählt vierfach. Die abseits verlaufende Gerade verbindet die beiden imaginären Doppelpunkte. Ihre Anwesenheit mache sich nach Rodenberg durch die „feste Tangentialebene, welche die Fläche ersichtlich längs der Geraden besitzt, bemerkbar“.<sup>73</sup> Deswegen müsse auch die Linie vierfach gezählt werden.

**Nr. 14** Das Modell zeigt eine Fläche mit einem biplanaren Punkt vom Typ  $B_5$  und einem weiteren Doppelpunkt (Abb. 8.21). Die beiden reellen Bieebenen treffen sich in einer horizontalen Linie, die zehnfach zählt. Eine schneidet die Fläche außerdem noch in einer weiteren (fünffachen) Linie orthogonal zur Grundfläche. Die andere Biebene berührt die Fläche horizontal längs einer Linie, die beide singulären Punkte miteinander verbindet. Sie muss zehnfach gezählt werden. Daneben befindet sich noch ein doppelt zählender Strahl auf der Fläche, der durch den Doppelpunkt geht.

**Nr. 15** Die dargestellte Fläche hat einen biplanaren Punkt vom Typ  $B_6$  mit zwei reellen Ebenen und einen Doppelpunkt (Abb. 8.22). Neben der Biachse gibt es nur noch eine weitere Gerade, die beide Punkte miteinander verbindet. Sie zählt zwölffach, während die Achse 17 Linien absorbiert. Sie bilden gemeinsam die parabolische Kurve. Die beiden Punkte trennen zwei Partien, die gegensätzlich gekrümmt sind. Der tropfenförmige Teil ist elliptisch.

**Nr. 16–17** Die Formen veranschaulichen jeweils eine kubische Fläche mit einem uniplanaren Punkt vom Typ  $U_6$  (Abb. 8.23). Bei Nr. 16 wird die Fläche von der Ebene durch den Punkt entlang von drei Geraden geschnitten, die jeweils achtfach zählen. Hinzu kommen drei unäre Linien, die unterhalb des Knotens in einer horizontalen Ebene liegen. Sie treffen sich in einem Eckardt-Punkt. Rodenberg schreibt, dass die Fläche überall negativ (hyperbolisch) gekrümmt sei. Die parabolische Kurve bestehe aus den drei Strahlen durch den singulären Punkt und dem Schnittpunkt der drei unären Geraden.<sup>74</sup> Die Fläche ist überall hyperbolisch gekrümmt.

Währenddessen trifft die Ebene bei Modell Nr. 17 die Fläche nur in einer Geraden,

<sup>73</sup> Ebd., S. 24.

<sup>74</sup> Ebd., S. 29.

die achtfach zählt. Neben jener gibt es nur noch eine unäre Linie, die unterhalb des singulären Punktes horizontal verläuft. Die parabolische Kurve lässt sich deutlich auf dem Modell erkennen. Sie besteht aus der Geraden und einem sich zweifach durchkreuzenden Kurvenzug. Sie trennt zwei elliptische von einer hyperbolischen Flächenpartie, die wiederum von der mehrfach zählenden Geraden in zwei Bereiche getrennt wird.

**Nr. 18** Bei diesem Modell hat die dargestellte Fläche einen uniplanaren Punkt vom Typ  $U_7$  (Abb. 8.24). Die Ebene durch den Punkt geht durch zwei Linien, von denen eine 16-fach, die andere zehnfach gezählt werden muss. Parallel zu einer Geraden verläuft noch eine unäre Linie unterhalb des Knotens. Die parabolische Kurve besteht – abgesehen von Strahlen durch den Knoten – aus einem Oval, das ein elliptischen von einem hyperbolischen Flächenteil trennt. Nach der Verlagsbeschreibung würde diese Fläche den Übergang zwischen Nr. 16 und Nr. 17 markieren.<sup>75</sup>

**Nr. 19** Der uniplanare Punkt, den das Modell zeigt, ist vom Typ  $U_8$  (Abb. 8.25). Er ist die einzige Singularität auf der Fläche. Die Ebene schmiegt sich an die Fläche entlang einer Geraden an, die 27-fach zu zählen ist. Die parabolische Kurven besteht aus dieser Linie und einem Oval, das durch den singulären Punkt geht.

**Nr. 20–23** Die Modelle zeigen allesamt Regelflächen (Abb. 8.26). Sie besitzen alle eine Doppelpunktgerade. Außerdem liegt auf ihnen jeweils ein Kreis und eine gerade Linie, durch die alle erzeugenden Geraden der Regelfläche gehen. Die Linie war ursprünglich grün eingefärbt. Die Doppelgerade geht ebenfalls durch den Kreis. Sie wird von der grünen Linie bei Nr. 20 und 21 nicht geschnitten. Bei dem erstgenannten Modell geht die Linie durch das Innere des Kreises, beim letztgenannten nicht. Bei Nr. 21 sind zwei uniplanare Punkte (Zwickpunkte) auf der Doppelgeraden entstanden. In ihnen wird die Doppelgerade durch zwei erzeugende Geraden geschnitten, die rot gefärbt gewesen waren. Den Übergang zwischen den beiden Modellen veranschaulicht die Nr. 22. Es zeigt den besonderen Fall, bei dem die grüne Leitlinie den Kreis passiert, wodurch sie mit der Doppelgeraden zusammenfällt. Nr. 22 zeigt die Cayleysche Regelfläche.<sup>76</sup> Die beiden uniplanaren Punkte sind in einen Punkt vom Typ  $U_8$  zusammengefallen, der sich jedoch im unendlich Fernen befindet. Das Modell Nr. 23 zeigt ihn. Es gibt eine andere Darstellung der Cayleyschen Regelfläche, bei

<sup>75</sup> Brill, *Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht*, S. 32.

<sup>76</sup> Diese Fläche ist zuerst von Arthur Cayley beschrieben worden, der Regelflächen verschiedener Ordnung untersucht hat: Cayley, Arthur. „A Second Memoir on skew Surfaces, otherwise Scrolls“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 154 (1864), S. 570.

der der Kreis im Unendlichen verschwunden ist.

**Nr. 24–25** Die Modelle stellen beide Hessesche Flächen dar. Nr. 24 besteht aus zwei Formen (a) und (b). Sie zeigen beide verschiedene Ansichten und Ausschnitte der Hesseschen Fläche von Nr. 2 und 3. Währenddessen stellt Nr. 25 das entsprechende Gebilde von Nr. 7 dar.

### Schläfli's Klassifikation kubischer Flächen

Schläfli	Art.	Bez.	T	S	A	$\nu$	Cod.	Mod.
I	5	-	27	-	-	12	0	1
II	5	$C_2$	15	$6 \cdot 2$	-	10	1	
III	4	$B_3$	9	$6 \cdot 3$	-	9	2	10–11
IV	6	$2C_2$	7	$8 \cdot 2$	$1 \cdot 4$	8	2	
V	4	$B_4$	5	$4 \cdot 4 + 1 \cdot 6$	-	8	3	
VI	2	$B_3 + C_2$	3	$3 \cdot 2 + 4 \cdot 3$	$1 \cdot 6$	7	3	
VII	2	$B_5$	2	$3 \cdot 5 + 1 \cdot 10$	-	7	4	
VIII	4	$3C_2$	3	$6 \cdot 2$	$3 \cdot 4$	6	3	7–8
IX	4	$2B_3$	-	$6 \cdot 3$	$1 \cdot 9$	6	4	
X	2	$B_4 + C_2$	1	$2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 6$	$1 \cdot 8$	6	4	
XI	2	$B_6$	-	$2 \cdot 6 + 1 \cdot 15$	-	6	5	
XII	2	$U_6$	3	$3 \cdot 8$	-	5	5	16–17
XIII	2	$B_3 + 2C_2$	1	$2 \cdot 2 + 2 \cdot 3$	$1 \cdot 4 + 2 \cdot 6$	5	4	
XIV	1	$B_5 + C_2$	-	$1 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 10$	$1 \cdot 10$	5	5	14
XV	1	$U_7$	1	$1 \cdot 10 + 1 \cdot 16$	-	5	5	18
XVI	3	$4C_2$	3	-	$6 \cdot 4$	4	4	2–6
XVII	3	$2B_3 + C_2$	-	$2 \cdot 3$	$2 \cdot 6 + 1 \cdot 9$	4	5	
XVIII	1	$B_4 + 2C_2$	1	$1 \cdot 6$	$2 \cdot 8 + 1 \cdot 4$	4	5	12–13
XIX	1	$B_6 + C_2$	-	$1 \cdot 15$	$1 \cdot 12$	4	6	15
XX	1	$U_8$	-	$1 \cdot 27$	-	4	6	19
XXI	2	$3B_3$	-	-	$3 \cdot 9$	3	6	9
XXII	3	—	-	-	-	2	-	20–21

**Tab. 5.2:** Die Tabelle zeigt die Klassifikation Schläfli's. Unter T, S, A ist jeweils die Anzahl der Linien angegeben, welche durch keinen, einen oder zwei Doppelpunkte gehen. Die kursive Zahl gibt jeweils die Vielfachheit an. Mit  $\nu$  wird die Klasse bezeichnet. In der letzten Spalte sind die Nummern der Modelle Rodenbergs aufgeführt, die den jeweiligen Typ veranschaulichen.

### Auflösung von Doppelpunkten

Aufgelöste Doppelpunkte	Typ	Linien	Ebenen	Schläfli	Klein
–	–	9	–	XVI	–
Einer	+	12	14	VIII	I
	–	6	5	VIII	II
Zwei	++	16	7	IV	I
	+-	8	3	IV	II
	--	4	3	IV	III
Drei	+++	21	30	II	I
	++-	11	10	II	II
	+--	5	6	II	III
	---	3	10	II	IV
Vier	++++	27	45	I	I
	+++-	15	15	I	II
	++--	7	5	I	III
	+---	3	13	I	IV
	----	3	7	I	V

**Tab. 5.3:** Die Tabelle zeigt die Klassifikation Felix Kleins.



## 6. Modelle in der wissenschaftlichen Arbeit

Die vorangegangenen Seiten haben gezeigt, wie die Modelle der Jahre 1860–1877 in der damaligen Forschung verwendet worden sind. In diesem Kapitel soll nun der wissenschaftliche Stellenwert der Objekte näher betrachtet werden. In einem Artikel über Felix Kleins vierteilige Modellserie (Absch. 4.6) sprach David E. Rowe von „Artefacts of Research“.<sup>1</sup> Der Ausdruck ist treffend, denn er verweist auf die eigentümliche Doppelstellung der Objekte innerhalb geometrischer Untersuchungen. Die Modelle waren Instrumente und Produkte wissenschaftlicher Arbeit gleichermaßen. Als Anschauungsmittel gaben sie Aufschluss über die Geometrie der studierten Gegenstände. Gleichzeitig zeigten sie jedoch auch die Ergebnisse von Untersuchungen, mit denen die Gestalt algebraische Gebilde ergründet werden sollte. Ihre Herstellung beförderte den Erkenntnisprozess, setzte aber auch mathematisches Wissen voraus.

In diesem Abschnitt soll anhand der in den vorangegangenen Kapiteln betrachteten Beispiele die Position der Modelle innerhalb der Untersuchungen nachgezeichnet werden, in denen sie entstanden. Es wird gezeigt, was zur Herstellung und Verwendung der Objekte den Anstoß gab, welche Zwecke sie erfüllten und worin ihr Nutzen bestand. Am Ende wird auch auf die Probleme eingegangen, die mit der Konstruktion verbunden waren. Später soll dann der Fokus auf die historischen Zusammenhänge erweitert werden.

### 6.1 Verwendung in der Forschungspraxis

In den Jahren 1860–1877 fanden anschauliche Modelle verstärkt Verbreitung in der Geometrie. Sie besaßen dabei verschiedene Funktionen im Kontext der Forschung. Fast alle entstanden im Rahmen spezieller Untersuchungen geometrischer Gebilde. Die Modelle waren innig mit der Forschung verbunden, die zu ihrer Herstellung Anlass gab. Obwohl mit ihnen häufig neuentdeckte Formen veranschaulicht wurden, waren sie weitaus mehr als bloße Stützen der Anschauung.

<sup>1</sup> Rowe, David E. „Mathematical Models as Artefacts for Research: Felix Klein and the Case of Kummer Surfaces“. In: *Mathematische Semesterberichte* 60.1 (2013).

## Stützen der Anschauung

Die Holz- und Metallmodelle, die Julius Plücker in den 1860er Jahren während der Ausarbeitung seiner *Neuen Geometrie* entwarf, zeigen die Gestalten verschiedener Äquatorial- und Meridianflächen. Der Herausgeber des ersten Bandes von Plückers letztem Werk, Alfred Clebsch, schrieb 1869 in einer Rezension: „Die bei den Complexen zweiter Ordnung entstehenden Complexflächen interessirten Plücker überhaupt sowohl ihren allgemeinen Eigenschaften als ihrer Gestalt nach. Eine grosse Anzahl Modelle, welche er ausführen liess, und welche seitdem öfters reproducirt wurden, sind ebenso an sich von hohem Interesse, als sie insbesondere auch Plückers geometrische Art zu denken und zu arbeiten in prägnantester Weise characterisiren.“<sup>2</sup> Was sich nach Clebsch in den Entwürfen wiederfindet, ist eine spezielle Denk- und Arbeitsweise, die das Werk Plückers prägte.

Für Plücker war die Anschauung von außerordentlicher Bedeutung. Der „erste Spezialist der analytischen Geometrie“ (Carl B. Boyer) verlieh sich weitaus mehr auf sein Vorstellungsvermögen, als es spätere Darstellungen seiner Person und seines Werkes vermuten lassen.<sup>3</sup> In jungen Jahren orientierte sich der Rheinländer stark an den Arbeiten der französischen Mathematiker im Umfeld der *École polytechnique*, die von Gaspard Monge (1746–1818) geprägt waren. Plücker verbrachte 1823 als junger Mann einige Monate in Paris, wo er Vorlesungen besuchte und die Sichtweise der neuen Geometrie kennengelernte.<sup>4</sup> Der Aufenthalt hinterließ einen bleibenden Eindruck bei ihm. In einer Rezension schrieb er 1833, dass Monge eine neue Geometrie geschaffen hätte: „So wie die Figur auf dem Papier eine Darstellung der Curve giebt, so thut es ihm auch eine Gleichung. Er sieht einen vollständigen Parallelismus zwischen Construction und Rechnung, allen geometrischen Beziehungen entsprechen algebraische. Eine algebraische Rechnung bildet sich ab in der Construction, eine geometrische Construction wird ausgedrückt durch die Sprache der Algebra.“<sup>5</sup> An einer anderen Stelle schreibt Plücker mit Bezug auf die Arbeiten des französischen Mathematikers: „Hier ist es, wo ich gelernt habe und wo sich die Richtung, welche

<sup>2</sup> Clebsch, Alfred. „Plückers Neue Geometrie des Raumes“. In: *Göttingische gelehrte Anzeigen* 2 (1869), S. 1577.

<sup>3</sup> Boyer, Carl B. *History of Analytic Geometry*. New York: Scripta Mathematica, 1956, S. 244.

<sup>4</sup> Plump, Mechthild Ulrike. „Julius Plücker - Leben und Werk eines analytischen Geometers im 19. Jahrhundert“. Dissertation. Wuppertal: Universität Wuppertal, 2014, S. 30 ff.

<sup>5</sup> Plücker, Julius. *Wissenschaftliche Abhandlungen*. Hrsg. von Schoenflies, Arthur und Pockels, Friedrich. Bd. 1. Leipzig: B. G. Teubner, 1895, S. 617.

meine mathematischen Bestrebungen genommen haben, bestimmt hat.“<sup>6</sup>

Was Plücker begeisterte, war weniger die Möglichkeit, durch den Gebrauch von homogenen Koordinaten und das Aufstellen von Gleichungen geometrische Probleme zu lösen. Stattdessen war es vielmehr die Erfahrung, dass sich algebraische Ausdrücke als geometrische Formen interpretieren ließen, die ihn fesselte. Sein Schüler Felix Klein beschrieb das Wechselspiel von analytischen Entwicklungen und geometrischen Überlegungen, das die Arbeit seines Lehrers durchzog: „In der Plückerschen Geometrie wird die bloße Kombination von Gleichungen in geometrische Auffassung übersetzt und rückwärts durch letztere die analytische Operation geleitet. Rechnung wird nach Möglichkeit vermieden, dafür aber eine bis zur Virtuosität gesteigerte Beweglichkeit der inneren Anschauung, der geometrischen Ausdeutung vorliegender analytischer Gleichungen ausgebildet und in reichem Maße verwendet.“<sup>7</sup> Woran Klein dachte, findet seinen sinnbildlichen Ausdruck in der Methode der abkürzenden Bezeichnungen, die Plücker in den 1830er Jahren weiterentwickelt hat. Sie ist nach Carl Boyer zuerst von französischen Mathematikern verwendet worden.<sup>8</sup> Im Wesentlichen besteht sie darin, in Gleichungen mehrere Terme durch einen einzigen Ausdruck zu substituieren, der sich geometrisch deuten ließ. Plücker machte von der Methode ausgiebig in seinem *System der analytischen Geometrie* Gebrauch, das 1835 erschienen ist.<sup>9</sup> In dem Werk zeigte er, dass sich eine Kurve dritter Ordnung im Allgemeinen für geeignete Koordinaten in der Form

$$pqr + \mu s = 0$$

schreiben lässt.<sup>10</sup> Mit  $p, q, r$  und  $s$  bezeichnete Plücker lineare Polynome in zwei Variablen, mit  $\mu$  einen unbestimmten Koeffizienten. Er betrachtet sie jedoch nicht als algebraische Ausdrücke, sondern stellte sich stattdessen vier Geraden vor, die von den Gleichungen  $p = 0, q = 0$  etc. definiert werden. Anhand der möglichen Lagen, die sie zueinander einnehmen können, unterschied er anschließend verschiedene Arten von Kurven. Bei der rechnerischen Herleitung konnte er sich auf die Anschauung stützen.<sup>11</sup>

<sup>6</sup> Plücker, Julius. *Theorie der algebraischen Curven*. Bonn: Adolph Marcus, 1839, S. vii.

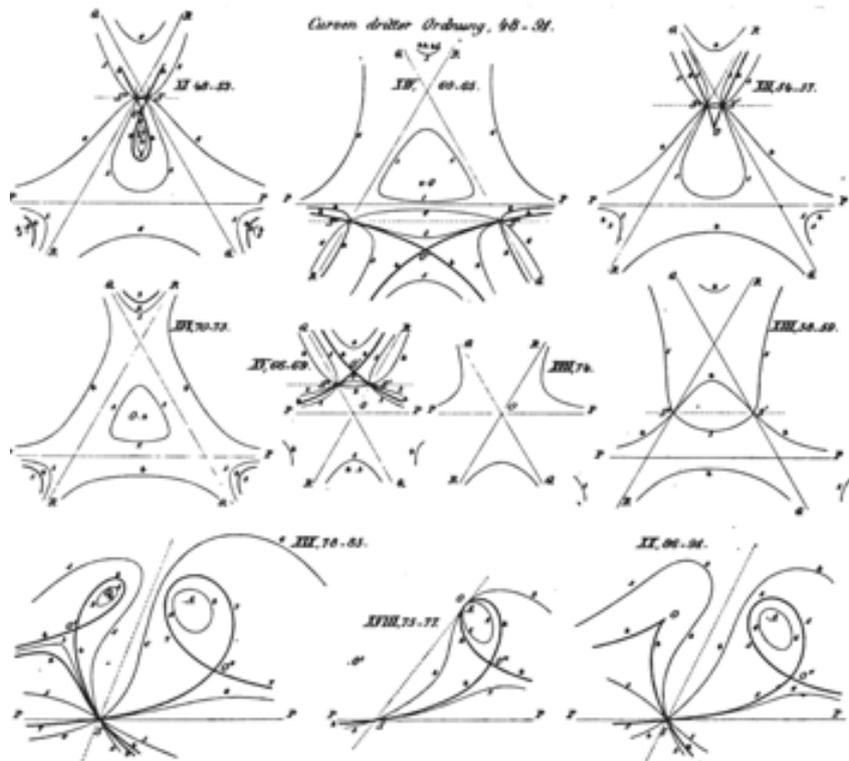
<sup>7</sup> Klein, Felix. *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*. Berlin: Springer, 1926, S. 122.

<sup>8</sup> Boyer, *History of Analytic Geometry*, S. 246.

<sup>9</sup> Plücker, Julius. *System der analytischen Geometrie*. Berlin: Verlag von Duncker und Mumblet, 1835.

<sup>10</sup> Ebd., S. 132.

<sup>11</sup> Dieselbe Methode ist auch von Ernst Kummer verwendet worden, der mit ihr die Gestalt der Kummerschen Fläche bestimmte (vgl. Absch. 3.5).



**Abb. 6.1:** Tafel aus Julius Plücker *System der analytischen Geometrie*.  
 Quelle: Plücker, Julius. *System der analytischen Geometrie*. Berlin: Verlag von Duncker und Humblot, 1835, Fig. III.

Während es Julius Plücker leicht fiel, sich von der Gestalt kubischer Kurven ein Bild zu machen (Abb. 6.1), geriet er beim Studium quadratischer Linienkomplexe an die Grenzen seines Vorstellungsvermögens. Anlässlich der Veröffentlichung seiner eigenen Modellserie 1871 erläutert Felix Klein die Bredouille, in welcher sich die Anschauung in Anbetracht der Gebilde befindet. „Die geometrische Vorstellung eines solchen Linien-Complexes wird dadurch schwierig, weil die unendlich vielen Linien, welche ihn constituiren, den Raum vollständig ausfüllen, weil also das vorzustellende Gebilde keine Gestalt hat. Um so mehr ist es wünschenswerth, Modelle zu besitzen, welche der geometrischen Anschauung zu Hülfe kommen.“<sup>12</sup> Das Vorstellungsvermögen ließ Plücker bei seinen Rechnungen im Stich. Der Wunsch, sich eine Anschauung der abstrakten Liniengebilde zu machen, führte ihn schließlich auf die Betrachtung von Komplexflächen, die von der Gesamtheit aller Linien des Complexes umhüllt werden, die eine feste Gerade im Raum passieren. Obwohl die Lage dieser Leitlinie in Bezug auf das unendlich Ferne für die Auffassung der projektiven Geometrie un-

<sup>12</sup> Klein, Felix. *Vier Modelle zur Theorie der Linien-Complexes zweiten Grades*. 1871.

wesentlich ist, unterschied Plücker die Flächen hiernach. In seiner Besprechung der *Neuen Geometrie* berichtet Alfred Clebsch: „Der Fall, wo die gegebene feste Gerade im Unendlichen liegt, wird von Plücker wegen der Anschaulichkeit seiner Eigenschaften immer noch besonders behandelt, und durch den Namen ‚Äquatorialfläche‘ von dem allgemeinen Fall (‚Meridianfläche‘) unterschieden.“<sup>13</sup> Plücker widmete sich zuerst dem leichteren Sonderfall, bei dem die Leitlinie in der unendlich fernen Ebene liegt, wodurch die quadratischen Komplexkurven parallel liegen. Die Vorzüge beschrieb er mit den Worten: „Wir gehen zu der Discussion dieser Äquatorialflächen und zunächst einer beschränkten Familie derselben über. Es leitet uns dabei die doppelte Absicht, einmal, an leicht und übersichtlich konstruirbaren Flächen eine Bestätigung der bisherigen Resultate zu finden; dann aber besonders, durch diese Flächen etwa eine *Anschauung* [Hervorhebung im Original] von der Vielgestaltigkeit der Complexflächen überhaupt und dadurch von der Vertheilung der geraden Linien in einem Complexe des zweiten Grades zu gewinnen.“<sup>14</sup>

In diesem Zusammenhang entstanden die im Kapitel 4 besprochenen Modelle. Von ihnen erhoffte sich Plücker, dass sie ihm eine bessere Vorstellung von dem Aussehen der unbekanntenen Äquatorial- und Meridianflächen gäben. Welche Erkenntnisse er durch sie für das Studium der quadratischen Komplexe selbst gewinnen konnte, lässt sich anhand der Quellen nicht ermitteln. Julius Plücker werden die Modelle spezieller Äquatorialflächen jedenfalls Aufschluss über Anzahl, Lage und Typen von Singularitäten bei beliebigen Komplexfläche gegeben haben.<sup>15</sup> Durch die Darstellung einiger besonderer Fälle, erhielt er so Auskunft über das, was im Allgemeinen galt.

## Empirische Forschung

In Plückers Forschung erfüllte die Herstellung von Modellen ähnliche Funktionen, wie die Durchführung von Experimenten in der Physik. Mit seinen Entwürfen näherte er sich dem Gegenstand, stellte Beobachtungen an und überprüfte Vermutungen. Für ihn waren geometrische Formen keine abstrakten Entitäten. Sie besaßen eine physische Gestalt, die sich betrachten ließ. Wenn er davon sprach, dass sich Gleichungen in Konstruktionen übersetzen ließen, meinte er es in diesem Sinne. Diese Vorstellung ist auch durch seine Arbeit auf dem Gebiet der Physik geprägt worden. In den

<sup>13</sup> Clebsch, „Plückers Neue Geometrie des Raumes“, S. 1577.

<sup>14</sup> Plücker, Julius. *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement*. Hrsg. von Klein, Felix. Bd. 2. Leipzig: Teubner, 1869, S. 344.

<sup>15</sup> Dies wird auch von Alfred Clebsch in seiner Rezension bestätigt: Clebsch, „Plückers Neue Geometrie des Raumes“, S. 1580 f.

ersten Publikationen führte er die neuen Gebilde ein, indem er auf das Bild sich ausbreitenden Lichts verwies, das von Punkten ausgehend, in Strahlen den gesamten Raum durchzieht.<sup>16</sup> An einer Stelle sprach er von den „six coordinates of forces“, die er betrachte.<sup>17</sup> Nicht zuletzt die Unterscheidung zwischen Strahlen- und Achsenkoordinaten, die seine *Neue Geometrie* durchzieht, obwohl sie unter analytischen Gesichtspunkten irrelevant ist, lässt erahnen, wie sehr Plücker in gegenständlichen geometrischen Bildern dachte. In diese Denk- und Sichtweise fügt sich auch die Verwendung von Modellen ein, wie sein Schüler bestätigte: „Bekanntlich hat Plücker in den letzten Jahren seines Lebens bei seinem Studium der Liniencomplexe zweiten Grades zahlreiche auf deren Theorie bezügliche Modelle anfertigen lassen. Das allgemeine Interesse an den wirklichen Gestalten auch complicirterer Flächen war ihm aus seiner physikalischen Beschäftigung erwachsen; . . .“<sup>18</sup> In einer beigestellten Fußnote erwähnt Felix Klein, dass Plücker ihm einmal erzählt habe, dass er durch den Verkehr mit dem englischen Physiker Michael Faraday (1791–1867) zur Herstellung von Modellen angeregt worden sei.

Felix Klein war seinem Lehrer aber darin ähnlich, dass er die Mathematik als eine empirische Wissenschaft verstand, welche auf die Anschauung nicht verzichten kann. Er war der festen Überzeugung, dass der mathematische Erkenntnisprozess selten den Weg der strengen Deduktion geht. In seiner *Erlanger Antrittsrede* von 1872 erklärte er seinem Publikum – Studenten und Professoren verschiedener Wissenschaften: „Glauben Sie nicht etwa, dass mathematische Production eine einfache deductive Thätigkeit sei. Im Gegentheil, das Erste ist immer, dass man inductiv, haeufig nur auf Analogien gestuetzt, die Richtigkeit einer Beziehung *ahnt*, sie auffasst, in ihren Consequenzen verfolgt; – und erst allmaehlich sucht man die Momente zu einem wirklichen Beweise zusammen.“<sup>19</sup> In derselben Rede betonte er nicht nur die Nähe von Physik und Geometrie, die er als Raumwissenschaft bezeichnete.<sup>20</sup> Er trat auch für Übungen im Zeichnen und Modellieren ein, damit die räumliche Anschauung der Studenten ausgebildet wird: „Mir scheint eine wenn auch vorueber-

<sup>16</sup> Plücker, Julius. „On a New Geometry of Space“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 155 (1865), S. 726.

<sup>17</sup> Plücker, Julius. „Fundamental Views regarding Mechanics (Abstract)“. In: *Proceedings of the Royal Society of London* 15 (1866), S. 205.

<sup>18</sup> Klein, Felix. „Vier Modelle zur Theorie der Liniencomplexe zweiten Grades“. In: *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente*. Hrsg. von Dyck, Walther. München: K. Hof- und Universitätsdruckerei, 1892, S. 283 f.

<sup>19</sup> Hervorhebung im Original: Rowe, David E und Klein, Felix. „Felix Klein’s ‘Erlanger Antrittsrede’“. In: *Historia Mathematica* 12.2 (1985), S. 131.

<sup>20</sup> Ebd., S. 133.

gehende Beschaeftigung des Studirenden in dieser Richtung in unserem Fache eben so nothwendig, als es in den einzelnen naturwissenschaftlichen Faechern die Practica sind.“<sup>21</sup> In den Augen Felix Kleins war die Geometrie ein empirisches Studium, in dem Zeichnen und Modellieren die Rolle naturwissenschaftlicher Experimente zufiel. Eine Ansicht, die sein Lehrer mutmaßlich geteilt hätte.

Wie der Stift in den Händen neue Ideen entstehen lassen konnte, wusste Felix Klein aus eigenen Erfahrungen zu berichten. Über eine Arbeit, die 1876 in den *Mathematischen Annalen* erschienen ist,<sup>22</sup> stellte er eine Beziehung zwischen der Anzahl reeller Wendepunkte und isolierter Doppeltangenten einer algebraischen Kurven her. In einer Vorbemerkung zum Wiederabdruck dieser Abhandlung in seinen *Gesammelten Werken* schreibt er: „Es ist ganz klar, dass ein strenger Beweis nur geführt werden kann, wenn man neben den geometrischen Axiomen irgendeine zureichende Definition der Kurven, welche algebraisch genannt werden, heranzieht – am einfachsten also, wenn man sich kurz entschlossen auf den Boden der abstrakten analytischen Geometrie stellt. (...) Trotzdem hat das empirischen Zeichnen von Kurvenformen mit unbestimmter Anlehnung an die analytischen Beziehungen zur Auffindung der Relation und ihrer wesentlichen Beweisgründe geführt. Ich empfehle diese Tatsache, neben vielen ähnlichen, die in der Geschichte der Mathematik bekannt genug sind, der Aufmerksamkeit all derjenigen, die sich für das Zustandekommen mathematischer Einsichten interessieren.“<sup>23</sup> Felix Klein stellt hier die Art und Weise, wie mathematische Ideen gewonnen werden, ihrer letztendlichen Deduktion im Beweis an die Seite. Die entscheidenden Gedanken für seine Arbeit waren ihm beim Zeichnen entstanden. Nach ihm war dies nur einer von vielen Belegen, die sich in der Geschichte finden lassen, in denen eine Skizze auf die Idee führte. Nicht zuletzt seine eigene Arbeit enthält zahlreiche Beispiele hierfür.

### **Anregung zu neuen Ideen**

In keiner anderen wissenschaftlichen Arbeit sind die Modelle so präsent, wie in Felix Kleins Abhandlung „Ueber Flächen dritter Ordnung“ von 1873.<sup>24</sup> In dem Artikel beschreibt er, wie sich verschiedene Arten kubischer Flächen erzeugen lassen, indem

<sup>21</sup> Ebd., S. 135.

<sup>22</sup> Klein, Felix. „Eine neue Relation zwischen den Singularitäten einer algebraischen Curve“. In: *Mathematische Annalen* 10 (1876).

<sup>23</sup> Klein, Felix. „Vorbemerkungen zu den erkenntnistheoretischen Abhandlungen“. In: *Felix Klein – Gesammelte Mathematische Abhandlungen*. Hrsg. von Vermeil, Hermann und Fricke, R. Bd. 2. Berlin: Springer-Verlag Berlin, 1922, S. 213.

<sup>24</sup> Klein, Felix. „Ueber Flächen dritter Ordnung“. In: *Mathematische Annalen* 6.4 (1873).

einzelne Partien deformiert werden (vgl. Abschn. 5.5). Eingangs erläutert er, dass der Gedanken hierfür auf seinen Lehrer zurückginge, der ähnliche Überlegungen für kubische Kurven angestellt habe.<sup>25</sup> Anschließend führt er aus, wie sich mithilfe von Deformation singuläre Punkte von Flächen auflösen lassen: „Man construirt eine besondere Fläche derselben Ordnung, die mit einzelnen Knotenpunkten oder mit Doppelcurven behaftet sein mag, und leitet aus ihr eine allgemeinere dadurch ab, dass man die an die singulären Stellen hinantretenden Flächentheile durch ähnlich verlaufende ersetzt. Indem ich auf die Art versuchte, mir eine grössere Zahl von Fläche dritter Ordnung zu construiren, bemerkte ich, dass die Methode bei ihnen, wie bei den Curven dritter Ordnung, *fast ohne Weiteres überhaupt alle Gestalten ergibt.*“<sup>26</sup>

Womöglich entstand die Idee für diese Arbeit in dem Seminar, welches er im Sommer 1872 gemeinsam mit Alfred Clebsch in Göttingen abhielt, und in dem Friedrich Neesen und Adolf Weiler zwei verschiedene Modelle entwarfen. Weilers Entwurf zeigte die Clebsche Diagonalfäche, Nessens eine Fläche mit vier Doppelpunkten. Der Herstellungsprozess, bei dem die Modelle aus Gips geformt wurden, weckte vielleicht den Gedanken der Deformation. Möglicherweise entstand er auch beim vergleichenden Betrachten der beiden fertigen Modelle. Die Ähnlichkeit rief vermutlich den Eindruck hervor, dass zwischen den dargestellten Fläche ein Zusammenhang besteht. Für Kleins Idee war die unmittelbare Anschauung jedenfalls außerordentlich wichtig. Sobald Klein den Gedanken der Deformation gefasst hatte, ließ er ein weiteres Modell einer kubischen Fläche mit vier Doppelpunkten von Weiler herstellen. Um die Änderungen nachvollziehen zu können, die sich durch Deformationen der Punkte an der Fläche vollziehen, war es seiner Meinung nach geeigneter als Neesens früher Entwurf. In dem Artikel gab er eine ausführliche Beschreibung des Weilerschen Modells (vgl. Abschn. 5.4): „Es wurde bereits hervorgehoben, dass die Fläche dritter Ordnung mit vier reellen Knotenpunkten für die projectivische Auffassung nur eine Art darstellt, und in diesem Sinne repräsentirt das geschilderte Modell also alle derartigen Flächen. Die räumliche Anschauung löst sich aber nur schwer von der gewöhnlichen Weise ab, für welche das Unendlich-Weite eine besondere Geltung beansprucht. Insofern ist es nicht gleichgültig, dass in dem Modell gerade ein Fall dargestellt ist, in welchem die unendlich ferne Ebene nur den hyperbolischen Theil der Fläche und zwar nach einer Kurve ohne Oval schneidet. Es werden dadurch gewisse charakteristische Uebergänge, deren Betrachtung im Folgenden nothwendig wird, besonders anschaulich, indem sie ihren Einfluss nur auf ganz im Endlichen gelegene Partien der

<sup>25</sup> Klein, „Ueber Flächen dritter Ordnung“, S. 551.

<sup>26</sup> Die Hervorhebung wurde aus der Quelle übernommen: ebd., S. 551 f.

Fläche erstrecken. Das in der Einleitung erwähnte *Neesen'sche* Modell hatte einen anderen Fall zur Anschauung gebracht (das Unendlich-Weite ist bei ihm eine auch ganz auf dem hyperbolischen Theile gelegene Curve, aber mit Oval); bei ihm sind die bezüglichen Verhältnisse nicht so leicht zu verfolgen.“<sup>27</sup>

Zusätzlich zu dem Modell ließ er von Weiler eine Zeichnung anfertigen, die in den *Mathematischen Annalen* mit abgedruckt ist (Abb. 5.3). Er verwies an mehreren Stellen seines Artikels auf die Figuren, um seinen Gedankengang zu illustrieren. In einem Zusatz zu seiner Abhandlung, der in den *Gesammelten Schriften* erschienen ist, rät er den Lesern: „Man muß sich in die Einzelheiten der Figur, die sich nur schwer in Worten ausdrücken lassen, hineindenken. Am besten ist es, daß sich der Leser selbst ein Modell, etwa aus Plastilin herstellt, oder zum mindesten eine kotierte Projektion der Fläche (...) zeichnet.“<sup>28</sup> Felix Klein wusste, was dem Verständnis seines Artikels im Wege stand. Er musste die Anschauung seiner Leser beanspruchen, weil ihm die geeigneten Begriffe fehlten, um den Gedanken der Deformation mathematisch zu fassen und die Argumentation stichhaltig zu begründen. Er hatte sie mithilfe von Modellen entwickelt und wusste deswegen um die Bedeutung der richtigen Anschauung. Das Beispiel zeigt, wie die Anfertigung eines plastischen Modells bei der Ausformulierung einer neuen Idee half.<sup>29</sup>

Dieser Aspekt wird auch durch eine andere Quelle bestätigt. In einem Text von 1891, der an seine Studenten gerichtet war und später für die Leserschaft des *Bulletin of the American Mathematical Society* übersetzt worden ist, reflektiert der italienische Mathematiker Corrado Segre (1863–1924) über die jüngeren Entwicklungen seines Fachs. In dem Artikel berichtet er auch von den Arbeitsmitteln, von denen er und seine Kollegen gelegentlich Gebrauch gemacht haben: „Schließlich möchte ich vermerken, dass manchmal auf Zeichnungen und Modelle geometrischer Formen zurückgegriffen worden ist, um gewissen Eigenschaften (insbesondere der Gestalt oder reeller Natur) gewahr zu werden, von denen niemand weiß, wie sie allein durch deduktive Schlussweise erkannt werden sollen.“<sup>30</sup> Für Segre waren graphische Darstel-

<sup>27</sup> Hervorhebungen im Original: ebd., S. 555.

<sup>28</sup> Klein, Felix. *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*. Hrsg. von Vermeil, Hermann und Fricke, R. Bd. 2. Berlin: Springer-Verlag Berlin, 1922, S. 46.

<sup>29</sup> Das Konzept der miniversellen Deformation von Varietäten hat heute seinen festen Platz in der Singularitätentheorie.

<sup>30</sup> „Finally I will record that sometimes recourse has been had even to drawings and models of geometric forms in order to see certain properties (especially of form or of reality) which no one knew how to obtain by deductive reasoning alone.“ Segre, Corrado. „On Some Tendencies in Geometric Investigations“. Übers. von Young, John Wesley. In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 10 (1904), S. 14.

lungen nicht nur ein Mittel neben anderen. Stattdessen boten sie oftmals die einzige Möglichkeit, um Aufschluss über die Geometrie von Gebilden zu erhalten. Womöglich dachte er an das Geschlecht einer Fläche, dessen Bedeutung zu jener Zeit bekannt war, von dem aber niemand sagen konnte, wie es sich ausgehend von einer Gleichung berechnen ließe. Dasselbe gilt für die Anzahl der reellen Flächenteile. Oftmals war die Veranschaulichung das letzte Mittel, um sich ein vollständiges Bild einer Fläche zu machen.

## Handgreifliche Formen

Die Herstellung von Modellen war ein wichtiges Mittel, um das Unbekannte besser zu verstehen. Viele Entwürfe der Jahre 1860–77 zeigten die Formen von Gebilden, die zuvor noch niemand zu Gesicht bekommen hatte. Ihre Entdeckung löste regelmäßig Erstaunen aus, wovon auch Kommentare zeugen. In einem Bericht über einen Vortrag, den Ernst Kummer 1866 bei der Preußischen Akademie der Wissenschaften gehalten hat, wird dies zum Ausdruck gebracht: „Hr. Kummer las über zwei merkwürdige Flächen vierten Grades und zeigte von ihm selbst angefertigte Gypsmodelle derselben vor.“<sup>31</sup> Mit seiner Forschung betrat Kummer Neuland. Von der Konfiguration der Doppelpunkte einer Kummerscher Fläche besaß niemand zuvor eine Idee, geschweige denn ein Bild. Auch Ernst Kummer war anfangs nur die Gleichung der Fläche bekannt, von der er auf die Existenz der gesamten Konfiguration schloss. Als er schließlich erkannt hatte, in welcher interessanten Anordnung die Doppelpunkte lagen, dürfte es ihm ein großes Bedürfnis gewesen sein, sie mit den eigenen Augen zu sehen. Er griff vermutlich auch deshalb zu Draht, um etwas in den Händen zu haben, was er betrachten und vorzeigen konnte. Vor der Herstellung eines greifbaren Modells, das die gesamte Konfiguration der Kegelschnitte zeigt, besaß Kummer wenig mehr als die Gewissheit ihrer Existenz.

In nicht wenigen Fällen besaßen die Geometer nicht einmal eine Gleichung des Gegenstandes ihrer Untersuchungen. Manchmal hatten sie nur einen Satz, der ihnen die Existenz einer bestimmten Fläche verbürgte, manchmal auch nicht mehr als die bloße Vermutung, dass es sie geben könnte. Als Arthur Cayley und George Salmon 1849 auf die 27 Linien einer allgemeinen Kubik stießen, kannten sie weder eine Gleichung noch ein Verfahren, mit dem sie ein Modell hätten herstellen können. Ihr Beweis beruhte auf synthetischen Argumenten und allgemeinen Existenzaussagen. Zu dem Zeitpunkt der Entdeckung war nicht einmal bekannt, ob es überhaupt eine Fläche gab, bei der

<sup>31</sup> Kummer, Ernst E. „23. April 1866. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse.“ In: *Monatsberichte der Königlich-Preussischen Akademie zu Berlin (1866)*. Berlin: Ferd. Dümmler's Verlags-Buchhandlung, 1867, S. 216.

alle Linien tatsächlich reell sind. Nachdem Ludwig Schläfli die Doppelsechs fand, mit der sich alle Geraden konstruieren ließen, versuchte Cayley schließlich ein geeignetes Modell herzustellen. Er berichtete von den Schwierigkeiten, die sein Vorhaben scheitern ließen (vgl. Absch. 5.1). Wie ihm ging es mehreren Mathematikern, die sich mit kubischen Flächen befassten. Sie alle vermissten ein Modell, das ihnen die Linien vor Augen führt. Christian Wiener gelang es schließlich 1868, die handwerklichen Hürden zu überwinden. Sein Entwurf rief die Aufmerksamkeit Cayleys hervor. Wenig überraschend, immerhin war es die erste bekannte Darstellung einer kubischen Fläche mit allen 27 Linien.<sup>32</sup> Bis er Wieners Entwurf sah, hatte er nie das gesamte System gesehen.

Dass Modelle nicht nur Bekanntes bestätigen, sondern zuweilen auch Irrtümer korrigieren konnten, zeigt das Beispiel der Krümmungsmittelpunktsfläche eines Ellipsoids, die Hermann A. Schwarz nach Angaben von Ernst Kummer 1862 erstmals dargestellt hat (vgl. Abschn. 3.2). Mithilfe des Entwurfs konnten sie falsche Annahmen von Gaspard Monges widerlegen. Monge war davon ausgegangen, die beiden Schalen der Fläche sich nur in vier Punkten treffen können, die den Nabelpunkten des Ellipsoids entsprechen. Er hatte die Möglichkeit gesehen, dass ein gemeinsamer Punkt beider Schalen zu zwei verschiedenen Normalen gehören kann.<sup>33</sup> Anscheinend besaß er kein Modell der Fläche, das den Schnitt beider Mäntel entlang eine vollständigen Kurve darstellt. Ansonsten wäre ihm sein Fehler aufgefallen. Wie dieses Beispiel zeigt, half die Anfertigung einer Zeichnung oder eines Modells mitunter auch, Fehlschlüsse aufzudecken.

## 6.2 Konzeptionelle Fragen der Herstellung

Die Konstruktion eines geometrischen Modells war nicht nur ein handwerkliches Problem. Stattdessen war sie stets von Fragen begleitet, welche die Darstellung betrafen. Was für eine Fläche gezeigt werden soll, stand in den wenigsten Fälle fest. Ein Modell sollte vielmehr eine gesamte Klasse von Flächen veranschaulichen. Es musste erst eine repräsentative Darstellung gefunden werden, die nach Möglichkeit das Wesentliche zeigte. Mathematisch gesehen bestand die Aufgabe häufig darin, Parameter in Gleichungen

<sup>32</sup> Wilhelm Fiedler hatte nur ein Stabmodell entworfen, was er außerdem für seine eigenen Zwecke nutzte: vgl. Abschn. 5.3.

<sup>33</sup> Kummer, Ernst E. „30. Juni 1862. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse.“ In: *Monatsberichte der Königlich-Preussischen Akademie zu Berlin (1862)*. Berlin: Ferd. Dümmler's Verlags-Buchhandlung, 1863, S. 427f.

chungen geeignet zu wählen. Der Ausführung gingen demnach viele Entscheidungen voraus, die das Aussehen des Modells maßgeblich beeinflussten.

## Das unendlich Ferne

Welchen Einfluss die Wahl der unendlich fernen Ebene auf die Gestalt einer Fläche ausübt, hat Karl Rodenberg in seiner Modellserie zu kubischen Flächen veranschaulicht. Die Entwürfe Nr. 2 – 6 zeigen alle eine Fläche dritter Ordnung mit vier gewöhnlichen Doppelpunkten (Abb. 8.14). Unter projektiven Gesichtspunkten handelt es sich um Darstellungen ein und derselben Fläche, da sich ihre Gleichungen  $f_i(x, y, z) = 0$  mithilfe gebrochener rationaler Transformationen  $\sigma_{ij} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ineinander überführen lassen. Demnach unterscheiden sich die Flächen nur durch ihre Lage zur unendlich fernen Ebene.

Dennoch weisen alle Modelle äußerlich nur grobe Ähnlichkeit auf. Einige Entwürfe lassen drei, andere wiederum nur zwei Flächenteile erkennen. Nur die Modelle Nr. 2 und Nr. 5 zeigen das Tetraeder der vier Doppelpunkte als abgeschlossenen Gipskörper, während es bei allen anderen nicht hervortritt. Vier Formen zeigen außerdem neun Geraden, wohingegen bei Nr. 6 indes nur acht Linien zu sehen sind. Das letztgenannte Modell ist außerdem spiegelsymmetrisch, was auf die anderen Entwürfe nicht zutrifft. Sie werden lediglich durch  $120^\circ$ -Rotationen um die vertikale Achse unverändert gelassen.

Die fünf Modelle der Rodenbergschen Serie unterscheiden sich in wesentlichen Aspekten der Gestalt. Die Gleichheit der dargestellten Flächen unter projektiven Gesichtspunkten lässt sich für ungeschulte Augen kaum erkennen. Das Beispiel verdeutlicht, wie weit sich die Geometrie zu jenem Zeitpunkt bereits von der gewöhnlichen Raumwahrnehmung entfernt hat. Die absolute und relative Lage von Punkten, die Länge von Strecken und das Maß von Flächen, die Parallelität und Orthogonalität von Geraden werden durch Zentralprojektionen nicht bewahrt. Während es noch verhältnismäßig leicht fällt, die Ähnlichkeit zweier Figuren in der Ebene zu erkennen, erfordert die projektive Auffassung ein weitaus größeres Maß an Abstraktion. Um beispielsweise die Verwandtschaft einer Ellipse und Hyperbel zu sehen, ist die Einübung einer bestimmten Anschauung nötig. Felix Klein war sich durchaus bewusst, welche Schwierigkeiten die Einführungen des unendlich Fernen für das Vorstellungsvermögen bereitstellt. In einem nachträglichen Kommentar zu seinen 1871 veröffentlichten Metallentwürfen erklärt er, dass die topologischen Verhältnisse bei den Komplexflächen „mit voller Lebendigkeit nur an den Modellen selbst erfasst werden können“. Und weiter fügt er dann an: „Vor allem muß man sich daran gewöhnen, dass zwei Stücke einer Figur, die nach entgegengesetzten Richtungen ins Unendliche

laufen, gemäß projektiver Auffassung im Unendlichen zusammenhängen und insofern als *ein* Stück anzusehen sind.“<sup>34</sup> Die Auffassung der projektiven Geometrie weicht von der gewöhnlichen Raumwahrnehmung ab. Sie muss erst antrainiert werden.

## Generische Darstellung

Ein zweites Problem machte sich bei der Darstellung projektiver Flächen bemerkbar. Nachdem sein Lehrer verstorben war, stellte Klein gemeinsam mit seinem Düsseldorfer Schulfreund Albert Wenker vier weitere Modelle von Komplexflächen her (vgl. Abschn. 4.6).<sup>35</sup> In dem zweiten Band der Gesammelten Mathematischen Abhandlungen, der noch zu Kleins Lebzeiten 1922 erschienen ist, berichtet er in einem Vorwort über ihre gemeinsame Arbeit.<sup>36</sup> Eingangs teilt er mit, dass Plücker frühere Metallmodelle anhand verschiedener Schnitte konstruiert hat, die mithilfe einer Gleichung  $f = 0$  der Fläche berechnet wurden. „Im Gegensatz dazu sind die (...) 1871 von mir herausgegebenen Metallmodelle geometrisch konstruiert worden, indem ich die Ebenen benutzte, welche die Flächen nach Erstreckung ganzer Kegelschnitte berühren. (...) Wir haben dabei insbesondere auf das Modell der allgemeinen Komplexfläche eine ganz außerordentliche Mühe verwandt, indem wir uns einen Fall aussuchten, welcher keinerlei besondere, den Überblick und gleichzeitig die Konstruktion erleichternde Symmetrie besaß. Bei den anderen Modellen ist dieses Prinzip, welches sich weiterhin als nicht zweckmäßig erwies, bereits verlassen.“<sup>37</sup> Obwohl es der Übersichtlichkeit abträglich und mit zusätzlichem Aufwand verbunden war, vermied Felix Klein jede Symmetrie bei dem Entwurf zur Darstellung der allgemeinen Komplexfläche. Es lässt sich zwar nicht mit letzter Gewissheit sagen, was ihn dabei bewogen hat, aber es liegt die Vermutung nahe, dass er damit die Intention verband, der Gestalt einer generischen Fläche möglichst nahe zu kommen. Er wusste jedenfalls, dass die symmetrischen Flächen gewissermaßen einen atypischen Sonderfall bilden. Als sich Wenker und Klein an die Arbeit machten, gab es bereits ein Metallmodell der allgemeinen Komplexfläche. Es war zusammen mit anderen Modellen als Teil der

<sup>34</sup> Hervorhebung im Original: Klein, „Vier Modelle zur Theorie der Liniencomplexe zweiten Grades“, S. 8.

<sup>35</sup> Tobies, Renate. *Felix Klein: Visionen für Mathematik, Anwendungen und Unterricht*. Berlin Heidelberg: Springer Spektrum, 2019, S. 50.

<sup>36</sup> Klein, Felix. „Vorbemerkungen zu den Arbeiten zur Anschaulichen Geometrie“. In: *Felix Klein – Gesammelte Mathematische Abhandlungen*. Hrsg. von Vermeil, Hermann und Fricke, R. Bd. 2. Berlin: Springer-Verlag Berlin, 1922.

<sup>37</sup> Ebd., S. 3.

Plückerschen Serie unter der Nummer xx erschienen.<sup>38</sup> Von dem späteren Modell Felix Kleins unterscheidet sich die frühere Darstellung hauptsächlich dadurch, dass die verschiedenen Flächenteile nun spiegelsymmetrisch zueinander liegen (Abb. 8.32).

Aus welchen Gründen sich Felix Klein entschieden hat, bei den anderen Entwürfen eine symmetrische Darstellungsweise zu wählen, lässt sich nicht mit letzter Bestimmtheit sagen. Womöglich waren es praktische Erwägungen, die den Ausschlag gaben. Es lässt sich aber auch vorstellen, dass er zur Einsicht gelangt ist, dass das Modell einer projektiven Fläche nie mehr sein kann, als eine schematische Darstellung, und es deswegen wichtiger war, auf eine überschaubare Form zu achten, bei der sich das Wesentliche auf einen Blick erschloss. In einem seiner Vorträge, die er auf dem Mathematikerkongress in Chicago 1893 hielt, erwähnt er Weilers symmetrisches Modell der Clebschen Diagonalfäche, das auf der dortigen Weltausstellung zu sehen war. In diesem Zusammenhang erklärte er mit deutlichen Worten, wie wichtig es ist, eine möglichst gleichmäßige Form zu finden, die Eindruck beim Betrachter hinterlässt: „It may here be mentioned as a general rule, that in selecting a particular case for construction a model the first prerequisite is regularity. By selecting a symmetrical form for the model, not only is the execution simplified, but what is of more importance, the model will be of such a character as to impress on the mind.“<sup>39</sup> Während Felix Klein in jungen Jahren selber die Wirkung des Modells hintanstellte, um eine möglichst getreue Darstellung der Fläche zu finden, erhebt er zwanzig Jahre später Symmetrie zur Regel.

Es wäre interessant zu wissen, was den Sinneswandel bei Felix Klein auslöste. Seine Überlegungen spiegeln jedenfalls ein grundsätzliches Problem wieder, das bei der Herstellung von Modellen in Erscheinung trat. Die Konstrukteure mussten festlegen, wie sie die Objekte ihrer geometrischen Studien veranschaulichen wollten. Sie besaßen keine festgeschriebene Gestalt, die wie bei der Ausarbeitung einer wirklichkeitsgetreuen Skulptur nachgebildet werden konnte. Die Geometer mussten selber bestimmen, was die Modelle zeigen sollen, ehe sie ihre Formen erforschen konnten.

<sup>38</sup> Die Verwandtschaft der beiden Entwürfe wird in anschaulichen Worten von einem Student beschrieben, der 1919 bei Felix Klein eine Seminararbeit über die Plückerschen und Kleinschen Modelle der Göttinger Sammlung verfasst hat: „Will man den Übergang von der Kleinschen Fläche Nr. II zur Plückerschen Komplexfläche Nr. I möglichst anschaulich machen, so denke man sich Mod. II möglichst symmetrisch gestaltet wie es bei Mod. XX verwirklicht ist, und dann erst die  $d$ -Linie unendlich weit fortgerückt.“ Clausen. *Klassifikation der Plückerschen Komplexflächen und der vier Kleinschen Modelle*. 1919, S. 11.

<sup>39</sup> Klein, Felix. *Lectures on Mathematics*. Boston: Macmillan und Co., 1893, S. 26.

### 6.3 Aspekte der handwerklichen Konstruktion

Häufig erfolgte der Entwurf eines Modells im Arbeits- und Studierzimmer, in dem die Mathematiker ihre Untersuchungen durchführten. Es lässt sich vermuten, dass viele Objekte nie das Licht der Öffentlichkeit erblickt haben. Stattdessen erfüllten sie ihren Zweck an dem Ort ihrer Entstehung. Oftmals genügt wohl die Herstellung eines rudimentären Entwurfs, um offene Frage beantworten zu können und entscheidende Einsichten in die Geometrie der studierten Objekte zu erhalten. Bereits die Konstruktion gewährte dem Entwerfer Aufschluss, nicht erst das Studium des fertigen Modells. Längst nicht alle Entwürfe dürften deswegen die hohe Qualität in der Ausführung erreicht haben, welche die Objekte der Verlagshandlungen Ludwig Brill und Martin Schilling aufwiesen. Die Anfertigung eines ausgereiften Modells war wohl oftmals zu aufwendig, wenn es nur darum ging, sich ein Bild von den untersuchten Gebilden zu verschaffen. In den allermeisten Fällen genügte ein rudimentärer Entwurf, um das Wesentliche zur Anschauung zu bringen.



**Abb. 6.2:** Die Grafiken illustrieren unterschiedliche Arten von Modellen: Faden-, Steck-, Draht- und Gipsmodelle. Sie stammen aus dem Katalog der Verlagshandlung Martin Schilling: Schilling, Martin. *Catalog mathematischer Modelle*. 7. Aufl. Leipzig: Schilling, 1911.

Die Herstellung eines serienreifen Modells war häufig mit einem großen Aufwand verbunden. Das Beispiel der allgemeinen kubischen Fläche mit 27 Linien zeigt, wie viel Arbeit die mathematische Konstruktion und technische Ausführung erforderten. Eine gelungene Darstellung war eine Leistung, die zur damaligen Zeit durchaus Anerkennung hervorrief. Felix Klein schrieb in einem Brief an Wilhelm Fiedler 1872 über seinen Studenten Adolf Weiler, dem er zwei Modelle kubischer Flächen verdankte: „Er hat ausgesprochenes geometrisches Talent, und hat uns alle schon wiederholt durch Modelle entzückt, die er angefertigt hat.“<sup>40</sup> Der Verfasser dieses Lobes wusste aus ei-

<sup>40</sup> Confalonieri, Sara, Peter-Maximilian, Schmidt und Volkert, Klaus. *Der Briefwechsel von Wilhelm Fiedler mit Alfred Clebsch, Felix Klein und italienischen Mathematikern*. Bd. 12. Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik. Siegen: Universitätsver-

gener Erfahrungen um die zahlreichen Schwierigkeiten, die mit der Anfertigung eines Entwurf verbunden waren. Bei der Konstruktion seiner eigenen vierteiligen Serie von Metallmodellen war er auf die Hilfe seines Freundes Alfred Wenkers angewiesen.<sup>41</sup>

Der Modellbau verlangte handwerkliches Geschick. Nicht wenige Konstrukteure, die sich mit ihren Entwürfen unter den Mathematikern einen Namen machten, besaßen zumindest eine hohe Affinität zu technisch-handwerklichen Tätigkeiten, wenn nicht sogar eine entsprechende Vorbildung. Alexander Brill hatte neben Mathematik auch Architektur an der Karlsruher Hochschule studiert. Karl Rohn wechselte auf Brills Anraten in die Mathematik, nachdem er ein Jahr lang das Studium der Ingenieurwissenschaften in Darmstadt verfolgt hatte. Hermann Schwarz wiederum war Sohn eines Baumeisters. Er kannte dementsprechend seit seiner Kindheit Modelle. Nicht wenige Konstrukteure hatten außerdem ein Studium an einer polytechnischen Schule durchlaufen. Die Anfertigung grafischer Zeichnungen, technischer Pläne und zuweilen auch die Konstruktion räumlicher Modelle gehörte im 19. Jahrhundert zum festen Lehrplan. Umgekehrt wiederum prädestinierte die erfolgreiche Anfertigung geometrischer Modelle für eine Lehrtätigkeit an einer technischen Hochschule in „Darstellender Geometrie“, wie das Beispiel von Karl Rohn zeigt. In einem Brief von 1885 erkundigte sich Alex Harnack (1851–1888) bei Felix Klein nach seinem Schüler. Er suchte nach einem möglichen Kandidaten für seine Nachfolge an der Hochschule in Dresden. Wie aus der Antwort Felix Kleins hervorgeht, sprach Harnack auch die Modelle Rohns an.<sup>42</sup> Auch andere Modellhersteller wie Christian Wiener (1852–1896, Karlsruhe), Wilhelm Fiedler (1864–1907, Prag und Zürich), Carl Rodenberg (1884–1921, Hannover), Karl Rohn (1885–1905, Dresden), Friedrich Schilling (1897–1936, Aachen und Danzig) unterrichteten längere Zeit an technischen Hochschulen.

Neben handwerklichen Fertigkeiten erforderte die Herstellung aber auch die Überwindung technischer Schwierigkeiten, die eng mit mathematischen Problemen verbunden waren. Von dem Prozess der Modellherstellung gibt es leider nur wenige Zeugnisse. Die Dokumentation lohnte sich oftmals nur, wenn neuartige Methoden zur Anwendung kamen. Nachstehend werden einige Aspekte benannt, die bei der technischen Umsetzung eine wichtige Rolle spielten. Anschließend wird dann auf die mathematischen Probleme der Darstellung eingegangen, welche mit der Konstruktion

lag Siegen, 2019, S. 93.

<sup>41</sup> Tobies, *Felix Klein*, S. 19.

<sup>42</sup> Voss, Waltraud. *Mathematiker als Rektoren der Technischen Hochschule Dresden: Höhere Lehrerbildung und Mathematische Gesellschaft im Wandel*. transcript Verlag, 2021, S. 58.

von Modellen verbunden waren.

## Gipsmodelle

Für die Herstellung mathematischer Modelle sind unterschiedliche Materialien und Techniken verwendet worden. Die Wahl richtete sich nach den geometrischen Charakteristika der Fläche, die zur Darstellung gebracht werden sollten. Grundsätzlich lassen sich geschlossene Formen – plastische Körper aus Wachs, Gips und Metall – von mehrteiligen Konstruktionen – Steckverbindungen aus Karton, in Rahmen eingespannte Fäden und Drahtgestelle – unterscheiden. Um die Gestalt von Flächen nachzubilden, ist häufig Gips verwendet worden. Nicht zuletzt bei der Darstellung von Rotationsflächen erweist es seine Vorteile.<sup>43</sup> Wenn es auf die Formfestigkeit bei der Herstellung nicht ankam, genügte auch Plastilin, wie es Felix Klein seinen Lesern nahelegte.<sup>44</sup> Wie Gips bietet es den Vorzug, sich leicht verarbeiten zu lassen.

Eine geschlossene Form bot noch einen weiteren Vorteil. Nachträglich ließen sich charakteristische Kurven abtragen. Karl Rohn zeichnete die Doppelkurven ein, die auf den dargestellten Flächen liegen. Auf Karl Rodenbers Gipsformen ist neben den geraden Linien auch die parabolische Kurve eingeritzt (vgl. Abschn. 5.6). Sie trennt die Bereiche unterschiedlicher Krümmung. Während Konstruktionen aus Scheiben, Drähten oder Fäden die Gestalt einer Fläche nur stellenweise wiedergeben, zeigt ein Vollkörper die gesamte Form in einem festen Bereich. Die Krümmung und Zusammenhänge einzelner Partien lassen sich dadurch besser erkennen.

Nichtsdestotrotz gibt es mitunter Gründe, diskrete Darstellungen zu bevorzugen. Massive Formen aus Holz, Gips oder Metall bieten einen entscheidenden Nachteil, wenn es um die Darstellung mehrteiliger Flächen geht. Um verschiedene Partien in Position zu halten, sind außerdem zusätzliche Draht- und Stabkonstruktionen nötig. Probleme bereitet zudem die Darstellung isolierter Teile. Arthur Cayley musste es bei den Hinweisen belassen, dass die Linien seines Modells der Steinerschen Fläche, der gesamten Länge nach der Fläche angehören (vgl. Abschn. 3.4). Mit eigenen Augen sehen konnten es die Betrachter jedoch nicht. Eine Darstellung isolierter Geraden und losgelöster Ebenen mit Gips ist unmöglich. Ein schwerwiegenderes Problem gab es, wenn sich die Fläche aus mehreren Mänteln zusammensetzte. Mit einer geschlossenen Form ließ sich immer nur das Gebiet darstellen, das von einem Mantel umhüllt

<sup>43</sup> Bei der Ausstellung in München 1893 waren auch Photographien eines Apparates zweier ungarischer Mathematiker zu sehen, der zur Herstellung drehsymmetrischer Modelle verwendet wurde. Dyck, Walther, Hrsg. *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente (Nachdruck)*. Hildesheim: Georg Olms, 1994, S. 62.

<sup>44</sup> Klein, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, S. 46.

wird. Sobald jedoch – wie bei der Wellenfläche – mehrere Schalen auftreten, ist die Darstellung der gesamten Fläche mit einer Form häufig ausgeschlossen.<sup>45</sup> Entweder müssen mehrere Modelle entworfen werden – wie es Hermann Schwarz bei der zweischaligen Krümmungsmittelpunktsfläche des Ellipsoids getan hat –, oder aber einige Partien der Fläche bleiben notwendigerweise im Verborgenen (vgl. Abschn. 3.2).<sup>46</sup>

Für die Herstellung eines Gipsmodells ist mitunter zuerst eine Konstruktion aus Kartonscheiben angefertigt worden, die den Verlauf verschiedener Schnitte anzeigte. Auf diesem Weg fertigte Christian Wiener seinen Entwurf an, wie er berichtet.<sup>47</sup> Karl Rohn verwendete das System der Berührungskurven, um den Verlauf der Kummerflächen zu approximieren (vgl. Abschn. 3.7). Das Verfahren eignet sich nicht zuletzt, wenn zumindest eine implizite Gleichung der Fläche bekannt ist, die dargestellt werden soll. Julius Plücker hat mithilfe von Gleichungen verschiedene Schnitte durch eine feste Achse berechnet, um die Gestalt der Fläche zu beschreiben.

## Fadenmodelle

Nicht zuletzt deshalb ist vermutlich häufig auf andere Darstellungsweisen zurückgegriffen worden. Regelflächen ließen mit gestrafften Fäden darstellen, da sie durch eine Schar von Geraden erzeugt werden. Die Technik kam häufig zum Einsatz, um Raumkurven darzustellen. Die Tangenten doppelt gekrümmter Kurven bilden eine abwickelbare Fläche, die zur Klasse der Regelflächen gehören. Hermann Wiener und Karl Rohn nutzten dies, um verschiedene Typen von Raumkurven der vierten Ordnung mithilfe von Fadenmodellen darzustellen.<sup>48</sup>

Die Anfertigung eines Modells geschah häufig mithilfe eines quaderförmigen Holzrahmens, auf dessen Seiten dann – ausgehend von einer Gleichung – die Schnittkurven mit der Regelfläche abgetragen worden sind. Die eingezeichneten Kurven dienten ge-

<sup>45</sup> Ein entsprechendes Modell der Wellenfläche ist als Nr. 1 der Serie VI im Schilling-Verlag erschienen.

<sup>46</sup> Im Schilling-Verlag sind mehrere Modelle von Krümmungsmittelpunktsflächen erschienen. Die Entwürfe Ludwig Schleiermachers (Nr. 2 der Serie I, Abb. 8.5) veranschaulichen das Problem, das hier beschrieben worden ist. Schilling, Martin. *Catalog mathematischer Modelle*. 7. Aufl. Leipzig: Schilling, 1911, S. 3.

<sup>47</sup> Bei der Unterrichtsausstellung in Chicago waren Photographien des Scheibenmodells zu sehen, nach dem das Gipsmodell hergestellt worden ist, wie sich dem Katalog entnehmen lässt: Dyck, Walther. *Deutsche Unterrichtsausstellung in Chicago 1893: Specialkatalog der mathematischen Ausstellung*. Buchdr. v. Wolfen S. in München, 1893, S. 46.

<sup>48</sup> Wieners Modelle sind als Serie XII in der Verlagshandlung Martin Schilling erschienen, Rohns als Serie XXI: Schilling, Martin. *Catalog mathematischer Modelle*. 6. Aufl. Halle an der Saale: Verlagshandlung Martin Schilling, 1903.

wissermaßen als Leitkurven für die Fläche. Entlang von ihnen ist dann der Rahmen freigestellt worden, so dass nur noch dünne Holzstege stehen blieben. Zwischen den Stegen wurden anschließend Fäden gespannt, um den Verlauf der Geraden anzuzeigen. Holz lässt sich leicht verarbeiten, weswegen es als Material für den Rahmen oftmals den Vorzug gegenüber Metall erhielt. Es besaß jedoch den Nachteil, dass eine Krümmung der begrenzenden Randflächen, in denen die Fäden eingespannt worden sind, sich nur schwierig realisieren ließ.

Hermann Wiener verwendete deswegen anstatt Holz zwei gebogene Drähte, die parallel laufen. Er schildert das Verfahren in einem Beitrag für den Katalog des deutschen Unterrichtsausstellung auf der *World's Columbian Exposition* in Chicago 1893.<sup>49</sup> Den Zwischenraum füllte Wiener mit einer wachsartigen Masse aus, in der er Löcher einstach, durch die er dann Fäden zog. Er konnte die Begrenzung frei gestalten, ohne durch Metall bohren zu müssen. Mit dem Verfahren stellte Wiener verschiedene Typen von Kegeln und Raumkurven der dritten Ordnung dar. Er verwendete Holzformen, um den Verlauf der Begrenzungsfläche vorzugeben. Anschließend bog er die beiden benötigten Drähte an der Form entlang parallel der gewählten Leitkurve. An verschiedenen Stellen verlötete er sie, bevor er eine Masse aus Wachs und Kolophonium in den Zwischenraum einfügte. Nach dem Aushärten stach Hermann Wiener Löcher ein, durch die er dann Fäden zog (vgl. Abb. 8.35).

<sup>49</sup> Dyck, *Deutsche Unterrichts-Ausstellung in Chicago 1893*, S. 43.



## 7. Verlust der Anschauung

Die Geschichte der geometrischen Anschauungsmodelle nach 1860 ist in vielfacher Weise mit dem Weg verbunden, den die Geometrie während dieser Zeit gegangen ist. Die meisten Modelle, die auf den vorangegangenen Seiten betrachtet worden sind, entstanden im Zuge von geometrischen Untersuchungen, bei denen das Augenmerk auf gestaltlichen Merkmalen der studierten Objekte lag. In diesem Zusammenhang besaßen sie eine wissenschaftliche Funktion, indem sie den Geometern Auskunft über die häufig unbekannt Formen gaben. Sie waren aber auch ein Mittel, um die hergeleiteten Resultate und gemachten Entdeckungen vor Augen zu führen.

Dieses Kapitel ist historischen Fragen gewidmet, die mit dem Erscheinen und Vergehen des wissenschaftlichen Modellbaus in Deutschland verbunden sind. Im Zentrum steht die Geschichte der geometrischen Untersuchungen, in deren unmittelbarem Umfeld ab 1860 viele Objekte entstanden. Sie beginnt mit dem Aufstieg der Geometrie in den deutschen Ländern nach 1820. Seine Protagonisten entwickelten neue Methoden, mit denen sie die Gestalt höherer Kurven in einer systematischen Weise studierten. Zur Jahrhundertmitte dehnten sie ihre Forschung auf Flächen des dritten und vierten Grades aus. Während sie sich noch stark an der Anschauung orientierten, nahm die Wissenschaft nach der Jahrhundertmitte immer abstraktere Züge an. Angesichts der Akzeptanz höherdimensionaler Räume und der Entdeckung dualer Verbindungen verlor der Gegenstand der Geometrie an Kontur. Felix Kleins *Erlanger Programm* von 1872 steht für die Bemühungen, den Inhalt und Zweck der Geometrie neu zu bestimmen. Mit einiger Verspätung sorgte diese Entwicklung dafür, dass das Interesse an geometrischen Untersuchungen gestaltlicher Verhältnisse nachließ. Mit ihm verlor sich auch die Begeisterung für anschauliche Modelle Schritt für Schritt.

### 7.1 Geordnete Erscheinungen 1820–1849

In den 1820er Jahren befand sich die Geometrie in den deutschen Ländern im Aufwind. Im Jahr 1826 wurde durch August L. Crelle (1780–1855) mit dem *Journal*

für die *reine und angewandte Mathematik* die erste deutschsprachige Fachzeitschrift ins Leben gerufen. In Crelles Journal – wie das Periodikum genannt wurde – veröffentlichten führende deutsche Geometer wie August F. Möbius (1790–1868), Jakob Steiner (1796–1863), Karl von Staudt (1798–1867), Julius Plücker (1801–1868), Carl G. J. Jacobi (1804–1851) oder Otto Hesse (1811–1874) ihre Arbeiten. Sie waren von französischen Mathematikern beeinflusst, die lange Zeit führend auf dem Gebiet der Geometrie waren. Preußische Beamte erwogen lange die Einrichtung einer Schule nach Vorbild der Pariser *École polytechnique*, um die Wissenschaft auf das Niveau des Nachbarlandes zu heben.<sup>1</sup> Unterdessen unternahmen Plücker und Jacobi Reisen in die französische Hauptstadt, wo sie die Verhältnisse vor Ort studierten. In den folgenden Jahren entwickelten die deutschen Mathematiker neue Methoden, die der Geometrie allzumal Auftrieb gab und das Studium von Kurven und Flächen der höheren Ordnung ermöglichte.

## Monges Schüler

Die Grundlage für die Blüte der Geometrie in den deutschsprachigen Ländern ab 1826 ist in Frankreich nach der Revolution gelegt worden. Die „Great Period“ (Julian Coolidge) der projektiven Geometrie begann mit Gaspard Monge (1746–1818), Mitbegründer der *École polytechnique*, und seinen Schülern Joseph Gregonne (1771–1859), Charles Dupin (1784–1873), Victor Poncelet (1788–1867) und Michel Chasles (1793–1880), welche in den Jahren 1795–1825 die Grundzüge einer neuen Lehre vom Raum entwarfen.<sup>2</sup> Poncelets Werk *Traité des propriétés projectives des figures* war das erste Lehrbuch zur neuen Geometrie.<sup>3</sup> Es enthielt Untersuchungen über die Eigenschaften geometrischer Figuren, die von Abständen und Winkeln unabhängig sind, aber von *Zentralprojektionen* bewahrt werden. Poncelet wusste, dass die kollineare Lage dreier Punkte sich nicht ändert, wenn die Punkte von einem festen Zentrum auf eine andere Ebene projiziert werden.<sup>4</sup> Chasles erkannte später, dass

<sup>1</sup> Eccarius, W. „Der Gegensatz zwischen Julius Plücker und Jakob Steiner im Lichte ihrer Beziehungen zu August Leopold Crelle“. In: *Annals of Science* 37.2 (1980).

<sup>2</sup> Coolidge, Julian Lowell. „The Rise and Fall of Projective Geometry“. In: *The American Mathematical Monthly* 41.4 (1934).

<sup>3</sup> Poncelet, Victor. *Traité des propriétés projectives des figures: ouvrage utile a ceux qui s'occupent des applications de la géométrie descriptive et d'opérations géométriques sur le terrain*. Paris: Bachelier, 1822.

<sup>4</sup> Hankel, Hermann. *Die Elemente der projectivischen Geometrie*. B.G. Teubner, 1875, S. 15.

dies auch für das *Doppelverhältnis* von vier Punkten einer Geraden gilt.<sup>5</sup>

In seinem 1822 erschienenen Werk beschrieb Poncelet sein *Prinzip der Kontinuität*.<sup>6</sup> Nach ihm bleiben die wesentlichen Eigenschaften einer Figur erhalten, wenn sie in eine andere stetig überführt wird.<sup>7</sup> Obwohl dieses Prinzip nur vage formuliert war, was bereits Zeitgenossen Poncelets monierten, brachte es einen weitreichenden Gedanken zum Ausdruck. Die Idee nämlich, dass es genügt, spezielle Figuren zu betrachten, um Rückschlüsse auf den allgemeinen Fall ziehen zu können. In dieser Weise benutzte Poncelet das Prinzip selbst.<sup>8</sup> Der Kreis gab demnach Auskunft über die projektiven Eigenschaften der Parabel, die aus ihm durch Zentralprojektion entsteht. Zwischen den beiden gemeinsamen Punkten zweier sich schneidender Kreise gibt es genau eine Gerade, die Sekante. Nach Poncelet lässt sich nun schließen, dass eine solche eindeutig bestimmte Gerade auch dann noch existieren muss, wenn die Kreise auseinander gerückt werden, bis sie sich nicht mehr berühren. In der Tat existiert solch eine Linie. Sie verbindet die beiden imaginär gewordenen Durchschnittspunkte.<sup>9</sup> Die Beispiele verdeutlichen, wie Poncelets Prinzip zur Anerkennung imaginärer und unendlich ferner Elemente in der Geometrie beitrug.

Eine andere Idee entstand während jener Zeit in Frankreich, die für das Studium von Figuren einen unschätzbaren Wert besaß. Als Poncelet das Prinzip der Dualität erkannte, gab es bereits den Begriff der reziproken Polaren. Jeder nicht-entartete Kegelschnitt stiftet in der Ebene eine eindeutige Korrespondenz zwischen Punkten und Linien. Durch jeden beliebigen Punkt der Ebene lassen sich genau zwei Tangenten an den Kegelschnitt legen. Die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte heißt Polare des Punktes, der wiederum Pol genannt wird. Im Raum stiftet jede quadratische Fläche eine Beziehung zwischen den Punkten und Ebenen. Das Prinzip der reziproken Polaren war deshalb so bedeutsam, weil nach ihm jeder Satz über die projektiven Verhältnisse von ebenen Figuren auch dann noch seine Gültigkeit bewahrt, wenn die Wörter Punkte und Linien in ihm ausgetauscht werden. Nach Boyer war es Joseph Gregonne (1771–1859), der die Universalität dieses Dualismus zuerst erkannte

<sup>5</sup> Coolidge, „The Rise and Fall of Projective Geometry“, S. 221.

<sup>6</sup> Boyer, *History of Analytic Geometry*, S. 231.

<sup>7</sup> Felix Klein erläutert das Prinzip in der *Entwicklung der Mathematik* mit folgenden Worten: „Es sagt aus, dass eine an einer Figur mit hinreichender Allgemeinheit erkannte Beziehung auch für alle anderen Figuren gilt, die sich aus ihr durch kontinuierliche Lageveränderung ableiten lassen.“ Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, S. 81.

<sup>8</sup> Hankel, *Die Elemente der projectivischen Geometrie*, S. 17.

<sup>9</sup> Ebd., S. 7 f.

hat.<sup>10</sup> Er sprach von dem Prinzip der Dualität. In einem Streit mit Poncelet hob er hervor, dass es sich von Poncelets Theorie der Polaren unterscheide, da es ohne jedweden Kegelschnitt auskomme. Weder Gregonne noch Poncelet gelang eine strenge Begründung des Prinzips.

Einen wesentlichen Beitrag zum Aufschwung leisten Julius Plücker und August Möbius auf dem Gebiet der analytischen Geometrie durch die Einführung homogener Koordinaten. Mit ihnen gelang es, die projektive Anschauung für das Kalkül zu erschließen. Fortan war es möglich, zahlreiche Probleme durch die Auflösung von Gleichungen zu bewältigen. Die Vorzüge der analytischen Methoden waren unübersehbar. Die Verwendung unbestimmter Ausdrücke gestattete eine größere Verallgemeinerung der Resultate. Außerdem ließen sich geometrische Probleme durch die Zuhilfenahme von Koordinaten quasi mechanisch lösen. Für den Beweise eines Satzes war nicht länger ein genialer Einfall vonnöten, sondern oftmals genügte eine sorgfältige Rechnung. Dennoch – oder gerade deswegen – stieß das Vorgehen der Analytiker auf Widerspruch. Für die Verfechter der synthetischen Geometrie, die an der Figur selbst argumentierten, ohne Anleihen in der Algebra zu machen, entehrte die Koordinatenmethode die Wissenschaft. Die Operation mit abstrakten Symbolen gewährte ihrer Ansicht nach wenig Einblicke in die wirklichen Zusammenhänge. Selbst wenn sie nicht umhinkamen, die Erfolge der Analytiker anzuerkennen, so verwiesen sie auf die Umständlichkeit ihrer Methode. Gegenüber seitenlangen Rechnungen zogen sie die Eleganz einer geometrischen Argumentation vor.

## Paradigmen deutscher Geometer

Trotz des Streites, der unter den deutschen Mathematikern in den 1820er Jahren über die richtige Methode entbrannte, überwogen die Gemeinsamkeiten zwischen ihnen.<sup>11</sup> Julius Plücker sorgte selbst für eine Versöhnung der beiden – scheinbar gegensätzlichen – Methoden. Er übertrug die Möglichkeit, mit den Figuren selbst zu argumentieren, wodurch sich die synthetische Verfahrensweise auszeichnet, auf die Arbeit mit Gleichungen mithilfe seiner Methode der abkürzenden Bezeichnungen.<sup>12</sup> Zeichnungen der studierten Figuren spielten in seiner Arbeit eine wichtige Rolle. Sein Erfolg beim Studium geometrischer Gebilde basierte auch darauf, dass es ihm zumindest partiell gelang, die geometrische Anschauung mit in die Rechnung hineinzutragen.

<sup>10</sup> Boyer, *History of Analytic Geometry*, S. 239 ff.

<sup>11</sup> Lorenat, Jemma. „Synthetic and Analytic Geometries in the Publications of Jakob Steiner and Julius Plücker (1827–1829)“. In: *Archive for History of Exact Sciences* 70.4 (2016).

<sup>12</sup> Die besagte Methode ist in Abschn. 6.1 erläutert worden.

## Jakob Steiner

Umgekehrt erklärte Jakob Steiner, der lange Zeit als Gegenspieler Julius Plückers und Vertreter der synthetischen Richtung betrachtet worden ist, dass es ihm nicht primär um die Methode ging. In der Vorrede zu seiner ersten großen Schrift, die 1832 unter dem Titel *Systematischen Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten* erschien, erläutert er die Grundsätze seiner Arbeitsweise: „Gegenwärtige Schrift hat es versucht, den Organismus aufzudecken, durch welchen die verschiedenartigsten Erscheinungen in der Raumwelt mit einander verbunden sind. Es giebt eine geringe Zahl von ganz einfachen Fundamentalbeziehungen, worin sich der Schematismus ausspricht, nach welchem sich die übrige Masse von Sätzen folgerecht und ohne alle Schwierigkeit entwickelt. Durch gehörige Aneignung der wenigen Grundbeziehungen macht man sich zum Herrn des gesamten Gegenstandes; es tritt Ordnung in das Chaos ein und man sieht, wie alle Theile naturgemäß in einander greifen, in schönster Ordnung sich in Reihen stellen, und verwandte zu wohlbegrenzten Gruppen sich vereinigen. Man gelangt auf diese Weise gleichsam in den Besitz der Elemente, von welchen die Natur ausgeht, um mit möglichster Sparsamkeit und auf die einfachste Weise den Figuren unzählig viele Eigenschaften verleihen zu können. Hierbei macht weder die synthetische, noch die analytische Methode, den Kern der Sache aus, der darin besteht, daß die Abhängigkeit der Gestalten von einander, und die Art und Weise aufgedeckt wird, wie ihre Eigenschaften von den einfachen Figuren zu den zusammengesetzteren sich fortpflanzen. Dieser Zusammenhang und Uebergang ist die eigentliche Quelle der Geometrie.“<sup>13</sup> . Wie aus dem Zitat hervorgeht, war die Methode für Jakob Steiner im Grunde genommen unwichtig. Stattdessen – und darin war er sich mit seinem vermeintlichen Widersacher Julius Plücker einig – legte er bei seinen geometrischen Untersuchungen Wert auf eine systematische Darstellung, die vom Einfachen zum Zusammengesetzten fortschreitet, wie es dem organischen Aufbau der Erscheinungen entspreche. Für ihn ist Wahl der Methode unerheblich, solange sie nicht der natürlichen Ordnung der Figuren widerstrebt.

Jakob Steiner formulierte in seiner Vorrede Gedanken, die unter den deutschen Geometern während des 19. Jahrhunderts weitverbreitet waren und ihre Ansichten über die Wissenschaften prägten.<sup>14</sup> In ihnen hallten Ideen der deutschen Naturphi-

<sup>13</sup> Steiner, Jakob. *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, mit Berücksichtigung der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methoden, Geometrie der Lage, Transversalen, Dualität und Reciprocität etc.* Berlin: G. Fincke, 1832, S.vf.

<sup>14</sup> Wilhelm Fiedler (1832–1912) berief sich später auf die zitierte Passage aus Steiners Vorrede und sprach 1877 von einem „Bedürfnis nach einem organischen Aufbau des Systems un-

losophie nach, die auch bei Physikern wie Christoph Heinrich Pfaff (1773–1852) und Georg Friedrich Pohl (1788–1849) allgegenwärtig waren.<sup>15</sup>

### **Julius Plücker**

Mit seinem ersten Werk, den *Analytisch-geometrischen Entwicklungen*, das in zwei Bänden 1828 und 1831 erschienen ist, hegte Julius Plücker ähnliche Absichten wie Jakob Steiner. Auch er wollte die Geometrie mithilfe einer allgemeinen Methode ordnen. Versprengte analytische Beweisführungen sollten in den generischen Zusammenhang gebracht werden, in dem sie ständen. Wie Steiner war er außerdem an einer systematischen Behandlung des Gegenstandes interessiert, weniger an einer losen Zusammenstellung von Aufgaben, Sätzen und Beweisen, was viele französische Arbeiten jener Zeit prägte. Das Wort System taucht nicht zufälligerweise in den Titeln zweier seiner früheren Werke auf.

Im Gegensatz zu dem Schweizer Sohn eines Bergbauerns hegte Plücker, der in Wuppertal im Hause eines Kaufmanns aufgewachsen war, jedoch eine empirische Sicht auf sein Fach. Damit stand er Monge weitaus näher. Ihm lag viel daran, die neuen Methoden der analytischen Geometrie zu verwenden, um die unbekanntesten Gestalten höherer Kurven und Flächen von Grund auf Weise zu untersuchen. In seinen frühen Werken bekräftigte er wiederholt die Ansicht, dass es einen Parallelismus zwischen analytischen und geometrischen Formen gäbe, wobei er sich auf Monge berief. Das Studium von Gleichungen war für ihn dabei der Schlüssel für die Erforschung der Figuren. Obwohl Plücker immer wieder davon sprach, dass Kalkül und Konstruktion einander entsprächen und sich wechselseitig anregen würden, besaß die Analysis für ihn den Vorrang. Er pochte nicht nur auf die Reinheit der Methode, worin er Steiner wiederum nicht unähnlich war.<sup>16</sup> Für ihn war die Analysis eine Wissenschaft, die

serer Kenntnisse vom Raum und seinen Gestalten“, das er um sich herum wahrnehme: Fiedler, Wilhelm. „Zur Reform des geometrischen Unterrichts“. In: *Naturforschende Gesellschaft Zürich* (1877), S. 84. Klaus Volkert beschreibt den Einfluss Steiners auf Wilhelm Fiedler, der sich auch in dessen Terminologie widerspiegelt: Volkert, Klaus. „Otto Wilhelm Fiedler and the Synthesis of Projective and Descriptive Geometry“. In: *Descriptive Geometry, The Spread of a Polytechnic Art: The Legacy of Gaspard Monge*. Hrsg. von Barbin, Évelyne, Menghini, Marta und Volkert, Klaus. International Studies in the History of Mathematics and its Teaching. Springer International Publishing, 2019.

<sup>15</sup> Heidelberger, M. „Some Patterns of Change in the Baconian Sciences of the Early 19th Century Germany“. In: *Epistemological and Social Problems of the Sciences in the Early Nineteenth Century*. Hrsg. von Jahnke, Hans Niels und Otte, M. Dordrecht: Reidel, 1979.

<sup>16</sup> In der Vorrede zu seinem ersten Band finden sich entsprechende Äußerungen: Plücker, Julius. *Analytisch-geometrische Entwicklungen*. Bd. 1. Essen: G. D. Baedeker Verlag, 1828,

„unabhängig von jeder Anwendung, selbstständig für sich alleine dasteht“, während die Geometrie „bloß als die bildliche Deutung gewisser Beziehungen aus dem grossen erhabenen Ganzen erscheint.“<sup>17</sup> Die Anschauung war zwar hilfreich, um überflüssige Eliminationen und analytische Entwicklungen zu vermeiden. Gleichzeitig jedoch betonte Plücker die Vorteile, die sich ergeben, wenn jede „Vermischung von Rechnung und Konstruktion“ aus der analytischen Geometrie verbannt wird: „Alsdann eröffnet sich in ihr ein neues Feld der Forschung, in welchem man sich viel leichter bewegen kann, weil hier Alles auf eine Combination bloßer Symbole ankommt.“<sup>18</sup> Voll zur Geltung kämen die Vorzüge der analytischen Methode in der Geometrie des Raumes, da ihre Konstruktionen die Einbildungskraft in höherem Maße beanspruchen würden.

Solange es jedoch nur um den Inhalt ging, war es für Plücker – wie für Jakob Steiner auch – nebensächlich, ob unmittelbar Figuren oder ihre Gleichungen betrachtet werden. Die analytische Methode besaß seiner Ansicht nach jedoch den Vorteil, dass sie Verallgemeinerungen gestattet, weswegen er sie vorzog.

### **Geometrie als reine Lehre von der Gestalt**

Obwohl Julius Plücker und Jakob Steiner andere Methoden vorzogen, ähnelten sie sich unter vielen Gesichtspunkten. Sie teilten gemeinsame Ansichten, die unter deutschen Geometern Anfang des 19. Jahrhunderts weit verbreitet waren. In ihrer Vorstellungswelt standen die Gebilde des Raumes in einer festen, natürlichen und harmonischen Ordnung. Dieses Bild eines strengen Aufbaus war teilweise verbunden mit einem Ästhetizismus, der die Wahrheit in der Gestalt vermutete. Zwar reicht er nicht bei jedem so weit, wie bei Ernst Kummer, aber viele dürften ihm zugestimmt haben: „Solche Eindrücke wird auch jeder Mathematiker sich bewusst sein, denn in dem Reiche des Mathematischen herrscht eine eigenthümliche Schönheit, welche nicht sowohl mit der Schönheit der Kunstwerke, als vielmehr mit der Schönheit der Natur übereinstimmt und welche auf den sinnigen Menschen, der das Verständnis dafür gewonnen hat, in ganz ähnlicher Weise einwirkt, wie diese.“<sup>19</sup> Auch andere hegten ähnliche Gedanken, wenn sie vom „erhabenen Ganzen“ (Julius Plücker) und der „schönsten Ordnung“ (Jakob Steiner) schwärmten, die im Bereich der Geometrie anzutreffen

S. iv.

<sup>17</sup> Plücker, Julius. *Analytisch-geometrische Entwicklungen*. Bd. 2. Essen: G. D. Baedeker Verlag, 1831, S. ix.

<sup>18</sup> Plücker, *Analytisch-geometrische Entwicklungen*, S. iv.

<sup>19</sup> Kummer, Ernst E. „4. Juli 1867. Öffentliche Sitzung zur Feier des Leibnizischen Jahrestages.“ In: *Monatsberichte der Königlichen Preussischen Akademie zu Berlin (1862)*. Berlin: Ferd. Dümmler's Verlags-Buchhandlung, 1867, S. 395.

sei.<sup>20</sup> In der Vorrede zu seiner *Theorie der algebraischen Kurven* von 1839 erklärte Plücker: „Das Kriterium für den Werth oder Unwerth eines neuen Resultates, wie einer neuen Methode, liegt keinesweges in ihrer möglichen Nutzenanwendung, sondern unmittelbar in ihnen selbst: sie müssen, ich glaube mich nicht bezeichnender ausdrücken zu können, ein rein ästhetisches Interesse für sich in Anspruch nehmen.“<sup>21</sup>

Das ästhetische Interesse deutscher Geometer lenkte ihr Augenmerk auf die Gestalt der studierten Formen. Obwohl Plücker, Möbius und Steiner sich projektiver Methoden bedienten, berücksichtigten sie in ihren Betrachtungen häufig noch, wie die Gebilde gegenüber der unendlich fernen Ebene lagen. Während diese Lageverhältnisse vom Standpunkt der projektiven Geometrie unerheblich sind, spielen sie für die Anschauung eine fundamentale Rolle. Aus demselben Grund differenzierten sie auch zwischen imaginären und reellen Größen.<sup>22</sup> Für die deutschen Geometer in der ersten Hälfte des Jahrhunderts war Geometrie längst keine abstrakte Wissenschaft. In ihren Augen war es die Lehre von den Gestalten der ebenen und räumlichen Gebilde.

Untrennbar mit dem ästhetizistischen Ideen verbunden war die Überzeugung, dass die Mathematik eine reine Wissenschaft sei. Nicht nur August Crelle und Carl Jacobi blickten abschätzig auf das Nachbarland, in dem Gaspard Monge die Lösung praktischer Aufgaben mithilfe der Geometrie lehrte. In seiner Königsberger Antrittsrede des Jahres 1832 vertrat Jacobi die Ansicht, dass die „meisten französischen Geometer, die aus der Schule des berühmten Grafe de Laplace“ hervorgegangen seien, vom rechten Pfad abgekommen sind: „Während diese das Heil der Mathematik allein aus physikalischen Fragestellung erstreben, verlassen sie jenen wahren und natürlichen Weg der Disziplin, nach dessen Beschreiten einst Euler und Lagrange die analytische Kunst zu dem Gipfel geführt haben, dessen sie sich jetzt erfreut.“<sup>23</sup> Der Aufbau der Mathematik spiegele die göttliche Ordnung der Natur wider. „Die wahre Ursache des Fortschritts der Mathematik ist deren notwendige Entfaltung, die ge-

<sup>20</sup> Steiner, *Systematische Entwicklung*, VI; Plücker, *Analytisch-geometrische Entwicklungen*, IX.

<sup>21</sup> Plücker, *Theorie der algebraischen Curven*, VIII.

<sup>22</sup> Felix Klein hob dies bei Julius Plücker hervor: „Plücker war bei all seinen Leistungen zum Ausbau der projektiven Geometrie kein Projektiviker im eigentlichen Sinne. Im Stile der alten Geometer des 18. Jahrhunderts haftete er am Konkreten, richtete sein Augenmerk auf das Verhalten der Kurven im Unendlichen, widmete z. B. ausführliche Untersuchungen der Frage nach den Asymptoten usw., alles Dinge, deren Bedeutung vom rein projektiven Standpunkt aus verschwindet.“ Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, S. 126.

<sup>23</sup> Knobloch, Eberhard, Pieper, Herbert und Pulte, Helmut. „... das Wesen der reinen Mathematik verherrlichen“. In: *Mathematische Semesterberichte* 42.2 (1995), S. 112.

mäß den dem menschlichen Geist eingepflanzten ewigen Gesetzen geschieht.“<sup>24</sup> Eine Orientierung an physikalischen Fragen könne indes niemals zu wahrer Erkenntnis führen.

Die Aversion gegen praktische Erwägungen war unter deutschen Mathematikern weit verbreitet.<sup>25</sup> Zwar war sie nicht bei jedem Gelehrten so ausgeprägt wie bei Carl Jacobi. Aber selbst diejenigen, die weniger Berührungsängste gegenüber praktischen Problemen verspürten, betrieben die Erforschung der geometrischen Formen in erster Linie um ihrer selbst willen. Es erschien ihnen als Ziel an sich, auch die Gestalten einzelner Kurven, Flächen und Körpern en détail zu untersuchen. Die Frage, was sich aus diesen Studien schlussfolgern ließe, war demgegenüber zweitrangig.

### Das Studium der ebenen Kurven höherer Ordnung

Die Vorstellungen deutscher Geometer wurden auch durch Erfolge beflügelt, die beim Studium der geometrischen Eigenschaften von Gebilden höherer Ordnung während der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts erzielt wurden. Vor allem die Erforschung ebener Kurven machte während dieser Zeit Fortschritte.

Julius Plücker präsentierte in seinem *System der analytischen Geometrie* (1835) eine umfangreiche Klassifikation der Kurven dritten Grades. Er unterschied 219 verschiedene Arten, wobei er seine Einteilung nach gestaltlichen (affinen), aber auch algebraischen Merkmalen vornahm. Seine Vorgehensweise war etwas undurchsichtig, da er keinen Verwandtschaftsbegriff definierte. Die Formen sämtlicher Arten hielt er auf mehreren Tafeln fest (Abb. 6.1).<sup>26</sup> In den folgenden zwei Jahrzehnten rief der Gegenstand großes Interesse unter den deutschen Geometern hervor. August Möbius teilte die kubischen Kurven in seiner Abhandlung „Ueber die Grundformen der Linien der dritten Ordnung“ (1852) in sieben Gattungen ein, worunter er Klassen kollinear Kurven verstand.<sup>27</sup> Im Gegensatz zu Plückers früherer Klassifikation fußte Möbius' Arbeit auf klaren Prinzipien. In dem Vorwort seiner Abhandlung heißt

<sup>24</sup> Ebd., S. 111.

<sup>25</sup> Der deutsche Historiker Gert Schubring hat in Anlehnung an R. Steven Turner beschrieben, dass ihre Ansichten mit dem Wunsch und Bemühen verbunden waren, Mathematik als eigenständige Wissenschaft an den deutschen Universitäten im frühen 19. Jahrhundert zu etablieren. Er zitiert auch Äußerungen August Crelles, die denen Jacobis ähneln: Schubring, Gert. „The Conception of Pure Mathematics as an Instrument in the Professionalization of Mathematics“. In: *Social History of Nineteenth Century Mathematics*. Hrsg. von Mehrtens, Herbert, Bos, Henk und Schneider, Ivo. Boston, MA: Birkhäuser, 1981.

<sup>26</sup> Plücker, *System der analytischen Geometrie*.

<sup>27</sup> Möbius, August Ferdinand. „Ueber die Grundformen der Linien der dritten Ordnung“. In: *Abhandlungen der königlichen sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften* 1 (1852).

es: „Ehe man es unternimmt, sie in *Arten* zu sondern, wird man sie zuvor nach einem höheren Collectivbegriff – nach *Gattungen* – einzutheilen haben, so dass alle einander collinearen Linien derselben Ordnung zu einerlei Gattung dieser Ordnung, und hierauf alle einander affinen Linien derselben Gattung zu einerlei Art dieser Gattung gerechnet werden.“<sup>28</sup> Möbius, der zu jener Zeit als Professor in Leipzig tätig war, berief sich auf sein früheres Werk *Der barycentrische Calcul* (1827), in dem er den Begriff der Verwandtschaft geometrischer Figuren eingeführt hatte.<sup>29</sup> Für seine Diskussion der kubischen Kurven verwendete er neben analytischen auch geometrische Methoden. Anstatt unmittelbar die Gestalt der ebenen Kurven zu untersuchen, betrachtete Möbius ihre Bilder unter Projektionen auf eine Kugel. Der Übergang zur Diskussion der sphärischen Kurven erleichterte die Anschauung, da nun das unendliche Ferne als Äquator sichtbar wurde. Auch er veröffentlichte eine Tafel mit verschiedensten Figuren. Möbius verwendete sie sowohl als Stützen für seine geometrischen Betrachtungen als auch zur Veranschaulichung der Grundformen. Zwischen den beiden Arbeiten Plückers und Möbius sind zahlreiche weitere Abhandlungen über Kurven dritter Ordnung in Crelles Journal erschienen. In den 1840er Jahren veröffentlichten Otto Hesse, Jakob Steiner, Hermann Graßmann und Julius Plücker mehrere Arbeiten zu dem Thema.<sup>30</sup>

Mit seinen Arbeiten griff Otto Hesse Plückers frühere Gedanken zu den neuen Wendepunkten einer kubischen Kurve  $f = 0$  wieder auf. Er zeigte, dass sie zugleich auf der Kurve dritter Ordnung liegen, die durch die Determinante von  $f$  definiert wird. Im Gegensatz zu Julius Plücker und August Möbius verließ sich Hesse voll und ganz auf analytische Methoden. Er verzichtete nicht nur auf die Verwendung von Figuren, sondern arbeitete durchgehend mit homogenen Koordinaten. Außer-

<sup>28</sup> Hervorhebungen im Original: Möbius, „Ueber die Grundformen der Linien der dritten Ordnung“, S. 2.

<sup>29</sup> Möbius, August Ferdinand. *Der barycentrische Calcul: Ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie*. Leipzig: Johann Ambrosius Barth, 1827.

<sup>30</sup> Graßmann, Hermann. „Über die Erzeugung der Curven dritter Ordnung durch gerade Linien, und über die geometrische Definition dieser Curven“. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 36 (1848); Plücker, Julius. „Über Curven dritter Ordnung und analytische Beweisführung“. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 34 (1847); Steiner, Jakob. „Sätze über Curven zweiter und dritter Ordnung“. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 32 (1846); Hesse, Otto. „Über Curven dritter Ordnung und die Kegelschnitte, welche diese Curven in drei verschiedenen Puncten berühren“. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 36 (1848); Hesse, Otto. „Ueber Curven dritter Classe und Curven dritter Ordnung“. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 38 (1849).

dem bemühte er sich stets um die größtmögliche Verallgemeinerung seiner Sätze, die er nach Möglichkeit zuerst für Kurven beliebiger Ordnung  $n$  bewies, bevor er den Fall  $n = 3$  betrachtete. Nachdem er seine Klassifikation von Kurven der dritten Ordnung abgeschlossen hatte, veröffentlichte Julius Plücker 1839 seine *Theorie der algebraischen Kurven*. In dem Werk veröffentlichte er die berühmten Formeln, die einen Zusammenhang zwischen der Ordnung  $n$  und Klasse  $k$  einer ebenen Kurve mit der Anzahl ihrer Doppel- und Rückkehrpunkte (Spitzen)  $d$  und  $r$  herstellt.<sup>31</sup> Sie enthielt Ansätze zu einer allgemeinen Lehre der ebenen Kurven beliebiger Ordnung. In einem großen Teil seines Werk studierte Plücker jedoch quartische Kurven, von denen er mithilfe seiner Formeln zeigen konnte, dass sie im Allgemeinen 28 Doppeltangenten besitzen. Er unterteilte sie in 152 verschiedenen Arten.<sup>32</sup>

## 7.2 Neue Geometrien 1849–1891

Zur Jahrhunderthälfte wendeten sich die europäischen Geometer verstärkt dem Studium der Flächen höherer Ordnung zu. Ein wichtiger Impuls ging von einer überraschenden Entdeckung aus, die George Salmon und Arthur Cayley 1849 machten. Sie zeigten, dass auf einer allgemeinen Fläche der dritten Ordnung 27 verschiedene Geraden liegen. Das Resultat sorgte nicht zuletzt unter deutschen Gelehrten für großes Aufsehen, die sich – wie die Geometer des Vereinigten Königreiches – fortan dem Studium der kubischen Flächen verschrieben. Während der Erforschung von Flächen der höheren Ordnung wuchs bei ihnen der Wunsch, die neuentdeckten Formen zu veranschaulichen. Ab den 1860er Jahren fanden nach und nach handgreifliche Modelle Anerkennung bei deutschen Geometern. Sie halfen ihnen auch über die Hindernisse hinweg, die die unbekannteren und verwickelten Flächen für das Vorstellungsvermögen bereit hielten. Parallel zu diesen Entwicklungen, die das Feld der Geometrie erweiterten, spitzte sich mit der Zeit eine andere Tendenz zu. Die Geometrie nahm nach und nach immer abstraktere Züge an. Der Prozess vollzog sich schleichend, auch wenn oftmals einzelne Ereignisse in der Historiographie hervorgehoben worden sind. Weitaus wichtiger als die Entdeckung der nicht-euklidischen Geometrien war die Algebraisierung. Sie sorgte für eine langsame Erosion der traditionellen Anschauung, nach der es die Aufgabe der Geometrie sei, die Gestalten der ebenen und räumlichen Gebilde zu erforschen. In den 1870er Jahren des Jahrhunderts ließen sich die ersten Anzeichen wahrnehmen, dass die alten Überzeugungen ins Wanken geraten waren.

<sup>31</sup> Plücker, *Theorie der algebraischen Curven*, S. 211.

<sup>32</sup> Ebd., S. 136–149.

## Studium der Flächen höherer Ordnung

Zur Jahrhunderthälfte wendeten sich die Mathematiker dann verstärkt dem Studium der Flächen höherer Ordnung zu. Bis zum Anfang der 1840er Jahre sind nur wenige derartige Gebilde von französischen, deutschen und englischen Mathematikern untersucht worden. Charles Dupin entdeckte als Schüler Gaspard Monges 1803 die Zykliden, welche heute seinen Namen tragen.<sup>33</sup> Viele Arbeiten zu höheren Flächen wurden durch physikalische Fragen angeregt. Die Wellenfläche etwa, die die Ausbreitung von Licht in Kristallen beschreibt, ist auch unter geometrischen Aspekten studiert worden.<sup>34</sup> Arthur Cayley beschrieb Tetraedroide (1846), die eine Klasse quartischer Flächen bilden, die auch die Wellenfläche mit einschließt. Bis zur Jahrhundertmitte blieb es meist bei einzelnen Studien zu speziellen Flächen dritter und vierter Ordnung. Zwar wurden Flächen höherer Ordnung auch unter allgemeineren Gesichtspunkten studiert. Jean-Victor Poncelet (1788–1867) ermittelte die Klasse einer allgemeinen Fläche  $n$ -ter Ordnung, während Julius Plücker Kontaktbedingungen für Flächen verschiedener Ordnungen untersuchte.<sup>35</sup> Trotz einzelner Erfolge fand sich jedoch kein Ansatz für eine systematische Klassifikation von Gebilden, die in ihrer Komplexität über die bekannten Quadriken hinausgingen.

Dies änderte sich Mitte der 1840er Jahre, in denen die projektive Geometrie auch im Vereinigten Königreich an Bedeutung gewann.<sup>36</sup> Die Gründungen verschiedener Zeitungen ab Ende der 1830er Jahre kündeten von dieser Entwicklung. In dem *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, das in den Jahren 1846–1854 erschien, publizierten viele englische Geometer wie George Salmon (1819–1904) und Arthur Cayley (1821–1895) ihre Arbeiten.<sup>37</sup> Salmon, der am Trinity College in Dublin tätig war, veröffentlichte in steter Abfolge kurze, teilweise nur zweiseitige Artikel, in de-

<sup>33</sup> Belhoste, Bruno. „Charles Dupin et l’héritage de Monge en Géométrie“. In: Christen, Carole u. a. *Charles Dupin (1784-1873): Ingénieur, savant économiste, pédagogue et parlementaire du Premier au Second empire*. Rennes: Presses universitaires de Rennes, 2009, S. 86.

<sup>34</sup> Plücker, Julius. „Discussion de la forme générale des ondes lumineuses.“ In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 19 (1839).

<sup>35</sup> Plücker, Julius. „Über die allgemeinen Gesetze, nach welchen irgend zwei Flächen einen Contact der verschiedenen Ordnungen haben.“ In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 4 (1829), S. 351-370.

<sup>36</sup> Richards, Joan L. „Projective geometry and mathematical progress in mid-Victorian Britain“. In: *Studies in History and Philosophy of Science Part A* 17.3 (1986), S. 310.

<sup>37</sup> Crilly, Tony. „The Cambridge Mathematical Journal and its Descendants: the Linchpin of a Research Community in the Early and Mid-Victorian Age“. In: *Historia Mathematica* 31.4 (2004).

nen er die allgemeinen Eigenschaften von Flächen  $n$ -ter Ordnung untersuchte, wobei ihn insbesondere enumerative Fragen interessierten.<sup>38</sup> Arthur Cayley hatte seinen Abschluss in Cambridge gemacht. Er begutachtete 1847 einen Artikel „On the Degree of a Surface Reciprocal to a Given One“ für das Journal, in dem er den Grad der reziproken Fläche einer Fläche  $n$ -ter Ordnung hergeleitet wurde.<sup>39</sup> George Salmons Arbeit hinterließ einen tiefen Eindruck bei Cayley.<sup>40</sup> Als er Salmon ein Jahr später kennenlernte, der inzwischen zum Dozenten an das Trinity College in Dublin berufen worden war, begann eine fruchtbare Freundschaft. Gemeinsam konnten die beiden Freunde 1849 beweisen, dass auf einer allgemeinen kubischen Fläche genau 27 Geraden liegen müssen.

Ihre überraschende und merkwürdige Entdeckung sorgte für großes Aufsehen unter Mathematikern, die sich fortan verstärkt dem Studium höherer Flächen zuwendeten. James J. Sylvester (1814–1897) stieß 1851 auf ein Pentaeder, das in eindeutiger Weise jeder kubischen Fläche zugeordnet werden kann.<sup>41</sup> Trotz des Aufblühens der Forschung im Viktorianischen England gegen Mitte des Jahrhunderts, blieben vorerst die deutschsprachigen Länder das Zentrum der geometrischen Forschung in Europa. Es waren größtenteils immer noch die Vertreter der früheren Generation, die in den deutschsprachigen Ländern die wissenschaftliche Arbeit auf diesem Feld vorantrieben. Jakob Steiner berichtet 1856 auf einer Sitzung bei der Berliner Akademie von Ergebnissen, die er bei der Untersuchung kubischer Flächen erzielt hätte.<sup>42</sup> Sein Freund, der Schweizer Ludwig Schläfli (1814–1895), befasste sich indes mit der Konfiguration der 27 Geraden. Nachdem er 1858 das System der Doppelsechs beschrieben

<sup>38</sup> Salmon, George. „Note on the Parabolic Points of Surface“. In: *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal* 2 (1847); Salmon, George. „On the Condition that a Plane should touch a Surface along a Curve Line“. In: *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal* 3 (1848); Salmon, George. „On the Number of Normals which can be Drawn from a given Point to a given Surface“. In: *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal* 3 (1848).

<sup>39</sup> Salmon, George. „On the Degree of a Surface Reciprocal to a Given One“. In: *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal* 2 (1847).

<sup>40</sup> Crilly, Tony. „The Young Arthur Cayley“. In: *Notes and Records of the Royal Society of London* 52.2 (1998), S. 277.

<sup>41</sup> Sylvester, James J. „Scetch of a Memoir on Elimination, Transformation, and Canonical Forms“. In: *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal* 6 (1851).

<sup>42</sup> Steiner teilte die Resultat bei seinem Vortrag mit, ohne jedoch Beweise anzugeben. Deswegen lässt sich auch nicht nachvollziehen, ob er die 27 Geraden und das Pentaeder entdeckt hat, ohne die Arbeiten aus dem Vereinigten Königreich zu kennen: Steiner, Jakob. „Über die Flächen dritten Grades“. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 53 (1857).

hatte, klassifizierte er 1863 schließlich alle Arten kubischer Flächen hinsichtlich ihrer Singularitäten und der Realitätsverhältnisse ihrer Geraden. Seine Arbeiten erschienen beide in englischen Journals.<sup>43</sup>

Schläffis Einteilung war auch deswegen interessant, weil er das Augenmerk auf die Realitätsverhältnisse legte. Er untersuchte für jede Art explizit, wie viele Linien reell sein konnten. In ihrer Arbeit von 1849 hatten George Salmon und Arthur Cayley nur zeigen können, dass es 27 Geraden geben muss, von denen einige nach bestimmten Regeln zusammenfallen, sobald Singularitäten auftreten. Sie haben jedoch keine Aussage darüber getroffen, ob es überhaupt eine Fläche dritten Grades geben konnte, bei der all diese Geraden auch reell sind. In ihrem Beweis schlossen sie an einer Stelle vom Grad eines Polynoms auf die Anzahl der Lösungen. Sie verwendeten mit anderen Worten den Fundamentalsatz der Algebra. Von diesem Punkt aus konnten sie nicht benennen, wie viele der Lösungen reell sein können.<sup>44</sup> Mit diesem Problem war die gesamte Forschung in der Geometrie behaftet, deren Fortschritt während des 19. Jahrhunderts enorm auf der Einführung komplexer Zahlen beruhte. Bekannt war zu jenem Zeitpunkt bereits, dass es keinen Grund gab, auf die Existenz reeller Lösungen zu vertrauen. Julius Plücker hatte mithilfe seiner Formeln zeigen können, dass jede Kurve dritten Grades neun Wendepunkte besitzen muss. Von diesen sind aber immer mindestens sechs paarweise konjugiert imaginär. Mit anderen Worten, die Aussage besitzt alleine algebraische Bedeutung.<sup>45</sup> Vor diesem Hintergrund lässt sich der Erkenntniswert bemessen, den die separate Erforschung der Realitätsverhältnisse besaß, wie sie Ludwig Schläfli für die Flächen vornahm.

In den 1860er Jahren wurden immer mehr Untersuchungen zu Gebilden höherer Ordnung durchgeführt. Während weitere Studien zu Flächen dritter Ordnung erschienen, weckte Ernst Kummer das Interesse für die quartischen Gebilde. Im Zuge seiner Arbeiten entdeckte er die Klasse von Flächen, die später nach ihm benannt

<sup>43</sup> Schläfli, Ludwig. „An Attempt to Determine the Twenty-Seven Lines upon a Surface of the Third Order, and to divide such Surfaces into Species in reference to the Reality of the Lines upon the Surface. (2. Teil)“. Übers. von Cayley, Arthur. In: *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* 2 (1858); Schläfli, Ludwig. „On the Distribution of Surfaces of the Third Order into Species, in Reference to the Absence or Presence of Singular Points, and the Reality of their Lines“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 153 (1863).

<sup>44</sup> Ihr Beweis ist an dieser Stelle ohnehin fehlerhaft, da sie die Verschiedenheit der Lösungen voraussetzen, ohne sie jedoch zu beweisen.

<sup>45</sup> Im Jahr 1876 gelang es Felix Klein, eine Formel zu finden, mit der sich die Anzahl der reellen Wendepunkte bestimmen lässt. Klein, „Eine neue Relation zwischen den Singularitäten einer algebraischen Curve“.

worden sind, und welche sich durch Anzahl von 16 Doppelpunkten gegenüber anderen Flächen der vierten Ordnung auszeichnen. Für Erstaunen bei den Gelehrten sorgte vor allem die Konfiguration, in der sich die Punkte befanden. Durch jeden gingen genau sechs Ebenen, welche die Fläche entlang eines Kegelschnitt berührten, und die deswegen von Kummer Doppelsebenen genannt worden sind. Insgesamt handelt es sich um 16 Ebenen, auf denen jeweils genau sechs Doppelpunkte liegen. Diese Symmetrie zwischen den Punkten und Ebenen überraschte die Zeitgenossen Kummers weitaus mehr, als die bloße Anzahl der Doppelpunkte. Ernst Kummer veröffentlichte weitere Arbeiten zu anderen Klassen quartischer Flächen, die sich jeweils durch besondere Eigenschaften gegenüber der unübersichtlichen Masse an Gebilden dieser Ordnung auszeichneten. Seine Beschäftigung ist auch durch die geometrische Optik angeregt worden, mit der er sich um 1860 herum befasste. Mitte des Jahrzehnts begann sich dann Julius Plücker, nachdem er sich für mehrere Jahre voll und ganz physikalischen Untersuchungen gewidmet hatte, wieder rein geometrischen Studien zu zuwenden. Während seiner Ausarbeitung der *Neuen Geometrie* studierte er auch intensiv eine Klasse von Flächen des vierten Grades, die damit verstärkt in den Fokus der Mathematiker traten. Sein Schüler Felix Klein entdeckte dann, dass es sich bei den Studienobjekten seines Lehrers, um spezielle Kummersche Flächen handelt.

Felix Klein gehörte zu einer langen Reihe von jungen deutschen Mathematikern, die ab Ende der 1860er Jahre die geometrische Forschung der Generation von Ernst Kummer und Julius Plücker fortführten. Zu ihnen zählte Rudolf Sturm (1841–1919), der anlässlich eines Preisausschreibens der *Berliner Akademie der Wissenschaften* des Jahres 1864 dazu veranlasst worden war, eine Arbeit über kubische Flächen zu verfassen, die nur auf synthetischen Methoden beruhte, wie es die Ausschreibung verlangte.<sup>46</sup> Er bekam die Hälfte des Preises zugesprochen, die andere ging an den Italiener Luigi Cremona (1830–1903), der dieselbe Fragestellung bearbeitet hatte.<sup>47</sup> Vereinzelt betraten jetzt auch italienische Geometer die Bühne.<sup>48</sup> Vorerst blieben es jedoch Gelehrte der deutschsprachigen Länder, welche die Erforschung der Flächen dritter und vierter Ordnung vorantrieben. Währenddessen erschienen nur noch wenige Arbeiten englischer Mathematiker auf diesem Gebiet. Sie vertieften sich zu jener Zeit in die Invariantentheorie, mit der sie die Untersuchungen vom algebraischen

<sup>46</sup> Sturm, Rudolf. *Synthetische Untersuchungen über die Flächen dritter Ordnung*. Leipzig: B. G. Teubner, 1867.

<sup>47</sup> Cremona, Luigi. „Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre,“ in: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 68 (1868).

<sup>48</sup> Noether, Max. „Luigi Cremona“. In: *Mathematische Annalen* 59 (1904).

Standpunkt aus fortführten.<sup>49</sup>

Nach 1870 betraten in den deutschen Ländern vermehrt neue Gelehrte das Feld. Sie unterschieden sich zwar von den älteren Vertretern, teilten jedoch das Interesse für anschauliche Fragen. Trotz der Tendenzen im Vereinigten Königreich blieben es hauptsächlich die gestaltlichen Verhältnisse der Gebilde, für die sie sich interessierten. Wichtige Arbeiten auf diesem Gebiet stammten von Adolf Weiler (1851–1916), Karl Rohn (1855–1920) und Karl F. Rodenberg (1854–1926), die alle bei Felix Klein studiert haben. Rodenberg beschäftigte sich bereits in seiner Dissertation, die er bei Alfred Clebsch schrieb, mit dem Pentaeder der kubischen Flächen, das zuerst von James J. Sylvester entdeckt worden war.<sup>50</sup> Er leitete die Gestalt des Pentaeders für alle Typen her, die Schläfli in seiner Klassifikation unterschieden hat. Später ging er von den fünf Ebenen aus, um die Gestalt der kubischen Flächen zu diskutieren, von denen sie das Pentaeder bilden.<sup>51</sup> Karl Rohn führte das Studium der quartischen Flächen fort, die er mit Hinblick auf die Realitätsverhältnisse in Arten einteilte. In den 1880er Jahren verfolgte er dieselbe Fragestellung für Regelflächen und Raumkurven. Angeregt durch eine Preisaufgabe der *Jablonowskische Gesellschaft der Wissenschaften* vom Jahr 1882, wendete sich Rohn erneut dem Studium der quartischen Fläche zu. In der Aufgabenstellung heißt es, dass die Fortschritte bei der Theorie kubischer Flächen es inzwischen ermöglichen, „die Gesamtheit der bei diesen Flächen auftretenden Gestalten zu überblicken“.<sup>52</sup> Die Gesellschaft wünschte etwas Vergleichbares für die vierte Ordnung. Obwohl Karl Rohn eingestehen musste, dass es ihm in seiner Schrift „Die Flächen vierter Ordnung hinsichtlich ihrer Knotenpunkte und ihrer Gestaltung“ nicht gelungen war, die Aufgabe zu erfüllen, bekam er 1886 den Preis zugesprochen. Womöglich waren sich alle der Schwierigkeiten bewusst, die mit solch einem Vorhaben verbunden waren.

Mitte der 1880er Jahre, als Karl Rohn seine Preisschrift einreichte, begann das Interesse an einem Studium der gestaltlichen Verhältnisse von Gebilden der höheren Ordnung merklich abzuflachen. Die Gründe für das Nachlassen sind *auch* in den Schwierigkeiten zu suchen, die bei den Flächen vierter Ordnung aufgetreten waren.

<sup>49</sup> Eine Ausnahme bildeten verschiedene Arbeiten über Regelflächen, die Arthur Cayley veröffentlicht hat.

<sup>50</sup> Rodenberg, Carl. *Das Pentaeder der Flächen dritter Ordnung beim Auftreten von Singularitäten*. Göttingen: E. A. Huth, 1874.

<sup>51</sup> Rodenberg, Carl. „Zur Classification der Flächen dritter Ordnung“. In: *Mathematische Annalen* 14.1 (1878).

<sup>52</sup> Rohn, Karl. *Die Flächen vierter Ordnung hinsichtlich ihrer Knotenpunkte und ihrer Gestaltung*. Preisschriften der Fürstlichen Jablonowskischen Gesellschaft 26. Leipzig: S. Hirzel, 1886.

Gino Loria (1862–1954) erklärt in seiner Geschichte der Geometrie, die 1887 im italienischen Original erstmals veröffentlicht worden ist, bezogen auf die kubischen Flächen, dass die „Theorie dieser geometrischen Gebilde, von welchem Punkte man sie auch betrachten mag, heute einen beachtenswerten Grad der Vollendung erreicht hat.“<sup>53</sup> Für die Flächen des vierten Grades lasse sich dies jedoch nicht behaupten, wie Loria im unmittelbaren Anschluss schreibt. Die Anzahl an Freiheitsgraden wächst mit der Ordnung beträchtlich. Außerdem fehlten Resultate über die allgemeine quartische Fläche. Maßgeblich für den Fortschritt, der in dem Fall  $n = 3$  erzielt werden konnte, war neben der Entdeckung der 27 Geraden, die des Pentaeders. Sie erleichterten die Beschreibung und Diskussion aller möglichen Fälle erheblich. Für quartische Flächen waren solche Resultate ausgeblieben.

Die Geometer wandten sich jedoch nicht nur deshalb anderen Fragen zu, weil sie keine Lösung für die Probleme fanden, die beim Studium höherer Gebilde auftraten. Während die deutschen Gelehrten ihr Interesse an der Erforschung der gestaltlichen Verhältnisse von Kurven und Flächen verloren, änderte sich auch ihre Sicht auf den Gegenstand ihrer Forschung. Mit der Zeit schwand ihre Überzeugung, dass es ein lohnenswertes Ziel sei, in systematischer Weise die geometrischen Formen der Ebene und des Raumes zu untersuchen. Natürlich trug die Ernüchterung darüber, dass weitere Erfolge beim Studium der Gebilde ausgeblieben waren, hierzu bei. Es gab jedoch noch andere Gründe, weshalb ihnen immer mehr Zweifel kamen.

## Abstrakte Geometrie

Die Untersuchungen geometrischer Gebilde, die nach der Jahrhundertmitte eine Blüte erlebten, ehe sich das Interesse an ihnen in den 1880er Jahren langsam abnahm, haftete noch sehr an dem euklidischen Anschauungsraum. Es wurden vornehmlich Figuren betrachtet, die sich auch wahrnehmen ließen. Die Geometrie begann während dieser Jahre jedoch langsam ihren Fokus zu erweitern. Anstatt sich auf Kurven, Flächen und Körper im Raum zu beschränken, dehnte Julius Plücker seine Betrachtungen auf Liniengebilde aus. Unterdessen verloren auch höherdimensionale Räume langsam ihren Schrecken. Die Geometrie nahm immer mehr abstrakte Züge an. Die Entwicklung schürte Zweifel unter den Gelehrten daran, dass ihr Fach die Lehre von dem Raum und seinen Gesetzen ist. Spätestens 1890 ließ sich nicht mehr übersehen, dass sich die Geometrie in einer Krise befand.

Im Jahr 1844 legte Hermann Graßmann (1809–1877), damals Lehrer an einer Schule in seiner Heimatstadt Stettin, der sich während seines Studiums an der Uni-

<sup>53</sup> Loria, Gino. *Die hauptsächlichsten Theorien der Geometrie in ihrer früheren und heutigen Entwicklung*. Übers. von Schütte, Fritz. Leipzig: B. G. Teubner, 1888, S. 39.

versität Berlin in die Mathematik eingearbeitet hatte, seine *Ausdehnungslehre* vor.<sup>54</sup> In dem Werk beschrieb Graßmann eine Lehre  $n$ -dimensionaler Größen, begleitet von philosophischen Betrachtungen. Der Stettiner wollte damit eine neue Wissenschaft begründen, von der die Geometrie selbst nur eine spezielle Anwendung sei, wie er in dem Vorwort der ersten Auflage schrieb: „Schon lange war es mir nämlich einleuchtend geworden, dass die Geometrie keinesweges in dem Sinne wie die Arithmetik oder die Kombinationslehre als ein Zweig der Mathematik anzusehen sei, vielmehr die Geometrie schon auf ein in der Natur gegebenes (nämlich den Raum) sich beziehe, und dass es daher einen Zweig der Mathematik geben müsse, der in rein abstrakter Weise ähnliche Gesetze aus sich erzeuge, wie sie in der Geometrie an den Raum gebunden erscheinen.“<sup>55</sup> Für Graßmann konnte die Geometrie nur bedingt als Disziplin der Mathematik betrachtet werden, weil sie die Natur erforsche. Obwohl er seine Lehre als Verallgemeinerung der Geometrie verstanden wissen wollte, betrachtete er sie zugleich als neue, abstrakte Wissenschaft, deren Gesetze vom Verstand erzeugt werden. Diese widersprüchlichen Aussagen zeigen, wie schwer es Graßmann fiel, sich von der Vorstellung zu lösen, dass die Geometrie die Lehre des Anschauungsraumes ist.

Der Stettiner war sich bewusst, welche Vorteile eine abstrakte Lehre bot, die nach den Gesetzen der Geometrie geformt ist, von ihrem Inhalt jedoch absieht. Die Beschränkung auf drei Dimensionen fiel weg. Dennoch blieb sein Werk – im Gegensatz zu anderen Arbeiten Graßmanns – weitestgehend unbeachtet, wie der Autor selbst im Vorwort zur zweiten Auflage feststellen musste, die erst in seinem Todesjahr 1877 erschienen ist.<sup>56</sup> Die Form seiner Schrift hatte zweifelsohne Anteil an der geringen Aufmerksamkeit, die sie erhielt. Seine Ideen verband Graßmann mit philosophischen Gedanken. Während er in seinem Werk nur wenige Formeln verwendete, stellte er eine Einleitung voran, in denen er über den Begriff und das Wesen der Mathematik räsionierte. Es wäre allerdings falsch, das geringe Interesse an der *Ausdehnungslehre* alleine seiner Form anzulasten. Die Gedanken, mit denen sich Graßmann herumtrug, sind auch ihrem Inhalt nach abstrakt. Ob der Gebrauch von Symbolen und eine Gliederung in Axiomen, Definitionen und Sätzen zu einer größeren Verbreitung seiner Überlegungen geführt hätte, ist zweifelhaft. Seine Arbeit zeigt in jedem Fall, wie stark die Geometrie und alle Vorstellungen, die mit ihr verbunden waren, zu jener

<sup>54</sup> Graßmann, Hermann. *Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre*. 1. Aufl. Leipzig: Otto Wigand, 1844.

<sup>55</sup> Graßmann, Hermann. *Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre*. 2. Aufl. Leipzig: Otto Wigand, 1878, S. VII.

<sup>56</sup> Ebd., S. xv.

Zeit noch an dem Anschauungsraum hing. Das musste auch ein anderer Zeitgenosse erfahren, der acht Jahre nach dem Erscheinen der Ausdehnungslehre seinerseits die Geometrie zu einer Theorie von  $n$  Variablen ausbaute.

Im Jahr 1852 stellte Ludwig Schläfli seine *Theorie der vielfachen Kontinuität* als Manuskript fertig.<sup>57</sup> Obwohl sich Schläfli um eine Veröffentlichung bemühte, fand er allerdings keinen Verlag. Sein Werk erschien erst 1901 nach dem Tod des Autors als Denkschrift der *Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft*.<sup>58</sup> Ähnlich wie Graßmann, wollte der Schweizer mit seiner Lehre die analytische Geometrie zu einer Theorie von  $n$  Variablen verallgemeinern. Schläfli legte auch Wert darauf, dass sie als Teil der Analysis verstanden wird, wie aus einer Anzeige deutlich wird, mit der er einen Verleger für seine Schrift suchte.<sup>59</sup> Mit Bedacht vermied er geometrische Ausdrücke. Während er sich in Wien und Berlin vergeblich um einen Abdruck bemühte, erschienen zumindest Auszüge seines Werkes in den Jahren 1858–1860 im *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*.<sup>60</sup>

### Britische Sichtweise

Es war nicht nur Zufällen geschuldet, dass Ludwig Schläfli mit seinen Gedanken im Vereinigten Königreich auf mehr Gehör stieß. Die britischen Mathematiker waren gegenüber einer Geometrie von  $n$  Dimensionen aufgeschlossener als die Vertreter in den deutschsprachigen Ländern Mitteleuropas. Sie betrachteten ihr Fach stärker unter logischen und algebraischen Gesichtspunkten. Diese Tradition lässt sich bis in das Jahr 1818 zurückverfolgen, in dem die *Analytical Society* gegründet worden ist. Ihre Mitglieder – unter ihnen George Peacock (1791–1858), Charles Babbage (1791–1871) und John Herschel (1792–1871) – wollten Einfluss darauf nehmen, wie die Mathematik in Cambridge gelehrt wird. Die geometrische Tradition, insbesondere bei dem Gebrauch des Calculus, die in England das Erbe Newtons war, betrachteten sie als hemmend für den Fortschritt der Wissenschaft.<sup>61</sup> Sie warben demgegenüber für die

<sup>57</sup> Klaus Volkert gibt ausführliche Darstellung von Schläflis Arbeit: Volkert, Klaus. *In höheren Räumen: Der Weg der Geometrie in die vierte Dimension*. Mathematik im Kontext. Berlin Heidelberg: Springer Spektrum, 2018, S. 52 ff.

<sup>58</sup> Burckhardt, J. J. „Nachwort zur Theorie der vielfachen Kontinuität“. In: *Gesammelte Mathematische Abhandlungen: Band I*. Basel: Springer, 1950, S. 388-392.

<sup>59</sup> Schläfli, Ludwig. „Theorie der vielfachen Kontinuität“. In: *Gesammelte Mathematische Abhandlungen: Band I*. Hrsg. von Steiner-Schläfli-Komitee der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft. Basel: Springer, 1950.

<sup>60</sup> Volkert, *In höheren Räumen*, S. 60.

<sup>61</sup> Richards, Joan L. *Mathematical Visions: The Pursuit of Geometry in Victorian England*. Boston: Academic Press Inc, 1988, S. 17.

Verwendung analytischer Methoden, die auf dem europäischen Festland verbreitet waren. Peacock und Babbage befassten sich intensiv mit dem Studium der Algebra. Im Jahr 1830 erschien Peacocks berühmte Arbeit *A Treatise on Algebra*, Babbage wiederum befasste sich mit der Herstellung von Rechenmaschinen zur Berechnung numerischer Tabellen.<sup>62</sup> In derselben Traditionslinie algebraischer Forschung stehen Augustus DeMorgan (1806–1871) und George Boole (1815–1864).<sup>63</sup> Sie prägten eine Sicht auf Mathematik, die sich auch in der geometrischen Forschung niederschlug.

Ab 1840 erschienen regelmäßig Artikel im *Cambridge Mathematical Journal* und seinen Nachfolgern, die einen starken algebraischen Ansatz in geometrischen Fragen verfolgten. Duncan F. Gregory (1813–1844) und William Walton (1813–1901) bemühten sich in einer Serie von Artikeln um eine Verallgemeinerung geometrischer Methoden durch die Anwendung symbolischer Algebra. Vor diesem Hintergrund veröffentlichten dann Arthur Cayley und Joseph J. Sylvester, die zu den führenden Mathematikern der Viktorianischen Zeit gehörten, mehrere Arbeiten, in denen sie sich auf Formen in  $n$  Variablen bezogen.<sup>64</sup>

In einer Abhandlung, die 1851 im *Philosophical Magazine* erschienen ist, untersucht Sylvester den Kontakt quadratischer Gebilde.<sup>65</sup> Er führt sie als Nullstellenmengen homogener Funktionen  $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  in mehreren Variablen ein. In seinen Betrachtungen beschränkt er sich zwar auf solche Gebilde, die dem Raum angehören. In einer Fußnote merkt er jedoch an: „If the impressions of outward objects came only through the sight, and there were no sense of touch or resistance, would not space of three dimensions have been physically inconceivable? The geometry of three dimensions in ordinary parlance would then have been called transcendental. But in very truth the distinction is vain and futile. Geometry, to be properly understood, must be studied under a universal point of view; every (even the most elementary) proposition must be regarded as a fact, and but as a single specimen of an infinite series of homologous facts.“<sup>66</sup> Im Gegensatz zu Hermann Graßmann

<sup>62</sup> Peacock, George. *A Treatise on Algebra*. Cambridge: J. & J. J. Deighton, 1830.

<sup>63</sup> Koppelman, Elaine. „The Calculus of Operations and the Rise of Abstract Algebra“. In: *Archive for History of Exact Sciences* 8.3 (1971).

<sup>64</sup> Eine Auflistung dieser Arbeiten gibt Corrado Segre in seinem Artikel zur „Mehrdimensionalen Geometrie“, den er für die Enzyklopädie verfasst hat: Segre, Corrado. „Mehrdimensionale Geometrie“. In: *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*. Hrsg. von Meyer, W. Fr. und Mohrmann, H. Bd. 3. Leipzig: B.G. Teubner, 1907, S. 774.

<sup>65</sup> Sylvester, James J. „An Enumeration of the Contacts of Lines and Surfaces of the Second Order“. In: *Philosophical Magazine* 1.2 (1851).

<sup>66</sup> Ebd., S. 119.

und Ludwig Schläfli, die ihre Betrachtungen als Teil der Analysis verstanden wissen wollten, erschien Sylvester eine  $n$ -dimensionale Geometrie als natürliche Verallgemeinerung.

Es dauert allerdings noch zwei Jahrzehnte, bis diese Sichtweise Sylvesters unter den Mathematikern Großbritanniens salonfähig wurde. In einer Rede, die er 1869 bei einem Treffen der *British Association for the Advancement of Science* als Präsident der Sektion für Mathematik und Physik hielt, betonte Joseph J. Sylvester den praktischen Nutzen, den eine vollständige Akzeptanz höherdimensionale Räume besäße.<sup>67</sup> In eine ähnliche Richtung geht Arthur Cayley in einem Artikel über *Abstract Geometry*, der ein Jahr später in den *Philosophical Transactions* erschienen ist.<sup>68</sup> Er verweist auf jüngere Entwicklungen in der Geometrie, die es notwendig gemacht hätten, höhere Dimensionen in die Betrachtungen miteinzubeziehen. Nach ihm waren es geometrische Untersuchungen von Figuren und Gebilden des Raumes, die zu dem Schritt angeregt hätten: „An important instance in plane geometry has actually presented itself in the question of the number of curves which satisfy given conditions: the conditions imply relations between the coefficients in the equation of the curve; and for the better understanding of these relations it was expedient to consider the coefficients as the coordinates of a point in a space of the proper dimensionality.“<sup>69</sup> Wenn die Koeffizienten von Polynomen ihrerseits als Koordinaten aufgefasst werden, lassen sie sich mit Punkten in höherdimensionalen Räumen identifizieren. Eine Geometrie von  $n$  Dimensionen erscheint unter diesen Gesichtspunkten weniger als eine Frage philosophischer Natur, sondern als eine naheliegende Verallgemeinerung, die sich aus dem geometrischen Studium ebener und räumlicher Figuren ergibt.

Zu jenem Zeitpunkt, um 1870 herum, lag eine derartige Erweiterung der Sichtweise in der Luft. Bereits Sylvester verwies in seiner Rede darauf, dass die projektive Geometrie üblicherweise perspektivische Darstellung von Gebilden im vierdimensionalen Raum betrachte.<sup>70</sup> Mitte der 1860er Jahre hatte Julius Plücker damit begonnen, in seiner *Neuen Geometrie* Liniengebilde zu studieren, die er mithilfe von homogenen Gleichungen in sechs Variablen studierte. Gegenstand seiner Betrachtungen waren de facto Teilmengen des fünfdimensionalen projektiven Raums, auch

<sup>67</sup> Sylvester, James J. „A Plea for the Mathematician I“. In: *Nature* 1.9 (1869), S. 238.

<sup>68</sup> Cayley, Arthur. „A Memoir on Abstract Geometry“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 160 (1870).

<sup>69</sup> Ebd., S. 51.

<sup>70</sup> „Moreover, it should be borne in mind that every perspective representation of figured space of four dimensions is a figure in real space, and that the properties of figures admit of being studied to a great extent, if not completely, in their perspective representations.“ Sylvester, „A Plea for the Mathematician I“, S. 238.

wenn ihm diese Vorstellung noch fremd war. Anstatt sie in diesem Sinne als spezielle Punktgebilde zu betrachten, studierte er sie als Liniengebilde im Anschauungsraum. Für seinen Schüler war der Gedanke einer höherdimensionalen Geometrie längst nicht mehr abwegig. In seiner Dissertation beschrieb Felix Klein quadratische Linienkomplexe als Quadriken im projektiven Raum mit fünf Dimensionen. Später, 1872, teilte er am Rande seiner Arbeit über Flächen der dritten Ordnung mit, dass sich die Gebilde auch als Punkte in einem 19-dimensionalen Raum auffassen ließen.<sup>71</sup> Er begründete diese Sicht damit, dass jedes Polynom dritten Grades 20 unbestimmte Koeffizienten umfasse. Für Felix Klein hatten höherdimensionale Räume ihren Schrecken verloren.

### **Merkwürdige Parallelen**

Der Vorstoß in höhere Dimensionen war mit einer anderen Entwicklung eng verbunden, die sich in den Jahren nach der Jahrhundertmitte zuspitzte. In den 1860er Jahren geriet die Vorstellung, dass die Gebilde des Raumes in einer unveränderlichen, festen Ordnung ständen, immer mehr ins Wanken. Mit seiner Liniengeometrie hatte Julius Plücker der Wissenschaft ein völlig neues Feld eröffnet. Neben den gewöhnlichen Punktgebilden, die während jener Zeit intensiv studiert worden sind, gab es eine ganze Welt bestehend aus Liniengebilden, die sich mit denselben geometrischen Methoden untersuchen ließen. Aber nicht nur die Anzahl an Geometrien erweiterte sich während jener Periode. Es wurden auch immer mehr unvermutete Zusammenhänge zwischen ihnen entdeckt, die gleichermaßen den Glauben an ein festes System der Gestalten infrage stellten.

Seitdem es Julius Plücker in den 1830er Jahren gelungen war, für die Dualität von Punkten und Linien in der Ebene sowie Punkten und Ebenen im Raum eine Erklärung zu geben, die auf der Symmetrie beruht, die zwischen den Koeffizienten  $a_i$  und Variablen  $x_i$  einer homogenen Gleichung  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$  herrscht, war den Geometern der Gedanke nicht mehr fremd, dass zwei Geometrien, die dem Inhalt nach verschieden voneinander sind, der Form nach identisch sein können. Den beredtesten Ausdruck fand dieser Dualismus in den Spaltensatz, der in Gregonnes und Crelles Journalen lange Zeit genutzt worden ist, um duale Aussagen nebeneinander zu drucken.<sup>72</sup> Die Mathematiker waren sich der Vorzüge derartiger Symmetrien be-

<sup>71</sup> Klein, „Ueber Flächen dritter Ordnung“.

<sup>72</sup> Julius Plücker ließ einen ganzen Artikel über den Kontakt zwischen Kegelschnitten, der 1827 in den *Annales de mathématiques pures et appliquées* erschienen ist, in diesem Stil abdrucken: Plücker, Julius. „Géométrie de la règle. Théorèmes et problèmes, sur les contacts des sections coniques“. In: *Annales de mathématiques pures et appliquées* 17 (1826).

wusst. Wenn sie einen Satz über die Elemente der einen Geometrie beweisen konnten, hatten sie damit sogleich die Gültigkeit des dualen Satzes in der anderen Geometrie gezeigt.

In den folgenden Jahrzehnten wich dieser Dualismus zunehmend einem Pluralismus gleichberechtigter Sichtweisen. Im Jahr 1860 zeigte Arthur Cayley, wie sich Raumkurven durch homogene Gleichungen zwischen sechs Linienkoordinaten  $p, q, r, s, t, u$  definieren lassen,  $V(p, q, r, s, t, u) = 0$ , die einer quadratischen Relation  $ps + qt + ru = 0$  genügen.<sup>73</sup> Die Gleichung  $V = 0$  umschreibt hierbei die Linien aller möglichen Kegel, welche durch die betreffende Kurve gehen. Cayley betrachtete diese Darstellungsform als eine Alternative zu der analytischen Repräsentation einer Raumkurve als Schnitt zweier Flächen mit Gleichungen.<sup>74</sup> Während Cayleys Augenmerk auf dem Studium der Kurven lag, verschob Julius Plücker einige Jahre später den Fokus. Er nutzte dieselben Relationen, um Gebilde zu definieren, die sich aus Linien zusammensetzen. Seine Untersuchungen zu Linienkomplexen und -kongruenzen beschäftigten ihn die nächsten Jahre, in denen er sich um die Ausarbeitung einer allgemeinen Theorie bemühte. Er studierte die Geometrie dieser Objekte mit derselben Systematik, mit der nur Punktgebilde untersucht worden waren. Mit seinem Tod 1868 hinterließ Julius Plücker der Mathematik ein völlig neues Untersuchungsfeld: Die Liniengeometrie.

In seiner Rezension von Plückers *Neuen Geometrie*, blickte Alfred Clebsch auf die langfristigen Entwicklungen zurück, die dem Werk den Boden bereitet haben: „Die Ausdehnung und Vervollständigung des Ideenkreises der Geometrie gehört zu den wesentlichsten und fruchtbarsten Arbeiten, welche die letzten Jahrzehnte vollbracht haben. Indem die Geometrie sich der analytischen Anschauung gemäss auf *algebraische* Gebilde beschränkte, dehnten sich ihre Betrachtungen zugleich auf *alle* Gebilde dieser Art aus.“<sup>75</sup>

### Lies Linien-Kugel-Transformation

In den 1860er Jahren zeichnete sich immer deutlicher ab, dass es beliebig viele Möglichkeiten gibt, um geometrische Gebilde mithilfe von Gleichungen zu beschreiben und – umgekehrt – Relationen zwischen Variablen geometrisch zu interpretieren. Je mehr dieser Gedanke bei den Geometern Kontur gewann, desto mehr gewannen sie die Überzeugung, dass die Form dieser Gebilde nebensächlich ist.

<sup>73</sup> Cayley, Arthur. „On a New Analytical Representation of Curves in Space“. In: *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* 3 (1860).

<sup>74</sup> Ebd., S. 284.

<sup>75</sup> Clebsch, „Plückers Neue Geometrie des Raumes“, S. 1569.

Im Sommer 1870 war Plücker's Schüler Felix Klein zusammen mit dem norwegischen Mathematiker Sophus Lie (1842–1899) in Paris zu Besuch. In der Stadt schlossen sie Bekanntschaft mit dem französischen Mathematiker Gaston Darboux (1842–1917). Während ihres Aufenthalts entdeckte Lie eine geometrische Transformation, die Sätze über Linien in Sätze über Kugeln überführt. Sie verwandelte die Krümmungslinien einer Fläche in Asymptotenlinien der Bildfläche, was er umgehend der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania mitteilte.<sup>76</sup> Er begann noch auf seiner Rückreise damit, diesen Gedanken weiter auszuformulieren. Die Linien-Kugel-Transformation stiftete eine Korrespondenz, wie er bald bemerkte, zwischen der Plücker'schen Liniengeometrien und einer Geometrie, in der Kugeln die zentralen Elemente bilden. Seine neuartigen Erkenntnisse formulierte Lie in seiner Doktorarbeit aus. Eine Übersetzung erschien 1872 in den *Mathematischen Annalen*.<sup>77</sup> In der Abhandlung zeigt er, dass die beiden homogenen Gleichungen

$$xW - (X + iY) + Zz = 0 \quad (7.1)$$

$$(X - iY)z - yW + Zw = 0 \quad (7.2)$$

eine Relation zwischen den Elementen zweier unterschiedlicher Räume  $r$  und  $R$  stiften. Die Linien des einen Raumes korrespondieren mit den Kugeln des anderen Raumes, wobei sich schneidende Linien auf sich berührende Kugeln abgebildet werden - vice versa.

Lies Linien-Kugel-Transformation besitzt viele Ähnlichkeiten mit der Dualität von Punkten und Ebenen im Raum. Der Norweger sprach in seiner Abhandlung selbst von einer „Neuen Reciprocität im Raum“.<sup>78</sup> Für Lie waren die alte und neue Reciprocität Ausdruck einer Unbestimmtheit innerhalb der Kartesischen Geometrie. Bei Descartes ständen Koordinaten  $x, y$  immer für Punkte in der Ebene. Plücker habe dann jedoch gezeigt, dass sie sich auch als Koordinaten einer Linie auffassen ließen. So habe er den Blick für die Willkür in Descartes Interpretation geöffnet. Nach Lie kann die Geometrie der Ebene nicht nur mit Punkten und Linien dargestellt werden. Jede zweiparametrische Kurvenschar könne an ihre Stelle treten. Denn die

<sup>76</sup> Über die Umstände der Entdeckung berichtet Arild Stubhaug in seiner Biographie über den norwegischen Mathematiker: Stubhaug, Arild. *Es war die Kühnheit meiner Gedanken: Der Mathematiker Sophus Lie*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2003, S. 147. Die Mitteilung ist in dem ersten Band von Lies Gesammelten Abhandlungen abgedruckt.

<sup>77</sup> Lie, Sophus. „Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugel-Complexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differential-Gleichungen“. In: *Mathematische Annalen* 5.1 (1872).

<sup>78</sup> Ebd., S. 147.

Wahl des Elements betreffe nur die Form der sinnlichen Darstellung. Für Lie ist sie etwas Akzidentielles, was den Inhalt unberührt lässt: „Die Cartesische analytische Geometrie übersetzt beliebige Theoreme in algebraische, und macht dadurch aus der Geometrie der Ebene eine sinnliche Darstellung der Algebra zweier Variablen und ebenso aus der Geometrie des Raumes eine Repräsentation einer Algebra, die drei variable Größen umfasst.“<sup>79</sup> Lie spricht von einer zweifachen Willkürlichkeit, die in der Kartesischen Geometrie walte. Zur Unbestimmtheit des Raumelements käme noch die der Koordinaten.

### **Kleins *Erlanger Programm* (1872)**

In demselben Jahr, 1872, in dem Sophus Lies Abhandlung in den *Mathematischen Annalen* erschienen ist, erfolgte die Berufung Felix Kleins nach Erlangen. Im Zuge dessen erschien sein „Programm zum Eintritt in die philosophische Fakultät“, das unter dem Namen *Erlanger Programm* berühmt geworden ist. Es enthält viele Gedanken, die beide Freunde zusammen in Gesprächen erörtert haben.<sup>80</sup> Ein wiederkehrendes Thema bei ihren Treffen waren die merkwürdigen Zusammenhänge zwischen Geometrien gewesen, die ihrem Inhalt nach völlig verschieden voneinander sind.

In dem *Erlanger Programm* zeigte Felix Klein auf, worauf die Ähnlichkeiten und Gemeinsamkeiten beruhten. Es gelang ihm, indem er von dem inhaltlichen Gegenstand all dieser Geometrien absah. Sie wären sich darin gleich, dass sie alle die geometrischen Eigenschaften von Gebilden untersuchen, die von Transformationen nicht verändert werden.<sup>81</sup> Unter Gebilden verstand er Teilmengen von geometrischen Räumen, die er – abweichend vom heutigen Gebrauch des Wortes – als mehrfach ausge dehnte Mannigfaltigkeiten bezeichnete. Mit dem Begriff wollte sich Felix Klein von den problematischen Konnotationen lösen, die bei dem Wort Raum mitschwingen. Unter der Transformation einer Mannigfaltigkeit  $M$  wiederum verstand er, was wir

<sup>79</sup> Ebd., S. 150.

<sup>80</sup> Die Bedeutung von Lies Theorie für das Programm hat der Mathematikhistoriker Thomas Hawkins in den 1980er Jahren herausgearbeitet: Hawkins, Thomas. „The Erlanger Programm of Felix Klein: Reflections on its Place in the History of Mathematics“. In: *Historia Mathematica* 11.4 (1984). David E. Rowe zeichnet ebenfalls die historischen Umstände nach, unter denen die Schrift entstand. Rowe, David E. „Klein, Lie, and the ‘Erlanger programm’“. In: *1830–1930: A Century of Geometry*. Hrsg. von Boi, Luciano, Flament, Dominique und Salanskis, Jean-Michel. Bd. 402. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1992.

<sup>81</sup> Klein, Felix. *Das Erlanger Programm : Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*. Hrsg. von Wußing, Hans. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften. Leipzig: Geest & Portig, 1974.

heute als bijektive Abbildungen  $\alpha : M \rightarrow M'$  betrachten würden. Er sprach von der Gruppe  $G$  von Transformationen, deren Invarianten die Geometrie studiere.<sup>82</sup>

In seiner Schrift formulierte Felix Klein die Grundgedanken der moderne Sichtweise auf die Geometrie. Nach ihr ist es unerheblich, in welcher Mannigfaltigkeit ein Gebilde studiert wird. Jede bijektive Abbildung  $\alpha : M \rightarrow M'$  induziert auch eine Bijektion  $\alpha^* : G \rightarrow G'$  zwischen den jeweiligen Gruppen der Transformationen. Obwohl ihm die exakten Begriffe fehlten, hatte Felix Klein diesen Zusammenhang vor Augen, wenn er an die Äquivalenz verschiedener Geometrien dachte.<sup>83</sup> An einer anderen Stelle seiner Schrift spricht er über „Willkürlichkeit in der Wahl des Raumelements“.<sup>84</sup> Die Wortwahl lässt an Sophus Lie denken und verweist auf die Nähe ihrer Gedanken. In der Passage schreibt Klein, dass jedes Gebilde der Mannigfaltigkeit als Element der Geometrie infrage käme. „*Aber solange wir der geometrischen Untersuchung dieselbe Gruppe von Änderungen zugrunde legen, bleibt der Inhalt der Geometrie unverändert*, das heißt, jeder Satz, der bei *einer* Annahme des Raumelements sich ergab, ist auch ein Satz bei beliebiger anderer Annahme, nur die Anordnung und Verknüpfung der Sätze ist geändert.“<sup>85</sup> Er bestimmt in diesem Satz den Inhalt der Geometrie als etwas Abstraktes, demgegenüber die Wahl der Raumelemente gleichgültig ist. Dem Inhalt nach können Geometrien gleich sein, auch wenn sie von völlig verschiedenen Raumelementen ausgehen. Woran Felix Klein an dieser Stelle dachte, war offenbar die Parallelität zwischen der Punkt- und Ebenengeometrie des Raumes. Jeder Satz in der einen Geometrie entspricht automatisch einem Satz in der anderen Geometrie, genauso wie alle Aussagen über die Schnittstruktur von Geraden ihre Gültigkeit behalten, wenn stattdessen von berührenden Kugeln gesprochen wird.

Das *Erlanger Programm* war mehr als nur der Versuch, verschiedene Geometrien auf einen gemeinsamen Nenner zu bringen. In seiner Schrift gab Felix Klein eine abstrakte Beschreibung von dem Gegenstand der Geometrie. Sie wich weit von der in den 1870er Jahren vorherrschenden Sichtweise ab. Klein war in der Lage, die verschiedensten Zweige unter demselben Oberbegriff zu fassen. Noch wichtiger war jedoch, dass seine Formulierung aufzeigte, was beim Studium von geometrischen

<sup>82</sup> Felix Klein verwendete den Begriff so, wie wir ihn heute gebrauchen.

<sup>83</sup> Diese Interpretation stammt von David E. Rowe: Rowe, „Klein, Lie, and the “Erlanger programm”“, S. 45.

<sup>84</sup> Klein, *Das Erlanger Programm : Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, S. 467.

<sup>85</sup> Hervorhebung im Original: ebd., S. 467.

Gebilden wesentlich und was unwesentlich war.<sup>86</sup>

Felix Klein dürfte geahnt haben, dass seine Überlegungen zusätzliche Erläuterungen erfordern. Womöglich deshalb stellte er seiner Schrift mehrere Bemerkungen bei, in denen er versuchte, einige Punkte zu erhellen. In einer Note diskutiert er den „Werth räumlicher Anschauung“, wobei er auch auf den Zweck von Anschauungsmodellen zu sprechen kommt, die ihn zu jener Zeit beschäftigt haben.<sup>87</sup> Er bemühte sich darum, Missverständnisse vorzubeugen: „Wenn wir im Texte die räumliche Anschauung als etwas Beiläufiges bezeichnen, so ist dies mit Bezug auf den rein mathematischen Inhalt der zu formulierenden Betrachtungen gemeint.“ Sie besäße für den Inhalt nur den Wert der Veranschaulichung. In diesem Zusammenhang spricht er von den Modellen als lehrreiche und interessante Objekte. Nachdem er so die Bedeutung der Anschauung für die Forschung relativiert hat, schreibt er: „Ganz anders stellt sich aber die Frage nach dem Werte der räumlichen Anschauung überhaupt. Ich stelle denselben als etwas Selbstständiges hin. Es gibt eine eigentliche Geometrie, die nicht, wie die im Texte besprochenen Untersuchungen, nur eine veranschaulichte Form abstrakter Untersuchungen sein will. In ihr gilt es, die räumlichen Figuren nach ihrer vollen gestaltlichen Wirklichkeit aufzufassen, und (was die mathematische Seite ist) die für sie geltenden Beziehungen als evidente Folgen der Grundsätze räumlicher Anschauung zu verstehen. Ein Modell – mag es nun ausgeführt und angeschaut oder nur lebhaft vorgestellt sein – ist für diese Geometrie nicht ein Mittel zum Zwecke, sondern die Sache selbst.“<sup>88</sup> In seiner ergänzenden Bemerkung stellt Felix Klein seinen Ausführungen über Mannigfaltigkeiten, Transformationen und Invarianten eine Geometrie im engeren Sinne gegenüber, welche die Gestalt räumlicher Figuren erforsche.

Diese Gegenüberstellung am Ende seiner Schrift ist merkwürdig. Zuvor schreibt Felix Klein über den Inhalt der geometrischen Forschung per se. Nun nimmt er jedoch einen Zweig von seinen Äußerungen aus, den er sogar als eigentliche Geometrie bezeichnet. In dem Text schreibt er: „Für den heutigen Standpunkt sind zwei einander dualistisch entgegenstehende Figuren nicht mehr als zwei unterschiedene, sondern als wesentlich dieselben Figuren anzusehen.“<sup>89</sup> In seiner nachgestellten Bemerkung spricht er dann wiederum von einer Geometrie, für die ein handgreifliches Modell die Sache selbst sei. Felix Klein wechselt hier also zwischen zwei gegenläufigen Vorstellun-

<sup>86</sup> Rowe, „Klein, Lie, and the “Erlanger programm““, S. 47.

<sup>87</sup> Klein, *Das Erlanger Programm : Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, S. 491.

<sup>88</sup> Ebd., S. 491.

<sup>89</sup> Ebd., S. 470f.

gen. Möglicherweise fiel es ihm schwer, sich von dem Gedanken an einer Verankerung der Geometrie in der Anschauung zu lösen.

### **Späte Resonanz auf das *Erlanger Programm***

Das *Erlanger Programm* erhielt lange Zeit nur eine geringe Aufmerksamkeit.<sup>90</sup> Zum Zeitpunkt der Veröffentlichung dürften nur wenige Mathematiker den Inhalt in seiner vollen Bedeutung verstanden haben. Die Schrift zeigt jedoch, dass Gelehrte wie Felix Klein und Sophus Lie Anfang der 1870er Jahre sich der Veränderungen bewusst waren, die ihr Fach durchlief. Dieser Wandel stellte grundlegende Ansichten über den Inhalt und Zweck der Geometrie infrage. Wenn die geometrische Interpretation einer Gleichung für den Inhalt der Geometrie letztendlich unerheblich war, welche Rolle spielte dann überhaupt noch die Gestalt eines Gebildes? Wenn es beliebig viele Möglichkeiten für die Wahl eines Raumelements gab, was für eine Bedeutung besaßen dann noch Zeichnungen und Modelle? Mit der Zeit wuchsen die Zweifel daran, dass es die konkreten Gestalten der räumlichen Gebilde sind, die den Inhalt der Geometrie bilden. Es dauerte allerdings noch mehr als fünfzehn Jahre, bis die Gedanken des *Erlanger Programms* größere Verbreitung fanden. Die späte Anerkennung der Schrift war eng mit dem Aufstieg Italiens zum neuem Zentrum der Geometrie verbunden.

## **7.3 Wissenschaftliche Neuorientierung nach 1891**

Vor allem unter italienischen Mathematikern stießen die Gedanken Kleins auf große Resonanz. Gino Fano (1871–1952) fertigte 1890 eine Übersetzung seiner Schrift an, die in den *Annali di matematica* erschien.<sup>91</sup> Währenddessen dauerte es in Felix Kleins Heimatland noch bis 1893, ehe ein Wiederabdruck des bis dahin wenig beachteten *Erlanger Programms* in den *Mathematischen Annalen* erfolgte.

### **Die Italienische Schule**

Im Norden der Apenninischen Halbinsel machte sich zu jener Zeit eine neue Generation von Mathematikern einen Namen: Giuseppe Veronese (1854–1917), Giuseppe Peano (1858–1932), Corrado Segre (1863–1924), Guido Castelnuovo (1865–1952), Gi-

<sup>90</sup> Hawkins, „The Erlanger Programm of Felix Klein“, S. 444.

<sup>91</sup> Conte, Alberto und Giacardi, Livia. „Segre’s University Courses and the Blossoming of the Italian School of Algebraic Geometry“. In: *From Classical to Modern Algebraic Geometry: Corrado Segre’s Mastership and Legacy*. Hrsg. von Casnati, Gianfranco u. a. Birkhäuser, 2017, S. 19.

no Fano (1871–1952) und Federigo Enriques (1871–1946). Für das Studium der Mathematik gingen sie zeitweise nach Deutschland. Veronese und Fano lernten bei Felix Klein. Segre stand mit vielen deutschen Mathematikern in Korrespondenz.<sup>92</sup> Obwohl sie sich stark an den Arbeiten der deutschen Geometer orientierten, beschränkten die italienischen Mathematiker bald eigene Wege. Spätestens nach der Jahrhundertwende ließ sich nicht mehr übersehen, dass sie es waren, die für den Fortschritt der Geometrie sorgten. Die Herausgeber der mehrbändigen *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* waren auf Mitarbeit aus Italien angewiesen. Mehrere Artikel zur Geometrie sind bekanntlich von italienischen Autoren verfasst worden. Auch H. E. Timerding erklärte in seinem Vorwort 1909 für die Neuauflage des *Repertoriums der Höheren Geometrie*, dass die Mitarbeiter des Bandes sich auf Deutschland, Italien und Dänemark verteilen würden: „Das Schwinden des geometrischen Interesses in Deutschland ließ es nicht anders möglich erscheinen“.<sup>93</sup> Der US-amerikanische Mathematiker Julian Coolidge (1873–1954) erklärte 1903 den Lesern des Bulletin der *American Mathematical Society*, welche Möglichkeiten ein Studium in Italien bot.<sup>94</sup>

Wie bereits angedeutet, entwickelte die neue italienische Schule neue Zugänge zur Geometrie.<sup>95</sup> Ihre Arbeiten zeichneten sich im Gegensatz zu den Beiträgen deutscher Gelehrter durch ein weitaus höheren Abstraktionsgrad aus. Mehrere Entwicklungen trugen hierzu bei. In den 1880er Jahren förderten Veronese, Segre und Fano das Studium von Hyperflächen in  $n$ -dimensionalen Räumen. Unterdessen entwickelten Guido Castelnuovo und Federigo Enriques die birationale Geometrie weiter, die von Luigi Cremona (1830–1903) mitbegründet worden ist. Sie studierten die Eigenschaften von Kurven und Flächen, die unter rationalen Transformationen invariant blieben. Sie überwandten damit Schwierigkeiten der projektiven Geometrie, indem sie einen allgemeineren Standpunkt einnahmen. Im Jahr 1888 veröffentlichte Giuseppe Peano (1858–1932) seine bahnbrechende Abhandlung *Calcolo Geometrico*, in der er Ideen aus Hermann Grasmanns Ausdehnungslehre formalisierte. In seinem Werk verzichtete der Turiner auf geometrische Argumente zugunsten einer symbolischen Schreibweise. Obwohl seine Arbeit bereits 1891 in deutscher Übersetzung erschien, stieß

<sup>92</sup> Ebd., S. 7.

<sup>93</sup> Timerding, H. E. „Vorwort“. In: Pascal, Ernesto. *Repertorium der höheren Mathematik*. Hrsg. von Epstein, P. und Timerding, H. E. Übers. von Schepp, Adolf. 2. Aufl. Bd. 2. Leipzig und Berlin: Teubner, 1910, S. VI.

<sup>94</sup> Coolidge, Julian. „The Opportunities for Mathematical Study in Italy“. In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 11.1 (1904).

<sup>95</sup> Eine gute Übersicht über die Entstehung der algebraischen Geometrie in Italien bietet der Sammelband: Casnati, Gianfranco u. a. *From Classical to Modern Algebraic Geometry: Corrado Segre's Mastership and Legacy*. Birkhäuser, 2017.

Peanos Symbolik nördlich der Alpen auf Ablehnung.<sup>96</sup> Jahre bevor David Hilbert sein Werk zur Axiomatisierung der Geometrie veröffentlichte, befassten sich italienische Mathematiker mit der Aufgabe. Die bedeutendste Arbeit aus ihren Reihen kam von Gino Fano (1871–1952), der 1892 ein System von Postulaten veröffentlichte, um die Theorie der linearen Räume zu begründen.<sup>97</sup>

Corrado Segre prägte die italienische Schule der algebraischen Geometrie.<sup>98</sup> Er veröffentlichte 1891 einen vielbeachteten Aufsatz in der ersten Ausgabe der *Rivista di Matematica*, die von Guiseppe Peano herausgegeben worden ist.<sup>99</sup> In dem Text, der sich an angehende Mathematiker richtet, kritisiert Segre einige Tendenzen in der damaligen Geometrie. Er übte auf die jüngere Generation italienischer Mathematiker einen großen Einfluss aus.<sup>100</sup>

Segre beklagte in seinem Text, dass viele Arbeiten seiner Zeit wenig zutage fördern würden, was von wissenschaftlichem Nutzen sei. Er dachte dabei wohl an die geometrischen Untersuchungen, die sich nicht nur unter deutschen Mathematikern so lange großer Beliebtheit erfreut haben, die aber seiner Meinung nach wenig Neues boten: „In the innumerable multitude of scientific publications geometric writings are not rare in which one would seek in vain for an idea at all novel, for a resultat which sooner oder later might be of service, for anything in fact which might be destined to survive in the science; and one finds instead treatises on trivial problems or investigations on special forms which have absolutely no use, no importance, which have their origin not in the science itself but purely in the caprice of the author; or one finds applications of known methods which have already been made thousands of times; ...“<sup>101</sup> An anderer Stelle in seinem Text schreibt er: „It is true, for example, that the study of *particular* rational curves and surfaces by means of their parametric

<sup>96</sup> In einem Brief an Mario Peiri (1860–1913) erläuterte Felix Klein, dass Arbeiten in dieser Form in Deutschland so gut wie keine Leser fänden: Avellone, Maurizio, Brigaglia, Aldo und Zappulla, Carmela. „The Foundations of Projective Geometry in Italy from De Paolis to Pieri“. In: *Archive for History of Exact Sciences* 56.5 (1. Juli 2002), S. 418.

<sup>97</sup> Fano, Gino. „Sui postulati fondamentali della geometria in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni“. In: *Giornale di Matematiche* 30 (1892).

<sup>98</sup> Conte und Giacardi, „Segre’s University Courses and the Blossoming of the Italian School of Algebraic Geometry“.

<sup>99</sup> Segre, Corrado. „Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche“. In: *Revista di Matematica* 1 (1891). Der Text ist später von John W. Young für das Bulletin der *American Mathematical Society* übersetzt worden: Segre, „On Some Tendencies in Geometric Investigations“.

<sup>100</sup> Casnati u. a., *From Classical to Modern Algebraic Geometry*, S. 11ff.

<sup>101</sup> Segre, „On Some Tendencies in Geometric Investigations“, S. 444.

representation, or their representation on a straight line or plane, and likewise the study of *particular* birational correspondences between two planes or two spaces, no longer commands the interest it had some twenty years ago. At that time they led to the consideration of new objects and very interesting problems, and the best geometers turned to them with profit.“<sup>102</sup> Nach Segres förderten Untersuchungen von besonderen Kurven und Flächen nur noch wenig Neues zutage, was der Entdeckung Wert wäre. Sie würden auch deshalb nicht mehr das Interesse hervorrufen, wie sie es noch zwanzig Jahre früher getan hätten.

Segres Artikel von 1891 zeigt, wie sich der Blick auf die geometrische Forschung während dieser Zeit gewandelt hat. Gino Loria (1862–1954), seit 1886 Professor für Algebra und analytische Geometrie in Genua, hatte bereits früher auf das große Interesse hingewiesen, das geometrischen Untersuchungen spezieller Gebilde lange Zeit entgegen gebracht worden ist. Wie Segre hatte auch er bei Enrico D’Ovidio (1842–1933) in Turin studiert. In seiner Abhandlung über die Theorien der Geometrie in ihrer historischen Entwicklung, die im italienischen Original 1887 erschienen ist, schreibt Loria über das Studium der Flächen: „Die Fragen, die noch zu lösen bleiben, sind zahlreich und von fundamentaler Wichtigkeit, und die Mittel, die zur Überwindung der Schwierigkeiten, welche deren Lösung bietet, zur Verfügung stehen, sind noch nicht genügend vervollkommenet. Vielleicht ist das der Grund dafür, dass so viele Gelehrte sich zum Studium besonderer Flächen wandten, indem sie hofften, nicht nur auf diesem Felde eine reichlichere Ernte von Wahrheiten zu machen, sondern auch zu Untersuchungsmethoden zu gelangen, die der Verallgemeinerung fähig sind.“<sup>103</sup> Lorias Darstellung der früheren Forschung ähnelt der Segres, wenngleich er weitaus zurückhaltender in seinem Urteil ist. Ihre Worte bezeugen, dass das Ziel geometrischer Untersuchungen um 1890 herum wesentlich stärker hinterfragt worden ist. Ein wichtiges Kriterium war hierbei, in wie weit die Resultate sich verallgemeinern ließen. Studien, die die Geometrie von Gebilden um ihrer selbst willen untersuchten, riefen nur noch wenig Interesse hervor. In ihren Ansichten über den Zweck geometrischer Forschung waren Gino Loria und Corrado Segre von ihrem Lehrer Enrico D’Ovidio beeinflusst.<sup>104</sup>

Über die italienische Schule schrieb Federigo Enriques später: „Seit Klein und Lie hat die abstrakte Geometrie eine große Entwicklung erfahren, und sie wurde später (seit Segre) ein gewöhnliches Arbeitsinstrument der modernen italienischen

<sup>102</sup> Hervorhebung im Original: ebd., S. 457.

<sup>103</sup> Loria, *Theorien der Geometrie*, S. 35.

<sup>104</sup> Conte und Giacardi, „Segre’s University Courses and the Blossoming of the Italian School of Algebraic Geometry“, S. 6.

Geometer.“<sup>105</sup> Der Vorteil des abstrakten Standpunkts sei gerade der Pluralismus, den er bei der Interpretation von Resultaten biete: „In der Tat ist nichts fruchtbarer als die Vervielfachung unserer intuitiven Kräfte, die man jenem Prinzip verdankt; es ist so, als ob zu den sterblichen Augen, mit denen man eine Figur aus gewissen Gesichtspunkten betrachtet, tausend geistige Augen hinzukommen, um eben so viele Verwandlungen zu sehen. Indes bleibt die Einheit des Gegenstandes in der so bereicherten Vernunft bestehen, und man kann mit Leichtigkeit von der einen zur anderen Form übergehen.“<sup>106</sup> Worauf Enriques hier anspielt, ist die Möglichkeit, dass sich ein und dasselbe algebraische Gebilde auf verschiedene Weise geometrisch interpretieren (Wahl des Raumelements) lässt.

## Neue Forschungsfelder

In den mathematischen Publikationen der Jahre 1860–1900 lassen sich drei Tendenzen beobachten. Zum Ersten gab es einen relativen Rückgang von Neuveröffentlichungen auf dem Gebiet der Geometrie im Verhältnis zu anderen Disziplinen, zum Zweiten lässt sich ein starkes Desinteresse innerhalb der Geometrie an Untersuchungen spezieller Konfigurationen und Gebilde feststellen und zum Dritten ließ das Interesse an der Geometrie in Deutschland stärker nach als in anderen Ländern. Über die internationale Forschung gibt der mathematische Index im *Catalogue of Scientific Papers* Auskunft, den die *Royal Society* ab 1867 herausgab. Mit der Veröffentlichung verband die Gesellschaft das Ziel, einen Index aller Artikel zu erstellen, die nach 1800 in wissenschaftlichen Periodika erschienen sind. Trotz der Unmengen an Neuerscheinungen gilt der *Catalogue* als nahezu vollständig. Er ist von Roland Wagner-Döbler und Jan Berg verwendet worden, um die mathematische Publikationstätigkeit während des 19. Jahrhunderts zu messen.<sup>107</sup>

Ihre Ergebnisse zeigen, dass die Anzahl an jährlich publizierten Artikeln in der Mathematik während des gesamten 19. Jahrhunderts kontinuierlich anwuchs, was wenig überrascht. Sie verdeutlichen allerdings auch, dass sich diese Entwicklung nicht auf allen Gebieten der Wissenschaft gleichmäßig vollzog. So erfassten die beiden Autoren den Anteil, den die Publikationen eines Gebietes an der Gesamtanzahl der veröffentlichten Artikel per annum hatten. Sie zählten aber auch die Anzahl an Autoren, die auf einem bestimmten Gebiet pro Jahr publizierten. Die Zuordnung der

<sup>105</sup> Enriques, Federigo. *Zur Geschichte der Logik*. Übers. von Bieberbach, Ludwig. Wissenschaft und Hypothese. Wiesbaden: Springer, 1927, S. 114.

<sup>106</sup> Ebd., S. 114.

<sup>107</sup> Wagner-Döbler, Roland und Berg, Jan. „Nineteenth-Century Mathematics in the Mirror of Its Literature: A Quantitative Approach“. In: *Historia Mathematica* 23.3 (1996).

Artikel zu den Gebieten übernahmen sie aus dem *Catalogue*. Der Anteil von Veröffentlichung zu algebraischer Kurven (a) nahm 1860 etwa 5% ein, stieg dann bis 1880 auf 9% an, und nahm danach stetig ab (1900: 5%). Noch markanter ist das Bild für die Anzahl der Autoren (1860: 30; 1885: 110; 1900: 50). Ähnlich verlief die Zu- und Abnahme der Publikationstätigkeit bei den algebraischen Flächen. Um 1860 erschienen nur 1% aller mathematischer Artikel auf diesem Gebiet. Zum Höhepunkt 1875 waren es etwa 4%, bevor der Anteil bis zur Jahrhundertwende wieder auf etwa 2% abfiel.

Die Aussagekraft dieser Zahlen ist natürlich äußerst beschränkt. Sie sollen hier auch nur dazu dienen, eine grobe Tendenz nachzuzeichnen. Der *Catalogue* berücksichtigte die Publikationstätigkeit in der gesamten Welt. Der tatsächliche Gesamtanteil, den geometrische Spezialuntersuchungen in den Jahren 1860–1890 an der Gesamtproduktion in den deutschen Ländern hatten, dürfte wesentlich höher gewesen sein als im Rest der Welt. Im Jahr 1868 gründeten Alfred Clebsch (1833–1872) und Carl G. Neumann (1832–1925) die berühmten *Mathematischen Annalen*, die unmittelbar internationales Renommee besaßen. Renate Tobies und David E. Rowe haben geschätzt, dass in den ersten zehn Jahren 1868–1878 des Bestehens etwa ein Drittel der veröffentlichten Abhandlungen der algebraischen Geometrie zuzuschreiben sind, der Anteil in der Zeit 1876–1888 (Bd. 11–30) jedoch auf ein Viertel sank und danach stark abnahm. Für die Bände 31–40 beziffern sie ihn auf ein Sechstel und für 41–50 schließlich nur noch auf ein Achtel.<sup>108</sup>

## 7.4 Zusammenfassung

Was die Publikationszahlen auf dem Gebiet der Mathematik widerspiegeln, ist das Resultat verschiedener Entwicklungen im 19. Jahrhundert, welche die Geschichte der Wissenschaft geprägt haben. Am Beginn dieses Zeitraum setzte sich endgültig der projektive Standpunkt in der Geometrie durch. In den deutschen Ländern fiel diese Entwicklung mit einer Belebung der geometrischen Forschung zusammen. Mit gesteigertem Interesse wendeten sich die deutschen Gelehrten dem Studium der Figuren und Gebilde zu. Ihre Sicht war geprägt von der Überzeugung, dass die geometrischen Formen eine natürliche Ordnung bilden würden. Geometrie war für sie weniger eine logische Wissenschaft, die durch begriffliche Deduktionen geprägt ist. Für sie war es weitaus mehr eine anschauliche Form- und Raumlehre.

<sup>108</sup> Klein, Felix und Mayer, Adolf. *Korrespondenz Felix Klein — Adolph Mayer: Auswahl aus den Jahren 1871–1907*. Hrsg. von Tobies, Renate und Rowe, Daniel E. Teubner-Archiv zur Mathematik. Wien: Springer-Verlag, 1990, S. 41.

In der ersten Hälfte des Jahrhunderts erzielten deutsche Gelehrte Erfolge bei ihren Untersuchungen, nicht zuletzt bei der Klassifikation kubischer Kurven. Diese Fortschritte wurden durch die Weiterentwicklung der analytischen Methode, aber auch durch die Übernahme des projektiven Standpunkts begünstigt. Die Anschauung spielte hierbei eine wichtige Rolle. Wenngleich sie in einem gewissen Spannungsverhältnis zur Rechnung mit imaginären Größen stand, suchte Julius Plücker nach einer geometrischen Interpretation der Gleichungen.

Mitte des Jahrhunderts wurde auch das Studium der Flächen höherer Ordnung belebt, nachdem Arthur Cayley und George Salmon auf die 27 Linien gestoßen waren, die kubische Flächen auszeichnen. Ihre Entdeckung stieß auf große Resonanz. Forschungen auf dem Gebiet der Optik lenkten die Aufmerksamkeit der Gelehrten auf Flächen höherer Ordnung. Ernst Kummer stieß im Umfeld seiner Forschung zu Strahlensystemen und -bündeln auf spezielle Klassen quartischer Flächen. Julius Plücker wendete sich erneut der Geometrie zu, um quadratische Liniengebilde zu studieren. Seine Arbeit führte ihn ebenfalls auf Flächen der vierten Ordnung, mit denen er sich intensiv befasste. Diese Fortschritte beim Studium räumlicher Gebilde riefen das Bedürfnis nach anschaulichen Modellen hervor. Die neu entdeckten Flächen wiesen unvermutete Eigenschaften auf. Modelle gaben den deutschen Gelehrten eine Idee von den unbekanntenen Formen dieser Flächen, deren Gestalt sich dem Vorstellungsvermögen entzog. Dementsprechend fand die Herstellung anschaulicher Modelle Verbreitung unter den Geometern.

Die neuen Flächen stellten die geometrische Anschauung vor eine Herausforderung. Während die Klassifikation von Flächen vierter Ordnung angesichts der großen Menge möglicher Fälle als unlösbare Aufgabe erschien, ändert sich auch der Blick auf die Geometrie. Die Entdeckung neuer Zweige, wie Julius Plückers Linien- und Sophus Lies Kugelgeometrie, die überdies noch Gemeinsamkeiten aufwiesen, ließ Zweifel an der Vorstellung aufkommen, dass die Anschauung die Essenz der Geometrie bildet. Die unlösbaren Schwierigkeiten, welche bei der Darstellung imaginärer Elemente auftraten, taten ihr Übriges, um die tradierte Vorstellung ins Wanken zu bringen. Der Aufstieg der algebraischen Geometrie in Italien, die Hinwendung zu höherdimensionalen Räumen und zu birationalen Abbildungen, beschleunigte die Entwicklung. Währenddessen ließ das Interesse an geometrischen Fragen insgesamt nach. Die Mathematiker wendeten sich neuen Gebieten zu, von deren Erforschung sie sich mehr versprachen. Der Niedergang der projektiven Geometrie fiel mit dem Aufstieg anderer Zweige wie der Funktionentheorie, der Mengenlehre und der Gruppentheorie zusammen. Währenddessen wendeten sich die Mathematiker von Spezialuntersuchungen ab, um ihre wissenschaftliche Arbeit an allgemeineren Fragestellungen auszurichten.

Im Zuge dieser Neuorientierung verlor sich auch das Interesse an Modellen. Für die geometrische Forschung entstanden nach 1890 nur noch wenige Objekte. Neue Entwürfe waren für die Lehre an Hochschulen und Universitäten bestimmt.

Mit dem Ausbruch des ersten Weltkrieges endet die Geschichte des mathematischen Modellbaus für die Forschung in Deutschland weitestgehend. Heutzutage wendet sich die Wissenschaft erneut der Praxis zu. Zwar sind es vor allem Historiker und Kulturwissenschaftler, die sich derzeit mit dem Thema befassen. Aber es ist längst keine ausgemachte Sache, dass nicht auch Mathematiker erneut Gefallen an dem wissenschaftlichen Modellbau finden, wenn sie sich eines Tages wieder verstärkt dem Studium der geometrischen Formen zuwenden. Die technischen Vorzüge des 3D-Drucks sind unlängst für die Herstellung neuer Entwürfe genutzt worden.



## 8. Anhang

### 8.1 Projektive Geometrie

Bei der Arbeit mit den literarischen Quellen war es des öfteren nötig, Abschnitte zuerst in die Sprache der heutigen Mathematik zu übertragen, um sie verstehen zu können. Nicht immer war nach dem erstmaligen Lesen offensichtlich, was von den Autoren gemeint war. Die gesamte Wissenschaft hat sich seit dem Ende des 19. Jahrhunderts ihrer Form und ihrem Inhalt nach gewandelt. Begriffe, die den Gelehrten der damaligen Zeit geläufig waren, sagen uns heute nichts mehr. Andere Ausdrücke haben ihre Bedeutung im Laufe der Jahre verändert. Oftmals stehen zudem nur Worte, wo wir unmissverständliche Formeln erwarten würden. Mitunter ahnen wir beim Lesen, was gemeint sein könnte, bleiben uns jedoch unsicher, bis wir die Gedanken in unserer Sprache formuliert haben. In diesem Abschnitt werden einige Begriffe eingeführt, die für das Verständnis der historischen Abhandlungen hilfreich waren. Wir haben hierfür auf verschiedene Quellen zurückgegriffen.<sup>1</sup>

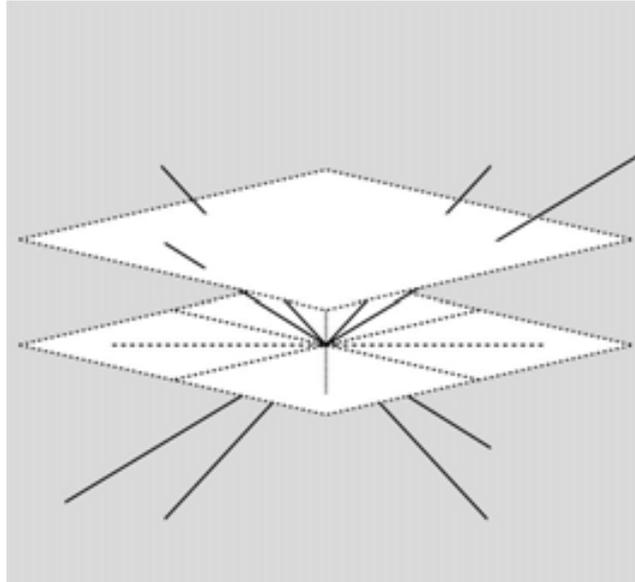
#### Projektive Räume

1. Um eine Figur in einer beliebigen Ebene (Objektebene)  $C$  mithilfe einer Zentralprojektion auf eine andere Ebene (Bildebene)  $C'$  abzubilden, muss ein fester Punkt (Projektionszentrum)  $q$  im Raum gewählt werden, wobei  $q \notin C$  und  $q \notin C'$  gelten muss. Nun wird jeder Punkt  $p$  der Figur mit Geraden durch  $q$  mit einem Punkt  $p'$  auf der Bildebene verbunden. Die Gesamtheit der Geraden bilden einen Kegel. Das entstandene Bild zeigt eine andere Ansicht der Figur. Es stellt sich die Frage, wie sich

<sup>1</sup> Die folgenden Arbeiten sind neben anderen verwendet worden. Sie heben sich dadurch hervor, dass sie eine Darstellung historischer Begriffe und Methoden der algebraischen Geometrie geben: Beltrametti, Mauro C. u. a. *Lectures on Curves, Surfaces and Projective Varieties*. EMS textbooks in mathematics. Zürich: European Mathematical Society, 2009; Fischer, Gerd. *Analytische Geometrie*. Grundkurs Mathematik. Wiesbaden: Vieweg, 1992; Dolgachev, Igor V. *Classic Algebraic Geometry*. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.

diese Ansicht verändert, wenn wir ein anderes Projektionszentrum und eine andere Bildebene wählen.

**2.** Die Menge  $P_n$  aller eindimensionalen Unterräume (Ursprungsgeraden) von  $K^{n+1}$  wird projektiver Raum der Dimension  $n$  genannt. Die Elemente von  $P_n$  heißen projektive Punkte. Die kanonische Projektion  $\pi : v \mapsto \langle v \rangle$  bildet Vektoren  $v \in K^{n+1} \setminus \{0\}$  auf Ursprungsgeraden  $\langle v \rangle \in P_n$  ab. Für  $n = 2$  sprechen wir von der projektive Ebene, für  $n = 3$  vom projektiven Raum.



**Abb. 8.1:** Die Grafik veranschaulicht die projektive Ebene als Menge aller Ursprungsgeraden im Raum. Jeder Punkt der oberen Ebene  $A$  entspricht genau einer Ursprungsgeraden. Es gibt jedoch Geraden (gestrichelte Linien), die in einer parallelen Ebene  $H$  durch den Ursprung gehen und demnach die obere Ebene nicht treffen.

**3.** Es sei  $A$  eine affine Hyperebene im  $K^{n+1}$  mit  $0 \notin A$ . Mit  $H$  sei die Hyperebene bezeichnet, die zu  $A$  parallel durch den Ursprung von  $K^{n+1}$  geht. Das Bild der kanonischen Projektion  $\pi$  von  $H \setminus \{0\}$  in  $P_n$  enthält alle Ursprungsgeraden des  $K^{n+1}$ , die in  $H$  liegen. Das Komplement besteht wiederum aus allen Geraden, welche  $A$  treffen. Demnach können wir den projektiven Raum  $P_n$  nach der Wahl einer affinen Hyperebene  $A$  immer in zwei disjunkte Teile zerlegen (Abb. 8.1). Wir nennen  $A$  affines Bild und  $H$  unendlich ferne Hyperebene von  $P_n$ .

### Homogene Koordinaten

**4.** Es sei  $v = (v_0, \dots, v_n) \in K^{n+1}$ . Das Tupel  $(v_0 : \dots : v_n)$  wird homogene Koordinaten von  $\langle v \rangle \in P_n$  genannt. Sie sind nur bis auf gemeinsame Vielfache bestimmt.

Außerdem hängen sie von den gewählten Koordinaten in  $K^{n+1}$  ab.

5. Wir nennen  $i : K^n \rightarrow P_n(K)$  mit

$$i : (v_1, \dots, v_n) \mapsto (1 : v_1 : \dots : v_n)$$

die Standardeinbettung des  $K^n$  in den  $P_n(K)$ .

6. Jede Ursprungsgerade des  $K^{n+1}$  schneidet eine Sphäre  $S^n := \{v \in K^{n+1} : |v| = 1\}$  um den Ursprung in zwei gegenüber liegenden Punkten. Demnach lassen sich die Punkte des projektiven Raumes mit Paaren diametraler Punkte auf dieser Sphäre assoziieren. Wenn wir uns für eine affine Hyperebene  $A = \{(v_0, \dots, v_n) : v_0 = 1\}$  festlegen, dann erhalten wir eine Halbkugel  $\{v \in K^{n+1} : |v| = 1 \text{ und } v_0 > 0\}$ . Jeder Punkt im Inneren dieser Halbkugel entspricht genauer einer Ursprungsgeraden, während antipodische Punkte auf dem Rand unendlich ferne Punkte repräsentieren. Die beiden Modelle werden sphärisches und semi-sphärisches Modell der projektiven Ebene genannt.

7. Mit dem sphärischen Modell können wir Kurven in der projektiven Ebene mit Kurven auf  $S^2$  assoziieren, die punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs sind. Die unendlich ferne Gerade wird hierbei durch einen Großkreis  $S^1 := \{v \in H : |v| = 1\}$  repräsentiert. Wenn wir die Punkte der Halbkugel  $\{v \in K^3 : |v| = 1 \text{ und } v_0 > 0\}$  auf das Innere der Kreisscheibe  $\{v \in H : |v| \leq 1\}$  projizieren, erhalten wir wiederum ein ebenes Modell der projektiven Ebene. Die unendlich ferne Gerade wird durch den Kreisrand dargestellt, wobei gegenüber liegende Punkte wieder miteinander identifiziert werden müssen.

8. Das sphärische Modell ist auch bei der Betrachtung des projektiven Raumes  $P_3$  hilfreich. Die unendlich ferne Ebene  $H$  bezüglich eines affinen Bildes  $A$  lässt sich hier durch eine Sphäre  $S^2 := \{v \in H : |v| = 1\}$  darstellen.

## Projektive Abbildungen

9. Eine projektive Abbildung  $F : P_n \rightarrow P_m$  bildet Ursprungsgeraden im  $K^{n+1}$  auf Ursprungsgeraden im  $K^{m+1}$  ab. Zwei projektive Abbildungen  $F$  und  $F'$  sind genau dann gleich, wenn  $F = \lambda F'$  für ein  $\lambda \in K$  gilt. Nach der Wahl von Koordinaten in  $P_n$  und  $P_m$  können wir  $F$  mithilfe einer  $(n+1) \times (m+1)$ -Matrix  $(a_{ij})$  beschreiben:

$$F : (v_0 : v_1 : \dots : v_n) \mapsto \left( \sum_{j=1}^m a_{0j} v_j : \dots : \sum_{j=1}^m a_{nj} v_j \right)$$

10. Offenbar induziert jeder Monomorphismus  $f : K^{n+1} \rightarrow K^{m+1}$  eine projektive Abbildung  $F : P_n \rightarrow P_m$  durch  $F(\langle v \rangle) := \langle f(v) \rangle$ .

**11.** Wenn  $F$  bijektiv ist, so sprechen wir von einer projektiven Transformation. Geläufig ist auch der Ausdruck Kollineation. Die Menge der projektiven Transformationen  $F : P_n \rightarrow P_n$  bilden eine Gruppe  $\text{PGL}(K^{n+1})$ .

**12.** Zentralprojektionen zwischen Hyperebenen im  $K^{n+1}$  sind spezielle (projektive) Transformationen  $Z : P_n \rightarrow P_n$ , die allerdings keine Gruppe bilden.

## Affine Karten

**13.** Gegeben seien nun Basen  $\alpha$  und  $\beta$  auf  $K^{n+1}$  mit Koordinatenabbildungen  $\kappa_\alpha$  und  $\kappa_\beta$ . Dann gibt es einen Koordinatenwechsel  $\kappa_{\alpha\beta} : v_\alpha \mapsto v_\beta$ . Diese Abbildung induziert einen Wechsel  $\kappa_{\alpha\beta} : P_n(K) \rightarrow P_n(K)$  der homogenen Koordinaten durch  $\kappa_{\alpha\beta}(\langle v_\alpha \rangle) := \langle \kappa_{\alpha\beta}(v_\alpha) \rangle$ . Es sei  $A_{\alpha\beta} = (a_{ij})$  die Matrix des Koordinatenwechsel  $\kappa_{\alpha\beta}$ , dann ist

$$\kappa_{\alpha\beta} : v_\alpha = (x_0, \dots, x_n) \mapsto \left( \sum_j a_{0j}x_j, \dots, \sum_j a_{nj}x_j \right) = v_\beta.$$

**14.** Wir wollen nun Koordinaten für eine beliebige affine Hyperebene  $A = \{v \in K^{n+1} : \nu(v) = 1\}$  mit  $\nu \in (K^{n+1})^*$  und  $\nu \neq 0$  bestimmen.<sup>2</sup> Es sei  $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$  eine geordnete Basis von  $K^{n+1}$  mit  $\nu(e_0) = 1$  und  $\nu(e_j) = 0$  für  $j = 1, \dots, n$ . Die Vektoren  $e_1, \dots, e_n$  spannen demnach den Kern von  $\nu$  auf. Wenn wir die Koordinaten eines Vektors  $v \in K^{n+1}$  in diesem System mit  $v_0, \dots, v_n$  bezeichnen, dann heißen

$$(v_0 : \dots : v_n) \mapsto \frac{1}{v_0}(v_1, \dots, v_n) =: (x_1, \dots, x_n)$$

affine Koordinaten von  $v$  in  $A$ . Sie hängen offensichtlich auch von der Wahl der Basis  $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$  ab. Die Abbildung definiert eine Projektion, die  $\{\langle v \rangle \in P_n : \nu(v) = 1\}$  auf  $K^n$  abbildet.

**15.** Eine projektive Transformation  $F \in \text{PGL}(K^{n+1})$  induziert eine gebrochen-lineare Transformation  $f : K^n \mapsto K^n$ . Wenn  $(a_{ij})$  die Matrix von  $F$  ist, dann erhalten wir  $f = i^{-1} \circ F \circ i$  mit

$$i : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left( \frac{a_{10} + \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j}{a_{00} + \sum_{j=1}^n a_{0j}x_j}, \dots, \frac{a_{n0} + \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j}{a_{00} + \sum_{j=1}^n a_{0j}x_j} \right).$$

Die Abbildung ist nur außerhalb der Hyperebene  $a_{00} + \sum_{j=1}^n a_{0j}x_j = 0$  definiert.

<sup>2</sup> Mit  $(K^{n+1})^*$  bezeichnen wir den Dualraum von  $K^{n+1}$ , d.h. den Vektorraum der linearen Abbildungen  $K^{n+1} \rightarrow K$ .

## Affine Bilder eines projektiven Kegelschnitts

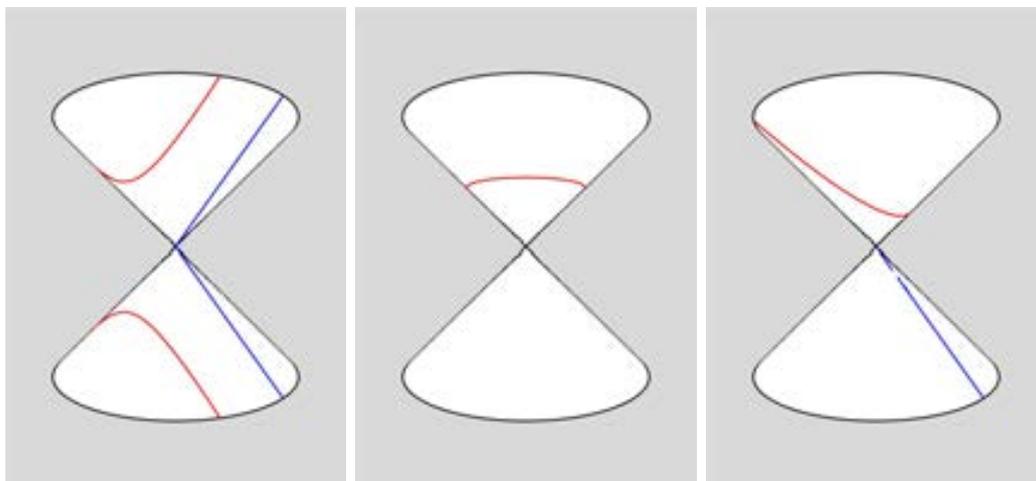
16. Es sei  $M = \{(v_0 : v_1 : v_2) : v_0^2 + v_1^2 - v_2^2 = 0\}$ . Wir wollen das Bild dieser Menge für verschiedene affine Karten berechnen.

(1.) Wenn wir  $\nu(v) = v_0$  wählen, so bilden  $e_0 = (1, 0, 0)$ ,  $e_1 = (0, 1, 0)$  und  $e_2 = (0, 0, 1)$  eine passende Basis von  $K^3$ . Wir erhalten die Einbettung  $i : (x_1, x_2) \mapsto (1 : x_1 : x_2)$ . Damit ist  $M' := i^{-1}(M) = \{(x_1, x_2) : 1 + x_1^2 - x_2^2 = 0\}$  das affine Bild von  $M$ .

(2.) Für  $\nu(v) = v_2$  bilden  $e_0 = (0, 0, 1)$ ,  $e_1 = (1, 0, 0)$  und  $e_2 = (0, 1, 0)$  eine geeignete Basis für  $K^3$ . Nun bekommen wir die Einbettung  $i : (x_1, x_2) \mapsto (x_2 : x_1 : 1)$  und sehen  $M' = \{(x_1, x_2) : x_2^2 + x_1^2 = 1\}$ .

(3.) Wenn wir stattdessen  $\nu(v) = v_1 + v_2$  wählen, bilden  $e_0 = (0, 1, 0)$ ,  $e_1 = (0, 1, -1)$  und  $e_2 = (1, 0, 0)$  eine geeignete Basis für  $K^3$ . Nun bekommen wir die Einbettung  $i : (x_1, x_2) \mapsto (x_2 : 1 + x_1 : -x_1)$  und sehen  $M' = \{(x_1, x_2) : x_2^2 + 2x_1 = -1\}$ .

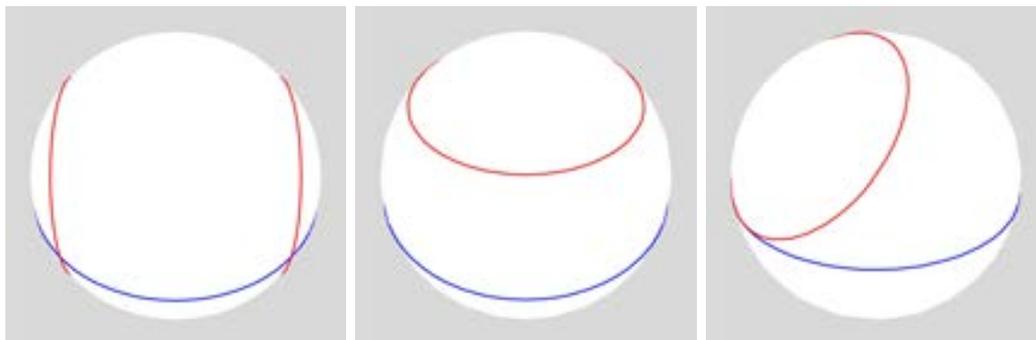
Wir erhalten als affines Bild des projektiven Kegelschnitts  $M$  eine Hyperbel (1), Ellipse (2) und Parabel (3).



**Abb. 8.2:** Die Grafiken zeigen Kegel  $w^2 + x^2 - z^2 = 0$  eines projektiven Kegelschnitts. Die roten Kurven gehören zu unterschiedlichen affinen Bildern. In ihnen wird der Kegel von den Ebenen mit Gleichung  $\nu(w, x, z) = 1$  geschnitten. Die blauen Ursprungsgeraden markieren den reellen Schnitt des Kegels mit der unendlich fernen Hyperbene  $\nu(w, x, z) = 0$ .

Wenn wir den Schnitt von  $M$  mit der unendlich fernen Gerade  $H = \{v : \nu(v) = 0\}$  berechnen, erhalten wir für (1.) zwei reelle Punkte, für (2.) die leere Menge und für

(3.) einen doppelt zählenden reellen Punkt.



**Abb. 8.3:** Die Grafiken zeigen die sphärischen Bilder der Fälle 1–3 für den projektiven Kegelschnitt (rote Kurve). Die blaue Linie repräsentiert die unendlich ferne Gerade.

## Affine und projektive Varietäten

**17.** Unter einer affinen Varietäten über  $K^n$  verstehen wir Nullstellenmengen

$$\mathcal{V}\{f_1, \dots, f_m\} := \{p \in K^n : f_1(p) = \dots = f_m(p) = 0\}$$

von Polynomen  $f_1, \dots, f_m \in K[x_0, \dots, x_n]$ .<sup>3</sup> Varietäten der Form  $\mathcal{V}(f)$  mit  $f \neq 0$  nennen wir affine Hyperflächen.

**18.** Wir nennen  $f \in K[x_0, \dots, x_n]$  homogen vom Grad  $d$ , wenn  $f(\lambda x) = \lambda^d f(x)$  gilt. Jedes Polynom  $f$  mit  $\deg f = d$  lässt sich als Summe  $f = f^{(0)} + f^{(1)} + \dots + f^{(d)}$  inhomogener Polynome  $f^{(i)}$  mit  $\deg f^{(i)} = i$  schreiben, wobei  $f^{(i)}$  die Summe aller Monome vom Grad  $i$  von  $f$  ist. Falls  $f$  nicht homogen ist, so betrachten wir stattdessen das Polynom

$$f^h := x_0^d f^{(0)} + x_0^{d-1} f^{(1)} + \dots + x_0 f^{(d-1)} + f^{(d)},$$

welches homogen vom Grad  $d$  ist.

**19.** Es sei nun  $f \in K[x_0, \dots, x_n]$  ein homogenes Polynom vom Grad  $d$ , dann heißt  $\mathcal{V}(f) := \{\langle p \rangle \in P_n : f(p) = 0\}$  projektive Hyperfläche der Ordnung  $d$ . Wir schreiben  $X = \mathcal{V}(f)$ . Wenn  $f$  nicht irreduzibel ist, so existiert eine Darstellung

$$f = f_1^{\mu_1} \dots f_r^{\mu_r}$$

<sup>3</sup> Unter  $K[x_0, \dots, x_n]$  wird hier der Ring der Polynome in  $n$  Variablen mit Koeffizienten aus  $K$  verstanden.

mit verschiedenen, irreduziblen Polynomen  $f_i$ . Dann ist  $\mathcal{V}(f) = \mathcal{V}(f_1) \cup \dots \cup \mathcal{V}(f_s)$ . Wir nennen  $X_i := \mathcal{V}(f_i)$  irreduzible Komponente von  $X$ , und  $\mu_i$  ihre Vielfachheit.<sup>4</sup>

**20.** Es sei  $i : K^n \rightarrow P_n$  eine Einbettung für die affine Karte  $A = \{x \in K^{n+1} : \nu(x) = 1\}$ . Dann heißt  $\mathcal{V}(f)' = \{x \in K^n : i(x) \in \mathcal{V}(f)\}$  affines Bild von  $\mathcal{V}(f)$  bezüglich  $i$ .

## Tangential- und Polarkegel an Hyperflächen

**21.** Wir schreiben

$$\partial_\alpha f(p) := \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(p) := \frac{\partial^\alpha f}{\partial x_0^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(p)$$

für die partiellen Ableitungen von  $f$  im Punkt  $p \in \mathcal{V}(f)$ , wobei  $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  ein Multiindex sei. Die Ordnung der Ableitung ist

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

**22.** Für homogene Polynome  $f \in K[x_0, \dots, x_n]$  vom Grad  $d$  gilt

$$p_0 \partial_0 f(p) + \dots + p_n \partial_n f(p) = d \cdot f(p)$$

für  $p = (p_0, \dots, p_n) \in K^{n+1}$ . Diese Beziehung ist bekannt unter dem Namen Eulersche Identität.<sup>5</sup>

**23.** Mit

$$T_p(f) := \{x \in K^{n+1} : \sum_{i=0}^n \partial_i f(p) x_i = 0\}$$

wird die Tangentialebene an  $X := \mathcal{V}(f)$  in dem Punkt  $p \in X$  bezeichnet. Aufgrund der Eulerschen Identität und  $f(p) = 0$  gilt

$$\sum_i \partial_i f(p) (x_i - p_i) = \sum_{i=0}^n x_i \partial_i f(p).$$

**24.** Die Hyperfläche  $P_p^k(f) := \{x \in K^{n+1} : \Delta_p^k f(x) = 0\}$  mit  $\Delta_p^k f(x) := (p_0 \partial_0 + \dots + p_n \partial_n)^k f(x)$  der Ordnung  $d - k$  heißt  $k$ -te Polare von  $p$  bezüglich  $X$ .<sup>6</sup>

**25.** Alle Punkte  $x \in X$  mit  $\Delta_x^k f(p) = 0$  liegen auf einer Geraden nach  $p \in K^{n+1}$ , die  $X$  in  $x$  mit Vielfachheit  $> k$  berühren.

<sup>4</sup> Beltrametti u. a., *Lectures on curves, surfaces and projective varieties*, S. 106f.

<sup>5</sup> Ebd., S. 60.

<sup>6</sup> Ebd., S. 122.

Es gilt

$$\frac{1}{k!} \Delta_p^k f(x) = \frac{1}{(d-k)!} \Delta_x^{d-k} f(p),$$

weswegen  $x$  der  $k$ -ten Polare im Punkt  $p$  genau dann angehört, wenn  $p$  in der  $(d-k)$ -ten Polare im Punkt  $x$  liegt.<sup>7</sup>

**26.** Es sei  $p \in X$  ein regulärer Punkt, dann ist  $T_p(f) = P_p^{d-1}(f)$  für  $d = \deg f$ .<sup>8</sup>

**27.** Für  $n = 3$  wird der Schnitt der ersten Polare  $\Delta_p^k f(x) = 0$  mit  $X$  Berührungskurve genannt, falls  $p \notin X$ .

### Singuläre Punkte

**28.** Ein Punkt  $p \in K^{n+1}$  heißt  $k$ -facher Punkt von  $X$ , falls alle partiellen Ableitungen

$$\partial_\alpha f(p) = \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(p)$$

der Ordnung  $|\alpha| = k - 1$  von  $f$  in  $p$  verschwinden. Für  $k = 2$  wird  $p$  Doppelpunkt genannt. Wenn  $\mathcal{V}(\partial_0 f, \dots, \partial_n f)$  nicht nur aus isolierten Punkten besteht, sondern Kurven enthält, so werden diese Doppelkurven von  $X$  genannt.<sup>9</sup>

**29.** Wenn  $p \in X$  ein regulärer Punkt ist, so werden die beiden Geraden im Schnitt von Tangentenebene und Tangentenkegel in  $p$  Haupttangente genannt.<sup>10</sup>

**30.** Die Hessesche Fläche von  $X$  wird durch  $H_f(x) := \det(\delta_{ij} f(x)) = 0$  definiert. Ihren Schnitt mit  $X$  nennen wir parabolische Kurve.

### Affine und projektive Quadriken

**31.** Es sei  $f \in K[x_1, \dots, x_n]$  ein Polynom des zweiten Grades. Wir nennen  $Q := \mathcal{V}(f) = \{x \in K^n : f(x) = 0\}$  affine Quadrik der Dimension  $n - 1$ . Für  $n = 2$  sprechen wir von affinen Kegelschnitten. Wir können die Gleichung  $f(x) = 0$  in der Form

$$(1, x_1, \dots, x_n) A (1, x_1, \dots, x_n)^t = 0$$

mit einer symmetrischen  $(n+1) \times (n+1)$ -Matrix  $A = A^t$  schreiben, wobei  $A$  nur bis auf skalare Vielfache  $\lambda \neq 0$  bestimmt ist.

**32.** Wenn  $f \in K[x_0, x_1, \dots, x_n]$  homogen vom zweiten Grad ist, so wird  $\mathcal{V}(f) = \{\langle x \rangle \in P_n : f(x) = 0\}$  projektive Quadrik der Dimension  $n - 2$  genannt. Vom affinen

<sup>7</sup> Dolgachev, *Classic Algebraic Geometry*, S. 7.

<sup>8</sup> Beltrametti u. a., *Lectures on curves, surfaces and projective varieties*, S. 126.

<sup>9</sup> Ebd., S. 108.

<sup>10</sup> Ebd., S. 111.

Standpunkt aus können wir  $\mathcal{V}(f)$  als Kegel zweiter Ordnung im  $K^{n+1}$  auffassen. Wie im affinen Fall (31), lässt sich  $f(x) = 0$  in der Form

$$(x_0, x_1, \dots, x_n)A(x_0, x_1, \dots, x_n)^t = 0$$

mit einer symmetrischen  $(n+1) \times (n+1)$ -Matrix  $A = A^t$  schreiben.

**33.** Eine Polarität ist eine lineare Abbildung  $\rho : P_n \rightarrow P_n^*$  mit  $p \mapsto \rho(p) = Ap$  mit  $A = A^t$ . Wir nennen  $p$  den Pol von  $Ap$  bezüglich der Polarität und  $Ap$  die Polare von  $p$ . Offenbar definiert jede Quadrik eine Polarität. Die erste Polare von  $p$  bezüglich eines projektiven Kegelschnitts  $X$  ist gerade die Linie, welche die Berührungspunkte der beiden Tangenten an  $X$  durch  $p$  verbindet.<sup>11</sup>

**34.** Es sei  $A$  eine symmetrische Bilinearform, die mit einer Quadrik  $Q$  assoziiert ist. Die zu  $Q$  duale Quadrik ist definiert als

$$Q^* = \{\langle q \rangle \in P_n^* : q \operatorname{adj}(A)q^t = 0\}.$$

Mit  $\operatorname{adj}(A) = ((-1)^{i+j} \det A_{ij})$  bezeichnen wir die Adjunkte von  $A$ . Hierbei ist  $A_{ij}$  die  $n \times n$ -Matrix, die sich aus  $A$  durch das Streichen der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte ergibt.<sup>12</sup>

## Affine Kegelschnitte

**35.** Gegeben sei ein affiner Kegelschnitt  $Q$  mit Gleichung

$$(x, y, 1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Der duale Kegelschnitt  $Q^*$  erfüllt dann die Gleichung

$$(u, v, w) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = 0,$$

wobei  $c_{ij} := (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$  ist. Hierbei bezeichnet  $A_{ij}$  die Matrix, die aus  $A = (a_{ij})$  durch das Streichen der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte entsteht.

**36.** Es sei

$$\operatorname{rg} A = m' \text{ und } \operatorname{rg} A_{33} = m.$$

<sup>11</sup> Ebd., S. 121.

<sup>12</sup> Ebd., S. 119.

Für  $m' < 3$  nennen wir  $Q$  uneigentlich bzw. degeneriert. Des Weiteren seien  $\sigma_+(M)$  und  $\sigma_-(M)$  die Anzahl der positiven bzw. negativen Eigenwerte einer Matrix  $M$ . Mit  $s' := \sigma_+(A) - \sigma_-(A)$  und  $s := \sigma_+(A_{33}) - \sigma_-(A_{33})$  können wir den Typ des Kegelschnitts anhand der Koeffizienten  $a_{ij}$  identifizieren (vgl. Tab. 8.1)

**37.** Für  $c_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$  heißt  $Q$  Mittelpunktskegelschnitt. Für den Mittelpunkt  $M = (x_0, y_0)$  gilt

$$x_0 = \frac{c_{13}}{c_{33}}, \quad y_0 = \frac{c_{23}}{c_{33}}.$$

Durch  $M$  gehen zwei ausgezeichnete Geraden, die Hauptachsen von  $Q$  genannt werden. Ihre Richtung wird durch die Eigenvektoren der Matrix

$$A_{33} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

definiert. Für den Winkel  $\theta$  der Eigenvektoren mit den Koordinatenachsen gilt

$$\tan(2\theta) = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}.$$

Ist  $(e_1, e_2)$  ein Eigenvektor, so heißen

$$e_2(x - x_0) - e_1(y - y_0) = 0, \quad e_1(x - x_0) + e_2(y - y_0) = 0$$

Hauptachsen des Kegelschnitts  $Q$ .

Wenn  $\det A_{33} = c_{33} > 0$  ist, so bildet  $Q$  eine Ellipse. Sie ist genau dann reell, wenn  $(a_{11} + a_{22}) \det(A) < 0$  gilt. Für  $(a_{11} + a_{22}) \det(A) > 0$  ist sie hingegen imaginär.

Für  $c_{33} < 0$  ist  $Q$  eine Hyperbel. In diesem Fall zerfällt  $a_{11}^2x + 2a_{12}xy + a_{22}^2y^2$  in zwei Geraden  $\alpha_1x + \alpha_2y = 0$  und  $\beta_1x + \beta_2y = 0$ , welche die Richtung der Asymptoten

$$\alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(y - y_0) = 0, \quad \beta_1(x - x_0) + \beta_2(y - y_0) = 0$$

anzeigen.

**38.** Für  $\det A \neq 0$  und  $c_{33} = 0$  bildet  $Q$  eine Parabel. In diesem Fall zerfällt die Gleichung

$$(x, y) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

in das Quadrat einer linearen Gleichung  $\alpha x + \beta y = 0$  mit  $\alpha^2 = a_{11}$  und  $\beta^2 = a_{22}$ . Der Parameter der Parabel  $Q$  ist

$$p = \sqrt{\frac{-\det A}{(a_{11} + a_{22})^3}},$$

während die Symmetrieachse der Gleichung

$$\alpha x + \beta y + \frac{\alpha a_{13} + \beta a_{23}}{\alpha^2 + \beta^2} = 0$$

genügt.

**39.** Jedes quadratische Polynom  $f \in \mathbb{R}[x, y]$  lässt sich mithilfe einer (reellen) Affinität  $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  auf eine Normalform der Tab. 8.1 transformieren.<sup>13</sup>

**40.** Wenn wir eine quadratische Gleichung

$$(u, v, w) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = 0.$$

betrachten, wobei wir nun  $u, v, w$  als Koordinaten einer Linie auffassen, erhalten wir ebenso neun verschiedene Typen I–IV von Liniengebilden. Die Tab. 8.2 zeigt, in welchem Verhältnis die Typen stehen.

Typ	Beschreibung	$m', m$	$s', s$	Normalformen	Kofaktoren
I	Reelle Ellipse	3, 2	1, 2	$x^2 + y^2 - 1$	$c_{33} > 0$
II	Imaginäre Ellipse	3, 2	3, 2	$x^2 + y^2 + 1$	$c_{33} > 0$
III	Hyperbel	3, 2	1, 0	$x^2 - y^2 + 1$	$c_{33} < 0$
IV	Parabel	3, 1	1, 1	$x^2 - 2y$	$c_{33} = 0$
V	Parallele Geraden	2, 1	0, 1	$x^2 - 1$	$c_{22} > 0, c_{33} = 0$
VI	Doppelgerade	1, 1	1, 1	$x^2$	$c_{22} = 0, c_{33} = 0$
VII	Parallele imaginäre Geraden	2, 2	2, 1	$x^2 + 1$	$c_{22} < 0, c_{33} = 0$
VIII	Imaginäre Geraden (Punkt)	2, 2	2, 2	$x^2 + y^2$	$c_{33} > 0$
IX	Nicht-parallele Geraden	2, 2	0, 0	$x^2 - y^2$	$c_{33} < 0$

**Tab. 8.1:** Die Tabelle zeigt die unterschiedlichen affinen Typen von Kegelschnitten. Die Typen V – IX sind heißen uneigentlich. Für sie gilt  $\det A = 0$ , während für die eigentlichen Kegelschnitte I – IV stets  $\det A \neq 0$  gilt. Kegelschnitte ohne Mittelpunkt werden von IV – VII repräsentiert. Die Symbole  $m', m$  und  $s', s$  werden im Paragraphen 36 erläutert.

## 8.2 Plückers Komplexflächen

**41.** Eine Linie durch die beiden Punkte  $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$  und  $(y_0 : y_1 : y_2 : y_3)$  im projektiven Raum  $P_3$  lässt sich durch homogene Koordinaten  $p_{ij} := x_i y_j - x_j y_i$  beschreiben. Wir nennen  $(p_{01} : p_{02} : p_{03} : p_{23} : p_{31} : p_{12})$  mit

$$p_{01}p_{23} + p_{02}p_{31} + p_{03}p_{12} = 0$$

<sup>13</sup> Fischer, *Analytische Geometrie*, S. 61.

Typ	Kegelschnitt	Dualer Kegelschnitt
I	Reelle Ellipse	Reelle Ellipse
II	Imaginäre Ellipse	Imaginäre Ellipse
III	Hyperbel	Hyperbel
IV	Parabel	Parabel
V	Parallele Geraden	Punktepaar im Unendlichen
VI	Doppelgerade	Doppelpunkt
VII	Parallele imaginäre Geraden	Konjugiertes imaginäres Punktepaar
VIII	Imaginäre Geraden (Punkt)	Gerade durch konjugierte Punkte
IX	Nicht-parallele Geraden	Zwei Punkte

**Tab. 8.2:** Die Tabelle veranschaulicht die Korrespondenz zwischen Kegelschnitten und ihren dualen Gebilden.

homogene Plücker-Koordinaten der Linie. Demnach wird die Menge aller Linien  $\mathcal{L}$  in  $P_3$  durch Punkte auf einer Quadrik im  $P_5$  repräsentiert.

**42.** Eine Gleichung zweiten Grades  $p\Omega p^t = 0$  mit  $\Omega = \Omega^t$  definiert einen quadratischen Linienkomplex  $Q \subset \mathcal{L}$ .

**43.** Eine Komplexfläche  $C \subset P_3$  wird von allen Linien des Komplexes umhüllt, die durch eine feste Gerade  $q$  des Raumes gehen. Sie wird Achse (bzw. Doppellinie) der Fläche genannt.

**44.** Zwei Geraden  $p, q \in \mathcal{L}$  schneiden sich genau dann, wenn

$$p_1q_4 + p_2q_5 + p_3q_6 + p_4q_1 + p_5q_2 + p_6q_3 = 0$$

gilt.

**45.** Eine Komplexfläche ist im allgemeinen von vierter Ordnung. Jede Ebene durch  $q$  schneidet aus ihr noch einen Kegelschnitt aus, während  $q$  selbst eine Doppelgerade der Fläche bildet. Eine Komplexfläche wird demnach durch eine Schar quadratischer Kurven erzeugt, die in Ebenen durch die Achse liegen.

**46.** Das affine Bild einer Komplexfläche wird Äquatorialfläche genannt, falls  $q$  im unendlich Fernen liegt, andernfalls Meridianfläche.

## Äquatorialflächen

**47.** Die allgemeine Gleichung einer Äquatorialfläche, deren Breitenkurven in Ebenen  $x = \text{const}$  liegen, lautet in gemischten Punkt- und Linienkoordinaten

$$(w : u : v)A(x)(w : u : v)^t = 0. \quad (8.1)$$

Mit  $A(x)$  wird eine symmetrische Matrix mit quadratischen Polynomen  $a_{ij}(x) \in \mathbb{R}[x]$  als Einträgen bezeichnet.<sup>14</sup> Für ein festes  $x$  definiert die Gleichung einen Kegelschnitt in den Linienkoordinaten  $w, u, v$ .

48. Für

$$A(x) := \begin{pmatrix} a & d & b \\ d & f & e \\ b & e & c \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

gibt es Linienkoordinaten so, dass

$$\begin{aligned} f &= Ex^2 + 2Ux + C, & e &= Kx^2 - Ox - G, & c &= Fx^2 - Rx + B, \\ d &= Mx + T, & b &= Lx - S, & a &= D. \end{aligned}$$

gilt. Die Großbuchstaben stehen für reelle Koeffizienten. Sie folgen Plückers Notation.<sup>15</sup>

49. Dieselbe Äquatorialfläche, die durch die Gleichung (8.2) repräsentiert wird, lässt sich noch auf einem anderen Weg beschreiben.<sup>16</sup> Die Linien des quadratischen Komplexes durch einen festen Punkt der Doppellinie (Achse) bilden einen quadratischen Kegel. Wenn die Doppellinie in der unendlich fernen Ebene liegt, dann werden aus den Kegeln Zylinder. Die Gesamtheit dieser Zylinder umhüllt die Äquatorialfläche. Wenn die Breitenkurven einer Fläche parallel zur Ebene  $x = 0$  sind, so müssen es auch die Achsen der Zylinder sein. Wenn  $\phi$  die Richtungen in dieser Ebene beschreibt, d.h.

$$\tan(\phi) = \frac{y}{z}, \quad (8.3)$$

dann definiert die Gleichung

$$(x, z, 1)B(\phi)(x, z, 1)^t = 0$$

mit

$$B(\phi) := \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \delta \\ \beta & \gamma & \epsilon \\ \delta & \epsilon & \zeta \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} \alpha &= F \tan(\phi)^2 - 2K \tan(\phi) + E, & \beta &= -(L \tan(\phi) - M) \tan(\phi), \\ \gamma &= D \tan(\phi)^2, & \delta &= -R \tan(\phi)^2 + O \tan(\phi) + U, \\ \epsilon &= (S \tan(\phi) + T) \tan(\phi), & \zeta &= B \tan(\phi)^2 + 2G \tan(\phi) + C \end{aligned}$$

<sup>14</sup> Plücker, Julius. *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement*. Hrsg. von Clebsch, Alfred. Bd. 1. Leipzig: Teubner, 1868, S. 158 ff.

<sup>15</sup> Ebd., S. 160.

<sup>16</sup> Ebd., S. 172.

die Schnittkurve des Zylinders, dessen Achse in Richtung  $\phi$  liegt, mit der Ebene  $y = 0$ .<sup>17</sup>

**50.** Die Mittelpunkte der Breitenkurven liegen auf einer Geraden, dem Durchmesser der Äquatorialfläche.<sup>18</sup> Ihre Punkte  $(x, y, z)$  genügen den Gleichungen

$$Dz - Lx + S = 0, \quad Dy - Mx - T = 0.$$

**51.** Die Gleichung einer allgemeinen Äquatorialfläche, deren Breitenkurven in den Ebenen  $x = \text{const}$  liegen, lautet in reinen Punktkoordinaten

$$(y, z, 1) \text{adj}[A(x)](y, z, 1)^t = 0,$$

wobei

$$\text{adj}[A(x)] = \begin{pmatrix} b^2 - ac & ae - bd & dc - be \\ ae - bd & d^2 - af & bf - de \\ dc - be & bf - de & e^2 - cf \end{pmatrix}$$

die Adjunkte zu  $A(x)$  ist.<sup>19</sup>

**52.** Eine Breitenkurve in der Ebene  $x = x_0$  zerfällt genau dann in ein Paar von Punkten, wenn  $\det A(x_0) = 0$  gilt. Die beiden Punkte liegen auf einer Geraden, die in der besagten Ebene durch den Durchmesser der Fläche geht. Plücker nennt sie einen singulären Strahl der Fläche. Er leitet die Berechnung der Doppelpunkt her.<sup>20</sup> Eine Komplexfläche besitzt im Allgemeinen vier singuläre Strahlen  $S_i$ , weswegen neben der Linie aus Doppelpunkten noch acht isolierte Doppelpunkte auf einer allgemeinen Komplexfläche liegen. Die singulären Strahlen schneiden die Doppellinie (Achse) der Fläche in vier Punkten  $P_i$ .<sup>21</sup>

### Nicht-tordierte Äquatorialflächen

**53.** Wenn die beiden Hauptachsen jeder quadratischen Breitenkurven in die Ebenen  $y = 0$  und  $z = 0$  fallen sollen, so muss  $e = d = b = 0$  sein.<sup>22</sup> Plücker spricht in diesem Fall von nicht-tordierten Äquatorialflächen. Ist wiederum  $a = 0$ , so bilden alle Breitenkurven Parabeln. Die Klasse von Flächen nennt Plücker parabolische Äquatorialflächen.<sup>23</sup>

<sup>17</sup> Plücker, *Neue Geometrie Bd. 1*, S. 174.

<sup>18</sup> Ebd., S. 161.

<sup>19</sup> Ebd., S. 162.

<sup>20</sup> Ebd., S. 189.

<sup>21</sup> Ebd., S. 188.

<sup>22</sup> Plücker, *Neue Geometrie Bd. 2*, S. 344 f.

<sup>23</sup> Plücker, *Neue Geometrie Bd. 1*, S. 191.

**54.** Die allgemeine Gleichung für nicht-tordierte Äquatorialflächen ohne parabolische Breitenkurven, deren Durchmesser mit der  $x$ -Achse zusammenfällt, lautet

$$cy^2 + fz^2 + cf = 0$$

mit  $c(x) = Fx^2 - Rx + B$  und  $f(x) = Ex^2 + 2Ux + C$ .

**55.** Die beiden Kurven  $z^2 + c(x) = 0$  und  $y^2 + f(x) = 0$  heißen Charakteristiken der Fläche.<sup>24</sup> Ihre Schnittpunkte mit dem Durchmesser  $y = 0$ ,  $z = 0$  werden durch

$$x_{1,2} = \frac{-U \pm \sqrt{U^2 - EC}}{E}, \quad x_{3,4} = \frac{R \pm \sqrt{R^2 - FB}}{F}$$

bestimmt. Sie definieren die (vier) singulären Strahlen  $t \mapsto (x_{1,2}, 0, t)$  und  $t \mapsto (x_{3,4}, t, 0)$ . Ob sie reell sind, hängt allein von den Diskriminanten von  $c$  und  $f$  ab.

**56.** Die singulären Punkte der Äquatorialfläche liegen auf den Strahlen. Sie haben die Koordinaten

$$(x_{3,4}, \sqrt{-f(x_{3,4})}, 0), \quad (x_{1,2}, 0, \sqrt{-c(x_{1,2})}).$$

**57.** Mithilfe der Tab. 8.1 lässt sich der Typ der Breitenkurve in der Ebene  $x = x_0$  in Abhängigkeit von  $c$  und  $f$  bestimmen. Für  $c(x_0) > 0$  und  $f(x_0) > 0$  handelt es sich um eine imaginäre Ellipse, für  $c(x_0)$  und  $f(x_0) < 0$  um eine reelle Ellipse und für  $c(x_0) \cdot f(x_0) < 0$  um eine Hyperbel. Wenn entweder  $c(x_0) = 0$  oder  $f(x_0) = 0$  ist, dann handelt es sich um eine Doppelgerade. Sind wiederum  $c(x_0) = 0$  und  $f(x_0) = 0$ , so gehört die gesamte Ebene der Fläche an.

### Parabolische Äquatorialflächen

**58.** Die allgemeine Gleichung einer parabolischen Äquatorialfläche in gemischten Punkt- und Linienkoordinaten ergibt sich aus (8.1) für  $D = 0$ . Alle Breitenkurven der Fläche sind Parabeln.

**59.** Wenn  $\alpha$  der Winkel zwischen der Achse einer parabolischen Breitenkurve zur  $z$ -Achse ist, dann gilt

$$\tan \alpha = \frac{d}{b} = \frac{Mx + T}{Lx - S},$$

wobei der Brennpunkt die Koordinaten

$$y = \frac{2bc - d(c - f)}{2(b^2 + d^2)}, \quad z = \frac{2de + b(c - f)}{2(b^2 + d^2)}$$

hat.<sup>25</sup>

<sup>24</sup> Plücker, *Neue Geometrie Bd. 2*, S. 346.

<sup>25</sup> Ebd., S. 373.

## Meridianflächen

**60.** Die allgemeine Gleichung einer Meridianfläche, deren Achse mit der  $x$ -Achse zusammenfällt, lautet in gemischten Punkt- und Linienkoordinaten

$$(w : t : v)M(\phi)(w : t : v)^t = 0$$

mit

$$M(\phi) = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix},$$

wobei die Einträge von  $M(\phi)$  homogene Polynome in  $\sin(\phi)$  und  $\cos(\phi)$  sind:

$$\begin{aligned} a &= F \sin(\phi)^2 - 2K \sin(\phi) \cos(\phi) + E \cos(\phi)^2, \\ b &= R \sin(\phi)^2 - O \sin(\phi) \cos(\phi) - U \cos(\phi)^2, \\ c &= B \sin(\phi)^2 + 2G \sin(\phi) \cos(\phi) + C \cos(\phi)^2, \\ d &= -Q \sin(\phi) + P \cos(\phi), \\ e &= -J \sin(\phi) - H \cos(\phi), \\ f &= A. \end{aligned}$$

Der Winkel  $\phi$  parametrisiert die Komplexebenen, welche die Achse (Doppellinie) schneiden Für  $\phi = \text{const}$  definiert die Gleichung eine Kurve zweiten Grades in Linienkoordinaten  $w, t, v$  in der entsprechenden Ebene.<sup>26</sup>

## 8.3 Steinersche Fläche

**61.** Wenn  $Q$  eine Fläche der zweiten Ordnung mit Gleichung  $x^t A x + 2bx = 1$  ist, dann heißen  $u, v, w \in \mathbb{R}^3$  konjugierte Richtungen von  $Q$ , falls

$$u^t A v = 0, u^t A w = 0, v^t A w = 0$$

gilt. Die zugehörigen Geraden durch den Mittelpunkt der Quadrik heißen konjugierte Durchmesser.

**62.** Wenn  $y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2 - 2cxyzw = 0$  die implizite Gleichung der Steinerschen Fläche in homogener Form ist, so lautet eine mögliche Parametrisierung

$$(u, v, t) \mapsto (u^2 + v^2 + t^2, c \cdot uv, c \cdot ut, c \cdot vt).$$

Eine rationale, affine Form ist dann gegeben durch

$$(u, v) \mapsto \left( \frac{c \cdot uv}{1 + u^2 + v^2}, \frac{c \cdot u}{1 + u^2 + v^2}, \frac{c \cdot v}{1 + u^2 + v^2} \right).$$

<sup>26</sup> Plücker, *Neue Geometrie Bd. 1*, S. 165.

## 8.4 Kummers Fadenmodell

**63.** Es sei  $(u, v) \mapsto X(u, v)$  die Parametrisierung einer regulären Fläche  $F \subset \mathbb{R}^3$  in einer Umgebung des Punktes  $p = X(0, 0)$ . Es sei  $\Phi(u, v)$  ein normierter Einheitsvektor. Die Linien  $X(u, v) + t\Phi(u, v)$  bilden dann ein System von Strahlen durch die Punkte von  $F$ . Wenn die Strahlen in Richtung der Flächennormalen zeigen, ist

$$\Phi(u, v) = \frac{X(u, v)_u \times X(u, v)_v}{|X(u, v)_u \times X(u, v)_v|}.$$

## 8.5 Centrafläche eines dreiachsigen Ellipsoids

**64.** Die allgemeine Gleichung eines dreiachsigen Ellipsoids  $E$  ist

$$\frac{1}{a^2}x^2 + \frac{1}{b^2}y^2 + \frac{1}{c^2}z^2 = 1, \quad a > b > c > 0. \quad (8.4)$$

Um die Centrafläche zu bestimmen, werden gewöhnlich elliptische Koordinaten  $k_1, k_2$  verwendet.<sup>27</sup> Ist  $(x, y, z)$  ein Punkt des Ellipsoids, so handelt es sich dabei um die Nullstellen der Gleichung

$$\frac{1}{a^2 + k}x^2 + \frac{1}{b^2 + k}y^2 + \frac{1}{c^2 + k}z^2 = 1. \quad (8.5)$$

**65.** Die elliptischen Koordinaten eines Punktes werden durch die beiden konfokalen Quadriken des Ellipsoids definiert, die sich in ihm schneiden. Wenn  $k_1$  und  $k_2$  nun die Gleichung (8.5) erfüllen, dann gilt zusammen mit (8.4)

$$\begin{aligned} -\beta\gamma x^2 &= a^2(a^2 + k_1)(a^2 + k_2), \\ -\alpha\gamma y^2 &= b^2(b^2 + k_1)(b^2 + k_2), \\ -\alpha\beta z^2 &= c^2(c^2 + k_1)(c^2 + k_2) \end{aligned} \quad (8.6)$$

mit  $\alpha = b^2 - c^2, \beta = c^2 - a^2, \gamma = a^2 - b^2$ . Die Gleichung (8.5) ist von der Form  $0 = k \cdot (k^2 + Lk + M)$  mit

$$\begin{aligned} L &:= x^2 + y^2 + z^2 - (a^2 + b^2 + c^2), \\ M &:= (b^2 + c^2)x^2 + (a^2 + c^2)y^2 + (a^2 + b^2)z^2 - (b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2), \end{aligned} \quad (8.7)$$

wegen (8.4). Die parametrisierte Gleichung der Normalen an  $E$  in einem Punkt  $(x, y, z)$  ist

$$x + \frac{t}{a^2}x, \quad y + \frac{t}{b^2}y, \quad z + \frac{t}{c^2}z, \quad t \in \mathbb{R}.$$

<sup>27</sup> Cayley, Arthur. „On the Centro-Surface of an Ellipsoid“. In: *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 12 (1873).

Die Brennpunkte der Normalen ergeben sich gerade für  $t = k_1$  und  $t = k_2$ , womit die Nullstellen von  $k^2 + Lk + M$  bezeichnet werden.<sup>28</sup> Wenn die drei resultierenden Gleichungen quadriert werden, dann folgt mit (8.6):

$$\begin{aligned} -\beta\gamma a^2 x^2 &= (a^2 + k_1)^3 (a^2 + k_2) \\ -\alpha\gamma b^2 y^2 &= (b^2 + k_1)^3 (b^2 + k_2) \\ -\alpha\beta c^2 z^2 &= (c^2 + k_1)^3 (c^2 + k_2) \end{aligned} \tag{8.8}$$

Diese Gleichungen parametrisieren die Centrafläche des Ellipsoids. Dabei entsprechen  $(k_1, k_2)$  acht Punkte  $(x, y, z)$  auf der Fläche.

## 8.6 Kummers Drahtmodell

**66.** Die implizite Gleichung lautet

$$\phi^2 = 16Kpqrs$$

mit  $\phi = p^2 + q^2 + r^2 + s^2 + 2a(qr + ps) + 2b(rp + qs) + 2c(pq + rs)$  und  $K = a^2 + b^2 + c^2 - 2abc - 1$ . Nach seinen Angaben wählte Kummer für sein Drahtmodell  $a = b = c = 2$ . Außerdem bestimmt er  $p, q, r, s$  so, dass sie die Seitenflächen eines regulären Tetraeders bilden. Wir wählen

$$p = k - z - \sqrt{2}x, \quad q = k - z + \sqrt{2}x, \quad r = k + z + \sqrt{2}x, \quad s = k + z - \sqrt{2}x.$$

Dann ist  $\phi = -4(x^2 + y^2 + z^2 - 7)$  und  $K = -5$ . Nun lassen sich die 16 Doppelpunkte der zugehörigen Fläche bestimmen. Anschließend werden die 16 Doppelebenen ermittelt, auf denen jeweils 6 der Punkte liegen.

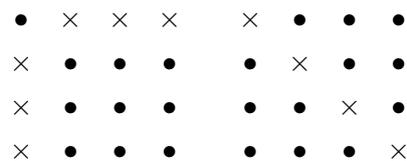
## 8.7 Rohns Konstruktion

Die Inzidenzbeziehungen der 16 Doppelpunkte und -ebenen einer Kummerschen Fläche lassen sich mit einem quadratischen  $4 \times 4$ -Schema beschreiben.<sup>29</sup> Jede Position in dem Diagramm steht für einen Punkt. Wenn eine beliebige Spalte und Zeile ausgewählt werden, dann gibt es 6 Punkte, wenn der Punkt unberücksichtigt bleibt, in dem sich die Spalte und Zeile kreuzen. Diese 6 Punkte liegen in einer Doppelebene. Auf derselben Art lassen sich die Inzidenzbeziehungen für die Ebenen beschreiben.

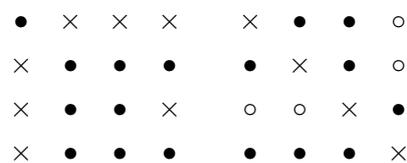
<sup>28</sup> Cayley, „On the Centro-Surface of an Ellipsoid“, S. 323.

<sup>29</sup> Hudson, Ronald W. H. T. *Kummer's Quartic Surface*. Cambridge: Cambridge University Press, 1905, S. 8.

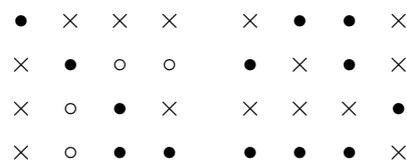
Mit diesen Diagrammen lässt sich Karl Rohns Konstruktion erklären, die er für die Herstellung seiner Modelle verwendet hat. Ist die Lage eines Punktes und einer Ebenen unbekannt, wird das Symbol  $\bullet$  verwendet, andernfalls  $\times$ . Rohn beginnt mit einem Tetraeder. Auf einer Ebene legt er anschließend sechs Punkte fest. Da sie alle koinzidieren, müssen ihre Einträge in einer Zeile und einer Spalte liegen, wie bei dem linken Schema der folgenden Darstellung. Wenn die Ecken des Tetraeders keine Doppelpunkte der Fläche sind, ergibt sich das rechte Schema für die vier gewählten Doppelebenen. In jeder Zeile und Spalte gibt es nur einen Eintrag.



Wenn jetzt ein siebenter Doppelpunkte auf einer der drei verbleibenden Tetraederkanten gewählt wird, so gibt es jeweils zwei Möglichkeiten für die Position des Eintrages im linken Schema. Wenn diese Position festgelegt wird, dann lassen sich vier neue Doppelebenen bestimmen, deren Einträge mit  $\circ$  markiert sind. Sie verbinden jeweils drei bekannte Punkte.



Nun lassen sich die Lage weiterer Doppelpunkte bestimmen, die im Schema mit  $\circ$  bezeichnet werden, da sich in ihnen jeweils drei Doppelebenen schneiden. Sie liegen auf den Kanten des Tetraeders.



Im letzten Schritt lässt sich die Lage aller verbleibenden Doppelebenen mithilfe der bekannten Doppelpunkte ermitteln, wodurch dann wiederum die Lage aller verbleibenden Doppelpunkte bestimmt ist. Sobald Rohn dieses Gerüst aus 16 Doppelpunkten und 16 Doppelebenen der Fläche ermittelt hat, musste er die Lage und Gestalt der Berühungskegelschnitte festlegen, die in den Doppelebenen liegen.



## Modellverzeichnisse

## Münchener Modelle

Nr.	Beschreibung	Entwurf	Jahr
I	Rotationsfläche der Tractrix mit Geodäten und Asymptotenkurven	I. Bacharach	1876
II	Brennfläche eines Strahlensystems	L. Schleiermacher	1877
III	Centrafläche des Hyperboloids	W. Dyck	1877
IV	Geodäten auf einem Rotationsellipsoid	K. Rohn	1876
V	Geodäten durch die Nabelpunkte eines Ellipsoids	K. Rohn	1876
VI	Kummersche Fläche	K. Rohn	1877
VII	Haupttangentenkurven einer kubischen Fl. mit vier Knoten	J. Bacharach	1877
VIII	Rotationsflächen konstant mittlerer Krümmung mit Geodäten	A. Braunmühl	1877
IX	Rotationsfl. konst. neg. Krümmung (Kegel-Typus)	J. Bacharach	1877
X	Rotationsfl. konst. neg. Krümmung (Hyperboloid-Typus)	W. Dyck	1877
XI	Bahnkurve eines schweren Punktes auf der Kugel	-	1877
XII	Darstellung der elliptischen Funktion $\phi = am(u, k)$	Th. Kuen u. Chr. Wolff	1880
XIII	Rotationsflächen konstant positiver Krümmung mit geodätischen Linien	P. Vogel	1880
XIV	Auf Kugeln abwickelbare Schrauben- und Umdrehungsflächen	Th. Kuen	1880
XV	Schraubenfläche von konstantem Krümmungsmaß	P. Vogel	1880
XVI	Parabolische Ringzyklide	S. Finsterwalder	1883
XVII	Kettenlinie auf der Kugel	-	1883
XVIII	Enveloppen geodätischer Linien auf Rotationsellipsoiden	A. Braunmühl	1880
XIX	Raumkurven dritter Ordnung	E. Lange	1880
XX	Fl. konst. negativem Krümmungsmaß	J. Mack	1881
XXI	Minimalfläche neunter Ordnung	G. Herting	1881
XXII	Fläche 12. Ordnung	S. Finsterwalder	1881
XXIII	Reliefperspektivische Darstellungen	H. Thoma	1882
XXIV	Krümmungsfläche der Röhrenschraubenfläche	Th. Kuen	1881
XXV	Windschiefe Schraubenfläche	G. Herting	1882
XXVI	Auf Rotationsflächen abwickelbare Schraubenflächen	nach E. Bour	1882
XXVII	Fläche vierter Ordnung	S. Finsterwalder	1885
XXVIII	Zykliden	S. Finsterwalder	1885
XXIX	Fl. achter Ordnung	S. Finsterwalder	1885
XXX	Rotationsflächen mit Asymptotenkurven	G. Herting	1885
XXXI	Bohnenförmig gestalteter Körper	unbekannt	1885
XXXII	Enveloppen geodätischer Linien	A. Braunmühl	1885
XXXIII	Dreiachsiges Ellipsoid	unbekannt	1885
XXXIV	Flächenstreifen von konst. negativem Krümmungsmaß	-	1885

**Tab. 8.3:** Die Tabelle gibt eine Übersicht über die Modelle in dem Programm der Verlagshandlung von Ludwig Brill, die an der Münchener Hochschule entstanden sind. Die Herstellung der Nr. VI, VII, XIX ist von Felix Klein betreut worden, während alle anderen Entwürfe unter der Leitung von Alexander Brill ausgeführt worden sind.

### Modellserien im Brill-Schilling-Verlag

Serie	Beschreibung	Entwurf	Jahr
I	Mod. unterschiedlicher Flächen	Versch.	1877
II	Mod. unterschiedlicher Flächen	Versch.	1877
III	Mod. quadratischer Flächen	R. Diesel	1877
IV	Fadenmod. quadratischer Flächen	Verlag	1879
V	Gipsmod. unterschiedlicher Flächen	Versch.	1880
VI	Gipsmod. unterschiedlicher Flächen	Versch.	1880
VII	Gipsmod. kubischer Flächen	C. Rodenberg	1881
VIII	Gipsmod. unterschiedlicher Flächen	Versch.	1882
IX	Gipsmod. quartischer Flächen	E. Kummer	1883
X	Gips-, Draht- und Messingblechmod.	Versch.	1883
XI	Drahtmod. zur Projektionen von Raumkurven	C. Wiener	1884
XII	Fadenmod. zu Raumkurven der vierten Ordnung	H. Wiener	1884
XIII	Fadenmod. von quartischen Regelflächen	K. Rohn	1886
XIV	Mod. zur Funktionentheorie	W. Dyck	1886
XV	Projektionsmod. regelmäßiger Körper in vier Dim.	V. Schlegel	1886
XVI	Gipsmod. konfokaler quadratischer Flächen	E. R. Neovius	1888
XVII	Verschiedene Gipsmod.	Versch.	1888–98
XVIII	Fadenmod. von kubischen Regelflächen	C. Tesch	1891
XIX	Gebietseinteilungen im Raum	A. Schoenflies	1891
XX	Fadenmod. von Regelschraubenflächen	C. Tesch	1891–98
XXI	Abwickelbare Flächen quartischer Raumkurven	K. Rohn	1892
XXII	Kartonmod.zur Flächenkrümmung	C. Tesch	1894
XXIII	Modelle quadratischer Flächen	C. Tesch	1898
XXIV	Kinematische Mod.	F. Schilling	1898
XXV	Fadenmod. von kubischen Kegeln	H. Wiener	1899
XXVI	Lehrmittel für darstellende Geometrie	G. Hauck	1901
XXVII	Drahtmod. elektrischer Äquipotentiallinien	O. Wiener	1901
XXVIII	Modelle zu kubischen Raumkurven	W. Ludwig	1902
XXIX	Modelle zur Kreiselltheorie	F. Schilling	1902
XXX	Gipsmodelle unterschiedlicher Flächen	Versch.	1903–10
XXXI	Kinematische Modelle II	F. Schilling	1905
XXXII	Verschiedene Modelle	Versch.	1906–08
XXXIII	Fadenmodelle von Diskriminantenflächen	Versch.	1908–09
XXXIV	Singularitäten von Raumcurven	H. Lund	1908
XXXV	Kreisbogenvierecke	W. Ihlenburg	1909
XXXVI	Affine Transformationen von Punktsystemen	F. Klein	1910
XXXVII	Sternvielfache	O. Wiesing u. F. Schilling	1910
XXXVIII	Theorie des Nullsystems	F. Schilling	1910
XXXIX	Erzeugung des Rotationshyperboloids	K. Doehlemann	1911
XL	Flächen konstanter Breite	E. Meissner	1911

**Tab. 8.4:** Die Tabelle gibt eine Übersicht über die Modellserien, die in der 6. Auflage (1903) im Katalog von Martin Schilling aufgeführt sind.

### Plückers Holzmodelle von Äquatorialflächen

Nr.	Metall	Typ	Beschreibung
1	XV	2	Reelle Hyperbel und imaginäre Ellipse mit gleicher Achse
2	XIV	3	Zwei reelle Hyperbeln, deren Nebenachsen auf dem Durchmesser liegen
3	XII	4	Zwei Ellipsen, von denen eine imaginär ist
4	IV	9	Reelle Ellipsen, die Scheitel der einen liegen zwischen denen der anderen
5	I	13	Reelle Hyperbel und Ellipse, die Scheitel der Hyperbel liegen zwischen den Scheiteln der Ellipse
6	III	32	Zwei reelle Geradenpaare
7	VII	34	Reelle Ellipsen, die sich in einem Scheitel schneiden
8	XVII	-	Tordierte Äquatorialfläche zu Nr. 4
9	XVIII	-	Tordierte Äquatorialfläche
10	XVI	-	Parabolische (nicht tordierte) Äquatorialfläche
11		-	-
12		-	-
13	XIX	-	Parabolische (tordierte) Äquatorialfläche
14	VIII	40	Ellipse und imaginäres Paar von Geraden, die sich in einem Scheitel der Ellipse schneiden

**Tab. 8.5:** Die Tabelle gibt eine Übersicht über die Plückerschen Holzmodelle, die sich heute im Besitz der *London Mathematical Society* befinden. Die Nummern zum Typ beziehen sich auf die Plückersche Klassifikation der nicht tordierten Äquatorialflächen. In der Spalte mit Überschrift „Metall“ sind die Ziffernummern der zugehörigen Metallmodelle angegeben. Die Beschreibungen beziehen sich für die nicht tordierten und nicht parabolischen Äquatorialflächen auf das System der beiden Charakteristiken. Sie orientieren sich an den Angaben eines Dokuments, das sich im Archiv des Deutschen Museums München befindet: Anonym. *Eingangsbuch zu den Plückerschen Modellen*. 1913.

## Plückers Metallmodelle von Komplexflächen

Nr.	Typ	Göt.	Tüb.	Beschreibung
I	13	121	70	Eine Ellipse und Hyperbel mit demselben Zentrum
II	32	103	71	Zwei Systeme reeller gerader Linien
III	73	-	72	Die Geraden des einen Systems sind parallel
IV	9	110	73	Zwei konzentrische Ellipsen
V	31	109	48	Ein System zweier reeller und ein System zweier imaginärer gerader Linien
VI	38	113	75	Zwei Hyperbeln, die sich in einem ihrer Scheitel schneiden
VII	34	112	89	Zwei Ellipsen mit einem gemeinsamen Punkt
VIII	40	104	77	Eine Ellipse und ein Paar imaginärer Geraden, deren reeller Schnittpunkt auf einen Scheitel der Ellipse fällt
IX	61	102	78	Eine Parabel und zwei sich in ihrem Scheitel schneidende Geraden
X	11	100	79	Eine Hyperbel und eine konzentrische Ellipse, deren eine Achse mit der Hauptachse der Hyperbel zusammenfällt
XI	7	116	83	Zwei Hyperbeln, deren Hauptachsen sich kreuzen
XII	4	-	82	Zwei konzentrische Ellipsen, von denen die eine imaginär ist
XIII	5	-	81	Eine Hyperbel und eine (imaginäre) konzentrische Ellipse
XIV	3	107	80	Zwei Hyperbeln, deren Nebenachsen dieselbe Richtung haben
XV	2	115	84	Eine Hyperbel und eine konzentrische imaginäre Ellipse, deren eine Achse mit der Nebenachse der Hyperbel gleich gerichtet ist
XVI	-	105	85	Die erzeugenden Kegelschnitte sind Parabeln
XVII	-	114	86	Tordierte Äquatorialfläche, die IV entspricht
XVIII	-	-	87	Die Breitenkurven sind Hyperbeln, deren eine Asymptote eine feste Richtung hat
XIX	-	120	88	Die Breitenkurven sind Parabeln
XX	-	101	-	Neunteilige Fläche
XXI	-	117	90	Siebenteilige Fläche
XXII	-	106	91	Vierteilig, hat zwei doppelzählende Geraden
XXIII	-	99	92	Fünfteilige Fläche
XXIV	-	108	99	Zweiteilig, hat zwei doppelzählende Geraden
XXV	-	111	94	Die Erzeugenden sind konzentrische Kreise
XXVI	-	118	95	Die Erzeugenden sind konzentrische Ellipsen
XXVII	-	119	96	Die Achsen der erzeugenden Ellipsen sind gegen die Rotationsachse geneigt

**Tab. 8.6:** Die Zahlen in der Spalte Göt. beziehen geben die zugehörigen Modellnummern der Göttinger Sammlung an, während jene in der Spalte Tüb. auf die Tübinger Sammlung verweisen. Die Beschreibungen beziehen sich für die nicht tordierten und nicht parabolischen Äquatorialflächen auf das System der beiden Charakteristiken. Sie orientieren sich an den Angaben eines Dokument, das sich im Archiv des Deutschen Museums München befindet: Anonym. *Eingangsbuch zu den Plückerschen Modellen*. 1913.

### Kleins Metallmodelle von Komplexflächen

Nr.	Göt.	Tüb.	Beschreibung
I	96	97	Allgemeine Komplexfläche
II	97	98	Komplexfläche, deren Achse dem Komplex angehört
III	98	93	Komplexfläche, deren Achse eine singuläre Linie des Komplexes ist
IV	95	-	Allgemeine Singularitätenfläche (Kummersche Fläche)

**Tab. 8.7:** Die Zahlen in der Spalte Göt. beziehen geben die zugehörigen Modellnummern der Göttinger Sammlung an, während jene in der Spalte Tüb. auf die Tübinger Sammlung verweisen.

### Rodenbergs Gipsmodelle kubischer Flächen

Nr.	Schläfli	Sing.	Linien	Bieebenen
1	I	-	27	-
2	XVI (1)	$4C_2$	9	-
3	XVI (1)	$4C_2$	9	-
4	XVI (1)	$4C_2$	9	-
5	XVI (1)	$4C_2$	9	-
6	XVI (1)	$4C_2$	9 (1)	-
7	XVI (1)	$3C_2$	12	-
8	XVI (1)	$3C_2$	12	-
9	XXI	$3B_3$	3	reell
10	III (1)	$B_3$	15 (3)	reell
11	III (3)	$B_3$	3	imaginär
12	XVIII	$B_4 + 2C_2$	5	reell
13	XVIII	$B_4 + 2C_2$	2 (1)	imaginär
14	XIV	$B_5 + C_2$	4	reell
15	XIX	$B_6 + C_2$	2	reell
16	XII	$U_6$	6	-
17	XII	$U_6$	2	-
18	XV	$U_7$	3	-
19	XX	$U_8$	1	-

**Tab. 8.8:** Die Tabelle gibt eine Übersicht über die Gipsmodelle der Rodenberg-Serie. In der Spalte „Linien“ wird die Gesamtanzahl an Linien angegeben, die auf der jeweiligen Fläche liegt. Die Zahl in Klammern gibt die Anzahl an Linien wieder, die im unendlich Fernen liegen. Die Ziffern in der Spalte „Schläfli“ geben den jeweiligen Typ der Klassifikation Ludwig Schläffis an.

## Abbildungsverzeichnis

2.1	Fabre de Lagranges Modell im South Kensington Museums . . . . .	18
2.2	Ausschnitt aus dem Katalog der Verlagshandlung Ludwig Brill . . . . .	34
2.3	Saal der Geometrie in der Münchener Ausstellung 1893 (Fotografie) . . . . .	36
3.1	Hauptschnitte eines Indexellipsoids . . . . .	45
3.2	Schnitt durch die Wellenfläche . . . . .	46
3.3	Schmiegekekugeln in einem hyperbolischen Punkt . . . . .	54
3.4	Schnitt durch die Centralfläche eines dreiachsigen Ellipsoids . . . . .	59
3.5	Centralfläche des Ellipsoids . . . . .	61
3.6	Steiners Konstruktion der Kegelschnitte . . . . .	63
3.7	Steinersche Fläche . . . . .	65
3.8	Doppelebene einer Kummerschen Fläche . . . . .	69
3.9	Projektion der Kegelschnitte einer Kummerschen Fläche . . . . .	72
3.10	Grafische Darstellung von Kummers Modellen I . . . . .	74
3.11	Grafische Darstellung von Kummers Modellen II . . . . .	75
3.12	Karl Rohns Konstruktion . . . . .	79
4.1	Degenerierte Kurve zweiter Klasse . . . . .	88
4.2	Nicht-tordierte Äquatorialfläche . . . . .	90
4.3	Plückersche Diagramme . . . . .	93
5.1	Ansichten einer virtuellen Nachbildung vpn Wieners Modell . . . . .	123
5.2	Ansichten einer virtuellen Nachbildung von Weilers Modell . . . . .	128
5.3	Weilers Zeichnung I . . . . .	136
5.4	Weilers Zeichnung II . . . . .	138
5.5	Weilers Zeichnung III . . . . .	139
6.1	Tafel aus Plückers <i>System der analytischen Geometrie</i> . . . . .	152
6.2	Ausschnitt aus dem Katalog der Verlagshandlung Martin Schilling (1911) . . . . .	163
8.1	Grafische Veranschaulichung der projektiven Ebene . . . . .	206
8.2	Projektive Kegelschnitte . . . . .	209
8.3	Sphärische Bilder projektiver Kegelschnitte . . . . .	210
8.4	Gipsmodell einer Fresnelsche Wellenfläche . . . . .	263
8.5	Schleiermachers Gipsmodell einer Krümmungsmittelpunktsfläche . . . . .	264
8.6	Kummers Fadenmodelle . . . . .	265
8.7	Kummers Gipsmodelle . . . . .	266

8.8	Rohns Gipsmodelle Kummerscher Flächen . . . . .	267
8.9	Kleins Modelle von Komplexflächen . . . . .	268
8.10	Kleins Modell der allgemeinen Komplexfläche . . . . .	269
8.11	Wieners Gipsmodell der kubischen Fläche . . . . .	270
8.12	Weilers Gipsmodell der Clebschen Diagonalfäche . . . . .	271
8.13	Rodenbergs Gipsmodell Nr. 2 . . . . .	272
8.14	Rodenbergs Gipsmodelle Nr. 3–6 . . . . .	273
8.15	Rodenbergs Gipsmodelle Nr. 7–8 . . . . .	274
8.16	Rodenbergs Gipsmodell Nr. 9 . . . . .	275
8.17	Rodenbergs Gipsmodell Nr. 10 . . . . .	276
8.18	Rodenbergs Gipsmodell Nr. 11 . . . . .	277
8.19	Rodenbergs Gipsmodell Nr. 12 . . . . .	278
8.20	Rodenbergs Gipsmodell Nr. 13 . . . . .	279
8.21	Rodenbergs Gipsmodell Nr. 14 . . . . .	280
8.22	Rodenbergs Gipsmodell Nr. 15 . . . . .	281
8.23	Rodenbergs Gipsmodelle Nr. 16–17 . . . . .	282
8.24	Rodenbergs Gipsmodell Nr. 18 . . . . .	283
8.25	Rodenbergs Gipsmodell Nr. 19 . . . . .	284
8.26	Rodenbergs Gipsmodelle Nr. 20–23 . . . . .	285
8.27	Plückers Modelle Nr. I–IV . . . . .	286
8.28	Plückers Modelle Nr. V–VIII . . . . .	287
8.29	Plückers Modelle Nr. IX–XII . . . . .	288
8.30	Plückers Modelle Nr. XIII–XVI . . . . .	289
8.31	Plückers Modelle Nr. XVII–XIX . . . . .	290
8.32	Plückers Modell Nr. XX . . . . .	291
8.33	Plückers Modelle Nr. XXI–XXIV . . . . .	292
8.34	Plückers Modelle Nr. XXV–XXVII . . . . .	293
8.35	H. Wieners Fadenmodell . . . . .	294

## Primärquellen

- Anonym. *Bericht über die Königl. Polytechnische Schule zu München 1875-1876*. Hrsg. von Königlich-Bayerische Polytechnische Schule zu München. München: F. Straub, 1876.
- *Bericht über die Königl. Polytechnische Schule zu München 1876-1877*. Hrsg. von Königlich-Bayerische Polytechnische Schule zu München. München: F. Straub, 1877.
- *Bericht über die Königl. Technische Hochschule zu München 1877-1878*. Hrsg. von Königl. Technische Hochschule zu München. München: F. Straub, 1878.
- *Eingangsbuch zu den Plückerschen Modellen*. Archiv des Deutschen Museums München Inv.-Nr. 39120. 1913.
- *Königlich Preußischer Staatsdienst-Kalender für den Regierungsbezirk Cassel*. Cassel: Verlag des reformirten Waisenhauses, 1871.
- „On Complexes of the Second Order“. In: *Report of the British Association for the Advancement of Science. 36th Meeting (1866)*. London, 1866, S. 6.
- Battaglini, Giuseppe. „Intorno ai Sistemi di Rette di Secondo Grado“. In: *Giornale di Matematiche* 6 (1868), S. 239–283.
- Bauer, Gustav. „Von den gestaltlichen Verhältnissen der parabolischen Curve auf einer Fläche dritter Ordnung“. In: *Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München (1883)*. Bd. 13. München: F. Straub, 1884, S. 320–343.
- Brill, Alexander. *Aus meinem Leben*. Bd. 1-2. 3 Bde. Transkription in Typoskript durch Justine Panck im Auftrag von Alexander Brill, Archiv der Technischen Universität München, Handapparat KS 56 Alexander Brill, Nr. A 99.2017. Tübingen, 1887.
- „Über die Modellsammlung des mathematischen Seminars der Universität Tübingen [1887]“. In: *Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen*. Hrsg. von Böklen, Otto. Bd. 2. Stuttgart, 1889, S. 69–80.
- Brill, Ludwig. *Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht*. 3. Aufl. Darmstadt: Verlagshandlung Brill, 1885.

- Cayley, Arthur. „A Memoir on Abstract Geometry“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 160 (1870), S. 51–63.
- „A Memoir on Cubic Surfaces“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 159 (1869), S. 231–326.
- „A Second Memoir on skew Surfaces, otherwise Scrolls“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 154 (1864), S. 559–577.
- „A Sixth Memoir upon Quantics“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 149 (1859), S. 61–90.
- „On a New Analytical Representation of Curves in Space“. In: *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* 3 (1860), S. 225–236.
- „On Dr. Wiener’s Model of a Cubic Surface with 27 Real Lines; And on the Construction of a Double-Sixer“. In: *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 12 (1873), S. 366–383.
- „On Plücker’s Models of certain Quartic Surfaces“. In: *Proceedings of the London Mathematical Society* 3.1 (1869), S. 281–285.
- „On Steiner’s Surface“. In: *Proceedings of the London Mathematical Society* s1-5.1 (1873), S. 14–29.
- „On the Centro-Surface of an Ellipsoid“. In: *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 12 (1873), S. 316–365.
- „On the Double-Sixers of a Cubic Surface“. In: *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* 10 (1870), S. 58–71.
- „On the Singularities of Surfaces“. In: *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* 7 (1852), S. 166–171.
- „On the Triple Tangent Planes of Surfaces of the Third Order“. In: *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal* 4 (1849), S. 118–132.
- Chasles, Michel. „Note sur les propriétés générales du système de deux corps semblables entr’eux“. In: *Bulletin des Sciences Mathématiques, Astronomiques, Physiques et Chimiques* 14 (1830), S. 321–326.
- Chevalier, Michel. *Rapports du jury international*. Bd. 2. Publisher: Paris : Imprimerie administrative de Paul Dupont, 1868. Paris: Paul Dupont, 1868.
- Clausen. *Klassifikation der Plückerschen Komplexflächen und der vier Kleinschen Modelle*. Die Arbeit befindet sich in der Sammlung mathematischer Modelle Göttingen. 1919.
- Clebsch, Alfred. „Plückers Neue Geometrie des Raumes“. In: *Göttingische gelehrte Anzeigen* 2 (1869), S. 1569–1581.

- „Ueber die Anwendung der quadratischen Substitution auf die Gleichungen 5ten Grades und die geometrische Theorie des ebenen Fünfseits“. In: *Mathematische Annalen* 4.2 (1871), S. 284–345.
- „Ueber die geometrische Interpretation der höheren Transformationen binärer Formen und der Formen 5ter Ordnung insbesondere.“ In: *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität* 12 (1871), S. 335–345.
- „Ueber die Steinersche Fläche“. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 67 (1867), S. 1–22.
- Coolidge, Julian. „The Opportunities for Mathematical Study in Italy“. In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 11.1 (1904), S. 9–17.
- Cremona, Luigi. „Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre,“ in: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 68 (1868), S. 1–133.
- Dyck, Walther. *Deutsche Unterrichts-Ausstellung in Chicago 1893: Specialkatalog der mathematischen Ausstellung*. Buchdr. v. Wolfen S. in München, 1893. 136 S.
- *Einleitender Bericht über die mathematische Ausstellung in München*. Sonderabdr. Vortrag, gehalten am 5. September 1893 bei der Eröffnungssitzung der Jahresversammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in der Aula der Technischen Hochschule München. München: Cotta, 1893. 27 S.
- „III. Die Centrafläche des einschaligen Hyperboloids“. In: *Mathematische Modelle angefertigt im mathematischen Institut des königlichen Polytechnikums zu München* (1878), S. 1–6.
- Hrsg. *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente (Nachdruck)*. Hildesheim: Georg Olms, 1994.
- Eckardt, F. E. „Ueber diejenigen Flächen dritten Grades, auf denen sich drei gerade Linien in einem Punkte schneiden“. In: *Mathematische Annalen* 10.2 (1876), S. 227–272.
- Enriques, Federigo. *Zur Geschichte der Logik*. Übers. von Bieberbach, Ludwig. Wissenschaft und Hypothese. Wiesbaden: Springer, 1927.
- Fano, Gino. „Sui postulati fondamentali della geometria in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni“. In: *Giornale di Matematiche* 30 (1892), S. 106–132.
- Fiedler, Wilhelm. „Stereoskopische Photographien des Modelles einer Fläche dritter Ordnung mit 27 reellen Geraden“. In: *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 14 (1869), S. 32–34.
- „Zur Reform des geometrischen Unterrichts“. In: *Naturforschende Gesellschaft Zürich* (1877), S. 16.

- Fischer, Joachim. „Vorwort“. In: *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente (Nachdruck)*. Hrsg. von Dyck, Walther. Hildesheim: Georg Olms, 1994.
- Frégier. „Géométrie analytique. Théorèmes nouveaux, sur les lignes et surfaces du second ordre“. In: *Annales de mathématiques pures et appliquées* 7 (1816), S. 95–98.
- Geiser. „Ueber die Doppeltangenten einer ebenen Curve vierten Grades“. In: *Mathematische Annalen* 1.1 (1869), S. 129–138.
- Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte, Hrsg. *Amtlicher Bericht über die Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte. 39. 1864 (1865)*. Bd. 39. Gießen: Wilhelm Keller, 1865.
- Graßmann, Hermann. *Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre*. 1. Aufl. Leipzig: Otto Wigand, 1844.
- *Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre*. 2. Aufl. Leipzig: Otto Wigand, 1878.
- „Über die Erzeugung der Curven dritter Ordnung durch gerade Linien, und über die geometrische Definition dieser Curven“. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 36 (1848), S. 177–182.
- Greatheed, Samuel S. „On the Condition that a Surface may be Touched by a Plane in a Curved Line“. In: *The Cambridge Mathematical Journal* 2.7 (1839), S. 22–24.
- Gregory, Duncan F. „Circular Section in Surfaces of the Second Order“. In: *The Cambridge Mathematical Journal* 1.2 (1837), S. 110–112.
- „Singular Points in Surfaces“. In: *The Cambridge Mathematical Journal* 2.12 (1841), S. 252–258.
- Gutzmer, August. „Geschichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*. Hrsg. von Gutzmer, August und Mehmke, Rudolf. Bd. 10. Leipzig: B. G. Teubner, 1909, S. 1–49.
- Gutzmer, August und Mehmke, Rudolf, Hrsg. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*. Bd. 10. Leipzig: B. G. Teubner, 1909.
- Hamilton, William. „Third Supplement to an Essay on the Theory of Surfaces of Rays“. In: *The Transactions of the Royal Irish Academy* 17 (1832), S. 1–144.
- Hankel, Hermann. *Die Elemente der projectivischen Geometrie*. B.G. Teubner, 1875.
- Hensel, Kurt. „Kummer und sein Lebenswerk“. In: *Festschrift zur Feier des 100. Geburtstages Eduard Kummers mit Briefen an seine Mutter und an Leopold Kronecker*. Hrsg. von Berliner Mathematischen Gesellschaft. Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner, 1910.

- Hesse, Otto. „Über Curven dritter Ordnung und die Kegelschnitte, welche diese Curven in drei verschiedenen Punkten berühren“. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 36 (1848), S. 143–176.
- „Ueber Curven dritter Classe und Curven dritter Ordnung“. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 38 (1849), S. 241–256.
- „Ueber Oberflächen zweiter Ordnung“. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 18 (1838), S. 101–118.
- Hilbert, David und Cohn-Vossen, Stephan. *Anschauliche Geometrie*. Bd. 37. Reihe Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1996.
- Hofmann, A. W., Hrsg. *Bericht über die wissenschaftlichen Apparte auf der Londoner internationalen Ausstellung im Jahre 1876*. Braunschweig: Vieweg, 1878.
- Hudson, Ronald W. H. T. *Kummer's Quartic Surface*. Cambridge: Cambridge University Press, 1905.
- Jacobi, Carl Gustav. „Über die Pariser polytechnische Schule“. In: *Gesammelte Werke*. Hrsg. von Weierstrass, Karl. 1. Aufl. Bd. 7. Berlin: Georg Reimer, 1891, S. 355–370.
- Joachimsthal, Ferdinand. „Ueber die Anzahl reeller Normalen, welche von einem Punkte an ein Ellipsoid gezogen werden können“. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 59 (1861), S. 111–124.
- Klein, Felix. *Das Erlanger Programm : Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*. Hrsg. von Wußing, Hans. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften. Leipzig: Geest & Portig, 1974.
- „Eine neue Relation zwischen den Singularitäten einer algebraischen Curve“. In: *Mathematische Annalen* 10 (1876), S. 199–209.
- *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*. Bd. 2. Berlin: Julius Springer, 1925.
- *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*. Hrsg. von Vermeil, Hermann und Fricke, R. Bd. 1. Berlin: Springer-Verlag Berlin, 1921.
- *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*. Hrsg. von Vermeil, Hermann und Fricke, R. Bd. 2. Berlin: Springer-Verlag Berlin, 1922.
- *Lectures on Mathematics*. Boston: Macmillan und Co., 1893.
- „Ueber die Gestalten der Kummerschen Fläche“. In: *Amtlicher Bericht der 50. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte in München*. Hrsg. von Klein, Felix. München: F. Staub, 1877, S. 95.

- Klein, Felix. „Ueber die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Linien-Coordinaten auf eine canonische Form“. In: *Mathematische Annalen* 23.4 (1884), S. 539–578.
- „Ueber Flächen dritter Ordnung“. In: *Physikalisch-Medizinische Sozietät zu Erlangen: Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät zu Erlangen* 5 (1873), S. 40–45.
- „Ueber Flächen dritter Ordnung“. In: *Mathematische Annalen* 6.4 (1873), S. 551–581.
- *Vier Modelle zur Theorie der Linien-Complexes zweiten Grades*. Fotokopie einer Werbeschrift aus der Göttinger Modellsammlung. 1871.
- „Vier Modelle zur Theorie der Liniencomplexes zweiten Grades“. In: *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente*. Hrsg. von Dyck, Walther. München: K. Hof- und Universitätsdruckerei, 1892, S. 283–285.
- „Vorbemerkungen zu den Arbeiten zur Anschaulichen Geometrie“. In: *Felix Klein – Gesammelte Mathematische Abhandlungen*. Hrsg. von Vermeil, Hermann und Fricke, R. Bd. 2. Berlin: Springer-Verlag Berlin, 1922, S. 3–6.
- „Vorbemerkungen zu den erkenntnistheoretischen Abhandlungen“. In: *Felix Klein – Gesammelte Mathematische Abhandlungen*. Hrsg. von Vermeil, Hermann und Fricke, R. Bd. 2. Berlin: Springer-Verlag Berlin, 1922, S. 212–213.
- *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*. Berlin: Springer, 1926.
- „Zur Theorie der Liniencomplexes des ersten und zweiten Grades“. In: *Mathematische Annalen* 2.2 (1870), S. 198–226.
- Klein, Felix und Clebsch, Alfred. „Modelle von Flächen dritter Ordnung“. In: *Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der George-August-Universität aus dem Jahre 1872* 20 (1872), S. 402–404.
- Klein, Felix und Mayer, Adolf. *Korrespondenz Felix Klein — Adolph Mayer: Auswahl aus den Jahren 1871–1907*. Hrsg. von Tobies, Renate und Rowe, Daniel E. Teubner-Archiv zur Mathematik. Wien: Springer-Verlag, 1990.
- Kummer, Ernst E. „18. April 1864. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse.“ In: *Monatsberichte der Königlich-Preussischen Akademie zu Berlin (1864)*. Berlin: Ferd. Dümmler’s Verlags-Buchhandlung, 1864, S. 246–260.
- „23. April 1866. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse.“ In: *Monatsberichte der Königlich-Preussischen Akademie zu Berlin (1866)*. Berlin: Ferd. Dümmler’s Verlags-Buchhandlung, 1867, S. 216–220.

- „26. November 1863. Gesamtsitzung der Akademie.“ In: *Monatsberichte der Königlich-Preussischen Akademie zu Berlin (1863)*. Berlin: Ferd. Dümmler’s Verlags-Buchhandlung, 1864, S. 520–539.
  - „30. Juli 1860. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse.“ In: *Monatsberichte der Königlich-Preussischen Akademie zu Berlin (1860)*. Berlin: Ferd. Dümmler’s Verlags-Buchhandlung, 1860, S. 469–484.
  - „30. Juni 1862. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse.“ In: *Monatsberichte der Königlich-Preussischen Akademie zu Berlin (1862)*. Berlin: Ferd. Dümmler’s Verlags-Buchhandlung, 1863, S. 426–428.
  - „4. Juli 1867. Öffentliche Sitzung zur Feier des Leibnizischen Jahrestages.“ In: *Monatsberichte der Königlich-Preussischen Akademie zu Berlin (1862)*. Berlin: Ferd. Dümmler’s Verlags-Buchhandlung, 1867, S. 387–395.
  - „Allgemeine Theorie der gradlinigen Strahlensysteme“. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 1860.57 (1860), S. 189–230.
- Lagrange, Fabre de und Merrifield, C. W. *A catalogue of a collection of models of ruled surfaces. With an appendix, containing an account of the application of analysis to their investigation and classification by C. W. Merrifield*. London: George E. Eyre und William Spottiswoode, 1872. 41 S.
- Lie, Sophus. „Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugel-Complexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differential-Gleichungen“. In: *Mathematische Annalen* 5.1 (1872), S. 145–208.
- Lloyd, Humphrey. „On the Phenomena Presented by Light in Its Passage along the Axes of Biaxial Crystals“. In: *The Transactions of the Royal Irish Academy* 17 (1833). Publisher: Royal Irish Academy, S. 145–157.
- Lorey, Wilhelm. *Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhundert*. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner, 1916.
- Loria, Gino. *Die hauptsächlichsten Theorien der Geometrie in ihrer früheren und heutigen Entwicklung*. Übers. von Schütte, Fritz. Leipzig: B. G. Teubner, 1888.
- MacCullagh, James. „On the Double Refraction of Light on a crytallized Medium, according to the Principles of Fresnel“. In: *The Transactions of the Royal Irish Academy* 16 (1830), S. 65–78.
- Matthiessen, Ludwig. „Ueber die Form der unendlich dünnen astigmatischen Strahlenbündel und über die Kummerschen Modelle“. In: *Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München* 2 (1883), S. 35–51.
- Möbius, August Ferdinand. *Der barycentrische Calcul: Ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie*. Leipzig: Johann Ambrosius Barth, 1827.

- Möbius, August Ferdinand. „Ueber die Grundformen der Linien der dritten Ordnung“. In: *Abhandlungen der königlichen sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften* 1 (1852), S. 1–82.
- Müller, Felix. „Die erste deutsche Mathematiker-Versammlung“. In: *Sonntagsbeilage der Königl. privilegierten Berlinischen Zeitung (Vossische Zeitung)* 115 (18. Mai 1873).
- Noether, Max. „Luigi Cremona“. In: *Mathematische Annalen* 59 (1904), S. 1–19.
- „Mathematische Modelle“. In: *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 23 (1878), S. 183–184.
- Pascal, Ernesto. *Repertorium der höheren Mathematik: Geometrie*. Hrsg. von Timerding, H. E. Übers. von Schepp, Adolf. 1. Aufl. Bd. 2. Leipzig: Teubner, 1902.
- Peacock, George. *A Treatise on Algebra*. Cambridge: J. & J. J. Deighton, 1830.
- „Inhaltsverzeichnis“. In: *Die Fortschritte der Physik* 24 (1872). Hrsg. von Physikalische Gesellschaft zu Berlin.
- Plücker, Julius. *Analytisch-geometrische Entwicklungen*. Bd. 1. Essen: G. D. Baedeker Verlag, 1828.
- *Analytisch-geometrische Entwicklungen*. Bd. 2. Essen: G. D. Baedeker Verlag, 1831.
- „Discussion de la forme générale des ondes lumineuses.“ In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 19 (1839), S. 1–44.
- *Four letters written by Julius Plücker to Thomas Archer Hirst: September 1866 – October 1867*. Auf der Internetseite der London Mathematical Society lassen sich Transkriptionen der Briefe herunterladen, die von Heather Ashby angefertigt worden: [www.lms.ac.uk/archive/plucker-collection](http://www.lms.ac.uk/archive/plucker-collection). Die Originale befinden sich im Archiv des University College London.
- „Fundamental Views regarding Mechanics (Abstract)“. In: *Proceedings of the Royal Society of London* 15 (1866), S. 204–208.
- „Géométrie de la règle. Théorèmes et problèmes, sur les contacts des sections coniques“. In: *Annales de mathématiques pures et appliquées* 17 (1826), S. 37–59.
- *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement*. Hrsg. von Clebsch, Alfred. Bd. 1. Leipzig: Teubner, 1868.
- *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement*. Hrsg. von Klein, Felix. Bd. 2. Leipzig: Teubner, 1869.
- „On a New Geometry of Space“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 155 (1865), S. 725–791.
- *System der analytischen Geometrie*. Berlin: Verlag von Duncker und Humblot, 1835.

- *Theorie der algebraischen Curven*. Bonn: Adolph Marcus, 1839.
- „Über Curven dritter Ordnung und analytische Beweisführung“. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 34 (1847), S. 329–336.
- „Über die allgemeinen Gesetze, nach welchen irgend zwei Flächen einen Contact der verschiedenen Ordnungen haben.“ In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 4 (1829), S. 351–370.
- „Über eine neue Art, in der analytischen Geometrie Punkte und Curven durch Gleichungen darzustellen“. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 6 (1830), S. 107–146.
- *Wissenschaftliche Abhandlungen*. Hrsg. von Schoenflies, Arthur und Pockels, Friedrich. Bd. 1. Leipzig: B. G. Teubner, 1895. 620 S.
- Poncelet, Victor. *Traité des propriétés projectives des figures: ouvrage utile a ceux qui s'occupent des applications de la géométrie descriptive et d'opérations géométriques sur le terrain*. Paris: Bachelier, 1822. 522 S.
- Quincke, Georg Hermann. „Experimentelle Untersuchungen über Kummersche Strahlenbündel“. In: *Annalen der Physik*. 4. Ser. 27 (1862), S. 563–576.
- Rodenberg, Carl. *Das Pentaeder der Flächen dritter Ordnung beim Auftreten von Singularitäten*. Göttingen: E. A. Huth, 1874.
- „VII: Modelle von Flächen 3. Ordnung“. In: *Mathematische Modelle angefertigt im mathematischen Institut des königlichen Polytechnikums zu München* (1878), S. 1–34.
- „Zur Classification der Flächen dritter Ordnung“. In: *Mathematische Annalen* 14.1 (1878), S. 46–110.
- Rohn, Karl. *Die Flächen vierter Ordnung hinsichtlich ihrer Knotenpunkte und ihrer Gestaltung*. Preisschriften der Fürstlichen Jablonowskischen Gesellschaft 26. Leipzig: S. Hirzel, 1886.
- „Die verschiedenen Gestalten der Kummer'schen Fläche“. In: *Mathematische Annalen* 18.1 (1881), S. 99–159.
- *Lehrbuch der Darstellenden Geometrie*. Bd. 2. Leipzig: Veit & Comp., 1901.
- „VI. Drei Modelle der Kummer'schen Fläche“. In: *Mathematische Modelle angefertigt im mathematischen Institut des königlichen Polytechnikums zu München* (1877), S. 1–3.
- Rowe, David E und Klein, Felix. „Felix Klein's 'Erlanger Antrittsrede'“. In: *Historia Mathematica* 12.2 (1985), S. 123–141.
- Salmon, George. *A Treatise on the Analytic Geometry of Three Dimensions*. Cambridge: Hodges, Smith & Co., 1862.

- Salmon, George. *Analytische Geometrie der Kegelschnitte : mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden*. Übers. von Fiedler, Wilhelm. Leipzig : B.G. Teubner, 1878.
- „Note on the Parabolic Points of Surface“. In: *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal* 2 (1847), S. 74–75.
  - „Notes: On the Triple Tangent Planes of Surfaces of the Third Order“. In: *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal* 4 (1849), S. 252–260.
  - „On Quaternary Cubics“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 150 (1860). Publisher: The Royal Society, S. 229–239.
  - „On the Condition that a Plane should touch a Surface along a Curve Line“. In: *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal* 3 (1848), S. 44–46.
  - „On the Degree of a Surface Reciprocal to a Given One“. In: *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal* 2 (1847), S. 65–73.
  - „On the Equation of the Surface of Centres of an Ellipsoid“. In: *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* 2 (1858), S. 217–221.
  - „On the Number of Normals which can be Drawn from a given Point to a given Surface“. In: *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal* 3 (1848), S. 46–47.
- Schilling, Martin. *Catalog mathematischer Modelle*. 6. Aufl. Halle an der Saale: Verlagshandlung Martin Schilling, 1903.
- *Catalog mathematischer Modelle*. 7. Aufl. Leipzig: Schilling, 1911.
- Schläfli, Ludwig. „An Attempt to Determine the Twenty-Seven Lines upon a Surface of the Third Order, and to divide such Surfaces into Species in reference to the Reality of the Lines upon the Surface. (1. Teil)“. Übers. von Cayley, Arthur. In: *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* 2 (1858), S. 55–65.
- „An Attempt to Determine the Twenty-Seven Lines upon a Surface of the Third Order, and to divide such Surfaces into Species in reference to the Reality of the Lines upon the Surface. (2. Teil)“. Übers. von Cayley, Arthur. In: *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* 2 (1858), S. 110–120.
  - „On the Distribution of Surfaces of the Third Order into Species, in Reference to the Absence or Presence of Singular Points, and the Reality of their Lines“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 153 (1863), S. 193–241.
  - „Theorie der vielfachen Kontinuität“. In: *Gesammelte Mathematische Abhandlungen: Band I*. Hrsg. von Steiner-Schläfli-Komitee der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft. Basel: Springer, 1950, S. 167–387.

- Schleiermacher, Ludwig. „II. Die Brennfläche eines Strahlensystems, welche mit der Fläche der Krümmungscentra des elliptischen Paraboloids in collinearer Verwandtschaft steht“. In: *Mathematische Modelle angefertigt im mathematischen Institut des k. Polytechnikums zu München* (1877), S. 1–7.
- Schröder, Hans. *Die Zentraflächen der Paraboloiden und Mittelpunktsflächen zweiten Grades*. Halle an der Saale: Heinrich John, 1913.
- Segre, Corrado. „Mehrdimensionale Geometrie“. In: *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*. Hrsg. von Meyer, W. Fr. und Mohrmann, H. Bd. 3. Leipzig: B.G. Teubner, 1907, S. 769–972.
- „On Some Tendencies in Geometric Investigations“. Übers. von Young, John Wesley. In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 10 (1904), S. 442–468.
- „Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche“. In: *Revista di Matematica* 1 (1891), S. 42–65.
- Seidel, Philipp Ludwig. „30. Dezember 1862. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse.“ In: *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie zu Berlin (1862)*. Berlin: Ferd. Dümmler's Verlags-Buchhandlung, 1863, S. 695–705.
- „Betreffend die Theorie der kaustischen Flächen, welche in Folge der Spiegelung oder Brechung von Strahlenbüscheln an den Flächen eines optischen Apparates erzeugt werden“. In: *Gelehrte Anzeigen der K. Bayerischen Akademie der Wissenschaften* 34 (1857). Hrsg. von Königlich Bayerische Akademie der Wissenschaften, S. 242–251.
- „Ueber die Entwicklung der Glieder 3ter Ordnung, welche den Weg eines ausserhalb der Ebene der Axe gelegenen Lichtstrahles durch ein System brechender Medien bestimmen“. In: *Astronomische Nachrichten* 43.1027 (1856), S. 289–332.
- „Ueber die Theorie der Fehler, mit welchen die durch optische Instrumente gesehenen Bilder behaftet sind und über die mathematischen Bedingungen ihrer Aufhebung“. In: *Abhandlungen der Naturwissenschaftlich-Technischen Commission bei der Königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften in München*. Bd. 1. München: J. G. Cotta'schen Buchhandlung, 1857, S. 227–268.
- Smith, Henry. „Geometrical Instruments and Models“. In: *Handbook to the Special Loan Collection of Special Apparatus*. Hrsg. von South Kensington Museum. London: Chapman und Hall, 1876, S. 34.
- South Kensington Museum, Hrsg. *Catalogue of the Special Loan Collection of Scientific Apparatus at the South Kensington Museum*. 3. Aufl. London: George E. Eyre und William Spottiswoode, 1877.
- Hrsg. *Handbook to the Special Loan Collection of Special Apparatus*. London: Chapman und Hall, 1876.

- Stark, Franz, Gintl, Wilhelm und Grünwald, Anton, Hrsg. *Die K. K. Deutsche Technische Hochschule in Prag 1806-1906: Festschrift zur Hundertjahrfeier*. Prag: A. Haase, 1906.
- Steiner, Jakob. „Sätze über Curven zweiter und dritter Ordnung“. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 32 (1846), S. 300–304.
- *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, mit Berücksichtigung der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methoden, Geometrie der Lage, Transversalen, Dualität und Reciprocität etc.* Berlin: G. Fincke, 1832.
- „Über die Flächen dritten Grades“. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 53 (1857), S. 133–141.
- Steiner, Jakob und Schläfli, Ludwig. *Der Briefwechsel zwischen Jakob Steiner und Ludwig Schläfli*. Hrsg. von Graf, Johann Heinrich. Bern: Wyss, 1896.
- Sturm, Rudolf. *Synthetische Untersuchungen über die Flächen dritter Ordnung*. Leipzig: B. G. Teubner, 1867.
- Sylvester, James J. „A Plea for the Mathematician I“. In: *Nature* 1.9 (1869), S. 237–237.
- „An Enumeration of the Contacts of Lines and Surfaces of the Second Order“. In: *Philosophical Magazine* 1.2 (1851), S. 119–140.
- „Note sur les 27 droites d’une surface du 3e degré“. In: *Comptes Rendus de l’Académie des sciences* (1861), S. 977–980.
- „Scetch of a Memoir on Elimination, Transformation, and Canonical Forms“. In: *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal* 6 (1851), S. 186–200.
- Timerding, H. E. „Vorwort“. In: Pascal, Ernesto. *Repertorium der höheren Mathematik*. Hrsg. von Epstein, P. und Timerding, H. E. Übers. von Schepp, Adolf. 2. Aufl. Bd. 2. Leipzig und Berlin: Teubner, 1910.
- Wangerin, A. „Optik. Ältere Theorie“. In: *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*. Hrsg. von Sommerfeld, Arnold. Bd. 5. Leipzig: B.G. Teubner, 1909, S. 1–94.
- Weierstrass, Karl. „Anmerkungen und Zusätze“. In: *Jacob Steiner’s Gesammelte Werke*. Hrsg. von Weierstrass, Karl. Bd. 2. Cambridge Library Collection - Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press, 2013, S. 725–743.
- „Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen“. In: *Monatsberichte der Königlich Preussische Akademie des Wissenschaften zu Berlin* (1868), S. 310–338.
- Weiler, Adolf. „Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades“. In: *Mathematische Annalen* 7.2 (1874), S. 145–207.

Weingarten, J. „Note über die Brennpunkte eines unendlich dünnen Strahlenbündels.“  
In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 98 (1885), S. 281–283.  
Wiener, Christian. *Stereoscopische Photographien des Modelles einer Fläche dritter Ordnung mit 27 reellen Geraden: mit erläuterndem Texte*. Leipzig: Teubner, 1869.



## Sekundärquellen

- Apéry, François. „The Cabinet de mathématiques of the Henri Poincaré Institute in Paris“. In: *Kwartalnik Historii Nauki i Techniki* 65.3 (2020), S. 97–108.
- Arnol'd, V. I. „Normal Forms for Functions near Degenerate Critical Points, the Weyl Groups of  $A_k$ ,  $D_k$ ,  $E_k$  and Lagrangian Singularities“. In: *Functional Analysis and Its Applications* 6.4 (1972), S. 254–272.
- Avellone, Maurizio, Brigaglia, Aldo und Zappulla, Carmela. „The Foundations of Projective Geometry in Italy from De Paolis to Pieri“. In: *Archive for History of Exact Sciences* 56.5 (1. Juli 2002), S. 363–425.
- Barbin, Évelyne, Menghini, Marta und Volkert, Klaus, Hrsg. *Descriptive Geometry, The Spread of a Polytechnic Art*. International Studies in the History of Mathematics and its Teaching. Springer Cham, 2019.
- Barrow-Green, June. „“Knowledge gained by experience”: Olaus Henrici—Engineer, Geometer and Maker of Mathematical Models“. In: *Historia Mathematica* 54 (2021), S. 41–76.
- Belhoste, Bruno. „Charles Dupin et l'héritage de Monge en Géométrie“. In: Christen, Carole u. a. *Charles Dupin (1784-1873): Ingénieur, savant économiste, pédagogue et parlementaire du Premier au Second empire*. Rennes: Presses universitaires de Rennes, 2009, S. 81–97.
- Beltrametti, Mauro C. u. a. *Lectures on Curves, Surfaces and Projective Varieties*. EMS textbooks in mathematics. Zürich: European Mathematical Society, 2009.
- Benstein, Nadine. „Zwischen Zeichenkunst und Mathematik: Die darstellende Geometrie und ihre Lehrer an den Technischen Hochschulen und deren Vorgängern in ausgewählten deutschen Ländern im 19. Jahrhundert“. Diss. Wuppertal: Bergische Universität Wuppertal, 2019.
- Bierende, Edgar. „Geometrie gegossen in Gips“. In: *Mathematik mit Modellen: Alexander von Brill und die Tübinger Modellsammlung*. Hrsg. von Seidl, Ernst und Loose, Frank. Schriften des Museums der Universität Tübingen. Tübingen: Verlag Museum der Universität Tübingen, 2018, S. 103–121.

- Born, Max und Wolf, Emil. *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. 6. Aufl. Cambridge: Cambridge University Press, 1986.
- Boyer, Carl B. *History of Analytic Geometry*. New York: Scripta Mathematica, 1956.
- Bruce, J. W. und Wall, C. T. C. „On the Classification of Cubic Surfaces“. In: *Journal of the London Mathematical Society* s2-19.2 (1979), S. 245–256.
- Burckhardt, J. J. „Nachwort zur Theorie der vielfachen Kontinuität“. In: *Gesammelte Mathematische Abhandlungen: Band I*. Basel: Springer, 1950, S. 388–392.
- Calinger, Ronald. „The Mathematics Seminar at the University of Berlin: Origins, Founding, and the Kummer-Weierstrass Years“. In: *Vita Mathematica: Historical Research and Integration with Teaching*. Hrsg. von Calinger, Ronald. Cambridge: Cambridge University Press, 1996, S. 153–176.
- Casnati, Gianfranco u. a. *From Classical to Modern Algebraic Geometry: Corrado Segre’s Mastership and Legacy*. Birkhäuser, 2017.
- Confalonieri, Sara, Peter-Maximilian, Schmidt und Volkert, Klaus. *Der Briefwechsel von Wilhelm Fiedler mit Alfred Clebsch, Felix Klein und italienischen Mathematikern*. Bd. 12. Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik. Siegen: Universitätsverlag Siegen, 2019.
- Conte, Alberto und Giacardi, Livia. „Segre’s University Courses and the Blossoming of the Italian School of Algebraic Geometry“. In: *From Classical to Modern Algebraic Geometry: Corrado Segre’s Mastership and Legacy*. Hrsg. von Casnati, Gianfranco u. a. Birkhäuser, 2017.
- Coolidge, Julian Lowell. „The Rise and Fall of Projective Geometry“. In: *The American Mathematical Monthly* 41.4 (1934), S. 217–228.
- Crilly, Tony. *Arthur Cayley : Mathematician Laureate of the Victorian Age*. 2006.
- „The Cambridge Mathematical Journal and its Descendants: the Linchpin of a Research Community in the Early and Mid-Victorian Age“. In: *Historia Mathematica* 31.4 (2004), S. 455–497.
- „The Young Arthur Cayley“. In: *Notes and Records of the Royal Society of London* 52.2 (1998), S. 267–282.
- Diedrichs, Hanna Gabriela. „Julius Plücker: Meridian- und Äquatorialflächen, vor 1866 und um 1870 sowie 1880“. In: *Mathematik mit Modellen: Alexander von Brill und die Tübinger Modellsammlung*. Hrsg. von Seidl, Ernst, Loose, Frank und Bierende, Edgar. Schriften des Museums der Universität Tübingen. Tübingen: Verlag Museum der Universität Tübingen, 2018, S. 177–185.
- Dolgachev, Igor V. *Classic Algebraic Geometry*. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.

- Eccarius, W. „Der Gegensatz zwischen Julius Plücker und Jakob Steiner im Lichte ihrer Beziehungen zu August Leopold Crelle“. In: *Annals of Science* 37.2 (1980), S. 189–213.
- Edge, W. L. „The Discriminant of a Cubic Surface“. In: *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences* 80A.1 (1980), S. 75–78.
- Fischer, Gerd. *Analytische Geometrie*. Grundkurs Mathematik. Wiesbaden: Vieweg, 1992.
- Hrsg. *Mathematical Models. From the Collections of Universities and Museums – Photograph Volume and Commentary*. 2. Aufl. Springer Spektrum, 2017.
- Fladt, Kuno und Baur, Arnold. *Analytische Geometrie spezieller Flächen und Raumkurven*. Sammlung Vieweg. Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, 1975.
- Giacardi, Livia. „Models in Mathematics Teaching in Italy (1850–1950)“. In: *Mathematics and Arts III*. Hrsg. von Bruter, Claude Paul. Cassini, 2015, S. 9–33.
- Hashagen, Ulf. *Walther von Dyck (1856–1934): Mathematik, Technik und Wissenschaftsorganisation an der TH München*. Stuttgart: Franz Steiner Verlag, 2003.
- Hawkins, Thomas. „The Erlanger Programm of Felix Klein: Reflections on its Place in the History of Mathematics“. In: *Historia Mathematica* 11.4 (1984), S. 442–470.
- Heidelberger, M. „Some Patterns of Change in the Baconian Sciences of the Early 19th Century Germany“. In: *Epistemological and Social Problems of the Sciences in the Early Nineteenth Century*. Hrsg. von Jahnke, Hans Niels und Otte, M. Dordrecht: Reidel, 1979.
- Hervé, J. M. „Théodore Olivier (1793–1853)“. In: *Distinguished Figures in Mechanism and Machine Science: Their Contributions and Legacies*. Hrsg. von Ceccarelli, Marco. History of Mechanism and Machine Science. Springer Netherlands, 2007.
- Junker, Hannes. „Ansichten der Geometrie – Plastische Modelle in der Forschung von Julius Plücker und Felix Klein“. In: *Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik: Band 14*. Hrsg. von Krömer, Ralf und Nickel, Gregor. Bd. 14. Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik. Siegen: Universitätsverlag Siegen, 2021, S. 197–211.
- „Kabinett der Formen“. In: *Eine Frage der Perspektive. Objekte als Vermittler von Wissenschaft*. Hrsg. von Seidl, Ernst, Steinheimer, Frank und Weber, Cornelia. Bd. V. Junges Forum für Sammlungs- und Objektforschung. Berlin: Humboldt-Universität zu Berlin, 2021, S. 99–105.
- Kidwell, Peggy A. „American Mathematics Viewed Objectively: The Case of Geometric Models“. In: *Vita Mathematica: Historical Research and Integration with*

- Teaching*. Hrsg. von Calinger, Ronald. Cambridge: Cambridge University Press, 1996, S. 197–208.
- Knobloch, Eberhard, Pieper, Herbert und Pulte, Helmut. „... das Wesen der reinen Mathematik verherrlichen“. In: *Mathematische Semesterberichte* 42.2 (1995), S. 99–132.
- Knörrer, Horst und Miller, Thomas. „Topologische Typen reeller kubischer Flächen“. In: *Mathematische Zeitschrift* 195.1 (1. März 1987), S. 51–67.
- Koppelman, Elaine. „The Calculus of Operations and the Rise of Abstract Algebra“. In: *Archive for History of Exact Sciences* 8.3 (1971), S. 155–242.
- Lehleiter, Janine. „Charles Muret“. In: *Mathematik mit Modellen: Alexander von Brill und die Tübinger Modellsammlung*. Hrsg. von Seidl, Ernst, Loose, Frank und Bierende, Edgar. Schriften des Museums der Universität Tübingen. Tübingen: Verlag Museum der Universität Tübingen, 2018, S. 159–167.
- Loose, Frank. „Bahnbrechende Ideen in der Geometrie“. In: *Mathematik mit Modellen: Alexander von Brill und die Tübinger Modellsammlung*. Hrsg. von Seidl, Ernst, Loose, Frank und Bierende, Edgar. Schriften des Museums der Universität Tübingen. Tübingen: Verlag Museum der Universität Tübingen, 2018, S. 51–67.
- Lorenat, Jemma. „Synthetic and Analytic Geometries in the Publications of Jakob Steiner and Julius Plücker (1827–1829)“. In: *Archive for History of Exact Sciences* 70.4 (2016), S. 413–462.
- Mehrtens, Herbert. „Mathematical Models“. In: *Models: The Third Dimension of Science*. Hrsg. von Chadarevian, Soraya de und Hopwood, Nick. Stanford University Press, 2004, S. 276–306.
- O’Hara, J G. „The Prediction and Discovery of Conical Refraction by William Rowan Hamilton and Humphrey Lloyd (1832-1833)“. In: *Proceedings of the Royal Irish Academy* 82.2 (1982), S. 231–257.
- Palladino, Nicla. „I modelli matematici costruiti per l’insegnamento delle matematiche superiori pure e applicate.“ In: *Ratio Mathematica* 19 (2009), S. 31–88.
- Plump, Mechthild Ulrike. „Julius Plücker - Leben und Werk eines analytischen Geometers im 19. Jahrhundert“. Dissertation. Wuppertal: Universität Wuppertal, 2014.
- Reid, Miles. *Undergraduate Algebraic Geometry*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.
- Richards, Joan L. *Mathematical Visions: The Pursuit of Geometry in Victorian England*. Boston: Academic Press Inc, 1988.
- „Projective geometry and mathematical progress in mid-Victorian Britain“. In: *Studies in History and Philosophy of Science Part A* 17.3 (1986), S. 297–325.

- Richter, Karin. „,... Modelle wurden mir in den Vorlesungen unentbehrlich.“ Zum 100. Todestag des Verlegers Martin Schilling der Modellfirma M. Schilling“. In: *Cantor-Hefte* 10 (2008), S. 37–40.
- Rowe, David E. *A Richer Picture of Mathematics: The Göttingen Tradition and Beyond*. Springer Cham, 2018.
- „Klein, Lie, and the “Erlanger programm”“. In: *1830–1930: A Century of Geometry*. Hrsg. von Boi, Luciano, Flament, Dominique und Salanskis, Jean-Michel. Bd. 402. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1992, S. 45–54.
- „Mathematical Models as Artefacts for Research: Felix Klein and the Case of Kummer Surfaces“. In: *Mathematische Semesterberichte* 60.1 (2013), S. 1–24.
- „On Models and Visualizations of Some Special Quartic Surfaces“. In: *The Mathematical Intelligencer* 40.1 (2018), S. 59–67.
- „Segre, Klein, and the Theory of Quadratic Line Complexes“. In: *From Classical to Modern Algebraic Geometry*. Hrsg. von Casnati, Gianfranco u. a. Trends in the History of Science. Springer International Publishing, 2016, S. 243–263.
- Sattelmacher, Anja. *Anschauen, Anfassen, Auffassen: Eine Wissensgeschichte Mathematischer Modelle*. Mathematik im Kontext. Berlin Heidelberg: Springer Spektrum, 2021.
- „Zwischen Ästhetisierung und Historisierung: Die Sammlung geometrischer Modelle des Göttinger mathematischen Instituts“. In: *Mathematische Semesterberichte* 61 (2014), S. 131–143.
- Schubring, Gert. „The Conception of Pure Mathematics as an Instrument in the Professionalization of Mathematics“. In: *Social History of Nineteenth Century Mathematics*. Hrsg. von Mehrtens, Herbert, Bos, Henk und Schneider, Ivo. Boston, MA: Birkhäuser, 1981, S. 111–134.
- Segre, Beniamino. *The Non-singular Cubic Surfaces*. Oxford: Oxford University Press, 1942.
- Seidl, Ernst, Loose, Frank und Bierende, Edgar, Hrsg. *Mathematik mit Modellen: Alexander von Brill und die Tübinger Modellsammlung*. Schriften des Museums der Universität Tübingen. Tübingen: Verlag Museum der Universität Tübingen, 2018.
- Siegmund-Schultze, Reinhard. „The Emancipation of Mathematical Research Publishing in the United States from German Dominance (1878–1945)“. In: *Historia Mathematica* 24.2 (1997), S. 135–166.
- Stubhaug, Arild. *Es war die Kühnheit meiner Gedanken: Der Mathematiker Sophus Lie*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2003.

- Tobies, Renate. „Felix Klein in Erlangen und München: ein Beitrag zur Biographie“. In: *Amphora: Festschrift für Hans Wussing zu seinem 65. Geburtstag*. Hrsg. von Demidov, Sergei S. u. a. Basel: Birkhäuser, 1992, S. 751–772.
- *Felix Klein: Visionen für Mathematik, Anwendungen und Unterricht*. Berlin Heidelberg: Springer Spektrum, 2019.
- Tobies, Renate und Volkert, Klaus. *Mathematik auf den Versammlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte : 1843–1890*. Bd. 7. Schriftenreihe zur Geschichte der Versammlungen Deutscher Naturforscher und Ärzte. Stuttgart: Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft mbH, 1998.
- Volkert, Klaus. *In höheren Räumen: Der Weg der Geometrie in die vierte Dimension*. Mathematik im Kontext. Berlin Heidelberg: Springer Spektrum, 2018.
- „Mathematische Modelle und die polytechnische Tradition“. In: *Sieger Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik*. Hrsg. von Krömer, Ralf und Nickel, Gregor. Bd. 10. Siegen: Universitätsverlag Siegen, 2018, S. 161–202.
- „Otto Wilhelm Fiedler and the Synthesis of Projective and Descriptive Geometry“. In: *Descriptive Geometry, The Spread of a Polytechnic Art: The Legacy of Gaspard Monge*. Hrsg. von Barbin, Évelyne, Menghini, Marta und Volkert, Klaus. International Studies in the History of Mathematics and its Teaching. Springer International Publishing, 2019.
- Voss, Waltraud. *Mathematiker als Rektoren der Technischen Hochschule Dresden: Höhere Lehrerbildung und Mathematische Gesellschaft im Wandel*. transcript Verlag, 2021.
- Wagner-Döbler, Roland und Berg, Jan. „Nineteenth-Century Mathematics in the Mirror of Its Literature: A Quantitative Approach“. In: *Historia Mathematica* 23.3 (1996), S. 288–318.
- Wiescher, Michael. „Julius Plücker, Familie und Studienjahre“. In: *Sudhoffs Archiv* 100.1 (2016), S. 52–82.
- Xavier, João Pedro und Pinho, Eliana Manuel. „Olivier String Models and the Teaching of Descriptive Geometry“. In: *Dig where you stand 4: Proceedings of the Fourth International Conference on the History of Mathematics Education, September 23-26, 2015, at University of Turin, Italy*. Hrsg. von Bjarnadóttir, Kristín u. a. Rom: Edizioni Nuova Cultura, 2017, S. 399–413.
- Ziegler, Renatus. *Die Geschichte der geometrischen Mechanik im 19. Jahrhundert: Eine historisch-systematische Untersuchung von Möbius und Plücker bis zu Klein und Lindemann*. Stuttgart: Franz Steiner Verlag, 1985.

## Lebenslauf

- 12.06.1989    Geburt in Schwerin
- 1995–1999    Heinrich-Heine-Grundschule Schwerin
- 1999–2008    Fridericianum Schwerin und Freie Waldorfschule Schwerin
- 2008    Abitur
- 2008–2009    Besuch von Zeichen- und Druckkursen bei der Abendakademie der Hochschule für Grafik und Buchkunst Leipzig
- 2009–2012    Studium Kommunikationsdesign an der Kunsthochschule Burg Giebichenstein Halle
- 2012–2016    Bachelor-Studium Mathematik mit Anwendungsfach Physik an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg.  
Abschlussarbeit: *Vassiliev-Invarianten von Abbildungen von Flächen in den  $R^4$*  bei Prof. Dr. Joachim Rieger (Note: 1.0)
- 2016–2018    Master-Studium Mathematik mit Anwendungsfach Physik an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg.  
Abschlussarbeit: *Preservation of Invariants in the Long-Time Integration of Nonholonomic Systems* bei Prof. Dr. Martin Arnold (Note: 1.3)
- seit 2018    Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg im Bereich Numerische Analysis bei Prof. Dr. Martin Arnold
- seit 2018    Betreuung der Historischen Sammlung historischer mathematischer Modelle des Instituts für Mathematik unter Leitung von Prof. Dr. Karin Richter
- seit 2019    Promotion zum Thema *Anschaungsmodelle in der mathematischen Forschung deutscher Gelehrter 1860–1877* bei Prof. Dr. Karin Richter (Halle) und Prof. Dr. Frank Loose (Tübingen)

### Archivbesuche und Forschungsaufenthalte

- Aug. 2019    Recherchen in den Archiven des Deutschen Museums und der Technischen Hochschule München zu mathematischen Anschauungsmodellen
- Sep. 2020    Einwöchiger Forschungsaufenthalt in Rijeka (Kroatien) im Rahmen des

DAAD-geförderten Programms *Rigid Body Rocking on a Flexible Structure – non-smooth Contact-Dynamics*

Okt. 2021 Recherche in der Sammlung mathematischer Modelle des Instituts für Mathematik Tübingen

## Publikationen

Junker, Hannes. „Kabinett der Formen“. In: *Eine Frage der Perspektive. Objekte als Vermittler von Wissenschaft*. Hrsg. von Seidl, Ernst, Steinheimer, Frank und Weber, Cornelia. Bd. V. Junges Forum für Sammlungs- und Objektforschung. Berlin: Humboldt-Universität zu Berlin, 2021

Junker, Hannes. „Ansichten der Geometrie – Plastische Modelle in der Forschung von Julius Plücker und Felix Klein“. In: *Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik: Band 14*. Hrsg. von Krömer, Ralf und Nickel, Gregor. Bd. 14. Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik. Siegen: Universitätsverlag Siegen, 2021



## Danksagung

*Zur Entstehung dieser Dissertation trugen viele Menschen bei, denen ich hier meinen Dank aussprechen möchte. Zuallererst Karin Richter, die mich mit den Modellen der Halleschen Sammlung bekannt gemacht hat. Während der vergangenen vier Jahre hat sie meine Arbeit mit großer Anteilnahme und Geduld betreut. Ihr verdanke ich viele wertvolle Anmerkungen und Anregungen wie erhellende Diskussionen, die ich lange in Erinnerung behalten werde.*

*Die Promotion hat mir Martin Arnold ermöglicht. Er ließ mir jede Freiheit bei der Wahl meines Themas, wofür ich ihm sehr dankbar bin. Mein Dank gilt außerdem Frank Loose, der mich in die Tübinger Modellsammlung eingeführt hat, mein Vorhaben mit großem Interesse verfolgte und mir wichtige Hinweise gab. Mehrere Personen unterstützten mich, indem sie mit Geduld meine Nachfragen zu Objekten und Quellen beantworteten oder mir Fotografien und Dokumente überließen. Im Archiv der Technischen Universität München half mir Eva Hölzl bei meiner Recherche zu dem Münchener Modellierkabinett. Zu den Plückerschen Modellen erteilten mir Katja Rasch, Wilhelm Füßl und Matthias Röschner vom Deutschen Museum in München wichtige Auskünfte. Edgar Bierende und Ernst Seidl vom Museum der Universität Tübingen stellten mir Fotografien und Digitalisate zur Verfügung, wofür ich ihnen dankbar bin. Laurent Bartholdi führte uns durch die Göttinger Modellsammlung. Er gestattete mir außerdem den Abdruck mehrerer Fotografien, was mir die Arbeit erleichtert hat. An der Universität Rijeka ließen mich Gordan Jelenić und Edita Papa Dukić den 3D-Druck von Modellen im Rahmen eines vom Deutschen Akademischen Austauschdienst geförderten Programms erproben, wodurch ich neue Erkenntnisse sammeln konnte. Gerne erinnere ich mich auch an meine Teilnahme am Jungen Forum für Sammlungs- und Objektforschung zurück, das am Zentralmagazin Naturwissenschaftlicher Sammlungen in Halle 2020 stattfand. Für die Tagung, Diskussion und Publikation der Beiträge möchte ich mich bei den Organisatoren Cornelia Weber, Frank Steinheimer und Ernst Seidl, aber auch bei den anwesenden Teilnehmern herzlich bedanken. Neben den Genannten diskutierten einige Personen in Seminaren die Ergebnisse meiner Arbeit mit mir, wodurch sich einige Fragen für mich schärften,*

*was mich aber zuweilen auch auf neue Fragen brachte, die mir nicht in den Sinn gekommen waren. Auch ihnen möchte ich herzlich danken.*

*Während der vergangenen vier Jahre sorgten Viele dafür, dass ich meine Aufmerksamkeit auf die Arbeit an meiner Promotion richten konnte. Und wiederum Andere halfen mir, die Arbeit zu vergessen, wann immer ich es wollte. Auch an sie erinnere ich mich sehr gerne an dieser Stelle.*

## Eidesstaatliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die Dissertation selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel genutzt habe. Alle wörtlich oder inhaltlich übernommenen Stellen habe ich als solche gekennzeichnet.

Außerdem versichere ich, dass ich die beigefügte Dissertation nur in diesem und keinem anderen Promotionsverfahren eingereicht habe und, dass diesem Promotionsverfahren keine endgültig gescheiterten Promotionsverfahren vorausgegangen sind.

Halle (Saale), 1. Dezember 2022



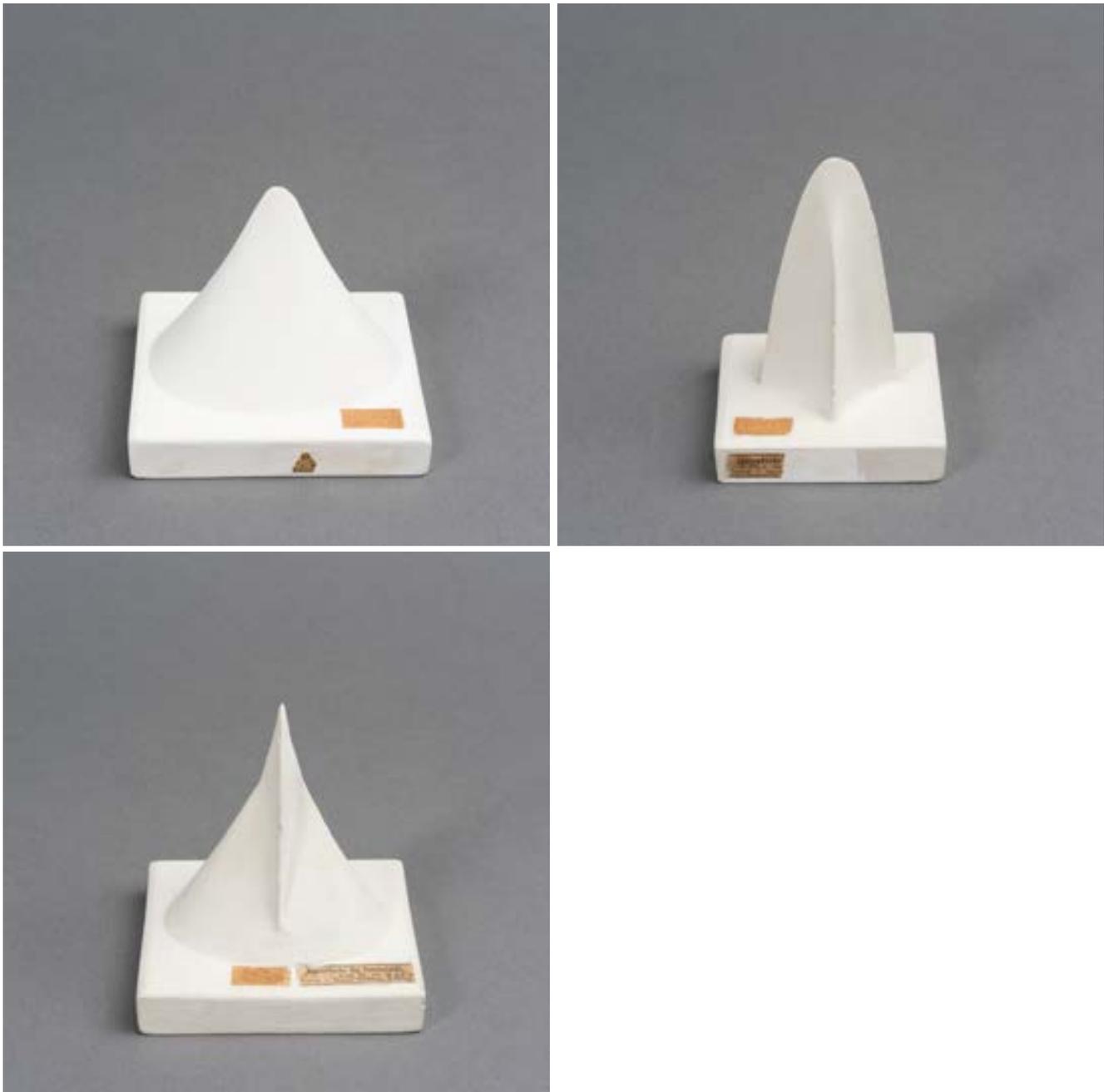
Teil II

# Modellfotografien





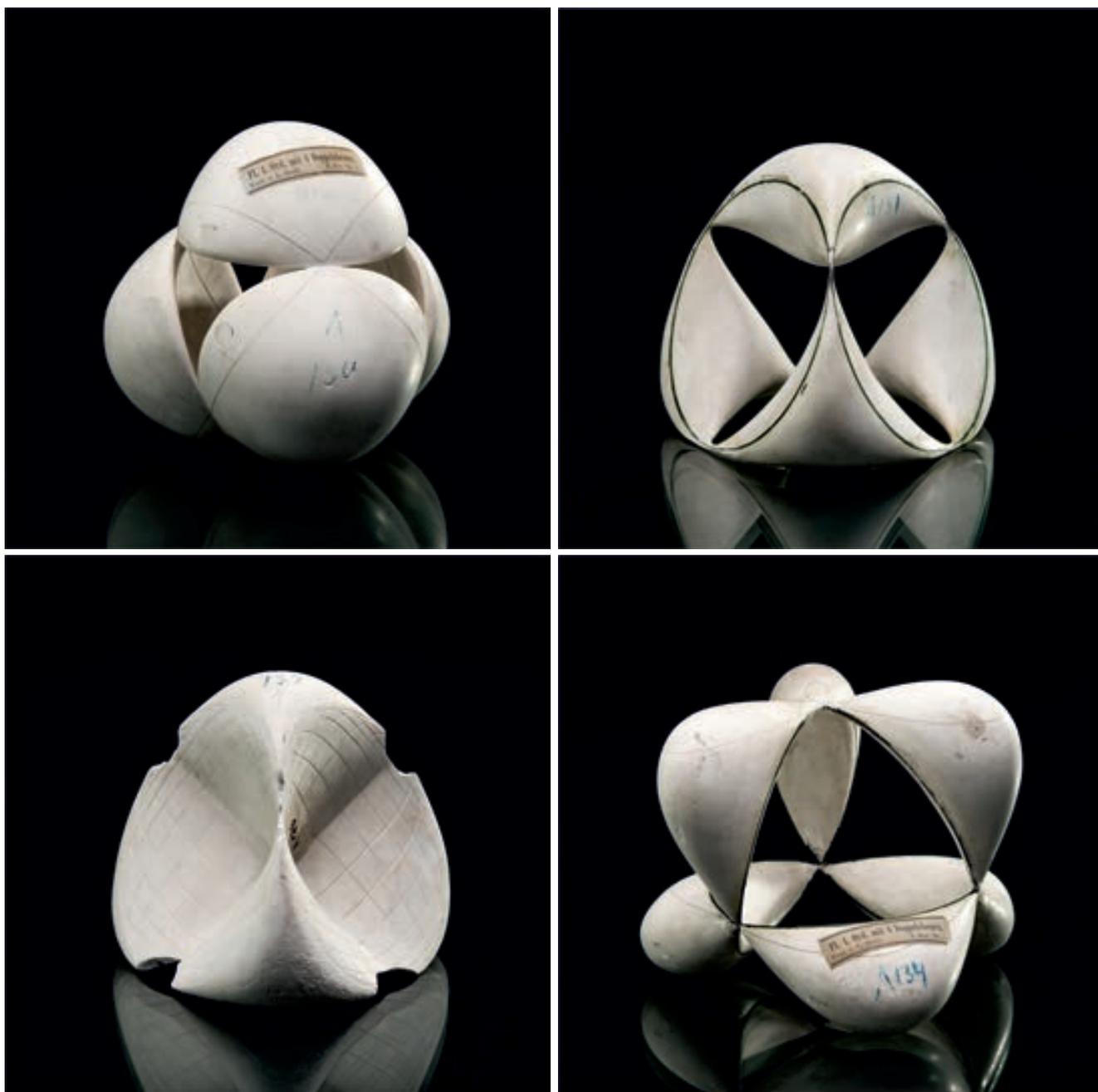
**Abb. 8.4:** Die Fotografien zeigen das zweiteilige Modell einer Wellenfläche für optisch zweiachsige Kristalle aus der Halleschen Sammlung. Die beiden Formen stellen zwei Oktanten der Fläche dar, die beide in einem Doppelpunkt zusammenstoßen. Bei dem Modell handelt es sich um Nr. 4 der Serie VI der Verlagshandlung Martin Schilling; Schilling, Martin. *Catalog mathematischer Modelle*. 7. Aufl. Leipzig: Schilling, 1911, S. 13. Fotos: Sascha Herrmann 2019



**Abb. 8.5:** Die Fotografien zeigen drei Gipsmodelle der Verlagshandlung Martin Schilling aus der Hallenser Sammlung, die Ludwig Schleiermacher 1877 als Student in München unter Leitung von Alexander Brill konstruiert hat. Auf dem Originalaufkleber (Fotografie unten) steht: „Centrafläche eines Paraboloids - 1. Serie, Nr. 2b. - Verlag v. Martin Schilling, Leipzig“. Links oben und rechts oben: die beiden Mäntel getrennt; Unten: die beiden Mäntel der Fläche vereinigt. Fotos: Sascha Herrmann 2019



**Abb. 8.6:** Die Fotografie zeigt die Fadenmodelle verschiedener Arten von Strahlenbündeln der Tübinger Sammlung, die Ernst Kummer entworfen hat. Foto: MUT | V. Marquardt 2018



**Abb. 8.7:** Gipsmodelle nach Entwürfen Ernst Kummers in der Tübinger Sammlung Mathematischer Modelle. Es handelt sich um die Modelle Nr. 1–3 und Nr. 5 der neunten Serie der Verlagshandlung Ludwig Brill. Fotos: MUT | V. Marquardt 2018



**Abb. 8.8:** Gipsmodelle Kummerscher Flächen von Karl Rohn in der Hallenser Sammlung Mathematischer Modelle. Erste Reihe: Nr. 1 zum Typ I (a); Zweite Reihe: Nr. 2 zum Typ II (a); Dritte Reihe: Nr. 3 zum Typ III. Fotos: Sascha Herrmann 2019



**Abb. 8.9:** Kleins Modelle Nr. I – III aus der Göttinger Sammlung. Fotos: Modellsammlung des Mathematischen Instituts Göttingen 2021



**Abb. 8.10:** Kleins Modell Nr. IV einer allgemeinen Komplexfläche (Kummersche Fläche) aus der Tübinger Sammlung. Foto: MUT | V. Marquardt 2018



Abb. 8.11: Wieners Gipsmodell einer kubischen Fläche mit 27 reellen Linien. Foto: MUT | V. Marquardt 2018



Abb. 8.12: Weilers Gipsmodell der Clebschen Diagonalfäche (Rodenbergs Modell Nr. 1) in der Tübinger Sammlung



**Abb. 8.13:** Rodenbergs Modell Nr. 2 aus der Halleschen Sammlung. Foto: Sascha Herrmann 2019



Abb. 8.14: Rodenbergs Modell Nr. 3-6 aus der Halleschen Sammlung. Fotos: Sascha Herrmann 2019



Abb. 8.15: Rodenbergs Modelle Nr. 7 und Nr. 8 aus der Halleschen Sammlung. Fotos: Sascha Herrmann 2019





**Abb. 8.17:** Rodenbergs Modell Nr. 10 aus der Tübinger Sammlung. Foto: MUT | V. Marquardt 2018



**Abb. 8.18:** Rodenbergs Modell Nr. 11 aus der Halleschen Sammlung. Foto: Sascha Herrmann 2019



**Abb. 8.19:** Rodenbergs Modell Nr. 12 aus der Tübinger Sammlung. Foto: MUT | V. Marquardt 2018



Abb. 8.20: Rodenbergs Modell Nr. 13 aus der Halleschen Sammlung. Foto: Sascha Herrmann 2019



**Abb. 8.21:** Rodenbergs Modell Nr. 14 aus der Halleschen Sammlung. Foto: Sascha Herrmann 2019



**Abb. 8.22:** Rodenbergs Modell Nr. 15 aus der Halleschen Sammlung. Foto: Sascha Herrmann 2019



**Abb. 8.23:** Rodenbergs Modelle Nr. 16 und Nr. 17 aus der Halleschen Sammlung. Fotos: Sascha Herrmann 2019



**Abb. 8.24:** Rodenbergs Modell Nr. 18 aus der Halleschen Sammlung. Foto: Sascha Herrmann 2019



**Abb. 8.25:** Rodenbergs Modell Nr. 19 aus der Halleschen Sammlung. Foto: Sascha Herrmann 2019



Abb. 8.26: Rodenbergs Modell Nr. 20–23 aus der Halleschen Sammlung. Fotos: Sascha Herrmann 2019



Abb. 8.27: Plücker's Metallmodelle Nr. I-IV aus der Tübinger Sammlung. Fotos: MUT | V. Marquardt 2018

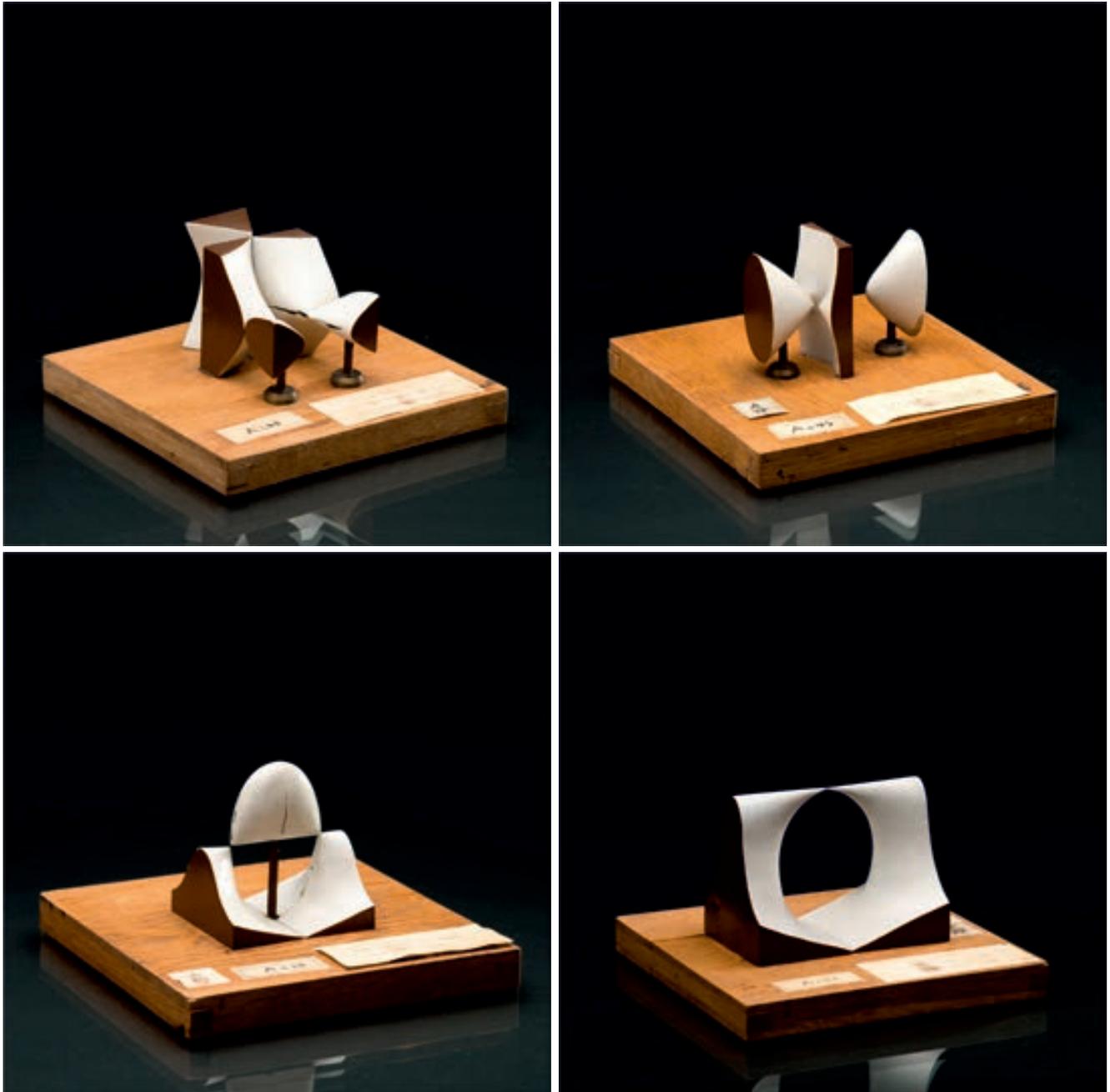


Abb. 8.28: Plücker's Metallmodelle Nr. v–VIII aus der Tübinger Sammlung. Fotos: MUT | V. Marquardt 2018



Abb. 8.29: Plücker's Metallmodelle Nr. IX–XII aus der Tübinger Sammlung. Fotos: MUT | V. Marquardt 2018



Abb. 8.30: Plücker's Metallmodelle Nr. XIII–XVI aus der Tübinger Sammlung. Fotos: MUT | V. Marquardt 2018



Abb. 8.31: Plücker's Metallmodelle Nr. XVII–XIX aus der Tübinger Sammlung. Fotos: MUT | V. Marquardt 2018



**Abb. 8.32:** Plückers Metallmodell Nr. XX aus der Göttinger Sammlung. Foto: Modellsammlung des Mathematischen Instituts Göttingen 2021



Abb. 8.33: Plücker's Metallmodelle Nr. XXI–XXIV aus der Tübinger Sammlung. Fotos: MUT | V. Marquardt 2018



Abb. 8.34: Plückers Metallmodelle Nr. xxv–xxvii aus der Tübinger Sammlung. Fotos: MUT | V. Marquardt 2018



**Abb. 8.35:** Hermann Wieners Modell Nr. 4 der Serie xxv der Verlagshandlung Martin Schilling aus der Halleschen Sammlung. Das Fadenmodell zeigt einen Kegel dritter Ordnung. Die Fäden sind in einem Metallrahmen verankert, der aus zwei parallel laufenden Drähten besteht. Foto: Sascha Herrmann 2019