

# **Rotation suspendierter axialsymmetrischer Partikel unter Berücksichtigung der Partikel-Medium-Wechselwirkung**

## **Dissertation**

zur Erlangung des akademischen Grades

## **Doktoringenieurin (Dr.-Ing.)**

von Dipl.-Ing. Uta Barbara Renner  
geb. am 04. Februar 1975 in Lutherstadt Wittenberg

genehmigt durch die Fakultät für Maschinenbau  
der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Gutachter:

Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h. c. mult. Holm Altenbach

Prof. Dr.-Ing. Sergiy Antonyuk

Promotionskolloquium am 21. Juni 2017



# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin am Lehrstuhl für Technische Mechanik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg und nach der Versetzung des Lehrstuhls an die Otto-von-Guericke-Universität in Zusammenarbeit mit der Universität in Magdeburg.

Ich bedanke mich herzlich bei meinem Doktorvater Prof. Holm Altenbach, dem Inhaber des Lehrstuhls Technische Mechanik der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, für die Betreuung der Arbeit, für das mir entgegengebrachte Vertrauen, für sein stets offenes Ohr, für zahlreiche Diskussionen und Anregungen, die das Gelingen dieser Arbeit möglich machten, für die Unterstützung in allen Dingen, die mit meiner Arbeit am Lehrstuhl zusammenhingen, und nicht zuletzt für die Erstellung des Gutachtens.

Herrn Prof. Sergiy Antonyuk, Inhaber des Lehrstuhls Mechanische Verfahrenstechnik der Technischen Universität Kaiserslautern, danke ich für das Erstellen seines Gutachtens und seine Hinweise und Anmerkungen, mit denen einige Abschnitte der Arbeit besser verständlich wurden.

Bei allen Mitarbeitern des Lehrstuhls Technische Mechanik an den Universitäten in Halle und in Magdeburg bedanke ich mich für die freundliche und herzliche Zusammenarbeit. Ein ganz besonderer Dank gilt Prof. Konstantin Naumenko für viele konstruktive Diskussionen und zahlreiche Anregungen und Ideen, die zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen haben. Ein großes Dankeschön allen Kollegen, die mich durch Korrekturlesen der Arbeit und viele wertvolle Hinweise bei der Vorbereitung der Präsentation unterstützt haben.

Nicht zuletzt danke ich meiner Familie und meinen Freunden für ihr Verständnis dafür, dass mein Kopf oft nicht frei war, und für Ablenkungen, die mir sehr geholfen haben.

Magdeburg, 21. Juni 2017

Barbara Renner



# Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Bestimmung der Drehung eines axialsymmetrischen Partikels, das in einer viskosen Flüssigkeit suspendiert ist. Der ingenieurpraktische Hintergrund hierzu ist die Ausrichtung von Kurzfasern in einer Polymerschmelze während des Spritzgussprozesses. Mit Hilfe einer geeigneten Simulationssoftware kann diese bestimmt werden. In der Regel geschieht das auf der Basis des von *Jeffery* (Proc. R. Soc. London, Ser. A, 102: 161-179, 1922) entwickelten Modells zur Bewegung von Rotationsellipsoiden in einem viskosen Fluid, nach dem die Enden der langen Achse des Ellipsoids eine Bahn auf einer Kugelfläche, dem „*Jeffery-Orbit*“, beschreiben.

In dieser Arbeit wird ein alternatives Modell vorgestellt, mit dem ausgehend von der Drehimpulsbilanz die Bewegungsgleichung aufgestellt und für verschiedene Strömungen und Partikelgeometrien gelöst wird. Im Unterschied zum *Jeffery*-Modell wird die Wechselwirkung zwischen Partikel und umgebendem Medium berücksichtigt. In einer Reihe von Beispiellösungen wird gezeigt, dass das Einbeziehen des Einflusses aus Partikel- und Fluidträgheit dazu führt, dass das Partikel in die Strömungsebene driftet und sich dort in Strömungsrichtung ausrichtet.

Wünschenswert ist eine allgemeine analytische Lösung der Bewegungsgleichung axialsymmetrischer Partikel für alle von *Giesekus* klassifizierten ebenen Strömungen. Die zu lösenden Bewegungsgleichungen sind inhomogene nichtlineare Vektordifferentialgleichungssysteme. Um diese zu lösen, wurden verschiedene vereinfachende Annahmen getroffen, um die Plausibilität der Lösungen zu prüfen. Diese Vereinfachungen waren zunächst die Reduzierung der Geometrie des Partikels auf einen schlanken Stab und die numerische Lösung des Differentialgleichungssystems für zylindrische Körper. Für bestimmte ebene Strömungen wurde mit Hilfe der Perturbationsmethode eine näherungsweise analytische Lösung gefunden. Ein Vergleich mit der numerischen Lösung zeigt, dass beide Lösungen nahe beieinanderliegen und physikalisch plausibel sind.



# Abstract

The thesis submitted herewith is about the determination of the rotation of an axisymmetric particle, suspended in a viscous fluid. The background to this topic from the engineering point of view is the orientation of short fibers in a polymer melt during the injection moulding process. It can be determined by help of a suitable simulation software. In practice, this is usually carried out on the basis of the model developed by *Jeffery* (Proc. R. Soc. London, Ser. A, 102: 161-179, 1922) on the motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid, which indicates that the ends of its long axis describe a closed orbit, the so called „*Jeffery Orbit*“.

With this study, an alternative model is introduced. Based on the balance equation of the angular momentum, the equation of motion is developed and solved considering different flow types and particle geometries. As distinguished from the model of *Jeffery*, the interaction between particle and surrounding medium is considered. In a series of exemplary solutions, it is shown that the consideration of influences resulting from the inertia of particle and fluid leads to a drift of the particle into the flow plane and to its orientation in flow direction.

A general analytical solution of the equation of motion of axisymmetric particles for all plane flows classified by *Giesekus* is preferable. The equations of motion to be solved are inhomogeneous and non-linear systems of vectorial differential equations. To solve them initially, several simplifying assumptions are made to verify the plausibility of the solutions. These simplifications were the reduction of the geometry of the particle to a slender fiber as well as the numerical solution of the system of differential equations of a cylindrical solid. By help of the perturbation method, an approximative analytical solution for certain plane flows has been derived. The comparison with the numerical solution shows that both solutions are in good agreement with each other and plausible from the physical point of view.





# Inhaltsverzeichnis

<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>XI</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Stand der Forschung</b>	<b>7</b>
2.1 Drehung eines Rotationsellipsoids nach Jeffery . . . . .	7
2.2 Bewegung starrer suspendierter Partikel - ein Überblick . . . . .	10
<b>3 Rotation eines suspendierten Partikels</b>	<b>15</b>
3.1 Starrkörperrotation . . . . .	15
3.2 Partikel-Medium-Wechselwirkung . . . . .	20
3.3 Strömung des Mediums . . . . .	27
<b>4 Bewegungsgleichung</b>	<b>29</b>
4.1 Bewegungsgleichung eines axialsymmetrischen Körpers . . . . .	29
4.2 Bewegungsgleichung eines schlanken Stabes . . . . .	31
4.3 Lösung der Bewegungsgleichung eines schlanken Stabes . . . . .	33
4.3.1 Ruhendes Medium . . . . .	34
4.3.2 Rotationsströmung . . . . .	37
4.3.3 Scherströmung . . . . .	43
4.3.4 Dehnströmung . . . . .	46
4.3.5 Elliptische Strömung . . . . .	48
4.3.6 Hyperbolische Strömung . . . . .	52
4.4 Lösung der Bewegungsgleichung eines zylindrischen Körpers . . . . .	53
4.4.1 Bestimmung der Koeffizienten . . . . .	54
4.4.2 Zylinder und abgerundeter Zylinder in einer Scherströmung . . . . .	57
4.5 Reduktion der Bewegungsgleichung eines axialsymmetrischen Körpers . . . . .	61
4.6 Analytische Näherungslösung der Bewegungsgleichungen eines abgerundeten Zylinders	67
4.6.1 Rotationsströmung . . . . .	74
4.6.2 Dehnströmung . . . . .	77
<b>5 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>87</b>
5.1 Zusammenfassung . . . . .	87
5.2 Ausblick . . . . .	88
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>91</b>
<b>Anhang</b>	<b>A-1</b>
A.1 Axialsymmetrische Körper . . . . .	A-1

## Inhaltsverzeichnis

A.2	Ähnlichkeitskoeffizienten . . . . .	A-3
A.2.1	<i>Reynolds-Zahl</i> . . . . .	A-3
A.2.2	<i>Stokes-Zahl</i> . . . . .	A-3
A.3	<i>Newton'sche Flüssigkeit</i> . . . . .	A-3
A.4	Viskose Flüssigkeit . . . . .	A-4
A.5	Laminare Strömung . . . . .	A-4
A.6	Drehtensor . . . . .	A-5
A.7	Kinetische Energie eines Starrkörpers . . . . .	A-5

# Symbolverzeichnis

## Symbole

$A$	Fläche
$B, C$	Trägheitstensoren
$D$	Verzerrungsgeschwindigkeitstensor
$d_0$	Koeffizient (Dehnungsanteil) von $D$
$E$	Einheitstensor 2. Stufe
$f$	Intensität der Kraft $F$
$F$	Kraft
$G$	Widerstandstensor 2. Stufe
${}^{(3)}G$	Widerstandstensor 3. Stufe
$H$	Höhe
$i, j, k$	Einheitsvektoren des raumfesten Koordinatensystems der Strömung
$K$	Kinetische Energie
$K_1$	Impuls
$K_2$	Drehimpuls
$L$	Geschwindigkeitsgradient
$m$	Masse
$m$	Einheitsvektor der Partikelachse
$M$	Moment
$n_1, n_2$	Einheitsvektoren der Hauptachsen von $D$
$P = E - m m$	Projektor
$Q$	Drehtensor
$Q(\alpha \mathbf{a})$	Drehtensor, beschreibt die Drehung mit dem Winkel $\alpha$ um die Achse $\mathbf{a}$
$R$	Radius
$\mathbf{v}$	Translationsgeschwindigkeit
$V$	Volumen
$\alpha, \beta$	Widerstandskoeffizienten (Koeffizienten des Widerstandstensors $G$ )
$\gamma$	Schergeschwindigkeit
$\epsilon_1 = \lambda/\alpha, \epsilon_2 = \mu/\beta$	Koeffizienten
$\zeta, \xi$	Viskositätskoeffizienten
$\eta$	Widerstandskoeffizient
$\vartheta, \varphi, \psi$	<i>Euler</i> -Winkel (Nutations-, Präzessions- bzw. Eigenrotationswinkel)
$\theta$	Nutationswinkel im von <i>Jeffery</i> verwendeten Koordinatensystem
$\kappa = d_0/\phi_0$	Quotient aus Dehnungs- und Rotationsanteil des Geschwindigkeitsgradienten
$\lambda, \mu$	Massenträgheitsmomente (Koeffizienten des Trägheitstensors $C$ )
$\rho$	Dichte

$\varrho_L$	Liniendichte
$\phi$	Wirbelvektor
$\phi_0$	Koeffizient (Rotationsanteil) von $\phi$
$\chi$	Widerstandskoeffizient eines schlanken Stabes
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit
$\omega_N = \omega \cdot m m$	Winkelgeschwindigkeitskomponente um die Achse $m$
$\omega_T = \omega \cdot (E - m m)$	Winkelgeschwindigkeitskomponente in der Ebene senkrecht zur Achse $m$

## Indizes und Exponenten

$x_0$	zur Zeit $t = 0$
$x_f$	umgebendes Fluid
$x_n$	normal
$x_O$	bezogen auf den Massenmittelpunkt $O$ eines Körpers
$x_p$	Partikel
$x_{RE}$	Rotationsellipsoid
$x_S$	schlanker Stab
$x_t$	tangential
$x_Z$	Zylinder
$x_{ZHK}$	abgerundeter Zylinder (Zylinder mit Halbkugeln)
$\mathbf{X}^{-1}$	Inverse des Tensors $\mathbf{X}$
$\mathbf{X}^T$	Transponierte des Tensors $\mathbf{X}$
$\mathbf{X}_x$	Vektorinvariante des Tensors $\mathbf{X}$

## Zeichen

$\cdot$	Skalarprodukt
$\times$	Vektorprodukt
$\nabla$	Nablaoperator
$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$	1. Ableitung nach der Zeit
$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$	2. Ableitung nach der Zeit
$\det \mathbf{X}$	Determinante des Tensors $\mathbf{X}$
$\text{sp } \mathbf{X}$	Spur des Tensors $\mathbf{X}$

# 1 Einleitung

Ein Stab, der in eine strömende Flüssigkeit gebracht wird, bewegt sich mit der Flüssigkeit translatorisch und rotatorisch. Seine Bewegung (die Geschwindigkeit und die Richtung) und seine Lage im Raum stellen sich entsprechend der Strömung ein. In dieser Weise verhält sich eine Kurzglasfaser in einer Polymerschmelze, wenn die Schmelze mit hohem Druck in eine Kavität gespritzt wird, um ein bestimmtes Bauteil zu fertigen (Spritzgussprozess). Die Drehung eines starren axialsymmetrischen Partikels, suspendiert in einer viskosen Flüssigkeit, wird in dieser Arbeit beschrieben. Die Frage, wie sich suspendierte Partikel unter bestimmten Bedingungen im umgebenden Medium ausrichten, ist in vielen Anwendungsbereichen von Bedeutung, z. B. beim Spritzguss faserverstärkter Polymere [7, 8, 53], in der Papierherstellung [36, 48, 49], bei Oberflächenbeschichtungen [30, 34] oder in biologischen Systemen [46, 59].

Aus vielen Industriezweigen sind Kunststoffbauteile nicht mehr wegzudenken. Jedes Unternehmen muss seine Produkte immer wieder an sich ändernde Anforderungen des Marktes anpassen. Um Kosten, etwa in der Herstellung zu minimieren werden Bauteile, wenn möglich, aus Polymeren gefertigt. Hierfür steht mit dem Spritzguss ein Herstellungsverfahren für großindustrielle Anwendungen zur Verfügung. Es handelt sich um ein Hochgeschwindigkeitsverfahren, mit dem Bauteile mit komplexer Geometrie in jeweils einem Schritt hergestellt werden können [60]. Nachbearbeitungen der Formteile sind in der Regel nicht notwendig. Da Polymere im Vergleich zu Werkstoffen anderer Klassen bei niedrigen Temperaturen von ca. 250 bis 300°C verarbeitet werden, ist auch der Energiebedarf vergleichsweise gering. In den mechanischen Eigenschaften wie Festigkeit und Steifigkeit unterscheiden sich Polymere deutlich von anderen Konstruktionswerkstoffen wie z. B. Stahl. Die Zugfestigkeit liegt für Stahl (je nach Typ) im Bereich von 440 – 930 MPa, für Polyamid (PA) dagegen bei deutlich geringeren Werten von etwa 35 – 90 MPa,<sup>1</sup> der Elastizitätsmodul beträgt bei Stahl 108 – 212 GPa und bei Polyamid 0,6 – 3,5 GPa.<sup>2</sup>

Um die mechanischen Eigenschaften zu verbessern, werden Verstärkungsstoffe, wie z. B. Glasfasern, beigemischt. Der Elastizitätsmodul von Polyamid lässt sich durch Beimischung von 30% Glasfasern auf ca. 5 GPa erhöhen [44]. Das ist zwar eine Steigerung um nahezu das Doppelte, gemessen an den Werten für Stahl ist das jedoch immer noch sehr wenig. Stahl oder auch Aluminium werden dennoch - soweit möglich - häufig durch polymere Werkstoffe ersetzt, weil diese durch die Möglichkeit, im Spritzguss Bauteile kostengünstig in großer Stückzahl herzustellen, Vorteile hinsichtlich der Wirtschaftlichkeit aufweisen. Ebenso ist das Verhältnis zwischen Formteilmgewicht und Festigkeit von Polymeren deutlich günstiger als bei metallischen Werkstoffen. Ihre chemische Beständigkeit gegen-

---

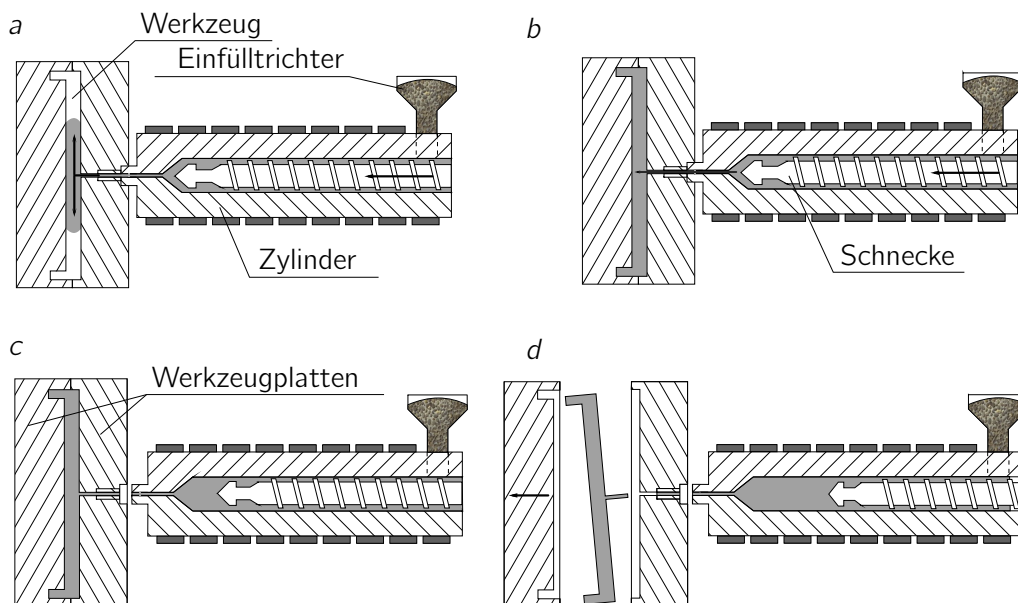
<sup>1</sup>Es gibt verschiedene Typen von Polyamiden (z. B. PA6, PA66, PA12), abhängig vom jeweiligen Syntheseverfahren. Alle Polyamide sind hygroskopisch. Je nach aufgenommener Wassermenge variieren die Kennwerte. Die Zugfestigkeiten liegen für die verschiedenen PA-Typen in den Bereichen: PA6 zwischen 60 und 90 MPa (trocken) bzw. 35 bis 70 MPa (feucht), PA66 zwischen 70 und 90 MPa (trocken) bzw. 55 bis 75 MPa (feucht), PA12 zwischen 35 und 50 MPa. Gegenüber PA6 (max. 11 %) und PA66 (max. 9 %) kann PA12 nur sehr wenig Wasser aufnehmen (bis zu 1,3 %) [18, 44].

<sup>2</sup>PA6 0,6 bis 1,6 GPa (feucht) bzw. 1,5 bis 3,2 GPa (trocken), PA66 1,2 bis 2,1 GPa (feucht) bzw. 2 bis 3,5 GPa (trocken), PA12 1,2 – 1,6 GPa. [18]

über Säuren ist oft höher und sie lassen sich einfärben. Weiterhin können durch eine Faserverstärkung unkompliziert Werkstoffeigenschaften entsprechend dem Anforderungsprofil eingestellt werden, indem unterschiedliche Basispolymere mit verschiedenen Verstärkungsfasern (verschieden hinsichtlich der Faserlänge und dem Werkstoff) kombiniert werden können. So können auch andere als nur mechanische Werkstoffeigenschaften verbessert werden, wie z. B. Wärme- oder Dimensionsstabilität, elektrische Eigenschaften oder Gleit- und Verschleißverhalten [23].

Faserverstärkte Polymere gehören zur Klasse der Komposite. Das sind Werkstoffe, die aus mindestens zwei verschiedenen Komponenten bestehen. Mit der Verstärkung polymerer Werkstoffe durch Kurzglasfasern stehen Werkstoffe zur Verfügung, deren Einsatzfelder und Verarbeitungsmöglichkeiten gegenüber traditionellen Werkstoffen wie Stahl, Aluminium oder Beton deutlich erweitert sind [41].

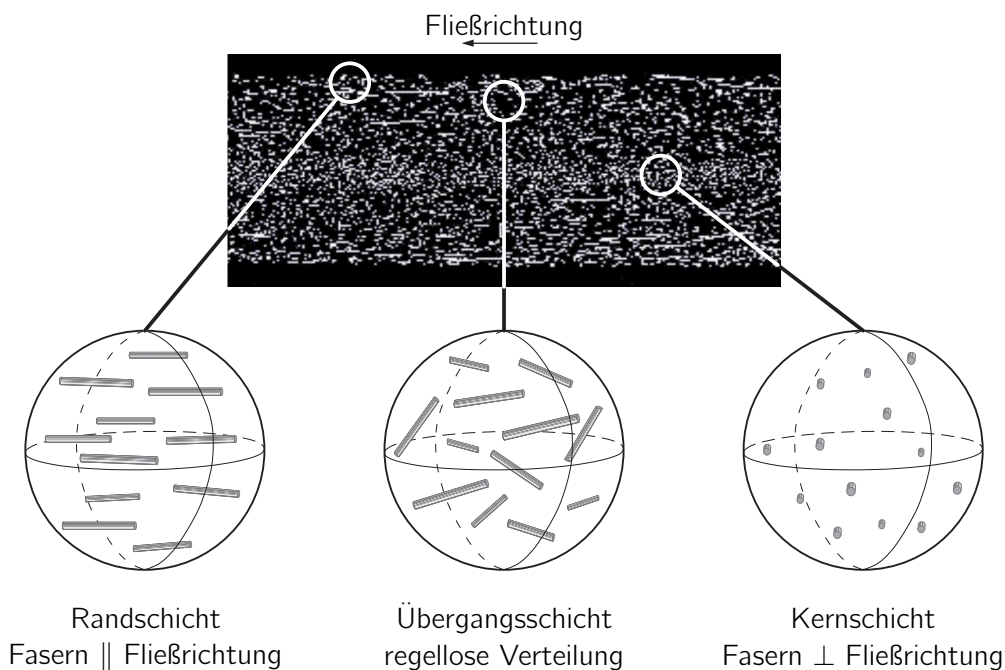
Der Bestimmung der Orientierung von Verstärkungsfasern in Polymeren kommt während des Entwicklungsprozesses spritzgegossener Bauteile eine entscheidende Bedeutung zu. Da der Spritzgussprozess ein Hochgeschwindigkeitsprozess ist, mit dem in einem Schritt ein Bauteil mit komplexer Geometrie hergestellt werden kann, kommt er in der industriellen Serienfertigung zum Einsatz. Die einzelnen Phasen des Spritzgussprozesses sollen hier kurz vorgestellt werden, s. Abb. 1.1. Nach dem Plastifizieren wird in der ersten Phase die Schmelze durch Vorschub der Schnecke in das Werkzeug gespritzt und dort verdichtet (Abb. 1.1a). Bei thermoplastischen Polymeren wird das Werkzeug gekühlt. Um eine Schwindung im Bauteil infolge der Abkühlung zu vermeiden, wird bis zum Erreichen des Siegelpunktes Schmelze nachgedrückt (Abb. 1.1b). Zur Minimierung von Energieverlusten wird die beheizte Spritzeinheit von der gekühlten Schließeinheit getrennt. Das Bauteil wird bis zum Erreichen der Formstabilität gekühlt (Abb. 1.1c) und im letzten Schritt ausgeworfen (Abb. 1.1d). Während der Kühlphase bewegt sich die Schnecke innerhalb der Spritzeinheit zurück, über den Einfülltrichter wird neues Granulat in den Zylinder dosiert, dort geschmolzen und durch die Schneckenrotation homogenisiert. Nach dem Schließen der Werkzeugplatten beginnt ein neuer Zyklus.



**Abbildung 1.1.** Verfahrensablauf beim Spritzgießen. a Formfüllung, b Nachdruck, c Kühlung, d Auswerfen

Faserverstärkte Polymere zeigen richtungsabhängiges Verhalten. Schon im Konstruktionsstadium ist es daher unerlässlich, die Orientierung der Fasern in einer Simulation zu bestimmen, um das Bauteil entsprechend den Anforderungen für seinen Einsatz auszulegen. Aus experimentellen Untersuchungen ist bekannt, dass die Orientierung der Fasern über die Bauteildicke nicht konstant ist [53]. Die Fasern nehmen abhängig von ihrer Position Vorzugsrichtungen ein. Die Mikrostruktur der Faserorientierungen bildet sich im wesentlichen während der Einspritzphase aus [8] und ändert sich nach der Verfestigung nicht mehr. Zunächst liegen die Fasern statistisch orientiert in der Polymerschmelze vor. Während des Einfüllvorgangs wird die Schmelze unter hohem Druck in die Kavität gespritzt. Die suspendierten Fasern werden von der Strömung translatorisch und rotatorisch bewegt. Schnittbilder spritzgegossener Probekörper zeigen eine Schichtstruktur mit unterschiedlichen Faserorientierungen (s. Abb. 1.2). In der Mitte des Probekörpers liegen die Fasern hauptsächlich senkrecht, in den äußeren Schichten parallel zur Strömungsrichtung. In der Übergangsschicht dazwischen sind die Fasern regellos ausgerichtet. In den Randbereichen der Probekörper zur Kavität hin wird eine geringere Faserkonzentration als in den anderen Schichten beobachtet, die Orientierungen sind ebenfalls chaotisch. Die beschriebene Schichtstruktur geht auf die Strömungsverhältnisse während des Einspritzvorgangs zurück [8, 27, 57].

Kurzfaserverstärkungen kommen häufig bei Thermoplasten zum Einsatz, z. B. als glasfaserverstärktes Polyamid (PA-GF) oder Polypropylen (PP-GF) im Automobilbau (für Motorabdeckungen, PA-GF auch für Ölbehälter, Zylinderkopfabdeckungen, Saugrohre und Lager, PP-GF u. a. für Leuchten und Führungsteile) [23]. Verarbeitet werden sie im schmelzflüssigen Zustand. Polymerschmelzen zeigen sowohl viskose als auch elastische Eigenschaften. Da sie zwischen denen eines rein viskosen Fluids und denen eines elastischen Festkörpers liegen, wird das Verhalten einer Schmelze als viskoelastisch bezeichnet [43]. In der vorliegenden Arbeit liegt der Fokus auf der Ausbildung der Faserorientierung während der Einfüllphase des Spritzgussprozesses, weshalb die Eigenschaften im schmelzflüssigen Zustand von besonderem Interesse sind. Das Strömungsverhalten der Polymerschmelze wird ent-



**Abbildung 1.2.** Schnitt durch einen spritzgegossenen Probekörper, Schnittbild aus [53]

sprechend der Klassifikation von *Giesekus* modelliert (s. Kapitel 3.3). Die Schmelze wird als viskose Flüssigkeit angenommen, die Verstärkungsfasern als in der Schmelze suspendierte (verteilte) Partikel.<sup>3</sup>

Während des Füllvorgangs im Spritzgussprozess schießt die Polymerschmelze mit hoher Geschwindigkeit in eine Kavität mit in der Regel komplexer Geometrie. Die Bauteildicke muss gering sein (um die Zeit für die Abkühlung und damit auch die Zykluszeit gering zu halten und um übermäßige Schwindung und Verzug zu vermeiden). *Bay* und *Tucker* [7] gehen von einem Verhältnis  $d/l \ll 1$  aus ( $d$  - Bauteildicke,  $l$  - Länge der Kavität in Fließrichtung). Die Schmelze strömt also durch einen schmalen Spalt. Wenn man die Strömungsverhältnisse in einem spritzgegossenen Bauteil bestimmen möchte, startet man häufig mit einem Bauteil mit einfacher Geometrie (z. B. zwei parallele Platten, zentral angespritzt) und analysiert zunächst einfache Strömungsformen, etwa eine laminare Strömung.<sup>4</sup> Dieses Beispiel wurde in verschiedenen Publikationen, z. B. in [2, 7, 51, 57], als „center gated disk“ beschrieben. In Rotationsrheometern wird dafür die sogenannte Platte-Platte-Anordnung gewählt, um rheologische Messungen an Fasersuspensionen durchzuführen [16].

In Abb. 1.3 ist exemplarisch die Fließfront einer solchen Strömung gezeigt. Der Abstand zwischen den Platten ist klein gegen deren Radius. *Bay* und *Tucker* unterscheiden in [7] zwischen drei Gebieten mit unterschiedlichen Strömungsformen: Angusszone, Lubrikationszone und Fließfront. Durch den Angusskanal gelangt die Schmelze in die Kavität. In der Lubrikationszone verteilt sie sich. Hier wird die Strömung als zweidimensional angenommen, die Geschwindigkeitskomponente in Dickenrichtung wird in der Regel vernachlässigt. Mit der Annahme eines parabolischen Geschwindigkeitsprofils können qualitative Aussagen über die Partikelbewegungen gemacht werden. In der Mittelschicht dieser Zone erfährt die Schmelze eine Dehnströmung mit maximaler Dehnrates in Umfangsrichtung [41]. Die Fasern in diesem Bereich richten sich daher senkrecht zur Fließrichtung aus. In Wandnähe ist die Schmelze dagegen einer Scherströmung ausgesetzt, was dazu führt, dass die Fasern in Fließrichtung orientiert sind.

Die Fließfront wird mit einer Quellströmung beschrieben [7, 15], einer nicht-isothermen Strömung mit sich bewegender freier Oberfläche. Sie verteilt die Fluidelemente von der Kernzone zu den Randzonen der Kavität. Das Strömungsverhalten insgesamt ist komplex. Polymerschmelze und Wand der Kavität haben unterschiedliche Temperaturen. In der Lubrikationszone erstarrt die Schmelze innerhalb weniger Sekunden vom Rand her und fixiert die suspendierten Fasern in ihrer Lage. Im Bereich der freien Oberfläche der Schmelze führt das Fließverhalten zu einer geringeren Faserkonzentration ohne bevorzugte Orientierung.

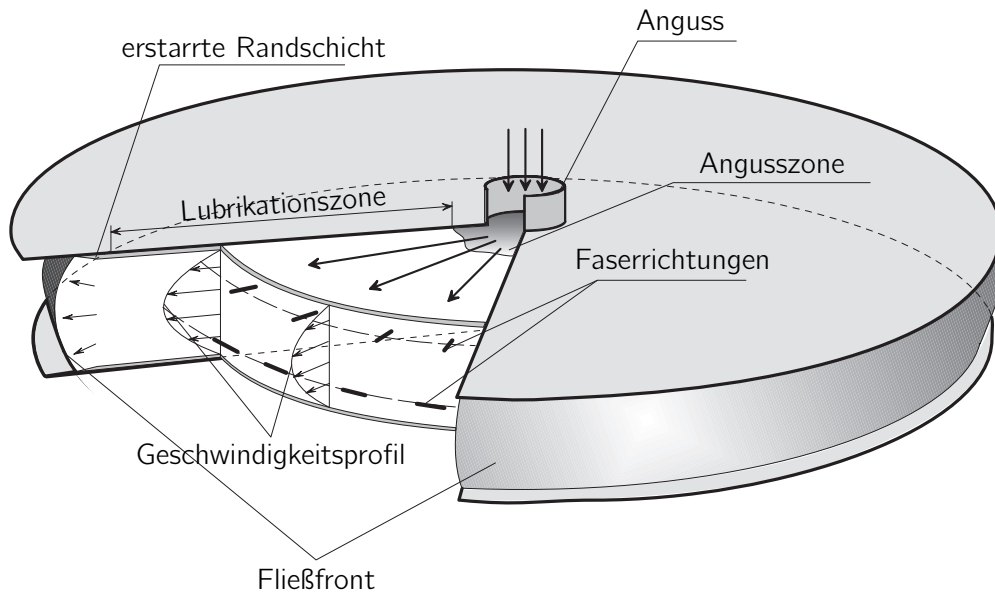
In der vorliegenden Arbeit wird die Drehung axialsymmetrischer Partikel, suspendiert in einer viskosen Flüssigkeit, analysiert. Die Arbeit ist wie folgt gegliedert. Im folgenden Kapitel 2 wird das Modell von *Jeffery* [29] (Rotation eines suspendierten Rotationsellipsoids) mit seiner Lösung vorgestellt und der Stand der Forschung dargestellt. Allgemeine Grundlagen wie die Rotation starrer Körper (mit der Bestimmung der Massenträgheitsmomente verschiedener axialsymmetrischer Körper), die Wechselwirkung zwischen Partikel und umgebendem Medium und die Strömung des umgebenden Mediums werden im Kapitel 3 diskutiert. Im Kapitel 4 wird ausgehend von der Drehimpulsbilanz unter Berücksichtigung der Trägheit die Bewegungsgleichung axialsymmetrischer Partikel hergeleitet. Im ersten Schritt zur Lösung wurde daraus als Spezialfall die Bewegungsgleichung eines schlanken Stabes abgeleitet und für die von *Giesekus* in [22] klassifizierten ebenen Strömungen gelöst. Mit Vergleichen

---

<sup>3</sup>Zur viskosen Flüssigkeit s. Anhang A.4.

<sup>4</sup>Zur laminaren Strömung s. Anhang A.5.





**Abbildung 1.3.** Schematische Darstellung einer laminaren Strömung zwischen zwei parallelen Platten, aus [6]

mit der Lösung von *Jeffery*, bei der der Einfluss des viskosen Fluids auf die Bewegung unberücksichtigt bleibt, konnte gezeigt werden, dass die Einbeziehung der Trägheit von Partikel und Fluid die Bewegung des Partikels beeinflusst. Die Bestimmung der Koeffizienten der allgemeinen Bewegungsgleichungen ist ausführlich dargestellt, ebenso ein Vergleich der Bewegung zylindrischer und abgerundeter zylindrischer Partikel in einem Scherströmungsfeld anhand der numerischen Lösung der Bewegungsgleichung. Unter Verwendung der Perturbationsmethode wird anschließend die Bewegung abgerundeter Zylinder in einer Rotations- und einer Dehnströmung analysiert. Mit dieser Methode wird mit vereinfachenden Annahmen die Bewegungsgleichung analytisch gelöst. Offen bleibt eine allgemeine analytische Lösung der Bewegungsgleichung eines einzelnen Partikels, die für alle ebenen Strömungen und alle Geometrien gilt. Eine solche Lösung konnte wegen der Nichtlinearität der Bewegungsgleichung auch mit der Perturbationsmethode nicht gefunden werden. Am Ende der Arbeit findet sich eine Zusammenfassung und ein Ausblick.



## 2 Stand der Forschung

Die mechanischen Eigenschaften eines spritzgegossenen faserverstärkten Bauteils hängen maßgeblich von der Verteilung und der Orientierung der Fasern ab. Die Beschreibung ihrer Verteilung ist nicht Gegenstand dieser Arbeit. Ihre Orientierung bildet sich im Wesentlichen während des Füllvorganges aus und ist das Resultat ihrer Rotation. Die Drehung von suspendierten, nicht kugelförmigen Körpern unter vorgegebenen Anfangsbedingungen wird seit langer Zeit untersucht. Im Jahr 1922 wurde die Arbeit „The Motion of Ellipsoidal Particles Immersed in a Viscous Fluid“ [29] von *Jeffery* veröffentlicht, auf die in zahlreichen Arbeiten über die Drehung von suspendierten Körpern Bezug genommen wird, z. B. von *Bretherton* (1962) [10], *Leal* (1980) [33], *Feng* und *Joseph* [19], *Brodsky*, *Fichman*, *Shapiro* und *Gutfinger* (1998) [11], *Ding* und *Aidun* (2000) [13], *Qi* und *Luo* (2003) [50], *Subramanian* und *Koch* (2005) [55], *Yu*, *Phan-Thien* und *Tanner* (2007) [58], *Altenbach*, *Naumenko*, *Pylypenko* und *Renner* (2007) [5], *Ku* und *Lin* (2009) [32], *Lundell* und *Carlsson* (2010) [38] und *Mao* und *Alexeev* (2014) [42].

### 2.1 Drehung eines Rotationsellipsoids nach Jeffery

*Jeffery* bestimmte in [29] die Drehung eines Rotationsellipsoids, das in einer inkompressiblen viskosen Flüssigkeit suspendiert ist. Das umgebende Fluid bewegt sich mit einer laminaren Scherströmung. Das bedeutet, dass die *Reynolds-Zahl* klein sein muss, wobei *Jeffery* explizit keinen Wert für die *Reynolds-Zahl* angibt.<sup>1</sup> Die folgenden Annahmen hat *Jeffery* seinen Berechnungen zugrunde gelegt:

1. Die Strömung des Fluids ist laminar und, abgesehen von der Störung in direkter Umgebung des Partikels, stetig und ungestört. *Jeffery* bestimmte die rotatorische Bewegung eines starren Partikels in einer Scherströmung.<sup>2</sup>
2. Bewegt sich das Fluid in einer Entfernung vom Partikel translatorisch relativ zum Partikel, unterliegt das Partikel der Wirkung einer resultierenden Kraft. Eine rotatorische Bewegung des Fluids führt dazu, dass ein resultierendes Moment auf das Partikel wirkt. In der Folge dreht sich das Partikel um seinen Massenschwerpunkt, den *Jeffery* als in Ruhe annimmt.
3. Die Bewegung des Partikels ist langsam.

Die Drehung eines Körpers wird durch den Widerstand, den die umgebende Flüssigkeit der Bewegung entgegensetzt, gebremst. Diesen „Trägheitseffekt“ hat *Jeffery* vernachlässigt, indem er das resultierende Moment, das auf das Partikel wirkt, gleich Null setzt. Mit diesen Voraussetzungen bestimmte er die Orientierung der Rotationsachse<sup>3</sup> mit Hilfe der drei *Euler-Winkel* bezogen auf die Achsen ei-

<sup>1</sup>Die *Reynolds-Zahl* ist ein in der Strömungslehre verwendeter Ähnlichkeitskoeffizient. Sie ist ein Maß für den Einfluss der Trägheit des Fluids auf die Bewegung des Partikels, s. Anhang A.2.1.

<sup>2</sup>*Jeffery* bezieht seine Betrachtungen auf kleine Körper oder „Corpuscel“ und verwendet dafür den Begriff Partikel. Mit dem Hintergrund, die Ausrichtung von Verstärkungsfasern während des Spritzgussprozesses zu beschreiben, wird der Begriff „Partikel“ in dieser Arbeit übernommen.

<sup>3</sup>Als Rotationsachse wird die Symmetriachse eines axialsymmetrischen Körpers, z. B. eines Rotationsellipsoids, bzw. dessen 1. Hauptachse bezeichnet.

nes raumfesten Koordinatensystems und zeigte, dass das Partikel sich in einem geschlossenen Orbit (dem sogenannten *Jeffery-Orbit*) um die Wirbelachse des Strömungsfeldes dreht. In Abb. 2.1 ist ein Beispiel für einen *Jeffery-Orbit* gezeigt. Es gibt unendlich viele solcher Orbits. In welchem Orbit sich das Partikel bewegt, hängt von seiner Anfangsorientierung ab.

Im Folgenden soll die *Jeffery-Lösung* (d. h. die Lage der Symmetrieachse in Abhängigkeit von den *Euler-Winkeln*) vorgestellt werden. Die Drehung der Achse  $\mathbf{m}$  wird dargestellt mit

$$\mathbf{m} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{k}, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\varphi\mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\theta\mathbf{j}) \cdot \mathbf{Q}(\psi\mathbf{k}). \quad (2.2)$$

Die Winkel  $\psi$  ( $0 \leq \psi \leq 2\pi$ ),  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) und  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ) werden als Eigenrotations-, Nutations- und Präzessionswinkel bezeichnet [25]. Sie sind in Abb. 2.2 gezeigt. Die „Null-Lage“ des Nutationswinkels  $\theta$  ist bei *Jeffery* die Wirbelachse  $\mathbf{k}$ , die senkrecht auf der Strömungsebene steht. Ein Drehtensor  $\mathbf{Q}(\alpha\mathbf{a})$  beschreibt die Drehung mit dem Winkel  $\alpha$  um eine Achse  $\mathbf{a}$  [61]:

$$\mathbf{Q}(\alpha\mathbf{a}) = \mathbf{a}\mathbf{a} + \cos\alpha(\mathbf{E} - \mathbf{a}\mathbf{a}) + \sin\alpha\mathbf{a} \times \mathbf{E}. \quad (2.3)$$

Die 1. Drehung nach Gl. (2.1), die Eigendrehung mit dem Winkel  $\psi$  um die Achse  $\mathbf{k}$ , führt zu keiner Lageänderung von  $\mathbf{k}$ . Deshalb wird die Lage von  $\mathbf{m}$  beschrieben mit

$$\mathbf{m} = \mathbf{Q}(\varphi\mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\theta\mathbf{j}) \cdot \mathbf{k}. \quad (2.4)$$

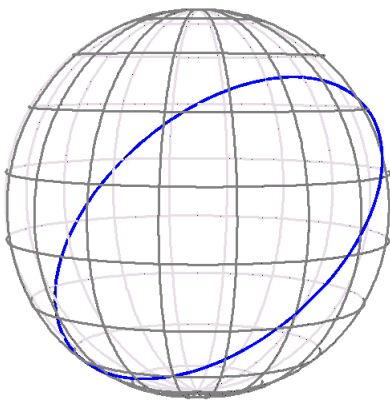
Setzt man in Gl. (2.4) die Gl. (2.3) entsprechenden Drehtensoren ein und führt die Skalarprodukte aus, erhält man für den Vektor  $\mathbf{m}$  die folgende Darstellung:

$$\mathbf{m} = \cos\varphi \sin\theta \mathbf{i} + \sin\varphi \sin\theta \mathbf{j} + \cos\theta \mathbf{k}. \quad (2.5)$$

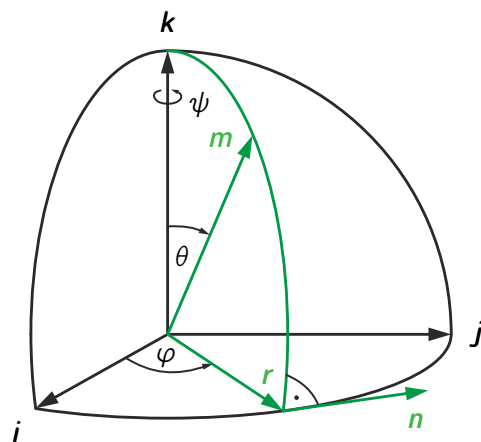
Die Vektoren  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{n}$  in Abb. 2.2 sind

$$\mathbf{r} = \mathbf{Q}(\varphi\mathbf{k}) \cdot \mathbf{i} = \cos\varphi \mathbf{i} + \sin\varphi \mathbf{j}, \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = 1, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{Q}(\varphi\mathbf{k}) \cdot \mathbf{j} = -\sin\varphi \mathbf{i} + \cos\varphi \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1. \quad (2.7)$$



**Abbildung 2.1.** Bahnkurve in einem geschlossenen *Jeffery-Orbit*



**Abbildung 2.2.** Lage der Partikelachse  $\mathbf{m}$  im Koordinatensystem  $ijk$

Der Vektor  $\mathbf{n}$  steht senkrecht auf der Ebene, die von den Vektoren  $\mathbf{k}$  und  $\mathbf{r}$  aufgespannt wird. Aus dem Drehtensor  $\mathbf{Q}$  in Gl. (2.1) kann die zugehörige Drehgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  abgeleitet werden. Sie folgt aus dem *Darboux*-Problem [61]

$$\boldsymbol{\omega}(t) = -\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T)_x \quad (2.8)$$

und ist

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{k} + \dot{\theta} \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{j} + \dot{\psi} \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\theta \mathbf{j}) \cdot \mathbf{k}. \quad (2.9)$$

Das tief gestellte  $x$  in Gl. (2.8) kennzeichnet die Vektorinvariante des Tensors  $\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T$ . Mit den Gln. (2.4) und (2.7) wird (2.9) zu

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{k} + \dot{\theta} \mathbf{n} + \dot{\psi} \mathbf{m}. \quad (2.10)$$

In Abb. 2.3 ist die aktuelle (gedrehte) Lage der Partikelachse  $\mathbf{m}$  im in dieser Arbeit verwendeten und im Kapitel 4 eingeführten *ijk*-Koordinatensystem der Strömung dargestellt. In Klammern steht jeweils die Bezeichnung, die *Jeffery* verwendet hat. Bei ihm ist das gestrichene Koordinatensystem raumfest und das ungestrichene das mitbewegte Partikelsystem. Er gibt die Rotationsgeschwindigkeit des Partikels in ihren Komponenten an ( $\omega_1 = \omega_x$ ,  $\omega_2 = \omega_y$ ,  $\omega_3 = \omega_z$ ). Die Einheitsrichtungsvektoren  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  und  $\mathbf{z}$  sind

$$\mathbf{x} = \mathbf{m}, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{i} \quad (2.12)$$

$$= (\cos \varphi \cos \theta \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi) \mathbf{i} + (\sin \varphi \cos \theta \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi) \mathbf{j} - \sin \theta \cos \psi \mathbf{k}, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{j} \quad (2.14)$$

$$= -(\cos \varphi \cos \theta \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi) \mathbf{i} - (\sin \varphi \cos \theta \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi) \mathbf{j} + \sin \theta \sin \psi \mathbf{k}. \quad (2.15)$$

Die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit bei *Jeffery* ergeben sich aus

$$\omega_x = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x} = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}, \quad (2.16)$$

$$\omega_y = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{y} = -\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi, \quad (2.17)$$

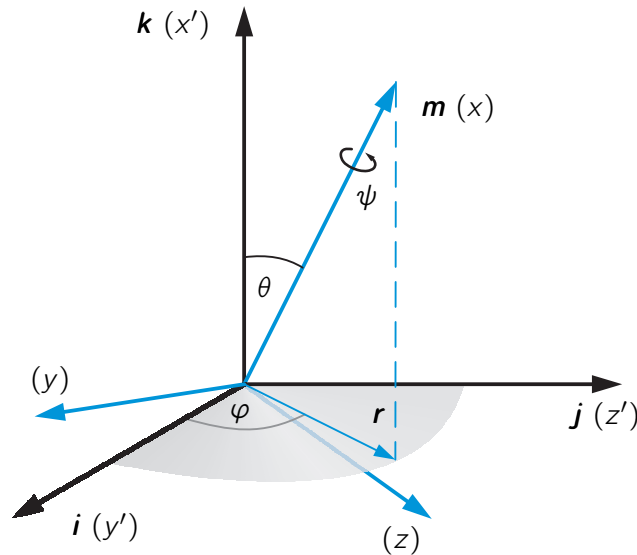
$$\omega_z = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{z} = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi. \quad (2.18)$$

Die Lage der Achse  $\mathbf{m}$  bestimmt *Jeffery* aus dem Differentialgleichungssystem

$$\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} = \frac{1}{2} \gamma \cos \theta, \quad (2.19)$$

$$(a^2 + b^2) \dot{\theta} = \gamma (a^2 - b^2) \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi, \quad (2.20)$$

$$(a^2 + b^2) \dot{\varphi} = \gamma (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi) \quad (2.21)$$



**Abbildung 2.3.** Lage der Partikelachse  $m$  im  $ijk$ -Koordinatensystem der Strömung, in Klammern die von *Jeffery* [29] verwendeten Koordinaten

(Gln. (45)-(47) in [29]) und gibt sie mit Hilfe der Winkel  $\varphi$  und  $\theta$  wie folgt an:

$$\tan \varphi = \frac{a}{b} \tan \frac{\gamma a b t}{a^2 + b^2}, \quad (2.22)$$

$$\tan^2 \theta = \frac{a^2 b^2}{k^2 (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)}, \quad (2.23)$$

$a$  und  $b$  ( $a > b$ ) sind die Halbachsen des von *Jeffery* in seiner Berechnung verwendeten Rotationsellipsoids,  $\gamma$  die Schergeschwindigkeit und  $k$  eine Integrationskonstante. Für den dritten *Euler*-Winkel  $\psi$  gibt *Jeffery* keine Lösung an.

## 2.2 Bewegung starrer suspendierter Partikel - ein Überblick

*Bretherton* untersuchte in [10] die Bewegung allgemein axialsymmetrischer Partikel in einer Scherströmung unter den Annahmen, dass keine äußeren Kräfte und Momente wirken und Trägheitseffekte vernachlässigt werden. Er fand heraus, dass sich die Enden der Symmetrieachsen in geschlossenen Orbits bewegen und erweiterte damit die Arbeit von *Jeffery*. Bei bestimmten Partikelgeometrien (sehr lang und dünn)<sup>4</sup> ist die Bewegung allerdings nicht mehr periodisch, und die Symmetrieachse richtet sich in einer von zwei entgegengesetzt gerichteten Orientierungen aus. Als mögliche Ursache für dieses Driften in einen bestimmten Orbit benennt *Bretherton* auftretende Trägheitseffekte. *Leal* wies in [33] darauf hin, dass Trägheitseffekte des Fluids die Bewegung von (trägheitslosen) Partikeln beeinflussen, insbesondere das Driften des Partikels in die Strömungsebene.

In den letzten Jahren wurden in zahlreichen Arbeiten verschiedene Erweiterungen zu den Arbeiten von *Jeffery*, *Bretherton* und *Leal* vorgenommen, z. B. auf andere Strömungen, die Berücksichtigung der Trägheit oder in Bezug auf die Partikelzahl. *Feng* und *Joseph* [19] untersuchen u. a. die Drehung

<sup>4</sup>*Bretherton* schreibt „extremely long and thin“, ohne genaue Maßangaben zu machen.

eines Ellipsoids in einer Scherströmung unter Berücksichtigung von Partikel- und Fluidträgheit.<sup>5</sup> Die Berücksichtigung von Trägheit des Partikels und des Fluids (bei kleiner *Reynolds*-Zahl  $Re = 0,25$ ) führt in ihrer Arbeit zu einer leichten Abweichung von der *Jeffery*-Lösung. *Feng* und *Joseph* betrachten die Drehung einer ebenen Ellipse in der Strömungsebene mit der Strömungsgeschwindigkeit als Anfangsbedingung. Sowohl in der Orientierung ( $\chi$ ) der großen Symmetrieachse als auch in der Rotationsgeschwindigkeit ( $\dot{\chi}$ ) des Partikels ergeben sich kleine Abweichungen ( $\Delta\chi/\pi$  liegt in der Größenordnung  $10^{-2}$ ) von der *Jeffery*-Lösung, die *Feng* und *Joseph* auf die Berücksichtigung der Trägheiten zurückführen.

*Broday* et al. betrachten in [11] die Bewegung (Translation und Rotation kombiniert) von gestreckten Rotationsellipsoiden in senkrechten Scherströmungen.<sup>6</sup> Die Partikel haben eine Trägheit und nicht notwendigerweise dieselbe Dichte wie das umgebende Fluid. Betrachtet wurden sowohl die freie Drehung von Partikeln, als auch von Partikeln, deren Orientierung mit Hilfe äußerer Momente fixiert war. Frei drehbare Rotationsellipsoide zeigten bei Berücksichtigung ihrer Trägheit ein Driften und stellten sich mit ihrer langen Achse schließlich in der Strömungsrichtung ein, auch gegen die Richtung der Gravitation. In der gewählten Anordnung (senkrechte Strömung) hatte die Anfangsorientierung keinen signifikanten Einfluss auf die Bewegung.

*Ding* und *Aidun* bestimmen in [13] den Einfluss der Trägheit auf die Bewegung fester suspendierter Partikel (kreisrunder Zylinder, elliptischer Zylinder und Ellipsoid) in einer Scherströmung. Sie modellieren dafür das umgebende Fluid als eine Anzahl von Flüssigkeitspartikeln, die sich in einem kubischen Gitter mit diskreten Geschwindigkeiten bewegen. Ihre Geschwindigkeit wird mit einer *Boltzmann*-Gleichung beschrieben. Bei sehr kleiner *Reynolds*-Zahl ( $Re = 0,08$ ) fanden sie eine gute Übereinstimmung mit der *Jeffery*-Lösung. Eine Erhöhung bewirkt, dass die Bewegung des in der Flüssigkeit suspendierten Partikels von der Trägheit beeinflusst und schließlich dominiert wird. Sie geht von einer periodischen Rotation über in einen zeitunabhängigen stationären Zustand.

*Qi* und *Luo* bestimmen in [50] per Simulation das Rotationsverhalten von kugelförmigen Partikeln („spheroidal particles“) mit derselben Dichte wie das umgebende Medium in einer dreidimensionalen *Couette*-Strömung in Abhängigkeit von *Reynolds*-Zahl und der Form der Partikel (gestreckte oder abgeflachte Rotationsellipsoide). Gestreckte Rotationsellipsoide drehen sich bei *Reynolds*-Zahlen bis  $Re_1 \approx 205$  um ihre kleine Achse, die parallel zur Wirbelachse<sup>7</sup> der *Couette*-Strömung<sup>8</sup> ausgerichtet ist, die Hauptachse bleibt dabei senkrecht auf der Wirbelachse. Im Bereich  $Re_1 < Re < Re_2$ ,  $Re_2 \approx 345$  fanden sie eine Präzessionsbewegung um den Wirbelvektor der Strömung, kombiniert mit einer Nutation, also einer Pendelbewegung um die Strömungsebene. Mit steigender *Reynolds*-Zahl über  $Re_2 \approx 345$  hinaus verringert sich der Nutationswinkel, und die Hauptachse des Rotationsellipsoids richtet sich schließlich parallel zum Wirbelvektor aus. Flache Rotationsellipsoide drehen sich im *Reynolds*-Zahl-Bereich  $0 < Re < Re_1$ ,  $Re_1 \approx 220$  um ihre kleine Achse (die Symmetrieachse), welche parallel zur Wirbelachse ausgerichtet ist. Bei größeren *Reynolds*-Zahlen ( $Re > 220$ ) drehen sie sich weiterhin um die Symmetrieachse, die sich aber unter einem Neigungswinkel zur Wirbelachse einstellt.

<sup>5</sup>Weiterhin untersuchten sie die Sedimentation von Ellipsen (2D-Analyse) in einer ruhenden Flüssigkeit und die Bewegung einer Ellipse in einer *Poiseuille*-Strömung. *Poiseuille*-Strömung s. Anhang A.5.

<sup>6</sup>Mit senkrechter Scherströmung meinen die Autoren die räumliche Anordnung - die Stromlinien liegen parallel zur Gravitationsrichtung. Des Weiteren betrachteten sie die Bewegung von Partikeln in *Poiseuille*-Strömungen.

<sup>7</sup>Die Wirbelachse ist die Richtung des Wirbelvektors  $\phi$  des Strömungsfeldes, s. Kap. 3.3. In Abb. 2.3 ist das der Vektor  $\mathbf{k}$ .

<sup>8</sup>*Couette*-Strömung s. Anhang A.5.

*Subramanian* und *Koch* bestimmen in [55] mit einer theoretischen Untersuchung die Rotation einer schlanken axialsymmetrischen Faser in einfacher Scherströmung<sup>9</sup> bei kleiner *Reynolds*-Zahl. Die Faser wurde als Kombination von Kräften mit derselben Wirkungslinie modelliert. Die Bewegung der Faser wurde aus strömungsmechanischer Sicht betrachtet. Mit einer von Null verschiedenen *Reynolds*-Zahl wurde die Trägheit des umgebenden Fluids in die Berechnung einbezogen. Die Trägheit der Faser wurde nicht berücksichtigt. Im ersten Schritt ihrer Analyse bei *Reynolds*-Zahl  $Re = 0$  rotierte die Faser in einem (aus einem Satz von unendlich vielen) *Jeffery*-Orbit um die Wirbelachse des Strömungsfeldes. In den meisten der Orbits näherte sich die Faser der Strömungsrichtung an und blieb in dieser Ausrichtung für lange Zeit.<sup>10</sup> Die Berücksichtigung der Trägheit des Fluids änderte das Verhalten der Fasern auf zwei Arten:

1. Fluidträgheit verursacht ein Driften durch verschiedene Orbits.
2. Die Drehgeschwindigkeit der Faser nimmt ab. Oberhalb einer kritischen *Reynolds*-Zahl  $Re_{kr}$  hört die Drehung ganz auf, und die Faser verbleibt nahe der Wirbelebene der Strömung und bewegt sich dann langsam in eine feste Orientierung nahe der Strömungsrichtung.

In einer numerischen Simulation untersuchen *Yu, Phan-Thien* und *Tanner* in [58] die Drehung eines Rotationsellipsoids in einer ebenen *Couette*-Strömung. Trägheitseffekte werden berücksichtigt, indem in das *Jeffery*-Modell ein „effektiver“ Geschwindigkeitsgradiententensor (des Fluids) implementiert wird. In einem Bereich von  $0 \leq Re \leq 256$  wurde das Verhalten eines gestreckten Rotationsellipsoids untersucht und mit der Drehung nach *Jeffery* verglichen. Anhand von Orbit-Konstanten, die über das Aspektverhältnis der Halbachsen des Rotationsellipsoids und die Lage der großen Halbachse relativ zum Strömungsfeld definiert sind, wird die Drehung in verschiedene Bereiche unterteilt. Bei  $Re = 0$  rotiert das Partikel in einem *Jeffery*-Orbit. Bei höheren *Reynolds*-Zahlen dreht sich zunächst das Rotationsellipsoid mit seiner Symmetrieachse in die Strömungsebene (bis zu einer kritischen *Reynolds*-Zahl  $Re_{kr} \approx 160$ ). Oberhalb von  $Re = 160$  dreht sich die Symmetrieachse parallel zur Wirbelachse des Strömungsfeldes, steht dann also senkrecht auf der Strömungsebene.

Der Einfluss der Partikelträgheit auf seine Drehbewegung wurde in [5] für einen schlanken Stab in verschiedenen ebenen Strömungsfeldern untersucht. Für einige Strömungen konnten analytische Lösungen der Bewegungsgleichungen gefunden werden. Diese, wie auch numerische Lösungen anderer Strömungen, zeigen, dass das Partikel unter dem Einfluss seiner Trägheit nicht länger in einem *Jeffery*-Orbit rotiert, sondern in die Strömungsebene driftet. Die Analysen in [5] und Erweiterungen dazu sind im Kapitel 4.3.6 ausführlich dargestellt.

*Lundell* und *Carlsson* analysierten in [38] den Einfluss der Trägheit auf die Bewegung von schweren Ellipsoiden in einer Scherströmung.<sup>11</sup> Sie integrierten dafür numerisch die Bewegungsgleichung für verschiedene *Stokes*-Zahlen,<sup>12</sup> die sie mit  $St = \rho_e \dot{\gamma} l^2 / \eta$  ( $\rho_e$  - Dichte des Ellipsoids,  $\dot{\gamma}$  - Scherrate,  $l$  - Länge der großen Achse des Ellipsoids,  $\eta$  - dynamische Viskosität des Fluids) definieren. Bleiben  $\rho_e$ ,  $\dot{\gamma}$  und  $\eta$  konstant, dann ändert sich die *Stokes*-Zahl nur über die Länge des Partikels und beschreibt den Einfluss der Partikelträgheit auf seine Bewegung im Fluid. Bei kleiner *Stokes*-Zahl dreht sich

---

<sup>9</sup>In einer einfachen Scherströmung (simple shear) ist nur eine Komponente des Geschwindigkeitsgradiententensors  $\mathbf{L}$  ungleich 0: 
$$[\mathbf{L}] = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad [22].$$

<sup>10</sup>*Subramanian* und *Koch* schreiben „for a large fraction of the time period“, ohne nähere Angaben über die Dauer zu machen oder zu erklären, was danach passierte.

<sup>11</sup>*Lundell* und *Carlsson* verwenden den Begriff „heavy ellipsoids“, wenn die Trägheit berücksichtigt ist. Andernfalls sprechen sie von „light ellipsoids“.

<sup>12</sup>Die *Stokes*-Zahl ist ein Maß für den Einfluss der Massenträgheit des Partikels auf seine Bewegung, s. Anhang A.2.



das Ellipsoid entsprechend der *Jeffery*-Lösung. Bei größeren *Stokes*-Zahlen bewegt sich das Partikel auf einer annähernd geschlossenen Kreisbahn entsprechend einem *Jeffery*-Orbit ( $St = 100$ ), bzw. richtet sich in einer spiralförmigen Bewegung parallel zur Wirbelachse aus ( $St = 316$ ). Bei großen *Stokes*-Zahlen ab  $St = 10^3$  geht die Bewegung von einer Pendelbewegung um die Partikelachse („kayaking“) über in eine Drehung um eine Achse, die schräg zur Wirbelachse steht, und unterscheidet sich fundamental von einer Drehung in einem *Jeffery*-Orbit.

In [4] wurde der Einfluss der Trägheit auf die Drehung eines schlanken Partikels in einer Scherströmung und die Stabilität der Lösung analysiert. Die Wirkung des umgebenden Mediums auf die Drehung des Partikels wird mit einem hydrodynamischen Moment modelliert. Mit einer speziellen Anfangsbedingung kann die Bewegungsgleichung für die Drehung des Stabes (bezogen auf eine feste Achse) zu einer Differentialgleichung 1. Ordnung reduziert werden. Mit einer Phasenanalyse wird gezeigt, wie die Drehung von der Anfangsbedingung und der Trägheit abhängt. Bis zu einem bestimmten Wert des verwendeten Trägheitsparameters<sup>13</sup> richtet sich das Partikel für alle Anfangsbedingungen parallel zu den Stromlinien aus. Wird der Trägheitsparameter größer, können verschiedene Fälle der Ausrichtung beobachtet werden. Dazu gehören die Ausrichtung in metastabiler Gleichgewichtslage<sup>14</sup>, ungleichförmige Drehung um eine feste Achse sowie der Quantisierungseffekt (das Partikel bleibt über eine relativ lange Zeit in der Nähe des ersten Gleichgewichtspunkts und dreht sich dann zum nächsten). All diese Effekte können nur beobachtet werden, wenn die Trägheit des Partikels und des umgebenden Fluids berücksichtigt werden.

*Mao* und *Alexeev* untersuchten in [42] in einer Simulation den Einfluss der Trägheit auf die Bewegung von Rotationsellipsoiden in einer Scherströmung. Bei Vernachlässigung der Trägheit sowohl des Fluids ( $Re = 0$ ), als auch des Partikels („vernachlässigbar kleine“ *Stokes*-Zahl  $St$ )<sup>15</sup> rotiert das Partikel in einem *Jeffery*-Orbit. Bleibt die Trägheit des Fluids unberücksichtigt, ändert sich mit steigender *Stokes*-Zahl die Rotationsgeschwindigkeit des Partikels. Die maximale Drehgeschwindigkeit sinkt und die minimale steigt. Bei der Simulation mit verschiedenen Aspekt-Verhältnissen zeigte sich, dass durch die Trägheit des Fluids schlanke Partikel stärker beeinflusst werden. Werden beide Trägheiten (des Partikels und des umgebenden Fluids) berücksichtigt, führt das dazu, dass der Orbit, in dem sich das Partikel dreht, nicht mehr geschlossen ist und dass gestreckte Rotationsellipsoide in die Strömungsebene („tumbling“) und abgeflachte gegen die Wirbelachse driften („rolling“). *Mao* und *Alexeev* kommen zu dem Schluss, dass bei freier Drehung eines Rotationsellipsoids beide Trägheiten berücksichtigt werden müssen.

In der Vielzahl der Untersuchungen der Bewegung suspendierter Partikel gibt es bisher keine Arbeit, die zu einer generellen Lösung der Bewegungsgleichung für die Rotation eines axialsymmetrischen Partikels kommt. In den einzelnen Arbeiten ist eine bestimmte Partikelgeometrie oder eine bestimmte Strömung vorgegeben. Häufig verwendete Geometrien sind Rotationsellipsoide (z. B. in [11], [19], [38], [50], [58]) und schlanke Stäbe (z. B. in [4], [5], [55]). In wenigen Arbeiten wird die Drehung von Zylindern (z. B. in [13] und [52]) oder allgemein axialsymmetrischen Partikeln betrachtet (z. B. in [10]). Die am häufigsten betrachtete Strömungsform ist die Scherströmung. Dazu machen verschiedene Autoren die Einschränkung, dass ihre Ergebnisse nur für „neutrally buoyant particles“ gültig sind, also für den Fall, dass Partikel und Fluid dieselbe Dichte haben. Derzeit ist keine Arbeit bekannt, in der die Rotation allgemein axialsymmetrischer Teilchen in einer beliebigen Strömung unter Berücksichtigung

<sup>13</sup>Die Größe des Trägheitsparameters ist umgekehrt proportional zur Viskosität des umgebenden Fluids.

<sup>14</sup>Metastabilität wird als lokal stabile Lage verstanden und bedeutet Stabilität gegen kleine, aber Instabilität gegen große Änderungen.

<sup>15</sup>*Mao* und *Alexeev* schreiben „neglibily small  $St$ “, geben aber keinen konkreten Wert für  $St$  an.

sichtigung von Partikel- und Fluidträgheit abschließend behandelt ist. In der vorliegenden Arbeit wird der Versuch unternommen, eine allgemeine Beschreibung der Drehung eines einzelnen Partikels zu geben. Ausgehend von der Drehimpulsbilanz wird unter Berücksichtigung der Trägheiten die Bewegungsgleichung eines allgemein axialsymmetrischen Partikels<sup>16</sup> in einer ebenen Strömung aufgestellt. Eine analytische Lösung wurde für bestimmte Geometrien (schlanker Stab und Zylinder) in einzelnen Strömungen gefunden.

---

<sup>16</sup>Zu axialsymmetrischen Partikeln s. Anhang A.1.

# 3 Rotation eines suspendierten Partikels

In dieser Arbeit werden starre axialsymmetrische Partikel betrachtet, die in einer viskosen Flüssigkeit suspendiert sind. Wie schon in der Einleitung dargelegt, soll sie eine theoretische Grundlage für Programme sein, mit denen technische Prozesse, wie der Spritzguss faserverstärkter Polymere, simuliert werden können. Wir beschränken uns auf ein einzelnes starres Partikel, das sich als Folge der Strömung des umgebenden Mediums bewegt. Im praktischen Anwendungsfall (Spritzguss) sind Verstärkungsfasern häufig aus Glas, die sich u. a. durch ihre hohe Steifigkeit auszeichnen [12].

Bay und Tucker stellen in ihrer Arbeit [8] zur Faserorientierung in spritzgegossenen Bauteilen experimentelle Ergebnisse über die Faserorientierung, die sich in spritzgegossenen Probekörpern einstellt, vor. Sie verwendeten hierfür ein mit 43 Gew.-% Kurzglasfasern verstärktes Polyamid 66.<sup>1</sup> Kurzglasfasern werden aus vielen miteinander versponnenen Endlosfasern geschnitten. Die Faserlänge beträgt standardmäßig etwa 100 bis 300  $\mu\text{m}$  und ihr Durchmesser 3 bis 25  $\mu\text{m}$  [43]. In Arbeiten, in denen die Faserausrichtung numerisch berechnet wird, nimmt man die Fasern i. a. als starre axialsymmetrische<sup>2</sup> Partikel an (z. B. in [5, 13, 31, 32]).

Wie auch in der Arbeit von Jeffery wird die Geschwindigkeit, mit der sich das Partikel relativ zum umgebenden Medium dreht, als klein angenommen. In glasfaserverstärkten Polymeren ist eine gute Haftung der Schmelze auf den Fasern die Voraussetzung dafür, dass die mechanischen Eigenschaften des Verbundes durch die Faserverstärkung verbessert werden können. In der Praxis wird das durch den Zusatz eines Haftvermittlers erreicht [35, 54]. Haftung der Schmelze auf der Partikeloberfläche impliziert, dass der Geschwindigkeitsunterschied zwischen Partikel und Fluid gering ist.

Die Annahmen, unter denen die Rotation eines suspendierten Partikels in dieser Arbeit untersucht wird, sind zusammengefasst:

1. Das Partikel ist starr.
2. Das umgebende Fluid ist hochviskos.
3. Die Rotationsgeschwindigkeit des Partikels relativ zum umgebenden Fluid ist klein.

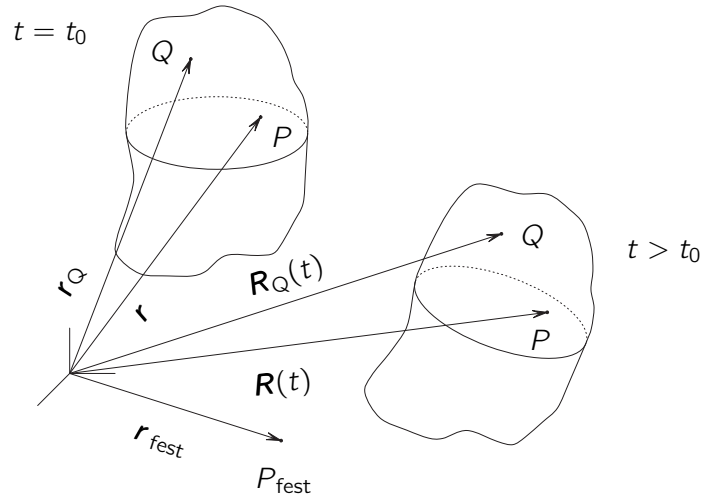
## 3.1 Starrkörperrotation

Im folgenden betrachten wir einen beliebigen Starrkörper. Die Lage jedes einzelnen seiner Punkte wird mit seinem Ortsvektor beschrieben, in Relation zu einem Bezugssystem. In Abb. 3.1 sind  $\mathbf{r}_Q$  und  $\mathbf{r}$  die Ortsvektoren des Referenzpunktes  $Q$  bzw. eines beliebigen Punktes  $P$  in der Ausgangslage (Zeit  $t_0$ ) und  $\mathbf{R}_Q(t)$  und  $\mathbf{R}(t)$  ihre Ortsvektoren in der aktuellen Lage (Zeit  $t > t_0$ ). Der Ortsvektor des raumfesten Punktes  $P_{\text{fest}}$  ist  $\mathbf{r}_{\text{fest}}$ .

---

<sup>1</sup>Polyamide können auf zwei verschiedenen Synthesarten hergestellt werden - durch Polykondensation von Diaminen und Dicarbonsäuren (z. B. PA 6 6 aus Hexamethyldiamin und Adipinsäure, PA 6 10 aus Hexamethyldiamin und Sebacinsäure) oder durch Polymerisation von Aminocarbonsäuren (z. B. PA 6 aus Caprolactam, PA 11 aus Aminoundecansäure, PA 12 aus Laurinlactam)

<sup>2</sup>Die Begriffe *axialsymmetrisch* und *rotationssymmetrisch* werden in dieser Arbeit synonym verwendet.



**Abbildung 3.1.** Referenz- und aktuelle Lage der Punkte eines Starrkörpers

Die beliebige Bewegung des Starrkörpers kann mit der Gleichung

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_Q(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \quad (3.1)$$

beschrieben werden [25], in der  $\mathbf{Q}(t)$  der Drehtensor ist.<sup>3</sup> Durch Differenziation der Gl. (3.1) nach der Zeit erhält man mit der *Poisson*-Gleichung  $\dot{\mathbf{Q}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Q}$  ( $\boldsymbol{\omega}$  ist die Winkelgeschwindigkeit) für jeden Punkt des Starrkörpers die Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_Q(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times [\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}_Q(t)] \quad (3.2)$$

$$= \mathbf{v}_Q(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{Q}(t) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \quad (3.3)$$

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{R}}(t)$$

$$\mathbf{v}_Q(t) = \dot{\mathbf{R}}_Q(t)$$

$$(\dot{\quad}) = \frac{d}{dt}$$

Diese Gleichung wird auch als *Euler*-Gleichung der Geschwindigkeitsverteilung in einem starren Körper bezeichnet [26]. Die Bewegung setzt sich aus translatorischem  $\mathbf{v}_Q(t)$  und rotatorischem Anteil  $\boldsymbol{\omega}(t) \times [\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}_Q(t)]$  zusammen.

Um die Bewegung des Starrkörpers insgesamt zu bestimmen zu können, werden nun die Bilanzgleichungen für Impulsvektor  $\mathbf{K}_1$  und Drehimpulsvektor  $\mathbf{K}_2$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{K}_1 = \mathbf{F}, \quad \frac{d}{dt} \mathbf{K}_2 = \mathbf{M}. \quad (3.4)$$

herangezogen (Impuls- und Drehimpulsbilanz s. [25]).  $\mathbf{K}_1$  und  $\mathbf{K}_2$  folgen aus der Gleichung der kinetischen Energie  $K$  eines Körpers

$$K = \frac{1}{2} \int_m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dm. \quad (3.5)$$

<sup>3</sup>Zum Drehtensor s. Anhang A.6.

Gleichung (3.3) in (3.5) eingesetzt führt nach Integration über die Masse  $m$  auf

$$K = m \left( \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega} \right). \quad (3.6)$$

Die Rechnung dazu findet sich im Anhang A.7. In Gl. (3.6) sind  $\mathbf{B}$  and  $\mathbf{C}$  Trägheitstensoren. Der 1. und 3. Term in Gl. (3.6) beschreiben die Translationsenergie infolge der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bzw. die Rotationsenergie als Folge der Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$ . Der mittlere Term resultiert aus Translation und Rotation des starren Körpers [39]. Impuls  $\mathbf{K}_1$  und Drehimpuls  $\mathbf{K}_2$  folgen aus den partiellen Ableitungen

$$\mathbf{K}_1 = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{v}} \quad (3.7)$$

und

$$\mathbf{K}_2 = [\mathbf{R}(t) - \mathbf{r}_{\text{fest}}] \times \frac{\partial K}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{\omega}} \quad (3.8)$$

Aus den Gln. (3.6) bis (3.8) folgen

$$\mathbf{K}_1 = m(\mathbf{v} + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}) \quad (3.9)$$

und

$$\mathbf{K}_2 = (\mathbf{R}_Q - \mathbf{r}_P) \times \mathbf{K}_1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (3.10)$$

Für den Trägheitstensor  $\mathbf{B}$  gilt (s. Anhang A.7)

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{Q}^T(t) \quad (3.11)$$

$$\mathbf{B}_0 = m(\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}) \times \mathbf{E} \quad (3.12)$$

mit  $\mathbf{E}$  als Einheitstensor zweiter Stufe. Bewegt sich ein Starrkörper ausschließlich rotatorisch, ist seine Translationsgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_Q = \mathbf{0}$ . Impuls und Drehimpuls sind dann

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{0} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (3.14)$$

Der Trägheitstensor  $\mathbf{C}$  ist in derselben Weise wie auch der Tensor  $\mathbf{B}$  (s. Gl. (3.11)) zeitabhängig (s. Anhang A.7)

$$\mathbf{C}(t) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{Q}^T(t) \quad (3.15)$$

mit  $\mathbf{C}_0$  als Referenz-Trägheitstensor, d. h. er beschreibt die Trägheit des Körpers zur Anfangszeit  $t_0$ . Er kann für jeden Starrkörper nach dem folgenden Schema berechnet werden [25]:

$$\mathbf{K}_2 = \int_V \varrho [\mathbf{R}(t) - \mathbf{r}_P] \times \mathbf{v} dV. \quad (3.16)$$

### 3 Rotation eines suspendierten Partikels

Hier ist  $\rho$  die Massendichte des Körpers. Für die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  wird die Gl. (3.3) eingesetzt. Umformung führt unter Verwendung der Gl. (3.15) auf

$$\mathbf{C}(t) = \mathbf{Q}(t) \cdot \left\{ \rho \int_V [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q)^2 \mathbf{E} - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q)] dV \right\} \cdot \mathbf{Q}^T(t). \quad (3.17)$$

Durch Vergleich von (3.15) und (3.17) kann  $\mathbf{C}_0$  aus Gl. (3.15) bestimmt werden:

$$\mathbf{C}_0 = \rho \int_V [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q)^2 \mathbf{E} - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q)] dV. \quad (3.18)$$

Der Referenzpunkt  $Q$  kann, wie sein Ortsvektor  $\mathbf{r}_Q$ , beliebig gewählt werden. Legt man ihn, wie auch den Ursprung eines Koordinatensystems, in den Massenmittelpunkt, wird  $\mathbf{r}_Q = \mathbf{0}$  und  $\mathbf{C}_0$  zu

$$\mathbf{C}_0 = \rho \int_V (r^2 \mathbf{E} - \mathbf{r} \mathbf{r}) dV, \quad r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}, \quad (3.19)$$

diese Darstellung des Trägheitstensors eines starren Körpers s. [25]. Aus Gl. (3.19) können die Trägheitsmomente für jede beliebige Geometrie berechnet werden. Ist das Partikel axialsymmetrisch, was i. a. vorausgesetzt wird, wenn die Bewegung von suspendierten Kurzfasern untersucht wird, ist der Trägheitstensor transversal isotrop. Er hat dann die Form

$$\mathbf{C}_0 = \lambda \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_0 + \mu (\mathbf{E} - \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_0) \quad (3.20)$$

( $\mathbf{m}_0$  bezeichnet die Achse des Partikels zur Referenzzeit  $t_0$ ) bzw. für beliebiges  $t$

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{m} \mathbf{m} + \mu (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}). \quad (3.21)$$

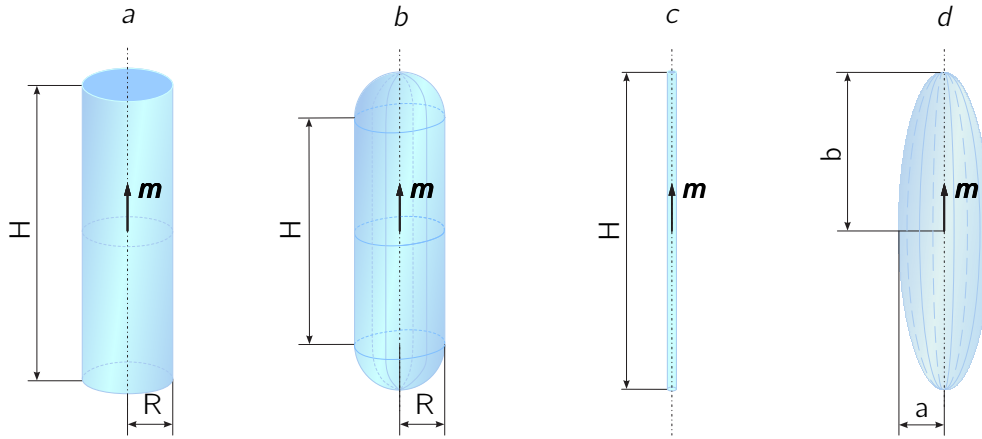
Die Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$  werden als Massenträgheitsmomente bezeichnet. Für ein zylindrisches Partikel mit dem Radius  $R$  und der Höhe  $H$  (s. Abb. 3.2 a) sind  $\lambda_Z$  und  $\mu_Z$

$$\begin{aligned} \lambda_Z &= \frac{m}{2} R^2 = \rho \frac{\pi}{2} R^4 H, \\ \mu_Z &= \frac{m}{12} (3R^2 + H^2) = \rho \frac{\pi}{12} (3R^4 H + R^2 H^3). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Bei einer Rotation wie nach Gl. (3.15) ändert sich nur die Richtung der Symmetrieachse  $\mathbf{m}$ , die Trägheitsmomente bleiben gleich. Allgemein gilt dann

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{m} \mathbf{m} + \mu (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}) \quad (3.23)$$

Da die Kanten eines zylindrischen Partikels die Bewegung in einer Suspension beeinflussen (z. B. kann die Strömung des Fluids an den Kanten abreißen), sollte eine andere „abgerundete“ Partikelform gewählt werden. *Jeffery* analysierte die Bewegung von Rotationsellipsoiden [29]. Kanten können auch einfach dadurch vermieden werden, dass auf Grund- und Deckfläche des Zylinders jeweils eine Halbkugel mit demselben Radius  $R$  gesetzt wird (s. Abb. 3.2b). Die Trägheitsmomente  $\lambda_{ZHk}$  und



**Abbildung 3.2.** Axialsymmetrische Körper: a Zylinder, b abgerundeter Zylinder, c schlanker Stab, d Rotationsellipsoid

$\mu_{ZHk}$  eines so modifizierten Zylinders sind

$$\lambda_{ZHk} = \varrho\pi \left( \frac{8}{15}R^5 + \frac{R^4H}{2} \right), \quad (3.24)$$

$$\mu_{ZHk} = \varrho\pi \left( \frac{8}{15}R^5 - \frac{R^4H}{4} + \frac{R^3H^2}{3} + \frac{R^2H^3}{12} \right).$$

Ist die Höhe  $H$  eines abgerundeten Zylinders gleich 0, dann erhält man eine Kugel mit dem Radius  $R$ . Eine Kugel hat keine Vorzugsrichtung, daher ist ihr Trägheitstensor  $\mathbf{C}$  isotrop, die Trägheitsmomente  $\lambda_{ZHk}$  und  $\mu_{ZHk}$  sind dann gleich. Zu diesem Ergebnis kommt man auch, wenn man  $H = 0$  in die Gln. (3.24) für  $\lambda_{ZHk}$  bzw.  $\mu_{ZHk}$  einsetzt, die Trägheitsmomente sind in dem Fall

$$\lambda_{ZHk0} = \mu_{ZHk0} = \pi\varrho\frac{8}{15}R^5. \quad (3.25)$$

Kurzglasfasern, die ja der praktische Anwendungsfall für die Analyse der Rotation sind, haben ein großes Aspektverhältnis ( $H \geq R$ ). Ihre Trägheit kann daher mit dem Modell eines schlanken Stabes (s. Abb. 3.2c) in guter Näherung beschrieben werden. Man betrachtet einen schlanken Stab als „eindimensionalen Körper“, sein Radius  $R$  ist dann gleich 0, seine Dichte ist die „Liniendichte“  $\varrho_S = m/l$ . Es bleibt dann als von Null verschieden nur noch das Trägheitsmoment  $\mu_S$

$$\lambda_S = 0, \quad \mu_S = \frac{ml^2}{12} = \varrho_S \frac{l^3}{12}. \quad (3.26)$$

Die Massenträgheitsmomente eines Rotationsellipsoids (Abb. 3.2d) sind [24]

$$\lambda_{RE} = \varrho\pi \frac{8}{15}a^4b \quad (3.27)$$

$$\mu_{RE} = \varrho\pi \frac{4}{15}a^2b(a^2 + b^2). \quad (3.28)$$

Die Massenträgheitsmomente der hier genannten axialsymmetrischen Körper finden sich auch im Anhang A.1.

### 3.2 Partikel-Medium-Wechselwirkung

Partikel und umgebendes Medium beeinflussen sich in ihrer Bewegung gegenseitig. Zu dieser Wechselwirkung gehören der Widerstand, den die Flüssigkeit der Drehung des Partikels entgegensetzt. Er ergibt sich aus der Druckdifferenz zwischen Anström- und gegenüberliegender Seite. Ebenso kann das Partikel durch die Strömung eine Beschleunigung erfahren. Weiterhin tritt Reibung auf, wenn das Fluid über die Partikeloberfläche gleitet bzw. Haftung, wenn es das nicht tut. All diese Wechselwirkungen können mit Hilfe einer Wechselwirkungskraft  $\mathbf{F}$  beschrieben werden, die auf das Partikel wirkt. Eine auf das differentielle Element  $dA$  der Partikeloberfläche wirkende Kraft  $\mathbf{F}$  kann in eine Komponente normal und eine tangential zum Flächenelement zerlegt werden:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_n + \mathbf{F}_t. \quad (3.29)$$

Die tangentielle Komponente von  $\mathbf{F}$  stellt eine Reibungskraft dar, die normale beschreibt den Widerstand, den das Partikel durch die Strömung des umgebenden Mediums erfährt, bzw. die Beschleunigung. Im allgemeinen ist die Kraft  $\mathbf{F}$  nicht konstant, weshalb sie differentiell dargestellt wird:

$$d\mathbf{F} = \mathbf{f} dA, \quad (3.30)$$

$$d\mathbf{F}_t = \mathbf{f}_t dA, \quad (3.31)$$

$$d\mathbf{F}_n = \mathbf{f}_n dA. \quad (3.32)$$

Die Größen  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{f}_t$  und  $\mathbf{f}_n$  werden als Intensitäten der Kräfte  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{F}_t$  und  $\mathbf{F}_n$  bezeichnet. Im allgemeinen bewegen sich Flüssigkeit und Partikel mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten ( $\mathbf{v}_f$  bzw.  $\mathbf{v}_p$ ). Die Translationsgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_p - \mathbf{v}_f$  des Punktes  $P$  kann ebenfalls in einen tangentialen und einen normalen Anteil zerlegt werden:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_t + \mathbf{v}_n = (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_f) \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{n}\mathbf{n}) + (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_f) \cdot \mathbf{n}\mathbf{n}. \quad (3.33)$$

Der Betrag der Kraft  $\mathbf{F}$  ist

$$|\mathbf{F}| = F = \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}}, \quad (3.34)$$

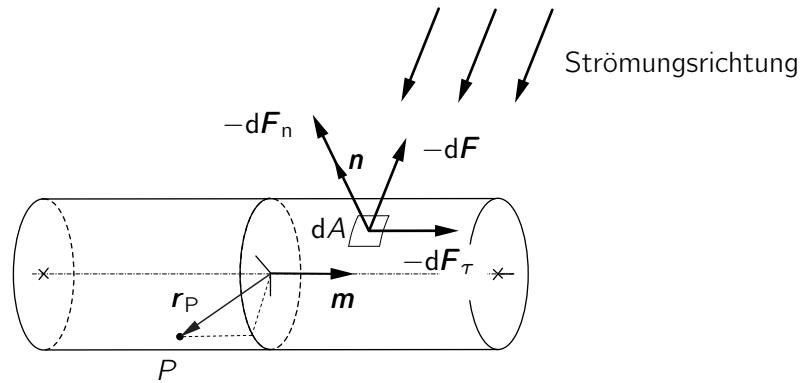
die Intensität  $\mathbf{f}_t$  ihrer tangentielle Komponente  $\mathbf{F}_t$

$$\mathbf{f}_t = -\frac{\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_f}{|\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_f|} \zeta |\mathbf{F}_n|, \quad 0 \leq \frac{\mathbf{F}}{F} \cdot \mathbf{n} < 1 \quad (3.35)$$

$$\mathbf{f}_t = \mathbf{0}, \quad \frac{\mathbf{F}}{F} \cdot \mathbf{n} < 0. \quad (3.36)$$

Der Vektor  $\mathbf{n}$  in Gln. (3.35) und (3.36) ist ein Einheitsvektor und bezeichnet den Außennormalenvektor des Oberflächenelements  $dA$ , s. Abb. 3.3, die skalare Größe  $\zeta$  ist ein Viskositätskoeffizient, der bei Reibung des Fluids auf der Partikeloberfläche auftritt. Gleichungen (3.35) und (3.36) sagen aus, dass Reibung nur dort auftritt, wo das umgebende Medium einen Druck auf das Partikel ausübt. An den Orten der Oberfläche, an denen die Wechselwirkung mit einer Zugkraft beschrieben werden kann, existiert keine Reibungskraft. Mit Hilfe des tangentialen Anteils der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_P$  des




**Abbildung 3.3.** Normal- und Tangentialkraft für ein zylindrisches Partikel

Punktes P der Oberfläche kann die Intensität  $\mathbf{f}_t$  der Reibungskraft  $\mathbf{F}_t$  dargestellt werden mit

$$\mathbf{f}_t = -\zeta \mathbf{v}_t = -\zeta (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_f) \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{n}\mathbf{n}). \quad (3.37)$$

Die Intensität  $\mathbf{f}_W$  der Widerstandskraft  $\mathbf{F}_n$  ist

$$\mathbf{f}_n = \begin{cases} \mathbf{f}_W = -\xi (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_f) \cdot \mathbf{n}\mathbf{n} & , \quad (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_f) \cdot \mathbf{n} > 0 \\ \mathbf{0} & , \quad (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_f) \cdot \mathbf{n} \leq 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

mit  $\xi$  als ein Viskositätskoeffizient, der den Widerstand des umgebenden Mediums auf das Partikel beschreibt. Nur ein Teil der normalen Komponente  $\mathbf{f}_n$  beschreibt einen Widerstand, daher wird auch nur dieser Teil [die 1. Gl. in (3.38)] als Intensität  $\mathbf{f}_W$  der Widerstandskraft bezeichnet. Ist die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_p$  des Partikels gleich der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_f$  des Mediums, dann erfährt das Partikel keinen Widerstand. Bewegt sich das Partikel schneller als das umgebende Fluid ( $\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n} > \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{n}$ ), dann bezeichnet  $\mathbf{F}_W$  tatsächlich eine Widerstandskraft. Bewegt es sich langsamer ( $\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n} < \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{n}$ ), wird es durch die Flüssigkeit beschleunigt.

Bei der Analyse der Bewegung eines suspendierten Partikels soll seine Rotation im Vordergrund stehen. Aus der Annahme, dass das Partikel in seinem Massenmittelpunkt momentenfrei gelagert ist, folgt, dass die Wechselwirkung mit der umgebenden Flüssigkeit mit einem Moment beschrieben werden kann. Dieses hydrodynamische Moment  $\mathbf{M}_O$  der ungestörten Flüssigkeit nimmt *Brenner* zufolge [9] die folgende Form an (der Index  $O$  bezeichnet den Massenmittelpunkt des Partikels, s. z. B. Abb. 3.6)

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{G} \cdot (\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\omega}) + {}^{(3)}\mathbf{G} \cdot \mathbf{D}, \quad (3.39)$$

$$\boldsymbol{\phi} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}, \quad (3.40)$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] \quad (3.41)$$

Die Tensoren  $\mathbf{D}$  und  $\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{E}$  sind der symmetrische und antimetrische Teil des Geschwindigkeitsgradienten  $\mathbf{L} = \nabla \mathbf{v}$  einer ungestörten Strömung mit der Strömungsgeschwindigkeit  $\mathbf{v}$

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} - \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{E} \quad (3.42)$$

und stellen Dehngeschwindigkeits- ( $\mathbf{D}$ ) und Rotationsgeschwindigkeitstensor ( $\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{E}$ ) dar [22]. *Brenner* fordert, dass die Bewegung des Fluids in großem Abstand zum Partikel ungestört ist. In Gl. (3.39)

sind  $\mathbf{G}$  und  ${}^{(3)}\mathbf{G}$  Widerstandstensoren 2. und 3. Stufe

$$\mathbf{G} = \alpha \mathbf{m} \mathbf{m} + \beta (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}), \quad (3.43)$$

$${}^{(3)}\mathbf{G} = \frac{1}{2} \eta (\mathbf{m} \times \mathbf{E} \mathbf{m} + \mathbf{m} \times \mathbf{e}^i \mathbf{m} \mathbf{e}_i), \quad (3.44)$$

$\alpha$ ,  $\beta$  und  $\eta$  sind Widerstandskoeffizienten. Die Vektoren  $\mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  bezeichnen eine beliebige Basis und die Vektoren  $\mathbf{e}^i$  die reziproke Basis, das bedeutet  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^k = \delta_i^k$  mit  $\delta_i^k$  als *Kronecker-Symbol*. Die Tensoren in Gln. (3.43) und (3.44) charakterisieren den Widerstand des Partikels gegenüber der Strömung bei kleiner *Reynolds-Zahl* und hängen von den viskosen Eigenschaften des Fluids und der Partikelgeometrie ab. Setzt man die Gln. (3.43) und (3.44) in (3.39) ein, erhält man für das Moment

$$\mathbf{M}_O = [\alpha \mathbf{m} \mathbf{m} + \beta (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m})] \cdot (\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\omega}) + \eta \mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{m}. \quad (3.45)$$

Beschränken wir uns zunächst auf den Fall eines ruhenden Mediums. Störungen der Strömung, die das Partikel selbst verursacht, werden nicht diskutiert. Daraus folgt, dass in Gl. (3.39)  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$  und  $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$  sind. Das hydrodynamische Moment ist dann eine lineare Funktion der Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{G}_0 \cdot \mathbf{Q}^T(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t). \quad (3.46)$$

Der Tensor  $\mathbf{G}_0$  ist der Referenzwiderstandstensor (Referenzzeit  $t_0$ ),  $\mathbf{Q}$  der Drehtensor. Für ein axial-symmetrisches Partikel ist  $\mathbf{G}_0$  transversal isotrop

$$\mathbf{G}_0 = \alpha \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_0 + \beta (\mathbf{E} - \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_0). \quad (3.47)$$

Die Widerstandskoeffizienten  $\alpha$  und  $\beta$  beschreiben den Einfluss des umgebenden Mediums auf die Rotation des Partikels,  $\alpha$  steht für die Drehung um die Partikelachse  $\mathbf{m}$  (bzw.  $\mathbf{m}_0$  für  $t = 0$ ) und  $\beta$  für die Drehung in der Ebene senkrecht zur Partikelachse  $\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}$  (bzw.  $\mathbf{E} - \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_0$  für  $t = 0$ ). Sie sind abhängig von der Geometrie und den Oberflächeneigenschaften des Partikels und vom Fluid.

Das hydrodynamische Moment lässt sich mit

$$\mathbf{M} = \int_A \mathbf{r}_P \times (\mathbf{f}_t + \mathbf{f}_n) dA \quad (3.48)$$

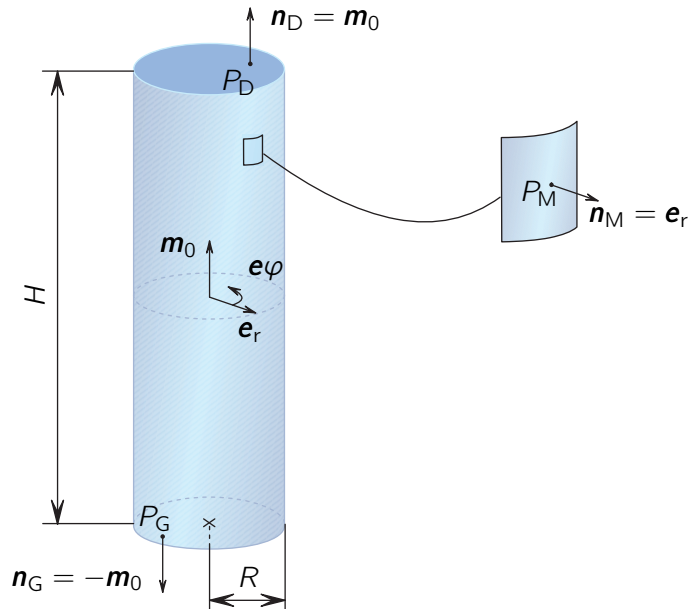
berechnen,  $\mathbf{f}_t$  und  $\mathbf{f}_n$  s. Gl. (3.37) und (3.38). Betrachten wir die Rotation eines zylindrischen Partikels. Die Widerstandskraft wirkt nicht auf die gesamte Oberfläche, sondern nur auf einen bestimmten Teil. Um diesen Bereich der Oberfläche zu bestimmen, wird die Ungleichung  $\mathbf{v}_P \cdot \mathbf{n} > 0$  aus Gl. (3.38) gelöst. Mit der Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  kann  $\mathbf{v}_P$  spezifiziert werden

$$\mathbf{v}_P(\mathbf{r}_P) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P. \quad (3.49)$$

Jeder Punkt der Oberfläche kann mit Hilfe der Zylinderkoordinaten  $r$ ,  $\varphi$  und  $z$  durch einen Ortsvektor

$$\mathbf{r}_P(z, \varphi) = r \mathbf{e}_r + z \mathbf{m}_0 \quad (3.50)$$

beschrieben werden,  $\mathbf{m}_0$  ist der Einheitsvektor in  $z$ -Richtung. Der Einheitsnormalenvektor  $\mathbf{n}$  und der Ortsvektor  $\mathbf{r}_P$  sind für Mantel-, Deck- und Grundfläche verschieden, s. Abb. 3.4. Auf der Mantelfläche

Abbildung 3.4. Außennormalenvektor  $\mathbf{n}$  eines Zylinders

sind

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_M &= \mathbf{e}_r, \\ \mathbf{r}_P &= R \mathbf{e}_r + z \mathbf{m}_0. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Die Punkte der Deck- und Grundfläche werden mit

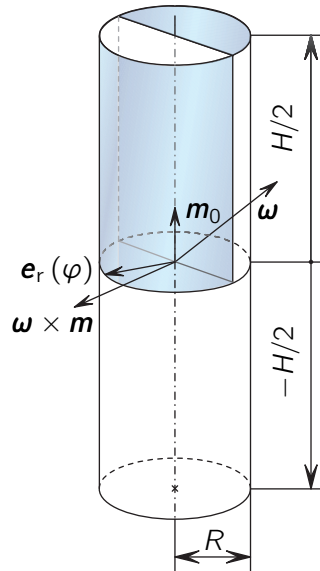
$$\begin{aligned} \mathbf{n}_D &= \mathbf{m}_0, \\ \mathbf{n}_G &= -\mathbf{m}_0, \\ \mathbf{r}_P &= r \mathbf{e}_r + \frac{H}{2} \mathbf{m}_0 \end{aligned} \quad (3.52)$$

beschrieben. Die Ungleichung  $\mathbf{v}_P \cdot \mathbf{n} > 0$  wird dann zu

$$\begin{aligned} z \mathbf{e}_r \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{m}_0) &> 0 \quad \text{für die Mantelfläche bzw.} \\ r \mathbf{e}_r \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{m}_0) &< 0 \quad \text{für Grund- und Deckfläche.} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Das Vektorprodukt  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{m}_0$  ist der Normalenvektor der Ebene, die von den Vektoren  $\boldsymbol{\omega}$  und  $\mathbf{m}_0$  aufgespannt wird. Die Bedeutung der Ungleichungen (3.53) ist offensichtlich. Sie charakterisieren die Teile der Oberfläche, auf die die Widerstandskraft wirkt. Die Lösung ist in Abb. 3.5 gezeigt, der Übersichtlichkeit wegen nur für den oberen Teil des Zylinders ( $0 \leq z \leq H/2$ ). Ersetzt man nun  $\mathbf{f}_t$ ,  $\mathbf{f}_n$  und  $\mathbf{r}_P$  in Gl. (3.48) durch die Gln. (3.37), (3.38) und (3.50), erhält man die Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$  des Widerstandstensors  $\mathbf{G}_0$  in (3.47) für einen Zylinder

$$\begin{aligned} \alpha_Z &= \pi \zeta (R^4 + 2R^3 H), \\ \beta_Z &= \pi \xi \left( R^3 H + \frac{R^2 H^2}{2} + \frac{R H^3}{12} \right) + \pi \xi \left( \frac{R^4}{2} + \frac{R H^3}{24} \right). \end{aligned} \quad (3.54)$$



**Abbildung 3.5.** Teile der Oberfläche eines Zylinders, auf die die Widerstandskraft wirkt

Die Koeffizienten  $\zeta$  und  $\xi$  werden im folgenden als Viskositätskoeffizienten bezeichnet. Sie haben die Dimension  $\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$  und beinhalten verschiedene Größen, die die Wechselwirkung zwischen Partikel und Medium beschreiben, wie z. B. die Viskosität des Mediums oder die Oberflächenbeschaffenheit des Partikels, also die Grenzschicht zwischen Partikel und Fluid. Im Kapitel 4.4 wird auf die Koeffizienten näher eingegangen. Für einen Zylinder mit aufgesetzten Halbkugeln (Abb. 3.2b) ist die Berechnung der Konstanten analog und führt auf

$$\alpha_{\text{ZHK}} = 2\pi\zeta \left( \frac{4}{3}R^4 + R^3H \right), \quad (3.55)$$

$$\beta_{\text{ZHK}} = 2\pi\zeta \left( \frac{4}{3}R^4 + \frac{RH^3}{24} \right) + \pi\xi \frac{RH^3}{24}.$$

Wie der Trägheitstensor  $\mathbf{C}$ , so ist auch der Widerstandstensor  $\mathbf{G}$  isotrop, wenn die Höhe  $H$  des abgerundeten Zylinders gleich 0 gesetzt wird und dieser damit zu einer Kugel „schrumpft“. Seine Koeffizienten  $\alpha_{\text{ZHK}}$  und  $\beta_{\text{ZHK}}$  sind dann gleich. Zu diesem Resultat kommt man auch, wenn  $H = 0$  in (3.55) eingesetzt wird:

$$\alpha_{\text{ZHK0}} = \beta_{\text{ZHK0}} = \frac{8}{3}\pi\zeta R^4. \quad (3.56)$$

Betrachtet man einen schlanken Stab (Abb. 3.2c), können  $\mathbf{G}_0$  und  $\mathbf{M}$  verkürzt dargestellt werden. Der Koeffizient  $\alpha$  des Tensors  $\mathbf{G}_0$  steht für die Rotation um die Partikelachse  $\mathbf{m}_0$  und kann daher vernachlässigt werden. Ein schlanker (eindimensionaler) Stab kann als Linie mit einem infinitesimalen Linienelement  $ds$  beschrieben werden, s. Abb. 3.6. Nur der normale Anteil der Kraft  $d\mathbf{F}_n = \mathbf{f}_n ds$ , die auf das Linienelement wirkt, erzeugt ein Moment um den Massenmittelpunkt. Die Geschwindigkeitsvektoren  $\mathbf{v}_p$  des Partikels und  $\mathbf{v}_f$  der Flüssigkeit werden auf die Mittelquerschnittsebene des Stabes

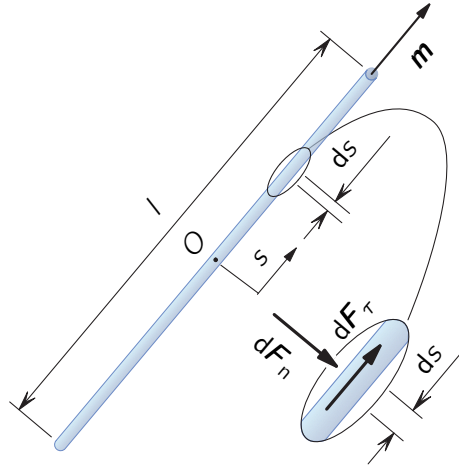


Abbildung 3.6. Normal- und Tangentialkraft für ein stabförmiges Partikel

projiziert:

$$\mathbf{v}_{f_n} = (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}) \cdot \mathbf{v}_f, \quad (3.57)$$

$$\mathbf{v}_{p_n} = (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}) \cdot \mathbf{v}_p. \quad (3.58)$$

Nehmen wir an, dass die Intensität  $\mathbf{f}_n$  der Normalkraft  $\mathbf{F}_n$ , die auf das Linienelement  $ds$  wirkt, proportional ist zur Differenz zwischen dem normalen Anteil des Geschwindigkeitsvektors der ungestörten Strömung  $\mathbf{v}_{f_n}$  an der Stelle  $\mathbf{r}_p(s, t) = s \mathbf{m}(t)$  und dem normalen Anteil der Partikelgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_{p_n}$  an derselben Stelle:

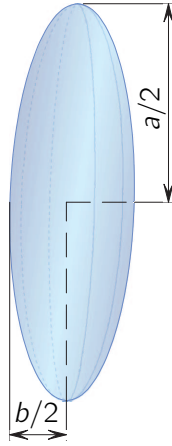
$$\mathbf{f}_n = \beta_0 (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}) \cdot (\mathbf{v}_{f_n} - \mathbf{v}_{p_n}). \quad (3.59)$$

Der Koeffizient  $\beta_0$  ist ein Viskositätskoeffizient. Ist die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_f$  der ungestörten Flüssigkeit gleich  $\mathbf{0}$ , dann erhält man die übliche linear viskose Reibungskraft. Bewegt sich das Element  $ds$  mit dem ungestörten Fluid, dann verschwindet die Kraft. Mit diesen Annahmen berechnet sich das resultierende hydrodynamische Moment  $\mathbf{M}_O$  eines schlanken Stabes wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O &= \int_{-l/2}^{l/2} s \mathbf{m} \times \mathbf{f}_n ds \\ &= \beta_0 \int_{-l/2}^{l/2} s \mathbf{m} \times (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}) \cdot (\mathbf{v}_{f_n} - \mathbf{v}_{p_n}) ds. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Unter Berücksichtigung von  $\mathbf{v}_{p_n} = s \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{m}$  wird Gl. (3.60) zu

$$\mathbf{M}_O = \beta_0 \frac{l^3}{12} [(\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}) \cdot (\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{m}]. \quad (3.61)$$



**Abbildung 3.7.** Rotationsellipsoid

Durch den Vergleich von Gl. (3.61) mit (3.41) ist ersichtlich, dass der Widerstandskoeffizient  $\alpha_S$  eines schlanken Stabes gleich 0 ist und dass die anderen beiden Koeffizienten gleich sind

$$\alpha_S = 0, \quad (3.62)$$

$$\beta_S = \eta_S = \beta_0 \frac{l^3}{12}. \quad (3.63)$$

*Jeffery* [29] fand die geschlossene Lösung einer quasistatischen *Stokes*-Strömung um einen Rotationsellipsoid (Abb. 3.7) mit den Achsen  $a$  (Längsachse) und  $b$  (jede Achse senkrecht zu  $a$ ). Aus der Spannungsverteilung auf der Oberfläche berechnete er das hydrodynamische Moment in Gl. (3.39) mit den Widerstandskoeffizienten

$$\alpha_{RE} = \frac{16\pi\mu a^3}{3} \frac{1}{\lambda}, \quad (3.64)$$

$$\beta_{RE} = \frac{16\pi\mu a^3}{3} \frac{a^2 + b^2}{a^2\kappa + b^2\lambda}, \quad (3.65)$$

$$\eta_{RE} = \frac{16\pi\mu a^3}{3} \frac{a^2 - b^2}{a^2\kappa + b^2\lambda} \quad (3.66)$$

mit  $\mu$  als Viskosität,  $\kappa$  und  $\lambda$  sind [5]

$$\kappa = \int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^{\frac{3}{2}} \left(x + \frac{b}{a}\right)}, \quad (3.67)$$

$$\lambda = \int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^{\frac{1}{2}} \left(x + \frac{b}{a}\right)^2}. \quad (3.68)$$

Ist das Rotationsellipsoid schlank mit dem Achsenverhältnis  $b/a \ll 1$ , dann sind die Widerstandskoeffizienten

$$\alpha = \frac{16\pi\mu a^3}{3} \frac{b^2}{a^2} \quad (3.69)$$

$$\beta = \eta = \frac{16\pi\mu a^3}{3} \frac{1}{2 \ln 2\frac{a}{b} - 1}. \quad (3.70)$$

### 3.3 Strömung des Mediums

Mit Hilfe des Strömungsgradienten  $\mathbf{L} = \nabla \mathbf{v}$  einer ungestörten Strömung der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  und seiner Zerlegung in den symmetrischen Dehngeschwindigkeitstensor  $\mathbf{D}$  und den antimetrischen Drehgeschwindigkeitstensor  $\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{E}$

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} - \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{E}, \quad (3.71)$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T], \quad (3.72)$$

$$\boldsymbol{\phi} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} \quad (3.73)$$

nach *Giesekus* [22] können verschiedene ebene Strömungen klassifiziert werden.  $\boldsymbol{\phi}$  ist der Wirbelvektor des Strömungsfeldes. In den Gln. (3.71) - (3.73) ist  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$  die Fluidgeschwindigkeit an einem Punkt mit dem Ortsvektor  $\mathbf{r}$  im Bezugssystem. Man spricht von einem homogenen Strömungsfeld, wenn der Geschwindigkeitsgradient  $\mathbf{L}(\mathbf{r}, t)$  nur von der Zeit, nicht aber vom Ort abhängt. Ist er zusätzlich unabhängig von der Zeit, dann ist das Strömungsfeld stationär. *Giesekus* klassifiziert in [22] Strömungsfelder. Ausgehend von einer ebenen Strömung können  $\mathbf{D}$  und  $\boldsymbol{\phi}$  mit den Einheitsvektoren  $\mathbf{n}_1$  und  $\mathbf{n}_2$  der Hauptachsen von  $\mathbf{D}$  wie folgt dargestellt werden:

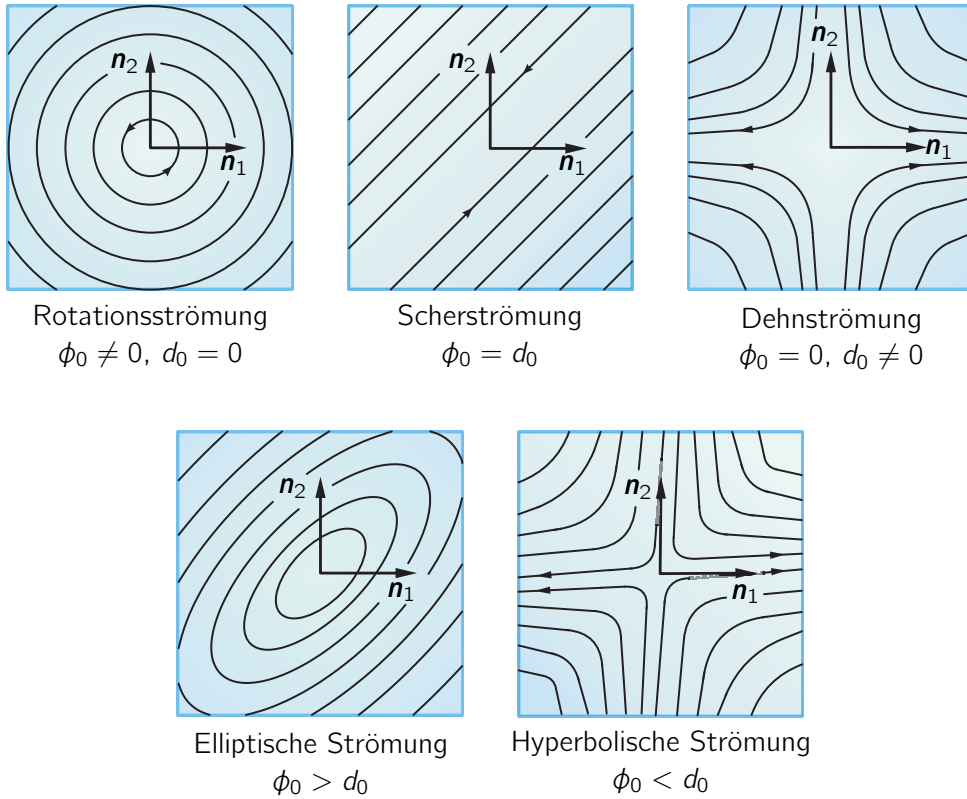
$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= d_0(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_2), \\ \boldsymbol{\phi} &= \phi_0 \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2, \end{aligned} \quad (3.74)$$

$d_0$  und  $\phi_0$  sind der Dehnungs- und der Rotationsanteil. Zweckmäßigerweise nehmen wir an, dass beide positiv sind ( $d_0 > 0$  und  $\phi_0 > 0$ ).

*Giesekus* unterteilt die Strömungen anhand der Koeffizienten  $d_0$  und  $\phi_0$ . In der oberen Reihe der Abb. 3.8 sind außen die speziellen Fälle dargestellt, in denen einer der beiden Koeffizienten Null ist. Oben links ist das Stromlinienbild einer Rotationsströmung ( $d_0 = 0$ ), oben rechts das einer Dehnströmung ( $\phi_0 = 0$ ). Dazwischen ist die Scherströmung angeordnet, in der die Koeffizienten gleich sind ( $\phi_0 = d_0$ ). Nimmt ausgehend von einer Rotationsströmung der Dehnungsanteil an der Strömung zu, gehört diese Strömung nach *Giesekus* bis zur Gleichheit der Koeffizienten zu den elliptischen Strömungen. Entsprechend sprechen wir von einer hyperbolischen Strömung bei Abnahme des Rotationsanteils ausgehend von einer Scherströmung.

Das sich während der Einfüllphase des Spritzgussprozesses ausbildende Strömungsfeld wird im allgemeinen als Scherströmung angenommen [60]. Zudem sind spritzgegossene Bauteile dünnwandig und können daher als abschnittsweise zweidimensional angenommen werden. In den meisten der im Kapitel 2 zitierten Arbeiten [10, 11, 13, 19, 37, 42, 50, 55, 58] wurde die Bewegung von Partikeln in einer Scherströmung untersucht. Reale im Spritzguss hergestellte Bauteile sind in der Regel dreidimensional und haben oft eine komplexe Geometrie. In Bauteilecken beispielsweise kann nicht mehr von einer einfachen Scherströmung ausgegangen werden. Daher wird im folgenden Kapitel die Drehung eines schlanken Stabes in allen von *Giesekus* beschriebenen ebenen Strömungen untersucht. Die Drehung allgemein axialsymmetrischer Partikel (Zylinder und abgerundeter Zylinder) wird zunächst numerisch in einer Scherströmung berechnet. Für die Berechnung der Orientierung von Verstärkungsfasern ist sicher die Scherströmung diejenige, die den Strömungsverhältnissen im realen Prozess in weiten Bereichen<sup>4</sup> am nächsten kommt. Die Rotation eines abgerundeten Zylinders wird im Kapi-

<sup>4</sup>Die Bereiche, in denen die Ausdehnung in der Fläche groß ist gegen die Bauteildicke.



**Abbildung 3.8.** Ebene Strömungen nach *Giesekus* [22]

tel 4.6 näherungsweise analytisch berechnet, wobei eine Rotations- ( $d_0 = 0$ ) und eine Dehnströmung ( $\phi_0 = 0$ ) berücksichtigt werden. Diese beiden Strömungen haben entweder keinen Dehnungs- oder keinen Rotationsanteil bzw. lassen sich nur mit dem antisymmetrischen Anteil  $\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{E}$  oder nur mit dem symmetrischen Anteil  $\boldsymbol{D}$  des Geschwindigkeitsgradienten  $\boldsymbol{L}$  beschreiben und stellen daher Spezialfälle dar. Die dritte spezielle Strömung nach *Giesekus*, die Scherströmung ( $d_0 = \phi_0$ ), ist demnach die nächste, für die eine analytische Näherungslösung zu suchen ist.



## 4 Bewegungsgleichung

Die Ausrichtung der Verstärkungsfasern während des Spritzgussprozesses und damit ihre Orientierung im Bauteil bestimmt dessen richtungsabhängige mechanische Eigenschaften. Die Ausrichtung ist das Resultat von Translation und Rotation der Faser und lässt sich aus der Bewegungsgleichung berechnen. Die Translation ist in ihrer Richtung und Geschwindigkeit dominiert durch die Strömung der Polymerschmelze während der Formfüllung. Für die Ausrichtung der Fasern ist ihre Rotation von besonderem Interesse. Im Folgenden wird die Bewegungsgleichung für die Rotation eines axialsymmetrischen Körpers aus seiner Drehimpulsbilanz hergeleitet und gelöst.

### 4.1 Bewegungsgleichung eines axialsymmetrischen Körpers

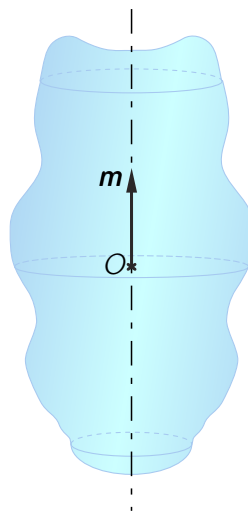
In Abb. 4.1 ist ein axialsymmetrischer Körper beliebiger Form dargestellt. Seine Symmetrieachse ist mit dem Einheitsvektor  $\mathbf{m}$  gekennzeichnet. Der Punkt  $O$  ist der Massenmittelpunkt des Körpers. Wir nehmen an, dass der Körper in seinem Massenmittelpunkt momentenfrei gelagert ist. Sein Trägheitstensor  $\mathbf{C}$  ist in Gl. (3.21) gegeben und wird hier zur besseren Übersicht erneut aufgeführt:

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{m} \mathbf{m} + \mu (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}). \quad (4.1)$$

Die Drehimpulsbilanz ist [s. 2. Gl. (3.4)]

$$\frac{d}{dt} \mathbf{K}_2 = \mathbf{M} \quad (4.2)$$

mit  $\mathbf{K}_2 = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}$  [s. Gl. (3.14)]. Das hydrodynamische Moment bezogen auf den Massenmittelpunkt  $O$



**Abbildung 4.1.** Axialsymmetrischer Körper mit Massenmittelpunkt  $O$  und Symmetrieachse  $\mathbf{m}$

des Körpers

$$\mathbf{M}_O = [\alpha \mathbf{m} \mathbf{m} + \beta(\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m})] \cdot (\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\omega}) + \eta \mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{m}. \quad (4.3)$$

steht in Gl. (3.41). Aus der Drehimpulsbilanz (4.2) folgt mit (4.1) und (4.3)

$$\lambda \dot{\boldsymbol{\omega}}_N + \mu \dot{\boldsymbol{\omega}}_T = [\alpha \mathbf{m} \mathbf{m} + \beta(\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m})] \cdot (\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\omega}) + \eta \mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{m}. \quad (4.4)$$

Die Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  setzt sich zusammen aus den Drehgeschwindigkeiten  $\boldsymbol{\omega}_N$  um die Achse  $\mathbf{m}$  und  $\boldsymbol{\omega}_T$  in der Ebene senkrecht zu  $\mathbf{m}$ :

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_N + \boldsymbol{\omega}_T, \quad (4.5)$$

$$\boldsymbol{\omega}_N = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{m} \mathbf{m} = \omega_N \mathbf{m}, \quad (4.6)$$

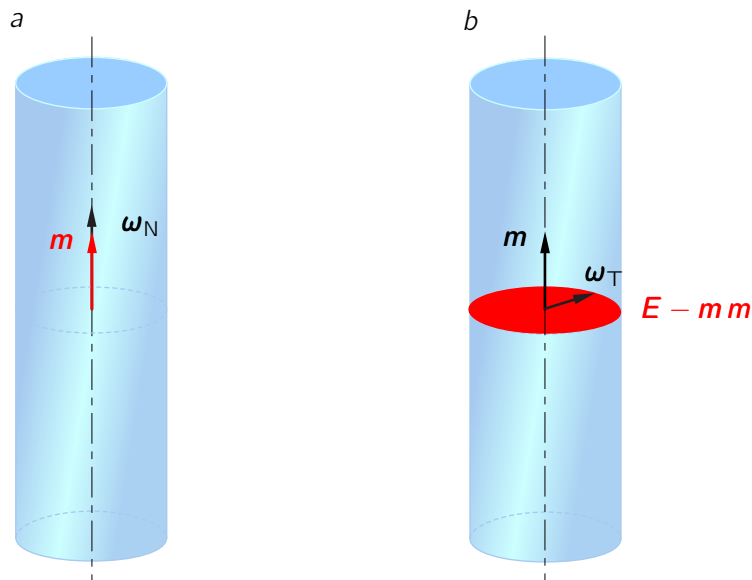
$$\boldsymbol{\omega}_T = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}). \quad (4.7)$$

Die Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$  des Trägheitstensors sowie  $\alpha$  und  $\beta$  des hydrodynamischen Moments sind für verschiedene Partikelgeometrien in den Kapiteln 3.1 und 3.2 und im Anhang A.1 angegeben. Die Lösung der Vektordifferentialgleichung (4.4) sind die jeweils 3 Komponenten des Geschwindigkeitsvektors  $\boldsymbol{\omega}$  und der Achse  $\mathbf{m}$ . Gleichung (4.4) wird umgeformt durch 2 Projektionen (s. Abb. 4.2):

1. Projektion auf die Achse  $\mathbf{m}$  durch skalare Multiplikation mit  $\mathbf{m}$ . Man erhält die skalare Differentialgleichung

$$\dot{\omega}_N = \frac{\alpha}{\lambda} (\boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{m} - \omega_N), \quad \omega_N = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{m}, \quad (4.8)$$

die die Rotation um die Achse  $\mathbf{m}$  beschreibt.



**Abbildung 4.2.** Projektionen. *a* auf die Partikelachse  $\mathbf{m}$  durch skalare Multiplikation der Bewegungsgleichung (4.4) mit  $\mathbf{m}$ , *b* auf die Ebene senkrecht zu  $\mathbf{m}$  durch skalare Multiplikation mit  $\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}$

2. Projektion in die  $(\mathbf{E} - \mathbf{m m})$ -Ebene. Skalare Multiplikation mit dem Projektor  $\mathbf{E} - \mathbf{m m}$  führt auf

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{T}} = -\frac{\lambda}{\mu} \omega_{\text{N}} \dot{\mathbf{m}} + \frac{\beta}{\mu} (\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{m m} - \boldsymbol{\omega}_{\text{T}}) + \frac{\eta}{\mu} \mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{m}, \quad (4.9)$$

$$\dot{\mathbf{m}} = \boldsymbol{\omega}_{\text{T}} \times \mathbf{m}, \quad (4.10)$$

ein System aus 2 vektoriellen Differentialgleichungen.

Das Gleichungssystem (4.8)-(4.10) besteht aus 7 skalaren Gleichungen und ist überbestimmt. Die Lösungen sind die Koordinaten von  $\mathbf{m}$  und  $\boldsymbol{\omega}_{\text{T}}$  sowie der Betrag von  $\omega_{\text{N}}$ . Der Vektor  $\mathbf{m}$  ist ein Einheitsvektor, es sind also nur 2 seiner 3 Komponenten unabhängig. Weiterhin ist  $\boldsymbol{\omega}_{\text{T}} \cdot \mathbf{m} = 0$ , was bedeutet, dass von den 3 Komponenten von  $\boldsymbol{\omega}_{\text{T}}$  auch nur 2 unabhängig sind. Für die Lösung der 5 unabhängigen Komponenten genügt also eigentlich ein Differentialgleichungssystem aus 5 Gleichungen, das aber aus den Gln. (4.8)-(4.10) in direkter Notation nicht einfach abgeleitet werden kann. Wird das System (4.8)-(4.10) gelöst, muss also überprüft werden, ob  $\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = 1$  und  $\boldsymbol{\omega}_{\text{T}} \cdot \mathbf{m} = 0$  erfüllt sind. Eine erste Annäherung an die Lösung des Differentialgleichungssystems (4.8)-(4.10) bietet die Vereinfachung der Partikelgeometrie auf einen schlanken Stab.

## 4.2 Bewegungsgleichung eines schlanken Stabes

Der Trägheitstensor  $\mathbf{C}_S$  eines schlanken Stabes ist

$$\mathbf{C}_S = \mu_S (\mathbf{E} - \mathbf{m m}), \quad \mu_S = \rho_S \frac{l^3}{12}, \quad (4.11)$$

$\rho_S = m/l$  ist die „Liniendichte“, mit  $m$  als Partikelmasse und  $l$  als Partikellänge. Sein hydrodynamisches Moment [s. Gl. (3.61)]

$$\mathbf{M}_{\text{SO}} = \beta_0 \frac{l^3}{12} [(\mathbf{E} - \mathbf{m m}) \cdot (\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{m}]. \quad (4.12)$$

Hier und im Folgenden steht der Index  $S$  für den Stab, Index  $O$  steht weiterhin für den Massenmittelpunkt. Unter Verwendung der Gln. (4.11), (4.12) und von  $\dot{\mathbf{m}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{m}$  folgt aus der Drehimpulsbilanz [2. Gl. in (3.4)]

$$\chi \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{T}} = \mathbf{m} \times \mathbf{L}^{\text{T}} \cdot \mathbf{m} - \boldsymbol{\omega}_{\text{T}}, \quad (4.13)$$

$$\dot{\mathbf{m}} = \boldsymbol{\omega}_{\text{T}} \times \mathbf{m}, \quad (4.14)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{T}} \equiv \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m m}). \quad (4.15)$$

Der Koeffizient  $\chi = \rho_S / \beta_0$ ,  $[\chi] = \text{s}$  steht für die Wechselwirkung mit dem umgebenden Medium,  $\mathbf{L}$  ist der Geschwindigkeitsgradient des strömenden Mediums, s. Gl. (3.71). Gleichungen (4.13) und (4.14) beschreiben die rotatorische Bewegung eines schlanken Stabes. Dieses Differentialgleichungssystem besteht aus 6 skalaren Gleichungen.

Aus  $\dot{\mathbf{m}} = \boldsymbol{\omega}_{\text{T}} \times \mathbf{m}$  folgt nach zyklischer Vertauschung  $\boldsymbol{\omega}_{\text{T}} = \mathbf{m} \times \dot{\mathbf{m}}$ , was mit einer kurzen Überlegung gezeigt werden kann. Die Vektoren  $\boldsymbol{\omega}_{\text{T}}$  und  $\mathbf{m}$  stehen senkrecht aufeinander, da  $\boldsymbol{\omega}_{\text{T}}$  in der  $\mathbf{E} - \mathbf{m m}$ -Ebene liegt, s. Abb. 4.2. Der Vektor  $\mathbf{m}$  der Partikelachse ist ein Einheitsvektor - es gilt  $\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = 1$ . Die Vektoren  $\boldsymbol{\omega}_{\text{T}}$ ,  $\mathbf{m}$  und  $\dot{\mathbf{m}}$  lassen sich im kartesischen Koordinatensystem  $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$  wie

#### 4 Bewegungsgleichung

folgt darstellen:

$$\boldsymbol{\omega}_T = \omega_T \mathbf{e}_1 \quad (4.16)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{e}_2 \quad (4.17)$$

$$\dot{\mathbf{m}} = \boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{m} = \omega_T \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \omega_T \mathbf{e}_3. \quad (4.18)$$

Für  $\boldsymbol{\omega}_T$  ergibt sich damit

$$\boldsymbol{\omega}_T = \omega_T \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \omega_T \mathbf{m} \times \frac{\dot{\mathbf{m}}}{\omega_T} \quad (4.19)$$

$$\boldsymbol{\omega}_T = \mathbf{m} \times \dot{\mathbf{m}}. \quad (4.20)$$

Die Zeitableitung von Gl. (4.20) ist

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_T = -\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{m}. \quad (4.21)$$

Damit lässt sich Gl. (4.13) umformen zu

$$\chi \ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{m} + \dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{m} = -\mathbf{m} \times \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{m}, \quad (4.22)$$

und man erhält durch linksseitige Vektormultiplikation mit  $\mathbf{m}$

$$\chi \ddot{\mathbf{m}} - \chi \ddot{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{m} \mathbf{m} + \dot{\mathbf{m}} = \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{m} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{m} \mathbf{m}. \quad (4.23)$$

Berücksichtigt man, dass  $\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = 1$  ist, dann folgt daraus

$$\dot{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{m} = 0 \quad (4.24)$$

und mit  $\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{m}) = 0$  auch

$$\ddot{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{m} = -\dot{\mathbf{m}} \cdot \dot{\mathbf{m}}. \quad (4.25)$$

Damit wird Gl. (4.23) schließlich zu

$$\chi(\ddot{\mathbf{m}} + \dot{\mathbf{m}} \cdot \dot{\mathbf{m}} \mathbf{m}) + \dot{\mathbf{m}} = \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{m} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{m} \mathbf{m}. \quad (4.26)$$

Betrachtet man die Drehung eines schlanken Stabes (z. B. einer Glasfaser) in einem viskosen Medium (einer Polymerschmelze), dann kann der Koeffizient  $\chi$  [s. Gl. (4.14)] als kleiner Parameter angenommen werden. Das folgt aus seiner Definition  $\chi = \rho_S / \beta_0$ . Der Nenner  $\beta_0$  enthält die Viskosität des umgebenden hochviskosen Fluids. Setzt man  $\chi = 0$ , vernachlässigt man damit den Widerstand, den das Partikel vom umgebenden viskosen Medium bei seiner Drehung erfährt. Dieser Ansatz geht zurück auf die Arbeit von *Jeffery* [29] über die Drehung eines Rotationsellipsoids in einem viskosen Fluid. Aus Gl. (4.13) leitet sich die Bewegungsgleichung eines sich widerstandsfrei drehenden Partikels ab:

$$\boldsymbol{\omega}_T = \mathbf{m} \times \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{m} \quad \text{bzw.} \quad (4.27)$$

$$\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{m} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{m} \mathbf{m}. \quad (4.28)$$

Gleichung (4.28) wird in statistischen Modellen von Fasersuspensionen (z. B. in [14]) und in Spritzgussimulationen (z. B. in [2]) verwendet.

Die Gl. (4.13) der Drehung eines schlanken Stabes kann auch aus der entsprechenden Gl. (4.4) eines allgemein axialsymmetrischen Körpers abgeleitet werden. Gleichung (4.4) sei zur besseren Übersicht hier erneut angegeben:

$$\lambda \dot{\omega}_N + \mu \dot{\omega}_T = [\alpha \mathbf{m} \mathbf{m} + \beta (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m})] \cdot (\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\omega}) + \eta \mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{m}. \quad (4.29)$$

Bei einem schlanken Stab sind  $\lambda_S = 0$ ,  $\alpha_S = 0$ ,  $\mu_S = \rho_S l^3/12$  und  $\eta_S = \beta_S = \beta_0 l^3/12$ . Setzt man dies alles in Gl. (4.29) ein, erhält man

$$\chi \dot{\omega}_T = \boldsymbol{\phi} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}) - \omega_T + \mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{m}, \quad \chi = \frac{\rho_S}{\beta_0} = \frac{\mu_S}{\beta_S}. \quad (4.30)$$

Wegen der Gleichheit

$$\boldsymbol{\phi} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}) = \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{m} \mathbf{m} = \mathbf{m} \times (\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{m} \quad (4.31)$$

folgt aus Gl. (4.30)

$$\chi \dot{\omega}_T = \mathbf{m} \times (\mathbf{D} + \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{m} - \omega_T. \quad (4.32)$$

Mit  $\mathbf{L}^T = (\mathbf{D} + \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{E})$  ist Gl. (4.32) identisch mit (4.13).

Mit  $\lambda_S = 0$  verschwindet auch  $\dot{\omega}_N$  aus Gl. (4.29).  $\dot{\omega}_N$  stellt die Winkelbeschleunigung um die Stabachse dar, die aber nicht notwendigerweise Null sein muss. Die Vereinfachung der Bewegungsgleichung eines allgemein axialsymmetrischen Körpers auf die eines schlanken Stabes bedeutet, dass man jede Information über die Drehung des Stabes um seine eigene Achse verliert.

### 4.3 Lösung der Bewegungsgleichung eines schlanken Stabes

Für die Lösung der Bewegungsgleichungen muss das Strömungsfeld charakterisiert werden. Dazu wird das kartesische Koordinatensystem  $\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$  eingeführt. Der Tensor der Dehngeschwindigkeiten  $\mathbf{D}$  und der Rotationsgeschwindigkeitsvektor  $\boldsymbol{\phi}$  des Strömungsfeldes sind in den Gln. (3.74) angegeben. Beide lassen sich in äquivalenter Weise mit den Einheitsvektoren  $\mathbf{i}$  und  $\mathbf{j}$  angeben, die beide in der Strömungsebene liegen (s. Abb. 4.3 am Beispiel der Scherströmung). Die  $\mathbf{i}$ -Achse ist um  $\pi/4$  gegenüber der Hauptachse  $\mathbf{n}_1$  gedreht. Die Wirbelachse  $\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$  ist entgegengesetzt orientiert zur Achse  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = -\mathbf{k}$ . Ein solches Koordinatensystem wird auch von *Giesekus* für die Beschreibung der Drehung suspendierter Partikel verwendet [22]. Im  $\mathbf{ijk}$ -System sind  $\mathbf{D}$  und  $\boldsymbol{\phi}$

$$\mathbf{D} = d_0(\mathbf{i} \mathbf{j} + \mathbf{j} \mathbf{i}), \quad (4.33)$$

$$\boldsymbol{\phi} = \phi_0 \mathbf{j} \times \mathbf{i}. \quad (4.34)$$

Wie im Kapitel 3.3 beschrieben, sind spritzgegossene Bauteile aus prozesstechnischen Gründen dünnwandig. Daher wird in Simulationen die Strömung häufig als zweidimensionale Scherströmung angenommen [60]. In einer Scherströmung sind Dehnungsanteil  $d_0$  des Tensors  $\mathbf{D}$  und Rotationsanteil  $\phi_0$

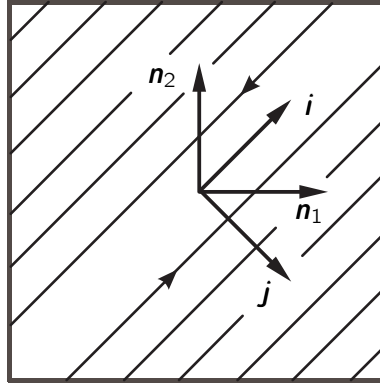


Abbildung 4.3. Ebene Scherströmung

des Wirbelvektors  $\phi$  gleich,  $d_0 = \phi_0 = \gamma$ . Der Geschwindigkeitsgradient  $\mathbf{L}$  in Gl. (3.71) nimmt die Form

$$\mathbf{L} = 2\gamma \mathbf{j} \mathbf{i} \quad (4.35)$$

an,  $\gamma$  wird als Schergeschwindigkeit bezeichnet.

Die Bewegungsgleichung (4.13) ist nichtlinear und daher nicht ohne Weiteres analytisch zu lösen. Für die „widerstandsfreie“ Gleichung (4.27) ist die Lösung in verschiedenen Publikationen zu finden, z. B. in [14, 17, 29]. Die Rotation eines freien Partikels im ruhenden Medium wurde für beliebige axialsymmetrische Körper in [28] gelöst. Die numerische Lösung für die Drehung eines zylindrischen Körpers bezüglich der rechten Winkelgeschwindigkeit und des Drehvektors ist in [52] angegeben. In diesem Kapitel soll die Gl. (4.13) für die von *Giesekus* in [22] klassifizierten ebenen Strömungen gelöst werden.

### 4.3.1 Ruhendes Medium

Das umgebende Medium ist in Ruhe, wenn seine Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_f = \mathbf{0}$  und damit auch der Gradiententensor  $\mathbf{L} = \mathbf{0}$  ist. Aus Gl. (4.13) erhält man

$$\chi \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{T}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{T}} = \mathbf{0}. \quad (4.36)$$

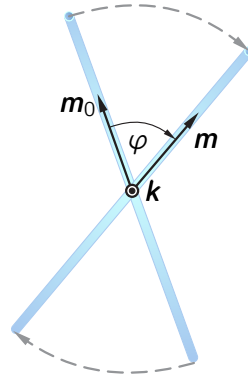
Mit der Anfangsbedingung  $\boldsymbol{\omega}_{\text{T}}(0) = \boldsymbol{\omega}_{\text{T}0}$  ist die Lösung der Differentialgleichung (4.36)

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{T}} = \boldsymbol{\omega}_{\text{T}0} \exp\left(-\frac{t}{\chi}\right). \quad (4.37)$$

Damit ist die Rotationsgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}_{\text{T}}$  bekannt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann der Vektor  $\boldsymbol{\omega}_{\text{T}}$  wie folgt dargestellt werden:

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{T}} = \omega_{\text{T}} \mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1. \quad (4.38)$$

Die Lage der Achse  $\mathbf{m}$  ist bestimmt durch die Drehung aus ihrer Ausgangslage  $\mathbf{m}_0$ . Diese Drehung



**Abbildung 4.4.** Drehung eines Stabes aus der Ausgangslage  $\mathbf{m}_0$  in die Lage  $\mathbf{m}$

ist dargestellt in Abb. 4.4 und wird beschrieben mit Hilfe eines Drehtensors:

$$\mathbf{m} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{m}_0, \quad (4.39)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\omega_N \mathbf{m}_0). \quad (4.40)$$

Mit Gl. (4.40) ist berücksichtigt, dass sich der Stab auch um seine eigene Achse mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_N$  drehen kann. Da  $\mathbf{Q}(\omega_N \mathbf{m}_0) \cdot \mathbf{m}_0 = \mathbf{m}_0$  ist (das bedeutet, dass die Drehung um die eigene Achse die Lage des Stabes nicht verändert), gilt für  $\mathbf{m}$ :

$$\mathbf{m} = \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{m}_0, \quad (4.41)$$

$$\mathbf{Q}(\varphi \mathbf{k}) \equiv \mathbf{k} \mathbf{k} + \cos \varphi (\mathbf{E} - \mathbf{k} \mathbf{k}) + \sin \varphi \mathbf{k} \times \mathbf{E}. \quad (4.42)$$

Aus Gl. (4.40) leitet sich die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_T$ , mit der sich  $\mathbf{m}_0$  um die Achse  $\mathbf{k}$  dreht, folgendermaßen ab [61]:

$$\omega_T = \dot{\varphi} \mathbf{k} + \omega_N \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{m}_0 \stackrel{(4.39)}{=} \dot{\varphi} \mathbf{k} + \omega_N \mathbf{m}. \quad (4.43)$$

Gleichung (4.43) wird mit dem Vektor  $\mathbf{k}$  skalar multipliziert. Dafür wird zunächst aus Gl. (4.5)

$$\omega_T \cdot \mathbf{m} = \omega \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}) \cdot \mathbf{m} = 0 \quad (4.44)$$

und

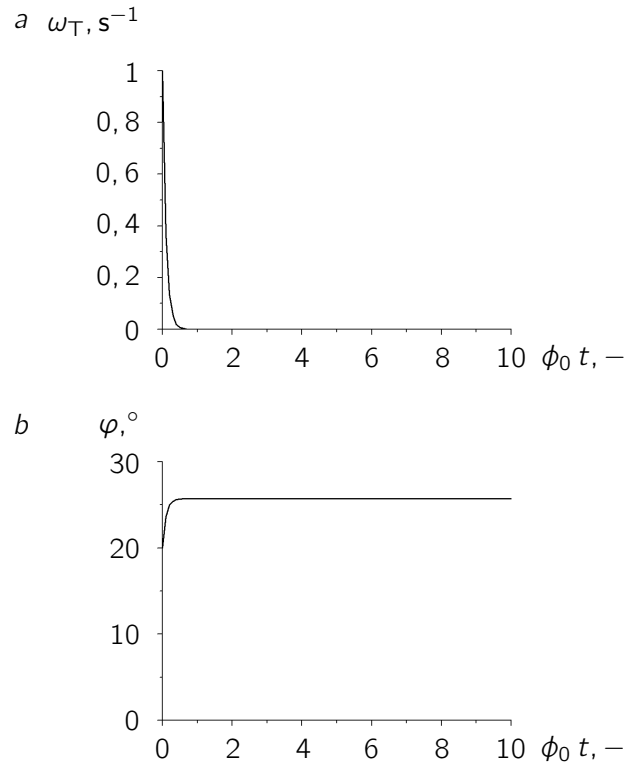
$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{m} \stackrel{(4.38)}{=} \frac{\omega_T}{\omega_T} \cdot \mathbf{m} = 0, \quad (4.45)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{m}_0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{m}_0 \stackrel{(4.45)}{=} 0 \quad (4.46)$$

bestimmt. Das Skalarprodukt von Gl. (4.43) mit  $\mathbf{k}$  führt damit auf

$$\omega_T = \dot{\varphi} \quad (4.47)$$

In Gl. (4.47) ist die Drehung um die Stabachse folgerichtig (wegen  $\mathbf{m} \cdot \mathbf{k} = 0$ ) nicht enthalten. Das ist auch physikalisch klar, denn die beiden Winkelgeschwindigkeitskomponenten  $\omega_T$  und  $\omega_N$  stehen senkrecht aufeinander, s. Gl. (4.5). Mit Gl. (4.47) kann die Orientierung von  $\mathbf{m}$  berechnet werden.



**Abbildung 4.5.** Lösung der Bewegungsgleichung (4.36) eines schlanken Stabes im ruhenden Medium. *a* Winkelgeschwindigkeit  $|\boldsymbol{\omega}_T| = \omega_T$ , *b* Drehung der Stabachse

Mit  $\boldsymbol{\omega}_{T0} = \omega_{T0} \mathbf{k}$  wird Gl. (4.37) zu

$$\dot{\varphi} \mathbf{k} = \omega_{T0} \exp\left(-\frac{t}{\chi}\right) \mathbf{k}. \quad (4.48)$$

Die Anfangsbedingung sei  $\varphi(0) = \varphi_0$ . Die Lösung der Differentialgleichung (4.48) ist

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \chi \omega_{T0} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\chi}\right) \right], \quad (4.49)$$

$\varphi$  ist der Winkel, um den sich der Stab von seiner Ausgangslage  $\mathbf{m}_0$  in die aktuelle Lage  $\mathbf{m}$  dreht, s. Gl. (4.41) und Abb. 4.4. Mit Gl. (4.49) ist  $\varphi(t)$  bekannt und damit auch die Orientierung der Stabachse  $\mathbf{m}$ . Der Stab rotiert um den Vektor  $\mathbf{k}$  mit abnehmender Winkelgeschwindigkeit. Nach der Zeit  $t \rightarrow \infty$  ist sein Orientierungswinkel  $\varphi_\infty = \varphi_0 + \chi \omega_{T0}$ .

In Abb. 4.5 ist die Lösung der Bewegungsgleichung (4.36) grafisch dargestellt. Als Anfangsbedingungen wurden gewählt:  $\omega_{T0} = 1 \text{ s}^{-1}$  und  $\varphi_0 = 20^\circ$ . Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_T$  nimmt bis auf Null ab. Genauso lange dreht sich die Stabachse um den Vektor  $\mathbf{k}$ .



### 4.3.2 Rotationsströmung

In einer Rotationsströmung (Abb. 4.6) ist wegen  $d_0 = 0$  auch  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ , und der Geschwindigkeitsgradient  $\mathbf{L}$  reduziert sich zu seinem antisymmetrischen Teil  $\mathbf{L} = \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{E}$ . Für die Bewegungsgleichung (4.13) folgt daraus

$$\chi \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{T}} = \mathbf{m} \times (\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{m} - \boldsymbol{\omega}_{\text{T}} = (\mathbf{m} \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{\phi}) \cdot \mathbf{m} - \boldsymbol{\omega}_{\text{T}} \quad (4.50)$$

$$= (\boldsymbol{\phi} \mathbf{m} - \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{m} \mathbf{E}) \cdot \mathbf{m} - \boldsymbol{\omega}_{\text{T}}$$

$$= (\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{m} \mathbf{m}) \cdot \mathbf{m} - \boldsymbol{\omega}_{\text{T}}. \quad (4.51)$$

Mit

$$\boldsymbol{\phi}_{\text{T}} \equiv \boldsymbol{\phi} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}) \quad (4.52)$$

ist die Bewegungsgleichung

$$\chi \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{T}} = \boldsymbol{\phi}_{\text{T}} - \boldsymbol{\omega}_{\text{T}}, \quad (4.53)$$

$$\dot{\mathbf{m}} = \boldsymbol{\omega}_{\text{T}} \times \mathbf{m}. \quad (4.54)$$

Vernachlässigt man in Gl. (4.53) den Widerstand, den das umgebende Medium der Drehung des Stabes entgegensetzt ( $\chi = 0$ ), folgt

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{T}} = \boldsymbol{\phi}_{\text{T}} = \phi_0 \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}), \quad \boldsymbol{\phi} = \phi_0 \mathbf{n}. \quad (4.55)$$

Die Drehung der Achse  $\mathbf{m}$  und ihre Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}_{\text{T}}$  sind entsprechend Gln. (4.41) und (4.43)

$$\mathbf{m} = \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{n}) \cdot \mathbf{m}_0, \quad (4.56)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{T}} = \dot{\varphi} \mathbf{n} - \omega_{\text{N}} \mathbf{m} \quad (4.57)$$

und mit  $\boldsymbol{\omega}_{\text{T}} = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}) = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{m} \mathbf{m}$

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{T}} = \dot{\varphi} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}). \quad (4.58)$$

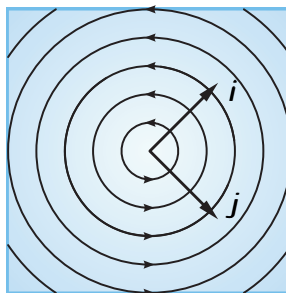


Abbildung 4.6. Rotationsströmung

#### 4 Bewegungsgleichung

Durch Gleichsetzen von (4.55) und (4.58) erhält man

$$\phi_0 \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}) = \dot{\varphi} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}), \quad (4.59)$$

$$\dot{\varphi} = \phi_0, \quad (4.60)$$

$$\varphi(t) = \phi_0 t + \varphi_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0. \quad (4.61)$$

Nach Gl. (4.56) rotiert die Achse  $\mathbf{m}$  des Partikels mit der Strömung um die Wirbelachse  $\mathbf{n}$  mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. Die Enden der Partikelachse beschreiben einen kreisrunden periodischen Orbit, den sogenannten *Jeffery-Orbit*, der die Bewegung eines Rotationsellipsoids in einer Scherströmung darstellt. Die Lösung (4.55) genügt allerdings nicht der Differentialgleichung (4.50). Deren stationäre Gleichung ist

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{T}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{m}(t) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4.62)$$

mit der Lösung

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{T}} = \boldsymbol{\phi}, \quad \mathbf{m}(t) = \mathbf{Q}(\varphi(t)\mathbf{n}) \cdot \mathbf{m}_0. \quad (4.63)$$

Im stationären Zustand rotiert der schlanke Stab also in der Strömungsebene um die Wirbelachse  $\mathbf{n}$  mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\phi_0$ . Damit ist gezeigt, dass sich der Stab ohne den Einfluss des Widerstandes vom Medium fortwährend um die Achse  $\boldsymbol{\phi}_{\text{T}}$  und im stationären Zustand um  $\boldsymbol{\phi}$  in der Strömungsebene dreht.

Für den langsamen Übergang des Stabes von einer beliebigen Ausgangslage  $\mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{n} \neq 0$  bis zu einer stabilen Drehung in der Strömungsebene wird eine analytische Näherungslösung gesucht [5]. Dafür wird die Perturbationsmethode angewendet, die immer dann eine gute Näherung bietet, wenn die Bewegungsgleichung einen kleinen Faktor enthält, in (4.53) ist das der Koeffizient  $\chi$  [62]. Die Näherungslösung besteht aus einer Anzahl kleiner werdender Terme, die sich der Lösung der Differentialgleichung annähern. Wir suchen eine Lösung der Form

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{T}} = \boldsymbol{\omega}_{\text{T}0} + \chi \boldsymbol{\omega}_{\text{T}1}. \quad (4.64)$$

In Gl. (4.64) ist  $\boldsymbol{\omega}_{\text{T}0}$  der „widerstandsfreie“ Anteil der Lösung und  $\chi \boldsymbol{\omega}_{\text{T}1}$  eine Art Korrektur, mit der der Widerstand des umgebenden Mediums beschrieben ist. Die Zeitableitung von Gl. (4.64) ist

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{T}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{T}0} + \chi \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{T}1}. \quad (4.65)$$

Der Perturbationsansatz (4.64) und dessen Ableitung nach der Zeit (4.65) werden in die Bewegungsgleichung (4.53) eingesetzt. Mit Gl. (4.52) erhält man

$$\chi \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{T}0} + \chi^2 \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{T}1} + \boldsymbol{\omega}_{\text{T}0} + \chi \boldsymbol{\omega}_{\text{T}1} = \phi_0 \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}). \quad (4.66)$$

Der Methode entsprechend werden die verschiedenen Potenzen von  $\chi$  nacheinander Null gesetzt:

$$(\chi^0) \quad \boldsymbol{\omega}_{\text{T}0} = \phi_0 \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}), \quad (4.67)$$

$$(\chi^1) \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{T}0} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{T}1} = \mathbf{0}. \quad (4.68)$$

Da  $\chi$  klein ist, gilt  $\chi^2 \rightarrow 0$ , der Term  $\chi^2 \ddot{\omega}_{T1}$  in (4.66) wird daher vernachlässigt. Gleichung (4.67) ist die „widerstandsfreie“ oder *Jeffery*-Lösung. Ihre Zeitableitung ist

$$\dot{\omega}_{T0} = -\phi_0 \mathbf{n} \cdot (\dot{\mathbf{m}} \mathbf{m} + \mathbf{m} \dot{\mathbf{m}}). \quad (4.69)$$

Diese in Gl. (4.68) eingesetzt ergibt für  $\dot{\omega}_{T1}$

$$\dot{\omega}_{T1} = \phi_0 \mathbf{n} \cdot (\dot{\mathbf{m}} \mathbf{m} + \mathbf{m} \dot{\mathbf{m}}) \quad (4.70)$$

und mit  $\dot{\mathbf{m}} = \boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{m}$

$$\dot{\omega}_{T1} = \phi_0 \mathbf{n} \cdot [(\boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{m}) \mathbf{m} + \mathbf{m} (\boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{m})]. \quad (4.71)$$

Für  $\boldsymbol{\omega}_T$  wird in Gl. (4.71) der Perturbationsansatz (4.64) eingesetzt:

$$\dot{\omega}_{T1} = \phi_0 \mathbf{n} \cdot [(\boldsymbol{\omega}_{T0} + \chi \dot{\omega}_{T1}) \times \mathbf{m} \mathbf{m} + \mathbf{m} (\boldsymbol{\omega}_{T0} + \chi \dot{\omega}_{T1}) \times \mathbf{m}]. \quad (4.72)$$

In Gl. (4.72) ist

$$\boldsymbol{\omega}_{T0} \times \mathbf{m} = \phi_0 \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}) \times \mathbf{m} = \phi_0 (\mathbf{n} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} \mathbf{m}) \times \mathbf{m} = \phi_0 \mathbf{n} \times \mathbf{m}. \quad (4.73)$$

Damit wird  $\dot{\omega}_{T1}$  zu

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{T1} &= \phi_0^2 \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{m}) \mathbf{m} + \phi_0 \chi \mathbf{n} \cdot (\dot{\omega}_{T1} \times \mathbf{m}) \mathbf{m} \\ &+ \phi_0^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} \mathbf{n} \times \mathbf{m} + \phi_0 \chi \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} \dot{\omega}_{T1} \times \mathbf{m} \end{aligned} \quad (4.74)$$

und mit  $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{m}) = 0$  zu

$$\dot{\omega}_{T1} = \phi_0 \chi [\mathbf{n} \cdot (\dot{\omega}_{T1} \times \mathbf{m}) \mathbf{m} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} \dot{\omega}_{T1} \times \mathbf{m}] + \phi_0^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} \mathbf{n} \times \mathbf{m}. \quad (4.75)$$

Gleichung (4.65) ergibt mit Gl. (4.68)

$$\dot{\omega}_T = -\dot{\omega}_{T1} + \chi \ddot{\omega}_{T1} \quad (4.76)$$

$$\stackrel{(4.75)}{=} -\phi_0 \chi \left[ \mathbf{n} \cdot (\dot{\omega}_{T1} \times \mathbf{m}) \mathbf{m} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} \dot{\omega}_{T1} \times \mathbf{m} - \frac{1}{\phi_0} \ddot{\omega}_{T1} \right] - \phi_0^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} \mathbf{n} \times \mathbf{m}. \quad (4.77)$$

Gleichung (4.77) mit (4.64) und (4.67) in die Bewegungsgleichung (4.53) eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned} &- \phi_0 \chi^2 \left[ \mathbf{n} \cdot (\dot{\omega}_{T1} \times \mathbf{m}) \mathbf{m} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} \dot{\omega}_{T1} \times \mathbf{m} - \frac{1}{\phi_0} \ddot{\omega}_{T1} \right] \\ &- \phi_0^2 \chi \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} \mathbf{n} \times \mathbf{m} + \phi_0 \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}) + \chi \dot{\omega}_{T1} = \phi_0 \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}). \end{aligned} \quad (4.78)$$

Da  $\chi$  klein ist, ist  $\chi^2 \cong 0$ , und aus Gl. (4.76) erhalten wir für  $\dot{\omega}_{T1}$

$$\dot{\omega}_{T1} = \phi_0^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} \mathbf{n} \times \mathbf{m}. \quad (4.79)$$

Mit den Gln. (4.67) und (4.79) ist die Rotationsgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}_T$  gemäß Gl. (4.64)

$$\boldsymbol{\omega}_T = \phi_0 \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}) + \chi \phi_0^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} \mathbf{n} \times \mathbf{m}. \quad (4.80)$$

#### 4 Bewegungsgleichung

Mit Gl. (4.80) ist die Geschwindigkeit bestimmt, mit der der Stab rotiert. Das ist die halbe Lösung der Bewegungsgleichung (4.53). Im nächsten Schritt muss die zugehörige Orientierung der Achse  $\mathbf{m}$  gefunden werden. Eine allgemeine Drehung eines Vektors  $\mathbf{m}$  kann als Folge der 3 *Euler*-Drehungen Präzession (Drehwinkel  $\varphi$ ), Nutation (Drehwinkel  $\vartheta$ ) und Eigenrotation ( $\psi$ ) dargestellt werden:

$$\mathbf{m} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{p}, \quad (4.81)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{n}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{p} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{Q}(\psi \mathbf{p}), \quad (4.82)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{n}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{p} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{p}, \quad \mathbf{Q}(\psi \mathbf{p}) \cdot \mathbf{p} = \mathbf{p}. \quad (4.83)$$

Ausgangslage für die Drehung (4.83) ist ein Vektor  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = 1$ , der in der Strömungsebene liegt. Der Vektor  $\mathbf{n}$  ist kollinear mit dem Wirbelvektor  $\boldsymbol{\phi} = \phi_0 \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n}$  und  $\mathbf{p}$ , s. Abb. 4.7. Aus der Drehung der Achse  $\mathbf{m}$  in Gl. (4.83) kann die zugehörige Rotationsgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  bestimmt werden [61] nach der Gleichung

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{n} + \dot{\vartheta} \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{n}) \cdot \mathbf{p} \times \mathbf{n} + \dot{\psi} \mathbf{m}, \quad (4.84)$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{n}) \cdot \mathbf{p}, \quad (4.85)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{n} + \dot{\vartheta} \mathbf{p}' \times \mathbf{n} + \dot{\psi} \mathbf{m}. \quad (4.86)$$

$\boldsymbol{\omega}$  in (4.86) ist die gesamte Rotationsgeschwindigkeit, mit der sich  $\mathbf{m}$  dreht. Mit Gl. (4.80) haben wir die Drehgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}_\top$  senkrecht zur Achse  $\mathbf{m}$  bestimmt. Mit Gl. (4.5) ist

$$\boldsymbol{\omega}_\top = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{m} \mathbf{m}, \quad (4.87)$$

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{m} \mathbf{m} = \dot{\varphi} \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} \mathbf{m} + \dot{\vartheta} (\mathbf{p}' \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{m} \mathbf{m} + \dot{\psi} \mathbf{m}, \quad (4.88)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_\top &= \dot{\varphi} \mathbf{n} + \dot{\vartheta} \mathbf{p}' \times \mathbf{n} + \dot{\psi} \mathbf{m} - \dot{\varphi} \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} \mathbf{m} - \dot{\vartheta} (\mathbf{p}' \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{m} \mathbf{m} - \dot{\psi} \mathbf{m}, \\ &= \dot{\varphi} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}) + \dot{\vartheta} \mathbf{p}' \times \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}). \end{aligned} \quad (4.89)$$

Aus Abb. 4.7 ist ersichtlich, dass der Term  $(\mathbf{p}' \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{m} = 0$ , da  $\mathbf{p}' \times \mathbf{n} \perp \mathbf{p}'$  und  $\mathbf{m}$  durch die Drehung  $\mathbf{m} = \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{p}' \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{p}'$  dargestellt werden kann. Mit dieser Drehung bewegt sich der Vektor  $\mathbf{p}'$  auf dem „Meridian“ auf  $\mathbf{m}$ , und der rechte Winkel zwischen  $\mathbf{p}' \times \mathbf{n}$  und  $\mathbf{p}'$  bleibt erhalten. Gleichung (4.89) wird damit zu

$$\boldsymbol{\omega}_\top = \dot{\varphi} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}) + \dot{\vartheta} \mathbf{p}' \times \mathbf{n}. \quad (4.90)$$

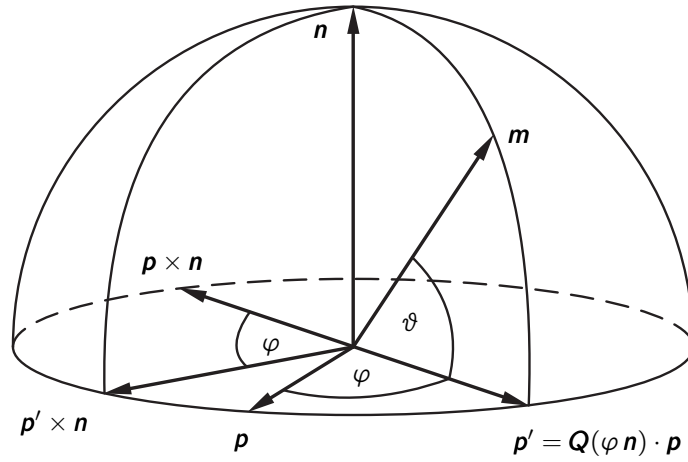
Die Achse  $\mathbf{m}$  kann mit Hilfe der Winkel  $\varphi$  und  $\vartheta$  dargestellt werden. Gelingt es, aus (4.90)  $\varphi$  und  $\vartheta$  zu bestimmen, ist damit auch die Orientierung von  $\mathbf{m}$  bekannt. Die Gln. (4.80) und (4.90) gleichgesetzt ergibt

$$\phi_0 \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}) + \chi \phi_0^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} \mathbf{n} \times \mathbf{m} = \dot{\varphi} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}) + \dot{\vartheta} \mathbf{p}' \times \mathbf{n}. \quad (4.91)$$

Gl. (4.91) wird nacheinander mit den Vektoren  $\mathbf{n}$  und  $(\mathbf{p}' \times \mathbf{n})$  skalar multipliziert. Daraus ergibt sich

$$\dot{\varphi} [1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{m})^2] = \phi_0 [1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{m})^2] \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \phi_0, \quad (4.92)$$

$$\dot{\vartheta} = \chi \phi_0^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} (\mathbf{n} \times \mathbf{m}) \cdot (\mathbf{p}' \times \mathbf{n}). \quad (4.93)$$



**Abbildung 4.7.** Aktuelle Orientierung der Partikelachse als Kombination zweier Drehungen

Aus Gl. (4.92) folgt die Lösung für den Winkel  $\varphi$

$$\varphi(t) = \phi_0 t + \varphi_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0 \quad (4.94)$$

und mit

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = \sin \vartheta, \quad (4.95)$$

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{m}) \cdot (\mathbf{p}' \times \mathbf{n}) = \mathbf{m} \cdot (\mathbf{p}' \times \mathbf{n} \times \mathbf{n}) = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{p}' = -\cos \vartheta \quad (4.96)$$

für  $\vartheta$  die Differentialgleichung

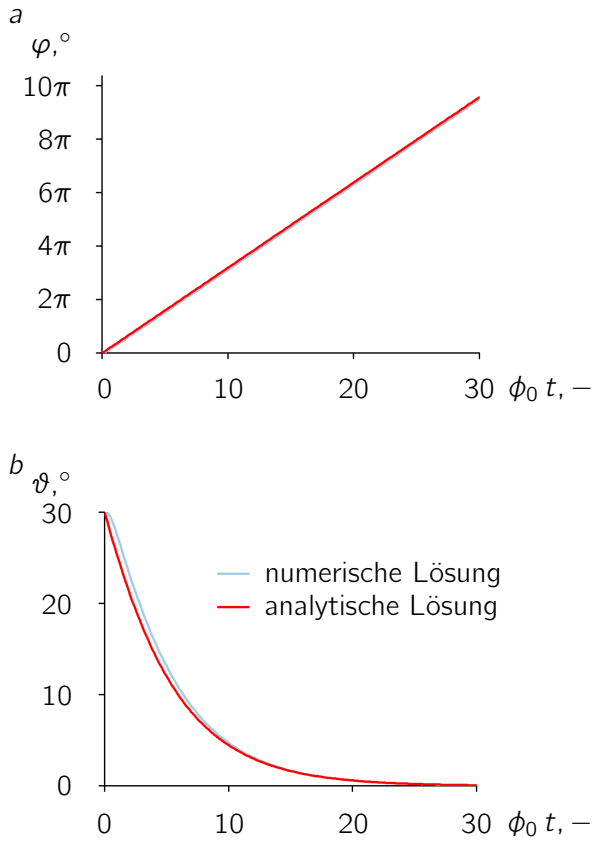
$$\dot{\vartheta} = -\chi \frac{\phi_0^2}{2} \sin(2\vartheta) \quad (4.97)$$

mit der Lösung

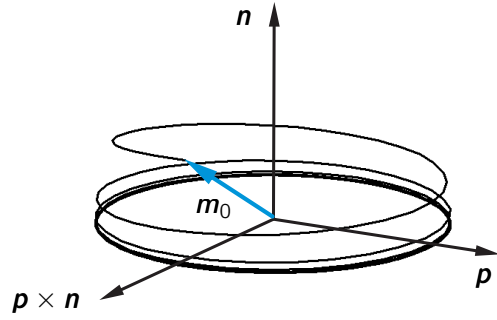
$$\tan \vartheta = \tan(\vartheta_0) \exp(-\chi \phi_0^2 t), \quad \vartheta(0) = \vartheta_0. \quad (4.98)$$

Der zweite Term in Gl. (4.80) und die Gln. (4.94) und (4.98) sind eine Korrektur der Lösung in Gl. (4.55), in der der Effekt der Trägheit auf die Bewegung des Partikels vernachlässigt war. Die Änderung des Winkels  $\vartheta$  mit der Zeit stellt das Driften des Partikels in die Strömungsebene dar. Dort rotiert es dann im stationären Zustand um die Wirbelachse. Die Näherungslösungen (4.80) und (4.94) bzw. (4.98) sind, da sie mit Hilfe der Perturbationsmethode gefunden wurden, nur gültig für kleines  $\chi$  ( $\chi \ll 1$ ). Trotz dieser Einschränkung zeigen die Näherungslösungen, dass das Vernachlässigen der Trägheit zu qualitativen Fehlern in der Beschreibung der langsamen Partikelbewegung führt.

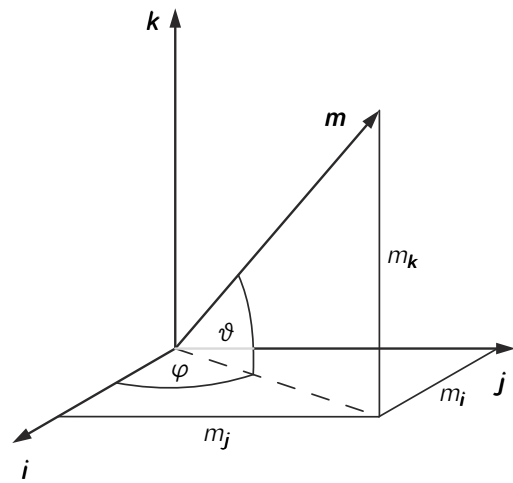
Die Rotation eines schlanken Partikels in einer Rotationsströmung ist in den Abbildungen 4.8 und 4.9 gezeigt. Die Anfangsbedingungen sind  $\vartheta_0 = 30^\circ$  und  $\boldsymbol{\omega}_T(0) = \mathbf{0}$ ,  $\chi = 0,2 \text{ s}$ ,  $\phi_0 = 1 \text{ s}^{-1}$ . In Abb. 4.8 ist die numerische Lösung der Bewegungsgleichungen (4.53) und (4.54) der analytischen Näherungslösung der Gln. (4.94) und (4.98) gegenübergestellt. Resultat der numerischen Lösung des Systems (4.53)-(4.54) sind die Koordinaten der Achse  $\mathbf{m}$  und des Vektors  $\boldsymbol{\omega}_T$  im  $ijk$ -System. Aus



**Abbildung 4.8.** Rotationsströmung, numerische Lösung der Bewegungsgleichung (4.53) und analytische Näherungslösungen (4.94) und (4.98). *a* Drehung um  $\mathbf{n}$  in der Strömungsebene, *b* Drehung in die Strömungsebene



**Abbildung 4.9.** Rotationsströmung, Trajektorie der Partikelachse, analytische Lösung nach der Perturbationsmethode



**Abbildung 4.10.** Partikelachse  $\mathbf{m}$  und Winkel  $\varphi$  und  $\vartheta$  im  $ijk$ -Koordinatensystem

den Koordinaten von  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = 1$ , werden die Winkel  $\varphi$  und  $\vartheta$  wie folgt bestimmt (s. auch Abb. 4.10):

$$\varphi = \arctan\left(\frac{m_j}{m_i}\right), \tag{4.99}$$

$$\vartheta = \arcsin(m_k). \tag{4.100}$$

Der Winkel  $\vartheta$  nimmt mit der Zeit ab, bis das Partikel in der Strömungsebene um die Wirbelachse  $\mathbf{n} = \boldsymbol{\phi}/\phi_0$  rotiert, s. Abb. 4.9. Die Lösungen  $\vartheta(t)$  (numerisch und analytisch mit Perturbation) für das Driften in die Strömungsebene unterscheiden sich nur im Anfangsbereich. Die Bewegung ist also mit dem Ansatz (4.80) und der Lösung (4.94)-(4.98) in guter Näherung beschrieben.

Der Winkel  $\vartheta$  hat seine „Nulllage“ in diesem Kapitel zwischen der Partikelachse  $\mathbf{m}$  und der Strömungsebene  $ij$ , im Gegensatz zur *Jeffery*-Definition des Nutationswinkels, s. Kapitel 2, daher die unterschiedlichen Schreibweisen  $\vartheta$  und  $\theta$  (*Jeffery*). Da bei der Lösung der Bewegungsgleichungen bis auf wenige spezielle Ausgangslagen<sup>1</sup> erwartet wurde, dass sich die Partikelachse in die Strömungsebene

<sup>1</sup>Z. B. die Anfangsorientierung senkrecht auf der Strömungsebene ( $\mathbf{m}_0 = \mathbf{k}$ ) in einer Rotationsströmung.

ne absenkt, wenn eine Wechselwirkung mit dem umgebenden Medium berücksichtigt wird, erscheint es sinnvoll,  $\vartheta$  so einzuführen, dass das Absenken aus  $\vartheta$  direkt abgelesen werden kann.

### 4.3.3 Scherströmung

In einer Scherströmung (Abb. 4.11) sind die Koeffizienten  $d_0$  des Tensors  $\mathbf{D}$  und  $\phi_0$  des Wirbelvektors  $\boldsymbol{\phi}$  gleich groß. Mit  $d_0 = \phi_0$  wird die Bewegungsgleichung (4.13) zu

$$\chi \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\top} + \boldsymbol{\omega}_{\top} = 2\phi_0 \mathbf{j} \cdot \mathbf{m} \mathbf{m} \times \mathbf{i}, \quad \dot{\mathbf{m}} = \boldsymbol{\omega}_{\top} \times \mathbf{m}. \quad (4.101)$$

Die Gleichungen (4.101) haben unendlich viele Gleichgewichtslösungen  $\mathbf{m} \cdot \mathbf{j} = 0$ ,  $\boldsymbol{\omega}_{\top} = \mathbf{0}$ . Ist der „Widerstandskoeffizient“  $\chi = 0$ , dann sind die beiden Lösungen  $\mathbf{m} = \pm \mathbf{i}$  stabil [17], der Vektor  $\mathbf{m}$  ist dann parallel zu den Stromlinien ausgerichtet. Ericksen zeigt in [17], dass  $\mathbf{m}$  sich für jede Ausgangslage  $\mathbf{m}_0$  dieser stationären Ausrichtung nähert. Berücksichtigt man nun den Widerstand des umgebenden Mediums, verzichtet man also auf die Annahme  $\chi = 0$ , sollte sich das Partikel trotzdem in derselben Weise ausrichten. Um das zu verifizieren, wird im folgenden die Gl. (4.101) mit der speziellen Anfangsbedingung  $\boldsymbol{\omega}_{\top}(0) \cdot \mathbf{i} = 0$  analysiert. Zur Zeit  $t = 0$  ist  $\mathbf{m}$  dann in  $\mathbf{i}$ -Richtung ausgerichtet ( $\mathbf{m} = \pm \mathbf{i}$ ). Das Skalarprodukt der ersten Gleichung in (4.101) mit  $\mathbf{i}$  führt auf

$$\chi \dot{\omega}_1 + \omega_1 = 0, \quad \omega_1 \equiv \boldsymbol{\omega}_{\top} \cdot \mathbf{i}. \quad (4.102)$$

Mit der Anfangsbedingung  $\omega_1(0) = 0$  folgt aus Gl. (4.102)

$$\omega_1(t) = \boldsymbol{\omega}_{\top}(t) \cdot \mathbf{i} = 0. \quad (4.103)$$

Die aktuelle Lage der Partikelachse  $\mathbf{m}$  ist analog zur Darstellung in Kapitel 4.3.2 bestimmt durch die Aufeinanderfolge der Drehungen um  $\gamma$ ,  $\alpha$  und  $\beta$ :<sup>2</sup>

$$\mathbf{m} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{i}, \quad (4.104)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\beta \mathbf{i}) \cdot \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\gamma \mathbf{i}), \quad (4.105)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{Q}(\beta \mathbf{i}) \cdot \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{k}) \cdot \mathbf{i}, \quad (4.106)$$

$$= \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{k}') \cdot \mathbf{i}, \quad (4.107)$$

$$= \cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \cos \beta \mathbf{j} + \sin \alpha \sin \beta \mathbf{k}. \quad (4.108)$$

In Gl. (4.107) ist

$$\mathbf{k}' = \mathbf{Q}(\beta \mathbf{i}) \cdot \mathbf{k} \quad (4.109)$$

Wie Gl. (4.106) zeigt, führen nur 2 der Drehungen zu einer Lageänderung von  $\mathbf{m}$ . Um die aktuelle Lage von  $\mathbf{m}$  zu beschreiben, reichen also 2 skalare Parameter aus. Das sind in Gl. (4.106) die beiden Winkel  $\alpha$  und  $\beta$ , mit denen  $\mathbf{m}$  um 2 feste Achsen ( $\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$  und  $\mathbf{i}$ ) rotiert, s. Abb. 4.12. Gleichung (4.103) impliziert, dass nur eine der beiden Rotationen unabhängig ist. Die zur Gl. (4.106)

<sup>2</sup>Die  $\mathbf{ij}$ -Ebene ist nach wie vor die Strömungsebene, die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  in Abb. 4.12 sind daher nicht identisch mit den Winkeln  $\varphi$  und  $\vartheta$  in Abb. 4.10

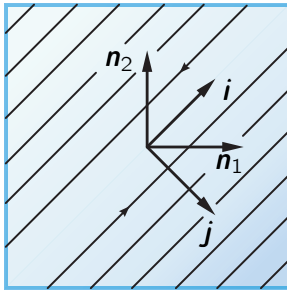


Abbildung 4.11. Scherströmung

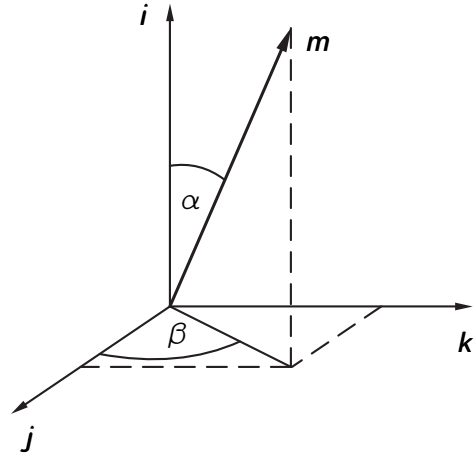


Abbildung 4.12. Darstellung des Vektors  $m$  als Aufeinanderfolge der Drehungen um  $\alpha$  und  $\beta$

gehörige Winkelgeschwindigkeit ist [61]

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\beta} \mathbf{i} + \dot{\alpha} \mathbf{Q}(\beta \mathbf{i}) \cdot \mathbf{k} + \dot{\gamma} \mathbf{m} \quad (4.110)$$

und mit  $\mathbf{Q}(\beta \mathbf{i}) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k}'$

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\beta} \mathbf{i} + \dot{\alpha} \mathbf{k}' + \dot{\gamma} \mathbf{m}. \quad (4.111)$$

Durch skalare Multiplikation mit dem Projektor  $\mathbf{P} = \mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}$  erhält man aus Gl. (4.111)

$$\boldsymbol{\omega}_T = \dot{\beta} \mathbf{i} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}) + \dot{\alpha} \mathbf{k}' - \dot{\alpha} \mathbf{k}' \cdot \mathbf{m} \mathbf{m}. \quad (4.112)$$

Das Skalarprodukt  $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{m}$  in Gl. (4.112) ist

$$\mathbf{k}' \cdot \mathbf{m} = [\mathbf{Q}(\beta \mathbf{i}) \cdot \mathbf{k}] \cdot \mathbf{m}, \quad (4.113)$$

$$= [(\mathbf{i} \mathbf{i} + \cos \beta (\mathbf{E} - \mathbf{i} \cdot \mathbf{i}) + \sin \beta \mathbf{i} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k}] \cdot \mathbf{m},$$

$$= (\cos \beta \mathbf{k} - \sin \beta \mathbf{j}) \cdot \mathbf{m},$$

$$= -\sin \alpha \sin \beta \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos \beta = 0. \quad (4.114)$$

Somit ist Gl. (4.112)

$$\boldsymbol{\omega}_T = \dot{\beta} \mathbf{i} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}) + \dot{\alpha} \mathbf{k}'. \quad (4.115)$$

Die Anfangsbedingungen der Differentialgleichung (4.112) sind  $\alpha(0) = \alpha_0$  und  $\beta(0) = \beta_0$ . Gleichung (4.115) skalar mit  $\mathbf{i}$  multipliziert ergibt

$$\boldsymbol{\omega}_T \cdot \mathbf{i} = \dot{\beta} [1 - (\mathbf{i} \cdot \mathbf{m})^2] = 0. \quad (4.116)$$



Für  $\mathbf{m} \neq \pm \mathbf{i}$  ist  $\dot{\beta} = 0$  und die Lösung der Gl. (4.113)  $\beta = \beta_0$ . Mit  $\dot{\beta} = 0$  vereinfachen sich Gln. (4.107) und (4.115) zu

$$\mathbf{m} = Q(\alpha \mathbf{k}') \cdot \mathbf{i}, \quad \mathbf{k}' = Q(\beta_0 \mathbf{i}), \quad (4.117)$$

$$\boldsymbol{\omega}_T = \dot{\alpha} \mathbf{k}'. \quad (4.118)$$

Mit der speziellen Anfangsbedingung  $\omega_1(0) = 0$  rotiert das Partikel um die feste Achse  $\mathbf{k}'$ . Die Rotationsgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}_T$  in Gl. (4.118) wird in die Bewegungsgleichung (4.101) eingesetzt. Dafür wird zunächst die Zeitableitung gebildet:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_T = \ddot{\alpha} \mathbf{k}' + \dot{\alpha} \dot{\mathbf{k}}', \quad (4.119)$$

$$\mathbf{k}' = \cos \beta_0 \mathbf{k} - \sin \beta_0 \mathbf{j}, \quad (4.120)$$

$$\dot{\mathbf{k}}' = \mathbf{0}, \quad (4.121)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_T = \ddot{\alpha} \mathbf{k}'. \quad (4.122)$$

Mit Gln. (4.108), (4.118), (4.122) und nach skalarer Multiplikation mit  $\mathbf{k}'$  wird Gl. (4.101) zu

$$\chi \ddot{\alpha} + \dot{\alpha} = -2\phi_0 \sin^2 \alpha \cos \beta_0, \quad (4.123)$$

einer skalaren Differentialgleichung 2. Ordnung für die Rotation um  $\alpha$ .

Bei Vernachlässigung des Widerstands des umgebenden Mediums ( $\chi = 0$ ) hat Gl. (4.123) die Lösung

$$\cot \alpha(t) = 2\phi_0 \cos \beta_0 t + \cot \alpha_0. \quad (4.124)$$

Für alle Anfangsbedingungen außer  $\mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{j} = 0$  (d. h.  $\alpha_0 = 0$ ) richtet sich das Partikel parallel zu den Stromlinien aus. Für  $\mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{j} = 0$  ist mit  $\chi = 0$

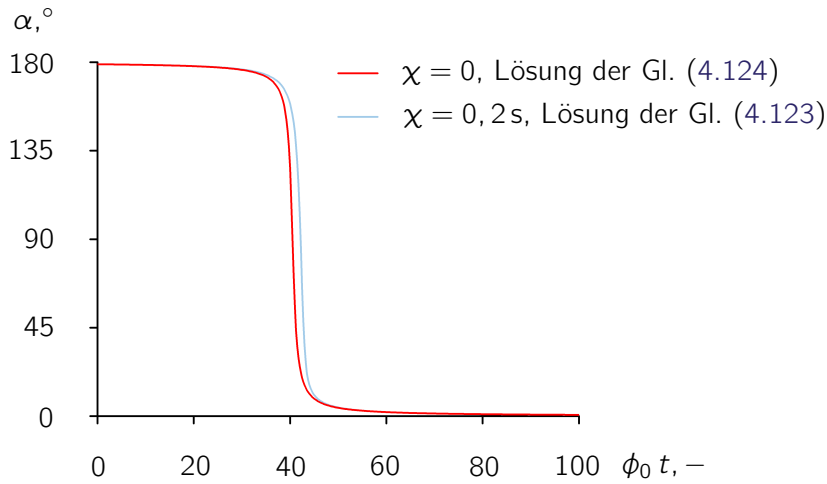
$$\dot{\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \alpha_0, \quad (4.125)$$

und  $\mathbf{m}$  ändert seine Lage nicht. Die numerische Lösung der Gl. (4.123) liegt für einen kleinen „Widerstandskoeffizienten“  $\chi \ll 1$  und  $\dot{\alpha}(0) = 0$  nahe der Lösung (4.124), in der kein Widerstand berücksichtigt ist. In Abb. 4.13 sind beide Lösungen gezeigt mit  $\chi = 0, 2 \text{ s}$ ,  $\phi_0 = 1 \text{ s}^{-1}$  und den Anfangsbedingungen  $\alpha_0 = 179^\circ$  und  $\beta_0 = 45^\circ$ . Das Partikel rotiert im Uhrzeigersinn um den Vektor  $\mathbf{k}'$  und strebt der stationären Orientierung parallel zu den Stromlinien zu. Nach jeder kleinen Auslenkung aus der stationären Lage gegen den Uhrzeigersinn dreht sich das Partikel in diese Lage zurück, bei kleiner Auslenkung im Uhrzeigersinn hingegen dreht sich das Partikel um fast  $180^\circ$  und befindet sich dann auch wieder in der stationären Lage (s. Abb. 4.13).

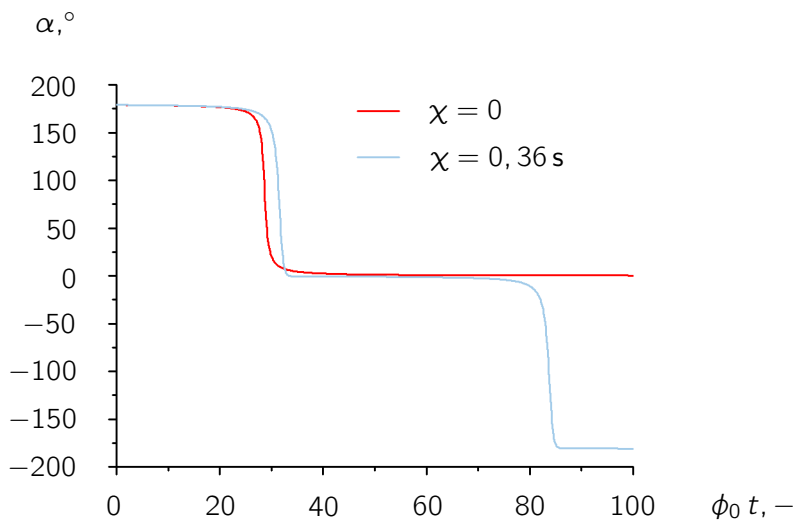
Für größere Werte von  $\chi < 1$  unterscheiden sich die numerische Lösung der Gl. (4.123) und die „widerstandsfreie“ Lösung (4.124) auch qualitativ. In Abb. 4.14 sind diese Lösungen gezeigt für  $\beta_0 = 0$  (das Partikel liegt zur Anfangszeit  $t = 0$  in der Strömungsebene)<sup>3</sup>,  $\phi_0 = 1 \text{ s}^{-1}$  und  $\alpha_0 = 179^\circ$ . Die rote Kurve zeigt die Lösung vom Jeffery-Typ mit  $\chi = 0$ , die blaue die numerische Lösung der Differentialgleichung 2. Ordnung mit  $\chi = 0, 36 \text{ s}$ . Bei Berücksichtigung des Widerstands (mit

<sup>3</sup>Der Winkel  $\beta_0$  ist in diesem Kapitel der Anfangswert des Winkels  $\beta$  in Abb. 4.12 und nicht der Koeffizient in Gl. (4.30).

#### 4 Bewegungsgleichung



**Abbildung 4.13.** Scherströmung, Partikelausrichtung in der Strömungsebene für  $\chi = 0, 2 \text{ s}$



**Abbildung 4.14.** Scherströmung, Partikelbewegung in der Strömungsebene für  $\chi = 0, 36 \text{ s}$

größerem  $\chi = 0, 36 \text{ s}$ ) gibt es keine Ausrichtung parallel zu den Stromlinien, sondern das Partikel springt über die stationäre Lage hinaus und rotiert weiter im Uhrzeigersinn um den Vektor  $\mathbf{k}$ .<sup>4</sup>

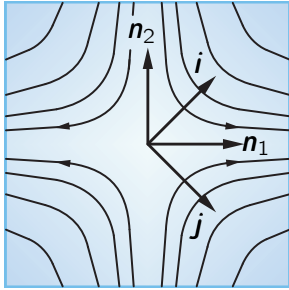
#### 4.3.4 Dehnströmung

Im Dehnströmungsfeld (Abb. 4.15) ist der Rotationsanteil  $\phi_0 = 0$ . Der Geschwindigkeitsgradient  $\mathbf{L}$  ist gleich dem Tensor  $\mathbf{D}$ , und die Bewegungsgleichung (4.13) reduziert sich zu

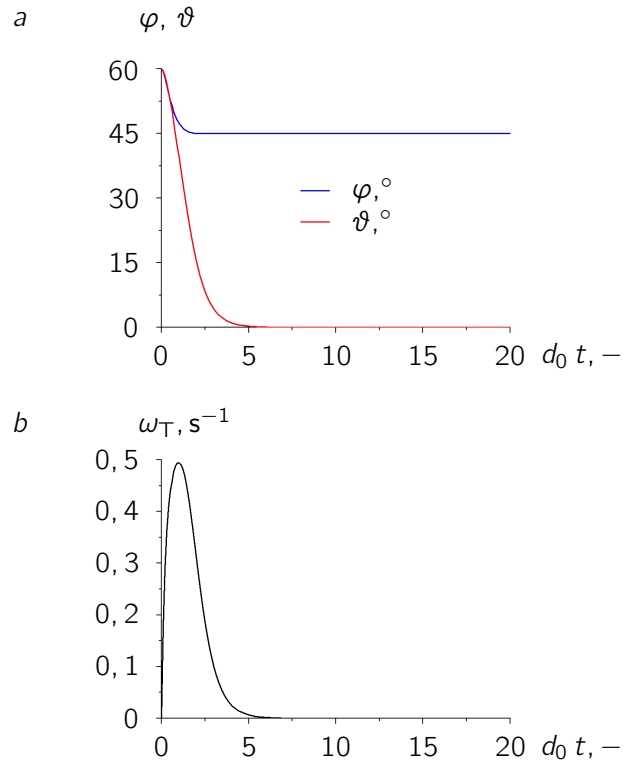
$$\chi \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{T}} = \mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} - \boldsymbol{\omega}_{\text{T}}. \quad (4.126)$$

Die rechte Seite der Bewegungsgleichung (4.126) ist nichtlinear, was zu erheblichen Schwierigkeiten führt, eine analytische Lösung zu finden. Für ein allgemein axialsymmetrisches Partikel ist das versucht worden, s. Kapitel 4.6.

<sup>4</sup>Bei kleineren Werten, z. B.  $\chi = 0, 35 \text{ s}$ , ist das Überspringen über die stationäre Lage nicht zu beobachten.



**Abbildung 4.15.** Dehnströmung



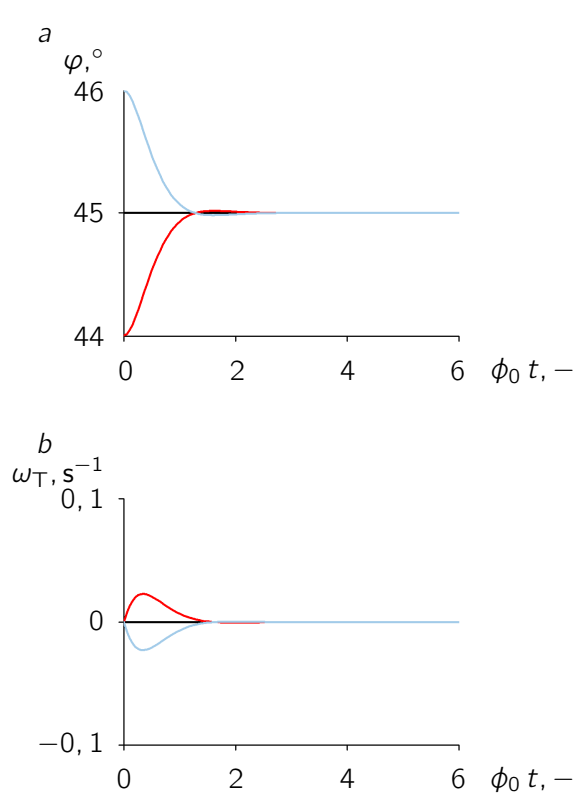
**Abbildung 4.16.** Dehnströmung, numerische Lösung der Bewegungsgleichung (4.126). *a* Ausrichtung des Partikels, *b* Winkelgeschwindigkeit  $|\omega_T| = \omega_T$

Die Asymptoten der Stromlinien stehen in einer Dehnströmung senkrecht aufeinander und fallen mit den Hauptachsen von  $\mathbf{D}$  zusammen, s. Abb. 4.15. Erwartet wird eine Ausrichtung des Partikels in Richtung der 1. Hauptachse, mit der in Gl. (4.33) gewählten Darstellung des Tensors  $\mathbf{D}$  entspricht das einer um  $\pi/4$  gegenüber der  $i$ -Achse des Strömungsfeldes gedrehten Lage. Die numerische Lösung<sup>5</sup> der Bewegungsgleichung (4.126) mit den Anfangsbedingungen  $\varphi(0) = 60^\circ$ ,  $\vartheta(0) = 60^\circ$  und  $\omega_T(0) = \mathbf{0}$  ist in Abb. 4.16 gezeigt, die Winkel  $\varphi$  und  $\vartheta$  s. Abb. 4.10. Die Achse  $\mathbf{m}$  des Partikels driftet in die Strömungsebene und richtet sich dort in der  $\mathbf{n}_1$ -Richtung aus.

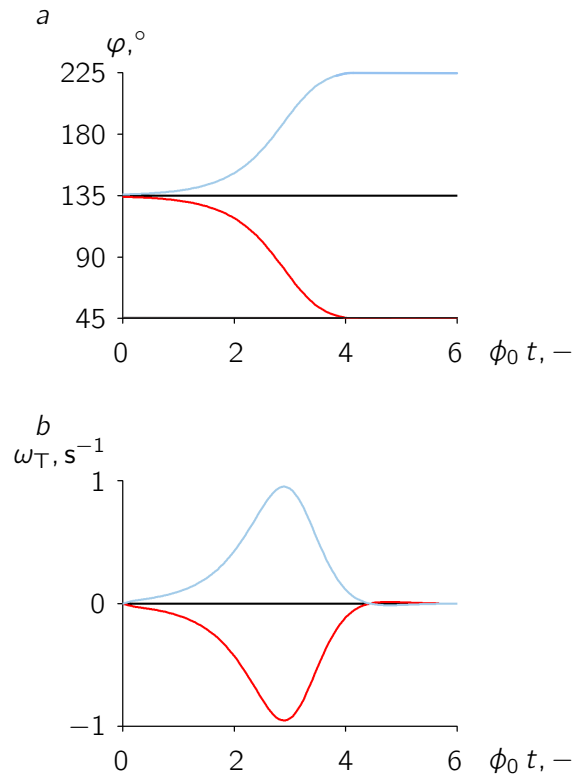
Interessant ist die Frage, wie sich ein Stab verhält, der zur Anfangszeit aus der  $\mathbf{n}_1$ - bzw. der  $\mathbf{n}_2$ -Lage ausgelenkt wird. Diese Drehungen sind in den Abb. 4.17 und 4.18 gezeigt. Wir erkennen eine stabile Lage in Richtung der 1. Hauptachse  $\mathbf{n}_1$  von  $\mathbf{D}$  und metastabile Lagen in  $\mathbf{n}_2$ - und in  $\mathbf{k}$ -Richtung,  $\mathbf{k} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ . Eine Lage wird dann als stabil bezeichnet, wenn eine Auslenkung aus dieser Lage zu einer Rückkehr in die Ausgangslage führt [25]. Metastabil bedeutet in diesem Zusammenhang Stabilität gegen kleine, aber Instabilität gegen große Änderungen oder, anders ausgedrückt, eine lokal stabile Lage.

Analog zur Lösung in einem Rotationsströmungsfeld wurde auch hier mit  $\omega_T(0) = \mathbf{0}$  gerechnet, das Partikel hat keine Anfangsgeschwindigkeit. Liegt es, wie in Abb. 4.17 *a*, zur Zeit  $t = 0$  in  $\mathbf{n}_1$ -Richtung (d. h.  $45^\circ$  zur  $i$ -Richtung), ändert es seine Lage nicht (schwarze Kurve). Eine kleine Auslenkung führt wieder auf dieselbe Ausrichtung. Gezeigt ist in Abb. 4.17 eine Auslenkung um jeweils  $1^\circ$  mit dem (blaue Kurve) und gegen den Uhrzeigersinn (rote Kurve). Die zugehörige Rotationsgeschwindigkeit  $\omega_T$  ist in Abb. 4.17 *b* dargestellt. Sie bleibt erwartungsgemäß Null, wenn sich die Achse  $\mathbf{m}$  nicht aus der

<sup>5</sup>Numerische Lösung mit dem *Runge-Kutta*-Verfahren mit adaptiver Schrittweite



**Abbildung 4.17.** Dehnströmung, numerische Lösung der Bewegungsgleichung (4.126), Ausgangslage nahe der 1. Hauptrichtung  $\mathbf{n}_1$  von  $\mathbf{D}$ . a Rückkehr in die stabile Lage nach kleiner Auslenkung, b Winkelgeschwindigkeit  $\omega_T$



**Abbildung 4.18.** Dehnströmung, numerische Lösung der Bewegungsgleichung (4.126), Ausgangslage nahe der 2. Hauptrichtung  $\mathbf{n}_2$  von  $\mathbf{D}$ . a Drehung um  $\pm 90^\circ$  nach kleiner Auslenkung aus der metastabilen Lage, b Winkelgeschwindigkeit  $\omega_T$

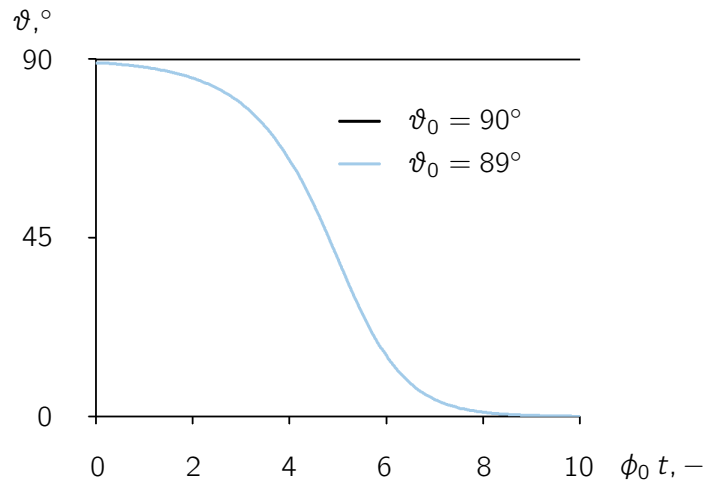
stabilen Lage bewegt (schwarze Kurve) und ändert sich in einem sehr kleinen Bereich, wenn  $\mathbf{m}$  aus der stabilen Lage ausgelenkt wird, solange, bis  $\mathbf{m}$  zurück in die  $\mathbf{n}_1$ -Richtung gedreht ist.

Ist die Ausgangslage genau in Richtung der metastabilen Achse  $\mathbf{n}_2$  (das entspricht  $-45^\circ$  zur  $i$ -Richtung), verbleibt das Partikel wiederum in dieser Lage, s. Abb. 4.18 a, schwarze Kurve. Bei kleiner Auslenkung um  $1^\circ$  im Uhrzeigersinn auf  $-44^\circ$  dreht sich das Partikel in die stabile Richtung  $\mathbf{n}_1$ , bei Auslenkung gegen den Uhrzeigersinn auf  $-46^\circ$  in Richtung  $-\mathbf{n}_1$ . Der Ausschlag in der Rotationsgeschwindigkeit  $\omega_T$  (Abb. 4.18 b) ist um eine Größenordnung größer als bei kleiner Auslenkung aus der stabilen Lage in  $\mathbf{n}_1$ -Richtung, was konsistent ist mit der hier „größeren“ Drehung um fast  $90^\circ$ .

In Abb. 4.19 ist die zweite metastabile Lage in  $\mathbf{k}$ -Richtung gezeigt. Als Anfangsgeschwindigkeit wurde auch hier  $\omega_T(0) = \mathbf{0}$  gewählt. Liegt das Partikel genau in  $\mathbf{k}$ -Richtung, bleibt es auch in dieser Lage (schwarze Kurve). Bei kleiner Auslenkung um  $1^\circ$  ( $\vartheta_0 = 89^\circ$ ), driftet das Partikel in die Strömungsebene.

### 4.3.5 Elliptische Strömung

In einer elliptischen Strömung sind beide Strömungsanteile (Dehn- und Rotationsströmung) enthalten, wobei der Anteil der Rotation größer ist ( $\phi_0 > d_0$ ), s. Abb. 4.20. Im folgenden wird das Verhältnis



**Abbildung 4.19.** Dehnströmung, numerische Lösung der Bewegungsgleichung (4.126), Driften in die Strömungsebene

beider Anteile durch den Koeffizienten  $\kappa$  ausgedrückt:

$$\kappa = \frac{d_0}{\phi_0}, \quad (4.127)$$

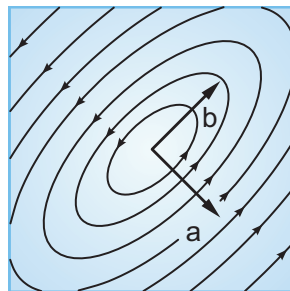
der in elliptischen Strömungen im Bereich  $0 < \kappa < 1$  liegt. Die Bewegungsgleichung eines Partikels in elliptischer und hyperbolischer Strömung ist

$$\chi \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{T}} = \phi_0 \boldsymbol{m} \times [(1 + \kappa) \boldsymbol{i} \boldsymbol{j} - (1 - \kappa) \boldsymbol{j} \boldsymbol{i}] \cdot \boldsymbol{m} - \boldsymbol{\omega}_{\text{T}}, \quad (4.128)$$

$$\dot{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{\omega}_{\text{T}} \times \boldsymbol{m}. \quad (4.129)$$

Vernachlässigt man den Widerstandskoeffizienten  $\chi$ , dann rotiert das Partikel mit der Winkelgeschwindigkeit

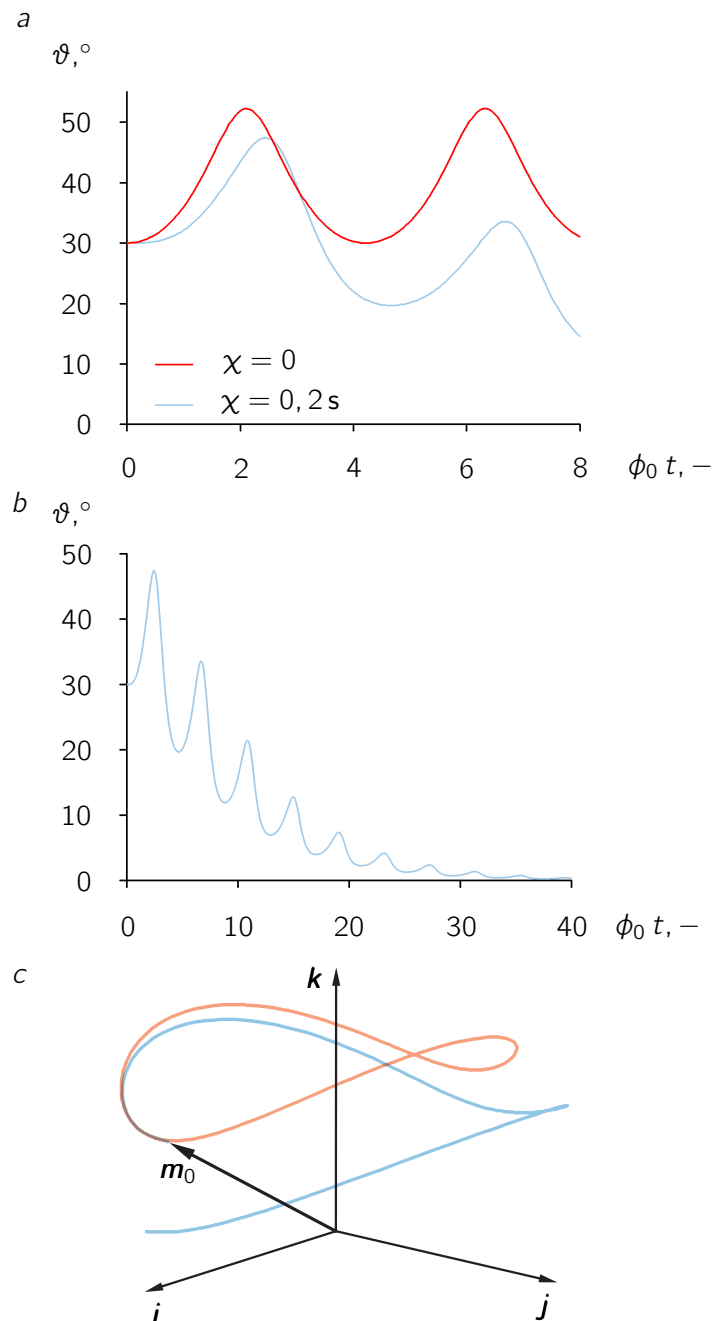
$$\boldsymbol{\omega}_{\text{T}} = \phi_0 \boldsymbol{m} \times [(1 + \kappa) \boldsymbol{i} \boldsymbol{j} - (1 - \kappa) \boldsymbol{j} \boldsymbol{i}] \cdot \boldsymbol{m} \quad (4.130)$$



**Abbildung 4.20.** Elliptische Strömung

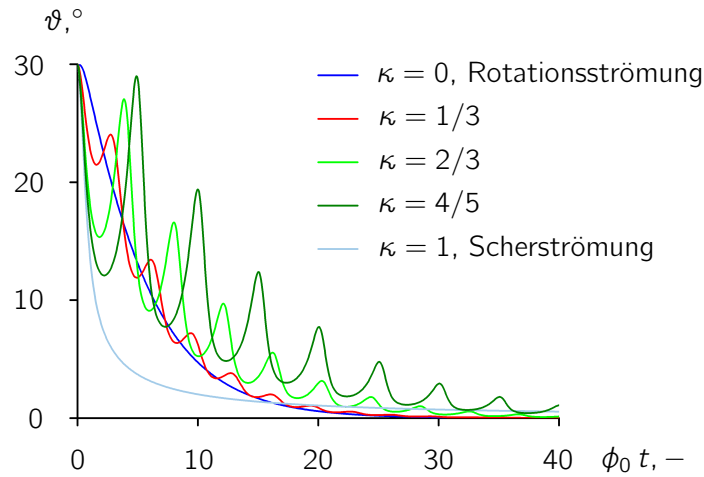
Gleichung (4.130) hat dieselbe Form wie die Bewegungsgleichung, die *Jeffery* in [29] für die Drehung eines Rotationsellipsoids in einer Scherströmung erhalten hat. Die *Jeffery*-Lösung ist

$$\boldsymbol{\omega}_T = \phi_0 \mathbf{m} \times [(1 + \zeta)\mathbf{i}\mathbf{j} - (1 - \zeta)\mathbf{j}\mathbf{i}] \cdot \mathbf{m}, \quad \zeta = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}. \quad (4.131)$$



**Abbildung 4.21.** Elliptische Strömung, Partikelbewegung. *a* Vergleich der Bewegung bei berücksichtigtem (blaue Kurven) und vernachlässigtem (rote Kurven) Widerstand, *b* Driften in die Strömungsebene, *c* Trajektorie der Partikelachse

Aus der Winkelgeschwindigkeit (4.131) bestimmte *Jeffery* die *Euler*-Winkel und leitete daraus die Lage der Achse ab. Nach seiner Lösung rotiert das Partikel so, dass die Enden der langen Ach-



**Abbildung 4.22.** Elliptische Strömung, Partikelbewegung (Winkel  $\vartheta$  zwischen Partikelachse und Strömungsebene) für verschiedene  $\kappa$

se einen geschlossenen periodischen Orbit beschreiben (den sog. *Jeffery*-Orbit, s. Kapitel 2). Die Differentialgleichung für die Lage der Partikelachse  $\mathbf{m}$  erhält man aus Gln. (4.129) und (4.130):

$$\dot{\mathbf{m}} = \phi_0(\mathbf{E} - \mathbf{m}\mathbf{m}) \cdot [(1 + \kappa)\mathbf{i}\mathbf{j} - (1 - \kappa)\mathbf{j}\mathbf{i}] \cdot \mathbf{m}. \quad (4.132)$$

Die Lösung der Gl. (4.132) ist in der Abb. 4.21 a als rote Kurve gezeigt. Die blauen Kurven stellen die numerische Lösung der Bewegungsgleichung (4.128) für eine elliptische Strömung unter Berücksichtigung des Widerstands des umgebenden Mediums (d. h.  $\chi \neq 0$ ) dar. Für die Rechnung wurden der Koeffizient des Wirbelvektors  $\phi$  mit  $\phi_0 = 1 \text{ s}^{-1}$  und  $\kappa = 2/3$  gewählt. Die Ausgangslage des Partikels ist  $\vartheta(0) = \vartheta_0 = 30^\circ$  und  $\varphi(0) = \varphi_0 = 45^\circ$ . Nach dem Modell von *Jeffery* rotiert das Partikel für jede Zeit  $t$  in gleicher Weise weiter. Bezieht man den Flüssigkeitswiderstand in das Modell mit ein, driftet die Achse in die Strömungsebene. Deutlicher dargestellt ist das Driften in Abb. 4.21 b für dieselben Ausgangsbedingungen, nur für einen größeren Zeitraum. Abbildung 4.21 c zeigt die Bahn, die das Ende des Vektors  $\mathbf{m}$  zieht für eine Umdrehung. Die rote *Jeffery*-Kurve ist geschlossen, nach einer Umdrehung hat die Achse wieder die Ausgangsposition erreicht. Die blaue Kurve zeigt dagegen, wie sich die Achse in die Strömungsebene absenkt.

In Abb. 4.22 ist die Partikelbewegung für verschiedene Werte von  $\kappa$  gezeigt, wiederum mit  $\phi_0 = 1 \text{ s}^{-1}$ ,  $\vartheta_0 = 30^\circ$  und  $\varphi_0 = 45^\circ$ . Die Kurven für  $\kappa = 0$  (d. h.  $d_0 = 0$ , Rotationsströmung) und  $\kappa = 1$  (d. h.  $d_0 = \phi_0$ , Scherströmung) markieren dabei die Grenzfälle der elliptischen Strömung. In beiden Grenzfällen driftet das Partikel direkt, also ohne Oszillation in die Strömungsebene, am schnellsten in einer Scherströmung. Im Anfangsbereich liegen die Kurven, die eine elliptische Strömung darstellen, sehr nahe an der Kurve der Scherströmung. Mit zunehmender Zeit nähern sie sich der Kurve einer Rotationsströmung an.

### 4.3.6 Hyperbolische Strömung

In einer hyperbolischen Strömung (s. Abb. 4.23) ist der Dehnungsanteil  $d_0$  größer als der Rotationsanteil  $\phi_0$  und damit  $\kappa > 1$ . Der Geschwindigkeitsgradiententensor  $\mathbf{L}$  ist im  $i$ - $j$ -System

$$\mathbf{L} = (d_0 - \phi_0) \mathbf{i}\mathbf{j} + (d_0 + \phi_0) \mathbf{j}\mathbf{i}. \quad (4.133)$$

Den Neigungswinkel  $\varphi_A$  der Asymptoten der Hyperbeln gegen die  $i$ -Achse berechnet Giesekus [20] mit

$$\tan \varphi_A = \pm \sqrt{\frac{d_0 - \phi_0}{d_0 + \phi_0}}. \quad (4.134)$$

Er gibt die stationäre Orientierung in der Strömungsebene an, bezogen auf das  $i$ - $j$ -System. In Abb. 4.24 a ist die Ausrichtung des Partikels in der Strömungsebene für verschiedene Werte von  $\kappa$  gezeigt. Je größer der Wert von  $\kappa$  ist, desto geringer ist der Anteil der Rotation ( $\phi_0$ ) an der Strömung. Ist  $\phi_0 = 0$ , dann liegt eine Dehnströmung vor, d. h.  $\kappa \rightarrow \infty$ . Das Partikel richtet sich in der 1. Hauptrichtung ( $\mathbf{n}_1$ ) des Tensors  $\mathbf{D}$  aus, s. Kapitel 4.3.4, also unter dem Winkel von  $45^\circ$  zur  $i$ -Richtung. Für  $\kappa = 1$  ist  $\phi_0 = d_0$ , das entspricht einer Scherströmung. Beide Grenzfälle sind in Abb. 4.24 a mit eingezeichnet.

Mit abnehmendem  $\kappa$  sinkt auch der Wert des Winkels  $\varphi$ , unter dem sich das Partikel ausrichtet. Die Stromlinienbilder für verschiedene  $\kappa$  sind in Abb. 4.24 b gezeigt. Sie folgen aus dem Geschwindigkeitsgradiententensor  $\mathbf{L} = \nabla \mathbf{v}_f$ . Es gilt [21]

$$d\mathbf{v}_f = d\mathbf{x} \cdot \nabla \mathbf{v}_f, \quad \mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.135)$$

Ist  $\mathbf{L}$  ein konstanter Tensor und wählt man ein Koordinatensystem so, dass im Ursprung  $\mathbf{v}_f = \mathbf{0}$  gilt, dann können in Gl. (4.135) die Differentiale durch die entsprechenden Größen selbst ersetzt werden:

$$\mathbf{v}_f = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{L} \quad (4.136)$$

Gleichung (4.136) ist die Differentialgleichung des dem Gradiententensor  $\mathbf{L}$  zugeordneten Strömungsfeldes. In Koordinatenschreibweise lautet Gl. (4.136)

$$\dot{x} = (d_0 + \phi_0) y, \quad \dot{y} = (d_0 - \phi_0) x \quad (4.137)$$

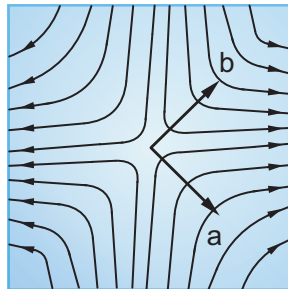
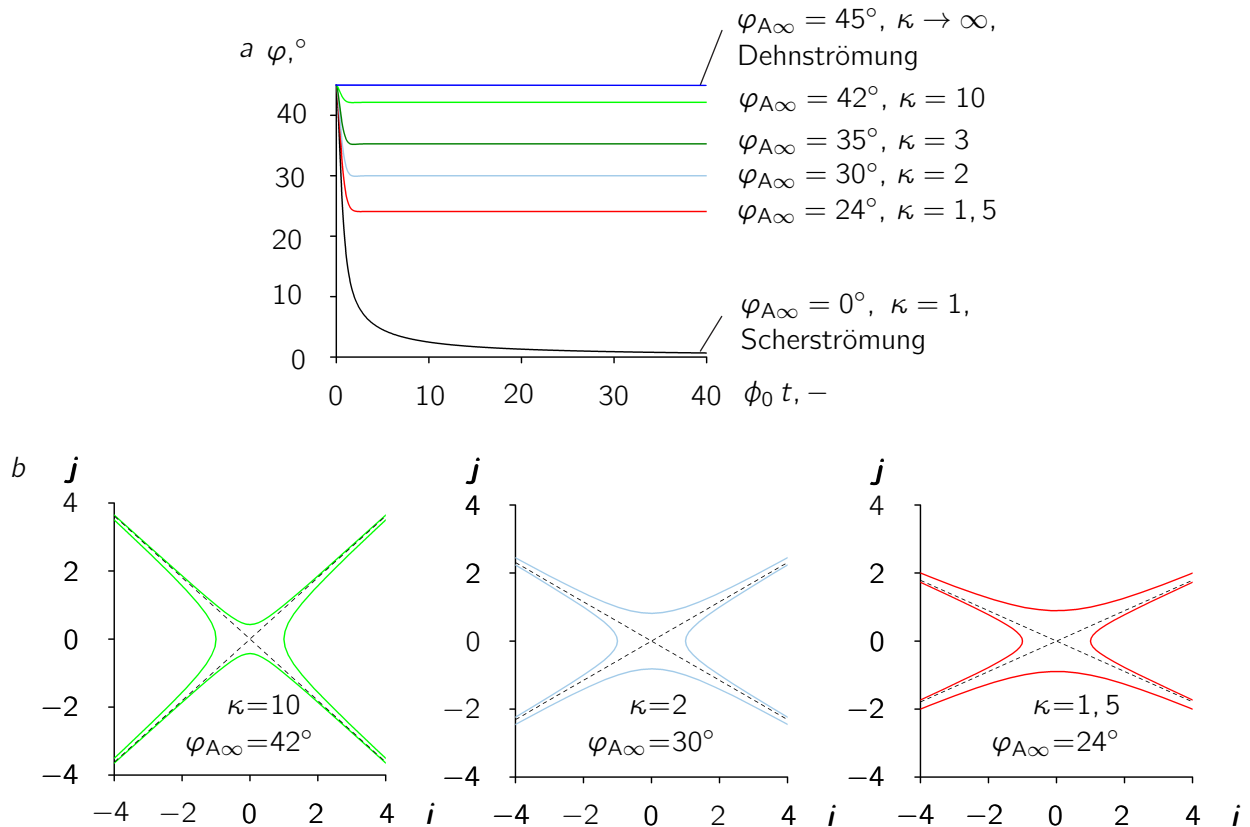


Abbildung 4.23. Hyperbolische Strömung





**Abbildung 4.24.** Hyperbolische Strömung. *a* Ausrichtung des Partikels in der Strömungsebene für verschiedene  $\kappa$ , *b* Stromlinien für verschiedene  $\kappa$

Die Lösungen der Differentialgleichungen (4.137) sind

$$x = x_0 \cosh\left(\sqrt{d_0^2 - \phi_0^2} t\right) + y_0 \sqrt{\frac{d_0 + \phi_0}{d_0 - \phi_0}} \sinh\left(\sqrt{d_0^2 - \phi_0^2} t\right) \quad (4.138)$$

$$y = y_0 \cosh\left(\sqrt{d_0^2 - \phi_0^2} t\right) + x_0 \sqrt{\frac{d_0 - \phi_0}{d_0 + \phi_0}} \sinh\left(\sqrt{d_0^2 - \phi_0^2} t\right), \quad (4.139)$$

$x_0$  und  $y_0$  sind die Koordinaten des betreffenden Bahnpunktes zur Zeit  $t = 0$ .

## 4.4 Lösung der Bewegungsgleichung eines zylindrischen Körpers

Der schlanke Stab ist ein zu einer Linie geschrumpfter Zylinder und damit ein Spezialfall eines axial-symmetrischen Körpers. Mit Blick auf die Bestimmung der Faserausrichtungen in spritzgegossenen kurzfaserverstärkten Polymeren ist ein schlanker Stab mit seiner Geometrie einer realen Faser ähnlich. Dennoch ist es wünschenswert, die Bewegung eines Körpers bestimmen zu können, der nicht der strikten Einschränkung der Eindimensionalität unterliegt. Zunächst wird nun die Bewegungsgleichung eines zylindrischen Körpers gelöst.

### 4.4.1 Bestimmung der Koeffizienten

Das folgende Differentialgleichungssystem, das die Bewegung eines axialsymmetrischen Körpers beschreibt, wurde im Kapitel 4.1 hergeleitet:

$$\dot{\omega}_N = \frac{\alpha}{\lambda}(\boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{m} - \omega_N), \quad \omega_N = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{m}, \quad (4.140)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_T = -\frac{\lambda}{\mu}\omega_N\dot{\mathbf{m}} + \frac{\beta}{\mu}(\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{m} \mathbf{m} - \boldsymbol{\omega}_T) + \frac{\eta}{\mu}\mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{m}, \quad (4.141)$$

$$\dot{\mathbf{m}} = \boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{m}. \quad (4.142)$$

Dort wurde ebenfalls gezeigt, dass die Bewegungsgleichung eines schlanken Stabes aus der eines allgemein axialsymmetrischen Körpers abgeleitet werden kann. Ein Zylinder mit  $H \gg R$  (Höhe  $H$  und Radius  $R$ ) sollte sich qualitativ so bewegen wie ein schlanker Stab. Um dies prinzipiell zu zeigen, müssen für die Lösung des Systems (4.140)-(4.142) die Widerstandskoeffizienten  $\alpha_Z$ ,  $\beta_Z$  und  $\eta_Z$  in Gl. (3.41) eines Zylinders an den Koeffizienten  $\chi$  des schlanken Stabes angepasst werden, für den im Kapitel 4.3  $\chi = 0,2s$  gewählt worden ist. Die Koeffizienten  $\alpha$  und  $\beta$  des Widerstandstensors enthalten neben den geometrischen Größen  $R$  und  $H$  auch die in dieser Arbeit so bezeichneten Viskositätskoeffizienten  $\zeta$  und  $\xi$ .<sup>6</sup> Da für sie keine experimentell ermittelten Werte vorliegen, müssen für die Lösung der Bewegungsgleichung eines Zylinders Werte vorgegeben werden. Dafür werden die folgenden Annahmen getroffen:

1. Glasfasern haben einen Durchmesser  $D = 3 \dots 25 \mu\text{m}$  und eine Dichte  $\rho = 2,6 \text{ g/cm}^3$  [45]. Von Kurzfasern spricht man bei einer Faserlänge  $H = 100 \dots 300 \mu\text{m}$  [43]. Die folgenden Werte werden für die Berechnungen zugrunde gelegt:

$$R = 10 \mu\text{m}, \quad (4.143)$$

$$H = 200 \mu\text{m}, \quad (4.144)$$

$$\rho = 2,6 \text{ g/cm}^3. \quad (4.145)$$

Die Konstanten  $\lambda_Z$  und  $\mu_Z$  des Trägheitstensors in Gl. (3.22) hängen allein von den Maßen des Zylinders und seiner Dichte ab und sind

$$\lambda_Z = 8,2 \cdot 10^{-6} \text{ g } \mu\text{m}^2, \quad (4.146)$$

$$\mu_Z = 5,5 \cdot 10^{-4} \text{ g } \mu\text{m}^2. \quad (4.147)$$

2. Zur Vereinfachung wird angenommen, dass die Koeffizienten  $\beta_Z$  und  $\eta_Z$  gleich sind. Damit ist zwar die Allgemeingültigkeit der Bewegungsgleichung eingeschränkt, sie gibt uns aber die Möglichkeit, die Koeffizienten so zu bestimmen, dass es physikalisch nachvollzogen werden kann. Da für  $\eta_Z$  keine Werte aus anderen Veröffentlichungen vorliegen, wäre die Alternative, willkürlich einen Wert festzulegen. Aus Gl. (4.141) wird

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_T = -\frac{\lambda_Z}{\mu_Z}\omega_N\dot{\mathbf{m}} + \frac{\beta_Z}{\mu_Z}(\mathbf{m} \times \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{m} - \boldsymbol{\omega}_T). \quad (4.148)$$

3. Ausgehend vom gedachten Anwendungsfall, dem Spritzgussprozess, ist anzunehmen, dass die Drehung um die Symmetrieachse mit der Geschwindigkeit  $\omega_N$  nur eine untergeordnete Rolle

<sup>6</sup>Sie enthalten neben der Viskosität des Fluids auch andere Informationen, z. B. über die Grenzschicht zwischen Partikel und Fluid, s. Kapitel 3.2.

spielt. Setzen wir  $\omega_N = 0$ , erhalten wir aus Gl. (4.148)

$$\dot{\omega}_T = \frac{\beta_Z}{\mu_Z} \left( \mathbf{m} \times \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{m} - \omega_T \right). \quad (4.149)$$

Damit ist nicht festgelegt, dass  $\omega_N$  in allen Berechnungen vernachlässigt werden muss. Die Annahme  $\omega_N = 0$  wird nur für die Bestimmung der Koeffizienten  $\zeta$  und  $\xi$  getroffen. Durch den Vergleich mit Gl. (4.13) ergibt sich

$$\frac{\beta_Z}{\mu_Z} = \frac{1}{\chi} \stackrel{(4.30)}{=} \frac{\beta_S}{\mu_S}. \quad (4.150)$$

Mit  $\mu_Z$  aus Gl. (4.147) und  $\chi = 0,2\text{ s}$  ist

$$\beta_Z = \eta_Z = 2,7 \cdot 10^{-3} \frac{\text{g} \mu\text{m}^2}{\text{s}} \quad (4.151)$$

4. Der Widerstandstensor  $\mathbf{G}$  in Gl. (3.40) und der Trägheitstensor  $\mathbf{C}$  in (3.23) haben dieselbe Struktur. Um den Koeffizienten  $\alpha_Z$  von  $\mathbf{G}$  vorläufig bestimmen zu können, muss eine weitere Annahme getroffen werden. Wir setzen

$$\frac{\lambda_Z}{\mu_Z} = \frac{\alpha_Z}{\beta_Z}. \quad (4.152)$$

Auch das ist eine Einschränkung der Allgemeingültigkeit, die gemacht wurde, um auf dem Weg zur Bestimmung der Viskositätskoeffizienten  $\zeta$  und  $\xi$  die Zahl der Unbekannten zu reduzieren. Mit Gl. (4.152) ist

$$\alpha_Z = 4,1 \cdot 10^{-5} \frac{\text{g} \mu\text{m}^2}{\text{s}}. \quad (4.153)$$

Aus Gl. (3.54) lassen sich, nachdem  $\alpha_Z$  und  $\beta_Z$  bestimmt sind, die Viskositätskoeffizienten  $\zeta$  und  $\xi$  berechnen:

$$\zeta = 3,2 \cdot 10^{-11} \frac{\text{g}}{\mu\text{m}^2\text{s}}, \quad (4.154)$$

$$\xi = 1,8 \cdot 10^{-10} \frac{\text{g}}{\mu\text{m}^2\text{s}}. \quad (4.155)$$

Die Koeffizienten  $\alpha_Z$  und  $\beta_Z$  hängen außer von  $\zeta$  und  $\xi$  noch von den Maßen  $H$  und  $R$  ab, s. Gl. (3.54). Berechnet man die Bewegung für verschiedene  $H/R$ , kann der Wert für  $\beta_Z$  in Gl. (4.151) und für  $\alpha_Z$  in (4.153) daher nur als Referenzwert verstanden werden. Mit Gln. (4.154) und (4.155) wurden die Koeffizienten  $\zeta$  und  $\xi$  einmalig bestimmt, mit denen die Viskosität des umgebenden Mediums, die Oberflächenbeschaffenheit des Partikels, Haftung/Gleitung des Mediums an der Partikeloberfläche u. a. m. beschrieben wird. All dies soll in der Rechnung für alle Partikelgeometrien gleich sein, daher werden  $\zeta$  und  $\xi$  für alle folgenden Berechnungen mit den Werten in (4.154) und (4.155) als konstant angenommen. Mit verändertem  $H/R$  ändern sich auch  $\lambda_Z$ ,  $\mu_Z$ ,  $\alpha_Z$  und  $\beta_Z$ , die Gleichungen für die

Koeffizienten wurden in den Kapiteln 3.1 und 3.2 hergeleitet:

$$\lambda_Z = \varrho \frac{\pi}{2} R^4 H, \quad (4.156)$$

$$\mu_Z = \varrho \frac{\pi}{12} (3R^4 H + R^2 H^3), \quad (4.157)$$

$$\alpha_Z = \pi \zeta (R^4 + 2R^3 H), \quad (4.158)$$

$$\beta_Z = \pi \zeta \left( R^3 H + \frac{R^2 H^2}{2} + \frac{R H^3}{12} \right) + \pi \xi \left( \frac{R^4}{2} + \frac{R H^3}{24} \right) \quad (4.159)$$

In Tabelle 4.1 sind die Trägheits- und Widerstandskoeffizienten für verschiedene  $H/R$  berechnet,  $\eta_Z$  ist bei allen Rechnungen gleich  $\beta_Z$ . Je kleiner das Verhältnis  $H/R$  wird, desto kleiner werden auch alle Trägheits- und Widerstandskoeffizienten. Stärker nehmen dabei  $\mu_Z$  und  $\beta_Z$  ab, da  $H$  hier in der 3. Potenz steht im Gegensatz zur 1. Potenz bei  $\lambda_Z$  und  $\alpha_Z$ .

In Abb. 4.25 ist das Ausrichten eines Zylinders mit  $H = 20R$  und eines schlanken Stabes im Vergleich in einem Scherströmungsfeld gezeigt.<sup>7</sup> In beiden Fällen wurden  $\vartheta_0 = 0$ ,  $\omega_T(0) = \omega_{T0} = \mathbf{k}$  und  $\omega_N(0) = \omega_{N0} = 0$  gewählt. Die Partikel lagen also anfangs in der Strömungsebene, die Bewegungsgleichungen wurden numerisch gelöst. Nach der Koeffizientenanpassung sind beide Kurven für  $H = 20R$  identisch.

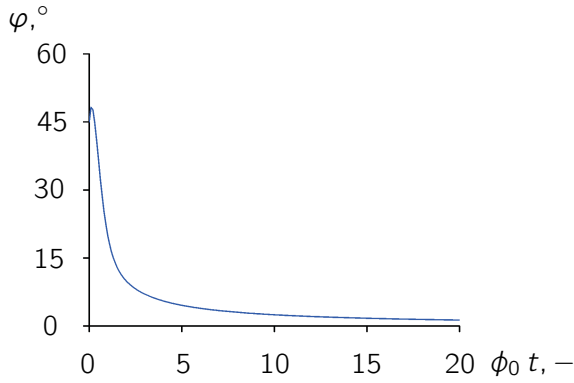
Die Ausrichtung von Zylindern mit verschiedenen  $H/R$  zeigt Abb. 4.26, die Anfangsbedingungen sind dieselben, wie sie für Abb. 4.25 verwendet wurden:  $\vartheta_0 = 0$ ,  $\omega_T(0) = \omega_{T0} = \mathbf{k}$  und  $\omega_N(0) = \omega_{N0} = 0$ . Sind Zylinderhöhe und -radius derselben Größenordnung (z. B. bei  $H = R$ ), ist der Zylinder nicht mehr schlank und wird im folgenden als kompakt bezeichnet. Wird  $H$  kleiner als  $R$  (wie bei  $H = 1/10R$ ), dann hat der Zylinder die Form einer flachen, kreisrunden Scheibe. Auch eine Scheibe richtet sich mit ihrer Achse  $\mathbf{m}$  in Strömungsrichtung aus, das bedeutet, dass sie senkrecht auf der Strömung steht, s. Abb. 4.27.

Mit den Koeffizienten  $\zeta$  und  $\xi$  in (4.154) und (4.155) lässt sich eine Übereinstimmung der Rotation des Zylinders  $H = 20R$  mit der eines schlanken Stabes erzielen. Zylinder mit anderen  $H/R$ -Verhältnissen verhalten sich sehr ähnlich. Das ist ein Hinweis darauf, dass die Koeffizienten geeignet sind für die Bestimmung der Bewegung eines Zylinders. Da aber mehrere Annahmen getroffen wurden, um die Koeffizienten zu bestimmen, und nicht bekannt ist, wie gut diese Annahmen sind, kann man aus der Lösung in Abb. 4.26 nicht automatisch schließen, dass die Drehung eines Zylinders bei Verwendung dieser Koeffizienten für alle Strömungsverhältnisse realitätsnah abgebildet werden kann. Die Koeffizi-

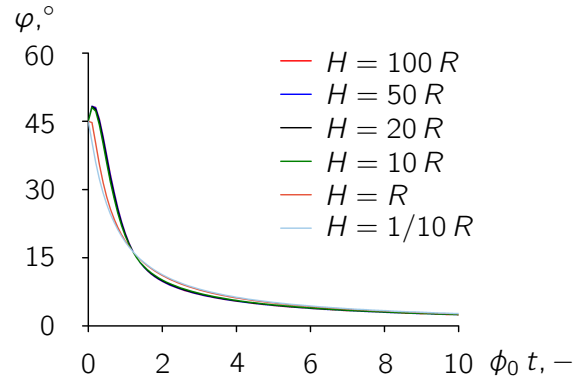
**Tabelle 4.1.** Koeffizienten für die Rotation eines Zylinders

	$\lambda_Z$ [g $\mu\text{m}^2$ ]	$\mu_Z$ [g $\mu\text{m}^2$ ]	$\alpha_Z$ [g $\mu\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ]	$\beta_Z$ [g $\mu\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ]
$H = 100R$	$4,1 \cdot 10^{-5}$	$6,8 \cdot 10^{-2}$	$2,0 \cdot 10^{-4}$	0,32
$H = 50R$	$2,0 \cdot 10^{-5}$	$8,5 \cdot 10^{-3}$	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$4,1 \cdot 10^{-2}$
$H = 20R$	$8,2 \cdot 10^{-6}$	$5,5 \cdot 10^{-4}$	$4,1 \cdot 10^{-5}$	$2,7 \cdot 10^{-3}$
$H = 10R$	$4,1 \cdot 10^{-6}$	$7,0 \cdot 10^{-5}$	$2,1 \cdot 10^{-5}$	$3,8 \cdot 10^{-4}$
$H = R$	$4,1 \cdot 10^{-7}$	$2,7 \cdot 10^{-7}$	$3,0 \cdot 10^{-6}$	$4,6 \cdot 10^{-6}$
$H = 1/10R$	$4,1 \cdot 10^{-8}$	$2,0 \cdot 10^{-8}$	$1,2 \cdot 10^{-6}$	$2,9 \cdot 10^{-6}$

<sup>7</sup>Das sich während der Einfüllphase des Spritzgussprozesses ausbildende Strömungsfeld wird i. a. als Scherströmung angenommen [60], daher werden die Bewegungsgleichungen in diesem Kapitel in einer Scherströmung ( $d_0 = \phi_0 = \gamma$ ) gelöst.



**Abbildung 4.25.** Scherströmung, Rotationen von Zylinder ( $H = 20 R$ ) und schlankem Stab, die Kurven sind deckungsgleich

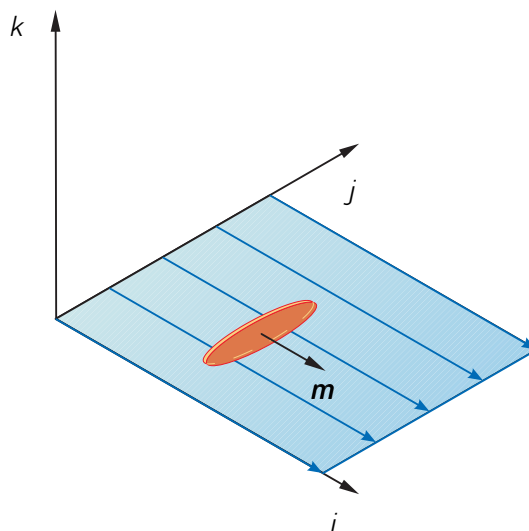


**Abbildung 4.26.** Scherströmung, Ausrichtung von Zylindern mit verschiedenen  $H/R$  im Strömungsfeld

enten  $\zeta$  und  $\xi$  beschreiben z. B. Fluideigenschaften wie die Viskosität, die Oberflächenbeschaffenheit der Faser und die Haftung des Fluids am Partikel. Auf diese Eigenschaften wird in dieser Arbeit nicht eingegangen. Deutlich wird, dass  $\zeta$ ,  $\xi$  und damit auch die Widerstandskoeffizienten  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\eta$  die Bewegung des Zylinders maßgeblich beeinflussen. Für deren Bestimmung wurden als erstes Höhe  $H$  und Radius  $R$  entsprechend den Abmessungen, die Kurzglasfasern üblicherweise haben, sowie die Dichte  $\rho = 2,6 \text{ g/cm}^3$  (Glas) angenommen. Diese physikalischen Annahmen können plausibel nachvollzogen werden. Dennoch liegt in der Wahl der Koeffizienten eine beträchtliche Unsicherheit, da weitere Annahmen getroffen wurden, um sie zu bestimmen. Insbesondere das Gleichsetzen der beiden Widerstandsparameter  $\beta$  und  $\eta$  ist der Tatsache geschuldet, dass keine experimentellen Daten vorliegen, die man für die Berechnung heranziehen kann.

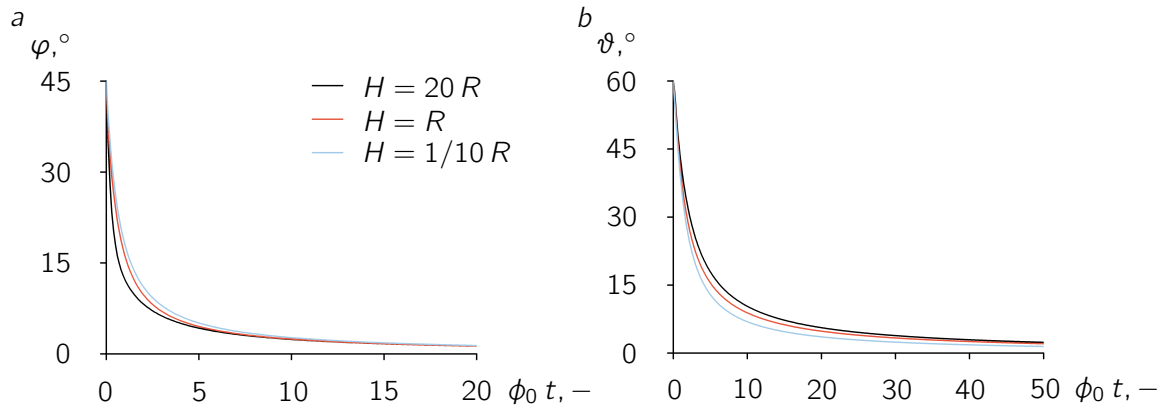
#### 4.4.2 Zylinder und abgerundeter Zylinder in einer Scherströmung

Bisher lag der Zylinder in allen Rechnungen anfangs in der Strömungsebene ( $\vartheta_0 = 0$ ), aus der er sich auch nicht mehr herausbewegte. In Abb. 4.28 ist die Lösung für  $\varphi_0 = 45^\circ$ ,  $\vartheta_0 = 60^\circ$  gezeigt. In den



**Abbildung 4.27.** Scherströmung, Ausrichtung eines Zylinders mit  $H = 1/10 R$  im Strömungsfeld

#### 4 Bewegungsgleichung



**Abbildung 4.28.** Scherströmung. *a* Ausrichtung in Strömungsrichtung, *b* Drehung von Zylindern in die Strömungsebene

Anfangskoordinaten der Zylinderachse  $\mathbf{m}_0$  heißt das:

$$m_{10} = m_{20} = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad (4.160)$$

$$m_{30} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Mit  $\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}_T = 0$  (s. Kapitel 4.1), sind die Anfangskoordinaten der Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}_{T0}$

$$\omega_{T10} = \omega_{T20} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \quad (4.161)$$

$$\omega_{T30} = -\frac{1}{2}$$

Als Anfangsdrehung um die Zylinderachse wurde  $\omega_{N0} = 1$  gewählt. Da die Kurven für die schlanken Zylinder  $H = 100R$ ,  $H = 50R$  und  $H = 10R$  fast deckungsgleich mit der Kurve für  $H = 20R$  sind, sind die drei erstgenannten in Abb. 4.28 nicht dargestellt. Die Zylinder driften mit ihrer Achse  $\mathbf{m}$  in die Strömungsebene (Abb. 4.28 *b*) und richten sich dort in Strömungsrichtung aus (Abb. 4.28 *a*).

Im Kapitel 3.1 wurde ein Zylinder mit abgerundeten Grundflächen vorgestellt. Geometrisch gesehen liegt je eine Halbkugel auf Grund- bzw. Deckfläche. Für  $\zeta$  und  $\xi$  nach Gln. (4.154) bzw. (4.155) sind

**Tabelle 4.2.** Koeffizienten für die Rotation eines abgerundeten Zylinders

	$\lambda_{\text{ZHK}}$ [g $\mu\text{m}^2$ ]	$\mu_{\text{ZHK}}$ [g $\mu\text{m}^2$ ]	$\alpha_{\text{ZHK}}$ [g $\mu\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ]	$\beta_{\text{ZHK}}$ [g $\mu\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ]
$H = 98R$	$4,0 \cdot 10^{-5}$	0,067	$2,0 \cdot 10^{-4}$	0,297
$H = 48R$	$2,0 \cdot 10^{-5}$	$8,1 \cdot 10^{-3}$	$9,8 \cdot 10^{-5}$	0,035
$H = 18R$	$7,8 \cdot 10^{-6}$	$4,8 \cdot 10^{-4}$	$3,9 \cdot 10^{-5}$	$1,8 \cdot 10^{-3}$
$H = 8R$	$3,7 \cdot 10^{-6}$	$5,1 \cdot 10^{-5}$	$1,9 \cdot 10^{-5}$	$1,6 \cdot 10^{-4}$
$H = 1/10R$	$4,8 \cdot 10^{-7}$	$4,2 \cdot 10^{-7}$	$2,9 \cdot 10^{-6}$	$2,7 \cdot 10^{-6}$

**Tabelle 4.3.**  $H/R$ -Verhältnisse von Zylindern und abgerundeten Zylindern bei gleichem Volumen

Zylinder	abgerundeter Zylinder
$H = 100 R$	$H = 98^{2/3} R$
$H = 50 R$	$H = 48^{2/3} R$
$H = 120 R$	$H = 18^{2/3} R$
$H = 10 R$	$H = 8^{2/3} R$

in Tabelle 4.2 für die verschiedenen  $H/R$  die Werte der Konstanten

$$\lambda_{\text{ZHK}} = \varrho \pi \left( \frac{8}{15} R^5 + \frac{R^4 H}{2} \right), \quad (4.162)$$

$$\mu_{\text{ZHK}} = \varrho \pi \left( \frac{8}{15} R^5 - \frac{R^4 H}{4} + \frac{R^3 H^2}{3} + \frac{R^2 H^3}{12} \right), \quad (4.163)$$

$$\alpha_{\text{ZHK}} = 2\pi \zeta \left( \frac{4}{3} R^4 + R^3 H \right), \quad (4.164)$$

$$\beta_{\text{ZHK}} = 2\pi \zeta \left( \frac{4}{3} R^4 + \frac{RH^3}{24} \right) + \pi \xi \frac{RH^3}{24} \quad (4.165)$$

des Trägheits- und des Widerstandstensors eines Zylinders mit Halbkugeln (ZHK) angegeben. Da sich auf Grund- und Deckfläche des Zylinders je eine Halbkugel mit dem Radius  $R$  befindet, entspricht das Längenverhältnis  $H = 98 R$  eines solchen abgerundeten Zylinders dem Verhältnis  $H = 100 R$  eines Zylinders. In Tabelle 4.2 sind die Koeffizienten für abgerundete Zylinder mit kleiner werdender Höhe  $H$  angegeben.

Statt die Längenverhältnisse von Zylinder  $Z$  und abgerundetem Zylinder  $ZHK$  aufeinander abzustimmen, kann man sich auch auf das Volumen beziehen und die Höhe des abgerundeten Zylinders für konstanten Radius  $R$  und das entsprechende Volumen eines Zylinders berechnen. Das Volumen eines Zylinders ist

$$V_Z = \pi R^2 H_Z, \quad (4.166)$$

das eines abgerundeten Zylinders (s. Abb. 3.2)

$$V_{\text{ZHK}} = \pi R^2 H_{\text{ZHK}} + \frac{4}{3} \pi R^3. \quad (4.167)$$

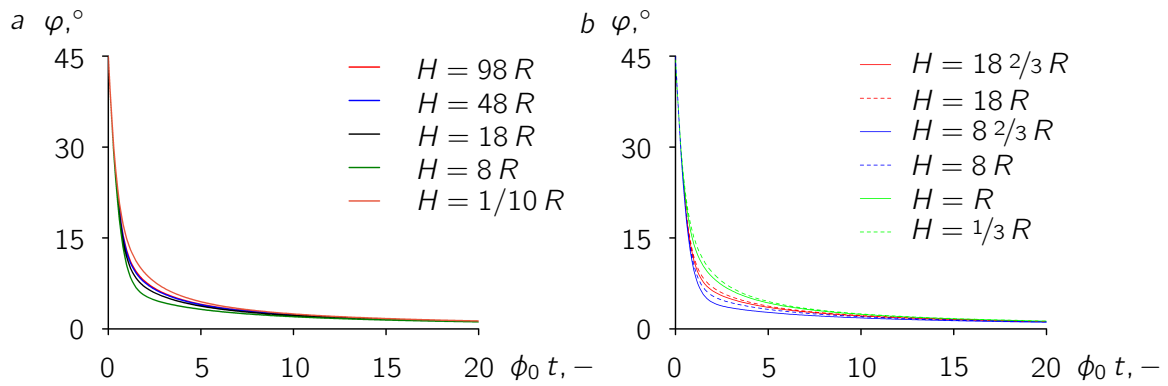
Durch Gleichsetzen von (4.166) und (4.167) erhält man einen Ausdruck für  $H_{\text{ZHK}}$ :

$$H_{\text{ZHK}} = H_Z - \frac{4}{3} R, \quad (4.168)$$

mit dem für vorgegebene  $H/R$ -Verhältnisse der Zylinder die entsprechenden Verhältnisse für abgerundete Zylinder berechnet werden können. Die entsprechenden Massenträgheitsmomente  $\lambda_{\text{ZHK}}$  und  $\mu_{\text{ZHK}}$  und die Widerstandskoeffizienten  $\alpha_{\text{ZHK}}$  und  $\beta_{\text{ZHK}}$  sind in Tabelle 4.3 gegeben.

Abbildung 4.29 a zeigt die Ausrichtung der abgerundeten Zylinder, bei denen die Länge an die Zylinder angepasst wurden, in einem Scherströmungsfeld. Die Ausgangsorientierung ist  $\varphi_0 = 45^\circ$  und  $\vartheta_0 = 0^\circ$ . Ihre Anfangsrotationen sind  $\boldsymbol{\omega}_{T0} = -\mathbf{k}$  und  $\omega_N = 1$ . Die abgerundeten Zylinder (Abb. 4.29 a) richten sich in gleicher Weise wie Zylinder in Strömungsrichtung aus.

#### 4 Bewegungsgleichung

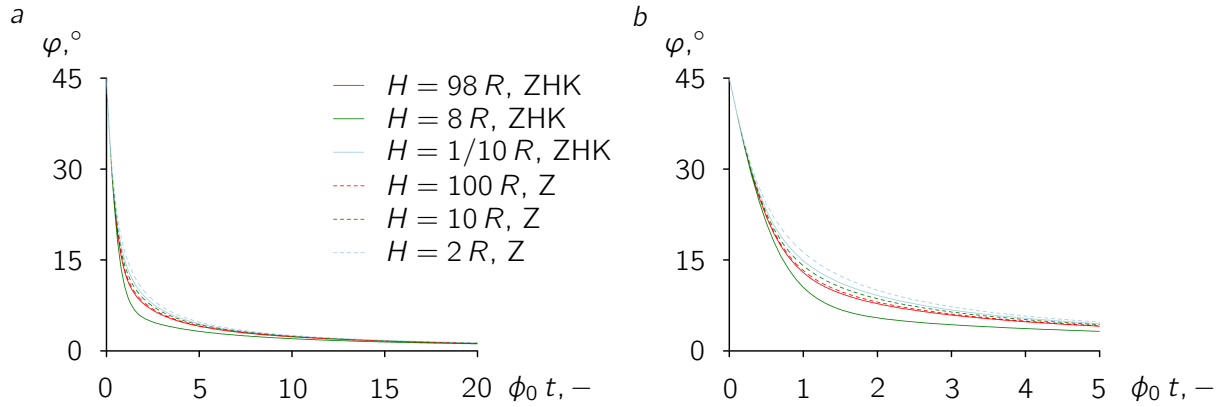


**Abbildung 4.29.** Scherströmung. *a* Rotation abgerundeter Zylinder und Ausrichtung in Strömungsrichtung, *b* Rotation abgerundeter Zylinder nach Anpassung der Länge (gestrichelte Kurven) bzw. des Volumens (durchgezogene Linien) an entsprechende Zylinder

Die abgerundeten Zylinder, für die das Volumen an das der entsprechenden Zylinder angepasst wurde (s. Tabelle 4.3), verhalten sich ähnlich denen mit Längen Anpassung (Abb. 4.29 a). Einige  $H/R$ -Verhältnisse sind in Abb. 4.29 b dargestellt. Zwischen den schlanken ZHK mit  $H = 98 \cdot 2/3 R$  und  $H = 48 \cdot 2/3 R$  bzw.  $H = 98 R$  und  $H = 48 R$  ist in deren Ausrichtung im Strömungsfeld kein Unterschied sichtbar. Da nach Gl. (4.168) zur Berechnung des  $H/R$ -Verhältnisses bei konstantem Volumen  $H_Z > 4/3 R$  sein muss, gibt es für den kompakten Zylinder  $H = 1/10 R$  keinen entsprechenden abgerundeten Zylinder mit demselben Volumen. Daher wird als Referenzzylinder  $H_Z = 7/3 R$  gewählt. Die entsprechenden abgerundeten Zylinder sind dann  $H_{ZHK} = 1/3 R$  (Z und ZHK sind gleich lang) bzw.  $H_{ZHK} = R$  (Z und ZHK haben dasselbe Volumen). Die Ausrichtung der abgerundeten Zylinder ist ähnlich, egal, ob sie an die Länge oder an das Volumen der Zylinder angepasst wurden, die volumenangepassten bewegen sich etwas schneller in die Strömungsrichtung. Ab etwa  $\phi_0 t = 10$  sind kaum noch Unterschiede zu sehen. Im folgenden sind alle abgerundeten Zylinder längenangepasst.

Zylinder und abgerundete Zylinder verhalten sich ganz ähnlich. In Abb. 4.30 sind sie gegenübergestellt, die Zylinder sind mit gestrichelten Linien dargestellt. Es wurden einige  $H/R$ -Verhältnisse ausgewählt - ein sehr schlankes Partikel (Zylinder Z,  $H = 100 R$  und abgerundeter Zylinder ZHK,  $H = 98 R$ ), ein kompaktes Partikel (Z mit  $H = 2 R$  und ZHK mit  $H = 1/10 R$ ) und ein Partikel mit einem  $H/R$ -Verhältnis dazwischen (Z mit  $H = 10 R$  und ZHK mit  $H = 8 R$ ). Der kompakte abgerundete Zylinder  $H = 1/10 R$  entspricht geometrisch annähernd einer Kugel. Er verhält sich aber wie alle anderen Partikel, auch er richtet sich mit seiner Achse  $\mathbf{m}$  in Strömungsrichtung aus. Setzt man die Höhe  $H$  des Zylinders gleich 0, „schrumpft“ das Partikel zu einer Kugel. Ihre Bewegung kann mit dem Differentialgleichungssystem (4.8)-(4.10) nicht berechnet werden, da mit der Höhe auch die Zylinderachse  $\mathbf{m}$  verschwindet. In Abb. 4.30 wird deutlich, dass sich die abgerundeten Zylinder etwas schneller in der Strömungsrichtung ausrichten als die Zylinder mit vergleichbaren  $H/R$ -Verhältnissen. Grund hierfür sind möglicherweise die Kanten zwischen Deck- und Mantelfläche beim Zylinder, die es beim abgerundeten Zylinder nicht gibt. Man muss davon ausgehen, dass diese Kanten die Bewegung eines Körpers beeinflussen, da hier beispielsweise der Stromfaden abreißen kann, sich Wirbel bilden und Rückströmungen entstehen können.





**Abbildung 4.30.** Scherströmung, Vergleich der Rotation abgerundeter Zylinder (ZHK) mit den entsprechenden Zylindern (Z). *a* Zeitintervall  $0 \text{ s} \leq t \leq 20 \text{ s}$ , *b* Anfangsbereich derselben Kurven  $0 \text{ s} \leq t \leq 5 \text{ s}$

## 4.5 Reduktion der Bewegungsgleichung eines axialsymmetrischen Körpers

In Kapitel 4.1 wurde beschrieben, dass das Differentialgleichungssystem (4.8)-(4.10), das aus 7 skalaren Differentialgleichungen besteht, überbestimmt ist. Da  $|\mathbf{m}| = 1$  und  $\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}_T = 0$  sind, müssen 5 Gleichungen ausreichen, um die Bewegung eines Körpers im Strömungsfeld zu beschreiben. In jeder numerischen Rechnung, mit der die Bewegung eines axialsymmetrischen Körpers nach dem Gleichungssystem (4.8)-(4.10) bestimmt wurde, waren für alle Zeitschritte die eben genannten Bedingungen erfüllt. Im folgenden wird ein Ansatz vorgestellt, mit dem, ausgehend von den Gln. (4.8)-(4.10), ein System aus nur 5 Differentialgleichungen für die Drehung eines axialsymmetrischen Körpers aufgestellt und gelöst wird.

Der Vektor  $\mathbf{m}$  der Partikelachse wird in Abhängigkeit der Winkel  $\varphi$  und  $\vartheta$  in Kugelkoordinaten dargestellt (Abb. 4.31):

$$\mathbf{m} = \cos \varphi \cos \vartheta \mathbf{i} + \sin \varphi \cos \vartheta \mathbf{j} + \sin \vartheta \mathbf{k}. \quad (4.169)$$

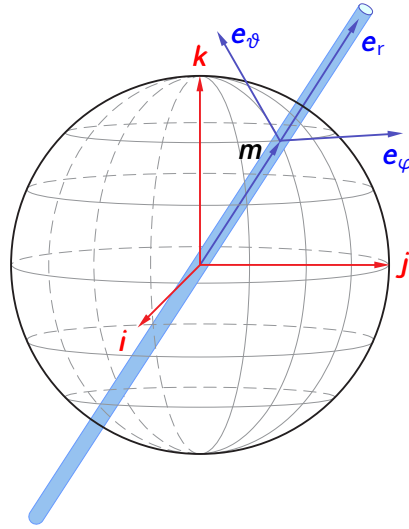
Das Kugelkoordinatensystem hat die Basisvektoren  $\mathbf{e}_r$  ( $0 < r \leq 1$ ),  $\mathbf{e}_\varphi$  ( $0 < \varphi \leq 2\pi$ ) und  $\mathbf{e}_\vartheta$  ( $-\pi/2 < \vartheta < \pi/2$ ) mit

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}, \quad (4.170)$$

$$\mathbf{e}_\vartheta = -\cos \varphi \sin \vartheta \mathbf{i} - \sin \varphi \sin \vartheta \mathbf{j} + \cos \vartheta \mathbf{k}, \quad (4.171)$$

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{m}, \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = 1. \quad (4.172)$$

Der Winkel  $\vartheta$  läuft in dieser Darstellung ausgehend von der Strömungsebene um  $\pi/2$  in  $\mathbf{k}$ - bzw.  $-\mathbf{k}$ -Richtung, da sich mit der Strömungsebene als „Null-Ebene“ die Lage der Partikelachse im Raum aus der Lösung einfach ablesen lässt.



**Abbildung 4.31.** Einheitskugel mit Partikelachse  $\mathbf{m}$  und den Basisvektoren  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$  und  $\mathbf{e}_\vartheta$  des Partikelkoordinatensystems (blau),  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  und  $\mathbf{k}$  sind die Basisvektoren des Strömungskordinatensystems (rot)

Die Einheitsvektoren  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  und  $\mathbf{k}$  des Koordinatensystems, das die Strömungsebene beschreibt, sind in Abhängigkeit von  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$  und  $\mathbf{e}_\vartheta$  (s. Abb. 4.31)

$$\mathbf{i} = \cos \varphi (\cos \vartheta \mathbf{m} - \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta) - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi, \quad (4.173)$$

$$\mathbf{j} = \sin \varphi (\cos \vartheta \mathbf{m} - \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta) + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi,$$

$$\mathbf{k} = \sin \vartheta \mathbf{m} + \cos \vartheta \mathbf{e}_\vartheta.$$

Die Bewegungsgleichungen für die Rotation eines axialsymmetrischen Körpers, wie sie in Kapitel 4.3.6 hergeleitet wurden, sind

$$\dot{\omega}_N = \frac{\alpha}{\lambda} (\boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{m} - \omega_N), \quad \omega_N = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{m}, \quad (4.174)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_T = -\frac{\lambda}{\mu} \omega_N \dot{\mathbf{m}} + \frac{\beta}{\mu} (\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{m} \mathbf{m} - \boldsymbol{\omega}_T) + \frac{\eta}{\mu} \mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{m}, \quad (4.175)$$

$$\dot{\mathbf{m}} = \boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{m}. \quad (4.176)$$

Aus Gl. (4.169) folgt

$$\dot{\mathbf{m}} = \dot{\varphi} (-\sin \varphi \cos \vartheta \mathbf{i} + \cos \varphi \cos \vartheta \mathbf{j}) + \dot{\vartheta} (-\cos \varphi \sin \vartheta \mathbf{i} - \sin \varphi \sin \vartheta \mathbf{j} + \cos \vartheta \mathbf{k}) \quad (4.177)$$

und mit

$$\dot{\mathbf{m}} = \boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{m} \quad (4.178)$$

$$\boldsymbol{\omega}_T = \dot{\varphi} \cos \vartheta \mathbf{e}_\vartheta - \dot{\vartheta} \mathbf{e}_\varphi. \quad (4.179)$$

In einer Scherströmung ( $d_0 = \phi_0 = \gamma$ ) wird die Bewegungsgleichung (4.175) zu

$$\begin{aligned}
 & - \left( \ddot{\vartheta} + \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \sin 2\vartheta - \frac{\lambda}{\mu} \dot{\varphi} \omega_N \cos \vartheta + \frac{\beta}{\mu} \dot{\vartheta} + \frac{1}{2} \frac{\eta\gamma}{\mu} \sin 2\vartheta \sin 2\varphi \right) \mathbf{e}_\varphi \\
 & + \left( \ddot{\varphi} \cos \vartheta - 2\dot{\vartheta} \dot{\varphi} \sin \vartheta + \frac{\beta}{\mu} \dot{\varphi} \cos \vartheta + \frac{\lambda}{\mu} \omega_N \dot{\vartheta} + \frac{\beta\gamma}{\mu} \cos \vartheta - \frac{\eta\gamma}{\mu} \cos \vartheta \cos 2\varphi \right) \mathbf{e}_\vartheta = \mathbf{0}.
 \end{aligned} \quad (4.180)$$

Der Vektor der Partikelachse  $\mathbf{m}$  ist nicht mehr enthalten, die Vektorgleichung (4.175) besteht nach dieser Umformung aus nur noch 2 skalaren Gleichungen:

$$\ddot{\vartheta} + \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \sin 2\vartheta - \frac{\lambda}{\mu} \dot{\varphi} \omega_N \cos \vartheta + \frac{\beta}{\mu} \dot{\vartheta} + \frac{1}{2} \frac{\eta\gamma}{\mu} \sin 2\vartheta \sin 2\varphi = 0, \quad (4.181)$$

$$\ddot{\varphi} \cos \vartheta - 2\dot{\vartheta} \dot{\varphi} \sin \vartheta + \frac{\beta}{\mu} \dot{\varphi} \cos \vartheta + \frac{\lambda}{\mu} \omega_N \dot{\vartheta} + \frac{\beta\gamma}{\mu} \cos \vartheta - \frac{\eta\gamma}{\mu} \cos \vartheta \cos 2\varphi = 0. \quad (4.182)$$

Nach Division durch  $\cos \vartheta$  wird Gl. (4.182) zu

$$\ddot{\varphi} - 2\dot{\vartheta} \dot{\varphi} \tan \vartheta + \frac{\beta}{\mu} \dot{\varphi} + \frac{\lambda}{\mu} \frac{\omega_N \dot{\vartheta}}{\cos \vartheta} + \frac{\beta\gamma}{\mu} - \frac{\eta\gamma}{\mu} \cos 2\varphi = 0. \quad (4.183)$$

Für die Umformung zur Gl. (4.183) muss  $\vartheta \neq \pm\pi/2$  gefordert werden, damit eine Division durch 0 ausgeschlossen ist.  $\vartheta = \pm\pi/2$  bedeutet, dass das Partikel mit seiner Achse  $\mathbf{m}$  senkrecht auf der Strömungsebene steht. Das ist ein singulärer Fall, der mit den Gln. (4.181) und (4.183) nicht gelöst werden kann. Diese Einschränkung gilt nur für dieses Gleichungssystem, nicht aber für das System (4.174) - (4.176). Aus der Bewegungsgleichung (4.174) für die Drehung um die Partikelachse wird mit (4.169) und (4.173)

$$\dot{\omega}_N = -\frac{\alpha}{\lambda} \omega_N - \frac{\alpha\gamma}{\lambda} \sin \vartheta. \quad (4.184)$$

Die Differentialgleichungen (4.181) und (4.183) sind 2. Ordnung. Ihr Grad wird reduziert mit

$$\varphi = \varphi(0) = \varphi_0 \quad \Rightarrow \dot{\varphi} = \varphi_1 \quad \Rightarrow \ddot{\varphi} = \dot{\varphi}_1, \quad (4.185)$$

$$\vartheta = \vartheta(0) = \vartheta_0 \quad \Rightarrow \dot{\vartheta} = \vartheta_1 \quad \Rightarrow \ddot{\vartheta} = \dot{\vartheta}_1. \quad (4.186)$$

Das nun zu lösende Differentialgleichungssystem ist 1. Ordnung und besteht aus 5 skalaren Gleichungen:

$$\dot{\omega}_N = -\frac{\alpha}{\lambda} \omega_N - \frac{\alpha\gamma}{\lambda} \sin \vartheta, \quad (4.187)$$

$$\dot{\varphi} = \varphi_1, \quad (4.188)$$

$$\dot{\varphi}_1 = 2\vartheta_1 \varphi_1 \tan \vartheta_0 - \frac{\lambda}{\mu} \frac{\vartheta_1 \omega_N}{\cos \vartheta_0} - \frac{\beta\gamma}{\mu} - \frac{\beta}{\mu} \varphi_1 + \frac{\eta\gamma}{\mu} \cos 2\varphi_0, \quad (4.189)$$

$$\dot{\vartheta} = \vartheta_1, \quad (4.190)$$

$$\dot{\vartheta}_1 = -\frac{1}{2} \varphi_1^2 \sin 2\vartheta_0 + \frac{\lambda}{\mu} \varphi_1 \omega_N \cos \vartheta_0 - \frac{\beta}{\mu} \vartheta_1 - \frac{1}{2} \frac{\eta\gamma}{\mu} \sin 2\vartheta_0 \sin 2\varphi_0. \quad (4.191)$$

Dieses Gleichungssystem wird wieder mit dem Runge-Kutta-Verfahren mit adaptiver Schrittweite gelöst. Zunächst soll auch mit diesem System eine ebene Drehung berechnet und diese mit der Drehung aus Abb. 4.26 verglichen werden. Dafür müssen die Anfangsbedingungen angepasst werden,

#### 4 Bewegungsgleichung

da die Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}_T$  nicht mehr explizit vorkommt, dafür aber  $\dot{\varphi}$  und  $\dot{\vartheta}$ . In Abb. 4.26 waren die Anfangsbedingungen des Vektors  $\mathbf{m}$  der Partikelachse  $m_{10} = m_{20} = \sqrt{2}/2$ ,  $m_{30} = 0$ , der Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}_{T0} = \mathbf{k}$  und  $\omega_{N0} = 0$ . Auf die Winkeln  $\varphi$  und  $\vartheta$  umgerechnet heißt das  $\varphi_0 = 45^\circ$  und  $\vartheta_0 = 0^\circ$ . Wegen  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$  ist  $|\boldsymbol{\omega}_T(0)| = \omega_{T0} = 1$ , d. h.

$$|\boldsymbol{\omega}_T(0)| = \omega_{T1}(0)^2 + \omega_{T2}(0)^2 + \omega_{T3}(0)^2 = 1. \quad (4.192)$$

Aus Gl. (4.179) folgt mit (4.170) und (4.171)

$$\boldsymbol{\omega}_T = \left( -\frac{1}{2}\dot{\varphi} \sin 2\vartheta \cos \varphi + \dot{\vartheta} \sin \varphi \right) \mathbf{i} + \left( -\frac{1}{2}\dot{\varphi} \sin 2\vartheta \sin \varphi - \dot{\vartheta} \cos \varphi \right) \mathbf{j} + \dot{\varphi} \cos^2 \vartheta \mathbf{k}. \quad (4.193)$$

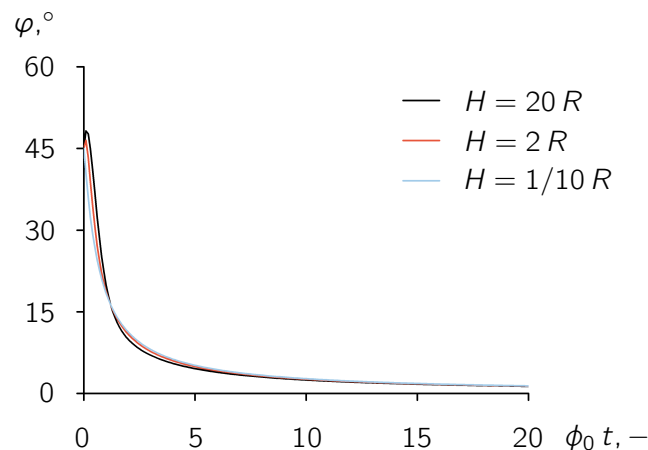
$\varphi(0) = \pi/4$ ,  $\vartheta(0) = 0$  und Gl. (4.192) in Gl. (4.193) eingesetzt führt auf

$$\dot{\varphi}^2(0) + \dot{\vartheta}^2(0) = 1. \quad (4.194)$$

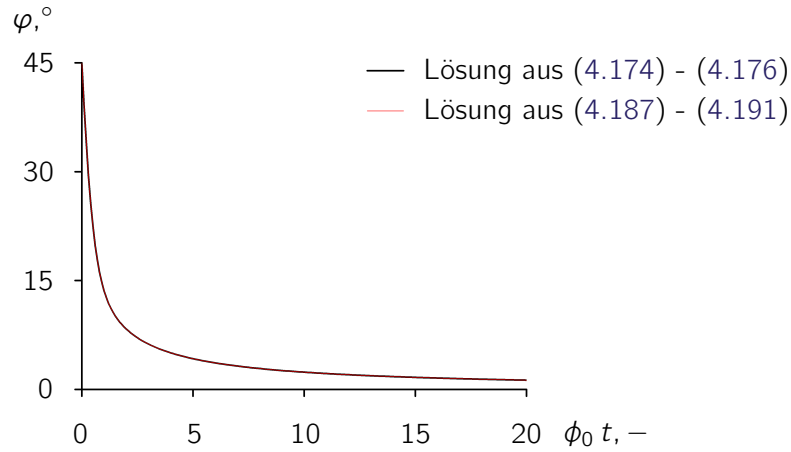
Gleichung (4.194) ist nicht eindeutig lösbar. Es liegt nahe,  $\dot{\vartheta} = 0$  vorzugeben, da zunächst eine ebene Drehung berechnet werden soll, für die  $\vartheta(0) = 0$  gilt, um beide Gleichungssysteme vergleichen zu können. Dann kann  $\dot{\varphi}(0)$  die beiden Werte  $\pm 1$  annehmen. Wir wählen zunächst  $\dot{\varphi}(0) = 1$ . Zusammengefasst sind die Anfangsbedingungen für das Gleichungssystem (4.187)-(4.191) nun

$$\begin{aligned} \omega_N(0) &= 0, \\ \varphi(0) &= \frac{\pi}{4}, \\ \dot{\varphi}(0) &= 1, \\ \vartheta(0) &= 0, \\ \dot{\vartheta}(0) &= 0. \end{aligned} \quad (4.195)$$

In Abb. 4.32 ist die Drehung von Zylindern mit verschiedenen  $H/R$ -Verhältnissen und den in (4.195) genannten Anfangsbedingungen als Lösung des Differentialgleichungssystems (4.187)-(4.191) gezeigt. Das Vorzeichen von  $\dot{\varphi}(0)$  bestimmt die Anfangsdrehrichtung. Ist  $\dot{\varphi}(0) = 1$ , wie in Gl. (4.195),



**Abbildung 4.32.** Scherströmung, Rotation von Zylindern mit verschiedenen  $H/R$ -Verhältnissen nach Gln. (4.187)-(4.191)



**Abbildung 4.33.** Scherströmung, Rotation von Zylindern  $H = 20 R$  mit  $\dot{\varphi}(0) = -1 \text{ s}^{-1}$

sind die Anfangsdrehrichtungen für die beiden Gleichungssysteme (4.174)-(4.176) aus 7 bzw. (4.187)-(4.191) aus 5 Differentialgleichungen gleich. Das Partikel dreht sich in beiden Fällen zunächst gegen die Strömungsrichtung, bevor der Einfluss der Strömung auf die Drehung dominant wird. Die Kurven  $H = 100 R$ ,  $H = 50 R$  und  $H = 10 R$  sind nahezu deckungsgleich mit der Kurve  $H = 20 R$  und deshalb nicht extra in der Abbildung dargestellt. Die Kurven unterscheiden sich nicht von denen in Abb. 4.26, für die das Gleichungssystem (4.174)-(4.176) gelöst wurde. Mit der nach Gl. (4.194) zweiten möglichen Anfangsbedingung für die Drehung um  $\varphi$  ( $\dot{\varphi}(0) = -1$ ) dreht sich das Partikel identisch zur Drehung nach (4.174) - (4.176) mit der für dieses System gültigen Anfangsbedingung  $\boldsymbol{\omega}_{T0} = -\mathbf{k}$ . Exemplarisch ist diese Drehung für  $H = 20 R$  in Abb. 4.33 dargestellt.

Im folgenden soll eine räumliche Drehung mit der Anfangsorientierung  $\varphi(0) = \pi/4$  und  $\vartheta(0) = \pi/3$  als Lösung des Differentialgleichungssystems (4.187)-(4.191) mit der Lösung aus (4.174)-(4.176) verglichen werden. Als Beispiel werden abgerundete Zylinder mit  $H = 18 R$  gewählt. Zunächst müssen wieder die Anfangsbedingungen der beiden Gleichungssysteme aneinander angepasst werden. In den Gln. (4.160) und (4.161) sind die Anfangskoordinaten  $\mathbf{m}_0$  und  $\boldsymbol{\omega}_{T0}$  für diese Anfangsorientierung gegeben, die für das Gleichungssystem (4.187)-(4.191) eingesetzt werden. Auf das andere System aus 5 Gleichungen angewendet bedeutet das, dass wiederum Gl. (4.192) erfüllt sein muss. Die Anfangsorientierung  $\varphi(0) = \pi/4$  und  $\vartheta(0) = \pi/3$  in (4.193) eingesetzt führt auf

$$\frac{\dot{\varphi}^2(0)}{4} + \dot{\vartheta}^2(0) = 1. \quad (4.196)$$

Auch Gl. (4.196) kann nur gelöst werden, wenn entweder  $\dot{\varphi}_0$  oder  $\dot{\vartheta}_0$  vorgegeben wird, und selbst dann gibt es bis zu 4 Lösungspaare. Wählt man z. B.  $\dot{\vartheta}^2 = 1/4 \text{ s}^{-2}$ , dann sind die Lösungspaare

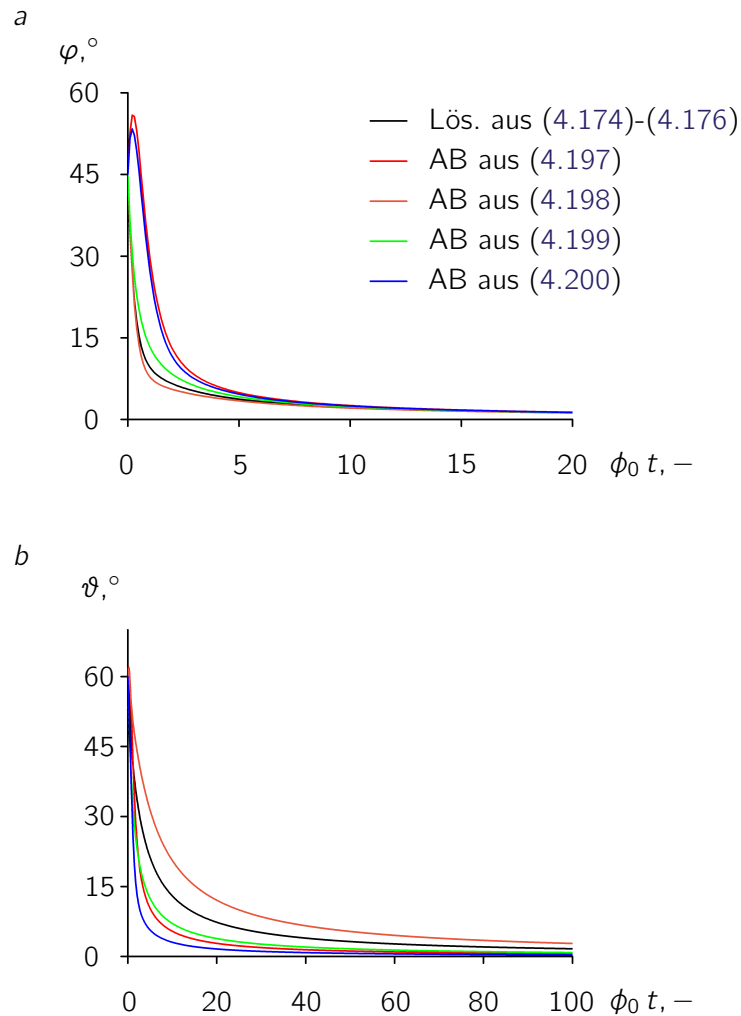
$$\dot{\varphi}_0 = \sqrt{3} \text{ s}^{-1} \quad \dot{\vartheta}_0 = 1/2 \text{ s}^{-1}, \quad (4.197)$$

$$\dot{\varphi}_0 = -\sqrt{3} \text{ s}^{-1} \quad \dot{\vartheta}_0 = 1/2 \text{ s}^{-1}, \quad (4.198)$$

$$\dot{\varphi}_0 = -\sqrt{3} \text{ s}^{-1} \quad \dot{\vartheta}_0 = -1/2 \text{ s}^{-1}, \quad (4.199)$$

$$\dot{\varphi}_0 = \sqrt{3} \text{ s}^{-1} \quad \dot{\vartheta}_0 = -1/2 \text{ s}^{-1}. \quad (4.200)$$

Die Rotationen nach Gln. (4.187)-(4.191) mit den 4 Paaren von Anfangsbedingungen (4.197)-(4.200) sind für  $H = 18 R$  eines abgerundeten Zylinders in Abb. 4.34 dargestellt.



**Abbildung 4.34.** Scherströmung, Rotation abgerundeter Zylinder mit  $H = 18R$  mit verschiedenen Anfangsbedingungen (AB). *a* Ausrichtung in der Strömungsebene, *b* Drehung in die Strömungsebene

Die schwarzen Kurven in Abb. 4.34 zeigen zum Vergleich die Lösung des Gleichungssystems aus 7 Differentialgleichungen (4.174)-(4.176). Was die Ausrichtung in der Ebene betrifft ( $\varphi$ -Kurve), liegt die Kurve mit den Anfangsbedingungen aus (4.198) am nächsten. Beim Driften in die Strömungsebene ( $\vartheta$ -Kurve) liegt keine der Kurven aus dem Gleichungssystem (4.187) - (4.191) nahe an der schwarzen Referenzkurve. Aber alle Partikel richten sich in der Strömungsebene und in Strömungsrichtung aus. Die blaue und die rote  $\varphi$ -Kurve zeigen zunächst eine Drehung gegen die Strömungsrichtung. Beide haben die positive Anfangsbedingung  $\dot{\varphi}_0 = \sqrt{3}s^{-1}$ . Offensichtlich stimmt die Richtung dieser Anfangswinkelgeschwindigkeit nicht mit der Richtung von  $\boldsymbol{\omega}_{T0}$  aus Gl. (4.161) überein. Eine zur schwarzen Kurve übereinstimmende Lösung konnte aus dem System der 5 Gleichungen mit den Anfangsbedingungen (4.197)-(4.200) nicht gefunden werden. Da aber alle Kurven in Abb. 4.34 den gleichen qualitativen Verlauf zeigen (Ausrichtung in der Strömungsebene in  $\boldsymbol{i}$ -Richtung), ist davon auszugehen, dass nur aufgrund nicht übereinstimmender Anfangsbedingungen keine Deckungsgleichheit zwischen einer Kurve aus dem System (4.174)-(4.176) mit einer aus (4.187)-(4.191) hergestellt werden konnte.

## 4.6 Analytische Näherungslösung der Bewegungsgleichungen eines abgerundeten Zylinders

Die Bewegungsgleichungen (4.8) und (4.9) sind mit (4.10)

$$\lambda \dot{\omega}_N + \alpha \omega_N = \alpha \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{m}, \quad (4.201)$$

$$\mu \dot{\boldsymbol{\omega}}_T + \lambda \omega_N \boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{m} + \beta \boldsymbol{\omega}_T = \beta \boldsymbol{\phi} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}) + \eta \mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{m}. \quad (4.202)$$

In den Gln. (4.201)-(4.202) sind

$$\boldsymbol{\omega}_N = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{m} \mathbf{m} = \omega_N \mathbf{m}, \quad (4.203)$$

$$\boldsymbol{\omega}_T = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}) = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_N. \quad (4.204)$$

Zunächst wird für  $\boldsymbol{\omega}_T = \mathbf{0}$  die Lösung der Bewegungsgleichung (4.201) gesucht, in der  $\omega_N$  die einzige unbekannte Winkelgeschwindigkeit ist. Der Vektor  $\mathbf{m}$  auf der rechten Seite der Gleichung ist zeitabhängig. Eine allgemeine analytische Lösung dieser Gleichung kann nicht gefunden werden. Wir suchen daher eine analytische Näherungslösung nach der Perturbationsmethode. Diese Methode kann angewendet werden für die Lösung ordentlicher Differentialgleichungen mit einem kleinen Parameter [62]. Die Näherungslösung besteht aus einer Anzahl kleiner werdender Terme, die sich in der Summe der exakten (aber unbekannt) Lösung der Differentialgleichung nähern. Dieses Verfahren wurde bereits angewendet, um die Bewegungsgleichung eines schlanken Stabes in einer Rotationsströmung zu bestimmen (s. Kapitel 4.3.2).

Gleichung (4.201) wird zunächst wie folgt normiert:

$$\epsilon_1 \dot{\omega}_N + \omega_N = \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{m}, \quad \epsilon_1 = \frac{\lambda}{\alpha}. \quad (4.205)$$

Der Parameter  $\lambda$  ist ein Massenträgheitsmoment,  $\alpha$  ein Widerstandskoeffizient. Im Widerstandskoeffizienten sind verschiedene physikalische Größen enthalten, wie die Oberflächenbeschaffenheit, Haftung/Gleitung des umgebenden Mediums an der Partikeloberfläche und die Viskosität des umgebenden Mediums. Bei einer Polymerschmelze als umgebendes Fluid kann von einem hochviskosen Medium ausgegangen werden. Hohe Viskosität bedeutet einen hohen Widerstand des Mediums gegen die Bewegung des Partikels, also einen großen Widerstandskoeffizienten  $\alpha$ . Damit ist  $\epsilon_1$  ein kleiner Koeffizient. Mit  $\zeta = 3,2 \cdot 10^{-11} \text{ g}/\mu\text{m}^2\text{s}$ , wie in Gl. (4.154) berechnet, erhält man für einen abgerundeten Zylinder mit dem Radius  $R = 1 \mu\text{m}$  und der Höhe  $H = 18 R$  den Wert  $\epsilon_1 = 0,2 \text{ s}$ , s. Tabelle 4.2. Für die in dieser Arbeit verwendeten Geometrien der Partikel und die „Viskositätskoeffizienten“ ist es also gerechtfertigt,  $\epsilon_1$  als kleinen Koeffizienten anzunehmen. Die Näherungslösung der Gl. (4.205) wird als Summe kleiner werdender Terme angenommen:

$$\omega_N = \omega_{N0} + \epsilon_1 \dot{\omega}_{N1} + \epsilon_1^2 \dot{\omega}_{N2} + \dots \quad (4.206)$$

Mit  $\epsilon_1 = 0,2 \text{ s}$  ist  $\epsilon_1^2 = 0,04 \text{ s}^2$ . Es ist zu erwarten, dass der Term  $\epsilon_1^2 \dot{\omega}_{N2}$  in Gl. (4.206) die Genauigkeit der Lösung der Gl. (4.205) nicht signifikant erhöht, daher wird die Reihe (4.206) nach dem 2. Glied abgebrochen. Gesucht wird also eine Lösung der Form

$$\omega_N = \omega_{N0} + \epsilon_1 \dot{\omega}_{N1}. \quad (4.207)$$

#### 4 Bewegungsgleichung

Aus Gl. (4.207) folgt

$$\dot{\omega}_N = \dot{\omega}_{N0} + \epsilon_1 \dot{\omega}_{N1}. \quad (4.208)$$

Die Gln. (4.207) und (4.208) in (4.205) eingesetzt ergibt

$$\epsilon_1 \dot{\omega}_{N0} + \epsilon_1^2 \dot{\omega}_{N1} + \omega_{N0} + \epsilon_1 \dot{\omega}_{N1} = \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{m}. \quad (4.209)$$

In Gl. (4.209) sind die Terme gleicher Größenordnung in derselben Farbe dargestellt. Bei den roten Termen ist das offensichtlich, beide enthalten den kleinen Parameter  $\epsilon_1$ . Die blauen Terme liegen in der Größenordnung zwischen -1 und 1. In der numerischen Lösung der Bewegungsgleichung wurde die Anfangsdrehgeschwindigkeit  $\omega_N(0)$  um die Achse  $\mathbf{m}$  entweder vernachlässigt und mit  $\omega_N(0) = 0$  vorgegeben oder  $\omega_N(0) = \pm 1 \text{ s}^{-1}$  gewählt. Im letzteren Fall wurde erwartet, dass  $\omega_N$  infolge der Trägheit mit der Zeit abklingt, was mit der Lösung der Bewegungsgleichung bestätigt wurde. Der Betrag des Skalarprodukts  $\boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{m}$  liegt ebenfalls im Bereich  $0 \leq |\boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{m}| \leq 1$ , denn mit  $\boldsymbol{\phi} = \phi_0 \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\phi_0 \mathbf{k}$ , s. Gl. (4.33), ist aus Abb. 2.2 ersichtlich, dass  $\boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{m} = \phi_0 \cos \theta$  ist. Der Koeffizient  $\phi_0$  wurde bisher in allen Lösungen entweder  $\phi_0 = 0$  oder  $\phi_0 = 1 \text{ s}^{-1}$  gesetzt, und es gilt  $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ . Der grüne Term ist wegen  $\epsilon_1^2 \cong 0$  sehr klein und wird im folgenden vernachlässigt. Entsprechend dem Lösungsmuster der Perturbationsmethode werden die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von  $\epsilon_1$  Null gesetzt. Man erhält die folgenden Gleichungen:

$$(\epsilon_1^0) \quad \omega_{N0} = \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{m}, \quad (4.210)$$

$$(\epsilon_1^1) \quad \dot{\omega}_{N0} + \dot{\omega}_{N1} = 0. \quad (4.211)$$

Gleichung (4.210) wird nach der Zeit abgeleitet und in Gl. (4.211) eingesetzt:

$$\dot{\omega}_{N0} = \boldsymbol{\phi} \cdot \dot{\mathbf{m}} = \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{m}, \quad (4.212)$$

$$\dot{\omega}_{N1} = -\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{m}. \quad (4.213)$$

Mit Gl. (4.207) erhalten wir als „Lösung“ der Bewegungsgleichung (4.205)

$$\omega_N = \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{m} - \epsilon_1 \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{m}. \quad (4.214)$$

Da in Gl. (4.214) der Vektor  $\mathbf{m}$  enthalten ist, kann man an dieser Stelle noch nicht von einer vollständigen Lösung sprechen. Gleichung (4.214) ist der erste Schritt der Lösung. Sie nähert sich asymptotisch dem Wert  $\boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{m}$ . Der 2. Term gibt die Abweichung vom asymptotischen Wert an, die aus der Berücksichtigung des Widerstands des umgebenden Mediums auf das Partikel resultiert. Ändert sich die Orientierung des Partikels nicht mehr, ist also  $\mathbf{m}(t) = \text{const.}$ , dann ist wegen  $\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{0}$  auch  $\epsilon_1 \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{m} = 0$ .

Im zweiten Schritt wird die Bewegungsgleichung (4.202) mit der Perturbationsmethode gelöst. Mit dem kleinen Parameter  $\epsilon_2 = 0,3 \text{ s}$  für einen abgerundeten Zylinder mit Radius  $R = 1 \mu\text{m}$  und Höhe  $H = 18 R$  und  $\zeta = 3,2 \cdot 10^{-11} \text{ g}/\mu\text{m}^2\text{s}$  und  $\xi = 1,8 \cdot 10^{-10} \text{ g}/\mu\text{m}^2\text{s}$  (s. Tabelle 4.2) wird Gl. (4.202) zu

$$\epsilon_2 \dot{\boldsymbol{\omega}}_T + \frac{\lambda}{\beta} \omega_N \boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{m} + \boldsymbol{\omega}_T = \boldsymbol{\phi} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m}\mathbf{m}) + \frac{\eta}{\beta} \mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{m}, \quad \epsilon_2 = \frac{\mu}{\beta}. \quad (4.215)$$



Es wird der Reihen-Ansatz entsprechend Gl. (4.206) angewendet, wegen  $\epsilon_2^2 = 0,07 \text{ s}^2$  wiederum mit Abbruch nach dem 2. Glied:

$$\boldsymbol{\omega}_T = \boldsymbol{\omega}_{T0} + \epsilon_2 \dot{\boldsymbol{\omega}}_{T1}, \quad (4.216)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_T = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{T0} + \epsilon_2 \ddot{\boldsymbol{\omega}}_{T1}. \quad (4.217)$$

Gleichung (4.215) wird zu

$$\begin{aligned} & \epsilon_2 \dot{\boldsymbol{\omega}}_{T0} + \epsilon_2^2 \ddot{\boldsymbol{\omega}}_{T1} + \frac{\lambda}{\beta} (\boldsymbol{\omega}_N \boldsymbol{\omega}_{T0} \times \mathbf{m} + \epsilon_2 \dot{\boldsymbol{\omega}}_{T1} \times \mathbf{m}) + \boldsymbol{\omega}_{T0} + \epsilon_2 \dot{\boldsymbol{\omega}}_{T1} \\ &= \boldsymbol{\phi} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}) + \frac{\eta}{\beta} \mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} \end{aligned} \quad (4.218)$$

In Gl. (4.218) sind wieder die Terme gleicher Größenordnung in derselben Farbe dargestellt, analog zu Gl. (4.209). Mit den Werten für  $\lambda_Z$  und  $\beta_Z$  aus Tabelle 4.1 erhält man für den Zylinder mit  $H = 20 R$  den Quotienten  $\lambda_Z/\beta_Z = 0,0031 \text{ s}$  bzw. für den abgerundeten Zylinder mit  $H = 18 R$  mit  $\lambda_{ZHK}$  und  $\beta_{ZHK}$  aus Tabelle 4.2 den Quotienten  $\lambda_{ZHK}/\beta_{ZHK} = 0,0043 \text{ s}$ . Beide Quotienten sind eine Größenordnung kleiner als  $\epsilon_2^2 \cong 0$ , das selbst schon vernachlässigt wird. Daher ist der  $\lambda/\beta$ -Term in Gl. (4.218) in derselben Farbe dargestellt. Durch Nullsetzen der Koeffizienten mit verschiedenen Potenzen von  $\epsilon_2$  erhält man

$$(\epsilon_2^0) \quad \boldsymbol{\omega}_{T0} = \boldsymbol{\phi} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}) + \frac{\eta}{\beta} \mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{m}, \quad (4.219)$$

$$(\epsilon_2^1) \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_{T0} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{T1} = \mathbf{0}. \quad (4.220)$$

Die Zeitableitung von Gl. (4.219) ist

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{T0} = -\boldsymbol{\phi} \cdot (\dot{\mathbf{m}} \mathbf{m} + \mathbf{m} \dot{\mathbf{m}}) + \frac{\eta}{\beta} (\dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{m}}), \quad (4.221)$$

eingesetzt in Gl. (4.220) ergibt sich

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{T1} = \boldsymbol{\phi} \cdot (\dot{\mathbf{m}} \mathbf{m} + \mathbf{m} \dot{\mathbf{m}}) - \frac{\eta}{\beta} (\dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{m}}). \quad (4.222)$$

Die Zeitableitung von  $\mathbf{m}$  ist  $\dot{\mathbf{m}} = \boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{m}$ . Mit Gl. (4.219) und Gl. (4.222) wird Gl. (4.216) zu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{T0} + \epsilon_2 \dot{\boldsymbol{\omega}}_{T1} &= \boldsymbol{\phi} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}) + \frac{\eta}{\beta} \mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} \\ &+ \epsilon_2 \boldsymbol{\phi} \cdot [(\boldsymbol{\omega}_{T0} + \epsilon_2 \dot{\boldsymbol{\omega}}_{T1}) \times \mathbf{m} \mathbf{m} + \mathbf{m} (\boldsymbol{\omega}_{T0} + \epsilon_2 \dot{\boldsymbol{\omega}}_{T1}) \times \mathbf{m}] \\ &- \epsilon_2 \frac{\eta}{\beta} [((\boldsymbol{\omega}_{T0} + \epsilon_2 \dot{\boldsymbol{\omega}}_{T1}) \times \mathbf{m}) \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} \mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot (\boldsymbol{\omega}_{T0} + \epsilon_2 \dot{\boldsymbol{\omega}}_{T1}) \times \mathbf{m}] \end{aligned} \quad (4.223)$$

bzw. zu

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\omega}_{T0} + \epsilon_2 \dot{\boldsymbol{\omega}}_{T1} &= \boldsymbol{\phi} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}) + \frac{\eta}{\beta} \mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} & (4.224) \\
 &+ \epsilon_2 \boldsymbol{\phi} \cdot (\boldsymbol{\omega}_{T0} \times \mathbf{m}) \mathbf{m} + \epsilon_2^2 \boldsymbol{\phi} \cdot (\dot{\boldsymbol{\omega}}_{T1} \times \mathbf{m}) \mathbf{m} \\
 &+ \epsilon_2 \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{m} \boldsymbol{\omega}_{T0} \times \mathbf{m} + \epsilon_2^2 \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{m} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{T1} \times \mathbf{m} \\
 &- \epsilon_2 \frac{\eta}{\beta} (\boldsymbol{\omega}_{T0} \times \mathbf{m}) \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} - \epsilon_2^2 \frac{\eta}{\beta} (\dot{\boldsymbol{\omega}}_{T1} \times \mathbf{m}) \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} \\
 &- \epsilon_2 \frac{\eta}{\beta} \mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot (\boldsymbol{\omega}_{T0} \times \mathbf{m}) - \epsilon_2^2 \frac{\eta}{\beta} \mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot (\dot{\boldsymbol{\omega}}_{T1} \times \mathbf{m}).
 \end{aligned}$$

Wieder werden die verschiedenen Potenzen von  $\epsilon_2$  Null gesetzt. Mit  $(\epsilon_2^0)$  erhält man Gl. (4.219), die grünen Terme mit  $\epsilon_2^2 \cong 0$  werden vernachlässigt,

$$\begin{aligned}
 (\epsilon_2^1) \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_{T1} &= \boldsymbol{\phi} \cdot (\boldsymbol{\omega}_{T0} \times \mathbf{m}) \mathbf{m} + \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{m} (\boldsymbol{\omega}_{T0} \times \mathbf{m}) & (4.225) \\
 &- \frac{\eta}{\beta} [(\boldsymbol{\omega}_{T0} \times \mathbf{m}) \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot (\boldsymbol{\omega}_{T0} \times \mathbf{m})].
 \end{aligned}$$

Die analytische Näherungslösung der Differentialgleichung (4.215) ist

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\omega}_T &= \boldsymbol{\phi} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}) + \frac{\eta}{\beta} \mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} & (4.226) \\
 &+ \epsilon_2 \left\{ \boldsymbol{\phi} \cdot (\boldsymbol{\omega}_{T0} \times \mathbf{m}) \mathbf{m} + \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{m} (\boldsymbol{\omega}_{T0} \times \mathbf{m}) - \frac{\eta}{\beta} [(\boldsymbol{\omega}_{T0} \times \mathbf{m}) \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot (\boldsymbol{\omega}_{T0} \times \mathbf{m})] \right\}.
 \end{aligned}$$

Die Lösung  $\boldsymbol{\omega}_T$  in Gl. (4.226) ist wie schon  $\boldsymbol{\omega}_N$  in Gl. (4.214) wegen der Abhängigkeit von  $\mathbf{m}$  noch keine vollständige Lösung. Sie setzt sich wiederum aus einem widerstandsfreien 1. Term und einem 2. Term, der den Widerstand des umgebenden Mediums beschreibt (gekennzeichnet durch die Koeffizienten  $\epsilon_1$  bzw.  $\epsilon_2$ ), zusammen.

Die Lösung (4.214) für  $\boldsymbol{\omega}_N$  muss, nachdem  $\boldsymbol{\omega}_T$  mit Gl. (4.226) bestimmt ist, noch präzisiert werden, da sie selbst  $\boldsymbol{\omega}_T$  enthält. Setzt man den Perturbationsansatz (4.216) in Gl. (4.214) ein, erhält man

$$\boldsymbol{\omega}_N = \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{m} - \epsilon_1 \boldsymbol{\phi} \cdot (\boldsymbol{\omega}_{T0} + \epsilon_2 \dot{\boldsymbol{\omega}}_{T1}) \times \mathbf{m}. \quad (4.227)$$

Da  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$  jeweils kleine Terme sind, ist deren Produkt derselben Größenordnung wie  $\epsilon_1^2$  und  $\epsilon_2^2$  und damit vernachlässigbar klein. Damit wird Gl. (4.227) zu

$$\boldsymbol{\omega}_N = \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{m} - \epsilon_1 \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\omega}_{T0} \times \mathbf{m}. \quad (4.228)$$

Mit Gl. (4.226) ist erfüllt, dass die Vektoren der Partikelachse  $\mathbf{m}$  und der Rotationsgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}_T$  aufeinander senkrecht stehen ( $\boldsymbol{\omega}_T \cdot \mathbf{m} = 0$ ). Mit den Gln. (4.210) und (4.219) ist die Summe  $\boldsymbol{\omega}_0$  der widerstandsfreien Terme

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{\omega}_{N0} \mathbf{m} + \boldsymbol{\omega}_{T0}, \quad (4.229)$$

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{\phi} + \frac{\eta}{\beta} \mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{m}, \quad (4.230)$$

was der *Jeffery*-Lösung in Gl. (4.131) entspricht. Mit  $\boldsymbol{\omega} = \omega_N \mathbf{m} + \boldsymbol{\omega}_T$  und  $\boldsymbol{\omega}_0$  können die analytischen Näherungslösungen (4.214) für  $\boldsymbol{\omega}_N$  und Gl. (4.226) für  $\boldsymbol{\omega}_T$  zusammengefasst werden zu

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \boldsymbol{\omega}_0 - \epsilon_2 \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 + (\epsilon_2 - \epsilon_1) \boldsymbol{\phi} \cdot (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{m}) \mathbf{m} + \epsilon_2 \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{m} \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{m}, \\ \epsilon_1 &= \frac{\lambda}{\alpha}, \quad \epsilon_2 = \frac{\mu}{\beta}.\end{aligned}\quad (4.231)$$

In Gln. (4.231) und (4.230) gibt es keine Einschränkungen für die Strömung (die Koeffizienten  $d_0$  des Dehngeschwindigkeitstensors  $\mathbf{D}$  und  $\boldsymbol{\phi}_0$  des Drehgeschwindigkeitsvektors  $\boldsymbol{\phi}$  sind nicht festgelegt) und für die Partikelgeometrie (für die Trägheitsmomente  $\lambda$  und  $\mu$  und die Widerstandskoeffizienten  $\alpha$  und  $\beta$ ). In diesem Sinne ist die Lösung allgemein, d. h. sie gilt für alle Strömungsformen nach *Giesekus* (s. Kapitel 3.3) und für alle axialsymmetrischen Partikel.

Für die vollständige Lösung der Bewegungsgleichungen (4.140)-(4.142) muss noch die Lage der Partikelachse  $\mathbf{m}$  gefunden werden. Mit der Identität

$$\dot{\mathbf{m}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{m} = \boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{m} \quad (4.232)$$

kann die entsprechende Differentialgleichung aus Gl. (4.231) abgeleitet werden:

$$\dot{\mathbf{m}} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{m} - \epsilon_2 \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 \times \mathbf{m} + \epsilon \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{m} (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{m}) \times \mathbf{m}. \quad (4.233)$$

Aus Gl. (4.230) folgt

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 = \frac{\eta}{\beta} (\dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{m}}). \quad (4.234)$$

Das Kreuzprodukt  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 \times \mathbf{m}$  ist

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 \times \mathbf{m} = \frac{\eta}{\beta} (-\mathbf{m} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} \dot{\mathbf{m}} + \dot{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{D} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m})), \quad (4.235)$$

$$= \frac{\eta}{\beta} (-\mathbf{m} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} \dot{\mathbf{m}} + \mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{m}} - \mathbf{m} \mathbf{m} \cdot \mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{m}}) \quad (4.236)$$

und

$$(\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{m}) \times \mathbf{m} = -\boldsymbol{\omega}_0 \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}). \quad (4.237)$$

Damit wird Gl. (4.233) zu

$$\dot{\mathbf{m}} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{m} - \epsilon_2 \frac{\eta}{\beta} (\mathbf{D} - \mathbf{m} \mathbf{m} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} \mathbf{E}) \cdot \dot{\mathbf{m}} - \epsilon_2 \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{m} \boldsymbol{\omega}_0 \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}). \quad (4.238)$$

In Gl. (4.238) ist  $\boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{m} = \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{m}$ . Die beiden  $\dot{\mathbf{m}}$ -Terme in Gl. (4.238) auf eine Seite gebracht und mit  $\dot{\mathbf{m}} = \dot{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{E}$  erhält man

$$\begin{aligned}&\dot{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{E} + \epsilon_2 \frac{\eta}{\beta} (\mathbf{D} - \mathbf{m} \mathbf{m} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} \mathbf{E}) \cdot \dot{\mathbf{m}} \\ &= \left[ \left( 1 - \epsilon_2 \frac{\eta}{\beta} \mathbf{m} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} \right) \mathbf{E} + \epsilon_2 \frac{\eta}{\beta} (\mathbf{D} - \mathbf{m} \mathbf{m} \cdot \mathbf{D}) \right] \cdot \dot{\mathbf{m}}\end{aligned}\quad (4.239)$$

#### 4 Bewegungsgleichung

und damit für Gl. (4.238)

$$\left[ \left( 1 - \epsilon_2 \frac{\eta}{\beta} \mathbf{m} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} \right) \mathbf{E} + \epsilon_2 \frac{\eta}{\beta} (\mathbf{D} - \mathbf{m} \mathbf{m} \cdot \mathbf{D}) \right] \cdot \dot{\mathbf{m}} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{m} - \epsilon_2 \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{m} \boldsymbol{\omega}_0 \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}). \quad (4.240)$$

Wir bezeichnen den Tensor in der eckigen Klammer in Gl. (4.240) mit  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{B} = \left( 1 - \epsilon_2 \frac{\eta}{\beta} \mathbf{m} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} \right) \mathbf{E} + \epsilon_2 \frac{\eta}{\beta} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{P}), \quad (4.241)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m} \quad (4.242)$$

und erhalten

$$\mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{m}} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{m} - \epsilon_2 \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{m} \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{P}. \quad (4.243)$$

Der Tensor  $\mathbf{B}$  muss nun invertiert werden, um  $\dot{\mathbf{m}}$  auf der linken Seite von (4.243) isolieren zu können. Dafür nutzen wir den Satz von *Caley-Hamilton* [3], nachdem für jeden Tensor 2. Stufe gilt:

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{\mathbf{B}^2 - I_1(\mathbf{B}) \mathbf{B} + I_2(\mathbf{B}) \mathbf{E}}{I_3(\mathbf{B})}, \quad (4.244)$$

$$I_1(\mathbf{B}) = \text{sp } \mathbf{B}, \quad (4.245)$$

$$I_2(\mathbf{B}) = \frac{1}{2} [(\text{sp } \mathbf{B})^2 - \text{sp } (\mathbf{B}^2)], \quad (4.246)$$

$$I_3(\mathbf{B}) = \frac{1}{6} (\text{sp } \mathbf{B})^3 - \frac{1}{2} \text{sp } \mathbf{B} \text{ sp } (\mathbf{B}^2) + \frac{1}{3} \text{sp } (\mathbf{B}^3) = \det \mathbf{B} \quad (4.247)$$

mit  $\mathbf{B}^2 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$  und entsprechend  $\mathbf{B}^3 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$ .  $I_1$ ,  $I_2$  und  $I_3$  sind Invarianten des Tensors  $\mathbf{B}$ . In den Gln. (4.244)-(4.247) sind

$$\mathbf{B}^2 = \left( 1 - 2 \epsilon_2 \frac{\eta}{\beta} \mathbf{m} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} \right) \mathbf{E} + 2 \epsilon_2 \frac{\eta}{\beta} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{P}), \quad (4.248)$$

$$I_1(\mathbf{B}) = 3 - 4 \epsilon_2 \frac{\eta}{\beta} \mathbf{m} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{m}, \quad (4.249)$$

$$I_2(\mathbf{B}) = 3 - 8 \epsilon_2 \frac{\eta}{\beta} \mathbf{m} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{m}, \quad (4.250)$$

$$I_3(\mathbf{B}) \cong 1 - 4 \epsilon_2 \frac{\eta}{\beta} \mathbf{m} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{m}. \quad (4.251)$$

Bei der 3. Invariante von  $\mathbf{B}$  wurden alle Terme mit dem Koeffizienten  $\epsilon_2^2 \cong 0$  vernachlässigt. Aus  $\mathbf{B}^2$  und den 3 Invarianten von  $\mathbf{B}$  in (4.248)-(4.251) erhalten wir die Inverse

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{\left( 1 - 3 \epsilon_2 \frac{\eta}{\beta} \mathbf{m} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} \right) \mathbf{E} - \epsilon_2 \frac{\eta}{\beta} \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}}{1 - 4 \epsilon_2 \frac{\eta}{\beta} \mathbf{m} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{m}}. \quad (4.252)$$

Um eine möglichst einfache Darstellung für  $\dot{\mathbf{m}}$  zu erhalten, vereinfachen wir  $\mathbf{B}^{-1}$  mit einer Polynomdivision. Diese Vereinfachung liefert einen näherungsweise gültigen Ausdruck für  $\mathbf{B}^{-1}$ . Mit

$$a = \epsilon_2 \frac{\eta}{\beta} \mathbf{m} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{m}, \quad (4.253)$$

$$b = \epsilon_2 \frac{\eta}{\beta} \quad \text{und} \quad (4.254)$$

$$c = \mathbf{m} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} \quad (4.255)$$

lässt sich  $\mathbf{B}^{-1}$  darstellen mit

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1-3a}{1-4a} \mathbf{E} - \frac{b}{1-4bc} \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}. \quad (4.256)$$

Die Division der beiden Polynome in Gl. (4.256) liefert

$$\frac{1-3a}{1-4a} = 1 + a + 4a^2 + \dots, \quad (4.257)$$

$$\frac{b}{1-4bc} = b + 4b^2c + \dots \quad (4.258)$$

Die Terme  $4a^2$  und  $4b^2c$  in den Gln. (4.257) und (4.258) enthalten  $\epsilon_2^2 \cong 0$ , die in den Reihen folgenden Terme höhere Potenzen von  $a$  und  $b$  und damit auch von  $\epsilon_2$ . Daher werden diese Terme jeweils vernachlässigt. Für  $\mathbf{B}^{-1}$  ergibt sich dann näherungsweise

$$\mathbf{B}^{-1} \cong (1+a) \mathbf{E} - b \mathbf{D} \cdot \mathbf{P} \quad (4.259)$$

bzw.

$$\mathbf{B}^{-1} \cong \mathbf{E} + \epsilon_2 \frac{\eta}{\beta} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} \mathbf{E} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}), \quad (4.260)$$

Durch linksseitige skalare Multiplikation der Gl. (4.243) mit der Inversen  $\mathbf{B}^{-1}$  erhalten wir für  $\dot{\mathbf{m}}$

$$\dot{\mathbf{m}} = \left[ \mathbf{E} + \epsilon_2 \frac{\eta}{\beta} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} \mathbf{E} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}) \right] \cdot [\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{m} - \epsilon_2 \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{m} \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{P}]. \quad (4.261)$$

Ausmultipliziert unter Vernachlässigung von  $\epsilon_2^2 \cong 0$  erhalten wir als Differentialgleichung für die Drehung eines axialsymmetrischen Partikels

$$\dot{\mathbf{m}} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{m} - \epsilon_2 \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{m} \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{P} + \epsilon_2 \frac{\eta}{\beta} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} \mathbf{E} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) \cdot (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{m}). \quad (4.262)$$

Gleichung (4.262) ist näherungsweise gültig in dem Sinne, dass alle Terme, die  $\epsilon_2^2 \cong 0$  enthalten, eliminiert wurden. Würde man zusätzlich den kleinen Koeffizienten  $\epsilon_2$  aus Gl. (4.262) eliminieren, bliebe allein  $\dot{\mathbf{m}} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{m}$  übrig, was auf die *Jeffery*-Lösung für die Drehung eines Partikels (Rotationsellipsoid bei *Jeffery*) führt. Gleichung (4.262) ist allerdings auch nichtlinear, was im allgemeinen bei der Lösung einer Differentialgleichung ein erhebliches Problem darstellt. Auch für diese vereinfachte Gleichung konnte keine allgemeine Lösung (eine Lösung, die für alle von *Giesekus* beschriebenen ebenen Strömungen gilt) gefunden werden. Daher beschränken wir uns im folgenden auf die ebenen Strömungen, in denen der Geschwindigkeitsgradient  $\nabla \mathbf{v} = \mathbf{L} = \mathbf{D} - \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{E}$  der umgebenden

Flüssigkeit nur aus seinem antimetrischen Anteil  $\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{E}$  (Rotationsströmung) bzw. nur aus seinem symmetrischen Anteil  $\mathbf{D}$  (Dehnströmung) besteht.

#### 4.6.1 Rotationsströmung

Eine Rotationsströmung nach *Giesekus* [22] hat keinen Dehnungsanteil. Der Dehnungskoeffizient ist  $d_0 = 0$ , damit ist auch  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ . Damit reduziert sich die Rotationsgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}_0$  in Gl. (4.230) zu

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{\phi} \quad (4.263)$$

und deren Zeitableitung  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_0$  zu

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 = \mathbf{0}. \quad (4.264)$$

Die Drehgeschwindigkeitsgleichung (4.231) wird zu

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\phi} + \epsilon_2 \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{m} \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{m}. \quad (4.265)$$

Für eine vollständige Lösung der Bewegungsgleichungen (4.8)-(4.10) muss neben den Drehgeschwindigkeiten auch die Orientierung der Achse  $\mathbf{m}$  gefunden werden. Die Idee zur Lösung ist wie im Kapitel 4.3, ausgehend von einer Koordinatendarstellung von  $\mathbf{m}$  eine zugehörige Drehgeschwindigkeit abzuleiten, um im Anschluss mit Gl. (4.265) die Koeffizienten zu vergleichen.

Der Vektor  $\mathbf{m}$  der Partikelachse kann mit den 3 *Euler*-Drehungen Eigenrotation (mit dem Winkel  $\psi$  um  $\mathbf{k}$ ), Nutation (mit  $\theta$  um  $\mathbf{j}$ ) und Präzession (mit  $\varphi$  wiederum um  $\mathbf{k}$ ) [61] dargestellt werden, s. Abb. 4.35. Die Lage von  $\mathbf{m}$  wird mit einer Folge von Drehungen (Drehtensor  $\mathbf{Q}$ ) ausgehend von der Koordinatenachse  $\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$  wie folgt beschrieben:

$$\mathbf{m} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{k}, \quad (4.266)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\theta \mathbf{j}) \cdot \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}). \quad (4.267)$$

Da die Eigenrotation  $\mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k}$  zu keiner Lageänderung führt, kann  $\mathbf{m}$  ausgedrückt werden durch

$$\mathbf{m} = \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\theta \mathbf{j}) \cdot \mathbf{k} \quad (4.268)$$

bzw. mit

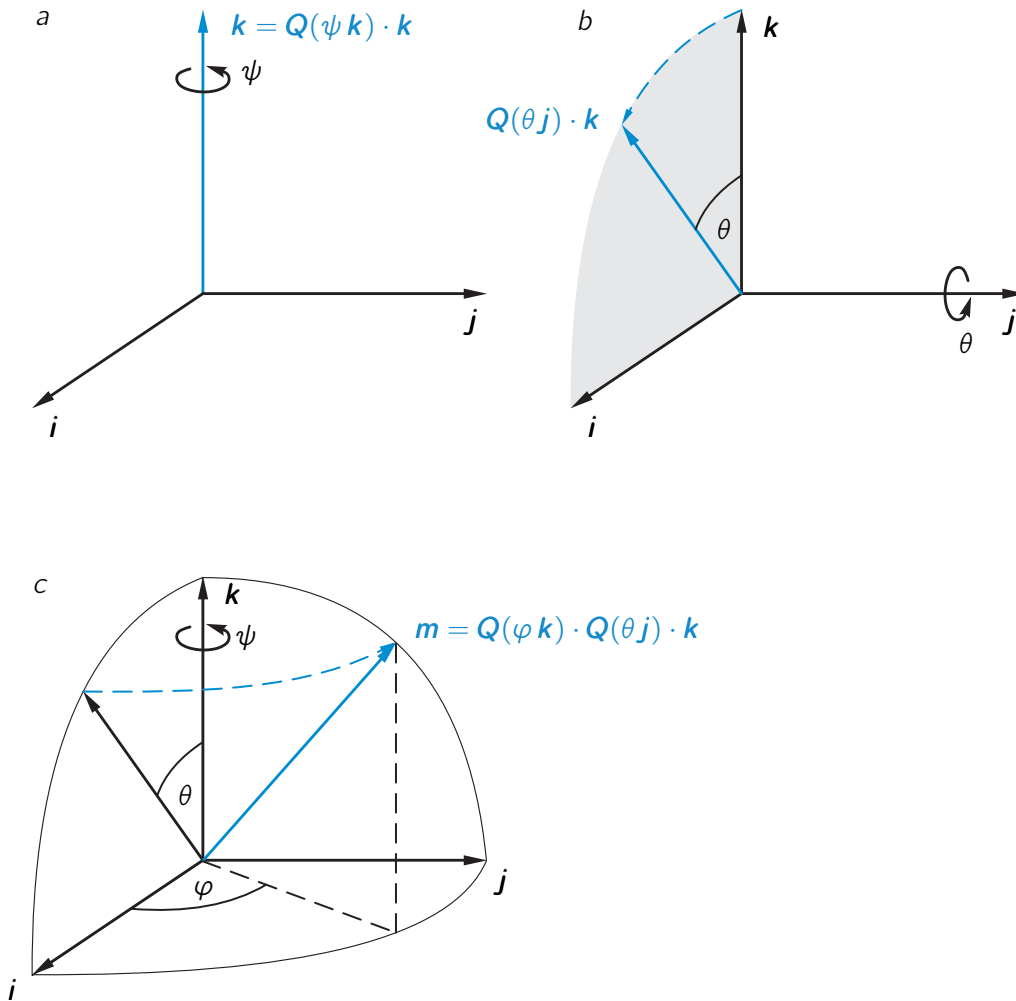
$$\mathbf{Q}(\varphi \mathbf{k}) = \mathbf{k} \mathbf{k} + \cos \varphi (\mathbf{E} - \mathbf{k} \mathbf{k}) + \sin \varphi \mathbf{k} \times \mathbf{E}, \quad (4.269)$$

$$\mathbf{Q}(\theta \mathbf{j}) = \mathbf{j} \mathbf{j} + \cos \theta (\mathbf{E} - \mathbf{j} \mathbf{j}) + \sin \theta \mathbf{j} \times \mathbf{E} \quad (4.270)$$

als

$$\mathbf{m} = \cos \varphi \sin \theta \mathbf{i} + \sin \varphi \sin \theta \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}. \quad (4.271)$$

Aus der Kombination der Drehtensoren (4.267), die die 3 *Euler*-Drehungen repräsentieren, kann die Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$ , mit der sich die Achse  $\mathbf{m}$  dreht, als Summe der 3 Drehungen mit den



**Abbildung 4.35.** Nacheinanderausführung der *Euler*-Drehungen. *a* Eigenrotation, *b* Nutation und *c* Präzession

Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{\theta}$  und  $\dot{\psi}$  [61] abgeleitet werden:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{k} + \dot{\theta} \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{j} + \dot{\psi} \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\theta \mathbf{j}) \cdot \mathbf{k} \quad (4.272)$$

und mit Gl. (4.268)

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{k} + \dot{\theta} \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{j} + \dot{\psi} \mathbf{m}. \quad (4.273)$$

Beide Gln. (4.265) und (4.273) beschreiben dieselbe Drehung. Mit einem Koeffizientenvergleich lassen sich die Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{\theta}$  und  $\dot{\psi}$  bestimmen. Sind diese Größen bekannt, ist mit Gl. (4.271) auch die Orientierung der Achse  $\mathbf{m}$  gegeben. Bevor die Gleichungen der Winkelgeschwin-

digkeiten gleichgesetzt werden, müssen noch die folgenden Terme bestimmt werden:

$$\boldsymbol{\phi} = -\phi_0 \mathbf{k}, \quad (4.274)$$

$$\boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{m} = -\phi_0 \mathbf{k} \cdot \mathbf{m} = -\phi_0 \cos \theta, \quad (4.275)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{m} &= -\phi_0 \sin \theta (-\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}), \\ &= -\phi_0 \sin \theta \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (4.276)$$

$$\mathbf{Q}(\varphi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{j} = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}. \quad (4.277)$$

Mit den Gln. (4.274)–(4.277) wird Gleichung (4.265) zu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= -\dot{\phi}_0 \mathbf{k} + \epsilon_2 \phi_0^2 \cos \theta \sin \theta \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{j}, \\ &= -\dot{\phi}_0 \mathbf{k} + \epsilon_2 \frac{\phi_0^2}{2} \sin 2\theta \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (4.278)$$

Das Gleichsetzen der beiden Winkelgeschwindigkeitsgleichungen (4.273) und (4.278) führt auf

$$\dot{\varphi} \mathbf{k} + \dot{\theta} \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{j} + \dot{\psi} \mathbf{m} = -\dot{\phi}_0 \mathbf{k} + \epsilon_2 \frac{\phi_0^2}{2} \sin(2\theta) \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{j}. \quad (4.279)$$

Gleichung (4.279) wird nacheinander mit  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{Q}(\varphi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{j}$  und  $\mathbf{m}$  skalar multipliziert. Daraus erhält man das Gleichungssystem

$$\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta = -\dot{\phi}_0, \quad (4.280)$$

$$\dot{\theta} = \epsilon_2 \frac{\phi_0^2}{2} \sin(2\theta), \quad (4.281)$$

$$\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} = -\dot{\phi}_0 \cos \theta. \quad (4.282)$$

Die Lösung der Gleichung (4.281) ist mit der Anfangsbedingung  $\theta(0) = \theta_0$

$$\tan \theta(t) = \tan \theta_0 \exp(\epsilon_2 \phi_0^2 t), \quad (4.283)$$

$$\theta(t) = \arctan [\tan \theta_0 \exp(\epsilon_2 \phi_0^2 t)]. \quad (4.284)$$

Das entspricht qualitativ der Lösung (4.98) der Drehung eines schlanken Stabes in einer Rotationsströmung. Die unterschiedlichen Vorzeichen der Exponenten in den Gln. (4.98) und (4.283) resultieren aus den verschiedenen gewählten  $\vartheta$  und  $\theta$ . Gleichung (4.282) mit  $(-\cos \theta)$  multipliziert und von (4.280) subtrahiert ergibt

$$\dot{\varphi}(1 - \cos^2 \theta) = -\dot{\phi}_0(1 - \cos^2 \theta), \quad (4.285)$$

$$\dot{\varphi} = -\dot{\phi}_0, \quad \sin^2 \theta \neq 0 \quad (4.286)$$

und mit der Anfangsbedingung  $\varphi(0) = \varphi_0$  die Lösung

$$\varphi(t) = -\dot{\phi}_0 t + \varphi_0. \quad (4.287)$$

Die Einschränkung  $\sin^2 \theta \neq 0$  in Gl. (4.285) stellt den speziellen Fall dar, dass das Partikel mit seiner Achse  $\mathbf{m}$  initial senkrecht auf der Strömungsebene steht ( $\theta$  s. Abb. 4.35). Für diese spezielle Ausgangslage gilt die Lösung (4.287) nicht.



Multipliziert man Gl. (4.280) mit  $\cos\theta$  und subtrahiert davon Gl. (4.282), erhält man

$$\dot{\psi} \sin^2 \theta = 0. \quad (4.288)$$

Da  $\sin^2 \theta \neq 0$  angenommen wurde, s. Gl. (4.286), muss  $\dot{\psi} = 0$  sein. Die Lösung ist mit der Anfangsbedingung  $\psi(0) = \psi_0$

$$\psi(t) = \psi_0. \quad (4.289)$$

Die Lösungen (4.283) und (4.287) sind, bis auf die unterschiedlichen Koeffizienten  $\chi$  und  $\epsilon_2$ , identisch mit den im Kapitel 4.3.2 erhaltenen Lösungen der Bewegungsgleichung eines schlanken Stabes. Sie gelten für die Drehung allgemein axialsymmetrischer Körper in einer Rotationsströmung. Die unterschiedlichen Vorzeichen stammen aus den entgegengesetzten Richtungen der Vektoren  $\mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\phi}}{\phi_0}$  (s. Gl. 4.55) bzw.  $\mathbf{k} = -\frac{\boldsymbol{\phi}}{\phi_0}$  (s. Gl. 4.274). Mit Gl. (4.289) liegt eine Lösung für die Eigenrotation  $\psi$  eines axialsymmetrischen Körpers vor, die für den Stab aus der Differentialgleichung für  $\boldsymbol{\omega}_T$  nicht gefunden werden kann. Die Eigenrotation  $\psi$  ist mit der Achse  $\mathbf{m}$  verknüpft [ $\dot{\psi} \mathbf{m}$  in Gl. (4.86)], also kollinear mit  $\boldsymbol{\omega}_N$ , die wiederum senkrecht auf  $\boldsymbol{\omega}_T$  steht. Aus diesem Grund ist  $\dot{\psi}$  nicht in der Gleichung (4.89) für  $\boldsymbol{\omega}_T$  eines Stabes enthalten. Mit Gl. (4.289) ist die Eigenrotation  $\psi$  konstant gleich der Anfangseigenrotation  $\psi_0$ . Nach Gl. (4.287) richtet sich die Achse  $\mathbf{m}$  nicht in der Strömungsebene aus, sondern rotiert immer weiter um die Wirbelachse. Da das umgebende Medium einer konstanten Rotationsströmung unterliegt, dreht es das Partikel fortlaufend mit.

## 4.6.2 Dehnströmung

In einer Dehnströmung gibt es keinen Rotationsanteil. Der Geschwindigkeitsgradient des Mediums, das das Partikel umgibt, ist  $\mathbf{L} = \nabla \mathbf{v}_f = \mathbf{D}$ . Aus der analytischen Näherungslösung (4.231) der Drehgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  wird mit  $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 - \epsilon_2 \dot{\boldsymbol{\omega}}_0. \quad (4.290)$$

Mit

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \frac{\eta}{\beta} \mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{m}, \quad \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}, \quad (4.291)$$

$$\dot{\mathbf{m}} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{m}, \quad (4.292)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 = \frac{\eta}{\beta} [(\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{m}) \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{m})] \quad (4.293)$$

wird Gl. (4.290) zu

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\eta}{\beta} \mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} - \epsilon_2 \frac{\eta}{\beta} [(\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{m}) \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} + \mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{m})]. \quad (4.294)$$

Mit

$$\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{m} = \frac{\eta}{\beta} \mathbf{m} \times (\mathbf{D} \cdot \mathbf{m}) \times \mathbf{m} = \frac{\eta}{\beta} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{m} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{m}) \quad (4.295)$$

erhalten wir

$$(\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{m}) \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} = -\frac{\eta}{\beta} \mathbf{m} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} \mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{m}, \quad (4.296)$$

$$\mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{m}) = \frac{\eta}{\beta} [\mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot (\mathbf{D} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} \mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{m}] \quad (4.297)$$

und für  $\boldsymbol{\omega}$  schließlich

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\eta}{\beta} \mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} + \epsilon_2 \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^2 [2 \mathbf{m} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} \mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} - \mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot (\mathbf{D} \cdot \mathbf{m})]. \quad (4.298)$$

Die Partikelachse  $\mathbf{m}$  in den Koordinaten  $\mathbf{ijk}$  des Strömungsfeldes steht in Gl. (4.271) und ist hier zur besseren Übersicht erneut notiert:

$$\mathbf{m} = \cos \varphi \sin \theta \mathbf{i} + \sin \varphi \sin \theta \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}. \quad (4.299)$$

Wir suchen für  $\boldsymbol{\omega}$  eine Darstellung, die es uns nach Möglichkeit erlaubt, die nichtlinearen Terme aus Gl. (4.298) zu eliminieren. Die Projektion des Vektors  $\mathbf{m}$  in die Strömungsebene ist

$$\mathbf{d}^* = \mathbf{m} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{k} \mathbf{k}) = \sin \theta (\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}). \quad (4.300)$$

Wir normieren  $\mathbf{d}^*$  auf die Länge 1 und erhalten den Vektor  $\mathbf{d}$  mit

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{d}^*}{|\mathbf{d}^*|} = \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}. \quad (4.301)$$

In der Strömungsebene gibt es einen Vektor  $\mathbf{b}$ , der senkrecht sowohl auf der Partikelachse  $\mathbf{m}$  als auch auf  $\mathbf{d}$  steht:

$$\mathbf{b} = -Q(\varphi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{j} = \mathbf{d} \times \mathbf{k} = \sin \varphi \mathbf{i} - \cos \varphi \mathbf{j}, \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 1. \quad (4.302)$$

Die Vektoren  $\mathbf{d}$  und  $\mathbf{b}$  sind in Abb. 4.36 dargestellt. Ausgehend von den Vektoren  $\mathbf{m}$  und  $\mathbf{b}$  bilden wir ein Vektortripel  $\mathbf{bem}$  aus 3 Einheitsvektoren, die senkrecht aufeinander stehen und die Basis eines körperfesten kartesischen Koordinatensystems bilden, s. Abb. 4.37. Der Vektor  $\mathbf{e}$  folgt aus dem Kreuzprodukt von  $\mathbf{m}$  und  $\mathbf{b}$ :

$$\mathbf{e} = \mathbf{m} \times \mathbf{b} = \cos \theta \mathbf{d} - \sin \theta \mathbf{k}. \quad (4.303)$$

Ausgehend von Gl. (4.299), der Darstellung von  $\mathbf{m}$  im  $\mathbf{ijk}$ -Koordinatensystem, leitet sich die Gleichung

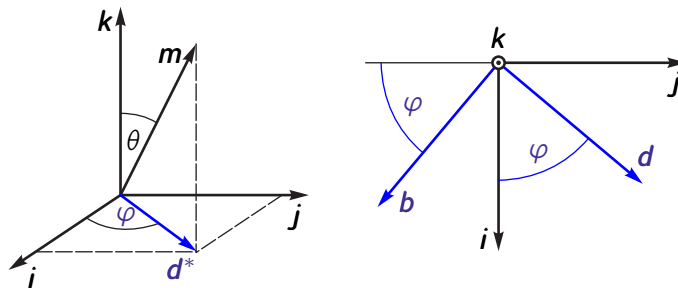
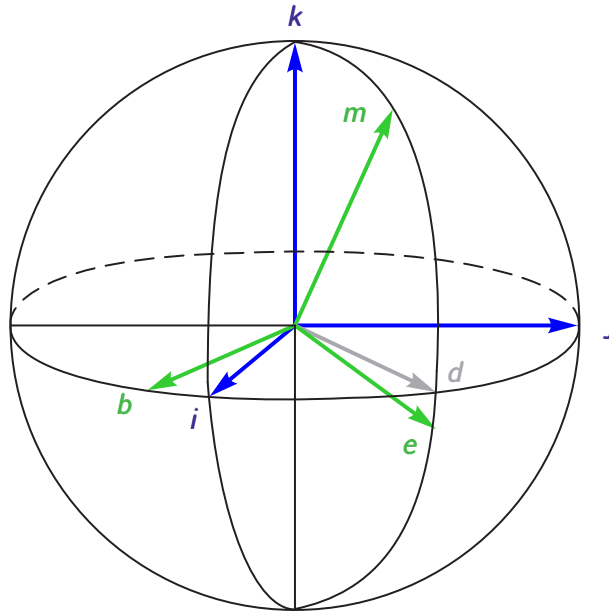


Abbildung 4.36. Lage der Vektoren  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{d}$  in der Strömungsebene


 Abbildung 4.37. Körperfestes Koordinatensystem **bem**

der zu  $\mathbf{m}$  gehörenden Drehgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  gemäß Gl. (4.273) ab. Mit

$$\mathbf{k} = -\sin \theta \mathbf{e} + \cos \theta \mathbf{m} \quad (4.304)$$

und Gl. (4.302) wird Gl. (4.273) zu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \dot{\varphi} (-\sin \theta \mathbf{e} + \cos \theta \mathbf{m}) - \dot{\theta} \mathbf{b} + \dot{\psi} \mathbf{m} \\ &= -\dot{\theta} \mathbf{b} - \dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{e} + (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \mathbf{m}. \end{aligned} \quad (4.305)$$

Die  $\boldsymbol{\omega}$ -Gleichung (4.298) wird nun ebenfalls in die **bem**-Koordinaten überführt. Die einzelnen Terme in (4.298) sind

$$\mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} = d_0 \sin \theta (-\sin 2\varphi \cos \theta \mathbf{b} - \cos 2\varphi \mathbf{e}), \quad (4.306)$$

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{m} = d_0 \sin 2\varphi \sin^2 \theta, \quad (4.307)$$

$$\mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot (\mathbf{D} \cdot \mathbf{m}) = -\frac{d_0^2}{2} \sin 2\theta \mathbf{b}, \quad (4.308)$$

und die Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  nach Gl. (4.298) ist

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= -\frac{\eta}{\beta} d_0 \left( \frac{1}{2} \sin 2\varphi \sin 2\theta \mathbf{b} + \cos 2\varphi \sin \theta \mathbf{e} \right) \\ &+ \epsilon_2 \left( \frac{\eta}{\beta} \right)^2 d_0^2 \left[ 2 \sin 2\varphi \sin^2 \theta \left( -\frac{1}{2} \sin 2\varphi \sin 2\theta \mathbf{b} - \cos 2\varphi \sin \theta \mathbf{e} \right) + \frac{1}{2} \sin 2\theta \mathbf{b} \right] \\ &= \left[ -\frac{\eta d_0}{\beta} \sin 2\varphi \sin \theta \left( 1 + 2\epsilon_2 \frac{\eta}{\beta} d_0 \sin 2\varphi \sin^2 \theta \right) + \epsilon_2 \left( \frac{\eta}{\beta} \right)^2 \frac{d_0^2}{2} \sin 2\theta \right] \mathbf{b} \\ &- \frac{\eta}{\beta} d_0 \cos 2\varphi \sin \theta \left( 1 + 2\epsilon_2 \frac{\eta}{\beta} d_0 \sin 2\varphi \sin^2 \theta \right) \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (4.309)$$

#### 4 Bewegungsgleichung

Mit den Gln. (4.305) und (4.309) liegen nun 2 Gleichungen für  $\omega$  vor, beide im körperfesten, mitgedrehten, kartesischen Koordinatensystem **bem**. Beide Gleichungen werden gleichgesetzt. Mit einem Vergleich der Koeffizienten kann daraus ein System aus 3 Differentialgleichungen in folgender Weise aufgestellt werden:

$$(b) \quad -\dot{\theta} = -\frac{\eta}{\beta} \frac{d_0}{2} \sin 2\varphi \sin 2\theta \left( 1 + 2\epsilon_2 \frac{\eta}{\beta} d_0 \sin 2\varphi \sin^2 \theta \right) + \epsilon_2 \left( \frac{\eta}{\beta} \right)^2 \frac{d_0^2}{2} \sin 2\theta \quad (4.310)$$

$$(e) \quad -\dot{\varphi} \sin \theta = -\frac{\eta}{\beta} d_0 \cos 2\varphi \sin \theta \left( 1 + 2\epsilon_2 \frac{\eta}{\beta} d_0 \sin 2\varphi \sin^2 \theta \right) \quad (4.311)$$

$$(m) \quad 0 = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}. \quad (4.312)$$

Die Gln. (4.310) und (4.311) enthalten beide denselben Klammerausdruck. Gleichung (4.311) nach der Klammer umgestellt ergibt

$$1 + 2\epsilon_2 \frac{\eta}{\beta} d_0 \sin 2\varphi \sin^2 \theta = \frac{\dot{\varphi}}{\frac{\eta}{\beta} d_0 \cos 2\varphi}, \quad \cos 2\varphi \neq 0 \quad (4.313)$$

und Gl. (4.313) in Gl. (4.310) eingesetzt

$$\frac{\dot{\theta}}{\sin 2\theta} - \frac{1}{2} \tan 2\varphi \dot{\varphi} = -\epsilon_2 \left( \frac{\eta}{\beta} \right)^2 \frac{d_0^2}{2}, \quad \sin 2\theta \neq 0, \quad (4.314)$$

$$\frac{d\theta}{\sin 2\theta} - \frac{1}{2} \tan 2\varphi d\varphi = -\epsilon_2 \left( \frac{\eta}{\beta} \right)^2 \frac{d_0^2}{2} dt. \quad (4.315)$$

In den Gln. (4.313) und (4.314) müssen die Orientierungen  $\varphi = \pi/4, 3/4\pi, \dots$  und  $\theta = 0, \pi/2, \dots$  ausgeschlossen werden. Das bedeutet, diese Gleichungen gelten nicht, wenn die Partikelachse in der Strömungsebene oder senkrecht zu ihr bzw. wenn sie in Richtung einer der beiden Hauptrichtungen des Geschwindigkeitsgradienten  $\mathbf{L} = \mathbf{D}$  des Dehnströmungsfeldes liegt.

Gleichung (4.315) integriert liefert

$$\frac{1}{2} \ln \tan \theta + \frac{1}{4} \ln \cos 2\varphi = -\epsilon_2 \left( \frac{\eta}{\beta} \right)^2 \frac{d_0^2}{2} t + C \quad (4.316)$$

mit  $C$  als Integrationskonstante. Zunächst wird Gl. (4.316) umgeformt:

$$\frac{1}{2} \ln \tan \theta + \frac{1}{2} \ln \tan \theta + \frac{1}{2} \ln \cos 2\varphi = -\epsilon_2 \left( \frac{\eta}{\beta} \right)^2 d_0^2 t + C, \quad (4.317)$$

$$\ln(\tan^2 \theta \cos 2\varphi) = -2 \left[ \epsilon_2 \left( \frac{\eta}{\beta} \right)^2 d_0^2 t + C \right], \quad (4.318)$$

$$\tan^2 \theta \cos 2\varphi = D e^{Kt}, \quad (4.319)$$

$$K = -2\epsilon_2 \left( \frac{\eta}{\beta} \right)^2 d_0^2. \quad (4.320)$$

Die Integrationskonstante  $C$  ist in  $D$  enthalten:  $D = e^{2C}$ . Es genügt,  $D$  in Gl. (4.319) zu bestimmen. Mit den Anfangsbedingungen  $\varphi(0) = \varphi_0$  und  $\theta(0) = \theta_0$  ist  $D = \tan^2 \theta_0 \cos(2\varphi_0)$ . Die Gl. (4.316)

wird zu

$$\tan^2 \theta \cos 2\varphi = \tan^2 \theta_0 \cos 2\varphi_0 e^{Kt}, \quad K = -2\epsilon_2 \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^2 d_0^2. \quad (4.321)$$

Mit Gl. (4.321) liegt eine Lösung über 2 Variablen vor. Jede für sich ist damit noch nicht bestimmt. Man kann nun die Lösung (4.321) in eine der beiden Gleichungen (4.310) oder (4.311) einsetzen und sie dadurch von einer Variablen entkoppeln, erneut integrieren und hat dann 2 Lösungen, mit denen die Variablen  $\varphi$  und  $\theta$  bestimmt sind. Über die Lösung für  $\varphi$  erhält man danach mit der Integration der Gl. (4.312) die Lösung für  $\psi$ . Dieser Weg ist theoretisch möglich, hat aber praktisch nicht zu einer analytisch integrierbaren Gleichung geführt.

Wenn für das Differentialgleichungssystem (4.310)-(4.312) keine vollständige analytische Lösung gefunden werden kann, bietet es sich an, wenigstens mit Vernachlässigung des kleinen Koeffizienten  $\epsilon_2$  zu versuchen, eine Lösung zu erhalten. Mit  $\epsilon_2 = \mu/\beta = 0$  wird die Trägheit des Partikels aus der Bewegungsgleichung eliminiert. Das stellt eine Einschränkung der Allgemeingültigkeit dar und führt zu einer Lösung, zu der man auch mit der *Jeffery*-Annahme kommt, nach der das äußere Moment, das der Bewegung des Partikels entgegen steht, gleich Null ist.

In Kapitel 4.4 wurde vereinfachend  $\beta = \eta$  angenommen. Da beide in den Gln. (4.310)-(4.312) ausschließlich als Quotient  $\eta/\beta = 1$  vorkommen, sollen sie im folgenden nicht vernachlässigt werden. Mit diesem Ansatz ( $\epsilon_2 = 0$ ) werden die Gleichungen (4.310)-(4.312) zu

$$\dot{\theta} = \frac{\eta d_0}{\beta} \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \sin(2\theta) \quad (4.322)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\eta}{\beta} d_0 \cos(2\varphi) \quad (4.323)$$

$$0 = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}. \quad (4.324)$$

Gleichung (4.323) kann durch Trennung der Veränderlichen gelöst werden. Mit der Anfangsbedingung  $\varphi(0) = \varphi_0$  ist die Lösung der Differentialgleichung (4.325)

$$\frac{d\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{\eta}{\beta} d_0 dt \quad (4.325)$$

$$\tan\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{4}\right) e^{At}, \quad (4.326)$$

$$A = 2 \frac{\eta}{\beta} d_0, \quad (4.327)$$

$$\varphi = \arctan\left(B e^{At}\right) - \frac{\pi}{4}, \quad (4.328)$$

$$B = \tan\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{4}\right). \quad (4.329)$$

Mit der Lösung für  $\varphi$  in Gl. (4.328) wird Gl. (4.322) zu

$$\frac{d\theta}{\sin 2\theta} = \frac{A}{4} \sin 2 \left[ \arctan\left(B e^{At}\right) - \frac{\pi}{4} \right] dt. \quad (4.330)$$

#### 4 Bewegungsgleichung

Mit den Entsprechungen

$$\sin[2(a - b)] = \sin(2a) \cos(2b) - \cos(2a) \sin(2b), \quad (4.331)$$

$$a = \arctan(Be^{At}), \quad (4.332)$$

$$b = \frac{\pi}{4} \quad (4.333)$$

wird aus Gl. (4.330)

$$\begin{aligned} \frac{4}{A} \frac{d\theta}{\sin 2\theta} &= \left\{ \sin [2 \arctan (Be^{At})] \cos \frac{\pi}{2} - \cos [2 \arctan (Be^{At})] \sin \frac{\pi}{2} \right\} dt, \\ &= -\cos [2 \arctan (Be^{At})] dt. \end{aligned} \quad (4.334)$$

Die Lösung der Differentialgleichung (4.334) ist

$$\frac{2}{A} \ln(\tan \theta) = \frac{1}{A} \left[ \ln \left( \frac{(Be^{At})^2 + 1}{B^2} \right) - At \right] + C, \quad (4.335)$$

$$\tan \theta = D \exp \frac{1}{2} \left[ \ln \left( \frac{(Be^{At})^2 + 1}{B^2} \right) - At \right], \quad D = e^{CA}. \quad (4.336)$$

Mit der Anfangsbedingung  $\theta(0) = \theta_0$  ist

$$D = \sqrt{\frac{B^2}{B^2 + 1}} \tan \theta_0. \quad (4.337)$$

Damit ist die Lösung für den Winkel  $\theta$

$$\tan \theta = \sqrt{\frac{B^2}{B^2 + 1}} \tan(\theta_0) \exp \frac{1}{2} \left[ \ln \left( \frac{(Be^{At})^2 + 1}{B^2} \right) - At \right] \quad (4.338)$$

$$\tan \theta = \tan(\theta_0) \sqrt{\frac{(Be^{At})^2 + 1}{B^2 + 1}} e^{-\frac{At}{2}}, \quad (4.339)$$

$$\theta = \arctan \left( \tan(\theta_0) \sqrt{\frac{(Be^{At})^2 + 1}{B^2 + 1}} e^{-\frac{At}{2}} \right). \quad (4.340)$$

Aus Gleichung (4.324) folgt mit Gl. (4.323) für  $\psi$ :

$$d\psi = -\frac{\eta}{\beta} d_0 \cos 2\varphi(t) \cos \theta(t) dt + \psi(0). \quad (4.341)$$

Gleichung (4.341) wird numerisch gelöst und im Anschluss graphisch ausgewertet. Die analytischen Näherungslösungen für  $\varphi$  und  $\theta$  sind hier noch einmal zusammengefasst:

$$\varphi = \arctan(B e^{At}) - \frac{\pi}{4}, \quad (4.342)$$

$$\theta = \arctan\left(\tan(\theta_0) \sqrt{\frac{(B e^{At})^2 + 1}{B^2 + 1}} e^{-\frac{At}{2}}\right), \quad (4.343)$$

$$A = 2 \frac{\eta}{\beta} d_0, \quad (4.344)$$

$$B = \tan\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{4}\right). \quad (4.345)$$

In Abb. 4.38 sind die Graphen der 3 Euler-Winkel miteinander verglichen. Für die numerische Lösung wurden die Differentialgleichungssysteme (4.8)-(4.10) und (4.187)-(4.191) gelöst. Die Ausgangsorientierung  $\varphi_0 = 60^\circ$ ,  $\vartheta_0 = 60^\circ$  führt auf die folgenden Anfangskoordinaten der Achse  $\mathbf{m}$ :

$$\mathbf{m}_0 = \frac{1}{4} \mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{4} \mathbf{j} + \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{k}. \quad (4.346)$$

Für  $\boldsymbol{\omega}_T$  wurden die folgenden Koordinaten vorgegeben:

$$\boldsymbol{\omega}_{T0} = \frac{\sqrt{3}}{4} \mathbf{i} + \frac{3}{4} \mathbf{j} - \frac{1}{2} \mathbf{k}. \quad (4.347)$$

Zusammen mit  $\omega_{N0} = 1 \text{ s}^{-1}$  bilden die Gln. (4.346) und (4.347) die Anfangsbedingungen für das System (4.8)-(4.10). Für das Differentialgleichungssystem (4.187)-(4.191) wurden zu denselben Anfangsorientierungen  $\varphi_0$  und  $\vartheta_0$  und zu  $\omega_{N0} = 1 \text{ s}^{-1}$  die Anfangswinkelgeschwindigkeiten  $\dot{\varphi}_0 = -\sqrt{3} \text{ s}^{-1}$  und  $\dot{\vartheta}_0 = -\frac{1}{2} \text{ s}^{-1}$  entsprechend Gl. (4.199) vorgegeben. Aus den Lösungen des Vektors  $\mathbf{m}(t)$  wurden die Winkel  $\varphi(t)$  und  $\vartheta(t)$  bestimmt, die die Lage der Achse  $\mathbf{m}$  im  $ijk$ -Koordinatensystem beschreiben. Die Drehung mit  $\psi$  um die Achse  $\mathbf{m}$  wurde bei der numerischen Lösung nicht bestimmt.

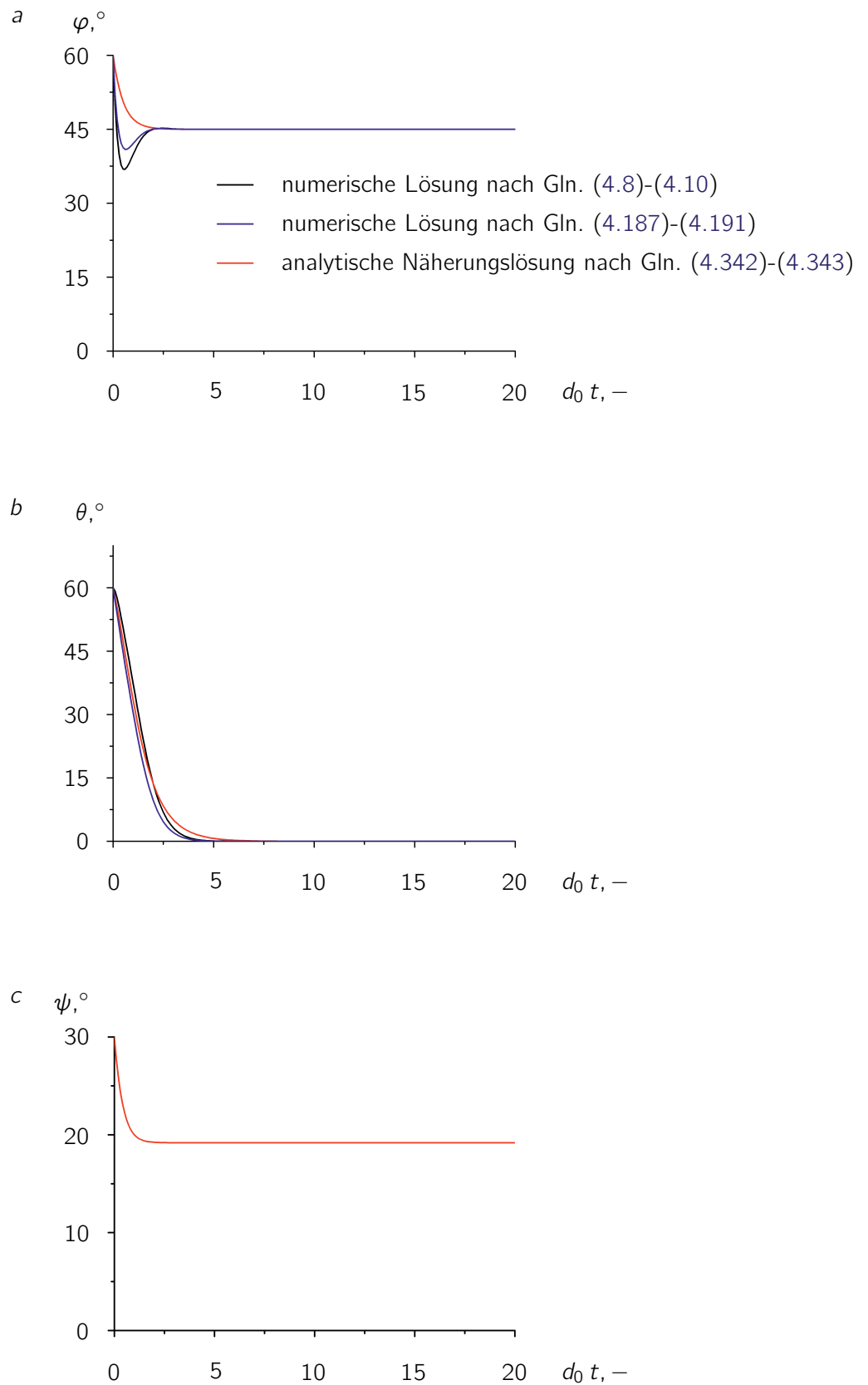
Der Vergleich der numerischen mit der analytischen Näherungslösung nach der Perturbationsmethode zeigt bis etwa  $d_0 t = 5$  Unterschiede, besonders deutlich in der  $\varphi(t)$ -Kurve, die die Ausrichtung in der Strömungsebene beschreibt. Ab  $d_0 t = 5$  sind sowohl die  $\varphi(t)$ - als auch die  $\theta(t)$ -Kurven nahezu deckungsgleich. Bemerkenswert ist der deutliche Unterschied im Anfangsbereich der  $\varphi$ -Kurven. Nach den numerischen Lösungen schwingt das Partikel über die stabile Ausrichtung ( $45^\circ$ ) hinaus, nicht aber nach der analytischen Näherungslösung.

Die Ursache für das „Überschwingen“ über die stabile Lage (im Winkel von  $45^\circ$  zur  $i$ -Achse bzw. in der 1. Hauptrichtung  $\mathbf{n}_1$  des Geschwindigkeitsgradienten  $\mathbf{L} = \mathbf{D}$ ) liegt in der Anfangsorientierung des Drehgeschwindigkeitsvektors  $\boldsymbol{\omega}_T$ . Aus

$$\boldsymbol{\omega}_T = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}) \quad (4.348)$$

folgt

$$\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}_T = 0. \quad (4.349)$$

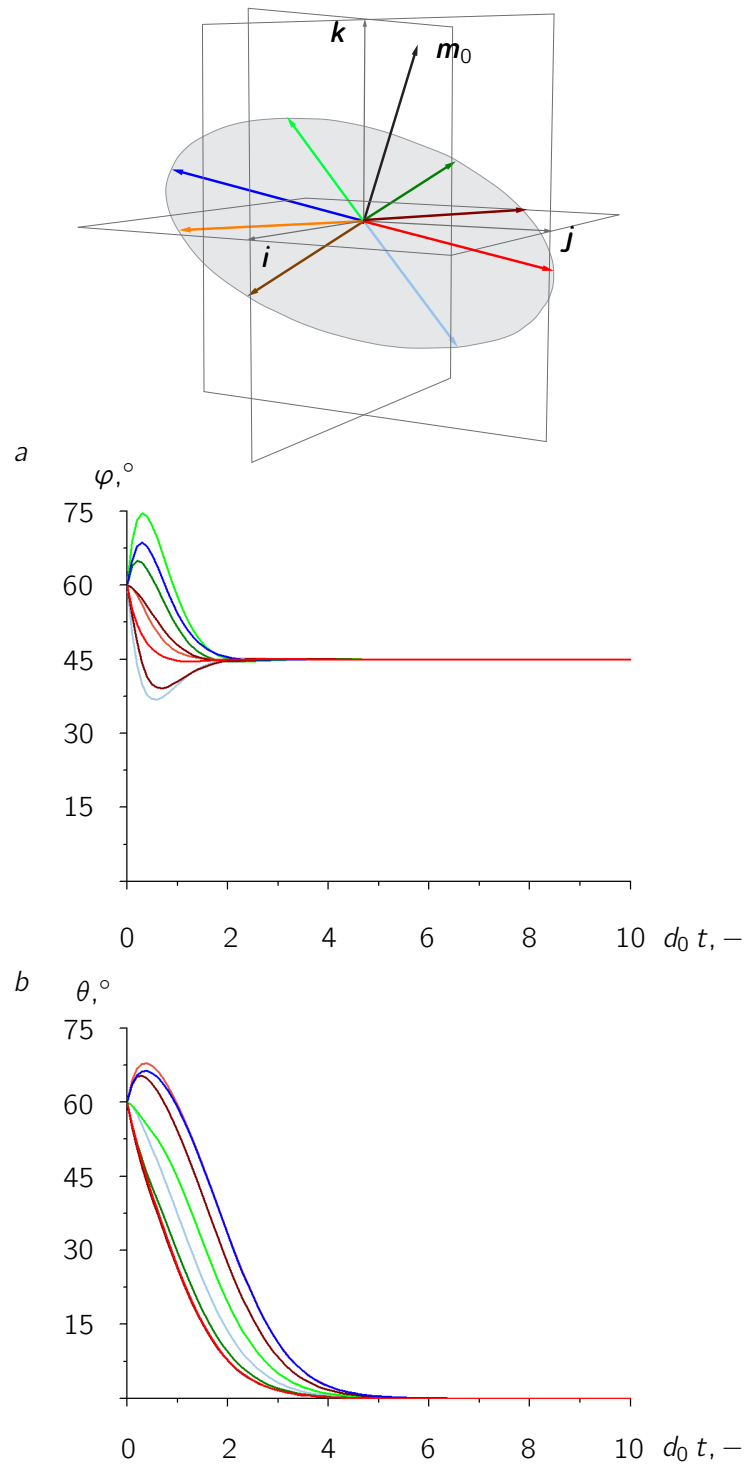


**Abbildung 4.38.** Dehnströmung. *a* Ausrichtung der Achse  $\mathbf{m}$  in der Strömungsebene, *b* Bewegung in die Strömungsebene, *c* Eigendrehung der Achse  $\mathbf{m}$



Die Anfangsbedingungen wurden für alle Rechnungen in dieser Arbeit in erster Linie nach der Ausgangsorientierung  $\mathbf{m}_0$  der Achse  $\mathbf{m}$  gewählt, d. h. es wurden die Anfangswinkel  $\varphi_0$  und  $\vartheta_0$  vorgegeben, daraus eindeutig die Koordinaten von  $\mathbf{m}_0$  bestimmt, dann aber willkürlich eine Ausgangsorientierung  $\boldsymbol{\omega}_{T0}$  vorgegeben, die Gl. (4.349) erfüllt. Es gibt aber unendlich viele Möglichkeiten für  $\boldsymbol{\omega}_{T0}$ , die alle in der Ebene senkrecht zu  $\mathbf{m}_0$  liegen. In Abb. 4.39 sind die Ausrichtung in der Strömungsebene und das Absenken der Achse  $\mathbf{m}$  in die Strömungsebene für dieselbe Ausgangslage von  $\mathbf{m}$  ( $\varphi_0 = 60^\circ$  und  $\vartheta_0 = 60^\circ$ ), aber verschiedene  $\boldsymbol{\omega}_{T0}$  gezeigt. Bei einigen Kurven dreht sich die Achse  $\mathbf{m}$  zunächst von  $\mathbf{n}_1$  weg, bei anderen schwingt sie über  $\mathbf{n}_1$  hinaus, und bei einigen richtet sie sich direkt in  $\mathbf{n}_1$ -Richtung aus. Das Überspringen in Abb. 4.38 sagt also nichts über den Dämpfungsgrad aus, sondern resultiert allein aus unterschiedlichen Ausgangslagen  $\boldsymbol{\omega}_{T0}$  des Drehgeschwindigkeitsvektors  $\boldsymbol{\omega}_T$  in der Ebene senkrecht zu  $\mathbf{m}$ .

Mit der oben beschriebenen Annahme,  $\epsilon_2$  zu vernachlässigen, konnte das Differentialgleichungssystem (4.322)-(4.324) näherungsweise analytisch gelöst werden. Bei dem Vergleich der Graphen der einzelnen Winkel ergibt sich nun das Problem, dass das numerisch gelöste System mit Berücksichtigung der Wechselwirkung zwischen dem Partikel und dem umgebenden Medium dem analytisch gelösten genäherten System bei vernachlässigter Trägheit gegenübergestellt wird. Dass die jeweiligen Graphen im gesamten Bereich sehr nahe beieinanderliegen, konnte daher von vornherein nicht erwartet werden. Dennoch zeigen die roten Kurven der analytischen Näherungslösung eine Ausrichtung, die physikalisch plausibel ist. Die Achse  $\mathbf{m}$  driftet in die Strömungsebene und richtet sich dort in Richtung der 1. Hauptachse  $\mathbf{n}_1$  des Dehngeschwindigkeitstensors  $\mathbf{D}$ , d. h. unter einem Winkel von  $45^\circ$  zur  $i$ -Achse, aus. Die Eigendrehung sinkt von  $\psi_0 = 30^\circ$  auf einen Wert nahe  $20^\circ$  bei etwa  $d_0 t = 3$  und bleibt dann konstant.



**Abbildung 4.39.** Dehnströmung, Ausrichtung bei verschiedenen Ausgangsorientierungen von  $\boldsymbol{\omega}_{T0}$  mit derselben Ausgangslage der Achse  $\boldsymbol{m}$  ( $\varphi_0 = 60^\circ$ ,  $\vartheta_0 = 60^\circ$ ). *a* Ausrichtung der Achse  $\boldsymbol{m}$  in der Strömungsebene, *b* Bewegung in die Strömungsebene

# 5 Zusammenfassung und Ausblick

## 5.1 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde die Bewegungsgleichung für die Rotation eines starren axialsymmetrischen Partikels, das in einer viskosen Flüssigkeit suspendiert ist, aufgestellt. Für schlanke Partikel wurde die Bewegungsgleichung für ein ruhendes Medium analytisch, in einer Rotationsströmung näherungsweise analytisch, in einer Scherströmung für trägheitsfreie Bewegung analytisch und in Dehnströmung, elliptischer und hyperbolischer Strömung numerisch gelöst. Anschließend wurde die Geometrie des Partikels auf einen Zylinder und einen Zylinder mit abgerundeten Deckflächen „erweitert“. Dessen Bewegungsgleichung wurde in einer Scherströmung numerisch gelöst. Ein Vergleich mit der Lösung des schlanken Stabes zeigte gute Übereinstimmung. Das Partikel driftet unabhängig von seiner Ausgangslage (mit den Einschränkungen, dass es anfänglich nicht parallel zur Wirbel- oder einer der Hauptrichtungen des Verzerrungsgeschwindigkeitstensors liegt) in die Strömungsebene und richtet sich in Strömungsrichtung aus. Für die beiden speziellen Strömungen Rotationsströmung (Dehngeschwindigkeitstensor  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ ) und Dehnströmung (Rotationsanteil und damit Wirbelvektor  $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$ ) wurden mit Hilfe der Perturbationsmethode eine analytische Näherungslösung für die Drehung eines abgerundeten Zylinders gefunden, in einer Dehnströmung allerdings nur mit der weiteren Einschränkung, die Bewegungsgleichung durch die Vernachlässigung kleiner Terme zu vereinfachen.

Aus der Bewegungsgleichung

$$\lambda \dot{\boldsymbol{\omega}}_N + \mu \dot{\boldsymbol{\omega}}_T = [\alpha \mathbf{m} \mathbf{m} + \beta (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m})] \cdot (\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\omega}) + \eta \mathbf{m} \times \mathbf{D} \cdot \mathbf{m}, \quad (5.1)$$

s. Gl. (4.4) wurden die beiden Differentialgleichungssysteme (4.8)-(4.10) bzw. (4.187)-(4.191) abgeleitet, die die Drehung axialsymmetrischer Partikel in einem viskosen Medium bei Berücksichtigung von Partikel- und Fluidträgheit beschreiben. Gleichung (5.1) wurde aus der Drehimpulsbilanz des Partikels hergeleitet. In vielen Arbeiten, die im Kapitel 3.3 zitiert wurden (z. B. in [19], [13], [50], [55], [58], [32], [38] und [42]), wird die Fluidträgheit mit Hilfe der *Reynolds*-Zahl und in einigen die Partikelträgheit mit der *Stokes*-Zahl (z. B. [38], [42]) beschrieben.

Eine Darstellung der Trägheiten über *Reynolds*- und *Stokes*-Zahl ist in der vorliegenden Arbeit nicht gewählt worden. Der Widerstand, den das umgebende Fluid der Bewegung des Partikels entgegen setzt, ist hier mit Hilfe des Widerstands- bzw. hydrodynamischen Moments  $\mathbf{M}_O$  nach Gl. (3.45) dargestellt, das *Jeffery* in seiner Arbeit [29] gleich Null gesetzt hat. Der Einfluss der Strömung des umgebenden Fluids ist über den Wirbelvektor  $\boldsymbol{\phi}$  und den Tensor  $\mathbf{D}$  im hydrodynamischen Moment enthalten. Die Widerstandskoeffizienten  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\eta$  enthalten die Partikelgeometrie und Informationen über die Viskosität des Fluids, die Oberflächenbeschaffenheit des Partikels, Haftung/Gleitung des Fluids an der Partikeloberfläche u. a. m. Die Trägheit des Partikels geht über seinen Trägheitstensor  $\mathbf{C}$  in die Bewegungsgleichung ein, der sich in Gl. (5.1) in den Massenträgheitsmomenten  $\lambda$  und  $\mu$  wiederfindet. Eine Vernachlässigung der Partikelträgheit würde dazu führen, dass die linke Seite der

Bewegungsgleichung (5.1) gleich Null wird, die Vernachlässigung der Fluidträgheit würde die rechte Seite verschwinden lassen. Ausgangspunkt der Arbeit über die Rotation von suspendierten Partikeln war die Annahme, dass die Bewegung unter Berücksichtigung der Trägheiten bestimmt werden soll. Daher wurde der Ansatz über die Drehimpulsbilanz gewählt.

Es ergibt sich nun die Schwierigkeit, die Ergebnisse der hier vorliegenden Arbeit mit den eingangs zitierten zu vergleichen. Qualitativ ist das möglich. Beschränken wir uns auf die Arbeiten, in denen das Fluid mit einer Scherströmung beschrieben war ([11], [13], [55], [38] und [42]), dann führt die Berücksichtigung der Trägheit dazu, dass sich das Partikel nicht mehr in einem geschlossenen *Jeffery*-Orbit bewegt, sondern in die Strömungsebene driftet und sich schließlich mit seiner Symmetrieachse in Strömungsrichtung ausrichtet. Zu demselben Ergebnis führt die Lösung der Bewegungsgleichung mit dem in dieser Arbeit vorgestellten Modell. Die numerischen Lösungen aus den beiden Differentialgleichungssystemen (4.8)-(4.10) bzw. (4.187)-(4.191) waren nicht zueinander deckungsgleich, was darauf zurückzuführen ist, dass die jeweiligen Anfangsbedingungen nicht eindeutig miteinander in Beziehung gesetzt werden können.

Für einen axialsymmetrischen Körper wurde die Bewegungsgleichung (Rotations- und Dehnströmung) mit Hilfe der Perturbationsmethode näherungsweise analytisch gelöst. Diese Lösungen sind nicht mit der Bewegung in einer Scherströmung gleichzusetzen. Dennoch zeigen beide Lösungen, dass die Berücksichtigung der Trägheit auch hier zu einem Driften der Partikelachse in die Strömungsebene führt, solange seine Ausgangslage nicht genau senkrecht zur Strömungsebene ist. Insgesamt wurde in dieser Arbeit gezeigt, dass die Berücksichtigung der Trägheiten (Fluid und Partikel) zu einer signifikanten Abweichung von der *Jeffery*-Lösung führt. Die in den Diagrammen gezeigten Lösungen gelten für Zylinder (Z) bzw. abgerundete Zylinder (ZHK). Die Partikelgeometrien stellen jedoch keine Einschränkung der Allgemeingültigkeit der Lösungen dar, da sie nur Einfluss auf die Koeffizienten (die Massenträgheitsmomente  $\lambda$  und  $\mu$  bzw. die Widerstandskoeffizienten  $\alpha$  und  $\beta$ ) haben. Die gefundenen Lösungen sind physikalisch plausibel und stimmen qualitativ mit den in anderen Arbeiten anhand anderer Modelle berechneten Lösungen überein.

## 5.2 Ausblick

Eine vollständige Lösung der Bewegungsgleichung eines axialsymmetrischen Partikels konnte auch mit analytischen Näherungsverfahren nicht gefunden werden. Insbesondere die Lösung für die Rotation eines Partikels in einer Scherströmung ist mit Blick auf die Faserorientierung spritzgegossener Bauteile von Interesse. Hinsichtlich der praktischen Anwendbarkeit des Modells ist eine vollständige Lösung für alle von *Giesekus* beschriebenen Strömungsformen nötig. Da mit dem Spritzgussverfahren nur dünnwandige Bauteile hergestellt werden können, wird oft von einer Scherströmung ausgegangen. Für flächige Bauteile trifft das sicher im Wesentlichen zu, in der Praxis werden im Spritzguss aber hauptsächlich Bauteile mit komplexer Geometrie hergestellt. An Ecken, sonstigen scharfen Geometrieänderungen oder umströmten Teilen liegt keine reine Scherströmung vor. Um die Ausbildung der Faserorientierung allgemein bestimmen zu können, braucht man eine allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung der suspendierten Partikel, in der es keine Einschränkungen für die Koeffizienten  $d_0$  und  $\phi_0$  des Geschwindigkeitsgradienten  $\mathbf{L}$  gibt. Um sie zu finden, sollten noch andere analytische Näherungsverfahren getestet werden. Desweiteren muss vor einer Anwendung in einer Simulationssoftware das Modell auf ein Viel-Partikel-Modell erweitert werden, das auch die Wechselwirkung der Partikel untereinander berücksichtigt. Hier kann auf bestehende Erweiterungen zurückgegriffen wer-

den, die derzeit in den Simulationsprogrammen, die auf dem *Jeffery*-Modell fußen, implementiert sind.

Weiterhin besteht Unsicherheit hinsichtlich der Wechselwirkungskoeffizienten  $\zeta$  und  $\xi$ , die im Kapitel 4.4 ausführlich beschrieben wurde. Wünschenswert ist hier, dass diese Koeffizienten mit Größen wie der Viskosität des Fluids (unter Berücksichtigung der Abhängigkeit von der Temperatur und der Anzahl der suspendierten Partikel) und Größen, die die Oberflächenbeschaffenheit des Partikels und die Reibung bzw. Gleitung des Fluids auf seiner Oberfläche beschreiben, in eine eindeutige Zuordnung gebracht werden können. In dieser Arbeit wurden die genannten Größen in den Koeffizienten  $\zeta$  und  $\xi$  pauschal zusammengefasst. Vor einer Anwendung des Modells in der Praxis müssen die verschiedenen Einflüsse gegeneinander gewichtet und quantifiziert werden. Größen wie die Viskosität eines Polymers sind Standarddaten, die beim Hersteller erfragt werden können bzw. frei verfügbar sind. In kurzfaserverstärkten Polymeren für den Einsatz im Spritzguss kommen häufig Glasfasern zum Einsatz [43]. Da die Polymerschmelze auf ihrer Oberfläche schlecht haftet und eine schlechte Haftung sich auf die mechanischen Kennwerte negativ auswirkt, werden die Fasern mit Haftvermittlern vorbehandelt. Das führt zu einer deutlichen Verbesserung mechanischer Kennwerte [35, 54]. Für eine genaue Bestimmung von  $\zeta$  und  $\xi$  muss ein quantitatives Maß für die Haftung gefunden werden, das in erster Näherung aus veröffentlichten Studien abgeschätzt werden kann.



# Literaturverzeichnis

- [1] Albring, W.: *Angewandte Strömungslehre, 6. Aufl.* Akademie-Verlag, 1990. (Zitiert auf den Seiten A-3 und A-4.)
- [2] Altan, M. C. und B. N. Rao: *Closed-form solution for the orientation field in a center-gated disk.* J. Rheol., 39:581–599, 1995. (Zitiert auf den Seiten 4 und 33.)
- [3] Altenbach, H.: *Kontinuumsmechanik: Einführung in die materialunabhängigen und materialabhängigen Gleichungen.* Springer-Verlag, 2015. (Zitiert auf Seite 72.)
- [4] Altenbach, H., I. A. Brigadnov und K. Naumenko: *Rotation of a slender particle in a shear flow: Influence of the rotary inertia and stability analysis.* ZAMM, 89:823–832, 2009. (Zitiert auf Seite 13.)
- [5] Altenbach, H., K. Naumenko, S. Pylypenko und B. Renner: *Influence of rotary inertia on the fiber dynamics in homogeneous creeping flows.* ZAMM, 87:81–93, 2007. (Zitiert auf den Seiten 7, 12, 13, 15, 26, und 38.)
- [6] Altenbach, H., K. Naumenko und P. A. Zhilin: *A micro-polar theory for binary media with application to phase-transitional flow of fiber suspensions.* Continuum Mech. Thermodyn., 15:539–570, 2003. (Zitiert auf Seite 5.)
- [7] Bay, R. S. und C. L. Tucker: *Fiber orientation in simple injection moldings. Part 1: theory and numerical methods.* Polym. Comp., 13:317–331, 1992. (Zitiert auf den Seiten 1 und 4.)
- [8] Bay, R. S. und C. L. Tucker: *Fiber orientation in simple injection moldings. Part 2: experimental results.* Polym. Comp., 13:332–341, 1992. (Zitiert auf den Seiten 1, 3, und 15.)
- [9] Brenner, H.: *The Stokes resistance of an arbitrary particle. 3. Shear fields.* Chem. Eng. Sci., 19:631–651, 1964. (Zitiert auf Seite 21.)
- [10] Bretherton, F. P.: *The motion of rigid particles in a shear flow at low Reynolds number.* J. Fluid Mech., 14:284–304, 1962. (Zitiert auf den Seiten 7, 10, 13, und 27.)
- [11] Broday, D., M. Fichman, M. Shapiro und C. Gutfinger: *Motion of spheroidal particles in vertical shear flows.* Phys. Fluid, 10(1):86–100, 1998. (Zitiert auf den Seiten 7, 11, 13, 27, und 88.)
- [12] Charrier, J.-M.: *Polymeric Materials and Processing: Plastics, Elastomers, and Composites.* 1991. (Zitiert auf Seite 15.)
- [13] Ding, E. J. und C. K. Aidun: *The dynamics and scaling law for particles suspended in shear flow with inertia.* J. Fluid Mech., 423:317–344, 2000. (Zitiert auf den Seiten 7, 11, 13, 15, 27, 87, und 88.)
- [14] Dinh, S. M. und R. C. Armstrong: *A Rheological Equation of State for Semiconcentrated Fiber Suspensions.* J. Rheol., 28:207–227, 1984. (Zitiert auf den Seiten 33 und 34.)
- [15] Dupret, F., A. Couniot, O. Mal, L. Vanderschuren und O. Verhoyen: *Modelling and simulation of injection molding.* In: Siginer, D. A., D. D. Kee und R. P. Chhabra (Herausgeber): *Advances in the Flow and Rheology of Non-Newtonian Fluids*, Seiten 939–1010. Elsevier, Amsterdam

- et al., 1999. (Zitiert auf Seite 4.)
- [16] Eberle, A. P. R. und D. G. Baird: *Obtaining reliable transient rheological data on concentrated short fiber suspensions using a rotational rheometer*. J. Rheol., 53:1049–1068, 2009. (Zitiert auf Seite 4.)
- [17] Ericksen, J. L.: *Transversely isotropic fluids*. Kolloid-Zeitschrift, 173:117–122, 1960. (Zitiert auf den Seiten 34 und 43.)
- [18] Feldhusen, J. und K.-H. Grote (Hrsg.): *Dubbel, Taschenbuch für den Maschinenbau.*, 24. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer, 2014. (Zitiert auf Seite 1.)
- [19] Feng, J. und D. D. Joseph: *The unsteady motion of solid bodies in creeping flows*. J. Fluid Mech., 303:83–102, 1995. (Zitiert auf den Seiten 7, 10, 13, 27, und 87.)
- [20] Giesekus, H.: *Strömungen mit konstantem Geschwindigkeitsgradienten und die Bewegung von darin suspendierten Teilchen. Teil II: Ebene Strömungen und eine experimentelle Anordnung zu ihrer Realisierung*. Rheologica Acta, 2:112–122, 1962. (Zitiert auf Seite 52.)
- [21] Giesekus, H.: *Strömungen mit konstantem Geschwindigkeitsgradienten und die Bewegung von darin suspendierten Teilchen. Teil I: Räumliche Strömungen*. Rheologica Acta, 2:101–112, 1962. (Zitiert auf Seite 52.)
- [22] Giesekus, H.: *Phänomenologische Rheologie: Eine Einführung*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1994. (Zitiert auf den Seiten 4, 12, 21, 27, 28, 33, 34, 74, A-3, und A-4.)
- [23] Gramatzki, S.: *Thermoplaste und Fasern - eine stabile Verbindung. Die Faser macht den Unterschied*. Plastverarbeiter, 9:80–81, 2004. (Zitiert auf den Seiten 2 und 3.)
- [24] Greiner, C. und H. van Hees: [fias.uni-frankfurt.de/~hees/theo-phys2-ss14/lsg09.pdf](https://www.fias.uni-frankfurt.de/~hees/theo-phys2-ss14/lsg09.pdf), download am 25.02.2016. (Zitiert auf Seite 19.)
- [25] Gummert, P. und K.-A. Reckling: *Mechanik*, Band 3. Vieweg, Braunschweig, 1994. (Zitiert auf den Seiten 8, 16, 17, 18, 47, A-5, und A-8.)
- [26] Hamel, G.: *Theoretische Mechanik. Eine einheitliche Einführung in die gesamte Mechanik*. Springer, Berlin et al., 1949. (Zitiert auf Seite 16.)
- [27] Hegler, R. P.: *Faserorientierung beim Verarbeiten kurzfaserverstärkter Thermoplaste*. Kunststoffe, 74:271–277, 1984. (Zitiert auf Seite 3.)
- [28] Ivanova, E. A.: *A new approach to the solution of some problems of rigid body dynamics*. ZAMM, 81:613–322, 2001. (Zitiert auf Seite 34.)
- [29] Jeffery, G. B.: *The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid*. Proc. R. Soc. London, Ser. A, 102:161–179, 1922. (Zitiert auf den Seiten 4, 7, 10, 18, 26, 32, 34, 50, 87, und A-1.)
- [30] Jen, T. C., L. J. Li, W. Z. Cui, Q. H. Chen und X. M. Zhang: *Numerical investigations on cold gas dynamic spray process with nano- and microsize particles*. Int. J. Heat Mass Transfer, 48:4384–4396, 2005. (Zitiert auf Seite 1.)
- [31] Ku, X. K. und J. Z. Lin: *Effect of two bounding walls on the rotational motion of a fiber in the simple shear flow*. Fibers and Polymers, 10:302–309, 2009. (Zitiert auf Seite 15.)
- [32] Ku, X. K. und J. Z. Lin: *Inertial effects on the rotational motion of a fibre in simple shear flow between two bounding walls*. Phys. Scr., 80:025801, 2009. (Zitiert auf den Seiten 7, 15, und 87.)



- [33] Leal, L. G.: *Particle motions in a viscous fluid*. Ann. Rev. Fluid Mech., 12:435–476, 1980. (Zitiert auf den Seiten 7 und 10.)
- [34] Li, Z., J. Zhu und C. Zhang: *Numerical simulations of ultrafine powder coating systems*. Powder Technol., 150:155–167, 2005. (Zitiert auf Seite 1.)
- [35] Lin, J.-H., C.-L. Huang, C.-F. Liu, C.-K. Chen, Z.-I. Lin und C.-W. Lou: *Polypropylene/Short Glass Fibers Composites: Effects of Coupling Agents on Mechanical Properties, Thermal Behaviors, and Morphology*. Materials, 8:8279–8291, 2015. (Zitiert auf den Seiten 15 und 89.)
- [36] Lindström, S. B. und T. Uesaka: *Simulation of the motion of flexible fibers in viscous fluid flow*. Phys. Fluids, 19:113307, 2007. (Zitiert auf Seite 1.)
- [37] Lundell, F.: *The effect of particle inertia on triaxial ellipsoids in creeping shear: From drift toward chaos to a single periodic solution*. Phys. Fluids, 23:011704, 2011. (Zitiert auf den Seiten 27 und A-3.)
- [38] Lundell, F. und A. Carlsson: *Heavy ellipsoids in creeping shear flow: Transitions of the particle rotation rate and orbit shape*. Phys. Rev. E, 181:016323, 2010. (Zitiert auf den Seiten 7, 12, 13, 87, und 88.)
- [39] Mahnken, R.: *Lehrbuch der Technischen Mechanik - Dynamik. Eine anschauliche Einführung*. Springer, Berlin et al., 2012. (Zitiert auf Seite 17.)
- [40] Mahrenholtz, O. und L. Gaul: *Die Entwicklung der Strömungsmechanik von Archimedes bis Stokes und Reynolds*. GAMM-Mitt., 34:219–235, 2011. (Zitiert auf Seite A-5.)
- [41] Mallick, P. K., S. Newman und G. B. Chapman: *Composite Materials Technology: Processes and Properties*. Hanser, New York, 1990. (Zitiert auf den Seiten 2 und 4.)
- [42] Mao, W. und A. Alexeev: *Motion of spheroid particles in shear flow with inertia*. J. Fluid Mech., 749:145–166, 2014. (Zitiert auf den Seiten 7, 13, 27, 87, und 88.)
- [43] Menges, G.: *Werkstoffkunde Kunststoffe*. Hanser, 5. Auflage, 2002. (Zitiert auf den Seiten 3, 15, 54, 89, und A-4.)
- [44] Merkel, M. und K.-H. Thomas: *Taschenbuch der Werkstoffe*. Carl Hanser Verlag, München et al., 2000. (Zitiert auf Seite 1.)
- [45] Michaeli, W. und M. Wegener: *Einführung in die Technologie der Faserverbundwerkstoffe*. Hanser, München et al., 1990. (Zitiert auf Seite 54.)
- [46] Miserocchi, G., G. Sancini, F. Mantegazza und G. Chiappino: *Translocation pathways for inhaled asbestos fibers*. Environ. Health, 7:4, 2008. (Zitiert auf Seite 1.)
- [47] Oertel jr., H., M. Böhle und T. Reviol: *Strömungsmechanik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Springer-Verlag, 2015. (Zitiert auf Seite A-4.)
- [48] Olson, J. A., I. Frigaard, C. Chan und J. P. Hamalainen: *Modeling a turbulent fibre suspension flowing in a planar contraction: The one-dimensional headbox*. Int. J. Multiphase Flow, 30:51–66, 2004. (Zitiert auf Seite 1.)
- [49] Parsheh, M., M. Brown und C. Aidun: *On the orientation of stiff fibres suspended in turbulent flow in a planar contraction*. J. Fluid Mech., 545:245–269, 2005. (Zitiert auf Seite 1.)
- [50] Qi, D. und L.-S. Luo: *Rotational and orientational behaviour of three-dimensional spheroidal particles in Couette flows*. J. Fluid Mech., 477:201–213, 2003. (Zitiert auf den Seiten 7, 11, 13, 27, und 87.)

- [51] Ranganathan, S. und S. G. Advani: *A simultaneous solution for flow and fiber orientation in axisymmetric diverging radial flow*. J. Non-Newtonian Fluid Mech., 47:107–136, 1993. (Zitiert auf Seite 4.)
- [52] Renner, B., H. Altenbach und K. Naumenko: *Numerical treatment of finite rotation for a cylindrical particle*. Technische Mechanik, 25:151–161, 2005. (Zitiert auf den Seiten 13 und 34.)
- [53] Saito, M., S. Kukula, Y. Kataoka und T. Miyata: *Practical use of statistically modified laminate model for injection moldings*. Mat. Sci. Eng. A, 285:280–287, 2000. (Zitiert auf den Seiten 1 und 3.)
- [54] Sorrentino, L., G. Simeoli, S. Iannace und P. Russo: *Mechanical Performance Optimization through Interface Strength Gradation in PP/Glass Fibre Reinforced Composites*. Composites Part B, 76:201–208, 2015. (Zitiert auf den Seiten 15 und 89.)
- [55] Subramanian, G. und D. L. Koch: *Inertial effects on fibre motion in simple shear flow*. J. Fluid Mech., 535:383–414, 2005. (Zitiert auf den Seiten 7, 12, 13, 27, 87, und 88.)
- [56] Szabó, I.: *Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen*, Band 32. Springer-Verlag, 2013. (Zitiert auf Seite A-4.)
- [57] Vincent, M. und J. F. Agassant: *Experimental study and calculations of short glass fiber orientation in a center gated molded disc*. Polym. Comp., 7:76–83, 1986. (Zitiert auf den Seiten 3 und 4.)
- [58] Yu, Z., N. Phan-Thien und R. I. Tanner: *Rotation of a spheroid in a Couette flow at moderate Reynolds numbers*. Phys. Rev. E, 76:026310, 2007. (Zitiert auf den Seiten 7, 12, 13, 27, und 87.)
- [59] Zhang, Z. und C. Kleinstreuer: *Airflow structures and nano-particle deposition in a human upper airway model*. J. Comput. Phys., 198:178–210, 2004. (Zitiert auf Seite 1.)
- [60] Zheng, R., R. I. Tanner und X.-J. Fan: *Injection Molding: Integration of Theory and Modeling Methods*. Springer, Berlin et al., 2011. (Zitiert auf den Seiten 1, 27, 33, und 56.)
- [61] Zhilin, P. A.: *A new approach to the analysis of free rotations of rigid bodies*. ZAMM, 76:187–204, 1996. (Zitiert auf den Seiten 8, 9, 35, 40, 44, 74, 75, und A-6.)
- [62] Zwillinger, D.: *Handbook of Differential Equations*. Academic Press, San Diego et al., 1989. (Zitiert auf den Seiten 38 und 67.)

# Anhang

## A.1 Axialsymmetrische Körper

Axialsymmetrische Körper besitzen eine Symmetrieachse, die auch die 1. Hauptachse des Körpers ist. Bei einer Drehung um die Symmetrieachse bleibt die Lage des Körpers unverändert. Die in dieser Arbeit als Modell für Kurzglasfasern verwendeten Partikelgeometrien sind Zylinder, abgerundeter Zylinder und schlanker Stab. In Abb. A.1 sind diese Geometrien gezeigt, außerdem das von *Jeffery* in seiner Arbeit [29] verwendete Rotationsellipsoid. Der Vektor  $\mathbf{m}$  ist der Einheitsvektor der Symmetrieachse. Der Trägheitstensor  $\mathbf{C}$  axialsymmetrischer Körper ist transversal isotrop und hat die Form:

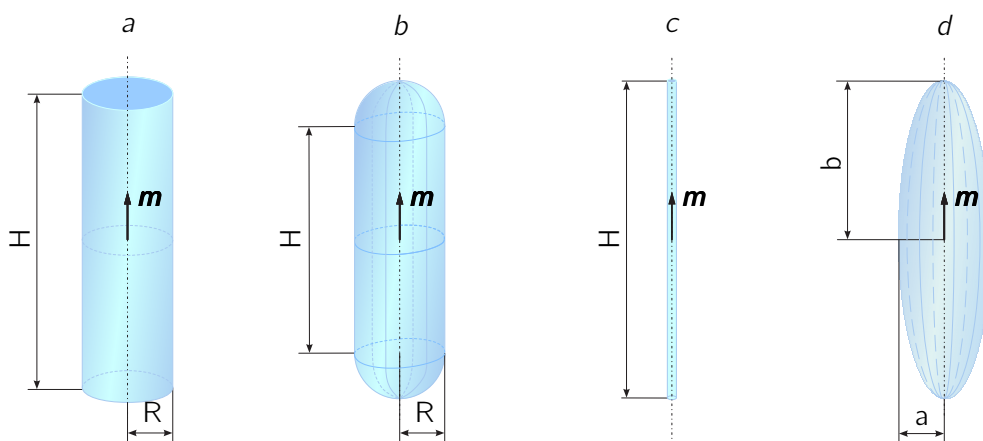
$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{m} \mathbf{m} + \mu (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}). \quad (\text{A.2})$$

$\lambda$  und  $\mu$  sind die Massenträgheitsmomente. Die Wechselwirkung zwischen Partikel und umgebendem Medium wird mit Hilfe des Widerstandstensors  $\mathbf{G}$  beschrieben, s. Kapitel 3.2. Auch der Widerstandstensor  $\mathbf{G}$  ist transversal isotrop:

$$\mathbf{G} = \alpha \mathbf{m} \mathbf{m} + \beta (\mathbf{E} - \mathbf{m} \mathbf{m}). \quad (\text{A.3})$$

Die Massenträgheitsmomente  $\lambda$  und  $\mu$  sowie die Widerstandskoeffizienten  $\alpha$  und  $\beta$  der in dieser Arbeit verwendeten Geometrien werden aus den Gln. (3.17) und (3.48) berechnet<sup>1</sup> und sind in Tabelle A.1 zusammengefasst.

Die Widerstandskoeffizienten  $\alpha_{RE}$  und  $\beta_{RE}$  gelten für schlanke Rotationsellipsoide mit dem Achsenverhältnis  $b/a \ll 1$ ,  $\mu$  ist die Viskosität des umgebenden Fluids.



**Abbildung A.1.** Axialsymmetrische Körper. *a* Zylinder, *b* abgerundeter Zylinder, *c* schlanker Stab, *d* Rotationsellipsoid

<sup>1</sup>Gl. (3.48) zusammen mit den Gln. (3.37), (3.38) und (3.50)

**Tabelle A.1.** Massenträgheitsmomente und Widerstandskoeffizienten axialsymmetrischer Körper

	Massenträgheitsmomente und Widerstandskoeffizienten
Zylinder	$\lambda_Z = \varrho \frac{\pi}{2} R^4 H$ $\mu_Z = \varrho \frac{\pi}{12} (3R^4 H + R^2 H^3)$ $\alpha_Z = \pi \zeta (R^4 + 2R^3 H)$ $\beta_Z = \pi \zeta \left( R^3 H + \frac{R^2 H^2}{2} + \frac{R H^3}{12} \right) + \pi \xi \left( \frac{R^4}{2} + \frac{R H^3}{24} \right)$
abgerundeter Zylinder	$\lambda_{ZHK} = \varrho \pi \left( \frac{8}{15} R^5 + \frac{R^4 H}{2} \right)$ $\mu_{ZHK} = \varrho \pi \left( \frac{8}{15} R^5 - \frac{R^4 H}{4} + \frac{R^3 H^2}{3} + \frac{R^2 H^3}{12} \right)$ $\alpha_{ZHK} = 2\pi \zeta \left( R^3 H + \frac{R^2 H^2}{2} + \frac{R H^3}{12} \right) + \pi \xi \left( \frac{R^4}{2} + \frac{R H^3}{24} \right)$ $\beta_{ZHK} = 2\pi \zeta \left( \frac{4}{3} R^4 + \frac{R H^3}{24} \right) + \pi \xi \frac{R H^3}{24}$
schlanker Stab	$\lambda_S = 0$ $\mu_S = \varrho \frac{l^3}{12}$ $\alpha_S = 0$ $\beta_S = \beta_0 \frac{l^3}{12}$
Rotationsellipsoid	$\lambda_{RE} = \varrho \pi \frac{8}{15} a^4 b$ $\mu_{RE} = \varrho \pi \frac{4}{15} a^2 b (a^2 + b^2)$ $\alpha_{RE} = \frac{16\pi \mu a^3 b^2}{3 a^2}$ $\beta_{RE} = \frac{16\pi \mu a^3}{3} \frac{1}{2 \ln 2 \frac{a}{b} - 1}$

## A.2 Ähnlichkeitskoeffizienten

Es gibt eine ganze Reihe von in der Strömungsmechanik verwendeten Ähnlichkeitskoeffizienten. Sie dienen einerseits der Übersichtlichkeit Strömungsvorgänge beschreibender Gleichungen, indem mit ihrer Hilfe diese Differentialgleichungen entdimensioniert werden, andererseits um mit ihrer Hilfe quantitative Aussagen bei geometrisch ähnlichen Strömungskanälen bzw. ähnlichen umströmten Körpern treffen zu können [1].

### A.2.1 Reynolds-Zahl

Die *Reynolds-Zahl* ist eine dimensionslose Kennzahl, die in der Strömungslehre verwendet wird, um beispielsweise den Einfluss der Trägheit eines strömenden Fluids auf darin suspendierte Teilchen zu bezeichnen. Sie gibt das Verhältnis von Trägheitskraft zur Zähigkeitskraft an und ist definiert mit [1]

$$\text{Re} = \frac{\rho_f v d}{\eta} = \frac{v d}{\nu}. \quad (\text{A.4})$$

In Gl. (A.4) sind  $\rho_f$  die Dichte der Flüssigkeit,  $v$  die Strömungsgeschwindigkeit des Fluids relativ zu der des Körpers,  $d$  eine charakteristische Länge des Körpers (oder z. B. eines Rohres, durch das eine Flüssigkeit strömt),  $\eta = \nu \rho$  die dynamische Viskosität und  $\nu$  die kinematische Viskosität. Bei kleiner *Reynolds-Zahl* ist die Strömung laminar, ab einem kritischen Wert  $\text{Re}_{kr}$  schlägt die Strömung um in eine turbulente. Setzt man die *Reynolds-Zahl* gleich Null, verschwindet damit auch der Einfluss, den die Trägheit des Fluids auf die Bewegung eines suspendierten Teilchens hat.

### A.2.2 Stokes-Zahl

Die *Stokes-Zahl* ist ein Maß für den Einfluss der Massenträgheit eines suspendierten Körpers auf seine Bewegung in einem bewegten Fluid. Sie steht im Zusammenhang mit der *Reynolds-Zahl*

$$\text{St} = \kappa \text{Re}, \quad (\text{A.5})$$

$$\kappa = \frac{\rho_p}{\rho_f}, \quad (\text{A.6})$$

$\rho_p$  ist die Dichte des Partikels,  $\rho_f$  die der umgebenden Flüssigkeit [37]. Haben Partikel und Flüssigkeit dieselbe Dichte, spricht man von „neutrally buoyant particles“. In diesem Fall sind *Stokes-* und *Reynolds-Zahl* gleich.

## A.3 Newtonsche Flüssigkeit

Eine Flüssigkeit wird als *Newtonsche Flüssigkeit* bezeichnet, wenn sie dichtebeständig und reibungsbehaftet ist. *Giesekus* [22] ordnet *Newtonsche Flüssigkeiten* in die Klasse der linear rein-viskosen Flüssigkeiten ein. Sie ist durch die Gleichung

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{E} + 2\eta \mathbf{D} \quad (\text{A.7})$$

gegeben, in der  $\sigma$  als Spannungstensor,  $p$  als Druck,  $\eta$  als dynamische Scherviskosität und  $D$  als Verformungsgeschwindigkeitstensor bezeichnet sind. Der Tensor  $E$  ist der Einheitstensor zweiter Stufe. Mit diesem Modell kann das Verhalten von niedermolekularen Flüssigkeiten und Gasen i. a. beschrieben werden.

## A.4 Viskose Flüssigkeit

Eine Flüssigkeit wird als viskos bezeichnet, wenn zwischen ihren strömenden Teilchen Schubspannungen auftreten, die ihre Bewegung hemmen und ihrer Relativgeschwindigkeit proportional sind [56]. Als viskose Eigenschaft einer Flüssigkeit wird ihre Zähigkeit bezeichnet [43]. Die Flüssigkeit setzt dem Fließen einen inneren Widerstand entgegen. Zur Aufrechterhaltung des Fließprozesses ist immer eine Kraft erforderlich, die u. a. vom Aufbau der Makromoleküle (aus denen die Flüssigkeit besteht) abhängt. Unterliegt eine viskose Flüssigkeit einer Scherdeformation, dann äußert sich diese Kraft in einer Schubspannung. Der Proportionalitätsfaktor zwischen Schubspannung  $\tau$  und der Schergeschwindigkeit  $\dot{\gamma}$  ist die stationäre Scherviskosität  $\eta$ :

$$\eta = \frac{\tau}{\dot{\gamma}}. \quad (\text{A.8})$$

Die Viskosität einer Flüssigkeit hängt u. a. ab von ihrem molekularen Aufbau, von der Temperatur und dem Füllstoffgehalt. Polymerschmelzen zeigen eine ausgeprägte Abhängigkeit von der Schergeschwindigkeit.

## A.5 Laminare Strömung

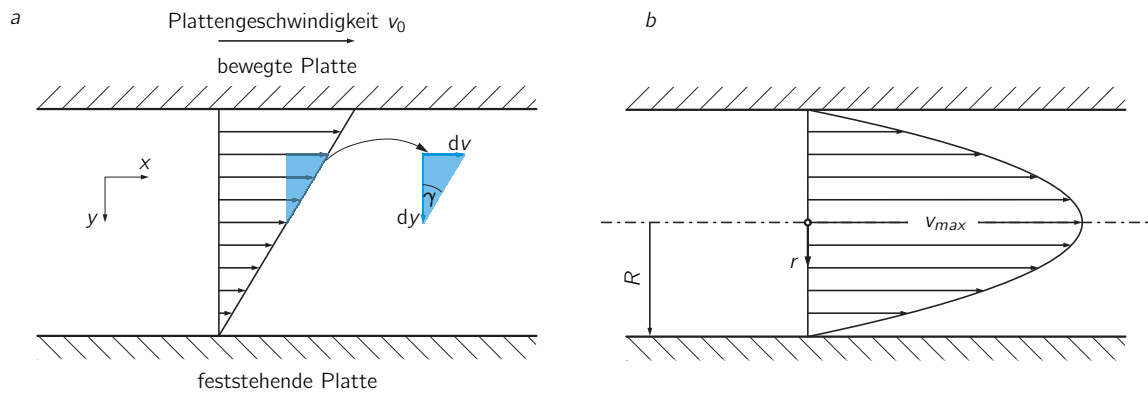
Bei jedem Verarbeitungsschritt eines Polymers im schmelzflüssigen Zustand tritt Scherdeformation auf. Betrachtet man die Schmelze als aus Schichten bestehend, die sich unter einer Deformation relativ zueinander bewegen, spricht man von einer laminaren Strömung, wenn sich die Flüssigkeitsschichten nicht miteinander vermischen. Wegen ihrer hohen Viskosität und somit ihrer geringen *Reynolds*-Zahl fließen Polymerschmelzen stets laminar [43].

In Abb. A.2a ist eine eindimensionale Strömung gezeigt. Zwischen einer ruhenden unteren Platte und einer mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  bewegten oberen Platte stellt sich eine konstante Scherrate mit einem linearen Geschwindigkeitsprofil  $v(z)$  ein. Diese Strömung wird als **Couette-Strömung** bezeichnet [1]. An den Plattenoberflächen gilt als Randbedingung die Haftbedingung, die an der unteren Platte zu  $v = 0$  und an der oberen zu  $v = v_0$  führt. In einer *Couette*-Strömung ergibt sich ein lineares Geschwindigkeitsprofil und daraus

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy} = \eta \frac{d}{dy} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \eta \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dy} \right) = \eta \left( \frac{d\dot{\gamma}}{dt} \right) = \eta \dot{\gamma}. \quad (\text{A.9})$$

Gilt zwischen der Schubspannung  $\tau$  und dem Geschwindigkeitsgradienten  $\frac{dv}{dy}$  eine lineare Beziehung, sprechen wir von einem **Newtonschen Fluid** [47].

Eine stationäre Strömung durch ein gerades kreiszylindrisches Rohr als Folge eines Druckgefälles, der Schwerkraft oder einer Kombination aus beidem wird als **Poiseuille-Strömung** bezeichnet [22]. Das



**Abbildung A.2.** Laminare Scherströmung, Geschwindigkeitsverteilung. *a* Couette-Strömung zwischen 2 parallelen Platten, *b* Poiseuille-Strömung im kreiszylindrischen Rohr

Geschwindigkeitsprofil einer solchen ebenen stationären Kanalströmung ist parabolisch, s. Abb. A.2b. Mit der radialen Koordinate  $r$ , dem Radius  $R$  und der maximalen Geschwindigkeit  $v_{max} = v(0)$  ist die Geschwindigkeitsverteilung einer *Poiseuille*-Strömung [40]

$$v(r) = v_{max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]. \quad (\text{A.10})$$

## A.6 Drehtensor

Der Drehtensor  $\mathbf{Q}(t)$  beschreibt die Drehung eines bewegten Systems gegenüber einem raumfesten System. Er ist der Operator für die Basistransformation für alle Zeiten  $t$  [25]

$$\mathbf{a}^*(t) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{a}(t). \quad (\text{A.11})$$

In Gl. (A.11) bildet der Drehtensor  $\mathbf{Q}(t)$  den Vektor  $\mathbf{a}(t)$  auf  $\mathbf{a}^*(t)$  ab. Er gehört zur Klasse der *orthogonalen Tensoren*, für die

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{E} \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T \quad (\text{A.13})$$

gilt mit  $\mathbf{E}$  als Einheitstensor 2. Stufe. Die Determinante eines orthogonalen Tensors  $\mathbf{Q}$  ist  $\det \mathbf{Q} = \pm 1$ , wobei ein Drehtensor die Determinante  $\det \mathbf{Q} = 1$  hat. Ein orthogonaler Tensor  $\mathbf{Q}$  mit der Determinante  $\det \mathbf{Q} = -1$  wird als *uneigentlich orthogonaler Tensor* bezeichnet, er beschreibt eine Drehspiegelung.

## A.7 Kinetische Energie eines Starrkörpers

Die kinetische Energie  $K$  einer starren Körpers ist

$$K = \frac{1}{2} \int_m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, dm. \quad (\text{A.14})$$

Mit Gl. (3.3) folgt

$$K = \frac{1}{2} \int_m \{ \mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q)] \}^2 dm. \quad (\text{A.15})$$

Der Term  $\boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q)]$  in Gl. (A.15) kann wie folgt umgeformt werden:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q)] &= \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) & \mathbf{a} &= \mathbf{r} - \mathbf{r}_Q \\ &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b} & \mathbf{b} &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a} \\ &= \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{b}) = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{E}) & \text{s. Gln. (A.24)-(A.25)} \\ &= \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{A} & \mathbf{A} &= \mathbf{E} \times \mathbf{b} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{E} \times \mathbf{b} = \mathbf{E} \times (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \times \mathbf{E} = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}^T. \quad (\text{A.17})$$

Mit Gln. (A.16) und (A.17) folgt

$$\boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q)] = \boldsymbol{\omega} \cdot \{ \mathbf{Q} \cdot [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{E}] \cdot \mathbf{Q}^T \} \quad (\text{A.18})$$

$$= \{ \mathbf{Q} \cdot [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{E}]^T \cdot \mathbf{Q}^T \} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (\text{A.19})$$

$$= \{ \mathbf{Q} \cdot [(\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}) \times \mathbf{E}] \cdot \mathbf{Q}^T \} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (\text{A.20})$$

Die letzte Identität in Gl.(A.17) findet sich in [61]. Die Beziehung  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b} = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{E})$  in (A.16) kann einfach gezeigt werden. Die Vektoren  $\boldsymbol{\omega}$  und  $\mathbf{b}$  und der Einheitstensor  $\mathbf{E}$  sind im kartesischen Koordinatensystem  $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3, \quad (\text{A.21})$$

$$\mathbf{b} = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3, \quad (\text{A.22})$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3. \quad (\text{A.23})$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{E}) &= \boldsymbol{\omega} \cdot [(b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3) \times (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3)] & (\text{A.24}) \\ &= \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3 \\ &\quad \cdot (-b_3 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + b_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + b_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 - b_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 - b_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 + b_1 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2) \\ &= -b_3 \omega_1 \mathbf{e}_2 + b_2 \omega_1 \mathbf{e}_3 + b_3 \omega_2 \mathbf{e}_1 - b_1 \omega_2 \mathbf{e}_3 - b_2 \omega_3 \mathbf{e}_1 + b_1 \omega_3 \mathbf{e}_2 \\ &= (b_3 \omega_2 - b_2 \omega_3) \mathbf{e}_1 + (b_1 \omega_3 - b_3 \omega_1) \mathbf{e}_2 + (b_2 \omega_1 - b_1 \omega_2) \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b} &= (\omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3) \times (b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3) & (\text{A.25}) \\ &= -b_1 \omega_2 \mathbf{e}_3 + b_1 \omega_3 \mathbf{e}_2 + b_2 \omega_1 \mathbf{e}_3 - b_2 \omega_3 \mathbf{e}_1 - b_3 \omega_1 \mathbf{e}_2 + b_3 \omega_2 \mathbf{e}_1 \\ &= (b_3 \omega_2 - b_2 \omega_3) \mathbf{e}_1 + (b_1 \omega_3 - b_3 \omega_1) \mathbf{e}_2 + (b_2 \omega_1 - b_1 \omega_2) \mathbf{e}_3 \\ &= \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{E}). \end{aligned}$$



Das Skalarprodukt unter dem Integral in Gl. (A.15) ergibt mit Gln. (A.19) und (A.20) und  $\mathbf{a} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_Q$

$$\begin{aligned} & \{\mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q)]\} \cdot \{\mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q)]\} \\ &= \mathbf{v}_Q \cdot \mathbf{v}_Q + \mathbf{v}_Q \cdot [\mathbf{Q} \cdot (-\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}^T] \cdot \boldsymbol{\omega} + [\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}^T] \cdot [\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}^T] \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Die schiefsymmetrischen Tensoren

$$\mathbf{Q} \cdot (-\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{B} \quad (\text{A.27})$$

in der aktuellen Lage und

$$\mathbf{B}_0 = - \int_m \mathbf{a} \times \mathbf{E} dm = \int_m (\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}) \times \mathbf{E} dm \quad (\text{A.28})$$

in der Ausgangslage sind Trägheitstensoren. Der letzte Summand in Gl. (A.26) kann wie folgt umgeformt werden:

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}^T \\ &= \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}^T \cdot [\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}^T]^T \cdot \boldsymbol{\omega} \\ &= \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E})^T \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Ein schiefsymmetrischer Tensor wird wie folgt transponiert:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{E})^T = -\mathbf{a} \times \mathbf{E}. \quad (\text{A.30})$$

Damit lässt sich Gl. (A.29) weiter umformen:

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}^T \\ &= -\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Das Produkt  $(\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E})$  kann zu  $\mathbf{a} \times \mathbf{E} \times \mathbf{a}$  vereinfacht werden. Diese Vereinfachung kann einfach nachgewiesen werden mit den Koordinatendarstellungen  $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$  und  $\mathbf{E} = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3$  im orthonormierten Koordinatensystem:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) &= \mathbf{a} \times \mathbf{E} \times \mathbf{a} \\ &= -(a_2^2 + a_3^2) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + a_1 a_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + a_1 a_3 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 \\ &\quad + a_1 a_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 - (a_1^2 + a_3^2) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + a_2 a_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \\ &\quad + a_1 a_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 + a_2 a_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 - (a_1^2 + a_2^2) \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Mit Gl. (A.32) ist

$$-\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (\text{A.33})$$

und mit der Identität  $\mathbf{a} \times \mathbf{E} \times \mathbf{a} = \mathbf{a} \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \mathbf{E}$  schließlich

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}^T = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \mathbf{E} - \mathbf{a} \mathbf{a}) \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (\text{A.34})$$

Den Tensor  $\int (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \mathbf{E} - \mathbf{a} \mathbf{a}) dm$  in Gl. (A.33) ist ein Trägheitstensor [25], wir nennen ihn  $\mathbf{C}_0$ , der Index 0 steht für die Ausgangslage. Der Trägheitstensor des Starrkörpers in der aktuellen Lage ist

$$\mathbf{C} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{Q}^T. \quad (\text{A.35})$$

Mit den Gln. (A.26)-(A.28) und (A.33) wird Gl. (A.15) zu

$$K = \frac{m}{2} \mathbf{v}_Q \cdot \mathbf{v}_Q + \mathbf{v}_Q \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (\text{A.36})$$