



FAKULTÄT FÜR
MASCHINENBAU

Simulation von gleit- und wälzgelagerten Systemen auf Basis eines Mehrkörpersystems für rotordynamische Anwendungen.

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktoringenieur
(Dr.-Ing.)

von Dipl.-Ing. Christian Daniel

geb. am 24.12.1981 in Stendal

genehmigt durch die Fakultät für Maschinenbau
der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Strackeljan
Prof. Dr.-Ing. Markert

Promotionskolloquium am: 11.06.2013

Danksagung

Mein Dank gilt vor allem:

- Meiner Frau und meinen Kindern.
- Meiner Familie, die mich stets bei meinem Studium unterstützt haben.
- Meinem Doktorvater Prof. Dr.-Ing. Strackeljan, der mir die Möglichkeit gegeben hat die Promotion im Rahmen meiner wissenschaftlichen Arbeit zu erstellen.
- Meinem zweiten Gutachter Prof. Dr.-Ing. Markert, der mit wertvollen Anmerkungen und Verbesserungen zur Arbeit beigetragen hat.
- Meinen Kollegen aus dem Lehrstuhl Technische Dynamik: Elmar Woschke, der bei vielen Entwicklungen beteiligt war und viele wertvolle FE-Modelle und Subroutinen beigesteuert hat. Steffen Nitzschke, der in zahlreichen Überstunden Probleme entdeckt und gelöst hat.
- Meine anderen Kollegen des Instituts für Mechanik, die ein sehr angenehmes Arbeitsklima geschaffen haben.
- Auch für die Unterstützung der Schlosserei und Feinmechanik mit Herrn Eckert und Herrn Förster an der Fakultät für Maschinenbau, die beim Bau von zahlreichen Prüfständen mitgewirkt haben, möchte ich mich bedanken.

Inhaltsverzeichnis

Formelzeichen	VII
Abkürzung	XVI
Kurzfassung	XVII
Abstract	XVIII
1 Einleitung	1
2 Stand der Forschung	4
2.1 Mehrkörpersysteme	4
2.2 Wälzlagersimulation	4
2.3 Gleitlagersimulation	7
2.4 Rotordynamik	8
2.4.1 Rotordynamisches Verhalten von Turboladern	9
3 Theoretische Grundlagen	10
3.1 Mehrkörpersysteme	10
3.1.1 Aufstellung der Bewegungsgleichungen	10
3.1.2 Lösung im Zeitbereich	23
3.1.3 Eigenwertanalyse	24
3.2 Wälzlagersimulation	38
3.2.1 Modellbildung	38
3.2.2 Dynamische Wälzlagersimulation	39
3.2.3 2D-Wälzlager	40
3.2.4 3D-Wälzlager	46
3.3 Gleitlagersimulation	50
3.3.1 Hydrodynamische Grundlagen des Radialgleitlagers	50
3.3.2 Bestimmung der Spaltfunktion	51
3.3.3 Analytische Lösung der Reynolds-Gleichung	56
3.3.4 Numerische Lösung mittels FDM	56
3.3.5 Physikalische Randbedingungen	60
3.3.6 Berechnung der Tragkraft und Momente	60
3.3.7 Dynamische Gleitlagersimulation	65
4 Umsetzung	67
4.1 Nutzerroutrinen in kommerziellen MKS-Programmen	67
4.2 MKS-Programm EMD	68
4.2.1 Zustandsvektor	68

4.2.2	Modelldaten	69
4.2.3	Programmbestandteile	70
5	Ergebnisse	73
5.1	Vergleich der Gleitlagermodelle	73
5.1.1	Mechanisches Modell	73
5.1.2	Variation der Lagermodelle am starren Laval-Läufer	74
5.1.3	Variation der Lagermodelle am elastischen Laval-Läufer	75
5.1.4	Variation der statischen Vorlast beim elastischen Laval-Läufer	76
5.2	Einfaches experimentelles Rotorsystem	82
5.2.1	Aufbau	82
5.2.2	Prüfstand	82
5.2.3	Ergebnisse	82
5.3	Abgasturbolader	88
5.3.1	Schwimmbuchsenlagerung	88
5.3.2	Wälzlagerung	95
5.3.3	Elastizität der Welle	96
5.4	Vollrolliges Wälzlager	98
5.5	Kurbeltrieb eines Verbrennungsmotors	101
5.5.1	Modell	101
5.5.2	Ergebnisse bei 2000 min^{-1}	103
5.5.3	Ergebnisse bei 4000 min^{-1}	108
6	Zusammenfassung	113
A	Notwendige mathematische Beziehungen	115
B	Modelldaten	116
B.1	Rotormodell für die Eigenwertberechnung	116
B.2	Rotormodell für den Vergleich der Gleitlagermodelle	117
B.2.1	Parameter des Modells	117
B.2.2	Eingaben für EMD	117
	Literaturverzeichnis	121

Formelzeichen

Notation

\vec{a}	Ortsvektor
\vec{a}^A	Ortsvektor mit dem Bezugspunkt A
\vec{a}_i	i -ter Ortsvektor
${}_I \underline{a}$	Koordinaten des Vektors \vec{a} bezüglich der Basis I (Inertialsystem)
${}_K \underline{a}$	Koordinaten des Vektors \vec{a} bezüglich der Basis K (körperfeste Basis)
b	Skalar
\underline{c}	Spaltenvektor
$\underline{\underline{d}}$	Matrix
$\underline{\underline{\underline{e}}}$	Matrix mit drei Dimensionen

Lateinische Buchstaben

a	Lagerabstand	m
a_1	Hilfsgröße	m
a_2	Hilfsgröße	m
A_i	zugeordnete Fläche eines Gitterknotens	m^2
${}_K \underline{a}$	Komponenten der Beschleunigung bezüglich der körperfesten Basis K	$m \cdot s^{-2}$
\vec{a}_K	Ortsvektor zwischen den Kontaktpunkten K_1 und K_2	m
$\underline{\underline{A}}$	Systemmatrix	\sim
$\underline{\underline{\tilde{A}}}$	Systemmatrix für die Bestimmung der Linearisierung in den neuen Koordinaten	\sim
b	Lagerabstand	m
b^*	Hilfswert für die Berechnung der Linienlast	m

B	Lagerbreite	m
\bar{B}_S	Scheibenbreite in mm	mm
B_S	Scheibenbreite in SI	m
$\underline{\underline{B}}$	Systemmatrix	\sim
$\underline{\underline{B}}_{1,2}$	Matrix, die die Spaltenvektoren mit der rechten Seite für die Linearisierung in neuen Koordinaten enthält	\sim
c	Kontaktsteifigkeit	$N \cdot m^{-1}$
c^*	Steifigkeit des Ersatzmassenschwinger	$N \cdot m^{-1}$
\bar{c}_S	Steifigkeit einer Scheibe bezogen auf die Scheibenbreite	$N \cdot mm^{-9/10}$
c_S	Steifigkeit einer Scheibe bezogen auf die Scheibenbreite	$N \cdot m^{-9/10}$
C	Lagerspiel	m
\underline{c}	algebraische Zwangsbedingungen	m
$\underline{\underline{C}}$	Jacobimatrix der algebraischen Zwangsbedingungen	-
\vec{c}_S	Ortsvektor vom Bezugspunkt A zum Schwerpunkt S	m
\vec{c}_{SM}	Ortsvektor von der Mitte des Wälzkörpers zur Mitte der betrachteten Scheibe	m
\vec{c}_P	Ortsvektor vom Bezugspunkt A zum Punkt P	m
\vec{c}_L	Ortsvektor vom Schwerpunkt zum Lagerpunkt	m
\vec{c}_{G1}	Ortsvektor vom Schwerpunkt zum Gelenk 1	m
\vec{c}_{G2}	Ortsvektor vom Schwerpunkt zum Gelenk 2	m
\vec{c}_{PS}	Ortsvektor von der Schalenmitte zum Schalenpunkt	m
\vec{c}_{MS_PS}	Ortsvektor vom körperfesten Referenzsystem zur gedachten Schalenmitte	m
\vec{c}_{PW}	Ortsvektor von der Wellenmitte zum Wellenpunkt	m
d	Kontaktdämpfung	$N \cdot s \cdot m^{-1}$
d^*	Dämpfung des Ersatzmassenschwinger	$N \cdot s \cdot m^{-1}$
$d_{1,2}$	Durchmesser der Wälzkörper 1 und 2	m
D	Lagerdurchmesser	m
D_{WK}	Durchmesser des unbelasteten Wälzkörpers	m
D_{WK}^*	Durchmesser des deformierten Wälzkörpers	m
\underline{D}	Ableitung von δ_K nach \underline{p}	\sim
$\underline{\underline{D}}_T$	Taylorreihentwicklung von \underline{D}	\sim
$\underline{\underline{D}}^*$	modifizierte Ableitung des Abstands mit Nebenbedingung	\sim
E	E-Modul	$N \cdot m^{-2}$
E'	reduzierter E-Modul	$N \cdot m^{-2}$
$\underline{\underline{E}}$	Einheitsmatrix	-
${}_K \vec{e}$	Spaltenvektor mit den Einheitsvektoren einer körperfesten Basis K	-

${}_K \vec{e}_{x,y,z}$	Einheitsvektoren der Basis K	-
F_N	Kontaktnormalkraft	N
F_T	Kontakttangentialkraft	N
F_{HP}	Kontaktkraft beim Punktkontakt nach Hertz	N
F_{HL}	Kontaktkraft beim Linienkontakt	N
$F_{N(i,j)}$	Normalkraft am Gitterknoten i, j	N
$F_{Nx,y(i,j)}$	Normalkraftkomponenten in x, y - Richtung am Gitterknoten i, j	N
F_R	Reibkraft	N
F_{RS}	Reibkraft an der Schale	N
F_{RW}	Reibkraft an der Welle	N
\underline{F}	modifizierte Funktion für die Minimierung des kleinsten Abstandes	\sim
${}_K \underline{F}_i^e$	Komponenten der eingepprägten Kräfte des i -ten Körpers bezüglich der Basis K	N
\underline{f}_q	funktionaler Zusammenhang zwischen den ursprünglichen Lagegrößen und den neuen Lagegrößen	-
\vec{F}_a^i	i -te äußere Kraft	N
\vec{F}_i^i	i -te innere Kraft	N
g_{NB}	Nebenbedingung für das Extremwertproblem des kleinsten Abstandes	\sim
\underline{G}	gyroskopische Matrix	$kg \cdot m$
\vec{g}	Ortsvektor vom Mittelpunkt der Lagerschale zum Mittelpunkt der Welle in der betrachteten Breitenebene	m
h	Spalt zwischen Wellen- und Schalenoberfläche	m
${}_K \underline{h}_\omega$	Komponenten der Zentrifugal- und Corioliskräfte bezüglich der körperfesten Basis K	\sim
${}_K \underline{h}_a$	Komponenten der äußeren Kräfte und Momente bezüglich der körperfesten Basis K	\sim
${}_K \underline{\underline{H}}_R$	Transformationsmatrix zwischen den Kardanwinkeln und der Winkelgeschwindigkeiten um die Achsen der körperfesten Basis K	-
${}_K \underline{h}_i$	innere Kräfte des elastischen Körpers	-
${}_K \underline{h}_o$	Oberflächenkräfte des elastischen Körpers	-
${}_K \underline{h}_v$	Volumenkräfte des elastischen Körpers	-
\underline{h}_a^+	Zuwachs der äußeren Kräfte	\sim
\underline{H}	Nachgiebigkeitsmatrix	\sim
I	Flächenträgheitsmoment	m^4
J_A	axiales Massenträgheitsmoment	$kg \cdot m^{-2}$
J_P	polares Massenträgheitsmoment	$kg \cdot m^{-2}$

$\underline{\underline{K}} J^A$	Komponenten des Trägheitstensors um den Punkt A bezüglich der Basis K	$kg \cdot m^{-2}$
$\underline{\underline{K}} J^S$	Komponenten des Trägheitstensors um den Schwerpunkt S bezüglich der Basis K	$kg \cdot m^{-2}$
$\underline{\underline{J}}_{Ti}$	Jacobimatrix der translatorischen Bindungsgleichungen des i -ten Körpers	-
$\underline{\underline{J}}_{Ri}$	Jacobimatrix der rotatorischen Bindungsgleichungen des i -ten Körpers	-
$\underline{\underline{J}}_{Ti}^b$	Jacobimatrix der translatorischen Bindungsgleichungen des i -ten Körpers für das aufgeschnittene Systems	-
$\underline{\underline{J}}_{Ri}^b$	Jacobimatrix der rotatorischen Bindungsgleichungen des i -ten Körpers für das aufgeschnittene Systems	-
k_S	Anzahl der Scheiben	-
k_μ	Faktor zur Skalierung der tanh-Funktion	$s \cdot m^{-1}$
$\underline{\underline{K}}$	Steifigkeitsmatrix	\sim
l_K	Länge des Wälzkörpers	m
\vec{L}_M	Ortsvektor zwischen den Mittelpunkten der Kontaktkörper	m
\vec{L}	Drehimpuls um den Schwerpunkt	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$
\vec{L}^A	Drehimpuls um den Bezugspunkt A	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$
m	Masse	kg
m^*	Masse des Ersatzmassenschwingers	kg
M_R	Reibmoment	$N \cdot m$
M_{RW}	Reibmoment an der Welle	$N \cdot m$
M_{RS}	Reibmoment an der Lagerschale	$N \cdot m$
$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{M}}$	Komponenten der Massenmatrix bezüglich der körperfesten Basis K	\sim
$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{M}}_i^e$	Komponenten der eingprägten Momente um den Schwerpunkt des i -ten Körpers bezüglich der Basis K	\sim
$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{M}}^b$	Massenmatrix des aufgeschnittenen System bezüglich der Basis K	\sim
$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{M}}_{te}$	Koppelterme der Massenmatrix zwischen Starrkörpertranslation und elastischer Deformation	\sim
$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{M}}_{re}$	Koppelterme der Massenmatrix zwischen Starrkörperrotation und elastischer Deformation	\sim
$\underline{\underline{M}}$	Massenmatrix	\sim
$\vec{M}_a^{A i}$	i -tes äußeres Moment um den Bezugspunkt A	$N \cdot m$
n	Anzahl der Körper	-
n_c	Anzahl der Zwangsbedingungen	-
n_f	Anzahl der äußeren Kräfte	-

nx	Gitterknoten in x- Richtung	-
ny	Gitterknoten in y- Richtung	-
\vec{n}_W	Normalenvektor auf der Wellenoberfläche	-
\vec{n}_S	Normalenvektor auf der Schalenoberfläche	-
\vec{n}_F	Normalenvektor auf der Laufbahnfläche	-
\vec{n}_S	Normalenvektor auf der Scheibenkontur	-
\vec{n}_1	Normalenvektor auf dem Kontaktpunkt K_1	m
\vec{n}_2	Normalenvektor auf dem Kontaktpunkt K_2	m
O_x	Gradient für die x-Richtung	$Pa \cdot m$
O_y	Gradient für die y-Richtung	$Pa \cdot m$
p	Druck	Pa
p_{rand}	Druck am Lagerrand	Pa
p_C	Kavitationsdruck	Pa
\underline{p}_h	Spaltenvektor mit den Drücken an jedem Gitterknoten	Pa
\underline{p}	Parametervektor für die Kontaktpunkte beim Scheibenmodell	\sim
\underline{p}^*	modifizierter Parametervektor für die Kontaktpunkte beim Scheibenmodell mit Lagrange-Multiplikator	\sim
\vec{p}	Impuls	$N \cdot s^{-1}$
\vec{P}_S	Ortsvektor zu einem Punkt auf der Scheibenkontur	m
$q_{x,y,z}$	Volumenstrom in x, y, z	$m^3 \cdot s^{-1}$
\bar{q}_λ	Linienlast einer Scheibe	$N \cdot mm^{-1}$
q_λ	Linienlast einer Scheibe	$N \cdot m^{-1}$
\underline{q}	Zustandsgrößen der Lage	\sim
\underline{q}^*	neue Zustandsgrößen der Lage	\sim
$\bar{\underline{q}}^*$	neue Zustandsgrößen der Lage - formal eingeführt	\sim
$\underline{\underline{Q}}$	Transformationsmatrix von der körperfesten Basis K in das Inertialsystem I	-
$\underline{\underline{Q}}_1$	Transformationsmatrix von der Basis des Körpers 1 ins Inertialsystem	-
$\underline{\underline{Q}}_2$	Transformationsmatrix von der Basis des Körpers 2 ins Inertialsystem	-
$\underline{\underline{Q}}_{AR}$	Orientierungsmatrix des Außenrings bezüglich der Inertialsystems	-
$\underline{\underline{Q}}_W$	Orientierungsmatrix der Welle bezüglich der Inertialsystems	-
$\underline{\underline{Q}}_{WK}$	Orientierungsmatrix der Wälzkörpers bezüglich der Inertialsystems	-
$\underline{\underline{Q}}_S$	Orientierungsmatrix der Lagerschale bezüglich der Inertialsystems	-

\underline{Q}_{rel}	Orientierungsmatrix der Welle bezüglich der Lagerschale	-
R_S	Radius der aktuellen Scheibe	m
R_F	Radius der Laufbahnfläche	m
R_{Sch}	Radius der Lagerschale	m
$R_{x1,2}$	Krümmungsradius in x- Richtung Körper 1 und 2	m
$R_{y1,2}$	Krümmungsradius in y- Richtung Körper 1 und 2	m
R_1	Krümmungsradius des Körpers 1	m
R_2	Krümmungsradius des Körpers 2	m
r_{hs1}	Störterm 1 auf der rechten Seite	$m \cdot s^{-1}$
r_{hs2}	Störterm 2 auf der rechten Seite	$m \cdot s^{-1}$
\underline{R}	Residuum	\sim
\underline{r}_h	rechte Seite des Gleichungssystems der FDM Methode	$m \cdot s^{-1}$
\vec{r}_{A1}	Ortsvektor zum Referenzsystem des Körpers 1	m
\vec{r}_{A2}	Ortsvektor zum Referenzsystem des Körpers 2	m
\vec{r}_{K1}	Ortsvektor zum Kontaktpunkt K_1 des Körpers 1	m
\vec{r}_{K2}	Ortsvektor zum Kontaktpunkt K_2 des Körpers 2	m
\vec{r}_{WK}	Ortsvektor zum Referenzsystem des Wälzkörpers	m
\vec{r}_{AR}	Ortsvektor zum Referenzsystem des Außenrings	m
\vec{r}_{IR}	Ortsvektor zum Referenzsystem des Innenrings	m
\vec{r}_S	Ortsvektor zum Schwerpunkt S	m
\vec{r}_A	Ortsvektor zum Bezugspunkt A	m
\vec{r}_P	Ortsvektor zum Punkt P	m
\vec{r}_1	Lage des Schwerpunktes von Körper 1	m
\vec{r}_2	Lage des Schwerpunktes von Körper 2	m
\vec{r}_L	Ortsvektor zum Lager	m
\vec{r}_{WM}	Ortsvektor zum Mittelpunkt der Welle	m
\vec{r}_{WK}	Ortsvektor zum Mittelpunkt des Wälzkörpers	m
\vec{r}_{SM}	Ortsvektor zum Mittelpunkt der Lagerschale	m
\vec{r}_{rel}	Ortsvektor vom Mittelpunkt der Lagerschale zum Mittelpunkt der Welle	m
s^*	radiale Abplattung des Wälzkörpers	m
S	Abkürzung für skalare Größen in der Reynolds-DGL	$Pa^{-1} \cdot s^{-1}$
SOL	Sternoperator für die linke Seite der Gleichung	$m \cdot s^{-1} \cdot Pa^{-1}$
SOR	Sternoperator für die rechten Seite der Gleichung	$m \cdot s^{-1}$
\vec{s}_1	Ortsvektor vom Referenzsystem des Körpers 1 zum Kontaktpunkt K_1	m
\vec{s}_2	Ortsvektor vom Referenzsystem des Körpers 2 zum Kontaktpunkt K_2	m

t	Zeit	s
$\underline{\underline{T}}(\underline{q})$	Transformationsmatrix zwischen Lage- und Geschwindigkeitsgrößen	\sim
u, v, w	Geschwindigkeit des Fluidelementes in x, y, z Richtung	$m \cdot s^{-1}$
u_m	hydrodynamisch wirksame Geschwindigkeit	$m \cdot s^{-1}$
U_S	Umfangsgeschwindigkeit an der Schale	$m \cdot s^{-1}$
U_W	Umfangsgeschwindigkeit an der Welle	$m \cdot s^{-1}$
\underline{u}	Zustandsgrößen der Geschwindigkeit	\sim
\underline{u}^*	neue Zustandsgrößen der Geschwindigkeit	\sim
$\overline{\underline{u}}^*$	neue Zustandsgrößen der Geschwindigkeit - formal eingeführt	\sim
v_t	tangentiale Geschwindigkeit	$m \cdot s^{-1}$
$v_{grenz1,2}$	Parameter für die Bestimmung des modifizierten Reibungsbeiwertes	$m \cdot s^{-1}$
v_{PWn}	normale Geschwindigkeit des Wellenpunktes	$m \cdot s^{-1}$
v_{PSn}	normale Geschwindigkeit des Schalenpunktes	$m \cdot s^{-1}$
\vec{v}_S	Geschwindigkeit des Schwerpunktes	$m \cdot s^{-1}$
\vec{v}_A	Geschwindigkeit des Bezugssystems A	$m \cdot s^{-1}$
\vec{v}_{K1}	Geschwindigkeit des Kontaktpunktes K_1	$m \cdot s^{-1}$
\vec{v}_{K2}	Geschwindigkeit des Kontaktpunktes K_2	$m \cdot s^{-1}$
\vec{v}_{PW}	Geschwindigkeit des Wellenpunktes	$m \cdot s^{-1}$
\vec{v}_{PS}	Geschwindigkeit des Schalenpunktes	$m \cdot s^{-1}$
\underline{w}	Geschwindigkeitsvektor des Fluidelementes	$m \cdot s^{-1}$
x_1	Position des Schwerpunkts in x-Richtung von Körper 1	m
x_2	Position des Schwerpunkts in x-Richtung von Körper 2	m
sx, sy, sz	Koordinaten des abgewickelten Netzes für das Gleitlager	m
x_W, y_W	Verlagerung der Wellenmitte bezüglich der Schalenmitte	m
\underline{x}	Spaltenvektor, der die Parameter der Orientierung enthält - Kardanwinkel	rad
$\underline{\underline{\tilde{X}}}_{1,2}$	Matrix, die die Spaltenvektoren mit den unbekanntenen Größen für die Linearisierung in neuen Koordinaten enthält	\sim
y_1	Position des Schwerpunkts in y-Richtung von Körper 1	m
y_2	Position des Schwerpunkts in y-Richtung von Körper 2	m
\underline{y}	Spaltenvektor der Minimalkoordinaten	
\underline{y}^b	Spaltenvektor der Minimalkoordinaten des aufgeschnittenen Systems	\sim
z_F	Längsposition der Zylinderkoordinaten zum Punkt auf der Laufbahnfläche	m
\underline{z}	Zustandsvektor, welcher alle zeitabhängigen Größen eines Systems beinhaltet	\sim

\underline{z}_{lin}	Zustandsvektor zum Zeitpunkt der Linearisierung	\sim
\underline{z}_q	modale Verschiebungen des elastischen Körpers	-
\underline{z}_f	zusätzlich definierte Zustandsgrößen aus den Kraftelementen	\sim

Griechische Buchstaben

α	Einheitsdrehung um die x-Achse	rad
α_e	Einflusszahl	$m \cdot N^{-1}$
α_ε	Winkel der Exzentrizität der Welle in der Lagerschale	rad
α_u	Winkel in der Lagerschale	rad
α_L	Winkel im Wälzlager	rad
α_F	Winkel der Zylinderkoordinaten zum Punkt auf der Laufbahnfläche	rad
α_S	Winkel der Zylinderkoordinaten zum Punkt auf der Scheibenkontur	rad
β	Einheitsdrehung um die neue y-Achse	rad
β_ε	Hilfswinkel	rad
β_e	Einflusszahl	N^{-1}
γ_e	Einflusszahl	N^{-1}
γ	Einheitsdrehung um die neue z-Achse	rad
γ_1	Verdrehwinkel Körper 1	rad
γ_2	Verdrehwinkel Körper 2	rad
$\underline{\gamma}$	Abkürzung für Terme aus der Ableitung der Zwangsbedingungen	$m \cdot s^{-2}$
δ	Abklingkonstante	s^{-1}
δ_K	Eindringweg im Kontaktpunkt	m
δ_e	Einflusszahl	N^{-1}
Δu	Differenzgeschwindigkeit zwischen Schalen- und Wellenoberfläche	$m \cdot s^{-1}$
Δx	Gitterweite in Umfangsrichtung	m
Δy	Gitterweite in Breitenrichtung	m
Δ	Hilfsgröße	m
$\delta \underline{r}_i$	virtuelle Verschiebung des i -ten Körpers	m

$\delta \underline{s}_i$	virtuelle Verdrehung des i -ten Körpers	rad
$\delta \underline{y}$	virtuelle Verschiebung der Minimalkoordinaten	\sim
$\delta \underline{y}^b$	virtuelle Verschiebung der Minimalkoordinaten des aufgeschnittenen Systems	\sim
ε	Exzentrizität der Welle in der Lagerschale	m
ϵ	kleinste darstellbare Zahl auf einem Computer	
η	dynamische Viskosität	$Pa \cdot s$
$\underline{\Phi}$	Konduktivitäts- bzw. Systemmatrix für die FDM	$m \cdot s^{-1} \cdot Pa^{-1}$
λ	Eigenwert	s^{-1}
λ_N	Lagrange-Multiplikator für die Nebenbedingung	\sim
$\underline{\lambda}$	Lagrange-Multiplikatoren	\sim
μ_r	Gleitreibungskoeffizient	-
μ_0	Haftreibungskoeffizient	-
μ	Koeffizient für Coulombsche Reibung	-
μ^*	Parameter für Hertzsche Pressung	-
$\nu_{1,2}$	Querkontraktionszahl der Konatktkörper 1 und 2	-
ξ_i	Verschiebung des Ersatzmassenschwingers	m
ρ	Dichte des Öls	$kg \cdot m^{-3}$
τ	Schubspannung	$N \cdot m^{-2}$
τ_S	Schubspannung an der Schale	$N \cdot m^{-2}$
τ_W	Schubspannung an der Welle	$N \cdot m^{-2}$
φ	Winkel zur Beschreibung der Lage des Gitterknotens in der Lagerschale	rad
φ_x	Verdrehwinkel um die x-Achse	rad
φ_y	Verdrehwinkel um die y-Achse	rad
φ_z	Verdrehwinkel um die z-Achse	rad
$\vec{\psi}$	Hilfsvektor für die Nebenbedingung	m
ω	Eigenkreisfrequenz	s^{-1}
Ω	Winkelgeschwindigkeit um die Figurenachse	s^{-1}
${}^K \underline{\omega}$	Komponenten der Winkelgeschwindigkeit um die Achsen der Basisvektoren K	s^{-1}
${}^I \underline{\omega}$	Komponenten der Winkelgeschwindigkeit um die Achsen der Basisvektoren des Inertialsystems	s^{-1}

Abkürzung

MKS	Mehrkörpersimulation
FEM	Finite-Element-Methode
FDM	Finite-Differenzen-Methode
FVM	Finite-Volumen-Methode
HD	Hydrodynamik ohne elastische Deformationen
EHD	Elastohydrodynamik
EMD	Name des entwickelten Programmsystems
CFD	numerische Strömungsmechanik (Computational Fluid Dynamics)
ODE	gewöhnliche Differentialgleichung
DAE	differential-algebraische Gleichungen
ATL	Abgasturbolader
OT	oberer Totpunkt des Kurbeltriebs
Z-OT	oberer Totpunkt beim Zünden
CAE	Computer Aided Engineering
CPU	Central Processing Unit

Kurzfassung

Diese Arbeit beschreibt Untersuchungen von nichtlinearen Rotorsystemen und deren sich aus der Lagerung in Gleit- und Wälzlagern ergebende Verhalten. Im Fokus steht dabei die dynamische Kopplung zwischen Fluiden in Gleitlagern und nachgiebigen bewegten Strukturen. Es wird ein ganzheitlicher Ansatz der Simulation von gleit- und wälzgelagerten Systemen verfolgt. Die Basis dafür ist ein Mehrkörpersystem für starre und elastische Körper, die durch verschiedene Krafterelemente miteinander verbunden sind. Es wird konkret auf die kinematische und dynamische Kopplung zwischen der Struktur und den Lagerelementen eingegangen. Zudem werden verschiedene Modellierungstiefen vorgestellt, so dass die Modellgüte und der Simulationsaufwand problembezogen abgestimmt werden können. Die Gleitlagermodelle können in Zapfenverlagerung ohne Schiefstellung, mit Schiefstellung und Berücksichtigung lokaler elastischer Deformationen in der Lagerschale unterschieden werden. Die Wälzlagermodelle decken den Bereich vom einfachen 2D-Modell bis zum 3D-Modell mit beliebiger Laufflächenkontur. An verschiedenen Beispielen aus der Rotordynamik werden Ergebnisse präsentiert. Unter anderem werden ein Kurbeltrieb mit einem elastohydrodynamischen Kontakt im großen Pleuellager und der Hochlauf eines Abgasturboladers in Schwimmbuchsen und in Wälzlagern dargestellt.

Abstract

This work describes investigations of nonlinear rotor systems and their behavior which results from the support in sliding and rolling bearings. The focus is on the dynamic coupling between the bearings and flexible moving structures. The destination is a holistic approach for dynamic rotors systems with nonlinear bearings. The basis is a multi-body system for rigid and elastic bodies, which are connected by various force elements. It discusses the kinematic and dynamic coupling between the structure and the bearing elements. In addition, various modeling depths are presented, so that the model accuracy and the simulation effort can be tuned problem-oriented. The models for fluid bearings vary in movement of the shaft without misalignment, with skewing and with consideration of local elastic deformations of the bearing shell. The models for the roller bearings diversify from simple 2D to 3D model with any arbitrary contour of the contact surface. Various examples from rotor dynamics will be presented. Amongst others a crank mechanism with one EHD-contact in the connecting rod and the run up of a turbocharger in floating ring bearings will be presented.

1 Einleitung

Die Simulation von Maschinen und deren Verhalten bedeutet immer eine Abbildung der realen Maschinen in einem mechanischen Ersatzmodell, anhand dessen Vorhersagen oder tiefere Einblicke in das Systemverständnis abgeleitet werden können. Die Beschreibung erfolgt häufig durch Differentialgleichungen, welche mit numerischen Verfahren gelöst werden müssen. In der vorliegenden Arbeit werden vor allem rotordynamische Systeme betrachtet, bei denen das Systemverhalten durch die Interaktion mit der Lagerung durch Gleit- und Wälzlager determiniert wird. Hier wird ein ganzheitlicher Ansatz verfolgt, bei denen alle beschreibenden Differentialgleichungen in einem Programm zusammengeführt und gelöst werden.

Bei einer ganzheitlichen Simulation müssen unterschiedliche Bereiche des Maschinenbaus miteinander verknüpft werden. Oftmals werden die Lagerelemente, wie Gleit- und Wälzlager, losgelöst von der restlichen Maschine betrachtet. Eine Wechselwirkung durch eine statisch unbestimmte Anordnung der Lager ist in diesem Fall nicht möglich. Hier existieren zahlreiche Methoden, mit denen zwei oder mehrere Programmsysteme miteinander durch eine Co-Simulation verbunden werden können. Dabei wird das Modell getrennt in zwei jeweils spezialisierten Programmen aufgebaut und an definierten Stellen miteinander gekoppelt. Innerhalb festgelegter Zeitintervalle tauschen die Programme ihre Informationen aus. Zwischen den Austauschintervallen ist der Verlauf der Übergabegrößen konstant. Die Darstellung einer ganzheitlichen Simulation über diesen Weg erscheint zunächst einfach, doch bei steifen Systemen, wie gleit- und wälzgelagerte Rotorsysteme, ergeben sich zahlreiche numerische Schwierigkeiten. Eine steife Differentialgleichung kennzeichnet sich dadurch, dass kleine Änderungen in den Eingangsgrößen große Änderungen in den Ausgangsgrößen hervorrufen. Die Änderung erfolgt dabei in unterschiedlichen Größenordnungen, was eine numerische Behandlung mit einer endlichen Darstellung von Dezimalstellen von Zahlen im Rechner erschwert. Außerdem läuft die Kommunikation zwischen den Programmen häufig über einen TCP-Port und ist damit sehr sensitiv gegenüber Änderungen am Betriebssystem. Aus diesen Schlussfolgerungen entsteht die Notwendigkeit die beschreibenden Differentialgleichung direkt in ein Mehrkörpersystem einzubetten und auch dort zu lösen. Ansätze dafür sind in den gebräuchlichen kommerziellen MKS-Programmen wie SIMPACK und ADAMS mit ihren nutzerdefinierten Krafterelementen enthalten. Ein MKS-Programm kann aufgrund der Definition von geometrischen Größen und dynamischen Parametern von Objekten die Bewegungsgleichung aufstellen und im Zeit- oder Frequenzbereich lösen. Die Einschränkungen in nutzerdefinierten Krafttroutinen sind teilweise erheblich.

Wie sich immer wieder bei der Analyse mechanischer Systeme gezeigt hat, führt die Verwendung von "Allesprogrammen" in der Regel zu ernsthaften Problemen: ... Dabei wird häufig der Blick auf die Zusammenhänge verstellt, ganz davon abgesehen, daß eine "blinde" Verwendung von "Fertigprogrammen" ohnedies wenig dazu geeignet ist, das physikalische Verständnis des aktuell betrachteten Problems zu fördern. [BP92, S. 108]

Zudem gestaltet sich die Fehlersuche bei dieser Art der Einbindung häufig sehr schwierig, da der Einblick in die übrigen Routinen des MKS-Programms verwehrt bleibt.

Wird eine ganzheitliche Simulation bei sehr hoher Modellierungstiefe von Struktur und Lagerelementen gefordert, müssen alle beschreibenden Differentialgleichungen von einer Instanz gelöst werden. Zur Trennung der einzelnen Teilgebiete wird das Konzept der nutzergeschriebenen Kraftelemente aufgegriffen und weiter entwickelt. Es wird ein schlankes MKS-Programm vorgestellt, welches in der Lage ist rotordynamische Systeme mit starren und elastischen Körpern abzubilden und die Einbindung von nutzerdefinierten Kraftelementen erlaubt. Dabei werden die Krafroutinen und die Strukturmechanik sehr eng mit dem numerischen Lösungsalgorithmus für die Lösung im Zeitbereich vernetzt, was sich gerade bei kommerziellen Programmsystemen als problematisch und zeitraubend zu implementieren erwiesen hat. Grundsätzlich ist es damit möglich, die entwickelten Methoden mit Einschränkungen auch auf kommerzielle MKS-Programme, zu übertragen. Am Lehrstuhl wurde zur Umsetzung einer ganzheitlichen Simulation das Programmsystem EMD entwickelt. Basis ist ein räumliches Mehrkörpersystem, das die Vorteile der allgemeinen Formulierung beliebiger räumlicher Bewegungen mit den Eigenschaften von etablierten rotordynamischen Programmsystemen wie MADYN verbindet. Ein Vorteil des Mehrkörpersystems ist unter anderem die Abbildung von beliebig großen Bewegungen und Drehungen sowie die Definition von beliebig ausgebildeten Körpern, was bei der Simulation von anisotropen Rotoren wichtig ist. Wie im Verlauf der Arbeit dargestellt wird, ist die Wahl der beschreibenden Zustandsgrößen bei der Analyse im Frequenzbereich entscheidend. Die Verwendung von inertialen Koordinaten zur Beschreibung von Wegen und Geschwindigkeiten ist dabei vorteilhaft. Die Bewegungsgleichungen sollen im Zeitbereich mittels etablierter robuster expliziter oder semiexpliziter ODE-Solver gelöst werden können. Dies sichert auch für nichtlineare Systeme eine stabile numerische Lösung. Die Erstellung eines eigenen Programmsystems ermöglicht zudem eine breite wissenschaftliche Forschung auf dem Gebiet der nichtlinearen Rotordynamik und wird von mehreren Lehrstuhlmitgliedern weiterentwickelt und für weitere wissenschaftliche Forschungen genutzt.

In den folgenden Kapiteln wird der grundsätzliche Aufbau des ganzheitlichen Simulationsprogramms EMD dargestellt. Dabei werden zunächst die Bewegungsgleichungen für die räumliche Bewegung von starren Körpern hergeleitet und in einer geeigneten Form für rotordynamische Belange zusammengeführt. Die Bewegungsgleichungen für elastische Mehrkörpersysteme basieren auf den Grundlagen von Schwertassek und Wallrapp [SW99] und sind in dieser Arbeit nur erwähnt. Weitere Zusammenhänge lassen sich aus den gemeinsamen Veröffentlichungen mit Kollegen des Lehrstuhls erfahren [WDS07, WDSS09, NWDS09, NWDS11, DNWS11]. Darauf folgend werden die Grundlagen der Berechnung von Wälz- und Gleitlagern dargestellt, wobei darauf hingewiesen sei, dass der Detaillierungsgrad der Gleitlager in EMD über eine Gümbel-Lösung hinaus geht, sich in dieser Arbeit aus Gründen der Übersichtlichkeit aber darauf beschränkt wird. Umso mehr bemüht sich diese Arbeit grundsätzliche Hürden zwischen verschiedenen Bereichen des Maschinenbaus, zu überwinden und eine ganzheitliche dynamische bzw. physikalisch korrekte Simulation, zu ermöglichen. Die Darstellung der Auswirkungen unterschiedlicher Modellierungstiefen auf das dynamische Verhalten soll an verschiedenen rotordynamischen Modellen gezeigt werden. Mit der Darstellung des Machbaren lassen sich weitere Erhöhungen des Modellierungsgrads im Gleit- oder Wälzlagermodell einfacher umsetzen.

Das Programmsystem EMD ist in der Programmiersprache FORTRAN umgesetzt. Das ausführbare Programm ist kompiliert und optimiert, was die Ausführungsgeschwindigkeit deutlich erhöht. Dies ist gerade bei Interpretersprachen ein großes Problem, da die Programme vor der Ausführung nicht kompiliert werden. Weiterhin lassen sich mit unabhängigen Programmen Sensitivitätsanalysen und Optimierungen mit eigenen Algorithmen deutlich einfacher umsetzen. Dies vereinfacht die wissenschaftliche Arbeit, weil die Schnittstellen selbst erstellt und angepasst werden können.

Für die Zusammenarbeit mit externen Forschungsstellen und Partnern aus der Industrie ergeben sich bei eigenständigen Programmsystemen viele Möglichkeiten der Zusammenarbeit. Es können zugeschnittene Simulationswerkzeuge erstellt werden, welche eigenständig Simulationen von dynamischen Systemen mit Fluid-Struktur-Kopplungen durchführen können.

Neben der algorithmischen Darstellung einer ganzheitlichen Simulation gleit- und wälzgelagerter Systeme sollen verschiedene Effekte in diesem Zusammenhang dargestellt werden. Das Zusammenspiel von elastischer Deformation und Hydrodynamik kann teilweise zu einer deutlichen Änderung im Systemverhalten führen. Dies tritt bei der Durchbiegung von gleitgelagerten Wellen auf, weil der Biegewinkel in den Lagerstellen zu Kantenträgern führen kann. Bei hoch belasteten Strukturen kann die Modellierung mit einem elasto-hydrodynamischen Kontakt (EHD) notwendig sein, wenn die lokale Deformation der Struktur aufgrund des hydrodynamischen Druckes im Gleitlager und die Rückwirkung auf den Druckaufbau abgebildet werden sollen.

Die Auswahl der notwendigen Modellierungstiefe für die Simulation eines Gleitlagers muss aus dem Zusammenhang erfolgen. Es können mit Hilfe der in dieser Arbeit dargestellten Beispiele grundsätzliche Klassifizierungen der Modellierungsstufen erfolgen. In der Praxis ist die begrenzende Größe oft die zu Verfügung stehende Simulationszeit. Das Simulationsmodell sollte immer möglichst wenige Freiheitsgrade und schwache Nichtlinearitäten und Unstetigkeiten besitzen, um eine geringe Simulationszeit zu erzielen. Dennoch sei erwähnt, dass die Simulation von nichtlinearen dynamischen Rotorsystemen in der Regel mehrere Stunden, teilweise für Hochläufe auch mehrere Tage, in Anspruch nehmen kann.

2 Stand der Forschung

2.1 Mehrkörpersysteme

In der Entwicklung der Mehrkörpersysteme gibt es in den letzten Jahren aus Sicht der Mechanik keine großen Neuerungen. Die mathematischen Grundlagen zur Beschreibung von starren Mehrkörpersystemen sind sehr lange bekannt. Dennoch gibt es trotz der kontinuierlichen Steigerung der Rechenleistung Probleme mit der praktischen Umsetzung. Der Grad der Reduktion ist sehr hoch, um die Rechenzeit zu begrenzen. Bei elastischen Mehrkörpersystemen sind die Körper zusätzlich Wechselwirkungen zwischen den Starrkörperbewegungen und den elastischen Deformationen unterworfen. Bei der Umsetzung hat sich, insbesondere bei kleinen elastischen Deformationen, die Methode des mitbewegten Relativsystems bewährt. Dies beschreibt die elastischen Deformationen in einem mitbewegten Relativsystem. Die Darstellung der elastischen Eigenschaften im körperfesten System erfolgt üblicherweise mit einer Finiten-Element-Methode. Die Zahl der Freiheitsgrade kann bei räumlich diskretisierten Bauteilen sehr groß werden, weshalb eine drastische Reduktion der Freiheitsgrade erfolgen muss. Dies wird in der Regel in zwei Stufen umgesetzt. Zunächst wird eine statische Kondensation¹ auf ausgewählte Hauptfreiheitsgrade vorgenommen. Anschließend erfolgt eine Modaltransformation mit der Einschränkung auf wenige modale Freiheitsgrade. In der Zeitintegration erscheint die Deformation der Struktur nur als modale Verschiebung. Einen Standard für diese Methode wurde von [Wal94, SW99] eingeführt. Diese wird mit leichten Modifikationen heute noch im kommerziellen MKS-Programm SIMPACK verwendet. Der Grad der Ordnungsreduktion ist dabei erheblich, weswegen diese Methode sehr empfindlich gegenüber Änderungen der Diskretisierung und der Auswahl der Hauptfreiheitsgrade ist. Eine vollständige Automatisierung dieses Prozesses wird von vielen CAE-Entwicklern angestrebt, ist aber auf absehbare Zeit kaum erreichbar.

2.2 Wälzlagersimulation

Wälzlager sind im Maschinenbau häufig verwendete Konstruktionselemente zur Lagerung von Wellen. Entsprechend der Baugröße des Wälzlagers ergeben sich für das System definierte Eigenschaften. Maßgeblich für dynamische Systeme ist die Nachgiebigkeit und die Dämpfung, die in den Lagerstellen vorliegt. In erster Näherung können diese Nachgiebigkeiten mit Konstanten angenähert werden. Dennoch ist in bestimmten Fällen der Blick in das Lager für die Abbildung definierter nichtlinearer Systemeigenschaften notwendig. Dabei geht es teilweise um Aussagen über die inneren Kräfte im Lager und die sich daraus ergebende Lebensdauer, aber auch um mögliche Anregungsmechanismen für Schwingungen. So kann die periodisch wechselnde Steifigkeit oder eine kontinuierliche Überrollung eines Fehlers in der Laufbahn zur Anregung von Schwingungen führen, die sich negativ auf

¹alternativ stehen auch moderne Reduktionsverfahren zur Verfügung: Craig-Bampton, SEREP

den Betrieb des Systems auswirken können. Die Simulation von Wälzlagern sollte daher in zwei Bereiche unterteilt werden. Einerseits werden das Wälzlager als eigenständiges Element und seine inneren Kräfte betrachtet. Andererseits gibt es Anwendungen, bei denen die Abbildung des Wälzlagers im Zusammenspiel mit anderen Maschinenkomponenten interessiert.

Grundsätzlich stellt ein Wälzlager ein statisch unbestimmtes System dar. Damit ist die Zahl der kraftübertragenden Wälzkörper von der äußeren Last abhängig. Die Abbildung als quasistatisches Problem, bei dem die Wälzkörper und Laufringe masselos angenommen werden, führt auf ein nichtlineares Gleichungssystem für die Position der Lagerbestandteile. Die Lösung liefert zudem die tragenden Wälzkörper und die Kontaktkräfte zwischen den Lagerpartnern. Die Kontaktkraft für einen einzelnen Kontakt kann z.B. durch ein lineares Kraftgesetz formuliert werden. Dabei wird die Kontaktkraft F_{ki} am Wälzkörper i mit der Eindringung δ_{ki} vom Wälzkörper in die Laufbahn bestimmt

$$F_{ki} = \begin{cases} \delta_{ki} \cdot c_k & \text{falls } \delta_{ki} \leq 0 \\ 0 & \text{falls } \delta_{ki} > 0 \end{cases} \quad (2-1)$$

Für alle potentiellen Kontaktstellen i kann mit Gl. (2-1) die Kontaktkraft berechnet werden. Das Vorwärtsproblem, die Kontaktkraft infolge einer vorgegebenen Verschiebung δ_k , ist damit beschrieben. Ziel ist es das Kräftegleichgewicht zwischen allen Kontaktkräften F_{ki} und der äußeren Last F_a zu finden

$$\underline{F}_a + \sum F_{ki}(\delta_{ki}) \cdot \underline{n}_i = \underline{0} \quad (2-2)$$

Die Bestimmung der Verschiebungen δ_{ki} in Gl. (2-2) kann auch als Rückwärtsproblem bezeichnet werden. Da die Umkehrfunktion von Gl. (2-1) nicht eindeutig ist, bedingt durch die Fallunterscheidung beim Kontakt ($\delta_{ki} \leq 0$), muss das Rückwärtsproblem, auch bei der Verwendung konstanter Kontaktsteifigkeiten, iterativ gelöst werden.

Der Zusammenhang zwischen Last und Deformation des Wälzkörpers ist im Gegensatz zu Gl. (2-1) nichtlinear und wird meist mit empirischen Formeln bestimmt [BEHW95, Rot96]. Für einfache Kontaktgeometrien lassen sich die Verformungsbeziehungen und die Spannungsverteilung in der Kontaktfläche nach Hertz [Her81] berechnen. Darüber hinaus sind zahlreiche analytische Lösungen erarbeitet worden [Lun39, Kun61, Tri85]. Die Anwendung der Formeln wird erschwert, da der Zusammenhang zwischen Deformation und Kontaktkraft nicht direkt nach der Kontaktkraft umstellbar ist. Daher müssen die Gleichungen iterativ gelöst werden.

Auch die Kontaktdämpfung im Wälzkontakt ist von entscheidender Bedeutung [Die97, WS83], deren Ursache teilweise nicht durch existierende Modelle zu erklären ist. In der Regel werden hier Parametermodelle verwendet, die sich an experimentell beobachteten Verhalten orientieren [Sjö96].

Für eine dynamische Simulation müssen neben den Kontaktkräften auch die Kontaktdämpfungen und die Massenträgheiten der Lagerbestandteile berücksichtigt werden. Der Aufwand bei der korrekten räumlichen Entwicklung dieser Größen für alle Lagerkomponenten ist beträchtlich, daher sind in der Dynamiksimulation verschiedenen Methoden zur Abbildung von Wälzlagern zu finden. Die einfachste Möglichkeit ist die Berücksichtigung der Lagereigenschaften durch eine Gesamtsteifigkeit zwischen Innen- und Außenring. Dabei kann das Kontaktproblem mit einem strukturmechanischen Finite-Element-Modell gelöst

werden. Die Bestimmung der Nachgiebigkeiten kann mittels Einheitslasten durchgeführt werden. Ergebnis ist eine Steifigkeitsmatrix, welche das elastische Verhalten des Lagers in alle Belastungsrichtungen abbildet. Diese Methode wird von Lagerherstellern verwendet, um Kunden eine schnelle und einfache Berechnung in eigenen Simulationsprogrammen zu ermöglichen. Da die Steifigkeit des Lagers stark von den Randbedingungen, wie statischen Vorlasten, abhängig ist, sind diese Steifigkeiten nur begrenzt verwendbar. Eine allgemeine Anwendung für verschiedene Randbedingungen ist nicht möglich. Weiterhin gibt es keinerlei Informationen zur Belastung im Inneren des Wälzlagers.

Eine weitere Methode zur Abbildung der Lagereigenschaften wurde in [Fri09, Fri11] vorgestellt. Hier werden die Wälzkörper masselos modelliert, jedoch erfolgt eine Zwangsführung durch die Abrollbedingung zwischen Innen- und Außenring. Mit der aktuellen Position der Wälzkörper wird die Summensteifigkeit des Lagers bestimmt. Hier sind auch Verkippungen der Wälzkörper möglich, wobei der Neigungswinkel der Wälzkörper mit dem mittleren Winkel des Innen- und Außenrings angenommen wird. Der Detaillierungsgrad der Einzelkontakte ist sehr hoch, es werden zahlreiche empirische Modelle für die Abbildung von Normalkräften und Verlustmomenten in den Kontaktstellen dargestellt und verwendet. Das dynamische Kräftegleichgewicht aller Lagerkomponenten wird mit dieser Methode nicht berücksichtigt, dafür bleibt die Zahl der Gesamtfreiheitsgrade gering, was sich im Simulationsaufwand günstig widerspiegelt.

Die nächsthöhere Modellierungsstufe ist die Abbildung aller Lagerkomponenten mit deren Massenträgheiten. Hier sind alle Wälzkörper massebehaftet und können sich frei bewegen. Die Führung erfolgt durch die Definition von Kontaktkräften und -momenten zwischen den Lagerbestandteilen. Das Kräftegleichgewicht im Lager wird durch die Bewegungsgleichung abgebildet und kann mittels einem DAE- oder ODE-Solver gelöst werden. Problematisch sind dabei nur die große Anzahl an Freiheitsgraden und das extrem nichtlineare und steife Verhalten der Bewegungsgleichung. Diese Simulationsmethode wird von Teutsch [Teu05] und von Vesselinov [Ves03] angewendet. Teutsch verwendet als Simulationsplattform ADAMS und betrachtet unter anderem wälzgelagerte Linearführungen und Rollenlager. Die Kontaktkräfte werden als nutzergeschriebene Routinen abgebildet, da die ADAMS-Kontakt-routinen zu aufwendig für die zahlreichen Kontaktstellen sind. Vesselinov nutzt eine eigene Simulationsumgebung, welche in C++ erstellt wurde. Der maßgebliche Aufwand resultiert aus der Berechnung der Kontaktstellen und der Kontaktkräfte. Hier wurden zahlreiche analytische Lösungen abgeleitet, die die Durchdringung von verschiedensten räumlichen Primitiven bestimmen können. Die Lösung ist jedoch stark abhängig von der gewählten Geometrie und meist sehr komplex. Eine weitere Arbeit zur Dynamik von Wälzlagern liefert Hahn [Hah05], welche speziell auf die Dynamik des Käfigs im Wälzlager abzielt. Hier werden globale Deformationen des Käfigs und seine Auswirkungen auf die Eigenschaften des Wälzlagers betrachtet. In den meisten Fällen sind die Wälzkörper und die Laufringe ideal starre Körper, bei denen nur lokale Deformationen im Kontaktbereich auftreten. Nur Teutsch hat bei den Gehäusen der betrachteten Linearführungen mittels einfacher diskreter Nachgiebigkeiten globale Deformationen zugelassen. Sextro [Sex02] stellt in diesem Zusammenhang ein Modell zur Abbildung von dynamischen Kontakten zwischen elastischen Körpern vor. Dabei wird auch der Begriff des elastischen Layers zur Berechnung der Kontaktspannungen geprägt. Es wird klar definiert, dass die elastische Deformation im dynamischen Kontakt nicht mit einem vollen Finite-Elemente-Modell erfolgen kann. Er stellte einen Ansatz dar bei dem die elastischen Freiheitsgrade durch wenige modale Freiheitsgrade abgebildet werden.

Die höchstmögliche Stufe der Modellierung wäre ein strukturmechanisches Modell des Wälzlagers mit FEM und eine transiente Lösung. Dies ist für große Starrkörperbewegungen eines vollständigen Wälzlagers sehr rechenzeitaufwendig und für praktische Anwendungen nicht tauglich.

Allen Modellierungsstufen ist jedoch gemein, dass die Berechnung von Kontakt- und Reibungskräften sowie der Rollreibung mit empirischen Modellen vollzogen wird. Dabei sind in den letzten Jahrzehnten zahlreiche Modelle für verschiedene Kontakttypen entwickelt und auch validiert worden. Die Auswahl einer passenden Methode fällt dennoch nicht leicht, die Vorschläge in [DIN03], sind meist einfach und fassen viele Parameter in zugeschnittenen Größengleichungen zusammen.

2.3 Gleitlagersimulation

Einen Überblick über die Funktionsweise von Gleitlagern und die mathematische Formulierung aller Effekte ist in [LS78] dargestellt. Hier sind alle wichtigen Terme der Schmierfilmgleichung erläutert. Bei der numerischen Berechnung von Gleitlagern wird zwischen quasistatischen- und dynamischen Verfahren unterschieden.

Die quasistatischen Verfahren sind historisch länger etabliert, was auch mit der Entwicklung der Rechentechnik zusammenhängt. Wichtige Grundlagen zur numerischen Lösung der Druckverteilung in hydrodynamischen Gleitlagern liefern [Kno74, But76]. Hier wird der grundsätzliche Ablauf der Diskretisierung der Schmierfilmgleichung im Radialgleitlager mittels der FDM dargestellt. Aktuelle Veröffentlichungen mit quasistatischen Methoden sind Mermertas [Mer07] und Bobach [Bob08]. Wobei Mermertas den Fokus auf die thermische Betrachtung des Gleitlagers setzt und Bobach auf die lokale elastische Deformation der Lagerschale und die Mikrohydrodynamik abzielt. Der grundsätzliche Ansatz ist jedoch gleich: Die Schmierfilmgleichung liefert eine Druckverteilung bzw. eine Tragkraft, welche im Gleichgewicht mit den äußeren Kräften stehen muss. Die Zapfenlage und die Verlagerungsgeschwindigkeit werden iterativ bestimmt, bis das Kräftegleichgewicht erfüllt ist. Deformationen an Lagerpartnern werden durch Nachgiebigkeitsmatrizen bestimmt, welche aus statischen Rechnungen mit Einheitslasten auf der Lageroberfläche erstellt werden. Dabei muss die Struktur statisch bestimmt gelagert sein, wobei dies nicht immer gegeben ist. Bei einem Pleuel ist dies in der ursprünglichen Lagerung kinematisch bedingt nicht möglich, weswegen das Pleuel im Steg eingespannt wird. In [KLR96, KBLW98] wird ein Vergleich zwischen einer quasistatischen und dynamischen Simulation für ein Pleuel aufgezeigt, wobei die Unterschiede auch bei geringen Drehzahlen schon erheblich sind. Darüber hinaus kann der Dehnungszustand im Pleuel nicht sinnvoll zur Bewertung der Bauteilfestigkeit herangezogen werden, da dieser von der Einspannung zu stark gestört ist. Auch bei einer statisch bestimmten gelagerten Struktur wären die berechneten Deformationen in der Lagerschale ohne zeitliche Abhängigkeit zur Last. Strukturdämpfung und Trägheitseigenschaften können wegen fehlender Zustandsgrößen nicht berücksichtigt werden.

Daher wurden zahlreiche dynamische Gleitlagerberechnungsmethoden entwickelt. Grundlage ist meistens eine Bewegungsgleichung einer Struktur, die mit den Schmierfilmkräften gekoppelt wird. Die Lösung erfolgt in einem FE- oder MKS-Programm, welches die Gleitlager als spezielles Kraftelement zwischen zwei Körpern erfasst. Aktuelle Vertreter dieser Methoden sind TOWER und AVL. Knoll [KBLW98] liefert mit seinem Programm

TOWER-MKS die Kopplung zu den verbreiteten MKS-Programmen SIMPACK und ADAMS. Eine eigenständige Entwicklung liefert AVL mit dem Programm EXCITE [KLHK02], welches sowohl das MKS-Programm als auch die Routinen zur Hydrodynamik beinhaltet. In der dynamischen Simulation können die Tragkräfte im Gleitlager mit verschiedenen Methoden bestimmt werden.

Für stationäre Lagen und konstante Drehzahlen kann eine Linearisierung der Lagereigenschaften in Steifigkeits- und Dämpfungsmatrix sehr rechenzeiteffizient sein. Die Tragkraft wird durch eine Matrizenmultiplikation mit der Änderung um den Linearisierungspunkt bestimmt. Bei kleinen Auslenkungen und konstanter Drehzahl ist diese Methode sehr gebräuchlich. Für große Änderungen in der Zapfenlage oder der Drehzahl muss die Schmierfilmgleichung aufwendiger ausgewertet werden. Um die numerische Lösung nicht in jedem Zeitschritt durchführen zu müssen, haben sich Kennfeldlösungen etabliert. Dabei wird die Tragkraft für definierte Zapfenlagen und -geschwindigkeiten in einem Kennfeld abgelegt. In der Zeitintegration müssen die Daten zu dem aktuellen Zustand aus Kennfeldern gelesen und interpoliert werden [MSS00]. Diese Methode kann für starre Lager ohne Schiefstellung des Zapfens und ohne elastische Deformation der Lagerschale verwendet werden. Sie findet unter anderem Anwendung in [CNP11], wobei hier noch eine Erweiterung um ein Verschleißmodell für die Außenkontur der Lagerschale berücksichtigt wird.

Alternativ kann die Schmierfilmgleichung in jedem Zeitintegrationsschritt numerisch gelöst werden. Der Aufwand der numerischen Lösung der Schmierfilmgleichung ist verhältnismäßig gering, dennoch steigt die Rechenzeit durch die hohe numerische Steifigkeit des Systems stark an. Dies ist ein Grund, warum die Simulationsmethode in der normalen Ingenieurspraxis selten verwendet wird. TOWER-MKS und AVL-EXCITE sind zwei der wenigen Programme, welche eine EHD-Kopplung kommerziell anbieten. Hier wird die direkte numerische Lösung der Schmierfilmgleichung mit der Bewegungsgleichung der Struktur verbunden.

2.4 Rotordynamik

Die Rotordynamik beschäftigt sich mit den Schwingungen in rotierenden Systemen. In der Regel gilt es die Schwingungen in ihrer Amplitude gering zu halten und die Betriebspunkte eines Rotorsystems weit entfernt von Resonanzstellen zu setzen. Weiterhin treten bei rotierenden Systemen häufig Effekte auf, die zu einer zusätzlichen Anregung des Systems führen und über die Unwuchtschwingungen hinausgehen. Die wichtigsten Effekte sind in [GNP06] dargestellt, dies betrifft Rotoren in Gleit-, Wälz- und Magnetlagern. Dennoch zeigt sich, dass hier für die Beschreibung der Lagereigenschaften auf vereinfachte Modelle zurückgegriffen wird, um analytisch geschlossene Lösungen angeben zu können. Bei den Gleitlagern kann die Kurzlagertheorie grundsätzliche Fragestellungen zur Stabilität des Rotorsystems geben. Andererseits beinhalten detaillierte Modellierungen von Gleitlagern wie Fuchs [Fuc02] selbst keine direkte Abbildung der Struktureigenschaften. Fuchs hat sein Berechnungsprogramm für Gleitlager ALP3T2P mit Programmen wie MADYN oder SR3 gekoppelt, die Kopplung läuft über die Berechnung von Ersatzsteifigkeiten der Lager für das Strukturprogramm. Fuchs untersucht speziell Gleitlager mit Schwimmbuchsen, wobei diese selbst nicht in dem Rotordynamikmodell auftauchen. Die entscheidende

Drehzahl wird mit dem Unterprogramm OMB vorab bestimmt.

Die sich aus der Gleitlagerung von schnell laufenden Rotoren ergebenden Effekte sind unter anderem bei der Betrachtung von Abgasturboladern entscheidend.

2.4.1 Rotordynamisches Verhalten von Turboladern

Bei schnell laufenden gleitgelagerten Systemen treten besondere Effekte auf, die unter anderem aus dem Schmierfilm resultieren. Dabei ergeben sich besonders große subharmonische Schwingungen, die für den Betrieb eines solchen Systems negativ sein können. Es stellen sich teilweise quasiperiodische Lösungen ein und der Zustand kann mathematisch als stabil bezeichnet werden. Die ersten Untersuchungen dazu wurden bereits 1925 von Newkirk und Taylor durchgeführt [Som62, YI01]. Die Ursache dafür konnte von Bently und Muszynska [BM89] durch zahlreiche Messungen gefunden werden. Angeregt werden diese subharmonischen Schwingungen durch das im Schmierspalt umlaufende Öl, weswegen sie auch den Namen Oil-Whirl tragen. Yamamoto und Hori [YI01, Hor06] stellen die Ursachen für den Oil-Whirl unter anderem klar heraus: Über eine Volumenstrombilanz im Schmierfilm lässt sich eine destabilisierende Kraftkomponente bestimmen. Daraus resultiert eine schiefsymmetrische Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix des Gleitlagers, die nach Muszynska [Mus86] unter bestimmten Randbedingungen subharmonische Schwingungen hervorrufen können. Entscheidend ist dabei, dass die schiefsymmetrischen Einträge aus den Trägheitskräften des Öls durch die Drehbewegung resultieren. Eine Zusammenfassung aller relevanten Effekte und die Übertragung auf die Schwimmbuchsenlagerung, die für die Rotordynamik am automobilen Turbolader wichtig ist, sind von Nguyen-Schäfer [NS12] erfasst. Hier wird deutlich gemacht, dass eine Untersuchung nichtlinear gelagerter Systeme, wie der Abgasturbolader in Schwimmbuchsen, mit einem Campbell-Diagramm nicht sinnvoll ist. Hingegen kann ein Wasserfalldiagramm der Wellenschwingungen die subharmonischen Schwingungen und die angeregten Eigenfrequenzen verdeutlichen.

Schweizer führt in [Sch09] den Begriff der totalen Instabilität ein, bei der sich Oil-Whirl des inneren und äußeren Schmierfilms synchronisieren und die Dämpfung der Schmierfilme reduziert wird. Die Exzentrizität ist in beiden Schmierspalten sehr nahe am maximalen Lagerspiel, sodass ein sicherer Betrieb kaum möglich wäre. Die Abbildung der Gleitlager bleibt in diesem Artikel offen. Es ist davon auszugehen, dass eine Kennfeldlösung verwendet wurde. Zudem wird erwähnt, dass die klassischen analytischen oder semi-analytischen Methoden zur Stabilitäts- und Verzweigungsanalyse kaum auf komplexe Modelle wie einem Abgasturbolader in Schwimmbuchsenlagerung anwendbar sind.

Eine Stabilitätsbetrachtung mit einer Verzweigungsanalyse eines Abgasturboladers wurde von Boyaci [Boy11] durchgeführt. Dabei wurde ein Ritz-Ansatz für die Strukturelastizität verwendet. Die Schwimmbuchsenlager sind durch Kennfeldlösungen und vorzugsweise einer Kurzlagertheorie abgebildet. Die Verzweigungsanalyse wurde mit MATCONT, einem Unterprogramm von MATLAB durchgeführt.

Backhaus [BK12] gibt einen Überblick über die Simulationstechniken bei Turboladern, wobei darauf hingewiesen wird, dass die Hochlaufsimulation nur mit Kennfeldlösungen zeiteffizient vollzogen werden kann. Methoden, bei denen die Schmierfilmgleichung in jedem Zeitschritt gelöst wird, seien möglich, werden aber auch hier nicht für eine volle Hochlaufsimulation verwendet.

3 Theoretische Grundlagen

3.1 Mehrkörpersysteme

3.1.1 Aufstellung der Bewegungsgleichungen

Freie Bewegung eines Körpers

Zunächst soll die Bewegung eines einzelnen starren Körpers im Raum betrachtet werden. Hierzu wird auf dem Körper im Punkt A ein körperfestes Koordinatensystem mit der Basis ${}_K\vec{e}$ definiert. Weiterhin sei der Schwerpunkt S mit dem Vektor \vec{c}_S auf dem Körper beschrieben. Für die Herleitung der Bewegungsgleichungen wird noch ein beliebiger Punkt P definiert, welcher die infinitesimale Masse dm besitze.

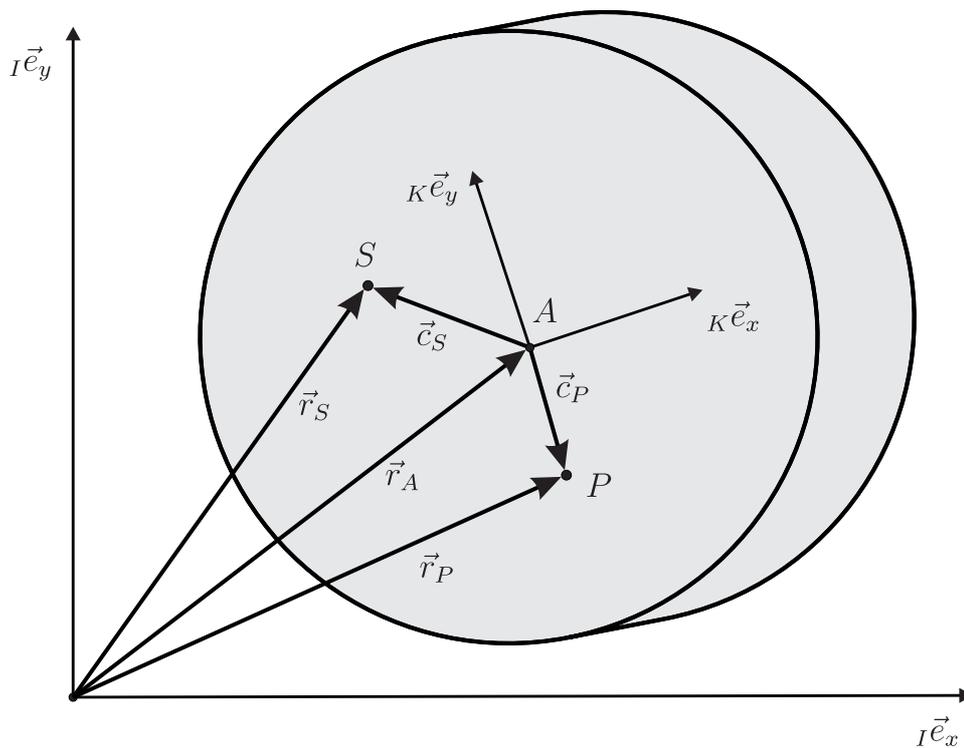


Abbildung 3-1: Starrer Körper

Für die vollständige Bewegungsgleichung soll hier zunächst der Impuls und der Drehimpuls betrachtet werden.

Impuls: Der Impuls für einen starren Körper lautet

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}_S \quad . \quad (3-1)$$

Dabei ist \vec{v}_S die Schwerpunktgeschwindigkeit. Die einmalige Differentiation von Gl. (3-1) führt auf den Kräftesatz [HSG89]

$$\dot{\vec{p}} = m \cdot \dot{\vec{v}}_S = \sum_i \vec{F}_a^i = m \cdot \ddot{\vec{r}}_S \quad . \quad (3-2)$$

Die Beschreibung des Schwerpunktes erfolgt mittels eines körperfesten Relativsystems K im Punkt A , von dem der Vektor \vec{c}_S zum Schwerpunkt weist

$$\vec{r}_S = \vec{r}_A + \vec{c}_S \quad . \quad (3-3)$$

Für die Auswertung von Gl. (3-2) werden die Vektorgleichungen in einer Basis ${}_K\vec{e}$ entwickelt, diese besteht aus drei Einheitsvektoren

$${}_K\vec{e} = [{}_K\vec{e}_x \quad {}_K\vec{e}_y \quad {}_K\vec{e}_z]^T \quad . \quad (3-4)$$

Die Koordinaten des Schwerpunktvektors \vec{r}_S lauten

$${}_K\underline{r}_S = {}_K\vec{e}^T \cdot \vec{r}_S = [r_x \quad r_y \quad r_z]^T \quad . \quad (3-5)$$

Die Koordinaten von Gl. (3-3) lauten bezüglich ${}_K\vec{e}$

$${}_K\underline{r}_S = {}_K\underline{r}_A + {}_K\underline{c}_S \quad . \quad (3-6)$$

Die zeitliche Ableitung von Gl. (3-6) muss bezüglich des Inertialsystems erfolgen. Die absolute Ableitung der Koordinaten ${}_K\underline{r}$ eines beliebigen Vektors \vec{r} im Relativsystem K bzw. der Basis ${}_K\vec{e}$ kann mit der Spinnmatrix ${}_K\tilde{\underline{\omega}}$ wie folgt geschrieben werden

$${}_K\dot{\underline{r}} = {}_K\underline{r}' + {}_K\tilde{\underline{\omega}} \cdot {}_K\underline{r} = {}_K\underline{r}' + {}_K\underline{\omega} \times {}_K\underline{r} \quad . \quad (3-7)$$

${}_K\underline{r}'$ ist dabei die relative Ableitung, welche von einem mitbewegten Beobachter wahrgenommen würde. Das Produkt ${}_K\underline{\omega} \times {}_K\underline{r}$ erfasst die Drehung der Basis, in der der Vektor \vec{r} entwickelt ist.

Die Spinnmatrix ${}_K\tilde{\underline{\omega}}$ leitet sich aus dem Produkt der Transformationsmatrix \underline{Q} und deren zeitlichen Ableitung $\dot{\underline{Q}}$ her Gl. (3-8)

$${}_K\tilde{\underline{\omega}} = \underline{Q}^T \cdot \dot{\underline{Q}} \quad . \quad (3-8)$$

Die erste Ableitung bezüglich des Inertialsystems lautet damit

$${}_K\dot{\underline{r}}_S = {}_K\underline{r}'_A + {}_K\underline{\omega} \times {}_K\underline{r}_A + {}_K\underline{c}'_S + {}_K\underline{\omega} \times {}_K\underline{c}_S \quad .$$

Bei einem starren Körper kann sich der Abstand vom Bezugspunkt A zum Schwerpunkt S nicht ändern, daher gilt: ${}_K\underline{c}'_S = \underline{0}$ und

$${}_K\dot{\underline{r}}_S = {}_K\underline{r}'_A + {}_K\underline{\omega} \times {}_K\underline{r}_A + {}_K\underline{\omega} \times {}_K\underline{c}_S \quad .$$

Unter Beachtung der Identität (${}_K\dot{\underline{\omega}} \equiv {}_K\dot{\underline{\omega}}'$) lässt sich analog die zweite Ableitung formulieren

$$\begin{aligned} {}_K\ddot{\underline{r}}_S &= {}_K\ddot{\underline{r}}_A'' + {}_K\underline{\omega} \times {}_K\dot{\underline{r}}_A' + {}_K\dot{\underline{\omega}} \times {}_K\underline{r}_A + {}_K\underline{\omega} \times ({}_K\dot{\underline{r}}_A' + {}_K\underline{\omega} \times {}_K\underline{r}_A) \\ &\quad + {}_K\dot{\underline{\omega}} \times {}_K\underline{c}_S + {}_K\underline{\omega} \times ({}_K\underline{\omega} \times {}_K\underline{c}_S) \\ &= {}_K\ddot{\underline{r}}_A'' + {}_K\dot{\underline{\omega}} \times {}_K\underline{r}_A + 2 \cdot {}_K\underline{\omega} \times {}_K\dot{\underline{r}}_A' + {}_K\underline{\omega} \times ({}_K\underline{\omega} \times {}_K\underline{r}_A) \\ &\quad + {}_K\dot{\underline{\omega}} \times {}_K\underline{c}_S + {}_K\underline{\omega} \times ({}_K\underline{\omega} \times {}_K\underline{c}_S) \quad . \end{aligned} \quad (3-9)$$

Mit der Absolutgeschwindigkeit des Bezugspunktes A in Koordinaten des Relativsystems ${}_K\vec{e}$

$${}_K\underline{v}_A = {}_K\dot{\underline{r}}_A = {}_K\dot{\underline{r}}_A' + {}_K\underline{\omega} \times {}_K\underline{r}_A \quad (3-10)$$

und der Absolutbeschleunigung (relative Ableitung der Absolutgeschwindigkeit)

$${}_K\underline{v}_A' = {}_K\dot{\underline{r}}_A' = {}_K\ddot{\underline{r}}_A'' + {}_K\dot{\underline{\omega}} \times {}_K\underline{r}_A + {}_K\underline{\omega} \times {}_K\dot{\underline{r}}_A' \quad (3-11)$$

ergibt sich

$${}_K\ddot{\underline{r}}_S = {}_K\underline{v}_A' + {}_K\underline{\omega} \times {}_K\underline{v}_A + {}_K\dot{\underline{\omega}} \times {}_K\underline{c}_S + {}_K\underline{\omega} \times ({}_K\underline{\omega} \times {}_K\underline{c}_S) \quad . \quad (3-12)$$

Diese Formulierung besitzt den Vorteil, dass die Winkelbeschleunigung ${}_K\dot{\underline{\omega}}$ formal nur mit konstanten Termen verknüpft ist, was in Verbindung mit dem Drehimpulssatz für die Lösung des resultierenden Gleichungssystems vorteilhaft ist (konstante Massenmatrix, Lösung durch einmalige Inversion). Daraus ergibt sich der Kräftesatz aus Gl. (3-2) in Koordinaten des Relativsystems zu

$$\begin{aligned} \sum_i {}_K\underline{F}_a^i &= m \cdot ({}_K\underline{v}_A' + {}_K\underline{\omega} \times {}_K\underline{v}_A + {}_K\dot{\underline{\omega}} \times {}_K\underline{c}_S + {}_K\underline{\omega} \times ({}_K\underline{\omega} \times {}_K\underline{c}_S)) \\ &= m \cdot \left({}_K\underline{v}_A' + {}_K\underline{\tilde{\omega}} \cdot {}_K\underline{v}_A - {}_K\underline{\tilde{c}}_S \cdot {}_K\dot{\underline{\omega}} + {}_K\underline{\tilde{\omega}} \cdot {}_K\underline{\tilde{\omega}} \cdot {}_K\underline{c}_S \right) \quad . \end{aligned} \quad (3-13)$$

Gl. (3-13) liefert nach Lösung des Gleichungssystems unter anderem ${}_K\underline{v}_A'$. Die Umrechnung auf eine absolute Beschleunigung des Punktes A kann mit folgendem Ausdruck erfolgen

$${}_K\ddot{\underline{r}}_A \equiv {}_K\dot{\underline{v}}_A = {}_K\underline{v}_A' + {}_K\underline{\omega} \times {}_K\underline{v}_A \quad . \quad (3-14)$$

Für den Fall, dass der Bezugspunkt A und der Schwerpunkt S identisch sind, vereinfacht sich Gl. (3-13) zu

$$\sum_i {}_K\underline{F}_a^i = m \cdot {}_K\ddot{\underline{r}}_A \quad . \quad (3-15)$$

Drehimpuls: Wird der Impuls eines infinitesimalen Massepunkts dm eines Körpers vektoriell mit dem Abstandsvektor zu einem definierten Bezugspunkt multipliziert, so ergibt sich die Grundgleichung des Drehimpulses. Der Bezugspunkt kann dabei körperfest oder inertialsystemfest sein. Zunächst wird der allgemeine Fall, eines mit dem Körper bewegten Bezugspunktes A , angenommen

$$\int \vec{c}_P \times \dot{\vec{r}}_P dm = \vec{L}^A \quad . \quad (3-16)$$

Weiterhin gilt das newtonsche Grundgesetz

$$\int \ddot{\vec{r}}_P dm = \int d\vec{F}_a \quad , \quad (3-17)$$

welches, erweitert um das Kreuzprodukt des Ortsvektors \vec{c}_P vom Bezugspunkt, auf folgende Gleichung führt

$$\int \vec{c}_P \times \ddot{\vec{r}}_P dm = \int \vec{c}_P \times d\vec{F}_a \quad . \quad (3-18)$$

Dieses Vorgehen impliziert zunächst eine Abhängigkeit zwischen Impuls und Drehimpuls. Die Formulierung des newtonschen Grundgesetzes mit den äußeren Kräften \vec{F}_a impliziert das Verschwinden der inneren Spannungskräfte \vec{F}_i . Diese heben sich innerhalb eines Körpers aufgrund des Reaktionsprinzips auf

$$\int d\vec{F}_i = \vec{0} \quad . \quad (3-19)$$

Bei der Erweiterung für die Ableitung des Drehimpulssatzes in der vorliegenden Form muss daher auch Folgendes erfüllt sein

$$\int \vec{c}_P \times d\vec{F}_i = \vec{0} \quad . \quad (3-20)$$

Das Verschwinden der Momente der inneren Spannungskräfte lässt sich jedoch nicht mit dem Reaktionsprinzip erklären, außer es wird von einem Punktmassensystem ausgegangen, bei dem nur Zentralkräfte auftreten. Die Gültigkeit von Gl. (3-20) muss daher axiomatisch festgelegt werden, welches als boltzmannsches Axiom bekannt ist. Darauf folgt unmittelbar die Gleichheit der zugeordneten Schubspannungen bzw. die Symmetrie des Spannungstensors.

Der Drehimpuls in Gl. (3-16) kann nach einmaliger Differentiation unter Berücksichtigung von Gl. (3-21) in Gl. (3-18) eingesetzt werden.

$$(\vec{c}_P \times \dot{\vec{r}}_P) \dot{=} \dot{\vec{c}}_P \times \dot{\vec{r}}_P + \vec{c}_P \times \ddot{\vec{r}}_P \quad (3-21)$$

Damit können die Bewegungsgleichungen für die Drehbewegung abgeleitet werden

$$\dot{\vec{L}}^A - \int \dot{\vec{c}}_P \times \dot{\vec{r}}_P dm = \sum_i \vec{M}_a^{A i} \quad . \quad (3-22)$$

Die Gleichung in der Form Gl. (3-22) ist auch als Drehimpulssatz bekannt. Die zeitliche Änderung des Drehimpulses ist gleich dem Moment der angreifenden äußeren Kräfte. Das Integral verschwindet, wenn der Bezugspunkt A mit dem Schwerpunkt S zusammenfällt oder A ein fester Punkt im Inertialsystem ist.

Für die Entwicklung einer allgemeingültigen Darstellung des Drehimpulssatzes wird von Gl. (3-18) ausgegangen. Zunächst wird der Vektor $\ddot{\vec{r}}_P$ im körperfesten System K entwickelt. Dies erfolgt analog zu Gl. (3-9). Damit ergibt sich für einen beliebigen Punkt P auf dem starren Körper folgende Beschleunigung

$$\begin{aligned} {}_K \ddot{\vec{r}}_P = & {}_K \vec{r}_A'' + {}_K \dot{\underline{\omega}} \times {}_K \vec{r}_A + 2 \cdot {}_K \underline{\omega} \times {}_K \vec{r}_A' + {}_K \underline{\omega} \times ({}_K \underline{\omega} \times {}_K \vec{r}_A) + \\ & {}_K \dot{\underline{\omega}} \times {}_K \vec{c}_P + {}_K \underline{\omega} \times ({}_K \underline{\omega} \times {}_K \vec{c}_P) \quad . \end{aligned} \quad (3-23)$$

Einsetzen in Gl. (3-18) in Koordinaten der Basis K liefert

$$\int_{K\mathcal{C}_P} \times d_K \underline{E}_a = \int_{K\mathcal{C}_P} \times [K\underline{r}_A'' + K\underline{\dot{\omega}} \times K\underline{r}_A + 2 \cdot K\underline{\omega} \times K\underline{r}_A' + K\underline{\omega} \times (K\underline{\omega} \times K\underline{r}_A) + K\underline{\dot{\omega}} \times K\underline{c}_P + K\underline{\omega} \times (K\underline{\omega} \times K\underline{c}_P)] dm \quad . \quad (3-24)$$

Aufgelöst ergeben sich diese Terme

$$\begin{aligned} \sum_i K\underline{M}_a^{A i} &= \int_{K\mathcal{C}_P} \times K\underline{r}_A'' dm + && \Rightarrow m \cdot K\underline{c}_S \times K\underline{r}_A'' \\ &\int_{K\mathcal{C}_P} \times (K\underline{\dot{\omega}} \times K\underline{r}_A) dm + && \Rightarrow m \cdot K\underline{c}_S \times (K\underline{\dot{\omega}} \times K\underline{r}_A) \\ &\int_{K\mathcal{C}_P} \times 2 \cdot K\underline{\omega} \times K\underline{r}_A' dm + && \Rightarrow 2 \cdot m \cdot K\underline{c}_S \times (K\underline{\omega} \times K\underline{r}_A') \\ &\int_{K\mathcal{C}_P} \times (K\underline{\omega} \times (K\underline{\omega} \times K\underline{r}_A)) dm + && \Rightarrow m \cdot K\underline{c}_S \times (K\underline{\omega} \times (K\underline{\omega} \times K\underline{r}_A)) \\ &\int_{K\mathcal{C}_P} \times (K\underline{\dot{\omega}} \times K\underline{c}_P) dm + && \Rightarrow - \int_{K\mathcal{C}_P} \tilde{K}\underline{c}_P \cdot \tilde{K}\underline{c}_P dm \cdot K\underline{\dot{\omega}} \\ &\int_{K\mathcal{C}_P} \times (K\underline{\omega} \times (K\underline{\omega} \times K\underline{c}_P)) dm && \Rightarrow - K\underline{\tilde{\omega}} \cdot \int_{K\mathcal{C}_P} \tilde{K}\underline{c}_P \cdot \tilde{K}\underline{c}_P dm \cdot K\underline{\omega} \quad . \end{aligned} \quad (3-25)$$

Mit der Massenträgheitsmatrix $K\underline{J}^A = - \int_{K\mathcal{C}_P} \tilde{K}\underline{c}_P \cdot \tilde{K}\underline{c}_P dm$ folgt

$$\begin{aligned} \sum_i K\underline{M}_a^{A i} &= m \cdot K\underline{c}_S \times K\underline{r}_A'' + m \cdot K\underline{c}_S \times (K\underline{\dot{\omega}} \times K\underline{r}_A) + 2 \cdot m \cdot K\underline{c}_S \times (K\underline{\omega} \times K\underline{r}_A') + \\ &m \cdot K\underline{c}_S \times (K\underline{\omega} \times (K\underline{\omega} \times K\underline{r}_A)) + K\underline{J}^A \cdot K\underline{\dot{\omega}} + K\underline{\tilde{\omega}} \cdot K\underline{J}^A \cdot K\underline{\omega} \quad . \end{aligned} \quad (3-26)$$

Werden analog zum Impulssatz im Relativsystem die Absolutgeschwindigkeit (Gl. (3-10)) und Absolutbeschleunigung (Gl. (3-11)) des Referenzsystems in Koordinaten des Referenzsystems eingeführt, ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_i K\underline{M}_a^{A i} &= m \cdot K\underline{c}_S \times K\underline{v}_A' + m \cdot K\underline{c}_S \times (K\underline{\omega} \times K\underline{v}_A) + && (3-27) \\ &K\underline{J}^A \cdot K\underline{\dot{\omega}} + K\underline{\tilde{\omega}} \cdot K\underline{J}^A \cdot K\underline{\omega} \\ &= m \cdot K\underline{\tilde{c}}_S \cdot K\underline{v}_A' + m \cdot K\underline{\tilde{c}}_S \cdot K\underline{\tilde{\omega}} \cdot K\underline{v}_A + \\ &K\underline{J}^A \cdot K\underline{\dot{\omega}} + K\underline{\tilde{\omega}} \cdot K\underline{J}^A \cdot K\underline{\omega} \quad . \end{aligned}$$

Wenn A mit dem Körperschwerpunkt S zusammen fällt, dann ist der Vektor $K\underline{c}_S = \underline{0}$. Gl. (3-27) vereinfacht sich zu

$$\sum_i K\underline{M}_a^{S i} = K\underline{J}^S \cdot K\underline{\dot{\omega}} + K\underline{\tilde{\omega}} \cdot K\underline{J}^S \cdot K\underline{\omega} \quad . \quad (3-28)$$

Gl. (3-28) kann durch die Entwicklung im Hauptachsensystem weiter vereinfacht werden. Im Allgemeinen ist der Körperschwerpunkt aber nicht gleich dem Bezugssystem, daher wird die allgemeingültige Form Gl. (3-27) verwendet.

Bewegungsdifferentialgleichungen: Im Folgenden werden die Bewegungsgleichungen in einer Differentialgleichung erster Ordnung formuliert, da der größte Teil der numerischen Lösungsverfahren auf die Gruppe angepasst ist - Gl. (3-29).

$$\dot{\underline{z}} = f(t, \underline{z}) \quad (3-29)$$

Dies gelingt mithilfe der Zustandsraumdarstellung, bei der Weg- und Geschwindigkeitsgrößen zu einem gemeinsamen Vektorraum zur Beschreibung des Systems zusammengefasst werden. Der Zustandsvektor \underline{z} der Differentialgleichung enthält alle Größen bezüglich des Inertialsystems, die Gleichgewichtsbedingungen (Gl. (3-13) und Gl. (3-27)) werden aber für das körperfeste System ausgewertet

$$\begin{aligned} \underline{z} &= [{}^I \underline{r}_A \quad \underline{x} \quad {}^I \dot{\underline{r}}_A \quad {}^I \underline{\omega}]^T, \\ \dot{\underline{z}} &= [{}^I \dot{\underline{r}}_A \quad \dot{\underline{x}} \quad {}^I \ddot{\underline{r}}_A \quad {}^I \dot{\underline{\omega}}]^T. \end{aligned} \quad (3-30)$$

Für die Beschreibung der Orientierung werden die Kardanwinkel verwendet und in dem Vektor \underline{x} zusammengefasst

$$\begin{aligned} [\alpha \quad \beta \quad \gamma]^T &= \underline{x}^T, \\ [\dot{\alpha} \quad \dot{\beta} \quad \dot{\gamma}]^T &= \dot{\underline{x}}^T. \end{aligned} \quad (3-31)$$

Die Integration und die Linearisierung erfolgen über die Größen, die im Zustandsvektor \underline{z} enthalten sind. Der Grund für diese Wahl wird im Abschnitt 3.1.3 detailliert erläutert.

Die Gleichungen (Gl. (3-13) und Gl. (3-27)) liefern das Gleichungssystem

$${}^K \underline{M} \cdot {}^K \underline{a} + {}^K \underline{h}_\omega = {}^K \underline{h}_a, \quad (3-32)$$

mit dem Vektor ${}^K \underline{a}$ der Beschleunigungen

$${}^K \underline{a} = ({}^K \underline{v}'_A \quad {}^K \underline{\dot{\omega}})^T, \quad (3-33)$$

der konstanten symmetrische Massenmatrix

$${}^K \underline{M} = \begin{bmatrix} m \cdot \underline{E} & -m \cdot {}^K \underline{\tilde{c}}_S \\ m \cdot {}^K \underline{\tilde{c}}_S & {}^K \underline{J}^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \cdot \underline{E} & -m \cdot {}^K \underline{\tilde{c}}_S \\ -m \cdot {}^K \underline{\tilde{c}}_S^T & {}^K \underline{J}^A \end{bmatrix}, \quad (3-34)$$

den verallgemeinerten Zentrifugal- und Corioliskräften

$$\begin{aligned} {}^K \underline{h}_\omega &= \begin{pmatrix} m \cdot {}^K \underline{\omega} \times {}^K \underline{v}_A + m \cdot {}^K \underline{\omega} \times ({}^K \underline{\omega} \times {}^K \underline{c}_S) \\ {}^K \underline{\tilde{\omega}} \cdot {}^K \underline{J}^A \cdot {}^K \underline{\tilde{\omega}} + m \cdot {}^K \underline{c}_S \times ({}^K \underline{\omega} \times {}^K \underline{v}_A) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m \cdot {}^K \underline{\tilde{\omega}} \cdot {}^K \underline{v}_A + m \cdot {}^K \underline{\tilde{\omega}} \cdot {}^K \underline{\tilde{\omega}} \cdot {}^K \underline{c}_S \\ {}^K \underline{\tilde{\omega}} \cdot {}^K \underline{J}^A \cdot {}^K \underline{\tilde{\omega}} + m \cdot {}^K \underline{\tilde{c}}_S \cdot {}^K \underline{\tilde{\omega}} \cdot {}^K \underline{v}_A \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3-35)$$

und den äußeren Kräften und Momenten

$${}^K \underline{h}_a = \begin{pmatrix} {}^K \underline{F}_a \\ {}^K \underline{M}_a^A \end{pmatrix}. \quad (3-36)$$

Für die Bestimmung der Komponenten der Ableitung des Zustandsvektors \dot{z} werden die körperfesten Größen in die Basis des Inertialsystems transformiert. Die Geschwindigkeit des Bezugspunkts A im körperfesten System ergibt sich aus

$${}^K v_A \equiv {}^K \dot{r}_A = \underline{\underline{Q}}^T \cdot {}^I \dot{r}_A \quad . \quad (3-37)$$

Für die Berechnung der absoluten Beschleunigung im Inertialsystem ergibt sich nach Gl. (3-14) folgender Ausdruck

$${}^I \ddot{r}_A = \underline{\underline{Q}} \cdot {}^K \ddot{r}_A = \underline{\underline{Q}} \cdot ({}^K v'_A + {}^K \underline{\underline{\omega}} \times {}^K v_A) = \underline{\underline{Q}} \cdot ({}^K v'_A + {}^K \underline{\underline{\tilde{\omega}}} \cdot {}^K v_A) \quad . \quad (3-38)$$

Die Ableitung der Kardanwinkel \underline{x} lassen sich wie folgt aus den Winkelgeschwindigkeiten ${}^K \underline{\omega}$ berechnen

$$\dot{\underline{x}} = {}^K \underline{\underline{H}}_R^{-1} \cdot {}^K \underline{\omega} = \begin{bmatrix} \frac{\cos(\gamma)}{\cos(\beta)} & -\frac{\sin(\gamma)}{\cos(\beta)} & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ -\cos(\gamma) \cdot \tan(\beta) & \sin(\gamma) \cdot \tan(\beta) & 1 \end{bmatrix} \cdot {}^K \underline{\omega} \quad . \quad (3-39)$$

Die Berechnung der Winkelbeschleunigung um die Achsen des Inertialsystems kann mittels der Darstellung der Winkelgeschwindigkeiten als Spinnmatrix ${}^K \underline{\underline{\tilde{\omega}}}$ und der Transformationsmatrix $\underline{\underline{Q}}$ erfolgen

$${}^I \underline{\underline{\tilde{\omega}}} = \underline{\underline{Q}} \cdot {}^K \underline{\underline{\tilde{\omega}}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T \quad . \quad (3-40)$$

Damit sind alle Größen des Zustandsvektors \dot{z} (Gl. (3-30)) bestimmt und die Differentialgleichung erster Ordnung für die Beschreibung der räumlichen Bewegung des Körpers ist vollständig.

Berücksichtigung von holonomen Bindungsgleichungen

Technische Objekte enthalten häufig gelenkige Verbindungen zwischen verschiedenen Bauteilen. In der Regel lassen sich diese Gelenke über holonome Bindungsgleichungen beschreiben. Ein Gelenk schränkt die Bewegung des Gesamtsystems ein und reduziert damit auch dessen Anzahl an Freiheitsgraden. Im Extremfall ist die Zahl der Bindungsgleichungen so groß, dass das System keinen Bewegungsfreiheitsgrad mehr besitzt. In Abb. (3-2) ist ein ebenes System bestehend aus zwei Körpern dargestellt. Jeder Körper besitzt in der Ebene drei Freiheitsgrade. Die Bindung durch das Festlager L und das Gelenk G führt dazu, dass das System statt sechs Freiheitsgraden nur noch zwei besitzt. Diese können durch die Winkel γ_1 und γ_2 beschrieben werden.

Die Berücksichtigung der holonomen Bindungsgleichungen kann zum einen durch die Einführung von Minimalkoordinaten wie γ_1 und γ_2 erfolgen. Die Bewegungsgleichung wird in den Minimalkoordinaten aufgestellt. Dies bedeutet eine Reduktion der Zustandsgrößen und des numerischen Aufwandes bei der Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichungen¹ im Zeitbereich.

Eine andere Möglichkeit der Berücksichtigung der Bindungsgleichungen kann mittels der

¹engl.: ordinary differential equation (ODE)

Methode der lagrangeschen Multiplikatoren abgeleitet werden. Dabei werden die Bindungsgleichungen in Form von Nebenbedingungen formuliert. Die Zahl der Freiheitsgrade wird bei dieser Methode nicht reduziert, es sind außer den Bewegungsdifferentialgleichungen zusätzlich algebraische Gleichungen zu formulieren, die simultan erfüllt werden müssen. Ein solches System wird auch als differential-algebraisches Gleichungssystem² bezeichnet.

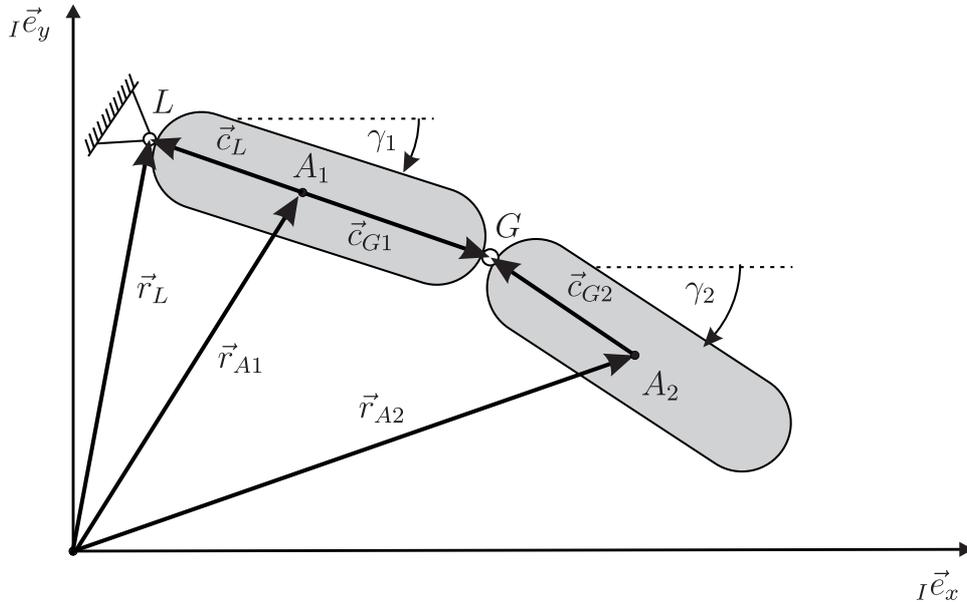


Abbildung 3-2: Holonome Bindungen

Minimalkoordinaten Ausgehend von den hergeleiteten Bewegungsgleichungen für einen Körper Gl. (3-15) und Gl. (3-28) ergibt sich das d’alembertsche Prinzip in der Fassung von Lagrange für n Körper zu

$$\sum_{i=1}^n \left[\delta_{K\underline{r}_i}^T \cdot (m_i \cdot K\underline{\ddot{r}}_{A_i} - K\underline{F}_i^e) + \delta_{\underline{s}_i}^T \cdot \left(K\underline{J}_i^S \cdot K\underline{\dot{\omega}}_i + K\underline{\tilde{\omega}}_i \cdot K\underline{J}_i^S \cdot K\underline{\omega}_i - K\underline{M}_i^e \right) \right] = 0. \quad (3-41)$$

Dabei ist $\delta_{K\underline{r}_i}$ die mit den Zwangsbedingungen verträgliche virtuelle Verschiebung des i -ten Körpers und $\delta_{\underline{s}_i}$ enthält die virtuellen Elementardrehungen, die mit den Zwangsbedingungen verträglich sind. Die Elementardrehungen lassen sich durch einen Vektor mit drei Komponenten z.B. die Kardan- oder Eulerwinkel beschreiben. Daraus lässt sich die Transformationsmatrix \underline{Q}_i aufstellen.

Ein Mehrkörpersystem mit Baumstruktur aus n Körpern kann immer durch einen Satz an f Minimalkoordinaten $\underline{y} \in \mathbb{R}^f$ beschrieben werden. Diese werden auch als verallgemeinerte Koordinaten bezeichnet und beschreiben jeweils unabhängige Teilbewegungen des Gesamtsystems. Für das Beispiel aus Abb. (3-2) kann dies wie folgt aussehen

$$\underline{y} = [\gamma_1 \quad \gamma_2]^T \quad .$$

²engl.: differential algebraic equation (DAE)

Die Lage eines Körpers kann mit einem Ortsvektor zum Körperschwerpunkt \vec{r}_i und einer Orientierungsmatrix $\underline{Q}_{\underline{i}}$ eindeutig beschrieben werden. Diese Größen sind Funktionen der Zeit und der generalisierten Koordinaten \underline{y} .

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t, \underline{y}), \quad \underline{s}_i = \underline{s}_i(t, \underline{y}), \quad i = 1 \dots n$$

Für das Beispiel aus Abb. (3-2) lauten die Koordinaten der Körperschwerpunkte in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinaten

$$\begin{aligned} {}_K r_{1L} &= \underline{Q}_{\underline{1}}^T(\gamma_1) \cdot \left({}_I r_{1L} - \underline{Q}_{\underline{1}}(\gamma_1) \cdot {}_K \underline{c}_L \right) \quad , \\ {}_K r_{2L} &= \underline{Q}_{\underline{2}}^T(\gamma_2) \cdot \left({}_I r_{2L} + \underline{Q}_{\underline{1}}(\gamma_1) \cdot (-{}_K \underline{c}_L + {}_K \underline{c}_{G1}) - \underline{Q}_{\underline{2}}(\gamma_2) \cdot {}_K \underline{c}_{G2} \right) \quad . \end{aligned}$$

Der Zusammenhang zwischen den virtuellen Verschiebungen $\delta {}_K r_{\underline{i}}$ und den virtuellen Verschiebungen $\delta \underline{y}$ lässt sich aus der Variation von ${}_K r_{\underline{i}}$ bestimmen

$$\delta {}_K r_{\underline{i}} = \frac{\partial {}_K r_{\underline{i}}}{\partial \underline{y}} \cdot \delta \underline{y} = \underline{\mathcal{J}}_{\underline{T}i} \cdot \delta \underline{y} \quad . \quad (3-42)$$

Die Ableitung der Lagekoordinaten ${}_K r_{\underline{i}}$ nach den generalisierten Koordinaten \underline{y} ist eine Matrix, die eine Transformation vom \mathbb{R}^3 in den \mathbb{R}^f darstellt und wird auch Jacobimatrix $\underline{\mathcal{J}}_{\underline{T}i}$ der Translation bezeichnet. Sie blendet die Komponenten in den durch die Gelenke gesperrten Richtungen für den Körper i aus. Dies lässt sich analog auch für die Elementardrehungen ausführen und führt zur Jacobimatrix der Rotation $\underline{\mathcal{J}}_{\underline{R}i}$.

$$\delta \underline{s}_i = \frac{\partial \underline{s}_i}{\partial \underline{y}} \cdot \delta \underline{y} = \underline{\mathcal{J}}_{\underline{R}i} \cdot \delta \underline{y} \quad (3-43)$$

Einsetzen von Gl. (3-42) und Gl. (3-43) in Gl. (3-41) liefert

$$\begin{aligned} \delta \underline{y} \cdot \sum_{i=1}^n \left[\underline{\mathcal{J}}_{\underline{T}i}^T \cdot (m_i \cdot {}_K \ddot{r}_{Ai} - {}_K \underline{F}_i^e) + \right. \\ \left. \underline{\mathcal{J}}_{\underline{R}i}^T \cdot \left({}_K \underline{J}_i^S \cdot {}_K \dot{\omega}_i + {}_K \tilde{\omega}_i \cdot {}_K \underline{J}_i^S \cdot {}_K \omega_i - {}_K \underline{M}_i^e \right) \right] = 0 \quad . \end{aligned} \quad (3-44)$$

Wegen der Unabhängigkeit der virtuellen Verschiebungen $\delta \underline{y}$ kann die Gleichung Gl. (3-44) nur erfüllt werden, wenn die Summe verschwindet. Dies führt zu den Bewegungsgleichungen für holonome Mehrkörpersysteme

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left[\underline{\mathcal{J}}_{\underline{T}i}^T \cdot m_i \cdot {}_K \ddot{r}_{Ai} + \underline{\mathcal{J}}_{\underline{R}i}^T \cdot \left({}_K \underline{J}_i^S \cdot {}_K \dot{\omega}_i + {}_K \tilde{\omega}_i \cdot {}_K \underline{J}_i^S \cdot {}_K \omega_i \right) \right] = \\ \sum_{i=1}^n \left[\underline{\mathcal{J}}_{\underline{T}i}^T \cdot {}_K \underline{F}_i^e + \underline{\mathcal{J}}_{\underline{R}i}^T \cdot {}_K \underline{M}_i^e \right] \quad . \end{aligned} \quad (3-45)$$

Die Einarbeitung der Bindungsgleichungen und deren Ableitung liefert folgende Gleichungen

$${}_K \dot{r}_{Ai} = \frac{\partial {}_K r_{Ai}}{\partial \underline{y}} \cdot \dot{\underline{y}} + \frac{\partial {}_K r_{Ai}}{\partial t} \quad , \quad (3-46)$$

$${}_{K}\ddot{r}_{Ai} = \frac{\partial {}_{K}\dot{r}_{Ai}}{\partial \underline{y}} \cdot \underline{\ddot{y}} + \frac{\partial {}_{K}\dot{r}_{Ai}}{\partial \underline{y}} \cdot \underline{\dot{y}} + \frac{\partial {}_{K}\dot{r}_{Ai}}{\partial t} \quad . \quad (3-47)$$

Für holonome Bindungsgleichungen folgt der erste Term zu

$$\frac{\partial {}_{K}\dot{r}_{Ai}}{\partial \underline{y}} = \frac{\partial {}_{K}\dot{r}_{Ai}}{\partial \underline{\dot{y}}} = \underline{\underline{\mathcal{J}}}_{Ti} \quad . \quad (3-48)$$

Der Term $\frac{\partial {}_{K}\dot{r}_{Ai}}{\partial \underline{y}}$ ergibt sich nach der Differentiation von Gl. (3-46)

$$\frac{\partial {}_{K}\dot{r}_{Ai}}{\partial \underline{y}} = \frac{\partial \underline{\underline{\mathcal{J}}}_{Ti}}{\partial \underline{y}} \cdot \underline{\dot{y}} = \underline{\underline{\mathcal{J}}}' \cdot \underline{\dot{y}} \quad . \quad (3-49)$$

$\underline{\underline{\mathcal{J}}}'$ ist eine Matrix mit drei Dimensionen. Sie stellt die zweite Ableitung von r_i nach den generalisierten Koordinaten \underline{y} dar. Die Beschleunigung ${}_{K}\ddot{r}_{Ai}$ lässt sich damit wie folgt ausdrücken

$${}_{K}\ddot{r}_{Ai} = \underline{\underline{\mathcal{J}}}_{Ti} \cdot \underline{\ddot{y}} + \left(\underline{\underline{\mathcal{J}}}' \cdot \underline{\dot{y}} \right) \cdot \underline{\dot{y}} + \frac{\partial {}_{K}\dot{r}_{Ai}}{\partial t} \quad . \quad (3-50)$$

Analog lässt sich dies für die Rotationen aufschreiben

$${}_{K}\underline{\omega}_i = \underline{\underline{\mathcal{J}}}_{Ri} \cdot \underline{\dot{y}} + \frac{\partial \underline{s}_i}{\partial t} \quad {}_{K}\underline{\dot{\omega}}_i = \underline{\underline{\mathcal{J}}}_{Ri} \cdot \underline{\ddot{y}} + \left(\underline{\underline{\mathcal{J}}}' \cdot \underline{\dot{y}} \right) \cdot \underline{\dot{y}} + \frac{\partial {}_{K}\underline{\omega}_i}{\partial t} \quad . \quad (3-51)$$

Werden die Gleichungen Gl. (3-50) und Gl. (3-51) in Gleichung Gl. (3-45) eingesetzt, ergibt sich eine nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung in den generalisierten Koordinaten \underline{y}

$${}_{K}\underline{\underline{M}}(t, \underline{y}) \cdot \underline{\ddot{y}} + {}_{K}\underline{h}_\omega(t, \underline{y}, \underline{\dot{y}}) = {}_{K}\underline{h}_a(t, \underline{y}, \underline{\dot{y}}) \quad . \quad (3-52)$$

Mit der Massenmatrix

$${}_{K}\underline{\underline{M}}(t, \underline{y}) = \sum_{i=1}^n \left[\underline{\underline{\mathcal{J}}}_{Ti}^T \cdot m_i \cdot \underline{\underline{\mathcal{J}}}_{Ti} + \underline{\underline{\mathcal{J}}}_{Ri}^T \cdot {}_{K}\underline{J}_i^S \cdot \underline{\underline{\mathcal{J}}}_{Ri} \right] \quad , \quad (3-53)$$

den verallgemeinerten Zentrifugal-, Kreisel- und Corioliskräften

$${}_{K}\underline{h}_\omega(t, \underline{y}, \underline{\dot{y}}) = \sum_{i=1}^n \left[\underline{\underline{\mathcal{J}}}_{Ti}^T \cdot m_i \cdot \left(\left(\underline{\underline{\mathcal{J}}}' \cdot \underline{\dot{y}} \right) \cdot \underline{\dot{y}} + \frac{\partial {}_{K}\dot{r}_i}{\partial t} \right) + \underline{\underline{\mathcal{J}}}_{Ri}^T \cdot \left(\underline{J}_i \cdot \left(\left(\underline{\underline{\mathcal{J}}}' \cdot \underline{\dot{y}} \right) \cdot \underline{\dot{y}} + \frac{\partial {}_{K}\underline{\omega}_i}{\partial t} \right) + {}_{K}\underline{\tilde{\omega}}_i \cdot {}_{K}\underline{J}_i^S \cdot {}_{K}\underline{\omega}_i \right) \right] \quad , \quad (3-54)$$

und den verallgemeinerten Kräften

$${}_{K}\underline{h}_a(t, \underline{y}, \underline{\dot{y}}) \equiv \sum_{i=1}^n \left[\underline{\underline{\mathcal{J}}}_{Ti}^T \cdot \underline{F}_i^e + \underline{\underline{\mathcal{J}}}_{Ri}^T \cdot \underline{M}_i^e \right] \quad . \quad (3-55)$$

Die explizite Darstellung von Gl. (3-52) im Zustandsraum in Form von Gleichung Gl. (3-56) stellt eine gewöhnliche Differentialgleichung mit nicht konstanten Koeffizienten erster Ordnung (ODE) dar

$$\underline{\dot{z}} = \begin{pmatrix} \underline{\dot{y}} \\ \underline{\dot{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\dot{y}} \\ {}_{K}\underline{\underline{M}}^{-1} \cdot ({}_{K}\underline{h}_a - {}_{K}\underline{h}_\omega) \end{pmatrix} \quad . \quad (3-56)$$

Zwangsbedingungen Die Bewegung der Körper wird nun zunächst nicht durch Minimalkoordinaten beschrieben. Für das Beispiel aus Abb. (3-2) kann dies wie folgt aussehen

$$\underline{y}^b = [x_1 \quad y_1 \quad \gamma_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad \gamma_2]^T \quad . \quad (3-57)$$

Zusätzlich werden die Zwangsbedingungen der Gelenke als algebraische Gleichung in der Form Gl. (3-58) formuliert

$$\underline{c}(t, \underline{y}^b) = \underline{0} \quad . \quad (3-58)$$

Konkret werden für das angegebene Beispiel vier Gleichungen benötigt, die in den beiden Vektorgleichungen Gl. (3-59) enthalten sind:

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} I\underline{x}_{A1} + I\underline{c}_L - I\underline{x}_L \\ I\underline{x}_{A1} + I\underline{c}_{G1} - I\underline{c}_{G2} - I\underline{x}_{A2} \end{bmatrix} \quad . \quad (3-59)$$

Da die Gleichung Gl. (3-58) in jedem Zeitpunkt erfüllt sein muss, sind die Verschiebungen \underline{y}^b nicht mehr unabhängig voneinander. Die Grundgleichung wird nun in den noch abhängigen Koordinaten formuliert

$$\begin{aligned} \delta \underline{y}^b \cdot \sum_{i=1}^n \left[\underline{\mathcal{J}}_{\underline{T}i}^T \cdot (m_i \cdot K \ddot{\underline{r}}_{Ai} - K \underline{F}_i^e) + \right. \\ \left. \underline{\mathcal{J}}_{\underline{R}i}^T \cdot \left(K \underline{J}_i^S \cdot K \dot{\underline{\omega}}_i + K \tilde{\underline{\omega}}_i \cdot K \underline{J}_i^S \cdot K \underline{\omega}_i - K \underline{M}_i^e \right) \right] = 0 \quad . \end{aligned} \quad (3-60)$$

Diese kann aber nur gelten, wenn die virtuellen Verschiebungen $\delta \underline{y}^b$ den Zwangsbedingungen Gl. (3-61) genügen

$$\forall \quad \delta \underline{y}^b : \underline{C} \cdot \delta \underline{y}^b = \underline{0} \quad . \quad (3-61)$$

Aus der Variation der Zwangsbedingungen (Gl. (3-58)) ergibt sich

$$\delta \underline{c} = \frac{\partial \underline{c}}{\partial \underline{y}^b} \cdot \delta \underline{y}^b \equiv \underline{C}(t, \underline{y}^b) \cdot \delta \underline{y}^b = \underline{0} \quad . \quad (3-62)$$

Durch Einführung von n^c lagrangeschen Multiplikatoren $\underline{\lambda} \in \mathbb{R}^{n^c}$ gilt dann

$$\begin{aligned} \delta \underline{y}^b \cdot \left[\sum_{i=1}^n \left[\underline{\mathcal{J}}_{\underline{T}i}^{bT} \cdot (m_i \cdot K \ddot{\underline{r}}_{Ai} - K \underline{F}_i^e) + \right. \right. \\ \left. \left. \underline{\mathcal{J}}_{\underline{R}i}^{bT} \cdot \left(K \underline{J}_i^S \cdot K \dot{\underline{\omega}}_i + K \tilde{\underline{\omega}}_i \cdot K \underline{J}_i^S \cdot K \underline{\omega}_i - K \underline{M}_i^e \right) \right] - \underline{C}^T \cdot \underline{\lambda} \right] = 0 \quad . \end{aligned} \quad (3-63)$$

Daraus kann die Bewegungsgleichung Gl. (3-64) abgeleitet werden

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left[\underline{\mathcal{J}}_{\underline{T}i}^{bT} \cdot m_i \cdot K \ddot{\underline{r}}_{Ai} + \underline{\mathcal{J}}_{\underline{R}i}^{bT} \cdot \left(K \underline{J}_i^S \cdot K \dot{\underline{\omega}}_i + K \tilde{\underline{\omega}}_i \cdot K \underline{J}_i^S \cdot K \underline{\omega}_i \right) \right] - \underline{C}^T \cdot \underline{\lambda} = \\ \sum_{i=1}^n \left[\underline{\mathcal{J}}_{\underline{T}i}^{bT} \cdot K \underline{F}_i^e + \underline{\mathcal{J}}_{\underline{R}i}^{bT} \cdot K \underline{M}_i^e \right] \quad . \end{aligned} \quad (3-64)$$

Und schließlich analog zu Gl. (3-52)

$$\kappa \underline{\underline{M}}^b(t, \underline{y}^b) \cdot \underline{\dot{y}}^b + \kappa \underline{h}_\omega^b(t, \underline{y}^b, \underline{\dot{y}}^b) - \underline{\underline{C}}^T(t, \underline{y}^b) \cdot \underline{\lambda} = \kappa \underline{h}_a^b(t, \underline{y}^b, \underline{\dot{y}}^b) \quad . \quad (3-65)$$

Im Zustandsraum ergibt sich folgendes Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \underline{\dot{y}}^b \\ \kappa \underline{\underline{M}}^b \cdot \underline{\dot{y}}^b - \underline{\underline{C}}^T \cdot \underline{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\dot{y}}^b \\ \kappa \underline{h}_a^b - \kappa \underline{h}_\omega^b \end{pmatrix} \quad . \quad (3-66)$$

Mit den Unbekannten $\underline{\dot{y}}^b, \underline{\ddot{y}}^b, \underline{\lambda}$ ist ersichtlich, dass die in Gl. (3-66) angegebenen Gleichungen nicht ausreichend sind, um alle Größen zu bestimmen. Es müssen zusätzlich die algebraischen Schließbedingungen eingepflegt werden. Auf der Lageebene reichen diese alleine nicht aus. Nicht für alle konsistenten Anfangsbedingungen existiert eine Lösung des Differential-Algebraischen Gleichungssystems. Den Bindungen auf Lageebene entsprechen auch Bindungen auf der Geschwindigkeitsebene. Die totale Zeitableitung der Schließbedingung Gl. (3-58) lautet

$$\underline{\dot{c}} = \frac{d\underline{c}}{dt} = \frac{\partial \underline{c}}{\partial \underline{y}^b} \cdot \frac{\partial \underline{y}^b}{\partial t} + \frac{\partial \underline{c}}{\partial t} = \frac{\partial \underline{c}}{\partial \underline{y}^b} \cdot \underline{\dot{y}}^b + \frac{\partial \underline{c}}{\partial t} = \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\dot{y}}^b + \frac{\partial \underline{c}}{\partial t} = \underline{0} \quad . \quad (3-67)$$

Entscheidend dabei ist die Regularität des Gesamtgleichungssystems. Die Schließbedingungen sind nichtlinear und liefern keine reguläre Koeffizientenmatrix. Daher wird Gl. (3-67) erneut differenziert und liefert Bindungsgleichungen auf Beschleunigungsebene, die zusammen mit Gl. (3-66) ein geeignetes Gleichungssystem bilden

$$\underline{\ddot{c}} = \frac{d^2 \underline{c}}{dt^2} = \frac{\partial \underline{c}}{\partial \underline{y}^b} \cdot \underline{\ddot{y}}^b + \frac{\partial}{\partial \underline{y}^b} \left(\frac{\partial \underline{c}}{\partial \underline{y}^b} \cdot \underline{\dot{y}}^b \right) \cdot \underline{\dot{y}}^b + \frac{\partial^2 \underline{c}}{\partial \underline{y}^b \partial t} \cdot \underline{\dot{y}}^b + \frac{\partial^2 \underline{c}}{\partial t^2} = \underline{0} \quad . \quad (3-68)$$

Mit der Abkürzung $\underline{\gamma} = \frac{\partial}{\partial \underline{y}^b} \left(\frac{\partial \underline{c}}{\partial \underline{y}^b} \cdot \underline{\dot{y}}^b \right) \cdot \underline{\dot{y}}^b + \frac{\partial^2 \underline{c}}{\partial \underline{y}^b \partial t} \cdot \underline{\dot{y}}^b + \frac{\partial^2 \underline{c}}{\partial t^2}$

$$\underline{\ddot{c}} = \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\ddot{y}}^b + \underline{\gamma} = \underline{0} \quad . \quad (3-69)$$

Zusammen mit Gl. (3-66) ergibt sich das vollständige Gleichungssystem (DAE)

$$\begin{pmatrix} \underline{\dot{y}}^b \\ \kappa \underline{\underline{M}}^b \cdot \underline{\dot{y}}^b - \underline{\underline{C}}^T \cdot \underline{\lambda} \\ \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\ddot{y}}^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\dot{y}}^b \\ \kappa \underline{h}_a^b - \kappa \underline{h}_\omega^b \\ -\underline{\gamma} \end{pmatrix} \quad . \quad (3-70)$$

Oder in Matrizenform

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{E}} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \kappa \underline{\underline{M}}^b & \underline{\underline{C}}^T \\ \underline{0} & \underline{\underline{C}} & \underline{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\dot{y}}^b \\ \underline{\ddot{y}}^b \\ -\underline{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\dot{y}}^b \\ \kappa \underline{h}_a^b - \kappa \underline{h}_\omega^b \\ -\underline{\gamma} \end{pmatrix} \quad . \quad (3-71)$$

Im Hinblick auf das gestellte Ziel einer rotordynamischen Anwendung lässt sich zusammenfassen, dass die Einschränkung der Bewegung durch holonome Bindungsgleichungen oder algebraischen Zwangsbedingungen einen numerischen Mehraufwand bedeutet. MKS-Programme, die eine allgemeine Ausrichtung haben, können auf diese Elemente nicht verzichten. Die Berechnung der Jacobimatrix der Bindungsgleichungen erfordert einen erheblichen Mehraufwand, die analytische Berechnung ist aufwendig bei der Programmgestaltung, wohingegen die numerische Berechnung einen sehr großen Zeitaufwand bei der Programmausführung bedeutet. Die Verwendung von algebraischen Zwangsbedingungen führt zunächst zu einer Vergrößerung der Anzahl der Unbekannten. Weiterhin entsteht ein differential-algebraisches Gleichungssystem, welches mit einem ODE-Solver nicht gelöst werden kann und daher den Einsatz eines DAE-Solvers erfordert. Für die Betrachtung von rotordynamischen Problemen kann auf Elemente wie Bindungsgleichungen und Zwangsbedingungen verzichtet werden. Die Aufstellung der Bewegungsgleichungen lässt sich damit effizient realisieren. Der Fokus bei rotordynamischen Modellen liegt nicht auf ideal starren Verbindungen bzw. Gelenken zwischen den Körpern, sondern der Formulierung erweiterter Kraftgesetze, die die Verbindung zwischen den Körpern realistischer beschreiben.

Berücksichtigung elastischer Deformationen

Der Einfluss der elastischen Deformation bei der Bewegung schnell drehender Systeme kann sehr dominant sein. Das System erfährt durch die Elastizität eine weitere Steigerung der Anzahl der Freiheitsgrade, sodass komplexe Mechanismen zur Ausbildung von Schwingungen vorliegen. Viele rotordynamische Effekte lassen sich erst mit der elastischen Deformation von Strukturen abbilden. Die Nachgiebigkeit von Wellen spielt in der Rotordynamik eine wichtige Rolle.

Die bisher hergeleiteten Bewegungsgleichungen gelten für rein starre Mehrkörpersysteme. Die Beschreibung der räumlichen Bewegung elastischer Körper kann mittels einer FE-Formulierung erfolgen. Dabei wird der großen Starrkörperbewegung eine kleine elastische Deformation überlagert. Problematisch ist dabei die große Zahl der Unbekannten, die zu den Starrkörperfreiheitsgraden hinzukommen. Eine Möglichkeit der Reduktion der Freiheitsgrade wird in [Wal94] beschrieben. Dieses Vorgehen sieht zunächst eine reine Reduktion der elastischen Freiheitsgrade durch eine statische oder gemischt-statisch-modale Kondensation vor. Eine anschließende modale Reduktion entkoppelt die Bewegungsgleichungen voneinander. Durch eine problemangepasste Wahl von Eigenvektoren kann die elastische Deformation durch wenige modale Freiheitsgrade beschrieben werden. Die Bewegungsgleichung für die räumliche Bewegung kann wie folgt formuliert werden

$${}^K \underline{\underline{M}} \cdot {}^K \underline{a} + {}^K \underline{h}_\omega + {}^K \underline{h}_i = {}^K \underline{h}_o + {}^K \underline{h}_v \equiv {}^K \underline{h}_a \quad . \quad (3-72)$$

Die Massenmatrix erweitert sich gegenüber Gl. (3-34) um die Anzahl der verwendeten modalen Freiheitsgrade und enthält zusätzlich die Koppelterme zwischen Starrkörperbeschleunigung und der elastischen Deformation sowie auf der Hauptdiagonalen die Einheitsmatrix, wenn die Eigenvektoren auf die Massenmatrix normiert werden. Alle Koppelterme müssen aus den aktuellen elastischen Deformationen berechnet werden, da sie die, sich durch die

Verformung ändernden, Trägheitseigenschaften beschreiben.

$${}_{K}\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} m \cdot \underline{\underline{E}} & -m \cdot {}_{K}\underline{\underline{\tilde{C}}}_S & {}_{K}\underline{\underline{M}}_{te} \\ m \cdot {}_{K}\underline{\underline{\tilde{C}}}_S & {}_{K}\underline{\underline{J}}^A & {}_{K}\underline{\underline{M}}_{re} \\ {}_{K}\underline{\underline{M}}_{te}^T & {}_{K}\underline{\underline{M}}_{re}^T & \underline{\underline{E}} \end{bmatrix} \quad (3-73)$$

Die Struktur der Massenmatrix Gl. (3-73) zeigt, dass diese direkt von der elastischen Deformation abhängig ist. Auch für eine körperfeste Formulierung der Gleichgewichtsbedingung ergibt sich keine konstante Matrix. Die Massenmatrix muss in jedem Zeitschritt neu aufgebaut werden. Die Berechnung der Starrkörper- und Modalbeschleunigungen muss durch Lösen des Gleichungssystems erfolgen.

Die Berechnung der Massenmatrix und der Kraftvektoren der Zentrifugal- und Corioliskräfte ${}_{K}\underline{\underline{h}}_\omega$ und der inneren Kräfte ${}_{K}\underline{\underline{h}}_i$ erfolgt mittels spezieller Matrizen, die aus der FE-Formulierung abgeleitet werden. Daraus ergeben sich zahlreiche Matrizen, die für den elastischen Körper abgelegt werden müssen. Wallrapp schlägt dafür ein Standard Input für FE-Modelle kurz SID_FEM Format vor, welches diese Matrizen in einem speziellen Format ablegt. Dieses Format wird auch in SIMPACK verwendet und kann aus verschiedenen FE-Systemen erstellt werden. Dazu ist in SIMPACK ein Unterprogramm (FEMBS) enthalten, welches die Konvertierung aus der FE Daten vornimmt.

Die Erstellung der Eingangsdaten ist sehr problemabhängig, da die Randbedingungen sehr großen Einfluss auf die Eigenvektoren haben. Die Wahl der Lagerung einer FE Struktur und die Auswahl der verwendeten Eigenvektoren ist nicht einfach determinierbar. Eine Möglichkeit, eine optimale Auswahl der Eigenvektoren vorzunehmen, ist der "Mode Participation Factor"(MPF), welcher für einen definierten statischen Lastfall berechnet werden kann und den prozentualen Anteil des Eigenvektors an der gesamten Verformung angibt - [WW03]. Zur Bestimmung des MPF hat Wallrapp ein einfaches Programm zur Darstellung von SID_FEM Daten und zur Berechnung des MPF für einen definierten Lastfall entwickelt.

3.1.2 Lösung im Zeitbereich

Die numerische Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten im Zeitbereich erfolgt üblicherweise mit einem ODE-Solver. Der Algorithmus der numerischen Integration wirkt sich direkt auf die Berechnungszeit und die Lösungsgenauigkeit aus. Die Einteilung der Solver erfolgt zunächst nach den Eigenschaften der zu lösenden Differentialgleichung. Eine wichtige Unterteilung erfolgt in steife und nicht steife Probleme. Die Behandlung steifer Systeme ist aufwendiger, da kleine Änderung in den Eingangsgrößen große Schwankungen in den Ergebnisgrößen verursachen. Die betrachteten Systeme, wie gleitgelagerte Rotorsysteme mit elastischen Körpern, liefern in der Regel ein steifes und extrem nichtlineares Verhalten. Kleine Änderungen in den Wegen und Geschwindigkeiten liefern Änderungen in den Beschleunigungen in unterschiedlichen Größenordnungen. Ein implizites Runge-Kutta-Verfahren mit einer Trapezregel (ode23t [SRK99]) stellt einen guten Kompromiss zwischen Genauigkeit und Geschwindigkeit dar. Der Algorithmus wurde für die zu lösenden Gleichungen modifiziert. Da keine DAEs zu lösen sind, wurde der entsprechende Teil aus dem Algorithmus entfernt. Darüber hinaus ist eine angepasste Fehlerbetrachtung für die unterschiedlichen Zustandsgrößen im Zustandsvektor $\underline{\underline{z}}$ implementiert worden. Zu unterscheiden sind die Zustandsgrößen für:

- Weg
- Geschwindigkeit
- modale Verschiebung (elastische Körper)
- modale Geschwindigkeit (elastische Körper)
- zusätzliche Zustandsgrößen aus den Krafttroutinen

Die Zustandsgrößen besitzen unterschiedliche physikalische Einheiten und Größenordnungen und müssen nicht alle mit derselben Genauigkeit berechnet werden. Wie in allen kommerziellen MKS-Programmen üblich, werden jeder Gruppe von Zustandsgrößen separate Fehlerschranken (absoluter und relativer Fehler) zugewiesen. Die Schrittweitensteuerung des Solvers kann an der Zustandsgröße mit dem größten bezogenen Fehler ausgerichtet werden.

3.1.3 Eigenwertanalyse

Die Berechnung der Eigenwerte ist eine grundlegende Operation in der Rotordynamik. Die Eigenwerte liefern Auskunft über kritische Drehzahlen und über die Stabilität des Rotor-systems. Die Eigenwerte von schwingungsfähigen Systemen sind im Allgemeinen komplexwertig

$$\lambda = -\delta \pm i \cdot \omega \quad . \quad (3-74)$$

Der Imaginärteil $Im(\lambda) = \omega$ stellt die Kreisfrequenz der Eigenschwingung dar. Der Realteil entspricht der negativen Abklingkonstante $Re(\lambda) = -\delta$. Bei schwach gedämpften Systemen sind die Eigenwerte komplex und treten in konjugiert komplexen Paaren auf. Die Besonderheit bei rotordynamischen Systemen ist die Abhängigkeit der Eigenwerte von der Drehzahl des Systems. Verursacht durch die wirkenden Kreiselmomente am Rotor resultiert eine Veränderung der Eigenwerte. Die Veränderung der Eigenkreisfrequenzen ω in Abhängigkeit von der Drehzahl wird im Campbell-Diagramm aufgetragen. In diesem Diagramm lassen sich die kritischen Drehzahlen als Schnittpunkt zwischen Fahrstrahl der Unwuchtanregung und dem Eigenfrequenzast ermitteln. In diesem Fall fallen die Anregungsfrequenz und eine Eigenfrequenz des Systems zusammen, folglich liegt eine Resonanz vor. Dabei ist zu beachten, dass zu jeder Eigenfrequenz eine Schwingform mit einer definierten Drehrichtung zugeordnet ist. Es existieren Schwingformen, die mit der Drehrichtung des Rotors umlaufen und daher als Gleichlauf bezeichnet werden. Weiterhin existieren Schwingformen, die entgegen der Drehrichtung umlaufen und als Gegenlauf bezeichnet werden. Die Anregung mittels Unwucht im Rotor erzeugt eine konstante Kraft, welche mit der Drehrichtung des Rotors umläuft. Folglich kann eine Unwuchtanregung nur einen Gleichlauf anregen. Ein Gegenlauf kann bei isotropen Systemen durch die Unwucht nicht angeregt werden, folglich erzeugen Schnittpunkte zwischen dem Fahrstrahl und dem Gegenlauf keine Resonanz.

Analytische Berechnung der Eigenwerte rotierender Systeme

An einem einfachen Rotorsystem sollen die Eigenwerte berechnet werden. Ein starrer Rotor ist auf einer elastischen Welle unsymmetrisch aufgebracht - Abb. (3-3). Die Variation der Rotordrehzahl Ω und eine Eigenwertanalyse in diesem Zustand liefert das Campbell-Diagramm.

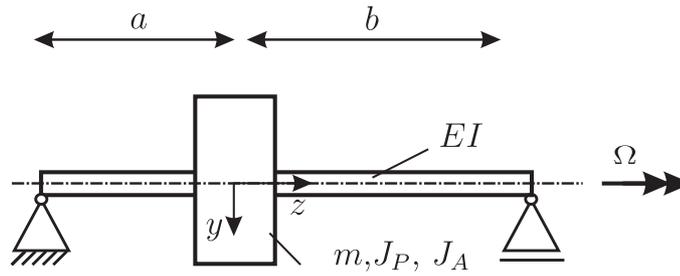


Abbildung 3-3: Rotormodell mit elastischer Welle

Eine Entwicklung der Kreiselgleichungen in einem ruhenden System beruht auf dem Einführen eines nicht mitrotierenden Koordinatensystems K' [GNP06]. Hier wird ein Koordinatensystem eingeführt, welches allen Bewegungen des Rotors folgt, jedoch nicht der Drehung um die Figurenachse. Eine anschließende Entwicklung des Drehimpulses und der vektoriellen Aufteilung auf die Achsen des Inertialsystems liefern die Kreiselgleichungen in Koordinaten des Inertialsystems. Eine weitere Methode führt ein mitbewegtes Koordinatensystem ein, welches die translatorische Bewegung des Rotors mitmacht, jedoch die Orientierung des Inertialsystems immer beibehält. Damit lässt sich die absolute Zeitableitung in diesem Koordinatensystem ausführen ${}_I\dot{\underline{L}} = {}_{K'}\dot{\underline{L}}$. Dies liefert folgende Darstellung für den Drehimpuls in linearisierter Form für kleine Winkel φ_x und φ_y um die x- und y-Achse.

$${}_{K'}\underline{L} = \begin{pmatrix} J_A \cdot {}_{K'}\dot{\varphi}_x + J_P \cdot {}_{K'}\dot{\varphi}_z \cdot {}_{K'}\varphi_y \\ J_A \cdot {}_{K'}\dot{\varphi}_y - J_P \cdot {}_{K'}\dot{\varphi}_z \cdot {}_{K'}\varphi_x \\ J_P \cdot {}_{K'}\dot{\varphi}_z - J_A \cdot {}_{K'}\dot{\varphi}_x \cdot {}_{K'}\varphi_y + J_A \cdot {}_{K'}\dot{\varphi}_y \cdot {}_{K'}\varphi_x \end{pmatrix} \quad (3-75)$$

Die zeitliche Ableitung von Gl. (3-75) liefert unter Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung

$${}_I\dot{\underline{L}} = {}_I\underline{M}_a = \begin{pmatrix} J_A \cdot {}_{K'}\ddot{\varphi}_x + J_P \cdot {}_{K'}\dot{\varphi}_y \cdot {}_{K'}\dot{\varphi}_z \\ J_A \cdot {}_{K'}\ddot{\varphi}_y - J_P \cdot {}_{K'}\dot{\varphi}_x \cdot {}_{K'}\dot{\varphi}_z \\ J_P \cdot {}_{K'}\ddot{\varphi}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_A \cdot {}_I\dot{\omega}_x + J_P \cdot {}_I\omega_y \cdot {}_I\omega_z \\ J_A \cdot {}_I\dot{\omega}_y - J_P \cdot {}_I\omega_x \cdot {}_I\omega_z \\ J_P \cdot {}_I\dot{\omega}_z \end{pmatrix} \cdot \quad (3-76)$$

Gl. (3-76) beschreibt die Reaktionsmomente des Rotors aufgrund der Änderung des Drehimpulses. Weiterhin werden die Rückstellkräfte und -momente der Welle auf den Rotor benötigt. Diese lassen sich durch die Kraftgrößenmethode mit der Annahme einer masselosen Welle bestimmen. Dazu wird aus der Differentialgleichung der Biegelinie des elastischen Balkens der Zusammenhang zwischen den Kräften ${}_I\underline{f}^*$ und den statischen Deformationen ${}_I\underline{y}$ hergestellt - Gl. (3-77).

$${}_I\underline{y} = {}_I\underline{H} \cdot {}_I\underline{f}^* \quad (3-77)$$

Die äußeren Kräfte und Momente ${}_I\underline{f}^*$ setzen sich im dynamischen Fall aus den äußeren Kräften ${}_I\underline{f}_a$, den d'Alembertschen Trägheitskräften ${}_I\underline{M} \cdot {}_I\underline{\ddot{y}}$ und den Kreiselmomenten $\underline{G} \cdot {}_I\underline{\dot{y}}$ zusammen. Diese lassen sich aus Gl. (3-76) entnehmen.

$${}_I\underline{f}^* = -{}_I\underline{M} \cdot {}_I\underline{\ddot{y}} - \underline{G} \cdot {}_I\underline{\dot{y}} + {}_I\underline{f}_a \quad (3-78)$$

Die Verschiebungen und die Kräfte seien dabei wie folgt definiert

$${}_I \underline{y} = \begin{pmatrix} x \\ \phi_y \\ y \\ \phi_x \end{pmatrix}, \quad {}_I \underline{f}_a = \begin{pmatrix} F_x \\ M_y \\ F_y \\ M_x \end{pmatrix}. \quad (3-79)$$

Schließlich ergibt sich folgende Differentialgleichung für die Beschreibung der Biegeschwingungen eines starren Rotors auf einer elastischen masselosen Welle

$${}_I \underline{M} \cdot {}_I \underline{\ddot{y}} + {}_I \underline{G} \cdot {}_I \underline{\dot{y}} + {}_I \underline{H}^{-1} \cdot {}_I \underline{y} = {}_I \underline{f}_a. \quad (3-80)$$

Mit der Massenmatrix

$${}_I \underline{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_a \end{bmatrix}, \quad (3-81)$$

der gyroskopischen Matrix

$${}_I \underline{G} = J_p \cdot \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3-82)$$

und der Nachgiebigkeitsmatrix

$${}_I \underline{H} = \begin{bmatrix} \alpha_e & \gamma_e & 0 & 0 \\ \delta_e & \beta_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_e & -\gamma_e \\ 0 & 0 & -\delta_e & \beta_e \end{bmatrix}. \quad (3-83)$$

Die Einflusszahlen für die elastische Welle in Fest- und Loslager lauten

$$\begin{aligned} \alpha_e &= \frac{a \cdot b^2}{6 \cdot E \cdot I} \left[\left(1 + \frac{a+b}{b} \right) \frac{a}{a+b} - \frac{a^3}{a \cdot b \cdot (a+b)} \right], \\ \beta_e &= \frac{(a+b)^2}{6 \cdot E \cdot I} \left[\left(2 - 6 \cdot \frac{a}{a+b} + 3 \cdot \frac{a^2}{(a+b)^2} \right) \frac{1}{a+b} - \frac{3 \cdot a^2}{(a+b)^3} \right], \\ \gamma_e &= \frac{a \cdot b^2}{6 \cdot E \cdot I} \left[\left(1 + \frac{a+b}{b} \right) \frac{1}{a+b} - \frac{3 \cdot a^2}{a \cdot b \cdot (a+b)} \right], \\ \delta_e &= \gamma_e. \end{aligned} \quad (3-84)$$

Für die Formulierung eines speziellen Eigenwertproblems wird die Differentialgleichung in den Zustandsraum transformiert

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{E}} & \underline{\underline{0}} \\ -\underline{\underline{M}}^{-1} \cdot \underline{\underline{H}}^{-1} & -\underline{\underline{M}}^{-1} \cdot \underline{\underline{G}} \end{bmatrix} \quad (3-85)$$

Mit dem speziellen Eigenwertproblem

$$\det [\underline{\underline{A}} - \lambda \cdot \underline{\underline{E}}] = 0 \quad (3-86)$$

Das Campbell-Diagramm zeigt die Eigenkreisfrequenzen ω in Abhängigkeit von Ω .

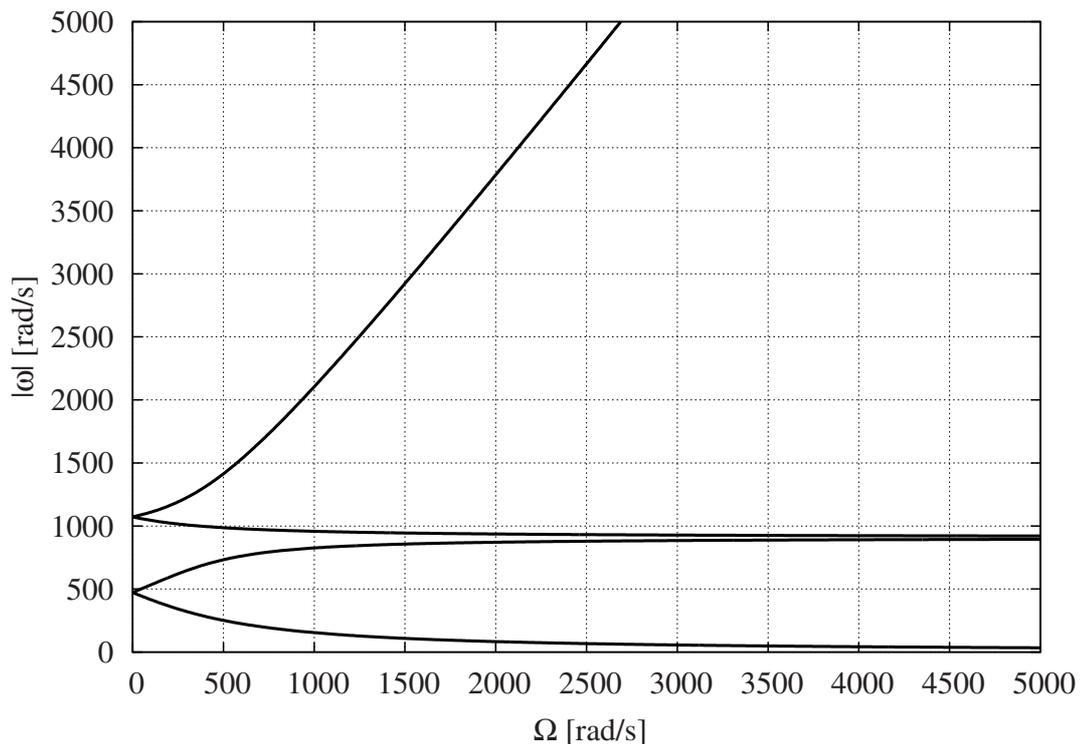


Abbildung 3-4: Campbell-Diagramm aus analytischer Lösung für das Modell aus Abb. (3-3)

Für rotationssymmetrische Rotoren lassen sich die Kreiselgleichungen nach Gl. (3-76) formulieren. Bei unsymmetrischen Rotoren, wie z.B. ein zweiflügliger Propeller ist die analytische Herleitung aufwendiger.

Bestimmung der Eigenwerte in Mehrkörpersystemen

Grundlage für die Berechnung der Eigenwerte ist die Zustandsraummatrix $\underline{\underline{A}}$, welche mit der Kenntnis von Massen-, gyroskopischer - und Nachgiebigkeitsmatrix nach Gl. (3-85) bestimmt werden kann. Bei einem Mehrkörpersystem liegen die Bewegungsgleichungen nicht in dieser linearisierten Form vor, da der Zusammenhang zwischen den kinematischen Größen und den Kräften nichtlinear ist. Die Gleichungen werden numerisch aufgebaut und liegen in der Form einer gewöhnlichen Differentialgleichung Gl. (3-87) vor.

$$\dot{\underline{z}} = f(t, \underline{z}, \underline{h}_a) \quad (3-87)$$

Für definierte Betriebspunkte z_{lin} kann die Differentialgleichung Gl. (3-87) linearisiert werden

$$\dot{z}_{lin} = \underline{\underline{A}} \cdot z_{lin} + \underline{\underline{B}} \cdot h_a \quad . \quad (3-88)$$

Es ergibt sich ein linearer Zusammenhang zwischen den Beschleunigungen, Verschiebungen, Geschwindigkeiten und den äußeren Kräften - Gl. (3-88). Für Gleichgewichtslagen z_{lin} kann nun die Bewegung um diesen Gleichgewichtspunkt über einen linearen Zusammenhang formuliert werden. Die Formulierung enthält die lineare Systemmatrix $\underline{\underline{A}}$, welche für die Eigenwertberechnung herangezogen werden kann. Diese enthält die Information über das Eigenverhalten des Systems (Masse, Steifigkeit und Dämpfung). Die Linearisierung der Bewegungsgleichung kann numerisch über eine Vorwärtsdifferenz erfolgen

$$\underline{\underline{A}} = \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} \cong \frac{\Delta \dot{z}}{\Delta z} = \frac{\dot{z}(z_{lin}) - \dot{z}(z_{lin} + \Delta z)}{\Delta z} \quad . \quad (3-89)$$

Die Wahl der Schrittweite Δz wird durch die Rechengenauigkeit ϵ definiert. In der Regel wird folgende Vorschrift verwendet

$$\Delta z = 10 \cdot \sqrt{\epsilon} \quad .$$

Die Systemmatrix $\underline{\underline{A}}$ ist durch die Zustandsraumdarstellung und durch die allgemeine räumliche Bewegung unsymmetrisch. Die Eigenwerte sind im Allgemeinen komplexwertig. Dabei hat sich das QR-Verfahren nach Wilkinson [WR71] als brauchbare Methode herausgestellt, es erlaubt eine komplexe Eigenwertberechnung von Matrizen mit moderater Größe. Dies trifft bei den vorliegenden rotordynamischen Modellen zu, da die Zahl der Zustandsgrößen auch aus Gründen der Rechenzeit bei der Zeitintegration so gering wie möglich gehalten werden muss. Das Verfahren wurde von Fischer [Fis11] leicht modifiziert und bestimmt auch für schlecht konditionierte Matrizen zuverlässig die Eigenwerte.

Beispiel: Berechnung der Eigenwerte in SIMPACK Die Berechnung der Eigenwerte rotordynamischer Systeme mit kommerziellen Mehrkörpersystemen liefert häufig ein Campbell-Diagramm wie in Abb. (3-5). Das MKS-Modell dieses Rotorsystems ist mit SIMPACK erstellt worden, wobei die Welle als FE-Balkenmodell abgebildet ist. Die elastische Verformung erfolgt unter Berücksichtigung von 30 Biegeeigenvektoren, die den Lösungsraum der elastischen Deformation aufspannen. Der elastische Körper enthält bereits aus dem FE-Modell die Randbedingungen der Fest- und Loslagerung, daher ist das Gelenk im MKS-Modell ein Drehgelenk um eine Achse. Die Anbindung des Rotors erfolgt über ein Null-Freiheitsgrad-Gelenk, welches keine Bewegung zwischen Anknüpfungspunkt auf der Welle und dem Scheibenmittelpunkt des Rotors zulässt. Der Verlauf in Abb. (3-5) ist für die Bestimmung von Resonanzstellen schwer zu interpretieren. Eine bekannte analytische Lösung, bei der die Masse der Welle vernachlässigt wird, liefert einen völlig anderen Verlauf von Gleich- und Gegenlauf - Abb. (3-4). Die Ursachen für diesen vermeintlichen Fehler liegt in den beschreibenden Größen der Bewegung. Die Wahl des Beobachters beeinflusst die Eigenwerte rotierender Systeme deutlich. Die Eigenwerte, welche durch eine mitrotierende Beschreibung der Bewegungsgrößen ermittelt werden, unterscheiden sich von denen einer inertialen Beschreibung. Für eine Umrechnung der Eigenwerte kann Gl. (3-90) herangezogen werden, welche den Gleichlauf um die Drehkreisfrequenz des Systems reduziert

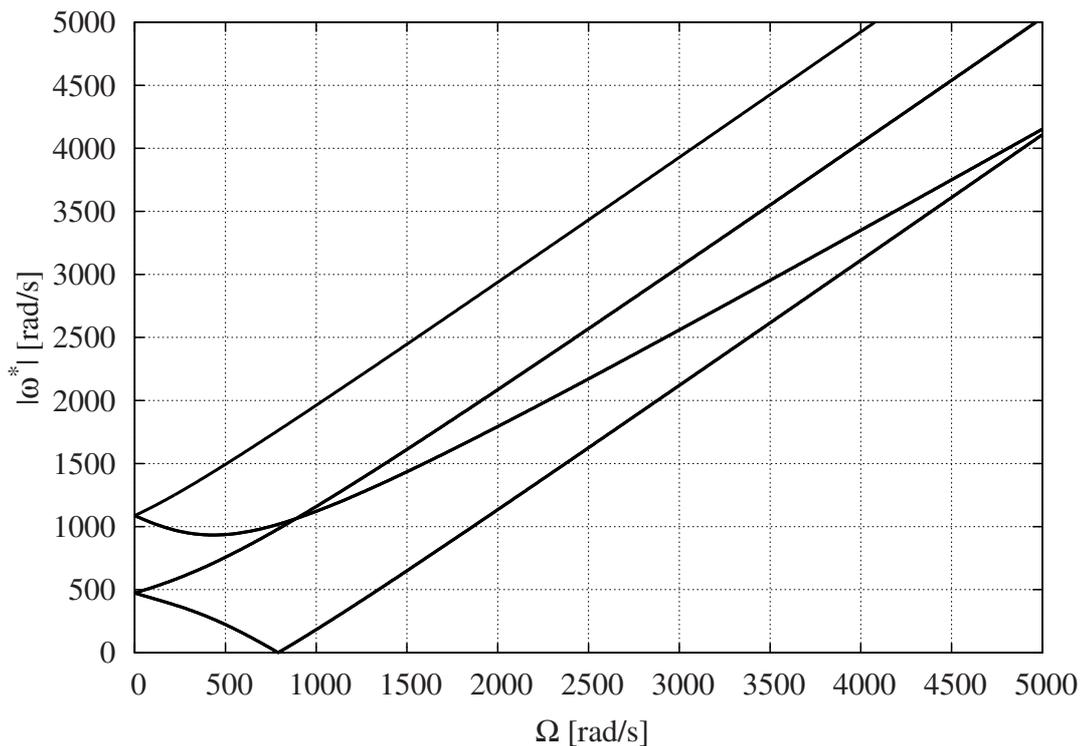


Abbildung 3-5: Campbell-Diagramm mit Gelenk bzgl. der elastischen Welle (SIMPACK) für das Modell aus Abb. (3-3)

und den Gegenlauf entsprechend erhöht. Dabei ist eine vorzeichenbehaftete Betrachtung der Eigenkreisfrequenzen zu berücksichtigen. Eigenkreisfrequenzen, deren Schwingformen im Wellendreh Sinn umlaufen, werden Gleichlauf bezeichnet. Die entgegengesetzt umlaufenden Schwingformen werden mit einer negativen Eigenkreisfrequenz versehen und werden als Gegenlauf bezeichnet.

$$\omega = \omega^* \pm i \cdot \Omega \quad (3-90)$$

Mit Gl. (3-90) können die Eigenkreisfrequenzen aus Abb. (3-5) entsprechend korrigiert werden, und in einer Darstellung wie in Abb. (3-6) überführt werden. Eine Modellierung mittels eines Sechs-Freiheitsgrad-Gelenkes vom Inertialsystem zum Rotor und einer Zwangsbedingung zwischen Rotorwelle und Rotor liefert direkt das Campbell-Diagramm in Abb. (3-6).

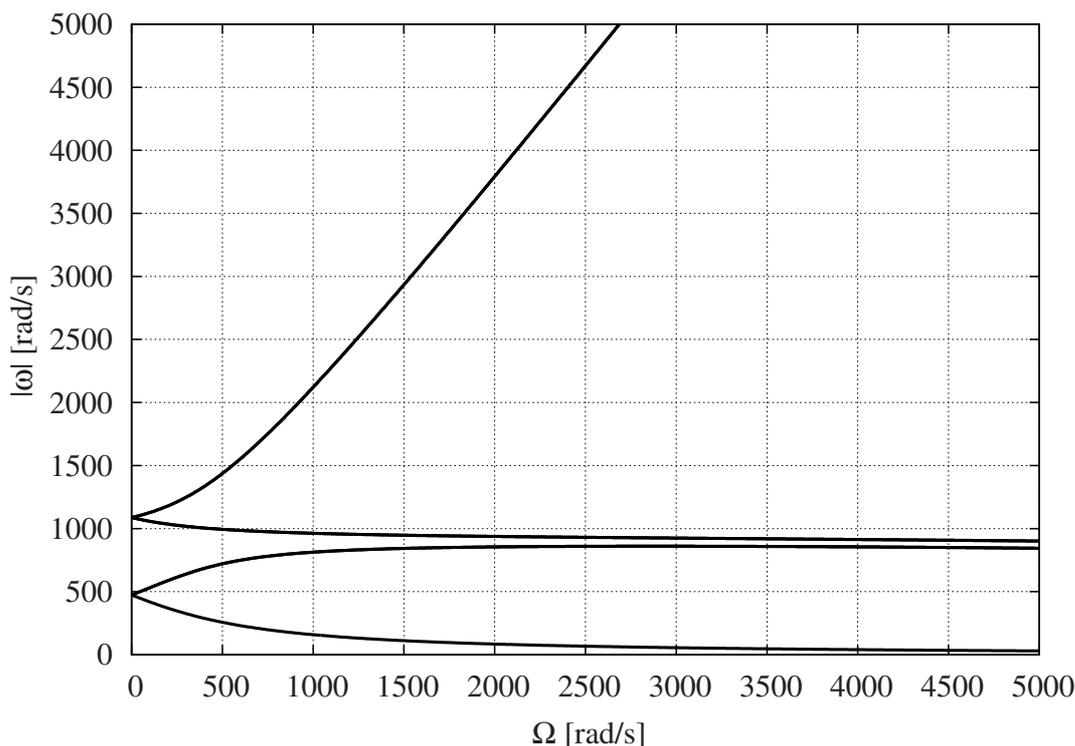


Abbildung 3-6: Campbell-Diagramm mit Gelenk bzgl. des Inertial Systems (SIMPACK) für das Modell aus Abb. (3-3)

Einfluss der Wahl der Zustandsgrößen auf die Eigenwerte

Auf die Wahl der Zustandsgrößen kann in kommerziellen MKS-Programmen selten Einfluss genommen werden. Durch die gezielte Verknüpfung der Körper mit bestimmten definierten Gelenken kann dies beeinflusst werden.

Die Idee, die sich daraus ergibt, ist relativ einfach: Die verwendeten Zustandsgrößen für die Beschreibung der Bewegung des Körpers müssen nicht mit denen übereinstimmen, die für die Formulierung der dynamischen Gleichgewichtsbedingungen verwendet werden. Für rotierende Systeme bedeutet dies konkret:

- Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen in körperfesten Koordinaten.
- Die Zustandsgrößen für die zeitliche Beschreibung sind inertielle Größen.
- Zwischen den körperfesten und den inertialen Größen kann in beide Richtungen transformiert werden.

Berechnung der Eigenwerte mit EMD Im Folgenden sollen an einem einfachen rotordynamischen Modell Untersuchungen hinsichtlich der beschreibenden Größen unternommen werden. Das Rotormodell ist ein isotrop elastisch gelagerter starrer Rotor - Abb. (3-7).

Die Bewegungsgleichung lässt sich für kleine Auslenkungen analytisch darstellen

$$\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{\ddot{y}}} + \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{\dot{y}}} + \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{y}} = \underline{\underline{f}}_a \quad . \quad (3-91)$$

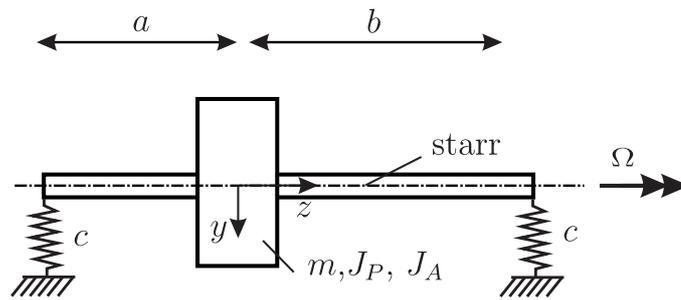


Abbildung 3-7: Rotormodell mit starrer Welle elastisch gelagert

Die konkreten Systemmatrizen und Systemparameter sind im Anhang ersichtlich - Tab. (B.2-1). Die analytische Lösung und deren Eigenwertanalyse liefert das Campbell-Diagramm in Abb. (3-8).

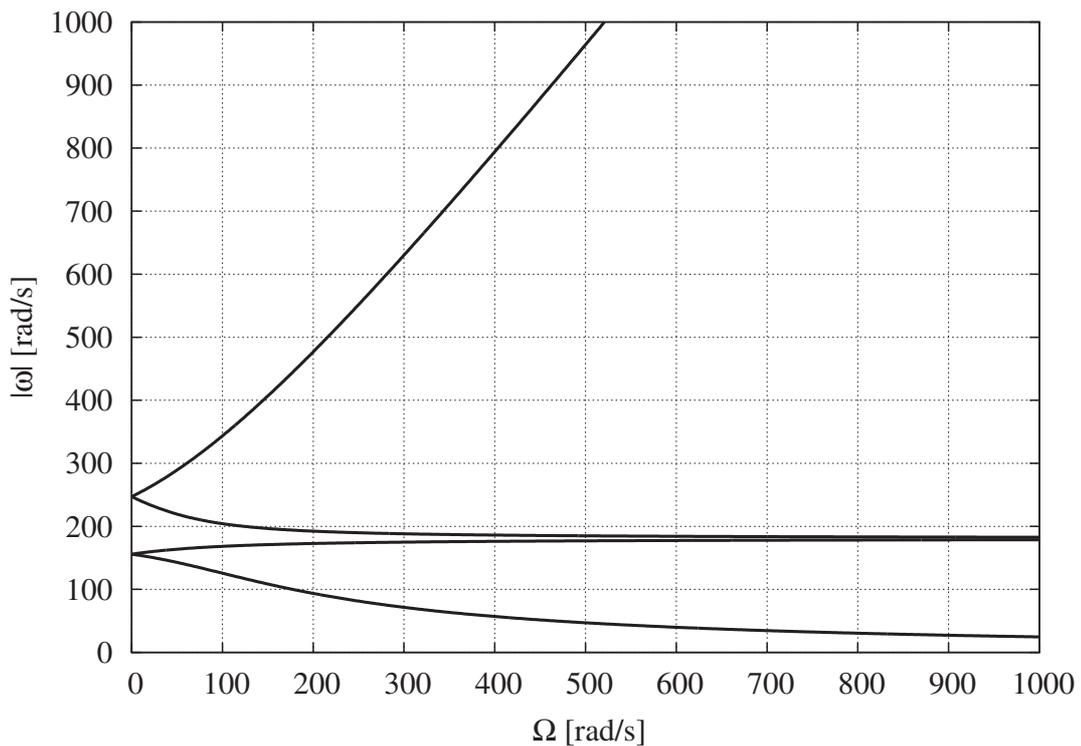


Abbildung 3-8: Campbell-Diagramm aus analytischer Lösung für Modell aus Abb. (3-7)

Diese Lösung soll nun als Referenz für die weiteren Untersuchungen verwendet werden. Konkret wird das Modell aus Abb. (3-7) mit dem MKS-Programm EMD modelliert. Grundlage von EMD ist die Bewegungsgleichung Gl. (3-32). Die Gleichgewichtsbedingungen werden im körperfesten System aufgestellt. Diese werden für die Berechnung der Zustandsgrößen in das Koordinatensystem des Inertialsystems transformiert. Zunächst wird auf diese Transformation verzichtet. In einer modifizierten Version von EMD werden die Zustands-

größen körperfest dargestellt.

$${}_K \underline{z} = [{}_K \underline{r}_A \quad \underline{x} \quad {}_K \dot{\underline{r}}_A \quad {}_K \underline{\omega}]^T \quad (3-92)$$

Mit Gl. (3-92) ergibt sich die linearisierte Systemmatrix

$${}_K \underline{A} = \frac{\partial {}_K \dot{\underline{z}}}{\partial {}_K \underline{z}} \quad (3-93)$$

Die Eigenwerte von ${}_K \underline{A}$ liefern die Eigenkreisfrequenzen ω^* , welche im Campbell-Diagramm in Abb. (3-9) dargestellt sind. Der Verlauf der Eigenkreisfrequenzen ω^* im mitrotierenden Koordinatensystem unterscheidet sich stark von der analytischen Lösung für ω in Abb. (3-8) .

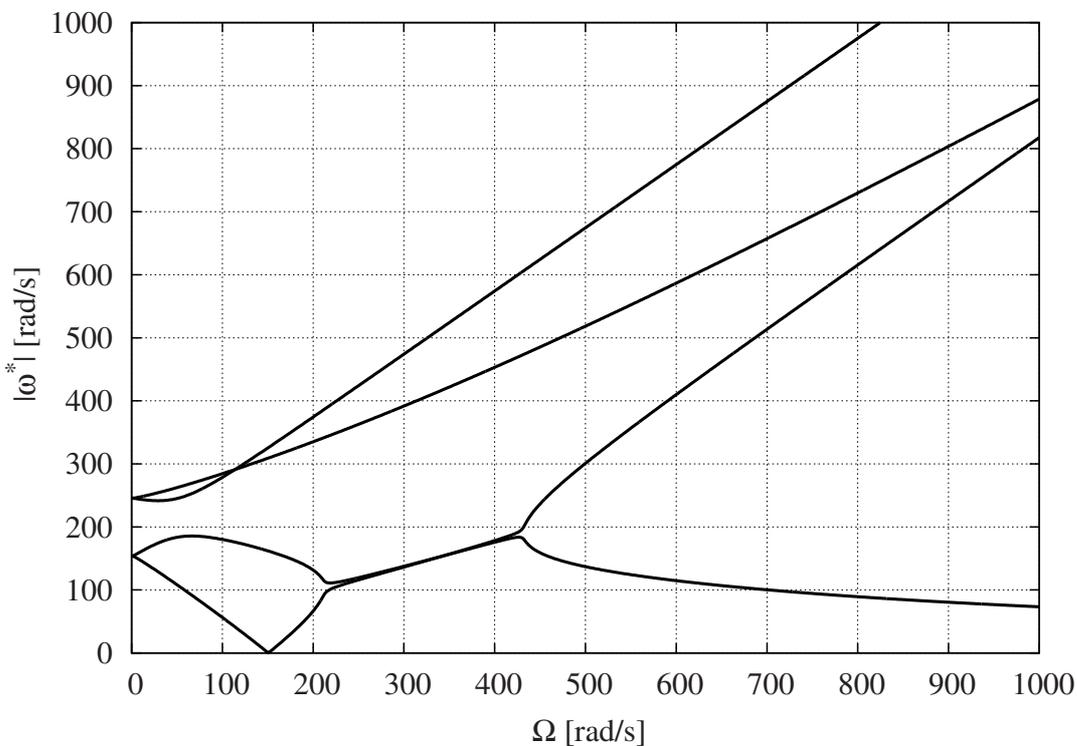


Abbildung 3-9: Campbell-Diagramm mit körperfesten Zustandsgrößen (EMD) für das Modell aus Abb. (3-7)

Werden jedoch inertielle Zustandsgrößen verwendet

$${}_I \underline{z} = [{}_I \underline{r}_A \quad \underline{x} \quad {}_I \dot{\underline{r}}_A \quad {}_I \underline{\omega}]^T \quad (3-94)$$

ergibt sich die linearisierte Systemmatrix

$${}_I \underline{A} = \frac{\partial {}_I \dot{\underline{z}}}{\partial {}_I \underline{z}} \quad (3-95)$$

Die Eigenkreisfrequenzen ω von ${}_I \underline{A}$ ergeben das Campbell-Diagramm Abb. (3-10), welches direkt den bekannten Verlauf der analytischen Lösung aus Abb. (3-8) aufweist.

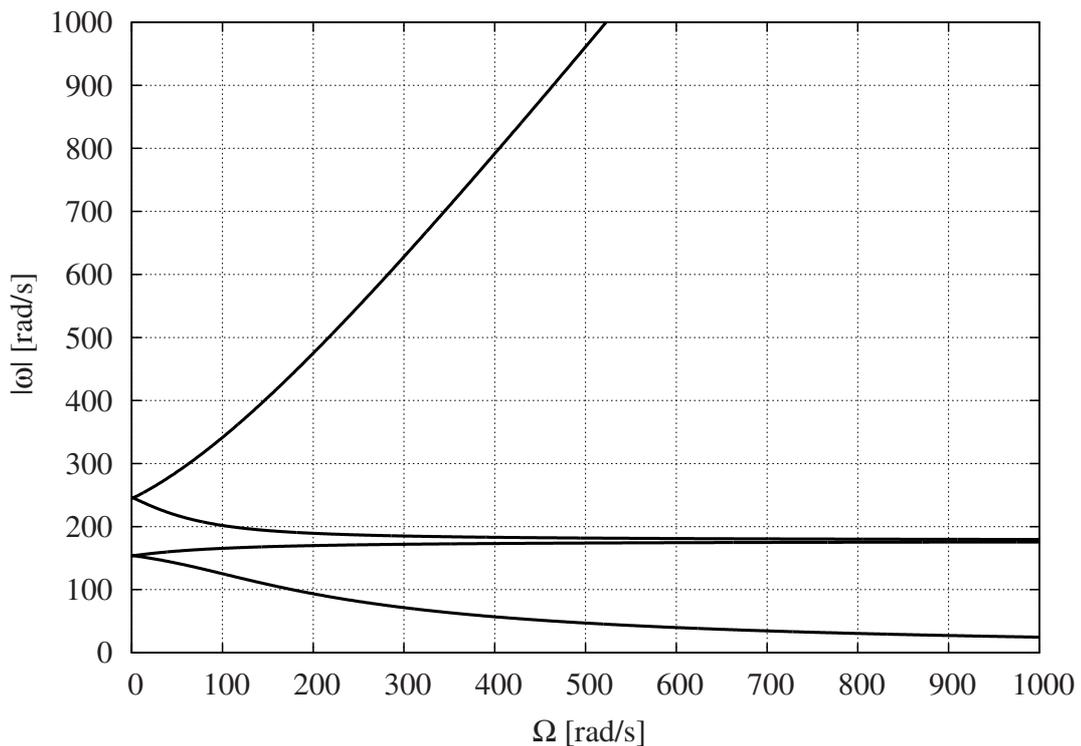


Abbildung 3-10: Campbell-Diagramm mit inertialen Zustandsgrößen (EMD) für das Modell aus Abb. (3-7)

Schlussfolgerung Die Berechnung von Eigenwerten von rotierenden Systemen ist in Mehrkörpersystemen grundsätzlich möglich. Die Aussagekraft eines solchen Diagramms hängt von den beschreibenden Größen ab, in denen auch die Linearisierung erfolgt. Die Linearisierung ist notwendig, da die Bewegungsgleichung auf der linken Seite nichtlinear durch die beliebige räumliche Bewegung ist und die rechte Seite durch eine beliebige Definition von äußeren Kräften ebenfalls stark nichtlinear sein kann. Körperfeste Größen zur Beschreibung der Bewegung sind für die Gleichgewichtsbedingungen günstig, jedoch für die direkte Erstellung eines Campbell-Diagramms ungünstig, da ein zusätzlich er Aufwand nötig ist um interpretierbare Campbell-Diagramme zu erstellen. Hier sind inertielle Zustandsgrößen günstiger, da diese direkt die desuchten Eigenfrequenzen liefern. Kommerzielle Mehrkörpersysteme wie ADAMS und SIMPACK verwenden häufig auch gemischte Formulierungen, sodass bestimmte Größen bezüglich des Inertialsystems beschrieben werden, die Winkelgeschwindigkeiten jedoch bezüglich der körperfesten Achsen. Diese gemischte Zusammensetzung des Zustandsvektors ist ebenfalls ungünstig für die Erstellung eines Campbell-Diagramms.

praktische Lösungen Für die Erstellung eines Campbell-Diagramms mit kommerziellen Mehrkörpersystemen muss bei der Modellerstellung darauf geachtet werden, dass alle gelenkigen Verbindungen ihren Ursprung im Inertialsystem haben. Die ist bei der Verbindung eines starren Körpers mit einer elastischen Welle sehr ungünstig, da einerseits ein Gelenk mit sechs Freiheitsgraden definiert werden muss. Die eigentliche Verbindung zur Welle muss anschließend durch eine steife Feder oder eine kinematische Zwangsbedingung hergestellt werden. Dies ist bei der Modellierung nicht intuitiv und führt in der Regel zu

numerisch ungünstigen Differentialgleichungen. Die Umstrukturierung bestehender Mehrkörpersysteme für spezielle Anwendungen der Rotordynamik ist wenig sinnvoll. Zumal die Aussagekraft des Campbell-Diagramms bei stark nichtlinearen Systemen, wie ein gleitgelagerter Turbolader, gering ist - vgl. [NS12].

Sollen dennoch Eigenwertanalysen mit inertialen Zustandsgrößen erfolgen, so besteht bei ADAMS die Möglichkeit nutzerdefinierte Koordinaten für die Linearisierung des Systems zu definieren. Diese Möglichkeit wird im Folgenden näher betrachtet.

Verwendung von nutzerdefinierten Koordinaten

Dieses Beispiel zeigt den Einfluss der gewählten Zustandsgrößen auf die Eigenwerte rotierender Systeme. Ein Campbell-Diagramm für die Bestimmung von Resonanzdrehzahlen rotierender Systeme lässt sich einfacher mit inertialen Zustandsgrößen bestimmen. Die Wahl der Zustandsgrößen wird meist durch numerisch günstige Ausdrücke bei der Zeitintegration determiniert. Daher werden bei kommerziellen MKS-Programmen die körperfesten bzw. Relativkoordinaten bevorzugt. Im FE-Programmsystem ANSYS kann beim Modellaufbau explizit zwischen einer körperfesten und einer inertialen Beschreibung gewählt werden³.

Eine Alternative für allgemeine Mehrkörpersysteme wird in [NO06] dargestellt. Hier wird eine Methode der Linearisierung von DAE-Systemen vorgestellt. Die Linearisierung kann in frei definierten Koordinaten erfolgen. Die eigentliche Differentialgleichung kann unangetastet bleiben, es müssen lediglich die Funktionale der neuen Koordinaten differenziert werden. Dies soll hier für ein allgemeines Mehrkörpersystem ohne algebraische Zwangsbedingungen kurz dargestellt werden. Die Differentialgleichung kann analog zu Gl. (3-52) formuliert werden

$$\underline{M}(\underline{q}) \cdot \underline{\dot{u}} + \underline{h}_\omega(t, \underline{q}, \underline{u}) = \underline{h}_a(t, \underline{q}, \underline{u}) \quad . \quad (3-96)$$

Hier soll zwischen den Lagegrößen \underline{q} und den Geschwindigkeiten \underline{u} unterschieden werden. Der gesamte Zustandsvektor ergibt sich damit zu

$$\underline{z} = [\underline{q} \quad \underline{u}]^T \quad .$$

Der Vektor \underline{q} enthält die Lage- und Orientierungsparameter

$$\underline{q} = [\underline{r} \quad \underline{x}]^T \quad .$$

Der Vektor \underline{u} enthält die Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit

$$\underline{u} = [\underline{\dot{r}} \quad \underline{\omega}]^T \quad .$$

Die Transformation zwischen der ersten Ableitung der Orientierungswinkel (z.B. Kardan- oder Eulerwinkel) und den Winkelgeschwindigkeiten kann mit Hilfe der Transformationsmatrix aus Gl. (3-39) erfolgen. Diese gilt für die erste Ableitung der Kardanwinkel $\underline{\dot{x}}$ und den Winkelgeschwindigkeiten um die körperfesten Achsen ${}_K\omega$. Allgemein kann die Abhängigkeit zwischen den Lagegrößen \underline{q} und den Geschwindigkeiten \underline{u} für eine allgemeine räumliche Bewegung wie folgt formuliert werden

$$\underline{T}(\underline{q}) \cdot \underline{\dot{q}} = \underline{u} \quad . \quad (3-97)$$

³In ANSYS ist der Befehl *coriolis* für diese Zwecke vorhanden

Die neuen Zustandsgrößen \underline{q}^* und \underline{u}^* , in denen die Linearisierung erfolgen soll, müssen durch die Ursprünglichen ausgedrückt werden

$$\underline{q}^* = \underline{f}_q(\underline{q}) \quad . \quad (3-98)$$

Für die neuen Zustandsgrößen sollen die Ableitung der Lagegrößen und die Geschwindigkeiten identisch sein

$$\underline{u}^* = \underline{\dot{q}}^* \quad . \quad (3-99)$$

Weiterhin gelten

$$\underline{u}^* = \underline{\dot{f}}_q(\underline{u}, \underline{q}, t) \quad , \quad (3-100)$$

$$\underline{\dot{u}}^* = \underline{\ddot{f}}_q(\underline{u}, \underline{\dot{u}}, \underline{q}, t) \quad . \quad (3-101)$$

Für die Ableitung nach den neuen Zustandsgrößen werden noch folgende formal definierten Variablen eingeführt, um später ein inhomogenes lineares Gleichungssystem zu erhalten

$$\underline{\bar{u}}^* = \underline{u}^* \quad , \quad (3-102)$$

$$\underline{\bar{q}}^* = \underline{q}^* \quad . \quad (3-103)$$

Werden die Gleichungen Gl. (3-96) - Gl. (3-103) nach den neuen Zustandsgrößen $\underline{\bar{q}}^*$ differenziert, so entstehen folgende Ausdrücke

$$\begin{aligned} \underline{0} &= \underline{M}(\underline{q}) \cdot \frac{\partial \underline{\dot{u}}}{\partial \underline{\bar{q}}^*} - \frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{u}} \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{\bar{q}}^*} - \frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{q}} \frac{\partial \underline{q}}{\partial \underline{\bar{q}}^*} \quad , \\ \underline{0} &= \frac{\partial \underline{T}}{\partial \underline{q}} \cdot \frac{\partial \underline{q}}{\partial \underline{\bar{q}}^*} \cdot \underline{\dot{q}} + \underline{T} \cdot \frac{\partial \underline{\dot{q}}}{\partial \underline{\bar{q}}^*} - \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{\bar{q}}^*} \quad , \\ \underline{0} &= \frac{\partial \underline{q}^*}{\partial \underline{\bar{q}}^*} - \frac{\partial \underline{f}_q}{\partial \underline{q}} \frac{\partial \underline{q}}{\partial \underline{\bar{q}}^*} \quad , \\ \underline{0} &= \frac{\partial \underline{\dot{q}}^*}{\partial \underline{\bar{q}}^*} - \frac{\partial \underline{u}^*}{\partial \underline{\bar{q}}^*} \quad , \\ \underline{0} &= \frac{\partial \underline{u}^*}{\partial \underline{\bar{q}}^*} - \frac{\partial \underline{\dot{f}}_q}{\partial \underline{q}} \frac{\partial \underline{q}}{\partial \underline{\bar{q}}^*} - \frac{\partial \underline{f}_q}{\partial \underline{u}} \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{\bar{q}}^*} \quad , \\ \underline{0} &= \frac{\partial \underline{\dot{u}}^*}{\partial \underline{\bar{q}}^*} - \frac{\partial \underline{\ddot{f}}_q}{\partial \underline{q}} \frac{\partial \underline{q}}{\partial \underline{\bar{q}}^*} - \frac{\partial \underline{\dot{f}}_q}{\partial \underline{u}} \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{\bar{q}}^*} - \frac{\partial \underline{\dot{f}}_q}{\partial \underline{\dot{u}}} \frac{\partial \underline{\dot{u}}}{\partial \underline{\bar{q}}^*} \quad , \\ \frac{\partial \underline{u}^*}{\partial \underline{\bar{q}}^*} &= \frac{\partial \underline{\bar{u}}^*}{\partial \underline{\bar{q}}^*} \quad , \\ \frac{\partial \underline{q}^*}{\partial \underline{\bar{q}}^*} &= \frac{\partial \underline{\bar{q}}^*}{\partial \underline{\bar{q}}^*} \quad . \end{aligned}$$

Dies kann als Matrixgleichung geschrieben werden

$$\underline{\tilde{A}} \cdot \underline{\tilde{X}}_1 = \underline{\tilde{B}}_1 \quad . \quad (3-104)$$

Die Matrizen haben folgende Form

$$\tilde{\underline{\underline{A}}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & -\frac{\partial h}{\partial \underline{u}} & -\frac{\partial h}{\partial \underline{q}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{T}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & -\underline{\underline{E}} & \frac{\partial T}{\partial \underline{q}} \cdot \dot{\underline{q}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \frac{\partial f_q}{\partial \underline{q}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{E}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{E}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & -\underline{\underline{E}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & -\frac{\partial \dot{f}_q}{\partial \underline{u}} & -\frac{\partial \dot{f}_q}{\partial \underline{q}} & \underline{\underline{E}} & \underline{\underline{0}} \\ -\frac{\partial \ddot{f}_q}{\partial \underline{u}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{E}} & \underline{\underline{0}} & \frac{\partial \ddot{f}_q}{\partial \underline{u}} & \frac{\partial \ddot{f}_q}{\partial \underline{q}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{E}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{E}} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\underline{\underline{X}}}_1 = \left(\frac{\partial \underline{\dot{u}}}{\partial \underline{\dot{q}}^*} \quad \frac{\partial \underline{\dot{q}}}{\partial \underline{\dot{q}}^*} \quad \frac{\partial \underline{\dot{u}}^*}{\partial \underline{\dot{q}}^*} \quad \frac{\partial \underline{\dot{q}}^*}{\partial \underline{\dot{q}}^*} \quad \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{\dot{q}}^*} \quad \frac{\partial \underline{q}}{\partial \underline{\dot{q}}^*} \quad \frac{\partial \underline{u}^*}{\partial \underline{\dot{q}}^*} \quad \frac{\partial \underline{u}^*}{\partial \underline{\dot{q}}^*} \right)^T,$$

$$\tilde{\underline{\underline{B}}}_1 = \left(\underline{\underline{0}} \quad \underline{\underline{E}} \right)^T.$$

Die partielle Ableitung nach den neuen Geschwindigkeitsgrößen $\underline{\underline{u}}^*$ liefert eine zweite Matrixengleichung Gl. (3-105)

$$\tilde{\underline{\underline{A}}} \cdot \tilde{\underline{\underline{X}}}_2 = \tilde{\underline{\underline{B}}}_2 \quad . \quad (3-105)$$

Mit den Matrizen $\tilde{\underline{\underline{X}}}_2$ und $\tilde{\underline{\underline{B}}}_2$

$$\tilde{\underline{\underline{X}}}_2 = \left(\frac{\partial \underline{\dot{u}}}{\partial \underline{\dot{u}}^*} \quad \frac{\partial \underline{\dot{q}}}{\partial \underline{\dot{u}}^*} \quad \frac{\partial \underline{\dot{u}}^*}{\partial \underline{\dot{u}}^*} \quad \frac{\partial \underline{\dot{q}}^*}{\partial \underline{\dot{u}}^*} \quad \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{\dot{u}}^*} \quad \frac{\partial \underline{q}}{\partial \underline{\dot{u}}^*} \quad \frac{\partial \underline{u}^*}{\partial \underline{\dot{u}}^*} \quad \frac{\partial \underline{u}^*}{\partial \underline{\dot{u}}^*} \right)^T,$$

$$\tilde{\underline{\underline{B}}}_2 = \left(\underline{\underline{0}} \quad \underline{\underline{0}} \quad \underline{\underline{0}} \quad \underline{\underline{0}} \quad \underline{\underline{0}} \quad \underline{\underline{0}} \quad \underline{\underline{E}} \quad \underline{\underline{0}} \right)^T.$$

Die gesuchten Größen für die lineare Systemmatrix $\underline{\underline{A}}$ sind in $\tilde{\underline{\underline{X}}}_1$ und $\tilde{\underline{\underline{X}}}_2$ enthalten. Dies sind die Sensitivitäten des Systems in den neuen Koordinaten

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{\dot{q}}^*}{\partial \underline{\dot{q}}^*} & \frac{\partial \underline{\dot{q}}^*}{\partial \underline{\dot{u}}^*} \\ \frac{\partial \underline{\dot{u}}^*}{\partial \underline{\dot{q}}^*} & \frac{\partial \underline{\dot{u}}^*}{\partial \underline{\dot{u}}^*} \end{bmatrix} \quad . \quad (3-106)$$

$\underline{\underline{X}}_1$ und $\underline{\underline{X}}_2$ sind Matrizen, daher müssen Gl. (3-104) und Gl. (3-105) für jede Spalte von $\underline{\underline{X}}_i$ und $\underline{\underline{B}}_i$ gelöst werden. Der numerische Aufwand beläuft sich bei einem System mit f Freiheitsgraden auf das f -malige Lösen eines Gleichungssystems mit $8 \cdot f$ Unbekannten. Diese Methode ist in ADAMS (C++) implementiert und liefert laut [NO06] für rotierende Systeme die gewünschten Ergebnisse. Für EMD ist diese Methode nicht nötig, da die Zustandsgrößen nach der Erfüllung des dynamischen Gleichgewichts für jeden Körper in die Basis des Inertialsystems transformiert werden.

3.2 Wälzlagersimulation

Die dynamische Abbildung von Wälzlagern soll hier auf Mehrkörpersysteme beschränkt werden. Diese bestehen im üblichen aus starren Körpern. Für große Modelle ist die Betrachtung eines Wälzlagers mit seinen Bestandteilen nicht sinnvoll. Die Abbildung als lineare oder nichtlineare Federkraft genügt häufig. Für einen tief greifenden Einblick in das Wälzlager muss dieses mit all seinen Bestandteilen abgebildet werden. Dabei muss die Bewegung von vielen einzelnen Körpern beschrieben werden, welche über den Wälzkontakt miteinander verbunden sind. Aus der Geometrie der Laufbahn und des Wälzkörpers ergibt sich ein stark nichtlineares Kontaktverhalten. Analytische Lösungen für die Beziehung zwischen Kraft und Verformung existieren nur für einfache Kontaktgeometrien. Hier existieren eine große Zahl von empirischen Modellen zur Beschreibung der Kontaktsteifigkeiten. Im Folgenden wird sich auf den Punktkontakt nach Hertz und einen Linienkontakt beschränkt. Die Kontaktdämpfung wird in den folgenden Darstellungen durch eine lineare Beziehung beschrieben, auch wenn durch Dietl [Die97] aufwendigere Modelle verfügbar wären. Ziel ist es, ein Berechnungsmodell für Wälzlager zu erstellen, welches mehr liefert als eine nichtlineare Beschreibung der gesamten Lagerkraft. Der Blick ins Lager und die Dynamik der Lagerbestandteile sollen ermöglicht werden. Dennoch muss das Modell in der Lage sein, in Verbindung mit den Bewegungsgleichungen eines komplexen Systems, Simulationen über einen großen Zeitraum durchführen zu können.

Ein Schwerpunkt liegt auf der Kontaktpunktberechnung, die sehr genau und schnell ablaufen muss. Die Zahl der potentiellen Kontaktstellen ist im Wälzlager relativ groß, schnelle und einfache Algorithmen sichern eine geringe Berechnungszeit. Mit den dargestellten Algorithmen können die Kontaktpunkte für ebene und räumliche Kontaktsituationen im Wälzkörperkontakt berechnet werden. Die anschließende Berechnung der Kontaktkräfte könnte beliebig erweitert werden.

3.2.1 Modellbildung

Der angestrebte Detaillierungsgrad sieht eine genaue Abbildung der Lagerbestandteile vor. Die Wälzkörper und der Lagerkäfig sollen mit ihren Trägheitseigenschaften abgebildet werden. Dies erhöht zwar den Modellierungs- und Rechenaufwand, aber es steht eine Simulationsmethode zur Verfügung, die nicht mehr zwischen quasistatischen und dynamischen Betrachtungen unterscheiden muss. Zudem kann das Wälzlager als Element in ein großes Mehrkörpermodell einer speziellen Anwendung eingearbeitet werden.

Ziel ist eine Routine, welche als nutzergeschriebene Funktion auch in kommerziellen Mehrkörperprogrammen wie SIMPACK oder ADAMS, aber auch in dem eigens entwickelten Mehrkörperprogramm EMD, eingebunden werden kann. Die Routine muss in Abhängigkeit von der Lage der Kontaktpartner und von definierten internen Zustandsgrößen die Kräfte und Momente für alle Lagerkomponenten berechnen können. Dies soll einerseits möglichst nahe der tatsächlichen Physik und andererseits möglichst schnell geschehen.

Eine grundsätzliche Unterscheidung soll hier zwischen einer 2D-Simulation und einer 3D-Simulation erfolgen. Eine 2D-Simulation stellt bezüglich der Kontaktgeometrie eine starke Vereinfachung dar, zudem können hier keine axialen Kräfte über den Kontakt abgebildet werden. Ferner wird ein Modell vorgestellt, welches eine einfache Berücksichtigung der strukturmechanischen Deformation der Wälzkörper vorsieht, damit ist die Kontaktgeometrie zeitlich variant und es können spezielle Effekte bei stark belasteten Wälzlagern

simuliert werden. Die 3D-Simulation liefert eine vollständige Abbildung der Kontaktkräfte auch in axialer Richtung, wobei der Rechenaufwand jedoch erheblich steigt.

3.2.2 Dynamische Wälzlagersimulation

Die Einbindung der Kontaktroutinen für die Einzelkontakte im Wälzlager in ein Mehrkörpersystem führt zu einem dynamischen System, welches mit einer gewöhnlichen Differentialgleichung mit nicht konstanten Koeffizienten beschrieben werden kann Gl. (3-32). Die Lösung der Differentialgleichung im Zeitbereich kann mit ODE-Solvern erzielt werden. Die Belastungen der einzelnen Wälzkörper, welche für die Lagerauslegung entscheidend sind, ergeben sich implizit aus der Erfüllung des dynamischen Kräftegleichgewichtes.

Der grundsätzliche Ablaufplan für die Einbindung in ein bestehendes MKS-Programm ist in Abb. (3-11) dargestellt. Ausgangspunkt ist die Bewegungsgleichung, dessen Lösung die Wege \underline{y} und die Geschwindigkeiten $\underline{\dot{y}}$ liefert. Aus diesen Informationen können die Kontakterkennung und eine Berechnung der Kontaktkräfte erfolgen. Diese müssen als Aktions- und Reaktionskraft auf die Lagerkomponenten aufgeprägt werden und in den Vektor der äußeren Kräfte \underline{h}_a eingepflegt werden. Im nächsten Zeitschritt ergeben sich neue Positionen und Geschwindigkeiten aufgrund der Beschleunigung $\underline{\ddot{y}}$. Die Grundbausteine der 2D- und

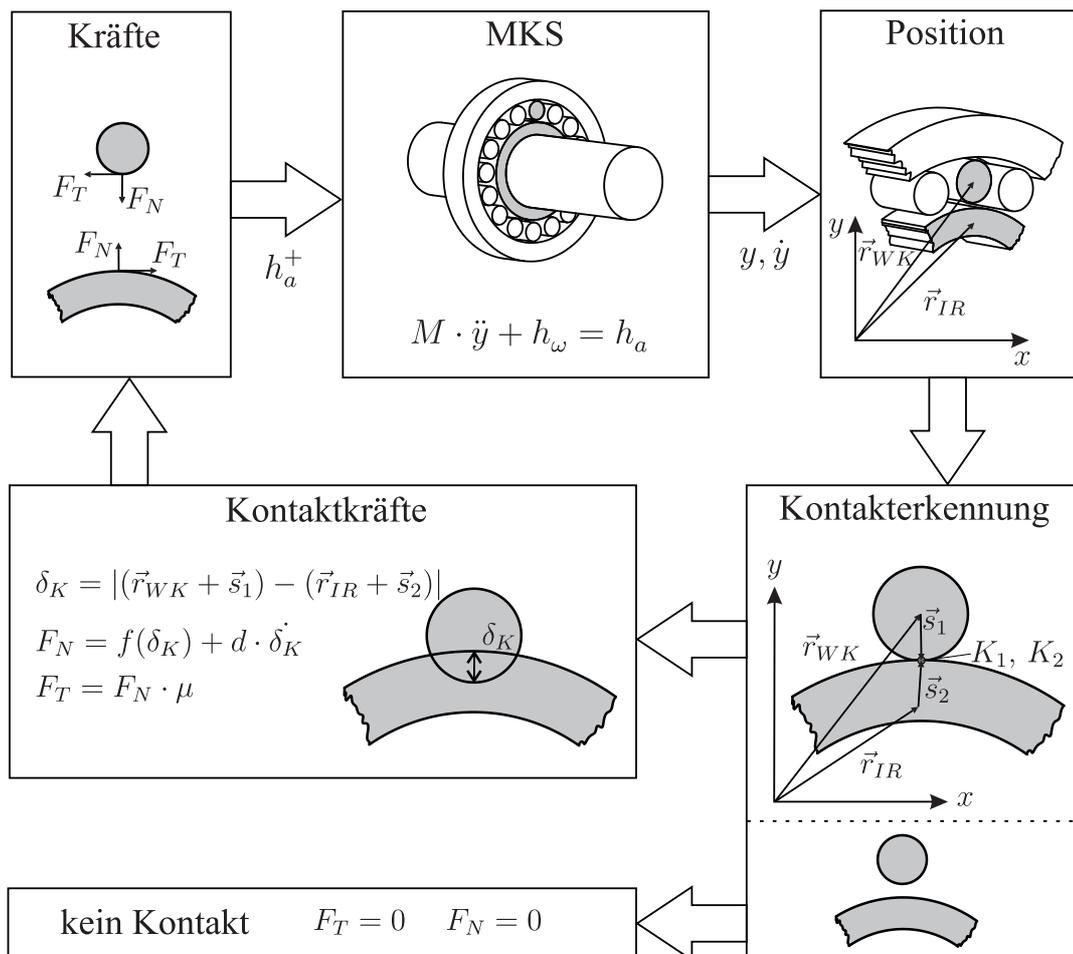


Abbildung 3-11: Ablaufplan Kraftroutine Wälzlager

3D-Kontaktoutine für das Wälzlager lassen sich in folgende Aufgaben unterteilen:

- Positionsbestimmung
- Kontakterkennung
- Bestimmung der Kontaktkräfte (normal und tangential)
- Berechnung der resultierenden Kräfte und Momente für alle Lagerpartner
- Kraftaufprägung

3.2.3 2D-Wälzlager

Kontakterkennung

Die Kontakterkennung umfasst die Berechnung der potentiellen Kontaktpunkte K_1 und K_2 . Der normale Abstand zwischen den beiden Punkten liefert die Eindringtiefe δ_K . Das Vorzeichen der Eindringtiefe kann zur Bestimmung des Kontaktstatus herangezogen werden. Kommt es zur Durchdringung der beiden Kontaktpartner, so wird δ_K kleiner als Null. Der 2D-Kontakt zwischen Körpern mit kreisförmiger Kontur lässt sich auf einfache Weise analytisch bestimmen. Nach Abb. (3-12) können für den Außenkontakt die Ortsvektoren zu den Kontaktpunkten K_1 und K_2 wie folgt bestimmt werden

$${}^I\underline{r}_{K1} = {}^I\underline{r}_{A1} + I\underline{s}_1, \quad {}^I\underline{r}_{K2} = {}^I\underline{r}_{A2} + I\underline{s}_2 \quad . \quad (3-107)$$

Die lokalen Vektoren von der Kreismitte zum Kontaktpunkt lassen sich dem Abstand ${}^I\underline{L}_M$ zwischen den Kreismittelpunkten bestimmen

$${}^I\underline{L}_M = {}^I\underline{r}_{A2} - {}^I\underline{r}_{A1}$$

$$I\underline{s}_1 = \frac{{}^I\underline{L}_M}{|{}^I\underline{L}_M|} \cdot R_1, \quad I\underline{s}_2 = -\frac{{}^I\underline{L}_M}{|{}^I\underline{L}_M|} \cdot R_2 \quad . \quad (3-108)$$

Die Normalenvektoren lassen sich direkt aus \underline{s}_1 und \underline{s}_2 berechnen:

$$I\underline{n}_1 = \frac{I\underline{s}_1}{|I\underline{s}_1|}, \quad I\underline{n}_2 = -\frac{I\underline{s}_2}{|I\underline{s}_2|}$$

Mit dem Abstandsvektor \vec{a}_K zwischen den potentiellen Kontaktpunkten ergibt sich die normale Eindringtiefe δ_K

$${}^I\underline{a}_K = {}^I\underline{r}_{K2} - {}^I\underline{r}_{K1} \quad ,$$

$$\delta_K = {}^I\underline{a}_K \cdot I\underline{n}_1 \quad .$$

Die normale Eindringgeschwindigkeit $\dot{\delta}_K$ lässt sich aus den Absolutgeschwindigkeiten \underline{v}_{K1} und \underline{v}_{K2} der Kontaktpunkte bestimmen

$$\dot{\delta}_K = ({}^I\underline{v}_{K2} - {}^I\underline{v}_{K1}) \cdot I\underline{n}_1 \quad .$$

Für den Innenkontakt nach Abb. (3-13) sind die Gleichungen grundsätzlich auch gültig, lediglich die Bestimmung der Normalenvektoren variiert.

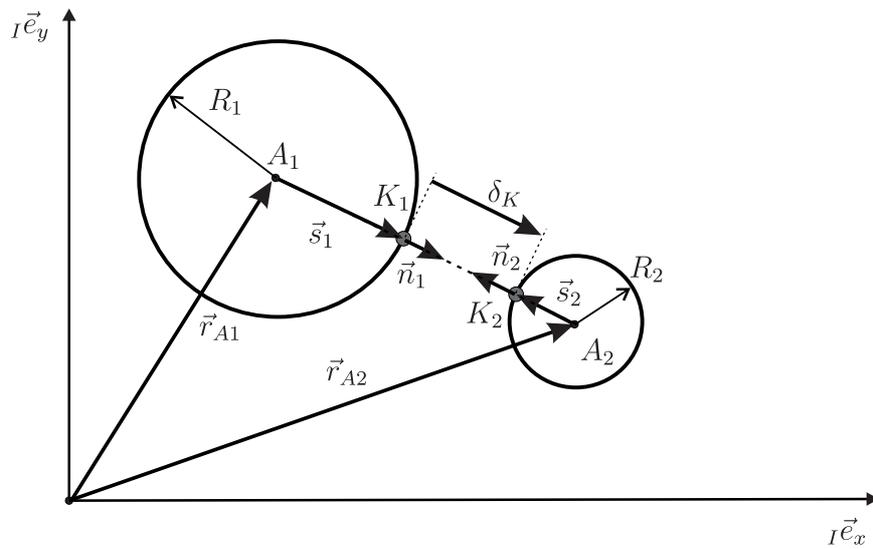


Abbildung 3-12: Kontakterkennung 2D - außen

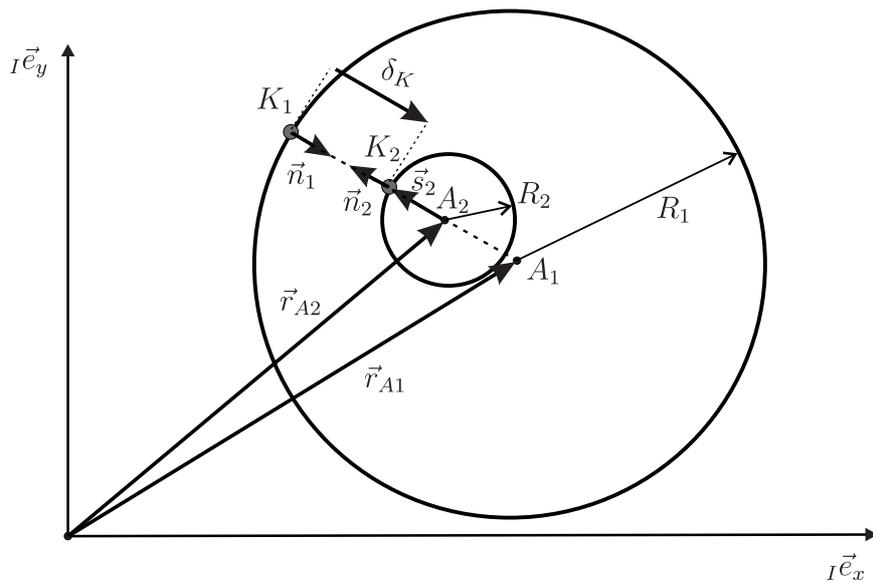


Abbildung 3-13: Kontakterkennung 2D - innen

Berechnung der Kontaktnormalkräfte

Eine einfache Möglichkeit zur Berechnung der Kontaktnormalkraft ist ein lineares Federgesetz

$$F_N = \begin{cases} \delta_K \cdot c + \dot{\delta}_K \cdot d & \text{falls } \delta_K \leq 0 \\ 0 & \text{falls } \delta_K > 0 \end{cases} \quad (3-109)$$

Bei konzentrierten Kontakten zwischen zwei gekrümmten Körpern können die Formeln nach Hertz für den Punktkontakt verwendet werden. Die hertzschen Formeln bestimmen

zunächst die Abplattung in Folge einer Normalkraft. Die Darstellungen von Hertz [Her81] selbst sind für diese Betrachtungen nicht direkt brauchbar, da er nur den Zusammenhang zwischen der Kontaktkraft und der Abmessung der Kontaktfläche bzw. des Drucks in dieser Fläche betrachtet hat. Dies ist in [BEHW95, S. 103] übersichtlich mit dem notwendigen Beiwert μ^* dargestellt. Für die dynamische Berechnung ist dieser Zusammenhang nicht anwendbar, daher muss die Umkehrfunktion Gl. (3-110) gebildet werden, die die Normalkraft als Funktion der Abplattung darstellt. Der Dämpfungsanteil der Kontaktkraft wird über eine Dämpfungskonstante eingebracht

$$F_N = \begin{cases} F_{HP}(\delta_K) + \dot{\delta}_K \cdot d & \text{falls } \delta_K \leq 0 \\ 0 & \text{falls } \delta_K > 0 \end{cases},$$

$$F_{HP}(\delta_K) = -\sqrt{\frac{E'^2 \cdot 3}{\rho'} \cdot \left(\frac{2 \cdot |\delta_K|}{3 \cdot \mu^*}\right)^3}, \quad (3-110)$$

$$\rho' = \frac{1}{R_{x1}} + \frac{1}{R_{y1}} + \frac{1}{R_{x2}} + \frac{1}{R_{y2}},$$

$$\frac{1}{E'} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}\right),$$

$$\mu^* = 0.171 \text{ (für Zylinder gegen Kugel)}.$$

Für die Auswertung werden die Krümmungsradien R_i , die E-Moduln E_i und die Querkontraktionszahlen ν_i der beiden Kontaktpartner benötigt.

Für den Kontakt einer Rolle kann die Kontaktkraft nicht mit dem Punktkontakt nach Hertz bestimmt werden. Hier wird ein Linienkontakt zwischen zwei Zylindern nach Kowalsky verwendet [Teu05, S. 147]

$$|\delta_K| = \frac{2 \cdot F_{HL}}{\pi \cdot l_K} \left[\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} \left(\ln \frac{d_1}{b^*} + 0,407 \right) + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \left(\ln \frac{d_2}{b^*} + 0,407 \right) \right], \quad (3-111)$$

$$b^* = \sqrt{\frac{4 \cdot F_{HL} (1 - \nu^2)}{\pi \cdot E \cdot l_K \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right)}}.$$

Wie sich zeigt, lässt sich die Umkehrfunktion von Gl. (3-111) nicht bilden. Daher muss diese Gleichung iterativ gelöst werden

$$b^* = \sqrt{\frac{4 \cdot F_{HLi} (1 - \nu^2)}{\pi \cdot E \cdot l_K \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right)}}, \quad (3-112)$$

$$F_{HLi+1} = \frac{\pi \cdot l_K \cdot |\delta_K|}{2 \cdot \left[\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} \left(\ln \frac{d_1}{b^*} + 0,407 \right) + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \left(\ln \frac{d_2}{b^*} + 0,407 \right) \right]}.$$

Die in Gl. (3-112) dargestellte Iterationsvorschrift konvergiert gegen den gesuchten Wert F_{HL} , der Gl. (3-111) erfüllt.

Berechnung der Tangentialkräfte im Kontaktpunkt

Der Betrag der Tangentialkraft im Kontaktpunkt lässt sich nach dem coulombschen Gesetz als Funktion der Normalkraft berechnen

$$F_T = F_N \cdot \mu(v_t) \quad . \quad (3-113)$$

Das Vorzeichen liefert die Relativgeschwindigkeit, wodurch folgende Vorschrift gefunden werden kann

$$\mu_1(v_t) = \mu_r \cdot \text{sign}(v_t) \quad . \quad (3-114)$$

Die Gl. (3-114) stellt ein sehr einfaches Gesetz dar, welches wegen der Unstetigkeit beim Vorzeichenwechsel der Geschwindigkeit für die numerische Behandlung während der Zeitintegration nicht geeignet ist. Eine einfache Erweiterung ist die Funktion \tanh , welche anstelle der sign Funktion tritt. Dieser glättet den Verlauf und liefert eine stetig differenzierbare Funktion

$$\mu_2(v_t) = \mu_r \cdot \tanh(k_\mu \cdot v_t) \quad . \quad (3-115)$$

Der Parameter k_μ skaliert den Anstieg von Null auf den Endwert und ist so ein Grad für die Glättung der Unstetigkeit der Schaltfunktion. Eine Unterscheidung zwischen Haftung und Reibung lässt sich mit folgender Funktion finden

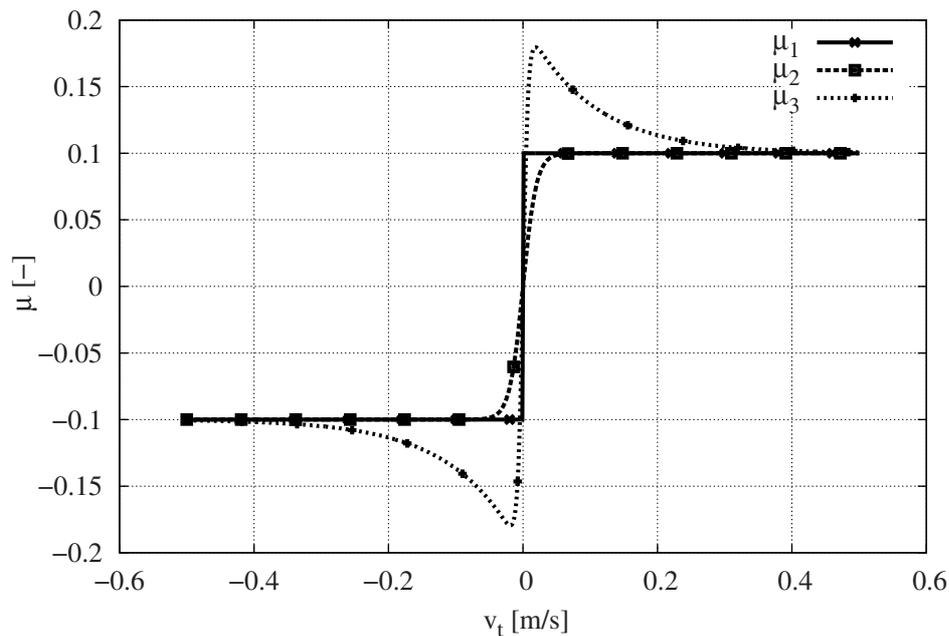


Abbildung 3-14: Verlauf des Reibkoeffizienten

$$\mu_3(v_t) = \left(\mu_r + (\mu_0 - \mu_r) \cdot e^{-\frac{v_t}{v_{grenz1}} \cdot \text{sign}(v_t)} \right) \cdot \tanh\left(\frac{v_t}{v_{grenz2}}\right) \quad . \quad (3-116)$$

Die Parameter v_{grenz1} und v_{grenz2} beschreiben die Grenzgeschwindigkeiten, bei denen der Übergang von null auf den Haftungskoeffizienten μ_0 und das Absinken auf den Reibkoeffizienten μ_r erfolgen soll. In Abbildung 3-14 sind die drei Funktionsverläufe für den kritischen Umkehrpunkt dargestellt.

Berücksichtigung von Konturdeformation der Wälzkörper

Die Übertragung der radialen Kräfte im Wälzlager durch die Wälzkörper führt bei hohen Belastungen zu einer Deformation derselbigen. Daraus resultierend ist die Kontur der Wälzkörper nicht mehr ideal kreisförmig. Die Folge ist ein veränderter Abrollradius, der die kinematischen Randbedingungen zwischen den Lagerbestandteilen beeinflusst.

Die Konturverformung kann mittels eines FE-Modells des Lagers abgebildet werden. Die Kombination elastischer Körper und die Kontaktsituation im MKS-Modell des Wälzlagers sind sehr schwierig. Eine Kontakterkennung auf der Oberfläche von elastischen Körpern ist grundsätzlich möglich, durch die Modellreduktion der FE-Struktur wird die Oberfläche nur durch diskrete Punkte abgebildet. Ein Abrollen auf dieser diskreten Oberfläche führt bei den hohen Kontaktsteifigkeiten zu großen Kraftschwankungen, die unphysikalisch sind. Weiterhin ist der numerische Aufwand, alle Wälzkörperbestandteile mittels elastischer Körper zu modellieren, welche eine detailliertes Oberflächennetz besitzen, sehr groß.

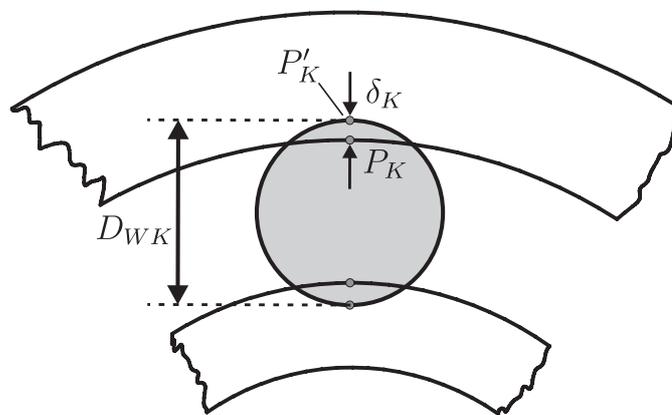


Abbildung 3-15: Kontakt mit starren Konturen

Abb. (3-15) zeigt eine allgemeine Kontaktsituation im Wälzlager. Die Formulierung des Kontaktproblems lässt eine gewisse Durchdringung der Körper zu. Damit gibt es auf jedem Kontaktpartner einen eigenen Kontaktpunkt (P_K und P'_K), der starr mit der Außenkontur verbunden ist. Eine mögliche Verlagerung des Kontaktpunktes P'_K durch eine Deformation des Wälzkörpers ist in Abb. (3-16) dargestellt. Die Verlagerung des Punktes um den Betrag s^* ist von der Belastung, also der Kontaktnormalkraft, abhängig. Diese wird aus der Durchdringung δ_K bestimmt, welche durch die Position der Kontaktpunkte bestimmt ist. Damit sind die Durchdringung δ_K und die Kontaktnormalkraft jeweils voneinander abhängig. Für statische Berechnungen kann die Lösung iterativ erzielt werden, indem sie nach jeder Berechnung der Kontaktkraft angepasst wird, bis ein Gleichgewicht erreicht wird. Für die dynamische Simulation in einem Mehrkörpersystem ist diese Methode nicht praktikabel, zudem ist ein statisches Gleichgewicht in einer dynamischen Simulation unphysikalisch, da sich der Wälzkörper nicht zeitlos deformiert. Jegliche Deformation ist durch die Massenträgheit und durch die Werkstoffdämpfung von der Zeit abhängig. Die Deformation des Wälzkörpers muss daher zwingend mit einer Differentialgleichung beschrieben werden. Die Modellbildung dazu ist in Abb. (3-17) dargestellt und zeigt die Reduktion der radialen Deformation eines Wälzkörpers auf die Einfederung eines Einmassenschwingers. Das Modell wird durch drei Parameter (c^*, d^*, m^*) beschrieben. Die Steifigkeit c^* kann mit-

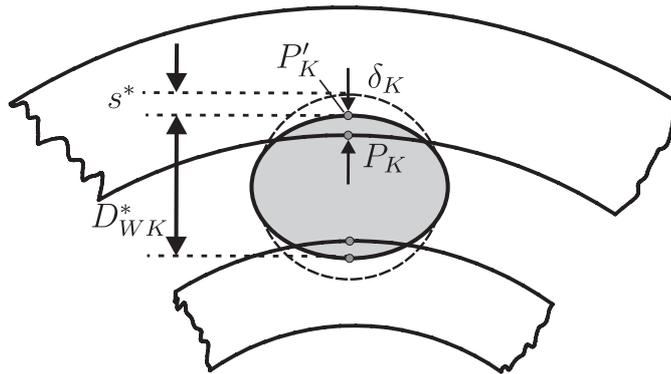


Abbildung 3-16: Kontakt mit elastischer Wälzkörperkontur

tels der Struktursteifigkeit des Wälzkörpers angenähert werden. Die Parameter m^* und d^* lassen sich hingegen aus einer Modalanalyse des Strukturmodells abschätzen. Für jeden Wälzkörper wird so eine zusätzliche Differentialgleichung formuliert

$$m^* \cdot \ddot{\xi}_i + d^* \cdot \dot{\xi}_i + c^* \cdot \xi_i = F_{Ni} \quad . \quad (3-117)$$

Die Verschiebung ξ_i am Wälzkörper i ist von der Kontaktnormalkraft F_{Ni} abhängig und kann durch die numerische Integration von Gl. (3-117) berechnet werden. Damit kann der aktuell wirksame Durchmesser des Wälzkörpers berechnet werden

$$D_{WK}^*(t) = D_{WK} - \xi(t) = D_{WK} - 2 \cdot s^*(t) \quad . \quad (3-118)$$

Der Kontaktradius bei der Bestimmung des Kontaktpunktes in Gl. (3-108) ändert sich

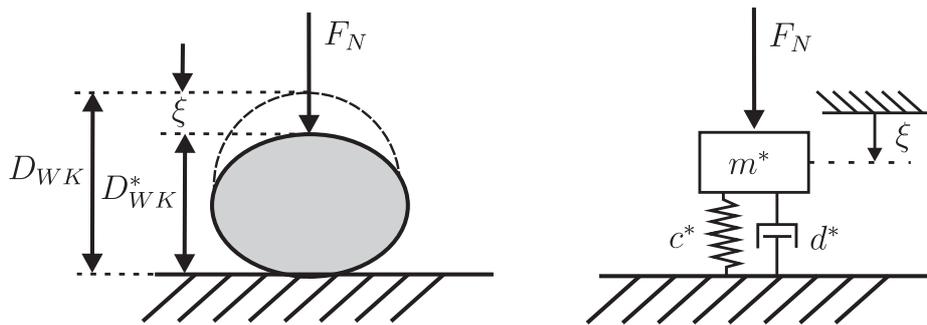


Abbildung 3-17: Modellbildung der elastischen Wälzkörperkontur

wie folgt

$$I \underline{s}_2 = - \frac{I \underline{L}_M}{|I \underline{L}_M|} \cdot \frac{D_{WK}^*(t)}{2} = - \frac{I \underline{L}_M}{|I \underline{L}_M|} \cdot \left(R_2 - \frac{\xi(t)}{2} \right) \quad . \quad (3-119)$$

Diese Modellierung verbessert den Detaillierungsgrad der Wälzlagersimulation erheblich bei moderater Erhöhung der Anzahl der Zustandsgrößen. Nachteilig ist jedoch die Reihenschaltung von Kontakt- und Struktursteifigkeit, wodurch das System weicher wird. Bei

der Verwendung der hertzischen Formeln zur Berechnung der Kontaktkraft ist der Verformungsanteil der Struktur schon enthalten. Die Reihenschaltung führt zu einer zu weicheren Gesamtsteifigkeit des Wälzkörperkontaktes. So stellt der Modellierungsansatz einen Kompromiss zwischen erweiterter Modellbildung und physikalischer Modellierung dar.

3.2.4 3D-Wälzlager

Kontakterkennung

Die Kontakterkennung für räumlich ausgeprägte Oberflächen ist sehr aufwendig. Zum einen steigt die Zahl der Parameter zur Beschreibung der Punkte auf den Oberflächen und weiterhin steigt auch die Zahl der potenziellen Kontaktpunkte. Das Kontaktgebiet kann aus mehreren Teilflächen zusammengesetzt sein, was den Berechnungsaufwand erhöht. Der allgemeine Kontakt zwischen zwei beliebigen Oberflächen kommt für die Wälzlagersimulation aus Gründen der Rechenzeit nicht in Betracht. Für rollenförmige Wälzkörper wird nach [DIN03] das Scheibenmodell vorgeschlagen. Dieses unterteilt den Wälzkörper in finite Teilstücke entlang der Figurenachse. Die Kontaktabfrage erfolgt für die Mitte jeder Scheibe, womit der Fläche-Fläche-Kontakt in einen Linien-Fläche-Kontakt überführt wird. Dieser kann analog zum 2D-Kontakt mit einem Kontaktpunkt beschrieben werden.

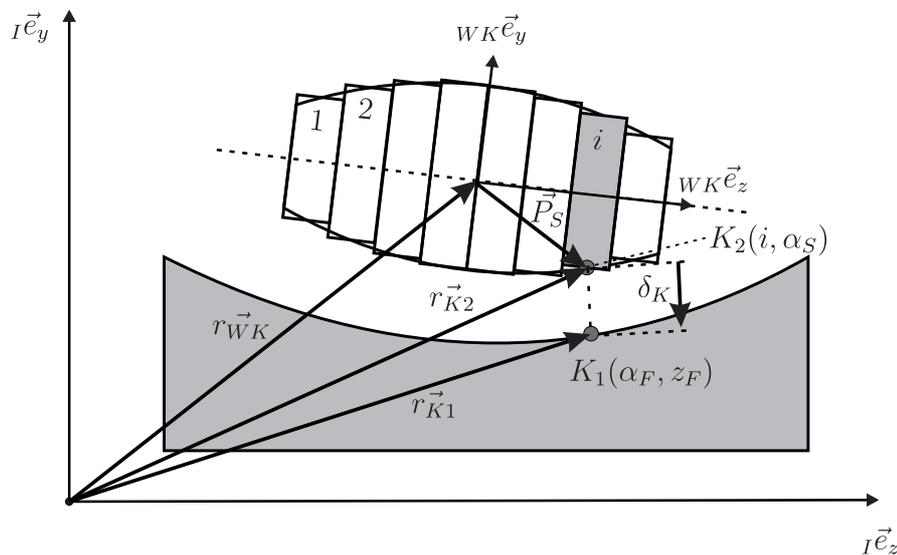


Abbildung 3-18: Scheibenmodell für die Kontakterkennung zwischen Laufbahn und Wälzkörper

Die Bestimmung des potenziellen Kontaktpunktes kann über die Suche des minimalen Abstands δ_K zwischen dem Außendurchmesser der Scheibe und der Laufbahnfläche erfolgen. Der Punkt P_S sei ein beliebiger Punkt auf dem Außendurchmesser der Scheibe. Die Lage des Punktes auf der Scheibenkontur kann bei gegebener Lage des Wälzkörpers und der Scheibenmitte durch einen Winkel α_s parametrisiert werden. Der Winkel beschreibt die

Lage des Punktes P_S im körperfesten Bezugssystem des Wälzkörpers um die Figurenachse

$${}^I\underline{r}_{K2} = {}^I\underline{r}_{WK} + \underline{Q}_{\underline{=WK}} \cdot {}^K\underline{c}_{SM}(i) + \underline{Q}_{\underline{=WK}} \cdot \begin{pmatrix} R_S(i) \cdot \cos \alpha_S \\ R_S(i) \cdot \sin \alpha_S \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (3-120)$$

Mit dem Ortsvektor von der Mitte des Wälzkörpers zur Mitte $\vec{c}_{SM}(i)$ der i -ten Scheibe mit dem Scheibenradius $R_S(i)$. Der Kontaktpunkt auf der Lauffläche des Außenrings kann analog formuliert werden

$${}^I\underline{r}_{K1} = {}^I\underline{r}_{AR} + \underline{Q}_{\underline{=AR}} \cdot \begin{pmatrix} R_F(z_F) \cdot \cos \alpha_F \\ R_F(z_F) \cdot \sin \alpha_F \\ z_F \end{pmatrix} . \quad (3-121)$$

Die Gl. (3-121) stellt eine rotationssymmetrische Fläche um die Figurenachse des Laufrings dar, dessen Mittelpunkt bei \vec{r}_{AR} liegt. Die Konturierung in Breitenrichtung kann mittels der Funktion $R_F(z_F)$ definiert werden. Die Parameter für die potentiellen Kontaktpunkte lassen sich im Vektor \underline{p} zusammenfassen

$$\underline{p} = (\alpha_F \quad z_F \quad \alpha_S)^T . \quad (3-122)$$

Die Gleichung mit den Parametern \underline{p} für die potentiellen Kontaktpunkte ist nichtlinear und kann über die Minimierung des Abstandes δ_K zwischen den Punkten K_1 und K_2 gelöst werden

$$\delta_K(\underline{p}) = |{}^I\underline{r}_{K2}(\alpha_F, z_F) - {}^I\underline{r}_{K1}(\alpha_S)| . \quad (3-123)$$

Die Extremwerte von $\delta_K(\underline{p})$ werden durch die Bestimmung der Nullstellen der ersten Ableitung $\underline{D}(\underline{p})$ ermittelt

$$\underline{D}(\underline{p}) \equiv \frac{\partial \delta_K(\underline{p})}{\partial \underline{p}} = \underline{0} . \quad (3-124)$$

Damit muss ein Nullstellenproblem für eine mehrdimensionale Funktion mit mehreren Parametern gelöst werden. Die Lösung von Gl. (3-124) kann mit dem Newton-Verfahren erzielt werden, dazu wird die Funktion in eine Taylorreihe bis zum Glied der ersten Ordnung entwickelt

$$\underline{D}_T(\underline{p}) = \frac{\underline{D}(\underline{p})}{0!} + \frac{\underline{D}'(\underline{p})}{1!} \cdot \Delta \underline{p} + \underline{R}(O^2) . \quad (3-125)$$

Mit der Forderung, dass $\underline{D}_T(\underline{p}) = \underline{0}$ sein soll, ergibt sich

$$\Delta \underline{p} = -\underline{D}'(\underline{p})^{-1} \cdot \underline{D}(\underline{p}) .$$

So ergibt sich eine Iterationsvorschrift für den Parametervektor \underline{p}

$$\underline{p}_{i+1} = \underline{p}_i - \underline{D}'(\underline{p}_i)^{-1} \cdot \underline{D}(\underline{p}_i) . \quad (3-126)$$

Die konvergente Lösung von Gl. (3-126) liefert die Kontaktpunkte, für die der Abstand $\delta_K(\underline{p})$ extremal ist. Das Extrema muss noch auf ein Minimum geprüft werden, dies ist der Fall, wenn $\underline{\underline{D}}'(\underline{p})$ positiv definit ist, also alle Eigenwerte positiv sind. In der Praxis ist der Aufwand zu groß, die Abstandsfunktion $\delta_K(\underline{p})$ kann für eine Lösung \underline{p} direkt ausgewertet und auf Relevanz überprüft werden. Die Periodizität von α_S und α_F in dem Parametervektor \underline{p} ermöglicht eine einfache Generierung einer neuen Startlösung für das Newton-Verfahren Gl. (3-126).

Im Falle eines Durchdringens würde dieses Verfahren jedoch versagen, da es in diesem Fall zwei Schnittpunkte zwischen der Scheibe und der Lauffläche gäbe. Ein Schnittpunkt stellt das absolute Minimum von $\delta_K(\underline{p})$ dar, ist aber nicht der gesuchte potentielle Kontaktpunkt. Im Kontaktpunkt müssen die Normalenvektoren auf den Flächen koaxial sein. Diese Bedingung kann als Nebenbedingung formuliert werden

$${}_I\underline{\psi}(\underline{p}) = {}_I\underline{n}_S(\alpha_S) \times {}_I\underline{n}_F(\alpha_F, z_F) \quad . \quad (3-127)$$

Die Nebenbedingung kann damit wie folgt formuliert werden

$$0 = g_{NB}(\underline{p}) = |{}_I\underline{\psi}(\underline{p})| \quad . \quad (3-128)$$

Die Koaxialität der Normalenvektoren kann über die Länge des Vektors ${}_I\underline{\psi}$ bestimmt werden. Es ergibt sich eine neue Gesamtfunktion, deren Nullstelle gesucht wird

$$\underline{D}^*(\underline{p}, \lambda) = \underline{D}(\underline{p}) + \lambda_N \cdot \underline{g}'_{NB}(\underline{p}) \quad . \quad (3-129)$$

Mit der Abkürzung

$$\underline{g}'_{NB}(\underline{p}) = \frac{\partial g_{NB}(\underline{p})}{\partial \underline{p}} \quad .$$

Mit der Nebenbedingung ergibt sich folgende neue Funktion

$$\underline{F}(\underline{p}^*) = \begin{pmatrix} \underline{D}(\underline{p}) + \lambda_N \cdot \underline{g}'_{NB}(\underline{p}) \\ g_{NB}(\underline{p}) \end{pmatrix} \quad . \quad (3-130)$$

Der neue Parametervektor lautet

$$\underline{p}^* = \begin{pmatrix} \underline{p} \\ \lambda_N \end{pmatrix} \quad .$$

Das Newton-Verfahren kann analog für Gl. (3-130) angewendet werden und liefert \underline{p}^* , aus dem \underline{p} entnommen werden kann.

Diese Methode der Kontaktpunktbestimmung liefert in der Praxis ein schlecht konditioniertes Gleichungssystem für die Iterationsmatrix $\underline{\underline{F}}'(\underline{p}^*)$. Die gesuchten Parameter \underline{p} können damit nicht genau genug bestimmt werden, dies hat während der Zeitintegration starke Auswirkungen auf die Kontaktkraftberechnung. Ein praktikabler Ansatz kann auch ohne Formulierung einer Zwangsbedingung gefunden werden. Dazu wird Gl. (3-120) wie folgt modifiziert

$${}_I\underline{r}_{K2} = {}_I\underline{r}_{WK} + \underline{Q}_{WK} \cdot {}_K\underline{c}_{SM}(i) + \underline{Q}_{WK} \cdot \begin{pmatrix} (R_S(i) - \Delta) \cdot \cos \alpha_S \\ (R_S(i) - \Delta) \cdot \sin \alpha_S \\ 0 \end{pmatrix} \quad . \quad (3-131)$$

Mit einer geeigneten Wahl von Δ in Gl. (3-131) kann ein Schnittpunkt zwischen Scheibe und Lauffläche vermieden werden, vorausgesetzt die Kontaktsteifigkeit für die betrachtete Scheibe führt nicht zu Eindringungen δ_K , die größer sind als Δ . Gl. (3-131) darf nur zur Bestimmung der Parameter \underline{p} herangezogen werden, die Lage des Kontaktpunktes muss mit Gl. (3-120) bestimmt werden.

Berechnung der Kontaktnormalkräfte

Nachdem die Durchdringungen aller Scheiben k_S mit der Laufbahn bestimmt sind, muss die Kontaktnormalkraft für jede Scheibe berechnet werden. Die DIN ISO 281-4 schlägt eine unabhängige Federsteifigkeit für jede Scheibe vor. Damit sind die Normalkräfte nur von der aktuellen Einfederung der aktuellen Scheibe abhängig. Die Federsteifigkeit einer Scheibe ergibt sich damit zu

$$\bar{c}_S = 35948 \cdot \bar{l}_K^{\left(\frac{8}{9}\right)} \cdot \frac{1}{k_S} \quad . \quad (3-132)$$

l_K ist die Breite des Wälzkörpers. Die Breite B_S einer Scheibe berechnet sich aus

$$B_S = \frac{l_K}{k_S} \quad . \quad (3-133)$$

Die Linienlast für eine Scheibe ergibt sich zu

$$\bar{q}_\lambda = \delta_K^{\frac{10}{9}} \cdot \frac{\bar{c}_S}{B_S} \quad . \quad (3-134)$$

Für die Scheiben am Rand wird eine Korrekturfunktion f_K für die i -te Scheibe vorgeschlagen

$$\bar{q}_\lambda = \bar{q}_\lambda \cdot f_K \quad , \quad (3-135)$$

$$f_K = 1 - \frac{0.01}{\ln \left(1.985 \cdot \left| \frac{2 \cdot i - k_S - 1}{2 \cdot k_S - 2} \right| \right)} \quad . \quad (3-136)$$

So kann die Spannungskonzentration am Rand des Wälzkörpers näherungsweise erfasst werden. Die Kontaktnormalkraft für eine Scheibe mit der Breite B_S ergibt sich analog Gl. (3-109) zu

$$F_N = -q_\lambda \cdot B_S + \dot{\delta}_K \cdot d \quad . \quad (3-137)$$

Dabei ist zu beachten, dass Gl. (3-132) und Gl. (3-134) zugeschnittene Größengleichungen sind. Die überstrichenen Eingangsgrößen müssen in $[mm]$ eingesetzt werden. Die Einheit von \bar{q}_λ ist damit $[N/mm]$ und muss entsprechend in $[N/m]$ für q_λ umgerechnet werden.

Das Scheibenmodell aus [DIN03] sieht eine vereinfachte Methode zur Bestimmung der Kontaktkräfte vor. Es existieren weit mehr empirische Modelle wie das alternative Scheibenmodell (AST) von Teutsch [Teu05] oder die Näherungsformeln von Tripp [Tri85]. Für das hier vorgestellte Kraftelement ist die exakte Bestimmung der Spannungsverteilung am Wälzkörpers nicht dominant. Im Vordergrund stehen eine ganzheitliche Simulation des rotodynamischen Modells und eine möglichst geringe Simulationszeit.

3.3 Gleitlagersimulation

Die Abbildung von Gleitlagern als Krafftelement zwischen Lagerschale und Welle erfordert die Wechselwirkung zwischen Lage der Welle in der Lagerschale und der im Schmierfilm resultierenden Druckverteilung. Der Zusammenhang lässt sich aus der Betrachtung der Strömungsmechanik im Fluid herleiten. Die beschreibenden Gleichungen liefern nach deren Lösung die Druckverteilung im Schmierpalt. Dieser Vorgang ist teilweise sehr aufwendig. Wie schon in Abschnitt 2.3 erwähnt, wurden in der Vergangenheit zahlreiche Näherungslösungen entwickelt, um die resultierende Tragkraft durch wenige Operationen bestimmen zu können. Numerische Lösungen, die einen sehr hohen Modellierungsgrad aufweisen, sind teilweise numerisch aufwendig, sodass die Einbindung in eine Dynamik-Simulation aufgrund der Rechenzeit ausscheidet.

Die Idee, welche in dieser Arbeit verfolgt wird, ist einen Kompromiss zwischen einer verbesserten Modellierungstiefe des Gleitlagers bei gleichzeitiger Erhaltung der numerischen Effizienz zu finden. Bestimmte Effekte lassen sich nicht durch Linearisierung der Schmierfilmgleichung oder Kennfeldlösungen abbilden. Daher wird eine numerische Lösung der Schmierfilmgleichung präferiert. Der Schwerpunkt liegt dabei auf einer möglichst genauen Bestimmung der kinematischen Größen im Schmierpalt. Die Berechnung des hydrodynamischen Druckes erfolgt mit einem relativ einfachen Modell. In Summe ergibt sich ein Gleitlagermodell, welches zahlreiche Effekte wie Schiefstellung, Lagermomente und lokale Lagerschalendeformation abbilden kann.

3.3.1 Hydrodynamische Grundlagen des Radialgleitlagers

Die detaillierte Herleitung für die Grundgleichung kann [LS78] entnommen werden. Grundlage sind die Navier-Sokes-Gleichung Gl. (3-138) und die Kontinuitätsgleichung Gl. (3-139)

$$\rho \cdot \frac{D\mathbf{w}}{Dt} = -\nabla p + \eta \cdot \Delta \mathbf{w} \quad , \quad (3-138)$$

$$0 = \left(\frac{\partial q_x}{\partial s x} + \frac{\partial q_y}{\partial s y} + \frac{\partial q_z}{\partial s z} \right) \quad . \quad (3-139)$$

Aufgeschrieben in Komponenten lautet die Navier-Stokes Gleichung

$$\begin{aligned} \rho \cdot \dot{u} &= -\frac{\partial p}{\partial s x} + \eta \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial s y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial s z^2} \right) \quad , \\ \rho \cdot \dot{v} &= -\frac{\partial p}{\partial s y} + \eta \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial s x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial s y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial s z^2} \right) \quad , \\ \rho \cdot \dot{w} &= -\frac{\partial p}{\partial s z} + \eta \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial s y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial s z^2} \right) \quad . \end{aligned}$$

Diese Gleichungen beschreiben die Strömung in einem kompressiblen Medium im \mathbb{R}^3 . Lösungen dieser Gleichungen sind i.A. nur iterativ zu ermitteln. Entsprechende Methoden sind innerhalb von CFD-Rechnungen umgesetzt. Um eine auf das Radialgleitlager zugeschnittene Differentialgleichung abzuleiten, werden verschiedene Vereinfachungen eingeführt:

- Der Schmierspalt wird abgewickelt und durch ein kartesisches Koordinatensystem S beschrieben (Abb. (3-22)), welches zunächst unabhängig vom Koordinatensystem zur Beschreibung der Körperbewegungen ist: ${}_Sx$ zeigt dabei in Umfangsrichtung, ${}_Sy$ in Breitenrichtung und ${}_Sz$ in Spaltdickenrichtung.
- Trägheitskräfte im Fluid werden vernachlässigt $\rho \cdot \frac{Dw}{Dt} = \underline{0}$
- Die zweite Ableitung der Geschwindigkeit ist in Breiten- und in Umfangsrichtung vernachlässigbar klein, z.B. $\frac{\partial^2 u}{\partial {}_Sx^2} = 0$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial {}_Sy^2} = 0$
- Die Druckänderung ist über die Spaltdickenrichtung vernachlässigbar $\frac{\partial p}{\partial {}_Sz} = 0$
- das Fluid ist inkompressibel (die Dichte ρ ist konstant)

Mit der Einführung der mittleren hydrodynamisch wirksamen Geschwindigkeit $u_m = \frac{U_W + U_S}{2}$ ergibt sich die Reynolds-Gleichung Gl. (3-140)

$$\frac{\partial}{\partial {}_Sx} \left(\frac{h^3}{12 \cdot \eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial {}_Sx} \right) + \frac{\partial}{\partial {}_Sy} \left(\frac{h^3}{12 \cdot \eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial {}_Sy} \right) = u_m \cdot \frac{\partial h}{\partial {}_Sx} + \frac{\partial h}{\partial t} \quad . \quad (3-140)$$

3.3.2 Bestimmung der Spaltfunktion

Die kinematischen Eingangsgrößen der Reynolds-Gleichung sind der Spalt h und die Spaltänderung $\dot{h} = \partial h / \partial t$. Diese müssen aus den kinematischen Gegebenheiten von Welle und Lagerschale bestimmt werden. Der Spalt ist dabei der normale Abstand zwischen Wellen- und Schalenoberfläche. Die zeitliche Ableitung des Spaltes ist die absolute Ableitung, also von einem ruhenden Beobachter aus. Dies ist besonders zu beachten, wenn der Spalt aus einem Gitter beschrieben wird, welches Selbst nicht inertialsystemfest ist. Dies ist z.B. der Fall bei einem Pleuellager, hier wird die Lagerschale kontinuierlich beschleunigt und rotiert selbst durch die Schwenkbewegung. Die zeitliche Ableitung kann in diesem Fall nicht aus dem Differenzenquotienten zweier aufeinanderfolgender Spaltfunktionen bestimmt werden, da dies nur der relativen Ableitung eines mitbewegten Beobachters entspräche. Die Bestimmung von h und \dot{h} bestimmt maßgeblich, welche Modellierungstiefe die Gleitlagersimulation erhalten soll. Im einfachsten Fall wird von einer reinen translatorischen Verlagerung der Welle in der Lagerschale ausgegangen und die Kontur der Lagerpartner sei starr. Dies erzeugt einen Parallelspalt, welcher mit wenig Aufwand bestimmt werden kann. Weiterhin ist es möglich die Schiefstellung der Welle in der Lagerschale abzubilden, was den Aufwand, die Spaltänderung zu bestimmen, deutlich erhöht. In diesem Fall kann die Druckverteilung in Breitenrichtung unsymmetrisch werden, sodass ein Moment senkrecht zur Rotationsachse generiert wird. Die aufwendigste Modellierung ist die Modellierung des EHD-Kontaktes, bei dem die lokale elastische Deformation der Lagerschale berücksichtigt wird. Dies ist möglich, wenn die Lagerstruktur mit einem elastischen Körper modelliert wird, welcher in der Lagerschale ein regelmäßiges Knotennetz enthält. Hier wird die absolute Position und Geschwindigkeit jedes Knotens bestimmt und mithilfe der Normalenvektoren die gesuchte Spaltfunktion und Spaltänderung ermittelt. Dies ist sehr zeitaufwendig und führt im Vergleich zur starren Lagerkontur zu einer höheren Rechenzeit.

Parallelspalt

Für die Bestimmung der Spaltfunktion ohne Schiefstellung wird ein Schnitt durch das Lager betrachtet - Abb. (3-19). Beim kreiszylindrischen Lager werden die Lagerkonturen durch Kreise abgebildet. Für die Beschreibung der Wellenverlagerung in der Lagerschale wird die Exzentrizität ε verwendet. Diese ergibt sich aus der relativen Position der Wellenmitte W zur Lagerschalenmitte S , dabei genügen die Verschiebungen senkrecht zur Drehachse x_W und y_W . Die zeitlichen Ableitungen \dot{x}_W und \dot{y}_W müssen aus den schon genannten Gründen absolut sein, d.h. bezüglich des Inertialsystems. Für kleine Exzentrizitäten kann die Spaltfunktion mit dem radialen Lagerspiel C wie folgt beschrieben werden[GNP06]

$$h = C - \varepsilon \cdot \cos(\varphi - \alpha_\varepsilon) \quad , \quad (3-141)$$

$$\dot{h} = -\dot{\varepsilon} \cdot \cos(\varphi - \alpha_\varepsilon) - \varepsilon \cdot \dot{\alpha}_\varepsilon \cdot \sin(\varphi - \alpha_\varepsilon) \quad . \quad (3-142)$$

Mit

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sqrt{x_W^2 + y_W^2} \quad , \\ \dot{\varepsilon} &= \frac{x_W \cdot \dot{x}_W + y_W \cdot \dot{y}_W}{\sqrt{x_W^2 + y_W^2}} \quad , \\ \alpha_\varepsilon &= \tan\left(\frac{y_W}{x_W}\right) \quad , \\ \dot{\alpha}_\varepsilon &= \frac{x_W \cdot \dot{y}_W - y_W \cdot \dot{x}_W}{x_W^2 + y_W^2} \quad . \end{aligned}$$

Die Funktion Gl. (3-141) liefert für beliebige Positionen φ in Umfangsrichtung die gesuchte Spaltfunktion h .

Schiefstellung der Welle

Die Spaltfunktion zwischen beliebig orientierten Kreiszyllindern ist nicht mehr durch eine einfache analytische Funktion beschreibbar, da diese von der Orientierung beider Körper abhängig ist. Eine vektorielle Beschreibung der Oberflächenpunkte auf Welle und Lagerschale ist daher vorzuziehen. Eine schief gestellte Welle verursacht eine über die Lagerbreite veränderliche Exzentrizität. Wenn diese für die betrachtete Breitenposition bekannt ist, lässt sich die Spaltfunktion mit Gl. (3-141) berechnen. Mit der Position von Wellen- und Schalenmitte ${}^I\mathcal{L}_{WM}$ und ${}^I\mathcal{L}_{SM}$ und deren Orientierungsmatrix $\underline{Q}_{\underline{W}}$ und $\underline{Q}_{\underline{S}}$ lässt sich die Exzentrizität in einem Abstand z_M von der Lagermitte wie folgt berechnen

$$\begin{aligned} \underline{Q}_{\underline{rel}} &= \underline{Q}_{\underline{S}}^T \cdot \underline{Q}_{\underline{W}} \quad , \\ s\underline{r}_{rel} &= \underline{Q}_{\underline{S}}^T \cdot ({}^I\mathcal{L}_{WM} - {}^I\mathcal{L}_{SM}) \quad , \\ s\underline{e}_{zW} &= \underline{Q}_{\underline{rel}} \cdot {}^W\mathbf{e}_z \quad . \end{aligned}$$

Mit dem Einheitsvektor $s\underline{e}_{zW}$ entlang der Figurenachse der Welle, in Koordinaten der Lagerschale, kann die aktuelle Wellenmitte bzw. die Exzentrizität mit der Gerade $s\underline{g}$ beschrieben werden

$$s\underline{g} = s\underline{r}_{rel} + z_M \cdot s\underline{e}_{zW} \quad . \quad (3-143)$$

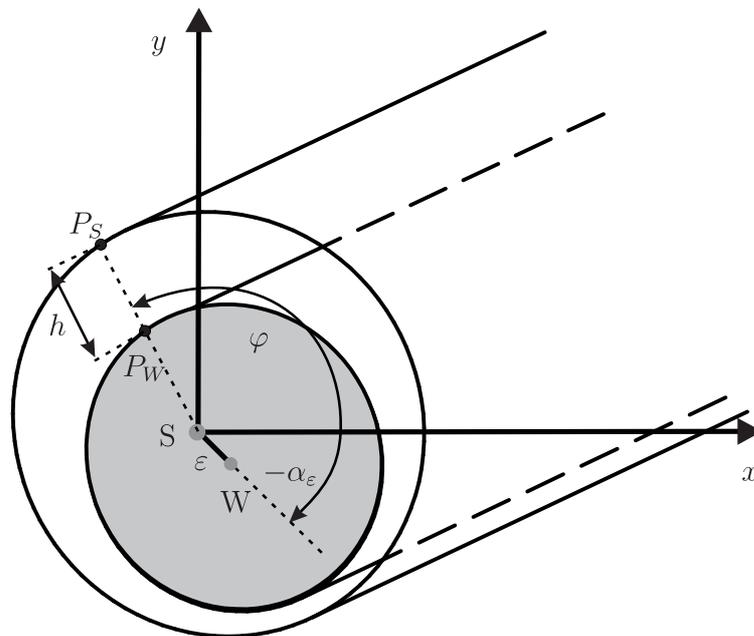


Abbildung 3-19: Spaltfunktion des Radialgleitlagers

Daraus lassen sich die benötigten Komponenten die Exzentrizität der Welle entnehmen

$$\begin{pmatrix} x_W \\ y_W \\ z_W \end{pmatrix} = s \underline{g} \quad . \quad (3-144)$$

Mit x_W und y_W aus Gl. (3-144) kann mit Gl. (3-141) die Spaltfunktion für die aktuelle Breitenreihe des hydrodynamischen Gitters bestimmt werden. Für die Spaltänderung kann dieses Verfahren nicht verwendet werden. Hierfür muss auf der Lagerschale entsprechend der Diskretisierung ein Punkt P_S konstruiert werden. Anschließend wird entsprechend der Lage der Welle ein korrespondierender Punkt auf der Welle P_W bestimmt - Abb. (3-20). Mit der Position $I\underline{c}_{PW}$ und $I\underline{c}_{PS}$ der Punkte P_W und P_S von der Schalenmitte aus lässt sich die absolute Geschwindigkeit beider Punkte berechnen

$$I\underline{v}_{PW} = I\underline{\dot{r}}_{WM} + I\underline{c}_{PW} \times I\underline{\omega}_W \quad , \quad (3-145)$$

$$I\underline{v}_{PS} = I\underline{\dot{r}}_{SM} + I\underline{c}_{PS} \times I\underline{\omega}_S \quad . \quad (3-146)$$

Mit dem Normalenvektor $I\underline{n}_W$ und $I\underline{n}_S$ auf Wellen- und Schalenoberfläche kann abschließend die Spaltänderung berechnet werden

$$\begin{aligned} v_{PWn} &= I\underline{v}_{PW} \cdot I\underline{n}_W \quad , \\ v_{PSn} &= I\underline{v}_{PS} \cdot I\underline{n}_S \quad , \\ \dot{h} &= v_{PSn} - v_{PWn} \quad . \end{aligned} \quad (3-147)$$

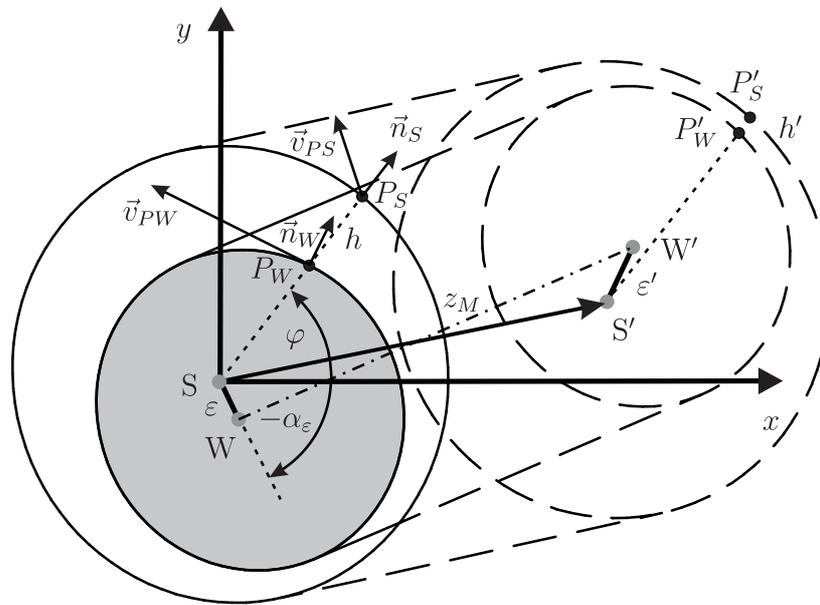


Abbildung 3-20: Spaltfunktion mit Schiefstellung

Spaltfunktion zwischen elastischen Körpern

Die Modellierung eines Gleitlagers mit elastischen Körpern ist sehr aufwendig. Der Körper der Lagerschale muss mit Volumenelementen diskretisiert werden. Im Bereich der Lagerschale ist ein regelmäßiges Netz einer ausreichenden Anzahl an Knoten in Breiten und in Umfangsrichtung erforderlich. Die Deformationen der Welle werden sich in den meisten Fällen auf die globale Biegung beschränken, daher wird die Welle mit Balkenelementen diskretisiert, welche im Bereich der Lagerung die gleiche Teilung besitzen wie die Lagerschale. Im Unterschied zu einer starren Lagerkontur ist die Mitte der Lagerschale nicht eindeutig bestimmbar. Zur Bestimmung der Spaltfunktion werden die kinematischen Größen zwischen den Oberflächen der Lagerpartner ausgewertet. Hierfür ist es notwendig, für jeden Marker auf der Schale P_S einen korrespondierenden Punkt P_W auf der Oberfläche der Welle, zu bestimmen. In Abb. (3-21) ist die Bestimmung von P_W aus den vorhandenen Informationen über die Lage des Wellenmittelpunktes W und des Schalenpunktes P_S dargestellt. Der Schnittpunkt der gedachten Kontur der Welle und die Verbindung zwischen Wellenmitte und Schalenpunkt liefern die Lage auf der Wellenoberfläche

$$I_{\mathcal{L}PS} = I_{\mathcal{L}WM} - I_{\mathcal{L}PS} \quad ,$$

$$I_{\mathcal{L}PW} = \frac{I_{\mathcal{L}PS}}{|I_{\mathcal{L}PS}|} \cdot R_w \quad .$$

Die Lage und Geschwindigkeit des Wellenoberfläche ergeben sich daraus zu

$$I_{\mathcal{L}PW} = I_{\mathcal{L}WM} + I_{\mathcal{L}PW} \quad ,$$

$$I_{\mathcal{U}PW} = I_{\dot{\mathcal{L}}WM} + I_{\mathcal{L}PW} \times I_{\omega W} \quad .$$

Weiterhin müssen die Normalenvektoren \vec{n}_S auf der Lagerschale und \vec{n}_W auf der Oberfläche der Wellen bestimmt werden. Der Normalenvektor auf der starren Wellenkontur kann wie

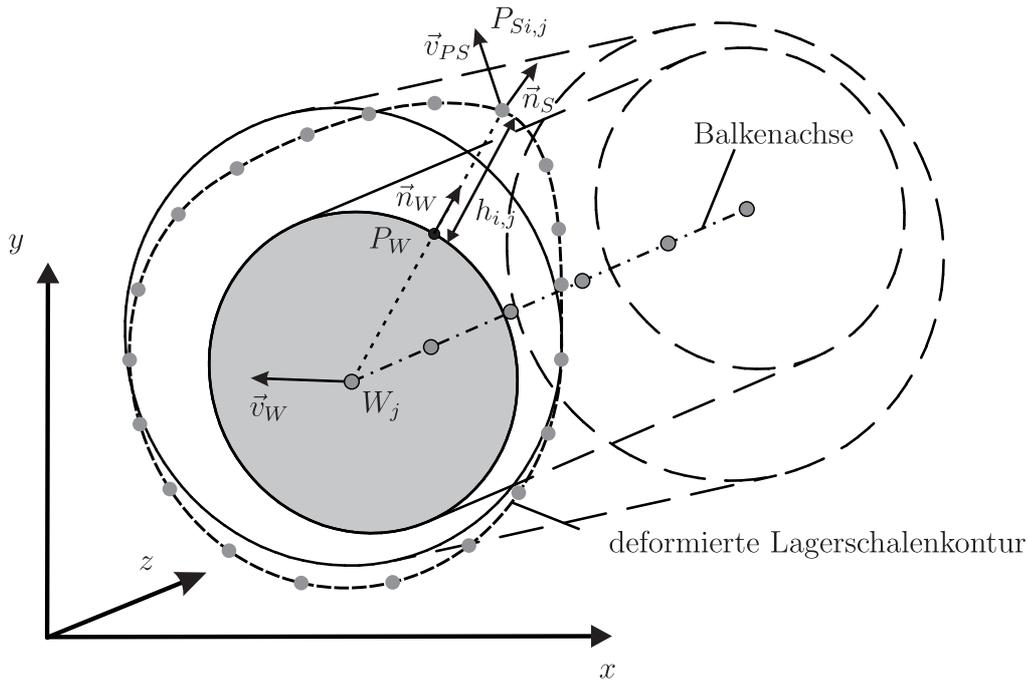


Abbildung 3-21: Spaltfunktion zwischen elastischen Körpern

folgt bestimmt werden

$${}^I \underline{n}_W = \frac{{}^I \mathcal{C}_{PW}}{|{}^I \mathcal{C}_{PW}|} \quad .$$

Der Normalenvektor der Schale ändert sich mit der elastischen Deformation, die Änderung der Krümmung wird bei kleinen elastischen Deformationen klein sein, daher wird der Normalenvektor der nicht deformierten Kontur verwendet. Dieser lässt sich aus der Verbindung zwischen Schalenpunkt und Flächenschwerpunkt der Lagerschale bestimmen

$${}^I \mathcal{C}_{MS_PS} = {}^I \mathcal{C}_{PS} - \frac{1}{nx} \cdot \sum_{i=1}^{nx} {}^I \mathcal{C}_{PSi} \quad ,$$

$${}^I \underline{n}_S = \frac{{}^I \mathcal{C}_{MS_PS}}{|{}^I \mathcal{C}_{MS_PS}|} \quad .$$

Der Spalt zwischen Welle und Schale ergibt sich aus dem normalen Abstand zwischen Wellen- und Schalenpunkt

$$h = {}^I \underline{n}_S \cdot ({}^I \underline{r}_{PS} - {}^I \underline{r}_{PW}) \quad . \quad (3-148)$$

Die Spaltänderung lässt sich aus der Differenz der Normalgeschwindigkeiten beider Oberflächen bestimmen

$$\dot{h} = {}^I \underline{n}_S \cdot {}^I \underline{v}_{PS} - {}^I \underline{n}_W \cdot {}^I \underline{v}_{PW} \quad . \quad (3-149)$$

Für die Bestimmung der Spaltfunktion müssen Gl. (3-148) und Gl. (3-149) für alle Gitterpunkte ausgewertet werden. In der Position des Lagerschalenknotens ${}^I \underline{r}_{PS}$ und des Wellenknotens ${}^I \underline{r}_{PW}$ sind die elastischen Deformationen der Körper enthalten, womit die lokale elastische Deformation der Lagerschale implizit enthalten ist. Bei der Berechnung erfolgt keine Unterscheidung zwischen globaler und lokaler Deformation der Lagerpartner.

3.3.3 Analytische Lösung der Reynolds-Gleichung

Bei kurzen Gleitlagern ist der Druckgradient in Breitenrichtung deutlich größer als der Druckgradient in Umfangsrichtung

$$\frac{\partial}{\partial_{Sx}} \left(\frac{h^3}{12 \cdot \eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial_{Sx}} \right) \ll \frac{\partial}{\partial_{Sy}} \left(\frac{h^3}{12 \cdot \eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial_{Sy}} \right) \quad .$$

Diese Näherung ist auch als Kurzlagertheorie bekannt. Folglich kann die Gl. (3-140) vereinfacht werden

$$\frac{\partial}{\partial_{Sy}} \left(\frac{h^3}{12 \cdot \eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial_{Sy}} \right) = u_m \cdot \frac{\partial h}{\partial_{Sx}} + \frac{\partial h}{\partial t} \quad . \quad (3-150)$$

Diese Gleichung besitzt für die vorgegebene Spaltfunktion h eine analytische Lösung. Unter der Annahme, dass die Terme auf rechte Seite von Gl. (3-150) nicht von y abhängig sind, kann die Gleichung zwei mal nach y unbestimmt integriert werden

$$\begin{aligned} \frac{h^3}{12 \cdot \eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial_{Sy}} &= \left(u_m \cdot \frac{\partial h}{\partial_{Sx}} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) \cdot sy + C_1 \quad , \\ \frac{h^3}{12 \cdot \eta} \cdot p &= \left(u_m \cdot \frac{\partial h}{\partial_{Sx}} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) \cdot \frac{sy^2}{2} + C_1 \cdot sy + C_2 \quad . \end{aligned}$$

Die Integrationskonstanten C_1 und C_2 lassen sich durch die Druckrandbedingungen am Lagerrand bestimmen:

$$p \left(sy = -\frac{B}{2} \right) = p_{rand}, \quad p \left(sy = \frac{B}{2} \right) = p_{rand} \quad .$$

Schließlich ergibt sich eine analytische Funktion für den Druck. Lediglich die Ableitung der Spaltfunktion in Umfangsrichtung $\frac{\partial h}{\partial_{Sx}}$ muss durch eine finite Differenz aus der Spaltfunktion berechnet werden

$$p(sx, sy) = \frac{12 \cdot \eta}{h^3} \cdot \left(u_m \cdot \frac{\partial h}{\partial_{Sx}} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) \cdot \left(\frac{sy^2}{2} - \frac{B^2}{8} \right) + p_{rand} \quad . \quad (3-151)$$

Die Gl. (3-151) liefert die hydrodynamische Druckverteilung, in ihr können keine Druckrandbedingungen aus Ölzuführungen berücksichtigt werden. Zur Berechnung des Druckverlaufs ist keine numerische Lösung oder Iteration notwendig. Damit ist die Rechenzeit für diese Modellierungstufe sehr gering.

3.3.4 Numerische Lösung mittels FDM

Für die numerische Lösung von Gl. (3-140) sind viele Verfahren gebräuchlich. In der Tribologie wird häufig die Finite-Volumen-Methode verwendet, deren Grundlage das Gleichgewicht der Volumenströme an jeweils einer Zelle ist. Für beliebige Triangulierungen des Gebietes kann auch die Finite-Element-Methode herangezogen werden, hierfür muss jedoch eine Formulierung als Potential abgeleitet werden. Eine der einfachsten Methoden ist die Finite-Differenzen-Methode, welche für einen vollgefüllten Spalt die identischen Gleichungen wie die FVM liefert. Wegen der Einfachheit der FDM wird diese Methode hier

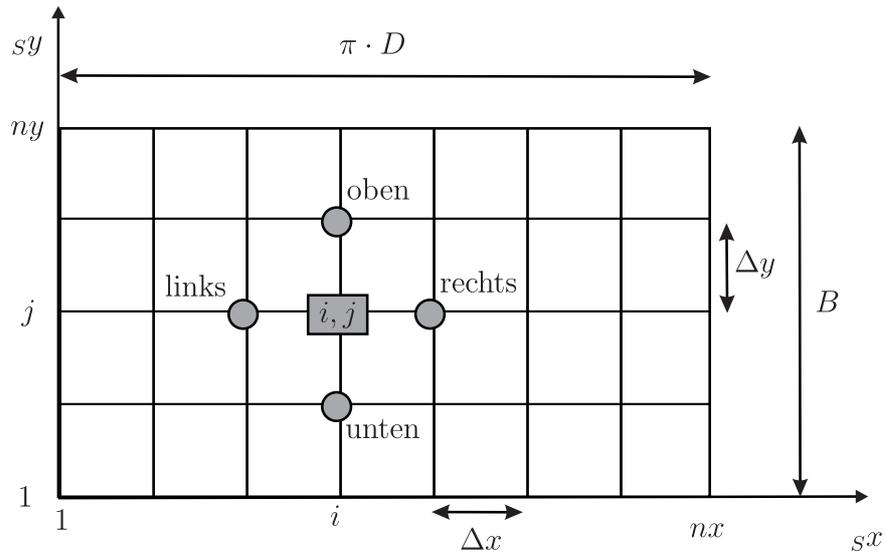


Abbildung 3-22: Abgewickeltes Netz zur Diskretisierung des Radialgleitlagers

verwendet.

Die Diskretisierung erfolgt durch ein äquidistantes Rechtecknetz auf der Lagerschale, welches abgewickelt wird. Die Breitenrichtung sy wird mit dem Knotenindex j versehen, die Umfangsrichtung sx mit dem Index i .

Eine Lösung kann über eine Approximation der Differentialquotienten mit einem Differenzenquotienten erfolgen. Mit der Abkürzung $S = \frac{1}{12 \cdot \eta}$ lässt sich die Reynolds-Gleichung wie folgt vereinfachen

$$S \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial sx} \left(h^3 \cdot \frac{\partial p}{\partial sx} \right)}_{O_x} + S \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial sy} \left(h^3 \cdot \frac{\partial p}{\partial sy} \right)}_{O_y} = \underbrace{u_m \cdot \frac{\partial h}{\partial sx}}_{rhs1} + \underbrace{\frac{\partial h}{\partial t}}_{rhs2} \quad (3-152)$$

Die Ableitung $\partial/\partial sx$ des Terms O_x kann an der Stelle i, j durch folgenden zentralen Differenzenquotient ersetzt werden

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial sx} \left(h^3 \cdot \frac{\partial p}{\partial sx} \right)_{i,j} &= \frac{\left(h^3 \cdot \frac{\partial p}{\partial sx} \right)_{i+\frac{1}{2},j} - \left(h^3 \cdot \frac{\partial p}{\partial sx} \right)_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x} \\ &= \frac{h^3_{i+\frac{1}{2},j} \cdot \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta x} - h^3_{i-\frac{1}{2},j} \cdot \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{\Delta x}}{\Delta x} \\ &= \frac{h^3_{i+\frac{1}{2},j} \cdot p_{i+1,j} - h^3_{i+\frac{1}{2},j} \cdot p_{i,j} - h^3_{i-\frac{1}{2},j} \cdot p_{i,j} + h^3_{i-\frac{1}{2},j} \cdot p_{i-1,j}}{\Delta x^2} \\ &= \frac{h^3_{i+\frac{1}{2},j} \cdot p_{i+1,j} - \left(h^3_{i+\frac{1}{2},j} + h^3_{i-\frac{1}{2},j} \right) \cdot p_{i,j} + h^3_{i-\frac{1}{2},j} \cdot p_{i-1,j}}{\Delta x^2} \end{aligned}$$

Für den Term O_y erfolgt dies analog und führt auf

$$\frac{\partial}{\partial Sy} \left(h^3 \cdot \frac{\partial p}{\partial Sy} \right)_{i,j} = \frac{h_{i,j+\frac{1}{2}}^3 \cdot p_{i,j+1} - \left(h_{i,j+\frac{1}{2}}^3 + h_{i,j-\frac{1}{2}}^3 \right) \cdot p_{i,j} + h_{i,j-\frac{1}{2}}^3 \cdot p_{i,j-1}}{\Delta y^2} .$$

Die Auswertung der Spaltfunktion an den Stellen $i \pm \frac{1}{2}$ und $j \pm \frac{1}{2}$ erfolgt durch eine lineare Interpolation

$$h_{i \pm \frac{1}{2},j} = \frac{1}{2} \cdot (h_{i,j} + h_{i \pm 1,j}), \quad h_{i,j \pm \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot (h_{i,j} + h_{i,j \pm 1}) .$$

Mit den folgenden Abkürzungen wird der Sternoperator für jeden Term formuliert. Die Abkürzungen ergeben sich aus der relativen Lage des betrachteten Punktes auf dem Gitter aus Abb. (3-22)

$$\begin{aligned} h_r^3 &= h_{i+\frac{1}{2},j}^3 = \left(\frac{h_{i,j} + h_{i+1,j}}{2} \right)^3 && \text{- Rechts} \quad , \\ h_l^3 &= h_{i-\frac{1}{2},j}^3 = \left(\frac{h_{i,j} + h_{i-1,j}}{2} \right)^3 && \text{- Links} \quad , \\ h_o^3 &= h_{i,j+\frac{1}{2}}^3 = \left(\frac{h_{i,j} + h_{i,j+1}}{2} \right)^3 && \text{- Oben} \quad , \\ h_u^3 &= h_{i,j-\frac{1}{2}}^3 = \left(\frac{h_{i,j} + h_{i,j-1}}{2} \right)^3 && \text{- Unten} \quad . \end{aligned}$$

Damit ist die linke Seite der Gl. (3-152) durch finite Differenzen ausgedrückt. Nun folgen die Störglieder auf der rechten Seite. Der Term $rhs1$ kann mit folgender zentralen Differenz angenähert werden

$$\left(\frac{\partial h}{\partial Sx} \right)_{i,j} = \frac{h_{i+1,i} - h_{i-1,i}}{2 \cdot \Delta x},$$

wohingegen der zweite Störterm $rhs2$ nur durch die Spaltänderung \dot{h} beschrieben werden muss.

Werden die Operatoren für O_x und O_y zusammengefasst, so ergibt sich folgender symbolischer Sternoperator für die linke Seite der Differentialgleichung

$$SOL_{i,j} = \frac{S}{\Delta x^2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ h_l^3 & -(h_l^3 + h_r^3) & h_r^3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{S}{\Delta y^2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & h_o^3 & 0 \\ 0 & -(h_o^3 + h_u^3) & 0 \\ 0 & h_u^3 & 0 \end{bmatrix} .$$

Für die rechte Seite ergibt sich

$$SOR_{i,j} = \frac{u_m}{2 \cdot \Delta x} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{i+1,j} - h_{i-1,j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{h}_{i,j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Die Anwendung von $SOL_{i,j}$ und $SOR_{i,j}$ auf dem Gitter liefert ein Gleichungssystem mit den unbekannt Drücken $p_{i,j}$. $SOL_{i,j}$ bildet eine Systemmatrix $\underline{\Phi}$ und $SOR_{i,j}$ den Vektor der rechten Seite \underline{r}_h . Der Lösungsvektor \underline{p}_h enthält den Druck an jedem Gitterknoten $p_{i,j}$

$$\underline{\Phi} \cdot \underline{p}_h = \underline{r}_h \quad . \quad (3-153)$$

Um eine numerisch sinnvolle Struktur der Systemmatrix zu erhalten, sollte das Netz Zeilen- oder Spaltenweise durchlaufen werden. In dieser Reihenfolge stehen die Knotendrucke im Vektor \underline{p}_h . Die Gleichungszeile k bestimmt sich zu

$$k = (i) + nx \cdot (j - 2) \quad . \quad (3-154)$$

Die Spalte l im Gleichungssystem ergibt sich in Abhängigkeit vom Element des Sternoperators.

$$\begin{array}{ll} \text{Mitte} & (SOL_{i,j}^{<2,2>}) \quad l = k \quad , \\ \text{Links} & (SOL_{i,j}^{<2,1>}) \quad l = (i - 1) + nx \cdot (j - 2) \quad , \\ \text{Rechts} & (SOL_{i,j}^{<2,3>}) \quad l = (i + 1) + nx \cdot (j - 2) \quad , \\ \text{Oben} & (SOL_{i,j}^{<1,2>}) \quad l = (i) + nx \cdot (j + 1 - 2) \quad , \\ \text{Unten} & (SOL_{i,j}^{<3,2>}) \quad l = (i) + nx \cdot (j - 1 - 2) \quad . \end{array}$$

Das durch diesen Algorithmus entstandene Gleichungssystem ist singulär, daher müssen Randbedingungen eingearbeitet werden, um die Anzahl der Gleichungen auf die Anzahl der Unbekannten zu reduzieren. An den Rändern in Breitenrichtung muss der Druck mit dem äußeren Druck im Gleichgewicht sein, daher ist der Druck an allen Gitterpunkten mit $j = 1$ und $j = ny$ gleich dem atmosphärischen Druck. Der Sternoperator wird auf diesen Stellen nicht ausgewertet, da dieser Druck vorgegeben ist und die entstehende Gleichungszeile gestrichen wird. Angrenzende Knoten, die in ihren Sternoperator $j = 1$ und $j = ny$ auswerten, müssen die entstehenden Terme auf die rechte Seite bringen, da sie bekannt sind. Die Auswertung am unteren Rand liefert folgenden Eintrag auf der rechten Seite \underline{r}_h

$$\begin{aligned} SOL_{i,2}^{<3,2>} &= \frac{S}{\Delta y^2} \cdot h_u^3 \cdot p_{Rand} \quad , \\ r_h(k) &= r_h(k) - SOL_{i,2}^{<3,2>} \quad . \end{aligned} \quad (3-155)$$

Für den oberen Rand folgt analog

$$\begin{aligned} SOL_{i,ny-1}^{<1,2>} &= \frac{S}{\Delta y^2} \cdot h_o^3 \cdot p_{Rand} \quad , \\ r_h(k) &= r_h(k) - SOL_{i,ny-1}^{<1,2>} \quad . \end{aligned} \quad (3-156)$$

Die Randbedingung in Umfangsrichtung ergibt sich aus der Forderung der Periodizität des Druckverlaufs. Durch des Abwickeln des Netzes entsteht eine künstliche Grenze, welche wieder geschlossen werden muss. Auf der linken Seite können Knoten mit dem Index $(i - 1, j)$ auftreten, welche durch die Periodizität auf den Knoten (nx, j) zeigen. Auf der rechten Seite werden Knoten mit $(nx + 1, j)$ auf den Knoten $(1, j)$ verwiesen.

3.3.5 Physikalische Randbedingungen

Sind die Randbedingungen eingearbeitet, lässt sich das Gleichungssystem Gl. (3-153) lösen und liefert den hydrodynamischen Druck für jeden Gitterpunkt. Die Lösung enthält zunächst auch negative Drücke. Diese entstehen im Gebiet des sich aufweitenden Schmierpaltes. Das Fluid müsste sich ausdehnen und Zugspannungen aufnehmen. Sinkt der Druck im Fluid unterhalb des Dampfdrucks, dann bilden sich Gasblasen. Dieser Effekt wird als Kavitation bezeichnet und beeinflusst die Eigenschaften des Gleitlagers. Als Konsequenz muss neben Gl. (3-152) eine Bedingung für den Kavitationsdruck p_C formuliert werden

$$p_{i,j} \geq p_C \quad . \quad (3-157)$$

Die Gl. (3-153) und Gl. (3-157) bilden ein nichtlineares Gleichungssystem. Bei der Lösung sind mehrere Verfahren gebräuchlich. Eine einfache Methode stellen die Gümbel-Randbedingungen dar, welche die negativen Drücke nach der Lösung von Gl. (3-153) auf den Kavitationsdruck p_C setzen - Gl. (3-158)

$$p_{i,j} = \begin{cases} p_{i,j} & \text{falls } p_{i,j} > p_C \\ p_C & \text{falls } p_{i,j} \leq p_C \end{cases} \quad . \quad (3-158)$$

Die Lösung verletzt jedoch die Kontinuitätsbedingung, da der Übergang zwischen Druck- und Kavitationsgebiet unstetig ist. Ein weiteres Verfahren ist durch die Reynolds-Randbedingung gegeben, welches einen kontinuierlichen Übergang zwischen Druck- und Kavitationsgebiet schafft. Dazu wird bei iterativen Gleichungslösern nach jedem Iterationsschritt der Lösungsvektor korrigiert, die negativen Drücke werden auf den Kavitationsdruck gesetzt. Mit dem korrigierten Lösungsvektor wird die Berechnung fortgesetzt, bis das Verfahren gegen eine Lösung konvergiert. Dieses Verfahren ist nicht mit direkten Gleichungslösern, wie dem Gauß-Verfahren anwendbar. Iterative Verfahren wie das Gauß-Seidel- oder das SOR-Verfahren ermöglichen eine kontinuierliche Korrektur der Zwischenlösungen. Es ist ersichtlich, dass die Lösung mit Reynolds-Randbedingungen aufwendiger ist. Die globalen Auswirkungen auf den Druckverlauf sind hingegen gering, wodurch die Auswirkungen auf die Tragkraft des Lagers ebenfalls gering ausfallen. Der direkte Vergleich zwischen den beiden Methoden ist in [DSW09] näher untersucht.

3.3.6 Berechnung der Tragkraft und Momente

Tragkräfte

Je nach Gleitlagermodellierung sind die lokalen Knotenkräfte oder die integrale Tragkraft des Lagers von Interesse. Die lokalen Knotenkräfte können aus der Integration des Druckverlaufs über dem Gitter bestimmt werden. Die einfachste Möglichkeit der Integration ist folgende Vorschrift, welche aufgrund des geringen Aufwandes sehr verbreitet ist

$$F_{N(i,j)} = A_i \cdot p_{(i,j)} \quad . \quad (3-159)$$

Wobei A_i die zugeordnete Fläche eines Gitterknotens ist.

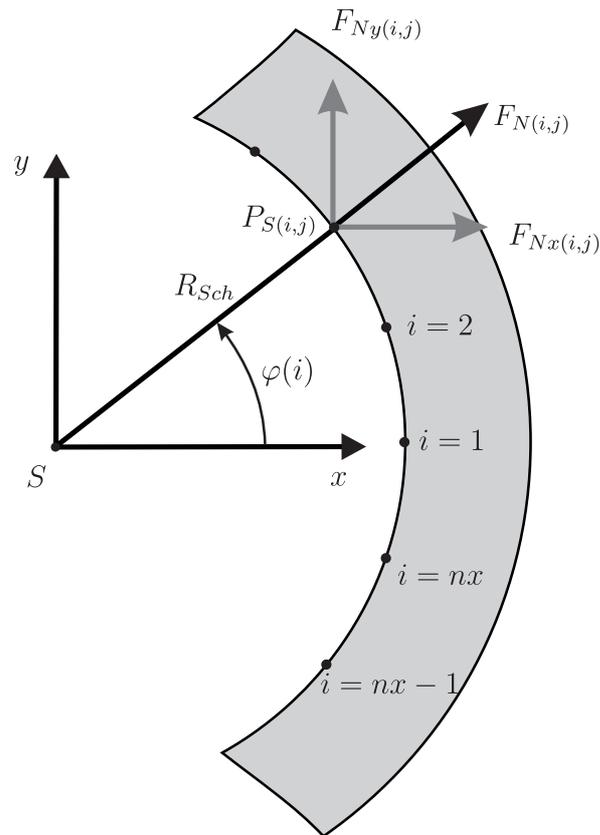


Abbildung 3-23: Bestimmung der Tragkraft am Radialgleitlager

Für die Tragkraft an einem Knoten in x und y Richtung ergibt sich, ersichtlich aus der Darstellung in Abb. (3-23), folgender Zusammenhang

$$\begin{aligned} F_{Nx(i,j)} &= \cos \varphi(i) \cdot A_i \cdot p(i,j) \quad , \\ F_{Ny(i,j)} &= \sin \varphi(i) \cdot A_i \cdot p(i,j) \quad . \end{aligned} \quad (3-160)$$

Die gesamte Tragkraft des Gleitlagers in x und y-Richtung resultiert aus der Summe der Knotenkräfte:

$$F_{GLx} = \sum_{i=1}^{nx} \sum_{j=1}^{ny} F_{Nx(i,j)}, \quad F_{GLy} = \sum_{i=1}^{nx} \sum_{j=1}^{ny} F_{Ny(i,j)} \quad .$$

Lagermomente um die Querachsen

Falls eine Schiefstellung in der Bestimmung der Spaltfunktion vorgesehen wurde, treten unsymmetrische Druckverläufe auf. Diese erzeugen um die x- und y-Richtung Momente, die sich sehr einfach berechnen lassen. Dazu wird die gesamte Tragkraft jeder Breitenreihe des Lagers berechnet. Mit dem Abstand zur Lagermitte ergibt sich der wirksame Hebelarm $s(j)$ - Abb. (3-24).

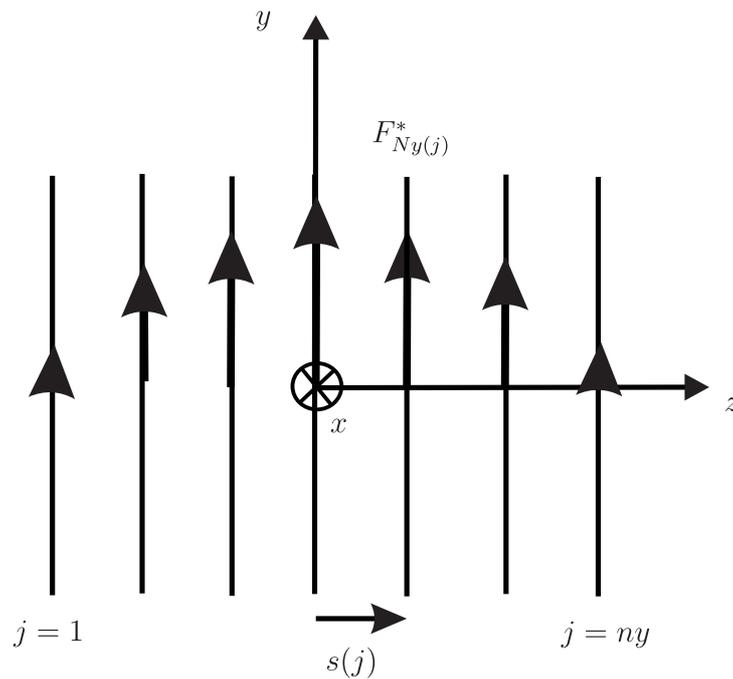


Abbildung 3-24: Bestimmung der Lagermomente am Radialgleitlager

Das Moment um die x-Achse berechnet sich wie folgt

$$M_x = \sum_{j=1}^{ny} F_{Ny(j)}^* \cdot s(j) \quad .$$

Mit

$$F_{Ny(j)}^* = \sum_{i=1}^{ny} F_{Ny(i,j)} \quad .$$

Für die y-Richtung gilt analog

$$M_y = \sum_{j=1}^{ny} F_{Nx(j)}^* \cdot s(j) \quad .$$

Reibmoment um die Rotationsachse

Das Reibmoment an der Oberfläche der Welle lässt sich mit den Schubspannungen, die vom Fluid übertragen werden, wie folgt berechnen

$$M_R = \frac{D}{2} \cdot \int_{(A)} \tau dA \quad . \quad (3-161)$$

Die Schubspannungen an der Lagerschale ergeben sich aus dem Druckgradienten in Umfangsrichtung $\frac{\partial p}{\partial_S x}$ und dem Geschwindigkeitsgradient $\frac{\Delta u}{h}$. Zunächst werden die Schubspannungen im Fluid allgemein angegeben

$$\tau = \eta \cdot \frac{\partial u}{\partial_S z} \quad .$$

Die Geschwindigkeit des Fluides in Umfangsrichtung kann wie folgt angegeben werden

$$u = \frac{1}{2 \cdot \eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial_S x} \cdot ({}_S z^2 - {}_S z \cdot h) + \Delta u \cdot \frac{{}_S z}{h} + U_S \quad .$$

Die Differenzgeschwindigkeit Δu zwischen Schalen- und Wellenoberfläche ist wie folgt definiert

$$\Delta u = U_W - U_S \quad .$$

Die Schubspannung τ_S an der Schalenoberfläche lauten damit

$$\tau|_{{}_S z=0} \equiv \tau_S = -\frac{h}{2} \cdot \frac{\partial p}{\partial_S x} + \eta \cdot \frac{\Delta u}{h} \quad .$$

Die Schubspannung τ_W an der Wellenoberfläche lauten

$$\tau|_{{}_S z=h} \equiv \tau_W = \frac{h}{2} \cdot \frac{\partial p}{\partial_S x} + \eta \cdot \frac{\Delta u}{h} \quad .$$

Der Druckgradient $\frac{\partial p}{\partial_S x}$ wird aus der Lösung des Druckverlaufs durch zentrale Differenzen bestimmt. Die Schubspannung am Gitterpunkt berechnet sich wie folgt

$$\begin{aligned} \tau_{W(i,j)} &= \frac{h_{i,j}}{4 \cdot \Delta x} (p_{i+1,j} - p_{i-1,j}) + \eta \cdot \frac{\Delta u}{h_{i,j}} \quad , \\ \tau_{S(i,j)} &= -\frac{h_{i,j}}{4 \cdot \Delta x} (p_{i+1,j} - p_{i-1,j}) + \eta \cdot \frac{\Delta u}{h_{i,j}} \quad . \end{aligned}$$

Die Schubspannungen an der Welle und der Schale sind nicht gleich. Wird mit τ_W und τ_S nach Gl. (3-161) das Reibmoment berechnet, so ergeben sich offensichtlich unterschiedliche Werte für das Reibmoment an Welle und Schale. Dieses Ergebnis ist jedoch nicht mit dem Grundgesetz von Aktion und Reaktion in der Mechanik vereinbar. Der Fehler liegt in der Vernachlässigung der Exzentrizität. Das Reibmoment an Welle und Schale muss bezüglich des gleichen Bezugspunktes aufgestellt werden. Nach Gl. (3-161) ist der Bezugspunkt jeweils die Wellen- bzw. die Schalenmitte. Wird der Wellenmittelpunkt als gemeinsamer Bezugspunkt verwendet, so ändert sich für die Bestimmung des Reibmomentes an der Schale für jedes Flächenstück der Hebelarm. Auch wenn die Exzentrizität klein ist, kann dieser Anteil sehr groß werden.⁴

⁴Nach [Vog43] tritt dieser Fehler auch auf, wenn das Reibmoment an der Lagerschale gemessen wird. Durch den fehlenden Anteil ist das gemessene Reibmoment kleiner als das tatsächliche Reibmoment.

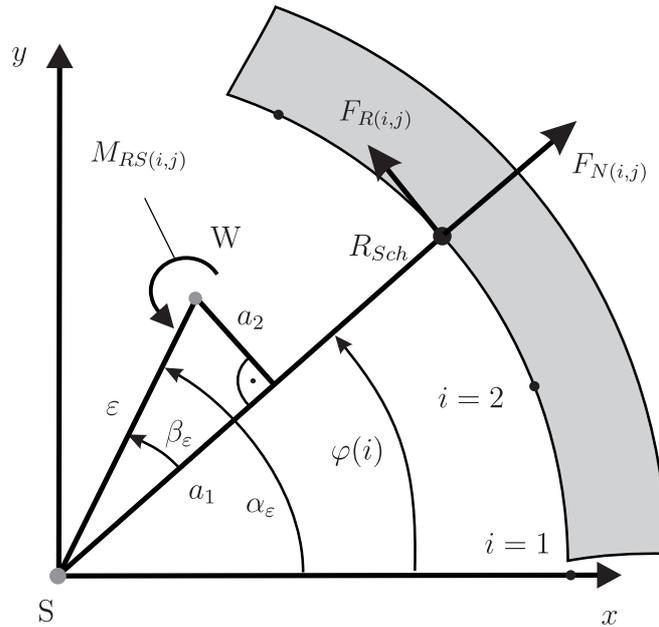


Abbildung 3-25: Bestimmung des Reibmomentes an der Lagerschale des Gleitlagers

Das Momentengleichgewicht um den Wellenmittelpunkt W für die Kräfte, die am Gitterpunkt $P_{i,j}$ der Lagerschale angreifen, lautet

$$\sum M_{\widehat{W}} : 0 = F_{N(i,j)} \cdot a_2 + F_{RS(i,j)} \cdot (R_{Sch} - a_1) + M_{RS(i,j)} \quad . \quad (3-162)$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \beta_\varepsilon &= \alpha_\varepsilon - \varphi(i) \quad , \\ a_1 &= \varepsilon \cdot \sin \beta_\varepsilon \quad , \\ a_2 &= \varepsilon \cdot \cos \beta_\varepsilon \quad . \end{aligned}$$

Das gesamte Reibmoment ergibt sich aus der Summe von Gl. (3-162) über alle Gitterpunkte. Dies zeigt, dass die Normalkraft $F_{N(i,j)}$ resultierend aus der Druckverteilung einen Anteil am Reibmoment hat. Wird das Reibmoment M_{RS} der Schale mit der Gl. (3-162) bestimmt, ist die Abweichung zum Reibmoment M_{RW} an der Welle identisch.

$$\begin{aligned} M_{RS} &= \sum_{i=1}^{nx} \sum_{j=1}^{ny} F_{N(i,j)} \cdot a_2 + F_{RS(i,j)} \cdot (R_{Sch} - a_1) \\ &= \sum_{i=1}^{nx} \sum_{j=1}^{ny} A_i \cdot p_{(i,j)} \cdot a_2 + A_i \cdot \tau_{S(i,j)} \cdot (R_{Sch} - a_1) \end{aligned} \quad (3-163)$$

$$\begin{aligned} M_{RW} &= \sum_{i=1}^{nx} \sum_{j=1}^{ny} F_{RW(i,j)} \cdot R_W \\ &= \sum_{i=1}^{nx} \sum_{j=1}^{ny} A_i \cdot \tau_{W(i,j)} \cdot R_W \end{aligned} \quad (3-164)$$

Für die Reibmomente M_{RS} aus Gl. (3-163) und M_{RW} aus Gl. (3-164) gilt nun das Gleichgewicht

$$\sum M_{\hat{W}} : 0 = M_{RS} + M_{RW} \quad .$$

3.3.7 Dynamische Gleitlagersimulation

Der Berechnungsablauf der dynamischen Gleitlagersimulation lässt sich anhand des Flussdiagramms in Abb. (3-26) verdeutlichen. Zunächst müssen die Zustandsgrößen der Lagerpartner bekannt sein. Konkret müssen die Ortsvektoren zur Mitte der Lagerschale I_{LS} und der Welle I_{LW} bestimmt werden. Darüber hinaus müssen die Orientierungen, Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten ermittelt werden. Diese dienen als Grundlage für die Berechnung der Spaltfunktion h und der zeitlichen Änderung \dot{h} zwischen den Lagerpartnern. Mit diesen Eingangsgrößen lässt sich eine Lösung für den hydrodynamischen Druck gewinnen. Dabei muss bei jeder Auswertung das lineare Gleichungssystem Gl. (3-153) gelöst werden. Es ist ersichtlich, dass die numerische Effizienz maßgeblich für die Gesamtdauer der eigentlichen Zeitintegration der Bewegungsgleichung ist.

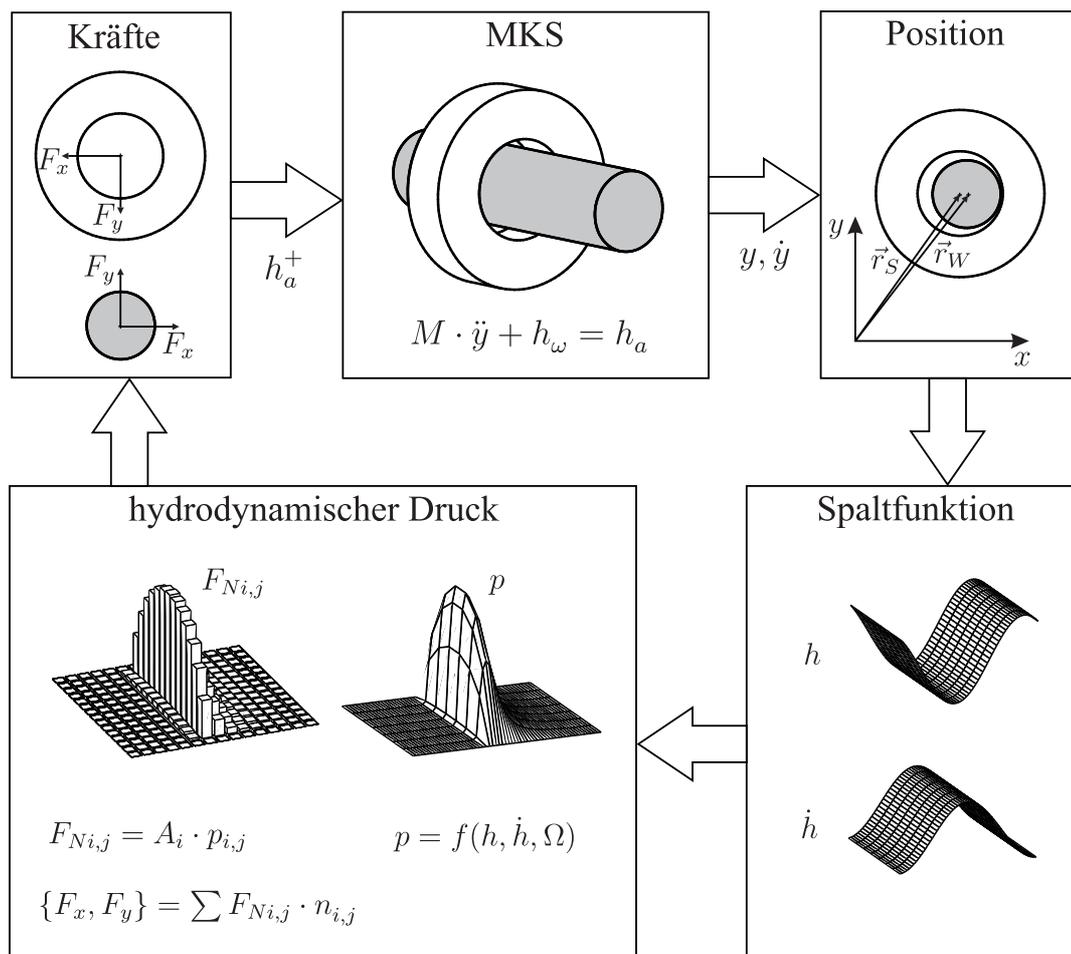


Abbildung 3-26: Ablaufplan Kraftroutine Gleitlager

Aus den Knotendrücken p lassen sich die Knotenkräfte berechnen, die je nach Gleitlagermodellierung direkt auf die Knoten der Lagerschale aufgeprägt, oder vorher zu einer gesamten Tragkraft summiert werden. Die Tragkraft wird auf Schale und Welle mit entgegengesetzter Richtung aufgeprägt. In der Summe steht ein geschlossener Kreislauf, der zu einer stabilen Lösung konvergieren sollte, unter Voraussetzung, dass die Tragkräfte auch physikalisch aufgenommen werden können und der kleinste Schmierpalt nicht unterhalb der Rauigkeiten der Lagerpartner absinkt. In diesem Fall muss dem hydrodynamischen Druck noch ein Festkörperdruck überlagert werden, welcher z.B. durch ein Greenwood-Williams-Modell [GW66] analytisch determiniert werden kann.

Ein Vergleich unterschiedlicher Modellierungsstufen, d.h. ohne Schiefstellung, mit Schiefstellung und EHD-Kontakt ist in [DSW09] dargestellt.

4 Umsetzung

4.1 Nutzerrouninen in kommerziellen MKS-Programmen

Die häufig verbreiteten kommerziellen Mehrkörpersimulationsumgebungen für räumliche Bewegungen sind SIMPACK und ADAMS. Diese Programmsysteme bieten die Möglichkeit, starre und elastische Mehrkörpersysteme aufzubauen und im Frequenz- und Zeitbereich, zu simulieren. Weiterhin enthalten beide Programme zugeschnittene Programmpakete, welche problemspezifische Mehrkörpermodelle einfacher generieren können. Darüber hinaus kann der Nutzer eigene Routinen in die Simulation einfließen lassen. Eine wichtige Gruppe stellen dabei die nutzerdefinierten Kraftelemente dar. Diese ermöglichen die Berechnung von Aktions- und Reaktionskraft zwischen zwei beliebigen physikalischen Punkten im Modell. Die Subroutinen können in FORTRAN oder C++ verfasst werden. Für den Zugriff auf die kinematischen Größen der Körper stehen in ADAMS und SIMPACK zahlreiche Unterprogramme zur Verfügung.

Das Konzept der Nutzerrouninen wird in SIMPACK *uforce* genannt. Anfänglich war eine *uforce* eine FORTRAN-Subroutine, neuerdings sind auch C-Routinen verfügbar. SIMPACK stellt dabei Vorlagen zur Verfügung, welche einen festen Namen haben. Damit ist die Einbindung in die Reihe bestehender Kraftelemente fest definiert. Für die nutzerdefinierten Kraftelemente stehen die Plätze 20 bis 40 zur Verfügung. Damit können maximal 20 verschiedene *uforce*-Routinen in einer SIMPACK-Installation zugleich verwendet werden. Eine *uforce* besteht aus drei Subroutinen. Die Erste definiert den Namen, die Zweite definiert die grafische Oberfläche, mit der die relevanten Parameter eingegeben werden können. Die Dritte stellt die eigentliche Berechnungsroutine dar, die während der Zeitintegration aufgerufen wird. Es ist möglich, noch weitere Programmteile einzubinden, dies stellt sich in der Praxis aber sehr schwierig dar und ist in der Hilfe von SIMPACK nicht ausreichend dokumentiert. Eigener Quellcode kann mittels der CONTAINS-Anweisung eingebunden werden, LIB oder OBJ Quellen können theoretisch auch eingebunden werden, dies gelang mit der zur Verfügung stehenden Konfiguration von SIMPACK und FORTRAN Compiler nicht. Ohnehin ist die Dokumentation der Unterprogramme und der Funktionalitäten der *uforce*-Routinen sehr knapp gehalten, sodass viele Zusammenhänge durch zahlreiche Tests bestimmt werden müssen. Ein großer Vorteil der SIMPACK-Umsetzung ist die Möglichkeit, nicht nur Kräfte auf den Aktions- und Reaktionsmarker aufzuprägen, sondern auf beliebig viele Marker beliebiger Körper. Hierfür kann das SIMPACK Unterprogramm *force_at_marker* verwendet werden, was besonders bei EHD-Simulationen notwendig ist, um verteilte Kräfte auf ein Raster von Markern aufzuprägen.

In ADAMS werden nutzerdefinierte Kraftelemente als *gforce* bezeichnet. Dies sind FORTRAN- oder C-Subroutinen, die ähnlich wie in SIMPACK agieren. Die Methode ist der *uforce* sehr ähnlich. Leider fehlt die Möglichkeit, die Kräfte auch auf beliebige Marker aufzuprägen. Damit lassen sich nur Kraftelemente zwischen zwei Markern ermöglichen, was

die Verteilung der hydrodynamischen Kräfte auf Oberflächen oder mehrere Lagerpartner erschwert. Die möglichen Alternativen wie die Definition von mehreren *gforce*-Routinen scheinen wenig praxistauglich. Entweder muss die Hydrodynamik für jede *gforce* gelöst werden, was zu einer redundanten Berechnung des hydrodynamischen Druckes und damit zu einem erheblichen Mehraufwand führt. Ein anderer Weg, die Berechnung in einer zentralen Routine auszuführen und die Ergebnisse nur über die verschiedenen *gforce*-Routinen zu verteilen führt zu erheblichen Problemen bei der Zeitintegration, da die Bildung der Jacobimatrix nicht mehr korrekt gewährleistet werden kann. Der funktionelle Zusammenhang zwischen den kinematischen Größen und den hydrodynamischen Tragkräften ist nicht mehr durchgängig, die Jacobimatrix ist fehlerhaft und die Zeitintegration kann nicht korrekt durchgeführt werden.

4.2 MKS-Programm EMD

EMD ist ein am Lehrstuhl entwickeltes Programmsystem, das starre und elastische Mehrkörpersysteme berechnen kann. Das Programm ist besonders für rotordynamische Problemstellungen zugeschnitten, da es im globalen Zustandsvektor nur inertielle Größen der Starrkörperbewegung verwendet. Die Gleichgewichtsbedingungen werden für jeden Körper separat in Koordinaten des körperfesten Relativsystems aufgestellt. Damit können auch elastische Körper nach dem Prinzip des mitbewegten Referenzsystems eingebunden werden. Die dabei verwendeten modalen Koordinaten der elastischen Strukturen sind jedoch nur körperfest beschreibbar. Dies ist jedoch im Zeitbereich ein immenser Vorteil, da die Eigenvektoren unabhängig von der Drehzahl des Körpers sind. Wie schon in den vorhergehenden Kapiteln erläutert, werden bei rotordynamischen Problemen selten Zwangsbedingungen oder Bindungsgleichungen benötigt. Aus diesem Grund wird in EMD auf die Einarbeitung von Bindungsgleichungen über eine Jacobimatrix verzichtet, mit der Ausnahme der vollständigen Sperrung einer Bewegungsrichtung. Ebenso wird die Formulierung von algebraischen Zwangsbedingungen vermieden, sodass eine gewöhnliche Differentialgleichung (ODE) anstelle eines differential-algebraischen Gleichungssystems (DAE) zu lösen ist.

4.2.1 Zustandsvektor

Für die Beschreibung der Bewegung und weiterer zeitabhängiger Größen müssen Zustandsgrößen definiert werden. Mit diesen Größen erfolgt die eigentliche Zeitintegration. Üblicherweise werden die Größen verwendet, in denen die dynamischen Gleichgewichtsbedingungen formuliert sind.

Durch die Verbindung von Starrkörperbewegungen, elastischen Deformationen und zusätzlichen Größen aus diversen Kraftelementen sind in EMD verschiedene Zustandsgrößen definiert:

1. Koordinaten der Lage ${}_I\underline{y}$ und der Geschwindigkeiten ${}_I\underline{\dot{y}}$ zur Beschreibung der Starrkörperbewegung
2. modale Verschiebungen \underline{z}_q und Geschwindigkeiten $\underline{\dot{z}}_q$ zur Beschreibung der elastischen Deformation

3. zusätzliche Zustandsgrößen z_f , die in den Subroutinen der Kräfte benötigt werden

Alle Zustandsgrößen werden in EMD in Form einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung dargestellt

$$\dot{z} = f(z, t) \quad . \quad (4-1)$$

Der gesamte Zustandsvektor hat damit folgende Form

$$z = (\underline{ry} \quad \underline{ry} \quad z_f \quad z_q \quad \dot{z}_q)^T \quad . \quad (4-2)$$

4.2.2 Modelldaten

Die Definition von Systemen erfolgt über die Beschreibung die Geometrie und den Trägheitseigenschaften der verwendeten Körper bzw. Bauteile. Zur Aufstellung der Bewegungsgleichung müssen die Trägheitseigenschaften bekannt sein. Als allgemeingültiges Programm müssen diese Informationen nachvollziehbar in einer Modelldatei abgelegt werden. Zu den wichtigsten Modelldaten eines Mehrkörpermodells gehören folgende Körpereigenschaften:

1. Masse
2. Trägheitstensor bzgl. eines definierten Punktes
3. definierte Punkte und deren Orientierung auf dem Körper (Marker)
4. Freiheitsgrade des Körpers

Für die Darstellung werden Informationen zur Geometrie benötigt. Hier stehen verschiedene Primitive oder triangulierte Oberflächen zur Verfügung. Für die Berechnung sind diese Größen ohne Relevanz.

Für die Verknüpfung der Körper untereinander werden Kraftelemente definiert. Hier sind im Verlauf der Entwicklung von EMD viele Elemente entstanden, darunter fallen die zahlreichen Gleit- und Wälzlagerrountinen. Ein einfaches Kraftelement ist eine lineare Feder. Eingangsgrößen für ein Kraftelement sind:

1. Körper, von dem das Kraftelement ausgeht (From-Körper)
2. Marker, an dem es auf dem From-Körper angreift
3. Körper, zu dem das Kraftelement weist (To-Körper)
4. Marker, an dem es auf dem To-Körper angreift
5. Nummer des Krafttyps
6. Nummer des Sets, welches die Parameter für den gewählten Krafttyp beinhaltet

Ein Set ist ein Spaltenvektor, der je nach Kraftelement mehrere skalare Parameter beinhaltet. Bei Kraftelementen wie dem Gleitlager kommen schnell über 50 skalare Parameter zusammen, daher ist es günstig, dass ein Set mehrmals in den Kraftelementen angegeben werden kann, so kann die Eingabe redundanter Daten in der Eingabedatei vermieden werden. Eingabedateien für einen starren und elastischen Laval-Läufer sind im Anhang B.2.2 zusammengestellt.

4.2.3 Programmbestandteile

Das Programmsystem EMD ist modular aufgebaut und verwendet keine kommerziellen oder freien numerische Bibliotheken. Alle Programmteile stammen aus den numerischen Bibliotheken des Instituts für Mechanik bzw. wurden eigens erstellt. Die Programmiersprache ist FORTRAN 95 und es existieren WINDOWS- und LINUX-Versionen von EMD.

Numerische Bibliothek

Viele Funktionen werden häufig gebraucht, so werden im Programmablauf sehr häufig Gleichungssysteme gelöst. Für die Schmierfilmgleichung sind angepasste Gleichungslöser mit Kompaktspeicherungen entwickelt worden. Dabei haben sich zwei Algorithmen besonders bewährt: Für symmetrische Matrizen das PCG-Verfahren und für unsymmetrische Matrizen das BICG-STAB-Verfahren. Unsymmetrische Matrizen entstehen, wenn spezielle Randbedingungen eingebracht werden, oder wenn mit teilgefülltem Schmierpalt gerechnet wird.

Im Bereich der Gleichungslösung, aber auch beim Aufstellen der Systemmatrizen ergibt sich ein großes Einsparpotential, wenn die Aufstellung der Systemmatrizen direkt in der kompakten Form erfolgt. Dies erspart sehr viele Sortier- und Speicheroperationen.

Weiterhin sind hier auch die für die Zeitintegration wichtigen ODE-Solver abgelegt. Dies sind keine reinen Eigenentwicklungen, sondern Derivate der MATLAB ODE-Solver. Sie wurden zum einen deutlich im Umfang reduziert und zum anderen um spezielle Funktionen für EMD erweitert.

Subroutinen für die Gleit- und Wälzlager

In EMD sind zahlreiche Modelle für Gleit- und Wälzlagerung umgesetzt. Deren Subroutinen sind als Bibliotheken ausgelagert, wodurch diese auch problemlos in kommerziellen MKS-Programmen implementiert werden können. So wurden z.B. zahlreiche nutzerdefinierte Kraftelemente für SIMPACK erstellt, die diese Subroutinen als DLL aufnehmen und ansprechen können.

Hauptprogramm EMD

EMD gliedert sich in vier wichtige Abschnitte:

1. Daten einlesen und initialisieren
2. Berechnung von $\dot{\underline{z}}(t_1)$ für das aktuelle $\underline{z}(t_1)$
3. Integration von $\dot{\underline{z}}(t_1)$ für die neue Lösung $\underline{z}(t_2)$
4. Ausgabe der Ergebnisse

Punkt 1 und 2 sind sehr umfangreich. Daher wird im Folgenden nur auf den mechanisch wichtigen Teil des Punktes 2 eingegangen. Der Programmablauf in EMD für den Aufbau der Zustandsraumgleichung aus den Bewegungsgleichungen und den zusätzlich definierten Zuständen der Krafroutinen ist in Abb. (4-1) ersichtlich.

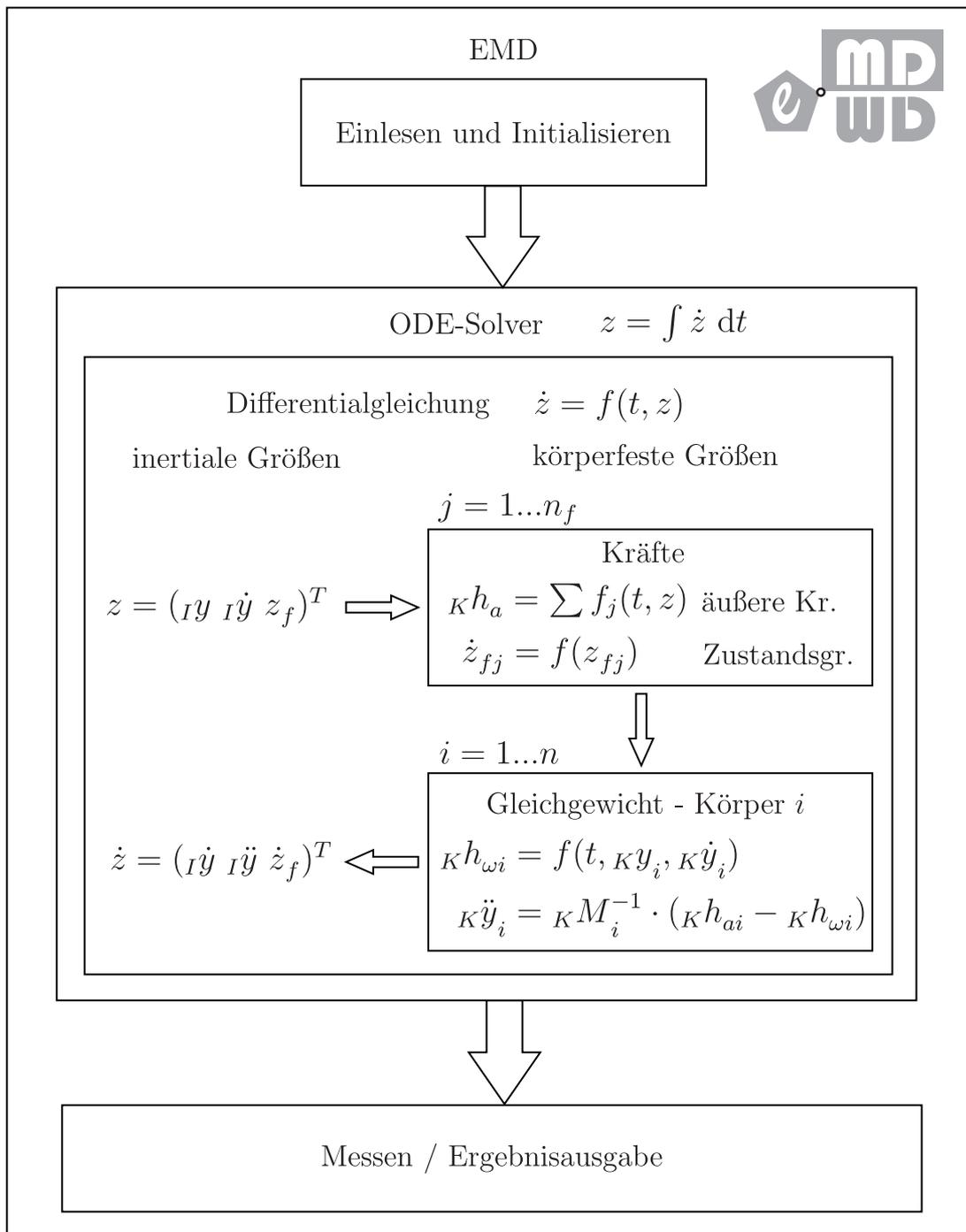


Abbildung 4-1: Ablaufplan EMD

Bei der Berechnung der Ableitung des aktuellen Zustandsvektors $\dot{z}(t_1)$ werden zunächst alle äußeren Kräfte berechnet, die sich aus den aktuellen Wegen und Geschwindigkeiten $\underline{z}(t_1)$ ergeben. Die Berechnung der äußeren Kräfte ist bei gleitgelagerten Systemen der größte numerische Aufwand. Weiterhin werden alle zusätzlich definierten Zustandsgrößen $z_f(t_1)$ der Kraftelemente gesammelt. Mit der Kenntnis der äußeren Kräfte können die Beschleunigungen der Körper berechnet werden. Dazu muss das Gleichungssystem Gl. (3-32) für

jeden starren Körper gelöst werden, was in Anbetracht von maximal sechs Freiheitsgraden einen sehr geringen Aufwand bedeutet. Im Gegensatz dazu sind bei elastischen Körpern deutlich größere Gleichungssysteme zu lösen. Das Gleichungssystem Gl. (3-72) muss die Starrkörperbeschleunigungen und die modalen Beschleunigungen des jeweiligen Körpers liefern. Je nach modaler Reduktion des elastischen Körpers erscheinen hier schnell 100 Unbekannte, die bei jeder Berechnung von $\dot{\underline{z}}$ numerisch bestimmt werden müssen. Nachdem alle Beschleunigungen und Geschwindigkeiten ermittelt worden sind und in $\dot{\underline{z}}$ abgelegt wurden, kann nun der ODE-Solver für den nächsten Zeitschritt die Lösung \underline{z} bestimmen.

5 Ergebnisse

5.1 Vergleich der Gleitlagermodelle

Die entwickelten Gleitlagermodelle können auf gleiche Art und Weise in allen dynamischen Simulationen verwendet werden. Die Modellierungstiefe bestimmt dabei auch die benötigte CPU-Zeit zur Lösung der Bewegungsgleichungen. So ist der numerische Aufwand bei der Verwendung der Kurzlagertheorie sehr gering, steigt jedoch bei der numerischen Lösung der Reynolds-Gleichung in jedem Zeitschritt beträchtlich an. Grundsätzlich können mit der höchsten Modellierungsstufe für starre Gleitlager (numerische Lösung und Berücksichtigung der Schiefstellung im Lager) alle relevanten Effekte abgebildet werden. Der Unterschied zwischen den Modellierungsvarianten soll im Folgenden an einem einfachen rotordynamischen System dargelegt werden.

5.1.1 Mechanisches Modell

Ein einfaches rotordynamisches Modell stellt der Laval-Läufer dar. Es liegt eine statisch bestimmte und symmetrische Lagerung vor. Bei Vernachlässigung der Elastizität und unter Annahme einer rein statischen Unwucht auf dem Rotor gibt es im Lager keine Schiefstellung. Wird die Elastizität der Welle berücksichtigt, so ergibt sich aufgrund der statischen

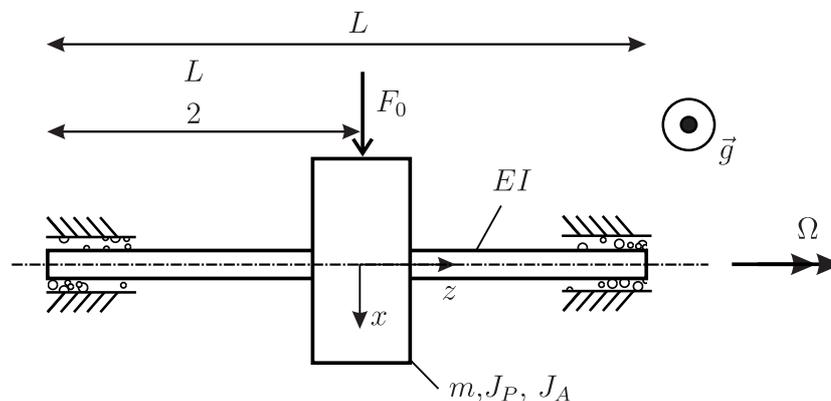


Abbildung 5-1: Laval-Läufer in Gleitlagern

Durchbiegung einen konstanten und aufgrund der umlaufenden Zentrifugalkraft einen zeitlich veränderlichen Schiefstellungsanteil in den Lagerstellen.

Die verwendeten Parameter sind in Tab. (B.2-2) aufgeführt. Weiterhin sind die Eingabedateien für EMD in B.2.2 abgelegt. Das System wird neben der Gewichtskraft und der Zentrifugalkraft aus der Unwucht des Rotors durch eine konstante Kraft F_0 , die in der Rotormitte angreift, belastet. Die Drehzahl des Rotors beträgt konstant 1000 min^{-1} .

5.1.2 Variation der Lagermodelle am starren Laval-Läufer

Zunächst wird von einer starren Welle bei symmetrischer Gleitlageranordnung ausgegangen, bei der keine Schiefstellung in den Lagern vorliegen kann. Für die verschiedenen Modellierungsstufen werden folgende Abkürzungen verwendet:

- KL - Kurzlagertheorie
- HD1 - numerische Lösung der Reynolds-Gleichung ohne Schiefstellung
- HD2 - numerische Lösung der Reynolds-Gleichung mit Schiefstellung
- HD1-OR - numerische Lösung der Reynolds-Gleichung ohne Schiefstellung ohne Ölzuführung

Bei einer Drehzahl von 1000 min^{-1} , einer definierten Exzentrizität des Rotors von $100 \mu\text{m}$ und einer statischen Last von 100 N stellen sich die Verlagerungsbahnen aus Abb. (5-2) ein. Die Unterschiede zwischen den Verlagerungsbahnen resultieren aus den verwendete

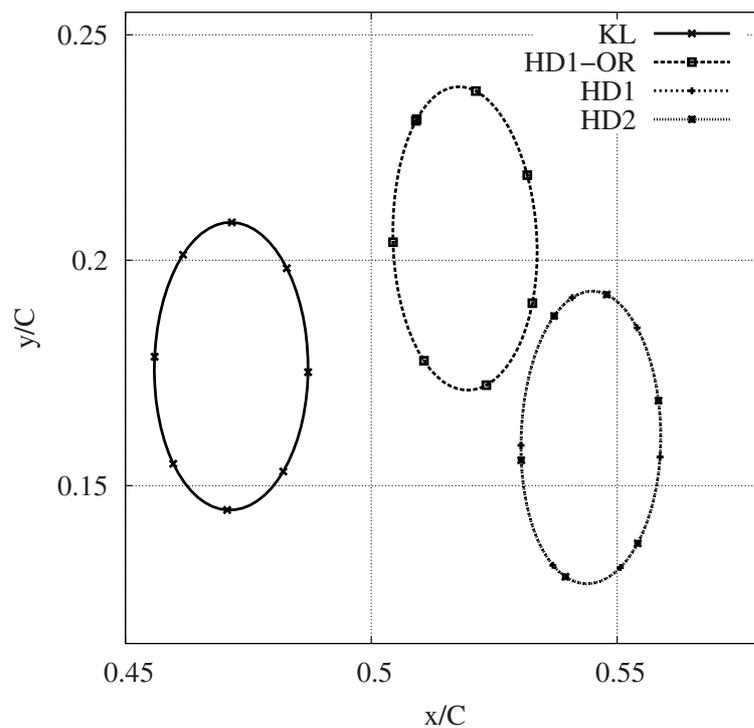


Abbildung 5-2: Wellenverlagerung in der Lagermitte des starren Läufers

teten Modellierungsstufen bei der Lösung der Reynolds-Gleichung. Die Kurzlagertheorie (KL) müsste in der Nähe der numerischen Lösung ohne Ölzuführung (HD1-OR) liegen. Hier gibt es im statischen Verlagerungsanteil erhebliche Abweichungen. Die Halbmesser der Ellipsen sind sehr ähnlich, was auf eine gute Übereinstimmung der Steifigkeiten der Gleitlagerung hindeutet. Die Druckrandbedingung durch die Ölzufuhr verschiebt diesen Orbit etwas (HD1, HD2). Die Ölzuführung wirkt wie eine statische Kraft die den Verlagerungspunkt ändert.

Der Unterschied in der aufgewendeten CPU-Zeiten für alle Modellierungsstufen ist gering.

Für Systeme mit mehreren Freiheitsgraden werden sich die Unterschiede in der CPU-Zeit deutlicher niederschlagen. Grundsätzlich wird daher die Variante HD2 bevorzugt, da diese alle notwendigen Effekte, unter anderem auch eine rotierende und bewegte Lagerschale korrekt abbilden kann. Nur hier erlaubt die Art und Weise der Aufstellung der Spaltänderungsfunktion \dot{h} eine Bewegung der Lagerschale bzw. des Gitters für die numerische Lösung der Reynolds-Gleichung. Dies ist besonders deutlich bei der Schwenkbewegung in einem Pleuellager - siehe Abschnitt 5.5. Die resultierende Oberflächengeschwindigkeit der Lagerschale resultiert in der Regel aus einer komplexen räumlichen Bewegung, die mit der Mittelpunktsgeschwindigkeit der Lagerschalenmitte nicht vollständig beschreibbar ist.

5.1.3 Variation der Lagermodelle am elastischen Laval-Läufer

Die Welle des elastischen Laval-Läufers wird mittels einer Finiten-Element-Formulierung eines schubweichen Balkens diskretisiert. Die statische Last und die Unwucht erzeugen eine Durchbiegung der Welle, was zu einer Schiefstellung im Lager führt. Die Tragkraft der Gleitlager ist durch die statisch bestimmte Anordnung identisch. Für die Varianten KL, HD1-OR und HD1 ergeben sich im Vergleich zu Abschnitt 5.1.2 identische Verlagerungsbahnen - Abb. (5-3). Der Biegewinkel wird bei diesen Varianten nicht für die Bestimmung der Spaltfunktion berücksichtigt. Die dargestellten Verlagerungsbahnen der Variante

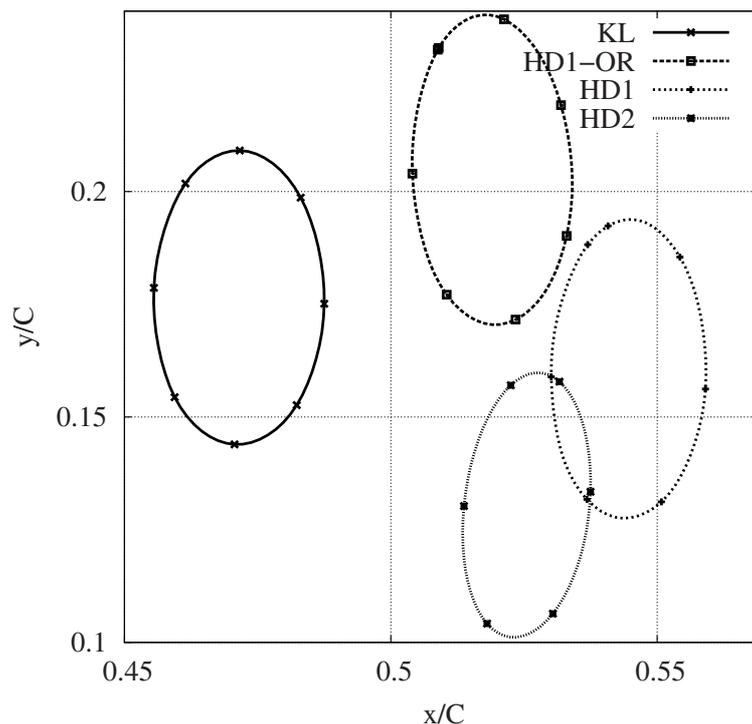


Abbildung 5-3: Wellenverlagerung in der Lagermitte des elastischen Läufers

HD2 beschreibt die Position der Welle in der Lagermitte. Die Schiefstellung verändert das Tragverhalten und führt zu einer unsymmetrischen Druckverteilung in Lagerbreitenrichtung. So wird neben der Tragkraft auch ein Lagermoment um die Querachsen generiert. Weiterhin ist ein starker Unterschied im Einschwingverhalten zwischen der Varianten HD1 und HD2 festzustellen. Die Anfangsstörungen bei der Zeitintegration klingen beim

Gleitlager mit Schiefstellung sehr schnell ab, während die Eigenschwingungen der Welle bei der Variante HD1 nach 2 s noch immer nicht vollständig abgeklungen sind. Dies lässt sich auch Abb. (5-4) an der Verlagerungsbahn bei einer Vorlast von 200 N erkennen, da der Orbit der HD1 Varianten eine Oberwelle aufweist. Diese resultiert aus der ersten Eigenschwingung der Welle, die durch die translatorische Dämpfung wenig beeinflusst werden kann. Die resultierende Dämpfungswirkung aus dem Lagermoment in Folge der Schiefstellung dissipiert die Energie dieser Schwingform effektiver.

5.1.4 Variation der statischen Vorlast beim elastischen Laval-Läufer

Im Weiteren wird der Einfluss der Schiefstellung auf die Tragfähigkeit der Gleitlager näher untersucht. Mit der Variation der statischen Last wird, aufgrund der Durchbiegung der Welle, eine Schiefstellung der Welle in der Lagerschale maßgeblich verändert.

Gleitlager ohne Schiefstellung

Zunächst wird die Gleitlagermodellierung ohne Berücksichtigung der Schiefstellung betrachtet. Es wird nur die Wellenverlagerung in der Lagermitte ausgewertet und für die Bestimmung der Spaltfunktion herangezogen. Die statische Last wird auf 150 N und 200 N erhöht. Die berechnete Wellenverlagerung ist in Abb. (5-4) dargestellt und zeigt eine mit zunehmender Last steigende Exzentrizität. Gleichzeitig werden die Halbmesser der Ellipsen kleiner, was eine zunehmende Steifigkeit des Gleitlagers indiziert. Dieses Verhalten spiegelt sich auch im Verlauf des minimalen Schmierpals wieder. Mit zunehmender Last verringert sich der minimale Schmierpalt und verursacht eine größere Steifigkeit des Lagers. Exemplarisch ist in Abb. (5-5) für die statische Last von 150 N die Spaltfunktion dargestellt. Diese ist symmetrisch über die Lagerbreite und führt im stationären Fall zur hydrodynamischen Druckverteilung, die in Abb. (5-6) dargestellt ist. Der maximale Druck tritt unmittelbar vor dem kleinsten Schmierpalt auf. Im Kavitationsgebiet erfolgt die Ölzuführung, wodurch die Tragkraft ebenfalls beeinflusst wird.

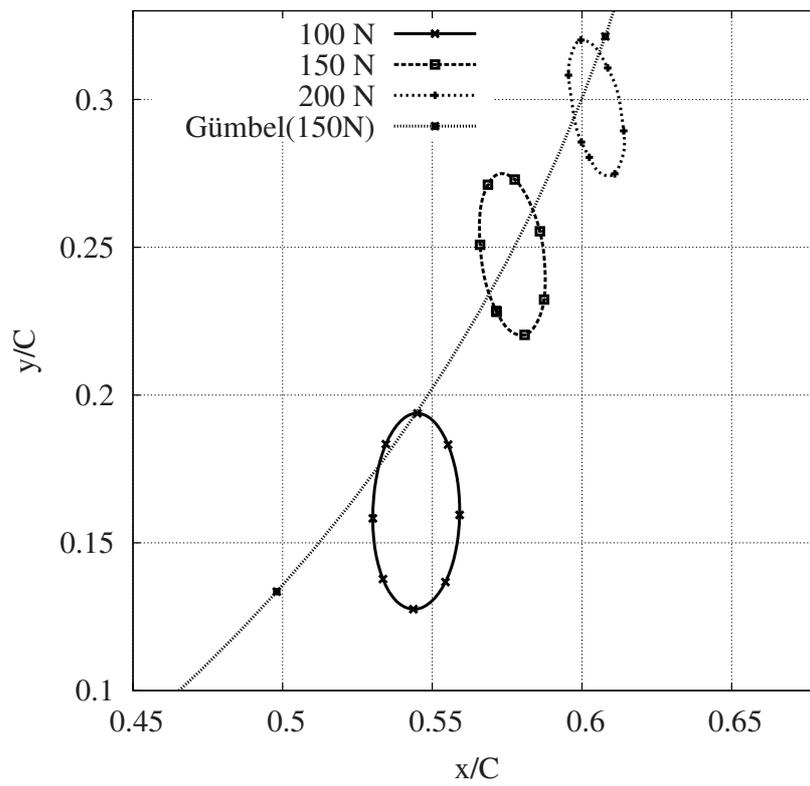


Abbildung 5-4: Wellenverlagerung des elastischen Laval-Läufers HD1

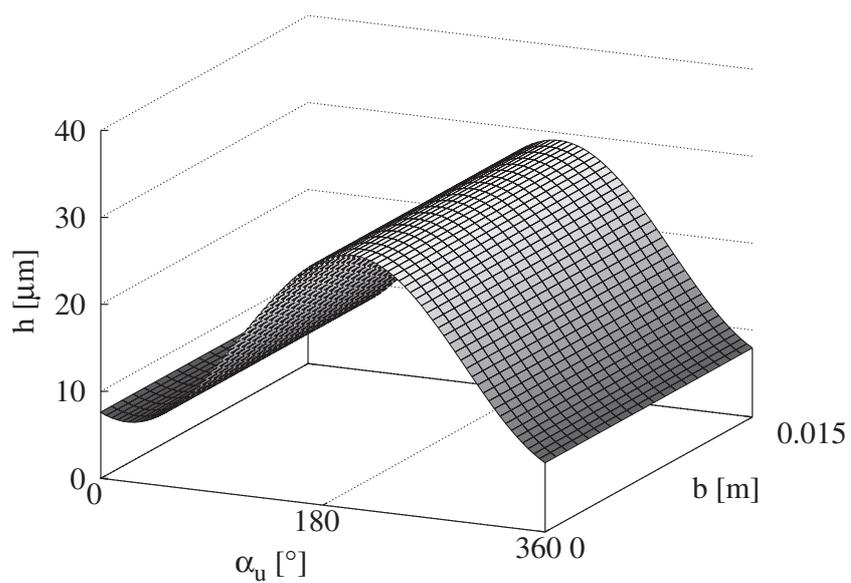


Abbildung 5-5: Spaltfunktion HD1 150N

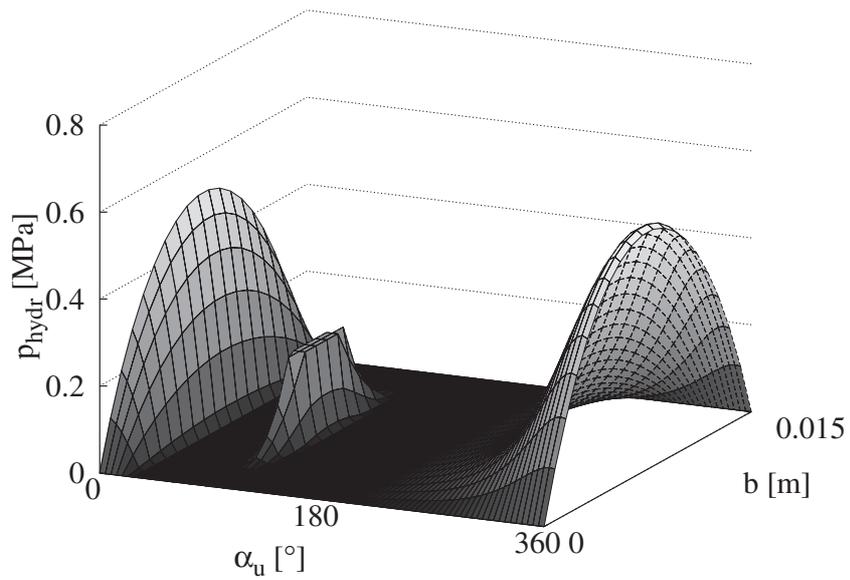


Abbildung 5-6: Druckverteilung HD1 150N

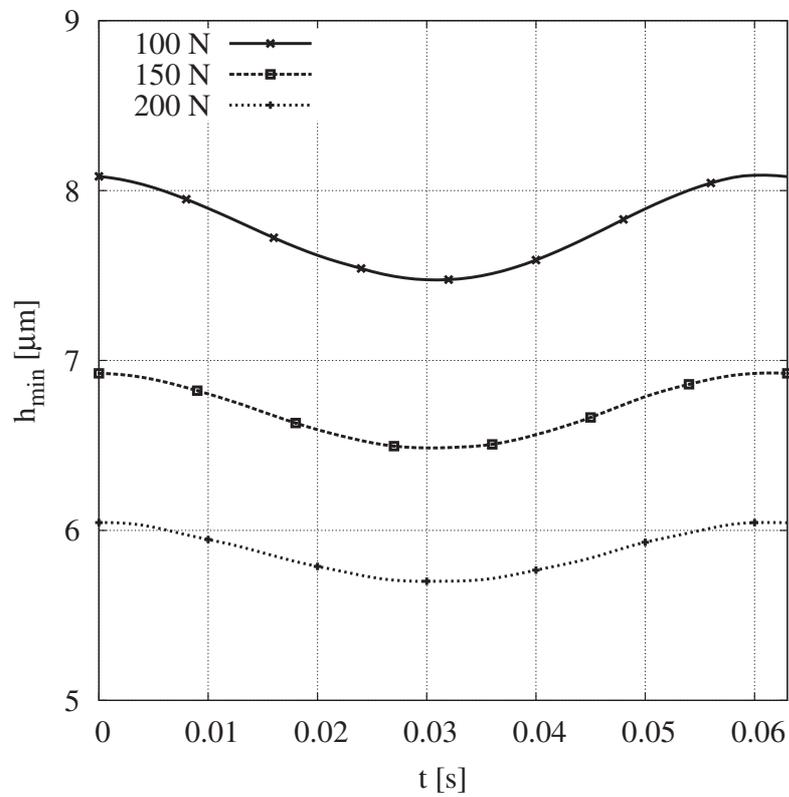


Abbildung 5-7: Minimaler Schmierpalt elastischen Laval-Läufers HD1

Gleitlager mit Schiefstellung

Die Wellenverlagerung des Gleitlagers mit berücksichtigter Schiefstellung ist in Abb. (5-8) dargestellt. Es wurde der gleiche Ausschnitt wie in Abb. (5-4) gewählt. Der Unterschied in der Exzentrizität und der Größe der Ellipsen ist deutlich sichtbar. Für eine statische Last von 200 N ist die Verlagerungsbahn eine stark verzerrte Ellipse, sowohl die Exzentrizität als auch die Größe unterscheiden sich stark von der Modellierung ohne Schiefstellung.

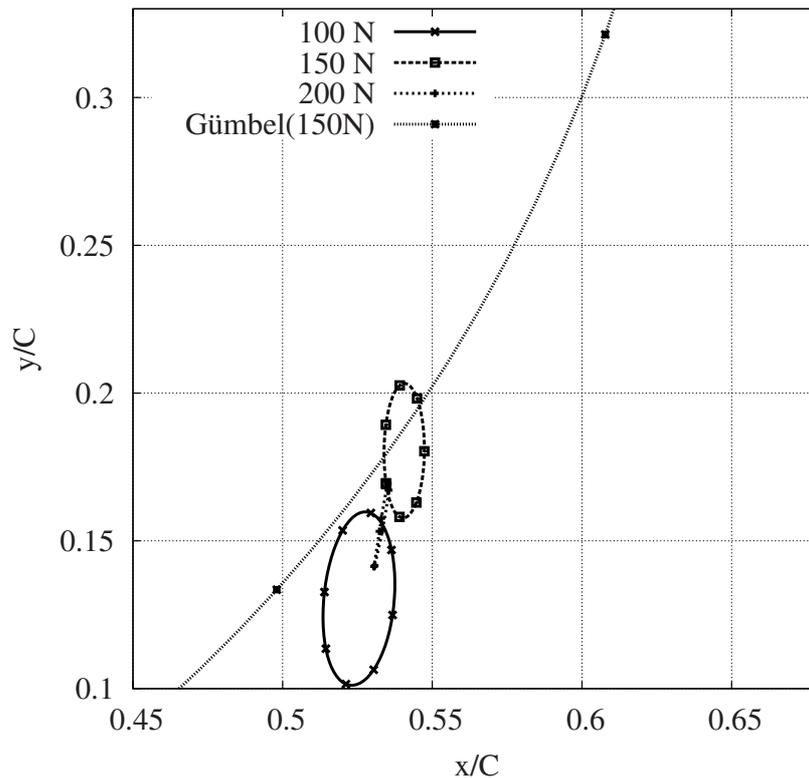


Abbildung 5-8: Wellenverlagerung des elastischen Laval-Läufers HD2

Im Vergleich zur Modellierung eines Parallelspaltes zeigt die Spaltfunktion in Abb. (5-9) eine dominante Asymmetrie in Lagerbreitenrichtung. Am Lagerrand ist der Abstand zwischen Welle und Lagerschale minimal, bei einer Last von 200 N wird dieser auf unter $2\text{ }\mu\text{m}$ reduziert, was zum Festkörperkontakt der Lagerschalen führt. Dieses Verhalten wird auch als Kantenträger bezeichnet, welcher die Lagermaterialien durch größere lokale Belastungen stärker beansprucht. In der resultierenden Druckverteilung in Abb. (5-10) zeigt sich deutlich eine lokale Erhöhung des hydrodynamischen Drucks im Bereich des Lagerrandes. Im Fall der statischen Last von 200 N wird der hydrodynamische Druck vom Festkörpertragdruck überlagert.

Der qualitative Gewinn der Modellierung der Schiefstellung im Gleitlager wird beim globalen Verlauf der kleinsten Schmierpalte beider Varianten in Abb. (5-7) und Abb. (5-11) nicht sofort deutlich. Lediglich die absoluten Werte zeigen die deutliche Annäherung der Lagerschalen. Das Gleitlager, welches bei der Berechnung mit dem einfachen Gleitlagermodell noch $6\text{ }\mu\text{m}$ Abstand zwischen den Lagerschalen generiert, liefert mit dem erweiterten Gleitlagermodell nun eine Annäherung der Lagerschalen bis die Oberflächenrauigkeiten. Ein solcher Mischreibungszustand sollte während des Betriebs des Gleitlagers

unbedingt vermieden werden. Ohne die Modellierung der Schiefstellung kann ein Kanten-träger aufgrund der Durchbiegung und Neigung der Welle nicht in der Simulation erkannt werden. Der Einfluss der Steifigkeit des Lagers durch die zusätzlichen Lagermomente in Querrichtung wird gering sein, die Dämpfung bei der Verdrehung der Welle quer zur Figuren-achse hat dagegen, je nach Lagerkonstellation, einen signifikanten Einfluss auf das Dämpfungsverhalten des gesamten Rotorsystems. Aus der Modellierung des Gleitlagers als Loslager, welches nur Kräfte senkrecht zur Figuren-achse aufnehmen kann, wird nun eine Wellenführung, welche neben den Kräften auch Lagermomente im begrenzten Maße aufbringen kann.

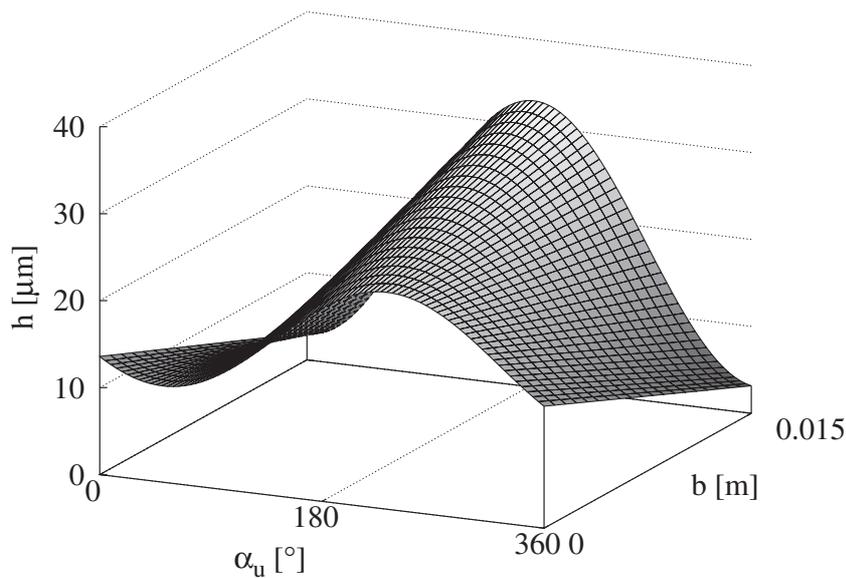


Abbildung 5-9: Spaltfunktion HD2 150N

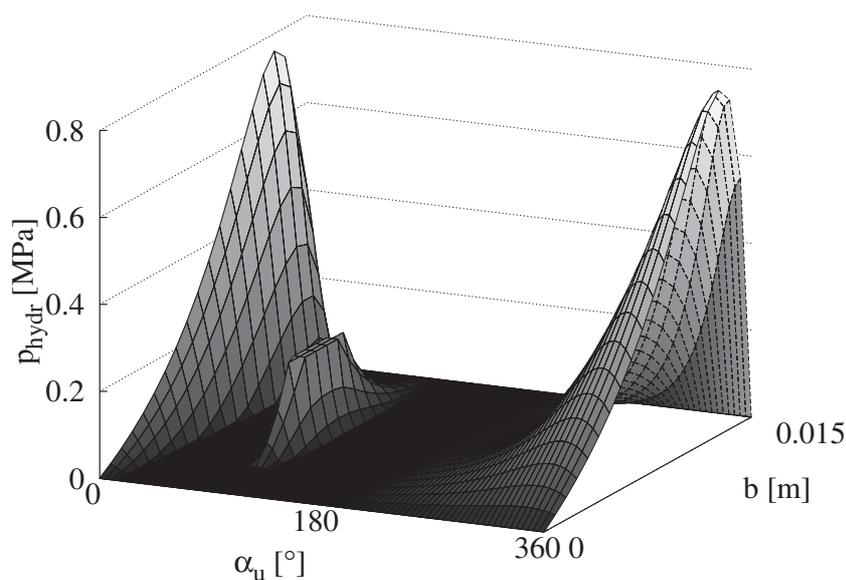


Abbildung 5-10: Druckverteilung HD2 150N

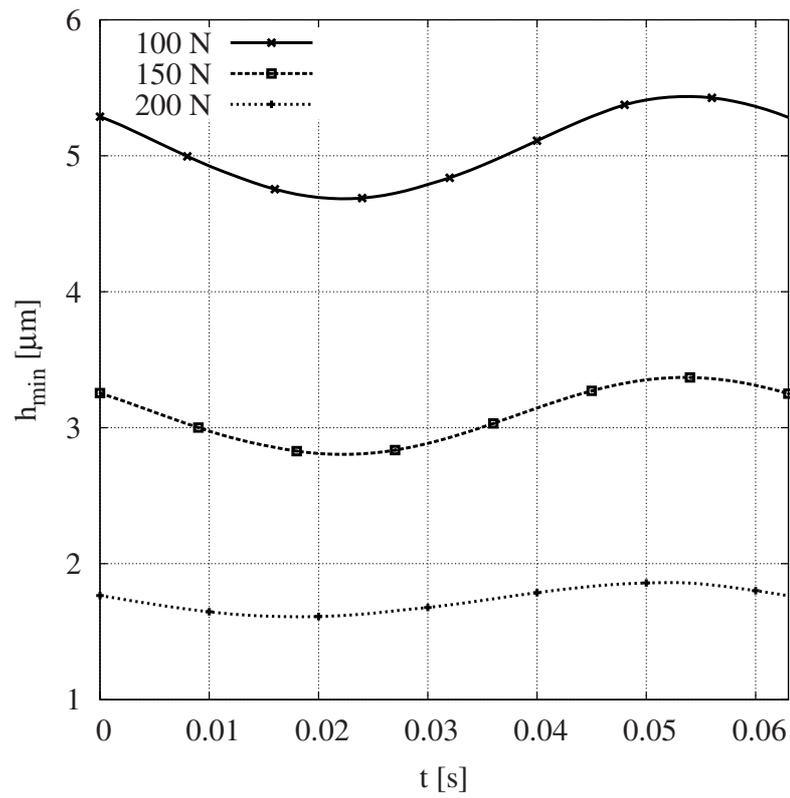


Abbildung 5-11: Minimaler Schmierpalt elastischen Laval-Läufers HD2

Folglich lassen sich viele Anwendungsfälle finden bei denen die Neigung und Durchbiegung der Welle das Systemverhalten nachhaltig beeinflussen kann.

5.2 Einfaches experimentelles Rotorsystem

5.2.1 Aufbau

Der Prüfstand dient maßgeblich zur Validierung der dynamischen Gleitlagersimulation. Die Randbedingungen sollen möglichst eindeutig sein, sodass der Abgleich zwischen Messung und Simulation eindeutig möglich ist. Es ist eine Festlager-Loslager-Kombination gewählt worden. Die Welle ist axial am Wälzlager (Rillenkugellager 6004) festgesetzt. Das Gleitlager ist in unmittelbarer Nähe zum fliegend gelagerten Rotor angeordnet. So ist die Lagerlast des Gleitlagers größer und die Gewichtskraft ist für eine moderate statische Last des Gleitlagers ausreichend. Die dynamische Last wird durch eine Unwucht auf dem Rotor eingepreßt.

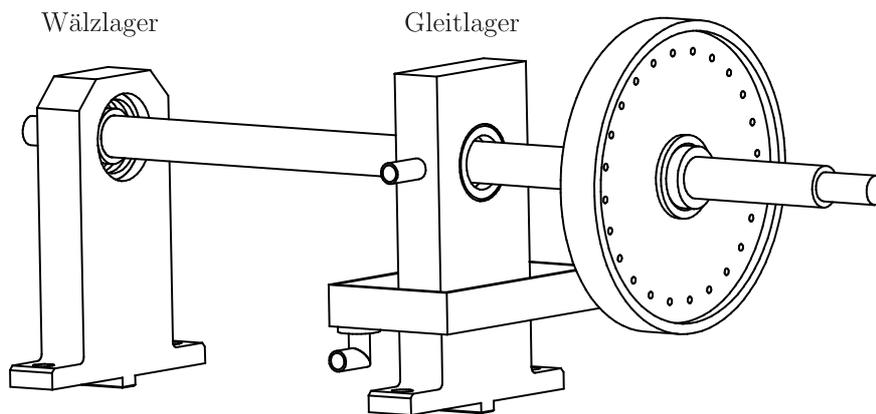


Abbildung 5-12: Aufbau des Gleitlagerprüfstandes

Durch die hohe Steifigkeit des Wälzlagers ist die Verschiebung der Welle dort im Verhältnis zur Verlagerung im Gleitlager klein. Dadurch wird eine Schiefstellung der Welle verursacht. Die Druckverteilung im Gleitlager ist daher nicht symmetrisch.

5.2.2 Prüfstand

Die Basis des Prüfstands ist ein PT-500 von GUNT, welcher um ein Gleitlager mit einer Ölkonditionierung erweitert wurde. Der Antrieb erfolgt über einen drehzahlgeregelten Asynchronmotor, welcher über eine elastische Kupplung an die Welle gekoppelt ist. Die Erfassung der Wellenverlagerung wird mittels zweier orthogonal angeordneter Lasertriangulationssensoren erfasst. Für die Zuordnung der Winkellage wird ein optischer Inkrementalgeber verwendet, so kann die Exzentrizität der Welle an der Messstelle von der Wellenschwingung separiert werden. Dazu ist eine Messung der Exzentrizität der Welle bei geringen Drehzahlen notwendig. Mit der Kenntnis des Winkelbezugs können die Amplitude und der Phasenwinkel der Exzentrizität aus dem Zeitsignal eliminiert werden. Hierzu ist es zwingend erforderlich, dass die Zeitsignale der Wegsensoren ebenfalls einen Winkelbezug aufweisen.

5.2.3 Ergebnisse

Es wurden verschiedene Drehzahlen mit einer definierten Unwucht stationär angefahren. Um einen möglichst großen Orbit zu erzielen, wurde eine Unwuchtmasse von 13 g auf ei-

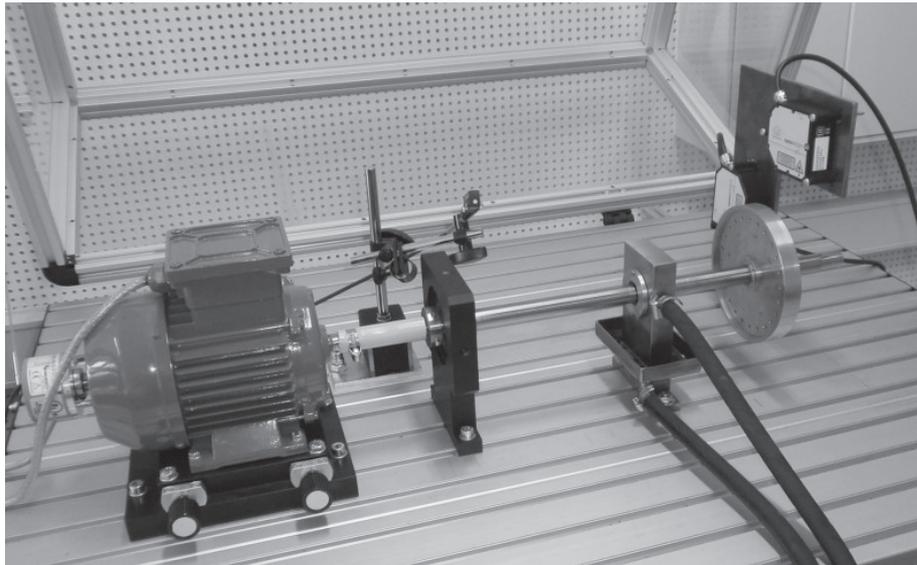


Abbildung 5-13: Gleitlagerprüfstand

Tabelle 5-1: Eigenschaften des Prüfstandes

Öl	SAE 10W40
Wellendurchmesser	20 mm
Lagerbreite	10 mm
Kaltlagerspiel	0.007
Öltemperatur	30°C
Ölzufuhr	2 mm Bohrung in der Lagerschale
Öldruck (relativ)	2 bar
Lagerabstand	212.5 mm
Abstand Gleitlager - Massenscheibe	125 mm
Masseigenschaften der Scheibe	$m = 1.586 \text{ kg}$, $J_a^S = 0.00234 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $J_p^S = 0.00047 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
Länge der Welle	440 mm
Radius der Unwucht auf der Massenscheibe	60 mm

nem Radius von 60 mm verwendet. Das entspricht einer Unwucht von 780 g · mm. Die Modellierung des Rillenkugellagers erfolgte mit dem 2D-Modell aus Abschnitt 3.2.3, wobei auch das Lagerspiel berücksichtigt wurde. Somit ergeben sich auch in der Simulation keine geschlossenen Ortskurven, weil das Systemverhalten nichtlinear ist und keine periodischen Lösungen ermöglicht. Das Lagerspiel des Wälzlagers ist gegenüber dem des Gleitlagers gering, daher dominiert an der Messstelle das Verhalten der Verlagerung innerhalb des Gleitlagers. Abb. (5-15) zeigt den Verlauf für 800 min⁻¹. Die Simulation liefert den typischen elliptischen Verlauf, der durch die verhältnismäßig große Unwuchtkraft gekrümmt ist. Die Abweichung zur Messung erscheint relativ groß, wobei erwähnt werden muss, dass

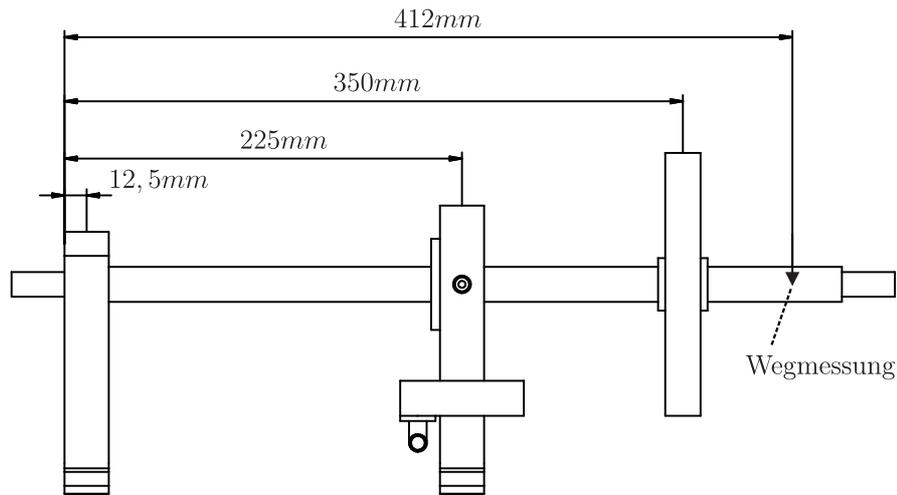
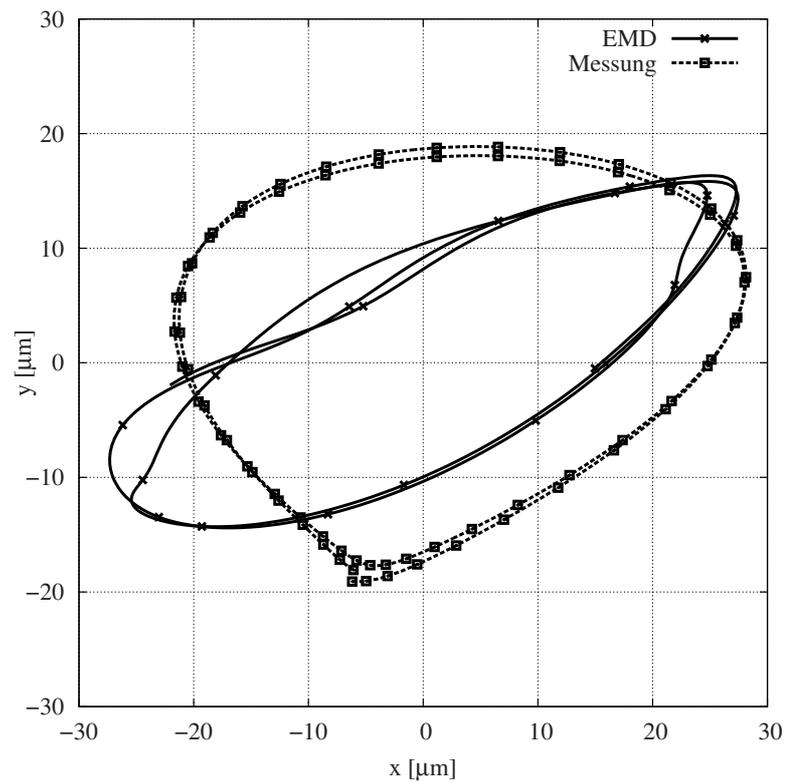
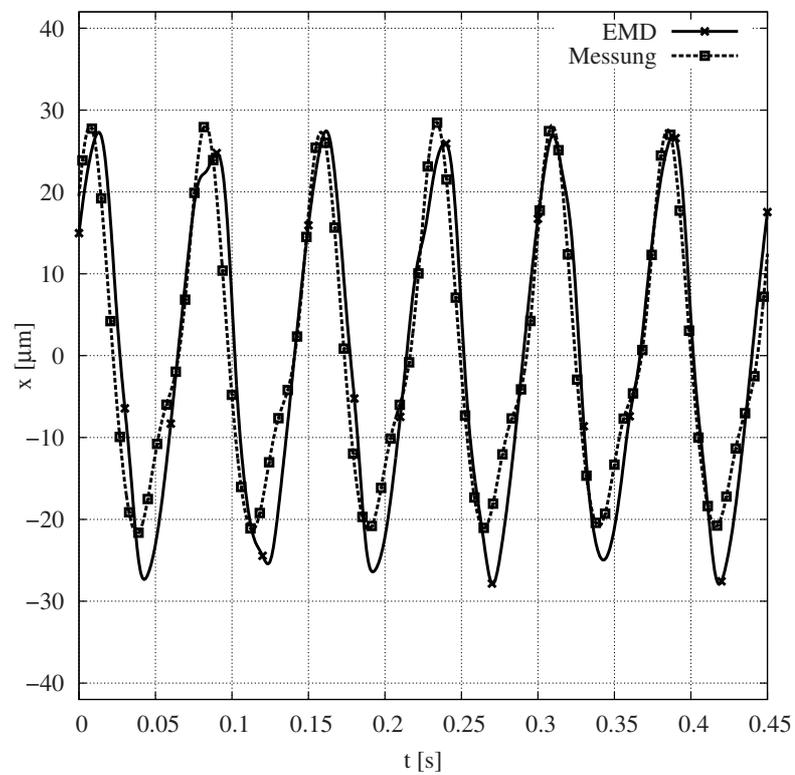


Abbildung 5-14: Abmessungen des Gleitlagerprüfstandes in *mm*

die Exzentrizität der Messstelle im Bereich von $10 \mu\text{m}$ liegt. Die korrekte Beseitigung dieses Störanteils aus dem Zeitsignal gelingt nur, wenn der Winkelbezug exakt ist. Hier wirken sich kleine Drehzahlschwankungen bei einem Umlauf stark aus. Bei der Bestimmung des Winkelbezugs ist nur ein Winkelinkrement pro Umdrehung bekannt. Mit dieser Information wird die Umlaufzeit bestimmt. Der Winkelbezug erfolgt aus der Integration der Winkelgeschwindigkeit, welche als konstant angenommen wird. So ergibt sich eine Unschärfe, weil die Exzentrizität der Messstelle in der Einbaulage nicht korrekt bestimmt werden kann. Etwas besser ist die Übereinstimmung bei höheren Drehzahlen Abb. (5-17) und Abb. (5-19). Die Größenordnung und die Ausrichtung der Ortskurve können mit EMD berechnet werden. Für eine absolute Übereinstimmung müssten alle Randbedingungen korrekt erfasst sein. So kann ein Winkelfehler in bei der Ausrichtung beider Lager zu einer kaum messbaren Verkantung der Welle in der Lagerschale führen. Wie die Untersuchungen in Abschnitt 5.1.4 zeigen, kann die Schiefstellung zu einer deutlichen Veränderung des Lagerverhaltens führen. Neben der unsymmetrischen Druckverteilung kann es im Extremfall zu Mischreibung bzw. Festkörperkontakt kommen. Eine elastische Deformation kann als Ursache vernachlässigt werden, da die statischen und dynamischen Kräfte im Verhältnis zur Steifigkeit sehr gering sind.

Abbildung 5-15: Wellenverlagerungsbahn Gleitlagerprüfstand bei 800 min^{-1} Abbildung 5-16: Auslenkung Gleitlagerprüfstand bei 800 min^{-1}

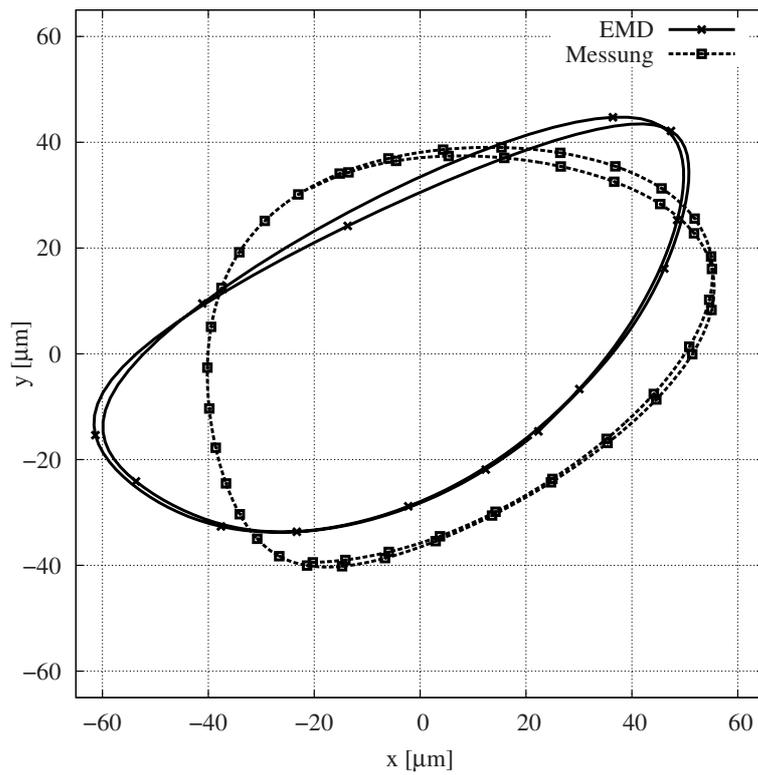


Abbildung 5-17: Wellenverlagerungsbahn Gleitlagerprüfstand bei 1200 min^{-1}

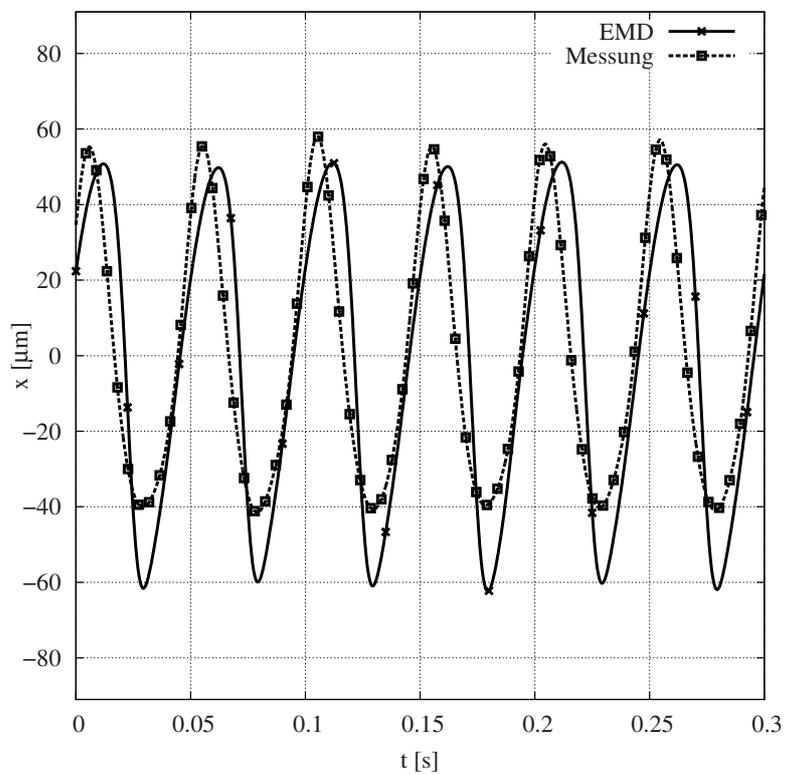
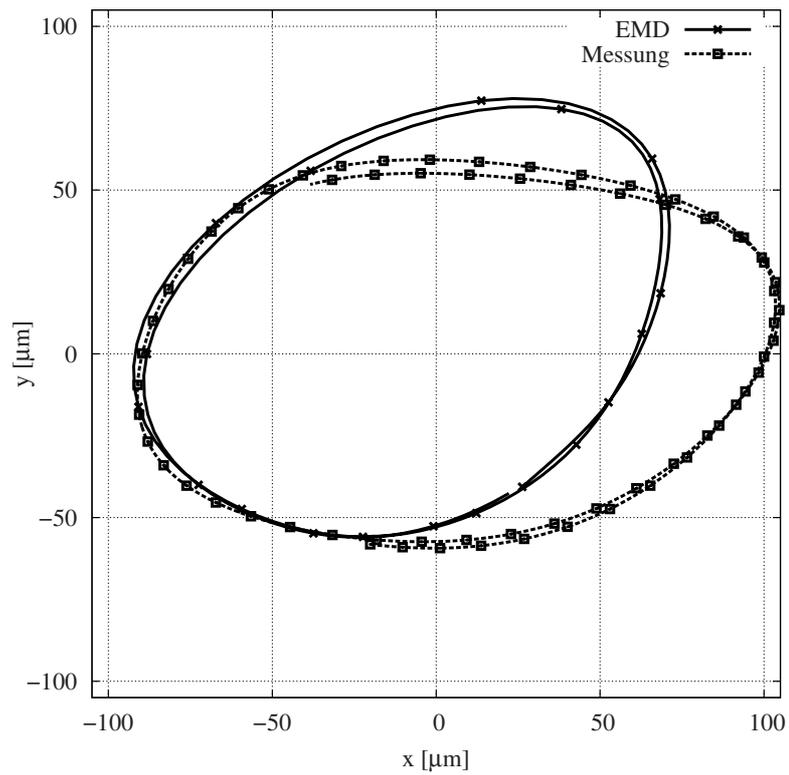
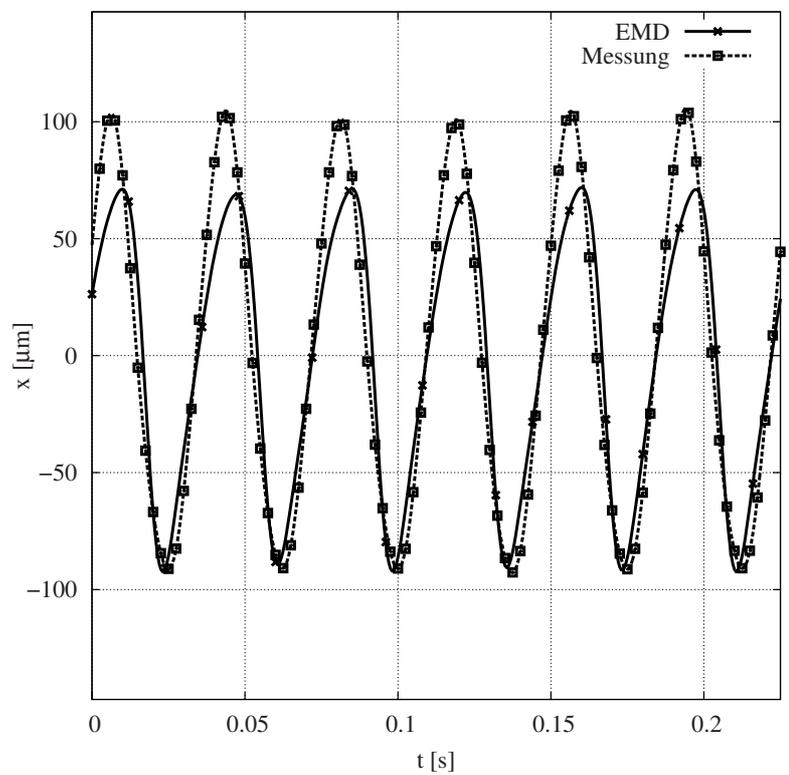


Abbildung 5-18: Auslenkung Gleitlagerprüfstand bei 1200 min^{-1}

Abbildung 5-19: Wellenverlagerungsbahn Gleitlagerprüfstand bei 1600 min^{-1} Abbildung 5-20: Auslenkung Gleitlagerprüfstand bei 1600 min^{-1}

5.3 Abgasturbolader

An einem Abgasturbolader für ein mittleres Nutzfahrzeug wurden einige Untersuchungen zum rotordynamischen Verhalten durchgeführt. Es wurde ein einfacher Kaltgasprüfstand am Institut aufgebaut, welcher einer ersten Validierung der Simulationsergebnisse diente - Abb. (5-21). Der Antrieb erfolgt über einen 1,5 kW Radialluftgebläse, welches an den Eingang des Turbinengehäuses angeschlossen wurde. Auf der Verdichterseite wurde der Auslass mit einer Blende versehen, damit der Widerstand am Verdichterrad wegen der geringen Druckdifferenz nicht zu groß wird. Mit dieser Konstellation konnten Drehzahlen bis ca. 30000 min^{-1} erreicht werden. Die Verluste durch die fehlende Druckbelastung am Verdichter waren relativ groß, zudem war der Volumenstrom und der Druck des Radialluftgebläses nicht ausreichend. Dennoch konnten auch in dem zur Verfügung stehenden Drehzahlbereich subharmonische Schwingungen gemessen werden.

5.3.1 Schwimmbuchsenlagerung

Prüfstand

Der Turbolader enthält eine Schwimmbuchsenlagerung mit zwei getrennten frei beweglichen Schwimmbuchsen an den beiden Lagerstellen. Zur Messung der Wellenverlagerung wurde auf der Verdichterseite eine Hülse auf die Welle aufgeschraubt - Abb. (5-22). An ihr wurde mit verschiedenen Messmethoden, teilweise auch gleichzeitig, die Auslenkung bestimmt. Primäre Messmethode waren zwei Laser-Triangulationssensoren, welche orthogonal zueinander die Verlagerung bestimmten. Zur Kontrolle der Messmethode wurden

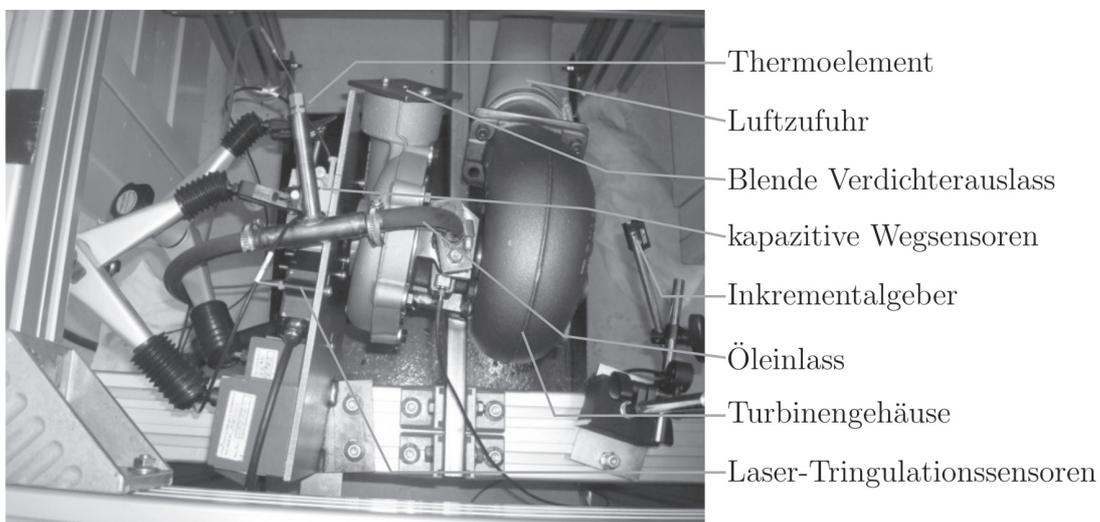


Abbildung 5-21: Aufbau des Kaltluftprüfstandes für den Abgasturbolader

auch kapazitiv messende Sensoren angebracht. Wie sich herausstellte, funktionierten beide Messtechniken gut und liefern ähnliche Ergebnisse, wobei die kapazitiven Sensoren, durch ihr relativ zum Messobjekt großes Feld, die Messdaten mit einer Art Mittelung bzw. Tiefpass versehen. Auf der Turbinenseite wurde mit einem optischen Inkrementalgeber die Winkelgeschwindigkeit bzw. die Referenzlage für die Bestimmung des Winkelbezugs aller Wegsignale erfasst. Dies war notwendig, da die Hülse auf der Verdichterseite durch

das Gewinde nicht zentriert wurde, damit hatte die Messstelle eine erhebliche Exzentrizität. Die Bestimmung dieser Größe und den Winkelbezug zur Referenzmarke wurde bei einer Wegmessung bei sehr geringen Drehzahlen vollzogen. Die so bestimmte Exzentrizität wurde aus den Zeitsignalen aller weiteren Messungen entfernt. Dieses Vorgehen liefert zufriedenstellende Ergebnisse bis auf eine Restungenauigkeit von $10 \mu m$.



Abbildung 5-22: Messstelle - Wellenverlagerung am ATL

EMD-Modell

Das mechanische Ersatzmodell des Abgasturboladers besteht aus drei beweglichen Teilen: Zwei Schwimmbuchsen und der Rotor, bestehend aus einer elastischen Welle mit den Massepunkten für die Schauflräder. Hier wurde ein FE-Modell mit Balkenelementen verwendet und die Schauflräder als konzentrierter Massepunkt mit Drehträgheiten auf die entsprechenden Wellenknoten gebracht. Die Grundlage für die Formulierung der Systemmatrizen für die elastische Struktur ist in [Fis11] dargestellt. Basis ist ein Timoshenko-Balken, dessen Systemgleichungen für einen rotierenden Balken hergeleitet worden sind. Die Schwimmbuchsen können sich frei bewegen, wobei die Verkipfung und die Verschie-

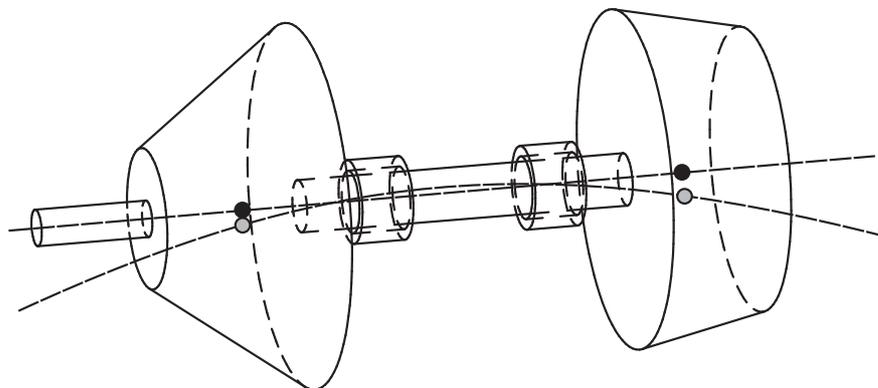


Abbildung 5-23: ATL in Schwimmbuchse

bung in Längsrichtung verhindert ist, da die Einbausituation dies nur sehr begrenzt zulässt. Die Verbindung von Gehäuse, Schwimmbuchse und Welle erfolgt über ein spezielles

Gleitlagermodul für die Schwimmbuchse. Es beinhaltet zwei Gleitlager mit Schiefstellung (Modellierungsvariante HD2 analog zu Abschnitt 5.1.2), die sich die Schwimmbuchse als Lagerpartner teilen. Außerdem werden die beiden Schmierfilme an den Koppelbohrungen miteinander verbunden [NWDS11], das Gleichungssystem zur Berechnung des Drucks wird für beide Schmierpalte zusammen aufgestellt und mit entsprechenden Kopplungen gelöst. Einen Überblick über das Modell lässt sich auch aus [DNWS11] entnehmen. Die Schwimmbuchsendrehzahl stellt sich frei aus den angreifenden Reibmomenten des inneren und äußeren Schmierpaltes ein. Die Schwimmbuchsendrehzahl ist ein interessanter Indikator für die Whirl-Erscheinungen [WDNS11], leider ist die messtechnische Erfassung am realen Turbolader im Betriebszustand schwierig. Gerade bei kleinen Baureihen ist eine Unterbringung der Messtechnik ohne die Beeinflussung des Systems nicht möglich.

Hochlauf

Zu den markanten Eigenschaften des gleitgelagerten Abgasturboladers gehören die Whirl-Schwingungen, die beim Hochlauf auftreten. Eine wichtige Rolle spielt dabei die äußere Dämpfung, die durch die Dichtungen und umströmten Schaufelräder in das System eingepreßt wird. Die Bestimmung der absoluten Größe der Dämpfung ist sehr aufwendig, da bei reibungsbehafteten Effekten die Bestimmung der Normalkraft schwierig ist, wodurch die Berechnung der Reibkraft nicht möglich ist. Das System Abgasturbolader ist in dieser Hinsicht zu komplex, um mit einfachen Ansätzen eine schnelle Korrelation mit dem realen Verhalten zu erlangen.

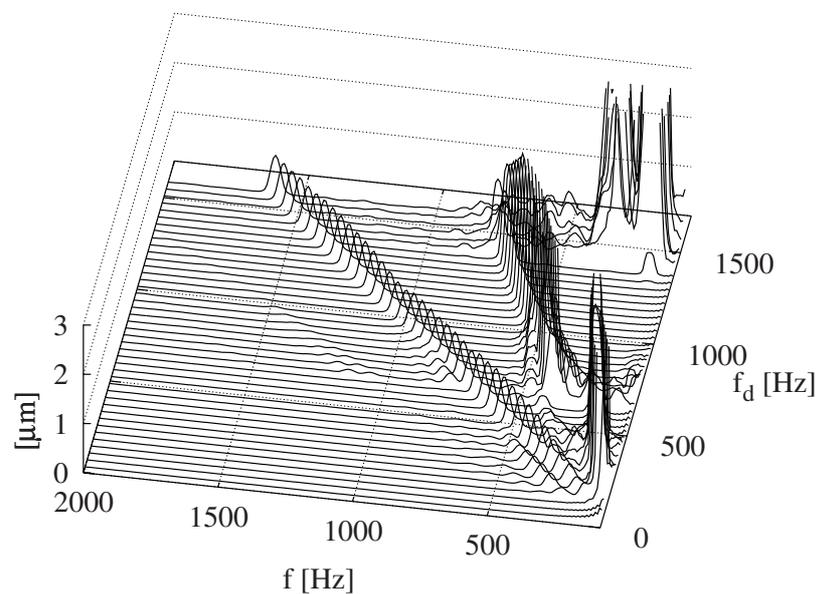


Abbildung 5-24: Berechnete Auslenkung am Verdichterlaufrad beim Hochlauf (starre Welle in Schwimmbuchse) - Dämpfung 10 Ns/m

Abb. (5-24) zeigt das Wasserfall-Diagramm eines Hochlaufs mit einer starren Welle und einer definierten äußeren Dämpfung. Ab einer Drehfrequenz von 500 Hz treten die besagten Oil-Whirl-Schwingungen auf. Die Amplitude übersteigt die Unwuchtschwingung teilweise deutlich, dennoch reicht die äußere Dämpfung aus, um die Amplituden der Whirl-Schwingungen ab 1200 Hz wieder zu reduzieren. Bei einer sukzessiven Erhöhung der äuße-

ren Dämpfung können die Amplituden der Whirl-Schwingungen reduziert werden - Abb. (5-25). Ist die Dämpfung ausreichend groß, so kann die Whirl-Schwingung nahezu ganz unterdrückt werden - Abb. (5-26). Damit zeigt sich, dass, neben der Abbildung der Hydrodynamik und der Rotordynamik die Randbedingungen an den Systemgrenzen einen maßgeblichen Einfluss auf die numerischen Ergebnisse haben. Die Bestimmung der physikalischen Zusammenhänge und eine mathematische Formulierung der Rückstellkräfte an den Schaufelrädern fallen für die dynamische Simulation schwer. Für stationäre Betriebspunkte lassen sich die resultierenden Kräfte an den Schaufelrädern durch eine CFD-Simulation bestimmen, eine direkte Kopplung mit einer dynamischen Simulation ist aus Gründen der Rechenzeit nicht möglich. Die Abbildung der Rückstellkräfte über ein linear viskoses Modell ist der Tatsache geschuldet, überhaupt eine Simulation des Hochlaufs mit diesen Kräften durchführen zu können. Hier gibt es noch deutlichen Forschungsbedarf.

Die Annahme, dass die elastische Deformation der Welle keinen Einfluss hat, ist bei den betrachteten Drehzahlen nicht korrekt, da die Elastizität der Welle die Eigenfrequenzen beeinflusst. Die Entstehung der subharmonischen Schwingungen wird maßgeblich durch die Übereinstimmung einer potentiellen Whirl-Anregung des umlaufenden Öls in den Schmierpalten und den Eigenfrequenzen bestimmt. Daher werden alle weiteren Untersuchungen mit einer elastischen Welle durchgeführt. Die grundsätzlichen Aussagen zum Einfluss der äußeren Dämpfung sollten von der Modellierung der Welle unbeeinflusst sein.

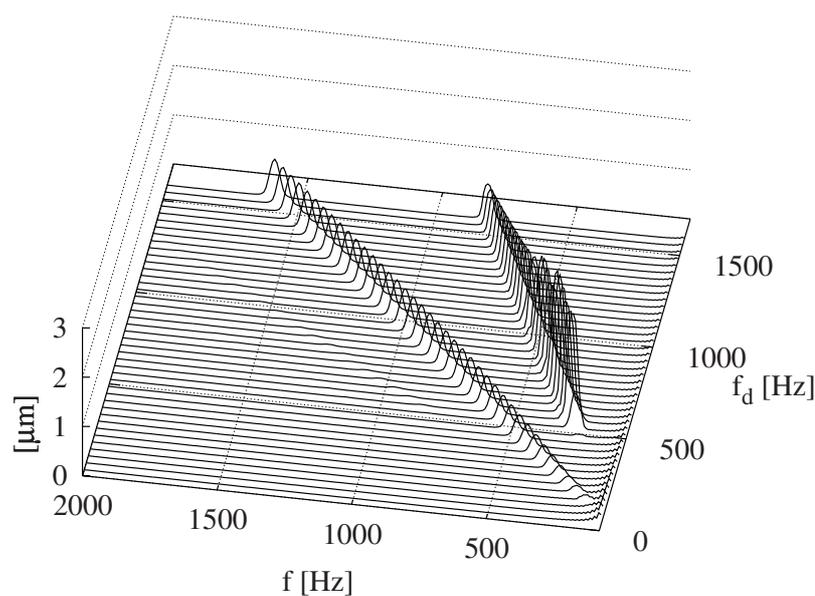


Abbildung 5-25: Berechnete Auslenkung am Verdichterlaufrad beim Hochlauf (starre Welle in Schwimmbuchse) - Dämpfung 250 Ns/m

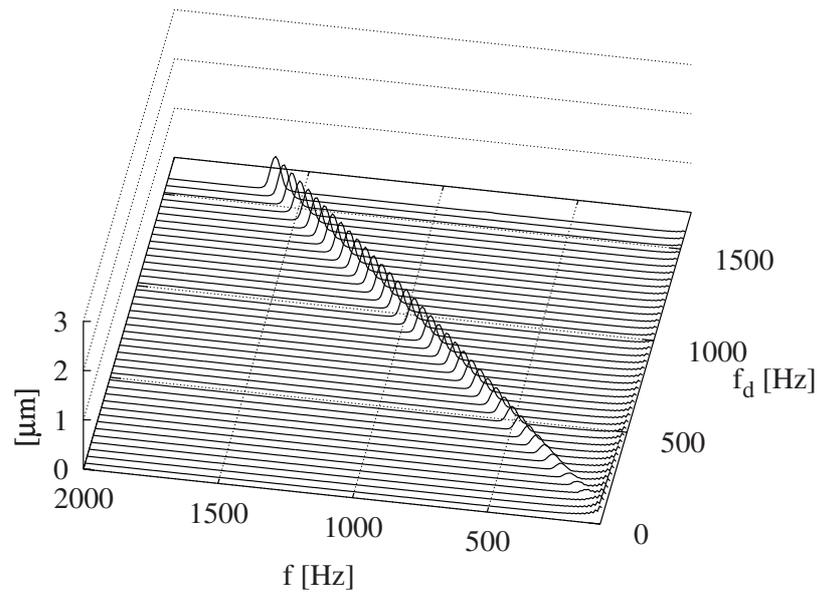


Abbildung 5-26: Berechnete Auslenkung am Verdichterlaufrad beim Hochlauf (starre Welle in Schwimmbuchse) - Dämpfung 550 Ns/m

Stationärer Betrieb

Um einen Vergleich zwischen dem Simulationsmodell und dem Kaltgasprüfstand durchführen zu können, wurden zwei stationäre Betriebspunkte gewählt.

Die Übereinstimmung in dieser Orbitdarstellung in Abb. (5-27) ist nicht hoch, der Blick auf den Frequenzbereich in Abb. (5-28) zeigt, dass die Frequenz der Oil-Whirl-Schwingung sehr gut getroffen ist. Das Amplitudenverhältnis zwischen den drehfrequenten- und den subharmonischen Schwingungen ist jedoch nicht zufriedenstellend. Die Ursachen für die Abweichungen sind die unbekannte Unwuchtverteilung und Unsicherheiten bei den vorhandenen Lagerspielen des Prüfstandes und die dissipativen Kräfte an der Welle. Grundlage für die Unwuchtverteilung in der Simulation waren die Herstellerangaben für die zulässige Restunwucht. Die dissipativen Kräfte wurden im Modell mit viskosen Rückstellkräften an den Schaufelrädern modelliert.

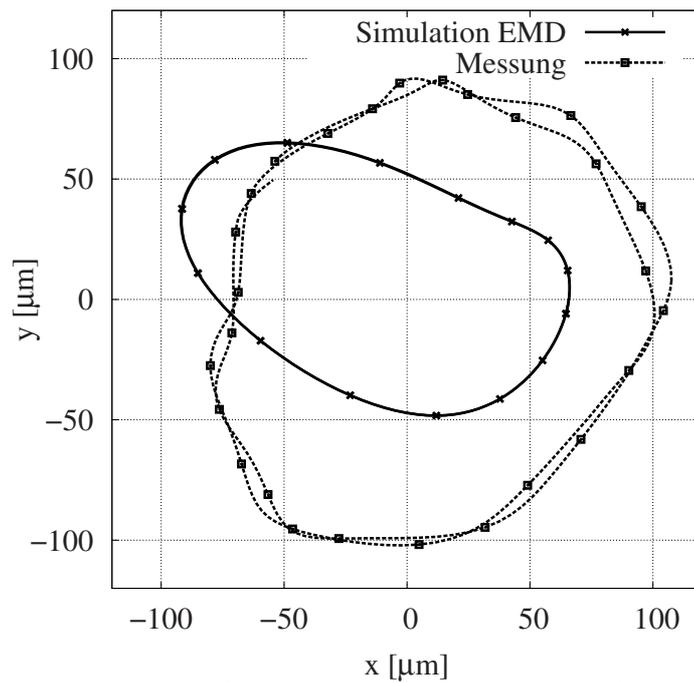


Abbildung 5-27: Vergleich Orbit aus Messung und EMD, ATL bei 10000 min^{-1}

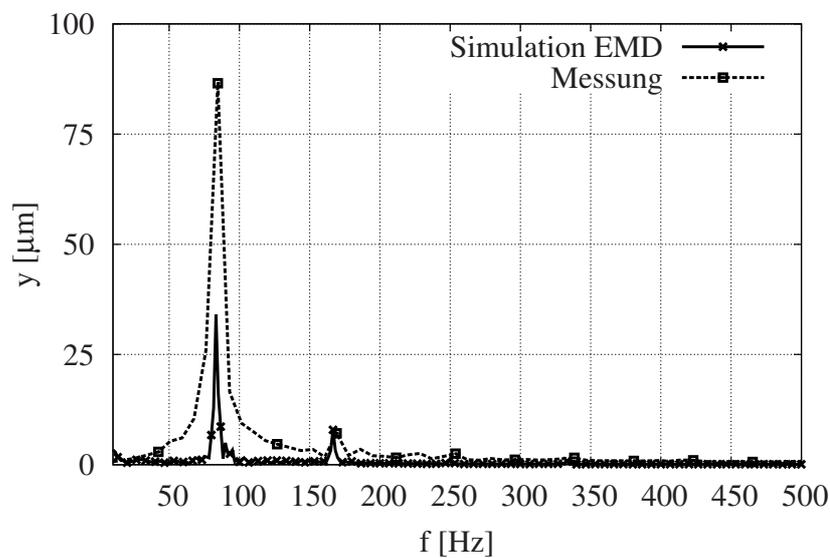


Abbildung 5-28: Vergleich FFT aus Messung und EMD, ATL bei 10000 min^{-1}

Ein ähnliches Bild zeichnet sich bei der Messung bei 20000 min^{-1} ab. Auch hier ist der Orbit nur in der Größenordnung gleich - Abb. (5-29). Gravierender ist die Abweichung im Frequenzbereich, da die Frequenz der Whirl-Schwingung nicht getroffen wird - Abb. (5-30). Hier müssen noch grundsätzliche Zusammenhänge bezüglich weiterer Rückstellkräfte, die an der Welle wirken, ergründet werden.

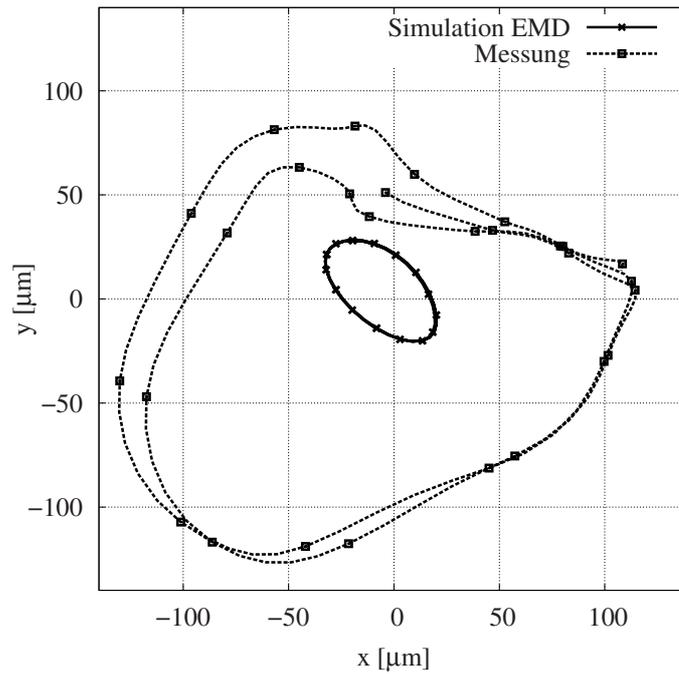


Abbildung 5-29: Vergleich Orbit aus Messung und EMD, ATL bei 20000 min^{-1}

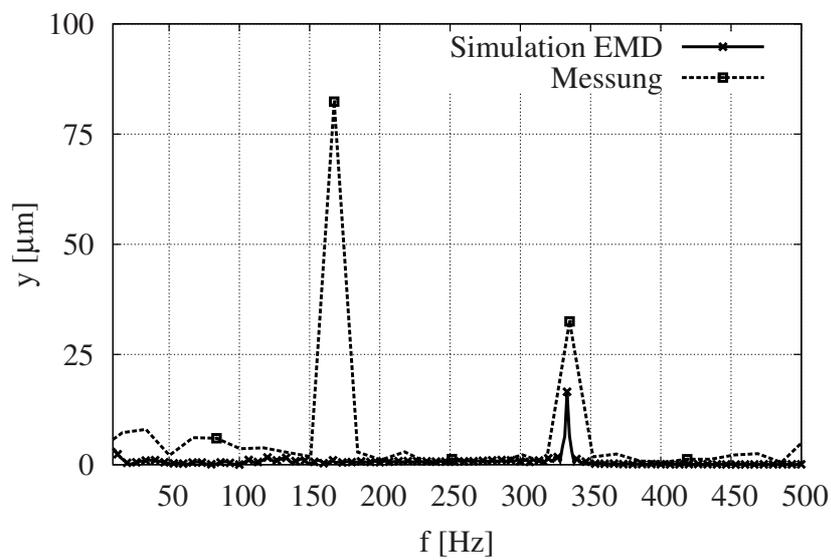


Abbildung 5-30: Vergleich FFT aus Messung und EMD, ATL bei 20000 min^{-1}

5.3.2 Wälzlagerung

Der betrachtete Abgasturbolader wurde im Rechenmodell mit einer Wälzlagerung versehen und ein Hochlauf berechnet. Wegen der hohen Drehzahlen kommen hier nur Spindellager mit keramischen Wälzkörpern infrage. Durch die hohen Kosten für Keramikwälzlager sind sie in den Volumensegmenten bei Pkw-Turboladern nicht verbaut. Wegen der hohen Temperaturen und der hohen Drehzahlen können keine Stahlwälzlager verwendet werden. Für den vorliegenden Abgasturbolader werden die Spindellager von FAG des Typs HCB71900-C-T-P4S-UL verwendet. Die Abmessungen sowie die zulässige Höchstdrehzahl passen zum untersuchten Turbolader. Konstruktiv müssen die Lager vorgespannt werden, da durch die Zentrifugalkraft die Kugeln bei Enddrehzahl vom Innenring derart abheben, dass keine Haftkräfte für das Abrollen der Wälzkörper mehr übertragen werden können. Dann rutschen die Kugeln durch und ein Abwälzen ist nicht mehr möglich. Dieser Zustand muss unbedingt verhindert werden. Eine erste Rechnung erfolgte ebenfalls mit einer starren

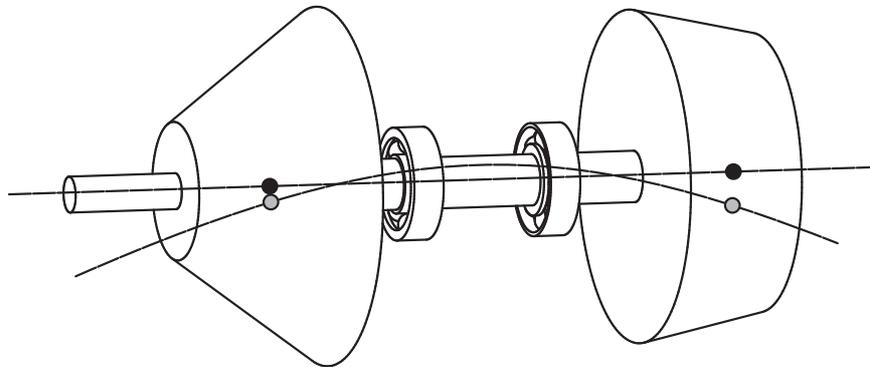


Abbildung 5-31: ATL mit Wälzlagerung

Welle. Entscheidend für ein korrektes Abwälzen der Kugeln ist eine ausreichende Kontaktnormalkraft. Damit kann eine hinreichend große Tangentialkraft für die Drehbewegung entstehen. Verursacht durch die großen Zentrifugalkräfte lösen sich die Kugeln mit zunehmender Drehzahl vom Innenring und die Normalkraft verringert sich in den Kontaktpunkten. Um ein Abwälzen, auch bei hohen Drehzahlen zu gewährleisten, muss das Lager vorgespannt werden. Da im Simulationsmodell das 2D-Wälzlagermodell verwendet wurde, musste die axiale Vorspannung über eine radiale Aufweitung des Innenrings aufgebracht werden. Diese wurde so iterativ angepasst, bis sich eine Vorspannung von ca. 35 N pro Wälzkörper ergab. Bei Enddrehzahl ist die maximale Normalkraft zwischen Wälzkörper und Außenring auf 90 N angestiegen. Die minimale Normalkraft am Innenring ist auf etwa 5 N abgesunken - Abb. (5-32). Diese ist gerade ausreichend um die notwendige Tangentialkraft zum Abwälzen aufzubringen. Die resultierende Lagerlast wird durch die Unwucht des Läufers dominiert. Die Wellenschwingung ist bei der vorgespannten Lagerung mit der starren Welle um Größenordnungen kleiner, als bei der Schwimmbuchsenlagerung - Abb. (5-33). Da die Steifigkeit der vorgespannten Lager so groß ist, liegt die erste kritische Drehzahl außerhalb des Betriebsdrehzahlbereichs.

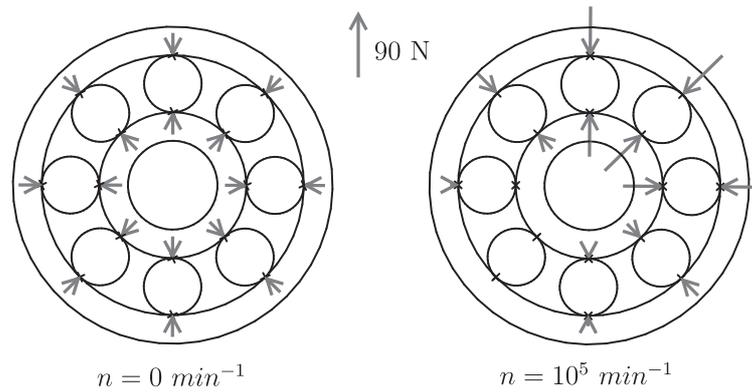


Abbildung 5-32: Wälzlager im ATL - Normalkräfte an den Wälzkörpern

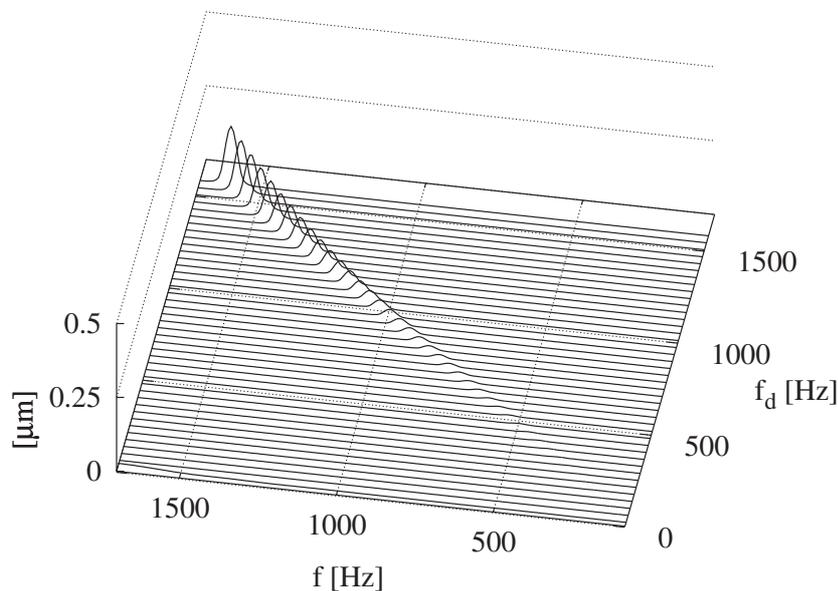


Abbildung 5-33: Berechnete Auslenkung am Verdichterlaufrad beim Hochlauf (starre Welle in Wälzlager, Dämpfung 10 Ns/m)

5.3.3 Elastizität der Welle

Beide Lagerungsvarianten (Schwimmbuchse und Wälzlager) wurden zusätzlich mit einer nachgiebigen Welle simuliert. Zunächst fällt ein großer Unterschied zwischen dem Modell mit der starren Welle (Abb. (5-33)) und dem Hochlauf mit der elastischen Welle auf (Abb. (5-34)). Im elastischen Fall ist eine deutliche Resonanz oberhalb von 500 Hz erkennbar, welche im starren Modell nicht auftritt. Die maximalen Amplituden am Verdichterlaufrad erhöhen sich im Resonanzdurchgang auf 15 μm . Weiterhin ist das restliche Amplitudenniveau am Verdichterlaufrad bei der elastischen Modellierung deutlich größer. Der Vergleich zwischen Wälz- und Schwimmbuchsenlagerung (Abb. (5-34) und Abb. (5-35)) zeigt ebenfalls deutliche Unterschiede. Im Falle der Wälzlagerung sind keine subharmonischen oder superharmonischen Schwingungen erkennbar. Es dominiert einzig die Unwuchtschwingung den Verlauf der Auslenkung am Verdichterlaufrad. Bei der Schwimmbuchsenlagerung fällt

auf, dass die Amplituden im Resonanzdurchgang, nun bei ca. 400 Hz , deutlich geringer ausfallen. Dies weist auf eine größere Dämpfung der Lagerung hin. Wie Abb. (5-35) deutlich

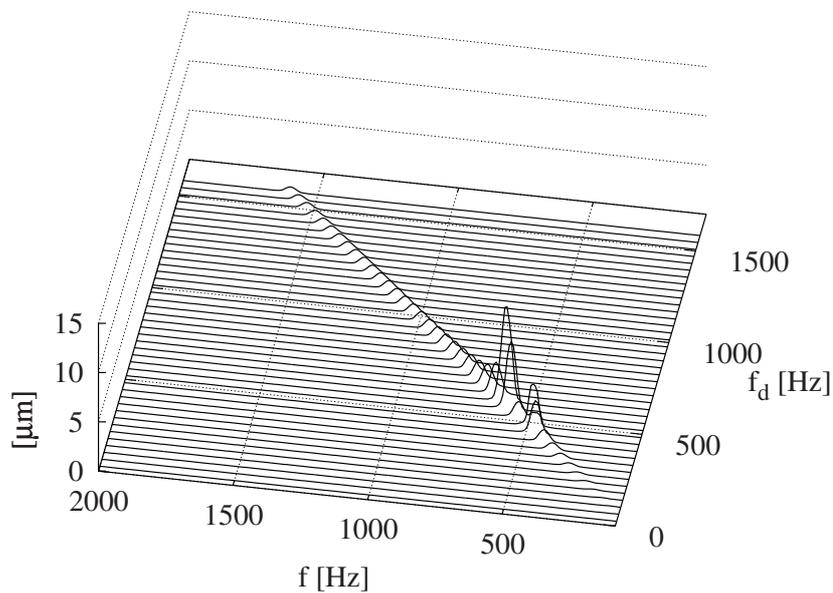


Abbildung 5-34: Berechnete Auslenkung am Verdichterlaufrad beim Hochlauf (elastische Welle in Wälzlagern, 10 Ns/m)

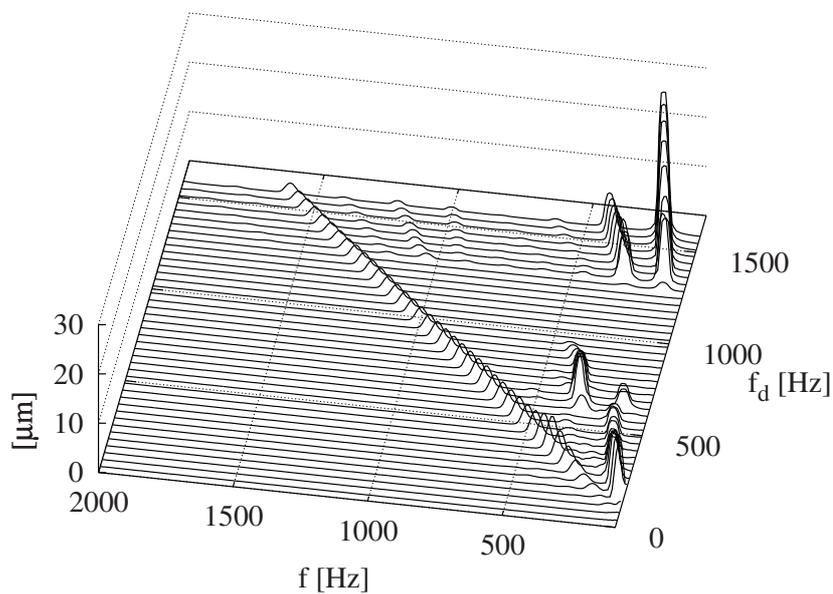


Abbildung 5-35: Berechnete Auslenkung am Verdichterlaufrad beim Hochlauf (elastische Welle in Schwimmbuchsen, Dämpfung 10 Ns/m)

zeigt, dominieren im Falle der Schwimmbuchsenlagerung die subharmonischen Schwingungen, resultierend aus den Oil-Whirl-Frequenzen des inneren und äußeren Gleitlagers, die mit den Systemeigenfrequenzen in bestimmten Drehzahlbereichen ein Anregungssystem bilden.

5.4 Vollrolliges Wälzlager

Als weiteres Beispiel wird ein vollrolliges Lager aus einer Anwendung des Schwermaschinenbaus gewählt. Es handelt sich um ein Rollenlager ohne Käfig mit 45 Wälzkörpern. Durch den fehlenden Käfig ist es bei dieser Bauart zu einem erhöhten Verschleiß der Wälzkörper gekommen. Zur Untersuchung der möglichen Ursachen ist ein MKS-Modell mit dem in Abschnitt 3.2.3 vorgestellten 2D-Kontakt erstellt worden. Dabei werden in den folgenden Abbildungen zwischen den Modellierungsvarianten starre Wälzkörperkontur und elastische Wälzkörperkontur unterschieden.

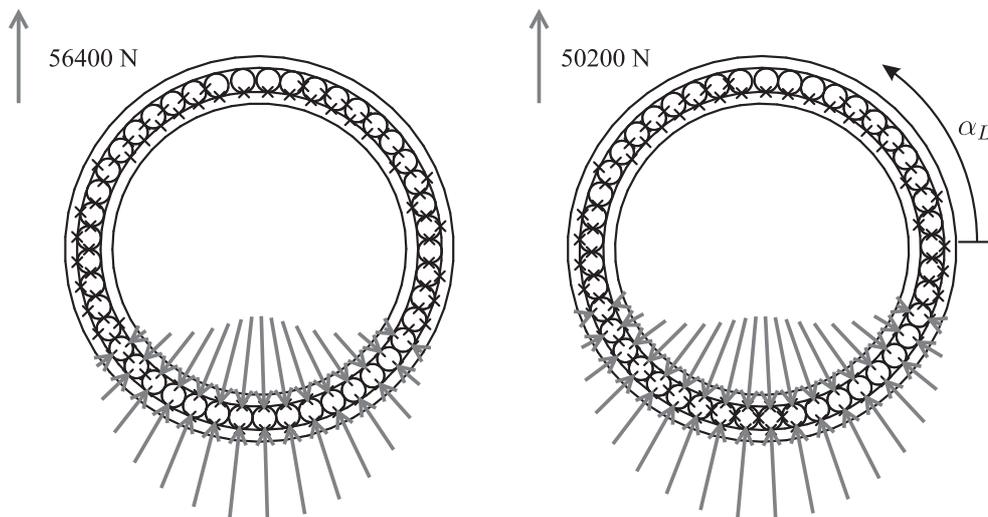


Abbildung 5-36: Normalkräfte am vollrolligen Wälzlager (li: starr, re: elastische Kontur))

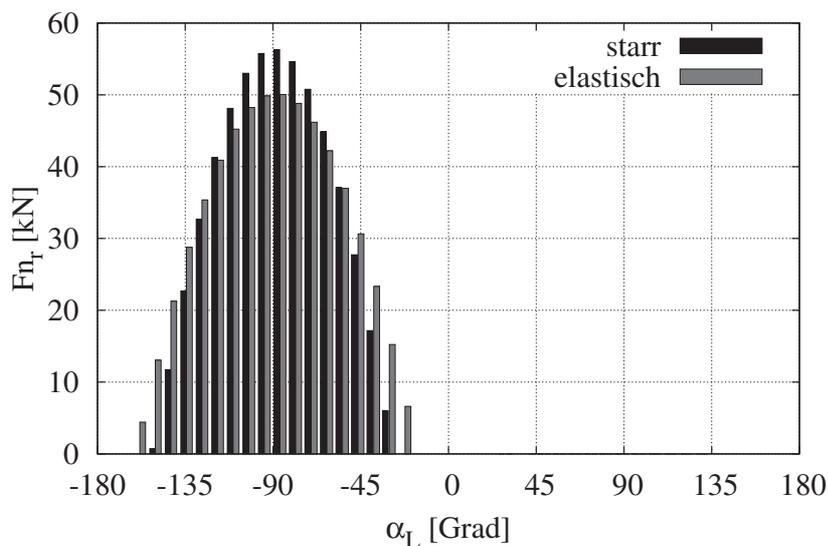


Abbildung 5-37: Normalkräfte beim vollrolligen Wälzlager

Abb. (5-36) und Abb. (5-37) zeigen den Verlauf der Kontaktnormalkräfte in radialer Richtung. Die Belastung des Lagers beträgt 500 kN auf den Innenring, welcher mit 20 min^{-1} rotiert. Der Außenring ist festgesetzt. Das Zentrum der Lastzone befindet sich bei einem Winkel $\alpha_L = -90^\circ$. Durch die elastische Konturverformung ist die Lastzone über mehr Wälzkörper verteilt und die Spitzenlast verringert sich. Das wirkt sich auch auf die resultierende Steifigkeit des Lagers aus, wie in Abb. (5-38) dargestellt ist. Die Reihenschaltung der Kontursteifigkeit führt zu einer größeren Verschiebung des Innenrings.

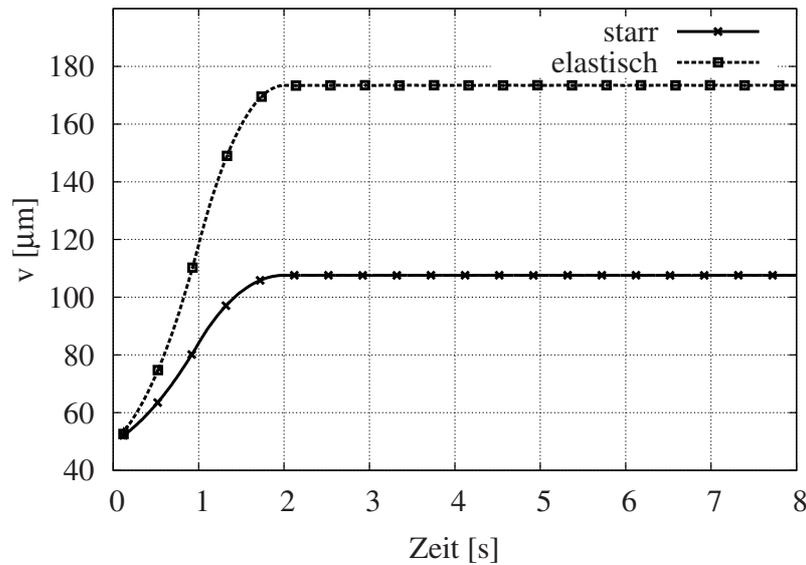


Abbildung 5-38: Einfederung des Innenrings beim vollrolligen Wälzlager

Die Dynamik ist bei diesen Winkelgeschwindigkeiten relativ gering, dennoch stellen sich in der Lastzone interessante Schwingungsphänomene in der Bewegung der Wälzkörper ein. Zu dieser Schwingung kommt bei Simulation mit elastischer Konturverformung noch ein Effekt der Beschleunigung und Verzögerung beim Einlaufen der Wälzkörper in die Lastzone hinzu. Dieses Verhalten ist in [Elf05, S.178] an einem anderen vollrolligen Lager durch die Messung der Normalkraft zwischen zwei Wälzkörpern im Betrieb erfasst worden. Abb. (5-39) zeigt den Verlauf der Drehzahl der Wälzkörper in der Lastzone. Der Mittelwert dieser Drehzahl ist für den starren Fall konstant, wohingegen beim elastischen Fall bis zum Scheitel der Lastzone die Drehzahl ansteigt, und danach wieder abfällt. Dies führt in der Lastzone zu einem Aufstauen der Wälzkörper, wodurch die Normalkräfte zwischen den Wälzkörpern ansteigen. Abb. (5-40) zeigt den Verlauf dieser Normalkräfte für alle Wälzkörper. Im starren Fall durchlaufen die Wälzkörper die Lastzone, ohne sich zu berühren. Im elastischen Fall werden Kontaktnormalkräfte von bis zu 200 N erzeugt, was in Bezug zur radialen Kontaktnormalkraft sehr gering ist. Dieser Kontakt ist stark reibungsbehaftet, da die tangentialen Geschwindigkeiten der Wälzkörper im Berührungspunkt entgegengesetzt gerichtet sind. Mit dem Modell der elastischen Konturverformung lassen sich die Verschleißerscheinungen an den Wälzkörpern schlüssig erklären.

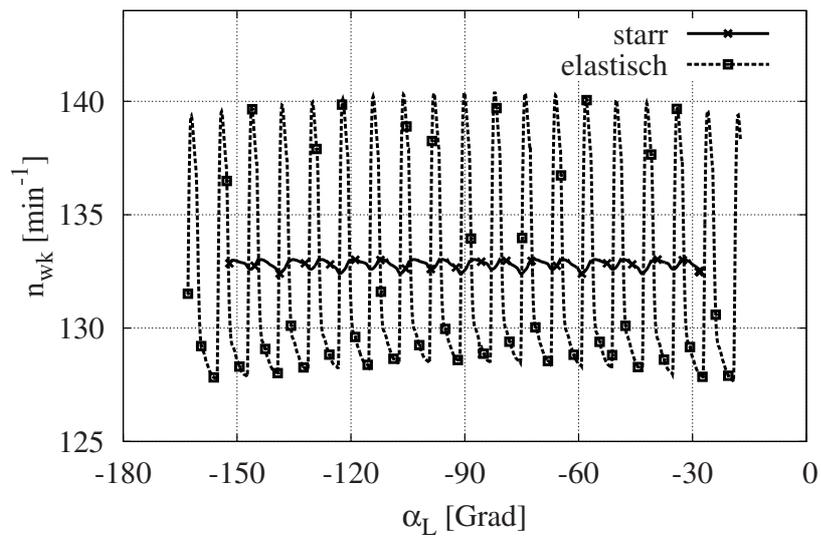


Abbildung 5-39: Drehzahl der Wälzkörper beim vollrolligen Wälzlager

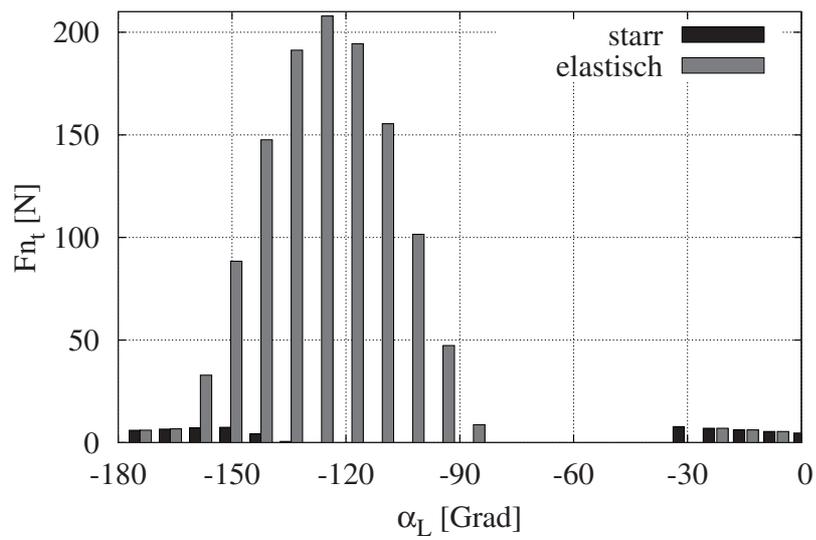


Abbildung 5-40: Normalkräfte zwischen den Wälzkörpern beim vollrolligen Wälzlager

5.5 Kurbeltrieb eines Verbrennungsmotors

Die Untersuchungen am Kurbeltrieb und die Bestimmung der Lagerkräfte und Reibmomenten im Kurbeltrieb waren Anstoß für die Entwicklung einer ganzheitlichen Gleitlager-simulation. Viele grundsätzliche Untersuchungen wurden zunächst mit SIMPACK und den eigenen hydrodynamischen Routinen durchgeführt [DWS10]. Als sehr schwierig stellte sich die Reduktion der elastischen Struktur des Pleuels heraus. Die Anzahl der verwendeten Eigenvektoren bei der modalen Reduktion zur Abbildung der Deformation muss sehr hoch sein, damit auch die lokalen Deformationen in der Lagerschale abgebildet werden können. Die globale Deformation des Pleuelstegs lässt sich mit wenigen Eigenvektoren abbilden, die lokalen Deformationen werden dagegen durch Eigenvektoren beschrieben, denen eine sehr hohe Eigenfrequenz zugeordnet ist. Die grundsätzliche Annahme der Modalreduktion in der Struktur-dynamik, den größten verwendeten Eigenwert anhand der maximalen Frequenz der äußeren Anregung auszuwählen, trifft hier nicht zu.

Die Ergebnisse, die im Folgenden abgebildet werden, können nicht direkt mit Literatur-ergebnissen validiert werden, da die genauen Randbedingungen wie Motormoment, Zünd-druck und konstruktive Parameter des Kurbeltriebs nicht vollständig vorliegen. Qualitativ lassen sich die Ergebnisse wie die Druckverteilung im Zündpunkt mit [Rie95] vergleichen.

5.5.1 Modell

Das Referenzbeispiel für ein hochdynamisches System mit einem EHD-Kontakt ist der Kur-beltrieb eines 2.0 Liter Diesel Motors. Es werden die Lastfälle 2000 min^{-1} und 4000 min^{-1} bei Vollast untersucht. Das MKS Modell ist in Abb. (5-41) schematisch dargestellt.

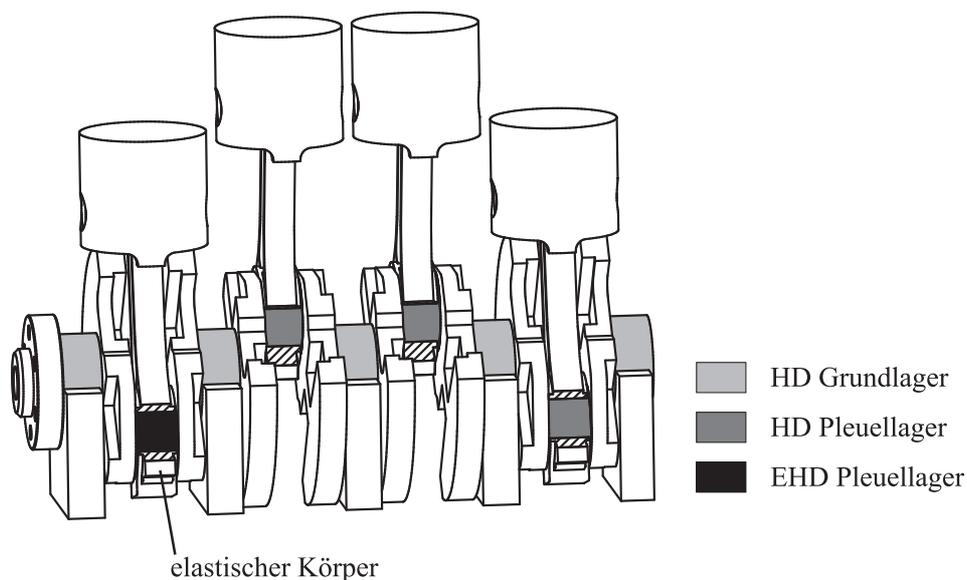


Abbildung 5-41: Kurbeltrieb eines Dieselmotors mit Gleitlagern

Der Kurbeltrieb wird, bis auf das Pleuel des ersten Zylinders, als starr angenommen. Dieses ist als elastischer Körper ausgeführt, welcher vor allem auf der Lagerschale des

Tabelle 5-2: Lagereigenschaften des Pleuellagers

Öl	SAE 10W40
Durchmesser	50mm
Breite	23mm
Kaltlagerspiel	0.001
Öltemperatur	90°C
Ölzufuhr	7mm Bohrung in der Welle 70° ab OT in Drehrichtung
Öldruck	4 bar
Balligkeit der Welle	2 μm
Anzahl der Marker in der Lager- schale	44x11
Anzahl der Gitterpunkte für die numerische Lösung der Reynolds- Gleichung	88x21

großen Pleuelauges ein regelmäßiges Netz von FE-Knoten aufweist, welche auch als Marker im Mehrkörpersystem zur Verfügung stehen- Abb. (5-42). Die Ordnungsreduktion des FE-Modells des Pleuels erfolgt zunächst mit einer statischen Kondensation und anschließend mit einer modalen Reduktion. Die Auswahl der verwendeten Eigenvektoren erfolgt mit einer gezielten Auswahl aus den ersten 200 Eigenvektoren der Struktur. Mithilfe der Druckverteilung aus einer starren Rechnung konnten unter Verwendung des MPF [WW03] 74 Eigenvektoren bestimmt werden, die den größten Anteil an der elastischen Deformation aufweisen.

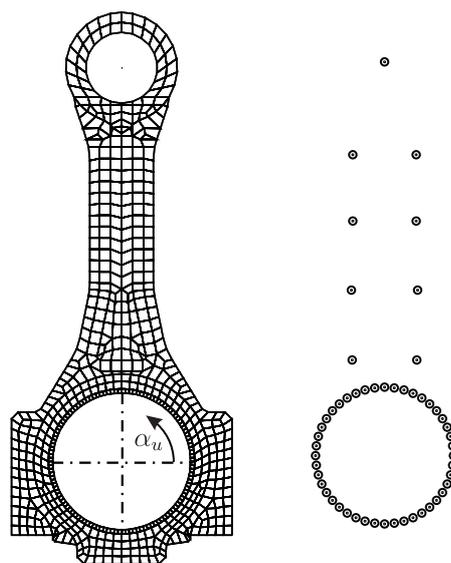


Abbildung 5-42: FE-Netz (li) und Hauptfreiheitsgrade (re) des Pleuel

Das Lager des großen Pleuelauges am Zylinder 1 ist daher mit dem Gleitlagerberechnungsmodul, welches im Abschnitt 3.3.4 vorgestellt wurde, als EHD-Lager ausgeführt. Alle weiteren Pleuellager und die Grundlager der Pleuellager sind als HD-Gleitlager modelliert, welche die lokale Deformation der Lagerschale vernachlässigen, jedoch die Schiefstellung der Welle berücksichtigen. Die Lager im oberen Pleuellager sind mit einer konstanten Steifigkeit und Dämpfung umgesetzt. Insgesamt beinhaltet das Modell neun Gleitlager, bei denen in jedem Zeitschritt die Schmierfilmgleichung numerisch gelöst wird. Die gesamte Rechenzeit für 14 Kurbelumdrehungen zuzüglich einer Vorlaufrechnung von 62 Kurbelumdrehungen beträgt mit EMD auf einem Intel Xeon X5550 Processor 20 Stunden. Die Rechnung mit dem starren Pleuel (HD) benötigt dagegen lediglich 2 Stunden. Das MKS-Modell mit dem elastischen Pleuel hat 198 Zustandsgrößen, das starre Modell dagegen nur 50. Bei einem semiexpliziten Integrationsverfahren geht diese Anzahl, durch die Jacobimatrix und deren Verarbeitung, sehr stark in die Rechenzeit ein. Außerdem ist die kleinste Eigenfrequenz des elastischen Systems deutlich größer, da Eigenvektoren verwendet werden, deren zugeordnete Eigenfrequenzen bis zu 247 kHz betragen.

5.5.2 Ergebnisse bei 2000 min^{-1}

Zunächst soll auf die elastische Deformation des Pleuels eingegangen werden. Abb. (5-43) zeigt die 400-fach überhöhte Deformation während eines Umlaufs. Ausgangspunkt ist der obere Totpunkt während der Zündung. Hier erfährt das Pleuel eine erhebliche Stauchung im Steg, dabei wird auch die Lagerschale leicht ovalisiert. 90° Kurbelwinkel später, im seitlichen Umkehrpunkt, ist eine leichte Biegung des Stegs und eine starke Ovalisierung der Lagerschale ersichtlich.

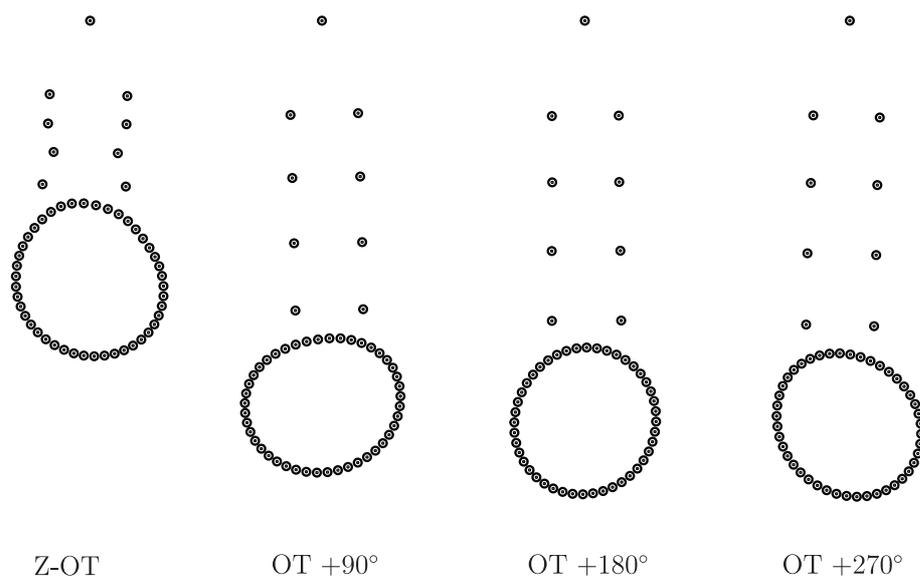


Abbildung 5-43: Deformation des Pleuel, 400-fach überhöht 2000 min^{-1}

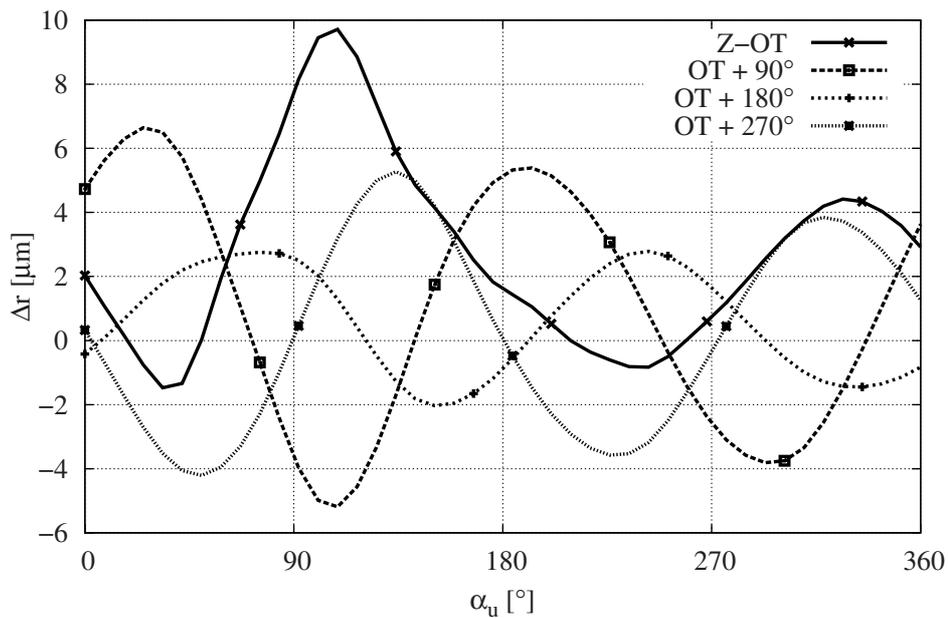


Abbildung 5-44: Radiale Deformation der Lagerschale in der Lagermitte für verschiedene Kurbelwellenwinkel 2000 min^{-1}

Konkrete Zahlenwerte lassen sich aus der zugehörigen Darstellung in Abb. (5-44) entnehmen. So beträgt die Abweichung von der Kreisform in diesem Punkt maximal $7 \mu\text{m}$, was bei einem radialen Lagerspiel von ca. $25 \mu\text{m}$ erheblichen Einfluss auf den Druckaufbau hat. In den weiteren markanten Punkten ist die Deformation ähnlich groß. Eine abgewickelte Darstellung der radialen Lagerschalendeformation während des maximalen Gasdrucks ist in Abb. (5-45) ersichtlich. Die Winkellage des abgewickelten Netzes bezüglich der Pleuelstruktur ist in Abb. (5-42) eingetragen. Bei 90° liegt etwa der maximale Schmierfilmdruck vor, hier ist auch eine in der Form des Druckbergs positive Verschiebung zu erkennen.

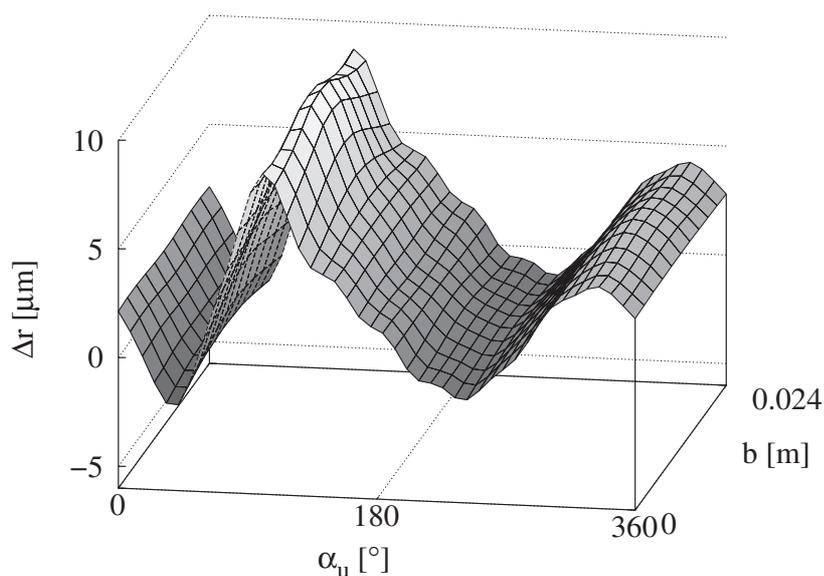


Abbildung 5-45: Radiale Deformation der Lagerschale - Z-OT EHD - 2000 min^{-1}

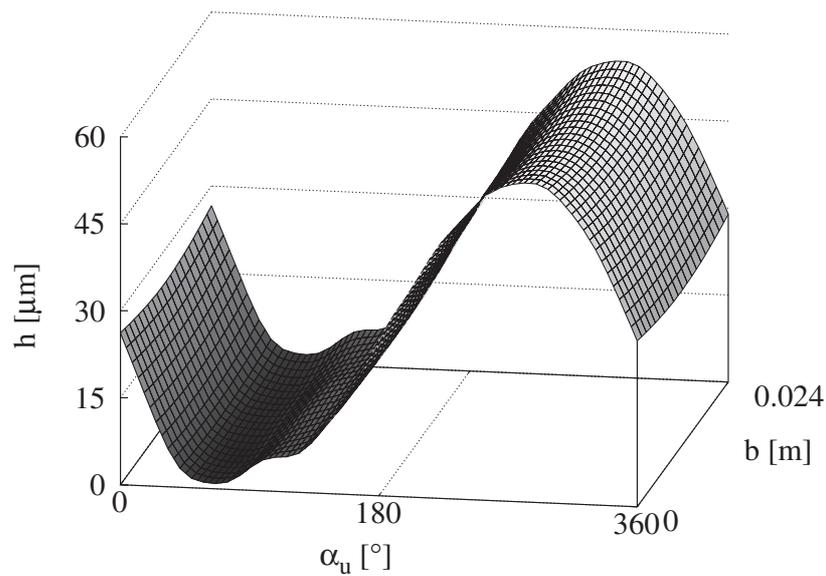


Abbildung 5-46: Spaltverlauf - Z-OT EHD - 2000 min^{-1}

Die Auswirkungen auf den wirksamen Schmier-spalt sind in Abb. (5-46) dargestellt. Im Bereich des kleinsten Schmier-spaltes ergeben sich zwei lokale Minima, die den Druckaufbau beeinflussen. Der hydrodynamische Druck in Abb. (5-47) lässt sich in diesem Fall nur im Vergleich zum Druckverlauf mit einem starren Pleuel in Abb. (5-48) bewerten. Durch die lokale Deformation ist der Druckberg über die Lagerbreite gleichmäßig verteilt.

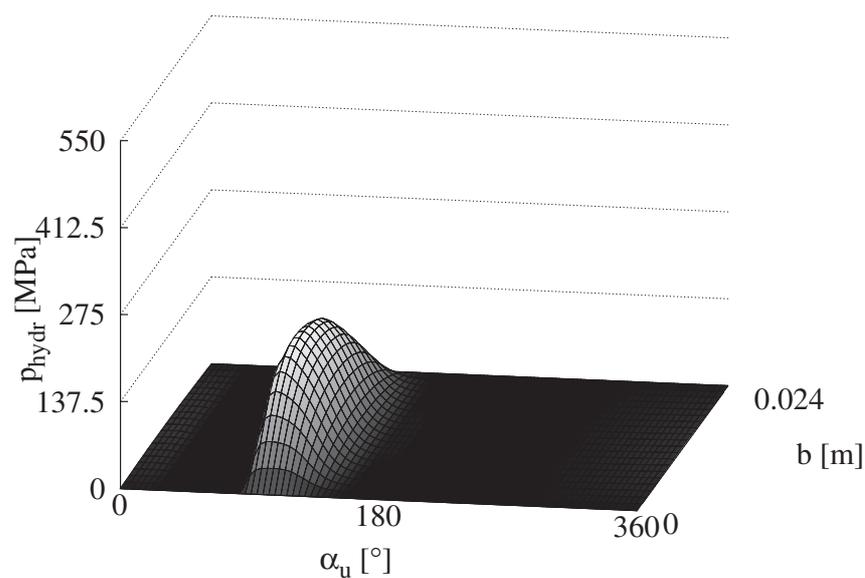


Abbildung 5-47: Wirksamer hydrodynamischer Druck - Z-OT EHD - 2000 min^{-1}

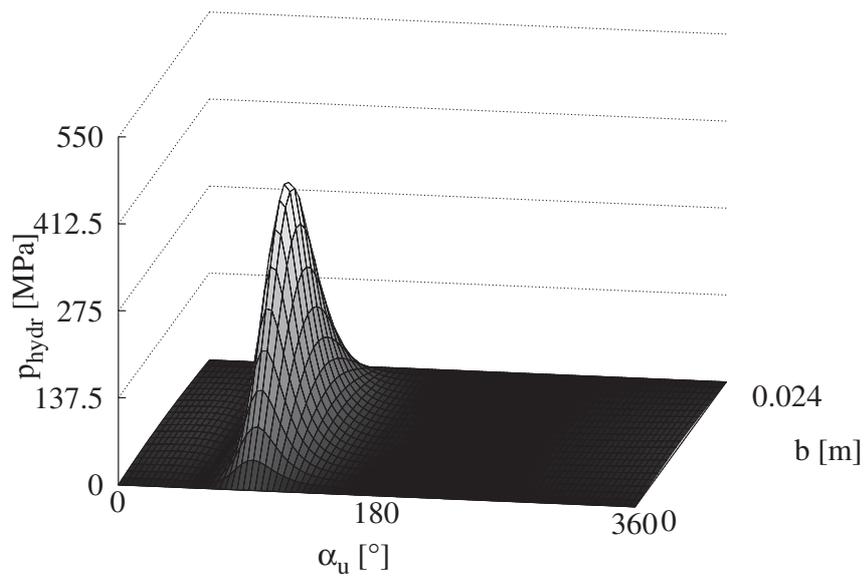


Abbildung 5-48: Wirksamer hydrodynamischer Druck - Z-OT HD - 2000 min^{-1}

Folglich ist der maximale Schmierfilmdruck in der EHD-Simulation deutlich geringer als im starren Fall - Abb. (5-49). Sehr deutlich fällt der Vergleich der Wellenverlagerungen in Abb. (5-50) aus. Im elastischen Fall wird die Verlagerung der Wellenmitte bezüglich des Flächenschwerpunktes der Lagerschale in der Mittenebene dargestellt. Interessant ist in diesem Zusammenhang, dass die Welle ihren eigentlich verfügbaren Spielkreis im Zündpunkt verlässt, weil die Lagerschale stark ovalisiert ist.

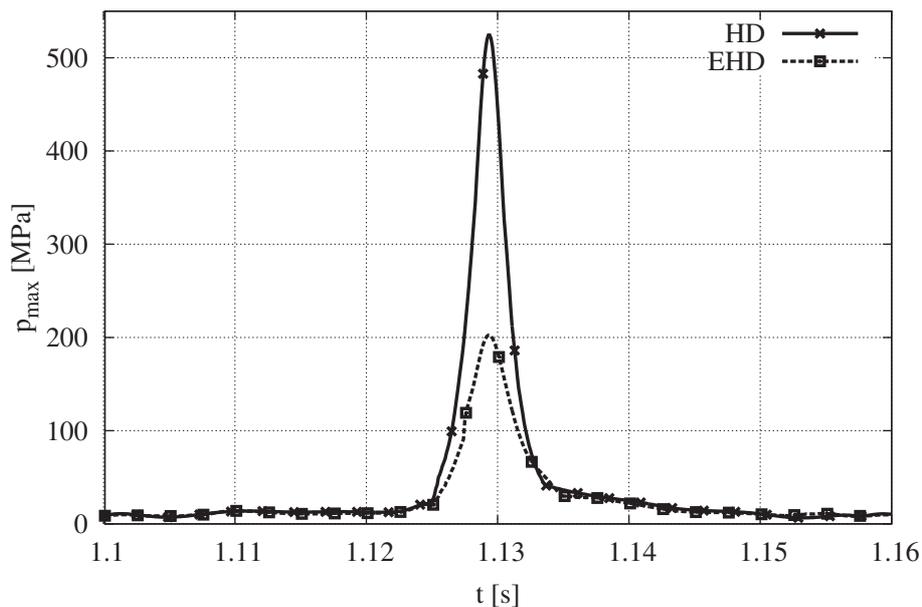


Abbildung 5-49: Maximaler hydrodynamischer Druck 2000 min^{-1} HD / EHD

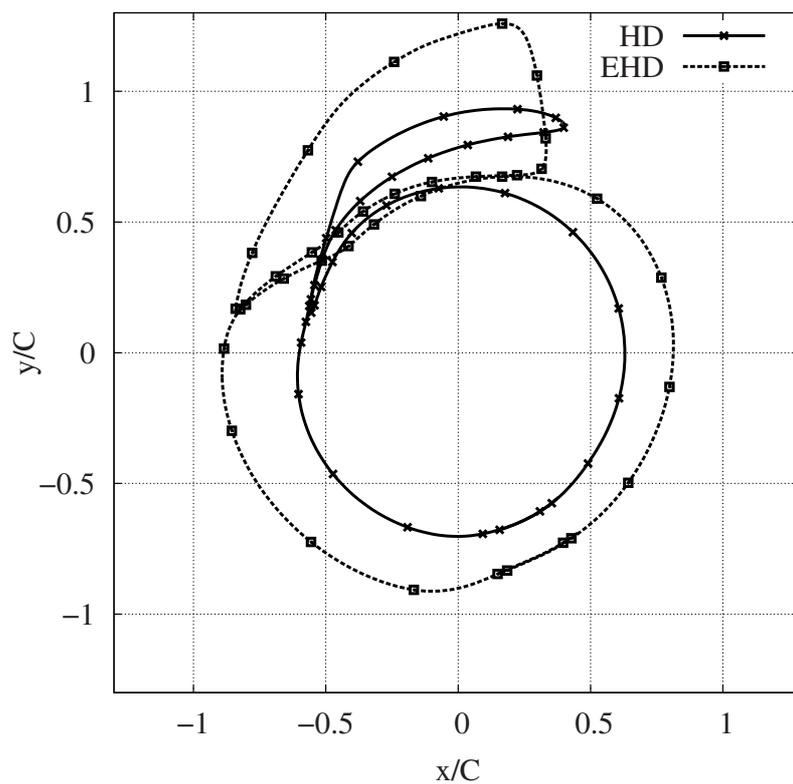


Abbildung 5-50: Wellenverlagerungsbahn 2000 min^{-1} HD / EHD

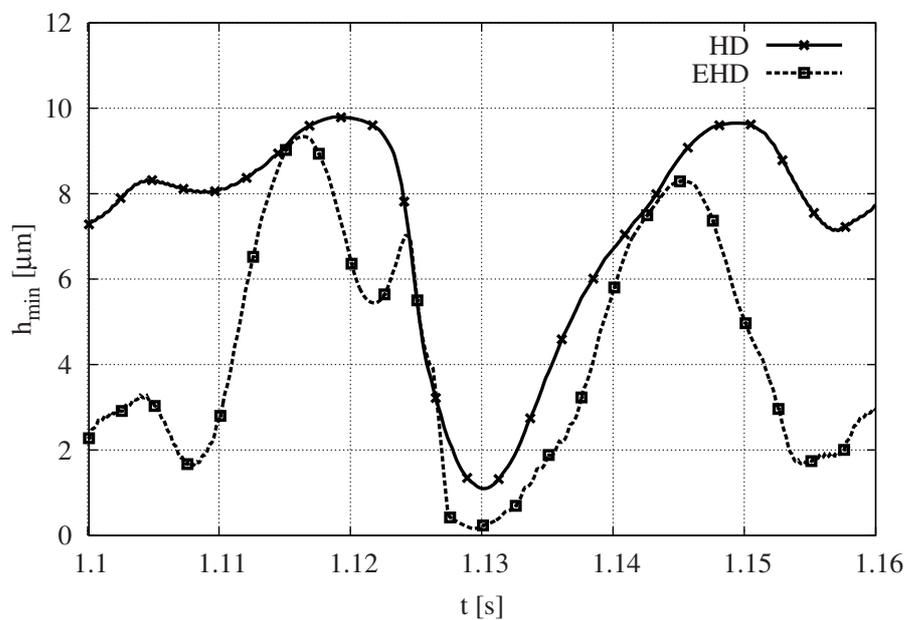


Abbildung 5-51: Kleinster Schmierpalt 2000 min^{-1} HD / EHD

5.5.3 Ergebnisse bei 4000 min^{-1}

Beim Lastfall 4000 min^{-1} fällt zunächst auf, dass die globale Biegung des Pleuels stärker ausgeprägt ist - Abb. (5-52). Folglich sind die radialen Deformationen der Lagerschale größer - Abb. (5-53), was im seitlichen Umkehrpunkt eine Abweichung von $10 \mu\text{m}$ von der Kreiskontur der unbelasteten Lagerschale ergibt.

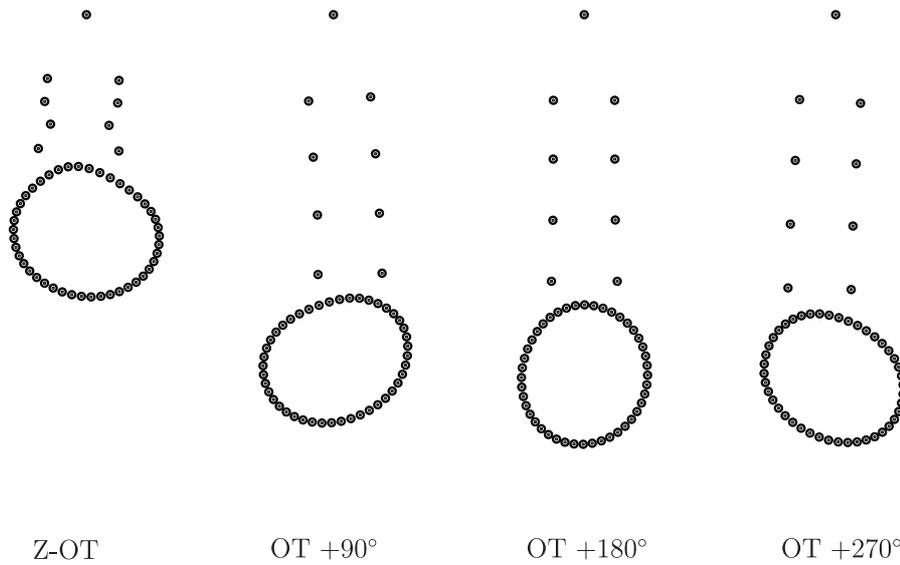


Abbildung 5-52: Deformation des Pleuel, 400-fach überhöht 4000 min^{-1}

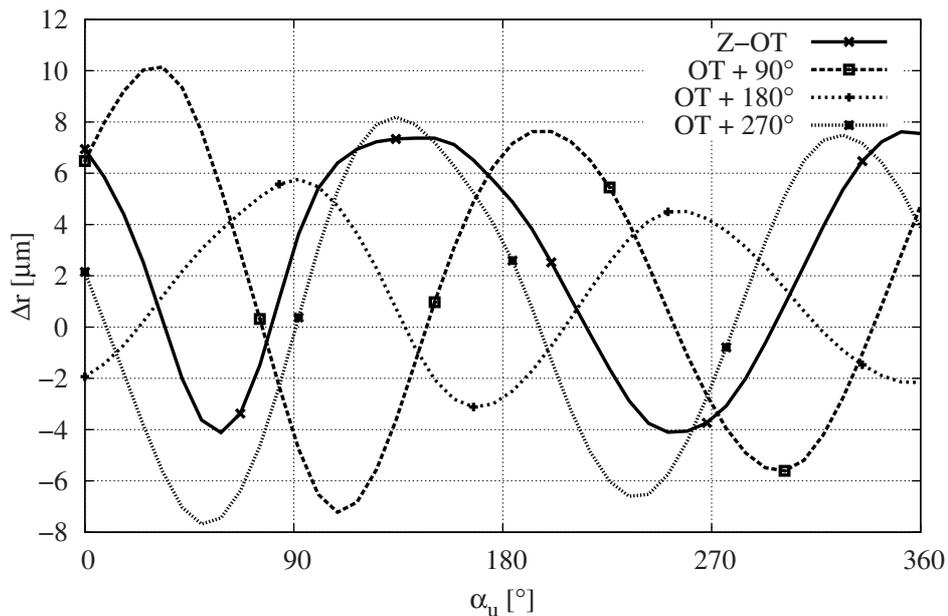


Abbildung 5-53: Radiale Deformation der Lagerschale in der Lagermitte für verschiedene Kurbelwellenwinkel

Die Lagerschalendeformation in Abb. (5-54) und die Spaltfunktion in Abb. (5-55) kongruieren mit denen bei 2000 min^{-1} . Der Druckverlauf ist in der radialen Lagerschalendeformation zu erkennen. In Relation zur globalen Ovalisierung ist dieser Anteil klein, jedoch können auch kleine Deformationen im Bereich des minimalen Schmierstoffspaltes große Auswirkungen auf den Druckaufbau zur Folge haben.

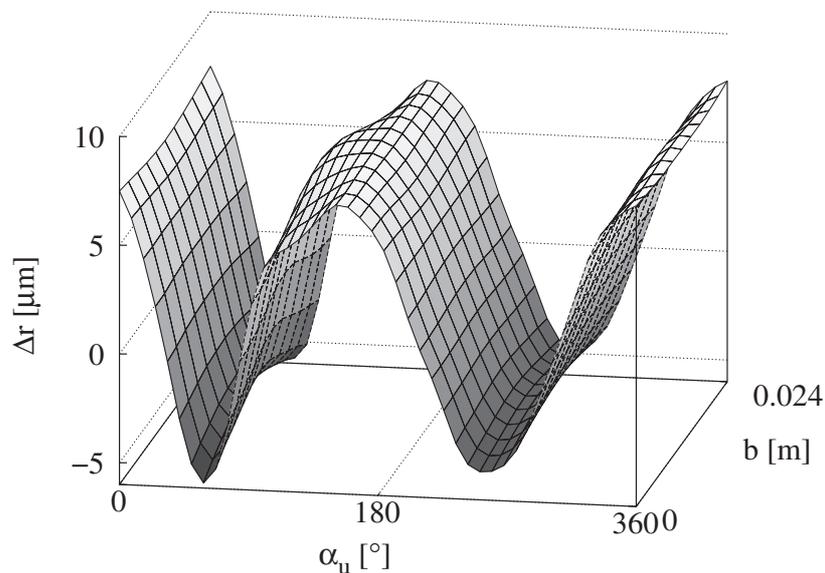


Abbildung 5-54: Radiale Deformation der Lagerschale - Z-OT EHD - 4000 min^{-1}

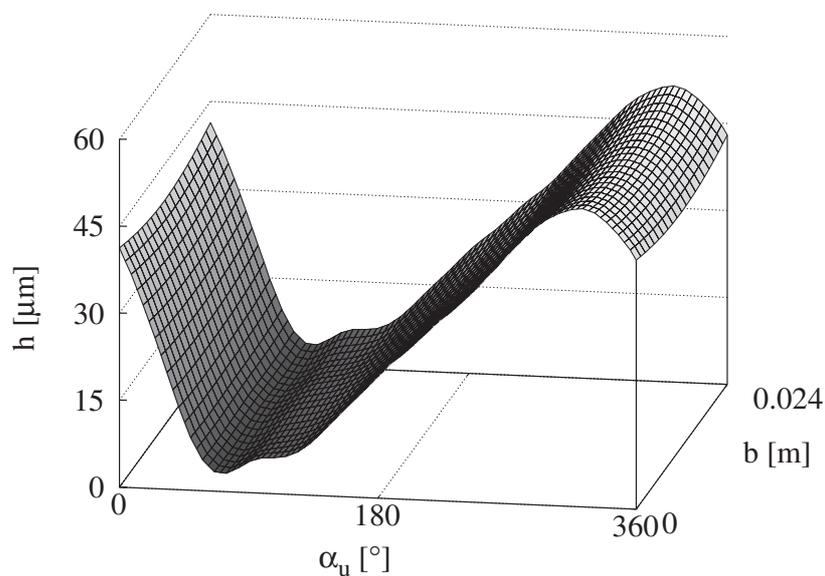


Abbildung 5-55: Spaltverlauf - Z-OT EHD - 4000 min^{-1}

Interessant ist der resultierende Druckaufbau während der maximalen Gaskraft auf dem Kolben in Abb. (5-56). Diese Ergebnisse lassen sich prinzipiell in den einschlägigen Veröffentlichungen [Rie95, KBLW98, Sch01] wiederfinden. Im Vergleich zum Druckaufbau bei

einer starren Pleuelstruktur in Abb. (5-57) ist der qualitative Unterschied sehr groß. Der Druckberg verbreitert sich in Umfangsrichtung und es bilden sich zwei lokale Maxima im Druckverlauf. Die gleiche Tragkraft kann nun durch ein größeres Druckgebiet aufgebracht werden, folglich sinkt der maximale hydrodynamische Druck - Abb. (5-58).

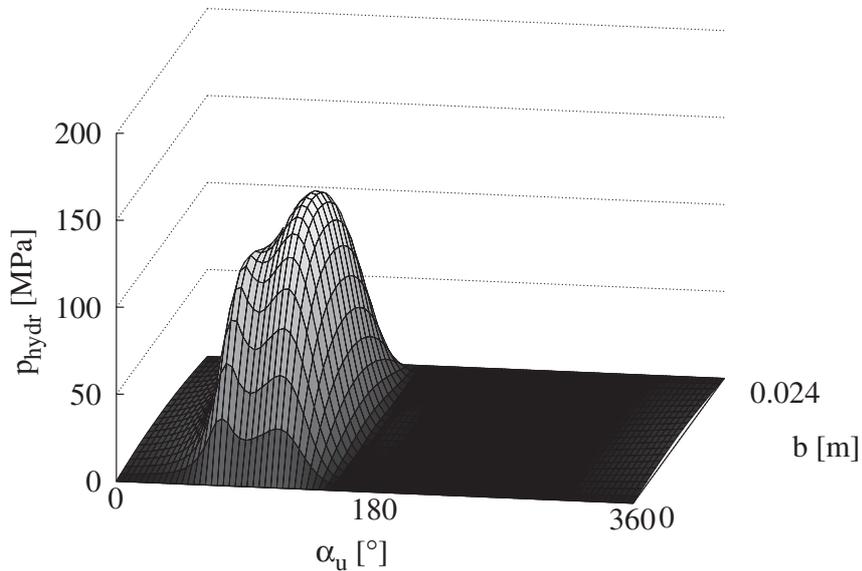


Abbildung 5-56: Wirksamer hydrodynamischer Druck - Z-OT EHD - 4000 min^{-1}

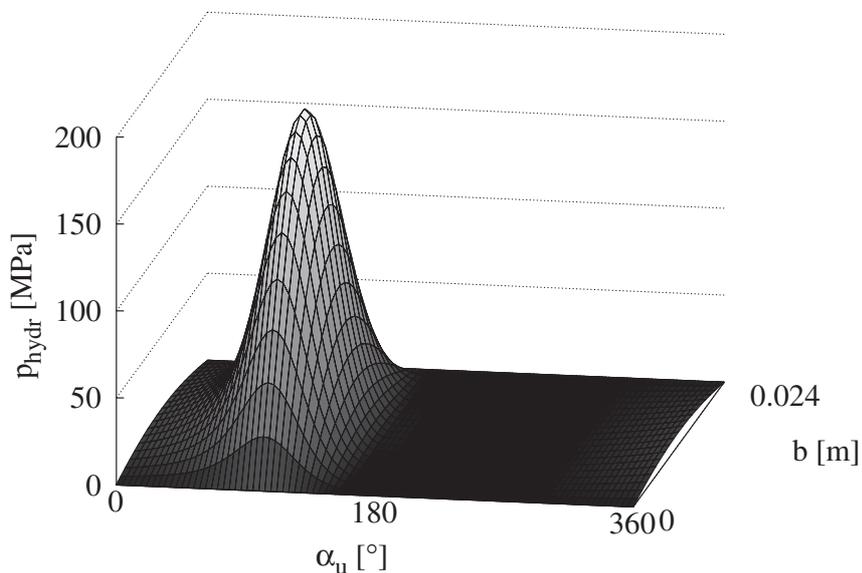


Abbildung 5-57: Wirksamer hydrodynamischer Druck - Z-OT HD - 4000 min^{-1}

Die Wellenverlagerung in Abb. (5-59) zeigt, wie groß der Einfluss der elastischen Lagerschalen- und Pleueldeformation an der Bewegung des Zapfens in der Lagerschale ist. Die Wellenverlagerung wird im starren Fall viel zu gering abgeschätzt, was auch im Verlauf des kleinsten Schmier- spaltes in Abb. (5-51) und Abb. (5-60) ersichtlich wird.

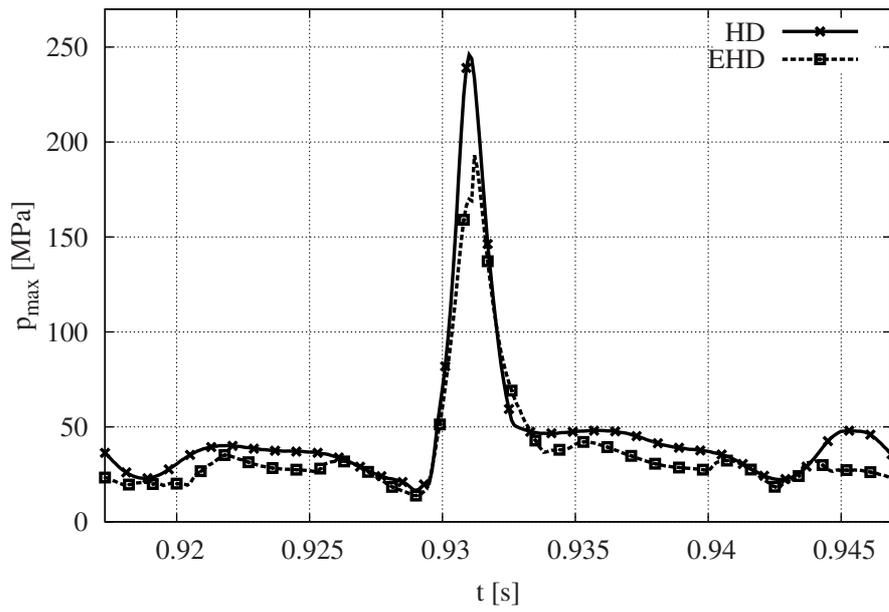


Abbildung 5-58: Maximaler hydrodynamischer Druck 4000 min^{-1} HD / EHD

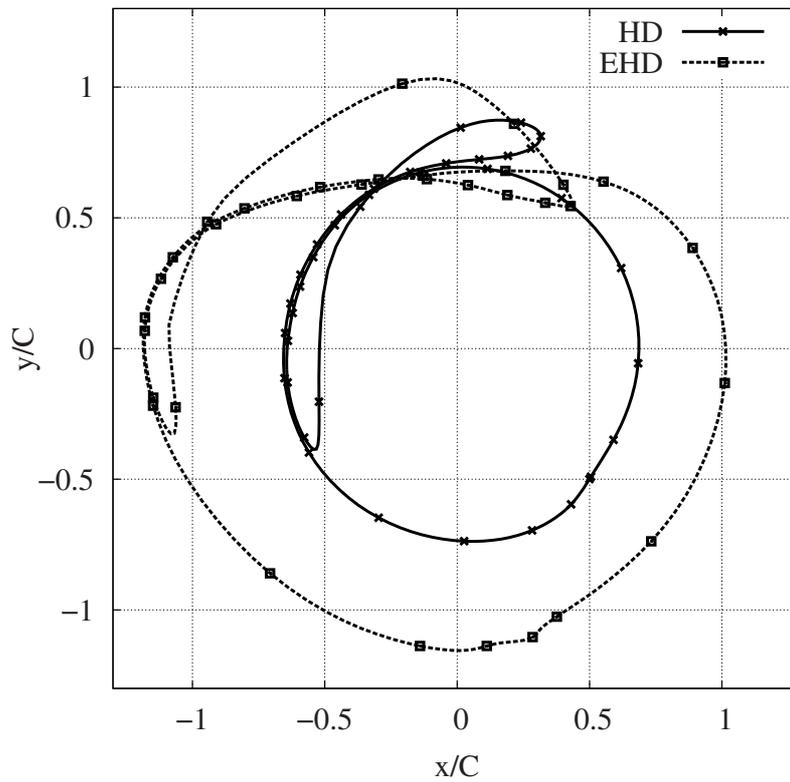


Abbildung 5-59: Wellenverlagerungsbahn 4000 min^{-1} HD / EHD

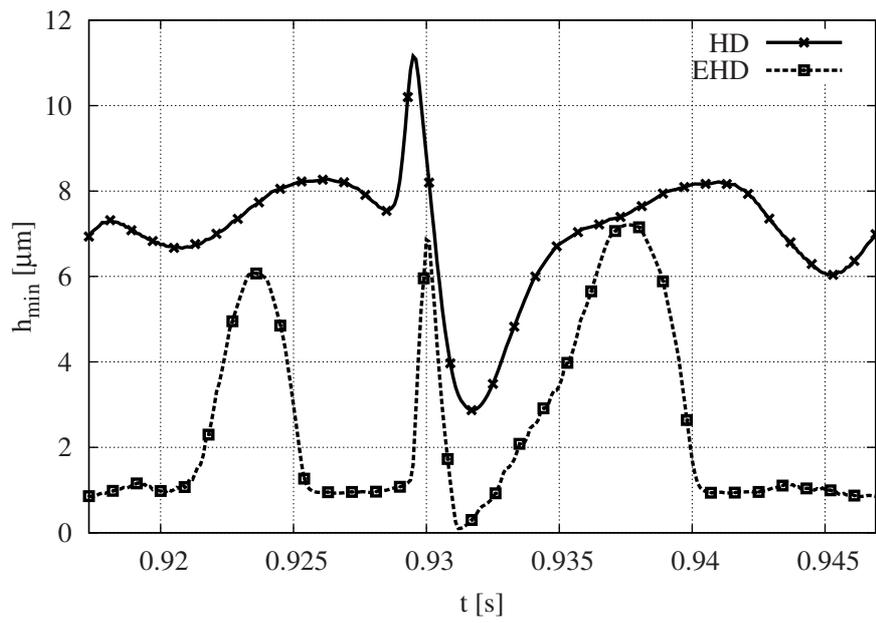


Abbildung 5-60: Kleinster Schmierpalt 4000 min^{-1} HD / EHD

6 Zusammenfassung

Mit dem Programmsystem EMD ist ein MKS-Programm für rotordynamische Probleme entwickelt worden. Bewusst wurde auf Zwangsbedingungen und Bindungsgleichungen verzichtet, um das Programm und die dynamischen Gleichgewichtsbedingungen schlank zu halten. Die Zustandsgrößen, mit denen die Beschreibung der Bewegung erfolgt, sind ausschließlich bezüglich des Inertialsystems entwickelt, wodurch sich ein wichtiger Unterschied zu kommerziellen MKS-Programmen ergibt. Folglich werden die Eigenwerte rotierender Systeme nachvollziehbarer bestimmt, sodass deren Interpretation in einem Campbell-Diagramm einfacher gelingt.

Das Hauptaugenmerk liegt jedoch auf den Kraftelementen zur Abbildung von Gleit- und Wälzlager, die für das Programm EMD entwickelt wurden. Bei der Simulation von Wälzlagern sind zwei Modelle vorgestellt worden, welche die Dynamik im Inneren des Lagers mit seinen Komponenten berücksichtigt. Die Modelle sind für die Anwendung in rotordynamischen Systemen entsprechend einfach gehalten. Für das 2D-Wälzlager wurde darüber hinaus eine Methode zur Berücksichtigung einer dynamischen Konturverformung der Wälzkörper vorgestellt, welches an einem vollrolligen Lager angewendet wurde.

Das hydrodynamische Gleitlager und die Kopplung mit der Struktur wurden in verschiedenen Modellierungsstufen vorgestellt. Die kinematische Anbindung an die Struktur erfolgt in der einfachsten Form ohne Berücksichtigung der Schiefstellung, es wird nur die Verschiebung der Welle in der Lagermitte verwendet. Die Berücksichtigung der Schiefstellung ist sehr aufwendig, da die Spaltänderung zwischen den Lagerpartnern für jeden Gitterpunkt des hydrodynamischen Netzes berechnet werden muss. Weiterhin wurde ein EHD-Gleitlager zwischen einer elastischen Lagerschale und einer starren oder elastischen Welle vorgestellt. Die Hydrodynamik ist bei allen Lagern identisch, es wurde ein einfacher Algorithmus für ein vollgefülltes Gleitlager mit gümbelschen Randbedingungen verwendet. In EMD sind weitere Modelle wie die Teilfüllung nach Elrod umgesetzt. An rotordynamisch interessanten Beispielen wurden Ergebnisse einer ganzheitlichen Simulation dargelegt. Sie zeigen, dass die Berücksichtigung der Schiefstellung im Lager sehr wichtig sein kann. Ohne diese Modellierung können Kantenträger nicht erkannt werden und die Steifigkeit und Dämpfung des Gleitlagers wird nicht vollständig abgebildet.

Die Ergebnisse des EHD-Pleuellagers im Kurbeltrieb zeigen deutlich die Notwendigkeit der Berücksichtigung der elastischen Beschreibung des gesamten Pleuels in der Simulation. Die Deformation der Lagerschale durch die Biegung des Pleuels hat einen großen Einfluss auf den Druckaufbau im Schmierfilm. Im Zündstoß dominiert der Einfluss der lokalen Deformation der Lagerschale, die zu einem Abbau des Spitzendrucks führt. Zur Abbildung der lokalen Deformationen in der Lagerschale müssen sehr viele modale Zustandsgrößen für den elastischen Körper verwendet werden. Durch eine gezielte Auswahl kann die Zahl erheblich reduziert werden. Eine zu grobe Ordnungsreduktion kann die Ergebnisse bezüglich der Hydrodynamik sehr stark beeinflussen, daher ist bei der Anwendung dieser Modellierungsvariante Vorsicht geboten.

Beim Hochlauf eines Abgasturboladers wurde ein Schwimmbuchsenmodul mit Schiefstel-

lung und starrer Lagerkontur verwendet. Die typischen subharmonischen Schwingungen eines schwach belasteten Rotors in Gleitlagern konnten in Hochlaufsimulationen gezeigt werden. Zusätzlich wurde der gleiche Turbolader auch mit einer Wälzlagerung betrachtet. Dabei haben sich entscheidende Unterschiede zum Hochlauf mit einer konventionellen Lagerung gezeigt. Positiv ist dabei die sehr steife Konstruktion und das fehlende Lagerspiel in Folge der Vorspannung der Spindellagerung.

Für die weitere Entwicklung von EMD ergeben sich aufgrund der Anwendung in verschiedenen Projekten zahlreiche Ziele. Bei der Simulation eines Hochlaufs von einem Abgasturbolader müssen die Gleitlagerrountinen tief greifend mit den thermischen Belastungen des Gehäuses gekoppelt werden. Die Wärmeflüsse zwischen den Bauteilen müssen last- und zeitabhängig simuliert werden, da die Temperaturen der Lagerpartner eine maßgebliche Eingangsgröße für die Berechnung der Tragkraft im Gleitlager sind. Die Auswirkung auf das Lagerspiel und die dynamische Viskosität ist in diesem Fall nicht zu vernachlässigen. Weiterhin ist die Interaktion der Schaufelräder mit den umströmenden Medien zu berücksichtigen. Aktuell werden hier nur Rückstellkräfte in Form von viskoser Dämpfung vorgesehen, was die komplexen Vorgänge bei der Strömung im Verdichter und der Turbine nicht gerecht wird. Eine Integration einer numerischen Lösung mittels CFD in einer dynamischen Hochlaufsimulation ist hier auf absehbare Zeit nicht praktikabel. Hier müssen brauchbare Simulationsmodelle entwickelt werden, die im Abgleich mit experimentell ermittelten Messergebnissen reproduzierbare Ergebnisse liefern.

In der Simulation von Wälzlagern gibt es viele denkbare Erweiterungsmöglichkeiten. Im Bereich der hochdynamischen Anwendungen ist eine bessere Abbildung der Kontaktdämpfung und der Rollreibung möglich. Weiterhin sollte die Führung der Wälzkörper im Käfig detailliert und differenziert werden, da es sehr viele Ausführungen bei der Gestaltung der Lagerkäfige gibt. Neben der elastischen Deformation der Wälzkörper sollten auch Deformationen der Laufbahnen berücksichtigt werden. Durch eine Übermaßpassung beim Einbau können die Laufringe vorgespannt werden, was die Rundheit der Laufbahn und damit die Kinematik beim Abwälzen beeinflussen kann. Für bestimmte Anwendungen ist es ausreichend, diese Verformungen statisch vorzugeben. Die Lauffläche ist folglich nicht mehr rotationssymmetrisch und die bestehende Kontaktberechnung müsste angepasst werden.

Anhang A

Notwendige mathematische Beziehungen

Definition der Spinnmatrix $\underline{\tilde{a}}$ für einen Vektor \underline{a} :

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad (\text{A.1-1})$$

$$\underline{\tilde{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1-2})$$

Rechenregeln für Spinnmatrizen:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \underline{\tilde{a}} \cdot \underline{b} = \underline{\tilde{b}}^T \cdot \underline{a} \quad (\text{A.1-3})$$

$$\underline{\tilde{a}} = -\underline{\tilde{a}}^T \quad (\text{A.1-4})$$

Anhang B

Modelldaten

B.1 Rotormodell für die Eigenwertberechnung

Modellparameter für das einfache rotordynamische Vergleichsmodell zur Berechnung der Eigenwerte:

Tabelle B.2-1: Modellparameter des Rotorsmodells

Parameter	Bezeichnung	Wert
a	Abstand linkes Lager - Massenscheibe	0.03 m
b	Abstand rechtes Lager - Rotor	0.07 m
	Durchmesser Welle	0.008 m
	Dichte der Welle	7850 kg · m ⁻³
	E-Modul der Welle	2 · 10 ⁵ N · mm ⁻²
	Breite der Massenscheibe	0.04 m
	Durchmesser des Rotors	0.16 m
	Dichte der Massenscheibe	7850 kg · m ⁻³
c_L	Lagersteifigkeit für das starre Modell	10 ⁵ N · m ⁻¹

Einflusszahlen für das Modell starre Welle in isotrop elastischen Lagern:

$$\begin{aligned}
 \alpha_e &= \frac{1}{c_L} \left[\frac{a^2 + b^2}{(a + b)^2} \right] \\
 \beta_e &= \frac{1}{c_L} \left[\frac{2}{(a + b)^2} \right] \\
 \gamma_e &= \frac{1}{c_L} \left[\frac{b - a}{(a + b)^2} \right] \\
 \delta_e &= \gamma_e
 \end{aligned}
 \tag{B.2-1}$$

B.2 Rotormodell für den Vergleich der Gleitlagermodelle

B.2.1 Parameter des Modells

Modellparameter für den Laval-Läufer:

Tabelle B.2-2: Modellparameter des Laval-Läufers

Parameter	Bezeichnung	Wert	
L	Länge der Welle	0.2 m	
	Durchmesser Welle	0.015 m	
E	Dichte der Welle	7850 kg · m ⁻³	
	E-Modul der Welle	2 · 10 ⁵ N · mm ⁻²	
	Breite der Massenscheibe	0.04 m	
	Durchmesser der Massenscheibe	0.16 m	
	Dichte der Massenscheibe	7850 kg · m ⁻³	
	Exzentrizität der Massenscheibe	100 μm	
	n	Drehzahl	1000 min ⁻¹
		Lagerbreite	0.015 m
Lagerdurchmesser		0.03 m	
relatives Lagerspiel		0.0012	
dynamische Viskosität		0.005 Pa · s	
Ölzufuhr		4 mm Bohrung in der Schale	
Öldruck		2 bar	
Anzahl der Gitterpunkte für die numerische Lösung der Reynolds-Gleichung		80 x 20	

B.2.2 Eingaben für EMD

Für den Laval-Rotor in Gleitlagern mit starrer Welle

```

§PARAMETER          9          1
  2 ! [nk]   Anzahl der Koerper
  1 ! [nr]   Anzahl der rheonomen Koerper
  0 ! [nel]  Anzahl der elastischen Körper
  0 ! [nelb] Anzahl der elastischen Balken
  5 ! [nf]   Anzahl der Kraefte
 10 ! [nset] Anzahl der Sets für Kräfte
  0 ! [nOd]  Anzahl der zu verschmelzenden Koerper
  0 ! [na]   Anzahl der Anfangsausrichtung Koerper
  2 ! [nsens] Anzahl der Sensoren
  1 ! [ad]   Anzahl der Inputdateien

! Das ISYS hat keine Masse daher wird ab Körper 2 angefangen
§MASSEN (nk-1) x          1
6.5904d0                ! Masse Koerper                2 welle

§MASSENTRAEKGHEITEN (nk-1) x          7 !,NR Bezugsmarker J11, J12, J13, J22, J23, J33
2 6.0E-001 0.0E+0 0.0E+0 6.0E-1 0.0E+0 2.00078E-2

```

```

$FREIHEITSGRADE (nk-1) x      6 ! x y z al be ga
1 1 0 1 1 1 ! Freiheitsgrade Koerper      welle

$ANFANGSBEDINGUNGEN (nk-1) x      12 ! x y z al be ga xd yd zd ald bed gad
0.0E+0 100.0d0
! Anfangsbedingungen Koerper      3

$ANZAHL_DER_MARKER_PRO_KOERPER      (nk+nr)      1
3 ! Anzahl der Marker des Koerpers      1 -isys
6 ! Anzahl der Marker des Koerpers      2 -welle
2 ! Anzahl der Marker des Koerpers      7 -antrieb

$MARKER ? x      8 ! Body_ID Marker_ID x y z alpha beta gamma
1 2 0d0 0d0 0.0d0      0.0d+0 0.0d+0 0.0d+0 ! Lager 1
1 3 0d0 0d0 0.2d0      0.0d+0 0.0d+0 0.0d+0 ! Lager 2
2 2 0d0 0d0 0.1d0      0.0d+0 0.0d+0 0.0d+0 ! Schwerpunkt
2 3 0d0 0d0 0.1d0      0.0d+0 0.0d+0 0.0d+0 ! Rotor
2 5 0d0 0d0 0.2d0      0.0d+0 0.0d+0 0.0d+0 ! Lager 2

$SENSOREN (nsens) x      4 ! Body_From Marker_FromD Body_To Marker_To
1 1 2 1 ! Marker auf Welle für Lager 1
1 1 2 5 ! Marker auf Welle für Lager 2

$KRAFT (nf) x      6 ! Body_From_ID Marker_From_ID Body_To_ID Marker_To_ID Type FORCE_ID
1 2 2 1 21 9 ! Gleitlager 1
1 3 2 5 21 9 ! Gleitlager 2
2 1 3 1 9 8 ! Drehfeder
1 1 2 3 16 1 ! Unwucht auf Läufer
1 1 2 3 5 3 ! Statische Kraft

$PARAMETER_KRAFT 1
! Unwucht auf Turbine
1 6.313d+0
2 100e-006
4 3

$PARAMETER_KRAFT 3
!! SET #3 - Einzelkraft in x Richtung
1 100d0
2 1

$PARAMETER_KRAFT 8
!! SET #8 - ! Drehfeder
1 100d0 !force%param(8,1) = 100d0
2 10d0 !force%param(8,2) = 10d0

$PARAMETER_KRAFT 9
! SET #1 - Gleitlager
3 0.015d0 ! b
4 0.03d0 ! d
5 1.2000d-03 ! psi_n
9 0.005d0 ! eta
10 780d0 ! rho
11 80 ! nx
12 20 ! ny
15 1 ! Verfahren
16 2 ! Lagertyp
17 1d-12 ! Fehler
20 3 ! Drehachse
22 0d0 ! faktor_mr
23 0.0d+0 ! p_rand - Druckrandbedingung in Breitenrichtung - [Pa]
24 556.188d+6 ! Parameter 1 fuer Festkoerperdruck - [Pa]
25 -2.6d+6 ! Parameter 2 fuer Festkoerperdruck - [1/m]
26 -0.5285d+6 ! Parameter 3 fuer Festkoerperdruck - [Pa]
27 2.6764d-6 ! Parameter 4 fuer Festkoerperdruck (minimale Spaltweite) - [m]
28 1.0d+9 ! Parameter 5 fuer Festkoerperdruck (Daempfungswert) - [Pa*s/m]
51 2 ! Ausgabe der Ergebnisse
53 1d-5 ! Totzeit
55 10d7 ! c_an
56 1d3 ! d_an
! Randbedingungen / Kreisförmige Zufuhr
61 1d0 ! Kontur der Ölzufuhr (1=Kreis, 2=Rechteck)
62 90d0 ! winkel_rb
63 0d0 ! breite_rb
64 4d-3 ! Durchmesser der Bohrung
65 0.2d+6 ! p_rb ![Pa]

$GRAVITATION      3      1
0.000000E+00 ! glob. 2-Richtung
-.981000E+01 ! glob. 1-Richtung
0.000000E+00 ! glob. 3-Richtung

$RHEONOM (nr) x      4 ! richtung typ par1 par2 par3 par 4
! typ = 1 : par1 = omstart; par2 = omende; par3 = delta_t
6 1 100d0 100d0 2d0 0d0 ! rheonomer Körper 1

$DARSTELLUNG (nr+nk-1) x      15 ! typ p1 p2 p3 p4 mittex mittey mittez al be ga r g b ref_marker
! typ = 1 : Kegel : d1 d2 l nu
! typ = 2 : Quader: dx dy dz
1 0.015d+0 0.015d+0 0.2d+0 20d0 0d0 0d0 -0.1d+0 0d0 0d0 0d0 0d0 0d0 1d0 3d0
2 18.0d-3 18.0d-3 40.0d-3 20d0 0d0 0d0 0d+0 0d0 0d0 0d0 0.5d0 1d0 1d0

$DATEIEN ? x ad ! flag_nummer Dateistring
1 erg_emd_z.txt

```

```
!Körperramen
$NAMEN [anz_k+anz_rhe-1]
welle
antrieb
```

Für den Laval-Rotor in Gleitlagern mit elastischer Welle

```
$PARAMETER          9          1
  2 ! [nk]      Anzahl der Koerper
  1 ! [nr]      Anzahl der rheonomen Koerper
  0 ! [nel]     Anzahl der elastischen Körper
  1 ! [nelb]    Anzahl der elastischen Balken
  5 ! [nf]      Anzahl der Kraefte
  10 ! [nset]   Anzahl der Sets für Kräfte
  0 ! [nOd]     Anzahl der zu verschmelzenden Koerper
  0 ! [na]      Anzahl der Anfangsausrichtung Koerper
  2 ! [nsens]   Anzahl der Sensoren
  1 ! [ad]      Anzahl der Inputdateien

$ELASTISCHE_KOERPER_BALKEN
2 welle_Laval_laeufer.EMD_FEM

! Das ISYS hat keine Masse daher wird ab Körper 2 angefangen
$MASSEN (nk-1) x          1
1.0d0 ! Masse Koerper          2 welle

$MASSENTRAEGHEITEN (nk-1) x          7 !,NR Bezugsmarker J11, J12, J13, J22, J23, J33
2 1d0 0.000000E+00 0.000000E+00 1d0 0.000000E+00 1d0

$FREIHEITSGRADE (nk-1) x          6 ! x y z al be ga
1 1 1 1 1 1 ! Freiheitsgrade Koerper          welle

$ANFANGSBEDINGUNGEN (nk-1) x          12 ! x y z al be ga xd yd zd ald bed gad
0.0E+0 100.0d0
! Anfangsbedingungen Koerper          3

$ANZAHL_DER_MARKER_PRO_KOERPER          (nk+nr)          1
  3 ! Anzahl der Marker des Koerpers          1 -isys
  2 ! Anzahl der Marker des Koerpers          2 -welle
  2 ! Anzahl der Marker des Koerpers          3 -sb1
  2 ! Anzahl der Marker des Koerpers          4 -sb2
  2 ! Anzahl der Marker des Koerpers          7 -antrieb

$MARKER ? x          8 ! Body_ID Marker_ID x y z alpha beta gamma
1 2 0d0 0d0 0.0d0          0.0d+0 0.0d+0 0.0d+0 ! Lager 1
1 3 0d0 0d0 0.2d0          0.0d+0 0.0d+0 0.0d+0 ! Lager 2

$SENSOREN (nsens) x          4 ! Body_From Marker_From Body_To Marker_To
1 1 2 1 ! Marker auf Welle für Lager 1
1 1 2 5 ! Marker auf Welle für Lager 2

$KRAFT (nf) x          6 ! Body_From_ID Marker_From_ID Body_To_ID Marker_To_ID Type FORCE_ID
  1 2 2 1 21 9 ! Gleitlager 1
  1 3 2 5 21 9 ! Gleitlager 2
  2 1 3 1 9 8 ! Drehfeder
  1 1 2 3 16 1 ! Unwucht auf Läufer
  1 1 2 3 5 3 ! Einzelkraft

$PARAMETER_KRAFT 1
! Unwucht auf Turbine
1 6.313d+0
2 100e-006
4 3

$PARAMETER_KRAFT 3
! ! SET #3 - Einzelkraft in x Richtung
1 100d0
2 1

$PARAMETER_KRAFT 8
! ! SET #8 - ! Drehfeder
1 100d0 !force%param(8,1) = 100d0
2 10d0 !force%param(8,2) = 10d0

$PARAMETER_KRAFT 9
! SET #1 - Gleitlager
3 0.015d0 ! b
4 0.03d0 ! d
5 1.2000d-03 ! psi_n
9 0.005d0 ! eta
10 780d0 ! rho
11 80 ! nx
12 20 ! ny
15 1 ! Verfahren
16 2 ! Lagertyp
17 1d-12 ! Fehler
20 3 ! Drehachse
22 0d0 ! faktor_mr
23 0.0d+0 ! p_rand - Druckrandbedingung in Breitenrichtung - [Pa]
24 556.188d+6 ! Parameter 1 fuer Festkoerperdruck - [Pa]
25 -2.6d+6 ! Parameter 2 fuer Festkoerperdruck - [1/m]
26 -0.5285d+6 ! Parameter 3 fuer Festkoerperdruck - [Pa]
27 2.6764d-6 ! Parameter 4 fuer Festkoerperdruck (minimale Spaltweite) - [m]
28 1.0d+9 ! Parameter 5 fuer Festkoerperdruck (Daempfungswert) - [Pa*s/m]
51 2 ! Ausgabe der Ergebnisse
```

```

53 1d-5      ! Totzeit
55 10d7     ! c_an
56 1d3      ! d_an
! Randbedingungen / Kreisförmige Zufuhr
61 1d0      ! Kontur der Ölzufuhr (1=Kreis, 2=Rechteck)
62 90d0     ! winkel_rb
63 0d0      ! breite_rb
64 4d-3     ! Durchmesser der Bohrung
65 0.2d+6   ! p_rb  ![Pa]

$GRAVITATION      3      1
0.000000E+00 ! glob. 1-Richtung
-.981000E+01 ! glob. 2-Richtung
0.000000E+00 ! glob. 3-Richtung

$RHEONOM (nr) x      4 ! richtung typ par1 par2 par3 par 4
! typ = 1 : par1 = omstart; par2 = omende; par3 = delta_t
6 1 100d0 100d0 2d0 0d0 ! rheonomer Körper

$DARSTELLUNG (nr+nk-1) x      15 ! typ p1 p2 p3 p4 mittex mittey mittez al be ga r g b ref_marker
! typ =1 : Kegel : d1 d2 l nu
! typ =2 : Quader: dx dy dz
! typ =3 : Kugel : D nu
! typ = 10 : OBJ Input : nummer skal
1 0.015d+0 0.015d+0 0.2d+0 20d0 0d0 0d0 -0.1d+0 0d0 0d0 0d0 0d0 0d0 1d0 3d0
2 18.0d-3 18.0d-3 40.0d-3 20d0 0d0 0d0 0d+0 0d0 0d0 0d0 0d0 0.5d0 1d0 1d0

$DATEIEN ? x ad ! flag_nummer Dateistring
1 erg_emd.z.txt

!Körpernamen
$NAMEN [anz_k+anz_rhe-1]
welle
antrieb

```

Eingabedatei für die elastische Welle: (welle_Laval_laeufer.EMD_FEM)

```

! -----
! MATERIAL
! -----
$MATERIAL
! Anzahl der Materialien
1
! Nr., Emodul, Querdehnung, Dichte, Daempfung alpha, Daempfung beta
1 2.1d11, 3.0d-1, 7.85d3, 1d-1, 2.0d-6
! -----
! KNOTENPOSITON
! -----
$KNOTEN
! Anzahl der Knoten
5
! Nr., Koordinate in Laengsrichtung
01 0d0
02 0.05d0
03 0.10d0
04 0.15d0
05 0.20d0
! -----
! ELEMENTABSCHNITTE
! -----
$ELEM
! Anzahl der Elemente
04
! Nr., da, di, Zwischenknoten, Materialnummer
01 0.015d0 0d0 0 1
02 0.015d0 0d0 0 1
03 0.015d0 0d0 0 1
04 0.015d0 0d0 0 1
! -----
! ZUSAETZLICHE MASSEBELEGUNG
! -----
$MASSEBELEGUNG
! Anzahl der zusaetzlichen Massebelegungen
1
! Nr., Knoten, m, Ja, Jp, z_cg
1 3 6.313d+0 0.011d0 0.02d0 0d0
! -----
! FREIHEITSGRADE IN UND UM LAENGSAECHSE
! -----
$TORSION_ZUG_DRUCK
! (flag = 1 => Torsions- & Laengssteifigkeit an
! flag = 0 => keine Torsions- & Laengssteifigkeit)
0

```

Literaturverzeichnis

- [BEHW95] BRÄNDLEIN, J.; ESCHMANN, P.; HASBARGEN, L. ; WEIGAND, K.: *Die Wälzlagerpraxis*. Bd. 3. Vereinte Fachverlage GmbH, 1995. – ISBN 3-7830-0290-7
- [BK12] BACKHAUS, K.; KNOLL, G.: Gleitlagerdesign im Abgasturbolader. In: *2. Gyöerer Tribologie Tagung*, 2012, pp. 41–53
- [BM89] BENTLY, D.; MUSZYNSKA, A.: Fluid-generated Instabilities of Rotors. In: *Bently Rotor Dynamics*, 1989
- [Bob08] BOBACH, L.: *Simulation dynamisch belasteter Radialgleitlager unter Mischreibungsbedingungen*, Otto-von-Guericke Universität Magdeburg, Dissertation, 2008
- [Boy11] BOYACI, A.: *Zum Stabilitäts- und Bifurkationsverhalten hohtouriger Rotoren in Gleitlagern*, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Dissertation, 2011
- [BP92] BREMER, H.; PFEIFFER, F.: *Elastische Mehrkörpersysteme*. B.G. Teubner-Studienbücher: Mechanik, 1992
- [But76] BUTENSCHÖN, H. J.: *Das hydrodynamische, zylindrische Radialgleitlager endlicher Breite unter instationärer Belastung*, Universität Karlsruhe, Dissertation, 1976
- [CNP11] CHASALEVRIS, A.; NIKOLAKOPOULOS, P. ; PAPADOPOULOS, C.: Aligned and Misaligned Wear Pattern in Fluid Film Bearings and Influence on the Rotor Response. In: *9. Internationale Tagung Schwingungen in rotierenden Maschinen*, 2011
- [Die97] DIETL, P.: *Damping and Stiffness Characteristics of Rolling Element Bearings.*, TU Wien, Dissertation, 1997
- [DIN03] Norm DIN ISO 281 Beiblatt 4 2003. *Dynamische Tragzahlen und nominelle Lebensdauer , Verfahren zur Berechnung der modifizierten Referenz-Lebensdauer für allgemein belastete Wälzlager*
- [DNWS11] DANIEL, C.; NITZSCHKE, S.; WOSCHKE, E. ; STRACKELJAN, J.: Numerische Simulation des instationären Verhaltens der Schwimmbuchsenlagerung in Turboladern. In: *9. Internationale Tagung Schwingungen in rotierenden Maschinen*, 2011
- [DSW09] DANIEL, C.; STRACKELJAN, J. ; WOSCHKE, E.: Modellierung von Gleitlagern in rotordynamischen Modellen. In: *8th International Conference on Vibrations in Rotating Machines*, 2009

- [DWS10] DANIEL, C.; WOSCHKE, E. ; STRACKELJAN, J.: Experimentelle und numerische Analyse eines dynamisch belasteten Kurbeltriebs. In: *5. VDI-Fachtagung Zylinderlaufbahn, Kolben, Pleuel*, 2010
- [Elf05] ELFERT, G.: Langsamlaufverschleiß von vollrolligen Radialzylinderrollenlagern / FVA. 2005. – Forschungsvorhaben Nr. 370, Heft 776
- [Fis11] FISCHER, J.: *Welle-Rotor-Verbindungen mit innerer Dämpfung Simulation und Analyse von einfachen Läufern und Laborzentrifugen*, Otto-von-Guericke Universität Magdeburg, Dissertation, 2011
- [Fri09] FRITZ, F.: Modellierung von Rollenlagern als Element einer Mehrkörperdynamiksimulation. In: *9. Internationale Tagung Schwingungen in rotierenden Maschinen*, 2009
- [Fri11] FRITZ, F.: *Modellierung von Wälzlagern als generische Maschinenelemente einer Mehrkörpersimulation*, Karlsruher Institut für Technologie, Dissertation, 2011
- [Fuc02] FUCHS, A.: *Schnelllaufende Radialgleitlagerungen im instationären Betrieb*, Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig, Dissertation, 2002
- [GNP06] GASCH, R.; NORDMANN, R. ; PFÜTZNER, H.: *Rotordynamik*. Springer, 2006
- [GW66] GREENWOOD, J. A.; WILLIAMSON, J. B. P.: Contact of nominally flat surfaces. In: *Proceedings of the Royal Society of London*, 1966 (A - Mathematical and Physical Sciences), pp. 300–319
- [Hah05] HAHN, K.: *Dynamik-Simulation von Wälzagerkäfigen*, Technische Universität Kaiserslautern, Dissertation, 2005
- [Her81] HERTZ, H.: Über die Berührung fester elastischer Körper. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1881, vol. 92, pp. 156–171
- [Hor06] HORI, Y.: *Hydrodynamic Lubrication*. Springer, 2006
- [HSG89] HAUGER, W.; SCHNELL, W. ; GROSS, D.: *Technische Mechanik 3 - Kinetik*. Springer, 1989
- [KBLW98] KNOLL, G.; BACKHAUS, K.; LANG, J. ; WILHELM, K.: Berechnung von Motorengleitlagern unter Berücksichtigung der Deformation. In: *MTZ*, 1998, vol. 59, pp. 652–656
- [KLHK02] KNAUS, O.; LOIBNEGGER, B.; HERBST, H. ; KREUZWIRTH, G.: Einfluss von Strukturdynamik und elastohydrodynamischer Lagerung auf die Pleuelgestaltung. In: *MTZ*, 2002, vol. 63, pp. 546–554
- [KLR96] KNOLL, G.; LANG, J. ; RIENÄCKER, A.: Transient EHD Connecting Rod Analysis: Full Dynamic Versus Quasi-Static Deformation. In: *ASME Journal of Tribology*, 1996, vol. 118, pp. 349–355

- [Kno74] KNOLL, G.: *Tragfähigkeit zylindrischer Gleitlager unter elastohydrodynamischen Bedingungen*, Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen, Dissertation, 1974
- [Kun61] KUNERT, K.: *Spannungsverteilung im Halbraum bei elliptischer Flächenpressungsverteilung über einer rechteckigen Druckfläche*. Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Band 17, Nr. 6, 1961
- [LS78] LANG, O. R.; STEINHILPER, W.: *Gleitlager: Berechnung und Konstruktion von Gleitlagern mit konstanter und zeitlich veränderlicher Belastung*. Springer, 1978
- [Lun39] LUNDBERG, G.: *Elastische Berrührung zweier Halbräume*. Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Band 10, Nr. 5, S.201-211, 1939
- [Mer07] MERMERTAS, Ü.: *Nichtlinearer Einfluss von Radialgleitlagern auf die Dynamik schnelllaufender Rotoren*, Technische Universität Clausthal, Dissertation, 2007
- [MSS00] MUCINO, V. H.; SUN, K. ; SMITH, J. E.: Hydrodynamics of a slider cylinder on a parallel track: mobility method of solution. In: *Industrial Lubrication and Tribology*, 2000, vol. 52(1), pp. 5–14
- [Mus86] MUSZYNSKA, A.: whirl and whip-rotor/bearing stability problems. In: *Journal of Sound and Vibration*, 1986, vol. 110, pp. 443–462
- [NO06] NEGRUT, D.; ORTIZ, J.: A Practical Approach for the Linearization of the Constrained Multibody Dynamics Equations. In: *ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2006, vol. 1(3), pp. 230–239
- [NS12] NGUYEN-SCHÄFER, H.: *Rotordynamics of Automotive Turbochargers*. Springer, 2012
- [NWDS09] NITZSCHKE, S.; WOSCHKE, E.; DANIEL, C. ; STRACKELJAN, J.: Simulation der Kolbendynamik unter Berücksichtigung der EHD-Kopplung. In: *Tagungsband 9. Magdeburger Maschinenbau-Tage*, 2009
- [NWDS11] NITZSCHKE, S.; WOSCHKE, E.; DANIEL, C. ; STRACKELJAN, J.: Simulation von Schwimmbuchsenlagerungen in Abgasturboladern. In: *Journal of Mechanical Engineering of the National Technical University of Ukraine KPI*, 2011
- [Rie95] RIENÄCKER, A.: *Instationäre Elastohydrodynamik von Gleitlagern mit rauhen Oberflächen und inverse Bestimmung der Warmkonturen*, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, Dissertation, 1995
- [Rot96] ROTHBART, H. A.: *Mechanical design handbook*. Rev. ed. of: Mechanical design and systems handbook. c1985. McGraw-Hill, 1996. – ISBN 0-07-054038-1
- [Sch01] SCHÖNEN, R.: *Strukturdynamische Mehrkörpersimulation des Verbrennungsmotors mit elastohydrodynamischer Grundlagerkopplung*, Universität Kassel, Dissertation, 2001

- [Sch09] SCHWEIZER, B.: Vibrations and Bifurcations of Turbocharger Rotors. In: *SIRM 2009 - 8th International Conference on Vibrations in Rotating Machines*, 2009
- [Sex02] SEXTRO, W.: *Dynamical contact problems with friction : models, methods, experiments and applications*. Springer, 2002
- [Sjö96] SJÖ, A.: *Numerical Aspects in Contact Mechanics and Rolling Bearing Simulation*, Lund University, Dissertation, 1996
- [Som62] SOMEYA, T.: *Stabilität einer in zylindrischen Gleitlagern laufenden, unwucht-freien Welle.*, Technische Hochschule Karlsruhe, Dissertation, 1962
- [SRK99] SHAMPINE, L. F.; REICHEL, M. W. ; KIERZENKA, J. A.: Solving Index-1 DAEs in MATLAB and Simulink. In: *SIAM J. Sci. Comput.*, 1999, vol. 41(3), pp. 538–552
- [SW99] SCHWERTASSEK, R.; WALLRAPP, O.: *Dynamik flexibler Mehrkörpersysteme*. Braunschweig/ Wiesbaden : Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, 1999. – ISBN 3–528–06629–6
- [Teu05] TEUTSCH, R.: *Kontaktmodelle und Strategien zur Simulation von Wälzlagern und Wälzlagerführungen*, Technische Universität Kaiserslautern, Dissertation, 2005
- [Tri85] TRIPP, J. H.: Hertzian Contact in Two and Three Dimensions. In: *NASA Technical Paper Series 2473*, 1985
- [Ves03] VESSELINOV, V.: *Dreidimensionale Simulation der Dynamik von Wälzlagern*, Universität Karlsruhe, Dissertation, 2003
- [Vog43] VOGELPOHL, G.: *Zur Integration der Reynoldsen Gleichung für das Zapfenlager endlicher Breite*. Ingenieur-Archiv, Abteilung Reibungsforschung Berlin des Kaiser Wilhelm-Institutes für Strömungsforschung, Göttingen, April 1943
- [Wal94] WALLRAPP, O.: Standardization of Flexible Body Modeling in Multibody System Codes Part I: Definition of Standard Input Data. In: *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 1994, vol. 22(3), pp. 283 – 304
- [WDNS11] WOSCHKE, E.; DANIEL, C.; NITZSCHKE, S. ; STRACKELJAN, J.: Numerical run-up simulation of a turbocharger with full floating ring bearings. In: *The 10th International Conference on Vibration Problems*, 2011
- [WDS07] WOSCHKE, E.; DANIEL, C. ; STRACKELJAN, J.: Reduktion elastischer Strukturen für MKS- Anwendungen. In: *Tagungsband 8. Magdeburger Maschinenbau-Tage & 7. MAHREG Innovationsforum*, 2007, pp. 187 – 195
- [WDSS09] WOSCHKE, E.; DANIEL, C.; SCHULZ, M. ; STRACKELJAN, J.: Methoden zur experimentellen und numerischen Analyse dynamisch belasteter Systeme am Beispiel eines Kurbeltriebs. In: *Tagungsband 9. Magdeburger Maschinenbau-Tage*, 2009

-
- [WR71] WILKINSON, J.; REINSCH, C.: *Linear Algebra*. Bd. 2. Springer Verlag, 1971
- [WS83] WALFORD, T. H. L.; STONE, B. J.: The Sources of Damping in Rolling Element Bearings under Oscillating Conditions. In: *Journal of Mechanical Engineering Science*, 1983, vol. 197C, pp. 225–232
- [WW03] WALLRAPP, O.; WIEDEMANN, S.: Comparison of Results in Flexible Multibody Dynamics Using Various Approaches. In: *Nonlinear Dynamics*, 2003, vol. 34, pp. 189–206
- [YI01] YAMAMOTO, T.; ISHIDA, Y.: *Linear and Nonlinear Rotordynamics. A Modern Treatment with Applications*. New-York : John Wiley & Sons Inc, 2001. – ISBN 0-471-18175-7

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name Christian Daniel
Geburtstag 24.12.1981
Geburtsort Stendal
Familienstand verheiratet, 2 Kinder

Schul Ausbildung 08.1988 – 07.1992 Goethe - Schule Stendal
08.1992 – 06.2000 Rudolf - Hildebrand - Gymnasium Stendal

Grundwehrdienst 07.2000 – 04.2001

Berufsausbildung 10.2001 – 11.2006 Maschinenbaustudium an der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Vertiefungsrichtung: Angewandte Mechanik
10.2004 – 02.2005 Fachpraktikum in der FE bei Volkswagen in Wolfsburg

beruflicher Werdegang ab 01.2007 wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik