

Das Atterberg-Kontinuum

Einführung von Grundlagen für eine neue Theorie

Dissertation
zur Erlangung des
Doktorgrades der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

der

Naturwissenschaftlichen Fakultät III
Agrar- und Ernährungswissenschaften,
Geowissenschaften und Informatik

der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg

vorgelegt von

André Köhler

Gutachter
apl. Prof. Dr. Wolfgang Gossel
Prof. Dr.-Ing. habil. Jens Engel

verteidigt am
13.12.2024

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	5
Abstract	6
Literaturverzeichnis	7
Abbildungsverzeichnis.....	10
Symbolverzeichnis	11
1. Einleitung	13
1.1. Ein unerfüllbarer Wunsch	13
1.2. Ein Unglück kommt selten allein.....	13
1.3. Grundhypothese.....	17
1.4. Hauptziel	18
1.5. Konkrete Ziele	18
2. Methodik.....	20
2.1. Erste Triggerwarnung	20
2.2. Wissenschaftliche Arbeitsweisen.....	20
2.3. Prüfung von Gleichungen	22
2.3.1. Einheitenanalyse.....	22
2.3.2. Weitere Möglichkeiten der Prüfung.....	23
2.4. Statistik	25
2.4.1. Verteilungen	25
2.4.2. Statistische Maßzahlen	26
2.4.3. Statistische Kennzahlen	26
2.5. Dekonstruktion	27
2.6. Konstruktion	37
2.7. Erkenntnistheoretischer Exkurs.....	39
2.7.1. Wissenschaft oder Pseudowissenschaft?.....	39
2.7.2. Ockhams Rasiermesser	41
3. Theoretische Grundlagen	42
3.1. Randbedingungen, Begriffsklärung und Festlegungen	42
3.2. Hookesches Gesetz für den isotropen Fall.....	44
3.2.1. Grundlegende Beziehungen im Hookeschen Gesetz	44
3.2.2. Berechnung elastischer Konstanten im isotropen Fall	45

3.3.	Spannungszustände	46
3.3.1.	Ebener Spannungszustand	46
3.3.2.	Der Reibungswinkel als theoretische Größe.....	51
3.3.3.	Räumlicher Spannungszustand.....	51
3.4.	Mohrsche Spannungskreise	53
3.4.1.	Konzepte für den Umgang mit den Mohrschen Spannungskreisen	53
3.4.2.	Mengen und Teilmengen	53
3.4.3.	Repräsentanten.....	54
3.4.4.	Mobilisierung der Repräsentanten.....	55
3.4.5.	Repräsentanten der Spannungskreise Druck	57
3.4.6.	Repräsentanten der Spannungskreise Druck und Zug	60
3.4.7.	Berechnungen in den Spannungskreisen mit mechanischen Spannungen.....	63
3.4.8.	Berechnungen in den Spannungskreisen mit Größen der Dimension Zahl.....	64
3.5.	Grenzzustände.....	66
3.5.1.	Grenzzustände in den Repräsentanten Mohrscher Spannungskreise	66
3.5.2.	Allgemeine Grenzzustandsfunktion	70
3.5.3.	Literaturdaten zu den Grenzen des elastischen Bereichs.....	74
4.	Atterberg-Kontinuum	78
4.1.	Zweite Triggerwarnung.....	78
4.2.	Ausführung des Atterberg-Versuchs	78
4.3.	Stand der Technik	79
4.4.	Schlüsselbeobachtung	80
4.5.	Beschreibung von bekannten Größen	82
4.5.1.	Wassergehalte an den Zustandsgrenzen (Atterberg-Limits).....	82
4.5.2.	Konsistenzzahl.....	84
4.5.3.	Plastizitätszahl	89
4.5.4.	Herkunft der Versuchsergebnisse.....	90
4.5.5.	Statistische Betrachtungen zu Konsistenzzahl und Plastizitätszahl	91
4.6.	Herleitung des Atterberg-Kontinuums.....	100
4.6.1.	Herleitung von Elastizitätszahl und Kriechzahl	101
4.6.2.	Fließbedingung nach Mohr-Coulomb im Atterberg-Kontinuum	106
4.6.3.	Erste Abschlussbeobachtung: Herleitung des Atterberg-Kontinuums	108
4.7.	Beschreibung von Elastizitätszahl und Kriechzahl.....	111
4.7.1.	Elastizitätszahl	111
4.7.2.	Kriechzahl	113
4.7.3.	Bestimmung von Grenzen aus Elastizitätszahl und Kriechzahl.....	116

4.7.4.	Gemeinsame Skala für Böden mit bindiger und nicht bindiger Reaktion.....	117
4.7.5.	Statistische Betrachtungen zu Elastizitätszahl und Kriechzahl	122
4.8.	Beschreibung von neuen Größen und Zusammenhängen	124
4.8.1.	Konstante Größen im Atterberg-Kontinuum.....	124
4.8.2.	Integration des Plasticity-Charts nach Casagrande 1948	125
4.8.3.	Vereinfachtes viskoelastisches Stoffmodell	128
4.8.4.	Erweiterung durch die Kriechbeständigkeitszahl	129
4.8.5.	Zweite Abschlussbeobachtung: Herleitung der Kriechbeständigkeitszahl.....	135
5.	Einschätzung der vorliegenden Ergebnisse.....	137
5.1.	Bewertung der Beobachtungen	137
5.2.	Bewertung der Umsetzung der konkreten Ziele.....	137
5.3.	Bewertung der Umsetzung des Hauptziels.....	139

Zusammenfassung

Die aktuellen, bodenmechanischen Klassifikationen sind nicht geeignet, den Untersuchungsgegenstand Boden hinreichend genau zu beschreiben. Die Konzept der Lagerungsdichten beruht auf Fehlannahmen und das Verständnis der Konsistenz- und Plastizitätsgrenzen ist mangelbehaftet. Deshalb wird mit dem Atterberg-Kontinuum eine neue theoretische Grundlage geschaffen, mit der Böden nach den Regeln des linear-elastischen Hookeschen Gesetzes für den isotropen Fall klassifiziert und beschrieben werden können.

In der vorliegenden Arbeit werden die Böden mit einer nicht bindigen Reaktion nur am Rand behandelt. Der Schwerpunkt liegt auf der Beschreibung von Böden mit einer bindigen Reaktion. Über einen Vergleich der Lage von Daten aus Atterberg-Versuchen im Konsistenzzahl I_C vs. Plastizitätszahl I_P Diagramm mit der Lage der Hauptspannungsrichtungen in den Mohrschen Spannungskreisen wurden Gemeinsamkeiten festgestellt, die als Schlüsselbeobachtung für die Herleitung des Atterberg-Kontinuums von entscheidender Bedeutung sind. Für die Herleitung aus den Mohrschen Spannungskreisen sind der elastische Grenzzustand und der untere Grenzzustand maßgeblich. Der elastische Grenzzustand wird mit der neuen Größe Elastizitätszahl I_E beschrieben. Diese repräsentiert den Ist-Zustand zum aktuellen Zeitpunkt. Die neue Größe für den unteren Grenzzustand ist die Kriechzahl I_K . Diese gilt für einen unbestimmten Zeitpunkt in der Zukunft und ist die Größe des verformungsfreien Soll-Zustands. Die beiden Zustände sind als elastisch definiert und zeitunabhängig.

Bei einer Verknüpfung der beiden zeitunabhängigen Grenzzustände wird eine Zeitabhängigkeit hergestellt und die elastischen Grenzzustände werden in einem idealisierten, viskoelastischen Stoffmodell zusammengefasst. Die Darstellung der Verknüpfung erfolgt über die Kriechbeständigkeitszahl c_c , die als Konzept aus den Verfahrensweisen in der Kunststoffindustrie übernommen wurde. Die Kriechbeständigkeitszahl ermöglicht den Zugriff auf den verformungsfreien Soll-Zustand aus dem Ist-Zustand.

Diese Arbeit enthält einige neue Erkenntnisse: 1) Es wird eine gemeinsame Skala für Böden mit bindiger und nicht bindiger Reaktion eingeführt, die eine neue Bodenklassifikation auf theoretischer Grundlage darstellt. 2) Wenn die drei Wassergehalte aus dem Atterberg-Versuch als Einheitsvektor auf der Oberfläche der Einheitskugel abgebildet werden, erzeugt sich die Konsistenzzahl von selbst. 3) Das Atterberg-Kontinuum ist mit dem Plasticity-Chart kompatibel und enthält die theoretische Lösung für die von Casagrande empirisch ermittelte A-Line. Beide Lösungen stimmen nahezu exakt überein. 4) ...

Abstract

The current soil mechanical classifications are not suitable for describing the soil under investigation with sufficient accuracy. The concept of relative densities of soils is based on incorrect assumptions and the understanding of consistency and plasticity limits is inadequate. With the Atterberg-Kontinuum, a new theoretical basis is created with which soils can be classified and described according to the rules of Hooke's linear-elastic law for the isotropic case.

In this paper, the soils with a non-cohesive ¹⁾ reaction are only marginally dealt with. The focus is on the description of soils with a cohesive ¹⁾ reaction. By comparing the position of data from Atterberg-Tests in the consistency-number I_C vs. plasticity-number I_P diagram ²⁾ with the position of the principal stress directions in Mohr's stress circles, similarities were identified that are of decisive importance as key-observation for the derivation of the Atterberg-Kontinuum. The elastic limit state and the lower limit state are decisive for the derivation from Mohr's stress circles. The elastic limit state is described with the new parameter elasticity-number I_E . This represents the actual state at the current point in time. The new parameter for the lower limit state is the creep-number I_K . This applies to an undefined point in time in the future and is the value of the deformation-free target state. Both states are defined as elastic and time independent.

By linking the two time-independent limit states, a time dependency is established, and the elastic limit states are combined in an idealized, viscoelastic material model. The link is represented via the creep-resistance-number c_c , which was adopted as a concept from the procedures in the plastics-industry. The creep-resistance-number makes it possible to access the deformation-free target state from the actual state.

This work contains some new findings: 1) A common scale for soils with cohesive and non-cohesive reaction is introduced, which represents a new soil-classification on a theoretical basis. 2) If the three water contents from the Atterberg-Test are mapped as a unit-vector on the surface of the unit-sphere, the consistency-number is generated automatically. 3) The Atterberg Kontinuum is compatible with the plasticity-chart and contains the theoretical solution for the A-line empirically determined by Casagrande. Both solutions agree almost exactly. 4) ...

¹⁾ Cohesion is not considered here. The translation of the German terms "bindig" as "cohesive" and "nicht bindig" as "non-cohesive" is misleading. The terms are similar in meaning, but not the same. The term "bindig" does not necessarily include the consideration of cohesion.

²⁾ Do not use an index with percentages. Always use decimal fractions.

Literaturverzeichnis

- [1] **ARVANITIDIS et al. 2018** „Peak Friction Angle of Soils as a Function of Grain Size“, Springer Nature Switzerland AG, C. Arvanitidis, E. Steiakakis, Z. Agioutantis, peer-review
- [2] **BRAND, BASTIAN, HILLMANN 2011** „Die Berechnung von Baugruben mit dem Bettungsmodulverfahren nach EB 102“, Bautechnik 88, Heft 10, (Seiten 694 bis 706)
- [3] **BRENNECKE, LOHMEYER 1938** „Der Grundbau“, 5. Auflage, Band 1, unveränderter Nachdruck 1948 als 6. Auflage, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin
- [4] **CASAGRANDE 1948:** „Classification and Identification of Soils“ Paper 2351, Seiten 901ff, Transactions of the American Society of Civil Engineers (Vol. 113), American Society of Civil Engineers, Arthur Casagrande 1948
- [5] **CASAGRANDE 1932:** „Research on the Atterberg Limits of Soils“, Seiten 121ff, Public Roads, a Journal of Highway Research (Vol. 13, No. 8), United States Department of Agriculture (Bureau of Public Roads), Arthur Casagrande 10/1932
- [6] **DIAZ-SEGURA 2015:** Übersetzung der Originalarbeit von JAKY 1944 „A nyugalmi nyomás tényezője“ aus dem Ungarischen in das Englische „The Coefficient of Earth Pressure at Rest“, EJGE Vol. 21-05, Edgar Giovanni Diaz-Segura, 2015, (Seiten 1775 bis 1785)
- [7] **DE BOER 1991** „Theorie poröser Medien - Historische Entwicklung und gegenwärtiger Stand“ Forschungsbericht aus dem Fachbereich Bauwesen, Heft 53, Universität-Gesamthochschule-Essen Fachbereich 10 Bauwesen Fachgebiet Mechanik
- [8] **DE BOER 2004** „Von Leonardos Weinstock zu Hightechanwendungen - Historische Entwicklung der Theorie poröser Medien (Materialien) einschließlich des Wiener Skandals“, Essener Unikate, Berichte aus Forschung und Lehre, Ingenieurwissenschaft, Heft 23, Universität Duisburg-Essen / Wissenschaftsverlag, FET Essen, pdf-Dokument, zum Download bereitgestellt durch Duisburg-Essen Publications online, (Seiten 10 bis 21)
- [9] **DORNECKER 2018** „Lagerungsdichte als Grundlage für die Einteilung in Homogenbereiche?“, pdf-Dokument, BAW - Bundesanstalt für Wasserbau Karlsruhe-Hamburg-Ilmenau
- [10] **GENSICHEN 2006** „Zur Einheitenanalyse und geometrischen Deutung mathematischer und physikalischer Gleichungen“, pdf-Dokument, zum Download bereitgestellt durch die FH Münster - University of Applied Sciences
- [11] **GBT 2017** (kurz: **GBT**) „Grundbau-Taschenbuch Teil 1: Geotechnische Grundlagen“ 8. Auflage, Herausgeber Karl Josef Witt, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften GmbH & Co. KG Wilhelm Ernst & Sohn Berlin

- [12] **HETTICH, JÖDICKE, SUM 2023** „Physik Methoden - vielseitig anwendbare Konzepte, Techniken und Lösungsstrategien für Ingenieurwesen und Wirtschaft“, Springer Spektrum, Springer Verlag GmbH DE als Teil von Springer Nature 2023
- [13] **JAKY 1944:** „The Coefficient of Earth Pressure at Rest“, siehe DIAZ-SEGURA 2015
- [14] **KAUSCH 2020:** „Geotechnische Charakterisierung des Hamburger Baugrundes, Geologisches Landesamt BUKEA - Behörde für Umwelt, Klima, Energie und Agrarwirtschaft der Stadt Hamburg, Friedrich Kausch 2020
- [15] **KOLYMBAS 2007** „Geotechnik, Bodenmechanik, Grundbau und Tunnelbau“ 2. Auflage, Springer Berlin Heidelberg New York
- [16] **KUNZ 2014:** „Kriechmodul-Abschätzung und Kriechbeständigkeit“, KunststoffXtra, IWK Institut für Werkstofftechnik und Kunststoffverarbeitung Rapperswil, Johannes Kunz 03/2014
- [17] **LIEBETRUTH, PIETSCH 2008** „Verdichtungsanforderungen nach ZTV-W 205 für Erdarbeiten (Ausgabe 1992)“, pdf-Dokument, BAW - DH / 2008-09 K1, BAW - Bundesanstalt für Wasserbau Karlsruhe-Hamburg-Ilmenau
- [18] **MALLWITZ 1992 (HOLZLÖHNER 1985)** „Verfahren zur Vorausermittlung der Setzungen von Fundamenten aufgeständerter Strecken infolge zyklischer Belastungen“, Forschungsbericht 188 der Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM) Berlin, Verlag für neue Wissenschaften GmbH Bremerhaven, (Seiten 18 bis 19)
- [19] **MAVKO, MUKERJI, DVORKIN 2019:** „Rock Physics Handbook“ Cambridge University Press, 3. Auflage, Gary Mavko, Tapan Mukerji, Jack Dvorkin 2019
- [20] **MOTT, ROLAND 2013:** „Limits to Poisson's ratio in isotropic materials - general result for arbitrary deformation“, Physica Scripta 87, The Royal Swedish Academy of Sciences, Peter Mott, Mike Roland 2013, peer-review
- [21] **OCKHAM** „Ockham's razor“, www.Spektrum.de, Metzler Lexikon Philosophie, Stand 08/2024, <https://www.spektrum.de/lexikon/philosophie/ockham-s-razor/1466>
- [22] **OHDE 1939** „Zur Theorie der Druckverteilung im Baugrund“ Der Bauingenieur, Heft 33/34, 25.08.1939, DK 624.131.522, Seite 451 bis 459, in Mitteilungen des Instituts für Geotechnik der TU Dresden (1992) Heft 1 und Mitteilungsblatt der Bundesanstalt für Wasserbau (1992) Nr. 69
- [23] **PARRY 2019:** „Mohr Circles, Stress Paths and Geotechnics“, 2. Auflage, CRC Press Taylor and Francis Group (Boca Raton), R. H. G. Parry 2019, (Seite 14)
- [24] **RANKINE 1857:** „On the Stability of Loose Earth“, Proceedings of the Royal Society of London, Vol. 8, Seiten 9 bis 27, als pdf-Scan des Originals zum Download bereitgestellt durch die Royal Society Publishing, William John Macquorn Rankine, 1857

- [25] **RANKINE 1858:** „A Manual of Applied Mechanics“, als pdf zum Download bereitgestellt durch Internet Archive unter <https://archive.org>, Richard Griffin and Company Glasgow, William John Macquorn Rankine, 1858
- [26] **TERZAGHI 1925:** „Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer Grundlage“. Verlag F. Deuticke (Wien), Karl von Terzaghi, 1925
- [27] **THAGARD 1978,** „Why Astrology Is a Pseudoscience“ PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association 1978, Volume 1, Seite 223 bis 234, <http://www.jstor.org/stable/192639>, (Seiten 227 bis 228)
- [28] **WANG, SONG, MAKSE 2010** „Jamming II: Edward’s statistical mechanics of random packings of hard spheres“ Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, Elsevier Verlag, Utrecht, peer-review

Normen und Regelwerke

- [29] **DIN EN ISO 17892-12:2022-08** „Geotechnische Erkundung und Untersuchung - Laborversuche an Bodenproben - Teil 12: Bestimmung der Fließ- und Ausrollgrenzen“
- [30] **DIN 18126:2022-10** „Baugrund, Untersuchung von Bodenproben - Bestimmung der Dichte nicht bindiger Böden bei lockerster und dichtester Lagerung“
- [31] **DIN EN 17685-1:2023-04** „Erdarbeiten - Chemische Prüfverfahren - Teil 1: Bestimmung des Glühverlusts“
- [32] **DIN EN ISO 17892-5:2017-08** „Geotechnische Erkundung und Untersuchung - Laborversuche an Bodenproben - Teil 5: Ödometersversuch mit stufenweiser Belastung (ISO 17892-5:2017); Deutsche Fassung EN ISO 17892-5:2017“

Datensätze mit Ergebnissen von Atterberg-Versuchen

- [BGBK] Baugrundbüro Klein GmbH Halle
- [GUT] G.U.T. - Gesellschaft für Umweltsanierungstechnologien mbH Merseburg
- [HH] BUKEA - Geologisches Landesamt der Hansestadt Hamburg
- [HTWK] Hochschule für Technik, Wirtschaft und Kultur Leipzig
- [IBG] IBG - Ingenieurconsult Baugrund und Grundbau Sondershausen
- [LKN] Landesbetrieb für Küstenschutz, Nationalpark und Meeresschutz Schleswig-Holstein

Datensatz Kriechbeständigkeitszahl von Kunststoffen

- [KUNZ] IWK Institut für Werkstofftechnik und Kunststoffverarbeitung Rapperswil, **KUNZ 2014**

Abbildungsverzeichnis

- Abb. 1 **WANG, SONG, MAKSE 2010** „Jamming II: Edward’s statistical mechanics of random packings of hard spheres“ Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, Elsevier Verlag, Utrecht, peer-review, (Seite 434, Abb. 4: Phase diagram of jammed matter)
- Abb. 2 **DÖRKEN** in **LIEBETRUTH, PIETSCH 2008** „Verdichtungsanforderungen nach ZTV-W 205 für Erdarbeiten (Ausgabe 1992)“, pdf-Dokument, BAW - DH / 2008-09 K1, BAW - Bundesanstalt für Wasserbau Karlsruhe-Hamburg-Ilmenau, (Präsentation zum Vortrag, Seite 14)
- Abb. 3 **KOLYMBAS 2007** „Geotechnik, Bodenmechanik, Grundbau und Tunnelbau“ 2. Auflage, Springer Berlin Heidelberg New York, (Seite 130, Abb. 8.12.: Ergebnisse eines Rahmenscherversuchs mit lockerem und dichtem Sand)
- Abb. 4 **KOLYMBAS 2007** „Geotechnik, Bodenmechanik, Grundbau und Tunnelbau“ 2. Auflage, Springer Berlin Heidelberg New York, (Seite 133, Abb. 8.15.: Ergebnisse eines Triaxialversuches mit einer lockeren und mit einer dichten Sandprobe)
- Abb. 26 **SIPPEL 2021** „Bußgelder drohen: Hundekot muss in Gunzenhausen aufgesammelt werden“, Artikel vom 15.01.2021, <https://www.nordbayern.de/franken/gunzenhausen/bussgelder-drohen-hundekot-muss-in-gunzenhausen-aufgesammelt-werden-1.10751590>, © Harald Sippel 2021
- Abb. 29 **KAUSCH 2020:** „Geotechnische Charakterisierung des Hamburger Baugrundes“, einschließlich Ergebnisse von 140 Atterberg-Versuchen: „Datensatz Hamburg“, Geologisches Landesamt BUKEA - Behörde für Umwelt, Klima, Energie und Agrarwirtschaft der Stadt Hamburg, Friedrich Kausch, Stand 2020, (Seite 30, Abb. 40: Plastizitätszahl und Konsistenzzahl)
- Abb. 41 **ARVANITIDIS et al. 2018** „Peak Friction Angle of Soils as a Function of Grain Size“, Springer Nature Switzerland AG, C. Arvanitidis, E. Steiakakis, Z. Agioutantis, peer-review, (Seite 6, Abb. 1: Histogram of data for normally consolidated, fine-grained soils)
- Abb. 42 **ARVANITIDIS et al. 2018** „Peak Friction Angle of Soils as a Function of Grain Size“, Springer Nature Switzerland AG, C. Arvanitidis, E. Steiakakis, Z. Agioutantis, peer-review, (Seite 7, Abb. 2: Histogram of data for overconsolidated, fine-grained soils)
- Abb. 72 **CASAGRANDE 1948:** „Classification and Identification of Soils“ Paper 2351, Seite 901ff, Transactions of the American Society of Civil Engineers (Vol. 113), American Society of Civil Engineers, Arthur Casagrande 1948, (Seite 919, Abb. 4: Plasticity Chart for AC-System)

Symbolverzeichnis

Lateinisches Alphabet

Symbol	Größe, Gegenstand	Einheit	Bemerkungen
A	Flächeninhalt	m^2	
a	Variable		
a	Risslänge Bruchzähigkeit	m	
b	Variable bzw. Faktor		in [2] mit $0,5 \leq b \leq 1$
c	Kohäsion	Pa (N/m^2)	
c_{ij}	Matrixposition		Voigt-Notation
c_u	undräßierte Scherfestigkeit	Pa (N/m^2)	
E	Elastizitätsmodul (E-Modul)	Pa (N/m^2)	
E_C	Kriechmodul (zeitabhängiger E-Modul)	Pa (N/m^2)	
E_S	Steifemodul (Longitudinalmodul M)	Pa (N/m^2)	
e	Porenzahl	1	
G	Schubmodul (2. Lamé-Konstante μ)	Pa (N/m^2)	
H	biaxialer Elastizitätsmodul	Pa (N/m^2)	
H	Mischmodul	$N/m^{2+\alpha}$	in [18] mit $0 \leq \alpha \leq 1$
K	Erddruckbeiwerte	1	
K_{Ic}	Bruchzähigkeit	$Pa\sqrt{m}$	
k_f	Durchlässigkeitsbeiwert	m/s	
l	Länge	m	
M	Longitudinalmodul (Steifemodul E_S)	Pa (N/m^2)	
m	Verhältnis der Fließspannungen	1	
n	Porenanteil	1	
q_c	Spitzendruck (Drucksondierungen)	Pa (N/m^2)	
t	Zeit	s	
v	Steifebeiwert	1	
w	Steifeexponent	1	
w	Wassergehalt	1	
\hat{w}	normierter Wassergehalt	1	
X	Verdichtbarkeit	1	[28]
x	Variable oder Abszissenwert		
y	Variable oder Ordinatenwert		
Z	Koordinationszahl	1	[28]
z	Tiefe	m	

Griechisches Alphabet

Symbol	Größe, Gegenstand	Einheit	Bemerkungen
α	Hauptnormalspannungswinkel	1	
α	Variable bzw. Summand	1	[18]
β	Hauptschubspannungswinkel	1	
γ	Wichte	N/m ³	
ε	Verformung	1 oder m	
λ	1. Lamé-Konstante	Pa (N/m ²)	
μ	2. Lamé-Konstante (Schubmodul G)	Pa (N/m ²)	
μ	Reibungskoeffizient	1	[28]
ν	Querdehnzahl	1	
ρ	Dichte	t/m ³	
σ	Spannung	Pa (N/m ²)	
τ	Schubspannung	Pa (N/m ²)	
φ	Winkel (beliebig)	1	siehe Punkt 3.3.1.
ϕ	Feststoffanteil	1	

Symbole im Zusammenhang mit dem Atterberg-Versuch

Symbol	Größe, Gegenstand	Einheit	Bemerkungen
c_c	Kriechbeständigkeitszahl	1	
I_C	Konsistenzzahl	1	
I_E	Elastizitätszahl	1	
I_K	Kriechzahl	1	
I_P	Plastizitätszahl	1	
w_L	Wassergehalt an der Fließgrenze	1	
w_N	natürlicher Wassergehalt	1	
w_P	Wassergehalt an der Ausrollgrenze	1	
\hat{w}_L	Wassergehalt Fließgrenze, normiert	1	
\hat{w}_N	natürlicher Wassergehalt, normiert	1	
\hat{w}_P	Wassergehalt Ausrollgrenze, normiert	1	

Historische Symbole und ihre heutige Bedeutung

Symbol	Größe, Gegenstand	Einheit	Bemerkungen
Ψ	Reibungswinkel	1	[24], [25]
D	Durchmesser Spannungskreis	Pa (N/m ²)	[24], [25]
M	Mittelpunkt Spannungskreis	Pa (N/m ²)	[24], [25]
P	Hauptnormalspannung	Pa (N/m ²)	[24], [25]
p	Spannung	Pa (N/m ²)	[22], [24], [25]
p_{xy}	Schubspannung	Pa (N/m ²)	[24], [25]
V	Steifemodul	Pa (N/m ²)	[22]

1. Einleitung

1.1. Ein unerfüllbarer Wunsch

Im Jahr 2025 findet das einhundertjährige Jubiläum der Einführung der Lagerungsdichte D und der bezogenen Lagerungsdichte I_D durch TERZAGHI 1925 statt. Anlässlich der Feierlichkeiten sollte die Deutsche Gesellschaft für Geotechnik DGGT e.V. eine Norm erarbeiten, die die Entnahme von Bodenproben für die Bestimmung des natürlichen Porenanteils n in grobkörnigen Böden regelt. Hierbei sind die bei einer Baugrunduntersuchung üblichen Erkundungsverfahren zu berücksichtigen und der Aufwand muss wirtschaftlich vertretbar sein.

1.2. Ein Unglück kommt selten allein

Die (grobkörnigen) Böden mit nicht bindiger Reaktion sind nicht Untersuchungsgegenstand dieser Arbeit und werden nur am Rande und in Verbindung mit den dargestellten, konkreten Zielen in die Betrachtungen einbezogen. Mit den Ausführungen zu den Lagerungsdichten soll an dieser Stelle nur demonstriert werden, wie wichtige Grundlagen der Geotechnik mit wenigen und einfachen Argumenten widerlegt werden können.

Die Widerlegung der Lagerungsdichten erfolgt mit einer Unterlage aus der theoretischen Physik, drei Darstellungen zum typischen Verhalten von Proben bei Entnahme oder Versuchsausführung aus der Geotechnik sowie der Norm DIN 18126:2022-10: „*Untersuchung von Bodenproben - Bestimmung der Dichte nicht bindiger Böden bei lockerster und dichtester Lagerung*“.

Der Ansatz aus der theoretischen Physik für die Betrachtung von Zufallspackungen aus gleich großen und harten Kugeln von WANG, SONG, MAKSE 2010 (Abb. 1) basiert auf der Erstellung eines kanonischen Ensembles. Es wird ein Raum unter Festlegung weiterer Randbedingungen definiert und es wird das Verhalten von definierten Teilchen (hier Kugeln) innerhalb des Raums untersucht. Unter der Voraussetzung einer ausreichenden Anzahl von Kugeln kann innerhalb des Gültigkeitsbereichs (Abb. 1) bei einer Umlagerung von Kugeln keine Volumenzunahme auftreten. Diese würde den definierten Raum des kanonischen Ensembles sprengen. Somit ist bei Umlagerungen nur eine Volumenabnahme möglich. Diese ist mit einer Verdichtung der Zufallspackung verbunden. Die Grenze der Verdichtbarkeit $X = 0$ wird an der RCP-line erreicht. In Abbildung 1 entspricht die Koordinationszahl Z der Anzahl der Kontakte einer Kugel zu anderen Kugeln. Die Anzahl der Kontakte ist vom Reibungskoeffizienten μ abhängig. Mit unendlich rauen und unendlich glatten Kugeln werden für μ zwei Fälle berücksichtigt.

Mit den Gleichungen (1) und (2) werden die Feststoffanteile ϕ in Abhängigkeit von der Koordinationszahl Z ermittelt (WANG, SONG, MAKSE 2010). Es wird die theoretische Untergrenze (RLP) und Obergrenze (RCP) des Feststoffanteils ϕ für Zufallspackungen aus gleich großen, harten Kugeln bestimmt.

RLP: Random Loose Packing L-point: $\phi_{RLP} = \frac{Z}{Z + 2\sqrt{3}} = \frac{4}{4 + 2\sqrt{3}} \approx 0,536$ (1)

RCP: Random Close Packing RCP-line: $\phi_{RCP} = \frac{Z}{Z + 2\sqrt{3}} = \frac{6}{6 + 2\sqrt{3}} \approx 0,634$ (2)

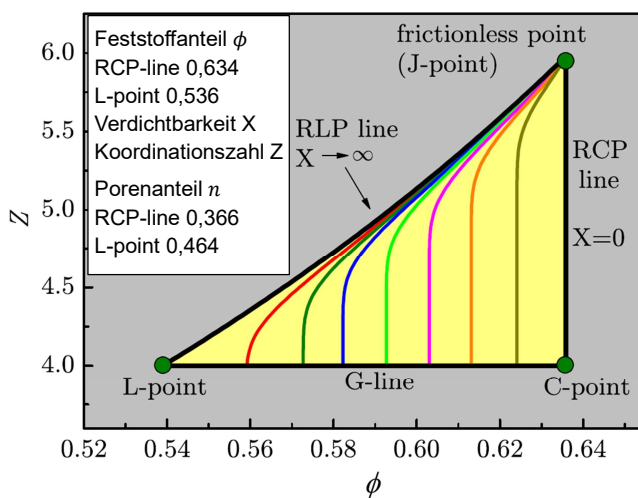


Abbildung 1) Der mögliche Bereich für Zufallspackungen aus gleichgroßen, harten Kugeln (WANG, SONG, MAKSE 2010), Die Originaldarstellung wird durch eine Legende ergänzt.

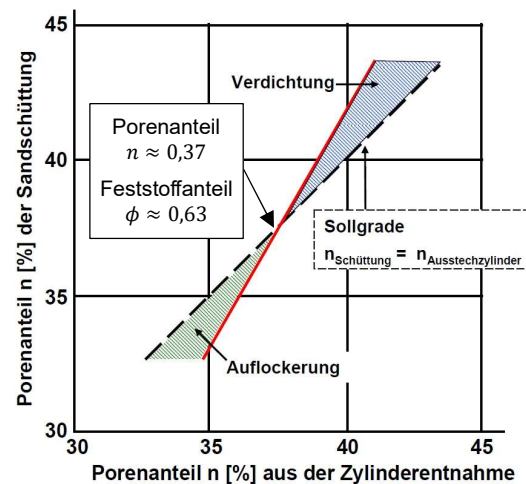


Abbildung 2) Fehler bei Probenentnahme mit dem Ausstechzylinder. Die Darstellung nach DÖRKEN wird durch eine Legende ergänzt, Vortrag von LIEBETRUTH, PIETSCH 2008.

Die Ergebnisse aus der theoretischen Physik (Abb. 1) und der empirischen Untersuchungen aus der Geotechnik (Abb. 2) sind gut vergleichbar. Die Lösungen für die RCP-line mit einem Feststoffanteil von $\phi = 0,634$ (2) und der empirisch von DÖRKEN ermittelte Schnittpunkt der Soll-Geraden und Ist-Geraden bei $\phi \approx 0,63$ stimmen überein. Beide Lösungen stellen den Übergang zwischen Verdichtung und Auflockerung mit einer Verdichtbarkeit von Null dar.

Die Abhängigkeit des Scherverhaltens von der Lagerungsdichte wird am Beispiel eines Sandes in den Abbildungen 3 und 4 gezeigt. Die Begriffe Kontraktanz und Dilatanz sind wie folgt zu erläutern:

- Kontraktanz: In einem locker gelagerten Sand nimmt das Volumen bei einer Scherung ab und der Sand wird verdichtet.
- Dilatanz: In einem dicht gelagerten Sand nimmt das Volumen bei einer Scherung zu und der Sand wird aufgelockert.

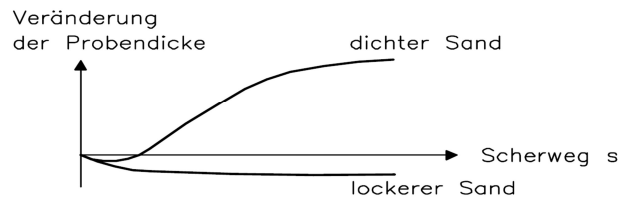


Abbildung 3) Schematische Darstellung des Scherverhaltens von Sand im Rahmenscherversuch, Originaldarstellung aus KOLYMBAS 2007

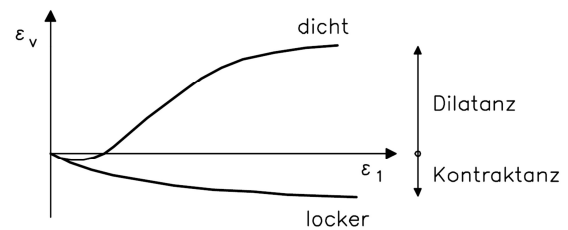


Abbildung 4) Schematische Darstellung des Scherverhaltens von Sand im Triaxialversuch, Originaldarstellung aus KOLYMBAS 2007

Die Versuchsdurchführung zur Bestimmung der dichtesten Lagerung LD_{max} wird mit dem Scherverhalten eines dicht gelagerten Sands verglichen. Das Ergebnis des Vergleichs wird für die Prüfung der Literaturangaben zur Lagerungsdichte D eingesetzt.

- Bei der Versuchsdurchführung zur Bestimmung der dichtesten Lagerung LD_{max} kann ausschließlich eine Volumenabnahme beobachtet werden (DIN 18126:2022-10).
- Bei der Durchführung von Scherversuchen wird bei dichter Lagerung die Volumenzunahme als charakteristische Beobachtung beschrieben (Abb. 3 und 4).

Aufgrund der gegensätzlichen Beobachtungen kann sicher ausgeschlossen werden, dass mit dem Versuch zur Bestimmung der dichtesten Lagerung LD_{max} eine dichte bzw. sehr dichte Lagerung beschrieben werden kann.

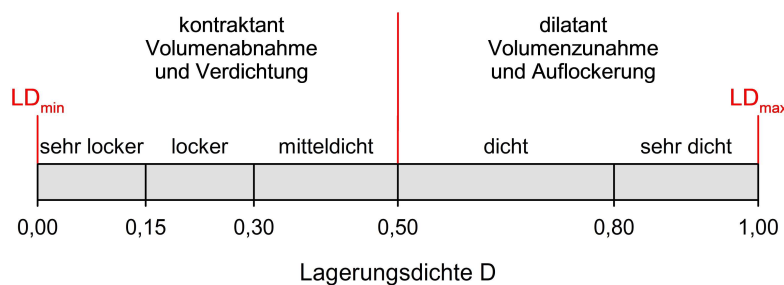


Abbildung 5) Lagerungsdichte D nach aktuellem Verständnis

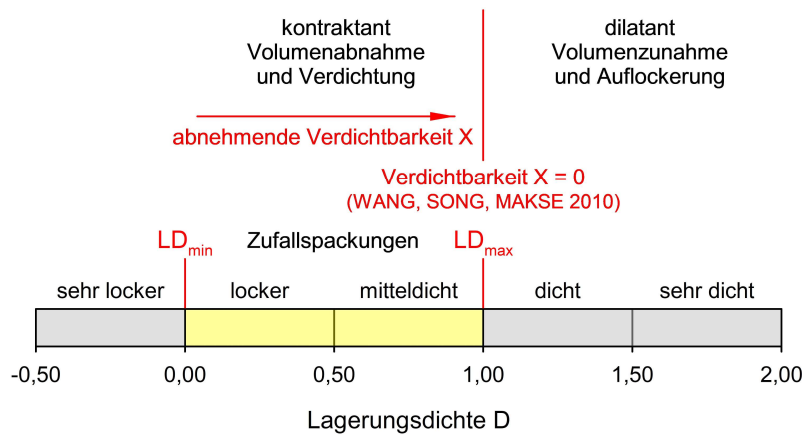
Aktuelles Verständnis zur Lage der Versuchsergebnisse für die Bestimmung der lockersten Lagerung LD_{min} und der dichtesten Lagerung LD_{max} unter Berücksichtigung der Angaben in den Normen, Regelwerken und der Fachliteratur der Geotechnik.

FRAGESTELLUNG:

Weshalb wird mit dem Versuch LD_{max} der dicht bis sehr dicht gelagerte Bereich beschrieben, wenn bei der Versuchsausführung zu keinem Zeitpunkt eine Volumenzunahme beobachtet wird?

Das Ergebnis des Versuchs LD_{max} wird auf Lagerungsdichten angewendet, die im Widerspruch zu den Ergebnissen aus der theoretischen Physik (Abb. 1) und im Widerspruch zu den Daten aus der Geotechnik stehen (Abb. 2 bis 4). Es ist eine Korrektur durchzuführen. Es ist zu beachten, dass sich bei einer Korrektur auch die Skala ändern muss. Die Ergebnisse der Versuche sind Fixpunkte. Mit dem Versuch LD_{min} wird immer eine Lagerungsdichte $D = 0$ bestimmt und für den Versuch LD_{max} wird immer eine Lagerungsdichte $D = 1$ ermittelt.

Die Abbildung 6 ist eine vorläufige, widerspruchsfreie Darstellung der Lagerungsdichte D . Es werden alle vorliegenden Zusammenhänge berücksichtigt.



SCHLUSSFOLGERUNG:
Bei der Versuchsausführung zur Bestimmung von LD_{max} kann zu keinem Zeitpunkt eine Volumenzunahme beobachtet werden. Damit ist es nicht möglich mit dem Versuch LD_{max} den dilatanten Bereich zu beschreiben.

Abbildung 6) Lagerungsdichte D mit korrigierter Lage der Versuchsergebnisse LD_{min} und LD_{max}

Die Lagerungsdichten D und I_D sind Untersuchungsgegenstände eines laufenden Forschungsprojekts. Dem Stand der Untersuchungen entsprechend wird die Lage der Versuche unter Berücksichtigung von Daten aus Physik (Abb. 1) und Geotechnik vorläufig festgelegt (Abb. 2 bis 4).

Bei Vergleich der Ergebnisse aus der theoretischen Physik (Gleichungen 1 und 2) mit den Versuchsergebnissen von Beispiel 1 aus Norm DIN 18126 ist eine exakte Übereinstimmung für LD_{max} und eine sehr gute Übereinstimmung für LD_{min} festzustellen (Tab. 1 und 2). Der Bereich der Zufallspackungen wird durch die Versuchsergebnisse nahezu exakt abgebildet. Mit Beispiel 1 enthält die Norm selbst einen Beleg für die Behauptung, dass das Verständnis von den Lagerungsdichten und den Versuchen LD_{min} und LD_{max} auf Fehlannahmen beruht.

Tabelle 1: Datenvergleich für die Bestimmung der dichtesten Lagerung LD_{max}

dichteste Lagerung LD_{max}	$\max \rho_d$	$\rho_{d(Korn)}$	$\max \phi$	$\min n$
RCP (WANG, SONG, MAKSE 2010)	-	-	0,634	0,366
DIN 18126: 2022-10 - Beispiel 1	1,743 t/m ³	2,75 t/m ³	0,634	0,366
			$ \Delta_\phi = 0$	$ \Delta_n = 0$

Hypothese: Die korrekte Bezeichnung für das Ergebnis aus dem Versuch zur Bestimmung der dichtesten Lagerung LD_{max} ist: **dichteste Zufallspackung**.

Tabelle 2: Datenvergleich für die Bestimmung der lockersten Lagerung LD_{min}

lockerste Lagerung LD_{min}	$\max \rho_d$	$\rho_{d(Korn)}$	$\min \phi$	$\max n$
RLP (WANG, SONG, MAKSE 2010)	-	-	0,536	0,464
DIN 18126: 2022-10 - Beispiel 1	1,443 t/m ³	2,75 t/m ³	0,525	0,475
			$ \Delta_\phi = 0,011$	$ \Delta_n = 0,011$

Hypothese: Die korrekte Bezeichnung für das Ergebnis aus dem Versuch zur Bestimmung der lockersten Lagerung LD_{min} ist: **lockerste Zufallspackung**.

Antithese: Die Hypothese von den Lagerungsdichten D und I_D nach Terzaghi ist hiermit widerlegt. Die seit 100 Jahren angewendete Verfahrensweise ist in der vorliegenden Form nicht geeignet das mechanische Verhalten von Böden mit nicht bindiger Reaktion zu beschreiben.

Die Ergebnisse der Versuche LD_{min} und LD_{max} werden seit 100 Jahren falsch interpretiert und bei der Bestimmung der Lagerungsdichten falsch angewendet. Es ist technisch unmöglich im Rahmen einer Baugrunderkundung eine Bodenprobe so zu entnehmen, dass der natürliche Porenanteil n sicher und mit vertretbarem Aufwand bestimmt werden kann. Die Anwendbarkeit der Lagerungsdichten war, ist und bleibt ein unerfüllbarer Wunsch. Seit ihrer Einführung sind die Lagerungsdichte D und die bezogene Lagerungsdichte I_D nicht geeignet, Böden mit nicht bindiger Reaktion in einer allgemein anwendbaren Form zu beschreiben.

Ein Unglück kommt selten allein. In dieser Arbeit wird das aktuelle Verständnis der Konsistenz- und Plastizitätsgrenzen vollständig in Frage gestellt. Während in den Normen, Regelwerken und der geotechnischen Fachliteratur jede Begründung für die dargestellten Grenzen oder die Grenzen selbst fehlen, werden hier begründete Argumente für eine andere Vorgehensweise angeboten. Seit ihrer Einführung sind die Konsistenz- und Plastizitätsgrenzen nicht geeignet, einen Boden mit bindiger Reaktion zu beschreiben (Punkt 4.3.).

Damit wird dem Fach Geotechnik ein erheblicher Teil der Grundlagen entzogen. Es wird festgestellt, dass es mit dem aktuellen Kenntnisstand der Bodenmechanik nicht möglich ist, die grundlegenden Untersuchungsgegenstände in hinreichender Form zu beschreiben. Dementsprechend wären auch alle von der Beschreibung dieser Untersuchungsgegenstände abhängigen Schlussfolgerungen zu überprüfen.

1.3. Grundhypothese

Die Formulierung von Zielen ist eine grundlegende Anforderung an jede wissenschaftliche Arbeit. Mit der Formulierung der Grundhypothese wird gleichzeitig ein Bedarf festgestellt. Ohne die Feststellung des Bedarfs lassen sich die Ziele dieser Arbeit nicht nachvollziehen.

Grundhypothese: Die bodenmechanischen Grundlagen im Fach Geotechnik sind nach aktuellem Stand nicht geeignet, den Untersuchungsgegenstand Böden in einer hinreichenden Form zu beschreiben.

1.4. Hauptziel

Es ist das Hauptziel dieser Arbeit die Entwicklung einer neuen Theorie einzuleiten. Das Hauptziel ist abstrakt. Die Umsetzung des Hauptziels kann erst mit der Formulierung konkreter Ziele verständlich dargestellt werden.

Der für das Erreichen des Hauptziels dargestellte Lösungsweg ist neu. Er ist auch radikal, weil er sich in der Vorgehensweise, in den Ergebnissen und den resultierenden Schlussfolgerungen von den in der Geotechnik anerkannten Vorstellungen deutlich unterscheidet.

Der Erfolg neuer Lösungsansätze und die Entwicklung einer neuen Theorie ist von der freiwilligen Mitwirkung und von den Interessen vieler Personen abhängig. Es sind Thesen zu prüfen oder aufzustellen. Der permanente Kreislauf von Verifikation und Falsifikation muss über einen langen Zeitraum in der erforderlichen Intensität erhalten bleiben und muss letztendlich zu einer positiven Gesamteinschätzung führen.

Wenn ein Erfolg nur in einer Gemeinschaft und in konstruktiver Zusammenarbeit mit anderen Personen erreicht werden kann, ist der Faktor Mensch zu berücksichtigen. Menschen überzeugt man mit sinnvollen Argumenten und neuen Problemlösungen, die in verständlicher Form darzustellen und anzubieten sind. Es ist entscheidend, ob ein neuer Lösungsansatz in einem positiven Rahmen wahrgenommen und als zielführender Beitrag verstanden wird. Ohne Berücksichtigung dieser Grundsätze ist es nicht möglich bei Menschen eine Bereitschaft für Veränderungen anzuregen.

1.5. Konkrete Ziele

Die konkreten Ziele stehen in direktem Zusammenhang mit dem Inhalt der vorliegenden Arbeit. Die Erreichbarkeit der konkreten Ziele ist sichergestellt. Ob ihre Umsetzung gelingt oder nicht gelingt, kann geprüft und dargestellt werden. Es werden die folgenden konkreten Ziele und Randbedingungen formuliert:

- Alle Betrachtungen konzentrieren sich auf den Atterberg-Versuch. Damit werden die Böden mit bindiger Reaktion als der maßgebliche Untersuchungsgegenstand dieser Arbeit festgelegt.
- Böden mit nicht bindiger Reaktion sind nicht Gegenstand der Betrachtungen. Sie sind in einem anderen Projekt wissenschaftlich zu untersuchen.

- Jedoch soll eine vorläufige Schnittstelle angelegt werden, die es ermöglicht die aktuell strikte Trennung von Böden mit bindiger und nicht bindiger Reaktion aufzuheben und die Regeln des elastisch-isotropen Falls ohne Einschränkungen auf alle Böden und alle regelkonformen Zustände anzuwenden (**Übertragungsfähigkeit**). Diese vorläufige Schnittstelle soll einer neuen Bodenklassifikation entsprechen, die ausschließlich auf theoretischen Grundlagen beruht und deren Grenzen begründet werden können.
- Es ist darauf zu achten, dass andere, bereits vorhandene Lösungswege bei Eignung in diesen Lösungsansatz integriert werden müssen. Es ist unwahrscheinlich, dass eine autarke und von vorhandenen Erkenntnissen vollständig entkoppelte Lösung korrekt ist. Die **Integrationsfähigkeit** ist zu gewährleisten.
- Der neue Lösungsansatz muss anderen Anwendern ermöglichen eigene Ideen und Vorstellungen ohne Beschränkungen umzusetzen zu können. Die einzigen Restriktionen ergeben sich aus den Regeln des elastisch-isotropen Falls. Die **Erweiterungsfähigkeit** ist für alle sinnvollen Lösungsansätze zu gewährleisten.
- Die **Prüffähigkeit** ist ein wesentliches Thema. Es sind Möglichkeiten anzubieten, mit denen die Erweiterung und Integration von neuen Untersuchungsgegenständen erleichtert wird. Es ist anzustreben, den Lösungsansatz mit weiteren Prüfmöglichkeiten zu ergänzen.
- Die Vergleichbarkeit von Ergebnissen aus Labor- und Felduntersuchungen ist herzustellen, zu verbessern und zu erweitern.
- Es soll die Möglichkeit geschaffen werden, mit preiswerten, schnell und in großer Anzahl auszuführenden Versuchen bodenmechanische Größen auch an gestörten Bodenproben zu ermitteln. In der vorliegenden Arbeit betrifft das den Atterberg-Versuch.

Begriffsklärung

Integrationsfähigkeit: ist die Fähigkeit bereits vorhandene Lösungen ohne nennenswerte Eingriffe vollständig und widerspruchsfrei in das Gesamtsystem einbinden zu können.

Erweiterungsfähigkeit: ist die Fähigkeit neue Untersuchungsgegenstände einbinden zu können. Die Einbindung erfolgt über Schnittstellen, die mit Größen zu besetzen sind, die gleichzeitig den vorhandenen und den neuen Untersuchungsgegenstand ohne Widersprüche beschreiben. Eine Schnittstelle ist eine Gemeinsamkeit unterschiedlicher Untersuchungsgegenstände.

Übertragungsfähigkeit: ist die Fähigkeit die Regeln (Gleichungen, Grenzen etc.) ohne Änderungen oder Anpassungen für geeignete Erweiterungen und integrierte Bestandteile widerspruchsfrei übernehmen zu können und den Anwendungsbereich der Regeln des elastisch-isotropen Falls zu erweitern. Bei vollständiger Kompatibilität erfolgt die Übertragung von selbst.

2. Methodik

2.1. Erste Triggerwarnung

Es wirkt befremdlich, wenn allgemein bekannte Sachverhalte in einer exzessiven Form erklärt werden. Beim Lesen des Kapitels Methodik kann stellenweise der Eindruck entstehen, dass mit einer breit angelegten Darstellung von Selbstverständlichkeiten versucht wird, vom Fehlen relevanter Inhalte abzulenken.

2.2. Wissenschaftliche Arbeitsweisen

Von HETTICH, JÖDICKE, SUM 2023 werden insgesamt vier „*wissenschaftliche Arbeitsweisen*“ aufgezählt. Diese sind nicht an eine Disziplin gebunden und beziehen sich auf die Wissenschaft im Allgemeinen. Drei Arbeitsweisen können angewendet werden. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden keine Experimente durchgeführt.

wissenschaftliche Arbeitsweisen:

- Beobachtung
- Beschreibung / Empirie
- Experiment
- Theorie

Der in Kurzform dargestellte Aufbau dieser Arbeit orientiert sich an den Empfehlungen von HETTICH, JÖDICKE, SUM 2023. Es ist in der nachfolgenden Kurzdarstellung des methodischen Ablaufs dieser Arbeit zu erkennen, dass sich die Reihenfolge „Theorie-Beobachtung-Empirie“ in den ersten sechs von sieben Punkten zweimal fast unverändert wiederholt. Der Grund für die Wiederholung ist, dass sich im ersten Durchlauf hauptsächlich mit dem „Bekanntem“ und im zweiten Durchlauf hauptsächlich mit dem „Neuen“ auseinandergesetzt wird.

Theorie (theoretische Grundlagen)

- Prüfung vorhandener Grundlagen und Vergleich mit Literaturdaten
- Entwicklung von eigenen Verfahrensweisen als Ergänzung der theoretischen Grundlagen

Beobachtung (Schlüsselbeobachtung)

- Vergleich der theoretischen Grundlagen mit den ungeprüften und unverändert dargestellten Versuchsergebnissen eines Teildatensatzes

Empirie (Versuchsergebnisse)

- Beschreibung bekannter Größen (Versuchsergebnisse)
- Prüfung der Versuchsergebnisse auf die Eignung zum Vergleich (Statistik)
 - Vergleich mit einer **Fremdbeobachtung**

Theorie (theoretische Grundlagen des neuen Lösungsansatzes)

- Erweiterung durch Herleitung neuer Größen
- Aufteilung durch die Festlegung von zwei unbestimmten Zeitpunkten auf Grundlage des theoretischen Lösungsansatzes
- Ergänzung der Erweiterung auf Grundlage der Randbedingungen

Beobachtung (erste Abschlussbeobachtung)

- Vergleich der theoretischen Ergebnisse für den letzten Punkt des neuen Lösungsansatzes mit den geprüften Versuchsergebnissen

Empirie und Theorie (Umsetzung von Zielen)

- Beschreibung und Prüfung neuer Größen (Statistik)
- Integration des Plasticity-Charts nach CASAGRANDE 1948
- Erweiterung mit neuen Größen
- Zusammenführung der zwei unterschiedlichen Zeitpunkte und Herleitung einer unbestimmten Zeitabhängigkeit

Beobachtung (zweite Abschlussbeobachtung)

- Vergleich der Ergebnisse der Erweiterung durch eine neu eingeführte Größe mit den geprüften Versuchsergebnissen der Schlüsselbeobachtung, Prüfung der Vorgehensweise mit Bezug auf die Herleitung der unbestimmten Zeitabhängigkeit etc.

Einer der wichtigen methodischen Ansätze ist die klare Trennung zwischen dem theoretischen und dem empirischen Teil. Alle theoretischen Betrachtungen und die Herleitung neuer Zusammenhänge erfolgen bis zu ihrem Abschluss ausschließlich auf Basis der theoretischen Teile. Um die Repräsentativität der Daten und die Eignung zum Vergleich zu bestätigen, werden die empirischen Daten mit statistischen Methoden geprüft. Bis zur abschließenden, zweiten Abschlussbeobachtung sind die Ergebnisse der theoretischen Untersuchungen und die geprüften Versuchsdaten voneinander unabhängig. Ohne diese Unabhängigkeit ist ein Vergleich wenig aussagekräftig und die Ziele lassen sich nicht mit der erforderlichen Genauigkeit umsetzen.

Die im Rahmen dieser Arbeit häufig angewendeten Verfahrensweisen sind:

- Beobachtung und Vergleich
- Grenz- und Extremwertbetrachtungen
- Statistik
- Dekonstruktion und Konstruktion

2.3. Prüfung von Gleichungen

2.3.1. Einheitenanalyse

Es wird zwischen Einheitenanalyse und Dimensionsanalyse unterschieden. Abgeleitete Einheiten setzen sich aus mehreren Basisgrößen zusammen und werden zur Vereinfachung mit einer eigenen Einheit dargestellt. Eine Dimensionsanalyse wird mit den Basisgrößen der Einheit durchgeführt, eine Einheitenanalyse mit der Einheit selbst. Aufgrund der Ähnlichkeit der Verfahrensweisen werden beide Begriffe oftmals synonym verwendet. Die in der Geotechnik am häufigsten verwendete Art der Größe sind mechanischen Spannungen. Es werden weitere physikalische Größen mit Einheit verwendet. Jedoch ist der Umfang an Größen mit Einheit überschaubar und die Anwendung einer Einheitenanalyse ausreichend.

Für den eigenen methodischen Ansatz ist der Bericht von GENSICHEN 2006 eine der wichtigsten Grundlagen. In GENSICHEN 2006 werden die Einheiten physikalischer Größen als die wichtigste Prüf- und Kontrollmöglichkeit benannt, die einem Bearbeiter bei der Betrachtung von Gleichungen und Ergebnissen von Berechnungen zur Verfügung stehen. Er formuliert drei Definitionen für den Umgang mit Einheiten und stellt ihre Bedeutung mit der Bezeichnung „Grundgesetze“ heraus. Die Definitionen sind Regeln aus Mathematik und Physik. Ihre Anwendung ist für jeden Bearbeiter verpflichtend und nicht optional.

Die Definitionen werden in dieser Arbeit als Regeln bezeichnet. Um an anderer Stelle auf die Regeln verweisen zu können, werden sie mit dem Buchstaben R gekennzeichnet und fortlaufend nummeriert. Nachfolgend werden die drei „Grundgesetze“ von GENSICHEN 2006 mit kleineren Ergänzungen und Umformulierungen dargestellt. Die Formulierung der Regeln R1 bis R3 entspricht im Sinn exakt den Formulierungen von GENSICHEN 2006:

- R1 In der Darstellung einer Gleichung muss die Einheit der linken Seite der Einheit der rechten Seite entsprechen.
- R2 Jeder Summand bzw. jeder Subtrahend und Minuend muss die gleiche Einheit aufweisen.
- R3 Argumente und Ergebnisse transzendenter Funktionen sowie Exponenten haben die Größe der Dimension Zahl.

Die Regel R4 wurde aus HETTICH, JÖDICKE, SUM 2023 entnommen und ist ebenfalls eine zu den „Grundgesetzen“ gehörende Regel.

- R4 Bei einer Multiplikation oder Division wird für die Einheiten (oder Dimensionen) die gleiche Rechenoperation ausgeführt, wie für die Zahlenwerte der Größen.

Für Gleichungen, die physikalische Größen mit Einheiten enthalten, sind die Regeln R1 bis R7 anzuwenden. Für die Regeln R1 bis R6 kann ein sicherer Nachweis von Regelverletzungen erbracht werden. Die vollständige Zusammenstellung aller Regeln wird als Gleichung (3) dargestellt. Hierbei wurden die Angaben um die ebenfalls transzendenten Hyperbelfunktionen ergänzt. Die Regeln gelten auch für die Umkehrfunktionen.

Grundlagen für die Dimensionsanalyse (HETTICH, JÖDICKE, SUM 2023)
mit Ergänzung durch die Hyperbelfunktionen

	Regel	
$a = b \Rightarrow \dim a = \dim b$	R1	
$a \pm b \Rightarrow \dim a = \dim b$	R2	
$x^a, e^a, \exp(a) \Rightarrow \dim a = 1$	R3	
$\sin(a), \cos(a), \tan(a), \dots \Rightarrow \dim a = 1$	R3	(3)
$\sinh(a), \cosh(a), \tanh(a), \dots \Rightarrow \dim a = 1$	R3	
$\ln(a), \log(a) \Rightarrow \dim a = 1$	R3	
$c = a \cdot b \Rightarrow \dim c = \dim a \cdot \dim b$	R4	
$\dim a = 1$		Größe der Dimension Zahl

Die Regeln R5 bis R7 sind eigene Ergänzungen. Sie stellen eigentlich Selbstverständlichkeiten dar. Vermutlich werden sie von GENSICHEN 2006 und HETTICH, JÖDICKE, SUM 2023 deshalb nicht erwähnt. Jedoch wurde bei der Prüfung von Publikationen aus dem Fach Geotechnik festgestellt, dass Verletzungen der Regeln R5 bis R7 des Öfteren zu beobachten sind:

R5 Die in einer Gleichung dargestellten Einheiten müssen den dargestellten physikalischen Größen entsprechen.

R6 Bei Berechnungen ist die Größenordnung von Einheiten zu beachten (kPa, MPa etc.).

R7 Das unbegründete Einsetzen von Größen in Gleichungen ist nicht zulässig.

2.3.2. Weitere Möglichkeiten der Prüfung

Wenn Gleichungen aus Zahlenwerten und Größen der Dimension Zahl bestehen, kann keine Prüfung auf Grundlage der Regeln R1 bis R7 erfolgen und selbst offensichtliche Regelverletzungen sind deutlich schwieriger nachzuweisen. Die nachfolgenden dargestellten Möglichkeiten sind keine Regeln, sondern Hinweise auf eine möglicherweise fehlerhafte Darstellung von Gleichungen. Ein Hinweis bedeutet nicht, dass eine fehlerhafte Gleichung vorliegen muss. Alle Hinweise sind eigene Beobachtungen, die unvollständig sein können und ggf. auch widerlegbar sind. Sie gelten auch für Gleichungen mit physikalischen Größen mit Einheit.

Zahlenwerte im elastisch-isotropen Fall

Bei einer korrekten Darstellung von Gleichungen ergeben sich im elastisch-isotropen Fall immer Zahlenwerte, die natürliche bzw. ganze Zahlen sind. Das gilt auch für die Darstellung als Zähler und Nenner in Brüchen. Diese Beschreibung der Zahlenwerte gilt für alle verwendeten und gesichteten Gleichungen des elastisch-isotropen Falls und ist unabhängig davon, ob die Gleichungen physikalische Größen mit Einheiten oder ausschließlich Größen der Dimension Zahl und Zahlenwerte enthalten.

Zahlenwerte als Dezimalbrüche mit Nachkommastellen

In der Bodenmechanik verwendete Gleichungen enthalten häufig Zahlenwerte, die als Dezimalbruch mit mehreren Nachkommastellen dargestellt werden. Diese Zahlenwerte werden nur im Ausnahmefall begründet, sind im Regelfall nicht nachvollziehbar und somit wertlose Informationen. Schwer einzuordnende Dezimalbrüche sollten in eigenen Gleichungen (ggf. zusätzlich) als gemeiner Bruch dargestellt werden (4).

$$1,28571 = \frac{9}{7} \quad (4)$$

Bezug zu Gleichungen mit nachweisbaren Regelverletzungen

Wenn die Zielgröße über die Anwendung mehrerer Gleichungen ermittelt werden muss, dann macht es keinen Sinn eine Zwischengröße über eine Gleichung zu bestimmen, für die eine Regelverletzung nachweisbar ist. Das Ergebnis der Zielgröße ist dann immer falsch.

$$\varphi' = \varphi'_{kr} + m \cdot I_R \quad (0 \leq I_R \leq 4) \quad \text{DE ROCQUIGNY 2008 (GBT)} \quad (5)$$

$$\text{für (5): } I_R = I_D(10 - \ln p') - 1 \quad \text{BOLTON 1986 (GBT)} \quad \text{R3} \quad (6)$$

Toleranzangaben fehlerbehafteter Größen

Die angegebene Schwankungsbreite des Fehlers ist deutlich größer als die Abstände, mit denen erklärable Unterschiede dargestellt werden können.

$$\varphi'_w = 11,76 - 14,7 \cdot \log I_p \pm 3,37 \quad \text{HORN 1964 (GBT)} \quad (7)$$

ungewöhnliche Verwendung von Begriffen

Der Reibungswinkel φ'_w wird im GBT 2017 als „wahrer Reibungswinkel bindiger Böden“ bezeichnet. In den Wissenschaften ist es sehr ungewöhnlich, dass im dargestellten Kontext der Begriff: „wahr“ verwendet wird.

$$\tan \varphi'_w = \tan \varphi'_s(1,07 - 0,04651 \cdot I_A) \quad \text{HVORSLEV (GBT)} \quad (8)$$

2.4. Statistik

2.4.1. Verteilungen

Die Beschreibung von statistischen Verteilungen beschränkt sich die in dieser Arbeit angewendeten Fälle. Die Vorgehensweise wird nach Anzahl der gleichzeitig zu betrachtenden Größen gegliedert. Die Anzahl der Anwendung auf Größen wird in Klammern angegeben.

eine Größe

Bei der Betrachtung einer Größe werden Histogramme erstellt und die Verteilung der Häufigkeit von Größen wird mit einer Dichtefunktion statistisch bewertet. Bei der Betrachtung von Größen werden die folgenden Verteilungen ermittelt.

- Normalverteilung
 - Gauß-Verteilung (2x)
 - Laplace-Verteilung (2x)
- logarithmische Normalverteilung (1x)

eine Größe in kombinierter Darstellung

Eine Größe wird nach den Regeln einer bestehenden Klassifikation in mehrere Gruppen aufgeteilt. Alle statistisch erfassbaren Gruppen sind normalverteilt. Die Betrachtung der Gesamtdaten ergibt eine Weibull-Verteilung.

- Gauß-Verteilung (4x Daten in Gruppen)
- Weibull-Verteilung (1x alle Daten)

zwei Größen

Eine Größe ist normalverteilt und eine Größe ist logarithmisch normalverteilt. Durch die Anwendung des natürlichen Logarithmus auf die lognormalverteilte Größe wird eine Normalverteilung hergestellt und die beiden Größen können mit einer bivariaten Normalverteilung verglichen werden.

- bivariate Normalverteilung (1x)

drei Größen

Es werden drei Größen normiert, die Messwerte in einem Versuch sind. Die normierten Messwerte werden als Einheitsvektoren auf der Oberfläche einer Einheitskugel dargestellt und anschließend über definierte Flächen statistisch bewertet.

- paraboloidale Fläche (1x)
- ebene Fläche (1x)

2.4.2. Statistische Maßzahlen

Die statistischen Maßzahlen werden zur Darstellung von Abhängigkeiten und für Aussagen zur Repräsentativität von Datensätzen verwendet. Die Interpretation und Bewertung einer Maßzahl ist vom Kontext abhängig. Statistische Maßzahlen erlauben keine allgemeingültigen Aussagen, d. h. sie können nicht beliebig für jeden Zweck eingesetzt werden. In dieser Arbeit werden die folgenden vier statistischen Maßzahlen verwendet.

R² Bestimmtheitsmaß

Das Bestimmtheitsmaß bewertet die Güte einer Regressionsanalyse.

adj R² adjustiertes Bestimmtheitsmaß

Bei einer Erhöhung der Anzahl an Variablen erhöht sich das Bestimmtheitsmaß. Dieser Effekt wird mit dem adjustierten Bestimmtheitsmaß ausgeglichen.

see Standardabweichung der Schätzung

Mit der Standardabweichung der Schätzung wird die Varianz der Stichproben einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ermittelt.

w Normality-Test nach SHAPIRO-WILK

Der Normality-Test schätzt ausschließlich die Wahrscheinlichkeit, ob eine Normalverteilung der Daten vorliegen könnte oder nicht. Das Testergebnis kann sich vom Bestimmtheitsmaß R² deutlich unterscheiden und ermöglicht ggf. zusätzliche Interpretationen.

2.4.3. Statistische Kennzahlen

Mittelwert, Median, Minimum, Maximum etc. sind statistische Kennzahlen. In der vorliegenden Arbeit wird zwischen theoretischen und empirischen Kennzahlen unterschieden. Die empirischen Kennzahlen sind die realen Kennzahlen eines Datensatzes. Die theoretischen Kennzahlen haben eine direkte Beziehung zu den theoretischen Grundlagen. Sie sind Orientierungsgrößen, auf die mit empirischen Kennzahlen Bezug genommen werden kann. Je kleiner der Unterschied zwischen den theoretischen und empirischen Kennzahlen ist, desto stärker ist der Bezug des Datensatzes zu den theoretischen Grundlagen. Mit der hier beschriebenen Vorgehensweise kann ein Unterschied auch mit einer Funktion ausgeglichen werden. Ohne diese Bezüge und Möglichkeiten ist es deutlich schwieriger, die Aussagekraft der empirischen Kennzahlen einzuschätzen. Die Vergleichbarkeit zwischen den empirischen Daten und den theoretischen Grundlagen unterliegt dann deutlichen Einschränkungen.

2.5. Dekonstruktion

Dekonstruktion und Konstruktion sind hier keine wissenschaftlich definierten Begriffe. Sie stellen eine Beschreibung der eigenen Vorgehensweise dar und ihre Bedeutung ist genau auf die Bedürfnisse ausgerichtet, die sich aus dieser Arbeit ergeben. Eine Dekonstruktion beschäftigt sich mit den vorhandenen Grundlagen eines Fachs. Ziel einer Dekonstruktion ist die Prüfung eines Sachverhalts oder eines Untersuchungsgegenstands unter Berücksichtigung des historischen Kontexts. Mit einer Dekonstruktion soll eine These nicht nur verifiziert oder falsifiziert werden. Die zusätzliche Aufgabe ist die Beobachtung der zeitlichen Entwicklung verschiedener Thesen, die im Laufe der Zeit zu ein und demselben Sachverhalt oder Untersuchungsgegenstand aufgestellt wurden. Die Vorgehensweise ist z. T. aufwendig, ermöglicht aber weiterführende Aussagen, die ggf. auch auf andere Aufgaben oder Anwendungen übertragbar sind.

Im Anschluss wird eine Dekonstruktion am Beispiel des spannungs- bzw. tiefenabhängigen Steifemoduls E_S' ausgeführt. Er wird für Setzungsberechnungen verwendet und ist eine wichtige und häufig genutzte Größe. Es wird der erste moderne Ansatz von TERZAGHI 1925 vorgestellt und eine kurze Aufzählung von Gleichungen geprüft. Die zwei am häufigsten genutzten Lösungsansätze nach OHDE 1939 und HOLZLÖHNER 1985 sowie ein Berechnungsbeispiel von REITMEIER 2018 werden intensiv betrachtet. Die Beispiele repräsentieren einen Zeitraum von 1925 bis heute.

Der spannungsabhängige Steifemodul E_S' ist eine physikalische Größe mit Einheit und die unter Punkt 2.3.1. dargestellten Regeln können uneingeschränkt angewendet werden. Die Anwendung der Regeln kann bestehende Probleme aufzeigen und ist ein wichtiger Bestandteil der Dekonstruktion. Eine Verletzung der Regeln wird unter Nennung der Regel hinter den Gleichungen dargestellt. Wenn gleichzeitig eine Verletzung der Regeln R1 und R5 auftritt, wird nur die Regelverletzung R1 erfasst. Am Ende des Kapitels werden die ermittelten Regelverletzungen zusammengefasst und bewertet.

TERZAGHI 1925 (in OHDE 1939)

Die älteste Gleichung im Zusammenhang mit der Bestimmung der spannungsabhängigen Zusammendrückung stammen von TERZAGHI 1925. Die Grundlage der Betrachtungen sind Ergebnisse von erstmals ausgeführten Oedometerversuchen. In Gleichung (9) wird die Porenzahl ε aus der Belastung p und den sogenannten Bodenfestwerten $\alpha, \beta, \gamma, p_c$ bestimmt.

$$\varepsilon = -\alpha \ln(p + p_c) - \beta(p + p_c) - \gamma p + c \quad \dim p = \text{Pa} \quad \text{Regelverletzung R3} \quad (9)$$

OHDE 1939

Durch OHDE 1939 wird der spannungsabhängige Steifemodul $V = E_S'$ in seiner heute bekannten Form eingeführt. Die Größe v wird heute als Steifebeiwert und die Größe w als Steifeexponent bezeichnet. Beide Größen werden unverändert und gemäß der Ausführungen in OHDE 1939 verwendet. Ohne die Darstellung des Luftdrucks σ_{at} in (12) entspricht die Gleichung (10) aus OHDE 1939 inhaltlich exakt der Darstellung im GBT 2017.

$$V = v \cdot p^w \quad \dim p = \text{Pa} \quad \text{Regelverletzung} \quad \text{R1 bei } w \neq 1 \quad (10)$$

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{v_1 \cdot p} + \frac{1}{v_2 \sqrt{p}} \quad \text{R1, R2} \quad (11)$$

$$\frac{1}{\text{Pa}} \neq \frac{1}{\text{Pa}} + \frac{1}{\sqrt{\text{Pa}}}$$

OHDE 1939 (im GBT 2017)

Entweder liegt eine andere Arbeit von OHDE 1939 vor oder der Luftdruck σ_{at} wurde nachträglich eingefügt. In späteren Arbeiten nehmen die dargestellten Gleichungen zwar die Struktur von (12) an, aber auch hier gibt es keinen Hinweis auf Verwendung des Luftdrucks. Die Gleichung (12) wird OHDE 1939 zugeschrieben und wurde aus dem GBT 2017 entnommen.

$$E_S' = v \cdot \sigma_{at} \cdot \left(\frac{\sigma'}{\sigma_{at}} \right)^w \quad \text{OHDE 1939} \quad \text{Regelverletzung} \quad \text{R7, R1 in Abhängigkeit von } v \quad (12)$$

Im GBT 2017 wird auf Seite 174 eine Gleichung nach KÉZDI und eine Versuchsanordnung nach BICZÓK zur Bestimmung der Luftdurchlässigkeit von nicht wassergesättigten Böden abgebildet. Wenn die Luftdurchlässigkeit von Böden im Versuch ermittelt werden kann, müssen sich die Atmosphäre und die ungesättigte Bodenzone gegenseitig durchdringen, ohne dass wesentliche Wechselwirkungen auftreten, d. h. der Luftdruck kann unabhängig von der Lage ober- oder unterhalb der Erdoberfläche mit der barometrischen Höhenformel abgeschätzt werden. Der Atmosphärendruck hat eine kleine Schwankungsbreite und die Schwankungen erfolgen nicht abrupt. Aufgrund der geringen Druckunterschiede zwischen Atmosphäre und Bodenluft kann die Verzögerung der Durchströmungsgeschwindigkeit in Böden vernachlässigt werden. Dementsprechend hat der Atmosphärendruck keinen nennenswerten Einfluss auf die zusätzlich von unzähligen Mistviechern durchwühlte Erdoberfläche. In einem Bodenprofil ist die höchste Grund- bzw. Schichtwasseroberfläche die erste Grenzfläche, auf die der Atmosphärendruck im vollen Umfang wirkt.

Eine Abhängigkeit des Steifemoduls E_S vom Luftdruck σ_{at} kann nicht belegt werden. Damit ist die Behauptung im GBT 2017 unbegründet, dass Gleichung (12) eine empirische Beziehung darstellt. Ohne das Einfügen des Luftdrucks σ_{at} wäre es mit Gleichung (12) nicht möglich, die Einheit des Steifemoduls E_S' korrekt darzustellen. Das Einfügen des Luftdrucks ist eine Manipulation. Ob diese von Ohde selbst durchgeführt wurde, lässt sich nicht belegen.

Bei einer Manipulation ist auszuschließen, dass die unbegründet eingefügte Größe andere Größen der Gleichung beeinflusst. Der Steifemodul E_S ist eine vom Luftdruck σ_{at} unabhängige Größe (Abbildung 7) und die beiden Größen sind Spannungen. Damit ist der Luftdruck für die Manipulation geeignet. Die einzige plausible Erklärung für das Einfügen des Luftdrucks ist, eine korrekte Darstellung der Einheiten zu erzwingen um eine Aufwertung der Gleichung (12) zu erreichen.

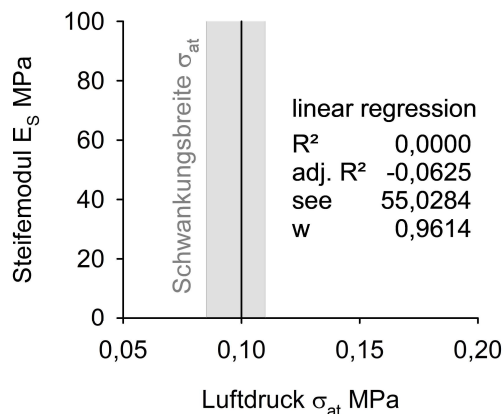


Abbildung 7) Darstellung der Abhängigkeit des Steifemoduls E_S vom Luftdruck σ_{at}

Der Steifemodul E_S ist nicht vom Luftdruck σ_{at} abhängig.

Die angegebene Schwankungsbreite des Luftdrucks σ_{at} bezieht sich auf Extremwerte (Bezugshöhe ist die Meereshöhe). Bei der Darstellung der Schwankungsbreite ist zu beachten, dass die Skalierung der Abszissen- und Ordinatenwerte sich mit Bezug auf die Abstände der Werte um Faktor 800 unterscheiden. Damit ist die Darstellung der Schwankungsbreite in der Grafik deutlich größer als sie eigentlich ist, d. h. die Schwankungsbreite ist nicht relevant.

Die Größe Luftdruck σ_{at} ist aus Gleichung (12) zu entfernen. Die Rückabwicklung der Manipulation führt zwangsläufig zu Regelverletzungen. Die bereinigte Gleichung (10) ist der Ausgangspunkt für eine in Schritten durchgeführte Betrachtung. Diese erfolgt mit dem Ziel, das Einsetzen des Luftdrucks σ_{at} nachzuvollziehen. Ohne Luftdruck entspricht die Gleichung (10) exakt der Gleichung, die in OHDE 1939 tatsächlich dargestellt wird.

$$E_S' = v \cdot (\sigma')^w \quad \text{mit } 0 \leq w \leq 1$$

Regelverletzung

R1 bei $w \neq 1$

R1 in Abhängigkeit von v (10)

Problem mit dem variablen Steifeexponenten w : Wenn sich der Steifeexponent von $w = 1$ unterscheidet, wird immer eine Einheit dargestellt, die nicht der Einheit der mechanischen Spannung entspricht (10).

Problembeseitigung: Durch Einsetzen von σ_{at} wird ein gemeinsamer Bruch mit der Spannung σ' erzeugt. Das Ergebnis der zuerst auszuführenden Division hat immer die Größe der Dimension Zahl und es kann ein beliebiger Exponent w verwendet werden, ohne die Regel R5 zu verletzen (13).

$$\left(\frac{\sigma'}{\sigma_{at}}\right)^w \quad \begin{array}{l} \text{Regelverletzung} \\ \text{R7} \end{array} \quad (13)$$

Problem mit unterschiedlichen Einheiten auf beiden Seiten der Gleichung (14): Durch Einsetzen von σ_{at} in den Bruch und die Verwendung des Steifebeiwerts v , der als Größe der Dimension Zahl definiert wird, ist die rechte Seite der Gleichung ein Term mit Größe der Dimension Zahl. Auf der linken Seite der Gleichung ist der Steifemodul E_S' eine Größe mit Einheit der mechanischen Spannung (15).

$$E_S' = v \cdot \left(\frac{\sigma'}{\sigma_{at}}\right)^w \quad \begin{array}{l} \text{Regelverletzung} \\ \text{Pa} \neq 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} (14) \\ (15) \end{array}$$

Problembeseitigung: Durch das Einsetzen des Luftdrucks σ_{at} vor dem Bruch wird endgültig eine korrekte Darstellung der Einheiten erzwungen.

$$E_S' = v \cdot \sigma_{at} \cdot \left(\frac{\sigma'}{\sigma_{at}}\right)^w \quad \begin{array}{l} \text{Regelverletzung} \\ \text{OHDE 1939} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{R7, R1 in Abhän-} \\ \text{gigkeit von } v \end{array} \quad (12)$$

Mit Gleichung (16) wird der Grund dargestellt, warum in Gleichung (12) die Verletzung der Regel R1 in Abhängigkeit zum Steifebeiwert v steht. Obwohl der Steifebeiwert v als Größe der Dimension Zahl definiert ist, enthält Gleichung (16) mit dem Spitzendruck q_c Pa eine Spannung. Das Einsetzen des Steifebeiwerts v nach (16) in die dafür vorgesehene Gleichung (17) führt immer zu einer Regelverletzung (18) und immer zu einem falschen Ergebnis.

$$\begin{array}{l} \text{für (17): } v = f_1 + f_2 \cdot q_c \quad (14) \text{ im GBT 2017} \\ E_S' = v \cdot \sigma_{at} \cdot \left(\frac{\sigma'}{\sigma_{at}}\right)^w = (\sigma_{q_c'} + f_1) \cdot \sigma_{at} \cdot \left(\frac{\sigma'}{\sigma_{at}}\right)^w \\ \text{Pa} \neq \text{Pa}^2 + \text{Pa} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Regelverletzung} \\ \text{R1, führt in (12)} \\ \text{immer zu} \\ \downarrow \\ \text{R1} \end{array} \quad \begin{array}{l} (16) \\ (17) \\ (18) \end{array}$$

Anmerkung zu OHDE 1939 (überarbeitet)

Die Gleichung (12) nach Ohde wird im GBT 2017 auch als überarbeitete Variante (19) dargestellt. Es wurden die Größe Referenzwert des Steifemoduls $E_{S,ref}$ und die Größe Referenzspannung σ_{ref} eingeführt. Dafür entfällt der Steifebeiwert v in (12). Aus den Randbedingung (20) bis (22) wird die Information entnommen, dass es sich bei der Überarbeitung um eine einfache Umbenennung handelt, die inhaltlich nichts Wesentliches ändert.

$$E_S' = v \cdot \sigma_{at} \cdot \left(\frac{\sigma'}{\sigma_{at}} \right)^w = E_{S,ref} \cdot \left(\frac{\sigma'}{\sigma_{ref}} \right)^w \quad \text{Seite 182 im GBT 2017} \quad (19)$$

$$\sigma_{at} \quad \text{atmosphärischer Luftdruck } (\sigma_{at} = 100 \text{ kPa} = 1 \text{ bar}) \quad (20)$$

$$\sigma_{ref} \quad \text{Bezugsspannung (meist } \sigma_{ref} = \sigma_{at} \text{)} \quad (21)$$

$$E_{S,ref} \quad \text{Steifemodul bei der Bezugsspannung } \sigma' = \sigma_{ref} \quad (22)$$

Die Referenzspannung σ_{ref} und der Referenzwert des Steifemoduls $E_{S,ref}$ werden u. a. in geotechnischen Modellierungen angewendet. Hierbei wird die Vorgehensweise für den Referenzwert des Steifemoduls $E_{S,ref}$ auch auf andere elastische Konstanten übertragen (Referenzwert des Schubmoduls G_{ref} , Referenzwert des Elastizitätsmoduls E_{ref} etc.).

GBT 2017 (1968 bis 1984)

Die Gleichungen (23) bis (26) sind ebenfalls Korrelationen auf Basis des Spitzendrucks q_c Pa. In transzendente Funktionen können ausschließlich Größen der Dimension Zahl eingesetzt werden. Das Logarithmieren von physikalischen Größen mit Einheit ist eine unzulässige Rechenoperation.

	Regelverletzung	
$I_D = e_1 + e_2 \cdot \log q_c$ (8) im GBT 2017	R3	(23)
$\varphi' = 26,8 + 4,5 \cdot \ln q_c \pm 1^\circ$ (9) im GBT 2017	R3	(24)
$\varphi' = 23 + 13,5 \cdot \log q_c$ (10) im GBT 2017	R3	(25)
$v = f_1 + f_2 \cdot \log q_c$ (13) im GBT 2017	R3	(26)

HOLZLÖHNER 1985 (in MALLWITZ 1992)

Eine weitere Möglichkeit den spannungsabhängigen (tiefenabhängigen) Steifemodul E_S' zu ermitteln wurde von HOLZLÖHNER 1985 eingeführt. Sie basiert auf der Darstellung einer variablen physikalischen Größe, die als Mischmodul H bezeichnet wird. Die Verfahrensweise wird im Forschungsbericht 188 der Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM) von MALLWITZ 1992 im Grundlagenteil wie folgt erläutert: „Der Mischmodul H nimmt dabei je nach vorherrschender Deformation entweder die Dimension einer Wichte an oder die Dimension einer Spannung. H hat somit die Dimension $\text{kN/m}^{2+\alpha}$ mit $0 \leq \alpha \leq 1$.“

Die Gleichung (27) stellt den zu prüfenden Lösungsansatz nach HOLZLÖHNER 1985 dar. Der Mischmodul H ist eine variable Größe zwischen Spannung und Wichte. Welche physikalische Größe vorliegt ist vom Exponenten α abhängig. In der Gleichung (27) aus MALLWITZ 1992 wird der Elastizitätsmodul E abgebildet, jedoch wird im Textteil wiederholt ein „*ödometrischer Deformationsanteil*“ beschrieben. Daraus ergibt sich die Information, dass in Gleichung (27) der tiefenabhängige Steifemodul E_S' dargestellt werden muss. Die Gleichung (28) berücksichtigt alle im Textteil beschriebenen Zusammenhänge.

$$E = H \cdot z^\alpha \quad (72) \text{ in MALLWITZ 1992} \quad (27)$$

$$E_S' \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = H \frac{\text{kN}}{\text{m}^{2+\alpha}} \cdot z \text{ m}^\alpha \quad \text{mit } 0 \leq \alpha \leq 1 \text{ und } \alpha \in \mathbb{R} \quad (28)$$

Bei Anwendung der Potenzgesetze erhält man mit der Vorgehensweise nach HOLZLÖHNER 1985 immer ein Ergebnis mit der Einheit der physikalischen Größe der mechanischen Spannung. Dieser Zusammenhang ist vom Exponenten α unabhängig.

$$\frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kN}}{\text{m}^{2+\alpha}} \cdot \text{m}^\alpha = \frac{\text{kN}}{\text{m}^2 \cdot \text{m}^\alpha} \cdot \text{m}^\alpha \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R} \quad (29)$$

Die Zielgröße (Ergebnis) der Gleichungen ist der tiefenabhängige Steifemodul E_S' . Der Begriff beinhaltet die Information zu zwei erforderlichen Eingangsgrößen, eine Angabe zur Tiefe z und eine Angabe zum Steifemodul E_S bzw. zum Mischmodul H nach HOLZLÖHNER.

Unter der Bedingung $\alpha = 0$ gibt es eine Eingangsgröße des Mischmoduls, dafür aber keine Eingangsgröße der Tiefe. Die Eingangsgröße Mischmodul wird mit der korrekten Einheit der mechanischen Spannung dargestellt. Die Eingangsgröße Mischmodul kann jedoch keiner Tiefe, sondern nur der Zahl 1 zugeordnet werden, d. h. die Zielgröße des tiefenabhängigen Steifemoduls E_S' ist nicht von der Tiefe abhängig und entspricht immer der Eingangsgröße des Mischmoduls H .

$$\frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kN}}{\text{m}^{2+\alpha}} \cdot \text{m}^\alpha = \frac{\text{kN}}{\text{m}^2 \cdot \text{m}^0} \cdot \text{m}^0 = \frac{\text{kN}}{\text{m}^2 \cdot 1} \cdot 1 \quad \text{mit } \alpha = 0 \quad (30)$$

$$x^0 = 1 \text{ und } \dim(x)^0 = 1 \quad \text{mit } x \in \mathbb{R} \text{ und } x \neq 0$$

Unter der Bedingung $\alpha = 1$ hat die Tiefe eine korrekte Einheit. Die zweite Eingangsgröße ist eine Wichte und keine mechanische Spannung. Die Wichte kann der Tiefe zugeordnet werden. Das Ergebnis ist der Überlagerungsdruck $\sigma_{\bar{u}}$ und nicht der tiefenabhängige Steifemodul E_S' .

$$\frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kN}}{\text{m}^{2+\alpha}} \cdot \text{m}^\alpha = \frac{\text{kN}}{\text{m}^2 \cdot \text{m}^1} \cdot \text{m}^1 = \frac{\text{kN}}{\text{m}^3} \cdot \text{m} \quad \text{mit } \alpha = 1 \quad (31)$$

$$x^1 = x \text{ und } \dim(x)^1 = \dim(x) \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

In MALLWITZ 1992 wird behauptet, dass die besten Ergebnisse auf Grundlage eines Exponenten $\alpha = 0,5$ ermittelt werden. Die Eingangsgröße Tiefe entspricht der physikalischen Größe der Länge l . Die Länge l hat die Einheit Meter m . Die dargestellte Einheit $m^{0,5}$ ist keine Einheit der Länge (32). Die Eingangsgröße Mischmodul H enthält im Nenner die physikalische Größe des Flächeninhalts A . Der Flächeninhalt A hat die Einheit Quadratmeter m^2 . Die dargestellte Einheit $m^{2,5}$ ist keine Einheit des Flächeninhalts (32).

$$\frac{\text{kN}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kN}}{\text{m}^{2+\alpha}} \cdot \text{m}^\alpha = \frac{\text{kN}}{\text{m}^2 \cdot \text{m}^{0,5}} \cdot \text{m}^{0,5} = \frac{\text{kN}}{\text{m}^{2,5}} \cdot \text{m}^{0,5} \quad \text{mit } \alpha = 0,5 \quad \text{Regelverletzung R5} \quad (32)$$

Die Anwendung der Potenzgesetze auf Einheiten physikalischer Größen führt in der dargestellten Form an keinem Punkt zu einem sinnvollen Ergebnis. Die Anwendung aller zwischen $0 < \alpha < 1$ liegenden Exponenten ergibt Angaben zu Einheiten, die nicht den regulären Einheiten der in den Gleichungen dargestellten physikalischen Größen entsprechen. Mit $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ werden andere Größen als der tiefenabhängige Steifemodul E_S' ermittelt.

Der Lösungsansatz von HOLZLÖHNER 1985 ist kreativ. Mit der ausgeführten Absicherung der Einheiten der Ergebnisse (29) ist es ihm gelungen, die in der Literatur fest verankerten Regeln R1 bis R4 auszuhebeln. Der Preis für diese Vorgehensweise ist ein Widerspruch in den Aussagen. Die beiden Eingangsgrößen H und z werden entweder nicht mit den korrekten Einheiten dargestellt oder es werden die falschen Größen berechnet. Die Gleichungen (30) und (31) werden als Regelverletzung gewertet. In der Zusammenfassung der Regelverletzungen wird die Wertung in die Kategorie L (Logik) eingeordnet.

Das Beispiel zeigt, wie wichtig es ist, sich im Rahmen einer Dekonstruktion mit der Herleitung von Größen auseinanderzusetzen. Die Schwierigkeit hierbei ist oft, bei der Recherche die entsprechenden Literaturgrundlagen zu finden.

Der spannungsabhängige Steifemodul nach HOLZLÖHNER 1985 wird seit längerer Zeit in einer reduzierten Form genutzt. Es hat sich ein Exponent von $\alpha = 0,5$ durchgesetzt und dieser wird nicht auf den Steifemodul E_S sondern ausschließlich auf die Tiefe z angewendet. Die Gleichung (33) wird auch aktuell und häufig in verschiedensten Zusammenhängen dargestellt und auch für Berechnungen mit anderen Spannungen eingesetzt.

$$E_S' = E_S \cdot \sqrt{z} \quad \text{Regelverletzung} \quad (33)$$

$$\text{Pa} \neq \text{Pa}\sqrt{\text{m}} \quad \text{R1} \quad (34)$$

Prüft man die Einheiten der physikalischen Größen ist festzustellen, dass $\text{Pa}\sqrt{\text{m}}$ keine Einheit der mechanischen Spannung ist (34). Mit der Gleichung (33) nach HOLZLÖHNER 1985 wird nicht der spannungsabhängige Steifemodul, sondern eine Größe mit Einheit der Bruchzähigkeit K_{Ic} bestimmt. Es wird ausgeschlossen, dass mit Gleichung (33) tatsächlich die Bruchzähigkeit K_{Ic} ermittelt werden kann. Die Bruchzähigkeit (35) ist keine elastische Größe.

$$K_{Ic} = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (35)$$

$$\text{Pa} \cdot \sqrt{\pi \cdot \text{m}} = \text{Pa}\sqrt{\text{m}} \quad (36)$$

Bemerkenswert ist, dass Ohde mit den Gleichungen (37) und (38) den Ansatz (33) nach HOLZLÖHNER 1985 bereits 1939 in einer ähnlichen Form umsetzt: „Setzt man näherungsweise das Raumgewicht (hier: γ) des Bodens als konstant voraus, so gilt ... auch für die Abhängigkeit der Werte V (hier: E_S') von der Tiefe z , so daß man anschreiben kann.“ OHDE 1939

	Regelverletzung	
$V = v_z \cdot z^w$ OHDE 1939	R1 bei $w \neq 1$	(37)

	Regelverletzung	
für (37): $v_z = v \cdot \gamma^w$ OHDE 1939	R1 bei $w \neq 1$	(38)

Aus der Vergleichbarkeit der Ansätze nach OHDE 1939 (37) und HOLZLÖHNER 1985 (33) lässt sich schlussfolgern, dass man sich in der Geotechnik bei der Lösung von Fragestellungen zum spannungsabhängigen Steifemodul E_S' seit Jahrzehnten im Kreis dreht, ohne eine wissenschaftlich begründete Antwort zu finden, mit der die Existenz des spannungsabhängigen Steifemoduls E_S' belegt werden kann.

REITMEIER 2018

Das folgende Beispiel zur Ermittlung des Steifebeiwerts ν (16) für die Bestimmung des spannungsabhängigen Steifemoduls wäre als Einzelfall ignoriert und nicht in dieser Arbeit dargestellt worden. Leider ist das Beispiel kein Einzelfall und die Geotechnik ist immer noch ein für die Sicherheit verantwortliches Fach. In den Gleichungen (39) bis (42) werden die Eingangsgrößen für Beispiel 1 aus der Publikation von REITMEIER 2018 aufgezählt.

Spitzendruck	$q_c = 0,6 \text{ MPa}$	(39)
--------------	-------------------------	------

Überlagerungsspannung	$\sigma_{\ddot{u}} = 153 \text{ kPa}$	(40)
-----------------------	---------------------------------------	------

Spannungsänderung infolge Bauwerkslast	$\Delta\sigma_z = 30 \text{ kPa}$	(41)
--	-----------------------------------	------

Steifeexponent	$w = 0,7$	(42)
----------------	-----------	------

Die Gleichung (16) ist die Berechnungsgrundlage für den Steifebeiwert ν aus dem GBT 2017. Gleichung (43) ist die unverändert dargestellte Berechnung des Steifebeiwerts ν durch REITMEIER 2018.

	Regelverletzung	
$\nu = f_1 + f_2 \cdot q_c$ (14) im GBT 2017	R1	(16)
$\nu = 15,2 \cdot q_c + 50 = 15,2 \cdot 0,6 + 50 = 59,12$	R1, R2, R6	(43)

Bei Verwendung von Größen, die aufgrund von Alltagserfahrungen allgemein verständlicher sind, lässt sich die Berechnung in Gleichung (43) wie folgt beschreiben: Ein Haus ist 9,12 m hoch. Auf dem Haus sitzen 50 Tauben. Das ergibt eine Gesamtanzahl von 59,12 Tauben. Die Nichtbeachtung der Größenordnung von Einheiten (39) wird in dieser Beschreibung nicht berücksichtigt.

Der Berechnungsweg wird für den Vergleich bis zum Zwischenergebnis in Gleichung (45) fortgesetzt. Danach wird die Prüfung von Beispiel 1 aus REITMEIER 2018 abgebrochen.

	Regelverletzung	
$E_S' = \nu \cdot \sigma_{at} \left(\frac{\sigma_{\ddot{u}} + 0,5 \cdot \Delta\sigma_z}{\sigma_{at}} \right)^w$	R1	(44)
$E_S' = 59,12 \cdot 100 \left(\frac{153 + 0,5 \cdot 30}{100} \right)^{0,70} = 8500 \text{ kPa}$		(45)

Wird die Berechnung entsprechend den Gleichungen aus REITMEIER 2018 und unter Beachtung der Regeln der Mathematik und Physik ausgeführt, erhält man auf dem Rechenweg (46) bis (48) das als Gleichung (49) dargestellte Ergebnis.

	Regelverletzung	
$\nu = 15,2 \cdot 0,6 \text{ MPa} + 50 = 9120 \text{ kPa} + 50$		(46)
$E_S' = (9120 \text{ kPa} + 50) \cdot 100 \text{ kPa} \cdot \left(\frac{153 \text{ kPa} + 0,5 \cdot 30 \text{ kPa}}{100 \text{ kPa}} \right)^{0,70}$		(47)
$E_S' = (9120 \text{ kPa} + 50) \cdot 144 \text{ kPa}$		(48)
$E_S' = 1313280 \text{ kPa}^2 + 7200 \text{ kPa}$	R1	(49)

Es ist festzustellen, dass sich die Lösungen (45) und (49) erheblich unterscheiden. Hierbei liegt das Ergebnis von REITMEIER 2018 trotz der Berechnung in (43) in einer plausiblen Größenordnung (45) und entspricht mit hoher Wahrscheinlichkeit den Randbedingungen des dargestellten Bauvorhabens. Das auf korrektem Rechenweg ermittelte Ergebnis (49) ist erwartungsgemäß inakzeptabel (siehe Erläuterungen zu den Gleichungen 16 bis 18). Das Beispiel von REITMEIER 2018 hinterlässt offene Fragen.

Regelverletzungen

Aus den Angaben in Tabelle 3 können keine verallgemeinernde Aussagen zur Häufigkeit von bestimmten Regelverletzungen abgeleitet werden.

Tabelle 3: Regelverletzungen im Kapitel 2.5. Dekonstruktion

Regeln aus Punkt 2.3.1.	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	L	Anzahl der Regelverletzungen
mit Mehrfachnennungen	15	2	5	0	1	1	2	2	28
ohne Mehrfachnennungen	8	2	5	0	1	1	3	2	22
Steifemodul ¹⁾	7	2	1	0	1	1	2	2	16
OHDE 1939 ²⁾	5	2	1	0	1	1	0	2	12

¹⁾ ohne Mehrfachnennungen und mit Bezug zum spannungs- bzw. tiefenabhängigen Steifemodul E_S'

²⁾ Zählung für die Sichtweise: Die Gleichung (12) von OHDE 1939 wurde nicht manipuliert.

Es wurden der erste Lösungsansatz, zwei häufig genutzte Lösungsansätze, eine kurze Aufzählung von Gleichungen und ein Berechnungsbeispiel betrachtet. In Tabelle 3 werden die hierbei festgestellten Regelverletzungen zusammengefasst. Bei ausschließlicher Berücksichtigung der Regelverletzungen, die im Zusammenhang mit der zu dekonstruierenden Größe spannungsabhängiger Steifemodul E_S' stehen, ergibt sich eine Anzahl von 16 Regelverletzungen. Es gibt keinen Ansatz ohne Regelverletzungen. Das weist deutlich auf bestehende Probleme in den bodenmechanischen Grundlagen der Geotechnik hin.

Schlussfolgerung aus der Dekonstruktion

Auch mit verschiedenen Lösungsansätzen ist es seit vielen Jahrzehnten nicht gelungen, die Existenz der Größe spannungsabhängiger Steifemodul E_S' mit einer hinreichenden Begründung zu belegen. Die Grundlage für die Einführung der Größe ist die allgemein anerkannte Beobachtung, dass die Steifigkeit eines Bodens unter der Voraussetzung gleichbleibender Randbedingungen mit zunehmender Tiefe größer wird. Bei der Erarbeitung eines neuen Lösungsansatzes ist zu prüfen, ob der Steifemodul E_S eine geeignete Größe für die gesuchte Beschreibung einer Spannungs- bzw. Tiefenabhängigkeit ist und welche Alternativen zur Verfügung stehen würden. Bei der Suche nach Antworten ist immer zu berücksichtigen, dass die zu belegende Existenz von unbekanntem Größen und Abhängigkeiten im Ergebnis auch verneint werden kann.

Wenn aus dem Ergebnis einer Dekonstruktion ersichtlich wird, dass sich Fehler über große Zeiträume als Fehlerketten fortsetzen und in denen sich die gleichen Vorgehensweisen wiederholen, dann ist das eine wertvolle Information. Es liegt ein großer Unterschied zwischen den Aussagen: „Das funktioniert nicht“ und „Das hat noch nie funktioniert“. Außerdem ist es angenehmer aus den Fehlern anderer zu Lernen als aus den eigenen Fehlern lernen zu müssen. Das jeder Mensch Fehler macht und Trugschlüssen unterliegt ist unbestritten. Deshalb ist es ein erheblicher Vorteil, wenn Methoden zur Fehlererkennung und Fehlervermeidung als Konzept vorliegen.

2.6. Konstruktion

Eine Konstruktion erfolgt nach der Dekonstruktion. Eine Konstruktion erfordert für jede Fragestellung eine angepasste Vorgehensweise. Nur zu Beginn einer Konstruktion ähneln sich die Arbeitsschritte:

- Übernahme der Schlussfolgerungen aus der Dekonstruktion.
- Welche weiteren Punkte oder Versuche etc. werden von den Fragestellungen berührt?
- Suche nach bereits vorhandenen Lösungen, die der Fragestellung und den übernommenen Schlussfolgerungen entsprechen könnten und Suche nach ersten, alternativen Lösungsansätzen in der Literatur (erste Datenerhebung).

Der Untersuchungsgegenstand aus der Dekonstruktion wird beibehalten und die ersten Arbeitsschritte einer Konstruktion werden kurz am Beispiel für den spannungsabhängigen Steifemodul E_S' demonstriert. Die Schlussfolgerung aus Punkt 2.5. werden hier nicht wiederholt dargestellt.

Zu Beginn der Konstruktion wird nach bereits vorhandenen, alternativen Konzepten gesucht, die der gesuchten Lösung nahestehen. Eines dieser Konzepte könnte die Berechnung der Grenztiefe für Setzungsberechnungen sein. Hier wäre am Modell von zwei benachbarten Bodensäulen zu klären, wie das Verformungsverhalten in unterschiedlichen Belastungssituationen einzuordnen ist und es ist zu prüfen, wie viele Verformungsrichtungen zur Erklärung benötigt werden. Der Steifemodul E_S wird über eine begrenzte Seitenausdehnung definiert. Das entspricht einer (vertikalen) Verformungsrichtung. Die Betrachtungen zur Grenztiefe könnten ergeben, dass zwei maßgebliche Verformungsrichtungen zu berücksichtigen sind.

Der seit langer Zeit bewährte Standardversuch zum Thema ist der Oedometerversuch nach DIN EN ISO 17892-5 (einaxialer Kompressionsversuch). Mit diesem wird der Oedometermodul E_{oed} bestimmt, der mit dem Steifemodul E_S bzw. dem Longitudinalmodul M vergleichbar ist. Die Existenz und die Möglichkeiten des Versuchs sind bei allen Überlegungen zu berücksichtigen.

Wenn der Steifemodul E_S die Standardgröße bei der Ausführung erdstatischer Nachweise ist, dann ist es am wahrscheinlichsten einen möglichen Lösungsansatz im Zusammenhang mit dem Steifemodul E_S zu finden. In der Unterlage von BRAND, BASTIAN, HILLMANN 2011 zur Berechnung von Baugruben mit dem Bettungsmodulverfahren nach EB 102, ist mit Gleichung (50) und den zugehörigen Randbedingungen (51) ein interessanter Ansatz enthalten. Hier wird der horizontale Steifemodul E_{Sh} unter Anwendung eines Faktors b aus dem vertikalen Steifemodul $E_{Sv} = E_S$ ermittelt. Der Faktor b kann auch als einfache Funktion der Querdehnzahl ν dargestellt werden (52). Die Wertebereiche für b und ν stimmen exakt überein (53). Die Beachtung der theoretischen Grundlagen erfordert die Berücksichtigung des Definitionsbereichs der Querdehnzahl ν (54).

$$E_{Sh} = b \cdot E_{Sv} \quad (50)$$

$$\text{nach EB 102 vorgegebener Faktor } b: 0,5 \leq b \leq 1 \quad (51)$$

$$\text{Faktor } b \text{ über Querdehnzahl } \nu: b = 1 - \nu \quad (52)$$

$$\text{Wertebereich: } 0,5 > \nu > 0 \quad 0,5 \leq b \leq 1 \quad (53)$$

$$\text{Definitionsbereich: } 0,5 > \nu > 0,2 \quad 0,5 \leq b \leq 0,8 \quad (54)$$

Für den in Gleichung (52) enthalten Term: $1 - \nu$ sind Gleichungen des elastisch-isotropen Falls zu suchen, die diesen Term ebenfalls enthalten. Mit der elastischen Konstante biaxialer Elastizitätsmodul (56), dem Verhältnis aus den elastischen Konstanten λ und M (57) und dem Erdruhedruckbeiwert K_0 auf Grundlage der Querdehnzahl ν (58) liegen mehrere Ergebnisse vor, die jeweils unterschiedliche Betrachtungs- und Vorgehensweisen sowie die Einbeziehung anderer Größen ermöglichen (Reibungswinkel φ_E etc.).

$$\text{Anbindung an elastische Konstanten und Kennwerte gesucht für: } 1 - \nu \quad (55)$$

$$\text{biaxialer Elastizitätsmodul: } H = \frac{E}{1 - \nu} \quad (56)$$

$$1. \text{ Lamé-Konstante } \lambda \text{ und Longitudinalmodul } M: \frac{c_{12}}{c_{11}} = \frac{\lambda}{M} = \frac{E}{1 + \nu} \cdot \frac{\nu}{1 - 2\nu} = \frac{\nu}{1 - \nu} \quad (57)$$

$$\text{Erdruhedruckbeiwert: } K_0 = \frac{\nu}{1 - \nu} \quad (58)$$

Der biaxiale Elastizitätsmodul H ist in der Literatur eine selten abgebildete, elastische Konstante. Zur Gewährleistung der Vergleichbarkeit wird mit den Gleichungen (59) und (60) die Beziehung zum Longitudinalmodul M und damit der Anschluss an den Steifemodul E_S hergestellt. Durch die Möglichkeit der Umrechnung ist die Vergleichbarkeit des Oedometermoduls E_{oed} auch bei einem Lösungsansatz über eine zweiachsige Verformung sichergestellt.

$$H = M \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{(1 - \nu)^2} \quad (59)$$

$$M = H \frac{(1 - \nu)^2}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (60)$$

An dieser Stelle wird die Demonstration der ersten Arbeitsschritte einer Konstruktion am Beispiel des spannungsabhängigen Steifemoduls E_S' abgebrochen. Mit den dargestellten Ergebnissen der ersten Datenerhebung wurden bislang keine weiteren Schritte unternommen die offenen Fragestellungen zu klären. Ob sich aus den Ergebnissen der Suche zielführende Informationen ableiten lassen, ist unklar. Bei einer Konstruktion enden auch vielversprechende Anfänge oft in einer Sackgasse.

2.7. Erkenntnistheoretischer Exkurs

2.7.1. Wissenschaft oder Pseudowissenschaft?

Diese Arbeit ist eine naturwissenschaftliche Arbeit. Mit einer selektiven Auswahl an Definitionen aus geisteswissenschaftlichen Disziplinen ist es selbstverständlich nicht möglich, das Wissen, den Kenntnisstand und die Fähigkeiten zu simulieren, die ein Geisteswissenschaftler in einem langjährigen und anspruchsvollen Studium erwirbt. Dem steht entgegen, dass die erkenntnistheoretische Betrachtung einer Disziplin eine Aufgabe der Disziplin selbst ist. Keine Disziplin wird diese Aufgabe für eine andere Disziplin übernehmen. Diese Aufgabe liegt ausschließlich im Verantwortungsbereich der eigenen Disziplin.

Für Personen mit Bezug zum Fach Geotechnik wird die Aufgabe gestellt, nach eigenem Ermessen zu prüfen, ob die Definition des Begriffs: „Pseudowissenschaft“ aus der Arbeit „*Why astrology is a pseudoscience*“ von THAGARD 1978 auf die Bodenmechanik angewendet werden kann oder nicht. Wird nach der Prüfung festgestellt, dass mit der wissenschaftlich anerkannten Definition von THAGARD 1978 die Zustände im Fach Geotechnik hinreichend genau beschrieben werden können, ist eine Herstellung der Vergleichbarkeit zwischen Geotechnik und Astrologie denkbar.

Definition Pseudowissenschaft THAGARD 1978

„Die Frage nach dem Vergleich des Erfolgs einer Theorie mit dem anderer Theorien führt das dritte Element der Matrix ein, den historischen Kontext. Die historische Arbeit von KUHN und anderen hat gezeigt, dass eine Theorie im Allgemeinen nur dann verworfen wird, wenn sie über einen langen Zeitraum hinweg mit Widersprüchen konfrontiert war und von einer anderen Theorie in Frage gestellt wurde. Daher müssen wir unter der Überschrift historischer Kontext zwei Faktoren berücksichtigen, die für die Abgrenzung relevant sind: die Leistung einer Theorie im Laufe der Zeit bei der Erklärung neuer Fakten und der Behandlung von Widersprüchen sowie die Verfügbarkeit alternativer Theorien.“

„Wir können nun das folgende Abgrenzungsprinzip vorschlagen:

Eine Theorie oder Disziplin, die vorgibt, wissenschaftlich zu sein, ist dann und nur dann pseudowissenschaftlich, wenn:

- 1) *sie über einen langen Zeitraum hinweg weniger fortschrittlich als alternative Theorien war und vor vielen ungelösten Problemen steht, aber*
- 2) *die Gemeinschaft der Anwender kaum Versuche unternimmt, die Theorie im Hinblick auf die Lösung der Probleme weiterzuentwickeln, sich nicht um Versuche kümmert, die Theorie in Bezug auf andere zu bewerten, und selektiv ist, wenn es darum geht, Bestätigungen und Widerlegungen zu berücksichtigen.*

Die Fortschrittlichkeit ist eine Frage des Erfolgs der Theorie bei der Erweiterung der Anzahl der erklärten Fakten und der gelösten Probleme.“ THAGARD 1978

Zusätzlich wird empfohlen, die Definition des Begriffs: „Fortschrittlichkeit“ auf die Bodenmechanik als Grundlage der Geotechnik anzuwenden.

Zur Orientierung werden abschließend die zwei Abgrenzungskriterien der Definition mit Bezug zum Fach Geotechnik dargestellt:

- Ein wichtiger Punkt für die beschriebene Abgrenzung ist die Frage, ob in der Bodenmechanik alternative Theorien zur Verfügung stehen. Diese Frage ist für die Bodenmechanik als Grundlage der Geotechnik zu beantworten. Das Abgrenzungskriterium kann auch umformuliert werden und es ist dann zu klären, ob in der Bodenmechanik überhaupt eine belastbare Theorie zur Verfügung steht.

- Unter den Punkten 1.2., 2.5., 3.4.5. (Gleichung 130) und 4.3. dieser Arbeit werden Probleme dargestellt, die wichtige Grundlagen des Fachs Geotechnik betreffen. Die dargestellten Probleme sind entweder seit vielen Jahrzehnten bekannt und werden ignoriert oder die Probleme werden über viele Jahrzehnte nicht erkannt. Es ist in einer Gesamtbetrachtung der Bodenmechanik als Grundlage der Geotechnik einzuschätzen, welche Anstrengungen im Laufe der Zeit unternommen wurden, um unbekannte Probleme zu erkennen, bekannte Probleme zu lösen oder alternative Lösungen zu entwickeln. Es ist zusätzlich zu prüfen, ob und wie innerhalb des Fachs auf alternative Vorschläge und Kritik reagiert wird (siehe z. B. DORNECKER 2018 am Beispiel der Lagerungsdichten).

Einige der unter Punkt 2.5. vorliegenden Regelverletzungen können nur unter Berücksichtigung sozialer Faktoren erklärt werden. Auch auf Grundlage von eigenen Beobachtungen wird vermutet, dass in der Geotechnik ein Teil der „Erkenntnisse“ innerhalb von Gruppen in einem sich ständig wiederholenden Prozess der gegenseitigen Bestätigung erzeugt wird. Es wird zusätzlich ein Kreislauf der ständigen Reproduktion der immer gleichen Inhalte aufrechterhalten, der ebenfalls zur gewünschten Bestätigung durch andere Mitglieder der Gruppe führt und Fortschritt und Entwicklung zusätzlich behindert. Die resultierende Selbstbezogenheit schränkt die Wahrnehmung für relevante Ergebnisse aus anderen Disziplinen ein (Punkt 1.2.).

In anderen Fachrichtungen wird die eigene Entwicklung mit erkenntnistheoretischen und wissenschaftshistorischen Betrachtungen analysiert und dokumentiert. In der Geotechnik werden diese Elemente des wissenschaftlichen Arbeitens selten berücksichtigt (historische Betrachtungen mit Bezug zur Geotechnik: z. B. DE BOER 1991 und DE BOER 2004).

2.7.2. Ockhams Rasiermesser

„*Pluralitas non est ponenda sine necessitate.*“ OCKHAM. Eine Vielheit ist ohne Notwendigkeit nicht zu setzen. Wenn mehrere Hypothesen oder Theorien für Erklärungen zur Verfügung stehen, dann wähle die einfachste. Es gilt das Prinzip der Sparsamkeit. Es sind möglichst wenige Hypothesen und Variablen zu verwenden, die miteinander in einer logischen Beziehung stehen müssen. Für gesuchte Lösungen sind einfache Ansätze zu bevorzugen.

Die Grundlage für alle Betrachtungen ist das Hookesche Gesetz. Das Gesetz ist in seinen Ursprüngen über 300 Jahre alt, jedoch beweist eine Vielzahl von aktuellen Veröffentlichungen aus verschiedenen Disziplinen, dass es in keinem Fall veraltet ist und eine breite Anwendung findet. Für die Realisierung der Ziele ist das linear-elastische Hookesche Gesetz im isotropen Fall die einfachste aller in Frage kommenden, theoretischen Grundlagen.

3. Theoretische Grundlagen

3.1. Randbedingungen, Begriffsklärung und Festlegungen

Die Grundlage für alle Betrachtungen ist der isotrope Fall des linear-elastischen Hookeschen Gesetzes.

Für alle Ausführungen und Schlussfolgerungen gelten die hier dargestellten Randbedingungen. Auf Abweichungen von den nachfolgend aufgeführten Regeln wird immer hingewiesen.

Der maßgebliche Fall ist die zentrische Belastung einer horizontalen Fläche mit einer vertikalen Kraft. Eine Belastung unter allseitig gleichem Druck wird nicht betrachtet.

Für die Darstellung von mechanischen Spannungen σ Pa gilt die geotechnische Konvention:

- Druckspannungen $+\sigma$ Pa sind positive Spannungen
- Zugspannungen $-\sigma$ Pa sind negative Spannungen

Es werden ausschließlich hinreichend kleine Verformungen ε betrachtet. Unter Beachtung der Zusatzbedingung hinreichend kleiner Verformungen ε gilt:

- Normalspannungen σ Pa verursachen ausschließlich Verformungen
- Schubspannungen τ Pa verursachen ausschließlich Gleitungen

Wird die Zusatzbedingung hinreichend kleiner Verformungen ε nicht eingehalten, können die Schubspannungen τ auch durch die Normalspannungen σ erzeugt werden. Die so ausgelösten Gleitungen können Scherungen verursachen. Dieser Fall wird hier nicht berücksichtigt.

Eine Vergleichsspannung ist eine mechanische Spannung, welche die Fließbedingung eines Spannungszustands gleichwertig repräsentiert.

Bei allen Ausführungen wird die Kohäsion nicht berücksichtigt, d. h. die Schergerade verläuft im Spannungskreis Druck immer durch den Koordinatenursprung.

Tabelle 4: wesentliche Merkmale des Stoffverhaltens

Stoffverhalten	elastisch	plastisch	viskoelastisch	viskoplastisch
Verformung	reversibel	irreversibel	reversibel	irreversibel
Zeit	nicht zeitabhängig	nicht zeitabhängig	zeitabhängig	zeitabhängig

Die Begriffe Bodenbeschreibung und Bodenreaktion werden oft nicht klar getrennt. In der Bodenklassifikation nach DIN 18196 werden alle grobkörnigen Böden nach beschreibenden Merkmalen klassifiziert. Die resultierenden Klassen sind Bodengruppen. Alle feinkörnigen Böden werden entsprechend dem Plasticity-Chart nach CASAGRANDE 1948 klassifiziert. Die resultierenden Klassen sind Bodenreaktionsgruppen. Die Vergleichbarkeit ist nicht gegeben.

Bindig und nicht bindig sind keine beschreibenden Begriffe, sondern stehen im Zusammenhang mit Bodenreaktionen. Eine nicht bindige Bodenreaktion ist z. B. mit Sofortsetzungen verbunden. Bei einer bindigen Bodenreaktion erfolgen die Setzungen mit einer Zeitverzögerung. Diese Vorgänge lassen sich messen und mit bodenmechanischen Größen darstellen. Aus einer Bodenbeschreibung können keine bodenmechanischen Größen abgeleitet werden.

Ein beschreibender Versuch ist z. B. die Bestimmung der Korngrößenverteilung. Es ist nicht möglich, aus einer Kornverteilung bodenmechanische Parameter zu bestimmen. Mit dem Atterberg-Versuch werden bei der Versuchsdurchführung definierte Bodenreaktionen für die Bestimmung der Wassergehalte an der Fließgrenze w_L bzw. an der Ausrollgrenze w_p erzeugt. Dementsprechend lassen sich aus den Versuchsergebnissen bodenmechanische Parameter herleiten.

In dieser Arbeit wird klar zwischen Bodenbeschreibung und Bodenreaktion unterschieden. Die Begriffe bindig und nicht bindig werden im Sinne einer bindigen Reaktion bzw. nicht bindigen Reaktion von Böden verwendet.

3.2. Hookesches Gesetz für den isotropen Fall

3.2.1. Grundlegende Beziehungen im Hookeschen Gesetz

Das räumliche Hookesche Gesetz für den isotropen Fall wird üblicherweise in Voigtscher Notation als symmetrische 6x6 Matrix in cij-Schreibweise dargestellt. ROCK PHYSICS HANDBOOK 2019

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & & & & c_{44} & 0 \\ & & & & & c_{44} \end{bmatrix} \quad (61)$$

Im kubisch-anisotropen Fall gilt die folgende Bedingung. ROCK PHYSICS HANDBOOK 2019

$$c_{12} = c_{11} - 2c_{44} \quad (62)$$

Die Isotropie ist ein Sonderfall der kubischen-Anisotropie. Im isotropen Fall wird c_{44} in der Matrix (64) zu einer konstanten Größe der Dimension Zahl reduziert (63). Der Grund hierfür wird mit Gleichung (65) dargestellt.

$$c_{44} = \frac{1}{2} \quad (63)$$

Der Elastizitätstensor C ist ein Tensor 4. Ordnung, der im isotropen Fall mit 2 unabhängigen elastischen Konstanten dargestellt werden kann. In Gleichung (64) werden der Elastizitätsmodul E und die Querdehnzahl ν als unabhängige elastische Konstanten verwendet.

$$C = \frac{E}{1 + \nu} \begin{bmatrix} \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} & \frac{\nu}{1 - 2\nu} & \frac{\nu}{1 - 2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} & \frac{\nu}{1 - 2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (64)$$

Der vor der Matrix dargestellte Term entspricht dem doppelten Schubmodul G .

$$\frac{E}{1 + \nu} = 2\mu = 2G \quad (65)$$

Nach dem Ausmultiplizieren der Gleichung (64) ergeben sich die folgenden Beziehungen.

$$C = \begin{bmatrix} \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 \\ & & & & & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (66)$$

Unter den Bedingungen der Gleichung (62) werden nach dem Ausmultiplizieren die nachfolgenden 3 elastischen Konstanten dargestellt.

$$c_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \lambda + 2\mu = M \quad (67)$$

$$c_{12} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \lambda \quad (68)$$

$$c_{44} = \frac{E}{2(1+\nu)} = \mu \quad (69)$$

Das entspricht:

$$C = \begin{bmatrix} M & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & M & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & M & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} \quad (70)$$

3.2.2. Berechnung elastischer Konstanten im isotropen Fall

Der Kompressionsmodul K wird in den nachfolgenden Tabellen nicht dargestellt. Er ist für diese Arbeit ohne Bedeutung, kann aber ohne Weiteres mit den Beziehungen im elastisch-isotropen Fall ermittelt werden. Die Angaben zur Berechnung der elastischen Konstanten wurden aus dem ROCK PHYSICS HANDBOOK 2019 entnommen.

Tabelle 5: Berechnung elastischer Konstanten im isotropen Fall (Teil 1)

berechnet aus		E, G	λ, G	G, M	E, λ
Elastizitätsmodul E	E	E	$\frac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G}$	$\frac{G(3M - 4G)}{M - G}$	E
1. LAMÉ-Konstante λ	λ	$\frac{G(E - 2G)}{3G - E}$	λ	$M - 2G$	λ
2. LAMÉ-Konstante μ bzw. Schubmodul G	G	G	G	G	$(E - 3\lambda) + \frac{\sqrt{(E - 3\lambda)^2 + 8\lambda E}}{4}$
Longitudinalmodul M bzw. Steifemodul E_S	M	$\frac{G(4G - E)}{3G - E}$	$\lambda + 2G$	M	$\frac{E - \lambda + \sqrt{E^2 + 9\lambda^2 + 2E\lambda}}{2}$
Querdehnzahl (Poissonzahl)	ν	$\frac{E}{2G} - 1$	$\frac{\lambda}{2(\lambda + G)}$	$\frac{M - 2G}{2M - 2G}$	$\frac{\sqrt{(E - 3\lambda)^2 + 8\lambda^2}}{4\lambda} - (E + \lambda)$

ROCK PHYSICS HANDBOOK 2019

Tabelle 6: Berechnung elastischer Konstanten im isotropen Fall (Teil 2)

berechnet aus		E, ν	λ, ν	G, ν	M, ν
Elastizitätsmodul E	E	-	$\lambda \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{\nu}$	$2G(1 + \nu)$	$M \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{1 - \nu}$
1. LAMÉ-Konstante λ	λ	$\frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$	-	$G \frac{2\nu}{1 - 2\nu}$	$M \frac{\nu}{1 - \nu}$
2. LAMÉ-Konstante μ bzw. Schubmodul G	G	$\frac{E}{2(1 + \nu)}$	$\lambda \frac{1 - 2\nu}{2\nu}$	-	$M \frac{1 - 2\nu}{2 - 2\nu}$
Longitudinalmodul M bzw. Steifemodul E_S	M	$\frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$	$\lambda \frac{1 - \nu}{\nu}$	$G \frac{2 - 2\nu}{1 - 2\nu}$	-

ROCK PHYSICS HANDBOOK 2019

3.3. Spannungszustände

Alle Ausführungen gelten ausschließlich für den für den kohäsionslosen Fall. Der einaxiale Spannungszustand wird nicht betrachtet. Maßgeblich ist der ebene Spannungszustand. Aus den Gleichungen des räumlichen Spannungszustands werden lediglich die Terme mit Größen der Dimension Zahl verwendet.

3.3.1. Ebener Spannungszustand

Die Richtung von σ_{max} ist die Hauptnormalspannungsrichtung (HNR) zwischen dem Pol des Spannungskreises und σ_{min} . Die Richtung von σ_{min} ist die Hauptnormalspannungsrichtung zwischen dem Pol des Spannungskreises und σ_{max} . Die Richtung von σ_{min} gilt in der Normalspannungshypothese als die Richtung, in der ein Versagen eines Werkstoffs erwartet wird. Zwischen den beiden Hauptnormalspannungsrichtungen liegt immer ein Winkel von 90°.

Gleiches gilt für die Hauptschubspannungsrichtungen (HSR). Diese treten per Definition immer in einem Winkel von 45° zu den Hauptnormalspannungsrichtungen auf (Abb. 8) und sind damit die Winkelhalbierenden zwischen den Hauptnormalspannungsrichtungen.

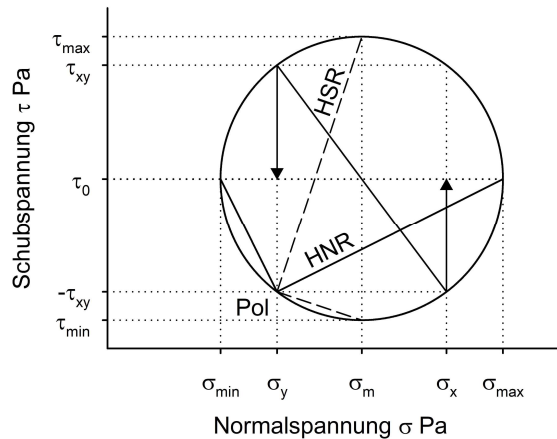


Abbildung 8) Größen, Richtungen und Winkel im Mohrschen Spannungskreis (1 von 3).

Hauptnormalspannungsrichtungen HNR
 Hauptschubspannungsrichtungen HSR

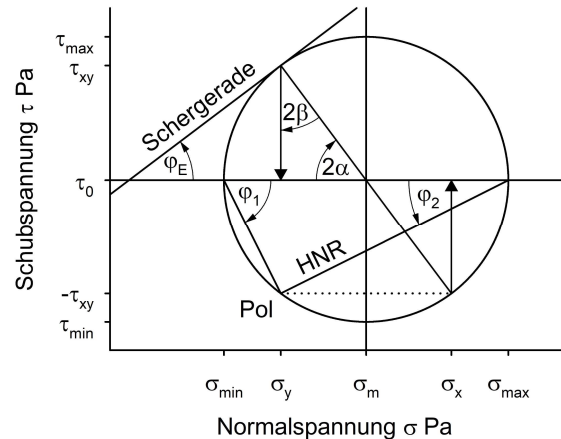


Abbildung 9) Größen, Richtungen und Winkel im Mohrschen Spannungskreis (2 von 3).

Hauptnormalspannungsrichtungen HNR
 Hauptnormalspannungswinkel $\varphi_2 = \alpha$ und φ_1
 Reibungswinkel $\varphi_E = 2\beta$

Innerhalb des Mohrschen Spannungskreises ist ein mathematisch negativer Drehsinn (im Uhrzeigersinn) ein positiver Drehsinn und ein mathematisch positiver Drehsinn (gegen den Uhrzeigersinn) ein negativer Drehsinn. Außerhalb des Spannungskreises gelten für den Drehsinn die mathematischen Konventionen. Der in Abbildung 9 dargestellte Hauptnormalspannungswinkel φ_1 hat einen positiven und der Hauptnormalspannungswinkel φ_2 einen negativen Drehsinn. Die Richtung der Drehung des Reibungswinkels φ_E stimmt zwar mit der Richtung der Drehung von φ_2 überein, liegt aber außerhalb des Spannungskreises und ist damit positiv.

Der Winkel φ ist ein beliebiger Winkel, dessen Bedeutung vom jeweils dargestellten Sachverhalt abhängig ist. Der Reibungswinkel wird in dieser Arbeit mit dem Index E als elastische Größe und mit dem Index K als kriechelastische Größe gekennzeichnet. Der Reibungswinkel φ_E entspricht dem theoretischen Reibungswinkel im elastisch-isotropen Fall.

- beliebiger Winkel (kontextabhängig) φ (71)
- Reibungswinkel ($E \rightarrow$ elastisch) φ_E (72)
- Reibungswinkel ($K \rightarrow$ kriechelastisch) φ_K (73)
- Schüttwinkel ($J \rightarrow$ Jaky) φ_J (74)
- größerer Hauptnormalspannungswinkel φ_1 (75)
- kleinerer Hauptnormalspannungswinkel φ_2 (76)

Die Winkel α und β sind grundlegende Größen. Sie werden aus den Normalspannungen σ_x und σ_y sowie der Schubspannung τ_{xy} berechnet. Die beiden Gleichungen (77) und (78) sind u. a. Teil der Herleitung der Normalspannungshypothese (RANKINE). Gleichung (77) wurde in RANKINE 1858 veröffentlicht. Mit Gleichung (78) wird der 2α gegenüberliegende Winkel 2β berechnet (Abb. 9). Nach der unter (79) dargestellten Winkelbeziehung $\varphi_E = 2\beta$ entspricht die Gleichung (78) der Fließbedingung nach Mohr-Coulomb für den kohäsionslosen Fall (81).

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (77)$$

$$\tan 2\beta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad (78)$$

Die maßgeblichen Beziehungen zwischen den Winkeln (71) bis (78) werden nachfolgend als Gleichung (79) zusammengefasst.

$$\begin{aligned} \varphi_E &= 2\beta \\ \varphi_E &= \varphi_1 - \varphi_2 \\ \varphi_1 &= 2\beta + \alpha \\ \varphi_2 &= \alpha \\ \varphi_2 &< \varphi_E < \varphi_1 \\ \alpha + \beta &= 45^\circ \\ 2\alpha + 2\beta &= 90^\circ \end{aligned} \quad (79)$$

Die Fließbedingung nach Mohr-Coulomb ist eine der ältesten Grundlagen im Fach Geotechnik und wird auch heute noch in weiter Verbreitung zur Lösung verschiedenster Fragestellungen angewendet (80).

$$\tau = \sigma \cdot \tan \varphi_E + c \quad (80)$$

$$\tan \varphi_E = \frac{\tau}{\sigma} \quad (81)$$

Die Fließbedingung nach Mohr-Coulomb kann in vielen verschiedenen Zusammenhängen dargestellt werden. Wenn der Reibungswinkel φ_E in einer Gleichung mit der Tangensfunktion ermittelt wird, werden die dargestellten Beziehungen als Fließbedingung nach Mohr-Coulomb bezeichnet. In dieser Arbeit wird die Kohäsion c nicht berücksichtigt (81). Diese Vorgehensweise wird unter Punkt 3.1. als eine Randbedingung dieser Arbeit formuliert.

Die Veröffentlichungen von RANKINE 1857 und 1858 stellen auch heute noch eine wichtige theoretische Grundlage für das Fach Geotechnik dar. Auch in den Ingenieur- und Materialwissenschaften sind die Lösungen von Rankine aktuell immer noch anerkannte Verfahrensweisen (Normalspannungshypothese etc.). Die von ihm erstellten Gleichungen sind in dieser Arbeit eine wichtige Grundlage und werden zusätzlich von (77) bis (89) mit der Notation dargestellt, die Rankine in seinen Veröffentlichungen von 1857 und 1858 verwendet hat.

RANKINE 1857/1858

$$\tan(2\widehat{\alpha}) = \frac{2p_{xy}}{p_{xx} - p_{yy}} \qquad \tan(2\alpha) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \qquad (77)$$

$$\tan(2\beta) = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \qquad (78)$$

$$D = \frac{p_x - p_y}{2} \qquad \tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \qquad (82)$$

$$M = \frac{p_x + p_y}{2} \qquad \sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \qquad (83)$$

$$\Psi = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \qquad \varphi_1 = 45^\circ + \frac{\varphi_E}{2} \qquad (84)$$

$$\Psi = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \qquad \varphi_2 = 45^\circ - \frac{\varphi_E}{2} \qquad (85)$$

Der passive Erdruckbeiwert K_p wird von RANKINE 1857 als Verhältnis aus maximaler und minimaler Hauptnormalspannung eingeführt (86). Durch Umstellen der Gleichung ergibt sich die bekannte Lösung für die Berechnung des Reibungswinkels φ_E aus den Hauptnormalspannungen (87).

RANKINE 1857/1858

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \qquad K_p = \frac{\sigma_{max} \text{ Pa}}{\sigma_{min} \text{ Pa}} = \frac{1 + \sin \varphi_E}{1 - \sin \varphi_E} = \tan^2 \varphi_1 \qquad (86)$$

$$\sin \varphi = \frac{p_x - p_y}{p_x + p_y} \qquad \sin \varphi_E = \frac{K_p - 1}{K_p + 1} = \frac{\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} - 1}{\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} + 1} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{\sigma_{max} + \sigma_{min}} \qquad (87)$$

Der aktive Erdruckbeiwert K_a wird von RANKINE 1857 als Verhältnis aus minimaler und maximaler Hauptnormalspannung eingeführt (88). Durch Umstellen der Gleichung ergibt sich die bekannte Lösung für die Berechnung des Reibungswinkels φ_E aus den Hauptnormalspannungen (89).

RANKINE 1857/1858

$$\frac{p_y}{p_x} = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \quad K_a = \frac{\sigma_{min} \text{ Pa}}{\sigma_{max} \text{ Pa}} = \frac{1 - \sin \varphi_E}{1 + \sin \varphi_E} = \tan^2 \varphi_2 \quad (88)$$

$$\sin \varphi = \frac{p_x - p_y}{p_x + p_y} \quad \sin \varphi_E = \frac{1 - \frac{1}{K_p}}{1 + \frac{1}{K_p}} = \frac{1 - K_a}{1 + K_a} = \frac{1 - \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}}{1 + \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{\sigma_{max} + \sigma_{min}} \quad (89)$$

Die Gleichung (88) zur Bestimmung des aktiven Erddruckbeiwerts K_a nach RANKINE 1857 ist mit der Gleichung (90) für den Erdruhedruckbeiwert K_0 nach TERZAGHI 1925 identisch.

$$K_0 = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \quad \text{TERZAGHI 1925} \quad (90)$$

Bei der Berechnung des Reibungswinkels φ_E aus den Hauptnormalspannungen sind zwei Fälle zu beachten. Für eine Hauptnormalspannung $\sigma_{min} > 0 \text{ Pa}$ ist Gleichung (91) anzuwenden. Eine Hauptnormalspannung $\sigma_{min} < 0 \text{ Pa}$ erfordert die Anwendung von Gleichung (92).

$$\sin \varphi_E = \frac{\tau_{max}}{\sigma_m} = \frac{\frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}}{\frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{\sigma_{max} + \sigma_{min}} \quad \text{mit } \sigma_{min} > 0 \text{ Pa} \quad (91)$$

$$\sin \varphi_E = \sin(2\beta) = \frac{\sigma_m}{\tau_{max}} = \frac{\frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}}{\frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}} = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{\sigma_{max} - \sigma_{min}} \quad \text{mit } \sigma_{min} < 0 \text{ Pa} \quad (92)$$

Die Gleichung (93) entspricht der Normalspannungshypothese nach Rankine zur Bestimmung der Vergleichsspannung $\sigma_{V(R)}$. Mit der Gleichung (94) werden die Hauptnormalspannungen σ_{min} und σ_{max} bestimmt.

$$\sigma_{V(R)} = \sigma_{max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (93)$$

$$\sigma_{max/min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (94)$$

Die Gleichung (95) entspricht der Schubspannungshypothese (TRESKA) zur Bestimmung der Vergleichsspannung $\sigma_{V(T)}$. Mit Gleichung (96) wird die max. Schubspannung τ_{max} ermittelt.

$$\sigma_{V(T)} = 2\tau_{max} = 2 \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (95)$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (96)$$

3.3.2. Der Reibungswinkel als theoretische Größe

Der Reibungswinkel ist in der Geotechnik eine wichtige Größe, die im Versuch bestimmt werden kann und je nach Versuchssituation unterschiedliche Zahlenwerte mit unterschiedlichen Bedeutungen besitzt (Peak-Reibungswinkel, Restreibungswinkel etc.). In der vorliegenden Arbeit wird der Reibungswinkel ausschließlich als theoretische Größe im elastisch isotropen Fall betrachtet. Eine Kohäsion wird nicht berücksichtigt. Um Missverständnisse zu vermeiden, wird der Reibungswinkel als theoretische Größe beschrieben und definiert. Der theoretische Reibungswinkel wird mit dem Symbol φ_E dargestellt.

Die Gleichung (78) nach RANKINE 1858 wird in Beziehung zum Reibungswinkel φ_E gesetzt und entspricht der Fließbedingung nach Mohr-Coulomb für den kohäsionslosen Fall.

$$\tan \varphi_E = \tan 2\beta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad (78)$$

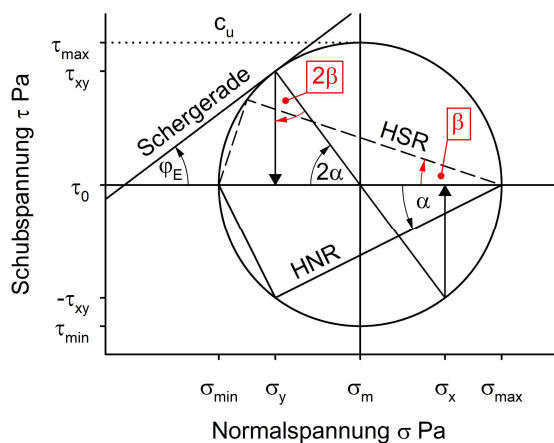


Abbildung 10) Größen, Richtungen und Winkel im Mohrschen Spannungskreis (3 von 3).

Hauptnormalspannungsrichtungen HNR

Hauptschubspannungsrichtungen HSR

Hauptnormalspannungswinkel α

Hauptschubspannungswinkel β

Reibungswinkel $\varphi_E = 2\beta$

undrÄnrierte Scherfestigkeit $c_u = \tau_{max}$

Die Hauptschubspannungsrichtungen HSR werden um 90° im Uhrzeigersinn gedreht abgebildet (Originalposition HSR siehe Abb. 8). Der Drehsinn der Hauptspannungswinkel ist von der Abszisse ausgehend hin zur entsprechenden Richtung.

Die Grundlage der Ausführungen von RANKINE 1857/1858 ist die Fließbedingung nach Mohr-Coulomb für den kohäsionslosen Fall. Die Normalspannungshypothese (RANKINE), die Schubspannungshypothese (TRESKA) und die Fließbedingung nach Mohr-Coulomb sind unter den dargestellten Randbedingungen kompatibel (Punkt 3.1.).

3.3.3. Räumlicher Spannungszustand

Für diese Arbeit sind die Vergleichsspannungen für den räumlichen Spannungszustand nach MOHR-COULOMB und nach DRUCKER-PRAGER als Datenquelle von Bedeutung. In beiden Gleichungen ist der für das weitere Vorgehen maßgebliche Verhältniswert der Fließspannungen m als Größe der Dimension Zahl in insgesamt drei verschiedenen Termen enthalten.

Vergleichsspannung nach Mohr-Coulomb: Berechnung der Vergleichsspannung σ_V nach MOHR-COULOMB im räumlichen Spannungszustand:

$$\sigma_{V(MC)} = \frac{m+1}{2} \max(|\sigma_1 - \sigma_2| + k(\sigma_1 + \sigma_2), |\sigma_1 - \sigma_3| + k(\sigma_1 + \sigma_3), |\sigma_2 - \sigma_3| + k(\sigma_2 + \sigma_3)) \quad (97)$$

Der in der Gleichung zur Berechnung der Vergleichsspannung dargestellte Parameter k entspricht der Fließbedingung nach MOHR-COULOMB.

$$k_{F(MC)} = \frac{m-1}{m+1} \quad (98)$$

Wenn die Fließspannung Druck σ_{FD} und die Fließspannung Zug σ_{FZ} gleich groß sind, reduziert sich die Fließbedingung nach MOHR-COULOMB zur Fließbedingung nach TRESCA.

$$m = \frac{\sigma_{FD}}{\sigma_{FZ}} = 1 \quad (99)$$

Vergleichsspannung nach Drucker-Prager: Berechnung der Vergleichsspannung σ_V nach DRUCKER-PRAGER im räumlichen Spannungszustand:

$$\sigma_{V(DP)} = \left(\frac{m-1}{2}\right)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \left(\frac{m+1}{2}\right)\sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} \quad (100)$$

Wenn die Fließspannung Druck σ_{FD} und die Fließspannung Zug σ_{FZ} gleich groß sind, reduziert sich die Fließbedingung nach DRUCKER-PRAGER zur Fließbedingung nach MISES.

$$m = \frac{\sigma_{FD}}{\sigma_{FZ}} = 1 \quad (101)$$

Aus den Gleichungen nach MOHR-COULOMB und DRUCKER-PRAGER zur Berechnung der Vergleichsspannung im räumlichen Spannungszustand können die Terme (102) bis (104) mit dem Verhältniswert der Fließspannungen m zur weiteren Verwendung entnommen werden.

$$\frac{m-1}{m+1} \quad (102)$$

$$\frac{m-1}{2} \quad (103)$$

$$\frac{m+1}{2} \quad (104)$$

3.4. Mohrsche Spannungskreise

3.4.1. Konzepte für den Umgang mit den Mohrschen Spannungskreisen

Die Konzepte stellen Methoden zur Prüfung, Einordnung und Beschreibungen grundlegender Zusammenhänge in den Mohrschen Spannungskreisen dar. Es werden häufig eigene Verfahrensweisen, Betrachtungsweisen und Entwicklungen dargestellt.

3.4.2. Mengen und Teilmengen

Bei der Betrachtung der Mengen der Mohrschen Spannungskreise im ebenen Spannungszustand werden die zwei Fälle berücksichtigt, die in PARRY 2019 auf Seite 14 dargestellt werden. Das sind der Spannungskreis „Druck“ sowie der Spannungskreis „Druck und Zug“.

Die Menge der Spannungskreise im ebenen Spannungszustand enthält zwei Teilmengen, die Spannungskreise Druck (Abb. 11) und die Spannungskreise Druck und Zug (Abb. 12).

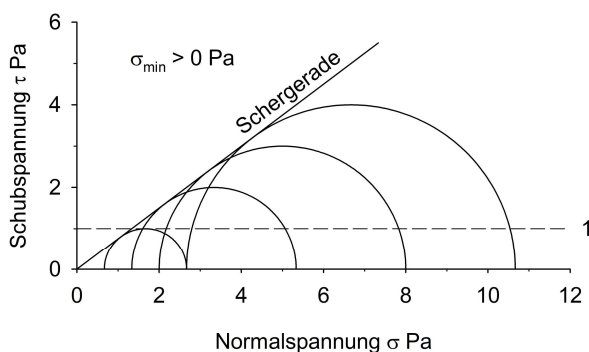


Abbildung 11) Spannungskreis Druck
Eine Klasse von Spannungskreisen Druck hat eine gemeinsame Schergerade.

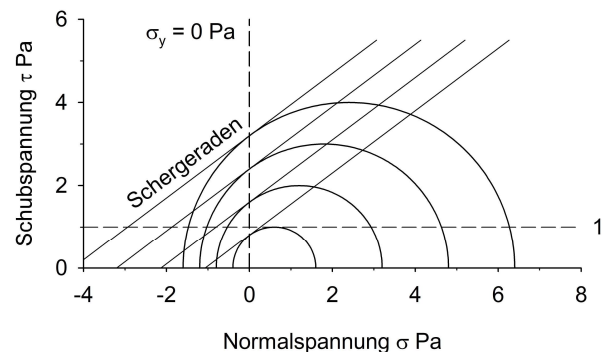


Abbildung 12) Spannungskreis Druck und Zug
In einer Klasse von Spannungskreisen Druck und Zug bilden die Schergeraden eine Parallelschar.

Das gemeinsame Merkmal der Teilmenge der Spannungskreise Druck ist eine Hauptnormalspannung $\sigma_{min} > 0$ Pa. Alle Spannungskreise Druck, welche die gleiche Schergerade berühren, gehören zu einer Klasse, d. h. sie haben genau eine gemeinsame Tangente.

Das gemeinsame Merkmal der Teilmenge Spannungskreise Druck und Zug ist eine Normalspannung $\sigma_y = 0$ Pa. Daraus folgt, dass $\sigma_{min} < 0$ Pa ist. Jeder Spannungskreis hat seine eigene Schergerade. Die Spannungskreise gehören genau dann zu einer Klasse, wenn die Schergeraden eine Parallelschar bilden.

Der dritte in PARRY 2019 aufgeführte Fall „nur Schub“ ist keine eigenständige Teilmenge der Spannungskreise, sondern in der dargestellten Form der untere Grenzzustand der Spannungskreise „Druck und Zug“.

3.4.3. Repräsentanten

Die Vorgehensweisen im Einheitskreis lassen sich nicht auf die Spannungskreise übertragen. Ein Einheitskreis ist als Kreis mit dem Radius von 1 definiert. Zusätzlicher Teil der Definition ist die Bedingung, dass der Mittelpunkt des Einheitskreises im Koordinatenursprung liegen muss. Diese Definition kann in den Spannungskreisen nicht eingehalten werden, da kein Spannungskreis existiert, dessen Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt. Der Sonderfall Spannungskreis nur Schub in der Menge der Spannungskreise Druck und Zug ist eine Grenzwertbetrachtung, d. h. der Mittelpunkt des Spannungskreises nähert sich dem Koordinatenursprung an, erreicht ihn aber nicht.

Ein Spannungskreis ist ein Repräsentant, wenn der Radius $1(10^n \text{ Pa})$ ($n \in \mathbb{Z}$) ist. Der Wert der physikalischen Größe wird auf 1 reduziert und die Größenordnung auf die Einheit der physikalischen Größe übertragen. Die Übertragung ist nur dann möglich, wenn die Größenordnung der Einheit eine Basis von 10 mit einem ganzzahligen Exponenten n ist. Aus dieser Definition ergibt sich, dass die Menge der Spannungskreise Druck und die Menge der Spannungskreise Druck und Zug jeweils unendlich viele Repräsentanten enthalten.

Tabelle 7: Beispiele für Repräsentanten

Radius des Spannungskreises	Radius des Repräsentanten
1000 Pa	$1(10^3 \text{ Pa}) = 1 \text{ kPa}$
0,001 Pa	$1(10^{-3} \text{ Pa}) = 1 \text{ mPa}$

In Repräsentanten mit einem Radius von $R = 1(10^n \text{ Pa})$ (mit $n \in \mathbb{Z}$) können die Vorteile des Einheitskreises genutzt werden. Hierbei ist entscheidend, dass in den Spannungskreisen die physikalische Größe der mechanischen Spannung mit der Einheit Pa abgetragen wird. Werden in einem Repräsentanten die Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck auf einen Winkel angewendet, der kein rechter Winkel ist, sind die Seitenlängen der Katheten mechanische Spannungen mit der Größe $\sin \varphi 1(10^n \text{ Pa})$ bzw. $\cos \varphi 1(10^n \text{ Pa})$ ($n \in \mathbb{Z}$).

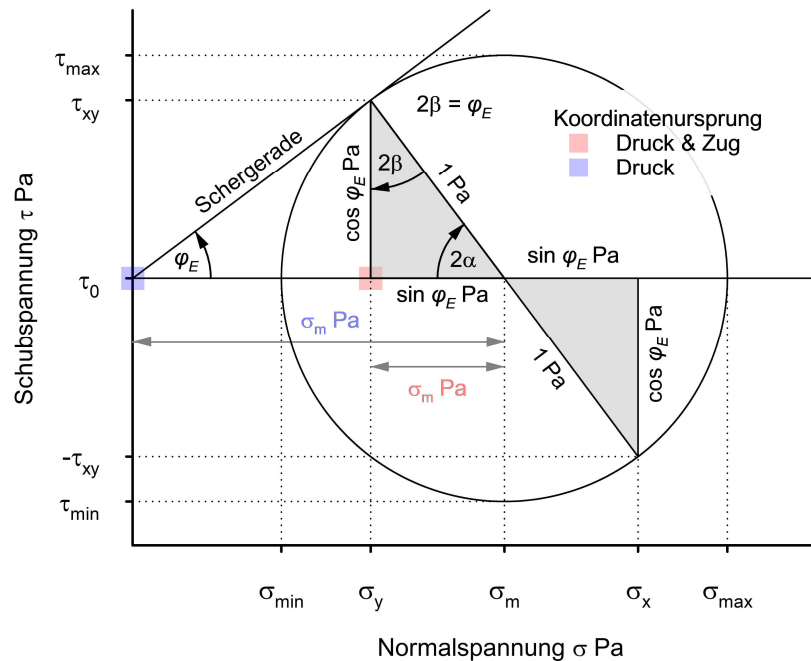


Abbildung 13) Beziehungen in einem Repräsentanten der Spannungskreise im Fall kohäsionsloser Böden.

Ein Repräsentant der Spannungskreise Druck liegt unter der Bedingung $\sigma_{\min} > 0$ Pa vor.

Unter der Bedingung $\sigma_y = 0$ Pa liegt ein Repräsentant der Spannungskreise Druck und Zug vor.

In dieser Arbeit werden die Repräsentanten immer mit dem Radius $R = 1(10^0 \text{ Pa}) = 1 \text{ Pa}$ dargestellt. Um die Übersichtlichkeit in den grafischen Darstellungen und Gleichungen zu wahren, wird die Einheit immer mit Pa angegeben und in der Beschreibung darauf hingewiesen, dass es sich um einen Repräsentanten handelt.

3.4.4. Mobilisierung der Repräsentanten

Die Repräsentanten der Spannungskreise können zwischen der Anfangsposition im unteren Grenzzustand und der Endposition im oberen Grenzzustand verschoben werden. In der Abbildung 14 wird ein vollständiger Bewegungsablauf des Repräsentanten der Spannungskreise Druck und Zug zwischen dem unteren Grenzzustand mit einer Querdehnzahl $\nu = 0,5$ und dem oberen Grenzzustand mit einer Querdehnzahl $\nu = 0$ dargestellt.

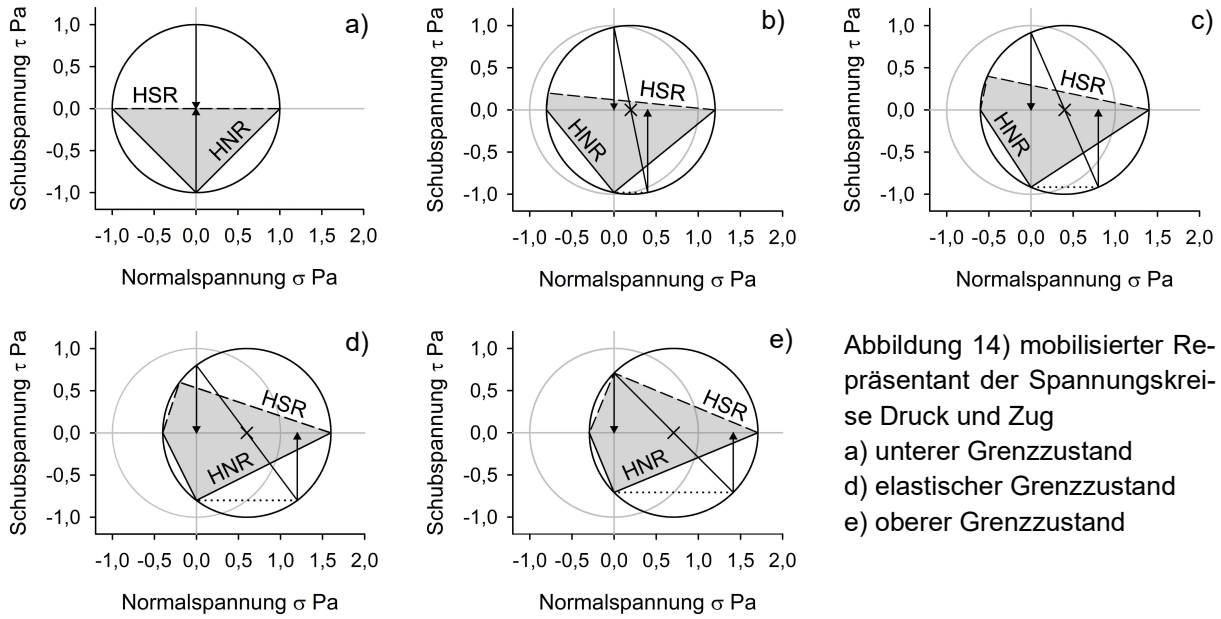


Abbildung 14) mobilisierter Repräsentant der Spannungskreise Druck und Zug
 a) unterer Grenzzustand
 d) elastischer Grenzzustand
 e) oberer Grenzzustand

Durch die Mobilisierung ist es möglich, mit den Repräsentanten der Spannungskreise jeden beliebigen Zustand zwischen Anfangs- und Endposition abzubilden (Abb. 14) und Funktionen über den gesamten Wertebereich zu prüfen. Die Koordinierung eines mobilisierten Spannungskreises erfolgt mit dem Verhältnis der Fließspannungen m .

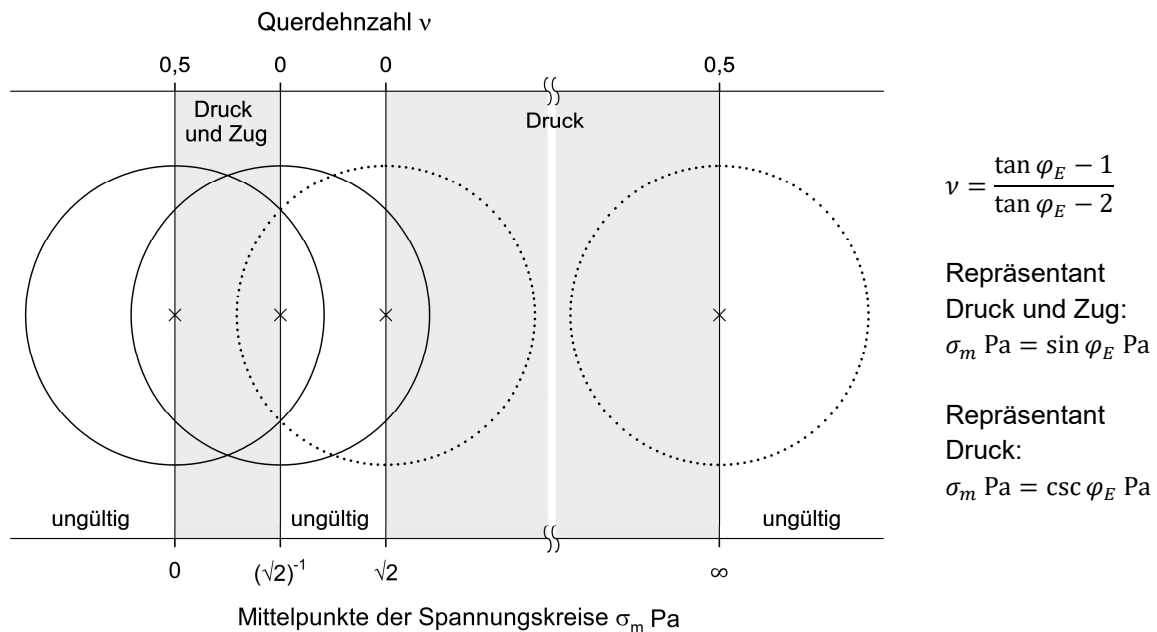


Abbildung 15) Darstellung der Reichweiten der mobilisierten Repräsentanten der Spannungskreise mit Bezug auf den mobilisierbaren Wertebereich der Querdehnzahl zwischen $0 < \nu < 0,5$.

Die Reichweiten der Repräsentanten der Spannungskreise werden in Abbildung 15 mit Bezug auf die Mittelpunkte der Spannungskreise σ_m und mit Bezug auf den mobilisierbaren Wertebereich der Querdehnzahl $0 < \nu < 0,5$ dargestellt. Es ist nicht möglich einen Spannungskreis außerhalb des mobilisierbaren Wertebereichs der Querdehnzahl $0 < \nu < 0,5$ darzustellen.

3.4.5. Repräsentanten der Spannungskreise Druck

In den Repräsentanten der Spannungskreise Druck gelten die folgenden Randbedingungen.

$$\sigma_{min} > 0 \text{ Pa} \quad (105)$$

$$\varphi_E = 2\beta \quad (79)$$

$$\sin \varphi_E = \frac{\tau_{max} \text{ Pa}}{\sigma_m \text{ Pa}} = \frac{1 \text{ Pa}}{\sigma_m \text{ Pa}} \quad (106)$$

In den Repräsentanten der Spannungskreise Druck können die Normalspannung am Kreismittelpunkt σ_m , die Hauptnormalspannungen σ_{min} und σ_{max} , die Normalspannungen σ_x und σ_y sowie die Schubspannung τ_{xy} wie folgt dargestellt werden.

$$\sigma_m \text{ Pa} = \frac{1 \text{ Pa}}{\sin \varphi_E} = \csc \varphi_E \text{ Pa} \quad (107)$$

$$\sigma_x \text{ Pa} = \csc \varphi_E \text{ Pa} + \sin \varphi_E \text{ Pa} \quad (108)$$

$$\sigma_y \text{ Pa} = \csc \varphi_E \text{ Pa} - \sin \varphi_E \text{ Pa} \quad (109)$$

$$\sigma_{max} \text{ Pa} = \csc \varphi_E \text{ Pa} + 1 \text{ Pa} \quad (110)$$

$$\sigma_{min} \text{ Pa} = \csc \varphi_E \text{ Pa} - 1 \text{ Pa} \quad (111)$$

$$\tau_{xy} \text{ Pa} = \cos \varphi_E \cdot 1 \text{ Pa} = \cos \varphi_E \text{ Pa} \quad (112)$$

In den Spannungskreisen Druck kann der Reibungswinkel φ_E gemäß der Fließbedingung nach Mohr-Coulomb in der Variante nach RANKINE 1858 über die Normalspannungen σ_x und σ_y sowie die Schubspannung τ_{xy} ermittelt werden.

$$\tan \varphi_E = \tan(2\beta) = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad (78)$$

$$\tan \varphi_E = \frac{(\csc \varphi_E \text{ Pa} + \sin \varphi_E \text{ Pa}) - (\csc \varphi_E \text{ Pa} - \sin \varphi_E \text{ Pa})}{2 \cos \varphi_E \text{ Pa}} \quad (113)$$

In den Spannungskreisen Druck kann der Reibungswinkel φ_E nach RANKINE 1857 auch aus den Hauptnormalspannungen σ_{max} und σ_{min} bestimmt werden.

$$\sin \varphi_E = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{\sigma_{max} + \sigma_{min}} \quad (87)$$

$$\sin \varphi_E = \frac{(\csc \varphi_E \text{ Pa} + 1 \text{ Pa}) - (\csc \varphi_E \text{ Pa} - 1 \text{ Pa})}{(\csc \varphi_E \text{ Pa} + 1 \text{ Pa}) + (\csc \varphi_E \text{ Pa} - 1 \text{ Pa})} \quad (114)$$

In einem Repräsentanten der Spannungskreise Druck kann die Normalspannungshypothese nach RANKINE (33) mit dem Satz des Pythagoras auf eine einfache Anwendung der Winkelbeziehungen umgestellt werden (115).

$$\sigma_{max/min} \text{ Pa} = \csc \varphi_E \text{ Pa} \pm \sqrt{\sin^2 \varphi_E \text{ Pa} + \cos^2 \varphi_E \text{ Pa}} \quad \text{mit } \sigma_{min} > 0 \text{ Pa} \quad (115)$$

In den Repräsentanten beider Spannungskreise kann die Schubspannungshypothese nach TRESCA (95) mit dem Satz des Pythagoras auf eine Anwendung der Winkelbeziehungen umgestellt werden (116).

$$2\tau_{max} \text{ Pa} = 2\sqrt{\sin^2 \varphi_E \text{ Pa} + \cos^2 \varphi_E \text{ Pa}} \quad (116)$$

In den Spannungskreisen Druck kann der Erdruhedruckbeiwert K_0 nach TERZAGHI 1925 nicht aus dem Verhältnis der Hauptnormalspannung σ_{min} und der Hauptnormalspannung σ_{max} bestimmt werden. Seine Gleichung (90) ist mit der Gleichung zur Bestimmung des aktiven Erddruckbeiwerts K_a nach RANKINE 1857 identisch (88). Es gibt nach Prüfung der Unterlagen keinen Grund die Ergebnisse von RANKINE 1857 anzuzweifeln. Auch im Grundbautaschenbuch (GBT 2017) werden identische Gleichungen für die Größen K_0 und K_a angegeben.

$$K_0 = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \quad (90)$$

$$K_a = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \quad (88)$$

In den Spannungskreisen Druck ist der Erdruhedruckbeiwert K_0 nach JAKY 1944 (117) aus dem Verhältnis der Normalspannung σ_y und der Hauptnormalspannung σ_{max} zu berechnen (118).

$$K_0 = 1 - \sin \varphi_E \quad (117)$$

$$K_0 = \frac{\sigma_y \text{ Pa}}{\sigma_{max} \text{ Pa}} = \frac{\csc \varphi_E \text{ Pa} - \sin \varphi_E \text{ Pa}}{\csc \varphi_E \text{ Pa} + 1 \text{ Pa}} = 1 - \sin \varphi_E \quad (118)$$

In seiner Arbeit hat JAKY 1944 den Reibungswinkel φ_E mit dem Schüttwinkel φ_J verwechselt. Ursache ist die Gleichsetzung des Reibungswinkels φ mit dem Schüttwinkel α (JAKY 1944). Beide Winkel sind nicht identisch. Mit Gleichung (119) kann der Erdruhedruckbeiwert K_0 aus dem Schüttwinkel φ_J ermittelt werden.

$$K_0 = 1 - \sin \varphi_J \quad (119)$$

Mit Gleichung (120) wird der Erdruhedruckbeiwert K_0 aus dem Reibungswinkel φ_E bestimmt.

$$K_0 = 1 - \tan \varphi_E \quad (120)$$

In der Sekundärliteratur wird die bekannte Gleichung zur Bestimmung des Erdruhedruckbeiwerts K_0 aus der Querdehnzahl ν üblicherweise TERZAGHI zugeschrieben (121) und kann aus den Positionen c_{12} und c_{11} der Matrix des Hookeschen Gesetzes für den isotropen Fall hergeleitet werden (64).

$$K_0 = \frac{\nu}{1 - \nu} \quad (121)$$

$$C = \frac{E}{1 + \nu} \begin{bmatrix} \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} & \frac{\nu}{1 - 2\nu} & \frac{\nu}{1 - 2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} & \frac{\nu}{1 - 2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$K_0 = \frac{c_{12}}{c_{11}} = \frac{\frac{\nu}{1 - 2\nu}}{\frac{1 - \nu}{1 - 2\nu}} = \frac{\nu}{1 - \nu} \quad (122)$$

Durch Gleichsetzen der Gleichungen (123) und anschließendes Umstellen wird die Fließbedingung nach Mohr-Coulomb erzeugt (124). Diese hat über die Position c_{11} einen direkten Bezug zur Matrix des Hookeschen Gesetzes für den isotropen Fall (124). Die Gleichung zur Bestimmung der Querdehnzahl ν (125) ist die Umkehrfunktion der Fließbedingung nach Mohr-Coulomb.

$$K_0 = 1 - \tan \varphi_E = \frac{\nu}{1 - \nu} \quad (123)$$

$$\tan \varphi_E = 1 - \frac{\nu}{1 - \nu} = \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} = \frac{1}{c_{11}} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad (78), (124)$$

$$\nu = \frac{1 - \tan \varphi_E}{2 - \tan \varphi_E} \quad (125)$$

In den Spannungskreisen Druck kann der Erdruhedruckbeiwert K_0 und die Querdehnzahl ν aus den Normalspannungen σ_x und σ_y sowie der Schubspannung τ_{xy} bestimmt werden. Hierfür ist die Gleichung (78) in die Gleichungen (126) und (127) einzusetzen.

$$K_0 = 1 - \tan \varphi_E = 1 - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = \frac{2\tau_{xy} - \sigma_x + \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad (126)$$

$$\nu = \frac{1 - \tan \varphi_E}{2 - \tan \varphi_E} = \frac{1 - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}}{2 - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}} = \frac{2\tau_{xy} + \sigma_y - \sigma_x}{4\tau_{xy} + \sigma_y - \sigma_x} \quad (127)$$

Die Gleichung (126) ist nur im Spannungskreis Druck gültig. Die Gleichung (127) kann ohne Einschränkungen in den Spannungskreisen Druck sowie in den Spannungskreisen Druck und Zug angewendet werden.

Ergänzungen zu den Erdruhedruckbeiwerten

Die bekannten Gleichungen zur Bestimmung des Erdruhedruckbeiwerts K_0 basieren auf unterschiedlichen Größen und sind somit nicht vergleichbar (128). Um eine Prüfung zu ermöglichen, wurden alle bekannten Gleichungen, die nicht auf der Verwendung des Reibungswinkels basieren, auf die Größe Reibungswinkel φ_E umgestellt (129). Im Ergebnis des Vergleichs ist festzustellen, dass sich alle bekannten Erdruhedruckbeiwerte K_0 unterscheiden und der Erdruhedruckbeiwert nach TERZAGHI 1925 dem aktiven Erddruckbeiwert K_a nach RANKINE 1858 entspricht (130).

$$\frac{\nu}{1-\nu} \neq 1 - \sin \varphi_E \neq \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = \tan^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi_E}{2} \right) \quad (128)$$

$$1 - \tan \varphi_E \neq 1 - \sin \varphi_E \neq \frac{1 - \sin \varphi_E}{1 + \sin \varphi_E} = \tan^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi_E}{2} \right) \quad (129)$$

$$K_0 \neq K_0 \neq K_0 = K_a \quad (130)$$

Im Fall der Gleichung nach JAKY 1944 ist es über den Repräsentanten des Spannungskreises Druck möglich, die ursprünglich auf dem Reibungswinkel φ_E basierende Gleichung auf ein Verhältnis aus der Normalspannung σ_y und der Hauptnormalspannung σ_{max} zurückzuführen (118). In seiner Arbeit führt JAKY 1944 die Gleichung nach TERZAGHI 1925 als Berechnungsgrundlage auf (Jaky6). Die beiden Erdruhedruckbeiwerte K_0 stimmen nicht überein.

$$K_0 \text{ TERZAGHI 1925} \rightarrow \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \neq \frac{\sigma_y}{\sigma_{max}} \leftarrow K_0 \text{ JAKY 1944} \quad (131)$$

3.4.6. Repräsentanten der Spannungskreise Druck und Zug

In den Repräsentanten der Spannungskreise Druck und Zug gelten die folgenden Randbedingungen:

$$\sigma_y = 0 \text{ Pa } (\sigma_{min} < 0 \text{ Pa}) \quad (132)$$

$$\varphi_E = 2\beta \quad (79)$$

$$\sin \varphi_E = \sin 2\beta = \frac{\sigma_m \text{ Pa}}{\tau_{max} \text{ Pa}} = \frac{\sigma_m \text{ Pa}}{1 \text{ Pa}} \quad (133)$$

In den Repräsentanten der Spannungskreise Druck und Zug können die Normalspannung am Kreismittelpunkt σ_m , die Hauptnormalspannungen σ_{min} und σ_{max} , die Normalspannungen σ_x und σ_y sowie die Schubspannung τ_{xy} wie folgt dargestellt werden.

$$\sigma_m \text{ Pa} = \sin \varphi_E \cdot 1 \text{ Pa} = \sin \varphi_E \text{ Pa} \quad (134)$$

$$\sigma_x \text{ Pa} = \sin \varphi_E \text{ Pa} + \sin \varphi_E \text{ Pa} \quad (135)$$

$$\sigma_y \text{ Pa} = \sin \varphi_E \text{ Pa} - \sin \varphi_E \text{ Pa} = 0 \text{ Pa} \quad (136)$$

$$\sigma_{max} \text{ Pa} = \sin \varphi_E \text{ Pa} + 1 \text{ Pa} \quad (137)$$

$$\sigma_{min} \text{ Pa} = \sin \varphi_E \text{ Pa} - 1 \text{ Pa} \quad (138)$$

$$\tau_{xy} \text{ Pa} = \cos \varphi_E \cdot 1 \text{ Pa} = \cos \varphi_E \text{ Pa} \quad (139)$$

In den Spannungskreisen Druck und Zug ist der Reibungswinkel φ_E gemäß der Fließbedingung nach Mohr-Coulomb in der Variante nach RANKINE 1858 über die Normalspannungen σ_x und σ_y sowie die Schubspannung τ_{xy} zu ermitteln.

$$\tan \varphi_E = \tan(2\beta) = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad (78)$$

$$\tan \varphi_E = \frac{(\sin \varphi_E \text{ Pa} + \sin \varphi_E \text{ Pa}) - (\sin \varphi_E \text{ Pa} - \sin \varphi_E \text{ Pa})}{2 \cos \varphi_E \text{ Pa}} \quad (140)$$

In den Spannungskreisen Druck und Zug kann der Reibungswinkel auch aus den Hauptnormalspannungen σ_{max} und σ_{min} bestimmt werden (RANKINE 1857). Der veränderten Randbedingung ($\sigma_{min} < 0 \text{ Pa}$) entsprechend wird in Gleichung (142) bei Umstellung vom Spannungskreis Druck auf den Spannungskreis Druck und Zug der erforderliche Kehrwert gebildet (92).

$$\sin \varphi_E = \frac{(\sin \varphi_E \text{ Pa} + 1 \text{ Pa}) + (\sin \varphi_E \text{ Pa} - 1 \text{ Pa})}{(\sin \varphi_E \text{ Pa} + 1 \text{ Pa}) - (\sin \varphi_E \text{ Pa} - 1 \text{ Pa})} \quad (141)$$

$$\frac{(\csc \varphi_E \text{ Pa} + 1 \text{ Pa}) - (\csc \varphi_E \text{ Pa} - 1 \text{ Pa})}{(\csc \varphi_E \text{ Pa} + 1 \text{ Pa}) + (\csc \varphi_E \text{ Pa} - 1 \text{ Pa})} = \frac{(\sin \varphi_E \text{ Pa} + 1 \text{ Pa}) + (\sin \varphi_E \text{ Pa} - 1 \text{ Pa})}{(\sin \varphi_E \text{ Pa} + 1 \text{ Pa}) - (\sin \varphi_E \text{ Pa} - 1 \text{ Pa})} \quad (142)$$

$$\sin \varphi_E = \frac{\sigma_{max} \text{ Pa} + \sigma_{min} \text{ Pa}}{\sigma_{max} \text{ Pa} - \sigma_{min} \text{ Pa}} \quad \text{mit } \sigma_{min} < 0 \text{ Pa} \quad (92)$$

In einem Repräsentanten der Spannungskreise Druck und Zug kann die Normalspannungshypothese nach RANKINE (93) mit dem Satz des Pythagoras auf eine einfache Anwendung der Winkelbeziehungen umgestellt werden (143).

$$\sigma_{max/min} \text{ Pa} = \sin \varphi_E \text{ Pa} \pm \sqrt{\sin^2 \varphi_E \text{ Pa} + \cos^2 \varphi_E \text{ Pa}} \quad \text{mit } \sigma_y = 0 \text{ Pa} \quad (143)$$

In den Repräsentanten beider Spannungskreise kann die Schubspannungshypothese nach TRESCA (95) mit dem Satz des Pythagoras auf eine Anwendung der Winkelbeziehungen umgestellt werden (144).

$$2\tau_{max} Pa = 2\sqrt{\sin^2 \varphi_E Pa + \cos^2 \varphi_E Pa} \quad (144)$$

Unter der Randbedingung einer Normalspannung von $\sigma_y = 0 Pa$ kann in den Spannungskreisen Druck und Zug kein Erdruhedruckbeiwert K_0 ermittelt werden. Der Erdruhedruckbeiwert nach JAKY 1944 ist nicht bestimmbar.

$$K_0 = \frac{\sigma_y Pa}{\sigma_{max} Pa} = \frac{\sin \varphi_E Pa - \sin \varphi_E Pa}{\sin \varphi_E Pa + 1 Pa} = 0 \quad (145)$$

Das unterschiedliche Verhalten der JAKY-Gleichung im Spannungskreis Druck sowie Druck und Zug ist ein Hinweis darauf, dass mit der Gleichung genau dann sinnvolle Ergebnisse erzielt werden, wenn der Untersuchungsgegenstand Schüttwinkel φ_j eingesetzt wird (119).

In den Spannungskreisen Druck und Zug können der aktive Erddruckbeiwert K_a und der passive Erddruckbeiwert K_p mit den Gleichungen (146) und (147) dargestellt werden.

$$K_a = \frac{\sigma_{min} Pa}{\sigma_{max} Pa} = \frac{\sin \varphi_E Pa - 1 Pa}{\sin \varphi_E Pa + 1 Pa} = \frac{\sin \varphi_E - 1}{\sin \varphi_E + 1} \quad (146)$$

$$K_p = \frac{\sigma_{max} Pa}{\sigma_{min} Pa} = \frac{\sin \varphi_E Pa + 1 Pa}{\sin \varphi_E Pa - 1 Pa} = \frac{\sin \varphi_E + 1}{\sin \varphi_E - 1} \quad (147)$$

Der Erdruhedruckbeiwert muss zwischen dem aktiven und passiven Erddruckbeiwert liegen. Weil sich in den Spannungskreisen Druck und Zug negative Werte für den aktiven und passiven Erddruckbeiwert ergeben, müsste auch der Erdruhedruckbeiwert ein negativer Wert sein. Eine Verwendung negativer Erddruckbeiwerte erscheint nicht sinnvoll. Es ist inkonsistent, wenn mit der modifizierten Gleichung von JAKY 1944 kein Erdruhedruckbeiwert ermittelt werden kann und dann auf anderem Weg Erddruckbeiwerte erzeugt werden, die im Kontext als fragwürdig eingeordnet werden müssen. Negative Erddruckbeiwerte wären entsprechend der Randbedingungen Erdzugbeiwerte. Es gibt keinerlei Veranlassung für die Einführung entsprechender Parameter.

Die Rechenwege im Spannungskreis Druck und im Spannungskreis Druck und Zug unterscheiden sich, jedoch sind beide Arten von Spannungskreisen kompatibel. Deshalb ist es problemlos möglich, mit beiden Arten von Spannungskreisen zu arbeiten und je nach Anwendungszweck in den entsprechenden Spannungskreis zu wechseln.

Der rechnerische Unterschied zwischen den Spannungskreisen ist bei den Erddruckbeiwerten mit einer Änderung des Vorzeichens verbunden. Weil nur positive Werte einen Sinn ergeben, ist bei der Herleitung der Erddruckbeiwerte der Spannungskreis Druck der einzige korrekte Lösungsansatz.

Durch Gleichsetzen anschließendes Umstellen wird die Fließbedingung nach Mohr-Coulomb erzeugt (148). Diese hat über die Position c_{11} einen direkten Bezug zur Matrix des Hookeschen Gesetzes für den isotropen Fall (64). Die Gleichung zur Bestimmung der Querdehnzahl ν (149) ergibt sich als Umkehrfunktion der Fließbedingung nach Mohr-Coulomb (148).

$$\tan \varphi_E = \tan(2\beta) = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = \frac{2\nu - 1}{\nu - 1} = \frac{1}{c_{11}} \quad (78), (148)$$

$$\nu = \frac{\tan \varphi_E - 1}{\tan \varphi_E - 2} = \frac{\tan(2\beta) - 1}{\tan(2\beta) - 2} \quad (149)$$

In den Spannungskreisen Druck und Zug kann die Querdehnzahl ν aus den Normalspannungen σ_x und σ_y sowie der Schubspannung τ_{xy} bestimmt werden. Hierfür ist die Gleichung nach RANKINE (78) in die Gleichung (149) einzusetzen.

$$\nu = \frac{\tan \varphi_E - 1}{\tan \varphi_E - 2} = \frac{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} - 1}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} - 2} = \frac{2\tau_{xy} + \sigma_y - \sigma_x}{4\tau_{xy} + \sigma_y - \sigma_x} \quad (150)$$

Die Gleichung (150) kann aufgrund der Randbedingung $\sigma_y = 0 \text{ Pa}$ ohne Einschränkungen in den Spannungskreisen Druck und in den Spannungskreisen Druck und Zug angewendet werden.

3.4.7. Berechnungen in den Spannungskreisen mit mechanischen Spannungen

Die Hauptnormalspannungen σ_{max} und σ_{min} sowie die maximale Schubspannung τ_{max} werden mit den bekannten Gleichungen nach RANKINE (94) und TRESKA (96) aus den Normalspannungen σ_x und σ_y sowie der Schubspannung τ_{xy} berechnet. Die Gleichungen können ohne Einschränkungen in allen Spannungskreisen des ebenen Spannungszustands angewendet werden.

$$\sigma_{max/min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (94)$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (96)$$

Der Reibungswinkel φ_E , die Hauptnormalspannungswinkel $\varphi_{1/2}$, die Querdehnzahl ν , die Elastizitätszahl I_E und der Verhältniswert der Fließspannungen m werden mit Gleichung (78) nach RANKINE 1858 und den Gleichungen (150) bis (153) aus den Normalspannungen σ_x und σ_y sowie der Schubspannung τ_{xy} berechnet. Die Gleichungen können ohne Einschränkungen in allen Spannungskreisen des ebenen Spannungszustands angewendet werden. Alle maßgeblichen Größen der Dimension Zahl lassen sich direkt aus mechanischen Spannungen bestimmen.

$$\tan \varphi_E = \tan(2\beta) = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad (78)$$

$$\tan \varphi_{1/2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4(\tau_{xy})^2}{(\tau_{xy})^2}} \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad (151)$$

$$\nu = \frac{2\tau_{xy} + \sigma_y - \sigma_x}{4\tau_{xy} + \sigma_y - \sigma_x} \quad (150)$$

$$I_E = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy} - \sigma_x + \sigma_y} \quad (152)$$

$$m = \frac{2\tau_{xy} + \sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy} - \sigma_x + \sigma_y} \quad (153)$$

3.4.8. Berechnungen in den Spannungskreisen mit Größen der Dimension Zahl

Die Lösungen der Fließbedingung nach Mohr-Coulomb (154) und die ihrer Umkehrfunktionen (155) sind Identitäten. Die Art des Spannungskreises äußert sich in einer spiegelverkehrten Schreibweise. Der linke Term der Gleichungen entspricht der Lösung für den Spannungskreis Druck. Der rechte Term der Gleichungen entspricht der Lösung für den Spannungskreis Druck und Zug. Die beiden Terme der Gleichungen (154) und (155) können unabhängig von der Herkunft in allen Spannungskreisen des ebenen Spannungszustands angewendet werden.

$$\tan \varphi_E = \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} = \frac{2\nu - 1}{\nu - 1} \quad (154)$$

$$\nu = \frac{1 - \tan \varphi_E}{2 - \tan \varphi_E} = \frac{\tan \varphi_E - 1}{\tan \varphi_E - 2} \quad (155)$$

In der Geotechnik ist es üblich, Winkel und Richtungen ausschließlich mit positiven Werten darzustellen. Diese Vorgehensweise ist im Regelfall für die Beschreibung von Zusammenhängen ausreichend. Werden Beziehungen auf Grundlage von Größen der Dimension Zahl hergeleitet, müssen die Vorzeichen beachtet werden. Ansonsten beruhen die Schlussfolgerungen ggf. auf fehlerhaften Zusammenhängen.

Der Richtungswechsel zwischen dem Spannungskreis Druck und dem Spannungskreis Druck und Zug (Druck positiv und Zug negativ) äußert sich in einer spiegelverkehrten Darstellung der Gleichungen. Wenn z. B. in die Fließbedingung nach Mohr-Coulomb das Verhältnis der Fließspannungen m eingesetzt wird (156), wird der Richtungswechsel zwischen den Spannungskreisen nicht kompensiert und der Reibungswinkel φ_E hat im Spannungskreis Druck und Zug mit einem negativen Wert ein falsches Vorzeichen. Für eine korrekte Darstellung der Gleichungen müssen Beträge gebildet werden (157). Das gilt auch für andere Zusammenhänge, die mit Größen der Dimension Zahl dargestellt werden (158).

$$\operatorname{atan}\left(\frac{m-1}{m+1}\right) \neq \operatorname{atan}\left(\frac{1-m}{1+m}\right) \quad (156)$$

$$\operatorname{atan}\left|\frac{m-1}{m+1}\right| = \operatorname{atan}\left|\frac{1-m}{1+m}\right| \quad \text{mit } m \neq -1 \quad (157)$$

$$\left|\frac{1-2\nu}{\nu}\right| = \left|\frac{2\nu-1}{\nu}\right| \quad (158)$$

Für Berechnungen auf Basis von Größen der Dimension Zahl wird empfohlen, die in Tabelle 8 dargestellten und für den Spannungskreis Druck gültigen Beziehungen für beide Spannungskreise zu verwenden. Es werden bei Ansatz realistischer Größen ausschließlich positive Werte ermittelt. Schlussfolgerungen für den Spannungskreis Druck und Zug sind bei Bedarf auf die Auswirkungen eines möglichen Richtungswechsels zu prüfen.

Tabelle 8: Berechnung von Größen der Dimension Zahl im isotropen Fall

berechnet aus		m	I_E	ν	$\tan \varphi_E$	K_0
Verhältnis der Fließspannungen	m	m	$2I_E + 1$	$\frac{2-3\nu}{\nu}$	$\frac{1+\tan \varphi_E}{1-\tan \varphi_E}$	$\frac{2-K_0}{K_0}$
Elastizitätszahl	I_E	$\frac{m-1}{2}$	I_E	$\frac{1-2\nu}{\nu}$	$\frac{\tan \varphi_E}{1-\tan \varphi_E}$	$\frac{1-K_0}{K_0}$
Querdehnzahl	ν	$\frac{2}{m+3}$	$\frac{1}{I_E+2}$	ν	$\frac{1-\tan \varphi_E}{2-\tan \varphi_E}$	$\frac{K_0}{K_0+1}$
Reibungswinkel (Fließbedingung nach Mohr-Coulomb)	$\tan \varphi_E$	$\frac{m-1}{m+1}$	$\frac{I_E}{I_E+1}$	$\frac{1-2\nu}{1-\nu}$	$\tan \varphi_E$	$1-K_0$
Erdruhedruckbeiwert	K_0	$\frac{2}{m+1}$	$\frac{1}{I_E+1}$	$\frac{\nu}{1-\nu}$	$1-\tan \varphi_E$	K_0

3.5. Grenzzustände

3.5.1. Grenzzustände in den Repräsentanten Mohrscher Spannungskreise

Im isotropen Fall existieren in den Mohrschen Spannungskreisen Druck sowie Druck und Zug jeweils drei gleichwertige Grenzzustände, von denen der untere Grenzzustand und der elastische Grenzzustand von Bedeutung sind. Der obere Grenzzustand ist ausschließlich Teil der theoretischen Grundlagen und praktisch nicht relevant.

unterer Grenzzustand

Der untere Grenzzustand (Abb. 16) kann mit einer Querdehnzahl $\nu = 0,5$ und einem Reibungswinkel von $\varphi_E = 0^\circ$ beschrieben werden.

$$\varphi_E = \text{atan } 0 = 0^\circ$$

$$\tan \varphi_E = \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} = \frac{1 - 2 \cdot 0,5}{1 - 0,5} = \frac{0}{0,5} = 0 \quad (159)$$

$$\nu = \frac{\tan \varphi_E - 1}{\tan \varphi_E - 2} = \frac{0 - 1}{0 - 2} = \frac{-1}{-2} = 0,5 \quad (160)$$

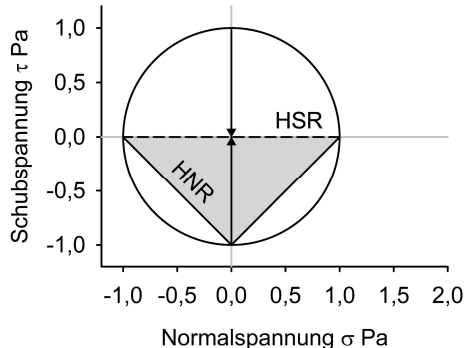


Abbildung 16) unterer Grenzzustand

Darstellung des Repräsentanten der Mohrschen Spannungskreise Druck und Zug im unteren Grenzzustand, mit Angaben zu den Hauptnormalspannungsrichtungen (HNR) und zu den um 90° gedrehten Hauptschubspannungsrichtungen (HSR).

Die über den Tangens des Reibungswinkels φ_E ermittelte Querdehnzahl ν ist kein Grenzwert. Aus der Literatur ist bekannt, dass eine Querdehnzahl von $\nu = 0,5$ ein Grenzwert ist, der nur näherungsweise erreicht werden kann. Um einen Grenzwert nachzuweisen, wird die Funktion zur Ermittlung der Querdehnzahl ν von der Tangensfunktion auf die gleichwertig zu behandelnde Kehrwertfunktion Kotangens umgestellt.

$$\nu = \frac{\tan \varphi_E - 1}{\tan \varphi_E - 2} = \frac{\frac{1}{\cot \varphi_E} - 1}{2 \cdot \frac{1}{\cot \varphi_E} - 1} = \frac{\cot \varphi_E - 1}{2 \cot \varphi_E - 1} \quad (161)$$

In einem Wertebereich zwischen 0 (0°) und π (180°) gelten für die Kotangens-Funktion die folgenden Grenzwerte.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x) &= \infty \\ \lim_{x \rightarrow \pi} (\cot x) &= -\infty\end{aligned}\quad (162)$$

Die Bestimmung der Querdehnzahl ν aus dem Reibungswinkel φ_E erfolgt für den Unteren Grenzzustand unter Anwendung des Satzes von L'Hospital. Die Querdehnzahl $\nu = 0,5$ ist als Ergebnis ein Grenzwert.

$$\lim_{\varphi_E \rightarrow 0} (\nu) = \lim_{\varphi_E \rightarrow 0} \left(\frac{\cot \varphi_E - 1}{2 \cot \varphi_E - 1} \right) = \frac{1}{2} = 0,5 \quad (163)$$

Bestimmung von φ_E im unteren Grenzzustand mit der Fließbedingung nach Mohr-Coulomb.

$$\begin{aligned}\tan \varphi_E &= \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} = \frac{0}{0,5} = 0 \\ \varphi_E &= \operatorname{atan} 0 = 0^\circ\end{aligned}\quad (164)$$

Im Unteren Grenzzustand sind nur Schubspannungen wirksam, d. h. es können keine Verformungen auftreten. Bei der Darstellung des unteren Grenzzustands in den Spannungskreisen Druck sowie Druck und Zug liegt die verformungsfreie Situation „nur Schub“ jeweils als Grenzwert vor.

elastischer Grenzzustand

Der elastische Grenzzustand (Abb. 17) kann mit einer Querdehnzahl von $\nu = 0,2$ und einem Reibungswinkel von $\varphi_E = 36,87^\circ$ beschrieben werden. Bei der angegebenen Größenordnung des Reibungswinkels ist zu beachten, dass die Fließbedingung nach Mohr-Coulomb das typische Verformungsverhalten granularer Materialien nicht berücksichtigt (Dilatanz etc.).

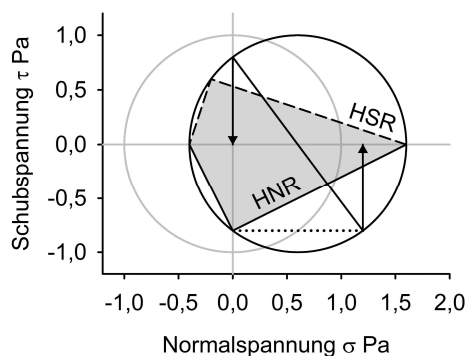


Abbildung 17) elastischer Grenzzustand

Darstellung des Repräsentanten der Mohrschen Spannungskreise Druck und Zug im elastischen Grenzzustand, mit Angaben zu den Hauptnormalspannungsrichtungen (HNR) und zu den um 90° gedrehten Hauptschubspannungsrichtungen (HSR). Die durch die Hauptspannungsrichtungen begrenzte Fläche ist ein wichtiger Untersuchungsgegenstand der vorliegenden Arbeit.

Der Winkel φ_1 zwischen Abszisse und der Hauptnormalspannungsrichtung σ_{max} , der Winkel φ_2 zwischen Abszisse und der Hauptnormalspannungsrichtung σ_{min} sowie der Reibungswinkel φ_E haben nach RANKINE zueinander definierte Abstände.

$$\varphi_2 < \varphi_E < \varphi_1 \quad (79)$$

$$\varphi_{1/2} = 45^\circ \pm \frac{\varphi_E}{2} \quad (84), (85)$$

$$\varphi_E = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (79)$$

Der Winkel φ_1 ist der größte der drei Winkel und kann nicht kleiner als 45° sein. Da die Querdehnzahl ν in der Fließbedingung nach MOHR-COULOMB bei einem Winkel von $\varphi > 45^\circ$ einen negativen Wert annimmt, ist bei der Grenzwertbetrachtung eine Querdehnzahl $\nu = -\infty$ einzusetzen. Bei der Berechnung des Grenzwerts ist der Satz von L'Hospital anzuwenden.

$$\lim_{\nu \rightarrow -\infty} (\tan \varphi_1) = \lim_{\nu \rightarrow -\infty} \left(\frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \right) = \frac{-2}{-1} = 2 \quad (165)$$

$$\varphi_1 = \text{atan } 2 = 63,435^\circ$$

Der Grenzwert $\varphi_1 = \text{atan } 2$ entspricht der Lage einer senkrechten Asymptote (Abb. 18). Senkrechte Asymptoten sind nicht Teil der Funktion, d. h. es kann keinen Winkel $\varphi_1 \geq \text{atan } 2$ geben.

Wenn für den größten Winkel φ_1 ein Grenzwert ermittelt werden kann und die Winkel φ_1 , φ_2 und φ_E zueinander definierte Abstände haben, muss auch der Reibungswinkel φ_E einen Grenzwert besitzen. Da der Reibungswinkel φ_E und die Querdehnzahl ν über eine Funktion verbunden sind, lässt sich ebenfalls die zum Grenzwert des Reibungswinkels φ_E zugehörige Querdehnzahl ν bestimmen.

$$\varphi_E = 2\varphi_1 - 90^\circ = 2(\text{atan } 2) - 90^\circ = 126,87^\circ - 90^\circ = \text{atan } 0,75 = 36,87^\circ \quad (166)$$

$$\nu = \frac{\tan \varphi_E - 1}{\tan \varphi_E - 2} = \frac{0,75 - 1}{0,75 - 2} = \frac{-0,25}{-1,25} = 0,2 \quad (167)$$

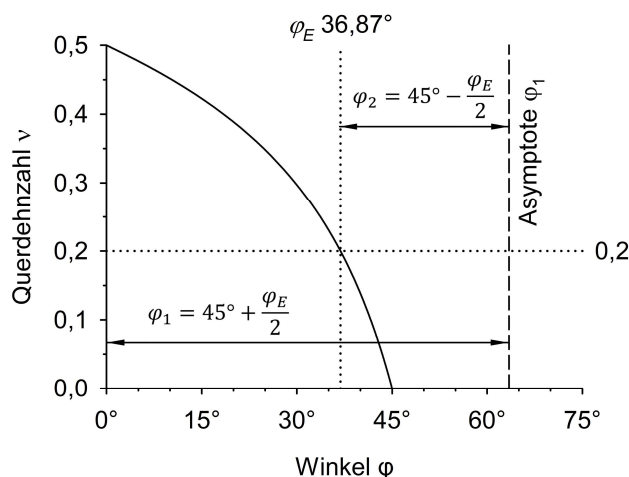


Abbildung 18) Der Abstand zwischen der Asymptote φ_1 und dem Reibungswinkel φ_E ist nach RANKINE 1857 mit dem Winkel φ_2 eindeutig definiert.

$$\varphi_E = \varphi_1 - \varphi_2$$

Funktion für die Bestimmung der Querdehnzahl ν aus dem Reibungswinkel φ_E .

$$\nu = \frac{\tan \varphi_E - 1}{\tan \varphi_E - 2}$$

Nach den in Abbildung 18 dargestellten Winkelbeziehungen nach RANKINE 1857 kann es im elastisch definierten Bereich keinen Reibungswinkel $\varphi_E > 36,87^\circ$ und somit keine Querdehnzahl $\nu < 0,2$ geben.

oberer Grenzzustand

Der obere Grenzzustand (Abb. 19) kann mit einer Querdehnzahl von $\nu = 0$ und einem Reibungswinkel von $\varphi_E = 45^\circ$ beschrieben werden.

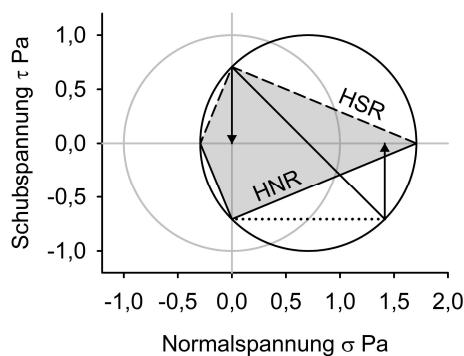


Abbildung 19) oberer Grenzzustand

Darstellung des Repräsentanten der Mohrschen Spannungskreise Druck und Zug im oberen Grenzzustand, mit Angaben zu den Hauptnormalspannungsrichtungen (HNR) und zu den um 90° gedrehten Hauptschubspannungsrichtungen (HSR).

Der obere Grenzzustand wird über das Verhältnis der Fließspannungen m als Grenzzustand definiert. Unter Anwendung des Satzes von L'Hospital ist der Reibungswinkel φ_E aus dem Verhältnis der Fließspannungen m zu ermitteln. Die Berechnung erfolgt mit der Fließbedingung nach MOHR-COULOMB.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\tan \varphi_E) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{m-1}{m+1} \right) = \frac{1}{1} = 1 \quad (168)$$

$$\varphi_E = \text{atan } 1 = 45^\circ$$

Es folgt die Anwendung der Fließbedingung nach MOHR-COULOMB für die Bestimmung des Reibungswinkels φ_E und der Querdehnzahl ν für den oberen Grenzzustand.

$$\tan \varphi_E = \frac{1-2\nu}{1-\nu} = \frac{1-2 \cdot 0}{1-0} = \frac{1}{1} = 1 \quad (169)$$

$$\varphi_E = \text{atan } 1 = 45^\circ$$

$$\nu = \frac{\tan \varphi_E - 1}{\tan \varphi_E - 2} = \frac{1-1}{1-2} = \frac{0}{-1} = 0 \quad (170)$$

Der Bereich zwischen dem elastischen Grenzzustand und dem oberen Grenzzustand mit einer Querdehnzahl zwischen $0 < \nu < 0,2$ wird durch eine senkrechte Asymptote vom Bereich zwischen dem unteren Grenzzustand und dem elastischen Grenzzustand mit einer Querdehnzahl zwischen $0,2 < \nu < 0,5$ getrennt. Der Bereich zwischen dem elastischen Grenzzustand und dem oberen Grenzzustand mit $0 < \nu < 0,2$ wird nicht verwirklicht.

3.5.2. Allgemeine Grenzzustandsfunktion

Mit der Grenzzustandsfunktion können Grenzen und Bereiche erfasst und beschrieben werden, die innerhalb des elastischen Bereichs $0,2 < \nu < 0,5$ liegen. Die allgemeine Grenzzustandsfunktion $\nu = \nu'$ kann auf alle Größen der Dimension Zahl angewendet werden, aus denen die Querdehnzahl ν ermittelt werden kann und auf die sich die Fließbedingung nach Mohr-Coulomb anwenden lässt. Für eingesetzte Größen ergeben sich immer zwei Lösungen, die an die Grenzen des elastischen Bereichs $0,2 < \nu < 0,5$ gebunden sind. Für die Querdehnzahl ν wird die Gleichung der Größe in die Grenzzustandsfunktion (171) eingesetzt, für die die Werte der beiden Grenzzustände ermittelt werden sollen (172).

$$\nu = \nu' \tag{171}$$

$$\nu = \frac{\tan \varphi_E - 1}{\tan \varphi_E - 2} = \frac{2}{m + 3} = \frac{1}{I_E + 2} = \frac{2}{2I_C - I_P + 4} \tag{172}$$

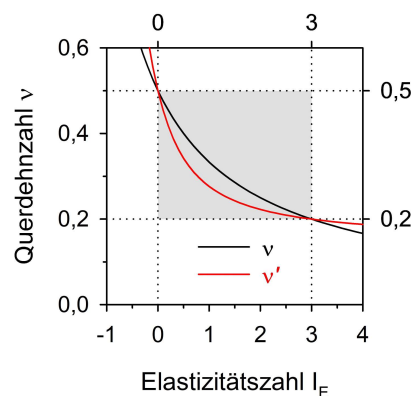
Die Hilfsgröße Querdehnzahl ν' enthält in Gleichung (174) die Variable x . Für die Variable x ist die Fließbedingung nach Mohr-Coulomb einzusetzen (173). Die Größe, aus der Querdehnzahl ν bestimmt wird, und die Größe der Fließbedingung nach Mohr-Coulomb müssen identisch sein.

$$x = \tan \varphi_E = \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} = \frac{m - 1}{m + 1} = \frac{I_E}{I_E + 1} = \frac{2I_C - I_P}{2I_C - I_P + 2} \tag{173}$$

$$\nu' = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \tag{174}$$

In Gleichung (175) und in Abbildung 20 wird die Funktionsweise der Grenzzustandsfunktion am Beispiel der Elastizitätszahl I_E dargestellt. Die Lösungen im Diagramm sind die beiden Schnittpunkte der Funktionen für die Querdehnzahlen ν und ν' . Der elastische Bereich wird durch die Schnittpunkte der Funktionen festgelegt und in grau dargestellt.

$$\frac{1}{I_E + 2} = \frac{\sqrt{\left(\frac{I_E}{I_E + 1}\right)^2 + 1} - \left(\frac{I_E}{I_E + 1}\right)}{2\sqrt{\left(\frac{I_E}{I_E + 1}\right)^2 + 1}} \tag{175}$$



- Lösung 1 (Fließpunkt $\nu = 0,5$) $I_E = 0$
- Lösung 2 (Bruchpunkt $\nu = 0,2$) $I_E = 3$

Abbildung 20) Die Grenzpunkte für die Elastizitätszahl I_E

Die Ausgangsgleichung (176) zur Ermittlung der Elastizitätszahl I_E aus Konsistenzzahl I_C und Plastizitätszahl I_P wird verwendet, um die erforderlichen Größen Querdehnzahl ν (177) sowie die Fließbedingung nach Mohr-Coulomb $\tan \varphi_E$ (178) mit den beiden Größen Konsistenzzahl I_C und Plastizitätszahl I_P darzustellen. Mit Bezug auf die Gleichung (175) erhöht sich dadurch die Anzahl der Eingangsgrößen in der Grenzzustandsfunktion $\nu = \nu'$ von einem auf zwei Parameter (178).

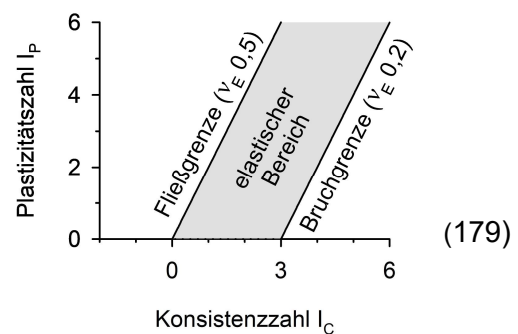
$$I_E = I_C - \frac{I_P}{2} \quad (176)$$

$$\nu = \frac{1}{I_E + 2} = \frac{2}{2I_C - I_P + 4} \quad (177)$$

$$\tan \varphi_E = \frac{I_E}{I_E + 1} = \frac{2I_C - I_P}{2I_C - I_P + 2} \quad (178)$$

Durch die Erweiterung der Anzahl der Eingangsgrößen der Grenzzustandsfunktion auf zwei Parameter werden die beiden Lösungen der Gleichung (179) selbst zu Funktionen. Im vorliegenden Fall repräsentieren die Funktionen die Grenzen, mit denen der elastische Bereich im Atterberg-Versuch eingegrenzt werden kann (Abb. 21). Die Aussagekraft dieser beiden Funktionen ist deutlich größer als die der Punktlösungen der Grenzzustandsfunktion $\nu = \nu'$ mit nur einem Parameter als Eingangsgröße (Abb. 20).

$$\frac{2}{2I_C - I_P + 4} = \frac{\nu = \nu'}{2 \sqrt{\left(\frac{2I_C - I_P}{2I_C - I_P + 2}\right)^2 + 1}}$$



Lösung 1 (Fließgrenze $\nu = 0,5$)

$$2I_C = I_P$$

Lösung 2 (Bruchgrenze $\nu = 0,2$)

$$I_C = \frac{I_P + 6}{2}$$

Abbildung 21) Der elastische Bereich des Atterberg-Versuchs.

Die mit der Grenzzustandsfunktion ermittelten Lösungen sind vor allem dann von Interesse, wenn Gleichungen mit zwei Parametern eingesetzt werden und die beiden Lösungen Funktionen sind. Die Punktlösungen von Ein-Parameter-Gleichungen sind einfacher auf rechnerischem Weg zu ermitteln und haben eine geringere Aussagekraft.

Eine Ausnahme sind z. B. Betrachtungen, die zum Reibungswinkel φ_E durchgeführt werden. Durch die Bezüge zu den Hauptnormalspannungswinkeln φ_1 und φ_2 und den Asymptoten der Umkehrfunktion der Fließbedingung nach Mohr-Coulomb (65) ergibt sich auch mit der Punktlösung eine aussagekräftige Darstellung (Abb. 22).

Der Reibungswinkel φ_E wird mit der Fließbedingung nach Mohr-Coulomb über die Tangensfunktion bestimmt (124). Die Bestimmung der Querdehnzahl ν erfolgt über die Umkehrfunktion der Fließbedingung nach Mohr-Coulomb (125).

$$\tan \varphi_E = \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \quad (124)$$

$$\nu = \frac{\tan \varphi_E - 1}{\tan \varphi_E - 2} \quad (125)$$

Mit den Gleichungen (180) und (181) werden die Grundlagen für die Herleitung der Grenzzustandsfunktion dargestellt. Die Herkunft des Untersuchungsgegenstands φ_E ist in der Funktion $\sin \varphi_E$ nicht zu erkennen. Mit Gleichung (180) wird sichergestellt, dass der Reibungswinkel tatsächlich mit der Tangensfunktion (124) bestimmt wird. Anschließend wird die Funktion $\tan \varphi_E$ in Gleichung (125) durch die Variable x ersetzt. Dadurch lassen sich die Winkelfunktionen als Unsicherheitsfaktor eliminieren. Sie werden entsprechend der Regeln für die Sinusfunktion durch Angaben zu Gegenkathete und Hypotenuse ersetzt (181).

$$\sin(\operatorname{atan}(\tan \varphi_E)) = \sin \varphi_E \quad (180)$$

$$\sin(\operatorname{atan}(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad (181)$$

Der Herleitung des Teils der Grenzzustandsfunktion für die Hilfsgröße Querdehnzahl ν' wird mit den Gleichungen (182) dargestellt. Mit den Gleichungen (183) wird zusätzlich die Möglichkeit aufgezeigt, die Hilfsgröße Querdehnzahl ν' aus den Hauptnormalspannungswinkeln φ_1 und φ_2 zu berechnen. Bei Verwendung der Gleichung (184) sind für $\sin \varphi_E$ ausschließlich positive Werte zulässig ($\sin \varphi_E \in +\mathbb{R}$).

$$\nu' = \frac{1 - \sin(\operatorname{atan}(x))}{2} = \frac{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{2} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \quad (182)$$

$$\nu' = \frac{1 - \sin \varphi_E}{2} = \sin^2(\varphi_2) = \cos^2(\varphi_1) \quad (183)$$

$$\nu' = \frac{1 - |\sin \varphi_E|}{2} \quad (184)$$

Die Gleichung (184) dient der Darstellung der Hilfsgröße Querdehnzahl ν' und wird für einen Vergleich (185) mit der Umkehrfunktion der Fließbedingung nach Mohr-Coulomb (149) verwendet. Die grafische Darstellung der Anwendung der Grenzzustandsfunktion auf den Reibungswinkel φ_E folgt mit Abbildung 22.

$$\nu = \nu'$$

$$\frac{\tan \varphi_E - 1}{\tan \varphi_E - 2} = \frac{1 - |\sin \varphi_E|}{2} \tag{185}$$

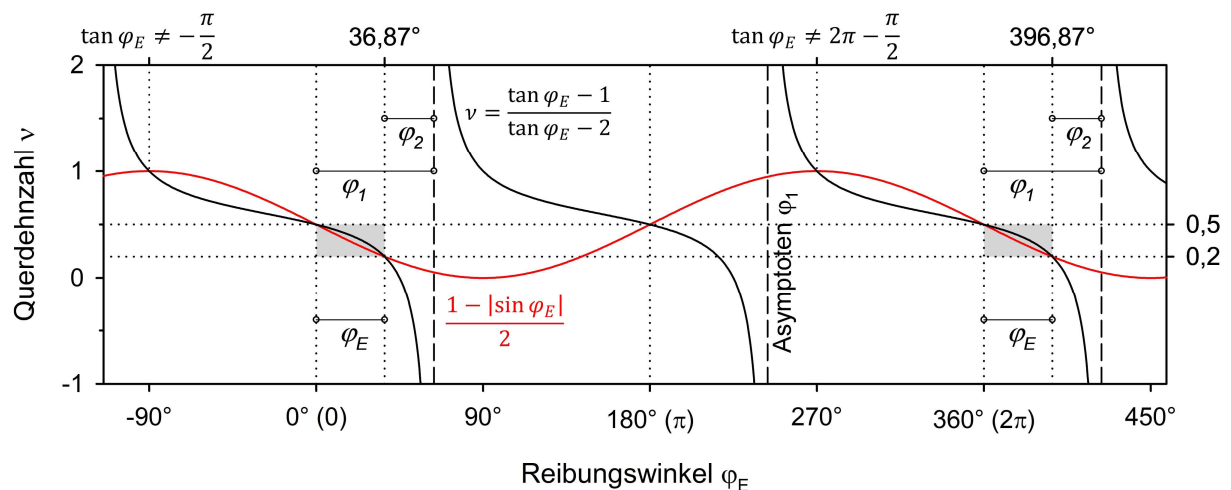


Abbildung 22) Bestimmung der Größe des Reibungswinkels φ_E mit der Grenzzustandsfunktion. Die elastischen Bereiche werden in grau hervorgehoben.

Lösung 1 (Fließpunkt $\nu = 0,5$) $\varphi_E = \pi n \ (n \in \mathbb{Z})$ $\varphi_E = 0^\circ$

Lösung 2 (Bruchpunkt $\nu = 0,2$) $\varphi_E = 2\pi n + 2 \operatorname{atan}\left(\frac{1}{3}\right) \ (n \in \mathbb{Z})$ $\varphi_E = 36,87^\circ$ (186)

In der Abbildung 22 sind die scheinbaren Schnittpunkte der Funktionen bei einer Querdehnzahl $\nu = 1$ Definitionslücken der Tangensfunktion. Die Schnittpunkte bei $\varphi_E = \pi + 2\pi n \ (n \in \mathbb{Z})$ sind ein Teil der Lösung 1 aber nicht relevant. Für die Lösung 1 ist die Lage bei $\varphi_E = 2\pi n \ (n \in \mathbb{Z})$ maßgeblich. Die Hauptnormalspannungswinkel φ_1 und φ_2 sowie der Reibungswinkel φ_E sind an die senkrechten Asymptoten der Tangensfunktion gebunden und die genannten Winkel sind, wie in Abbildung 22 dargestellt, voneinander abhängig ($\varphi_1 = \varphi_2 + \varphi_E$).

3.5.3. Literaturdaten zu den Grenzen des elastischen Bereichs

Die maßgebliche Literatur für den Vergleich mit den eigenen Grenzwertbetrachtungen ist die Veröffentlichung: „*Limits to Poisson's ratio in isotropic materials - general result for arbitrary deformation*“ von MOTT, ROLAND 2013. In dieser Arbeit werden die Definitionsbereiche der Querdehnzahlen aus insgesamt 15 Gleichungen zur Bestimmung der Querdehnzahl aus den elastischen Konstanten verglichen. Bei den Betrachtungen werden zusätzlich variable Größen eingeführt, mit denen Aussagen für beliebige Verformungen möglich sind. Im Ergebnis wird festgestellt, dass die klassischen Gleichungen für den isotropen Fall nur innerhalb eines Definitionsbereichs der Querdehnzahlen von $0,5 > \nu \geq 0,2$ korrekt angewendet werden können.

Der Lösungsansatz in der Arbeit von MOTT, ROLAND 2013 unterscheidet sich deutlich vom Lösungsansatz der eigenen Grenzwertbetrachtungen. Eine Gemeinsamkeit ist die Vorgehensweise, bei den Betrachtungen ausschließlich theoretische Grundlagen zu verwenden und das Hookesche Gesetz für den isotropen Fall als Grundlage zu benutzen. Trotz sehr unterschiedlicher Lösungsansätze sind die Ergebnisse beider Betrachtungen identisch. Der von MOTT, ROLAND 2013 ermittelte Definitionsbereich der Querdehnzahlen $0,5 > \nu \geq 0,2$ entspricht dem elastischen Bereich, der in dieser Arbeit zwischen dem unteren Grenzzustand $\nu < 0,5$ und dem elastischen Grenzzustand $\nu > 0,2$ liegt.

Bei Vergleich der 15 Gleichungen ergeben sich aus dem Verhältnis des biaxialen Elastizitätsmoduls H zum Longitudinalmodul M die größten Einschränkungen hinsichtlich der Größe des Definitionsbereichs der Querdehnzahlen. Die Gleichung aus MOTT, ROLAND 2013 (187) gehört zu insgesamt 4 der 15 geprüften Gleichungen, die quadratische Gleichungen sind und deren Anwendung zu jeweils zwei Lösungen führt. „*Quadratische Ausdrücke mit zwei möglichen Lösungen ... stehen im Widerspruch zum Verhalten von realen Materialien, die in jedem thermodynamischen Zustand eindeutige elastische Konstanten haben. Daher kann nur ein Satz von Lösungen gültig sein.*“ MOTT, ROLAND 2013.

Die Gleichung (187) entspricht der Originaldarstellung (T15) aus der Unterlage von MOTT, ROLAND 2013.

$$\nu = \frac{M}{2H + 4M} \left(2 \frac{H}{M} - 1 \pm \sqrt{9 - 8 \frac{H}{M}} \right) \quad (\text{T15) in MOTT, ROLAND 2013} \quad (187)$$

Die Beziehungen der Eingangsgrößen zur Querdehnzahl bzw. die Gleichung für das Verhältnis der Eingangsgrößen werden mit den Gleichungen (188) bis (190) dargestellt. Durch Umstellen der Gleichung (190) auf die Querdehnzahl ν wird Gleichung (187) erzeugt.

$$\text{biaxialer Elastizitätsmodul } H \qquad H = \frac{E}{1 - \nu} \qquad (188)$$

$$\text{Longitudinalmodul } M \qquad M = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \qquad (189)$$

$$\text{Verhältnis } \frac{H}{M} \qquad \frac{H}{M} = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{(1 - \nu)^2} \qquad (190)$$

Mit einer Extremwertbetrachtung wird für Gleichung (187) das globale Maximum der Funktion bestimmt. Dieses ist einer Querdehnzahl von $\nu = 0,2$ zuzuordnen (191). Die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung ergeben zwei Wertebereiche der Querdehnzahlen, die zwischen den Nullstellen und dem globalen Maximum der Funktion liegen (Abbildung 23).

$$\max\left(\frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{(1 - \nu)^2}\right) = \frac{9}{8} \quad \text{mit } \nu = 0,2 \qquad (191)$$

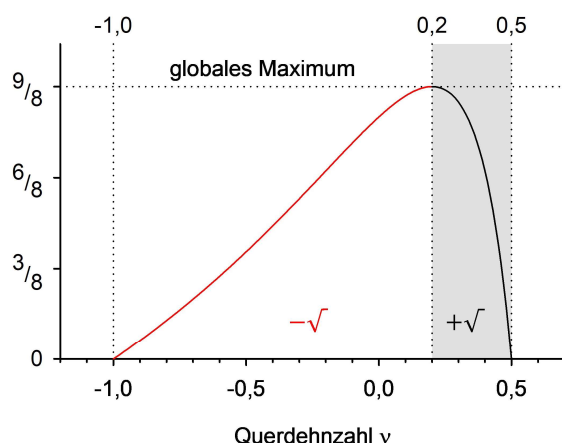


Abbildung 23) Extremwertbetrachtung für die Gleichung (187) nach MOTT, ROLAND 2013

Von den beiden Lösungen der quadratischen Gleichung ist die Lösung auf Grundlage des positiven Wurzelterms die korrekte Lösung.

Die Abbildung ist in vergleichbarer Darstellungsform in MOTT, ROLAND 2013 enthalten (Figure 2). Die dort dargestellten Sachverhalte werden hier auf die wesentlichen Informationen beschränkt und in einer selbst erstellten Grafik mit inhaltlich deutlich reduziertem Umfang dargestellt.

Von den beiden Lösungen der quadratischen Gleichung kann nur eine Lösung die richtige sein. Die Lösung 2 entspricht nach MOTT, ROLAND 2013 dem Definitionsbereich der Querdehnzahlen im isotropen Fall $0,2 < \nu < 0,5$ und ist die korrekte Lösung (193).

$$\text{Lösung 1 } (-\sqrt{}) \qquad -1 < \nu \leq 0,2 \qquad (192)$$

$$\text{Lösung 2 } (+\sqrt{}) \qquad 0,2 \leq \nu < 0,5 \qquad (193)$$

Alle folgenden Ausführungen sind eigene Betrachtungen, die vollständig auf dem Inhalt der Unterlage von MOTT, ROLAND 2013 basieren. Für die Vereinfachung von Berechnungen und für die Ausführung von Grenz- und Extremwertbetrachtungen wird die Originaldarstellung der Gleichung (187) zur Gleichung (194) umgestellt.

$$\nu = \frac{2 \frac{H}{M} - 1 \pm \sqrt{9 - 8 \frac{H}{M}}}{2 \frac{H}{M} + 4} \quad (194)$$

In Abbildung 24 werden die beiden Teilfunktionen der quadratischen Gleichung (194) dargestellt. Die Art der grafischen Darstellung bedingt, dass nur dann eine echte Querdehnzahl vorliegt, wenn die Funktionen auf der Linie gleicher Querdehnzahlen verlaufen. Diese Linie ist im Diagramm die Diagonale, die durch den Koordinatenursprung verläuft. Die Abbildung 25 beschränkt sich auf die Darstellung der relevanten Teilfunktion der quadratischen Gleichung.

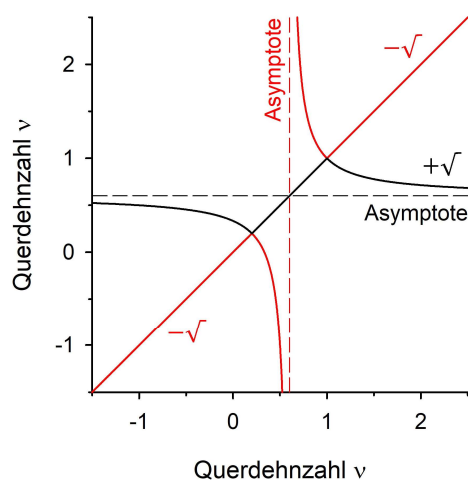


Abbildung 24) Darstellung der Funktionen für die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung (184). In Frage kommende Werte müssen unabhängig von der Funktion auf der Linie gleicher Querdehnzahlen liegen (die durch den Koordinatenursprung verlaufende Diagonale).

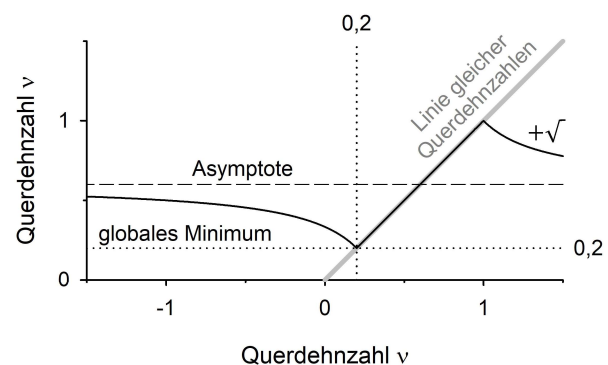


Abbildung 25) Darstellung der Funktion der positiven Lösung der quadratischen Gleichung (184). Das globale Minimum der Funktion liegt bei einer Querdehnzahl von $\nu = 0,2$. Die Darstellung einer kleineren Querdehnzahl ist mit dem Verhältnis aus H/M nicht möglich.

Die Extremwertbetrachtungen ergeben für die in Abbildung 25 dargestellte Funktion ein globales Minimum bei einer Querdehnzahl $\nu = 0,2$. Mit der Funktion aus biaxialem Elastizitätsmodul H und Longitudinalmodul M kann keine kleinere Querdehnzahl als $\nu = 0,2$ ermittelt werden. In Abhängigkeit von den Randbedingungen ergeben sich bei der Extremwertbetrachtung zwei verschiedene Fälle von drei Fällen als Lösung. Die Fälle entsprechen den Grenzen des Definitionsbereichs der Querdehnzahlen $0,2 < \nu < 0,5$ im isotropen Fall (195).

$$\min(\nu) = \min\left(\frac{2 \frac{H}{M} - 1 + \sqrt{9 - 8 \frac{H}{M}}}{2 \frac{H}{M} + 4}\right) = \begin{cases} 0,2 & (H \neq 0) \\ 0,2 \left(M = \frac{8H}{9}\right) & \\ 0,5 & (H = 0) \end{cases} \quad (195)$$

Die Ergebnisse der Grenzwertbetrachtungen für den unteren Grenzzustand entsprechen den Erwartungen. Wenn der Longitudinalmodul gegen $M \rightarrow \infty$ Pa strebt (196) und der biaxiale Elastizitätsmodul gegen $H \rightarrow 0$ Pa strebt (197), muss der Grenzwert der Querdehnzahl per Definition bei $\nu = 0,5$ liegen.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} (\nu) = \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \frac{H}{M} - 1 + \sqrt{9 - 8 \frac{H}{M}}}{2 \frac{H}{M} + 4} \right) = 0,5 \quad (196)$$

$$\lim_{H \rightarrow 0} (\nu) = \lim_{H \rightarrow 0} \left(\frac{2 \frac{H}{M} - 1 + \sqrt{9 - 8 \frac{H}{M}}}{2 \frac{H}{M} + 4} \right) = 0,5 \quad (197)$$

„Die Gleichungen der klassischen Elastizitätstheorie (Lamé) beschränken die möglichen Werte für die Querdehnzahl. Die Beschränkungen ergeben sich aus der der Anforderung, dass die Dehnungsenergie nicht negativ sein darf. Jedes Paar von elastischen Konstanten führt zu verschiedenen Ausdrücken für die Grenzen der Querdehnzahl ν , aber aus Gründen der gegenseitigen Konsistenz sind die restriktivsten Grenzen die richtigen. Das Ergebnis $0,2 \leq \nu < 0,5$ gilt für ein isotropes Material, das beliebig belastet oder verformt wird. Es entspricht dem Gültigkeitsbereich der großen Mehrheit der isotropen Materialien, auch wenn Feststoffe mit einer Querdehnzahl von $\nu < 0,2$ existieren. Allerdings können die klassischen Gleichungen nicht auf letztere angewendet werden.“ MOTT, ROLAND 2013

4. Atterberg-Kontinuum

4.1. Zweite Triggerwarnung

Das Kapitel 4 enthält Abbildungen, die beim Betrachter negative Gefühle wie Abscheu, Ekel und Entsetzen auslösen können.

4.2. Ausführung des Atterberg-Versuchs

Es wird die Versuchsdurchführung mit dem Fließgrenzengerät nach CASAGRANDE 1932 beschrieben. Die Ausführung der Versuche zur Bestimmung der Wassergehalte an der Fließgrenze w_L und der Ausrollgrenze w_p sowie zur Bestimmung des natürlichen Wassergehalts w_N wird in DIN EN ISO 17892-12:2022-08 geregelt.

natürlicher Wassergehalt w_N : Der natürliche Wassergehalt w_N ist der Wassergehalt der Bodenprobe bei Probenentnahme.

Wassergehalt an der Fließgrenze w_L : Eine durch Wasserzugabe aufbereitete Bodenprobe, deren Wassergehalt im sehr weichen bis breiigen Bereich und damit im Bereich der Fließgrenze w_L liegt, wird in die Schale des Fließgrenzengeräts nach CASAGRANDE 1932 gefüllt. Anschließend wird mit dem Furchenzieher eine definierte Furche gezogen und die Anzahl der Schläge ermittelt, die nötig sind die Furche auf 1 cm Länge zu schließen. Der Vorgang wird bei einer leichten Änderung des Wassergehalts der Probe so lange wiederholt, bis eine Anzahl von mindestens 4 Einzelversuchen vorliegt. Der aus den Einzelergebnissen berechnete Wassergehalt bei 25 Schlägen ist der Wassergehalt an der Fließgrenze w_L .

Wassergehalt an der Ausrollgrenze w_p : Eine durch Wasserzugabe aufbereitete Bodenprobe, deren Wassergehalt sicher im weich- bis steifplastischen Bereich und damit deutlich unterhalb der Ausrollgrenze w_p liegt, wird geknetet und anschließend zu Rollen von ca. 3 mm Durchmesser geformt. Der Vorgang ist auf einer saugfähigen Unterlage (Holzbrett etc.) auszuführen und so lange zu wiederholen, bis die Rollen anfangen einzureißen und zu zerfallen. Ist dieser Zustand erreicht, wird an der aufbereiteten Bodenprobe der Wassergehalt an der Ausrollgrenze w_p bestimmt.

Unter der Beachtung des unter Punkt 2.7.2. formulierten Selbstanspruchs auf möglichst einfache Darstellungen, wird der komplexe Prozess der Bestimmung von Ausrollgrenzen w_p mit der Verwendung eines Vergleichsbeispiels leicht verständlich illustriert (Abb. 26).



Abbildung 26) Bestimmung der Ausrollgrenze. Nicht maßstabsgerechtes Vergleichsbeispiel für die Probenbeschaffenheit bei Ende der Versuchsdurchführung. So in etwa sieht's aus.

Es wird empfohlen, zusätzlich den Glühverlust nach DIN EN 17685-1-2023-04 zu bestimmen. Zur Schärfung der Beobachtung ist die Probenmenge großzügig zu bemessen und der Muffelofen darf nicht über eine außenliegende Ablufführung verfügen. Bildquelle: © SIPPEL 2021

4.3. Stand der Technik

Das aktuelle Verständnis zur Lage der Konsistenzgrenzen und Plastizitätsgrenzen wird in den Abbildungen 27 und 28 dargestellt. Die Grenzen in beiden Diagrammen entsprechen den Angaben in der Darstellung des Geologischen Landesamts der Stadt Hamburg (KAUSCH 2020), welche in der hier vorgelegten Arbeit als zweite Beobachtungsgrundlage (Abb. 29) Teil der Schlüsselbeobachtung ist.

Die Grenzen in den Abbildungen 27 und 28 ergeben keinen Sinn. Bei einem senkrechten bzw. waagerechten Verlauf der Grenzen gibt es keinen Zusammenhang zwischen der Größe, die auf der Abszisse dargestellt wird und der Größe, die auf der Ordinate abgebildet wird. Die Größe y ist als Darstellung von Grenzen in beiden Diagrammen von Größe x unabhängig. Setzt man beide Diagramme in Beziehung, ergibt sich auch kein Zusammenhang zwischen den Konsistenzgrenzen und den Plastizitätsgrenzen. Diese Aussagen können geprüft werden, indem man versucht die Grenzen mit einer sinnvollen Funktion zu belegen.

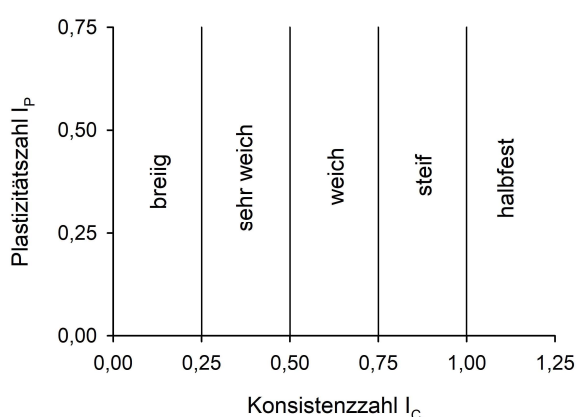


Abbildung 27) Der aktuelle Stand der Technik mit Bezug auf die Konsistenzgrenzen (siehe auch Abbildung 29).

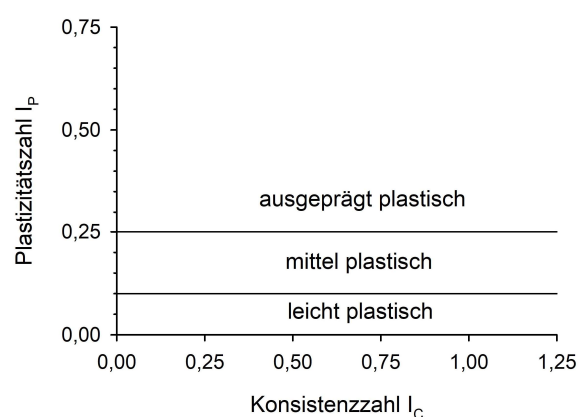


Abbildung 28) Der aktuelle Stand der Technik mit Bezug auf die Plastizitätsgrenzen (siehe auch Abbildung 29).

Die erste Möglichkeit der Interpretation ist, dass tatsächlich kein Zusammenhang zwischen Konsistenzzahl I_C und Plastizitätszahl I_P existiert. Die Gültigkeit dieser Annahme erscheint jedoch als unwahrscheinlich. Die Gleichung zur Bestimmung der Konsistenzzahl I_C enthält die Gleichung zur Bestimmung der Plastizitätszahl I_P im Nenner. Damit besteht zwischen den beiden Größen zumindest ein rechnerischer Zusammenhang.

Die wahrscheinlichere Annahme ist in diesem Fall, dass ein bislang unbekannter Drittparameter zu ermitteln und in die Betrachtung der Beziehung zwischen Konsistenzzahl I_C und Plastizitätszahl I_P einzubeziehen ist.

4.4. Schlüsselbeobachtung

Die Schlüsselbeobachtung basiert auf einen Vergleich zwischen Ergebnissen von Atterberg-Versuchen des Geologischen Landesamts der Stadt Hamburg (KAUSCH 2020) und den Ergebnissen von Grenzwertbetrachtungen im Mohrschen Spannungskreis. Sie hat in dieser Arbeit eine große Bedeutung für alle Interpretationen und Schlussfolgerungen.

erste Beobachtungsgrundlage

Die erste Beobachtungsgrundlage ist der Repräsentant der Mohrschen Spannungskreise Druck und Zug im elastischen Grenzzustand (Abb. 17).

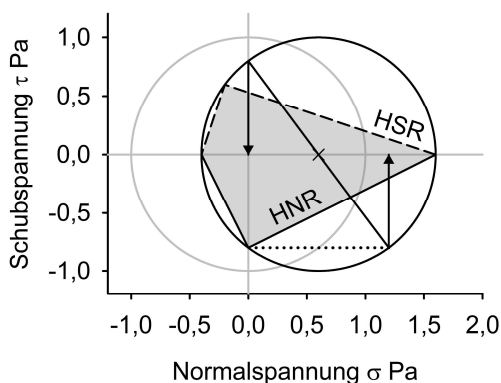


Abbildung 17) erste Beobachtungsgrundlage
Repräsentant des MOHRschen Spannungskreises Druck und Zug im elastischen Grenzzustand.

Im Ergebnis einer Grenzwertbetrachtung wurde festgestellt, dass der Spannungskreis nicht weiter nach rechts verschoben werden darf. Die Lage einer senkrechten Asymptote kennzeichnet eine Querdehnzahl von $\nu = 0,2$ als Grenzwert im elastischen Grenzzustand. Die in der Darstellung hervorgehobene Fläche wird durch die Hauptnormalspannungsrichtungen (HNR) und die um 90° im Uhrzeigersinn gedrehten Hauptschubspannungsrichtungen (HSR) aufgespannt.

zweite Beobachtungsgrundlage

Die zweite Beobachtungsgrundlage ist Abbildung 29, welche der Arbeit von KAUSCH 2020 als Originaldarstellung entnommen wurde.

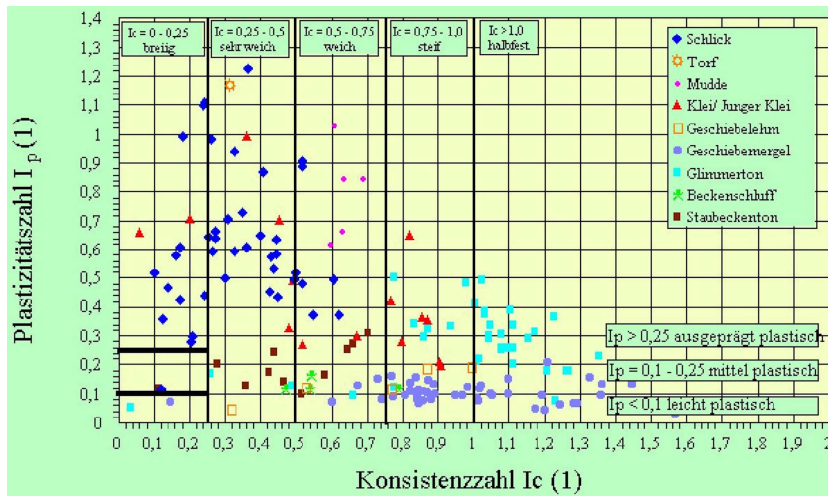


Abbildung 29) zweite Beobachtungsgrundlage

Originaldarstellung aus „Geo-technische Charakterisierung des Hamburger Baugrunds“ KAUSCH 2020

Referenzdatensatz Hamburg mit Ergebnissen von Atterberg-Versuchen

Enthält Angaben zum aktuel-lem Verständnis der Konsistenz- und Plastizitätsgrenzen.

Schlüsselbeobachtung

Alle in Abbildung 29 dargestellten Ergebnisse von Atterberg-Versuchen liegen nach Rotation der Abbildung innerhalb der hervorgehobenen Fläche (Abb. 30), die in der ersten Beobachtungsgrundlage erläutert wird. Die in Abbildung 29 dargestellten Versuchsergebnisse füllen die Fläche in Abb. 17 bzw. Abb. 30 ohne größere Lücken vollständig aus.

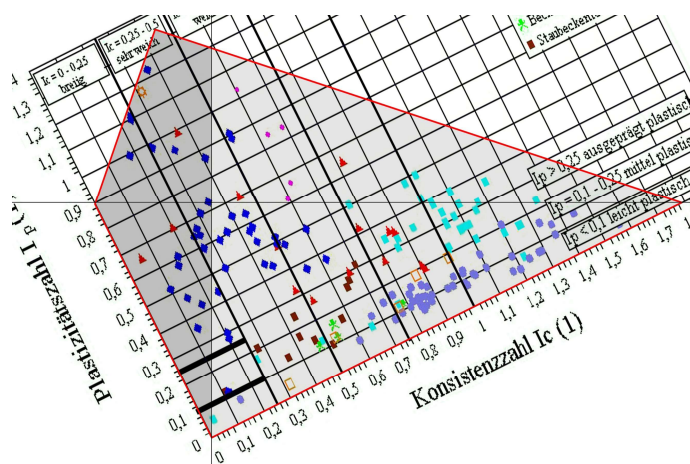


Abbildung 30) Schlüsselbeobachtung kombinierte Darstellung der ersten und zweiten Beobachtungsgrundlage

Ergebnisse von Atterberg-Versuchen aus dem Referenzdatensatz des Geologischen Landesamts der Stadt Hamburg im Atterberg-Kontinuum.

Die Originaldarstellung der zweiten Beobachtungsgrundlage wurde gedreht, entzerrt und verfährt.

Durch die Hauptnormalspannungsrichtungen (HNR) und die um 90° im Uhrzeigersinn gedrehten Hauptschubspannungsrichtungen (HSR) wird im elastischen Grenzzustand des Repräsentanten der Spannungskreise Druck und Zug eine Fläche aufgespannt (Abb. 17), die im weiteren Verlauf dieser Arbeit als **ATTERBERG-KONTINUUM** bezeichnet wird (Abb. 30).

Der Bereich des Atterberg-Kontinuums mit ursprünglich negativen Normalspannungen wird in Abbildung 30 in dunkelgrau und der Bereich des Atterberg-Kontinuums mit ursprünglich positiven Normalspannungen in hellgrau dargestellt. Diese Information ist wesentlich, weil die sinnvolle Zuweisung von technischen Größen und die Möglichkeit für Berechnungen im Regelfall auf den Bereich mit ursprünglich positiven Normalspannungen beschränkt sind.

Hinweise zu den Daten des Landesamts der Stadt Hamburg

Die Darstellungen in der Arbeit von KAUSCH 2020: „Geologische Charakterisierung des Hamburger Baugrunds“ und der Datensatz des Geologischen Landesamts der Stadt Hamburg unterscheiden sich geringfügig. Für diese Arbeit sind die Daten maßgeblich, die per Download als tabellarische pdf-Protokolle durch das Geologische Landesamt der Stadt Hamburg bis Ende 2022 zur Verfügung gestellt wurden. Alle Protokolle wurden gesichert und liegen vor. Dementsprechend gibt es in den Originalgrafiken von KAUSCH 2020 und den auf Grundlage der pdf-Protokolle erstellten, eigenen Grafiken geringfügige Unterschiede.

Der Datensatz des Geologischen Landesamts der Stadt Hamburg mit den Ergebnissen von Atterberg-Versuchen wird in dieser Arbeit als Referenzdatensatz verwendet. Aus den pdf-Protokollen konnten Angaben zu 140 Atterberg-Versuchen entnommen werden. Für die Auswertung und die eigenen grafischen Darstellungen werden ausschließlich die Angaben aus den pdf-Protokollen der Stadt Hamburg verwendet.

4.5. Beschreibung von bekannten Größen

4.5.1. Wassergehalte an den Zustandsgrenzen (Atterberg-Limits)

Die folgenden Größen sind bekannt und werden unter Punkt 4.5.1. bis 4.5.3. beschrieben.

- Wassergehalte w an den Zustandsgrenzen
- Konsistenzzahl I_C
- Plastizitätszahl I_p

Die Wassergehalte an den nachfolgend aufgeführten Zustandsgrenzen sind für die Ausführung und Auswertung von Atterberg-Versuchen wesentlich.

- Fließgrenze w_L (Liquid-Limit LL)
- Ausrollgrenze w_p (Plastic-Limit PL)

Eine weitere Zustandsgrenze ist die Schrumpfgrenze w_S . Sie ist für den Atterberg-Versuch von geringerer Bedeutung als die vorgenannten Zustandsgrenzen.

- Schrumpfgrenze w_S (Shrinkage-Limit SL)

Nicht zu den eigentlichen Zustandsgrenzen gehören:

- der natürliche Wassergehalt w_N (natural moisture content w)
- die normierten Wassergehalte \hat{w}

Legende zu den Beziehungen zwischen den gebräuchlichen Formelzeichen:

$$w_L = \frac{LL}{100} \quad w_P = \frac{PL}{100} \quad w_N = \frac{w}{100} \quad w_S = \frac{SL}{100}$$

Der natürliche Wassergehalt w_N ist die Bezugsgröße, die den aktuellen Zustand bei Probenentnahme repräsentiert. Die Fließgrenze w_L und die Ausrollgrenze w_P werden unter dem Einfluss mechanischer Belastungen ermittelt und definieren die Bodenreaktion.

Für die Bestimmung der Fließgrenze w_L des Atterberg-Versuchs wird ein Zustand in der Umgebung der Fließgrenze w_L voreingestellt. Anschließend wird die Reaktion der Probe auf eine mechanische Belastung mit dem Fließgrenzengerät gemessen. Mit den Messergebnissen wird der in der Umgebung der Fließgrenze liegende Wassergehalt auf den Wassergehalt an der Fließgrenze w_L korrigiert. Das Funktionsprinzip des Versuchs zur Bestimmung der Fließgrenze w_L ist in einer vorab definierten Umgebung mittels mechanischer Belastungen eine Bodenreaktion zu erzeugen und zu messen.

Für die Bestimmung der Ausrollgrenze w_P des Atterberg-Versuchs wird eine definierte Reaktion auf eine mechanische Belastung bei gleichzeitig sinkendem Wassergehalt als der Zustand angenommen, der der Ausrollgrenze w_P entspricht. Das Funktionsprinzip des Versuchs zur Bestimmung der Ausrollgrenze w_P ist, mittels mechanischer Belastungen (bei gleichzeitig sinkendem Wassergehalt) eine vorab definierte Bodenreaktion zu erzeugen.

Die Konsistenzzahl I_C kann als Einheitsvektor auf der Oberfläche der Einheitskugel dargestellt werden, wenn aus den Wassergehalten an der Fließgrenze w_L , der Ausrollgrenze w_P und dem natürlichen Wassergehalt w_N die normierten Wassergehalte \hat{w}_L , \hat{w}_P und \hat{w}_N ermittelt werden.

Die Berechnung der normierten Wassergehalte \hat{w} aus den Wassergehalten w wird mit den Gleichungen (198) bis (200) ausgeführt.

$$\hat{w}_L = w_L \cdot \frac{\sqrt{w_L^2 + w_P^2 + w_N^2}}{w_L^2 + w_P^2 + w_N^2} \quad (198)$$

$$\hat{w}_P = w_P \cdot \frac{\sqrt{w_L^2 + w_P^2 + w_N^2}}{w_L^2 + w_P^2 + w_N^2} \quad (199)$$

$$\hat{w}_N = w_N \cdot \frac{\sqrt{w_L^2 + w_P^2 + w_N^2}}{w_L^2 + w_P^2 + w_N^2} \quad (200)$$

Die Länge des Einheitsvektors $\vec{e}_{\hat{w}}$ ergibt sich aus den normierten Wassergehalten \hat{w} nach der Gleichung (201):

$$\vec{e}_{\hat{w}} = \frac{1}{\sqrt{\hat{w}_L^2 + \hat{w}_P^2 + \hat{w}_N^2}} \cdot \begin{pmatrix} \hat{w}_L \\ \hat{w}_P \\ \hat{w}_N \end{pmatrix} = 1 \quad (201)$$

4.5.2. Konsistenzzahl

Die Konsistenzzahl I_C ist ein Verhältniswert mit Größe der Dimension Zahl. Sie wird zur Beschreibung des aktuellen Zustands von Böden mit bindiger Bodenreaktion verwendet und ist eine veränderliche Größe.

Konsistenzzahl I_C (Consistency-Index CI)

$$I_C = \frac{w_L - w_N}{w_L - w_P} = \frac{w_L - w_N}{I_P} = \frac{LL - w}{LL - PL} = \frac{LL - w}{PI}$$

Legende zu den Beziehungen zwischen den gebräuchlichen Formelzeichen:

$$I_C = CI$$

Die Konsistenzzahl I_C kann ohne Einschränkungen aus den Wassergehalten w und aus den normierten Wassergehalten \hat{w} ermittelt werden (202). Bei Darstellung der normierten Wassergehalte \hat{w} als Einheitsvektoren erzeugt sich die Konsistenzzahl I_C ohne Anwendung einer Gleichung von selbst (Abb. 31).

$$I_C = \frac{w_L - w_N}{w_L - w_P} = \frac{\hat{w}_L - \hat{w}_N}{\hat{w}_L - \hat{w}_P} \quad (202)$$

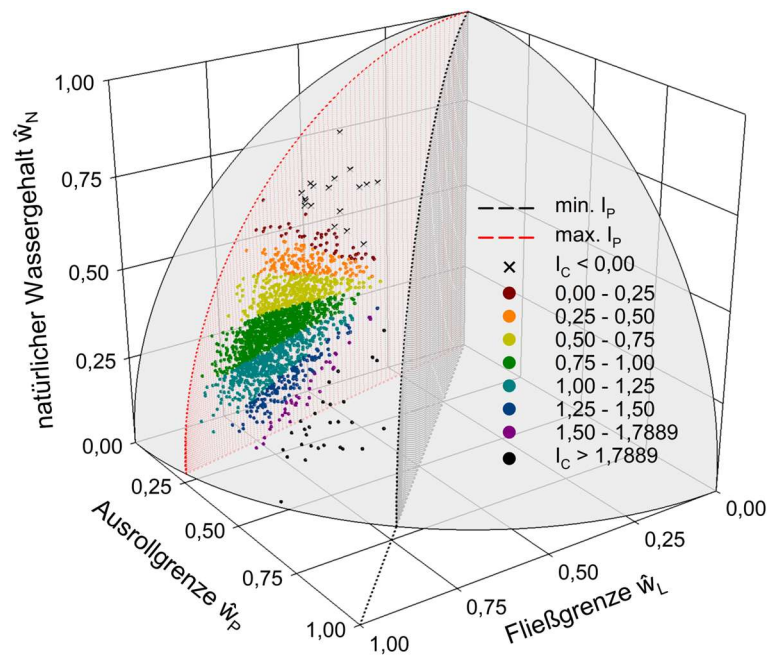


Abbildung 31) 3D-Diagramm mit den normierten Wassergehalten aus dem Atterberg-Versuch.

Die Darstellung der Konsistenzzahlen I_C als Einheitsvektoren der normierten Wassergehalte auf der Oberfläche der Einheitskugel erzeugt sich von selbst.

Der auf der Oberfläche der Einheitskugel in Abbildung 31 dargestellte Gültigkeitsbereich wird durch die Plastizität definiert und gilt für die Konsistenzzahl I_C . Die Grenzen des Gültigkeitsbereichs sind die minimale Plastizität $\min. I_P$ ($I_P = 0$) und die maximale Plastizität $\max. I_P$. Weil die Plastizitätszahl I_P nicht mit normierten Wassergehalten \hat{w} dargestellt werden kann, wurden die Angaben zum Gültigkeitsbereich der Konsistenzzahl I_C auf der Oberfläche der Einheitskugel über den folgenden Weg ermittelt.

Die Grenze der minimalen Plastizität $\min. I_P$ gilt für den Fall $I_P = 0$. Sie ergibt sich unter der Bedingung $\hat{w}_L = \hat{w}_P$ und teilt den in der Abbildung 31 dargestellten Raum in einem Winkel von $\varphi = 45^\circ$ diagonal in zwei gleichgroße Hälften. Für die Bestimmung der Grenze der maximalen Plastizität $\max. I_P$ sind vorab zwei Grenzpunkte festzulegen:

- oberer Grenzpunkt mit dem größtmöglichen normierten, natürlichen Wassergehalt von $\hat{w}_N = 1$
- unterer Grenzpunkt mit dem kleinstmöglichen normierten, natürlichen Wassergehalt von $\hat{w}_N = 0$

Die beiden konstanten Größen des Atterberg-Kontinuums $I_{C \max}$ und $I_{P \max}$ sind in die Fließbedingung nach Mohr-Coulomb einzusetzen (203), und es ist der im Atterberg-Kontinuum maximal mögliche Reibungswinkel aus $I_{P \max}$ zu ermitteln (204) Die beiden konstanten Größen des Atterberg-Kontinuums $I_{C \max}$ und $I_{P \max}$ werden unter Punkt 4.8.1. erläutert.

$$\tan \varphi_E = \frac{I_{C \max}}{I_{C \max} + 1} = I_{P \max} = \frac{4}{4 + \sqrt{5}} = 0,64143 \quad (203)$$

$$\varphi_E = \text{atan}(0,64143) = 32,68^\circ \quad (204)$$

Weil unter der Bedingung $\hat{w}_L \geq \hat{w}_P$ alle Daten in Abbildung 22 links der Grenze der minimalen Plastizität $\min. I_p = 0$ liegen müssen, und die Grenze $\min. I_p$ unter der Bedingung $\hat{w}_L = \hat{w}_P$ den Raum in einem Winkel von $\varphi = 45^\circ$ teilt, ist der im Atterberg-Kontinuum maximal mögliche Reibungswinkel $\tan \varphi_E = 32,68^\circ$ von $\varphi = 45^\circ$ abzuziehen.

$$45^\circ - \text{atan}(I_{p \max}) = 45^\circ - 32,68^\circ = 12,32^\circ \quad (205)$$

Der über die Fließbedingung nach Mohr-Coulomb ermittelte Winkel von $\varphi_E = 12,32^\circ$ wird zur Bestimmung der Raumkoordinaten für die normierte Fließgrenze \hat{w}_L und die normierte Ausrollgrenze \hat{w}_P verwendet. Die Raumkoordinaten (208) gelten für den unteren Grenzpunkt in Verbindung mit dem kleinstmöglichen normierten, natürlichen Wassergehalt $\hat{w}_N = 0$.

$$\hat{w}_L = \cos(45^\circ - \text{atan}(I_{p \max})) = \cos(12,32^\circ) = 0,9770 \quad (206)$$

$$\hat{w}_P = \sin(45^\circ - \text{atan}(I_{p \max})) = \sin(12,32^\circ) = 0,2134 \quad (207)$$

$$\overrightarrow{I_{p(\hat{w}_N=0)}} = \frac{1}{\sqrt{\hat{w}_L^2 + \hat{w}_P^2 + \hat{w}_N^2}} \cdot \begin{pmatrix} \hat{w}_L \\ \hat{w}_P \\ \hat{w}_N \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{0,9770^2 + 0,2134^2 + 0^2}} \cdot \begin{pmatrix} 0,9770 \\ 0,2134 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \quad (208)$$

Der obere Grenzpunkt der maximalen Plastizität $\max. I_p$ liegt bei dem größtmöglichen normierten, natürlichen Wassergehalt von $\hat{w}_N = 1$. Daraus folgt, dass die Wassergehalte an der normierten Fließgrenze $\hat{w}_L = 0$ und der normierten Ausrollgrenze $\hat{w}_P = 0$ sein müssen.

$$\overrightarrow{\max. I_{p(\hat{w}_N=1)}} = \frac{1}{\sqrt{\hat{w}_L^2 + \hat{w}_P^2 + \hat{w}_N^2}} \cdot \begin{pmatrix} \hat{w}_L \\ \hat{w}_P \\ \hat{w}_N \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \quad (209)$$

Die Grenzpunkte sind die beiden Endpunkte einer Linie, die auf der Oberfläche der Einheitskugel verläuft und die Grenze der maximalen Plastizität $\max. I_p$ darstellt (Abb. 32).

Die Konsistenzzahl I_C kann für den unteren Grenzpunkt über die normierten Wassergehalte \hat{w} bestimmt werden (210) und ist bei einem normierten, natürlichen Wassergehalt von $\hat{w}_N = 0$ gleich $I_C = 1,2795$.

$$I_{C(\hat{w}_N=0)} = \frac{\hat{w}_L - \hat{w}_N}{\hat{w}_L - \hat{w}_P} = \frac{0,9770 - 0}{0,9770 - 0,2134} = 1,2795 \quad (210)$$

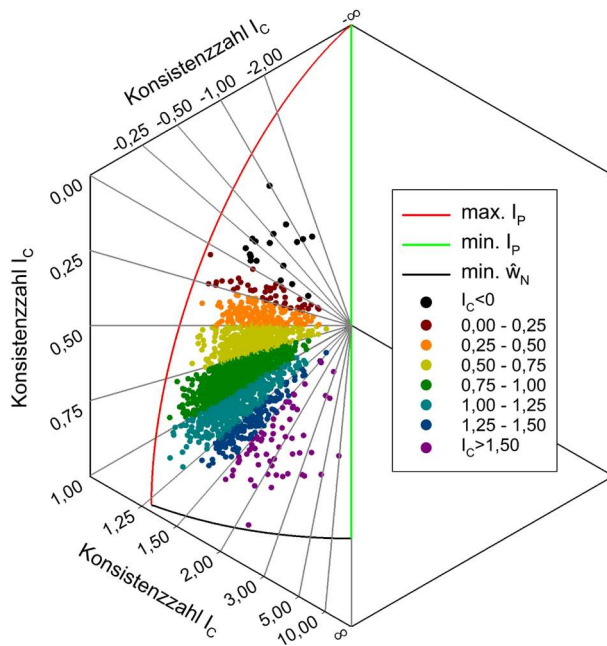


Abbildung 32) Selbsterzeugung der Konsistenzzahlen I_C aus den normierten Wassergehalten, Darstellung von I_C als Einheitsvektoren auf der Oberfläche der Einheitskugel

3D-Darstellung perspektivisch entzerrt und gedreht, Gesamtdatensatz + LKN, 2204 Daten

Der Koordinatenursprung liegt bei:

$$\hat{w}_L = \hat{w}_P = \hat{w}_N = 0$$

Der Ursprung der Linien gleicher Konsistenzzahlen I_C ist der Einheitsvektor mit den Koordinaten:

$$\hat{w}_L = \hat{w}_P = \hat{w}_N = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,57735$$

Die Raumdiagonale verläuft durch die beiden Ursprünge und ist Mittelpunkt (Pol) eines regelmäßigen Sechsecks. Die Konsistenzzahlen I_C werden nicht auf einer Ebene abgebildet, sondern auf eine Ebene projiziert.

In Darstellungen auf Grundlage der normierten Wassergehalte \hat{w} kann die Konsistenzzahl I_C theoretisch alle Werte zwischen $-\infty < I_C < \infty$ annehmen ($I_C \in \mathbb{R}$) und sie kann nicht außerhalb des Gültigkeitsbereichs mit den Grenzen $\min. I_P$, $\max. I_P$ und $\hat{w}_N = 0$ liegen.

Durch die Normierung wird die Vergleichbarkeit der drei Wassergehalte w hergestellt. Die Konsistenzzahl I_C wird in Abbildung 32 nicht berechnet. Sie ist eine emergente Information, die sich aus den normierten Wassergehalten \hat{w} ohne Anwendung einer Gleichung selbst erzeugt. Bei der Selbsterzeugung wird die Konsistenzzahl in einer Schnittebene als eine Art Polarkoordinaten dargestellt. Die Schnittebene ist mit einem Winkel von 45° zu allen Raumachsen orientiert, und die Konsistenzzahlen sind Projektionen der Einheitsvektoren auf diese Ebene, wobei der Pol der Darstellung dem Durchstichpunkt der Raumdiagonale durch die Oberfläche der Einheitskugel entspricht. Somit berührt die Schnittebene die Oberfläche der Einheitskugel nur am Pol. Weil die Fließgrenze \hat{w}_L nicht kleiner sein kann als die Ausrollgrenze \hat{w}_P , wird nur die linke Hälfte der Schnittebene mit Daten besetzt ($I_P \geq 0$).

Die Anwendung der normierten Wassergehalte hat eine eher geringe praktische Bedeutung, d. h. es ist nicht zu erwarten, dass sich aus den Zusammenhängen eine praktische Anwendungsmöglichkeit ergibt. Jedoch ist der Mehrwert hinsichtlich der theoretischen Grundlagen als sehr hoch einzuschätzen. Die drei Wassergehalte Fließgrenze w_L , Ausrollgrenze w_P und natürlicher Wassergehalt w_N werden in drei voneinander unabhängigen Teilversuchen ermittelt. Die Selbsterzeugung der Konsistenzzahl aus den normierten Wassergehalten \hat{w} belegt eine strenge Grundordnung zwischen den drei Wassergehalten und erklärt auch die guten Ergebnisse der statistischen Betrachtungen.

Wird die Grenze der maximalen Plastizität mit der Sinusfunktion nach JAKY 1944 ermittelt, steht im Vergleich zur Anwendung der Fließbedingung nach Mohr-Coulomb (Tangensfunktion) ein zusätzlicher Bereich für die Darstellung von Versuchsergebnissen zur Verfügung. Es ist festzustellen, dass 0 von insgesamt 2204 Versuchen in dem Bereich liegen, der durch Anwendung der Sinusfunktion nach JAKY 1944 zusätzlich zur Verfügung steht (Abb. 33).

Die Gleichung (211) auf Grundlage der Sinusfunktion nach JAKY 1944 führt zu einer Lage der Grenze der maximalen Plastizität bei einem Winkel von $5,1^\circ$ (212), beginnend mit $\varphi = 0^\circ$ ab den Koordinaten $\hat{w}_N = 0$, $\hat{w}_P = 0$ und $\hat{w}_L = 1$. Die Grenze wird in Abbildung 33 mit $\sin \varphi_E$ gekennzeichnet.

$$\sin \varphi_E = \frac{I_{C \max}}{I_{C \max} + 1} = I_{P \max} = 0,64143 = \sin(39,9^\circ) \quad (211)$$

$$45^\circ - 39,9^\circ = 5,1^\circ \quad (212)$$

Die Fließbedingung nach Mohr-Coulomb (213) auf Grundlage der Tangensfunktion führt zu einer Lage der Grenze der maximalen Plastizität bei $12,3^\circ$ (214), beginnend mit $\varphi = 0^\circ$ ab den Koordinaten $\hat{w}_N = 0$, $\hat{w}_P = 0$ und $\hat{w}_L = 1$. Die Grenze wird in Abbildung 33 mit $\tan \varphi_E$ gekennzeichnet.

$$\tan \varphi_E = \frac{I_{C \max}}{I_{C \max} + 1} = I_{P \max} = 0,64143 = \tan(32,7^\circ) \quad (213)$$

$$45^\circ - 32,7^\circ = 12,3^\circ \quad (214)$$

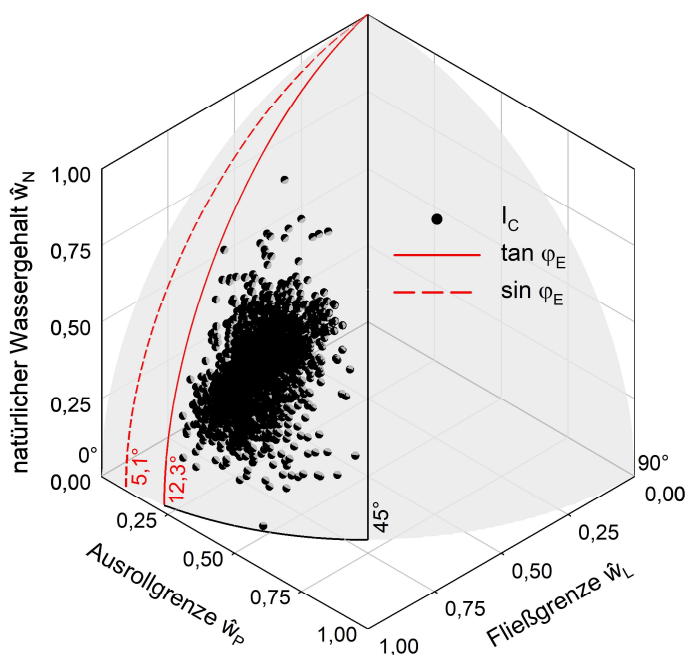


Abbildung 33) Aus den normierten Wassergehalten erzeugte Konsistenzzahlen I_C , Darstellung von I_C als Einheitsvektoren auf der Oberfläche der Einheitskugel

3D-Darstellung perspektivisch entzerrt und gedreht, Gesamtdatensatz + LKN, 2204 Daten

Die grafische Darstellung enthält 2 verschiedene Grenzen der maximalen Plastizität. Die Grenze auf Grundlage der Tangensfunktion ist die korrekte Grenze. Die Grenze auf Grundlage der Sinusfunktion (JAKY 1944) ist nicht relevant.

Mit einer emergenten Selbsterzeugung von Informationen ist eine systemtheoretische Betrachtung von Zusammenhängen naheliegend, d. h. die normierten Wassergehalte \hat{w} ermöglichen ggf. neue Denkansätze. Für eine weiterführende Einschätzung der Möglichkeiten fehlen die geisteswissenschaftlichen Grundlagen.

4.5.3. Plastizitätszahl

Die Plastizitätszahl I_p ist eine Größe der Dimension Zahl. Sie wird als nicht veränderliche Größe betrachtet und ist für einen Boden charakteristisch. Deshalb wird sie für die Beschreibung und Klassifizierung von Böden mit bindiger Bodenreaktion verwendet.

Im Atterberg-Kontinuum ist die Plastizitätszahl I_p die Größe, die die Zeitabhängigkeit einer Bodenreaktion beschreibt. Eine nicht bindige Bodenreaktion erfolgt in Böden mit einer Plastizitätszahl von ungefähr $I_p \cong 0$ und die Zeitabhängigkeit äußert sich bei Belastung als Sofortsetzung. Eine bindige Bodenreaktion tritt in Böden mit Plastizitätszahlen deutlich größer $I_p \gg 0$ auf und die Zeitabhängigkeit äußert sich bei Belastung als verzögerte Setzung.

Nach menschlichen Zeitmaßstäben ist die Plastizitätszahl I_p eine konstante Größe. In geologischen Zeiträumen kann sie sich in Prozessabhängigkeit ändern und ist eine variable Größe.

Die Plastizitätszahl I_p wird aus dem Wassergehalt an der Fließgrenze w_L und dem Wassergehalt an der Ausrollgrenze w_P bestimmt.

Plastizitätszahl I_p (Plasticity-Index PI)

$$I_p = w_L - w_P = \frac{LL - PL}{100}$$

$$PI = LL - PL$$

Legende zu den Beziehungen zwischen den gebräuchlichen Formelzeichen:

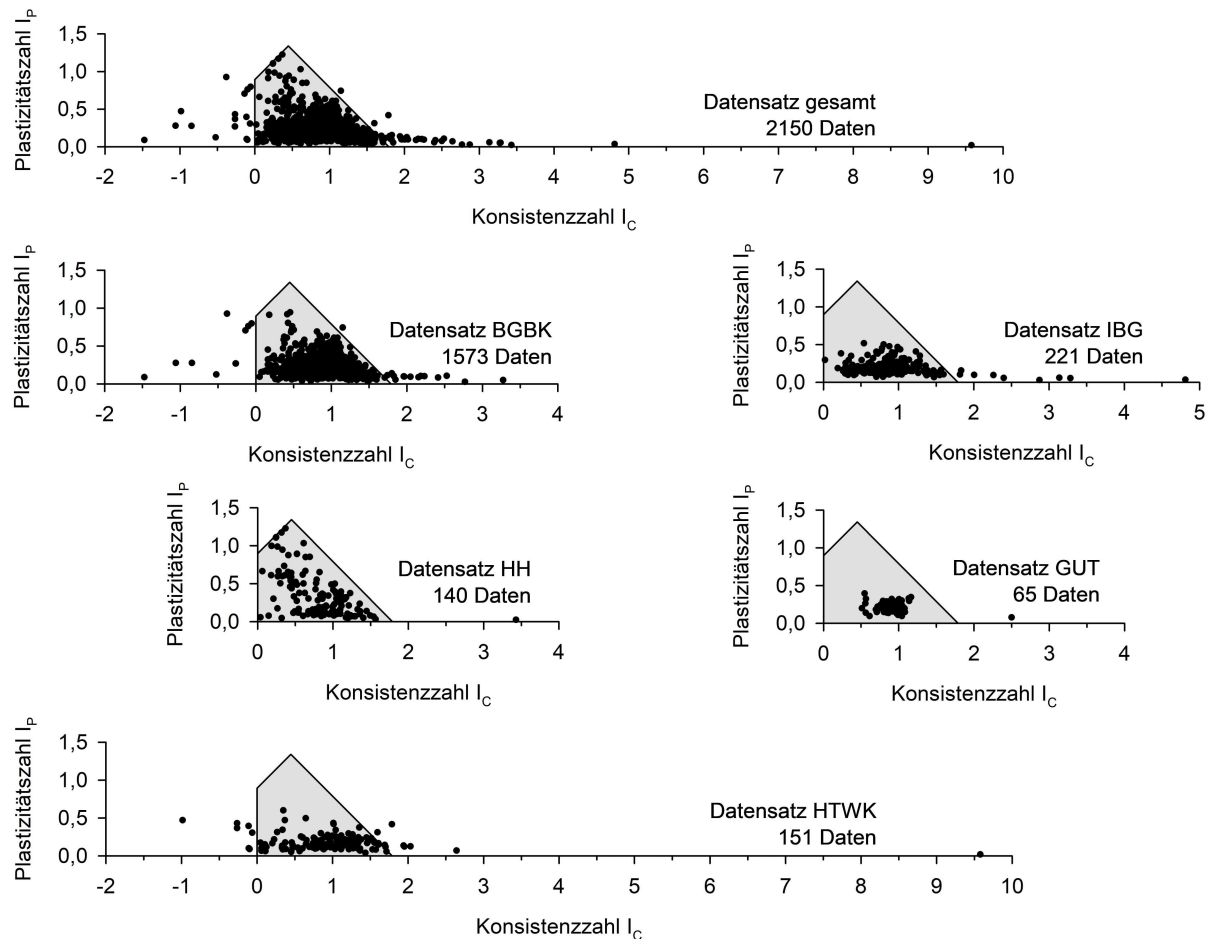
$$I_p = \frac{PI}{100}$$

Die Berechnung der Plastizitätszahl I_p erfolgt nur über die Wassergehalte w . Eine Berechnung aus den normierten Wassergehalten \hat{w} ist nicht möglich. Die Plastizitätszahl I_p lässt sich auf der Oberfläche der Einheitskugel nur als Minimum und Maximum darstellen und definiert dort den Gültigkeitsbereich für die Konsistenzzahl I_C .

$$I_p = w_L - w_P \neq \hat{w}_L - \hat{w}_P \quad (215)$$

4.5.4. Herkunft der Versuchsergebnisse

Für die Bearbeitung und Auswertung lagen die nachfolgend dargestellten Datensätze an Atterberg-Versuchen vor (Bestimmung der Zustandsgrenzen nach DIN EN ISO 17892-12).



BGBK	Baugrundbüro Klein GmbH Halle	1573
IBG	IBG - Ingenieurconsult Baugrund und Grundbau Sondershausen	221
HH	BUKEA - Geologisches Landesamt der Hansestadt Hamburg (Referenzdatensatz)	140
GUT	G.U.T. - Gesellschaft für Umweltsanierungstechnologien mbH Merseburg	65
HTWK	HTWK - Hochschule für Technik, Wirtschaft und Kultur Leipzig	151
gesamt		2150

Abbildung 34) Datensatz der Atterberg-Versuche mit Angaben zur Herkunft der Teildatensätze. Der Datensatz Hamburg wurde bis 2022 durch das Geologische Landesamt als pdf-Tabellen zum Download angeboten. Für alle anderen Teildatensätze liegen die Originalprotokolle der Versuche vor.

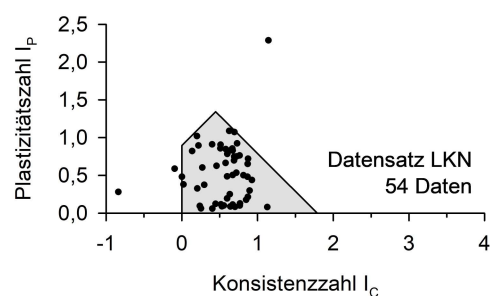


Abbildung 35) Der Teildatensatz LKN ist nicht Bestandteil des Gesamtdatensatzes aus 2150 Atterberg-Versuchen. Weil die Daten erst zu einem späten Zeitpunkt vorlagen, wird er in der Statistik nur in ausgewählten Fällen berücksichtigt. Ein erheblicher Teil der untersuchten Böden sind organische Schluffe (Klei etc.). Die Probenentnahme erfolgte abweichend von den Versuchen des Gesamtdatensatzes unter offshore-Bedingungen.

LKN	Landesbetrieb für Küstenschutz, Nationalpark und Meeresschutz Schleswig-Holstein	54
-----	--	----

Eine Übersicht zur Lage der Probenentnahmeorte gibt Abbildung 36. Von insgesamt 2047 von 2150 Versuchen konnte die Ortslage aus den Protokollen ermittelt werden. Der Datensatz hat eine überregionale Reichweite mit einem lokalen Schwerpunkt am Standort der Baugrundbüro Klein GmbH in Halle. Weitere lokale Schwerpunkte werden durch die Versuche des Geologischen Landesamts der Stadt Hamburg und ein Projekt bei Werdau in Sachsen gebildet.

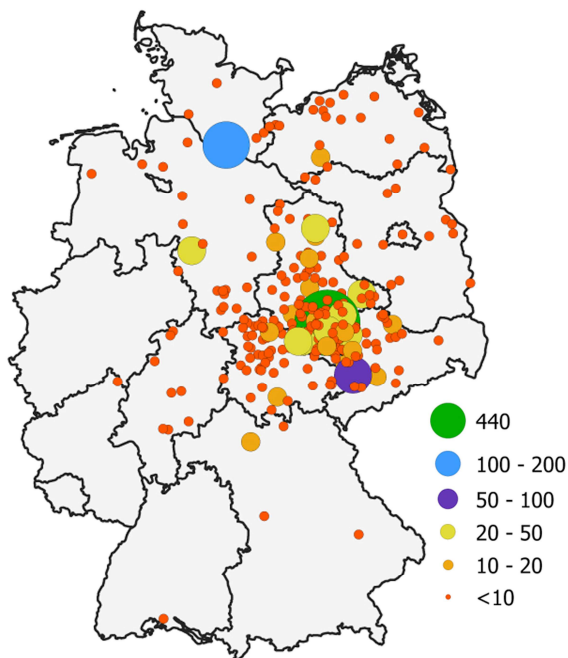
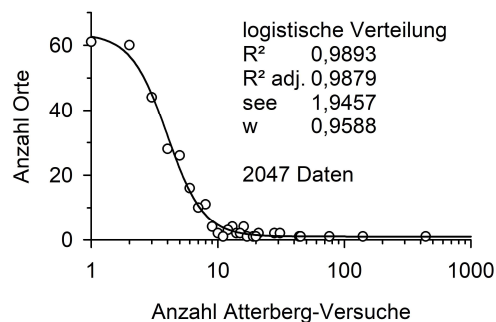


Abbildung 36, links) Übersichtskarte zu den bekannten Ortslagen, an denen Proben für den Datensatz entnommen wurden (2047 von 2150 Daten, mit Angaben zur Anzahl der Versuche pro Ortslage).

Abbildung 37, unten) Die Darstellung dient der Übersicht. Die Aussagekraft der Verteilung ist eingeschränkt (erwartungsgemäß werden an vielen Orten wenig Proben und an wenig Orten viele Proben entnommen).



4.5.5. Statistische Betrachtungen zu Konsistenzzahl und Plastizitätszahl

Vor einer statistischen Auswertung der Versuchsergebnisse ist es erforderlich, Gültigkeitskriterien für den Datensatz zu formulieren. Die notwendigen Regeln ergeben sich aus den Grenzen des Atterberg-Kontinuums und werden in Tabelle 9 dargestellt. Für die Festlegung der Regeln ist die Anwendung der konstanten, elastischen Größen des Atterberg-Kontinuums Konsistenzzahl $I_{C\ max}$ und Plastizitätszahl $I_{P\ max}$ erforderlich. Die genannten Größen werden im weiteren Verlauf der Arbeit eingeführt und erläutert (Punkt 4.8.1.).

Tabelle 9: Gültigkeitskriterien im Atterberg-Kontinuum und Gültigkeit der Daten

Gültigkeitskriterien im Atterberg-Kontinuum		Fehler
Die Konsistenzzahl I_C darf nicht kleiner als Null sein.		17
Die Summe aus Konsistenzzahl I_C und Plastizitätszahl I_P darf nicht größer als $I_{C\ max}$ sein.		36
Konsistenzzahl I_C und Plastizitätszahl I_P dürfen nicht gleichzeitig größer als $I_{P\ max}$ sein. ¹⁾		4
Summe der Fehler (enthält Mehrfachnennungen von Einzelversuchen)		57
56	Summe der ungültigen Daten (ohne Mehrfachnennungen von Einzelversuchen)	
2094	Summe der gültigen Daten	
2150	Anzahl aller Daten im Gesamtdatensatz	

¹⁾ Fließbedingung nach MOHR-COULOMB

In den nachfolgenden drei Abbildungen werden die Histogramme für die Konsistenzzahl I_C , die Plastizitätszahl I_P und die Plastizitätszahl $\ln(I_P)$ einschließlich der zugehörigen Regressionsanalysen dargestellt. (Alle statistischen Auswertungen wurden mit der Statistik- und Grafiksoftware SIGMAPLOT in den Versionen 14/14.5/15 ausgeführt.)

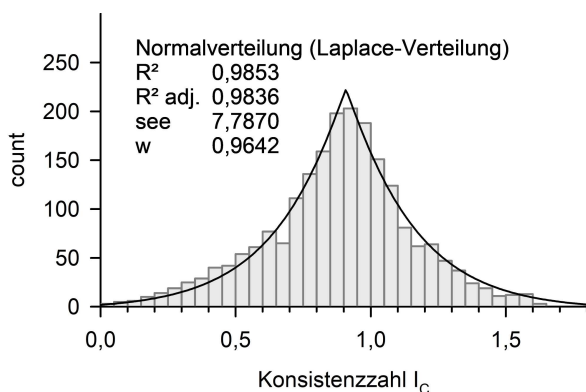


Abbildung 38) Histogramm mit einer Klassenbreite von 0,05 und Regressionsanalyse für die Konsistenzzahl I_C mit 2094 von 2150 Daten, gültige Daten, (peak mod. Gaussian 5 parameter)

Legende:
 R^2 Bestimmtheitsmaß
 R^2 adj. Bestimmtheitsmaß, adjustiert
 see Standardabweichung der Schätzung
 w Normality-Test (Shapiro-Wilk)

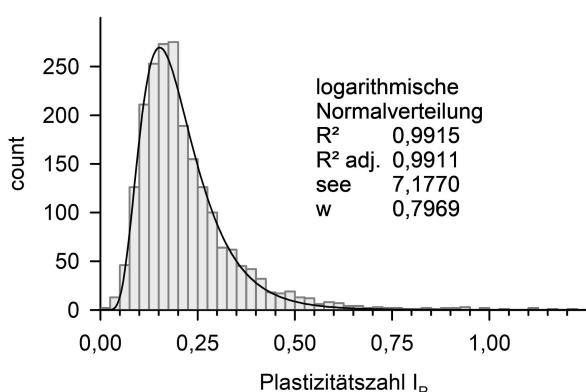


Abbildung 39) Histogramm mit einer Klassenbreite von 0,025 und Regressionsanalyse für die Plastizitätszahl I_P mit 2150 von 2150 Daten, (peak log-normal 3 parameter)

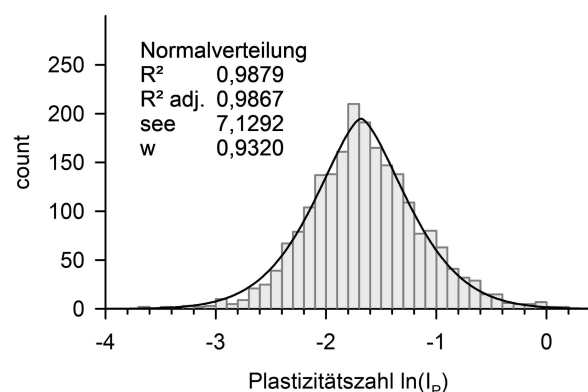


Abbildung 40) Histogramm mit einer Klassenbreite von 0,1 und Regressionsanalyse für die Plastizitätszahl I_P , auf die der natürliche Logarithmus angewendet wurde $\ln(I_P)$, mit 2150 von 2150 Daten, (peak mod. Gaussian 5 parameter)

In der nachfolgenden Tabelle 10 werden die Ergebnisse der statistischen Auswertung zur Einzelbetrachtung der Größen zusammengefasst.

Tabelle 10: Verteilung der Daten und Ergebnisse der Regressionsanalysen

Histogramme	Konsistenzzahl I_C	Plastizitätszahl I_p	Plastizitätszahl $\ln(I_p)$
Anzahl der Versuche	2094 (nur gültige)	2150 (gesamt)	2150 (gesamt)
Verteilung der Daten	normalverteilt Laplace-Verteilung	logarithmisch normalverteilt	normalverteilt Gauß-Verteilung
Bestimmtheitsmaß R^2 adj.	0,9836	0,9911	0,9867
Normality-Test w	0,9642	0,7969	0,9320

Für die Plastizitätszahl I_p stehen Ergebnisse von Fremdbeobachtungen aus Griechenland für einen Vergleich zur Verfügung. Der Fremddatensatz enthält insgesamt 1170 Versuche und die dargestellten Ergebnisse sind gut mit den eigenen Ergebnissen vergleichbar (Abb. 39). Mit $PI < PI_{max}$ wird die Fließbedingung nach Mohr-Coulomb immer eingehalten (Tab. 9). Das Maximum der Häufigkeit liegt immer in der Klasse $15 < PI < 20$ bzw. in den Klassen zwischen $0,15 < I_p < 0,20$. Die statistische Verteilung der Daten aus Griechenland und die statistische Verteilung der eigenen Daten sind nahezu identisch (Abb. 39 und 43).

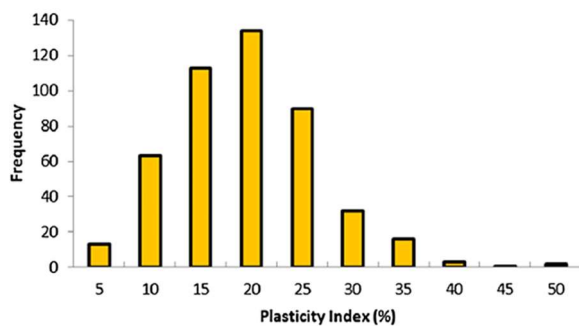


Abbildung 41) Fremdbeobachtung Griechenland Plasticity-Index PI für normalkonsolidierte Böden, Plastizitätszahl I_p als $PI(\%)$, 467 Versuche Originalabbildung aus ARVANITIDIS et al. 2018

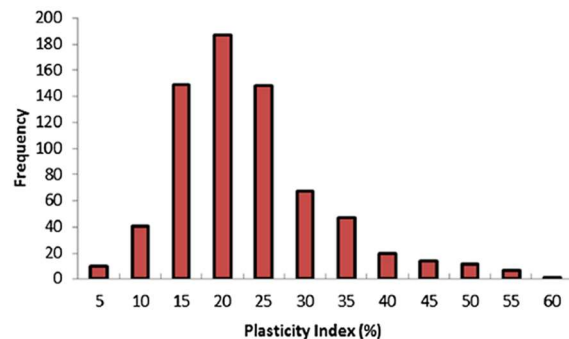


Abbildung 42) Fremdbeobachtung Griechenland Plasticity-Index PI für überkonsolidierte Böden, Plastizitätszahl I_p als $PI(\%)$, 703 Versuche Originalabbildung aus ARVANITIDIS et al. 2018

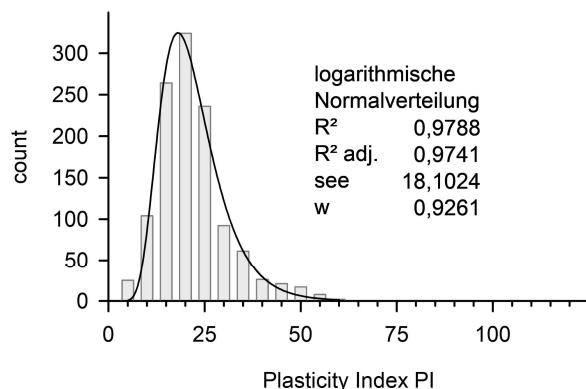


Abbildung 43) Fremdbeobachtung Griechenland Histogramm mit einer Klassenbreite von 5 und Regressionsanalyse für den Plasticity Index PI mit 1170 Daten, (peak log-normal 3 parameter) Die Originaldaten liegen nicht vor. Die beiden Diagramme (Abb. 41 und 42) wurden überschlägig ausgezählt und die Daten zusammengefasst. Die Verteilung der Daten von ARVANITIDIS et al. 2018 entspricht der Verteilung der eigenen Daten (Abb. 39) und bestätigt die eigenen Beobachtungen.

Durch Anwendung des natürlichen Logarithmus auf die logarithmisch-normalverteilte Plastizitätszahl I_p wird ein normalverteilter Datensatz $\ln(I_p)$ erzeugt. Dieser kann mit dem ebenfalls normalverteilten Datensatz der Konsistenzzahl I_C in einer bivariaten Normalverteilung zusammengefasst werden (Abb. 44). Die im Vergleich zur Einzelbetrachtung der Größen abnehmende Güte der Korrelation liegt mit einem Bestimmtheitsmaß von $R^2 = 0,9431$ im Bereich der Erwartungen.

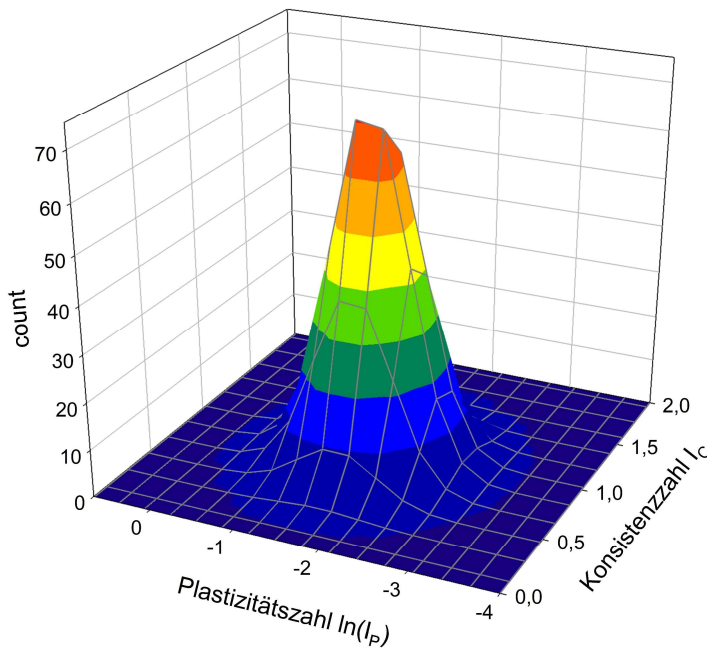


Abbildung 44) bivariate Normalverteilung mit der Konsistenzzahl I_C und der Plastizitätszahl $\ln(I_p)$

2094 Daten (nur gültige Datenpaare)
 Regression 3D-Gaussian
 Bestimmtheitsmaß R^2 adj. 0,9431

Beim Zählen wurde ein Raster gewählt, dass im Maximum der Datenanzahl in etwa dem Maximum der Datendichte I_C vs. I_p von 60 Daten bei einer Klassenbreite von $I_C = 0,05$ und $I_p = 0,05$ entspricht (Gewährleistung der Vergleichbarkeit mit Abbildung 61).

Die der bivariaten Normalverteilung für den Datensatz aus 2094 gültigen Daten zuzuordnende Prognose-Ellipse wird in Abbildung 45 dargestellt. Die annähernd parallel zu den Achsen des Koordinatensystems verlaufenden Richtungen der Halbachsen der Ellipse weisen auf einen schwachen Zusammenhang zwischen den Variablen hin. Die in der benachbarten Abbildung 46 dargestellte Prognose-Ellipse für den Gesamtdatensatz bestätigt diese Annahme nicht.

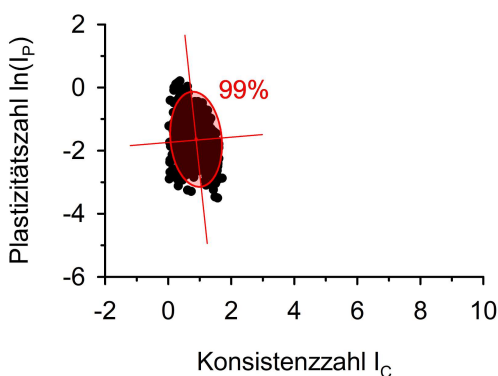


Abbildung 45) Prognose-Ellipse 99% mit Richtungen der Halbachsen für die gültigen Daten des Gesamtdatensatzes (2094 von 2150 Versuchen)

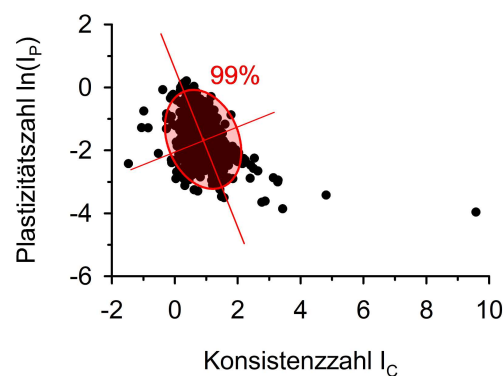


Abbildung 46) Prognose-Ellipse 99% mit Richtungen der Halbachsen für alle Daten des Gesamtdatensatzes (2150 Versuche)

Beim Vergleich der Prognose-Ellipsen für die Konsistenzzahl I_C und Plastizitätszahl $\ln(I_p)$ ist zu beachten, dass die Einschränkungen hinsichtlich der Gültigkeit der Versuche im Atterberg-Kontinuum vor allem die Konsistenzzahl I_C betreffen.

Der Datensatz gültiger Daten mit 2094 Versuchen wird für I_C in seiner Breite beidseitig deutlich eingeschränkt, während in der Höhe der Darstellung für die zugeordneten Plastizitätszahlen $\ln(I_p)$ keine Einschränkungen bestehen. Der Datensatz hat deswegen seine größte Ausdehnung parallel zur Ordinate und die Prognose-Ellipse dreht sich in eine entsprechende Position. Die Darstellung eines scheinbar schwachen Zusammenhangs in der Prognose-Ellipse der gültigen Daten (Abb. 45) kann mit der Anwendung der Gültigkeitskriterien des Atterberg-Kontinuums erklärt werden. Der in der bivariaten Normalverteilung der Konsistenzzahl I_C und Plastizitätszahl $\ln(I_p)$ dargestellte Zusammenhang ist schlüssig.

Tabelle 11: Bezüge zwischen Spannungskreis und den theoretischen Mittelwerten

	Konsistenzzahl I_C	Plastizitätszahl I_p
Lage des Mittelpunkts des MOHRschen Spannungskreises im Atterberg-Kontinuum	$\frac{2}{\sqrt{5}} = 0,8944$	$\frac{1}{\sqrt{5}} = 0,4472$
theoretische Mittelwerte der Atterberg-Versuche	$\frac{2}{\sqrt{5}} = 0,8944$	$\frac{1}{2\sqrt{5}} = 0,2236$
auf den Mittelpunkt des MOHRschen Spannungskreises anzuwendender Faktor	1	$\frac{1}{2}$

Wenn die aus dem Mittelpunkt des Spannungskreises im Atterberg-Kontinuum und den theoretischen Mittelwerten des Datensatzes ermittelten Faktoren (Tabelle 11) auf die zugehörigen Parameter Konsistenzzahl I_C und Plastizitätszahl I_p angewendet werden, ergeben sich die Terme, welche in der Formel zur Bestimmung der neuen Größe Elastizitätszahl I_E zusammengefasst werden können (Punkt 4.7.1.).

$$I_E = I_C - \frac{I_p}{2} \quad (216)$$

Die theoretischen Mittelwerte der Konsistenzzahl I_C und der Plastizitätszahl I_p können auch aus dem Mittelpunkt des Spannungskreises im Atterberg-Kontinuum hergeleitet werden (Tabelle 11). Außerdem muss der theoretische Median der Konsistenzzahl I_C in einem normalverteilten Datensatz dem theoretischen Mittelwert entsprechen. Damit liegen die Grundlagen für einen Vergleich mit den statistischen Kennzahlen des Datensatzes vor.

Die zwischen den theoretischen Kennzahlen und den Kennzahlen des Datensatzes ermittelten Differenzen sind sehr gering und liegen im vernachlässigbaren Bereich (Tabelle 12). Die Ausnahme sind die Mediane der Plastizitätszahl $\ln(I_p)$ mit Differenz in signifikanter Größe.

Tabelle 12: statistische Kennzahlen im Gesamtdatensatz

Datensatz	Konsistenzzahl I_C	Plastizitätszahl I_p	Plastizitätszahl $\ln(I_p)$
Anzahl der Versuche	2150 (gesamt)	2150 (gesamt)	2150 (gesamt)
Mittelwert Datensatz	0,8979	0,2209	-1,6480
theoretischer Mittelwert	0,8944	0,2236	-1,6487
Differenz der Mittelwerte	0,0035	-0,0027	0,0007
Median Datensatz	0,9005	0,1878	-1,6726
theoretischer Median	0,8944	0,1923	-1,6487
Differenz der Mediane	0,0061	-0,0045	-0,0239
Minimum Datensatz	-1,4757	0,0190	-3,9633
Maximum Datensatz	9,5789	1,2250	0,2029
Auffälligkeiten	-	$0,1923 = e^{-\sqrt{e}}$	$-1,6487 = -\sqrt{e}$

Aufgrund der sehr geringen Differenz von 0,0007 zum Mittelwert des Datensatzes $\ln(I_p)$ wird angenommen, dass der theoretische Mittelwert der normalverteilten Plastizitätszahl $\ln(I_p)$ ein konstanter Wert auf Grundlage der Eulerschen Zahl e ist. In einer Normalverteilung sind der theoretische Mittelwert \bar{x} und der theoretische Median \bar{x}_{med} identisch.

$$\bar{x} \ln(I_p) = -\sqrt{e} = -1,6487 \quad (217)$$

$$\bar{x}_{med} \ln(I_p) = -\sqrt{e} = -1,6487 \quad (218)$$

Die Bestimmung des theoretischen Medians der logarithmisch-normalverteilten Plastizitätszahl I_p erfolgt durch Anwenden der Umkehrfunktion $I_p = e^{\ln(I_p)}$ auf den theoretischen Mittelwert der normalverteilten Plastizitätszahl $\ln(I_p)$. Zwischen dem für die Plastizitätszahl I_p ermittelten theoretischen Median und dem Median des Datensatzes liegt nur eine geringe Differenz von -0,0045. Es wird angenommen, dass der theoretische Median der Plastizitätszahl I_p ein konstanter Wert auf Grundlage der Eulerschen Zahl e ist.

$$x_{med}(I_p) = e^{-\sqrt{e}} = 0,1923 \quad (219)$$

Weitere statistische Kennzahlen werden in der nachfolgenden Abbildung als Box-Plots dargestellt. Die Reichweite der Konsistenzzahl I_C wurde in der Darstellung auf den Bereich zwischen $0 \leq I_C \leq 2$ begrenzt (Abb. 47).

Im Box-Plot für die Konsistenzzahl I_C bilden der untere Whisker bei $I_{C(10\%)} = 0,51$ und der obere Whisker bei $I_{C(90\%)} = 1,24$ fast exakt den Bereich zwischen der Untergrenze des weichplastischen Bereichs und der Obergrenze des halbfesten Bereichs ab (unter Annahme sich im gleichbleibenden Abstand von 0,25 fortsetzenden Konsistenzgrenzen).

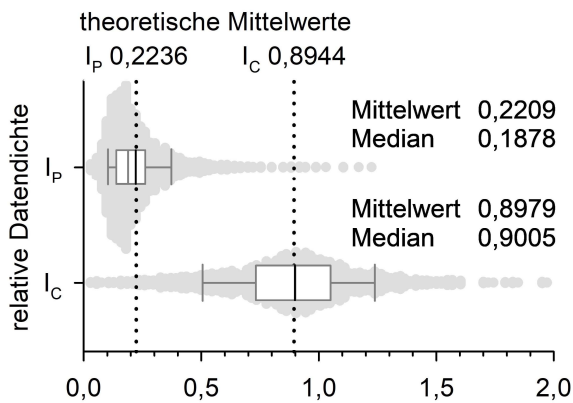


Abbildung 47) Box-Plots, relative Datendichte und statistische Kennzahlen für die Konsistenzzahl I_C und die Plastizitätszahl I_p , Darstellung für die Konsistenzzahl beschränkt auf $0 \leq I_C \leq 2$

Legende:

- 10% unterer Whisker Begrenzung links
- 25% unteres Quartil Rand der Box links
- 75% oberes Quartil Rand der Box rechts
- 90% oberer Whisker Begrenzung rechts

Aus den normierten Wassergehalten \hat{w} kann die Konsistenzzahl I_C bestimmt und als Einheitsvektor auf der Oberfläche der Einheitskugel dargestellt werden. Die Zusammenhänge werden unter den Punkten 4.5.1. und 4.5.2. erläutert. In der Abbildung 48 wird das Ergebnis der statistischen Auswertung mittels Regressionsanalysen dargestellt.

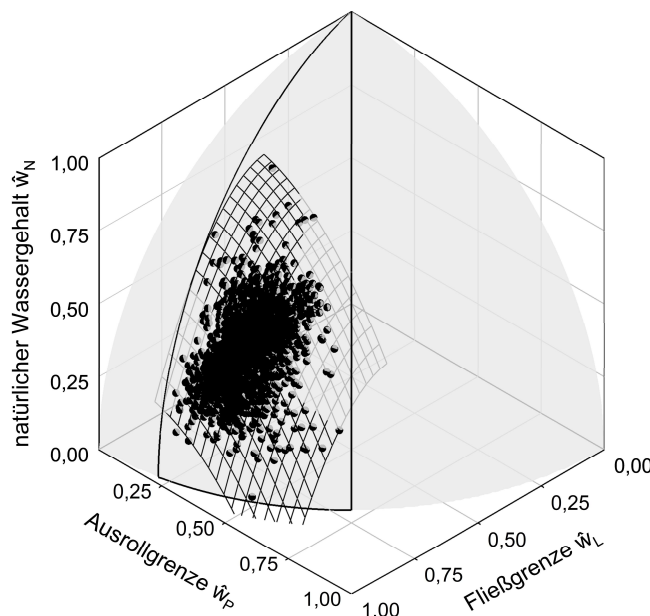


Abbildung 48) statistische Auswertung zur Verteilung der normierten Wassergehalte \hat{w} , mit Darstellung der Konsistenzzahlen I_C als Einheitsvektoren auf der Oberfläche der Einheitskugel, Regressionsfläche Paraboloid

Gesamtdatensatz + LKN, 2204 Daten

	3D-Paraboloid	3D-Plane
R^2	0,9857	0,9470
R^2 adj	0,9856	0,9470
see	0,0118	0,0226
w	0,7688	0,7245

Legende:

- R^2 Bestimmtheitsmaß
- R^2 adj Bestimmtheitsmaß, adjustiert
- see Standardabweichung der Schätzung
- w Normality-Test (Shapiro-Wilk)

In der statistischen Auswertung der normierten Wassergehalte \hat{w} liegen die ermittelten Bestimmtheitsmaße $R^2 = 0,9856$ bzw. $R^2 = 0,9470$ (Abb. 48) in der Größenordnung der Ergebnisse aller anderen Regressionsanalysen. Bei der Bewertung der Güte der Korrelationen sind die beiden ermittelten Bestimmtheitsmaße R^2 als gleichwertig zu betrachten, weil in beiden Fällen auf Zusammenhänge zwischen den normierten Wassergehalten \hat{w} geschlossen werden kann. Eine parabolische, d. h. gewölbte Regressionsfläche kann lediglich besser an eine Kugeloberfläche angepasst werden. Sie hat eine entsprechend größere Nähe zu den Daten und zeigt deshalb eine größere Güte der Korrelation als eine ebene Regressionsfläche.

Die Zusammensetzung eines Datensatzes ist ortsabhängig. Die Ortsabhängigkeit beinhaltet alle versuchsfremden Einflüsse. Wer eine Probe entnimmt und warum eine Probe entnommen wird, ordnet sich immer der Frage unter: Wo wurde die Probe entnommen? Ein Datensatz aus dem Mittelgebirge liefert andere Ergebnisse als ein Datensatz aus den norddeutschen Küstenregionen. Hierbei ist die Konstellation, die zur Probenentnahme geführt hat, unerheblich. Jedoch ist es aus Kostengründen sehr wahrscheinlich, dass eine norddeutsche Firma in Norddeutschland Proben entnimmt und ein süddeutsches Labor süddeutsche Proben untersucht. Deshalb hat jede Firma, jedes Labor, jedes Projekt etc. in den Daten einen eigenen Fingerabdruck, der von verschiedenen versuchsfremden Einflüssen abhängig ist und u. a. mit Bezug auf die theoretischen Mittelwerte dargestellt werden kann (Abb. 49).

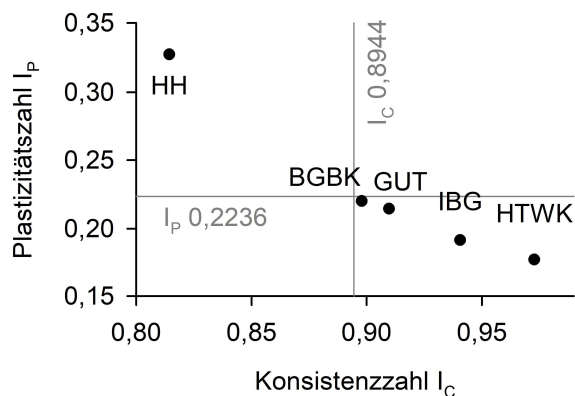


Abbildung 49) Fingerabdrücke von ausgewählten Ortslagen

Auswirkung versuchsfremder Einflussgrößen auf die Mittelwerte von Datensätzen mit Bezug zur Lage der theoretischen Mittelwerte für die Konsistenzzahl I_c und die Plastizitätszahl I_p .

Die Herkunft der Daten wurde unter Punkt 4.5.4. erläutert. Bei der Übergabe von Teildatensätzen wurde um Lieferung aller Protokolle gebeten, die innerhalb eines definierten Zeitraums erstellt wurden (Zeitreihe). Ein Filtern der Daten im Sinne einer Vorabprüfung von Versuchsergebnissen durch Dritte sollte nicht erfolgen (kein Ausschluss ungewöhnlicher Daten).

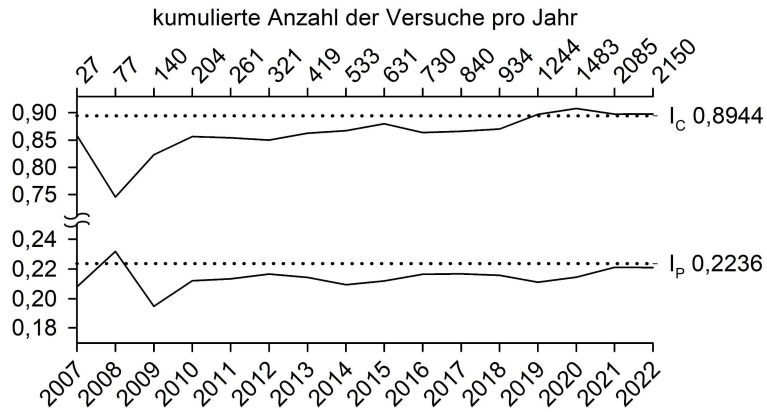


Abbildung 50) Die Entwicklung der Mittelwerte des Gesamtdatensatzes über die Zeit (Kalenderjahr).

Konsistenzzahl I_c und Plastizitätszahl I_p in Abhängigkeit von der zunehmenden Größe des Datensatzes und mit Bezug zu den theoretischen Mittelwerten der Konsistenzzahl I_c und der Plastizitätszahl I_p

Für den Referenzdatensatz Hamburg wird davon ausgegangen, dass der Wassergehalt an der Fließgrenze w_L mit dem Fließgrenzengerät nach Casagrande 1932 ermittelt wurde. Für alle anderen Versuche wurde ausschließlich das Fließgrenzengerät nach Casagrande verwendet. Der Fallkegelversuch ist nach BRENNECKE, LOHMEYER 1938 älter als das Fließgrenzengerät. Es ist unklar, warum sich der einfachere Fallkegelversuch - trotz zeitlichem Vorlauf - in der Vergangenheit in Deutschland nicht durchgesetzt hat. Außerdem liegen in der Fachliteratur keine Angaben dazu vor, ob beide Verfahrensweisen zu vergleichbaren Ergebnissen führen.

4.6. Herleitung des Atterberg-Kontinuums

Der Ausgangspunkt für die Herleitung des Atterberg-Kontinuums ist die Schlüsselbeobachtung (Punkt 4.4.), dass alle im Referenzdatensatz Hamburg dargestellten Ergebnisse von Atterberg-Versuchen in der Fläche liegen, die im dargestellten Spannungskreis durch die Hauptnormalspannungsrichtungen HNR und die um 90° im Uhrzeigersinn gedrehten Hauptschubspannungsrichtungen HSR aufgespannt wird (Abb. 17 und 30).

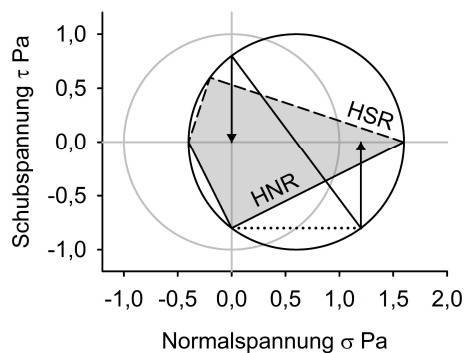


Abbildung 17) Der Repräsentant des Spannungskreises Druck und Zug im elastischen Grenzzustand. Die graue Fläche wird durch die Hauptspannungsrichtungen begrenzt und als Atterberg-Kontinuum bezeichnet.

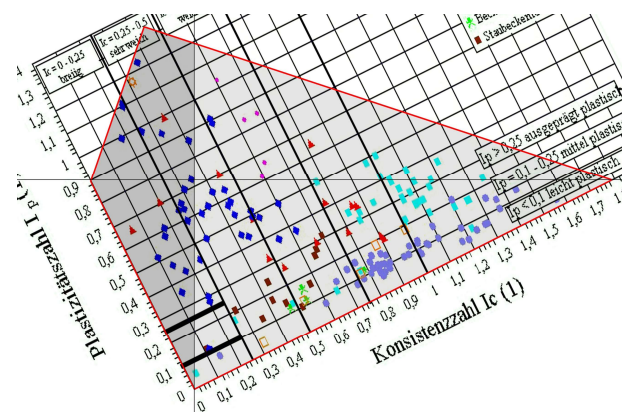


Abbildung 30) Schlüsselbeobachtung: Alle dargestellten Versuchsergebnisse des Geologischen Landesamts der Stadt Hamburg liegen im Atterberg-Kontinuum (KAUSCH 2020).

Bei der Herleitung des Atterberg-Kontinuums bestehen zwischen den erforderlichen Arbeitsschritten die folgenden Abhängigkeiten von den Grundlagen:

- Aus dem Repräsentanten des Mohrschen Spannungskreises Druck und Zug im elastischen Grenzzustand wird hergeleitet:
 - der elastische Grenzzustand des Atterberg-Kontinuums (zeitunabhängig t_{min}). Aus dem elastischen Grenzzustand des Atterberg-Kontinuums wird hergeleitet:
 - der kriecheelastische Grenzzustand des Atterberg-Kontinuums (zeitunabhängig t_{max})

4.6.1. Herleitung von Elastizitätszahl und Kriechzahl

Die Herleitung der Elastizitätszahl I_E und die Herleitung der Kriechzahl I_K sind voneinander abhängig und werden in zusammenhängenden Arbeitsschritten erläutert. Ein wesentlicher Arbeitsschritt bei der Herleitung von Elastizitätszahl I_E und Kriechzahl I_K ist die Umwandlung von Größen mit der Einheit der mechanischen Spannung (Pascal) in Größen der Dimension Zahl. Durch das Herstellen der Dimensionslosigkeit verlieren die Werte der Größen ihre Bedeutung. Die Informationen zu Winkeln, Richtungen und anderen Verhältniswerten bleiben erhalten. Den vorhandenen Werten und Informationen können neue Bedeutungen zugewiesen werden. Durch die Verwendung des Repräsentanten der Spannungskreise Druck und Zug wird zusätzlich sichergestellt, dass der ursprüngliche Wert der Zahlen erhalten bleibt.

Elastischer Grenzzustand (t_{min}) des Atterberg-Kontinuums

Die Umwandlung des Repräsentanten des Spannungskreises Druck und Zug im elastischen Grenzzustand (Abb. 17) in das Atterberg-Kontinuum im elastischen Grenzzustand wird mit den folgenden 4 Arbeitsschritten ausgeführt:

- 1) **Herstellen der Dimensionslosigkeit** durch Multiplikation aller mechanischen Spannungen mit dem Kehrwert der maximalen Schubspannung. Die ursprünglichen Werte der Größe mechanische Spannung bleiben in einem Repräsentanten der Spannungskreise mit einem Radius von $R = 1 \cdot 10^n$ Pa (mit $n \in \mathbb{Z}$) unverändert erhalten. Die Werte sind nach dem Herstellen der Dimensionslosigkeit Größen der Dimension Zahl und verlieren ihre Bedeutung.
- 2) **Festlegung des neuen Koordinatenursprungs** am Pol des Spannungskreises. Der Pol ist der Ursprung der Hauptnormalspannungsrichtungen HNR von σ_{min} und σ_{max} .
- 3) **Zuweisung neuer Bedeutungen:** Es wird ein neues, kartesisches Koordinatensystem erzeugt. Die Hauptnormalspannungsrichtung von σ_{max} wird zur Ordinate und bekommt die Bedeutung Plastizitätszahl I_p zugewiesen. Die Hauptnormalspannungsrichtung von σ_{min} wird zur Abszisse, welche die Bedeutung Konsistenzzahl I_c erhält.
- 4) **Diskretisierung des Atterberg-Kontinuums:** Die Skala der Elastizitätszahl I_E verläuft senkrecht zur Richtung gleicher Normalspannungen. Die Zuordnung der Werte für die Skala erfolgt durch die Projektion des Vektors mit dem Wert 1,79 auf die Skala der Elastizitätszahl I_E . Die Projektion der Werte erfolgt parallel zur Richtung gleicher Normalspannungen. Die Linien gleicher Elastizitätszahlen I_E liegen in der Projektionsrichtung. Die Lage der Grenzen auf der Skala kann frei gewählt werden (Abb. 51).

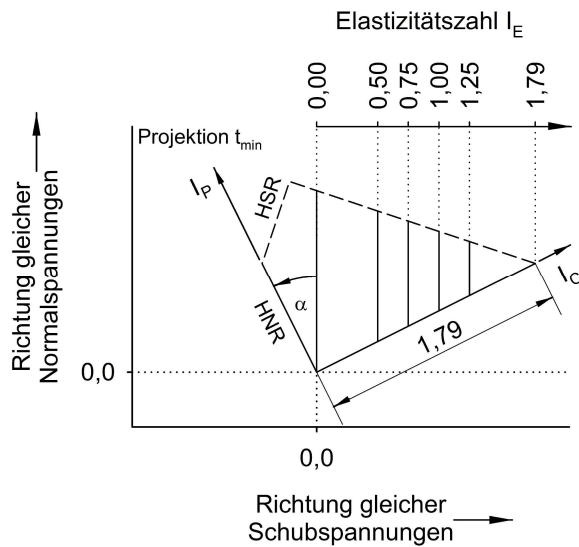


Abbildung 51) Projektion t_{min} , Diskretisierung des Atterberg-Kontinuums im elastischen Grenzzustand und Herleitung der Elastizitätszahl I_E

zeitunabhängiger Zustand in der elastischen Projektion t_{min}

Die frei wählbare Lage, der für die Elastizitätszahl I_E dargestellten Grenzen, orientiert sich an der Lage (den Werten) der Konsistenzgrenzen nach aktuellem Verständnis.

Anschließend erfolgt für das Atterberg-Kontinuum im elastischen Grenzzustand die Rotation in die Normalposition eines kartesischen Koordinatensystems mit horizontaler Abszisse und vertikaler Ordinate. Die Rotation erfolgt im Uhrzeigersinn und der Rotationswinkel entspricht $\alpha = 26,57^\circ$. Das entspricht dem Winkel zwischen der Richtung gleicher Normalspannungen und der Vertikalen. Im Mohrschen Spannungskreis im elastischen Grenzzustand ist der Winkel $\alpha = 26,57^\circ$ der kleinere der beiden Hauptnormalspannungswinkel zwischen der Abszisse und der Richtung der Hauptnormalspannung HNR von σ_{min} . Mit der Rotation in die Normalposition eines kartesischen Koordinatensystems werden die neuen Grenzen aus der Diskretisierung übernommen (Abb. 52).

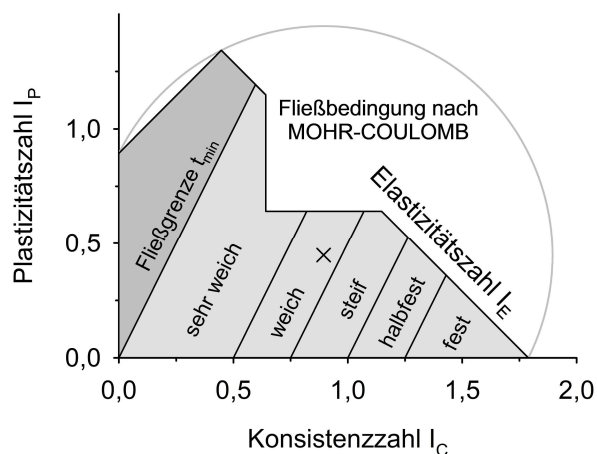


Abbildung 52) Das diskretisierte Atterberg-Kontinuum in der elastischen Projektion t_{min} (elastischer Grenzzustand der Böden) mit der Fließbedingung nach Mohr-Coulomb

Zur Veranschaulichung wird zusätzlich die Lage des Mohrschen Spannungskreises und die Lage seines Mittelpunkts im Atterberg-Kontinuum dargestellt. Die Lage der Grenzen entspricht bei einer Plastizitätszahl $I_P = 0$ der Lage der Konsistenzgrenzen nach aktuellem Verständnis.

Nach der Herleitung des Atterberg-Kontinuums im elastischen Grenzzustand ergibt sich die folgende Gleichung zur Bestimmung der Elastizitätszahl I_E aus der Konsistenzzahl I_C und der Plastizitätszahl I_P :

$$I_E = I_C - I_P \cdot \tan 26,57^\circ = I_C - I_P \cdot 0,5 \quad (220)$$

$$I_E = I_C - \frac{I_P}{2} \quad (216)$$

In der Abbildung 52 in hellgrau dargestellte Flächen des Atterberg-Kontinuums sind im Repräsentanten des Mohrschen Spannungskreises Druck und Zug Bereiche mit positiven Normalspannungen, dunkelgraue Flächen Bereiche mit negativen Normalspannungen. Die Elastizitätszahl I_E kann nur im Bereich mit ursprünglich positiven Normalspannungen, d. h. auf der rechten Seite der Fließgrenze t_{min} ermittelt werden. Die Verwendung negativer Werte ist für die Elastizitätszahl I_E nicht zulässig.

Abschließend wird die Fließbedingung nach Mohr-Coulomb in das Atterberg-Kontinuum eingefügt (Abb. 52). Die Fließbedingung nach Mohr-Coulomb gilt für alle Zustände des Atterberg-Kontinuums und bedeutet hier: Konsistenzzahl I_C und Plastizitätszahl I_P dürfen nicht gleichzeitig größer sein als die konstante Größe des Atterberg-Kontinuums $I_{P\ max} = 0,64143$.

Jede Grenze entspricht ursprünglich der Richtung einer gleich großen Normalspannung im elastischen Grenzzustand (Abb. 51). Jeder Grenze kann genau ein Wert einer elastischen Größe zugeordnet werden, d. h. die Linien gleicher Elastizitätszahlen I_E entsprechen den Linien gleicher elastischer Kennwerte zum Zeitpunkt t_{min} (Querdehnzahl v_E , Reibungswinkel φ_E etc.).

Kriechelastischer Grenzzustand (t_{max}) des Atterberg-Kontinuums

Der Ausgangspunkt der Herleitung des kriechelastischen Grenzzustands ist der elastische Grenzzustand des Atterberg-Kontinuums. Das Ziel der nachfolgend dargestellten Arbeitsschritte ist die Darstellung des elastischen Grenzzustands in einer Position, in der keine Verformungen auftreten können. Unter Beachtung der Randbedingung (Punkt 3.1.), dass hinreichend kleine Verformungen ausschließlich von Normalspannungen verursacht werden, wird diese Voraussetzung mit $\sigma_x = \sigma_y = 0$ Pa im Repräsentanten des Mohrschen Spannungskreises Druck und Zug im unteren Grenzzustand erfüllt (Abb. 16). Zur Gewährleistung der Vergleichbarkeit der beiden Grenzzustände wird keine neue Abbildung des Atterberg-Kontinuums aus dem unteren Grenzzustand erzeugt, sondern der elastische Grenzzustand wird in die verformungsfreie Position des unteren Grenzzustands rotiert.

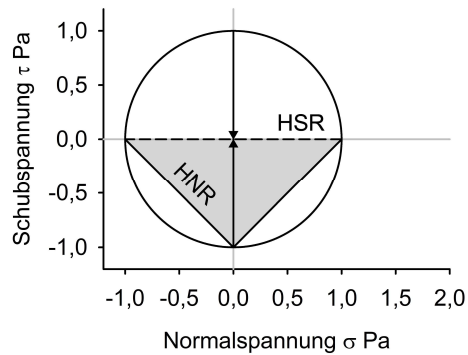


Abbildung 16) Repräsentant des Spannungskreises Druck und Zug im unteren Grenzzustand

In der dargestellten Position können keine Normalspannungen auftreten. Dementsprechend ist der untere Grenzzustand frei von Verformungen ($\sigma_x = \sigma_y = 0$ Pa).

Der untere Grenzzustand stellt die Zielposition dar, in die das Atterberg-Kontinuum des elastischen Grenzzustands rotiert werden soll.

Die Diskretisierung des Atterberg-Kontinuums im elastischen Grenzzustand ist der Arbeitsschritt 4 in der Herleitung des Atterberg-Kontinuums. Bei einer fortlaufenden Nummerierung der zusammenhängenden Arbeitsschritte beginnt die Umwandlung des elastischen Grenzzustands in den kriecheelastischen Grenzzustand mit dem Arbeitsschritt 5.

5) Rotation des Atterberg-Kontinuums aus dem elastischen Grenzzustand in die verformungsfreie Position des unteren Grenzzustands (Abb. 16). Die Rotation in den unteren Grenzzustand erfolgt entgegen dem Uhrzeigersinn um den kleineren der beiden Haupt Schubspannungswinkel $\beta = 18,43^\circ$. Nach der Rotation verlaufen die beiden Achsen des neuen Koordinatensystems bzw. die ehemaligen Hauptnormalspannungsrichtungen HNR in einem Winkel von $\alpha + \beta = 45^\circ$ zur Vertikalen/Horizontalen.

Beibehaltung zugewiesener Bedeutungen: Die Ordinate und die Abszisse behalten die bei Herleitung der Elastizitätszahl I_E zugewiesenen Bedeutungen Plastizitätszahl I_P und Konsistenzzahl I_C .

6) erneute Diskretisierung des Atterberg-Kontinuums: Die Skala der Kriechzahl I_K verläuft senkrecht zur Richtung gleicher Normalspannungen. Die Zuordnung der Werte für die Skala erfolgt durch die Projektion des Vektors mit dem Wert 1,79 auf die Skala der Kriechzahl I_K . Die Projektion der Werte erfolgt parallel zur Richtung gleicher Normalspannungen. Die Linien gleicher Kriechzahlen I_K liegen in der Projektionsrichtung. Die Lage der Grenzen auf der Skala kann frei gewählt werden (Abb. 53).

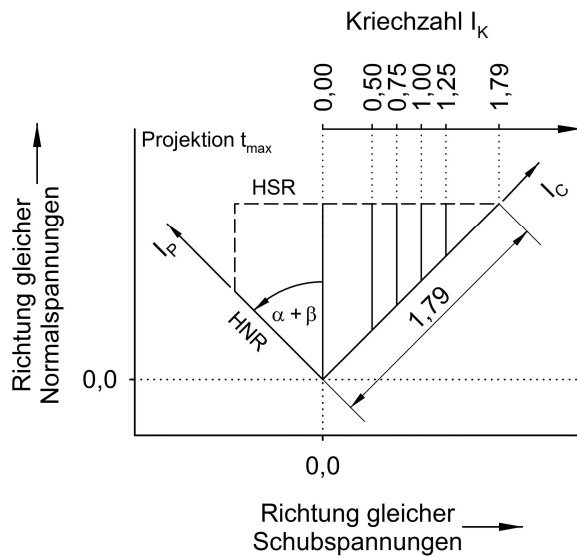


Abbildung 53) Projektion t_{max} , Diskretisierung des Atterberg-Kontinuums im kriechelastischen Grenzzustand und Herleitung der Kriechzahl I_K

zeitunabhängiger Zustand in der kriechelastischen Projektion t_{max}

Die frei wählbare Lage, der für die Kriechzahl I_K dargestellten Grenzen, orientiert sich an der Lage (den Werten) der Konsistenzgrenzen nach aktuellem Verständnis.

Nach der Herleitung des Atterberg-Kontinuums im kriechelastischen Grenzzustand ergibt sich die folgende Gleichung zur Bestimmung der Kriechzahl I_K aus der Konsistenzzahl I_C und der Plastizitätszahl I_P :

$$I_K = I_C - I_P \cdot \tan 45^\circ = I_C - I_P \cdot 1 \quad (221)$$

$$I_K = I_C - I_P \quad (222)$$

Das Atterberg-Kontinuum im kriechelastischen Grenzzustand wird in die Position eines kartesischen Koordinatensystems mit horizontaler Abszisse und vertikaler Ordinate rotiert. Die Rotation erfolgt im Uhrzeigersinn und der Rotationswinkel ist $\alpha + \beta = 45^\circ$. Das entspricht dem Winkel zwischen der Richtung gleicher Normalspannungen und der Vertikalen/Horizontalen. Im Mohrschen Spannungskreis im unteren Grenzzustand ist der Winkel $\alpha + \beta = 45^\circ$ der Winkel unter dem die beiden Hauptnormalspannungswinkel zwischen der Abszisse und der Richtung der Hauptnormalspannungen HNR von σ_{max} und σ_{min} auftreten. Mit der Rotation in die Normalposition eines kartesischen Koordinatensystems werden die neuen Grenzen aus der Diskretisierung übernommen (Abb. 54).

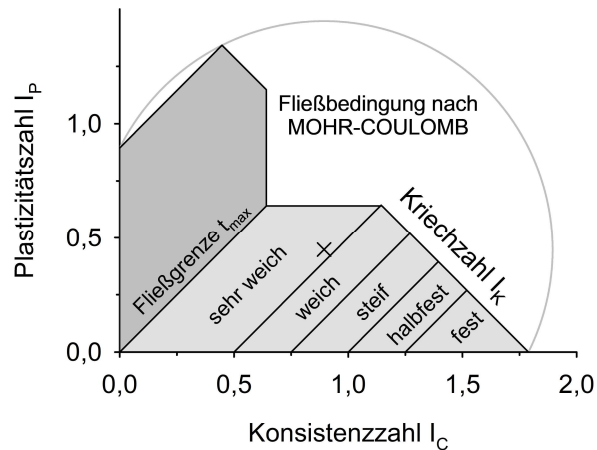


Abbildung 54) Das diskretisierte Atterberg-Kontinuum in der zeitunabhängigen, krieche-lastischen Projektion t_{max} mit Fließbedingung nach Mohr-Coulomb.

Zur Veranschaulichung wird zusätzlich die Lage des Mohrschen Spannungskreises und die Lage seines Mittelpunkts im Atterberg-Kontinuum dargestellt. Die Lage der Grenzen entspricht bei einer Plastizitätszahl $I_p = 0$ der Lage der Konsistenzgrenzen nach aktuellem Verständnis.

In der Abbildung 54 in hellgrau dargestellte Flächen des Atterberg-Kontinuums sind im Repräsentanten des MOHRschen Spannungskreises Druck und Zug Bereiche mit positiven Normalspannungen, dunkelgraue Flächen Bereiche mit negativen Normalspannungen. Die Kriechzahl I_K kann nur im Bereich mit ursprünglich positiven Normalspannungen, d. h. auf der rechten Seite der Fließgrenze t_{max} ermittelt werden. Die Verwendung negativer Werte ist für die Kriechzahl I_K nicht zulässig.

Abschließend wird die Fließbedingung nach Mohr-Coulomb in das Atterberg-Kontinuum eingefügt (Abb. 54). Die Fließbedingung nach Mohr-Coulomb gilt für alle Zustände des Atterberg-Kontinuums und bedeutet hier: Konsistenzzahl I_c und Plastizitätszahl I_p dürfen nicht gleichzeitig größer sein als die konstante Größe des Atterberg-Kontinuums $I_{p\ max} = 0,64143$.

Jede Grenze entspricht ursprünglich der Richtung einer gleich großen Normalspannung im unteren Grenzzustand (Abb. 53). Jeder Grenze kann genau ein Wert einer elastischen Größe zugeordnet werden, d. h. die Linien gleicher Kriechzahlen I_K entsprechen den Linien gleicher elastischer Kennwerte zum Zeitpunkt t_{max} (Querdehnzahl v_K , Reibungswinkel φ_K etc.).

4.6.2. Fließbedingung nach Mohr-Coulomb im Atterberg-Kontinuum

An der Fließgrenze t_{max} ist die Querdehnzahl $v_K = 0,5$, d. h. sie kennzeichnet den Bereich, ab dem sich Bodenproben, zunehmend wie Flüssigkeiten verhalten. Ausgehend vom Koordinatenursprung nimmt die Viskosität einer Bodenprobe im Verlauf der Fließgrenze t_{max} mit ansteigender Plastizitätszahl I_p zu. Für den Punkt mit den Koordinaten $I_c = I_p = 0,89443$ wird angenommen (Abb. 55), dass eine Bodenprobe eine superzähe Flüssigkeit mit einer sehr hohen Viskosität sein muss. Bei Belastung wäre eine gegen Null strebende Fließgeschwindigkeit zu erwarten. Diese Beschreibung trifft auf Böden nicht zu.

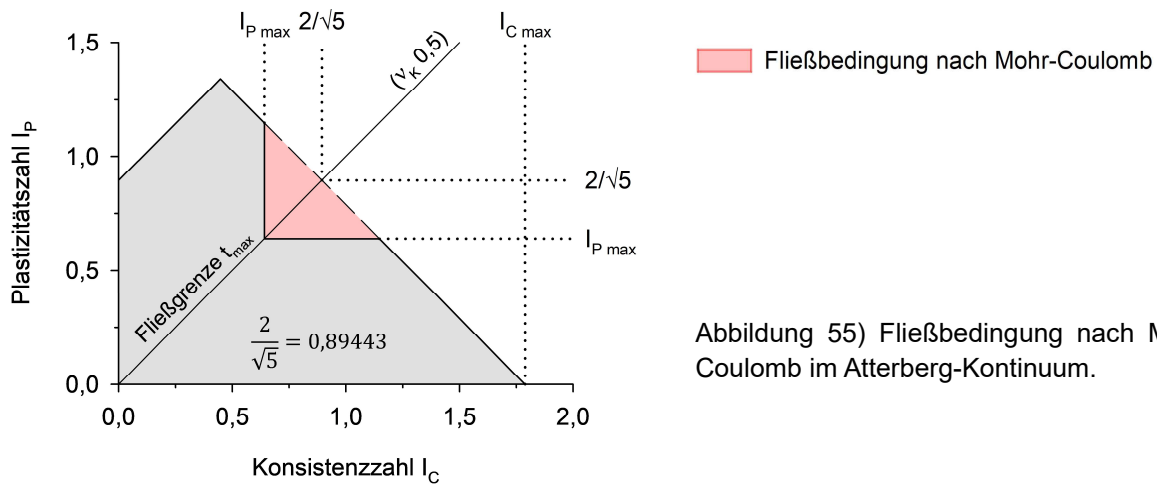


Abbildung 55) Fließbedingung nach Mohr-Coulomb im Atterberg-Kontinuum.

Zur Abgrenzung von Bereichen, in denen ein nicht realistisches Verformungsverhalten zu erwarten ist, wird die Fließbedingung nach Mohr-Coulomb auf die größte Konsistenzzahl im Atterberg-Kontinuum $I_{C \max} = 1,78885$ angewendet. Es wird die Größe $I_{P \max} = 0,64143$ ermittelt (223) und zur Abgrenzung des Bereichs verwendet, der in Abbildung 55 aus der Fläche des Atterberg-Kontinuums ausgespart und als Fließbedingung nach Mohr-Coulomb bezeichnet wird. Deshalb gilt im Atterberg-Kontinuum die Regel, dass die Konsistenzzahl I_C und die Plastizitätszahl I_P nicht gleichzeitig größer als $I_{P \max}$ sein dürfen.

$$\tan \varphi_E = \frac{I_{C \max}}{I_{C \max} + 1} = I_{P \max} = \frac{4}{4 + \sqrt{5}} = 0,64143 \quad (223)$$

Auch in anderen Zusammenhängen wird die Fließbedingung nach Mohr-Coulomb auf Basis der Konsistenzzahl $I_{C \max}$ und der Plastizitätszahl $I_{P \max}$ zur Festlegung von Grenzen genutzt. Ein Beispiel hierfür ist die Darstellung der Konsistenzzahlen I_C als Einheitsvektoren auf Basis der normierten Wassergehalte \hat{w} . Im genannten Fall kann die ermittelte Grenze der maximalen Plastizität nicht von Versuchsdaten überschritten werden. Sie ist damit eine deutlich restriktivere Grenze als die Fließbedingung nach Mohr-Coulomb im Atterberg-Kontinuum.

Im Gesamtdatensatz + LKN mit insgesamt 2204 Versuchen wurden insgesamt 16 Überschreitungen der Fließbedingung nach Mohr-Coulomb registriert (0,7% der Daten). Bei allen 12 Überschreitungen im Datensatz LKN enthalten die Proben organische Anteile. Von den 4 Daten aus dem Gesamtdatensatz stammen 2 Versuche aus dem Referenzdatensatz Hamburg. Diese Proben werden als Mudde bzw. Klei bezeichnet, sodass von einem Gehalt an organischen Inhaltsstoffen auszugehen ist. Für die restlichen 2 Versuche aus dem Gesamtdatensatz liegen keine Angaben zu organischen Anteilen vor (Abb. 56). Damit sind die Überschreitungen der Fließbedingung nach Mohr-Coulomb wahrscheinlich eine Fragestellung, die vor allem Böden mit organischen Anteilen betrifft.

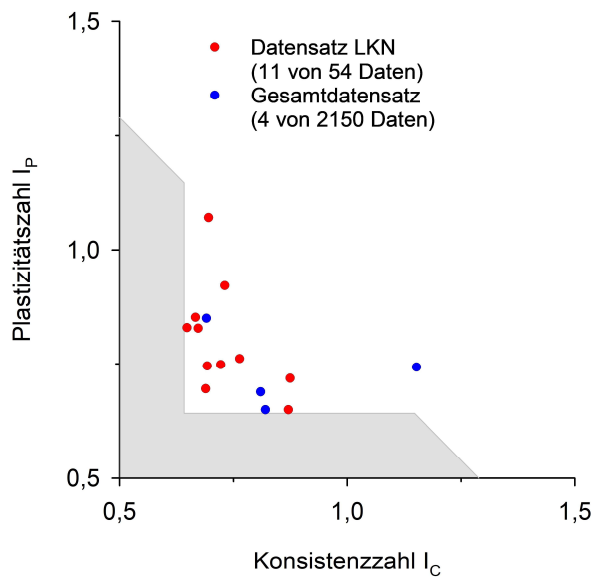


Abbildung 56) Überschreitungen der Fließbedingung nach Mohr-Coulomb im Atterberg-Kontinuum (Die Konsistenzzahl I_c und die Plastizitätszahl I_p sind gleichzeitig größer als die konstante Größe $I_{p\ max} = 0,64143$).

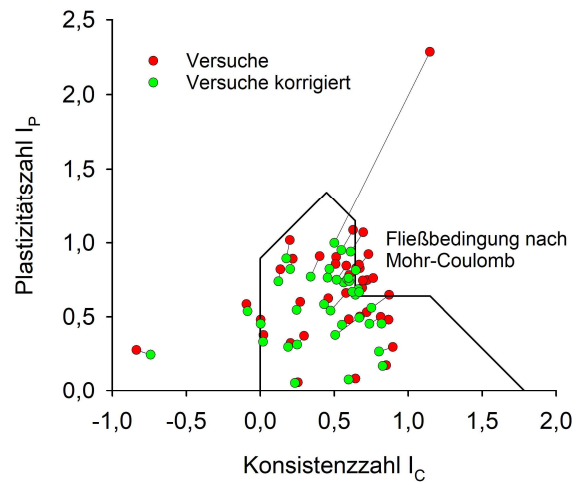


Abbildung 57) Experimenteller Ansatz für die Korrektur von Versuchsergebnissen, bei denen die Proben organische Anteile enthalten (Datensatz LKN mit 38 von 54 Versuchen).

In Abbildung 57 wird ein experimenteller Ansatz für die Korrektur zu organischen Inhaltsstoffen vorgestellt. Der geringe Datenbestand und die Herkunft aus einem einzigen Projekt (Datensatz LKN) sind für allgemeine Schlussfolgerungen nicht ausreichend, weshalb hier auf eine detaillierte Vorstellung des Lösungsansatzes verzichtet wird. Der prozentuale Anteil an organischen Inhalten (Glühverlust) wird aus den Versuchsergebnissen herausgerechnet. Durch die Korrektur werden die dargestellten Versuche in Richtung Koordinatenursprung verschoben. Nach der Korrektur liegt selbst ein extremer Ausreißer innerhalb des Atterberg-Kontinuums und die aufgrund der Fließbedingung nach Mohr-Coulomb verbotene Zone wird fast vollständig von Daten geräumt (Abb. 57).

4.6.3. Erste Abschlussbeobachtung: Herleitung des Atterberg-Kontinuums

Eine Bewertung von Versuchsergebnissen, eine Prüfung von Schlussfolgerungen und eine statistische Auswertung von Versuchsergebnissen können nur dann erfolgen, wenn Grenzen, Gültigkeitskriterien oder andere Fixpunkte festgelegt werden. Ohne diese Bewertungsgrundlagen kann kein näherer Bezug zu den Versuchsergebnissen hergestellt werden und eine weiterführende Interpretation der Daten wird deutlich erschwert. Die Festlegung von Grenzen und Gültigkeitskriterien sollte nach Möglichkeit nicht aus dem Datensatz heraus erfolgen. Um Selbstbezüge zu vermeiden, ist die Verwendung von versuchsunabhängigen Zusammenhängen zu bevorzugen.

Im Atterberg-Kontinuum stehen die folgenden, versuchsunabhängigen Bewertungsgrundlagen für eine Bewertung der Versuchsergebnisse, für eine Prüfung von Hypothesen und Schlussfolgerungen sowie für eine statistische Auswertung zur Verfügung:

- Die Grenzen des Atterberg-Kontinuums entsprechen den Hauptnormalspannungsrichtungen HNR und den um 90° gedrehten Hauptschubspannungsrichtungen HSR im Repräsentanten des Mohrschen Spannungskreises Druck und Zug im elastischen Grenzzustand. Die Gültigkeitskriterien im Atterberg-Kontinuum ergeben sich aus den Grenzen des Atterberg-Kontinuums (Abb. 59).
- Die statistischen Kennzahlen der theoretischen Mittelwerte ergeben sich aus dem Mittelpunkt des Repräsentanten des Mohrschen Spannungskreises Druck und Zug im elastischen Grenzzustand (Abb. 60).
- Die Fließbedingung nach Mohr-Coulomb als Anwendung auf das Atterberg-Kontinuum ergibt sich aus den Grenzen des Atterberg-Kontinuums (Abb. 59 und Punkt 4.8.1.).
- Die Fließgrenzen t_{min} und t_{max} trennen ursprünglich im Repräsentanten des Mohrschen Spannungskreises Druck und Zug im elastischen Grenzzustand den Bereich mit negativen Normalspannungen vom Bereich mit positiven Normalspannungen (Abb. 58).

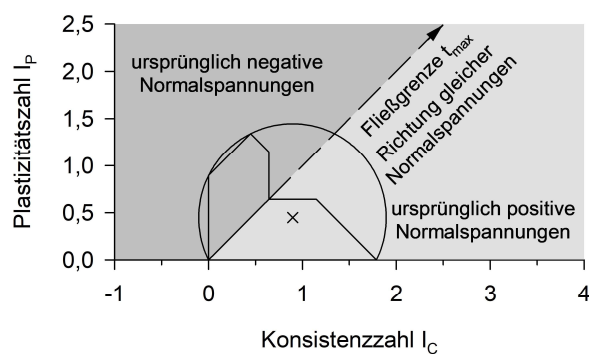


Abbildung 58) versuchsunabhängige Bewertungsgrundlagen in der Projektion t_{max} des Atterberg-Kontinuums, Darstellung einschließlich Spannungskreis und seinem Mittelpunkt.

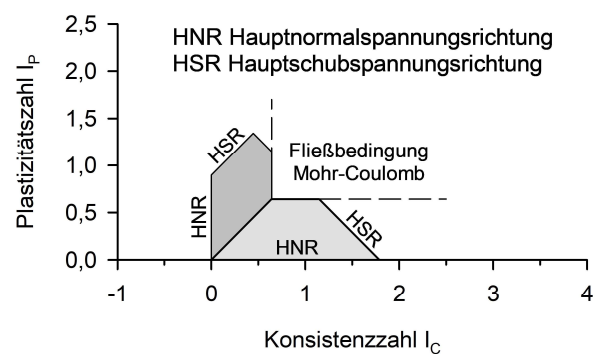


Abbildung 59) versuchsunabhängige Bewertungsgrundlagen in der Projektion t_{max} des Atterberg-Kontinuums mit der Bedeutung von Grenzen

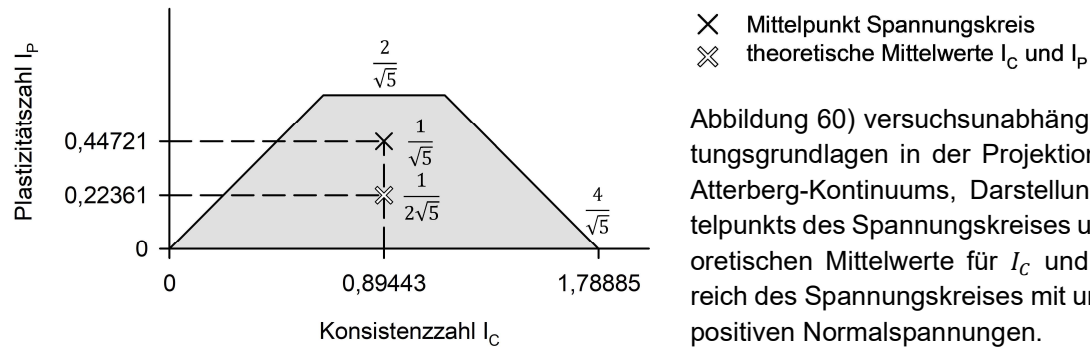


Abbildung 60) versuchsunabhängige Bewertungsgrundlagen in der Projektion t_{max} des Atterberg-Kontinuums, Darstellung des Mittelpunkts des Spannungskreises und der theoretischen Mittelwerte für I_C und I_P im Bereich des Spannungskreises mit ursprünglich positiven Normalspannungen.

In der chronologischen Abfolge der Herleitung des Atterberg-Kontinuums ist die Beschreibung des kriechelastischen Grenzzustands der letzte Arbeitsschritt. Wird der Bereich mit positiven Normalspannungen in der finalen Projektion t_{max} (Abb. 60) mit den Versuchsdaten von Atterberg-Versuchen verglichen, ist festzustellen, dass die Herleitung des Atterberg-Kontinuums durch die Datendichte-Verteilung der Atterberg-Versuche bestätigt wird (Abb. 61).

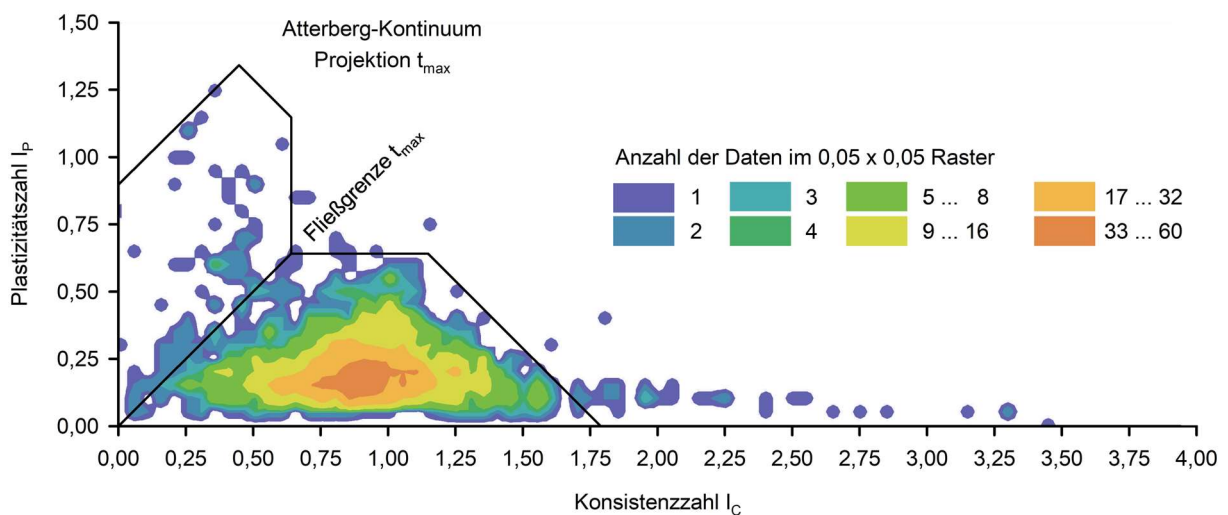


Abbildung 61) Auswertung von 2150 Atterberg-Versuchen mit Darstellung der Datendichte im Atterberg-Kontinuum (2131 von 2150 Versuchen, Abbildung ohne $I_C < 0$ und $I_C > 4$). Die Darstellung des Atterberg-Kontinuums erfolgt in der kriechelastischen Projektion t_{max} .

Das Atterberg-Kontinuum wird in Abbildung 61 im kriechelastischen Grenzzustand und die Datendichte der Versuche im 0,05 x 0,05 Zählraster dargestellt. Die Daten konzentrieren sich rechts der Fließgrenze t_{max} des Atterberg-Kontinuums (Abb. 61). Dieser Bereich ist im Repräsentanten des Mohrschen Spannungskreis Druck und Zug im elastischen Grenzzustand der Bereich mit ursprünglich positiven Normalspannungen (Abb. 60). Die Versuchsdaten füllen diesen Bereich vollständig und mit einer symmetrischen Verteilung der Datendichte aus. Der Schwerpunkt der Datendichte liegt mit 60 Daten pro Rasterfeld im Bereich der theoretischen Mittelwerte der Konsistenzzahl $I_C = 0,89443$ und der Plastizitätszahl $I_P = 0,22361$ und hat einen Bezug zur Lage des Mittelpunkts des Mohrschen Spannungskreises (Abb. 60).

In Verbindung mit den Ergebnissen der statistischen Auswertungen (Punkt 4.5.5. und 4.7.5.) ist davon auszugehen, dass die im Zuge der Herleitung des Atterberg-Kontinuums getroffenen Hypothesen und Schlussfolgerungen zutreffen. Die Wahrscheinlichkeit für diese Annahme ist hoch, weil die Bewertungsgrundlagen von den Ergebnissen der Atterberg-Versuche vollständig unabhängig sind. Eine zufällige Übereinstimmung kann mit hoher Wahrscheinlichkeit ausgeschlossen werden. Die Schlüsselbeobachtung führt zu sinnvollen Ergebnissen.

Unter der Randbedingung, dass hinreichend kleine Verformungen ausschließlich von Normalspannungen verursacht werden, können im kriechelastischen Grenzzustand keine Verformungen auftreten (Herleitung über den unteren Grenzzustand mit $\sigma_x = \sigma_y = 0$ Pa). Wenn keine Verformungen auftreten können, muss der Konsolidierungsgrad eines Bodens mindestens gleich oder größer sein als der auf ihn wirkende Überlagerungsdruck. Weil der kriechelastische Grenzzustand eine Langzeitbetrachtung darstellt, ist davon auszugehen, dass alle aus dem Überlagerungsdruck resultierenden Verformungen vollständig abgeklungen sind. Die Konzentration der Datendichte im Bereich mit ursprünglich positiven Normalspannungen bedeutet, dass die hier dargestellten Böden widerständig gegen den wirkenden Überlagerungsdruck sind. Diese Situation stellt für den deutlich überwiegenden Anteil der Böden den Normalfall dar. Alle nicht widerständigen Böden müssen links der Fließgrenze t_{max} im Bereich mit ursprünglich negativen Normalspannungen liegen. Der Bereich mit ursprünglich positiven Normalspannungen im kriechelastischen Grenzzustand t_{max} wird definiert als der Ruhezustand der Böden.

4.7. Beschreibung von Elastizitätszahl und Kriechzahl

4.7.1. Elastizitätszahl

Die Elastizitätszahl I_E ist die Größe des Atterberg-Kontinuums, mit der elastische Kennwerte zum Zeitpunkt t_{min} ermittelt werden können. Sie ergibt sich nach Gleichung (216) aus der Konsistenzzahl I_C und der Plastizitätszahl I_P des Atterberg-Versuchs. Aus der Elastizitätszahl I_E berechnete Größen werden mit dem Index E gekennzeichnet.

$$I_E = I_C - \frac{I_P}{2} \quad (216)$$

Als zeitunabhängige Größe zum Zeitpunkt t_{min} ist die Elastizitätszahl I_E die Größe, die als Berechnungsgrundlage für die geotechnischen Kennwerte verwendet wird, die mit den Ergebnissen von Felduntersuchungen (Drucksondierungen) und den Ergebnissen von Laborversuchen (Triaxialversuch-UU etc.) vergleichbar sind.

Die Elastizitätszahl I_E ist eine zeitunabhängige Größe zum Zeitpunkt t_{min} und kann deshalb direkt in die Matrix des Hookeschen Gesetzes für den isotropen Fall eingesetzt werden (224). Die physikalische Bezugsgröße mit Einheit der mechanischen Spannung Pa ist die elastische Konstante Elastizitätsmodul E .

$$C_{(t_{min})} = \frac{E}{1 + \nu_E} \begin{bmatrix} \frac{I_E + 1}{I_E} & \frac{1}{I_E} & \frac{1}{I_E} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{I_E + 1}{I_E} & \frac{1}{I_E} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{I_E + 1}{I_E} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (224)$$

Beispiel: In der Gleichung (225) wird der Longitudinalmodul M_E bzw. der Steifemodul E_S zum Zeitpunkt t_{min} durch Multiplizieren des Terms vor der Matrix mit Position c_{11} der Matrix ermittelt. Vor dem Multiplizieren entspricht Position c_{11} dem Kehrwert der Fließbedingung nach Mohr-Coulomb.

$$c_{11}(t_{min}) = \frac{E}{1 + \nu_E} \cdot c_{11} = \frac{E}{1 + \nu_E} \cdot \frac{I_E + 1}{I_E} = \frac{E}{1 + \nu_E} \cdot \frac{1 - \nu_E}{1 - 2\nu_E} = M_E \quad (225)$$

Die Grenzen in Abbildung 52 sind Linien gleicher geotechnischer Kennwerte. Die Richtung der Grenzen entspricht ursprünglich den Richtungen gleicher Normalspannungen im Repräsentanten des Mohrschen Spannungskreises Druck und Zug im elastischen Grenzzustand (Projektion t_{min}). Die Festlegung der Richtung der Grenzen als Berechnungsgrundlage erfolgte unter der Randbedingung, dass hinreichend kleine Verformung ausschließlich durch Normalspannungen verursacht werden.

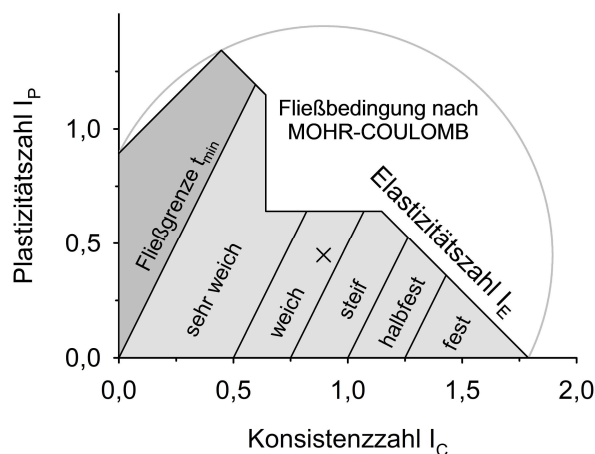


Abbildung 52) Das diskretisierte Atterberg-Kontinuum in der elastischen Projektion t_{min} (elastischer Grenzzustand der Böden)

Zur Veranschaulichung wird zusätzlich die Lage des Mohrschen Spannungskreises und die Lage seines Mittelpunkts im Atterberg-Kontinuum dargestellt. Die Lage der Grenzen entspricht bei einer Plastizitätszahl $I_p = 0$ der Lage der Konsistenzgrenzen nach aktuellem Verständnis.

Beispiel: Es liegt ein Atterberg-Versuch mit einer Konsistenzzahl $I_C = 1$ und einer Plastizitätszahl $I_P = 0,5$ vor. Mit einer Elastizitätszahl $I_E = 0,75$ liegt die dargestellte Probe in der Projektion t_{min} (Abb. 52) auf der Grenze zwischen dem weichplastischen und dem steifplastischen Bereich. Aus dem Versuchsergebnis kann für den Zeitpunkt t_{min} (Kurzzeitbetrachtung) eine Querdehnzahl von $v_E = 0,364$ und ein Reibungswinkel $\varphi_E = 23,3^\circ$ ermittelt werden.

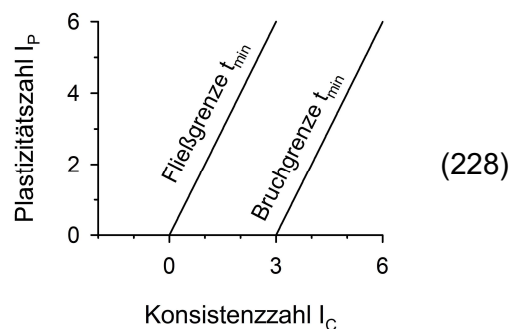
$$\begin{aligned}
 v_E &= \frac{1}{I_E + 2} & I_E &= I_C - \frac{I_P}{2} = 1 - \frac{0,5}{2} = 0,75 & v_E &= \frac{1}{2,75} = 0,364 \\
 \tan \varphi_E &= \frac{I_E}{I_E + 1} & \tan \varphi_E &= \frac{0,75}{1,75} & \varphi_E &= \text{atan}\left(\frac{0,75}{1,75}\right) = 23,2^\circ
 \end{aligned}
 \tag{226}$$

Der Definitionsbereich der Elastizitätszahl liegt zwischen $0 < I_E < 3$ und steht in einem direkten Zusammenhang mit dem Definitionsbereich der Querdehnzahlen $0,5 > v > 0,2$ (elastischer Bereich). In der Projektion t_{min} begrenzen die Lösungen (228) für die Fließ- und Bruchgrenze den elastischen Bereich (Abb. 62). Diese werden mit der Grenzzustandsfunktion für die Elastizitätszahl I_E bestimmt (227).

$$\begin{aligned}
 &\text{Grenzzustandsfunktion: } v_E = v' \\
 \frac{2}{2I_C - I_P + 4} &= \frac{\sqrt{\left(\frac{2I_C - I_P}{2I_C - I_P + 2}\right)^2 + 1} - \left(\frac{2I_C - I_P}{2I_C - I_P + 2}\right)}{2\sqrt{\left(\frac{2I_C - I_P}{2I_C - I_P + 2}\right)^2 + 1}}
 \end{aligned}
 \tag{227}$$

Abbildung 62) Mit der Grenzzustandsfunktion $v_E = v'$ ermittelte elastische Grenzen für die Projektion t_{min} .

$$\begin{aligned}
 \text{Lösung 1} & & I_C &= \frac{I_P}{2} \text{ bzw. } I_P = 2I_C \\
 (\text{Fließgrenze } t_{min}) & & & \\
 \text{Lösung 2} & & I_C &= \frac{I_P + 6}{2} \text{ bzw. } I_P = 2I_C - 6 \\
 (\text{Bruchgrenze } t_{min}) & & &
 \end{aligned}$$



4.7.2. Kriechzahl

Die Kriechzahl I_K ist die Größe des Atterberg-Kontinuums, mit der elastische Kennwerte zum Zeitpunkt t_{max} ermittelt werden können. Sie ergibt sich nach Gleichung (160) aus der Konsistenzzahl I_C und der Plastizitätszahl I_P des Atterberg-Versuchs. Aus der Kriechzahl I_K berechnete Größen werden mit dem Index κ gekennzeichnet.

$$I_K = I_C - I_P
 \tag{222}$$

Als zeitunabhängige Größe zum Zeitpunkt t_{max} ist die Kriechzahl I_K die Größe, die als Berechnungsgrundlage für die geotechnischen Kennwerte verwendet wird, die mit den Ergebnissen von Langzeitversuchen vergleichbar sind (Relaxation, Retardation etc.).

Die Grenzen in Abbildung 54 sind Linien gleicher geotechnischer Kennwerte. Die Richtung der Grenzen entspricht ursprünglich den Richtungen gleicher Normalspannungen im Repräsentanten des Mohrschen Spannungskreises Druck und Zug im unteren Grenzzustand (Projektion t_{max}). Die Festlegung der Richtung der Grenzen als Berechnungsgrundlage erfolgte unter der Randbedingung, dass hinreichend kleine Verformung ausschließlich durch Normalspannungen verursacht werden. Im unteren Grenzzustand sind die Normalspannungen Null, d. h. die Kriechzahl I_K repräsentiert ohne zusätzliche Belastungen einen Zustand mit vollständig abgeklungenen Verformungen.

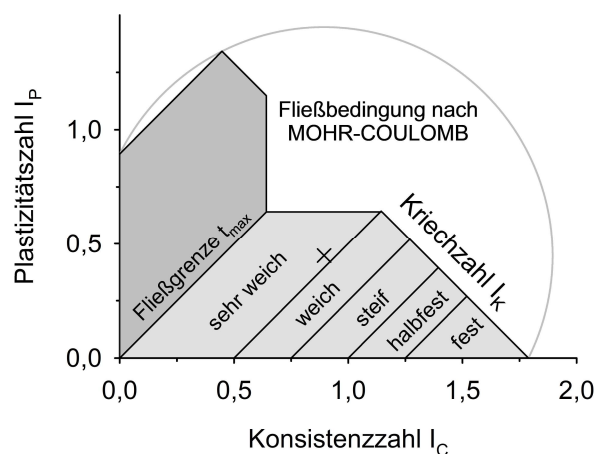


Abbildung 54) Das diskretisierte Atterberg-Kontinuum in der Projektion t_{max} (Ruhezustand der Böden)

Zur Veranschaulichung wird zusätzlich die Lage des Mohrschen Spannungskreises und die Lage seines Mittelpunkts im Atterberg-Kontinuum dargestellt. Die Lage der Grenzen entspricht bei einer Plastizitätszahl $I_p = 0$ der Lage der Konsistenzgrenzen nach aktuellem Verständnis.

Beispiel: Es liegt ein Atterberg-Versuch mit einer Konsistenzzahl $I_c = 1$ und einer Plastizitätszahl $I_p = 0,5$ vor. Mit einer Kriechzahl $I_K = 0,5$ liegt die dargestellte Probe in der Projektion t_{max} (Abb. 54) auf der Grenze zwischen dem sehr weichen und dem weichplastischen Bereich. Aus dem Versuchsergebnis kann für den Zeitpunkt t_{max} (Langzeitbetrachtung) eine Querdehnzahl von $\nu_K = 0,4$ und ein Reibungswinkel $\varphi_K = 18,4^\circ$ ermittelt werden.

$$\begin{aligned} \nu_K &= \frac{1}{I_K + 2} & I_K &= I_c - I_p = 1 - 0,5 = 0,5 & \nu_K &= \frac{1}{2,5} = 0,4 \\ \tan \varphi_K &= \frac{I_K}{I_K + 1} & \tan \varphi_K &= \frac{0,5}{1,5} & \varphi_K &= \operatorname{atan}\left(\frac{0,5}{1,5}\right) = 18,4^\circ \end{aligned} \quad (229)$$

Die Kriechzahl I_K ist eine zeitunabhängige Größe zum Zeitpunkt t_{max} und kann deshalb direkt in die Matrix des Hookeschen Gesetzes für den isotropen Fall eingesetzt werden (230). Die physikalische Bezugsgröße mit Einheit der mechanischen Spannung Pa ist die elastische Konstante Kriechmodul E_C .

$$c_{(t_{max})} = \frac{E_C}{1 + \nu_K} \begin{bmatrix} \frac{I_K + 1}{I_K} & \frac{1}{I_K} & \frac{1}{I_K} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{I_K + 1}{I_K} & \frac{1}{I_K} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{I_K + 1}{I_K} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (230)$$

Beispiel: In der Gleichung (231) wird der Longitudinalmodul M_K bzw. der Steifemodul $E_{S(C)}$ zum Zeitpunkt t_{max} durch Multiplizieren des Terms vor der Matrix mit Position c_{11} der Matrix ermittelt. Vor dem Multiplizieren entspricht die Position c_{11} dem Kehrwert der Fließbedingung nach Mohr-Coulomb.

$$c_{11}(t_{max}) = \frac{E_C}{1 + \nu_K} \cdot c_{11} = \frac{E_C}{1 + \nu_K} \cdot \frac{I_K + 1}{I_K} = \frac{E_C}{1 + \nu_K} \cdot \frac{1 - \nu_K}{1 - 2\nu_K} = M_K \quad (231)$$

Kriechmodul E_C

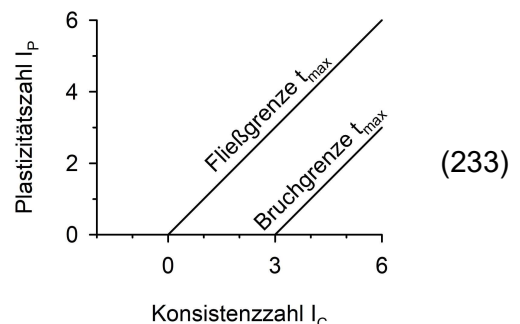
Der Definitionsbereich der Kriechzahl liegt zwischen $0 < I_K < 3$ und steht in einem direkten Zusammenhang mit dem Definitionsbereich der Querdehnzahlen $0,5 > \nu > 0,2$ (elastischer Bereich). In der Projektion t_{max} begrenzen die Lösungen für die Fließ- und Bruchgrenze den elastischen Bereich (Abb. 63). Diese werden mit der Grenzzustandsfunktion (232) für die Kriechzahl I_K bestimmt.

Grenzzustandsfunktion: $\nu_K = \nu'$

$$\frac{1}{I_C - I_P + 2} = \frac{\sqrt{\left(\frac{I_C - I_P}{I_C - I_P + 1}\right)^2 + 1} - \left(\frac{I_C - I_P}{I_C - I_P + 1}\right)}{2 \sqrt{\left(\frac{I_C - I_P}{I_C - I_P + 1}\right)^2 + 1}} \quad (232)$$

Abbildung 63) Mit der Grenzzustandsfunktion $\nu_K = \nu'$ ermittelte elastische Grenzen für die Projektion t_{max} .

- Lösung 1 (Fließgrenze t_{max}) $I_C = I_P$ bzw. $I_P = I_C$
- Lösung 2 (Bruchgrenze t_{max}) $I_C = I_P + 3$ bzw. $I_P = I_C - 3$



4.7.3. Bestimmung von Grenzen aus Elastizitätszahl und Kriechzahl

Mit der Elastizitätszahl I_E und der Kriechzahl I_K können über die Grenzzustandsfunktionen bzw. über Grenzwertbetrachtungen insgesamt 3 Funktionspaare ermittelt werden, die wesentliche Grenzen für den Atterberg-Versuch definieren. Die Grenzen in der Projektion t_{min} und die Grenzen in der Projektion t_{max} werden jeweils als Parallelen abgebildet. Dieses Verhalten ist insofern bemerkenswert, als dass sich die Wege der Herleitung zwischen den Fließ- und Bruchgrenzen auf der einen Seite und den Ausführbarkeitsgrenzen auf der anderen Seite deutlich unterscheiden. Die Grenzen gleicher Bedeutung aus beiden Projektionen berühren sich auf der Abszisse und sind dort Grenzpunkte, die aufgrund der Lage bei $I_p = 0$ unabhängig von den Unterschieden zwischen den Projektionen t_{min} und t_{max} sind (Abb. 64).

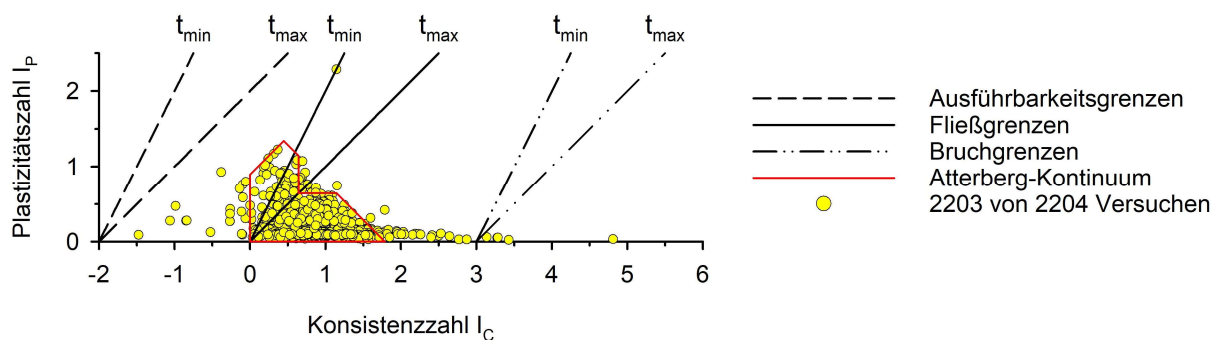
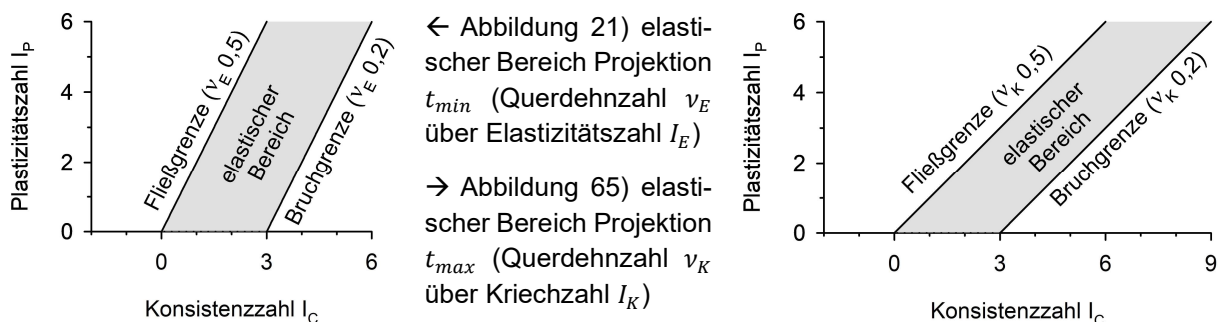


Abbildung 64) Das Atterberg-Kontinuum und Lage der ermittelten Grenzen. Für jede der beiden Projektionen t_{min} und t_{max} werden die elastischen Grenzfunktionen für die Fließgrenze und Bruchgrenze getrennt ermittelt. Die Ausführbarkeitsgrenzen sind viskoelastische Grenzen, die nach dem Verschneiden von Informationen aus den beiden Projektionen t_{min} und t_{max} erzeugt werden und ursprünglich Definitionslücken sind.

Die Fließgrenzen und die Bruchgrenzen werden für jeden Zeitpunkt gesondert ermittelt und sind deshalb elastische Grenzen. Ihre Lage entspricht in beiden Projektionen dem elastischen Bereich, der dem Definitionsbereich der Querdehnzahlen $0,5 > \nu > 0,2$ entspricht (Abb. 21 und Abb. 65).



← Abbildung 21) elastischer Bereich Projektion t_{min} (Querdehnzahl ν_E über Elastizitätszahl I_E)
 → Abbildung 65) elastischer Bereich Projektion t_{max} (Querdehnzahl ν_K über Kriechzahl I_K)

Die Ausführbarkeitsgrenzen werden durch Verschneiden von Informationen zum Zeitpunkt t_{min} und zum Zeitpunkt t_{max} ermittelt. Durch das Verschneiden der Informationen beider Projektionen wird eine Zeitabhängigkeit hergestellt. Dementsprechend sind die Ausführbarkeitsgrenzen viskoelastische Grenzen. Von den beiden auf Definitionslücken basierenden Grenzen ist nur die Ausführbarkeitsgrenze t_{max} relevant. Es ist physikalisch nicht möglich, dass ein Atterberg-Versuch auf der linken Seite der Ausführbarkeitsgrenze t_{max} dargestellt werden kann (Abb. 64). Die Ausführbarkeitsgrenze t_{min} hat für den Atterberg-Versuch keine Bedeutung. Die Hintergründe zu den Ausführbarkeitsgrenzen werden im Kapitel Kriechbeständigkeitszahl erläutert (Punkt 4.8.4.).

Weiterhin ist davon auszugehen, dass die Bruchgrenze t_{max} , die per Definition an einen verformungsfreien Zustand gebunden ist, keine Bedeutung für den Atterberg-Versuch hat. Damit ist die Bruchgrenze t_{min} die äußere Grenze auf der rechten Seite des Atterberg-Kontinuums (Abb. 65). Die relevanten äußeren Grenzen werden mit Bezug auf die Lage des Atterberg-Kontinuums in Abbildung 66 dargestellt.

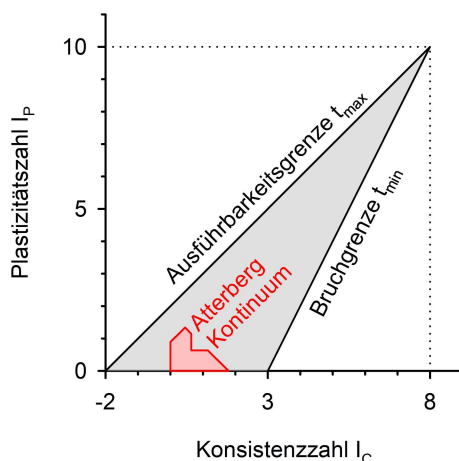


Abbildung 66) Darstellung der relevanten äußeren Grenzen Ausführbarkeitsgrenze t_{max} und Bruchgrenze t_{min} . Die weiter links außen liegende Ausführbarkeitsgrenze t_{min} sowie die weiter rechts außenliegende Bruchgrenze t_{max} ergeben keinen Sinn, sind damit bedeutungslos und werden nicht berücksichtigt.

4.7.4. Gemeinsame Skala für Böden mit bindiger und nicht bindiger Reaktion

Im Atterberg-Kontinuum können Böden mit einer nicht bindigen und einer bindigen Reaktion auf einer gemeinsamen Skala dargestellt werden, d. h. die Berechnung geotechnischer Kennwerte kann unabhängig von der Bodenreaktion für alle Böden gleichzeitig und nach identischen Regeln erfolgen. Für die Herleitung der gemeinsamen Skala sind die Größen des Atterberg-Kontinuums hinsichtlich ihres Verformungsverhaltens zu definieren:

- Die Konsistenzzahl I_c repräsentiert die Gesamtverformung und die Plastizitätszahl I_p die viskoelastischen Verformungsanteile.

- Bei einer Plastizitätszahl von $I_p \cong 0$ sind die Elastizitätszahl I_E , die Kriechzahl I_K und die Konsistenzzahl I_C in etwa gleich groß. Die Konsistenzzahl I_C repräsentiert in diesem Fall eine Gesamtverformung, die ausschließlich aus einem elastischen Verformungsanteil besteht. Es liegt eine nicht bindige Bodenreaktion vor.
- Bei einer Plastizitätszahl von $I_p \gg 0$ repräsentieren die Elastizitätszahl I_E bzw. die Kriechzahl I_K den elastischen Verformungsanteil einer Gesamtverformung, die aus einem elastischen Verformungsanteil und einem viskoelastischen Verformungsanteil besteht. Es liegt eine bindige Bodenreaktion vor.

Der Übergang zwischen einer nicht bindigen und einer bindigen Bodenreaktion erfolgt im Atterberg-Versuch fließend und kann nicht exakt bestimmt werden. Die Beschreibung des Übergangsbereichs erfolgt mit den Versuchsdaten über die versuchsfreie Lücke zwischen der Abszisse und den ermittelten Minima der Plastizitätszahlen. Die vorhandene Plastizitätszahllücke repräsentiert die technischen Grenzen des Versuchsaufbaus für die Bestimmung der Fließ- und Ausrollgrenze. Sie ist von der Konsistenzzahl I_C unabhängig und ihre Größe schwankt zwischen Plastizitätszahlen von $0 < I_p < 0,1$. In der Auswertung der Versuchsdaten in Abbildung 67 ist zu erkennen, dass ein Bereich zwischen $0 < I_p < 0,05$ bis auf wenige Ausnahmen praktisch frei von Versuchsergebnissen ist. Dieser Bereich ist die Plastizitätszahllücke des Atterberg-Versuchs.

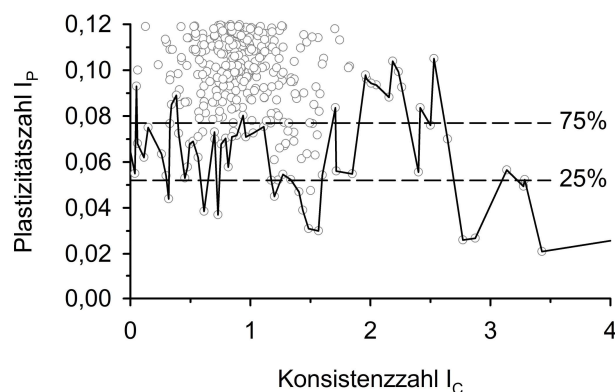


Abbildung 67) Unter der dargestellten Kurve aus 63 Minimalwerten für die Plastizitätszahl I_p gibt es im Bereich zwischen $0 < I_C < 4$ keine Ergebnisse von Atterberg-Versuchen.

<i>min.</i>	I_p 0,019	\bar{x}_{med}	I_p 0,066
10%	I_p 0,033	75%	I_p 0,077
25%	I_p 0,052	90%	I_p 0,094
\bar{x}	I_p 0,065	<i>max.</i>	I_p 0,105

Die Plastizitätszahllücke wird als Übergangsbereich zwischen Böden mit einer bindigen Reaktion und Böden mit einer nicht bindigen Reaktion definiert. Eine eindeutig nicht bindige Bodenreaktion liegt genau dann vor, wenn die Plastizitätszahl $I_p = 0$ ist. Diese Situation wird durch die Abszisse als unteres Ende der Plastizitätszahllücke repräsentiert. Das obere Ende der Plastizitätszahllücke wird in Annäherung durch die Minimalwerte der Versuche festgelegt (Abb. 67). In diesem Bereich liegt in etwa der diffuse bzw. allmähliche Übergang von einer nicht bindigen zu einer bindigen Bodenreaktion.

Eine nicht bindige Bodenreaktion erfolgt bei einer Plastizitätszahl von $I_p \cong 0$. Das bedeutet, die Plastizitätszahl I_p liegt ungefähr bei Null. Der Bereich ohne bzw. mit wenigen Ergebnissen von Versuchen liegt zwischen ca. $0 < I_p < 0,05$. Es wird auf Grundlage der Versuchsergebnisse angenommen, dass dieser Bereich die Bedingung $I_p \cong 0$ erfüllt.

Eine bindige Bodenreaktion erfolgt bei einer Plastizitätszahl von $I_p \gg 0$. Das bedeutet, die Plastizitätszahl I_p ist deutlich größer als Null. Es wird auf Grundlage der Versuchsergebnisse angenommen, dass die Bedingung erfüllt wird, wenn die Plastizitätszahl $I_p > 0,05$ ist.

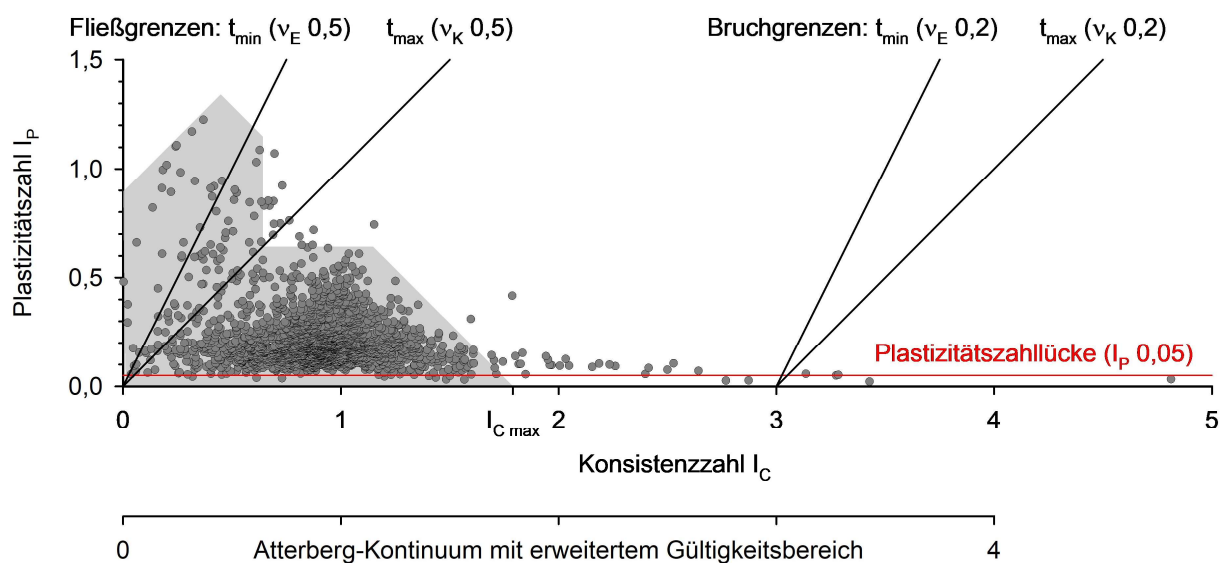


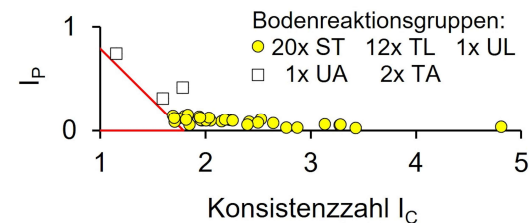
Abbildung 68) Das Atterberg-Kontinuum mit Darstellung der Plastizitätszahllücke, den Fließ- bzw. Bruchgrenzen der Projektionen t_{min} und t_{max} und dem erweiterten Gültigkeitsbereich, in dem Berechnungen unter festgelegten Voraussetzungen zulässig sind.

Die Konsistenzzahl $I_{C\ max} = 1,7885$ ist die größtmögliche Konsistenzzahl im Atterberg-Kontinuum (Abb. 68). Die Versuchsdaten mit $I_C > I_{C\ max}$ bilden zwischen ca. $1,8 < I_C < 3,5$ eine kontinuierliche, rattenschwanzähnliche Fortsetzung des Datenbestands. Die Überschreitungen der Konsistenzzahl $I_{C\ max}$ liegen mit einem Anteil von ca. 1,7% am Gesamtdatensatz eindeutig im Bereich der Ausreißer des oberen Randes (Abb. 69). Die Überschreitungen treten im Mittel nur bei 1 von 60 Versuchsergebnissen auf, sind aber in allen 5 Teildatensätzen des Gesamtdatensatzes aus 2150 Versuchen vorhanden. Deshalb wird davon ausgegangen, dass die Überschreitungen ein selten beobachtbares, aber dennoch typisches Verhalten von Atterberg-Versuchen darstellen (Tabelle 13). Bei den Überschreitungen handelt es sich vor allem um gering plastische Böden, die im Nahbereich der Plastizitätszahllücke liegen und sich bei größer werdenden Konsistenzzahlen tendenziell der Abszisse annähern (Abb. 68).

Tabelle 13: Überschreitungen von $I_C \max$

Datensatz	Anzahl Daten	Anzahl $I_C > I_C \max$	Anteil%
BGBK	1573	16	1,0%
IBG	221	9	4,1%
HH	140	1	0,7%
GUT	65	1	1,5%
HTWK	151	9	6,0%
gesamt	2150	36	1,7%

Abbildung 69) Überschreitungen von $I_C \max$ im Bereich von $1 < I_C < 5$ (Überschreitung bei $I_C = 9,58$ nicht dargestellt)



Von den in Abbildung 69 dargestellten Überschreitungen sind die Böden der Reaktionsgruppen UA und TA ungültige Daten, die nicht zur weiteren Verwendung geeignet sind. Die Böden der Reaktionsgruppen ST, TL und UL liegen nahe der Plastizitätszahllücke. Für diese Daten wird der Bereich zwischen $1,78885 \leq I_C \leq 4$ als der erweiterte Gültigkeitsbereich des Atterberg-Kontinuums definiert (Abb. 68). Im erweiterten Gültigkeitsbereich liegende Versuchsergebnisse mit geringer Plastizität können für Berechnungen verwendet werden.

Die Festlegung der Obergrenze des erweiterten Gültigkeitsbereichs von $I_C = 4$ kann nur willkürlich erfolgen. Eine Konsistenzzahl von $I_C = 4$ liegt deutlich jenseits der Bruchgrenze t_{min} (Abb. 68). Dieser Bereich kann mit den Regeln des elastisch-isotropen-Halbraums nicht beschrieben werden ($\nu < 0,2$).

Wenn die im Atterberg-Kontinuum gültigen Regeln auf Daten mit Konsistenzzahlen $I_C > 1,8$ angewendet werden, erhält man Kennwerte in Größenordnungen, die bei Vergleich mit Erfahrungswerten eher Böden mit einer nicht bindigen Reaktion zuzuordnen sind. So ergibt ein Versuch mit einer Konsistenzzahl von $I_C = 2,4$ und einer Plastizitätszahl von $I_P = 0,08$ eine Querdehnzahl von $\nu = 0,23$ und einen Reibungswinkel von $\varphi_E = 34,9^\circ$.

Die folgenden Beobachtungen lassen die Schlussfolgerung zu, dass Böden mit einer nicht bindigen Bodenreaktion im (erweiterten) Atterberg-Kontinuum dargestellt werden können:

- Die Plastizitätszahllücke entsteht durch die technischen Grenzen des Versuchsaufbaus des Atterberg-Versuchs. Die Existenz der Plastizitätszahllücke bedeutet nicht, dass in diesem Bereich keine Daten existieren können. Sie bedeutet nur, dass es praktisch mit dem Versuchsaufbau des Atterberg-Versuchs nicht möglich ist entsprechende Daten zu erzeugen.
- Im erweiterten Gültigkeitsbereich an die Plastizitätszahllücke anschließende Versuchsdaten ergeben bei Berechnungen geotechnische Kennwerte, die in ihrer Größenordnung eher den Kennwerten von Böden mit einer nicht bindigen Reaktion entsprechen.

- Im Nahbereich der Plastizitätszahllücke gibt es keine nennenswerten Unterschiede zwischen den geotechnischen Kennwerten der Projektion t_{min} und der Projektion t_{max} des Atterberg-Kontinuums. Die Grenzen der beiden Projektionen bilden in diesem Bereich immer einen gemeinsamen Grenzpunkt. Bei einem Verschneiden der Informationen aus beiden Projektionen wird am gemeinsamen Grenzpunkt ein elastisches und kein viskoelastisches Verformungsverhalten dargestellt. Bei Übertragung dieser Information auf mögliche Ergebnisse von Setzungsberechnungen wäre dieser Zusammenhang als Sofortsetzung zu interpretieren, was ein typisches Verformungsverhalten für Böden mit nicht bindiger Reaktion darstellt.

Tabelle 14: Elastizitätsgrenzen auf der gemeinsamen Skala für die Zustandsgrenzen von Böden mit bindiger und nicht bindiger Bodenreaktion

Reibungswinkel φ_E	Querdehnzahl ν_E	Elastizitätsgrenzen I_E	Elastizitätsbereiche nach Bodenreaktion		Elastizitätsgrenzen I_E
			bindig $I_P \gg 0$	nicht bindig $I_P \cong 0$	
0°	0,5	A 0	sehr weich	-	0 A
18,4°	0,40	0,5	weich	sehr locker	0,5
23,2°	0,36	0,75	steif		
26,6°	0,33	1	halbfest	locker	1
29,1°	0,31	1,25	halbfest bis fest		
31,0°	0,29	E 1,79	fest	mitteldicht	1,5
32,7°	0,26			2	
33,7°	0,25	B	fest	dicht	D
36,9°	0,2			3	B
38,7°	0,17	C 4		sehr dicht	3 B
					4 C

A) unterer Grenzzustand mit einer Querdehnzahl $\nu_E = 0,5$ (Fließgrenze)

B) elastischer Grenzzustand mit einer Querdehnzahl $\nu_E = 0,2$ (Bruchgrenze)

C) erweiterter Gültigkeitsbereich des Atterberg-Kontinuums mit willkürlicher Obergrenze im nicht elastischen Bereich (Bruch)

D) theoretisches Einsetzen der ersten nicht elastischen Verformungsanteile (Kornbruch etc.)

E) konstante Größe im Atterberg-Kontinuum $I_{C\ max} = 1,78885$

Die Verwendung einer gemeinsamen Skala für Böden mit bindiger und nicht bindiger Reaktion (Tabelle 14) hat im Vergleich zum aktuellen Stand der Technik entscheidende Vorteile. Die in der geotechnischen Fachliteratur dargestellten Verfahrensweisen für die Korrelationen zwischen verschiedenen Größen basieren ausnahmslos auf einer strikten Trennung zwischen nicht bindigen und bindigen Böden. Zusätzlich werden die beiden Gruppen oft in weitere Teilbereiche untergliedert, was sich nachteilig auf die Aussagekraft etc. auswirkt.

Bei Verwendung der gemeinsamen Skala für Böden mit bindiger und nicht bindiger Bodenreaktion genügt eine einzige Korrelation für die Beschreibung aller Bodenreaktionsgruppen und aller Zustände. Durch die Verwendung der Elastizitätszahl I_E als Basisgröße besteht die Möglichkeit Parameter wie die Querdehnzahl ν_E oder den Reibungswinkel φ_E direkt zu ermitteln, ohne weitere Korrelation erstellen zu müssen. Der größte Vorteil der gemeinsamen Skala zeigt sich in der praktischen Anwendung bei der Auswertung von Drucksondierungen.

4.7.5. Statistische Betrachtungen zu Elastizitätszahl und Kriechzahl

Die Größen Elastizitätszahl I_E und Kriechzahl I_K sind von den Größen Konsistenzzahl I_C und Plastizitätszahl I_P abhängig. Die statistischen Betrachtungen beschränken sich deshalb auf die Verteilung der Daten und auf die statistischen Kennzahlen.

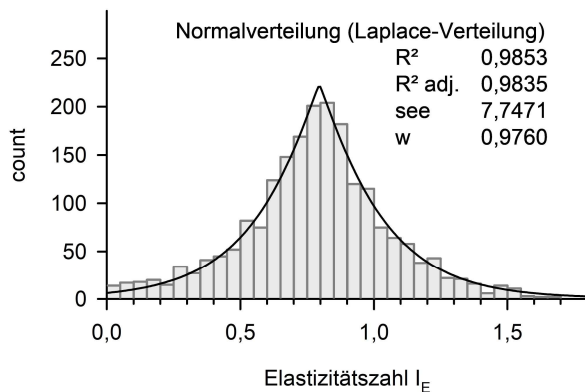


Abbildung 70) Histogramm mit einer Klassenbreite von 0,05 und Regressionsanalyse für die Elastizitätszahl I_E , mit 2078 von 2150 Daten, nur gültige Daten, (peak mod. Gaussian 5 parameter)

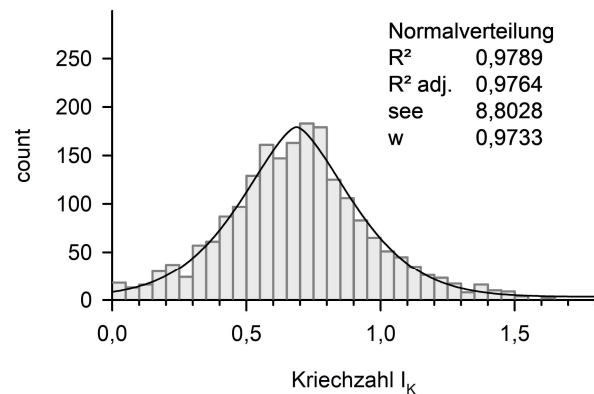


Abbildung 71) Histogramm mit einer Klassenbreite von 0,05 und Regressionsanalyse für die Kriechzahl I_K , mit 2029 von 2150 Daten, nur gültige Daten, (peak mod. Gaussian 5 parameter)

Es werden die gleichen Gültigkeitskriterien auf die Elastizitätszahl I_E und die Kriechzahl I_K angewendet, wie sie unter Punkt 4.5.5. für die Konsistenzzahl I_C und Plastizitätszahl I_P dargestellt werden.

Die theoretischen Mittelwerte für I_E und I_K können aus den theoretischen Mittelwerten für I_C und I_P bestimmt werden. Die in Tabelle 15 als Brüche dargestellten, theoretischen Mittelwerte werden mit einem gemeinsamen Nenner von $\sqrt{5}$ als gleichnamig betrachtet. Damit lassen sich die Zähler für I_E und I_K aus den Zählern von I_C und I_P ermitteln. Die Elastizitätszahl I_E und die Kriechzahl I_K sind normalverteilt, d. h. die theoretischen Medianwerte entsprechen den theoretischen Mittelwerten.

$$\bar{x}_{(I_E)} = \bar{x}_{(I_C)} - \frac{\bar{x}_{(I_P)}}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{0,25}{\sqrt{5}} = \frac{1,75}{\sqrt{5}} \quad (234)$$

$$\bar{x}_{(I_K)} = \bar{x}_{(I_C)} - \bar{x}_{(I_P)} = \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{0,5}{\sqrt{5}} = \frac{1,5}{\sqrt{5}} \quad (235)$$

Tabelle 15: Herleitung der theoretischen Mittelwerte im Atterberg-Kontinuum

	I_C	I_E	I_K	I_P
Mittelpunkt M des Spannungskreises im Atterberg-Kontinuum	$M = \frac{2}{\sqrt{5}}$	-	-	$M = \frac{1}{\sqrt{5}}$
theoretische Mittelwerte	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\frac{1,75}{\sqrt{5}}$	$\frac{1,5}{\sqrt{5}}$	$\frac{0,5}{\sqrt{5}}$

Die zwischen den theoretischen Kennzahlen und den Kennzahlen des Datensatzes ermittelten Differenzen sind sehr gering bis gering (Tabelle 16). Die größten Abweichungen werden mit ca. 1% bei den Medianen der Elastizitätszahl I_E und der Kriechzahl I_K festgestellt.

Tabelle 16: statistische Kennzahlen im Gesamtdatensatz

Datensatz	Konsistenzzahl I_C	Elastizitätszahl I_E	Kriechzahl I_K
Anzahl der Versuche	2150 (gesamt)	2150 (gesamt)	2150 (gesamt)
Mittelwert Datensatz	0,8979	0,7875	0,6770
theoretischer Mittelwert	0,8944	0,7826	0,6708
Differenz der Mittelwerte	0,0035	0,0049	0,0062
Median Datensatz	0,9005	0,7917	0,6825
theoretischer Median	0,8944	0,7826	0,6708
Differenz der Mediane	0,0061	0,0091	0,0117
Minimum Datensatz	-1,4757	-1,5198	-1,5640
Maximum Datensatz	9,5789	9,5694	9,5599

4.8. Beschreibung von neuen Größen und Zusammenhängen

4.8.1. Konstante Größen im Atterberg-Kontinuum

Im Atterberg-Kontinuum ist die Konsistenzzahl $I_{C\ max}$ die einzige Konsistenzzahl I_C , der ausschließlich eine Plastizitätszahl $I_P = 0$ zugeordnet werden kann. Deshalb ist die Konsistenzzahl $I_{C\ max}$ als einzige Konsistenzzahl immer eine elastische Größe. Sie ist eine konstante Größe im Atterberg-Kontinuum.

$$I_{C\ max} = \frac{I_{P\ max}}{1 - I_{P\ max}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = 1,78885 \quad (236)$$

Wird die Fließbedingung nach Mohr-Coulomb auf die Konsistenzzahl $I_{C\ max}$ angewendet, erhält man die Plastizitätszahl $I_{P\ max}$. Die Plastizitätszahl $I_{P\ max}$ entspricht dem Tangens des im Atterberg-Kontinuum größtmöglichen Reibungswinkels φ_E und ist im Atterberg-Kontinuum eine konstante Größe.

$$I_{P\ max} = \tan \varphi_E = \frac{I_{C\ max}}{I_{C\ max} + 1} = \frac{4}{4 + \sqrt{5}} = 0,64143 \quad (237)$$

Mit der Plastizitätszahl $I_{P\ max}$ wird die im Atterberg-Kontinuum gültige Fließbedingung nach Mohr-Coulomb formuliert, nach der die Konsistenzzahl I_C und die Plastizitätszahl I_P nicht gleichzeitig größer sein dürfen als $I_{P\ max} = 0,64143$.

Die Größe der Konsistenzzahl $I_{C\ max}$ ergibt sich aus den Grenzwertbetrachtungen zum elastischen Grenzzustand in den Repräsentanten der MOHRschen Spannungskreise (Abb. 72).

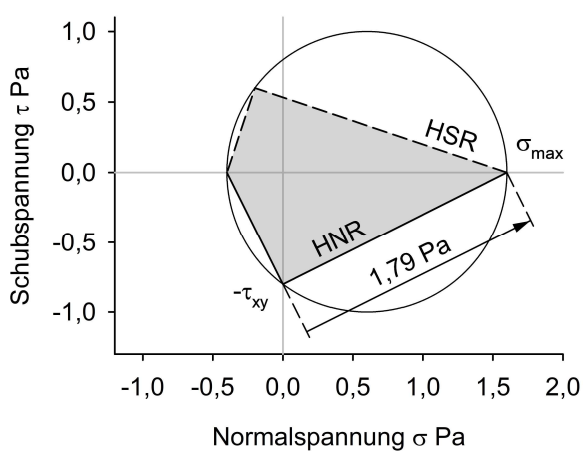


Abbildung 72) Repräsentant des MOHRschen Spannungskreises Druck und Zug im elastischen Grenzzustand

Darstellung der Fläche (grau), die nach Herstellen der Dimensionslosigkeit und der Zuweisung einer neuen Bedeutung als Atterberg-Kontinuum bezeichnet wird.

Der Betrag des Vektors von σ_{min} zwischen $-\tau_{xy}$ und σ_{max} wird ermittelt und anschließend in eine Größe der Dimension Zahl umgewandelt. Der resultierende Wert entspricht nach Zuweisung einer neuen Bedeutung der Konsistenzzahl $I_{C\ max}$

Der Betrag des Vektors von σ_{min} zwischen $-\tau_{xy}$ und σ_{max} wird bestimmt. Hierbei entspricht die Hauptnormalspannungsrichtung HNR von σ_{min} der Richtung vom Pol bei $-\tau_{xy}$ zu σ_{max} .

$$\overrightarrow{\sigma_{min}} = \begin{pmatrix} \sigma_y & \sigma_{max} \\ -\tau_{xy} & \tau_0 \end{pmatrix} \quad (238)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{max} \\ \tau_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma_y \\ -\tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,6 \text{ Pa} \\ 0 \text{ Pa} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \text{ Pa} \\ -0,8 \text{ Pa} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,6 \text{ Pa} \\ 0,8 \text{ Pa} \end{pmatrix} \quad (239)$$

$$\overrightarrow{\sigma_{min}} = \sqrt{(1,6 \text{ Pa})^2 + (0,8 \text{ Pa})^2} = \frac{4}{\sqrt{5}} \text{ Pa} = 1,78885 \text{ Pa} = 1,79 \text{ Pa} \quad (240)$$

Die Angabe zum Betrag des Vektors gilt für die Repräsentanten der Spannungskreise im elastischen Grenzzustand. Anschließend wird der Betrag des Vektors durch Multiplikation mit dem Kehrwert der maximalen Schubspannung zu einer Größe der Dimension Zahl reduziert. Dieser Schritt ist die Voraussetzung für die Zuweisung der neuen Bedeutung: Konsistenzzahl $I_{C \max}$.

$$\overrightarrow{\sigma_{min}} \text{ Pa} \cdot \frac{1}{\tau_{max} \text{ Pa}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \text{ Pa} \cdot \frac{1}{\text{Pa}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \quad (241)$$

$$I_{C \max} = \frac{4}{\sqrt{5}} = 1,78885 \quad (242)$$

4.8.2. Integration des Plasticity-Charts nach Casagrande 1948

Der Plasticity-Chart nach CASAGRANDE 1948 ist nach aktuellem Stand die einzige geotechnische Bodenklassifikation, die sich vollständig und nahezu exakt in das Atterberg-Kontinuum integrieren lässt. Für die Berechnung von Größen und Kennwerten ist sie nicht geeignet. Die A-Line und das Upper-Limit wurden von Casagrande empirisch aus Versuchsergebnissen ermittelt. Die beiden Grenzen können im Atterberg-Kontinuum als theoretische Lösung über die Fließbedingung nach Mohr-Coulomb aus dem Repräsentanten des Mohrschen Spannungskreises im elastischen Grenzzustand hergeleitet werden. Die theoretische Lösung ist von Versuchsdaten vollständig unabhängig.

Bei Vergleich der Ergebnisse ist festzustellen, dass die empirische Lösung nach CASAGRANDE 1948 nahezu exakt mit der theoretischen Lösung auf Grundlage der konstanten Größen im Atterberg-Kontinuum übereinstimmt (Abb. 73). Die Gleichungen für die theoretische (244) und die empirische Lösung (245) für die A-Line werden nachfolgend aufgeführt.

$$\text{theoretische Lösung: } I_{P(A-Line)} = \frac{I_{C \max} + 1}{I_{C \max} + 2} \cdot \left(w_L - \frac{1}{I_{C \max}^2 + I_{C \max}} \right) \quad (243)$$

$$I_{P(A-Line)} = 0,73607 \cdot (w_L - 0,20045) \quad (244)$$

$$\text{empirische Lösung: } I_{P(A-Line)} = 0,73 \cdot (w_L - 0,20) \quad (245)$$

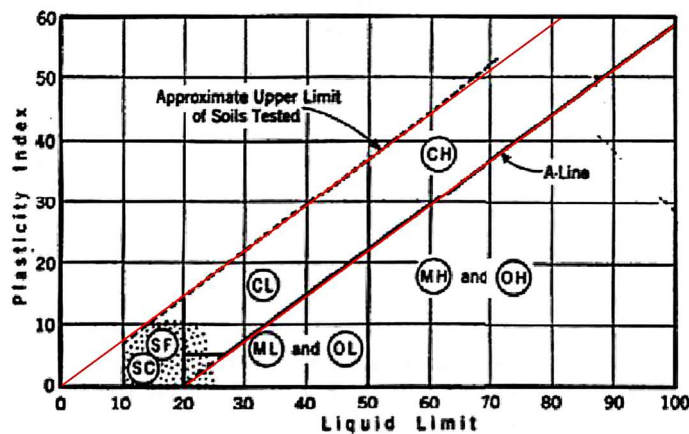


Abbildung 73) Der Plasticity-Chart nach CASAGRANDE 1948

Originaldarstellung, bearbeitet

Das Upper-Limit und die A-Line wurden von Casagrande auf Basis empirischer Daten ermittelt. Die roten Linien wurden hinzugefügt und stellen das Upper-Limit und die A-Line als theoretische Funktionen dar, die aus dem Atterberg-Kontinuum hergeleitet wurden.

In den Abbildungen 74 und 75 werden das Upper-Limit und die A-line jeweils für die Ausrollgrenze w_p und die Fließgrenze w_L als Ergebnis der theoretischen Lösung dargestellt. Zur Verdeutlichung der Zusammenhänge werden zusätzlich die Winkel und Hilfslinien aus dem konstruktiven Lösungsweg sowie die maßgebliche Bezugsgröße $I_{p\ max}$ abgebildet.

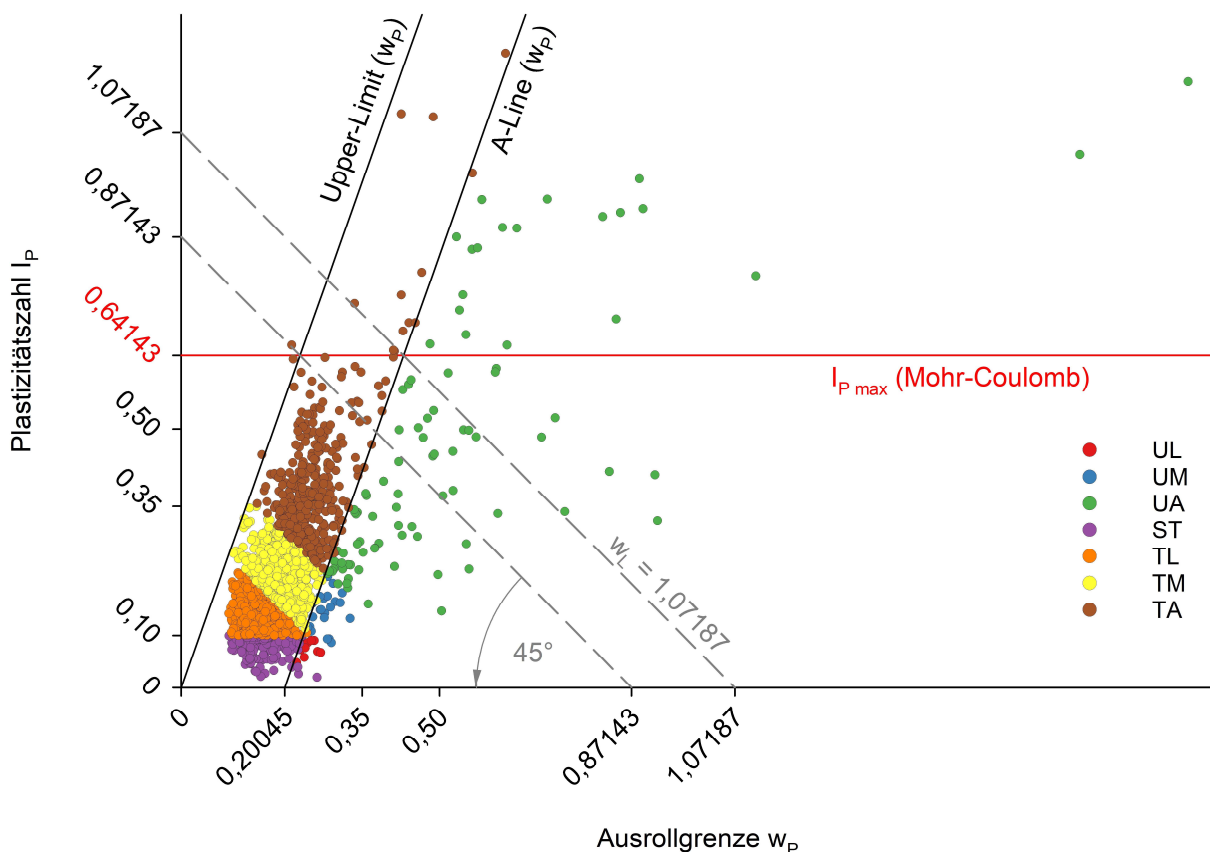


Abbildung 74) Herleitung des theoretischen Upper-Limits und der A-Line auf Grundlage des Wassergehalts an der Ausrollgrenze w_p . Darstellung von Ergebnissen aus 2150 Atterberg-Versuchen, die in Anlehnung an CASAGRANDE 1948 klassifiziert wurden (Bestimmung der Fließ- und Ausrollgrenzen nach DIN EN ISO 17892-12:2022-08).

Mit den nachfolgenden Gleichungen werden die Lösungen für das Upper-Limit und die A-Line auf Grundlage des Wassergehalts an der Ausrollgrenze w_P dargestellt (Abb. 74).

$$I_{P(\text{Upper-Limit})} = (I_{C\text{max}} + 1) \cdot w_P \quad (246)$$

$$I_{P(\text{A-Line})} = (I_{C\text{max}} + 1) \cdot w_P - \frac{1}{I_{C\text{max}}} \quad (247)$$

$$I_{P(\text{A-Line})} = 2,78885 \cdot w_P - 0,55902 \quad (248)$$

Die Möglichkeit der Darstellung des Plasticity-Charts auf Grundlage des Wassergehalts an der Ausrollgrenze w_P ist die Grundvoraussetzung für den konstruktiven Lösungsweg. Aus der Darstellung ergibt sich die Herleitung für das Upper-Limit und die A-Line auf Basis des Wassergehalts an der Fließgrenze w_L .

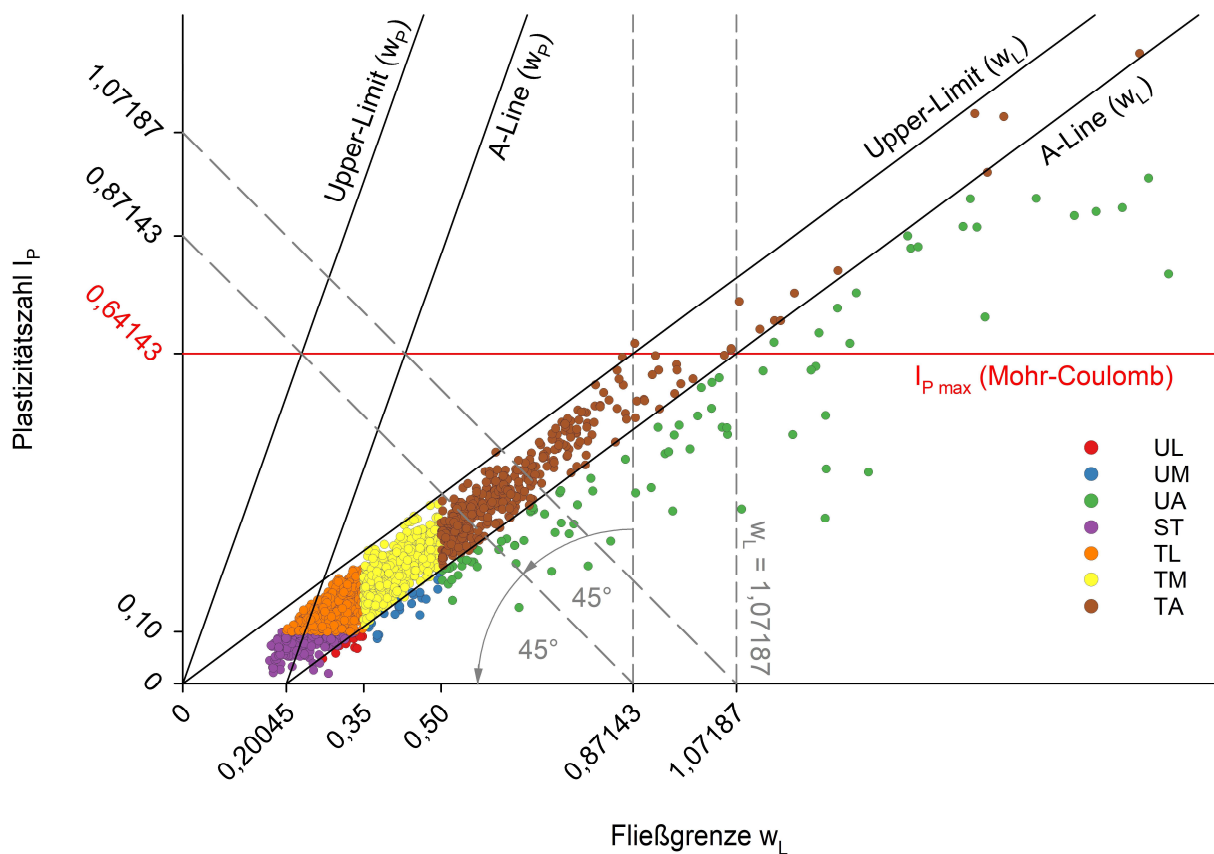


Abbildung 75) Herleitung des theoretischen Upper-Limits und der A-Line auf Grundlage des Wassergehalts an der Fließgrenze w_L . Darstellung von Ergebnissen aus 2150 Atterberg-Versuchen, die in Anlehnung an CASAGRANDE 1948 klassifiziert wurden (Bestimmung der Fließ- und Ausrollgrenzen nach DIN EN ISO 17892-12:2022-08).

Mit den nachfolgenden Gleichungen werden die Lösungen für das Upper-Limit und die A-Line auf Grundlage des Wassergehalts an der Fließgrenze w_L dargestellt (Abb. 75).

$$I_{P (Upper-Limit)} = \frac{I_{C max} + 1}{I_{C max} + 2} \cdot w_L \quad (249)$$

$$I_{P (A-Line)} = \frac{I_{C max} + 1}{I_{C max} + 2} \cdot \left(w_L - \frac{1}{I_{C max}^2 + I_{C max}} \right) \quad (243)$$

$$I_{P (A-Line)} = 0,73607 \cdot (w_L - 0,20045) \quad (244)$$

Die Bodenreaktionsgruppen für die Versuchsergebnisse in den Abbildungen 74 und 75 wurden in Anlehnung an Casagrande nach der Norm DIN EN ISO 17892-12 ermittelt. Die dargestellten Versuchsdaten sind somit von der theoretischen Herleitung unabhängig. Die aus der Abweichung zwischen empirischer und theoretischer Lösung resultierenden Fehler sind aufgrund der geringen Differenzen nur selten zu beobachten und können vernachlässigt werden.

Das Upper-Limit darf nicht mit der sogenannten U-Line verwechselt werden. Im Gegensatz zum Upper-Limit gibt es für eine Verwendung der U-Line keinerlei Begründung.

Bei der dargestellten Lösung ist zu beachten, dass die Lage der Fließbedingung nach Mohr-Coulomb ($I_{P max}$) mit der Verfahrensweise nicht beweiskräftig bestätigt werden kann. Es ist grundsätzlich möglich Upper-Limit und A-Line mit jeder beliebigen horizontalen Linie zu konstruieren. Jedoch hat sich die Anwendung der Fließbedingung nach Mohr-Coulomb mit Verwendung der konstanten Größen $I_{C max}$ und $I_{P max}$ als Grundlage für die Bestimmung und Festlegung von Grenzen in dieser Arbeit an vielen Stellen bewährt. Der Vergleich mit den vollständig von den Bewertungsgrundlagen unabhängigen Versuchsergebnissen bestätigt an verschiedenen Stellen den gewählten Lösungsansatz. Deshalb wird davon ausgegangen, dass die Anwendung der Fließbedingung nach Mohr-Coulomb ($I_{P max}$) im Plasticity-Chart nach CASGRANDE 1948 eine sinnvolle Hypothese darstellt.

4.8.3. Vereinfachtes viskoelastisches Stoffmodell

Aus den beiden Grenzzuständen des Atterberg-Kontinuums kann ein vereinfachtes, viskoelastische Stoffmodell hergeleitet werden (Abb. 76 und 77). Das Stoffmodell ist im elastischen Bereich zwischen den beiden Grenzzuständen des Atterberg-Kontinuums gültig. Von den beiden Grenzzuständen ist die Projektion t_{max} , das heißt der untere Grenzzustand maßgeblich. Für eine korrekte Beschreibung von Versuchsergebnissen müssen die Daten rechts der Fließgrenze t_{max} liegen. Das ist der Bereich mit ursprünglich positiven Normalspannungen im Repräsentanten des Spannungskreises Druck und Zug im unteren Grenzzustand.

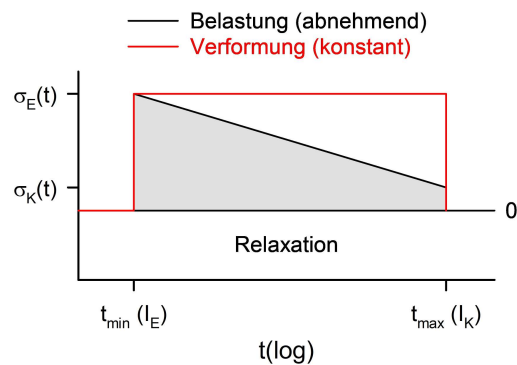


Abbildung 76) viskoelastisches Stoffmodell einer idealisierten Relaxation

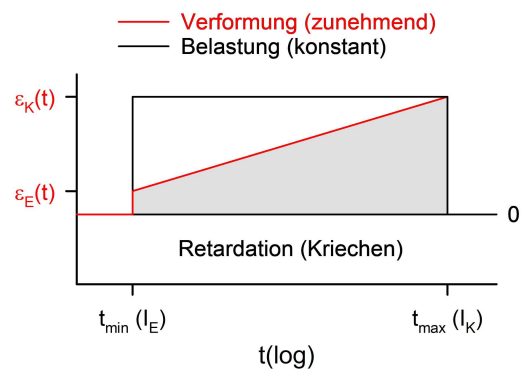


Abbildung 77) viskoelastisches Stoffmodell einer idealisierten Retardation (Kriechen)

Der Zeitpunkt t_{min} wird im vorliegenden Stoffmodell über die Elastizitätszahl I_E und der Zeitpunkt t_{max} über die Kriechzahl I_K beschrieben. Das Stoffmodell wird als idealisiert bezeichnet, weil es auf relativen Angaben beruht. Die Zeitpunkte t_{min} und t_{max} sind per Definition zeitunabhängig und repräsentieren eine elastische Verformung. Erst bei der Verknüpfung von Daten aus den Projektionen t_{min} und t_{max} wird eine Zeitabhängigkeit hergestellt und es können Aussagen zu einem viskoelastischen Stoffverhalten getroffen werden. Hierbei ist die Verformungsdauer t eine vorerst nicht näher beschreibbare Größe, von der nur bekannt ist, dass sie zwischen 0 und ∞ liegen muss. Im Atterberg-Kontinuum ist die Plastizitätszahl I_P als viskoelastische Größe definiert. Sie ist die maßgebliche Steuergröße für die Darstellung der Zeitabhängigkeit. Es gilt vereinfachend: Je größer die Plastizitätszahl I_P , desto länger ist die zu erwartende Verformungsdauer.

Der Parameter, mit dem die Projektionen t_{min} und t_{max} verknüpft werden können, ist die aus den Querdehnzahlen ν_E und ν_K ermittelte Kriechbeständigkeitszahl c_c .

4.8.4. Erweiterung durch die Kriechbeständigkeitszahl

Die Kriechbeständigkeitszahl c_c ist eine Größe der Dimension Zahl und wird in der Kunststoffverarbeitung zur Abschätzung der Kriechbeständigkeit viskoelastischer Werkstoffe verwendet. Sie hat einen Wertebereich zwischen $0 < c_c < 1$. Je kleiner die Kriechbeständigkeitszahl c_c ist, desto höher ist die Neigung des betroffenen Materials zum Kriechen. In der Kunststoffverarbeitung ist die Kriechbeständigkeitszahl c_c ein Verhältnis aus Kriechmoduln E_C , die zu verschiedenen, definierten Zeitpunkten t in Langzeitversuchen ermittelt werden. Die Gleichung (250) zur Bestimmung der Kriechbeständigkeitszahl c_c aus den Kriechmoduln E_{C0} und E_{C3} wurde aus KUNZ 2014 entnommen.

$$c_c = \frac{E_C(t_3)}{E_C(t_0)} = \frac{E_{C3}}{E_{C0}} \quad (250)$$

Ist die Kriechbeständigkeitszahl c_c eines Werkstoffs bekannt und wird als Faktor auf die aktuelle Steifigkeit des Werkstoffs angewendet, ermöglicht sie ein einfaches Abschätzen der zu erwartenden Minderung der Steifigkeit über die Zeit.

$$E_C(t_3) = E_C(t_0) \cdot c_c = E_{C3} = E_{C0} \cdot c_c \quad (251)$$

Die Kriechbeständigkeitszahl c_c wird im Atterberg-Kontinuum durch Verschneiden von Informationen aus den Projektionen t_{min} und t_{max} erzeugt. Die maßgeblichen Eingangsgrößen sind die Querdehnraten v_E und v_K . Durch die Verknüpfung der Projektionen t_{min} und t_{max} wird eine Zeitabhängigkeit hergestellt. Dementsprechend ist die Kriechbeständigkeitszahl c_c eine viskoelastische Größe der Dimension Zahl.

$$c_c = 3^{20(v_E - v_K)} = 3^{20\left(\frac{1}{I_E + 2} - \frac{1}{I_K + 2}\right)} = 3^{20\left(\frac{1}{I_C - \frac{I_P}{2} + 2} - \frac{1}{I_C - I_P + 2}\right)} \quad (252)$$

Die Querdehnraten v_E wird aus der Elastizitätszahl I_E ermittelt und gilt im elastischen Zustand des Atterberg-Kontinuums (Projektion t_{min}).

$$v_E = \frac{1}{I_E + 2} \quad \text{mit } I_E \geq 0 \quad (226)$$

Die Querdehnraten v_K wird aus der Kriechzahl I_K ermittelt und gilt im kriechelastischen Zustand des Atterberg-Kontinuums (Projektion t_{max}).

$$v_K = \frac{1}{I_K + 2} \quad \text{mit } I_K \geq 0 \quad (229)$$

Die Gleichung (252) zur Bestimmung der Kriechbeständigkeitszahl c_c wurde über eine Korrelation hergeleitet. Sie gilt für alle Zustände und kann theoretisch ohne Einschränkungen auf Böden mit bindiger und nicht bindiger Reaktion angewendet werden. Praktisch ist die Anwendung für Böden mit einer nicht bindigen Reaktion bzw. für Böden mit geringer Plastizität für die Beschreibung einer Langzeitverformung bedeutungslos.

Bei der Anwendung der Funktion (252) ergeben sich gleichzeitig zwei Definitionslücken. Diese Definitionslücken sind die Ausführbarkeitsgrenzen. Die Ausführbarkeitsgrenzen t_{min} und t_{max} sind Ergebnisse von Grenzwertbetrachtungen (Abb. 78 und 79).

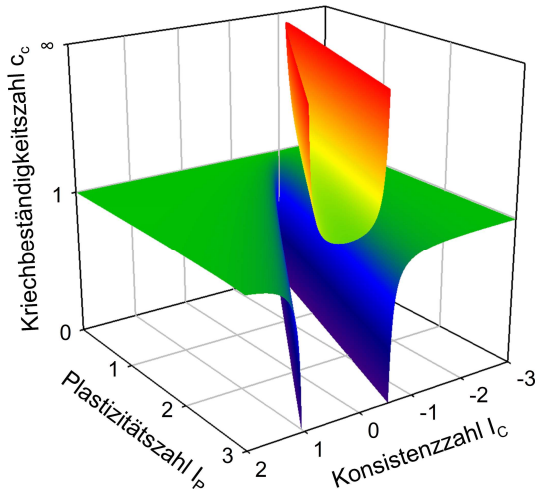


Abbildung 78) räumliche Darstellung der Funktion (252) zur Bestimmung der Kriechbeständigkeitszahl c_c . Die Form der Funktion und die Definitionslücken sind maßgeblich von der Beziehung der Querdehnzahlen v_E und v_K abhängig.

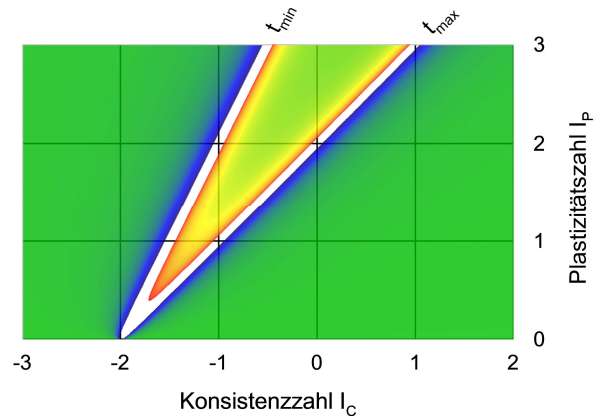


Abbildung 79) Darstellung der Funktion (252) zur Bestimmung der Kriechbeständigkeitszahl c_c (Abb. 78 von oben). Die in weiß dargestellten Definitionslücken der Funktion entsprechen den Ausführbarkeitsgrenzen t_{min} und t_{max} des Atterberg-Versuchs.

Symbolerläuterung komplexe Unendlichkeit ∞ :

$$\frac{1}{0} = \infty \tag{253}$$

Die Grenzwertbetrachtungen für die Ausführbarkeitsgrenze t_{max} beziehen sich auf Kriechzahl I_K aus der kriechelastischen Projektion t_{max} .

linksseitig:
$$\lim_{I_K \rightarrow -2^-} (c_c) = \lim_{I_K \rightarrow -2^-} \left(3^{20 \left(\frac{1}{I_E+2} - \frac{1}{I_K+2} \right)} \right) = \infty \tag{254}$$

rechtsseitig:
$$\lim_{I_K \rightarrow -2^+} (c_c) = \lim_{I_K \rightarrow -2^+} \left(3^{20 \left(\frac{1}{I_E+2} - \frac{1}{I_K+2} \right)} \right) = 0 \tag{255}$$

Die Grenzwertbetrachtungen für die Ausführbarkeitsgrenze t_{min} beziehen sich auf Elastizitätszahl I_E aus der elastischen Projektion t_{min} .

linksseitig:
$$\lim_{I_E \rightarrow -2^-} (c_c) = \lim_{I_E \rightarrow -2^-} \left(3^{20 \left(\frac{1}{I_E+2} - \frac{1}{I_K+2} \right)} \right) = 0 \tag{256}$$

rechtsseitig:
$$\lim_{I_E \rightarrow -2^+} (c_c) = \lim_{I_E \rightarrow -2^+} \left(3^{20 \left(\frac{1}{I_E+2} - \frac{1}{I_K+2} \right)} \right) = \infty \tag{257}$$

Die maximal mögliche Kriechbeständigkeitszahl ist $c_c = 1$. Die allgemeinen Grenzwertbetrachtungen für die Größen des Atterberg-Versuchs werden mit den Gleichungen (258), (259) dargestellt. Die Randbedingungen werden in den Grenzwertbetrachtungen beschrieben.

$$\lim_{I_P \rightarrow 0} (c_c) = \lim_{I_P \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3} \left(\frac{1}{I_C - \frac{I_P}{2} + 2} - \frac{1}{I_C - I_P + 2} \right) \right) = 1 \tag{258}$$

$$\lim_{I_C \rightarrow \infty} (c_c) = \lim_{I_C \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} \left(\frac{1}{I_C - \frac{I_P}{2} + 2} - \frac{1}{I_C - I_P + 2} \right) \right) = 1 \tag{259}$$

Die Funktionen der beiden Definitionslücken werden für die Größen Konsistenzzahl I_C und Plastizitätszahl I_P mit den Gleichungen (260) und (261) dargestellt.

Definitionslücke 1 (Ausführbarkeitsgrenze t_{max}) $I_C = I_P - 2$ bzw. $I_P = I_C + 2$ (260)

Definitionslücke 2 (Ausführbarkeitsgrenze t_{min}) $2I_C = I_P - 4$ bzw. $I_P = 2I_C + 4$ (261)

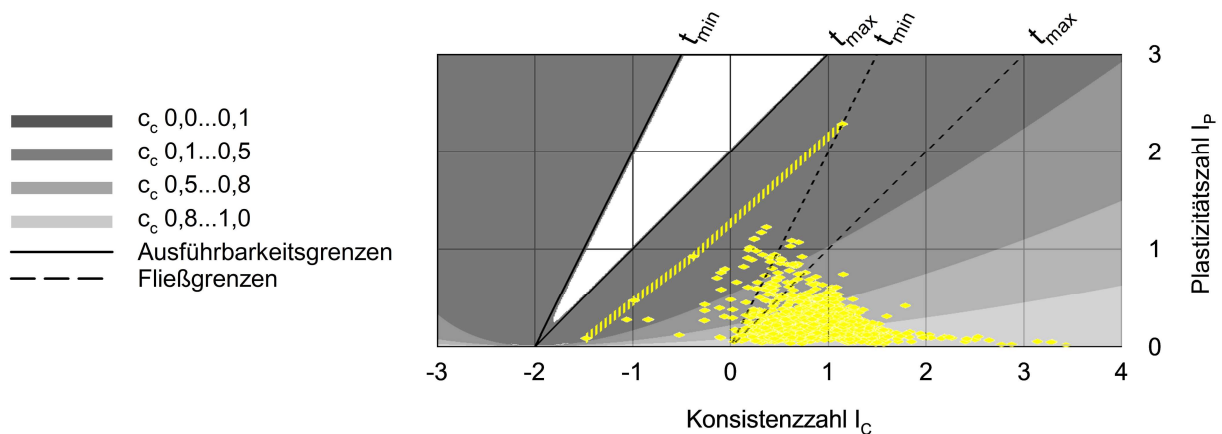


Abbildung 80) Darstellung der Lage der Fließgrenzen t_{min} und t_{max} und der Lage der Ausführbarkeitsgrenzen t_{min} und t_{max} . In der Grafik sind zusätzlich die Ergebnisse von 2202 von 2204 Atterberg-Versuchen (Gesamtdatensatz + LKN), der linke Rand der Datenverteilung und ausgewählte Bereiche für die Kriechbeständigkeitszahl c_c enthalten.

Die Lage der Ausführbarkeitsgrenze t_{max} entspricht der um einen Betrag von $I_C = 2$ parallel in den negativen Bereich verschobenen Position der Fließgrenze t_{max} des Atterberg-Kontinuums. Die Ausführbarkeitsgrenze t_{min} zeigt das gleiche Verhalten mit Bezug auf die Fließgrenze t_{min} (Abb. 80). Bei Berücksichtigung des Definitionsbereichs der Querdehnzahl von $0,5 > \nu > 0,2$ ist die Kriechbeständigkeitszahl c_c nur auf Versuchsdaten rechts der Fließgrenze t_{max} uneingeschränkt anwendbar.

Es gibt keine Versuchsdaten, die links der Ausführbarkeitsgrenze t_{max} dargestellt werden können (Abb. 80). Die Ausführbarkeitsgrenze t_{max} ist die Grenze der theoretischen Durchführbarkeit von Atterberg-Versuchen. Weil die Ausführbarkeitsgrenze t_{min} links der Ausführbarkeitsgrenze t_{max} liegt, ist sie für den Atterberg-Versuch irrelevant.

Die Kriechbeständigkeitszahl c_c ist vor allem für die Beschreibung der Kriechbeständigkeit von ausgeprägt plastischen Böden im weichplastischen bis halbfesten Zustand geeignet. Wird sie auf die zum Zeitpunkt der Baugrunderkundung ermittelte Steifigkeit angewendet, kann eine mögliche Minderung der Steifigkeit über die Zeit abgeschätzt werden.

$$E_C(t_{max}) = E_C(t_{min}) \cdot c_c \quad (262)$$

Bei der Abschätzung der Kriechbeständigkeit gilt zusätzlich die vereinfachende Annahme:

$$E_C(t_{min}) = E(t_{min}) \quad (263)$$

Die in der Geotechnik übliche Größe für erdstatische Nachweise ist der Steifemodul E_S . Aus den ermittelten Elastizitätsmoduln $E(t_{min})$ und Kriechmoduln $E_C(t_{max})$ kann bei Bedarf der Steifemodul E_S berechnet werden. Die hierfür erforderlichen Querdehnzahlen ν stehen im Atterberg-Kontinuum zur Verfügung.

$$E_S = E \frac{1 - \nu_E}{(1 + \nu_E)(1 - 2\nu_E)} \quad (264)$$

$$E_{S(c)} = E_C \frac{1 - \nu_K}{(1 + \nu_K)(1 - 2\nu_K)} \quad (265)$$

Vor der Verwendung der Kriechbeständigkeitszahl c_c ist zu klären, ab welcher Größenordnung Böden wahrscheinlich kriechbeständig sind oder nicht. Die Einordnung erfolgt über einen Vergleich mit den Ergebnissen zur Untersuchung der Kriechbeständigkeit verschiedener, viskoelastischer Kunststoffe, die in der praktischen Anwendung unter mechanischen Belastungen stehen. Der für den Vergleich vorliegende Datensatz (Abb. 81) wurde freundlicherweise von Herrn Kunz von der Ostschweizer Fachhochschule Rapperswil zur Verfügung gestellt (KUNZ 2014).

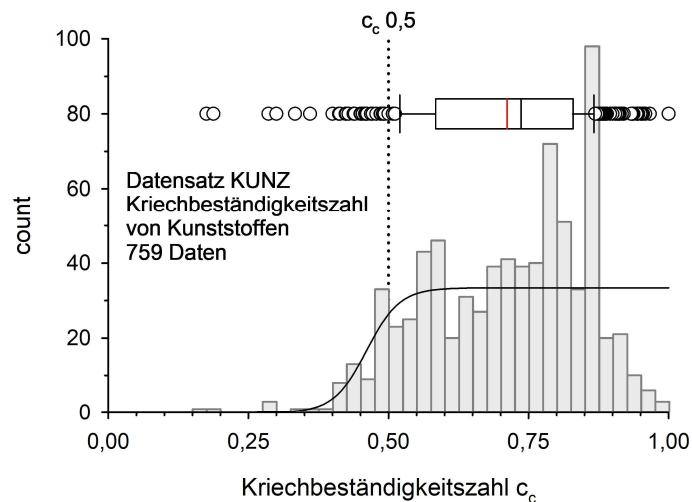


Abbildung 81) Die Kriechbeständigkeitszahl c_c verschiedener Kunststoffe

Die Darstellung erfolgt ausschließlich als Vergleichsgrundlage für Böden. Aus werkstofftechnischer Sicht handelt es sich um eine unzulässige Zusammenfassung von nicht vergleichbaren Daten.

Aus der Abbildung 81 wird abgeleitet, dass bei Kriechbeständigkeitszahlen in einer Größenordnung kleiner als $0,4 < c_c < 0,5$ die Kriechbeständigkeit viskoelastischer Kunststoffe stark abnimmt und die allgemeine Anwendung eines Kunststoffs als mechanisch belastetes Bauteil einschränkt bzw. verhindert. Diese Information wird übernommen und hier auf Böden in einem viskoelastischen Stoffmodell angewendet. Es gilt: Ein Boden ist wahrscheinlich nicht kriechbeständig, wenn die Kriechbeständigkeitszahl $c_c < 0,5$ ist.

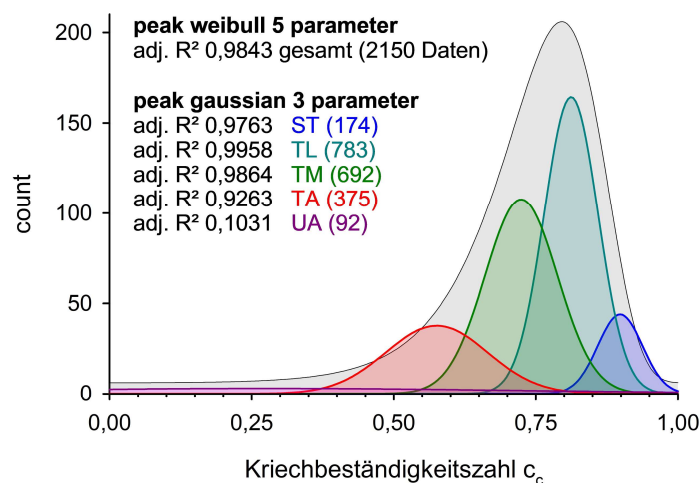


Abbildung 82) statistische Auswertung für die Kriechbeständigkeitszahl c_c

Die Kriechbeständigkeitszahlen c_c der Bodenreaktionsgruppen über bzw. links der A-Linie sind normalverteilt. Die Bodenreaktionsgruppen unterhalb der A-Linie können statistisch nicht erfasst werden bzw. es liegen nicht genügend Daten für eine Auswertung vor. Der Gesamtdatensatz aus 2150 Versuchen zeigt eine Weibull-Verteilung.

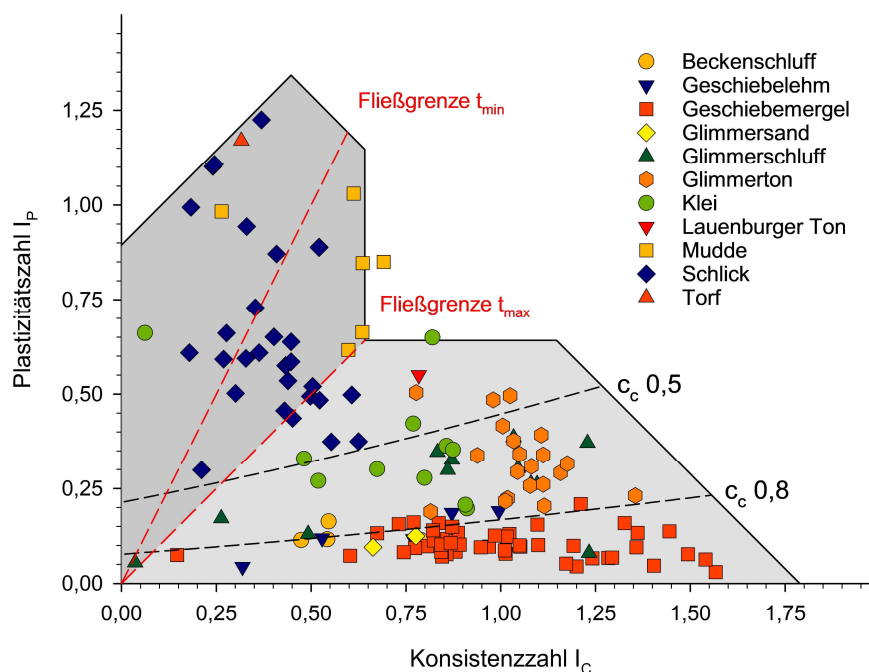
Die zweite Einordnung zur Kriechbeständigkeit von Böden erfolgt über die statistische Auswertung zur Verteilung der Kriechbeständigkeitszahl c_c (Abb. 82). Der Peak der Weibull-Verteilung des Gesamtdatensatzes liegt bei einer Kriechbeständigkeitszahl von ca. $c_c \approx 0,8$. Es wird davon ausgegangen, dass die rechts des Maximums der Weibull-Verteilung des Gesamtdatensatzes liegenden Böden der normalverteilten Bodenreaktionsgruppen ST und TL sowie die Böden der normalverteilten Bodenreaktionsgruppe TM an ihrem oberen Rand der Verteilung, den Bereich kriechbeständiger Böden repräsentieren. Es gilt: Ein Boden ist wahrscheinlich kriechbeständig, wenn die Kriechbeständigkeitszahl $c_c > 0,8$ ist.

Der Übergangsbereich zwischen kriechbeständigen und nicht kriechbeständigen Böden liegt folglich zwischen ca. $0,5 < c_c < 0,8$.

Bei einer Verwendung der Kriechbeständigkeitszahl c_c ist zu beachten, dass die Kriechbeständigkeit eines Bodens auch immer von der Art und Weise seiner Belastung abhängig ist. Kriechprozesse können z. B. auch in tragfähigen Böden durch ungünstige Lastkombinationen aktiviert werden. Die Kriechbeständigkeitszahl c_c ist eine orientierende Größe (der Dimension Zahl), die nicht isoliert für Betrachtungen und Schlussfolgerungen verwendet werden sollte.

4.8.5. Zweite Abschlussbeobachtung: Herleitung der Kriechbeständigkeitszahl

Zum Vergleich mit den Ergebnissen von Atterberg-Versuchen werden die ermittelten Grenzen für die Kriechbeständigkeitszahl c_c im Referenzdatensatz des Geologischen Landesamts der Stadt Hamburg dargestellt (KAUSCH 2020). Aufgrund der Herkunft der Daten werden die Bezeichnungen der untersuchten Böden als gesichert eingeschätzt und verwendet.



Bei Betrachtung der Abbildung 83 ist sofort erkennbar, dass die in größerer Versuchszahl dargestellten Böden Schlick, Geschiebemergel und Glimmerton/Glimmerschluff in Bereichen liegen, die durch die Grenzen der Kriechbeständigkeitszahlen $c_c = 0,5$ und $c_c = 0,8$ abgebildet werden. Mit der Kriechbeständigkeitszahl c_c sind Böden nach genetischen Kriterien unterscheidbar. Diese Eigenschaft ist ein Alleinstellungsmerkmal der viskoelastischen Größe c_c und ist bei keinem anderen technischen Parameter zu beobachten.

Der Zusammenhang selbst ist keine Besonderheit, sondern liegt vielmehr im Bereich der Erwartungen. Die Entstehungsgeschichte von Böden bestimmt auch deren mechanischen Eigenschaften und sie muss folglich auch mit technischen Größen abbildbar sein.

Über den Durchlässigkeitsbeiwert k_f (m/s) können die unbestimmten Angaben zu Zeitpunkten der Projektionen t_{min} und t_{max} mit getrennt ausgeführten Zeit-Setzungs-Berechnungen (Konsolidierung) in einem viskoelastischen Stoffmodell zusammengefasst und als physikalische Größe der Zeit mit Einheit dargestellt werden. Die Zusammenfassung erfolgt über die Kriechbeständigkeitszahl c_c . Bei der Berechnung der Setzungen bzw. des Setzungsverlaufs wird ein mögliches Kriechen von Böden berücksichtigt.

Die Kriechbeständigkeitszahl c_c ist eine aus theoretischen Grundlagen hergeleitete Anwendung, die den elastischen Grenzzustand der Projektion t_{min} mit der Elastizitätszahl I_E und den unteren Grenzzustand der Projektion t_{max} mit der Kriechzahl I_K wieder zusammenführt. Mit Bezug auf die Bewertung der theoretischen Herleitung des Atterberg-Kontinuums ist die Kriechbeständigkeitszahl c_c ein starkes Argument für den gewählten Lösungsansatz.

5. Einschätzung der vorliegenden Ergebnisse

5.1. Bewertung der Beobachtungen

Die Repräsentativität des vorliegenden Datensatzes aus 2150 bzw. 2204 Versuchsergebnissen von Atterberg-Versuchen wurde unter Punkt 4.5.5. nachgewiesen. Der Datensatz ist für einen Vergleich gut geeignet. Die theoretische Herleitung des Atterberg-Kontinuums ist von den repräsentativen Versuchsdaten unabhängig.

Der mit der Schlüsselbeobachtung (Punkt 4.4.) vermutete Zusammenhang zwischen den theoretischen Grundlagen und den Versuchsergebnissen wird durch die Abschlussbeobachtungen bestätigt. Die mit zwei Abschlussbeobachtungen durchgeführten Vergleiche zwischen der theoretischen Herleitung und den repräsentativen Versuchsdaten sind im Ergebnis überzeugend und bestätigen die in der vorliegenden Arbeit dargestellten Vorgehensweisen und getroffenen Schlussfolgerungen (Punkte 4.6.3. und 4.8.5.).

Der Vergleich mit den Ergebnissen einer Fremdbeobachtung aus Griechenland wird als erster Hinweis auf eine allgemeine Gültigkeit des Atterberg-Kontinuums interpretiert (Punkt 4.5.5.).

5.2. Bewertung der Umsetzung der konkreten Ziele

In der Herleitung des Atterberg-Kontinuums werden die physikalischen Größen mit Einheit eliminiert und in Größen der Dimension Zahl umgewandelt. Die Möglichkeiten für eine Prüfung und Kontrolle entfallen bei der Verwendung von Größen der Dimension Zahl. Für weiterführende Schlussfolgerungen ist das ein Nachteil, der ausgeglichen werden muss. Die maßgeblichen Größen der Dimension Zahl lassen sich aus den Normalspannungen σ_x und σ_y sowie der Schubspannung τ_{xy} berechnen (266). Die **Prüffähigkeit** bleibt im Atterberg-Kontinuum erhalten. Mit den Repräsentanten der Spannungskreise können Winkelfunktionen als physikalische Größe mit Einheit der mechanischen Spannung dargestellt werden (Punkt 3.4.3.). Mit der Option für Winkelfunktionen eine Einheitenanalyse auszuführen, wird die **Prüffähigkeit** innerhalb der theoretischen Grundlagen des Atterberg-Kontinuums verbessert.

Die angestrebte **Integrationsfähigkeit** wurde für das Atterberg-Kontinuum mit dem Plasticity-Chart nach CASAGRANDE 1948 nachgewiesen. Er wird mit der Fließbedingung nach Mohr-Coulomb integriert (Punkt 4.8.2.). Die vernachlässigbare Abweichung zwischen der theoretischen Lösung und der empirischen Lösung nach Casagrande lässt die Möglichkeit zu, die bestehende Klassifikation in unveränderter Form anzuwenden.

Mit der Einführung der Kriechbeständigkeitszahl c_c wird die **Erweiterungsfähigkeit** des Atterberg-Kontinuums bestätigt. Die Kriechbeständigkeitszahl c_c ist ursprünglich eine Anwendung aus den Werkstoffwissenschaften bzw. der Kunststoffindustrie, die nach konstruktiver Prüfung auch zur Lösung von geotechnischen Fragestellungen geeignet ist (Punkt 4.8.4.). Weil der elastisch-isotrope Fall auch dem Lösungsansatz in den Werkstoffwissenschaften entspricht, war die **Übertragungsfähigkeit** von Anfang an gegeben.

Mit der gemeinsamen Skala für Böden mit nicht bindiger und bindiger Reaktion (Punkt 4.7.4.) enthält das Atterberg-Kontinuum eine **neue Bodenklassifikation**, die ausschließlich auf theoretischen Grundlagen basiert. Die **Übertragungsfähigkeit** und die **Erweiterungsfähigkeit** werden über die Elastizitätszahl I_E gewährleistet. Mit der Einbeziehung von Böden mit nicht bindiger Reaktion wurde in der neuen Bodenklassifikation die vorgesehene **Schnittstelle** für eine Erweiterung des Atterberg-Kontinuums angelegt. Die wissenschaftliche Prüfung der Schnittstelle für Böden mit einer nicht bindigen Reaktion steht noch aus.

Für Böden mit einer bindigen Reaktion kann der Reibungswinkel φ_E ab sofort an gestörten Proben ermittelt werden. Durch die Möglichkeit den Reibungswinkel φ_E aus Ergebnissen von Atterberg-Versuchen zu bestimmen, wurde die **Vergleichbarkeit** und **Prüffähigkeit** zwischen den Ergebnissen von Atterberg-Versuchen und Scherversuchen hergestellt (266). Mit der Querdehnzahl ν steht im Atterberg-Kontinuum zusätzlich eine Größe zur Verfügung, die ein hohes Potenzial für **Integration** und **Erweiterung** besitzt. Über die Querdehnzahl ν können u. a. Ergebnisse aus Oedometerversuchen in den Vergleich einbezogen werden (266).

Die für eine praktische Anwendung erforderlichen theoretischen Grundlagen werden in der Gleichung (266) zusammengefasst. Die angebotenen Lösungen sind leicht zu handhaben und benutzerfreundlich. Die Angaben zu den Matrixpositionen c_{11} und c_{12} beziehen sich auf die Darstellung des linear elastischen Hookeschen Gesetzes für den isotropen Fall mit dem Elastizitätsmodul E und der Querdehnzahl ν (64).

Formelsammlung Atterberg-Kontinuum

$$\begin{array}{cccc}
 I_E = I_C - \frac{I_P}{2} & \nu = \frac{1}{I_E + 2} & \nu = \frac{1 - \tan \varphi_E}{2 - \tan \varphi_E} & \nu = \frac{2\tau_{xy} + \sigma_y - \sigma_x}{4\tau_{xy} + \sigma_y - \sigma_x} \\
 \tan \varphi_E = \frac{1}{c_{11}} & \tan \varphi_E = \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} & \tan \varphi_E = \frac{I_E}{I_E + 1} & \tan \varphi_E = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \\
 I_E = \frac{1}{c_{12}} & I_E = \frac{1 - 2\nu}{\nu} & I_E = \frac{\tan \varphi_E}{1 - \tan \varphi_E} & I_E = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy} - \sigma_x + \sigma_y}
 \end{array} \quad (266)$$

Mit den Gleichungen (267) und (268) soll noch einmal deutlich herausgestellt werden, dass die Versuchsergebnisse aus dem Atterberg-Versuch direkt in die Matrix des linear-elastischen Hookeschen Gesetzes für den isotropen Fall (64) eingesetzt werden können.

$$c_{11} = \frac{I_E + 1}{I_E} = \frac{1}{\tan \varphi_E} = \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} = \frac{1 - \left(\frac{1}{I_C - \frac{I_P}{2} + 2} \right)}{1 - 2 \left(\frac{1}{I_C - \frac{I_P}{2} + 2} \right)} \quad (267)$$

$$c_{12} = \frac{1}{I_E} = \frac{1 - \tan \varphi_E}{\tan \varphi_E} = \frac{\nu}{1 - 2\nu} = \frac{\left(\frac{1}{I_C - \frac{I_P}{2} + 2} \right)}{1 - 2 \left(\frac{1}{I_C - \frac{I_P}{2} + 2} \right)} \quad (268)$$

5.3. Bewertung der Umsetzung des Hauptziels

Mit dem Atterberg-Kontinuum stehen Grundlagen für die Entwicklung einer neuen Theorie zur Verfügung. Die Böden mit bindiger Reaktion können im Atterberg-Kontinuum auf theoretischer Grundlage, zuverlässiger und mit mehr Größen beschrieben werden, als das nach aktuellem Stand der Technik möglich ist. Das Hauptziel wurde erreicht. Der nächste erforderliche Schritt ist die Erweiterung des Atterberg-Kontinuums für Böden mit einer nicht bindigen Reaktion.

Eidesstattliche Erklärung / Declaration under Oath

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, keine anderen als die von mir angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt und die den benutzten Werken wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

I declare under penalty of perjury that this thesis is my own work entirely and has been written without any help from other people. I used only the sources mentioned and included all the citations correctly both in word or content.

01.10.2024



Datum / Date

Unterschrift des Antragstellers / Signature of the applicant

Lebenslauf

2007	Studium der	Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
1999	Geologie / Paläontologie	