



Albrecht Bertram

Magdeburger Vorlesungen

zur

Technischen Mechanik

Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Nov. 2016

| | |
|--|-----|
| Vorwort | 5 |
| Einleitung | 6 |
| Literatur | 8 |
| Liste der wichtigsten Bezeichnungen | 12 |
| Abkürzungen | 15 |
| Mathematische Propädeutik I: Vektorrechnung | 16 |
| Statik | 20 |
| Zeit | 20 |
| Raum | 20 |
| Kräfte | 22 |
| Momente | 23 |
| Kräfte-Reduktion | 25 |
| Gleichgewichtssysteme | 28 |
| Mathematische Propädeutik II: Gebietsintegrale | 30 |
| Flächenintegrale | 32 |
| Volumenintegrale | 35 |
| Integration über Vektorfelder | 38 |
| Massendichte | 38 |
| Kraftsysteme | 40 |
| Streckenlasten | 40 |
| Oberflächenkräfte | 41 |
| Volumenkräfte | 42 |
| Gravitation | 42 |
| Komplexe Kraftsysteme | 46 |
| Reaktionsprinzip | 47 |
| Standardproblem der Statik | 50 |
| Reibung | 53 |
| Haftreibung | 53 |
| Seilreibung | 58 |
| Gleitreibung | 59 |
| Schnittlasten an Stäben | 61 |
| Fachwerke | 67 |
| Seile und Bögen | 69 |
| Zug- und Druckstäbe | 78 |
| Federn | 83 |
| Balkenbiegung | 85 |
| Kleine Verformungen | 90 |
| Prinzip von DE SAINT-VENANT | 92 |
| Flächenträgheitsmomente | 93 |
| Schiefe Biegung | 99 |
| Knickstäbe | 105 |
| Transformation der Spannungen | 120 |
| MOHRscher Kreis | 121 |
| Deformationsgeometrie | 125 |
| Elastizität | 128 |
| Transformation des HOOKEschen Gesetzes | 130 |
| Inversion des HOOKEschen Gesetzes | 132 |
| HOOKEsches Gesetz als Matrizen-Gleichung | 133 |
| Kompression/ Dilatation | 134 |

| | |
|---|-----|
| Randwertprobleme der Elastostatik | 135 |
| Schubverformungen am Biegebalken | 136 |
| Schubspannungen in dünnwandigen offenen Profilen | 143 |
| Torsion | 147 |
| BREDT'sche Torsionstheorie..... | 149 |
| Dickwandige und Vollprofile..... | 154 |
| Seifenhautgleichnis | 156 |
| Hydrodynamisches Gleichnis..... | 157 |
| Dünnwandige Vollquerschnitte mit parallelen Rändern | 157 |
| Zusammengesetzte Querschnitte..... | 159 |
| Elastische Energie | 160 |
| Federenergie..... | 162 |
| Elastische Energie eines Zug- und Biegestabes..... | 163 |
| Die Scherenergie | 164 |
| Torsionsenergie | 165 |
| Festigkeits-Hypothesen | 166 |
| Kinematik..... | 169 |
| Kinematik der Punktbewegungen | 169 |
| FRENET'sches Dreibein | 171 |
| Relativbewegung..... | 173 |
| Kinematik des deformierbaren Körpers | 177 |
| Kinetik..... | 179 |
| Kinetik des deformierbaren Körpers..... | 179 |
| Mehrkörpersysteme | 183 |
| KEPLER'sche Gesetze | 185 |
| Kinematik des starren Körpers..... | 188 |
| Bewegungsschraube | 190 |
| Ebene Bewegungen..... | 191 |
| Freiheitsgrade..... | 193 |
| Kinetik des starren Körpers..... | 193 |
| Biegekritische Drehzahlen | 202 |
| Kinetik deformierbarer Körper in Feldformulierung..... | 202 |
| Leistung..... | 205 |
| Leistung der Kräfte..... | 206 |
| Arbeitssatz..... | 208 |
| Kraftpotenziale..... | 208 |
| Spannungsleistung..... | 209 |
| Energiesatz | 211 |
| Arbeits- und Energieprinzipien | 211 |
| RITZ'sches Verfahren | 216 |
| HAMILTON'sches Prinzip | 219 |
| LAGRANGE'sche Bewegungsgleichungen..... | 220 |
| Ergänzungsarbeit..... | 222 |
| Duale Energieprinzipien der Elastostatik..... | 223 |
| Kraftgrößenverfahren | 227 |
| Stoßvorgänge..... | 228 |
| Schwingungslehre | 236 |
| Freie lineare ungedämpfte Einmassen-Schwingung | 236 |
| Lineare gedämpfte Schwingungen | 240 |
| Trockenreibung | 240 |
| Viskose Reibung | 241 |

| | |
|---|-----|
| Erzwungene Schwingungen | 244 |
| Erzwungene Schwingung mit Krafterregung | 245 |
| Freie Schwingungen des ungedämpften 2-Massen-Schwingers | 250 |
| Saitenschwingungen | 252 |
| Freie Biegeschwingung | 254 |
| RITZ-RAYLEIGH-Quotient | 257 |
| Index | 259 |

Vorwort

Der vorliegende Text ist aus den Vorlesungen zur Technischen Mechanik hervorgegangen, die der Autor in den letzten 20 Jahren an der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg gehalten hat. Sie umfassen einen 3- bis 4-semesterigen Grundkurs am Anfang der Ingenieur-Ausbildung. Vielleicht können andere Lehrende und Lernende von den hier in all den Jahren eingeflossenen Erfahrungen profitieren.

Der Kurs wurde begleitet von Übungen in kleinen Gruppen. Der Stoff der Übungen (Aufgaben, Probleme, Beispiele, etc.) ist nicht in diesem Skript enthalten. Hier wird auf die zahlreichen Aufgabensammlungen verwiesen, die unter Literatur aufgelistet sind.

Eine Formelsammlung des Autors kann an gleicher Stelle heruntergeladen werden.

Der Autor ist dankbar für alle Hinweise und Kommentare, die zu einer Verbesserung dieses Skriptes führten und hoffentlich auch weiterhin führen werden. Insbesondere dankt er seinem Meisterleser Arnold Krawietz, bei dem er einst selbst Mechanik lernen durfte.

Dies ist die Adresse, an die man Hinweise schicken kann:

albrecht.bertram@ovgu.de

Alle Angaben, insbesondere Materialkonstanten u.ä. werden ohne Gewähr für Richtigkeit gegeben.

A. Bertram

Einleitung

Die **Mechanik** ist eine der ältesten Wissenschaften neben der Mathematik, Physik, Technik, Medizin.

Die **Technische Mechanik** ist dem Inhalt nach ein Teilgebiet der **Physik**. Die Sprache der Technischen Mechanik ist die **Mathematik**. Ihre Anwendungen (und damit ihre Finanzierung) kommen aus der **Technik**.

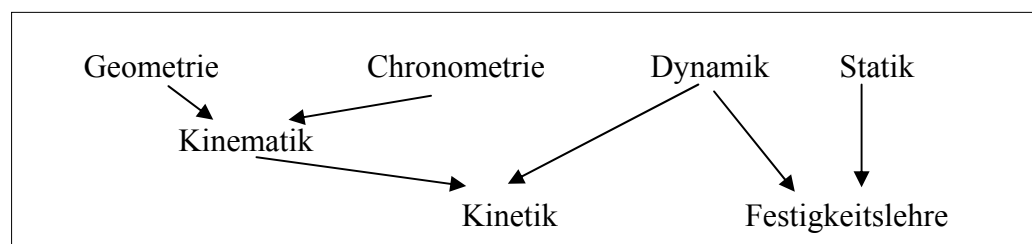
LEONARDO DA VINCI: "Die Mechanik ist das Paradies der mathematischen Wissenschaften, weil man mit ihr zur Frucht des mathematischen Wissens gelangt."

GALILEI: „Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben.“

Ziel der **Physik** ist es, die mechanischen Vorgänge zu erklären, die Zusammenhänge zu erkennen, die Naturgesetze zu erforschen.

Die **Technische Mechanik** geht darüber hinaus. Sie will mechanische Vorgänge berechenbar machen. Dabei geht sie viele Kompromisse ein. Sie gibt sich häufig mit groben Abschätzungen zufrieden, sie vereinfacht stark. Sie versucht auch Vorgänge berechenbar zu machen, deren Physik noch nicht vollständig bekannt ist. Deswegen werden wir es in vielen Fällen mit einfachen Modellen zu tun bekommen, die die Wirklichkeit nur eingeschränkt wiedergeben.

Einteilung der Mechanik



Praktisches Beispiel:

Balken auf zwei Stützen mit Gewicht

Statik: Berechnung der Kräfte im Balken und in den Auflagern

Festigkeitslehre: Berechnung der Dehnungen, Spannungen, Durchbiegung, Energie, Bruchsicherheit

Dynamik: Schwingungen des Balkens, Stoßverhalten

Geschichtliches

Die Mechanik ist eine der ältesten Wissenschaften, die bereits im Altertum entstand (Archimedes). Die Grundlagen der Mechanik wurden in der Renaissance (Galilei, Kepler, Stevin) gelegt. Sie reifte im Barock (1600 - 1730) (Hooke, Newton, Leibniz), erfuhr ihre Hochblüte im 18. Jahrhundert (Bernoulli, Euler, d'Alembert, Lagrange) und ihre vorläufige Vollendung am Anfang des 19. Jahrhunderts (Cauchy, Navier, Hamilton). Im 20. Jahrhundert bis heute wuchs sie dann eher in die Breite. Dennoch war fast alles, was wir in diesem Skript behandeln, in der Mitte des 19. Jahrhunderts schon bekannt. Bis damals waren praktisch alle

großen Mechaniker auch Physiker und Mathematiker. Danach erst entwickelte sich die Technische Mechanik als eine eigenständige Disziplin.

Neue Impulse bekam die Mechanik in der Mitte des 20. Jahrhunderts durch die Möglichkeiten, Probleme mit Computern numerisch zu lösen. Diese neuen Inhalte (z. B. die Finite Elemente Methode) werden hier allerdings nicht behandelt.

Lebensdaten einiger bedeutender Mechaniker

| | | |
|---------------------------|------|-------------|
| Stevin, Simon | | 1548 - 1620 |
| Galilei, Galileo | | 1564 - 1642 |
| Kepler, Johannes | | 1571 - 1630 |
| Guericke, Otto von | | 1602 - 1686 |
| Hooke, Robert | | 1635 - 1703 |
| Newton, Isaac | | 1643 - 1727 |
| Leibniz, Gottfried W. | | 1646 - 1716 |
| Bernoulli, mehrere | etwa | 1650 - 1800 |
| Euler, Leonhard | | 1707 - 1783 |
| d'Alembert, Jean le Rond | | 1717 - 1783 |
| Lagrange, Joseph Louis | | 1736 - 1813 |
| Coulomb, Charles Augustin | | 1736 - 1806 |
| Saint-Venant, Barre de | | 1797 - 1886 |
| Navier, Louis Marie Henri | | 1785 - 1836 |
| Cauchy, Augustin Louis | | 1789 - 1857 |
| Hamilton, William Rowan | | 1805 - 1865 |

Literatur

Die folgenden Listen stellen Literaturvorschläge dar, ohne damit über die Qualität der Bücher urteilen zu wollen. Die Liste ist nicht vollständig.

Lehrbücher zur Technischen Mechanik

- Allen, J. H.:** *Statik für Maschinenbauer für Dummies*. Wiley-VCH Verlag (2012)
- Allen, J. H.:** *Festigkeitslehre für Dummies*. Wiley-VCH Verlag (2013)
- Assmann, B.; Selke, P.:** *Technische Mechanik*. 3 Bände und Aufgabensammlung. Oldenbourg Wissensch.Vlg. (verschiedene Auflagen)
- Balke, H.:** *Einführung in die Technische Mechanik*. Bd. 1: *Statik*, Bd. 2: *Kinetik*. Bd.3: *Festigkeitslehre*. Springer-Verlag, Berlin (2005, 2006, 2008)
- Berger, J.:** *Technische Mechanik für Ingenieure*. Vieweg, Braunschweig, 1991 (mehrere Bände)
- Böge, A.:** *Technische Mechanik*. Vieweg, Wiesbaden, 2006.
- Brommundt, E.; Sachs, G.:** *Technische Mechanik*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- Bruhns, O.; Lehmann, T.:** *Elemente der Mechanik I - III und Aufgabensammlung*, Band I: Einführung, Statik, Band II: Elastostatik, Band III: Kinetik. Vieweg, Braunschweig 1993, 1994, neuere Auflagen im Shaker-Verlag, Aachen.
- Dankert, H. und J.:** *Technische Mechanik*. Teubner, Stuttgart, 2006.
- Franeck, H.:** *Starthilfe Technische Mechanik*. Teubner, Wiesbaden 1996.
- Gabbert, U.; Raecke, I.:** *Technische Mechanik für Wirtschaftsingenieure*. Fachbuchverlag Leipzig 2003.
- Göldner, H.; Holzweißig, F.:** *Leitfaden der Technischen Mechanik*. Fachbuchverlag Leipzig, 1989.
- Göldner, H.; Witt, D.:** *Lehr- und Übungsbuch Technische Mechanik*. Carl Hanser Verlag. Band I: Statik und Festigkeitslehre, 1993. Band II: Kinematik / Kinetik, Systemdynamik, Mechatronik. 1997.
- Gross, D.; Hauger; W., Schnell, W.; Wriggers, P.; u. a.:** *Technische Mechanik*. Band I: Statik, Band II: Elastostatik, Band III: Kinetik, Band IV: Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden. Springer-Verlag, Berlin (4 Bände und Aufgabensammlung)
- Gummert, P.; Reckling, K.-A.:** *Mechanik*. Vieweg, Braunschweig, 1994 (versch. Auflagen).
- Hagedorn, P.:** *Technische Mechanik*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/M., 1993 (mehrere Bände).
- Hahn, H. G.:** *Technische Mechanik*. Carl Hanser Verlag, München, 1992.
- Hibbeler, R. C.:** *Technische Mechanik 1, 2, 3*. Pearson, München, 2004.
- Holzmann, G.; Meyer, H.; Schumpich, G.:** *Technische Mechanik* (3 Bände). Teubner, Stuttgart.
- Kabus, K.:** *Mechanik und Festigkeitslehre*. Carl Hanser Verlag, 1993.
- Knappstein, G.:** *Statik, insbesondere Schnittprinzip*. Verlag Harri Deutsch, 4. Aufl. 2011.
- Knappstein, G.:** *Kinematik und Kinetik*. Verlag Harri Deutsch, 3. Aufl. 2011.
- Kühorn, A.; Silber, G.:** *Technische Mechanik für Ingenieure*. Hüthing Verlag, Heidelberg 2000.
- Kulisch, W.:** *Technische Mechanik für Dummies*. Wiley-VCH Verlag (2012)
- Magnus, K.; Müller-Slany, H. H.:** *Grundlagen der Technischen Mechanik*. Teubner, Stuttgart, 7. Aufl. 2005.

- Mahnken, R.:** *Lehrbuch der Technischen Mechanik - Dynamik.* Springer-Verlag, Heidelberg (2010)
- Mayr, M.:** *Technische Mechanik. Statik, Kinematik, Kinetik, Schwingungen, Festigkeitslehre.* Carl Hanser Verlag, 1900.
- Müller, W. H.; Ferber, F.:** *Technische Mechanik für Ingenieure.* Fachbuchverlag Leipzig, 2003.
- Parkus, H.:** *Mechanik der festen Körper.* Springer-Verlag, Wien, 1981 (versch. Auflagen).
- Pestel, E.; Wittenburg, J.:** *Technische Mechanik.* BI Wissenschaftsverlag, Mannheim
 Band I: Statik, Reibung, Festigkeitslehre
 Band II: Festigkeitslehre, Kinematik, Kinetik, Hydromechanik
 Band III: Thermodynamik, Festigkeitslehre, Schwingungen
- Richard, H. A.; Sander, M.:** *Technische Mechanik. Statik.* Vieweg, Braunschweig, 2005.
- Romberg, O.; Hinrichs, N.:** *Keine Panik vor Mechanik!* Vieweg, Braunschweig, 1999.
- Sayir, M. B.; Dual, J.; Kaufmann, S.:** *Ingenieurmechanik* Teubner, Stuttgart, 2004-5
 Bd. 1: *Grundlagen der Statik*
 Bd. 2: *Deformierbare Körper*
 Bd. 3: *Dynamik*
- Sirrenberg, E.:** *Technische Mechanik: Kinematik. Ein interaktives eBook für Maple.* Verlag Harri Deutsch, 2007.
- Steger, H. G.; Sieghart, J.; Glauning, E.:** *Technische Mechanik,* Teubner, Stuttgart, 1990 (mehrere Bände).
- Szabo, I.:** *Einführung in die Technische Mechanik.* Springer-Verlag, Berlin (versch. Auflagen).
- Szabo, I.:** *Höhere Technische Mechanik.* Springer-Verlag, Berlin (versch. Auflagen).
- Wittenburg, J.; Richard, H. A.; Zierrep, J.; Bühler, K.:** *Das Ingenieurwissen: Technische Mechanik.* Springer Vieweg, 2014.
- Wohlhart, K.:** *Statik, Dynamik,* Vieweg, Braunschweig, 1998.
- Wriggers, P.; Nackenhorst, U.; Beuermann, S.; Spiess, H.; Löhnert, S.:** *Technische Mechanik kompakt.* Teubner, Stuttgart, 2005.
- Ziegler, F.:** *Technische Mechanik der festen und flüssigen Körper.* Springer-Verlag, Wien, 1985.

Übungsbücher zur Technischen Mechanik

- Assmann, B.; Selke, P.:** *Aufgaben zur Festigkeitslehre.* Oldenbourg Wissensch.Vlg. (verschiedene Auflagen)
- Assmann, B.; Selke, P.:** *Aufgaben zur Kinematik und Kinetik.* Oldenbourg Wissensch.Vlg. (verschiedene Auflagen)
- Böge, A.; Schlemmer, W.:** *Aufgabensammlung Technische Mechanik.* Vieweg, Wiesbaden, 2001. sowie: *Lösungen zur Aufgabensammlung.* Vieweg, Wiesbaden, 2001.
- Bruhns, O.:** *Aufgabensammlung Technische Mechanik.* Band 1 (Statik). Band 2 (Festigkeitslehre), Vieweg, Braunschweig, 1996.
- Hahn, H. G.; Barth, F. J.; Fritzen, C.-P.:** *Aufgaben zur Technische Mechanik.* Carl Hanser Verlag, München, 1995.
- Franeck, H.:** *Klausurtraining Technische Mechanik.* Teubner, Wiesbaden 2000.
- Gross, D., W.; Ehlers, W.; Wriggers, P.:** *Formeln und Aufgaben zur Technische Mechanik.* Springer-Verlag, Berlin (3 Bände).
- Hagedorn, P.:** *Aufgabensammlung Technische Mechanik,* Teubner, Wiesbaden 1992.
- Hardtke, H.-J.; Heimann, B.; Sollmann, H.:** *Lehr- und Übungsbuch Technische Mechanik.* Hanser, Leipzig 1997.

- Hauger, W.; Lippmann, H.; Mannl, V.:** *Aufgaben zu Technische Mechanik 1-3*. Springer-Verlag, Berlin, 1991 und weitere Auflagen.
- Kabus, K.:** *Mechanik und Festigkeitslehre - Aufgaben*. Carl Hanser Verlag, 1993.
- Knappstein, G.:** *Aufgaben zur Festigkeitslehre - ausführlich gelöst*. Verlag Harri Deutsch, 5. Aufl. 2010.
- Mayr, M.:** *Mechanik-Training*. Carl Hanser Verlag, 2000.
- Müller, W. H.; Ferber, F.:** *Übungsaufgaben zur Technische Mechanik*. Fachbuchverlag Leipzig, 2005.
- Richard, H. A.; Sander, M.:** *Technische Mechanik Festigkeitslehre*. Vieweg, Braunschweig, 2006.
- Szabo, I.:** *Repertorium und Übungsbuch der Technische Mechanik*. Springer-Verlag, Berlin (versch. Auflagen).
- Ulbrich, H.; Weidemann, H.-J.; Pfeiffer, F.:** *Technische Mechanik in Formeln, Aufgaben und Lösungen*. Teubner, 2006.
- Weidemann, H.-J.; Pfeiffer, F.:** *Technische Mechanik in Formeln, Aufgaben und Lösungen*. Teubner, Wiesbaden 1995.
- Zimmermann, K.:** *Technische Mechanik - multimedial*. Übungsbuch mit Multimedia-Software. Carl Hanser Verlag, 2000.

Formelsammlungen zur Technischen Mechanik

- Birnbaum, H.; Denkmann, N.:** *Taschenbuch der Technischen Mechanik*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/MJ. 1997.
- Böge, A.:** *Formeln und Tabellen zur Technischen Mechanik*. Vieweg, Braunschweig, 2000.
- Will, P.; Lämmel, B.:** *Kleine Formelsammlung Technische Mechanik*. Carl Hanser Verlag, 1998.
- Winkler, J.; Aurich, H.:** *Taschenbuch der Technischen Mechanik*. Carl Hanser Verlag, 2006.

Lehrbücher zur Ingenieur-Mathematik

- Arens, T., Hettlich, F., Karpfinger, C., Kockelkorn, U., Lichtenegger, K., Stachel, H.:** *Mathematik*. Springer 2008.
- Benker, H.:** *Ingenieurmathematik kompakt - Problemlösungen mit MATLAB : Einstieg und Nachschlagewerk für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Springer, 2010.
- Brauch, W.; Dreyer, H.-J.; Haacke, W.:** *Mathematik für Ingenieure*. Teubner, 2006.
- Burg, K.; Haf, H.; Wille, F.:** *Höhere Mathematik für Ingenieure*. mehrere Bände. Teubner.
- Dürschnabel, K.:** *Mathematik für Ingenieure*. Teubner, 2004.
- Erven, J.; Erven, M.; Hörwick, J.:** *Vorkurs Mathematik*. Oldenbourg Verlag, 2004.
- Hoffmann, A.; Marx, B.; Vogt, W.:** *Mathematik für Ingenieure 1*. Pearson, 2005.
- Kemnitz, A.:** *Mathematik zum Studienbeginn. Grundlagenwissen für alle technischen, mathematisch-naturwissenschaftlichen und wirtschaftswissenschaftlichen Studiengänge*. Vieweg Verlag, 2004.
- Schäfer, W.; Georgi, K.; Trippler, G.:** *Mathematik-Vorkurs - Übungs- und Arbeitsbuch für Studienanfänger*. Teubner Verlag, 2002.
- Papula, L.:**
Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, 3 Bände, 2001.
Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klausur- und Übungsaufgaben, 2004.
Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Anwendungsbeispiele, 2004.

- Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Formalsammlung*, 2003.
Vieweg Verlag
- Rapp, H.:** *Mathematik für die Fachschule Technik*. Vieweg Verlag, versch. Auflagen.
- Rießinger, T.:** *Mathematik für Ingenieure*. Springer, 2011
- Schäfer, W.; Georgi, K.; Trippler, G.:** *Mathematik-Vorkurs*. Teubner, 2006.
- Schirotzek, W.; Scholz, S.:** *Starthilfe Mathematik*. Teubner, 2005.
- Smirnow, W. I.:** *Lehrbuch der höheren Mathematik*. 7 Bände. Verlag Harri Deutsch (versch. Auflagen)
- Wendeler, J.:** *Vorkurs der Ingenieurmathematik*. Verlag Harri Deutsch, 2007.
- Westermann, T.:** *Mathematik für Ingenieure*. Springer, 2011

Formelsammlungen zur Mathematik

- Bronstein, I. N.; Semendjajew, K. A.; Musiol, G.; Mühlig, H.:** *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch (versch. Auflagen)
- Gnörich, B. :** *Formelsammlung Mathematik*. 2006, gratis download von <http://www.gnoerich.de/formelsammlung/formelsammlung.html>
- Göhler, W.:** *Formelsammlung Höhere Mathematik*. Verlag Harri Deutsch (versch. Auflagen)
- Grosche, G.; Ziegler, V.; Zeidler, E.; Ziegler, D.:** *Teubner-Taschenbuch der Mathematik*. 2 Bände, 2003
- Merziger, G.; Mühlbach, G.; Wille, D.; Wirth, T.:** *Formeln + Hilfen zur Höheren Mathematik*. Binomi Verlag; Auflage: 2. Aufl. 1996
- Papula, L.:** *Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Vieweg Fachbücher der Technik, 2006
- Wolfram Mathworld**, internet-Formelsammlung einsehbar unter <http://mathworld.wolfram.com/>

Literatur zur Geschichte der Mechanik

- Benvenuto, E.:** *An Introduction to the History of Structural Mechanics*. Part I, II. Springer-Verlag, New York, 1991.
- Dugas, R.:** *A History of Mechanics*. Dover Pub., New York, 1988.
- Fierz, M.:** *Vorlesungen zur Entwicklungsgeschichte der Mechanik*. Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- Hund, F.:** *Geschichte der physikalischen Begriffe*. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1968.
- Kurrer, K.-E.:** *Geschichte der Baustatik*. Ernst & Sohn, Berlin, 2002, 2016.
- Szabo, I.:** *Geschichte der mechanischen Prinzipien*. Birkhäuser, Basel, 1977, 1979.
- Timoshenko, S. P.:** *History of Strength of Materials*. McGraw-Hill, 1953
- Truesdell, C. A.:** *Essays on the History of Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, 1968.

Liste der wichtigsten Bezeichnungen

| <i>Symbol</i> | <i>Bezeichnung</i> | <i>Dimension</i> | <i>Einheit</i> |
|-----------------------------|------------------------------------|---------------------------------------|--|
| A | Flächeninhalt | $Länge^2$ | m^2 |
| \mathcal{A} | Flächengebiet | | |
| \mathbf{a} | Beschleunigung | $\frac{Länge}{Zeit^2}$ | $\frac{m}{s^2}$ |
| A_a | Arbeit der äußeren Lasten | $Kraft \times Länge$ | $J = N m = W s = \frac{m^2 kg}{s^2}$ Joule |
| A_i | Arbeit der Spannungen | $Kraft \times Länge$ | $J = N m = W s = \frac{m^2 kg}{s^2}$ Joule |
| \mathbf{d} | Drall | $\frac{Länge^2 \times Masse}{Zeit}$ | $\frac{m^2 kg}{s}$ |
| D | Drillung | $Länge^{-1}$ | m^{-1} |
| E | Elastizitätsmodul | $\frac{Kraft}{Fläche}$ | $Pa = \frac{N}{m^2}$ Pascal |
| e | Spur der Dehnungsmatrix | - | - |
| \mathbf{e}_i | kartesischer Basisvektor | | |
| f | Frequenz | $Zeit^{-1}$ | s^{-1} |
| \mathbf{f}^A | Flächenkraftdichte | $\frac{Kraft}{Fläche}$ | $Pa = \frac{N}{m^2}$ |
| \mathbf{f}^M | Massenkraftdichte | $\frac{Kraft}{Masse}$ | $\frac{N}{kg}$ |
| \mathbf{F} | (Einzel-) Kraftvektor | $\frac{Masse \times Länge}{Zeit^2}$ | $N = \frac{kg m}{s^2}$ Newton |
| g | irdische Gravitationskonstante | $\frac{Länge}{Zeit^2}$ | $\frac{m}{s^2}$ |
| $\mathbf{F}_G = \mathbf{G}$ | Gewichtskraft | $\frac{Masse \times Länge}{Zeit^2}$ | $N = \frac{kg m}{s^2}$ |
| I_{ij} | Flächenträgheitsmomente | $Länge^4$ | m^4 |
| K | kinetische Energie | $\frac{Länge^2 \times Masse}{Zeit^2}$ | $\frac{m^2 kg}{s^2}$ |
| l | Länge | Länge | m Meter |
| L_a | Leistung der äußeren Lasten | $\frac{Masse \times Länge^2}{Zeit^3}$ | $W = \frac{kg m^2}{s^3}$ Watt |
| l_a | Leistungsdichte der äußeren Lasten | $\frac{Masse}{Zeit^3 \times Länge}$ | $\frac{kg}{s^3 m}$ |
| L_i | Spannungsleistung | $\frac{Masse \times Länge^2}{Zeit^3}$ | $W = \frac{kg m^2}{s^3}$ |
| l_i | Dichte der Spannungsleistung | $\frac{Masse}{Zeit^3 \times Länge}$ | $\frac{kg}{s^3 m}$ |

| | | | |
|----------------------|--|--|---|
| \mathcal{L} | LAGRANGE-Funktion | $\frac{\text{Länge}^2 \times \text{Masse}}{\text{Zeit}^2}$ | $\frac{\text{m}^2 \text{kg}}{\text{s}^2}$ |
| M | Massenmittelpunkt | | |
| M_p | Momentanpol | | |
| \mathbf{M} | Moment | $\text{Kraft} \times \text{Länge}$ | $N m$ |
| m | Masse | Masse | kg Kilogramm |
| $n(x)$ | Streckenlast in Normalrichtung | $\frac{\text{Kraft}}{\text{Länge}}$ | $\frac{N}{m}$ |
| \mathbf{n} | Normalenvektor | | |
| N | Normalkraft | $\frac{\text{Masse} \times \text{Länge}}{\text{Zeit}^2}$ | $N = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$ |
| \mathbf{o} | Nullvektor | | |
| O | raumfester Punkt | | |
| p | Druck | $\frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$ | $\text{Pa} = \frac{N}{\text{m}^2}$ Pascal |
| \mathbf{p} | Impuls | $\frac{\text{Länge} \times \text{Masse}}{\text{Zeit}}$ | $\frac{\text{m kg}}{\text{s}}$ |
| $q_y(x), q_z(x)$ | Streckenlasten in Querrichtungen | $\frac{\text{Kraft}}{\text{Länge}}$ | $\frac{N}{m}$ |
| Q | Querkraft | $\frac{\text{Masse} \times \text{Länge}}{\text{Zeit}^2}$ | $N = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$ |
| \mathbf{r} | Ortsvektor | Länge | m |
| s | Bogenlänge | Länge | m |
| s | Spur der Spannungsmatrix | $\frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$ | $\text{Pa} = \frac{N}{\text{m}^2}$ |
| S | statisches Moment einer Fläche | Länge^3 | m^3 |
| T | Periode | Zeit | s |
| t | Zeit | Zeit | s Sekunde |
| t | Schubfluss | $\frac{\text{Kraft}}{\text{Länge}}$ | $\frac{N}{m}$ |
| U | Potential der äußeren Kräfte | $\text{Kraft} \times \text{Länge}$ | $N m$ |
| \mathbf{u} | Verschiebungsvektor | Länge | m |
| V | Volumeninhalt | Länge^3 | m^3 |
| \mathcal{V} | Volumengebiet | | |
| \mathbf{v} | Geschwindigkeitsvektor | $\frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}}$ | $\frac{m}{s}$ |
| W | elastische Formänderungsenergie | $\frac{\text{Länge}^2 \times \text{Masse}}{\text{Zeit}^2}$ | $\frac{\text{m}^2 \text{kg}}{\text{s}^2}$ |
| w | Dichte der Formänderungsenergie | $\frac{\text{Kraft}}{\text{Länge}^2}$ | $\frac{N}{\text{m}^2}$ |
| W^* | Formänderungs-Ergänzungsenergie | $\frac{\text{Länge}^2 \times \text{Masse}}{\text{Zeit}^2}$ | $\frac{\text{m}^2 \text{kg}}{\text{s}^2}$ |
| w^* | Dichte der Formänderungs-Ergänzungsenergie | $\frac{\text{Kraft}}{\text{Länge}^2}$ | $\frac{N}{\text{m}^2}$ |
| x, y, z oder x_i | kartesische Koordinaten | Länge | m |

Größen am Balken

| | |
|---|-----------------------------|
| A | Querschnittsflächeninhalt |
| x | Balkenachsenkoordinate |
| y, z | Koordinaten in Querrichtung |
| u, v, w | Verschiebungskomponenten |
| $\{N, Q_y, Q_z\} = \{F_N, F_{Q_y}, F_{Q_z}\}$ | Schnittkraft |
| $\{M_x, M_y, M_z\} = \{M_t, M_{by}, M_{bz}\}$ | Schnittmoment |
| $\{n, q_y, q_z\}$ | Streckenlasten |

| <i>griech. Alphabet (klein)</i> | <i>griech. Alphabet (groß)</i> | <i>Bezeichnung</i> |
|--|---------------------------------------|---------------------------|
| α | A | alpha |
| β | B | beta |
| γ | Γ | gamma |
| δ | Δ | delta |
| ε | E | epsilon |
| ζ | Z | zeta |
| η | H | eta |
| ϑ | θ | theta |
| ι | I | jota |
| κ | K | kappa |
| λ | Λ | lambda |
| μ | M | my |
| ν | N | ny |
| ξ | Ξ | xi |
| \omicron | O | omikon |
| π | Π | pi |
| ρ | P | rho |
| σ | Σ | sigma |
| τ | T | tau |
| υ | Y | ypsilon |
| φ | Φ | phi |
| χ | X | chi |
| ψ | Ψ | psi |
| ω | Ω | omega |

| | | | |
|-----------------------|--------------------------------------|-------------------------|----------------------|
| α | therm. Ausdehnungskoeffizient | $Temperatur^{-1}$ | K^{-1} |
| γ | Schubwinkel | - | - |
| δ | Variation | - | - |
| ε | Dehnung | - | - |
| ϑ | Torsionsdrehwinkel | - | - |
| θ | Temperatur | $Temperatur$ | K Kelvin |
| Θ_{ij} | Massenträgheitsmomente | $Masse \times Länge^2$ | $kg\ m^2$ |
| κ | Krümmung | $Länge^{-1}$ | m^{-1} |
| μ | Reibungskoeffizient | - | - |
| ν | Querkontraktionszahl | - | - |
| π | 3,14... | - | - |
| ρ | Dichte | $\frac{Masse}{Länge^3}$ | $\frac{kg}{m^3}$ |
| σ | Spannung | $\frac{Kraft}{Fläche}$ | $Pa = \frac{N}{m^2}$ |
| Σ | Summenzeichen | | |
| τ | Schubspannung | $\frac{Kraft}{Fläche}$ | $Pa = \frac{N}{m^2}$ |
| φ^i | Koordinate | | |
| ω | Winkelgeschwindigkeit, Kreisfrequenz | $Zeit^{-1}$ | s^{-1} |
| $\boldsymbol{\omega}$ | Winkelgeschwindigkeitsvektor | $Zeit^{-1}$ | s^{-1} |
| Ω | Erreger-Kreisfrequenz | $Zeit^{-1}$ | s^{-1} |

Abkürzungen

| | |
|--------|-----------------------|
| BZS | Bezugssystem |
| Dgl. | Differenzialgleichung |
| EV | Eigenvektor |
| EW | Eigenwert |
| HSA | Hauptspannungsachsen |
| HTA | Hauptträgheitsachsen |
| HTM | Hauptträgheitsmoment |
| KOO(S) | Koordinaten(system) |
| ONB | Orthonormalbasis |

| | |
|----|-----------------|
| = | Gleichheit |
| := | Definition |
| ≡ | Identifikation |
| ≈ | ungefähr gleich |
| ≅ | Entsprechung |
| ÷ | bis |
| ∝ | proportional |
| | parallel |

Mathematische Propädeutik I: Vektorrechnung

Motivation: Viele Größen in der Mechanik werden durch Vektoren beschrieben, beispielsweise Kräfte, Momente, Verschiebungen, Verdrehungen, Orte, Geschwindigkeiten, u. v. a. m. Alle diese Vektorräume sind reell. Damit verstehen wir unter Skalar grundsätzlich reelle Zahlen.

Definition: Ein (reeller) **Vektorraum** ist eine Menge, zwischen deren Elementen folgende Verknüpfungen definiert sind für alle Vektoren \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} und alle Skalare α , β :

1.) eine **Addition** (oder Summe) mit folgenden Regeln:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \quad (\text{kommutativ})$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \quad (\text{assoziativ})$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{o} = \mathbf{a} \quad (\text{Nullvektor})$$

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{o} \quad (\text{Negativelement})$$

2.) eine **Multiplikation mit einem Skalar** (reelle Zahl) mit folgenden Regeln:

$$(\alpha \beta) \mathbf{a} = \alpha (\beta \mathbf{a}) \quad (\text{assoziativ})$$

$$1 \mathbf{a} = \mathbf{a} \quad (\text{Einselement})$$

$$\alpha (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha \mathbf{a} + \alpha \mathbf{b} \quad (\text{distributiv})$$

$$(\alpha + \beta) \mathbf{a} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{a} \quad (\text{distributiv})$$

3.) ein **Skalarprodukt** mit folgenden Regeln:

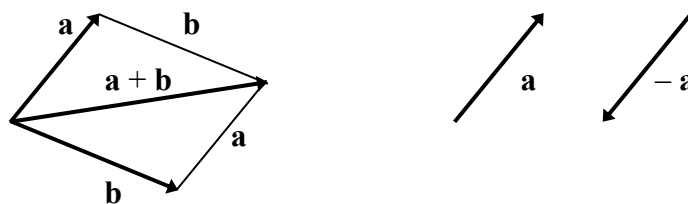
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \quad (\text{kommutativ})$$

$$(\alpha \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \alpha (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (\text{assoziativ})$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \quad (\text{distributiv})$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} > 0 \quad \text{für } \mathbf{a} \neq \mathbf{o} \quad (\text{positiv-definit})$$

Die geometrische Interpretation eines Vektors durch einen Pfeil ergibt für die Addition die Parallelogrammregel:



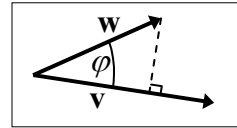
und für die Multiplikation mit einem Skalar eine entsprechende Verlängerung der Länge des Pfeils und eine Umkehrung seines Richtungssinnes für negative Skalare.

Mit dem Skalarprodukt kann man den **Betrag** oder die **Länge** oder die **Norm** eines Vektors \mathbf{v} definieren als

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}.$$

Ein Vektor von der Länge l heißt **normiert**. Darüber hinaus definiert man den **Winkel** φ zwischen zwei von Null verschiedenen Vektoren \mathbf{v} und \mathbf{w} durch die Beziehung

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}| |\mathbf{w}| \cos \varphi \quad \text{mit } 0 \leq \varphi \leq \pi.$$



$$\Rightarrow \quad \varphi = \arccos \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}| |\mathbf{w}|}$$

Geometrische Deutung des Skalarproduktes: das $|\mathbf{v}|$ -fache der Projektion von \mathbf{w} auf \mathbf{v} .

Ist einer der beiden Vektoren ein normierter Vektor, so ist das Skalarprodukt die Projektion des anderen Vektors in diese Richtung.

Ist der Winkel ein rechter, so sind die beiden Vektoren **orthogonal** zueinander, und das Skalarprodukt zwischen ihnen Null.

Definition: Sind $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N, N > 0$, Vektoren und $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^N$ reelle Zahlen, so heißt der Vektor

$$\alpha^1 \mathbf{x}_1 + \alpha^2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha^N \mathbf{x}_N$$

Linearkombination von $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$.

Definition: Vektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$ heißen **linear unabhängig**, wenn der Nullvektor nur als die triviale Linearkombination dargestellt werden kann:

$$\mathbf{0} = 0 \mathbf{x}_1 + 0 \mathbf{x}_2 + \dots + 0 \mathbf{x}_N.$$

Andernfalls heißen sie **linear abhängig**.

Die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren eines Vektorraums ist dessen **Dimension**.

Sind $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$ linear unabhängige Vektoren von der Anzahl der Dimension, so nennt man sie **Vektorbasis**.

Satz: Ist $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$ eine Vektorbasis, so lässt sich jeder Vektor \mathbf{v} eindeutig darstellen als Linearkombination der Basisvektoren

$$\mathbf{v} = v^1 \mathbf{x}_1 + v^2 \mathbf{x}_2 + \dots + v^N \mathbf{x}_N.$$

Die Skalare v^i heißen **Komponenten** des Vektors \mathbf{v} bezüglich der Basis $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$.

Ist klar, auf welche Basis man sich bezieht, so stellt man Vektoren nur noch durch ihre Komponenten bezüglich dieser Basis dar, also beispielsweise

$$\mathbf{v} = (v^1, v^2, \dots, v^N).$$

Darstellung der Addition zweier Vektoren $\mathbf{v} = (v^1, v^2, \dots, v^N)$ und $\mathbf{w} = (w^1, w^2, \dots, w^N)$ bezüglich einer Basis:

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v^1 + w^1, v^2 + w^2, \dots, v^N + w^N).$$

Darstellung der Multiplikation eines Vektors $\mathbf{v} = (v^1, v^2, \dots, v^N)$ mit einem Skalar α bezüglich einer Basis:

$$\alpha \mathbf{v} = (\alpha v^1, \alpha v^2, \dots, \alpha v^N).$$

Darstellung des Skalarproduktes zweier Vektoren $\mathbf{v} = (v^1, \dots, v^N)$ und $\mathbf{w} = (w^1, \dots, w^N)$ bezüglich einer Basis

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v^1 w^1 \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + v^2 w^2 \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2 + \dots + v^N w^N \mathbf{x}_N \cdot \mathbf{x}_N$$

$$\begin{aligned}
 &+ v^2 w^1 \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_1 + v^2 w^2 \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2 + \dots + v^2 w^N \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_N \\
 &\dots \\
 &+ v^N w^1 \mathbf{x}_N \cdot \mathbf{x}_1 + v^N w^2 \mathbf{x}_N \cdot \mathbf{x}_2 + \dots + v^N w^N \mathbf{x}_N \cdot \mathbf{x}_N.
 \end{aligned}$$

Eine Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N\}$ heißt **Orthonormalbasis** (ONB), falls alle Basisvektoren untereinander orthogonal und normiert sind:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0 \quad \text{für } i \neq j$$

und $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 1$ für $i=j$.

Bezüglich einer ONB vereinfacht sich die Darstellung des Skalarprodukts zweier Vektoren auf

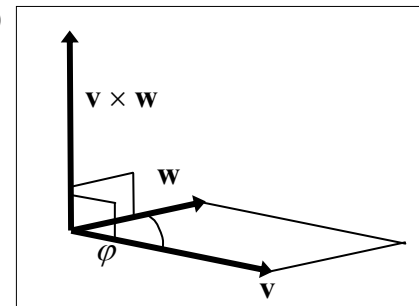
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v^1 w^1 + v^2 w^2 + \dots + v^N w^N.$$

In dreidimensionalen Vektorräumen führt man das **Vektor-** oder **Kreuzprodukt** \times zwischen zwei Vektoren \mathbf{v} und \mathbf{w} ein mit den Regeln:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} \times \mathbf{w} &= -\mathbf{w} \times \mathbf{v} && \text{(alternierend, antikommutativ)} \\
 (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} &= \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w} && \text{(distributiv)} \\
 \alpha (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= (\alpha \mathbf{v}) \times \mathbf{w} && \text{(assoziativ)}
 \end{aligned}$$

Dabei sollen \mathbf{v} , \mathbf{w} und $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ ein **Rechtssystem** bilden. Der Ergebnisvektor steht orthogonal auf beiden Vektoren

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0 = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}).$$



Für den Winkel φ zwischen zwei von Null verschiedenen Vektoren \mathbf{v} und \mathbf{w} gilt die Beziehung

$$|\mathbf{v} \times \mathbf{w}| = |\mathbf{v}| |\mathbf{w}| \sin \varphi.$$

Die Länge des Ergebnisvektors entspricht der Fläche des von \mathbf{v} und \mathbf{w} aufgespannten Parallelogramms. Demnach ist $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Darstellung des Kreuzprodukts zweier Vektoren $\mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3)$ und $\mathbf{w} = (w^1, w^2, w^3)$ bezüglich einer Basis $\{\mathbf{x}_i\}$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (v^1 w^2 - v^2 w^1) \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 + (v^2 w^3 - v^3 w^2) \mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_3 + (v^3 w^1 - v^1 w^3) \mathbf{x}_3 \times \mathbf{x}_1.$$

Benutzt man eine positiv-orientierte ONB $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, so gelten

$$\begin{array}{lll}
 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{0} & \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2 \\
 \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{0} & \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \\
 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}
 \end{array}$$

Wenn wir uns im Weiteren auf eine ONB beziehen, so soll diese immer positiv orientiert sein, was man durch eine geeignete Nummerierung immer erreichen kann.

Darstellung des Kreuzprodukts zweier Vektoren $\mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3)$ und $\mathbf{w} = (w^1, w^2, w^3)$ bezüglich einer solchen ONB (Determinantenregel)

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (v^2 w^3 - v^3 w^2) \mathbf{e}_1 + (v^3 w^1 - v^1 w^3) \mathbf{e}_2 + (v^1 w^2 - v^2 w^1) \mathbf{e}_3.$$

Für doppelte Kreuzprodukte gilt folgende Regel

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

Multipliziert man das Kreuzprodukt $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ skalar mit einem dritten Vektor \mathbf{u} , so erhält man das **Spatprodukt**

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] := \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

mit den Regeln (zyklisch: kommutativ, antizyklisch: antikommutativ)

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = [\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}] = [\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}] = -[\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}] = -[\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u}] = -[\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}],$$

weshalb man das Kreuz- und Skalarprodukt vertauschen kann

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}.$$

Das Spatprodukt entspricht in seiner absoluten Größe dem Volumeninhalt eines durch die drei Vektoren aufgespannten Spates (Parallelepipeds). Das Vorzeichen entspricht der Orientierung der drei Vektoren. Speziell gilt für eine positiv-orientierte ONB

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = 1.$$

Sind zwei Vektoren im Spatprodukt gleich oder auch nur parallel, so ist es Null

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}] = [\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{u}] = [\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}] = 0.$$

Darstellung des Spatprodukts dreier Vektoren $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3)$, $\mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3)$ und $\mathbf{w} = (w^1, w^2, w^3)$ bezüglich einer ONB (Determinantenregel)

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = (v^2 w^3 - v^3 w^2) u^1 + (v^3 w^1 - v^1 w^3) u^2 + (v^1 w^2 - v^2 w^1) u^3.$$

Statik

Wir behandeln in dem ersten Teil statische Vorgänge, bei denen die zeitliche Entwicklung keine Rolle spielt. Im zweiten Teil werden wir dann auch zeitabhängige Vorgänge untersuchen. Zunächst führen wir die grundlegenden Konzepte der Mechanik ein.

Zeit

In der klassischen Mechanik wird die Zeit durch die reelle Achse beschrieben, d. h. eine reelle Zahl t entspricht einem Zeitpunkt. Man macht sich dabei i. A. wenig Gedanken darüber, wie man den Nullpunkt definiert, da wir meistens mit *Zeitdifferenzen* zu tun haben werden, in die der Bezugszeitpunkt nicht eingeht. Die Differentiation einer zeitabhängigen Variablen bezeichnen wir mit einem hochgestellten Punkt, z. B. \mathbf{r}^\bullet .

Die Zeiteinheit ist die **Sekunde**: s . Sie ist definiert als die Zeitspanne, in der die Resonanzstrahlung des Cäsium-Atoms 9.192.631.770 mal schwingt.

Raum

Der uns umgebende Raum wird in der klassischen (nicht-relativistischen) Mechanik als dreidimensionaler (ungekrümmter) EUKLIDischer Raum aufgefasst, in dem Längen und Winkel gemessen werden können, und damit auch Flächen- und Volumeninhalte.

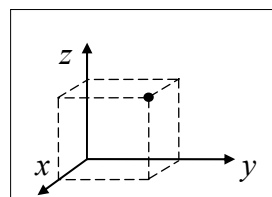
Die **Längeneinheit** ist das **Meter**: m . Es ist definiert als die Strecke, die Licht im Vakuum in einer 299.792.458tel Sekunde zurücklegt.

Für die **Beschreibung eines Punktes im Raum** bieten sich mehrere Möglichkeiten an:

1.) durch Koordinaten

man führt ein dreidimensionales Koordinatensystem (KOOS) ein, z. B.

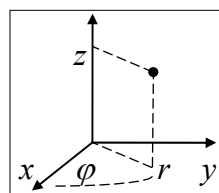
a) **kartesische Koordinaten**: hierbei stehen die Achsen aufeinander senkrecht und sind gleich skaliert. Meist wählt man sie so, dass sie ein Rechtssystem bilden. Jeder Punkt wird durch drei Zahlen x, y, z , von der Dimension Länge eindeutig beschrieben.



Kartesische KOOSe sind rechtwinklig und geradlinig.

b) Zylinderkoordinaten

Ein Punkt wird durch die Angabe von drei Zahlen r, φ, z beschrieben, worin r der Abstand von der z -Achse, z die Höhe über der Grundfläche und φ der eingezeichnete Winkel im Bogenmaß in der Grundfläche ist, wobei φ zwischen 0 und 2π liegt.



Achtung: bestimmte Raumpunkte haben keine eindeutige Darstellung in Zylinderkoordinaten und müssen ausgenommen werden. Dies gilt beispielsweise für Punkte mit $r \equiv 0$.

Zylinderkoordinaten sind rechtwinklig und krummlinig.

Für die Umrechnung in kartesische KOO gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} & \varphi &= \arctan \frac{y}{x} & z &= z \\ x &= r \cos \varphi & y &= r \sin \varphi & z &= z \end{aligned}$$

die aber auch nicht eindeutig sind.

Daneben kann man beliebige weitere Koordinatensysteme definieren, die auch krummlinig und schiefwinklig sein können. Oft ist es von Vorteil, problemangepasste KOOS zu verwenden.

2) durch Ortsvektoren

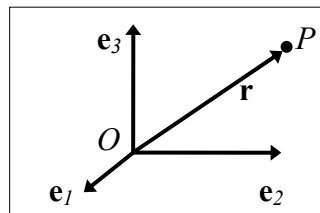
Man wählt sich einen Bezugspunkt O und verbindet ihn mit dem Raumpunkt P durch einen Vektor, den **Ortsvektor**

$$\mathbf{r}_P = \vec{OP} = x \mathbf{g}_1 + y \mathbf{g}_2 + z \mathbf{g}_3.$$

Es gilt dann für drei beliebige Raumpunkte O, P, Q die Parallelogrammregel

$$\vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QP}.$$

Den Ortsvektor stellt man nach Wahl der Vektorbasis durch seine Komponenten dar.



Wählt man speziell eine Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, so kann man die Komponenten gleichzeitig als kartesische Koordinaten auffassen, weswegen eine solche Basis auch manchmal *kartesisch* genannt wird. Das Zusammenfallen von Koordinaten und Komponenten ist aber nur bei geradlinigen Koordinatensystemen möglich, weswegen man prinzipiell zwischen Komponenten und Koordinaten unterscheiden sollte.

Körper

In der Mechanik schneidet man (gedanklich) zusammenhängende materielle Teilgebiete aus dem Universum heraus und bezeichnet sie als **Körper**. Dieser Separationsprozess ist notwendig, da man unmöglich das gesamte Universum analysieren kann und es auch i. A. nicht will, da man sich nur für das Verhalten eines Stabes, eines Maschinenteils, eines Bauwerks oder auch eines Himmelskörpers usw. interessiert.

Die Elemente eines Körpers heißen **materielle Punkte** oder **Körperpunkte**. Jeder materielle Punkt X nimmt zu jedem Zeitpunkt t genau einen Raumpunkt ein, den man durch seinen Ortsvektor

$$\mathbf{r}(X, t)$$

beschreiben kann. Umgekehrt soll jeder Raumpunkt zu einem Zeitpunkt auch nur durch einen materiellen Punkt besetzt sein.

Jeder Körper besitzt eine **Masse**, die in der klassischen Mechanik als zeitlich konstant angenommen wird (Massenerhaltung). Mathematisch wird die Masse eines Körpers angegeben durch eine positive reelle Zahl mit der Einheit **Kilogramm**: *kg*. Dies ist eingeführt durch eine Referenzmasse im Internationalen Büro für Maße und Gewichte in Sèvres bei Paris.

Im Allgemeinen sind alle Körper **deformierbar**. Sie können **gasförmig**, **flüssig** oder **fest** oder auch Mischungen sein. In unserem Kurs werden wir uns hauptsächlich mit festen Körpern beschäftigen, obwohl viele der Aussagen auch für Fluide gelten. Dabei sind in vielen Fällen die Deformationen so klein, dass wir sie für viele Zwecke vernachlässigen können und von **starr**en Körpern ausgehen.

Definition: Wir bezeichnen einen Körper als **starr**, wenn der räumliche Abstand zweier (beliebiger) Körperpunkte zeitlich konstant ist.

Mathematisch können wir dies mit den Ortsvektoren folgendermaßen präzisieren: sind X und Y zwei Körperpunkte, so ist

$$|\mathbf{r}(X, t) - \mathbf{r}(Y, t)|$$

zeitlich konstant.

Bewegungen von starren Körpern werden wir gegen Ende unseres Kurses in der Kinematik untersuchen. In der **Statik** hingegen werden wir uns zunächst mit *ruhenden starren Körpern* befassen. Ein Körper ist in **Ruhe**, wenn für alle Körperpunkte X der Ortsvektor $\mathbf{r}(X, t)$ zeitunabhängig ist.

Kräfte

Da zwischen den verschiedenen Teilen der Welt Wechselwirkungen bestehen, müssen wir diese beim Herausschneiden eines Körpers durch mechanisch äquivalente physikalische Größen ersetzen, die **Schnittgrößen**.

Die fundamentale Annahme, dass sich ein Körper unter den aufgebrauchten Schnittgrößen genauso verhält wie als Teil des Universums, wird **Schnittprinzip** genannt und wird von dem englischen Naturphilosophen FRANCIS BACON (1561-1626) bereits um 1600 aus gesprochen: „Man muss die Natur zerschneiden“. Später wurde es u. a. von EULER¹ präzisiert. Das korrekte Anwenden dieses Schnittprinzips ist die Grundlage aller mechanischen Betrachtungen.

Die Schnittgrößen am Körper heißen **Kräfte**. Dabei wird eine Kraft durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet:

- ihre Größe, bestimmt durch eine Zahl mit der Dimension [Masse x Länge/Zeit²] und der Einheit **Newton**²: $N := kg \ m \ s^{-2}$
- ihre Richtung einschließlich Richtungssinn im Raum
- ihren Angriffspunkt am Körper (wobei wir uns zunächst auf *starre* Körper beschränken).

Die mathematische Beschreibung einer Kraft kann durch einen 3-dimensionalen Vektor \mathbf{F} (lat. *fortia*) in Richtung der Kraft und von der Länge proportional zu ihrer Größe, sowie der

¹ Leonhard Euler (1707 - 1783)

² Isaac Newton (1643 - 1727)

Angabe ihres Angriffspunktes als Körperpunkt X oder durch dessen Ortsvektor $\mathbf{r}(X)$ erfolgen, also

Kraft: $(\mathbf{F}, \mathbf{r}(X))$.

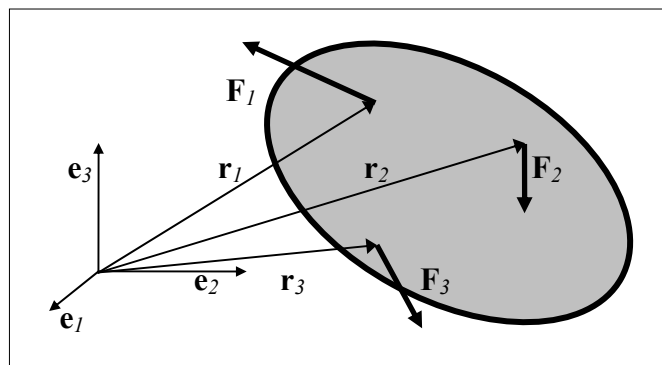
Eine Gerade durch den Angriffspunkt in Richtung von \mathbf{F} heißt **Wirkungslinie** der Kraft. Wegen des vektoriellen Charakters von Kräften können wir jede Kraft als Linearkombinationen von ihren Komponenten mit identischem Kraftangriffspunkt darstellen.

Wir können aber auch umgekehrt mehrere Kräfte mit gemeinsamen Kraftangriffspunkt (Zentralkraftsystem) durch deren vektorielle Summe, die **resultierende Kraft**, ersetzen:

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{r}(X)) + (\mathbf{F}_2, \mathbf{r}(X)) = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2, \mathbf{r}(X)).$$

Eine Menge von Kräften, die auf einen Körper wirken, bezeichnet man als **Kraftsystem** oder **Kräftegruppe**. Man kann sie darstellen

- graphisch



Oft schreibt man an den Kraftvektor eine Zahl, deren Absolutwert der Größe der Kraft entspricht und positiv ist, wenn der Richtungssinn des Kraftvektors demjenigen des gezeichneten Vektors entspricht, und sonst negativ.

- vektoriell als Liste von Kraftvektoren und den zugehörigen Ortsvektoren zu Kraftangriffspunkten

$$\{(\mathbf{F}_1, \mathbf{r}_1), (\mathbf{F}_2, \mathbf{r}_2), \dots, (\mathbf{F}_K, \mathbf{r}_K)\}.$$

Momente

Definition: Sei X ein Punkt mit Ortsvektor \mathbf{r}_X und $\{\mathbf{F}, \mathbf{r}\}$ eine Kraft, so heißt der Vektor

$$\mathbf{M}_X := (\mathbf{r} - \mathbf{r}_X) \times \mathbf{F}$$

das **Moment** der Kraft bezüglich des Bezugspunktes (Drehpunktes) X .

Die Dimension des Moments ist *Kraft* \times *Länge*, seine Einheit: Nm .

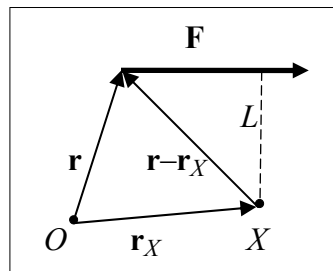
Wählt man Bezugspunkt des KOOS und Drehpunkt identisch, so gilt kürzer

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Momente bezüglich *eines* Bezugspunktes sind also Vektoren und können demgemäß addiert oder komponentenmäßig zerlegt werden.

Geometrische Deutung: das Moment einer Kraft hat den Betrag

$$|\mathbf{M}_X| = |\mathbf{F}|L$$




worin L der senkrechte Abstand von X und der Wirkungslinie Kraft ist, genannt **Hebelarm**.

Das Moment steht senkrecht auf der durch $\mathbf{r} - \mathbf{r}_X$ und \mathbf{F} aufgespannten Ebene. Die drei Vektoren $\mathbf{r} - \mathbf{r}_X$, \mathbf{F} , \mathbf{M}_X bilden ein Rechtssystem.

In der graphischen Darstellung wird zwischen Kraft- und Momentenvektoren manchmal unterschieden, indem man für Momente Doppelpfeile malt.



Steht der Momentenvektor senkrecht auf der Zeichenebene, so verwendet man einen gekrümmten Pfeil, um den Richtungssinn anzugeben

nach oben: 

nach unten: 

Folgerungen

- 1) Ist der Kraftvektor ein Nullvektor, so auch das Moment dieser Kraft bezüglich aller Bezugspunkte.
- 2) Das Moment einer Kraft bezüglich ihres Angriffspunktes als Bezugspunkt ist ebenfalls Null.
- 3) Das Moment einer Kraft ist für alle Bezugspunkte Null, die auf der Wirkungslinie des Kraftvektors liegen.
- 4) Umgekehrt: das Moment bezüglich eines Punktes, der nicht auf der Wirkungslinie der Kraft liegt, ist genau dann verschieden von Null, falls der Kraftvektor verschieden von Null ist.
- 5) Verschiebt man den Angriffspunkt einer Kraft entlang ihrer Wirkungslinie, so ändert sich ihr Moment bez. aller Bezugspunkte nicht.
- 6) Verschiebt man den Bezugspunkt des Momentes einer Kraft parallel zu ihrer Wirkungslinie, so ändert sich das Moment nicht.

VARIGNONS³ Momentenprinzip

Ist \mathbf{M}_X das Moment einer Kraft (\mathbf{F}, \mathbf{r}) bezüglich X und \mathbf{M}_Y dasjenige derselben Kraft bezüglich Y , so gilt

$$\mathbf{M}_Y = \mathbf{M}_X + \overrightarrow{YX} \times \mathbf{F}.$$

Dabei heißt $\overrightarrow{YX} \times \mathbf{F}$ **Versetzungsmoment**.

Beweis: Ist P der Angriffspunkt der Kraft \mathbf{F} , so gilt für deren Moment bezüglich Y

$$\mathbf{M}_Y = \overrightarrow{YP} \times \mathbf{F} = (\overrightarrow{YX} + \overrightarrow{XP}) \times \mathbf{F} = \overrightarrow{YX} \times \mathbf{F} + \overrightarrow{XP} \times \mathbf{F} = \overrightarrow{YX} \times \mathbf{F} + \mathbf{M}_X.$$

³ Pierre Varignon (1654 - 1722)

Will man zwei Momente zu einem (vektoriell) zusammenfassen, so muss man sie ggf. erst durch Hinzufügen des Versetzungsmoments auf einen gemeinsamen Bezugspunkt transformieren.

Kräftereduktion

Da die Kräfte, die an einem Körper angreifen, oft sehr zahlreich sind, ist man daran interessiert, diese durch äquivalente Kraftsysteme mit möglichst wenig Kräften zu reduzieren. Dazu dient die folgende Äquivalenz-Relation.

Definition: Zwei Kraftsysteme

$$\{(\mathbf{F}_1, \mathbf{r}_1), (\mathbf{F}_2, \mathbf{r}_2), \dots, (\mathbf{F}_K, \mathbf{r}_K)\} \quad \text{und} \quad \{(\underline{\mathbf{F}}_1, \underline{\mathbf{r}}_1), (\underline{\mathbf{F}}_2, \underline{\mathbf{r}}_2), \dots, (\underline{\mathbf{F}}_M, \underline{\mathbf{r}}_M)\}$$

heißen (statisch) **äquivalent**, falls die folgenden beiden Äquivalenz-Bedingungen erfüllt sind:

(KÄ) die Summen der Kraftvektoren sind gleich

$$\mathbf{F}_R := \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_K = \underline{\mathbf{F}}_1 + \underline{\mathbf{F}}_2 + \dots + \underline{\mathbf{F}}_M$$

(MÄ) die Summen der Momente der Kräfte bezüglich eines beliebigen Punktes X sind gleich

$$\mathbf{M}_{RX} := \sum_{i=1}^K [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_X) \times \mathbf{F}_i] = \sum_{i=1}^M [(\underline{\mathbf{r}}_i - \mathbf{r}_X) \times \underline{\mathbf{F}}_i] =: \underline{\mathbf{M}}_{RX}.$$

Man zeigt, dass die M-Äquivalenz dann auch bezüglich aller anderen Bezugspunkte gilt.

Der in (MÄ) stehende Ausdruck \mathbf{M}_{RX} heißt **resultierendes Moment** des Kraftsystems bezüglich X . Dagegen definiert der Ausdruck in (KÄ) noch nicht eine resultierende Kraft, da nichts über ihren Angriffspunkt ausgesagt wurde.

Man benutzt die Äquivalenz von Kraftsystemen, um gegebene Kraftsysteme zu reduzieren auf möglichst wenige Kräfte, im Idealfall auf nur eine einzige (was aber, wie wir sehen werden, nicht immer gelingt).

Definition: Die **resultierende Kraft** eines Kraftsystems

$$\{(\mathbf{F}_1, \mathbf{r}_1), (\mathbf{F}_2, \mathbf{r}_2), \dots, (\mathbf{F}_K, \mathbf{r}_K)\}$$

ist diejenige Kraft

$$(\mathbf{F}_R, \mathbf{r}_R),$$

die zu dem Kraftsystem äquivalent ist, d. h.

$$(KÄ) \quad \mathbf{F}_R = \sum_{i=1}^K \mathbf{F}_i$$

$$(MÄ) \quad (\mathbf{r}_R - \mathbf{r}_X) \times \mathbf{F}_R = \mathbf{M}_{RX} = \sum_{i=1}^K [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_X) \times \mathbf{F}_i] \quad \text{bez. } X \text{ beliebig.}$$

Ebene Kraftsysteme sind solche, bei denen alle Kräfte und Kraftangriffspunkte in einer Ebene liegen. Wählen wir eine ONB so, dass \mathbf{e}_x und \mathbf{e}_y in dieser Ebene liegen und \mathbf{e}_z senkrecht darauf steht, so sind

$$\mathbf{F}_i = F_{ix} \mathbf{e}_x + F_{iy} \mathbf{e}_y \quad \mathbf{r}_i = x_i \mathbf{e}_x + y_i \mathbf{e}_y$$

und resultierend

$$\mathbf{F}_R = F_{Rx} \mathbf{e}_x + F_{Ry} \mathbf{e}_y = \left(\sum_{i=1}^K F_{ix} \right) \mathbf{e}_x + \left(\sum_{i=1}^K F_{iy} \right) \mathbf{e}_y$$

sowie

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{RO} &= \sum_{i=1}^K \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^K (x_i \mathbf{e}_x + y_i \mathbf{e}_y) \times (F_{ix} \mathbf{e}_x + F_{iy} \mathbf{e}_y) \\ &= \sum_{i=1}^K (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Die z -Komponenten aller Kräfte sind Null, die x - und y -Komponenten aller Momente sind Null, d. h. der resultierende Kraftvektor liegt in der Ebene, das resultierende Moment steht senkrecht auf ihr.

Beispiel: Sind die Angriffspunkte aller Kräfte eines Kraftsystems

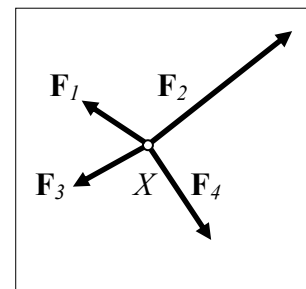
$$\{(\mathbf{F}_1, \mathbf{r}_X), (\mathbf{F}_2, \mathbf{r}_X), \dots, (\mathbf{F}_K, \mathbf{r}_X)\}$$

identisch, so handelt es sich um ein **Zentralkraftsystem**. Es gilt

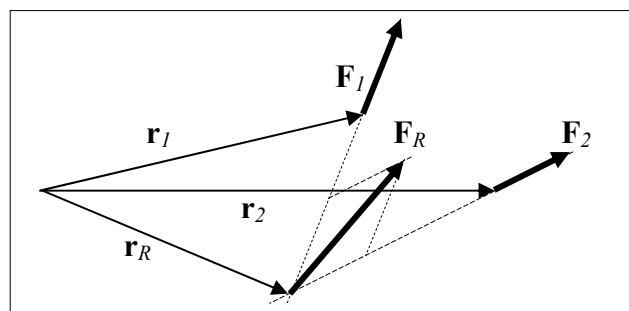
$$\mathbf{F}_R = \sum_{i=1}^K \mathbf{F}_i,$$

die wir in demselben Punkt angreifen lassen: $(\mathbf{F}_R, \mathbf{r}_X)$.

Damit ist die M-Äquivalenz automatisch erfüllt.



Im ebenen Fall kann man manchmal (wenn sie nicht parallel sind) durch Verschieben der Kräfte entlang ihrer Wirkungslinie ein Zentralkraftsystem erzeugen.



Ist $\mathbf{M}_{RX} = \mathbf{0}$, so können wir $\mathbf{r}_R = \mathbf{r}_X$ wählen. Ist dagegen $\mathbf{M}_{RX} \neq \mathbf{0}$, so benötigen wir auch eine von Null verschiedene Kraft \mathbf{F}_R . Um in diesem Fall ein geeignetes \mathbf{r}_R zu bestimmen, multiplizieren wir Gleichung (MÄ)

$$(\mathbf{r}_R - \mathbf{r}_X) \times \mathbf{F}_R = \mathbf{M}_{RX}$$

skalar mit \mathbf{F}_R

$$(\mathbf{r}_R - \mathbf{r}_X) \times \mathbf{F}_R \cdot \mathbf{F}_R = \mathbf{M}_{RX} \cdot \mathbf{F}_R,$$

was nach den Regeln des Spatprodukts Null ist, weshalb \mathbf{M}_{RX} und \mathbf{F}_R bei ebenen Problemen aufeinander senkrecht stehen müssen. Dann muss $(\mathbf{r}_R - \mathbf{r}_X)$ auch auf \mathbf{M}_{RX} senkrecht stehen und sich darstellen lassen als

$$\mathbf{r}_R - \mathbf{r}_X = \lambda \mathbf{F}_R \times \mathbf{M}_{RX} + \mu \mathbf{F}_R$$

mit zwei Skalaren λ und μ . Setzt man dies in Gleichung (MÄ) ein, so findet man als Lösung

$$\lambda = l / \mathbf{F}_R \cdot \mathbf{F}_R \quad \text{und} \quad \mu \text{ beliebig.}$$

Beispiel: Ein **Kräftepaar** ist ein Kraftsystem von der Form

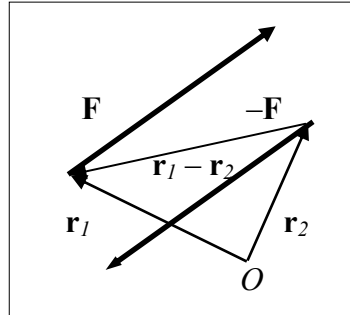
$$\{(\mathbf{F}, \mathbf{r}_1), (-\mathbf{F}, \mathbf{r}_2)\}.$$

Dann gilt

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{0}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{RO} &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_2 \times (-\mathbf{F}) \\ &= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}. \end{aligned}$$



In diesem speziellen Fall ist das resultierende Moment unabhängig vom Bezugspunkt, weswegen man von einem **freien Moment** spricht.

Es existiert also nicht zu jedem Kraftsystem eine resultierende Kraft, die auch die Momenten-äquivalenz befriedigt.

Ersetzt man in einem Kraftsystem vorhandene Kräftepaare durch deren freie Momente, so erhält man ein **äquivalentes Lastsystem**.

Beispiel: Das folgende Kraftsystem enthält ein Kräftepaar:

$$\{(\mathbf{F}, \mathbf{r}_1), (-\mathbf{F}, \mathbf{r}_2), (\mathbf{F}_3, \mathbf{r}_3)\} \text{ ist äquivalent zu } \{(\mathbf{F}_3, \mathbf{r}_3), \mathbf{M} \text{ (wie oben)}\}.$$

Während der resultierende Kraftvektor als Vektorsumme leicht berechnet werden kann, ist die Bestimmung ihres Angriffspunktes aus der Bedingung der Momentenäquivalenz ($M\dot{A}$) also etwas mühsamer, wenn nicht gar unmöglich. Die Reduktion eines beliebigen Kraftsystems auf eine resultierende Kraft ist also nicht immer möglich. Die Reduktion auf eine resultierende Kraft und ein freies Moment ist hingegen immer möglich.

Definition: Sei $\{(\mathbf{F}_1, \mathbf{r}_1), (\mathbf{F}_2, \mathbf{r}_2), \dots, (\mathbf{F}_K, \mathbf{r}_K)\}$ ein Kraftsystem und X ein Raumpunkt. Dann heißt das Paar aus einer Kraft und einem freien Moment $\{(\mathbf{F}_R, \mathbf{r}_R), \mathbf{M}\}$ (**äquivalentes resultierendes Lastsystem**), falls gelten

$$\mathbf{F}_R = \sum_{i=1}^K \mathbf{F}_i \quad \text{resultierender Kraftvektor}$$

$$\mathbf{M} + \mathbf{r}_R \times \mathbf{F}_R = \sum_{i=1}^K \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \quad \mathbf{M} : \text{ freies Moment}$$

Man beachte, dass die beiden Gleichungen nicht ausreichen, um die drei Vektoren \mathbf{F}_R , \mathbf{r}_R und \mathbf{M} eindeutig zu bestimmen. Bestimmt man

- 1.) durch die erste Gleichung den Kraftvektor \mathbf{F}_R , so kann man
- 2.) deren Angriffspunkt \mathbf{r}_R frei wählen. Die Momentenäquivalenz wird dann
- 3.) durch die Bestimmung von \mathbf{M} mit der zweiten Gleichung für jede Wahl von \mathbf{r}_R sichergestellt

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^K \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i - \mathbf{r}_R \times \mathbf{F}_R.$$

Gleichgewichtssysteme

Definition: Ein Kraftsystem $\{(\mathbf{F}_1, \mathbf{r}_1), \dots, (\mathbf{F}_K, \mathbf{r}_K)\}$ heißt **Gleichgewichtssystem**, falls die Gleichgewichtsbedingungen gelten

$$(KG) \quad \mathbf{F}_R = \sum_{i=1}^K \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad \text{Kräftegleichgewicht}$$

$$(MG) \quad \mathbf{M}_{RX} = \sum_{i=1}^K (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_X) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad \text{Momentengleichgewicht bez. } X \text{ beliebig.}$$

Da das Versetzungsmoment wegen des Kräftegleichgewichts auch Null ist, gilt die zweite Bedingung für jeden Bezugspunkt, falls sie für einen gilt.

Satz: Ist $\{(\mathbf{F}_R, \mathbf{r}_R), \mathbf{M}\}$ resultierendes Lastsystem eines Kraftsystem, so ist dieses genau dann ein Gleichgewichtssystem, falls gelten

$$(KG) \quad \mathbf{F}_R = \mathbf{0} \quad \text{Kräftegleichgewicht}$$

$$(MG) \quad \mathbf{M} = \mathbf{0} \quad \text{Momentengleichgewicht}$$

Man kann die Gleichgewichtsbedingungen auch äquivalent durch zwei Momentengleichgewichtsbedingungen formulieren

$$\sum_{i=1}^K (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_X) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad \text{Momentengleichgewicht bez. } X \text{ beliebig.}$$

$$\sum_{i=1}^K (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_Y) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad \text{Momentengleichgewicht bez. } Y \text{ beliebig}$$

falls die Bezugspunkte so gewählt sind, dass $\mathbf{r}_X - \mathbf{r}_Y$ nicht parallel zu \mathbf{F}_R liegt.

Im allgemeinen räumlichen Fall sind die Gleichgewichtsbedingungen $2 \times 3 = 6$ skalare Gleichungen

$$(1) \quad F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{Kx} = 0$$

$$(2) \quad F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{Ky} = 0$$

$$(3) \quad F_{Rz} = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{Kz} = 0$$

$$(4) \quad M_{RXx} = 0$$

$$(5) \quad M_{RXy} = 0$$

$$(6) \quad M_{RXz} = 0$$

Für ebene Kraftsysteme verbleiben nur 3 nicht-triviale Gleichgewichtsbedingungen:

$$(1) \quad F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{Kx} = 0$$

$$(2) \quad F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{Ky} = 0$$

$$(3) \quad M_{RXz} = 0$$

Auch im ebenen Fall ist es manchmal praktischer, nur eine der Gleichungen (1) und (2) zu benutzen, aber dafür zwei Momentengleichgewichte wie (3) bezüglich unterschiedlicher Bezugspunkte auszuwerten.

Kraftsysteme, die an starren Körpern angreifen, bewirken im Allgemeinen, dass sich der Bewegungszustand des Körpers ändert. Dies soll im Abschnitt Kinetik später genauer untersucht werden. Wir wollen aber vorerst nur Körper betrachten, die sich in Ruhelagen befinden (Statik). Sie bleiben in Ruhe, wenn das angreifende Kraftsystem keine von Null verschiedene resultierende Kraft und resultierendes Moment besitzen. In diesem Abschnitt ist dies eine axiomatische Annahme. Später werden wir sehen, dass es sich um Spezialfälle der Impuls- und Drallbilanz handelt, die ebenfalls axiomatisch eingeführt werden.

Axiom: *Bei einem Körper, der sich in Ruhe befindet, ist das Kraft-/ Lastsystem ein Gleichgewichtssystem.*

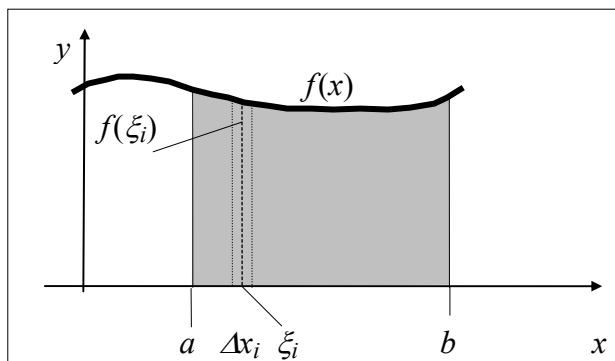
Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht: Auch bewegte Systeme können sich im Gleichgewicht befinden.

Mathematische Propädeutik II: Gebietsintegrale

Wir wissen aus der Mathematik, dass das **bestimmte Integral** einer reellwertigen Funktion $f(x)$ in einem Intervall $[a, b]$ im RIEMANNschen Sinne als Grenzwert einer Näherungssumme über n Teilintervalle Δx_i mit Zwischenstelle ξ_i definiert wird und den Flächeninhalt unter der Kurve angibt

$$F \Big|_a^b := \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx .$$

Das Ergebnis ist eine reelle Zahl, die nicht mehr von x abhängt.



Sind die Funktion und die Grenzen von einer zweiten Variablen y abhängig

$$F \Big|_{a(y)}^{b(y)} = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx ,$$

so lautet die Ableitung des Integrals nach dieser zweiten Variablen

$$\frac{d}{dy} \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx + \frac{db(y)}{dy} f(b(y), y) - \frac{da(y)}{dy} f(a(y), y)$$

Speziell erhalten wir für die Ableitung eines Integrals nach seiner oberen Grenze den Wert des Integranden an der oberen Grenze

$$\frac{d}{dy} \int_{x_0}^y f(x) dx = f(y) .$$

Das **unbestimmte Integral** ist dagegen so definiert, dass sich die *Stammfunktion*

$$F(x) := \int f(x) dx$$

als Umkehrung der Differentiation

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x, \Delta x)}{\Delta x}$$

ergibt. Es gilt der Zusammenhang

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

für alle a, b aus dem Definitionsbereich von f .

Dieser Integral-Begriff soll nun ins Ein-, Zwei- und Dreidimensionale verallgemeinert werden.

Linienintegrale

Sei \mathcal{L} eine Linie im Raum, die mit einer Koordinate x parametrisiert wurde, die zwischen x_u und x_o läuft. Sei $f(x)$ eine reellwertige Funktion, die auf \mathcal{L} definiert ist. Um das Linienintegral zu definieren, benötigen wir die **Bogenlänge** s . Sei

$$ds = \frac{ds}{dx} dx = l(x) dx$$

das Linien- oder Bogenelement ausgedrückt in x durch das Differenzial.

Beispiel: Sei

$$x = s^2 \quad \text{für } s > 0 \quad \Rightarrow \quad dx = 2s ds \quad \Leftrightarrow \quad ds = \frac{1}{2s} dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

und somit $l(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Seien Δs_i Abschnitte mit Zwischenstellen ξ_i . Dann heißt

$$F(\mathcal{L}) = \int_{\mathcal{L}} f ds := \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta s_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta s_i = \int_{s_u}^{s_o} f(s) ds = \int_{x_u}^{x_o} f(x) l(x) dx$$

Linienintegral von f über \mathcal{L} . Dies ist unabhängig von der Parametrisierung.

Speziell ist für $f \equiv 1$

$$S(\mathcal{L}) = \int_{\mathcal{L}} ds = \int_{x_u}^{x_o} l(x) dx$$

die Bogenlänge von \mathcal{L} .

Umgekehrt erhält man

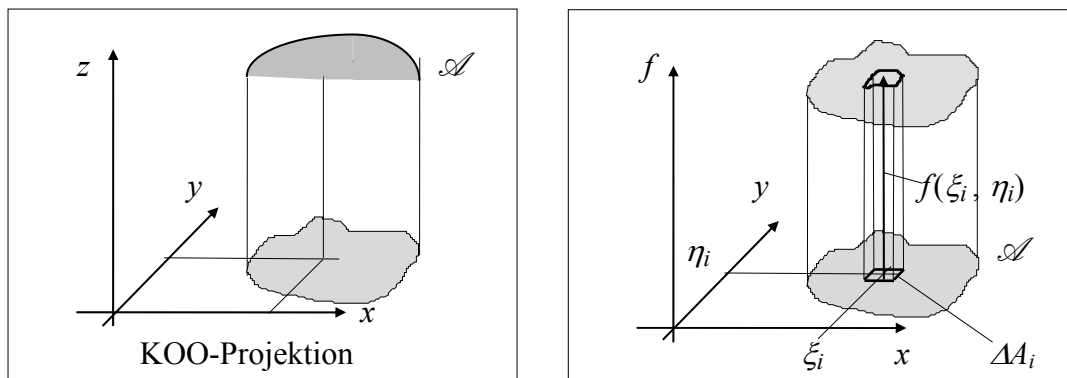
$$f(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta F(s, \Delta s)}{\Delta s}$$

als Grenzwert an einer Stelle x .

Flächenintegrale

Wir betrachten ein Flächenstück \mathcal{A} im Raum, wie beispielsweise die Oberfläche eines Körpers oder einen Teil derselben.

Da \mathcal{A} ein zweidimensionales Gebiet ist, können wir in \mathcal{A} ein Koordinatensystem $\{x, y\}$ einführen, so dass jeder Punkt in \mathcal{A} eindeutig durch die Angabe seiner beiden Koordinaten beschrieben wird. Eine Möglichkeit für die Parametrisierung ist die Projektion in die x - y -Ebene (linke Zeichnung). Wenn das KOOS geeignet gewählt wird, sollte dies bereichsweise immer möglich sein.



Am einfachsten ist es, wenn die Oberfläche (bereichsweise) eben ist. Wenn wir das annehmen, kann man das KOOS so legen, dass \mathcal{A} in der x - y -Ebene liegt (rechte Zeichnung). Ist dann $f(x, y)$ eine auf \mathcal{A} definierte Funktion, die jedem Punkt $(x, y) \in \mathcal{A}$ im KOOS-Raum eine Zahl zuordnet, so können wir diese als Höhe über dem KOOS-Bereich auftragen. Um den RIEMANNschen Integralbegriff auf derartige Funktionen zu verallgemeinern, teilen wir \mathcal{A} in n Teilflächen mit Flächeninhalt ΔA_i auf und wählen in jeder von ihnen einen Zwischenpunkt (ξ_i, η_i) . Das Produkt $f(\xi_i, \eta_i) \Delta A_i$ lässt sich geometrisch deuten als Volumeninhalt des Rechteck-Prismas mit der Höhe $f(\xi_i, \eta_i)$ und der Querschnittsfläche ΔA_i . Wir summieren nun über alle Teilflächen ΔA_i und erhalten die Näherungssumme

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta A_i.$$

Das bestimmte Integral wird wieder als deren Grenzwert eingeführt

$$F(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} f(x, y) dA := \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta A_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta A_i.$$

Für ebene Flächenstücke \mathcal{A} hat $F(\mathcal{A})$ demnach die geometrische Deutung des Volumens zwischen \mathcal{A} und einer Fläche im Abstand $f(x, y)$ über \mathcal{A} .

Speziell ist für $f \equiv 1$

$$A(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} dA$$

der Flächeninhalt von \mathcal{A} .

Umgekehrt erhält man $f(x, y)$ als den Grenzwert

$$f(x, y) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{F(\Delta A)}{\Delta A},$$

wenn man ΔA auf seinen Konvergenzpunkt (x, y) zusammenzieht.

Zur konkreten Berechnung von Oberflächenintegralen führt man sie auf die zweimalige Integration im Eindimensionalen zurück. Dazu stellt man das **Flächenelement** dA in den Flächenkoordinaten x und y dar, was allgemein als

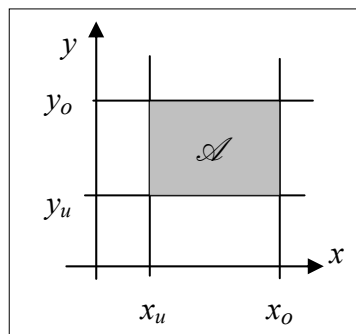
$$dA = a(x, y) dx dy$$

möglich ist.

Dieselbe Methode zur Flächenintegration funktioniert auch für gekrümmte Oberflächen (was aber hier nicht abgeleitet werden soll).

Beispiel: kartesisches KOOS. Sei $\{x, y, z\}$ ein kartesisches Koordinatensystem und \mathcal{A} ein rechteckiges ebenes Flächenstück in der x - y -Ebene. Dann haben die Punkte von \mathcal{A} die Koordinaten $\{x, y, 0\}$ mit $x_u \leq x \leq x_o$ und $y_u \leq y \leq y_o$. Das Flächenelement ist

$$dA = dx dy \quad \text{also } a(x, y) \equiv 1.$$



Beispiel Zylinderkoordinaten: Sei \mathcal{A} die Mantelfläche eines Kreis-Zylinders der Höhe H und Radius R . Durch Benutzung von Zylinderkoordinaten sind die Punkte von \mathcal{A} darstellbar als $\{R, \varphi, z\}$ mit $0 \leq \varphi < 2\pi$ und $0 \leq z \leq H$. Das Flächenelement ist

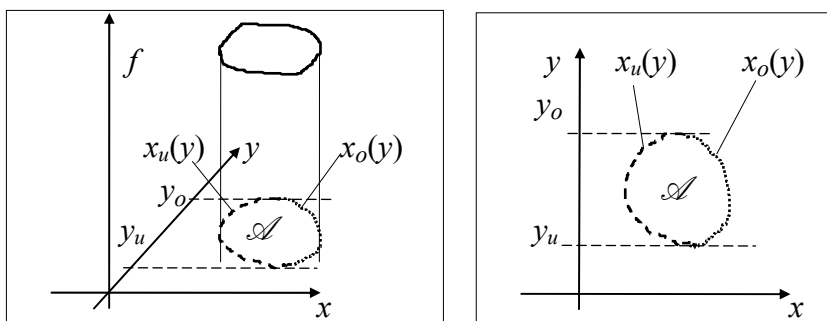
$$dA = R d\varphi dz$$

(also $a(R, \varphi, z) \equiv R$).

Die Deckfläche desselben Zylinders ist darstellbar durch $\{r, \varphi, H\}$ mit $0 < r \leq R$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$ und das Flächenelement als

$$dA = r d\varphi dr$$

(also $a(r, \varphi) \equiv r$).



Man kann nun das Flächenintegral als Doppelintegral über x und y dadurch bestimmen, dass man erst über die eine und dann über die andere Koordinate integriert. Das Ergebnis ist zwar unabhängig von der Integrationsreihenfolge, die Integrationsgrenzen jedoch nicht. Integriert man beispielsweise erst über dx und dann über dy , so hängen die Grenzen der ersten Integration i. A. noch von y ab, also

$$F(\mathcal{A}) = \int_{y_u}^{y_o} \int_{x_u(y)}^{x_o(y)} f(x, y) a(x, y) dx dy .$$

Dabei wird folgendermaßen verfahren:

Im 1. Integrationsschritt integriert man $f(x, y) a(x, y)$ über dx , d. h. man behandelt y wie eine Konstante. Danach setzt man $x_o(y)$ als obere Grenze ein und subtrahiert davon die Funktion an der unteren Grenze $x_u(y)$. In dem Ergebnis dieser ersten Integration taucht nun x als Variable nicht mehr auf. Dagegen hängt es von y nicht nur wegen der Abhängigkeit von f und a ab, sondern zusätzlich wegen der eingesetzten Integrationsgrenzen $x_u(y)$ und $x_o(y)$.

Im 2. Integrationsschritt integrieren wir über y und setzen deren Grenzen y_o bzw. y_u ein. Das Ergebnis hängt nun weder von x noch von y ab, sondern ist der feste Wert $F(\mathcal{A})$.

Eine Umkehrung der Integrationsreihenfolge liefert denselben Wert als

$$F(\mathcal{A}) = \int_{x_u}^{x_o} \int_{y_u(x)}^{y_o(x)} f(x, y) a(x, y) dy dx ,$$

aber mit einer anderen Darstellung der Grenzen. Man wählt die Integrationsreihenfolge zweckmäßigerweise so, dass sich die Grenzen besonders einfach darstellen.

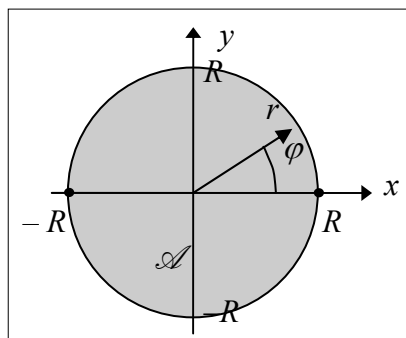
Mit der beschriebenen Methode haben wir prinzipiell Flächenintegrale als Doppelintegrale auf zweimalige Einfachintegrationen zurückgeführt.

Beispiel: kartesische KOOS

Wenn das Integrationsgebiet rechteckig ist, wird die Darstellung der Grenzen besonders einfach:

$$F(\mathcal{A}) = \int_{y_u}^{y_o} \int_{x_u}^{x_o} f(x, y) dx dy = \int_{x_u}^{x_o} \int_{y_u}^{y_o} f(x, y) dy dx .$$

Komplizierter wäre es, wenn wir z. B. über eine Kreisscheibe mit Radius R integrieren müssten. Legen wir das KOOS in deren Mittelpunkt, so gilt für die Randpunkte $x^2 + y^2 = R^2$.



Damit erhält man

$$F(\mathcal{A}) = \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{+\sqrt{R^2-y^2}} f(x, y) dx dy$$

oder andersherum

$$F(\mathcal{A}) = \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y) dy dx.$$

Für dieses Problem ist die Benutzung von Polarkoordinaten $\{r, \varphi\}$ möglicherweise einfacher. Dazu stellen wir den Integranden als Funktion $f(r, \varphi)$ dar und integrieren als

$$F(\mathcal{A}) = \int_0^{2\pi} \int_0^R f(r, \varphi) r dr d\varphi$$

oder umgekehrt

$$F(\mathcal{A}) = \int_0^R \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) r d\varphi dr.$$

In allen Fällen ist das Ergebnis identisch.

Volumenintegrale

Oft müssen wir in der Mechanik über Volumengebiete integrieren, beispielsweise über eine Funktion $f(x, y, z)$, die im Innern eines Körpers definiert ist. Sei \mathcal{V} ein Volumengebiet im Raum, das wir durch ein dreidimensionales KOOS $\{x, y, z\}$ parametrisieren können. Wir teilen \mathcal{V} nun wieder in n Teilgebiete mit Volumina ΔV_i ein mit Zwischenpunkten $\{\xi_i, \eta_i, \zeta_i\}$ und definieren das bestimmte Integral von $f(x, y, z)$ über \mathcal{V} als Grenzwert

$$F(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dV := \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta V_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i.$$

Speziell ist für $f \equiv 1$

$$V(\mathcal{V}) := \int_{\mathcal{V}} dV$$

der Voluminhalt von \mathcal{V} .

Die Umkehrung ist wiederum der Grenzwert

$$f(x, y, z) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{F(\Delta V)}{\Delta V}$$

wenn man ΔV auf seinen Konvergenzpunkt (x, y, z) zusammenzieht.

Die praktische Ausführung der Integration besteht nun wieder in den Schritten

1.) Wahl geeigneter KOO und Darstellung des **Volumenelementes** in ihnen

$$dV = v(x, y, z) dx dy dz$$

2.) Wahl einer Integrationsreihenfolge und Darstellung der Integrationsgrenzen bezüglich dieser Reihenfolge, z. B.

$$F(\mathcal{V}) = \int_{z_u}^{z_o} \int_{y_u(z)}^{y_o(z)} \int_{x_u(y,z)}^{x_o(y,z)} f(x, y, z) v(x, y, z) dx dy dz$$

3.) Dreimalige Integration mit je Einsetzen der Grenzen.

Man führt also ein Volumenintegral als Dreifachintegral im Prinzip auf die dreimalige Integration im Eindimensionalen zurück.

Beispiel: kartesische KOO

Hier ist die Darstellung des Volumenelementes besonders einfach als

$$dV = dx dy dz$$

(also $v(x, y, z) \equiv 1$).

Beispiel: Zylinderkoordinaten

Hier ist das Volumenelement

$$dV = r dr d\varphi dz$$

(also $v(r, \varphi, z) \equiv r$).

Alle diese Integrale haben folgende wichtige Eigenschaften:

- Die Integrationsreihenfolge ist beliebig.
- Das Ergebnis hängt nicht vom KOOS ab.
- Sie sind linear, also beispielsweise gilt für alle reellen α und alle Funktionen f und g in \mathcal{V}

$$\int_{\mathcal{V}} [f(x, y, z) + \alpha g(x, y, z)] dV = \int_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dV + \alpha \int_{\mathcal{V}} g(x, y, z) dV$$

- Sie sind bezüglich disjunkter Gebiete additiv, also beispielsweise

$$\int_{\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2} f(x, y, z) dV = \int_{\mathcal{V}_1} f(x, y, z) dV + \int_{\mathcal{V}_2} f(x, y, z) dV.$$

- Man kann für Löcher, Aussparungen etc. auch negative Gebiete einführen.

Übersicht über Gebietsintegrale

Linienintegral

$$F(\mathcal{L}) = \int_{\mathcal{L}} f(s) ds = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta L_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta L_i = \int_{x_u}^{x_o} f(x) l(x) dx$$

$$f(s) = \frac{dF}{dL} = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{F(\Delta L)}{\Delta L}$$

Für $f \equiv 1$ ist $F(\mathcal{L})$ die Bogenlänge von \mathcal{L} .

Flächenintegral

$$F(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} f(x, y) dA = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta A_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta A_i = \int_{x_u}^{x_o} \int_{y_u(x)}^{y_o(x)} f(x, y) a(x, y) dy dx$$

$$f(x, y) = \frac{dF}{dA} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{F(\Delta A)}{\Delta A}$$

Für $f \equiv 1$ ist $F(\mathcal{A})$ der Flächeninhalt von \mathcal{A} .

Volumenintegral

$$F(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dV = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta V_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i) \Delta V_i$$

$$= \int_{z_u}^{z_o} \int_{y_u(z)}^{y_o(z)} \int_{x_u(y,z)}^{x_o(y,z)} f(x, y, z) v(x, y, z) dx dy dz$$

$$f(x, y, z) = \frac{dF}{dV} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{F(\Delta V)}{\Delta V}$$

Für $f \equiv 1$ ist $F(\mathcal{V})$ der Volumeninhalt von \mathcal{V} .

Integration über Vektorfelder

Während wir uns bisher nur mit Mehrfachintegralen über Skalarfelder $f(x, y, z)$ befasst haben, benötigt man in der Mechanik häufig Integrale über Vektorfelder.

Von einem **Vektorfeld** in einem Gebiet spricht man, wenn jedem Punkt dieses Gebietes ein Vektor zugeordnet wird. Dabei kann das Gebiet eine Linie (1-dimensional), eine Fläche (2-dimensional) oder ein Volumengebiet (3-dimensional) sein. In jedem Fall ist die zu integrierende Funktion $\mathbf{f}(x, y, z)$, die von 1, 2 oder 3 KOO abhängt, vektorwertig. Durch Wahl einer festen Vektorbasis $\{\mathbf{e}_i\}$ kann \mathbf{f} aber in jedem Punkt durch seine Komponentendarstellung bezüglich $\{\mathbf{g}_i\}$

$$\mathbf{f} = f_1 \mathbf{e}_1 + f_2 \mathbf{e}_2 + f_3 \mathbf{e}_3$$

dargestellt werden, worin $f^i(x, y, z)$ Skalarfelder sind und wieder von 1, 2, bzw. 3 KOO abhängen. Da Integrale aber additiv sind, und die Basis nicht von den Integrationsvariablen abhängt, können wir grundsätzlich die Integration von Vektorfeldern auf die Integration der skalaren Komponentenfelder zurückführen:

- als **Linienintegral**

$$\mathbf{F}(\mathcal{L}) = \int_{\mathcal{L}} \mathbf{f} ds = \int_{\mathcal{L}} f_1 ds \mathbf{e}_1 + \int_{\mathcal{L}} f_2 ds \mathbf{e}_2 + \int_{\mathcal{L}} f_3 ds \mathbf{e}_3 \quad \Rightarrow \quad F_i(\mathcal{L}) = \int_{\mathcal{L}} f_i ds$$

- als **Oberflächenintegral**

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{f} dA = \int_{\mathcal{A}} f_1 dA \mathbf{e}_1 + \int_{\mathcal{A}} f_2 dA \mathbf{e}_2 + \int_{\mathcal{A}} f_3 dA \mathbf{e}_3 \quad \Rightarrow \quad F_i(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} f_i dA$$

- als **Volumenintegral**

$$\mathbf{F}(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f} dV = \int_{\mathcal{V}} f_1 dV \mathbf{e}_1 + \int_{\mathcal{V}} f_2 dV \mathbf{e}_2 + \int_{\mathcal{V}} f_3 dV \mathbf{e}_3 \quad \Rightarrow \quad F_i(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} f_i dV$$

für $i = 1, 2, 3$. Die vor den Basisvektoren stehenden Ausdrücke sind bestimmte (Mehrfach-) Integrale über skalare Felder, also reelle Zahlen, die die Komponenten des Ergebnisvektors bezüglich der Vektorbasis sind.

Massendichte

Jeder Körper besitzt eine (positive) **Masse** mit der Einheit kg . Man weiß aus Erfahrung, dass die Masse additiv ist: Teilt man einen Körper in beliebige Teilkörper auf, so ist seine Masse gleich der Summe der Massen der Teilkörper.

Betrachten wir nun eine Folge von Teilvolumina ΔV eines Körpers mit der Masse Δm , deren Volumen sich auf einen Konvergenzpunkt X zusammenzieht, so ist

$$\rho(X) = \frac{dm}{dV} := \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

die (Massen-) **Dichte** mit der Dimension [Masse/Volumen] und der Einheit kg/m^3 . Sie bildet ein positives Skalarfeld im Innern eines jeden Körpers. Die Umkehrung dieses Grenzwertprozesses ist die Integration

$$m(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} \rho dV,$$

die wieder die Gesamtmasse liefert. Man nennt das Differential

$$dm := \rho dV$$

Massenelement.

Ist speziell die Dichte ρ konstant in \mathcal{V} , so gilt einfacher

$$m(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} \rho \, dV = \rho \int_{\mathcal{V}} dV = \rho V.$$

Im Allgemeinen jedoch gibt der Quotient

$$\bar{\rho} = \frac{m}{V}$$

lediglich die **mittlere Dichte** in \mathcal{V} an.

Dichte für einige ausgewählte Materialien bei Raumtemperatur in $\text{g/cm}^3 = 1000 \text{ kg/m}^3$

| | |
|---------------------------------|-------|
| Aluminium | 2,7 |
| Eisen | 7,9 |
| Kupfer | 8,9 |
| Glas | 2,6 |
| Eichenholz | 0,9 |
| Buchenholz | 0,7 |
| Tannenholz | 0,5 |
| Marmor | 2,7 |
| Wassereis bei 0°C | 0,917 |

Kraftsysteme

Man führt die Kräfte als diejenigen physikalischen Größen ein, die die Wirkung der Umgebung auf den herausgeschnittenen Körper ausmachen (Schnittprinzip). Dabei gibt es grundsätzlich zwei Möglichkeiten der Einwirkung: entweder über die Oberfläche des Körpers oder über die Masse im Inneren des Körpers. Mathematisch unterscheidet man zwischen Punktlasten und Linien-, Flächen- und Volumen-verteilten Kräften.

Streckenlasten

In vielen Fällen kann man dreidimensionale Körper durch eindimensionale Strukturen (Seile, Stäbe, Balken, usw.) idealisieren. Kräfte (Gewichts- und Oberflächenkräfte) fasst man zu einer resultierenden **Strecken-** oder **Linienlast** (pro Längeneinheit) mit der Einheit N/m zusammen, die an der Systemlinie angreift.

Ist x die Längskoordinate der Struktur und $s(x)$ deren Bogenlänge, so ergibt sich aus der Streckenlast $\mathbf{f}^S(x)$ der resultierende Kraftvektor

$$\mathbf{F}^S = \int_{\mathcal{L}} \mathbf{f}^S(s) ds = \int_{x=0}^{x(L)} \mathbf{f}^S(x) l(x) dx \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{f}^S(x) = \frac{d\mathbf{F}^S}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}^S(\Delta s)}{\Delta s}$$

und das resultieren Moment

$$\mathbf{M}_O = \int_{\mathcal{L}} \mathbf{r}_O(s) \times \mathbf{f}^S(s) ds = \int_{x=0}^L \mathbf{r}_O(x) \times \mathbf{f}^S(x) l(x) dx$$

bezogen auf denselben Punkt wie der Ortsvektor. Beide Gleichungen lassen sich wieder auf je drei skalare Gleichungen zurückführen, indem man Komponentendarstellungen bezüglich einer Vektorbasis wählt. Dabei führt man 1.) das Kreuzprodukt aus, zerlegt 2.) die Integrale in drei Richtungen und 3.) integriert diese einzeln.

Wählt man eine ONB $\{\mathbf{e}_i\}$, so lassen sich die Komponenten der resultierenden Kraft

$$F_i^S = \int_{\mathcal{L}} f_i^S(x) l(x) dx,$$

und des resultierenden Momentes

$$M_{O_i} = \int_{\mathcal{L}} [r_{i+1}(x) f_{i+2}^S(x) - r_{i+2}(x) f_{i+1}^S(x)] l(x) dx.$$

bestimmen. Bei geraden Strukturen unter ebenen Belastungen bleibt hierin bei geeigneter KOOS-Wahl als einzige von Null verschiedene Komponente

$$M_{O_z} = \int_{\mathcal{L}} x f_y^S(x) l(x) dx.$$

Wir werden später sehen, dass dies dem Flächenmittelpunkt entspricht, in dem die Resultierende aus der Streckenlast angreift.

Oberflächenkräfte

oder **Kontaktkräfte** sind diejenigen Kräfte, die durch Kontakt auf die Oberfläche einwirken. Beispiele sind:

- Reibungskräfte
- Luft- oder Flüssigkeits-Druckkräfte
- Stoßkräfte zwischen Körpern
- Lagerkräfte zwischen Körper und Unterlage.

Ist $\Delta \mathbf{F}^A$ die Kraft, die auf einem Oberflächenteil mit Flächeninhalt ΔA und Konvergenzpunkt X wirkt, so ist

$$\mathbf{f}^A(X) = \frac{d\mathbf{F}^A}{dA} := \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}^A}{\Delta A}$$

die **Flächenkraftdichte** mit der Dimension [Kraft/Fläche] und der Einheit

Pascal: $Pa = N/m^2$. Umgekehrt gilt

$$\mathbf{F}^A(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{f}^A(X) dA$$

für den in \mathcal{A} resultierend angreifenden Kraftvektor.

Das Moment der Oberflächenkraft ist

$$\mathbf{M}_O = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{r}_O(X) \times \mathbf{f}^A(X) dA,$$

was für jede Oberflächenkraftdichte neu zu bestimmen ist.

Wählt man eine ONB $\{\mathbf{e}_i\}$, so lassen sich die Komponenten des resultierenden Kraftvektors gemäß

$$F_i^A = \int_{\mathcal{A}} f_i^A(X) dA$$

und des Momentes

$$M_{O_i} = \int_{\mathcal{A}} [r_{i+1}(X) f_{i+2}^A(X) - r_{i+2}(X) f_{i+1}^A(X)] dA$$

bestimmen.

Beispiel: **NEWTONsches Luftwiderstandsgesetz**

Für in der Luft bewegte Körper wie Fahrzeuge liefert folgender Ansatz eine Abschätzung des Luftwiderstandes als resultierender Kraft:

$$\mathbf{F}^A = -\frac{1}{2} c_w \rho A_s |\mathbf{v}| \mathbf{v}$$

mit c_w Widerstandsbeiwert (formabhängig)

ρ Luftdichte

A_s Hauptspantfläche

\mathbf{v} relativer Geschwindigkeitsvektor.

Man beachte, dass der Luftwiderstand quadratisch, also nichtlinear mit der Geschwindigkeit wächst.

Volumenkräfte

sind diejenigen Kräfte, die im Inneren eines Körpers wirken. Beispiele sind Gewichtskräfte oder magnetische Anziehungskräfte.

Ist $\Delta \mathbf{F}^V$ die Kraft, die auf einem Volumenteil mit Volumen ΔV und Konvergenzpunkt X wirkt, so ist

$$\mathbf{f}^V(X) = \frac{d\mathbf{F}^V}{dV} := \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}^V}{\Delta V}$$

die **Volumenkraftdichte** mit der Dimension [Kraft/Volumen] und der Einheit N/m^3 . Umgekehrt gilt

$$\mathbf{F}^V(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f}^V(X) dV$$

für den in \mathcal{V} resultierend angreifenden Kraftvektor.

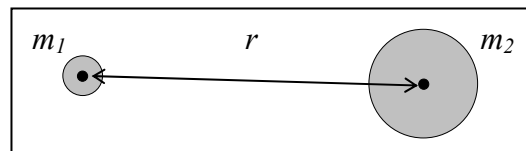
Das Moment der Volumenkraft ist

$$\mathbf{M}_O = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}_O(X) \times \mathbf{f}^V(X) dV.$$

Gravitation

Neben der magnetischen Anziehung bestimmter Materialien ist die Massenanziehung oder Gravitation das wichtigste Beispiel einer Massenkraft. Nach dem **NEWTONSchen Gravitationsgesetz** (1686) ziehen sich zwei beliebige Massen m_1 und m_2 im Abstand (ihrer Mittelpunkte) r mit einer Zentralkraft der Größe

$$F_G = \Gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$



an, worin

$$\Gamma \approx 6,67390 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$$

die **universelle Gravitationskonstante** ist, die bereits 1798 von CAVENDISH⁴ experimentell bestimmt wurde. Ein ähnliches Kraftgesetz erhält man für die elektrische und die magnetische Anziehung. Es gilt allerdings nur, wenn der Abstand groß im Vergleich zu den Abmessungen der beiden Körper ist.

Schneiden wir einen Körper aus dem Universum heraus, so üben prinzipiell alle Massen des Universums nach diesem Gesetz eine Anziehungskraft auf ihn aus. Wegen des reziproken Abstandsquadrates klingen die Anziehungskräfte mit wachsender Entfernung aber schnell ab, so dass entfernte Massen praktisch nur berücksichtigt werden müssen, wenn sie sehr groß sind. So werden Gegenstände (Körper) unseres irdischen Daseins hauptsächlich von der Erde angezogen. Es folgt dann für die Gravitationskraft auf ein Massenelement dm des angezogenen Körpers

⁴ Henry Cavendish (1731 - 1810)

$$dF_G = \Gamma \frac{M_E dm}{(R_E + h)^2} \approx \frac{\Gamma M_E}{R_E^2} dm = g dm ,$$

für $h \ll R_E$, die senkrecht auf den Ermittelpunkt hin wirkt. Der resultierende Kraftvektor der Gravitationskraft auf den gesamten Körper ist

$$\mathbf{F}_G(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{e}_{\downarrow} dF_G = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{g} dm = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{g} \rho dV = \int_{\mathcal{V}} g \mathbf{e}_{\downarrow} dm$$

mit

| | |
|--|-------------------------------------|
| dm | Massenelement des Körpers |
| M_E | Erdmasse |
| R_E | mittlerer Erdradius |
| h | Höhe des Körpers über Erdnullniveau |
| $g := \frac{\Gamma M_E}{(R_E + h)^2} \approx \frac{\Gamma M_E}{R_E^2}$ | irdische Gravitationskonstante |
| \mathbf{e}_{\downarrow} | lotrechter Einheitsvektor. |
| $\mathbf{g}(x, y, z) = g \mathbf{e}_{\downarrow}$ | Gravitationsfeld (Kraft pro Masse) |

Sind g und \mathbf{e}_{\downarrow} annähernd konstant im Körpergebiet, so gilt einfacher

$$\mathbf{F}_G = m g \mathbf{e}_{\downarrow}$$

Die Bezeichnung *Erdbeschleunigung* für g resultiert daraus, dass ein Körper allein unter der Erdanziehung („freier Fall“) nach dem NEWTONschen Gesetz die Beschleunigung in der Größe von g erfährt. g ist für den Normort Sevres bei Paris experimentell auf $g = 9,80665 \text{ m s}^{-2} \approx 9,81 \text{ m s}^{-2}$ festgesetzt und weicht damit etwas von dem obigen theoretischen Wert ab.

Als **spezifisches Gewicht** (Wichte) definiert man (analog zur Massendichte)

$$\gamma := g \rho ,$$

so dass

$$\mathbf{F}_G(\mathcal{V}) = \int_{\mathcal{V}} g \mathbf{e}_{\downarrow} \rho dV = \int_{\mathcal{V}} \gamma \mathbf{e}_{\downarrow} dV.$$

Es empfiehlt sich aber, die Gravitationskraft als Kraft/Masse und nicht als Kraft/Volumen einzuführen, da sich das Volumen dauernd ändern kann, während die Masse konstant ist.

Für manche mechanischen Vorgänge auf der Erde spielt auch noch die Anziehungskraft des Mondes eine Rolle, wie z. B. für die Gezeiten der Weltmeere.

Um den Angriffspunkt der resultierenden Gewichtskraft eines Körpers zu bestimmen, berechnen wir das Moment des Gewichtskraftfeldes bezüglich eines beliebig gewählten Bezugspunktes O

$$\mathbf{M}_O = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \mathbf{g} dm = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times g \mathbf{e}_{\downarrow} dm = \mathbf{r}_S \times \mathbf{F}_G .$$

Lässt sich diese Gleichung nach einem \mathbf{r}_S auflösen, so liegt dies auf der Wirkungslinie der **resultierende Gewichtskraft** ($\mathbf{F}_G, \mathbf{r}_S$).

Falls \mathbf{e}_\downarrow im Körpergebiet konstant ist, so gilt

$$\mathbf{M}_O = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} g dm \times \mathbf{e}_\downarrow = \mathbf{r}_S \times F_G \mathbf{e}_\downarrow = F_G \mathbf{r}_S \times \mathbf{e}_\downarrow.$$

Diese Gleichung ist für \mathbf{e}_\downarrow beliebig erfüllt, falls

$$\mathbf{r}_S := \frac{1}{F_G} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} g dm$$

gilt, wodurch der **Schwerpunkt** des Körpers gekennzeichnet ist. Dieser ist jedoch im Allg. nicht körperfest.

Kann auch g im Körpergebiet als konstant angesehen werden, so kann man es herauskürzen und erhält

$$\mathbf{r}_M := \frac{1}{m} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} dm$$

was den **Massenmittelpunkt** des Körpers definiert. Dieser ist für starre Körper körperfest und nur von der Massegeometrie des Körpers abhängig. Er ist der Angriffspunkt der resultierenden Kraft eines jeden konstanten Massenkraftfeldes.

Hiervon unterschieden werden muss der **Volumenmittelpunkt**

$$\mathbf{r}_V := \frac{1}{V} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} dV$$

der beispielsweise mit dem Massenmittelpunkt zusammenfällt, wenn die Dichte konstant ist.

Komponentenweise ergibt dies für kartesische KOO in drei Richtungen die entkoppelten Gleichungen

$$r_{Si} := \frac{1}{F_G} \int_{\mathcal{V}} x_i g \rho dV, \quad i = 1, 2, 3$$

$$r_{Mi} := \frac{1}{m} \int_{\mathcal{V}} x_i \rho dV, \quad i = 1, 2, 3$$

$$r_{Vi} := \frac{1}{V} \int_{\mathcal{V}} x_i dV, \quad i = 1, 2, 3.$$

Satz: Kann das Gravitationsfeld \mathbf{g} im Körpergebiet als konstant angenommen werden, so fällt der Schwerpunkt mit dem Massenmittelpunkt zusammen

$$\mathbf{r}_S \equiv \mathbf{r}_M$$

und die Größe der Schwerkraft ist

$$F_G = m g$$

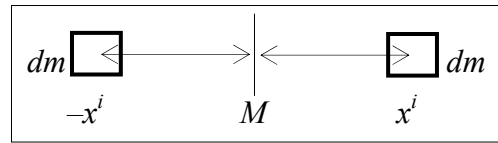
und wirkt in lotrechter Richtung.

Folgende Eigenschaften des Massenmittelpunktes sind sehr hilfreich bei dessen Bestimmung.

Satz: Besitzt ein Körper eine Symmetrie-Achse oder -Ebene bezüglich seiner Form und seiner Massenverteilung, so liegt der Massenmittelpunkt auf dieser.

Denn aus obiger Gleichung folgt

$$\int_{\mathcal{V}} x_i \, dm = 0.$$



Da man jedes Integral über ein Gebiet nach einer Gebietszerlegung als Summe der Integrale über die Teilgebiete auffassen kann, gilt

Satz: Ist ein Körper aus N Teilkörpern mit den Massen m_i und den Massenmittelpunkten \mathbf{r}_{Mi} zusammengesetzt, so gilt für dessen Massenmittelpunkt

$$\mathbf{r}_M = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_{Mi} \quad \text{mit} \quad m = \sum_{i=1}^N m_i.$$

Denn jeder Teilkörpermittelpunkt ist

$$\mathbf{r}_{Mi} = \frac{1}{m_i} \int_{\mathcal{V}_i} \mathbf{r} \, dm$$

und der Gesamtmittelpunkt

$$m \mathbf{r}_M = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \, dm = \sum_{i=1}^N \int_{\mathcal{V}_i} \mathbf{r} \, dm = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_{Mi}$$

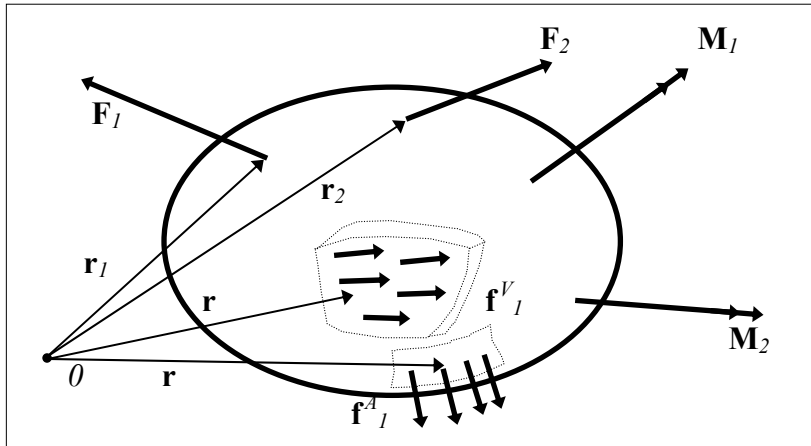
oder für die k -te Komponente

$$r_{Mk} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i r_{Mi_k}.$$

Analog gilt für den Volumenmittelpunkt

$$\mathbf{r}_V = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N V_i \mathbf{r}_{Vi} \quad \text{mit} \quad V = \sum_{i=1}^N V_i.$$

Komplexe Kraftsysteme



Wir wollen einen starren Körper betrachten, der durch folgende Lasten belastet wird:

| | | |
|-------------------|---|------------|
| Einzelkräfte: | $(\mathbf{F}_1, \mathbf{r}_1), (\mathbf{F}_2, \mathbf{r}_2), \dots, (\mathbf{F}_K, \mathbf{r}_K)$ | $K \geq 0$ |
| freie Momente: | $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_L$ | $L \geq 0$ |
| Volumenkraft: | $\mathbf{f}^V(\mathbf{r})$ | |
| Oberflächenkraft: | $\mathbf{f}^A(\mathbf{r})$ | |

Ist einer der Indizes Null, so soll keine entsprechenden Kraft vorhanden sein. Wir nennen

$$\{(\mathbf{F}_1, \mathbf{r}_1), (\mathbf{F}_2, \mathbf{r}_2), \dots, (\mathbf{F}_K, \mathbf{r}_K); \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_L; \mathbf{f}^V(\mathbf{r}); \mathbf{f}^A(\mathbf{r})\}$$

ein **komplexes Kraftsystem**. Auch hier soll versucht werden, das System zu reduzieren.

Eine Einzelkraft $(\mathbf{F}_R, \mathbf{r}_R)$ ist (statisch) **äquivalent** zu dem komplexen Kraftsystem, falls gelten

(KÄ) Kraftäquivalenz

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_K + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f}^V(\mathbf{r}) dV + \int_{\mathcal{A}} \mathbf{f}^A(\mathbf{r}) dA$$

(MÄ) Momentenäquivalenz bez. Bezugspunkt O :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_R \times \mathbf{F}_R = & \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{r}_K \times \mathbf{F}_K + \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \dots + \mathbf{M}_L \\ & + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \mathbf{f}^V(\mathbf{r}) dV + \int_{\mathcal{A}} \mathbf{r} \times \mathbf{f}^A(\mathbf{r}) dA. \end{aligned}$$

Wir haben bereits gesehen, dass eine äquivalente Einzelkraft zu einem Kraftsystem nicht immer existieren muss.

Wir können jedoch immer ein **äquivalentes Lastsystem** $\{(\mathbf{F}_R, \mathbf{r}_R), \mathbf{M}\}$ finden mit \mathbf{r}_R beliebig gewählt, so dass

(KÄ) wie oben

$$\begin{aligned} (MÄ) \quad \mathbf{M} + \mathbf{r}_R \times \mathbf{F}_R = & \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{r}_K \times \mathbf{F}_K + \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \dots + \mathbf{M}_L \\ & + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \mathbf{f}^V(\mathbf{r}) dV + \int_{\mathcal{A}} \mathbf{r} \times \mathbf{f}^A(\mathbf{r}) dA. \end{aligned}$$

Um eine solche Reduktion durchzuführen, kann man schrittweise vorgehen:

1. Schritt: Man ersetzt die Volumenkraft bereichsweise durch ein äquivalentes System von Einzelkräften

$$\{\mathbf{f}^V(\mathbf{r})\} \cong \{(\mathbf{F}^V_1, \mathbf{r}^V_1), (\mathbf{F}^V_2, \mathbf{r}^V_2), \dots, (\mathbf{F}^V_P, \mathbf{r}^V_P)\}, P \geq 0$$

wie auch die Oberflächenkraft

$$\{\mathbf{f}^A(\mathbf{r})\} \cong \{(\mathbf{F}^A_1, \mathbf{r}^A_1), (\mathbf{F}^A_2, \mathbf{r}^A_2), \dots, (\mathbf{F}^A_Q, \mathbf{r}^A_Q)\}, Q \geq 0.$$

2. Schritt: Man bestimmt das zu

$$\{(\mathbf{F}_1, \mathbf{r}_1), (\mathbf{F}_2, \mathbf{r}_2), \dots, (\mathbf{F}_K, \mathbf{r}_K); \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_L; \\ (\mathbf{F}^V_1, \mathbf{r}^V_1), (\mathbf{F}^V_2, \mathbf{r}^V_2), \dots, (\mathbf{F}^V_P, \mathbf{r}^V_P); (\mathbf{F}^A_1, \mathbf{r}^A_1), (\mathbf{F}^A_2, \mathbf{r}^A_2), \dots, (\mathbf{F}^A_Q, \mathbf{r}^A_Q)\}$$

äquivalente Lastsystem $\{(\mathbf{F}_R, \mathbf{r}_R), \mathbf{M}\}$ gemäß

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_K + \mathbf{F}^V_1 + \mathbf{F}^V_2 + \dots + \mathbf{F}^V_P + \mathbf{F}^A_1 + \mathbf{F}^A_2 + \dots + \mathbf{F}^A_Q$$

\mathbf{r}_R kann frei gewählt werden

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{r}_K \times \mathbf{F}_K + \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \dots + \mathbf{M}_L \\ + \mathbf{r}^V_1 \times \mathbf{F}^V_1 + \mathbf{r}^V_2 \times \mathbf{F}^V_2 + \dots + \mathbf{r}^V_P \times \mathbf{F}^V_P \\ + \mathbf{r}^A_1 \times \mathbf{F}^A_1 + \mathbf{r}^A_2 \times \mathbf{F}^A_2 + \dots + \mathbf{r}^A_Q \times \mathbf{F}^A_Q \\ - \mathbf{r}_R \times \mathbf{F}_R.$$

Wirkt beispielsweise als Massenkraft nur die Gravitation, so können wir sie ersetzen durch die im Schwerpunkt angreifende Gewichtskraft

$$\{\mathbf{f}^V(\mathbf{r}), \mathbf{r}_S\} \equiv \{g \mathbf{e}_\downarrow, \mathbf{r}_S\} \cong \{(\mathbf{F}^V_1, \mathbf{r}^V_1)\} \equiv \{(\mathbf{F}_G, \mathbf{r}_S)\}.$$

Setzt sich der Körper aus Teilkörpern zusammen, deren Gewichtskräfte $(\mathbf{F}_{G1}, \mathbf{r}_{S1}), \dots, (\mathbf{F}_{Gn}, \mathbf{r}_{Sn})$ leicht zu ermitteln sind, so kann man natürlich auch diese nehmen

$$\{(\mathbf{F}_{G1}, \mathbf{r}_{S1}), \dots, (\mathbf{F}_{Gn}, \mathbf{r}_{Sn})\}.$$

Analog kann man für die Oberflächenkräfte die Oberfläche in Teiloberflächen zerlegen, für die man die resultierende Kraft leichter bestimmen kann, und diese erst danach zusammenfassen.

Reaktionsprinzip

ISAAC NEWTON formulierte 1686 in seinen *Philosophiae naturalis principia mathematica* in drei Gesetzen oder Axiomen die Basis der klassischen Mechanik. Das dritte Gesetz

$$actio = reactio$$

wird **Reaktions-** oder **Gegenwirkungsprinzip** genannt und besagt, dass die resultierende Kraft eines Körpers \mathcal{A} auf einen anderen \mathcal{B} , $\mathbf{F}(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$, derjenigen des Körpers \mathcal{B} auf \mathcal{A} , $\mathbf{F}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})$, entgegengesetzt und von gleicher Größe ist:

$$\mathbf{F}(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) = -\mathbf{F}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}).$$

Im Rahmen der hier angelegten Systematik ist das Reaktionsprinzip eine Folge anderer Annahmen, die wir an den Anfang gestellt haben. Dies soll nun gezeigt werden.

Nach dem Schnittprinzip und unseren Erkenntnissen über äquivalente Lastsysteme lässt sich die Wirkung des Restuniversums auf einen Körper \mathcal{B} zu einem Zeitpunkt resultierend durch

eine Kraft und ein Moment bezüglich eines Bezugspunktes ausdrücken. Betrachten wir der Einfachheit halber zunächst nur die Kräfte.

Vorausgesetzt wird die Additivität der Wirkungen für drei disjunkte Körper \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C}

$$(1) \quad \mathbf{F}(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}) + \mathbf{F}(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}) = \mathbf{F}(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A} \cup \mathcal{B})$$

und umgekehrt

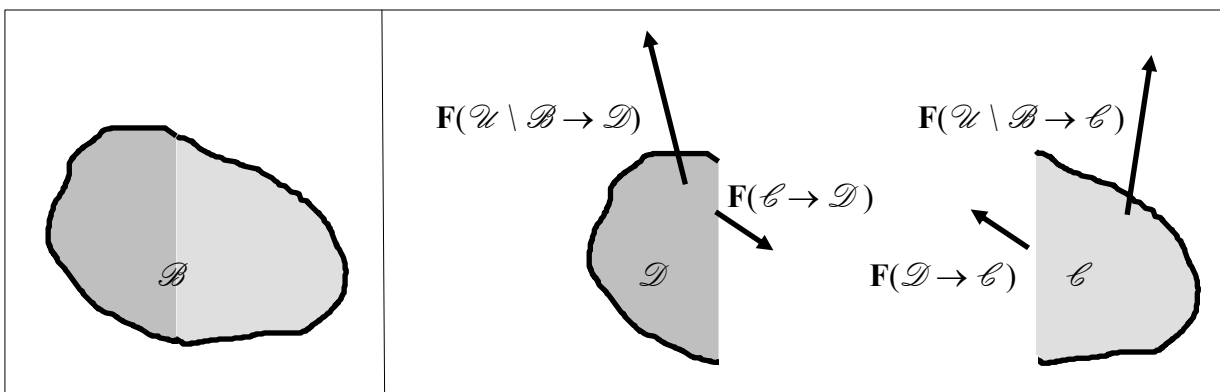
$$(2) \quad \mathbf{F}(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}) + \mathbf{F}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) = \mathbf{F}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}).$$

Speziell übt das Restuniversum \mathcal{U} auf einen freigeschnittenen Körper die Kraft

$$\mathbf{F}(\mathcal{U} \setminus \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}).$$

Ist der Körper im Gleichgewicht, so ist sie Null.

Zerlegen wir nun $\mathcal{B} = \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ in zwei disjunkte Teilkörper \mathcal{C} und \mathcal{D} : $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \emptyset$.



Die vom Universum auf diese beiden Körper ausgeübten Kräfte sind im Gleichgewicht

$$(2) \quad \mathbf{o} = \mathbf{F}(\mathcal{U} \setminus \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}) = \mathbf{F}(\mathcal{U} \setminus \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) + \mathbf{F}(\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C})$$

$$(2) \quad \mathbf{o} = \mathbf{F}(\mathcal{U} \setminus \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}) = \mathbf{F}(\mathcal{U} \setminus \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}) + \mathbf{F}(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}).$$

Addition der Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned} \mathbf{o} &= \mathbf{F}(\mathcal{U} \setminus \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) + \mathbf{F}(\mathcal{U} \setminus \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{D}) + \mathbf{F}(\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}) + \mathbf{F}(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}) \\ (1) \quad &= \mathbf{F}(\mathcal{U} \setminus \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \cup \mathcal{D}) + \mathbf{F}(\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}) + \mathbf{F}(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}) \\ &= \mathbf{F}(\mathcal{U} \setminus \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}) + \mathbf{F}(\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}) + \mathbf{F}(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}) \\ &= \mathbf{o} + \mathbf{F}(\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}) + \mathbf{F}(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}) \end{aligned}$$

und damit das

| | |
|-------------------------------------|--|
| Reaktionsprinzip für Kräfte: | $\mathbf{F}(\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}) = -\mathbf{F}(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D})$ |
|-------------------------------------|--|

Eine völlig analoge Schlussweise ergibt das

| | |
|--------------------------------------|--|
| Reaktionsprinzip für Momente: | $\mathbf{M}_O(\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}) = -\mathbf{M}_O(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D})$ |
|--------------------------------------|--|

Bei obiger Schlussweise wurde Gleichgewicht vorausgesetzt. Sie kann jedoch unter Benutzung der Bewegungsgleichungen anstelle der Gleichgewichtsbedingungen in analoger Weise gefolgert werden, wie im Rahmen der Kinetik gezeigt wird, und gilt damit auch für Körper im Nichtgleichgewicht.

Das gezeigte Reaktionsprinzip gilt für die aus Oberflächen- und Massenkraft resultierende Kraft. Um zu zeigen, dass es auch für jeden Anteil für sich gilt, betrachten wir einen Körper von der Form einer schmalen Scheibe (z.B. eine Münze).

Die resultierende Gleichgewichtskraft

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_M + \mathbf{F}_G = \mathbf{0}$$

auf diesen Körper setzt sich zusammen aus

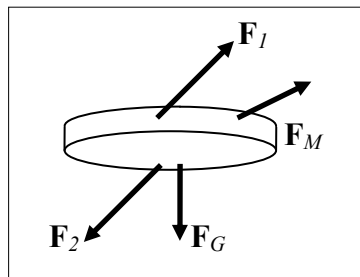
- den Oberflächenkräften

\mathbf{F}_1 auf obere Fläche

\mathbf{F}_2 auf untere Fläche

\mathbf{F}_M auf Mantelfläche

- und der Massenkraft \mathbf{F}_G .



Wählt man die Dicke der Scheibe hinreichend klein, so tendieren \mathbf{F}_M und \mathbf{F}_G nach Null, und aus der Gleichgewichtsbedingung folgt als Grenzwert

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2,$$

das *Reaktionsprinzip für Oberflächenkräfte*. Danach sind die Oberflächenkräfte an komplementären Schnittflächen entgegengesetzt und von gleicher Größe. Dasselbe gilt auch für die resultierenden Momente aus den Oberflächenkräften.

Gilt das Reaktionsprinzip sowohl für die Gesamtkraft als auch für die Oberflächenkraft zwischen Körpern, so folgt aus der Differenz seine Gültigkeit auch für die Massenkraft zwischen Körpern.

Alle diese Überlegungen lassen sich analog für die Momente zwischen zwei Körpern anstellen.

Wir fassen zusammen:

Reaktionsprinzip. Übt ein Körper \mathcal{C} auf einen anderen Körper \mathcal{D} eine Kraft aus, so übt \mathcal{D} ebenfalls eine Kraft auf \mathcal{C} aus

- von identischer Art (Kontaktkraft oder Massenkraft)
- identischer Größe
- identischer Richtung
- identischer Wirkungslinie
- aber entgegengesetztem Richtungssinn.

Analoges gilt für Momente.

Damit heben sich in einem Körper, den man sich aus Teilkörpern zusammengesetzt denkt, alle *inneren Kräfte* und *Momente* gegenseitig auf.

Standardproblem der Statik

Das *Standardproblem der Statik* ist folgendes: Ein in bestimmter Weise gelagerter Körper ist belastet. Gesucht sind die unbekanntes Kräfte derart, dass sie die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen.

Die Lagerung eines Körpers besteht darin, dass für bestimmte Körperpunkte bestimmte Bewegungsanteile (z.B. Verschiebungs- oder Verdrehungskomponenten) konstruktiv unterbunden sind. Wird der Körper belastet, so treten dort, wo Bewegungsanteile unterbunden sind, Kräfte und Momente auf, die als **Lagerkräfte**, **Reaktionskräfte** oder **(Auf-) Lagerreaktionen** bezeichnet werden.

Im Gegensatz dazu werden die übrigen auf den Körper einwirkenden Kräfte als **eingeprägte Kräfte** bezeichnet. Hierzu zählt insbesondere die Gewichtskraft des Körpers selbst wie auch auf ihn lastender anderer Körper.

In der Statik verwendet man für die wichtigsten **Lagerungsbedingungen** Symbole, die in den beiden Tabellen wiedergegeben sind.

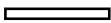
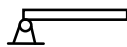
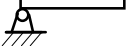
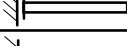
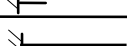
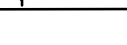
Lagerungen für ebene Tragwerke (Auswahl)

| | Symbol | Schnittbild |
|----------------------------------|--------|-------------|
| Pendelstütze (einwertig) | | |
| Gleitlager (einwertig) | | |
| gelenkiges Lager (zweiwertig) | | |
| Parallelführung (zweiwertig) | | |
| Schiebehülse (zweiwertig) | | |
| Einspannung (dreiwertig) | | |

Lagerungen für räumliche Tragwerke (Auswahl)

| | Symbol | Schnittbild |
|----------------------------------|--------|-------------|
| Gleitlager (einwertig) | | |
| gelenkiges Lager (dreiwertig) | | |
| Loslager (vierwertig) | | |
| Einspannung (sechswertig) | | |

Randbedingungen (ebener Fall)

| | | N | Q | M |
|------------------|---|----------|----------|----------|
| freies Ende |  | 0 | 0 | 0 |
| gelenkiges Lager |  | 0 | $\neq 0$ | 0 |
| |  | $\neq 0$ | $\neq 0$ | 0 |
| Parallelführung |  | $\neq 0$ | 0 | $\neq 0$ |
| Schiebehülse |  | 0 | $\neq 0$ | $\neq 0$ |
| Einspannung |  | $\neq 0$ | $\neq 0$ | $\neq 0$ |

Meistens bildet man die Lagerungen eines Körpers konstruktiv so aus, dass die Richtung der in ihnen übertragbaren Kräfte und Momente festliegt.

Damit lässt sich das **Standardproblem der Statik** folgendermaßen formulieren:

Gegeben sind die eingprägten Kräfte und die Lagerbedingungen eines Körpers.

Gesucht sind die Lagerreaktionen, von denen man Angriffspunkt, Art und evt. Richtung kennt, nicht jedoch ihre Größen.

Zu ihrer Bestimmung stehen uns die 6 Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung. Lassen sich damit allein alle Reaktionskräfte unter beliebigen eingprägten Lasten bestimmen, so heißt das System (äußerlich) **statisch bestimmt**. Sind die Gleichgewichtsbedingungen hierzu nicht hinreichend, so ist das System (äußerlich) **statisch unbestimmt**. Ein solches kann mit den Mitteln der Statik allein nicht gelöst werden, sondern bedarf der Einbeziehung von Zusammenhängen der Festigkeitslehre, die später erörtert werden.

Neben diesen beiden Fällen kann noch der dritte Fall auftreten, dass der Körper so wenigen Lagerbedingungen unterworfen ist, dass nicht alle Gleichgewichtsbedingungen für alle eingprägten Lasten erfüllbar sind, was den Körper in Bewegung versetzen würde. Solche Systeme heißen **kinematisch** oder **labil** und können nicht allgemein mit den Mitteln der Statik behandelt werden, sondern mittels der Kinetik.

Man beachte, dass alle diese Begriffe Systemeigenschaften darstellen, die unabhängig von den jeweiligen Belastungen sind.

Wir werden uns in diesem Abschnitt zunächst nur *mit statisch bestimmten Systemen* befassen.

Die Lösung des Standardproblems solcher Systeme lässt sich grundsätzlich in folgenden Schritten vollziehen.

1. Schritt: Freischneiden

Der Körper wird durch einen (gedachten) Schnitt vollständig aus seiner Umgebung herausgetrennt. Der Einfluss dieser Umgebung wird ersetzt durch Schnittlasten, nämlich

- a) eingprägte Kräfte, die bekannt seien, und
- b) Auflagerreaktionen, von denen nur Art und Richtung und Angriffspunkt festliegen, nicht jedoch die Größen aller Komponenten.

2. Schritt: Gleichgewichtsbedingungen

Man stellt die Gleichgewichtsbedingungen auf, wobei es verschiedene Möglichkeiten gibt. Im Allgemeinen führt das zu einem System von maximal 6 Gleichungen (im ebenen Fall 3), die linear in den Unbekannten und inhomogen sind und für statisch bestimmte Systeme eine eindeutige Lösung besitzen.

3. Schritt: Lösung

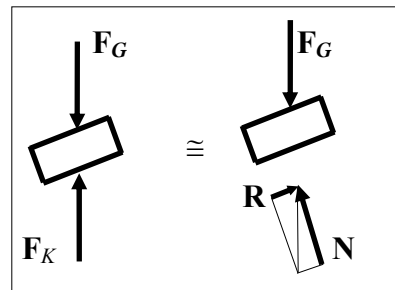
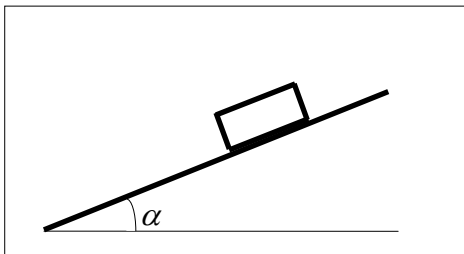
Auflösen der Gleichungen nach den unbekanntenen Reaktionskräften. Da es sich um lineare Gleichungssysteme handelt, gelingt dies durch Einsetzen und Eliminieren der Unbekannten.

Reibung

Reibungseffekte und -vorgänge zwischen Körpern in Kontakt sind in der Technik von großer Bedeutung. Manchmal möchte man möglichst viel Reibung (z. B. Reifen auf Fahrbahn), manchmal möglichst wenig (z. B. im Getriebe). Oft benötigt man Abschätzungen über die Größe der Reibkraft. Man unterscheidet generell zwischen (Gleit-) Reibung, wenn sich die Kontaktflächen relativ zueinander verschieben, und Haftreibung, falls dies nicht der Fall ist. Wir befassen uns zunächst mit der

Haftreibung

Legt man einen Festkörper auf eine Ebene und erhöht langsam deren Neigung (Neigungswinkel $\alpha \geq 0$), so stellt man fest, dass der Körper ab einem bestimmten Winkel, dem **Reibungswinkel** ρ_0 , zu Rutschen beginnt. ρ_0 hängt von der Materialpaarung, von der Beschaffenheit der Kontaktflächen usw. ab, jedoch nur wenig oder gar nicht von Lage, Form, Gewicht und Orientierung des Körpers.



Wir wollen uns mit der Kraftübertragung vom Körper auf die Unterlage während des Haftens bis unmittelbar vor dem Gleiten befassen. Dazu wird der Körper freigeschnitten und die Kontaktkraft \mathbf{F}_K mit der Gewichtskraft \mathbf{F}_G ins Gleichgewicht gesetzt

$$\mathbf{F}_K = -\mathbf{F}_G = -F_G \mathbf{e}_\downarrow.$$

Die Kontaktkraft ist also eine Reaktion auf die Gewichtskraft (Reaktionskraft), solange der Körper haftet. Zerlegt man \mathbf{F}_K in einen Normalanteil \mathbf{N} und einen Tangentialanteil \mathbf{R} gemäß

$$\mathbf{F}_K = \mathbf{R} + \mathbf{N},$$

so folgt aus Gleichgewichtsgründen

$$R = |\mathbf{R}| = F_G \sin \alpha$$

$$N = |\mathbf{N}| = F_G \cos \alpha$$

oder

$$\frac{R}{N} = \tan \alpha \leq \tan \rho_0 =: \mu_0.$$

Haftreibungsgesetz

Zwei Körper in Kontakt haften aneinander, solange gilt

$$|R| < \mu_0 N = \tan \rho_0 N$$

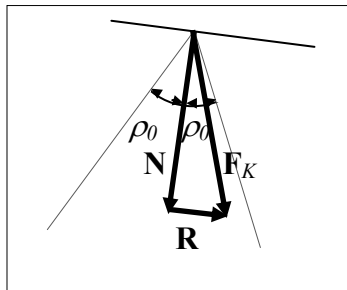
Darin ist die dimensionslose Materialkonstante $\mu_0 > 0$ die **Haftreibungszahl**, die das Verhältnis von **Haftreibungskraft** R und **Andrückkraft** $N > 0$ begrenzt.

Typische Werte für μ_0 sind

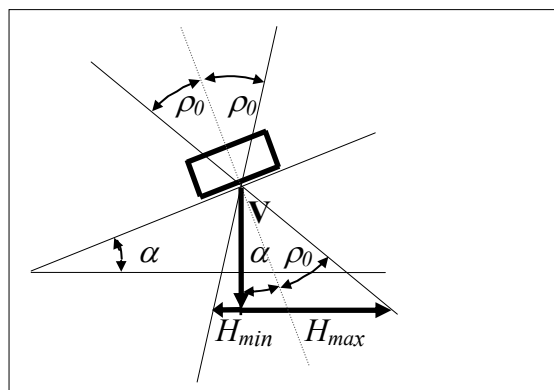
| | |
|-------------------|-----------|
| Stahl auf Stahl | 0,15 |
| Holz auf Holz | 0,4 ÷ 0,6 |
| Holz auf Metall | 0,6 ÷ 0,7 |
| Gummi auf Asphalt | 0,7 ÷ 0,8 |

In dem Haftgesetz ist keine Aussage über die Verteilung der Kontaktflächenkraft gemacht, sondern lediglich über die Größe der resultierenden Tangentialkomponente zur resultierenden Normalkomponente. In das Haftgesetz geht auch nicht die Form oder Größe der Kontaktfläche ein.

Trägt man das Kräfteparallelogramm der Kontaktkraft auf, so sind alle Haftzustände



dadurch gekennzeichnet, dass die Kontaktkraft in dem **Reibungskegel** mit dem Öffnungswinkel $2\rho_0$ liegt. Dies ist unabhängig davon, ob diese aus dem Gewicht oder anderen eingprägten Kräften resultiert.



Betrachten wir nun denselben Körper auf einer um α geneigten schiefen Ebene, an dem außer einer vertikalen (Gewichts-) Kraft \mathbf{V} eine weitere eingprägte Kraft $\mathbf{H} = H \mathbf{e}_x$ in horizontaler Richtung angreift. Diese soll so bestimmt werden, dass der Klotz weder nach oben noch nach unten rutscht.

$$\frac{|H_{max}|}{V} = \tan(\rho_0 + \alpha)$$

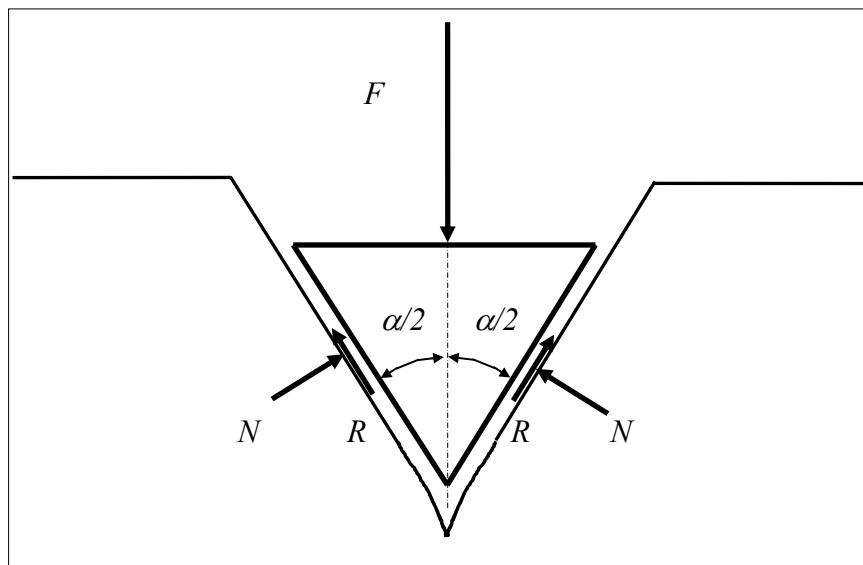
$$\frac{|H_{min}|}{V} = \tan(\rho_0 - \alpha).$$

Damit gilt für den Haftbereich die Eingrenzung von

$$-V \tan(\rho_0 - \alpha) = V \tan(\alpha - \rho_0) \leq H \leq V \tan(\alpha + \rho_0).$$

- Ist $\alpha < \rho_0$, so gilt H_{min} für eine nach links wirkende Horizontalkraft. In diesem Fall kann H auch Null sein, d. h. der Körper haftet von selbst für V beliebig: **Selbsthemmung**.
- Ist dagegen $\alpha > \rho_0$, so muss **H** in jedem Fall nach rechts wirken, um den Körper am Gleiten zu hindern.

Beispiel: **Keil**



Will man einen Keil in Form eines Dreieckprismas mit einer Kraft \mathbf{F} in einen Körper treiben, so muss an beiden Keilflanken die Grenzhaftbedingung gelten

$$R = \mu_0 N = N \tan \rho_0.$$

Die vertikale Gleichgewichtsbedingung ist

$$\downarrow : \quad F - 2N \sin \frac{\alpha}{2} - 2R \cos \frac{\alpha}{2} = 0.$$

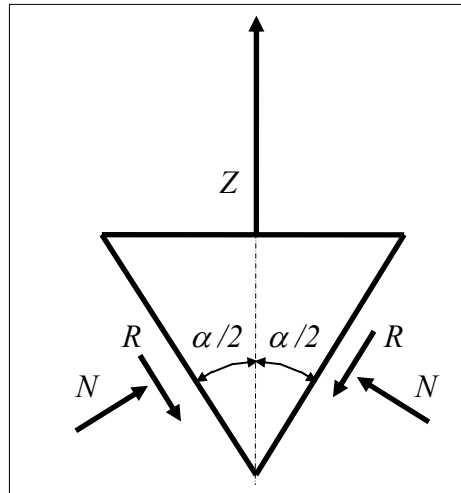
Setzt man die Grenzbedingung ein, so ergibt sich für die eintreibende Kraft

$$\begin{aligned} F &= 2N \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \tan \rho_0 \cos \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{2N}{\cos \rho_0} \left(\sin \frac{\alpha}{2} \cos \rho_0 + \sin \rho_0 \cos \frac{\alpha}{2} \right) \\ &= 2N \frac{\sin \left(\frac{\alpha}{2} + \rho_0 \right)}{\cos \rho_0} \end{aligned}$$

mit der trigonometrischen Regel

$$\sin(\beta \pm \gamma) = \sin \beta \cos \gamma \pm \sin \gamma \cos \beta.$$

Je spitzer der Keil, desto kleiner ist α und damit auch F . Durch Schmierung der Keilflanken kann man ρ_0 und damit auch F herabsetzen.



Zieht man an dem Keil mit einer Kraft Z nach oben, so fängt er bei

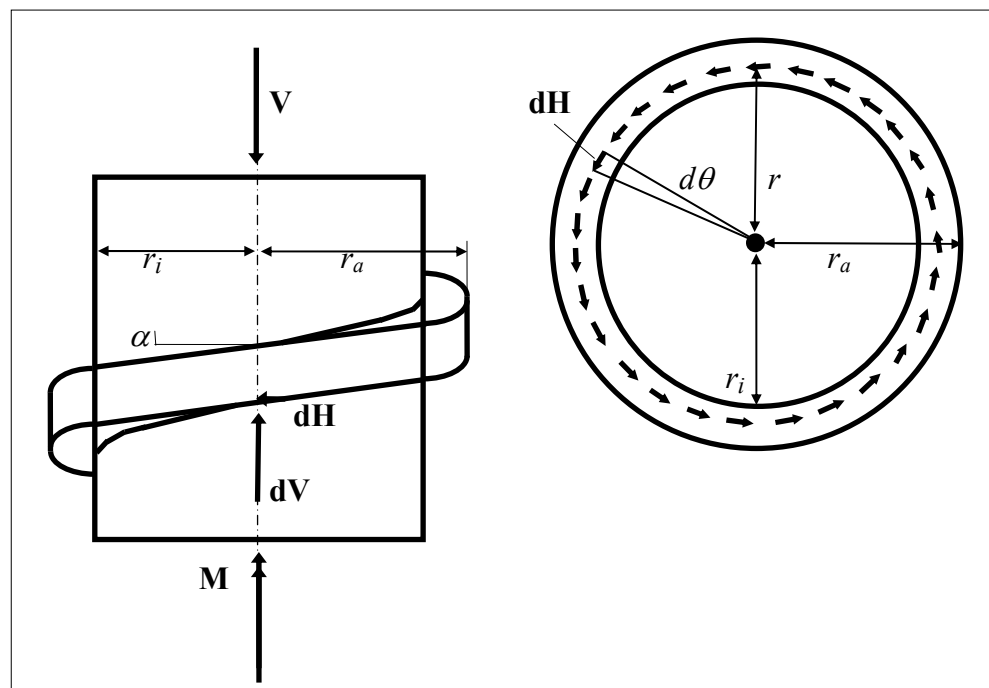
$$Z = 2N \left(-\sin \frac{\alpha}{2} + \tan \rho_0 \cos \frac{\alpha}{2} \right) = 2N \frac{\sin(\rho_0 - \frac{\alpha}{2})}{\cos \rho_0}$$

an herauszurutschen. Ist $\alpha/2 > \rho_0$, so rutscht er von selbst heraus, bei $\alpha/2 < \rho_0$ tritt Selbsthemmung ein.

Schraubenverbindungen

a) flachgängige Schraube

Auf die Schraube wirke eine eingeprägte Kraft V , die auch das Eigengewicht enthalten kann. Diese soll vom Gewinde gleichmäßig aufgenommen werden. Der Steigungswinkel der Schraube sei α .



Außerdem wirke ein Schraubmoment \mathbf{M} , das so eingegrenzt werden soll, dass der Haftbereich bestimmt wird. \mathbf{M} wird umgesetzt in eine umlaufende horizontale Streckenlast $d\mathbf{H}$ mit einem Hebelarm r , der zwischen r_i und r_a liegt

$$M = |\mathbf{M}| = \int_0^{\theta} r |d\mathbf{H}| = r \int_0^{\theta} dH = r H \quad \text{mit} \quad H = \int_0^{\theta} dH$$

Dann gilt wie beim Körper auf der schiefen Ebene die Haftbedingung

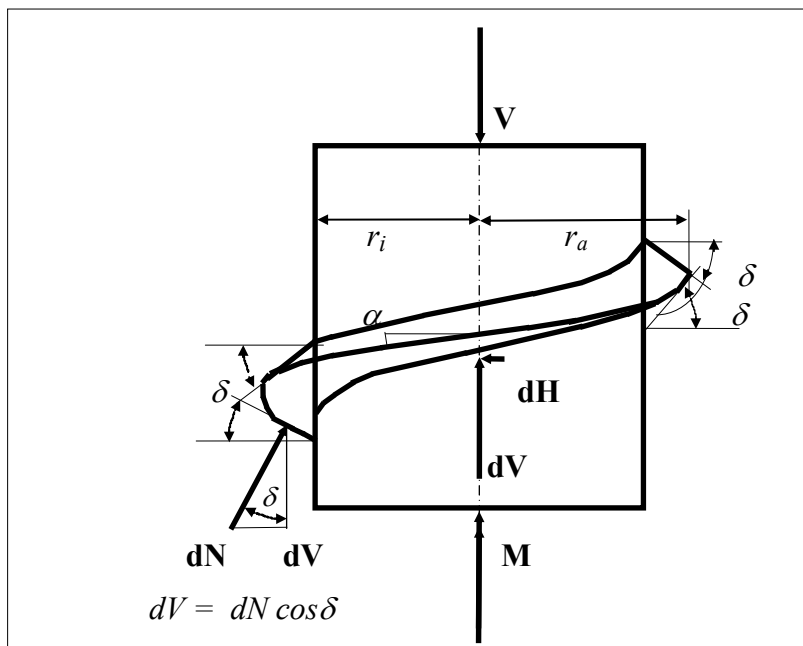
$$V \tan(\alpha - \rho_0) \leq H = \frac{M}{r} \leq V \tan(\alpha + \rho_0) .$$

Für $M \equiv 0$ sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- 1) Ist $\alpha < \rho_0$, so tritt Selbsthemmung ein, d. h. die Schraube dreht sich nicht allein unter einer axialen Kraft beliebiger Größe V .
- 2) Ist hingegen $\alpha > \rho_0$, so würde sich die Schraube auch für beliebig kleine V von selbst losdrehen, wenn kein geeignetes Gegenmoment \mathbf{M} aufgebracht wurde.

b) scharfgängige Schraube

Ist das Gewinde der Schraube an der Druckseite um einen spitzen Winkel $\delta > 0$ gegen die Horizontale geneigt, so handelt es sich um eine scharfgängige Schraube. δ ist der halbe Flankenwinkel des Gewindes.



In diesem Fall wirkt V noch um $\cos^{-1} \delta$ vergrößert gegenüber der flachgängigen Schraube in der Haftbedingung

$$V \frac{\tan(\alpha - \rho_0)}{\cos \delta} \leq \frac{M}{r} \leq V \frac{\tan(\alpha + \rho_0)}{\cos \delta} .$$

Damit wird gegenüber der flachgängigen Schraube für die gleiche Andrückkraft V ein um $1/(\cos \delta)$ größeres Moment M benötigt, um die Schraube zu lösen. Die scharfgängige

Schraube eignet sich also eher als Befestigungsschraube und die flachgängige (Spindel) als Bewegungsschraube (Wagenheber). Für $\delta \equiv 0$ fallen beide Fälle zusammen.

Seilreibung

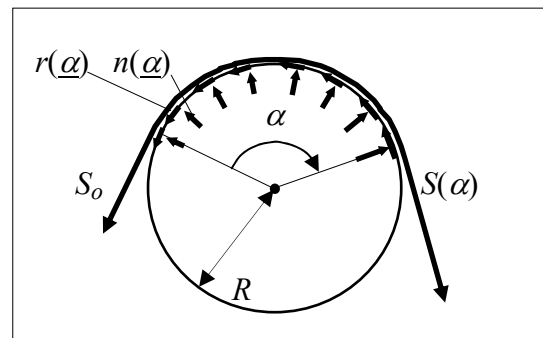
Wir betrachten ein Seil, das um eine zylindrische Trommel mit Radius R gewickelt ist, in einem Winkelbereich α anliegt, und mit einer (Seil-) Kraft S_o an einer Seite gehalten wird. Ziel ist es, die maximale Kraft $S(\alpha)$ der anderen Seite so zu ermitteln, dass die Haftbedingung im ganzen Bereich erfüllt ist. Dazu schneiden wir das Seil frei. Die Kontaktkraft zwischen Seil und Trommel ist eine Linienlast, die wir in ihren Normalanteil $n(\alpha)$ und Tangentialanteil/ Reibungsanteil $r(\alpha)$ zerlegen. Die Haftbedingung wird für den Grenzfall, dass an jeder Stelle gerade die Grenzlast herrscht, formuliert als

$$r(\underline{\alpha}) = \mu_0 n(\underline{\alpha}).$$

Es gilt $ds = R d\alpha$.

Die Momenten-Gleichgewichts-Bedingung um den Trommelmittelpunkt ergibt

$$\begin{aligned} R S(\alpha) &= R S_o + \int_0^{\alpha} R r(\underline{\alpha}) R d\underline{\alpha} \\ &= R S_o + R^2 \int_0^{\alpha} r(\underline{\alpha}) d\underline{\alpha}. \end{aligned}$$



Nach Division durch R und Differentiation nach α erhält man mit der lokalen Haftbedingung

$$S(\alpha)' = R r(\alpha) = \mu_0 R n(\alpha).$$

Gleichgewicht der Kräfte am Seil in Richtung von S_o ergibt

$$S_o - S(\alpha) \cos \alpha + \int_0^{\alpha} \cos \underline{\alpha} r(\underline{\alpha}) R d\underline{\alpha} - \int_0^{\alpha} \sin \underline{\alpha} n(\underline{\alpha}) R d\underline{\alpha} = 0,$$

woraus mit der Haftbedingung folgt

$$S_o - S(\alpha) \cos \alpha + \int_0^{\alpha} [\cos \underline{\alpha} \mu_0 n(\underline{\alpha}) - \sin \underline{\alpha} n(\underline{\alpha})] R d\underline{\alpha} = 0.$$

Differentiation nach α ergibt

$$-S(\alpha)' \cos \alpha + S(\alpha) \sin \alpha + \mu_0 R n(\alpha) \cos \alpha - R n(\alpha) \sin \alpha = 0.$$

Gleichgewicht der Kräfte am Seil senkrecht zu S_o ergibt

$$-S(\alpha) \sin \alpha + \int_0^{\alpha} \sin \underline{\alpha} r(\underline{\alpha}) R d\underline{\alpha} + \int_0^{\alpha} \cos \underline{\alpha} n(\underline{\alpha}) R d\underline{\alpha} = 0.$$

Differentiation nach α resultiert in

$$-S(\alpha)' \sin \alpha - S(\alpha) \cos \alpha + \mu_0 R n(\alpha) \sin \alpha + R n(\alpha) \cos \alpha = 0.$$

Mit der obigen Gleichung heben sich die Sinus-Terme auf und der Rest ergibt

$$S(\alpha) = R n(\alpha)$$

und damit schließlich die Differenzialgleichung

$$S(\alpha)' = \mu_0 S(\alpha)$$

mit der an die Anfangsbedingungen angepassten Lösung

$$S(\alpha) = S_0 e^{\mu_0 \alpha}$$

Dies ist die EULER-EYTELWEIN⁵sche Formel. Die Grenzlast nimmt also exponentiell zu mit dem Winkelbereich, in dem das Seil anliegt.

Gleitreibung

Erreicht die Reibungskraft die Haftgrenze $|R| = \mu_0 N$, so kann ein Abgleiten auftreten. Während des Gleitens kann die (Gleit-) Reibungskraft nicht mehr aus Gleichgewichtsbedingungen bestimmt werden, sondern aus einem Reibungsgesetz, das vor allem von der Materialpaarung der Reibungspartner und deren Oberflächenbeschaffenheit abhängt und damit ein *Materialgesetz* darstellt. Eines der ältesten und immer noch wichtigsten Reibungsgesetze geht auf einen Vorschlag von AMONTONS (1699) zurück und wurde von COULOMB (1785) präzisiert und von MORIN experimentell für wichtige Anwendungen bestätigt.⁶

COULOMBSches Reibungsgesetz

Die Größe der (Gleit-) Reibungskraft R ist proportional zur Andrückkraft N

$$|R| = \mu N$$

Der Proportionalitätsfaktor μ heißt (Gleit-) **Reibungszahl**. Er ist eine dimensionslose Materialkonstante, die kleiner oder gleich der Haftreibungszahl ist

$$0 \leq \mu \leq \mu_0.$$

Folgende Werte findet man in der Literatur

| | |
|-------------------|-----------|
| Stahl auf Stahl | 0,09 |
| Holz auf Holz | 0,2 ÷ 0,4 |
| Holz auf Metall | 0,4 ÷ 0,5 |
| Gummi auf Asphalt | 0,5 ÷ 0,6 |

Während die Haftreibungskraft eine Reaktionskraft ist, stellt die Gleitreibungskraft eine eingeprägte Kraft dar.

Ist die Gleitreibungszahl kleiner als die Haftreibungszahl, so kann es beim Beginn des Gleitens zu einem Anrucken kommen und in dessen weiteren Verlauf zu einem schnellen Wechsel zwischen Haften und Gleiten (*stick-slip*). Auf einem solchen Mechanismus beruht die Tonerzeugung eines Streichinstruments.

Sind die Gleitflächen feucht oder geschmiert, so kann das COULOMBSche Gesetz, das *Trockenreibung* beschreibt, nicht mehr gelten. Es hat nämlich die Eigenschaft der **Geschwindigkeits-Unabhängigkeit**: Die Reibkraft hängt nicht von der Gleitgeschwindigkeit

⁵ Johann Albert Eytelwein (1746 - 1848)

⁶ Guillaume Amontons (1663 - 1705), Charles Augustin de Coulomb (1736 - 1806), Arthur Morin (1795 - 1880)

ab. Im Gegensatz dazu ist die *viskose Reibung* geschwindigkeitsabhängig (s. NEWTONsches Widerstandsgesetz).

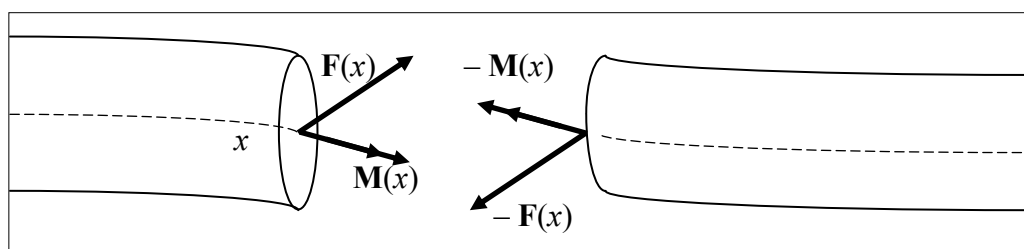
Das COULOMBSche Reibungsgesetz stellt nur einen besonders einfachen Vorschlag dar. In der Realität sind Reibungsvorgänge sehr viel komplexer und schwer zu berechnen. Ihre Erforschung ist Gegenstand der *Reibungsmechanik* oder *Tribologie*.

Schnittlasten an Stäben

Wir betrachten schlanke Stäbe und treffen folgende KOO-Vereinbarung:

- x in axialer Richtung
- y aus dem Bild heraus
- z in Fahrtrichtung rechts.

Um zu bestimmen, welche Lasten (Kräfte, Momente) in einem Querschnitt eines belasteten und gelagerten Stabes wirken, schneidet man ihn dort frei und setzt die Schnittlasten, also Schnittkräfte und Schnittmomente an. Dabei setzt man die Schnittlast in den Flächenmittelpunkt des Querschnitts. Die Verbindungskurve dieser Mittelpunkte bilden die Systemlinie des Balkens mit der Bogenlängenkoordinate x .



Die beiden Schnittlasten in einem Querschnitt sind die zwei Vektoren der Kraft $\pm \mathbf{F}(x)$ und des freien Momentes $\pm \mathbf{M}(x)$, wobei das Vorzeichen von der Einführung des positiven Schnittufers abhängt. Diese beiden Vektoren lassen sich bei innerlich statisch bestimmten Systemen aus den Gleichgewichtsbedingungen des einen oder des anderen Teilkörpers bestimmen.

Sind die Verschiebungen und Verformungen des Stabes unter den Lasten klein - was man häufig voraussetzen kann -, so kann man den Stab wie einen starren Körper behandeln und die *Gleichgewichtsbedingungen am unverformten System* ansetzen. Wegen der Linearität der Gleichgewichtsbedingungen am unverformten System gilt dann das

Superpositionsprinzip der Schnittlasten

Sind

$\mathbf{F}_A(x)$ und $\mathbf{M}_A(x)$ die Schnittlasten infolge eines Lastsystems A , und

$\mathbf{F}_B(x)$ und $\mathbf{M}_B(x)$ infolge eines anderen Lastsystems B ,

so bewirkt das gleichzeitige Aufbringen beider Lastsysteme die Schnittlasten

$\mathbf{F}_A(x) + \mathbf{F}_B(x)$ und $\mathbf{M}_A(x) + \mathbf{M}_B(x)$ an jeder Stelle x .

Ebenso gilt die

Proportionalität der Schnittlasten

Die α -fache Last von A bewirkt α -fache Schnittlasten $\alpha \mathbf{F}_A(x)$ und $\alpha \mathbf{M}_A(x)$ an jeder Stelle x für jede reelle Zahl α .

Damit kann man die Schnittlasten infolge komplexer Kraftsysteme zusammensetzen aus einfachen Lastgruppen.

Das Superpositionsprinzip gilt nicht mehr, wenn die Verschiebungen so groß sind, dass die Gleichgewichtsbedingungen am verformten System angesetzt werden müssen, wie z. B. bei Stabilitätsuntersuchungen (s. Knickprobleme).

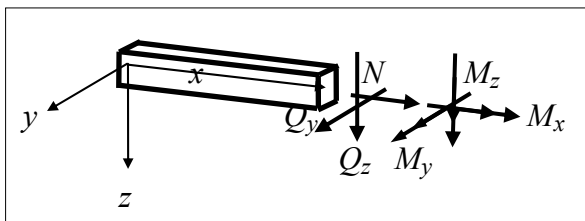
Benötigt man eine Komponentendarstellung von $\mathbf{F}(x)$ und $\mathbf{M}(x)$, so wählt man meistens eine ONB derart, dass

- \mathbf{e}_x normal auf dem Querschnitt steht, also in Richtung der Balkenachse
- und \mathbf{e}_y und \mathbf{e}_z in der Querschnittsebene liegen.

Bei gekrümmten Stäben handelt es sich um eine lokale Basis, d. h. sie kann von x abhängen. Bei geraden Stäben benötigen wir pro Stab nur eine solche Basis.

Bezüglich dieser Basis erhalten wir die Komponentendarstellungen

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x) &= F_x(x) \mathbf{e}_x + F_y(x) \mathbf{e}_y + F_z(x) \mathbf{e}_z \\ &= N(x) \mathbf{e}_x + Q_y(x) \mathbf{e}_y + Q_z(x) \mathbf{e}_z \\ \mathbf{M}(x) &= M_x(x) \mathbf{e}_x + M_y(x) \mathbf{e}_y + M_z(x) \mathbf{e}_z \end{aligned}$$



Man nennt

- $N = F_x$ Normalkraft (-Komponente) (als Zug positiv, als Druck negativ)
- $Q_y = F_y$ Querkraft (-Komponente) in y -Richtung
- $Q_z = F_z$ Querkraft (-Komponente) in z -Richtung
- $M_t = M_x$ axiales oder Torsionsmoment
- $M_{by} = M_y$ Biegemoment (-Komponente) in y -Richtung
- $M_{bz} = M_z$ Biegemoment (-Komponente) in z -Richtung.

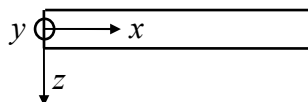
Handelt es sich um ein *ebenes Problem*, so kann man x und z in die Zeichenebene legen, und es verbleiben die drei Schnittlastgrößen

- $N = F_x$ Normalkraft (-Komponente)
- $Q = F_z$ Querkraft (-Komponente) in z -Richtung
- $M = M_y$ Biegemoment (-Komponente) in y -Richtung.

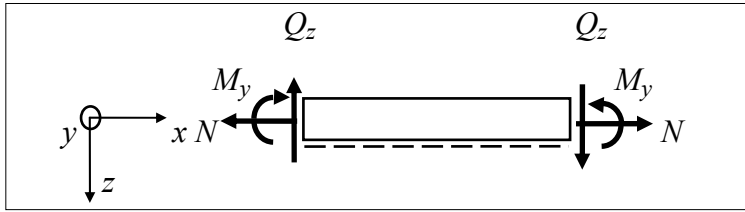
Die **gestrichelte-Faser-Konvention** dient im ebenen Fall zur Festlegung der Koordinaten:



bedeutet:



so dass die (positiven) Schnittlasten folgendermaßen angreifen

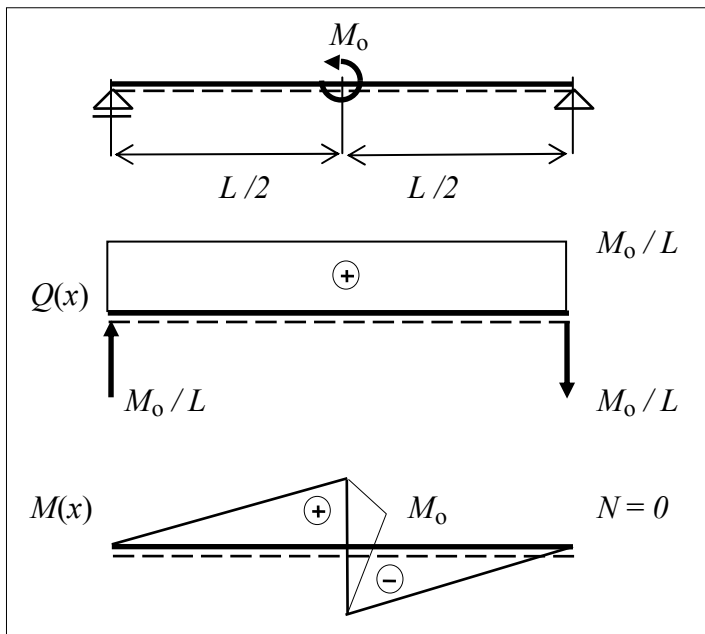


Merkregel: ein positives Biegemoment führt zu einer Stabkrümmung, die die gestrichelte Faser streckt.

Flächendarstellung der Schnittlastenverläufe

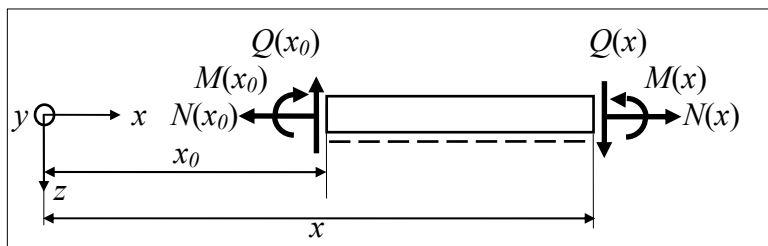
Im Allg. hängen alle Schnittlastkomponenten von der axialen Stabkoordinate x ab. Man kann sie graphisch darstellen, wenn man ihre Größe zu einer Seite senkrecht, falls positiv, sonst zur anderen Seite aufrägt.

Beispiel: Balken auf zwei Stützen mit Einzelmoment



Im Weiteren betrachten wir einen geraden Stab unter einer ebenen Belastung.

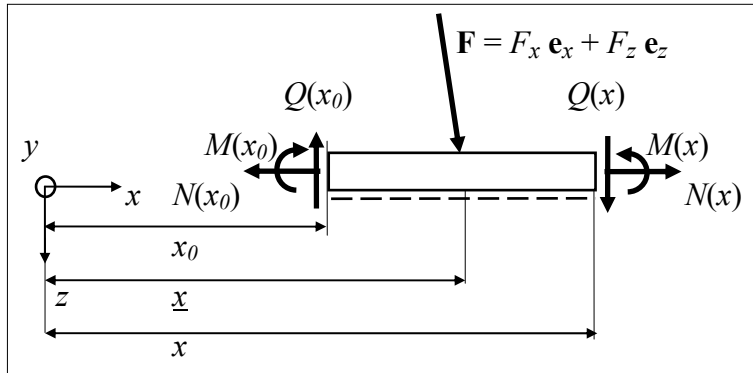
Änderung der Schnittlasten in einem Bereich ohne äußere Lasten



Wir schneiden einen Stabbereich ohne äußere Lasten frei und setzen die Gleichgewichtsbedingungen an:

- Kräfte in x -Richtung: $N(x) = N(x_0)$ *Die Normalkraft ist konstant.*
 Kräfte in z -Richtung: $Q(x) = Q(x_0)$ *Die Querkraft ist konstant.*
 Momente in y bez. x_0 : $M(x) - M(x_0) = (x - x_0) \cdot Q$ *Das Moment ändert sich linear.*

Änderung der Schnittlasten im Bereich einer Einzelkraft

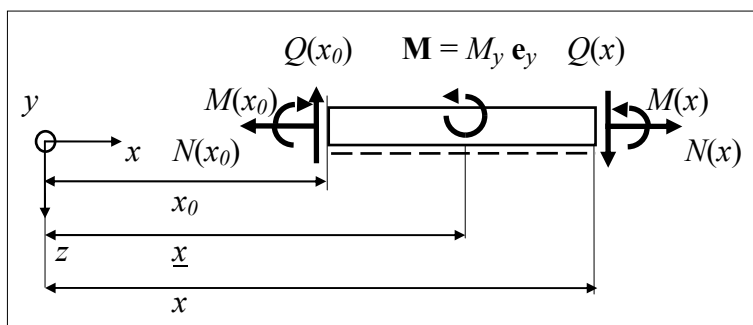


Wir schneiden einen Stabbereich unmittelbar vor und hinter dem Angriffspunkt einer Einzelkraft (aber nie in ihm) frei und setzen die Gleichgewichtsbedingungen an

- Kräfte in x -Richtung: $N(x) - N(x_0) = -F_x$ *Die Normalkraft springt um $-F_x$.*
 Kräfte in z -Richtung: $Q(x) - Q(x_0) = -F_z$ *Die Querkraft springt um $-F_z$.*
 Momente in y bez. x_0 : $M(x) - M(x_0) = (x - x_0) \cdot Q(x) + (\underline{x} - x_0) \cdot F_z$
Das Moment bleibt stetig in $x \equiv x_0$.

An der Angriffsstelle der Einzelkraft ist das Moment nicht mehr differenzierbar und hat einen Knick (Differenz der Ableitungen) von der Größe $-F_z$.

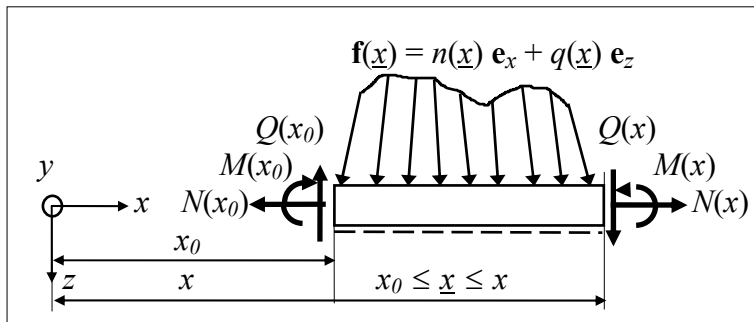
Änderung der Schnittlasten im Bereich eines Einzelmoments



Wir schneiden einen Stabbereich unmittelbar vor und hinter dem Angriffspunkt eines Einzelmoments frei und setzen die Gleichgewichtsbedingungen an

- Kräfte in x -Richtung: $N(x) - N(x_0) = 0$ *Die Normalkraft bleibt stetig.*
 Kräfte in z -Richtung: $Q(x) - Q(x_0) = 0$ *Die Querkraft bleibt stetig.*
 Momente in y bez. x_0 : $M(x) - M(x_0) = (x - x_0) \cdot Q(x) - M_y$
Das Moment springt um $-M_y$.

Änderung der Schnittlasten im Bereich einer Streckenlast



Wir schneiden einen Stabbereich $x_0 \leq \underline{x} \leq x$, in dem eine Streckenlast wirkt, frei und setzen die Gleichgewichtsbedingungen an

$$\begin{aligned} \text{Kräfte in } x\text{-Richtung:} \quad N(x) - N(x_0) &= - \int_{x_0}^x n(\underline{x}) d\underline{x} \\ \Rightarrow N(x)' &= -n(x) \end{aligned}$$

Die Ableitung der Längskraft ist gleich der negativen axialen Streckenlast.

$$\begin{aligned} \text{Kräfte in } z\text{-Richtung:} \quad Q(x) - Q(x_0) &= - \int_{x_0}^x q(\underline{x}) d\underline{x} \\ \Rightarrow Q(x)' &= -q(x) \end{aligned}$$

Die Ableitung der Querkraft ist gleich der negativen Streckenlast in z-Richtung.

$$\begin{aligned} \text{Momente in } y \text{ bez. } x_0: \quad M(x) - M(x_0) &= (x - x_0) \cdot Q(x) + \int_{x_0}^x (\underline{x} - x_0) \cdot q(\underline{x}) d\underline{x} \\ \Rightarrow M(x)' &= Q(x) + (x - x_0) \cdot Q(x)' + (x - x_0) \cdot q(x) \\ &= Q(x) \end{aligned}$$

Regel: Wo $Q(x)$ gleich Null und Wechsel, hat $|M(x)|$ ein (relatives) Mäxel.

Schnittlasten-Differentialgleichung

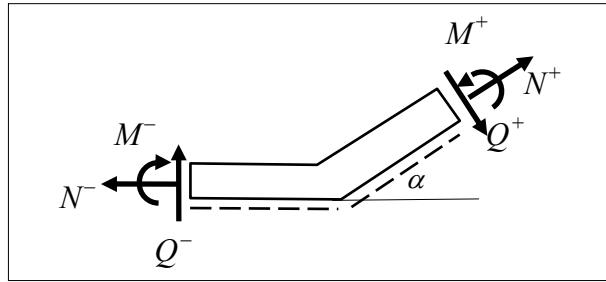
$$M(x)'' = Q(x)' = -q(x)$$

Die Ableitung des Biegemomentes ist gleich der positiven Querkraft.

Die Ableitung der Querkraft ist gleich der negativen Streckenlast in z-Richtung.

Hat der Stab an einer Stelle einen Knick, so gelten folgende Beziehungen für die Schnittlasten in unmittelbarer Nähe zum Knick:

$$\begin{aligned} N^+ &= N^- \cos \alpha - Q^- \sin \alpha \\ Q^+ &= Q^- \cos \alpha + N^- \sin \alpha \\ M^+ &= M^- \end{aligned}$$



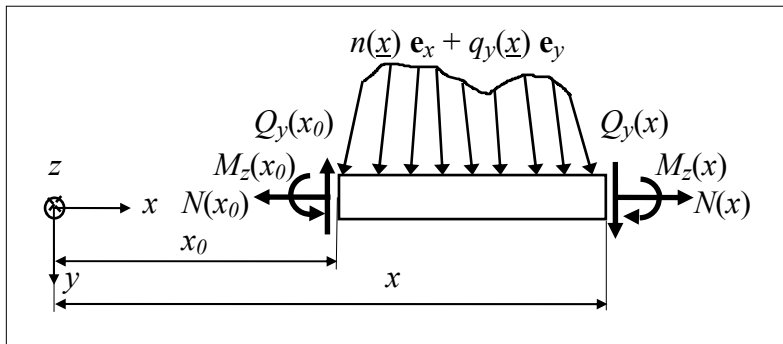
Speziell ergibt sich für einen rechten Winkel

$$N^+ = -Q^-$$

$$Q^+ = N^-$$

$$M^+ = M^-$$

Wechselt man die Seite der gestrichelten Faser, so ändern sich einige Vorzeichen.



Im dreidimensionalen Fall gelten für die Streckenlast

$$\mathbf{f}(\underline{x}) = n(\underline{x}) \mathbf{e}_x + q_y(\underline{x}) \mathbf{e}_y + q_z(\underline{x}) \mathbf{e}_z$$

die folgenden Schnittlasten-Differentialgleichungen

$$N(x)' = -n(x)$$

$$M_y(x)'' = Q_z(x)' = -q_z(x)$$

$$M_z(x)'' = -Q_y(x)' = q_y(x)$$

Die Vorgaben der Schnittlasten bei Lagern und Gelenken sind in der Tabelle (s.o.) angegeben.

Vorgehen zur Bestimmung der Schnittlasten von statisch bestimmten Systemen:

- 1.) Auflagerreaktionen bestimmen (freischneiden, Gleichgewichtsbedingungen ansetzen)
- 2.) bereichsweise freischneiden, Gleichgewichtsbedingungen ergeben die Schnittlasten. Hierbei können Streckenlasten durch Resultierende ersetzt werden.
- 3.) Schnittlastflächen darstellen.

Alternative: Unbestimmte Integration der Schnittlasten-Dgl. und Bestimmung der Integrationskonstanten durch Rand- und Übergangsbedingungen. Bei statisch bestimmten Systemen hat man genügend dynamische Bedingungen.

Fachwerke

sind Systeme

- von geraden Stäben,
- die gelenkig verbunden sind (in sog. Knoten) und
- nur durch Einzelkräfte belastet sind, die in den Knoten angreifen.

Fachwerkstäbe werden auch als **Pendelstützen** bezeichnet. Hier wird der Schnittlastzustand in allen Fachwerkstäben besonders einfach, was man durch Freischneiden sieht.

*In Fachwerkstäben treten nur (konstante) Normalkräfte auf.
Die Knotenkräfte bilden Zentralkraftsysteme.*

Vereinbarung (wie bisher)

$N > 0$: Zugkraft

$N < 0$: Druckkraft

Ein stabweises KOOS zur Definition der (positiven) Schnittlasten wird für Fachwerke nicht benötigt. Lediglich ein globales KOOS ist für die komponentenweisen Gleichgewichtsbedingungen hilfreich.

Im Folgenden beschränken wir uns auf *ebene* Fachwerke. Alle Aussagen lassen sich aber leicht auf räumliche verallgemeinern.

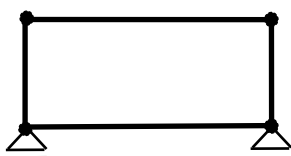
Beispiele ebener Fachwerke



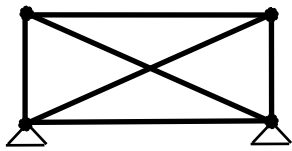
statisch bestimmt



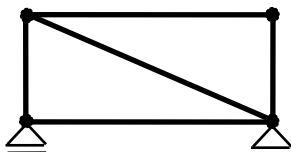
statisch bestimmt



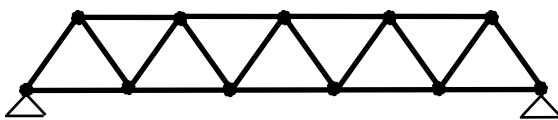
innerlich kinematisch



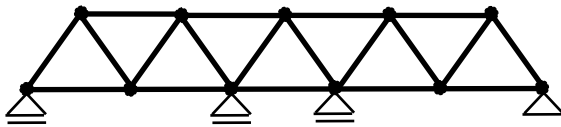
innerlich 1-fach statisch unbestimmt



statisch bestimmt



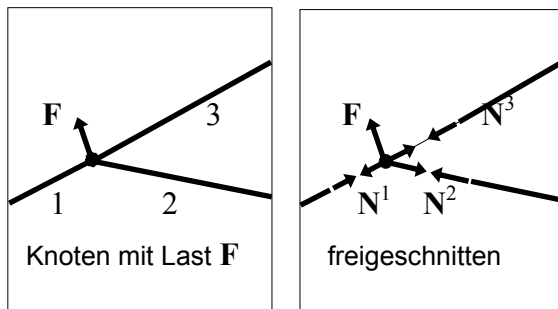
statisch bestimmt



äußerlich 2-fach statisch unbestimmt

Knotenpunkt-Verfahren

Man bestimmt die Stabkräfte durch Freischneiden aller Knoten mit Antragen aller Stabkräfte (der Richtung nach bekannt) und der äußeren Kräfte (bekannt). Im Beispiel greifen am Knoten eine äußere Last \mathbf{F} und drei Stabkräfte \mathbf{N}^i an.



Da diese Kräfte im Knoten ein Zentralkraftsystem bilden, ist die Momenten-Gleichgewichtsbedingung trivialerweise erfüllt. Es verbleiben also die Kraft-Gleichgewichtsbedingungen (räumlich: 3 Gleichungen, eben: 2 Gleichungen). Für unseren Beispiel-Knoten ist dies die Vektor-Gleichung

$$\mathbf{F} + \mathbf{N}^1 + \mathbf{N}^2 + \mathbf{N}^3 = \mathbf{0}.$$

Durch Einführung einer globalen Basis $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$ zerlegen wir alle Kräfte in zwei Komponenten und erhalten komponentenweise die Gleichgewichtsbedingungen

$$F_x + N^1_x + N^2_x + N^3_x = 0$$

$$F_y + N^1_y + N^2_y + N^3_y = 0.$$

Von allen Kräften kennen wir die Richtung. Schließt diese mit der x -Achse einen Winkel α_i ein, so sind die Komponenten

$$N^i_x = N^i \cos \alpha_i \quad \text{und} \quad N^i_y = N^i \sin \alpha_i$$

mit den zu bestimmenden Größen der Stabkräfte N^i . Wir erhalten damit die Gleichungen

$$N^1 \cos \alpha_1 + N^2 \cos \alpha_2 + N^3 \cos \alpha_3 = -F \cos \alpha_0$$

$$N^1 \sin \alpha_1 + N^2 \sin \alpha_2 + N^3 \sin \alpha_3 = -F \sin \alpha_0.$$

Führt man dies für alle Knoten durch, so erhält man ein lineares Gleichungssystem in den zu bestimmenden Größen der Stabkräfte N^i . Es ist inhomogen, wenn es äußere Lasten gibt. Damit kann man pro Knoten 3 (räumlich) bzw. 2 (eben) unbekannte Stabkräfte der Größe nach bestimmen, falls deren Richtungen linear unabhängig sind. Diese Bestimmung kann man rechnerisch/analytisch durchführen, oder graphisch (CREMONA⁷-Plan).

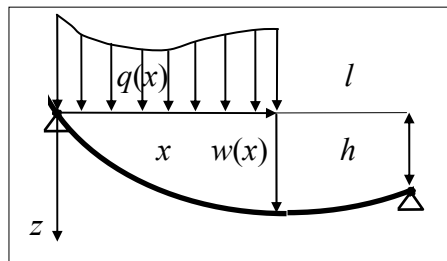
⁷ Antonio Luigi Gaudenzio Giuseppe Cremona (1830 - 1903)

Seile und Bögen

sind Konstruktionselemente, die lediglich *Normalkräfte* aufnehmen können (Seile: nur Zugkräfte, Bögen: nur Druckkräfte), also schub- und biegeweich sind. Alle Querkräfte und Schnittmomente sind also Null. Außerdem betrachten wir das Seil als *undeformbar*.

Wir wollen außerdem annehmen, dass nur *vertikale Lasten* (als Einzelkräfte oder als Streckenlasten) wirken.

Betrachten wir ein Seil der Länge L , das an zwei Punkten befestigt ist. Wir führen ein kartesisches KOOS ein mit x horizontal in der Seilebene und z vertikal nach unten. Der Ursprung kann beliebig gewählt werden, z. B. auch im linken Auflager. Die Stützweite sei l und die Höhendifferenz h .



Wir beschreiben die **Seillinie** durch eine stetige Funktion $w(x)$, $0 \leq x \leq l$, mit den Randbedingungen

$$w(0) = 0 \quad w(l) = h.$$

Das Linienelement ds wird mit dem Differential $dw(x) = w(x)' dx$ nach dem Satz des PYTHAGORAS

$$ds^2 = dx^2 + dw^2 = [1 + w(x)'^2] dx^2.$$

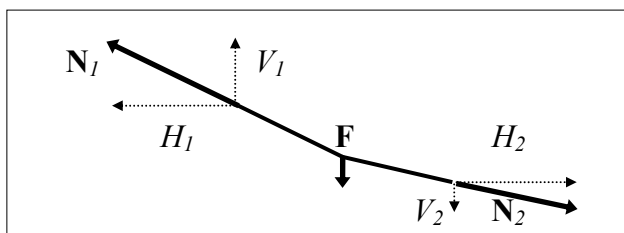
Somit berechnet sich die Seillänge (s. Bogenlänge) zu

$$L = \int_{\mathcal{L}} ds = \int_0^l \sqrt{[1 + w(x)'^2]} dx.$$

Die resultierende Schnittlast $\mathbf{N}(x)$ des Seils wird zerlegt in eine horizontale und eine vertikale Komponente

$$\mathbf{N}(x) = H \mathbf{e}_x + V \mathbf{e}_z.$$

Wirkt auf das Seil eine vertikale **Einzelkraft** \mathbf{F} , so schneiden wir das Seil unmittelbar vor und hinter deren Angriffsstelle frei und es folgt aus den Gleichgewichtsbedingungen



$$H_2 = H_1 \quad \text{also konstant}$$

$$F + V_2 = V_1$$

Weil die Normalkraft tangential angreift, gelten

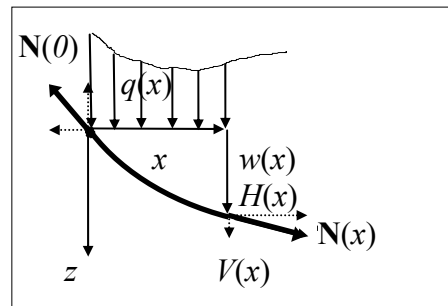
$$\frac{V_1}{H} = w_1' ; \quad \frac{V_2}{H} = w_2'$$

$$\Rightarrow \Delta w' = w_2' - w_1' = \frac{V_2 - V_1}{H} = -\frac{F}{H}$$

d. h. die Seilneigung springt infolge einer vertikalen Einzelkraft um $-F/H$. Für gegebenes F ist das Produkt $\Delta w' H$ also konstant gleich F . Versucht man $\Delta w'$ zu Null zu spannen, so wächst H und damit die Seilkraft über alle Grenzen.

In Bereichen, in denen keine Last angreift, ist $\Delta w' \equiv 0$ und damit die Seillinie gerade. Wird das Seil durch mehrere Einzelkräfte belastet, so spannt es sich als Polygon.

Das Seil sei nun mit einer vertikalen **Streckenlast** $q(x)$ belastet. Wir schneiden das Seil zwischen 0 und x frei und bilden die Gleichgewichts-Bedingungen im belasteten Zustand



$$\rightarrow : \quad \boxed{H(x) = H(0)} \quad \text{also konstant}$$

$$\downarrow : \quad V(x) = V(0) - \int_0^x q(\underline{x}) \, d\underline{x}$$

$$\Rightarrow \quad V(x)' = -q(x)$$

Momentengleichgewicht um 0 ergibt

$$\int_0^x q(\underline{x}) \cdot \underline{x} \, d\underline{x} + V(x) \cdot x - H \cdot w(x) = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad q(x) \cdot x + V(x)' \cdot x + V(x) - H' \cdot w(x) - H \cdot w(x)' &= 0 \\ &= V(x) - H \cdot w(x)' \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{w(x)'' = -\frac{q(x)}{H}} \quad \text{Seil-Differentialgleichung}$$

Ihre (unbestimmte) Integration liefert

$$w(x)' = -\frac{1}{H} \int q(x) \, dx + C_1$$

$$w(x) = -\frac{1}{H} \iint q(x) \, dx^2 + C_1 x + C_2$$

mit den Integrationskonstanten C_1 und C_2 . In Bereichen, wo $q(x) \equiv 0$ ist, beschreibt $w(x)$ eine Gerade. Man benötigt drei Bedingungen für die drei Konstanten H , C_1 und C_2 .

Zur Bemessung von Seilen benötigt man die Seilkraft. Sie ist immer tangential zur Seillinie, weshalb

$$\frac{V}{H} = w' \quad \text{und mit} \quad N^2 = H^2 + V^2$$

folglich

$$N(x) = \pm \sqrt{[H^2 + V(x)^2]} = \pm \sqrt{[H^2 (1 + w'(x)^2)]} = \pm H \sqrt{[1 + w'(x)^2]},$$

wobei die positive Wurzel die Seilkraft und die negative die Bogenkraft beschreibt. Ist $w' \equiv 0$, so verläuft das Seil horizontal und $|N| \equiv |H|$ ist minimal. Der maximale Durchhang $w_{max} = w(x_{max})$ des Seiles ist dort, wo

$$w(x_{max})' = 0$$

ist, das Seil also horizontal liegt. Dort ist die Seilkraft am kleinsten.

$|N|$ ist dort am größten, wo die **Seilneigung** $|w'|$ am größten ist

$$N_{max} = H \sqrt{(1 + w'_{extrem})^2}.$$



Golden Gate Brücke

Beispiel: Seil unter konstanter Streckenlast

Gegeben: $l > 0$, h , $N_{max} > 0$, $q(x) = q_0 > 0$ (konstant).

Aus der Integration der Seil-Differentialgleichung folgt

$$w(x)' = -\frac{q_0}{H}x + C_1$$

$$w(x) = -\frac{q_0}{2H}x^2 + C_1x + C_2.$$

Aus den Randbedingungen erhält man

$$w(0) = 0 = C_2$$

$$w(l) = h = -\frac{q_0 l^2}{2H} + C_1 l \Rightarrow C_1 = \frac{q_0 l}{2H} + \frac{h}{l}$$

$$\Rightarrow w(x) = \frac{q_0}{2H}(-x^2 + lx) + \frac{h}{l}x.$$

Die Seilkurve unter konstanter Streckenlast ist eine Parabel. Für die noch unbekannte Horizontalkraft H benötigen wir noch eine weitere Bedingung. Diese könnte darin bestehen, dass die maximale Seilkraft vorgeschrieben ist.

Die Seilkraft ist dort maximal, wo w' extremal ist, also für $h \geq 0$ am linken Lager. Dort ist die Seilneigung

$$w(0)' = C_1 = \frac{q_0 l}{2H} + \frac{h}{l}$$

und

$$\begin{aligned} N_{max} &= H \sqrt{[1 + w(0)']^2} \\ &= H \sqrt{[1 + (\frac{q_0 l}{2H} + \frac{h}{l})^2]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow N_{max}^2 &= H^2 (1 + \frac{q_0^2 l^2}{4 H^2} + \frac{q_0 h}{H} + \frac{h^2}{l^2}) \\ &= (1 + \frac{h^2}{l^2}) H^2 + q_0 h H + \frac{q_0^2 l^2}{4}, \end{aligned}$$

eine quadratische Gleichung für H . Sind beide Auflager auf gleicher Höhe ($h \equiv 0$), so gilt

$$H = \pm \sqrt{(N_{max}^2 - \frac{q_0^2 l^2}{4})},$$

wobei für Seile die positive Lösung gilt. Beispiel: Hängebrücke.

Beispiel: Seil unter Eigengewicht

Wirkt als Streckenlast nur das Eigengewicht des Seils ($\beta := \rho g A$ Gewicht pro Länge), so ist

$$\int q(x) dx = \int \beta ds = \beta \int ds = \beta \int \sqrt{[1 + w'^2]} dx$$

und deshalb

$$q(x) = \beta \sqrt{[1 + w(x)']^2}.$$

Aus der Seil-Differentialgleichung folgt

$$w(x)'' = -\frac{\beta}{H} \sqrt{[1 + w(x)']^2}.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist die **Kettenlinie** oder *Katenoide* von LEIBNIZ, CHRISTIAAN HUYGENS⁸ und JOHANN BERNOULLI (1704)

$$w(x) = \frac{a}{2} (e^{x/a} + e^{-x/a}) := a \cosh \frac{x}{a}$$

$$\Rightarrow \cosh^2 \frac{x}{a} := \frac{1}{4} (e^{2x/a} + e^{-2x/a} + 2 e^0).$$

Der Scheitelpunkt liegt bei $(0, a)$. Ihre Ableitungen sind

$$w(x)' = \frac{1}{2} (e^{x/a} - e^{-x/a}) := \sinh \frac{x}{a}$$

⁸ Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), Christiaan Huygens (1629 - 1695)

$$\Rightarrow \quad w(x)'^2 = \sinh^2 \frac{x}{a} = \frac{1}{4} (e^{2x/a} - 2 + e^{-2x/a})$$

$$w(x)'' = \frac{1}{2a} (e^{x/a} + e^{-x/a}) = \frac{1}{a} \cosh \frac{x}{a}.$$

Wegen des Additionstheorems

$$\cosh^2 \frac{x}{a} = 1 + \sinh^2 \frac{x}{a}$$

ist

$$1 + w(x)'^2 = \cosh^2 \frac{x}{a}$$

was die Dgl. erfüllt mit

$$a := \frac{-H}{\beta}.$$

Bögen sind Konstruktionen, die nur Druckkräfte aufnehmen können. Für sie gelten dieselben Differentialgleichungen wie für Seile mit den negativen Lösungen für H und $N(x)$. Die Lösung der Dgl. ist die **Stützlinie** des Bogens, die im Innern des Bogens nahe der Bogenachse verlaufen sollte. Bögen und Gewölbe bilden sich auch in Mauerwerk, in granularen Medien und sogar in Menschenansammlungen aus.

Zweidimensionale Konstruktionen, die nur Normalspannungen aufnehmen, sind **Membranen** und **Gewölbe** oder **Kuppeln**.

Geschichtliches⁹

Bögen aus Lehmziegeln wurden schon von den alten Ägyptern in der ersten Dynastie (3000 bis 2700 v. C.) gebaut und waren in der Antike bereits weit verbreitet. Große Meisterschaft im Bau von Bögen, (Kreuz-) Gewölben und auch Kuppeln erreichten die alten Römer (lat. *cupula*, kleine Tonne). Für Bögen seien hier Fensterbögen, Brücken und Aquädukte genannt, die z. T. in beeindruckenden Größen gebaut wurden. Als Form fanden zumeist Kreise bzw. Kugeln Verwendung, die man besonders leicht konstruieren konnte. Den genauen Verlauf der Stützlinien konnte man erst viel später berechnen.

Einer der imponierendsten Kuppelbauten der Antike ist das **Pantheon** in Rom, das 114-118 unter dem Baumeister APOLLodoros von Damaskus als Kugelkuppel über einem Kreiszyylinder mit gleichem Innendurchmesser von $43,30 \text{ m}$ errichtet wurde. Diese Größe wurde bis 1913 (Jahrhunderthalle in Breslau, 65 m) nicht überboten. Berechnungen der heutigen Zeit haben ergeben, dass hier die Stützlinie tatsächlich im Baukörper verläuft, der ohne Zugelemente (Ringanker) trägt.

⁹ nach: Szabo, I.: *Geschichte der mechanischen Prinzipien*. Birkhäuser, Basel, 1979
s.a. King, R.: *Brunelleschi's Dome: The Story of the Great Cathedral in Florence*. Pimlico, 2005.



Kuppel des Pantheon in Rom

Ein anderes wichtiges Kuppelbauwerk ist die **Hagia Sophia** in Konstantinopel, die unter Kaiser Justinian 532-537 unter der Leitung von ANTHEMIOS VON TRALLES und ISIDOR VON MILET errichtet wurde. Sie gilt wichtigstes Bauwerk der byzantinischen Kunst. Die Kuppel ist eine Pentatikkuppel mit Rippen mit einer elliptischen Form und einem Durchmesser von 31 m .



Hagia Sophia in Istanbul

Während im Mittelalter (Romanik, Gotik) die Bögen und Gewölbe auf das Genialste weiterentwickelt wurden, wurde die Kuppelkonstruktion in der Renaissance wieder aufgegriffen. Hier seien insbesondere die Dome von Florenz und Rom genannt.

Im 13. Jhdt. war Florenz bereits eine sehr reiche Stadt. Der Grundstein für **Santa Maria del Fiore** wurde bereits 1296 gesetzt. Verschiedene Baumeister planten den Bau, hatten jedoch unterschiedliche Konzepte. Durch Kriege und Seuchen wurde der Bau immer wieder

verzögert. Der Maler GIOTTO DI BONDONE interessierte sich hauptsächlich für den Campanile. Die Kuppelfrage blieb lange ausgespart. 1418 war das Hauptschiff nahezu fertig. Es klaffte in dem Bau ein achteckiges Loch von 42 m Durchmesser. Daraufhin wurde für die Kuppel ein Wettbewerb ausgeschrieben, den FILIPPO BRUNELLESCHI mit einem waghalsig genialen Vorschlag gewann. Die Lösung bestand aus zwei Schalen, einer dünnen äußeren ($37\div 75\text{ cm}$) und einer dickeren inneren ($1,5\div 2,1\text{ m}$). Sie übernehmen die oktagonale Form des Baptisteriums und tragen über 8 Haupt- und 16 Nebenrippen. Dazwischen werden Tonnengewölbe (= zylindrische G.) errichtet. Als Zuelemente wird Eisen und Eichenholz verwendet. Es wurde lediglich ein freischwebendes Gerüst über dem oktagonalen Tambour gebaut. Die Rippen wurden auf *fliegender Schalung* gebaut. Viele neue Techniken und Materialien wurden verwendet. So erhielt z. B. jeder Steinquader einen besonderen Zuschnitt. Nach 14 Jahren war die Kuppel vollendet, die Laterne darauf jedoch erst 1461.

Ein anderes wichtiges Beispiel ist der **Petersdom** in Rom, der hundert Jahre später (1564) begonnen wurde. Die Kuppel wurde im Prinzip genauso zweischalig gebaut. Der Tambour ist hier kreisförmig mit Innendurchmesser von $41,44\text{ m}$, der durch eiserne Ringanker verstärkt wurde. Neben anderen Baumeistern war MICHELANGELO BUONARROTI für den Kuppelbau verantwortlich.



Kuppel des Petersdoms im Vatikan

Im 18. Jhdt. traten Schäden und Risse auf, weswegen der Papst drei Mathematikern und Mönchen und dem Mathematiker und Ingenieur GIOVANNI POLENI aus Padua den Auftrag gab, Ursachen und deren Beseitigung anzugeben. Deren Berichte wurden 1743 bzw. 1748 veröffentlicht. In dem Bericht der *tre matematici* heißt es einleitend:

"Wir sind vielleicht verpflichtet, uns zu entschuldigen bei den vielen, die nicht nur die Praxis der Theorie vorziehen, sondern die erste allein für notwendig und angebracht halten, die zweite dagegen vielleicht sogar für schädlich."

Sie führen die Schäden darauf zurück, dass die Zugringe nicht ausreichend dimensioniert sind und errechnen nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen 110 Tonnen Fehlbetrag und empfehlen den Einbau weiterer Zugringe. Denselben Vorschlag macht auch POLENI, wenn auch mit einer anderen Begründung. Seine weiteren Ausführungen stützen sich auf Kenntnisse von dem französischen Physiker PHILIPPE DE LA HIRE (1640-1718) aus 1695. Dessen Gewölbepinzipp lautet: man muss die Gewölbeform so wählen, dass jeder durch eine Kugel veranschaulichte Stein mit der Resultierenden aus dem Eigengewicht und der Reaktion des vorhergelegten Steines senkrecht auf den darauffolgenden drückt. In diesem Falle ist das Gleichgewicht auch ohne Bindemittel gesichert. Auf diese Weise kann man sich die Stützlinie konstruieren. Nun erinnerte man sich der Kettenlinie. Mit diesem Problem beschäftigte sich schon GALILEI, der meinte, die Kurve sei eine Parabel. HUYGENS hat 1690 nachgewiesen, dass dies nicht möglich sei. 1675 schrieb HOOKE ein lateinisches Anagramm mit der Lösung: *Wie die biegeschlaffe Linie hängt, so wird umgekehrt das stabile Gewölbe stehen*. Er beriet in diesem Sinne CHRISTOPHER WREN bei dem Entwurf der St. Paul's Cathedral in London. JAKOB BERNOULLI und LEIBNIZ gaben um 1704 die analytische Lösung der Dgl. an. Die Analogie zur Stützlinie wurde von dem Mathematiker GREGORY entdeckt. POLENI beschreibt die Stützlinie als Umkehrung der Kettenlinie oder als Verbindende von Kugelmittelpunkten, zwischen denen nur Normalkräfte übertragen werden. Das Kräftepolygon zwischen Kontaktkräften und Kugelgewicht wird bereits von ihm skizziert. Durch einige Kunstgriffe berücksichtigt er, dass die Kuppelschale des Peterdoms verschieden dick ist und durch die Laterne unterbrochen wird. Diese Vorschläge wurden öffentlich diskutiert und von einem Unbekannten folgendermaßen kritisiert:

"Wenn die Peterskuppel ohne Mathematik und vor allem ohne die in unseren Tagen so gepflegte Mechanik erdacht, entworfen und erbaut werden konnte, so wird sie auch restauriert werden können ohne Mithilfe der Mathematiker [...]. Michelangelo konnte keine Mathematik und war trotzdem imstande, die Kuppel zu erbauen."

Nach den Vorschlägen der Gutachter baute der Architekt VANVITELLI (1743-1748) fünf weitere Zugringe in die Kuppel ein. Das Vertrauen zu den erstellten theoretischen Untersuchungen hatte zur Folge, dass andere, von dritter Seite vorgeschlagene Maßnahmen wie das Verfüllen der Treppenschächte und Nischen, das Abtragen der Laterne usw. unterblieben und die majestätische Architektur der Peterskirche keinen Schaden erlitten hat.

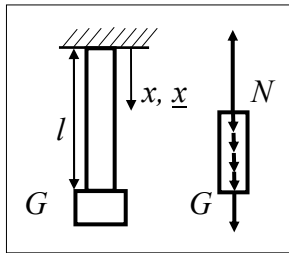
Die größte selbsttragende Kuppel hat der **Lusiana Superdome** in New Orleans mit 207 m Durchmesser. Der **Millennium Dome** in London misst 365 m, ist aber von Stützen abge-spannt.



Jahrhunderthalle in Breslau

Zug- und Druckstäbe

Wir betrachten einen Stab, der oben befestigt ist und an dem unten ein Gewicht G hängt.



Infolge der Gravitation wird sich der Stab verlängern, d. h. jeder Punkt unterhalb der Befestigung wird sich nach unten verschieben. Diese Verschiebung $u(x)$ zu bestimmen ist Ziel dieses Abschnitts.

Dazu machen wir folgende Annahmen:

- A1) Der Stab ist gerade (aber nicht notwendig prismatisch).
- A2) Das Material ist fest und homogen über den Querschnitt (aber nicht notwendig längs seiner Achse).
- A3) Die Temperatur des Stabes ist zeitlich und über dem Querschnitt konstant (aber nicht notwendig längs seiner Achse).
- A4) Der Stab ist im Gleichgewicht (Statik).
- A5) Die Lasten wirken ausschließlich in Richtung der Stabachse (Axiallasten).

Aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmen wir den Verlauf der Schnittlasten. Die Normalkraft ist

$$N(x) = \int_x^l \rho(\underline{x}) g A(\underline{x}) d\underline{x} + G$$

mit

| | |
|-----------|--------------------------------|
| G | Gewichtskraft |
| $\rho(x)$ | Massendichte |
| g | irdische Gravitationskonstante |
| $A(x)$ | Querschnittsfläche |

Querkräfte und Momente treten infolge A5 nicht auf. Die Normalkraft

$$N(x) = \int_{\mathcal{A}} f^A(x) dA = \int_{\mathcal{A}} \sigma(x) dA$$

resultiert aus der axialen Kraftdichte f^A in Achsrichtung in der Querschnittsfläche. Sie wird als **Normalspannung** σ bezeichnet, weil sie normal (= senkrecht) auf der Querschnittsfläche wirkt, und berechnet sich als Grenzwert des Quotienten von Normalkraft und Fläche, wenn letztere auf einen Punkt zusammengezogen wird

$$\sigma(x) := \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N(x)}{\Delta A(x)}.$$

Die Dimension der Spannungen ist [Kraft/Fläche]. Übliche Einheit ist das *Pascal*¹⁰:

$$Pa = N m^{-2}.$$

¹⁰ Blaise Pascal (1623 - 1662)

Um das allgemeine dreidimensionale Problem auf ein eindimensionales zu reduzieren, treffen wir folgende Annahme.

A6) Die Normalspannung σ ist über den Querschnitt konstant (hängt also nur von x ab).

Damit ist

$$N(x) = \int_{\mathcal{A}(x)} \sigma(x) dA = \sigma(x) A(x) \quad \Rightarrow \quad \sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)}.$$

Dies ist nur für prismatische Stäbe bei geeigneter Lasteinleitung gut erfüllt, für wenig veränderliche Querschnitte nur näherungsweise, während an Stellen starker Querschnittsveränderungen die eindimensionale Theorie ungenau wird.

Aus Zug- und Druckversuchen weiß man, dass die Spannung nicht beliebig gesteigert werden kann, sondern dass es eine **Festigkeitsgrenze** für σ gibt, bei deren Überschreiten der Stab versagen könnte. Man bemisst deshalb Stäbe bezüglich einer zulässigen Zugspannung σ_{zul}^+ und Druckspannung σ_{zul}^- mit A6 als

$$-\sigma_{zul}^- \leq \sigma = \frac{N}{A} \leq \sigma_{zul}^+.$$

Die zulässigen Spannungen sind für viele Materialien in Normen (empirisch) festgesetzt und beinhalten einen Sicherheitsfaktor, der von der Anwendung abhängt. Die folgenden groben Werte sind Beispiele hierfür.

| | |
|----------------------|---|
| Stahl St37 | $\sigma_{zul}^+ = 140 \div 180 \text{ MPa}$ |
| Stahl St52 | $\sigma_{zul}^+ = 210 \div 270 \text{ MPa}$ |
| Spannstähle | $\sigma_{zul}^+ = \quad \div 900 \text{ MPa}$ |
| Aluminium | $\sigma_{zul}^+ = 100 \text{ MPa}$ |
| Kupfer | $\sigma_{zul}^+ = 40 \text{ MPa}$ |
| Beton | $\sigma_{zul}^- = 8 \div 15 \text{ MPa}$ |
| Holz in Faserrichtg. | $\sigma_{zul} = 6 \div 14 \text{ MPa}$ |

Damit wir aus den Belastungen, nunmehr ausgedrückt durch den Spannungsverlauf $\sigma(x)$, auf den Verschiebungsverlauf $u(x)$, oder umgekehrt schließen können, muss zwischen σ und u ein deterministischer Zusammenhang bestehen, der sicherlich eine Materialeigenschaft ist. Der einfachste Ansatz dafür ist eine Beziehung zwischen momentanen Spannungen und momentanen Verschiebungen.

A7) Die momentanen Spannungen hängen von den momentanen Verschiebungen ab.

Materialien, bei denen dies gilt, heißen **elastisch**. Damit ist ausgeschlossen, dass sich das Material an zurückliegende Spannungs- oder Verschiebungsprozesse in irgendeiner Weise erinnert. Daraus folgt, dass nach einer Entlastung die Verschiebung vollständig zurückgeht.

Für einen elastischen Stab hängt also die Spannung $\sigma(x)$ an der Stelle x von den Verschiebungen $u(\underline{x})$, $0 \leq \underline{x} \leq l$ im Stab ab.

Ist $u(\underline{x})$ analytisch, so können wir es an der Stelle x in eine TAYLOR-Reihe entwickeln

$$u(\underline{x}) = u(x) + u(x)' (\underline{x} - x) + \frac{1}{2} u(x)'' (\underline{x} - x)^2 + \dots$$

und die Abhängigkeit von der Funktion $u(\underline{x})$ durch eine Abhängigkeit von dem Funktionswert und den Ableitungen an einer Stelle

$$u(x), u(x)', u(x)'', \dots$$

ersetzen.

Dass das erste Argument die Spannungen nicht beeinflussen kann, macht man sich durch folgendes Gedankenexperiment klar: Verschiebt man den Stab als starres Ganzes um u_0 , so ist

$$u(x) = u_0 = \text{konstant}$$

und alle Ableitungen Null. Aus der Erfahrung wissen wir aber, dass Starrkörperverschiebungen ohne Einfluss auf die Spannungen bleiben.

Damit hängen die Spannungen aber immer noch von den unendlich vielen Ableitungen ab, was wenig praktikabel wäre. Wir machen deshalb in der folgenden Annahme eine Einschränkung auf den einfachsten, nicht-trivialen Zusammenhang zwischen Spannungen und Verschiebungen

A8) Die Spannungen $\sigma(x)$ hängen nur von $u(x)'$ ab: $\sigma = f(u')$.

Ein solches elastisches Material wird **einfach** genannt. Der Ausdruck

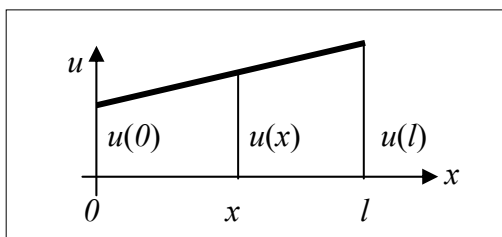
$$\varepsilon(x) := u(x)' = \frac{du(x)}{dx}$$

heißt (Längs-) **Dehnung** oder **Deformation**. Er ist dimensionslos. Ist $\varepsilon > 0$, so handelt es sich um eine positive Dehnung oder **Streckung**, ist $\varepsilon < 0$, um eine negative Dehnung oder **Stauchung**. Beschreibt der als verschiebungsfrei deklarierte Zustand ($u(\underline{x}) \equiv 0, 0 \leq \underline{x} \leq l \Rightarrow \varepsilon(\underline{x}) \equiv 0$) den spannungsfreien Zustand ($\sigma(\underline{x}) \equiv 0$), so ist f eine Funktion, die durch den Ursprung geht:

$$f(0) = 0.$$

In Bereichen *linearer* Verschiebungen und damit *konstanter* Dehnung gilt die einfache Beziehung

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u(x) - u(0)}{x} = \frac{u(l) - u(0)}{l} = \frac{\Delta l}{l} \quad 0 < x \leq l.$$



A9) Die Verschiebungen und Dehnungen seien (betragsmäßig) klein.

Klein soll hierbei bedeuten, dass wir $f(x)$ durch eine lineare Funktion beschreiben können, ohne dass die Vernachlässigung der Nichtlinearität zu nicht mehr tolerierbaren Fehlern führt.

A10) Der Zusammenhang zwischen den Spannungen und den Dehnungen sei linear

| | |
|--------------------------|---------------------|
| $\sigma = E \varepsilon$ | $E \in \mathcal{R}$ |
|--------------------------|---------------------|

Dies ist das **HOOKEsche Gesetz**, das ein einachsiges, einfaches linear elastisches Materialverhalten beschreibt. Es ist nach dem englischen Physiker ROBERT HOOKE¹¹ benannt, der es um 1675 lateinisch so formulierte

ut tensio sic vis

(als Anagramm <ceiinossstuv>).

Das HOOKEsche Gesetz ist das einfachste und zugleich wichtigste Materialgesetz der Festkörpermechanik. Obwohl es alle nicht-linearen und alle inelastischen Effekte vernachlässigt, beschreibt es viele Werkstoffe in ingenieurmäßigen Anwendungsbereichen hinreichend genau.

Die reelle Materialkonstante E heißt **Elastizitätsmodul** oder elastische Steifigkeit (engl. *YOUNG's¹² modulus*). Da ε dimensionslos ist, hat E die Dimension [Spannung = Kraft pro Fläche].

Für E erwarten wir positive Werte, die durch Messungen (z. B. am einachsigen Zugversuch) bestimmt werden und in Handbüchern für die Materialien zusammengestellt sind.

Beispiele sind (Durchschnittswerte bei Raumtemperatur) $GPa = 10^9 Pa = 10^9 N/m^2$

| | |
|-----------------|---------------------|
| Eisen und Stahl | $E = 210 GPa$ |
| Aluminium | $E = 70 GPa$ |
| Kupfer | $E = 120 GPa$ |
| Messing | $E = 100 GPa$ |
| Nickel | $E = 200 GPa$ |
| Zinn | $E = 50 GPa$ |
| Glas | $E = 70 GPa$ |
| Beton | $E = 30 GPa$ |
| Holz | $E = 8 \div 16 GPa$ |

Da größere **Temperaturänderungen** auch zu Dehnungen führen können, erweitert man für diesen Fall das HOOKEsche Gesetz um einen Term, der im einfachsten Falle linear in der Temperaturdifferenz gegenüber einer Bezugstemperatur (oft Raumtemperatur) angesetzt wird.

A11) Die Wärmedehnung sei linear in der Temperaturdifferenz

$$\varepsilon_T = \alpha \Delta\theta$$

mit

$$\varepsilon_T \quad \text{Wärmedehnung [dimensionslos]}$$

¹¹ Robert Hooke (1635 - 1703)

¹² Thomas Young (1773 - 1829)

$\Delta\theta$ Temperaturdifferenz [Grad K oder C] bez. Bezugstemperatur
 α thermischer Ausdehnungskoeffizient [Grad K^{-1}]

Damit lautet das thermoelastische HOOKEsche Gesetz

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta\theta \quad (\text{lineare Thermoelastizität})$$

Für den Ausdehnungskoeffizient α hat man folgende Werte ermittelt:

| | |
|--------------|--|
| Aluminium | $\alpha = 23 \cdot 10^{-6} K^{-1}$ |
| Blei | $\alpha = 29,4 \cdot 10^{-6} K^{-1}$ |
| Eisen, Stahl | $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} K^{-1}$ |
| Kupfer | $\alpha = 16,8 \cdot 10^{-6} K^{-1}$ |
| Nickel | $\alpha = 12,8 \cdot 10^{-6} K^{-1}$ |
| Stahl | $\alpha = 11,7 \cdot 10^{-6} K^{-1}$ |
| Zinn | $\alpha = 27 \cdot 10^{-6} K^{-1}$ |
| Messing | $\alpha = 18 \cdot 10^{-6} K^{-1}$ |
| Beton | $\alpha = 10 \cdot 10^{-6} K^{-1}$ |
| Glas | $\alpha = 0,5 \cdot 10^{-6} K^{-1}$ |
| Keramik | $\alpha = 4 \cdot 10^{-6} K^{-1}$ |
| Holz | $\alpha = 3 \div 9 \cdot 10^{-6} K^{-1}$ |

Für den betrachteten Zugstab erhalten wir damit insgesamt die Differentialgleichung

$$u' = \frac{N}{EA} + \alpha \Delta\theta$$

Alle hierin vorkommenden Größen können von der Längskoordinate x abhängen. Das Produkt EA heißt **Dehnsteifigkeit** des Stabes.

Nur in Spezialfällen sind die hierin vorkommenden Variablen bereichsweise konstant, wie

u' in Bereichen konstanter Dehnung (linearer Verschiebung)
 N in Bereichen ohne äußere Lasten
 E, α in Bereichen mit homogenem Material
 A in prismatischen Bereichen
 $\Delta\theta$ in Bereichen gleicher Temperatur

Zur Lösung des anfänglich formulierten Problems der Bestimmung der Verschiebungen in einem Zug-/Druck-Stab unter den gemachten Abnahmen benötigt man die Kenntnis

- der Geometrie ($A(x)$, l) und Randbedingungen des Stabes
- der aus den angreifenden Kräften resultierenden Normalkräfte $N(x)$
- der Temperaturänderungen $\Delta\theta(x)$
- der Materialkonstanten E , α .

In diesem Fall hat die obige Differentialgleichung eine eindeutige Lösung $u(x)$, $0 \leq x \leq l$.

Ist in unserem Beispiel der Stab

- aus homogenem Material
- prismatisch

- bei Raumtemperatur ($\Delta\theta = 0$),
so ist

$$N(x) = \rho g A (l - x) + G$$

und damit

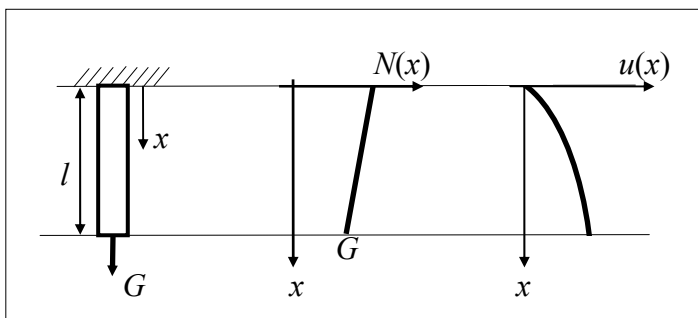
$$u(x)' = \frac{N}{EA} = \frac{\rho g(l - x)}{E} + \frac{G}{EA},$$

woraus mit der Verschiebungs-Randbedingung

$$u(0) = 0$$

folgt

$$u(x) = \frac{\rho g}{E} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) + \frac{G}{EA} x.$$



Federn

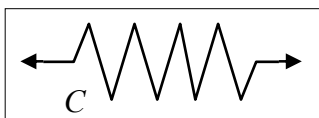
Greifen an einem elastischen Zugstab nur Endkräfte an, so besteht ein linearer Zusammenhang zwischen der Kraft F und der Längenänderung des Stabes Δl

$$F = C u(l) = C \Delta l$$

C wird als Federsteifigkeit bezeichnet, der Kehrwert als Nachgiebigkeit. Für einen homogenen prismatischen Stab berechnet sich der Proportionalitätsfaktor beispielsweise als

$$C = EA/l.$$

Man benutzt ein Federsymbol einer Schraubenfeder

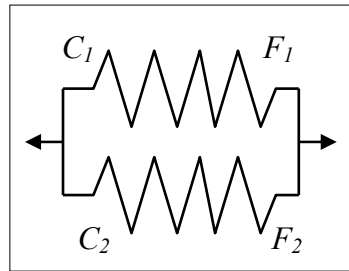


Analog hierzu gibt es Dreh- oder Spiralfedern, bei denen der Drehwinkel proportional zum angreifenden Moment ist

$$M = C \Delta\varphi.$$

Bei einer **Parallelschaltung** zweier Federn sind die Längenänderungen gleich

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 =: \Delta l$$



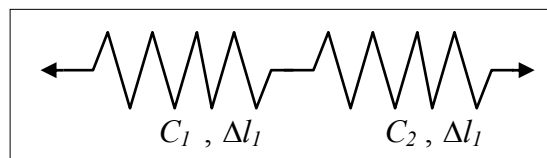
während sich die Kräfte addieren

$$F = F_1 + F_2 = C_1 \Delta l + C_2 \Delta l = (C_1 + C_2) \Delta l .$$

Bei einer Parallelschaltung addieren sich die Federsteifigkeiten.

Bei einer **Reihenschaltung** von Federn sind die Federkräfte gleich

$$F_1 = F_2 = F$$



und die Längenänderungen addieren sich

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = F / C_1 + F / C_2 = (1/C_1 + 1/C_2) F .$$

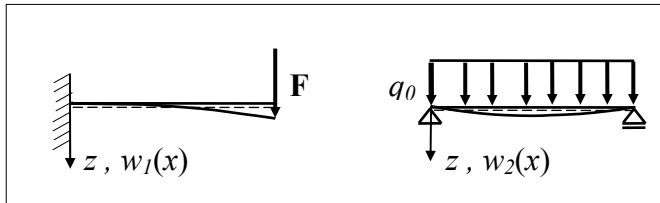
Bei einer Reihenschaltung addieren sich die Federnachgiebigkeiten. Damit erhält man

$$F = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \Delta l .$$

Durch Parallel- und Reihenschaltungen kann man Strukturen erzeugen, die sich insgesamt immer wieder als eine einfache Feder beschreiben lassen.

Balkenbiegung

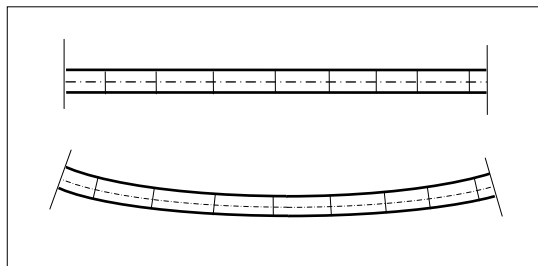
Die Theorie der Balkenbiegung wurde im Wesentlichen zwischen 1694 und 1705 von JACOB BERNOULLI¹³ entwickelt.



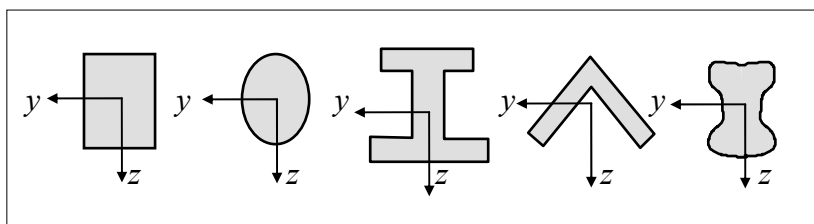
Um die Durchbiegung der beiden Beispiele zu bestimmen, führen wir (durch die gestrichelte Faser) ein KOOS ein und bezeichnen die Verschiebung der Balkenachse in Richtung z mit $w(x)$.

Folgende Annahmen sollen erfüllt sein:

- B1) Der Balken ist unbelastet **gerade**.
- B2) Sein Material ist über den Querschnitt **homogen** und **linear elastisch** (HOOKEsches Gesetz).
- B3) Normalkräfte im Balken sind nicht vorhanden; es greifen nur Momente $M_y(x)$ und Querkräfte $Q_z(x)$ an (**ebene Belastung**).
- B4) Der Einfluss der Querkräfte auf die Verformung des Balkens kann vernachlässigt werden (wird später gesondert untersucht).
- B5) **BERNOULLI'sche Hypothese**
Die Balkenquerschnitte bleiben **eben** und **senkrecht** auf der Balkenachse.

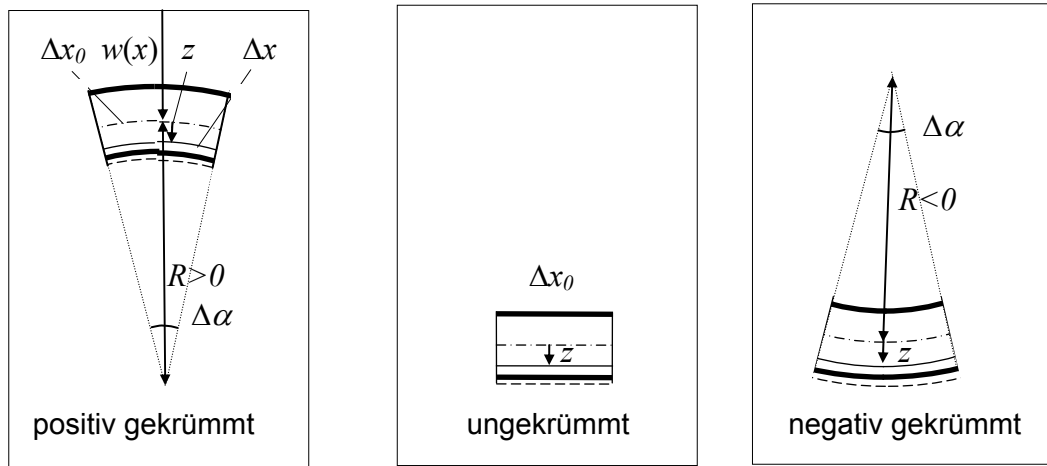


- B6) Die Verschiebungen (= Durchbiegungen) sind **klein**.
- B7) Der Querschnitt sei **axial-symmetrisch** bezüglich der z -Achse. Die Lasten greifen in Richtung dieser Achse an (ebene Biegung).



¹³ Jacob Bernoulli (1655 - 1705)

Wir schneiden an zwei Querschnitten im Abstand Δx_0 ein Stück des Balkens frei.



Dieses Balkenstück krümmt sich infolge der Biegemomente, die Querschnitte bleiben jedoch eben und normal zur Balkenachse gemäß B5. Auf der einen Balkenseite werden die Fasern gedehnt, auf der gegenüberliegenden gestaucht. Aus Stetigkeitsgründen muss es zwischen dem Zug- und Druckbereich eine **neutrale Faser** geben, die ihre ursprüngliche Länge Δx_0 behält. In die neutrale Faser legen wir den Ursprung der z -Koordinate. Die um $w(x)$ verschobene Lage der neutralen Faser wird **Biegelinie** genannt.

Der **Krümmungsradius** $R(x)$ der Biegelinie an der Stelle x ist definiert als Grenzwert des Abstandes der Biegelinie vom Schnittpunkt der verlängerten Querschnittsradien für $\Delta x_0 \rightarrow 0$. Die Vorzeichenkonvention von R ist aus der Abbildung ersichtlich.

Betrachten wir nun eine Faser im Abstand z von der neutralen Faser. Unverformt hat sie die Länge Δx_0 . Für die verformte Länge Δx gilt für den Grenzwert $\Delta x_0 \rightarrow 0$ nach dem Strahlensatz die Proportionalität

$$\frac{\Delta x_0}{R} = \frac{\Delta x}{R - z} \Rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta x_0} = \frac{R - z}{R} = 1 - \frac{z}{R} .$$

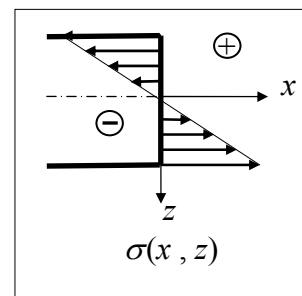
Seine Dehnung ist

$$\varepsilon(x, z) = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta x - \Delta x_0}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta x(z)}{\Delta x_0} - 1 = - \frac{z}{R(x)} ,$$

die nur von x und z abhängt, nicht aber von y .

Nach dem HOOKEschen Gesetz gilt für die Normalspannungen

$$\sigma(x, z) = E(x) \varepsilon(x, z) = - \frac{E(x)}{R(x)} z$$



mit dem Elastizitätsmodul $E(x)$, also eine lineare Spannungsverteilung im Querschnitt. Die daraus resultierende Normalkraft $N(x)$ soll gemäß B3 verschwinden

$$0 = N(x) = \int_{\mathcal{A}} \sigma dA = \int_{\mathcal{A}} -E(x) \frac{z}{R} dA = -\frac{E(x)}{R(x)} \int_{\mathcal{A}} z dA \Rightarrow \int_{\mathcal{A}} z dA = 0.$$

Damit geht die neutrale Faser ($z \equiv 0$) (unabhängig vom Biegemoment) durch den Flächenmittelpunkt vom Querschnitt.

Die Biegemomente infolge $\sigma(x, z)$ sind

$$M_y(x) = \int_{\mathcal{A}} \sigma(x, z) z dA = \frac{-E(x)}{R(x)} \int_{\mathcal{A}} z^2 dA = \frac{-E(x) I_y(x)}{R(x)}$$

mit dem **Flächenträgheitsmoment**

$$I_y(x) := \int_{\mathcal{A}} z^2 dA > 0$$

bezüglich der neutralen Faser.

Damit ergibt sich als Beziehung zwischen Spannung und Biegemoment

$$\sigma(x, z) = \frac{M_y(x)}{I_y(x)} z$$

Das Extremum liegt dort, wo z am größten ist, also immer am Rand des Querschnitts. Je nach dem Vorzeichen vom Biegemoment liegt also der Zugbereich ($\sigma > 0$) im Bereich $z > 0$ und der Druckbereich ($\sigma < 0$) im Bereich $z < 0$ (für $M_y > 0$), oder umgekehrt (für $M_y < 0$).

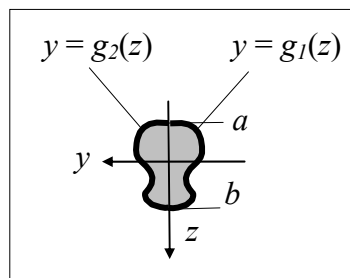
Die Biegemomente in z -Richtung sind

$$M_z = - \int_{\mathcal{A}} \sigma(x, z) y dA = \frac{M_y(x)}{I_y(x)} \int_{\mathcal{A}} (-zy) dA.$$

Das Integral heißt **Deviationsmoment**

$$I_{yz}(x) := - \int_{\mathcal{A}} zy dA = - \int_{z=a}^{z=b} \int_{g_1(z)}^{g_2(z)} zy dy dz = - \int_{z=a}^{z=b} z \left(\frac{y^2}{2} \right) \Big|_{g_1(z)}^{g_2(z)} dz.$$

Wegen der in B7 vorausgesetzten Symmetrie des Querschnitts ist jedoch $g_1(z) = -g_2(z)$ und damit das Integral gleich Null und $M_z = 0$ (in Übereinstimmung mit B3).



Um den Zusammenhang zwischen der Durchbiegung $w(x)$ und dem Krümmungsradius der Biegelinie $R(x)$ aufzustellen, betrachten wir die Differential-Geometrie ebener gekrümmter Kurven. Die Ableitung $w(x)'$ entspricht dem Tangens des Neigungswinkels $\alpha(x)$ der Kurve

$$w(x)' = \frac{dw(x)}{dx} = \tan \alpha(x) \Rightarrow \alpha(x) = \arctan w(x)' .$$

Also ist

$$\frac{d\alpha(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \{ \arctan w(x)' \} = \frac{w(x)''}{1 + w(x)'^2} .$$

Das Linienelement der Kurve ist (siehe Seile)

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dw^2)} = \sqrt{\left\{ dx^2 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx^2 \right\}} = \sqrt{\{ 1 + w(x)'^2 \}} dx .$$

Die **Krümmung** κ einer Kurve ist definiert als Ableitung des Neigungswinkels α nach der Bogenlänge s

$$\kappa(x) := \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha(x)}{dx} \frac{dx}{ds} = \frac{w(x)''}{\left(1 + w(x)'^2 \right)^{3/2}}$$

(nach EULER). Diese Beziehung ist nichtlinear. Entwickeln wir den Bruch in eine TAYLOR-Reihe

$$\frac{1}{\left(1 + w'^2 \right)^{3/2}} = 1 - \frac{3}{2} w'^2 + \frac{15}{8} w'^4 + \dots$$

und betrachten gemäß B6 nur den linearen Anteil, so erhalten wir

$$\kappa(x) \approx w(x)'' .$$

Man entnimmt der Zeichnung den Zusammenhang $ds = R d\alpha$, woraus folgt $\kappa = \frac{1}{R}$.

Mit $M_y(x) = \frac{-E(x) I_y(x)}{R(x)}$ erhalten wir die **Biegelinien-Differentialgleichung**

| | |
|--------------------------------|-----------------------------|
| $M_y(x) = -E(x) I_y(x) w(x)''$ | NAVIER ¹⁴ (1826) |
|--------------------------------|-----------------------------|

Das Produkt $E I_y$ heißt **Biegesteifigkeit**. In Analogie zur Zugstab-Dgl. $N = EA u'$ hängt die Schnittlast M_y wieder ab

- vom Material (E)
- von der Querschnittsgeometrie (I_y) und
- von der Verschiebung $w(x)$.

Durch zweifache Integration erhält man die Biegelinie als

¹⁴ Louis Marie Henri Navier (1785 - 1836)

$$w(x) = -\iint \frac{M_y}{E I_y} dx^2 + C_0 x + C_1$$

mit zwei Integrationskonstanten C_0 und C_1 , die aus (kinematischen) **Rand- und Übergangsbedingungen** für die Biegelinie bestimmt werden. Diese sind der Tabelle der Lager und Gelenke zu entnehmen.

In Bereichen homogenen Materials und prismatischen Querschnitts hängt die Biegesteifigkeit $E I_y$ nicht von x ab und kann vor das Integral gezogen werden, was die Integration vereinfacht.

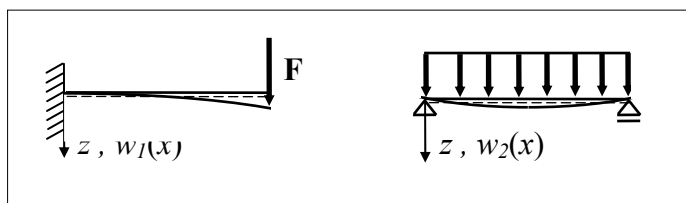
Wir erhalten folgende analoge Gleichungen.

| | Dehnung | Biegung |
|-----------------------|---------------------------------|--|
| Gleichgewicht | $N(x)' = -n(x)$ | $M_y(x)'' = Q_z(x)' = -q(x)$ |
| Querschnittsgeometrie | $A(x) = \int_{\mathcal{A}} dA$ | $I_y(x) := \int_{\mathcal{A}} z^2 dA$ |
| Spannungsverteilung | $\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)}$ | $\sigma(x, z) = \frac{M_y(x)}{I_y(x)} z$ |
| Elastizitäts-Dgl. | $N = E A u'$ | $M_y = -E I_y w''$ |

Manchmal benötigt man an Schnittstellen **Übergangsbedingungen** wie

$$w_1(x) = w_2(x) \quad \text{und} \quad w_1(x)' = w_2(x)'$$

Beispiele: Unter dieser Voraussetzung erhalten wir für die beiden Beispiele



Biegemomente

$$M_{y1}(x) = -F(l-x)$$

$$M_{y2}(x) = \frac{q_0}{2}(lx - x^2)$$

Randbedingungen

$$w_1(0) = 0 \qquad w_2(0) = 0 = w_2(l)$$

$$w_1(0)' = 0$$

Biegelinie

$$w_1(x) = \frac{F}{EI_y} \left(l \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \qquad w_2(x) = \frac{q_0}{24EI_y} (l^3 x - 2 l x^3 + x^4)$$

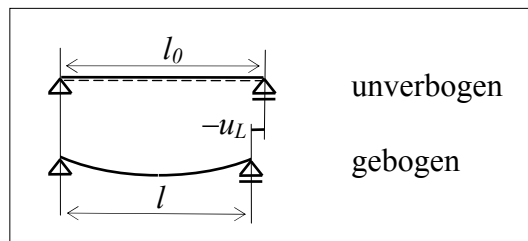
Kleine Verformungen

Wir haben bisher vorausgesetzt, dass

- die Lasten so klein sind, dass damit auch
- die Verschiebungen und Verformungen klein sind, so dass es gerechtfertigt ist
- die Verschiebungs-Verzerrungsbeziehungen zu linearisieren, also z. B. in $\varepsilon = -\kappa \cdot z$ die Krümmung κ durch w'' zu ersetzen (geometrische Linearisierung); und
- die Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen zu linearisieren: $\sigma = E \varepsilon$ (HOOKEsches Gesetz) (physikalische Linearisierung).

Damit erhalten wir eine **lineare Theorie**, die nur für **kleine Verformungen** gilt. Obwohl der Anwendungsbereich einer solchen Theorie bei Ingenieurproblemen sehr groß ist, werden bestimmte Effekte hierbei grundsätzlich vernachlässigt. Beispielsweise

1) Längsverschiebungen infolge Biegung



Die Bogenlänge einer Kurve $w(x)$ in einem Intervall $[0, l]$ ist (s. Seile)

$$l_0 = \int_{\mathcal{L}} ds = \int_0^l \sqrt{1 + w'^2} dx$$

wegen der Reihenentwicklung der Wurzel

$$\sqrt{1 + w'^2} = 1 + \frac{1}{2} w'^2 - \frac{1}{8} w'^4 + \dots \approx 1 \quad \Rightarrow \quad l_0 \approx \int_0^l dx = l$$

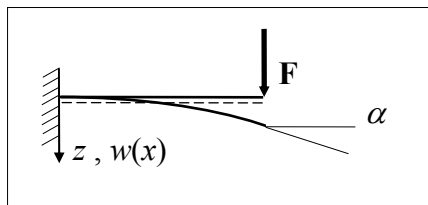
Es ist

$$u_L = l - l_0,$$

was bei Vernachlässigung der nichtlinearen Terme gleich Null ist.

Die Längsverschiebung infolge Biegung wird in der linearen Theorie vernachlässigt.

2.) Die Neigung der Biegelinie ist



$$w' = \tan \alpha = \alpha + \frac{1}{3} \alpha^3 + \frac{2}{15} \alpha^5 + \dots,$$

so dass man in der linearen Theorie

$$w' \approx \alpha$$

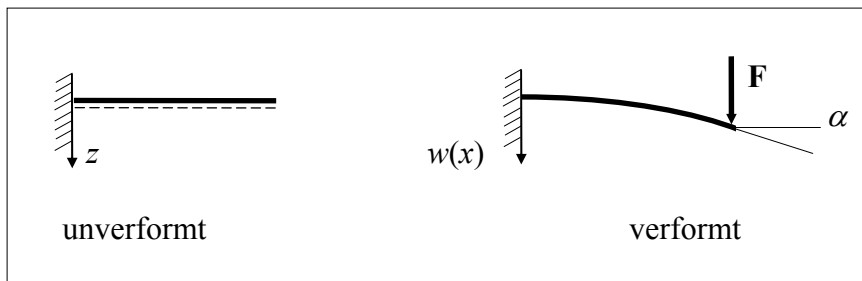
setzt. Dabei ist der Winkel im Bogenmaß auszudrücken.

In der linearen Theorie steht also

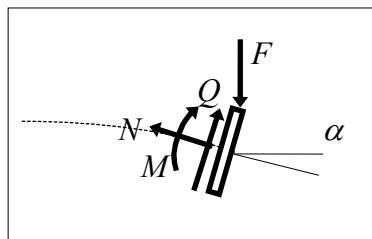
- $w(x)$ für die Verschiebung
- $w'(x)$ für die Verdrehung
- $w''(x)$ für die Krümmung

des Balkens.

3.) Gleichgewicht in der unverformten und verformten Lage



Schneiden wir den Endquerschnitt frei, so erhalten wir die Gleichgewichts-Bedingungen



axial:
$$N = F \sin \alpha = F \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} + \dots \right) \approx 0$$

transversal:
$$Q = F \cos \alpha = F \left(1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \dots \right) \approx F,$$

wobei vorausgesetzt wird, dass α betragsmäßig klein ist.

In der linearen Theorie werden die Gleichgewichtsbedingungen am unverformten System angesetzt.

4.) In der linearen Theorie gilt das

Superpositionsprinzip der Verschiebungen

Die Verschiebungen $u(x)$ und $w(x)$ infolge einer Kombination von Lasten sind gleich der Summe der Verschiebungen infolge jeder einzelnen Last.

Ebenso gilt die **Proportionalität**:

Die k -fache Last bewirkt die k -fachen Verschiebungen $k u(x)$ und $k w(x)$.

Damit kann man an einer beliebigen Stelle im System Schnittlasten, Spannungen, Deformationen und Verschiebungen infolge komplexer Kraftsysteme aus einfachen Lastgruppen zusammensetzen.

Beispiel:

Bewirkt F_1 die Verschiebungen $w_1(x)$ und $u_1(x)$,

bewirkt F_2 die Verschiebungen $w_2(x)$ und $u_2(x)$,

so bewirkt das Last-Ensemble $\{k_1 F_1, k_2 F_2\}$ die Verschiebungen

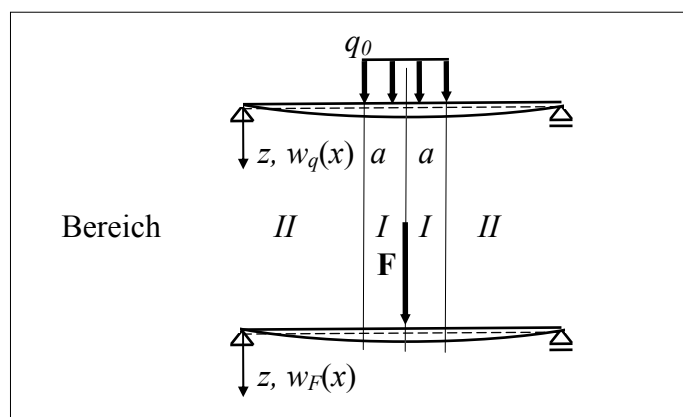
$$k_1 w_1(x) + k_2 w_2(x) \text{ und } k_1 u_1(x) + k_2 u_2(x)$$

in jedem Punkt x für alle reellen Zahlen k_1 und k_2 .

Prinzip von DE SAINT-VENANT

Wir hatten in der Statik gezeigt, dass man linien-, flächen- und volumenverteilte Kräfte in der Weise durch Einzelkräfte und -momente ersetzen kann, dass sie in die Gleichgewichtsbedingungen gleich eingehen, also beispielsweise zu denselben Auflagerreaktionen und bereichsweise denselben Schnittlasten führen, also *statisch äquivalent* sind. Aber führen sie deshalb auch zu denselben Verformungen und Verschiebungen? Betrachten wir dazu ein Beispiel. Ein Balken auf zwei Stützen werde durch eine mittige konstante Streckenlast q_0 in einem Intervall $2a$ belastet. Die dazu statisch äquivalente Einzelkraft wäre $F = 2 a q_0$, die in der Stabmitte angreift.

Offensichtlich sind in beiden Fällen die Auflagerkräfte identisch ($a q_0$) wie auch die Schnittlasten in den Bereichen *II*, also außerhalb des Bereichs, in dem q_0 wirkt. In den Bereichen *I* sind sie allerdings unterschiedlich.



Betrachten wir nun eine Folge von Lasten, bei denen a immer kleiner und q_0 immer größer wird, so dass $q_0 \cdot a$ konstant ist, so unterscheiden sich die Schnittlasten in einem immer kleineren Gebiet voneinander und sind für den Grenzwert $a \rightarrow 0$ identisch. Dabei würde aber q_0 über alle Grenzen wachsen und zu unendlich großen lokalen Spannungen führen, die im Balken auch zu lokal unendlich großen Deformationen führen würden. Sind aber die Schnittlasten und Randbedingungen identisch, so auch die Biegelinien. Findet dieser Grenzübergang stetig statt, so erwarten wir eine um so bessere Übereinstimmung, je kleiner die Bereiche I im Vergleich zu II sind. Wir erkennen also zweierlei:

- im Nahbereich I führen statisch äquivalente Lasten zu unterschiedlichen Wirkungen wie Spannungen, Deformationen, und in deren Folge auch zu unterschiedlichen Schnittlasten, Verschiebungen, usw.,
- mit zunehmender Entfernung vom Nahbereich führen statisch äquivalente Lasten zu immer ähnlicheren Wirkungen.

Diese Erkenntnis wird allgemein ausgedrückt in folgender Annahme:

Prinzip von DE SAINT-VENANT¹⁵

In hinreichender Entfernung vom Angriffsbereich eines Lastsystems hängt dessen Wirkung auf die mechanischen Größen nur noch von dessen statisch äquivalenten Resultierenden ab.

Flächenträgheitsmomente

Im Folgenden werden wir die Annahme (B7) fallen lassen.

Die Flächenmomente 2. Ordnung sind bezüglich der Querschnittskordinaten y und z (Ursprung im Flächenmittelpunkt) definiert als

- axiale Trägheitsmomente

$$I_y := \int_{\mathcal{A}} z^2 dA > 0$$

$$I_z := \int_{\mathcal{A}} y^2 dA > 0$$

- Deviationsmomente

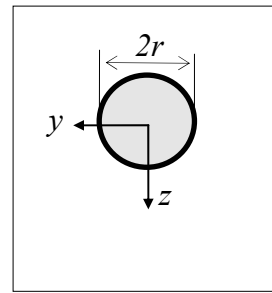
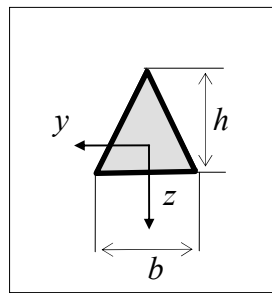
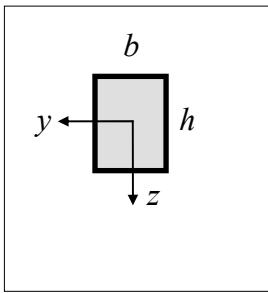
$$I_{yz} := I_{zy} := - \int_{\mathcal{A}} y z dA ,$$

die positiv, Null oder negativ sein können.

Ihre Dimension ist $[\text{Länge}^4]$, ihre Einheit z. B. mm^4 . Sie werden in der Balkenbiegung benötigt und können bestimmt werden

- durch direkte Integration
- durch numerische Integration oder
- man entnimmt sie Tabellenwerken.

¹⁵ Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797 - 1886)



Beispiel: *Rechteckquerschnitt*

$$I_y = \int_{\mathcal{A}} z^2 dA = \int_{y=-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \int_{z=-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz dy = \int_{y=-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \frac{z^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dy$$

$$= \int_{y=-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{h}{2}\right)^3 - \left(-\frac{h}{2}\right)^3 \right\} dy = \int_{y=-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \frac{h^3}{12} dy = \frac{bh^3}{12}.$$

Analog erhält man $I_z = \frac{hb^3}{12}$ und $I_{yz} = 0$.

Für den abgebildeten *gleichschenkligen Dreiecksquerschnitt* sind

$$I_y = \frac{bh^3}{36} \quad I_z = \frac{b^3h}{48} \quad I_{yz} = 0$$

und für den *Kreisquerschnitt*

$$I_y = I_z = \frac{\pi r^4}{4} \quad I_{yz} = 0.$$

Durch Anwendung einiger Regeln kann man sich die Bestimmung stark vereinfachen.

Regel: *Gebietseinteilung*

Zerlegt man den Querschnitt \mathcal{A} in disjunkte Teilquerschnitte $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$:

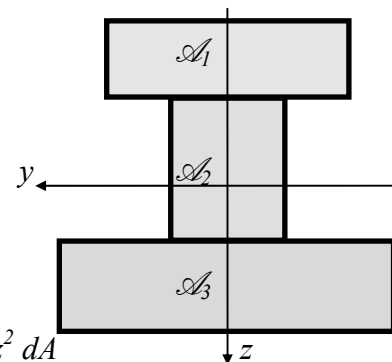
$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \dots \cup \mathcal{A}_n$$

mit

$$\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset \quad \text{für } i \neq j,$$

so folgt

$$I_y = \int_{\mathcal{A}} z^2 dA = \int_{\mathcal{A}_1} z^2 dA + \int_{\mathcal{A}_2} z^2 dA + \dots + \int_{\mathcal{A}_n} z^2 dA$$



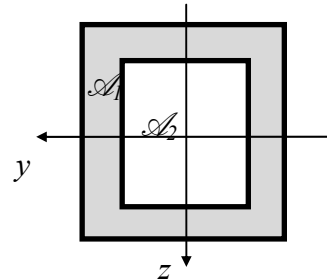
und für I_z, I_{yz} entsprechend.

Man kann auch „negative Querschnitte“ für Löcher, Hohlräume usw. einführen. Ist

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \setminus \mathcal{A}_2 \quad \text{mit} \quad \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$$

so gilt

$$I_y = \int_{\mathcal{A}} z^2 dA = \int_{\mathcal{A}_1} z^2 dA - \int_{\mathcal{A}_2} z^2 dA .$$



Dabei beziehen sich aber die KOO y und z grundsätzlich auf den Flächenmittelpunkt des Gesamtquerschnitts \mathcal{A} .

Will man die Kenntnis der Trägheitsmomente I_{yi}, I_{zi}, I_{yzi} der Teilquerschnitte bezüglich der KOO der Flächenmittelpunkte der Teilquerschnitte nutzen, so kann man dies mit einer KOO-Transformation tun. Seien

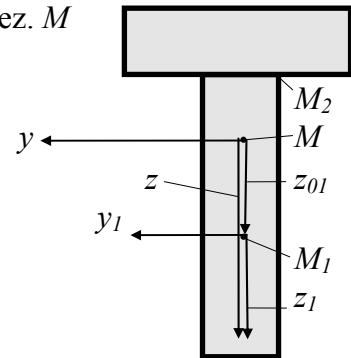
$\{y, z\}$ die KOO bezüglich des Gesamtmittelpunktes M von \mathcal{A}

$\{y_{0i}, z_{0i}\}$ die KOO des Teilmittelpunktes M_i von \mathcal{A}_i bez. M

$\{y_i, z_i\}$ das KOO bezüglich des Teilmittelpunktes M_i

dann gelten $y = y_{0i} + y_i$

$$z = z_{0i} + z_i .$$



Damit erhält man für das axiale Trägheitsmoment von \mathcal{A}_i

$$\begin{aligned} I_y &= \int_{\mathcal{A}_i} z^2 dA = \int_{\mathcal{A}_i} (z_{0i} + z_i)^2 dA \\ &= \int_{\mathcal{A}_i} z_{0i}^2 dA + \int_{\mathcal{A}_i} 2 z_{0i} z_i dA + \int_{\mathcal{A}_i} z_i^2 dA \\ &= z_{0i}^2 \int_{\mathcal{A}_i} dA + 2 z_{0i} \int_{\mathcal{A}_i} z_i dA + \int_{\mathcal{A}_i} z_i^2 dA = z_{0i}^2 A_i + I_{yi} \end{aligned}$$

sowie analog

$$I_z = \int_{\mathcal{A}_i} y^2 dA = y_{0i}^2 A_i + I_{zi}$$

$$I_{yz} = - \int_{\mathcal{A}_i} y z dA = -y_{0i} z_{0i} A_i + I_{yzi}$$

und damit die Regeln:

Satz von STEINER¹⁶

Die Trägheitsmomente des Gesamtquerschnitts ergeben sich aus denjenigen der Teilquerschnitte gemäß

¹⁶ Jakob Steiner (1796–1863), s. a. Huygens (1673), Euler (1765), Cauchy (1827)

$$I_y = \sum_{i=1}^n (I_{yi} + z_{0i}^2 A_i)$$

$$I_z = \sum_{i=1}^n (I_{zi} + y_{0i}^2 A_i)$$

$$I_{yz} = \sum_{i=1}^n (I_{yzi} - y_{0i} z_{0i} A_i)$$

mit

$\{y_{0i}, z_{0i}\}$ Koordinaten des Teilmittelpunktes M_i von \mathcal{A}_i bez. M

A_i Flächeninhalt des Teilquerschnitts \mathcal{A}_i

$I_{yi} = \int_{\mathcal{A}_i} z_i^2 dA$ Trägheitsmomente der Teilquerschnitte \mathcal{A}_i

$I_{zi} = \int_{\mathcal{A}_i} y_i^2 dA$ bezogen auf deren

$I_{yzi} = - \int_{\mathcal{A}_i} y_i z_i dA$ Flächenmittelpunkte

Während bisher das KOOs nur verschoben wurde, kann es auch nützlich sein, das KOOs durch eine Drehung um einen Winkel φ zu transformieren.

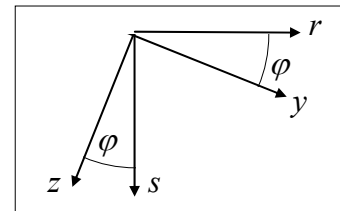
Es gelten dann die KOO-Transformationen

$$y = r \cos \varphi + s \sin \varphi$$

$$z = -r \sin \varphi + s \cos \varphi .$$

Damit wird

$$\begin{aligned} I_y &= \int_{\mathcal{A}} z^2 dA = \int_{\mathcal{A}} (-r \sin \varphi + s \cos \varphi)^2 dA \\ &= \int_{\mathcal{A}} (r^2 \sin^2 \varphi + s^2 \cos^2 \varphi - 2 r s \sin \varphi \cos \varphi) dA \\ &= I_s \sin^2 \varphi + I_r \cos^2 \varphi + 2 I_{rs} \sin \varphi \cos \varphi . \end{aligned}$$



Mit den trigonometrischen Beziehungen

$$2 \sin^2 \varphi = 1 - \cos 2\varphi$$

$$2 \cos^2 \varphi = 1 + \cos 2\varphi$$

$$2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin 2\varphi$$

ergibt dies die **Regel**:

$$I_y = \frac{1}{2} (I_r + I_s) + \frac{1}{2} (I_r - I_s) \cos 2\varphi + I_{rs} \sin 2\varphi$$

wie auch analog

$$I_z = \frac{1}{2} (I_r + I_s) - \frac{1}{2} (I_r - I_s) \cos 2\varphi - I_{rs} \sin 2\varphi$$

$$I_{yz} = - \frac{1}{2} (I_r - I_s) \sin 2\varphi + I_{rs} \cos 2\varphi$$

Gelten speziell $I_r \equiv I_s$ und $I_{rs} \equiv 0$, so sind $I_y \equiv I_z \equiv I_r$.

Durch Summierung der Gleichungen erhält man die Invarianzbeziehung

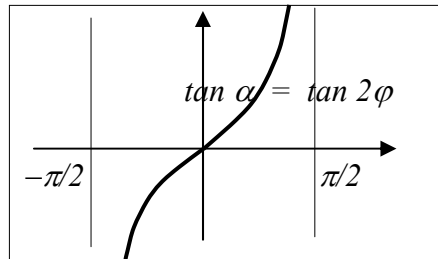
$$\text{(Spur)} \quad I_y + I_z = I_s + I_r$$

und im Produkt

$$\text{(Determinante)} \quad I_y I_z - I_{yz}^2 = I_r I_s - I_{rs}^2.$$

Demnach ist I_{yz} Null für Winkel $\varphi_0 + n \pi/2$, n natürliche Zahlen, für die

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{2 I_{rs}}{I_r - I_s}$$



gilt. Diese Gleichung hat für jeden Wert des Quotienten eine Lösung φ_0 im Intervall $[-\pi/4, \pi/4]$, also innerhalb von 90° . Für $I_r \equiv I_s$ ist eine Lösung $\varphi_0 = \pi/4$. Die Lösung wiederholt sich alle 90° .

Definition: KOO-Achsen, bezüglich derer $I_{yz} = 0$ ist, heißen **Hauptträgheitsachsen** (HTA) des Querschnitts. Die axialen Flächenträgheitsmomente bezüglich HTA heißen **Hauptträgheitsmomente**.

Dann gelten folgende Aussagen:

- *Hauptträgheitsachsen lassen sich für jeden Querschnitt finden.*
- *Achsen, die senkrecht auf Hauptträgheitsachsen stehen, sind ebenfalls Hauptträgheitsachsen.*
- *Gelten speziell $I_r \equiv I_s$ und $I_{rs} \equiv 0$, so sind alle Achsen HTA.*

Gelten speziell $I_r \equiv I_s$ und $I_{rs} \equiv 0$, so sind $I_y \equiv I_z \equiv I_r$ und alle Achsen sind HTA, wie beim Kreisquerschnitt oder quadratischen Querschnitt.

Bildet man die Ableitung von I_y nach φ

$$\frac{dI_y}{d\varphi} = -(I_r - I_s) \sin 2\varphi + 2 I_{rs} \cos 2\varphi = 2 I_{yz},$$

so erkennt man, dass dies für $\varphi \equiv \varphi_0$ Null wird. Dasselbe gilt analog für $\frac{dI_z}{d\varphi}$. Damit

haben die axialen Trägheitsmomente bezüglich der Hauptträgheitsachsen Extremalwerte (eines Maximum, eines Minimum), während sie für alle anderen Achsen immer dazwischen liegen.

Bezüglich der Hauptträgheitsachsen y, z für $\varphi \equiv \varphi_0$ ergibt sich aus den Invarianzbeziehungen

$$(\text{Spur}) \Rightarrow I_y^H = I_r + I_s - I_z^H$$

und

$$(\text{Determinante}) \Rightarrow I_y^H I_z^H = I_r I_s - I_{rs}^2 = (I_r + I_s - I_z^H) I_z^H$$

$$\Rightarrow -I_z^{H2} + (I_r + I_s) I_z^H - I_r I_s + I_{rs}^2 = 0,$$

eine quadratische Gleichung mit den beiden Lösungen

$$\begin{aligned} I_{y,z}^H &= \frac{1}{2} (I_r + I_s) \pm \left\{ \frac{1}{4} (I_r + I_s)^2 - I_r I_s + I_{rs}^2 \right\}^{1/2} \\ &= \frac{1}{2} (I_r + I_s) \pm \left\{ \frac{1}{4} (I_r - I_s)^2 + I_{rs}^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Gilt das eine Vorzeichen vor der Wurzel für I_z^H , so gilt das andere für I_y^H .

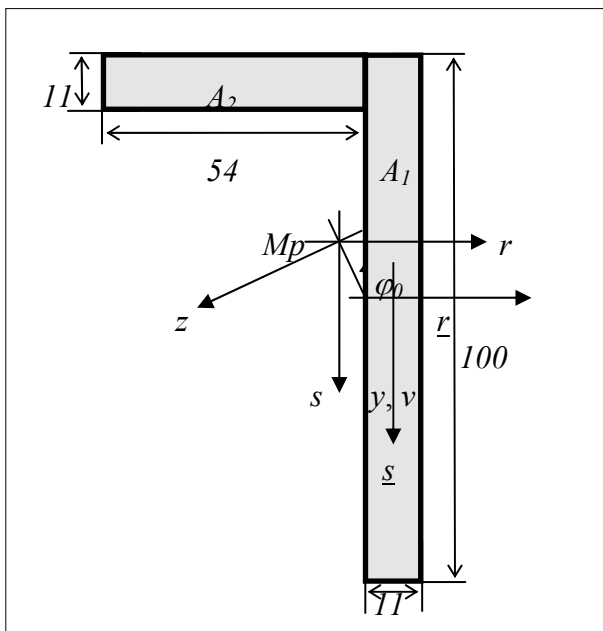
Wir hatten bereits gesehen, dass bezüglich Symmetrie-Achsen eines Querschnitts $I_{yz} = 0$ ist. Also sind Symmetrie-Achsen immer Hauptträgheitsachsen.

Mathematisch gesehen, handelt es sich um das Eigenwertproblem der symmetrischen Matrix

$$\begin{bmatrix} I_y & I_{yz} \\ I_{zy} & I_z \end{bmatrix}.$$

Die Hauptträgheitsmomente sind deren Eigenwerte, die Hauptträgheitsachsen deren Eigenrichtungen.

Beispiel: L-Profil



0) Einteilung in Teilquerschnitte, Wahl eines bel. KOOS $\{r, s\}$

1) bestimme die Querschnittsfläche

$$A = A_1 + A_2 = 1100 \text{ mm}^2 + 594 \text{ mm}^2 = 1694 \text{ mm}^2$$

und deren Mittelpunkt bez. $\{r, s\}$ im Mittelpunkt von A_1

$$r_m = (r_{m1} A_1 + r_{m2} A_2) / A = [0 - (\frac{1}{2} 11 \text{ mm} + \frac{1}{2} 54 \text{ mm}) A_2] / A = -11,4 \text{ mm}$$

$$s_m = (s_{m1} A_1 + s_{m2} A_2) / A = [0 - (\frac{1}{2} 100 \text{ mm} - \frac{1}{2} 11 \text{ mm}) A_2] / A = -15,6 \text{ mm}$$

In den Mittelpunkt legen wir das KOOS $\{r, s\}$

2) bestimme die Trägheitsmomente bez. $\{r, s\}$ nach STEINER

$$\begin{aligned} I_r &= I_{r1} + s_{01}^2 A_1 + I_{r2} + s_{02}^2 A_2 \\ &= (100 \text{ mm})^3 11 \text{ mm} / 12 + (15,6 \text{ mm})^2 1100 \text{ mm}^2 \\ &\quad + (11 \text{ mm})^3 54 \text{ mm} / 12 + (-44,5 \text{ mm} + 15,6 \text{ mm})^2 594 \text{ mm}^2 = 168,6 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$I_s = I_{s1} + r_{01}^2 A_1 + I_{s2} + r_{02}^2 A_2 = 56,3 \text{ cm}^4$$

$$\begin{aligned} I_{rs} &= I_{rs1} - r_{01} s_{01} A_1 + I_{rs2} - r_{02} s_{02} A_2 \\ &= 0 - 11,4 \text{ mm} \times 15,6 \text{ mm} \times 1100 \text{ mm}^2 \\ &\quad + 0 - 21,1 \text{ mm} \times 28,9 \text{ mm} \times 594 \text{ mm}^2 = -55,8 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

3) bestimme die HTA als y- und z-Achse durch den Winkel φ_0 zwischen r und y

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{2 I_{rs}}{I_r - I_s} = 2 (-55,8 \text{ cm}^4) / (168,6 \text{ cm}^4 - 56,3 \text{ cm}^4) = -0,994$$

$$\varphi_0 = 67,6^\circ + n 90^\circ$$

4) bestimme die Hauptträgheitsmomente I_y^H und I_z^H

$$I_{y,z}^H = \frac{1}{2} (I_r + I_s) \pm \left\{ \frac{1}{4} (I_r - I_s)^2 + I_{rs}^2 \right\}^{1/2} = 112,45 \text{ cm}^4 \pm 79,2 \text{ cm}^4$$

$$I_y^H = 33,2 \text{ cm}^4 \quad I_z^H = 191,6 \text{ cm}^4$$

Schiefe Biegung

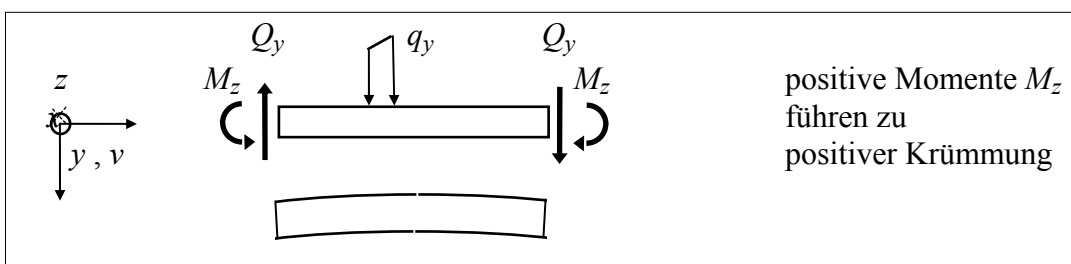
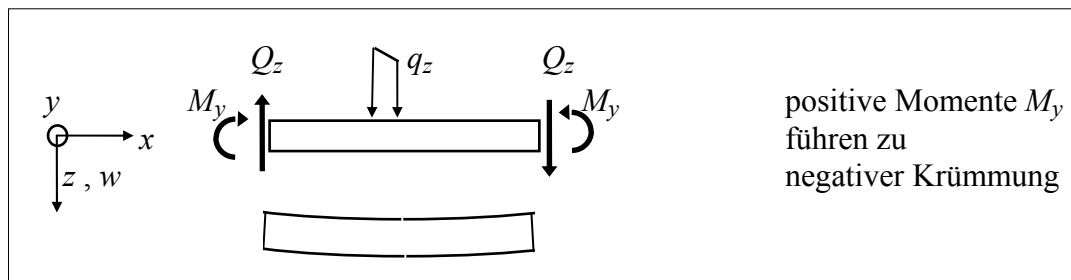
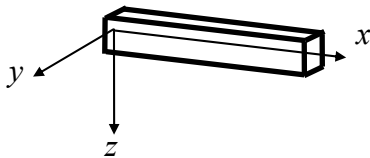
Bisher haben wir uns wegen $B3$ und $B7$ nur mit ebener Biegung beschäftigt. Diese beiden Annahmen sollen nun fallen gelassen werden, während alle anderen weiterhin gelten sollen. Da wir das Balkenproblem für Normalkräfte bereits vorab gelöst haben, schränken wir uns auch weiterhin auf das reine Biegeproblem ein:

$B3'$) Normalkräfte im Balken seien nicht vorhanden; es greifen nur Momente $M_y(x)$ und $M_z(x)$ und Querkräfte $Q_y(x)$ und $Q_z(x)$ an.

$B7'$) beliebiger Querschnitt

Da wir die gestrichelte-Faser-Konvention nur für den ebenen Fall eingeführt haben, müssen wir jetzt das KOOS angeben. Wir wählen weiterhin die x -Achse in der neutralen Faser und die y - und z -Achse beliebig in der Querschnittsebene. Damit liegen folgende Lasten vor:

| | in x | in y | in z |
|----------------|---------|----------|----------|
| Biegemomente | - | $M_y(x)$ | $M_z(x)$ |
| Querkräfte | - | $Q_y(x)$ | $Q_z(x)$ |
| Normalkraft | $N = 0$ | - | - |
| Streckenlasten | $n = 0$ | $q_y(x)$ | $q_z(x)$ |
| Sie bewirken: | | | |
| Verschiebungen | $u = 0$ | $v(x)$ | $w(x)$ |



Wir erinnern uns an die beiden Schnittlasten-Differentialgleichungen

$$M_y(x)'' = Q_z(x)' = -q_z(x)$$

$$M_z(x)'' = -Q_y(x)' = q_y(x).$$

Wenden wir nun die Ableitungen der ebenen Biegung in den x - y - und x - z -Ebenen an, so erhalten wir für die Dehnungen in Stabrichtung unter Benutzung der BERNOULLI'schen Hypothese

$$\varepsilon(x, y, z) = -\frac{y}{R_y} - \frac{z}{R_z} \approx -v'' y - w'' z$$

mit der weiterhin beibehaltenen Einschränkung auf kleine Deformationen. Nach dem HOOKEschen Gesetz ist die Normalspannung auf dem Querschnitt

$$\sigma(x, y, z) = E(x) \varepsilon(x, y, z) = -E (v'' y + w'' z)$$

mit dem Elastizitätsmodul E , also wieder eine lineare Spannungsverteilung im Querschnitt.

Die daraus resultierende Normalkraft $N(x)$ soll gemäß $B3'$ verschwinden:

$$\begin{aligned} 0 = N(x) &= \int_{\mathcal{A}} \sigma \, dA = \int_{\mathcal{A}} -E (v'' y + w'' z) \, dA \\ &= -E (v'' \int_{\mathcal{A}} y \, dA + w'' \int_{\mathcal{A}} z \, dA) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{A}} y \, dA = 0 \quad \text{und} \quad \int_{\mathcal{A}} z \, dA = 0,$$

was wiederum gilt, wenn die neutrale Faser ($y \equiv 0 \equiv z$) durch den Flächenmittelpunkt von A geht.

Wir berechnen das Biegemoment im Querschnitt infolge der Längsspannung σ als

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(x) &= M_y \mathbf{e}_y + M_z \mathbf{e}_z \\ &= \int_{\mathcal{A}} \mathbf{r} \times \sigma \mathbf{e}_x \, dA \\ &= \int_{\mathcal{A}} (x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z) \times \sigma \mathbf{e}_x \, dA \\ &= \int_{\mathcal{A}} \sigma z \, dA \mathbf{e}_y - \int_{\mathcal{A}} \sigma y \, dA \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

und komponentenweise

$$\begin{aligned} M_y &= \int_{\mathcal{A}} \sigma z \, dA = \int_{\mathcal{A}} -E (v'' y + w'' z) z \, dA \\ &= -E (v'' \int_{\mathcal{A}} y z \, dA + w'' \int_{\mathcal{A}} z^2 \, dA) \end{aligned}$$

| |
|----------------------------------|
| $M_y = E I_{yz} v'' - E I_y w''$ |
|----------------------------------|

und

$$\begin{aligned} M_z &= - \int_{\mathcal{A}} \sigma y \, dA = \int_{\mathcal{A}} E (v'' y + w'' z) y \, dA \\ &= E (v'' \int_{\mathcal{A}} y^2 \, dA + w'' \int_{\mathcal{A}} y z \, dA) \end{aligned}$$

$$M_z = E I_z v'' - E I_{yz} w''$$

Dies sind zwei Differentialgleichungen in den Verschiebungen. Sie sind

- *linear*, weil v und w linear von M_y und M_z abhängen;
- *gewöhnlich*, weil nur nach x abgeleitet wird;
- *gekoppelt*, weil v und w in beiden Gleichungen vorkommen.

Löst man sie auf, so erhält man

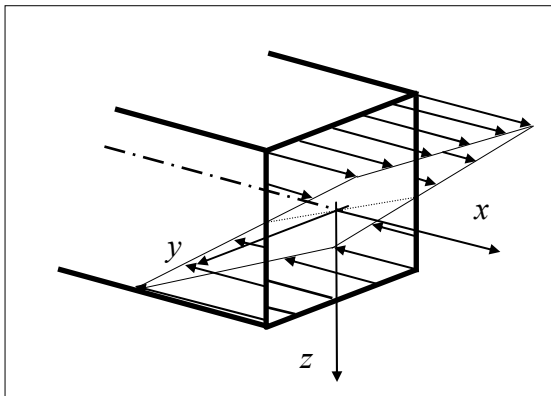
$$E v'' = \frac{M_z I_y - M_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

$$E w'' = \frac{M_z I_{yz} - M_y I_z}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

Die Spannungen ergeben sich dann zu

$$\sigma(x, y, z) = \frac{(M_z I_y - M_y I_{yz}) y - (M_y I_z - M_z I_{yz}) z}{I_{yz}^2 - I_y I_z}$$

Die BERNOULLISCHE Hypothese hat also in Verbindung mit dem HOOKEschen Gesetz auch hier wieder zur Folge, dass die Spannungsverteilung im Querschnitt linear ist. Man kann sie sich als Ebene darstellen, die den Querschnitt in einer Geraden (mit $\sigma = 0$) schneidet, die immer durch den Flächenmittelpunkt geht, ansonsten aber von dem Belastungszustand abhängt (wegen M_y und M_z).



Unser Problem der schiefen Biegung wird erheblich einfacher, wenn y und z Hauptträgheitsachsen des Querschnitts bilden. Dann ist $I_{yz} \equiv 0$ und die beiden Biegelinien-Differentialgleichungen sind entkoppelt

$$M_y = - E I_y^H w''$$

bez. HTA

$$M_z = E I_z^H v''$$

und die Spannungsverteilung im Querschnitt wird einfacher

$$\sigma(x, y, z) = \frac{M_y(x)}{I_y^H} z - \frac{M_z(x)}{I_z^H} y.$$

Die unbestimmte Integration liefert

$$v(x) = \iint \frac{M_z}{E I_z^H} dx^2 + C_1 x + C_2$$

$$w(x) = -\iint \frac{M_y}{E I_y^H} dx^2 + C_3 x + C_4.$$

Die vier Konstanten C_i müssen durch vier Rand- oder Übergangsbedingungen bestimmt werden.

Für jeden prismatischen Stab, bei dem die Hauptträgheitsachsen nicht von x abhängen, können wir uns auf sie beziehen und damit das Problem der schiefen Biegung auf zwei entkoppelte Probleme ebener Biegung zurückführen (falls nicht die Randbedingungen gekoppelt sind).

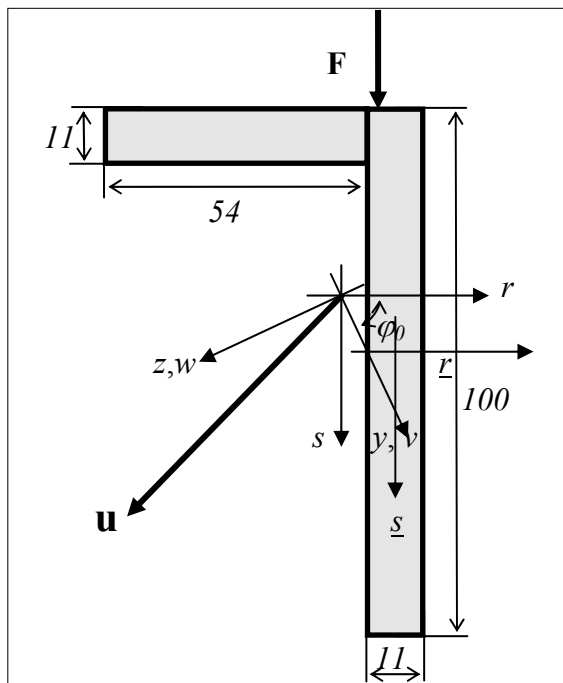
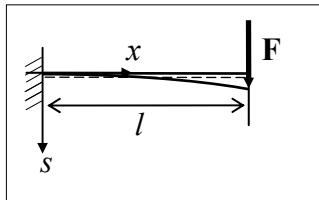
Damit bietet sich für statisch-bestimmte Biege-Probleme prismatischer Stäbe folgendes Vorgehen an:

- 1) bestimme die Querschnittsfläche und deren Mittelpunkt als Ursprung des KOOS
- 2) bestimme alle Flächenträgheitsmomente bez. des Mittelpunktes
- 3) bestimme die Hauptträgheitsachsen als y - und z -Achse
- 4) bestimme die Hauptträgheitsmomente I_y^H und I_z^H
- 5) bestimme die Biegemomente M_y und M_z aus den Gleichgewichts-Bedingungen
- 6) löse die entkoppelten Biegeprobleme in der x - y - und der x - z -Ebene
- 7) superponiere (oder addiere vektoriell) die Verschiebungen zu

$$\mathbf{u} = v(x) \mathbf{e}_y + w(x) \mathbf{e}_z.$$

Fortsetzung des Beispiels: Schiefe Biegung eines L-Profiles

Durch eine vertikale Endlast beanspruchter Kragträger mit unsymmetrischem L-Profil



5) bestimme die Biegemomente M_y und M_z aus den Gleichgewichts-Bedingungen

$$M_r = F(x-l) \quad M_s = 0$$

Transformation auf HTA

$$M_y = M_r \cos \varphi_0 + M_s \sin \varphi_0 = -F(l-x) \cos \varphi_0$$

$$M_z = -M_r \sin \varphi_0 + M_s \cos \varphi_0 = F(l-x) \sin \varphi_0$$

6) löse die entkoppelten Biegeprobleme in der x - y - und der x - z -Ebene

$$\text{Randbedingungen: } v(0) = 0 = w(0) \quad v'(0) = 0 = w'(0)$$

$$y: \quad v(x) = \iint \frac{M_z}{EI_z^H} dx^2 + C_1 x + C_2 = \frac{F}{EI_z^H} (lx^2/2 - x^3/6) \sin \varphi_0$$

$$z: \quad w(x) = -\int \int \frac{M_y}{E I_y^H} dx^2 + C_3 x + C_4 = \frac{F}{E I_y^H} (l x^{2/2} - x^3/6) \cos \varphi_0$$

$$\frac{w(x)}{v(x)} = \frac{\cos \varphi_0}{\sin \varphi_0} \frac{I_z^H}{I_y^H} = 2,4$$

7) damit ergeben sich die Verschiebungen in r - und s -Richtung

$$r: \quad v_r(x) = -w(x) \sin \varphi_0 + v(x) \cos \varphi_0 = \frac{F}{E} (l x^{2/2} - x^3/6) \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \left(-\frac{1}{I_y^H} + \frac{1}{I_z^H}\right)$$

$$s: \quad w_s(x) = w(x) \cos \varphi_0 + v(x) \sin \varphi_0 = \frac{F}{E} (l x^{2/2} - x^3/6) \left(\cos^2 \varphi_0 \frac{1}{I_y^H} + \sin^2 \varphi_0 \frac{1}{I_z^H}\right)$$

Man kann alternativ auch die gekoppelten Dgl. bez. $\{r, s\}$ aufintegrieren

$$r: \quad v_r'' = \frac{1}{E} \frac{M_s I_r - M_r I_{rs}}{I_r I_s - I_{rs}^2} = \frac{F}{E} \frac{-I_{rs}}{I_r I_s - I_{rs}^2} (x-l)$$

$$s: \quad w_s'' = \frac{1}{E} \frac{M_s I_{rs} - M_r I_s}{I_r I_s - I_{rs}^2} = \frac{F}{E} \frac{-I_s}{I_r I_s - I_{rs}^2} (x-l).$$

Obwohl die Kraft senkrecht wirkt, verschiebt sich der Stab nicht nur nach unten, sondern auch zur Seite, und zwar im Verhältnis $I_s/I_{rs} \approx 1,01$.

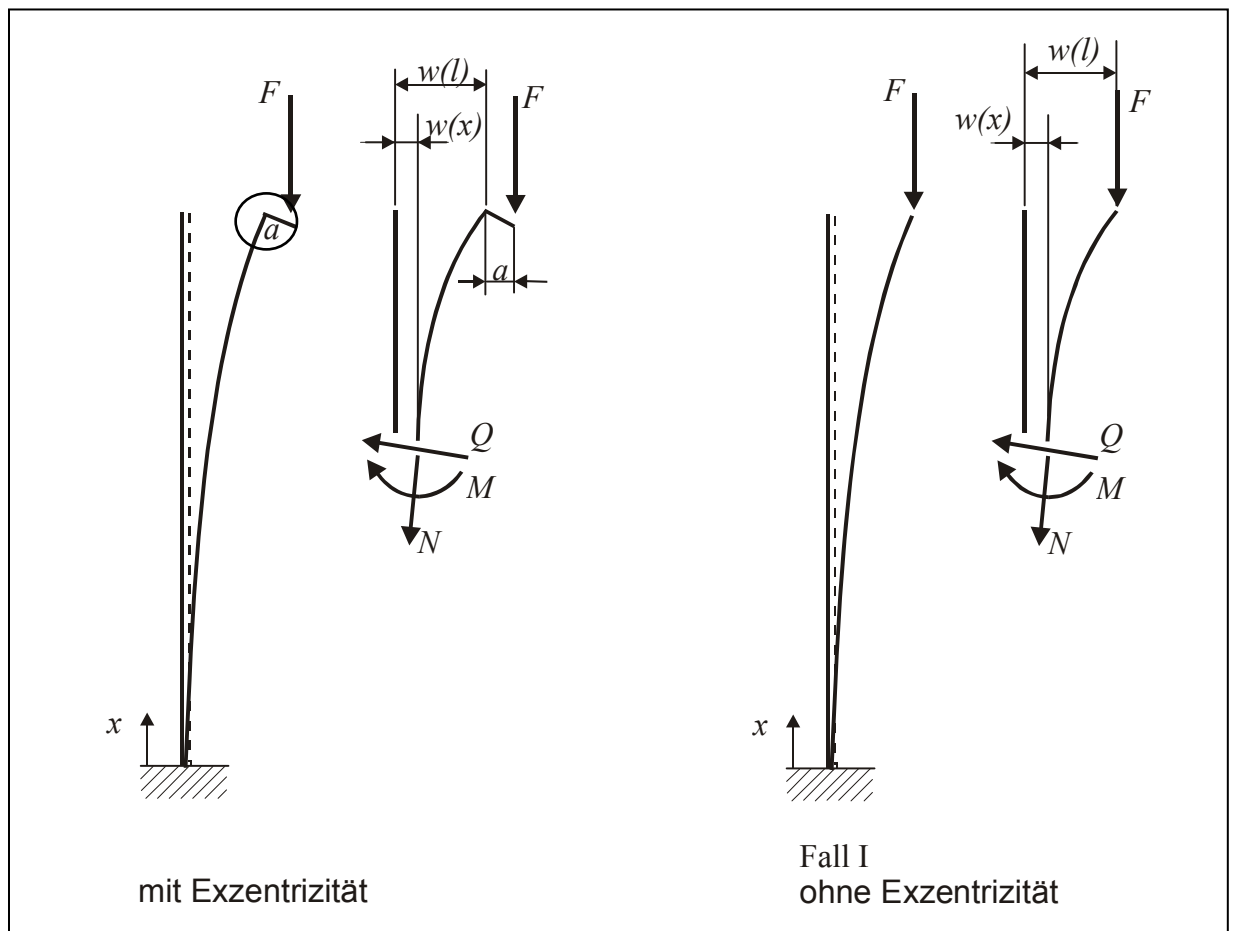
Knickstäbe

In der **Theorie erster Ordnung** betrachtet man kleine Verschiebungen und Verformungen und setzt die Gleichgewichtsbedingungen am unverformten System an. In vielen Fällen ist dies gerechtfertigt. Bei Stabilitätsproblemen jedoch haben die Verschiebungen großen Einfluss auf das Gleichgewicht, der mit der Theorie erster Ordnung nicht beschrieben werden kann.

In der **Theorie zweiter Ordnung** setzt man die Gleichgewichtsbedingungen am verformten System an, benutzt aber weiterhin die Linearisierung

$$\kappa(x) = \frac{w(x)''}{\left(1 + w(x)'^2\right)^{3/2}} \approx w(x)''.$$

Erst in einer **Theorie dritter Ordnung** wird diese nicht mehr vorgenommen, wodurch die resultierenden Dgls. aber nicht-linear werden.

Beispiel: EULER-Fall I

Für das System mit Exzentrizität erhält man nach der **Theorie 1. Ordnung**

$$M(x) = -F \cdot a$$

$$w(x) = \frac{Fa}{EI} \frac{x^2}{2},$$

was für $a \equiv 0$ nur die Nulllösung liefert. Nach der **Theorie 2. Ordnung** erhält man

$$M(x) = -[a + w(l) - w(x)] F,$$

woraus mit der Biegelinien-Dgl. $M(x) = -EI w''(x)$ die Dgl.

$$EI w''(x) + F w(x) = F (a + w(l))$$

folgt. Sie ist

- gewöhnlich
- 2. Ordnung
- linear
- inhomogen für $a + w(l) \neq 0$

und hat die allgemeine Lösung

$$w(x) = C_0 + C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x)$$

$$w'(x) = C_1 \lambda \cos(\lambda x) - C_2 \lambda \sin(\lambda x)$$

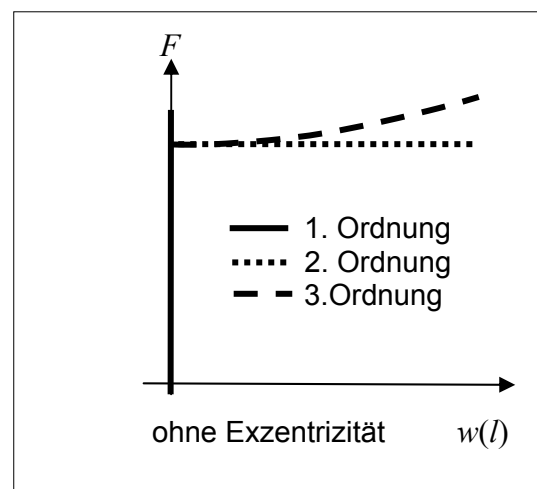
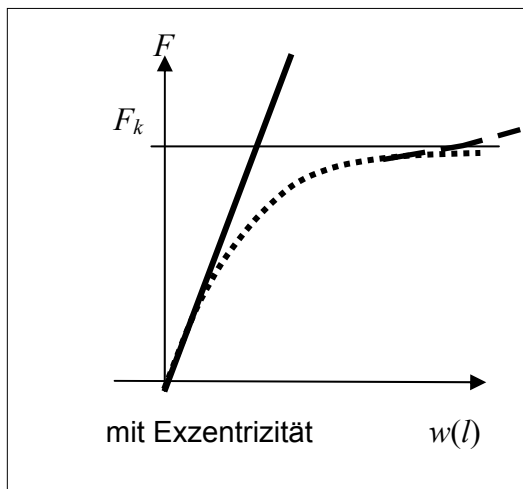
$$w''(x) = -C_1 \lambda^2 \sin(\lambda x) - C_2 \lambda^2 \cos(\lambda x).$$

Sie erfüllt die Dgl. für $\lambda = \sqrt{\frac{F}{EI}}$ und $C_0 = a + w(l)$.

Anpassung an die Randbedingungen ergibt

$$w(0) = 0 = a + w(l) + C_2 \Rightarrow C_2 = -a - w(l)$$

$$w'(0) = 0 = \lambda C_1 \Rightarrow C_1 = 0.$$



Die spezielle Lösung ist somit

$$w(x) = (a + w(l)) \left(1 - \cos\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right)\right).$$

Die Verschiebung am oberen Ende ist

$$w(l) = (a + w(l)) \left(1 - \cos\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} l\right)\right)$$

und somit

$$w(l) = \frac{a[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} l\right)]}{\cos\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} l\right)}.$$

Für $F = 0$ erhalten wir die unverformte Lage $w(l) = 0$. Wird F größer, so wächst $w(l)$ nicht-linear an. Bei $\sqrt{\frac{F}{EI}} l \rightarrow \frac{\pi}{2}$ wird $w(l)$ unendlich. Wir nennen deshalb

$$F_{kl} := \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$$

(erste) **kritische Last**. Beachtenswert ist dabei, dass zwar $w(l)$ von a abhängt, nicht aber die kritische Last. Der kritische Fall tritt bei jeder, auch noch so kleinen Exzentrizität a des Kraftangriffspunktes gegenüber der Stabachse auf, falls sich die Last ihrem kritischen Wert nähert.

Ist die Exzentrizität $a \equiv 0$ - ein Fall, der eher von theoretischem als praktischem Interesse sein dürfte -, so ist $w(l) = 0$ für $F < F_{kl}$. Für $F \equiv F_{kl}$ jedoch ist

$$w(x) = w(l) \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2l}x\right)\right)$$

mit $w(l)$ unbestimmt.

Theoretisch gibt es noch höhere kritische Lasten

$$F_{kn} = \frac{n^2 \pi^2}{4} \frac{EI}{l^2}, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

mit den zugehörigen Verschiebungsformen

$$1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2l}x\right),$$

die jedoch kaum praktische Relevanz besitzen, da bereits bei $F_{kl} \equiv F_k$ die Struktur versagt.

Wir haben bewußt M und I nicht indiziert. Knicken tritt zuerst in der Ebene auf, in der das Hauptträgheitsmoment am kleinsten ist, falls die Randbedingungen nicht eine andere Ebene bevorzugen.

Die kritische Last hängt offensichtlich von der Biegesteifigkeit und den Randbedingungen (Lagerung, Einspannung) des Knickstabes ab. EULER hat 1759 für vier wichtige Fälle die kritischen Lasten berechnet.

Beispiel: EULER-Fall II

Aus dem Momentengleichgewicht am Gesamtsystem bestimmen wir

$$M(0) = 0 = -B l \quad \Rightarrow \quad B = 0.$$

Hier ist das Biegemoment nach der Theorie 2. Ordnung

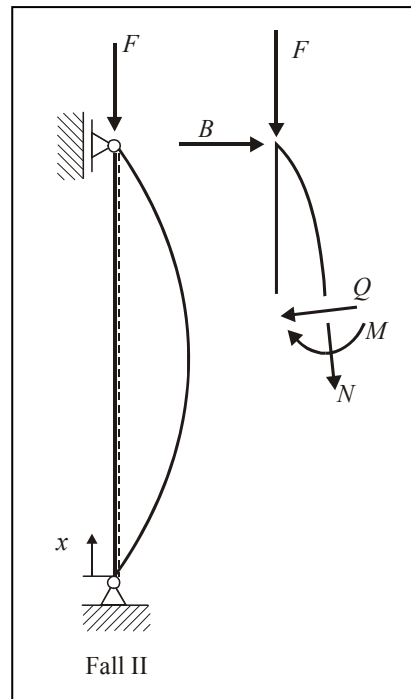
$$M(x) = F w(x) = -EI w''(x)$$

und damit die homogene Dgl.

$$w''(x) + \lambda^2 w(x) = 0 \quad \text{mit } \lambda = \sqrt{\frac{F}{EI}}.$$

Die allgemeine Lösung ist

$$w(x) = C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x).$$



Aus den geometrischen Randbedingungen bestimmen wir

$$w(0) = 0 = C_2$$

$$w(l) = 0 = C_1 \sin(\lambda l).$$

Die letzte Bedingung kann auf zweierlei Weise erfüllt werden:

- 1.) $C_1 = 0$ oder $\lambda = 0$ keine Durchbiegung (triviale Lösung)
- 2.) $\sin(\lambda l) = 0$ für $\lambda l = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$,

$$\text{also } F_{kn} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2} \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots$$

und den zugehörigen Verschiebungsformen

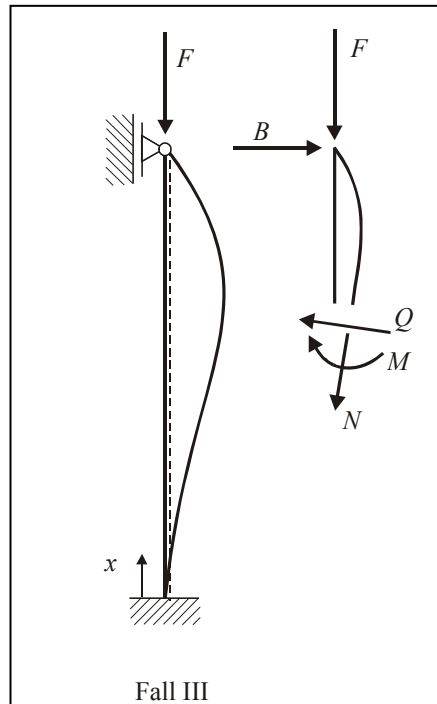
$$\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

C_1 bleibt auch hier unbestimmt. Auch hier ist wieder die erste kritische Last $F_k := F_{k1}$ von größter praktischer Bedeutung.

Beispiel: EULER-Fall III

Hier gilt

$$M(x) = F w(x) - B (l - x) = -EI w''(x) .$$



Die Normalform der Dgl. ist

$$w''(x) + \lambda^2 w(x) = \frac{B}{EI} (l - x) \quad \text{mit } \lambda = \sqrt{\frac{F}{EI}}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$w(x) = C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x) + C_3 x + C_4 ,$$

die die Dgl. erfüllt mit $C_3 = -\frac{B}{EI\lambda^2}$ und $C_4 = \frac{Bl}{EI\lambda^2}$.

Aus den Randbedingungen erhalten wir

$$w(0) = 0 = C_2 + C_4 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\frac{Bl}{EI\lambda^2}$$

$$w'(0) = 0 = C_1 \lambda + C_3 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{B}{EI\lambda^3},$$

also

$$w(x) = \frac{B}{EI\lambda^3} (\sin(\lambda x) - \lambda x - \lambda l \cos(\lambda x) + \lambda l) ,$$

und schließlich

$$w(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(\lambda l) - \lambda l - \lambda l \cos(\lambda l) + \lambda l = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda l = \tan(\lambda l).$$

Dies ist eine transzendente Gleichung für λ , die die Näherungslösung

$$\lambda l \approx 4,4934$$

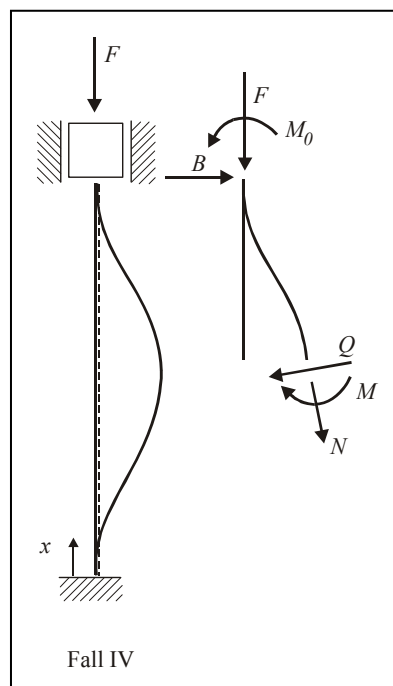
besitzt. Demzufolge sind

$$\lambda^2 l^2 = \frac{F_k l^2}{EI} \approx 20,19$$

und

$$F_k \approx 20,19 \frac{EI}{l^2}$$

Beispiel: EULER-Fall IV



Das Gleichgewicht am gebogenen System ergibt

$$M(x) = M_0 + F w(x) - B (l-x) = -EI w''(x)$$

und damit die Dgl.

$$w''(x) + \lambda^2 w(x) = \frac{B}{EI} (l-x) - \frac{M_0}{EI}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$w(x) = C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x) + C_3 x + C_4$$

$$\text{mit } \lambda = \sqrt{\frac{F}{EI}} \quad C_3 = -\frac{B}{EI \lambda^2} \quad C_4 = \frac{Bl - M_0}{EI \lambda^2}.$$

Die Randbedingungen ergeben

$$w(0) = 0 = C_2 + C_4$$

$$w'(0) = 0 = \lambda C_1 + C_3$$

$$w(l) = 0 = -\frac{C_3}{\lambda} \sin(\lambda l) - C_4 \cos(\lambda l) + C_3 l + C_4$$

$$w'(l) = 0 = -C_3 \cos(\lambda l) + C_4 \lambda \sin(\lambda l) + C_3.$$

Mit den ersten beiden Gleichungen können wir C_1 und C_2 durch C_3 und C_4 ersetzen. Die letzten beiden Gleichungen bilden ein homogenes Gleichungssystem

$$\left[-\frac{1}{\lambda} \sin(\lambda l) + l\right] C_3 + [-\cos(\lambda l) + 1] C_4 = 0$$

$$[-\cos(\lambda l) + 1] C_3 + [\lambda \sin(\lambda l)] C_4 = 0,$$

das nur dann eine nicht-triviale Lösung für C_3 und C_4 besitzt, falls die Koeffizienten-Determinante Null ist:

$$\begin{aligned} 0 &= \left[l - \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda l)\right] [\lambda \sin(\lambda l)] - [1 - \cos(\lambda l)]^2 \\ &= l\lambda \sin(\lambda l) - \sin^2(\lambda l) - 1 + \cos^2(\lambda l) + 2 \cos(\lambda l) \\ &= l\lambda \sin(\lambda l) - 2 [1 - \cos(\lambda l)] \end{aligned}$$

was mittels trigonometrischer Beziehungen umgeformt werden kann zu

$$0 = 4 \sin \frac{\lambda l}{2} \left(\frac{\lambda l}{2} \cos \frac{\lambda l}{2} - \sin \frac{\lambda l}{2} \right).$$

Dies ist für

- $\sin(\lambda l/2) = 0 \Rightarrow \lambda l = n 2\pi = \sqrt{\frac{F_{kn}}{EI}} l, \quad n = 1, 2, 3, \dots$: symmetrische Form
- $\lambda l/2 = \tan(\lambda l/2)$: antisymmetrische Form

erfüllt. Die niedrigste kritische Last ist

$$F_k = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$$

Allen vier EULER-Fällen ist folgendes gemein: Sie führen auf Dgls., die

- gewöhnlich von 2. Ordnung in $w(x)$
- und linear

sind. Ihre Lösungen sind Linearkombinationen von harmonischen und linearen Funktionen

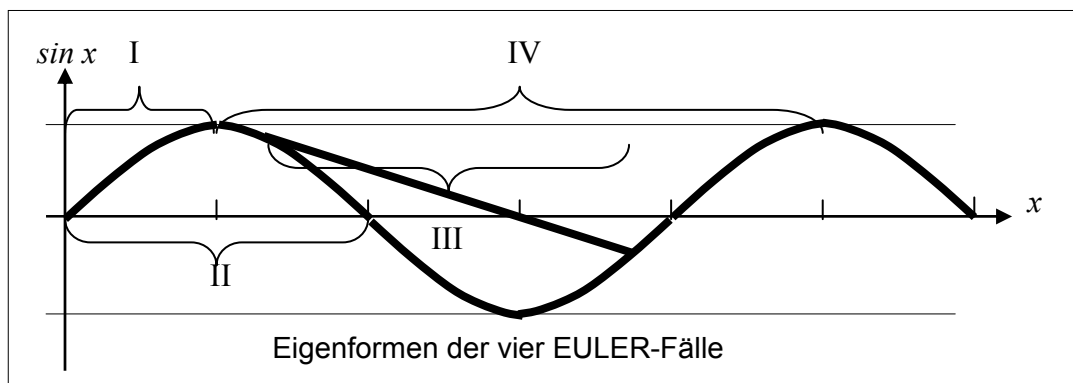
$$\sin, \cos, Bx + C.$$

Ist die Exzentrizität Null, so sind die Lösungen fast überall Null bis auf kritische Werte von F , wo man lediglich ihre Form, nicht jedoch ihre Größe kennt. Die kleinste kritische Last ist in allen Fällen gegeben als

$$F_k = \alpha \frac{EI}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{l_{red}^2}$$

mit einem systemabhängigen Faktor α und der **reduzierten Knicklänge**

$$l_{red} = \frac{\pi l}{\sqrt{\alpha}}.$$



Für die Bemessung von Druckstäben haben wir zwei Kriterien erarbeitet.

1.) Spannungsnachweis

Die Spannungen müssen kleiner als die für das Material zulässigen sein

$$|\sigma| = \left| \frac{F}{A} \right| < \sigma_{zul}$$

2.) Knicksicherheitsnachweis

Die Druckkraft muss kleiner als die kritische Kraft sein (wir setzen in diesem Abschnitt ausnahmsweise die Druckkräfte positiv an)

$$s_k F < F_k$$

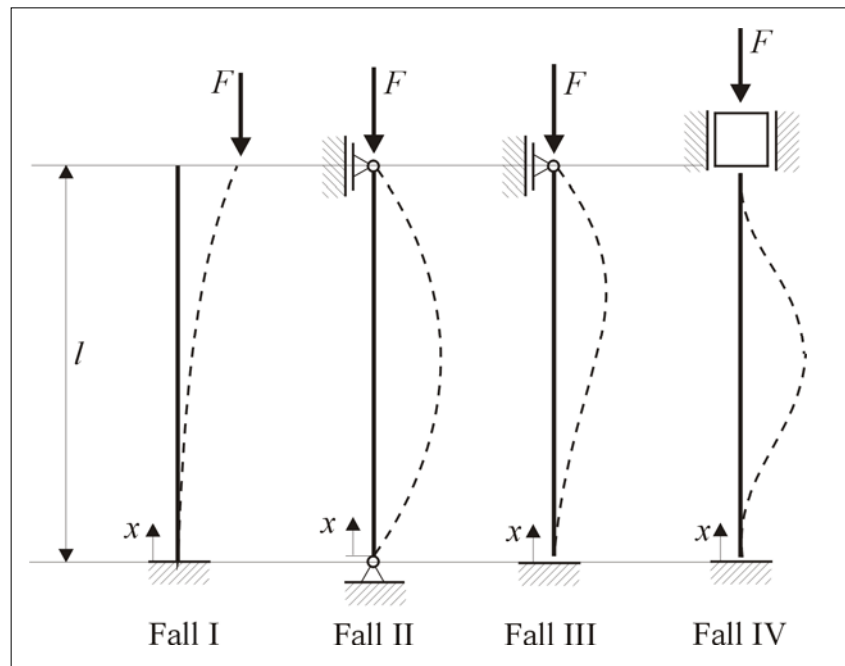
$$s_k > 1: \text{Knicksicherheitskoeffizient}$$

$$\Rightarrow s_k \frac{F}{A} < \frac{F_k}{A} = \frac{\alpha EI}{l^2 A} = \alpha E \frac{i^2}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{Al_{red}^2} = \frac{\pi^2 E}{S^2} \quad (\text{EULER-Hyperbel})$$

mit $i := \sqrt{\frac{I}{A}}$ **Trägheitsradius** [Länge]

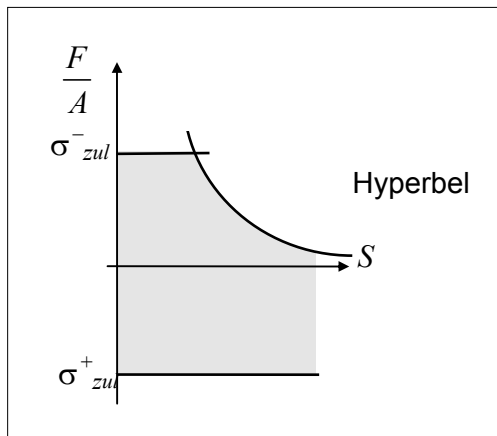
$$S := \frac{l_{red}}{i} = l_{red} \sqrt{\frac{A}{I}}$$

Schlankheit (-sgrad) [dimensionslos].



| EULER-Fall | I | II | III | IV |
|-----------------------|-------------------------|------------------------|------------------------|-------------------------|
| $F_k =$ | $\frac{\pi^2 EI}{4l^2}$ | $\frac{\pi^2 EI}{l^2}$ | $\frac{20,19 EI}{l^2}$ | $\frac{4\pi^2 EI}{l^2}$ |
| $\alpha =$ | $\frac{\pi^2}{4}$ | π^2 | transz. | $4\pi^2$ |
| $\alpha \approx$ | 2,46 | 9,87 | 20,19 | 39,48 |
| $\frac{l_{red}}{l} =$ | 2 | 1 | $\approx 0,7$ | 1/2 |

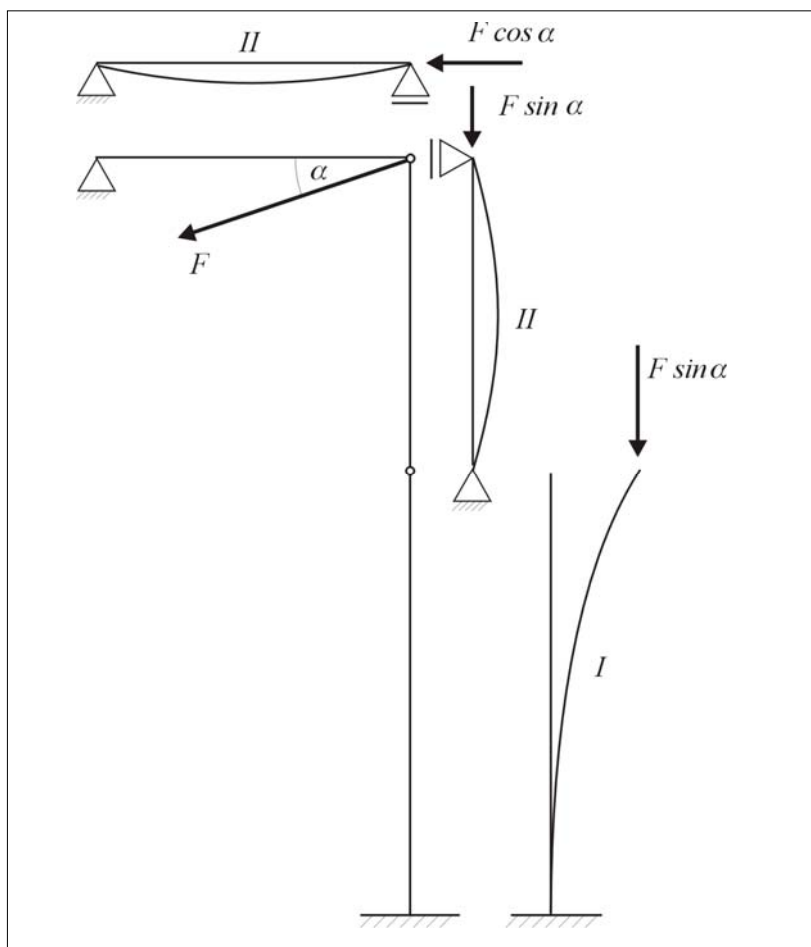
Im räumlichen Falle muss der Knicksicherheitsnachweis in den beiden Hauptträgheitsrichtungen geführt und gegen die kleinere kritische Last bemessen werden.



Bei beliebig gelagerten Druckstäben beliebiger Geometrie kann es kompliziert werden, die kritische Last analytisch zu bestimmen. Hier helfen Näherungsverfahren wie RITZ-Ansätze weiter (s. weiter unten). Oft kann man aber Teile einer knickgefährdeten Stabstruktur als EULER-Fall identifizieren und damit die kritischen Lasten abschätzen.

Beispiel

Wir zerlegen die Struktur in drei Stäbe, die jeweils einem EULER-Fall entsprechen. Für jeden Stab gibt es eine kritische Last. Somit kann man für F eine obere Grenze angeben, für die die erste Eulerlast in einem der Stäbe erreicht wird.



Spannungs-Analyse

Bisher haben wir nur den elastischen Zusammenhang zwischen Normalspannungen und Längsdehnung als HOOKEsches Gesetz betrachtet. Im Allgemeinen treten aber auch Spannungen in anderen Richtungen als der Normalenrichtung auf, und sie verursachen auch andere Dehnungen als nur Längsdehnungen in derselben Richtung.

Man definiert den **Spannungsvektor** $\mathbf{f}^A(X)$ in einem Punkt X der Oberfläche A eines Körpers als Flächenkraftdichte der Kontaktkraft \mathbf{F}_o

$$\mathbf{f}^A(X) = \frac{d\mathbf{F}_o}{dA} := \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_o}{\Delta A},$$

also als Vektorfeld auf der Oberfläche. Führen wir eine Vektorbasis $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ in einem Punkt $X \in A$ so ein, dass \mathbf{e}_x normal und \mathbf{e}_y und \mathbf{e}_z tangential an A liegen, so ist die Komponentendarstellung der **Spannung**

$$\mathbf{f}_x^A = \sigma_{xx} \mathbf{e}_x + \sigma_{yx} \mathbf{e}_y + \sigma_{zx} \mathbf{e}_z$$

mit σ_{xx} : **Normalspannung** auf $x = konst.$ -Fläche

$\sigma_{yx} = \tau_{yx}$: **Schubspannung** in y -Richtung auf $x = konst.$ -Fläche

$\sigma_{zx} = \tau_{zx}$: **Schubspannung** in z -Richtung auf $x = konst.$ -Fläche.

Der erste Index i von σ_{ij} ist also der Richtungsindex, der zweite Index j der Flächen (-Normalen)-Index. Man kann ja in demselben Punkt durch eine andere Schnittführung auch anders orientierte Oberflächen betrachten. Dann erhält man analog für Flächen $y = konst.$

$$\mathbf{f}_y^A = \sigma_{xy} \mathbf{e}_x + \sigma_{yy} \mathbf{e}_y + \sigma_{zy} \mathbf{e}_z$$

und für $z = konst.$ -Flächen

$$\mathbf{f}_z^A = \sigma_{xz} \mathbf{e}_x + \sigma_{yz} \mathbf{e}_y + \sigma_{zz} \mathbf{e}_z.$$

σ_{ii} sind also Normalspannungen auf $x_i = konst.$ -Flächen, σ_{ij} , $i \neq j$, hingegen Schubspannungen auf $x_j = konst.$ -Flächen in Richtung x_i , für die auch oft τ_{ij} geschrieben wird.

Man ordnet die Spannungen bezüglich der Vektorbasis $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ übersichtlich als **Spannungsmatrix** an:

$$\mathbf{S} := \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}.$$

Diese Matrix beschreibt also die Spannungen in einem Punkt in den drei KOO-Ebenen. Sie enthält die Komponenten der drei Spannungsvektoren als Spalten. Die Normalspannungen stehen auf der Diagonalen, die Schubspannungen außerhalb. Wir werden gleich sehen, dass diese Matrix die Spannungen aller anderen Ebenen durch diesen Punkt ebenfalls determiniert.

Von einem **ebenen Spannungszustand** spricht man, falls bezüglich eines KOOS gilt

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = \sigma_{zz} = 0 \text{ oder } \mathbf{S} := \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

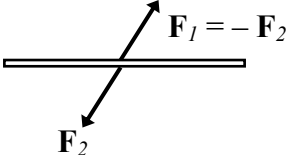
Damit ist die Fläche mit $z = konst.$ spannungsfrei.

Von einem **einachsigen Spannungszustand** spricht man, falls nur eine Normalspannung ungleich null ist, also etwa

$$\mathbf{S} := \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Damit sind Flächen mit $y = konst.$ oder $z = konst.$ spannungsfrei.

Aus dem Reaktionsprinzip für Kontaktkräfte

$$\mathbf{F}_1 = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{f}^A_1 dA = -\mathbf{F}_2 = -\int_{\mathcal{A}} \mathbf{f}^A_2 dA$$


folgt zunächst wegen der Beliebigkeit des Integrationsgebietes A das Reaktionsprinzip für Spannungen

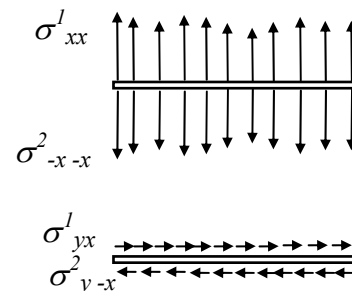
$$\mathbf{f}^A_1 = -\mathbf{f}^A_2$$


in jedem Punkt und damit komponentenweise

$$\sigma^1_{xx} = \sigma^2_{-x-x}$$

$$\sigma^1_{yx} = \sigma^2_{y-x}$$

$$\sigma^1_{zx} = \sigma^2_{z-x}$$

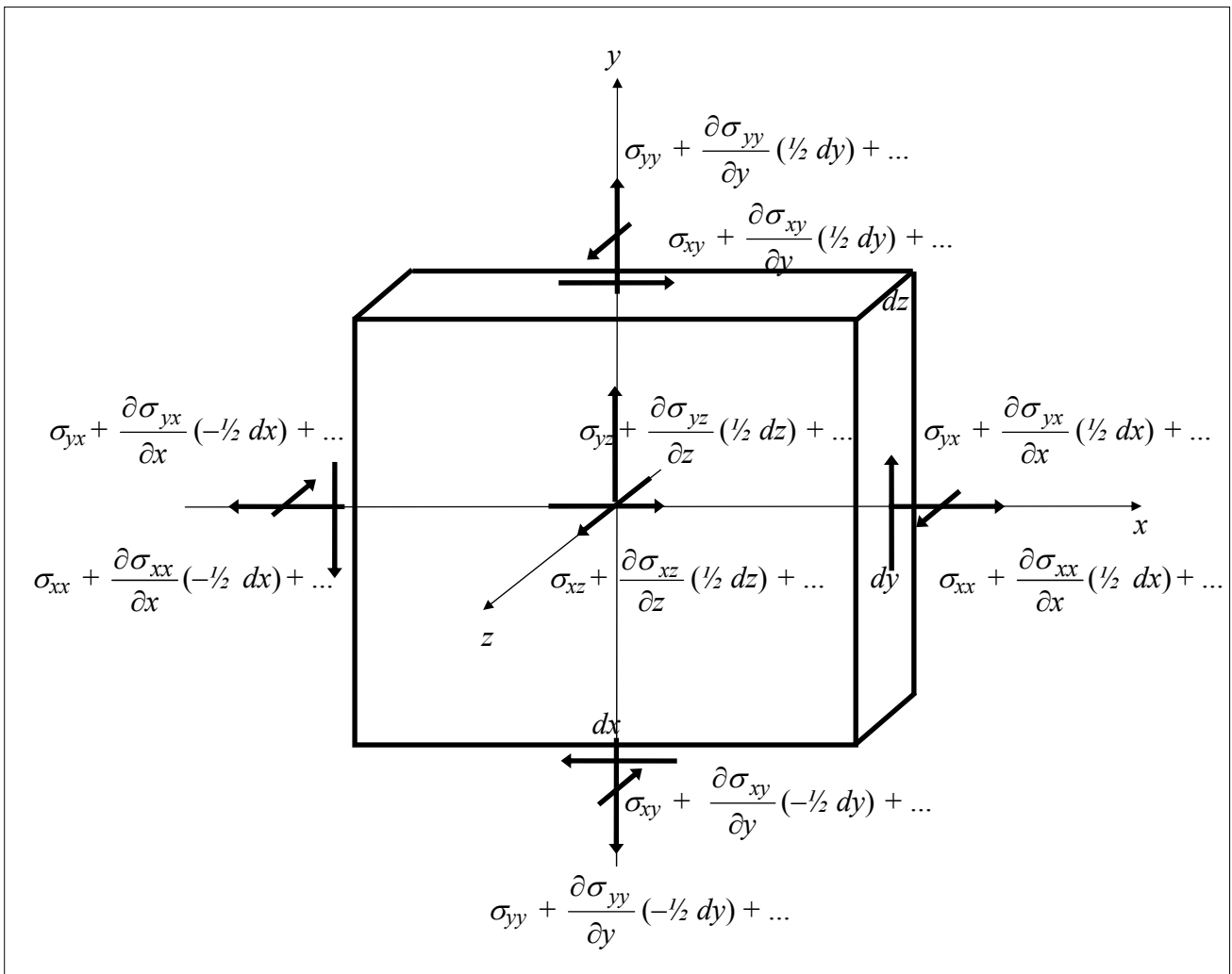


Ist also σ_{ij} die Spannungskomponente in Richtung \mathbf{e}_i auf einer Fläche mit \mathbf{e}_j als äußerer Flächennormalen, dann ist dasselbe σ_{ij} die Spannungskomponente in Richtung $-\mathbf{e}_i$ auf einer Fläche mit $-\mathbf{e}_j$ als äußerer Flächennormalen.

Um zu sehen, was aus dem **Gleichgewicht der Kräfte** folgt, schneiden wir aus dem Körper einen Würfel frei. Wir legen in seinen Mittelpunkt das kartesische KOOS $\{x, y, z\}$. Die Kantenlängen des Würfels seien dx, dy, dz . Nun entwickeln wir die Spannungen an den sechs Würfeloberflächen um den Ursprung in TAYLOR-Reihen gemäss

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \dots$$

Die Spannungen in z -Richtung wurden in der Zeichnung aus Platzgründen nicht bezeichnet.



Da wir später den Grenzübergang $dx, dy, dz \rightarrow 0$ machen wollen, betrachten wir nur die Terme, die maximal linear in dx, dy und dz sind. In seinem Inneren müssen wir die Massenkraftdichten

$$\mathbf{f}^M dm = \mathbf{f}^M \rho dV = (f_x^M \mathbf{e}_x + f_y^M \mathbf{e}_y + f_z^M \mathbf{e}_z) \rho dx dy dz$$

berücksichtigen. Bilden wir nun die Summe der Kräfte in x -Richtung, so erhalten wir aus Gleichgewichtsgründen

$$\begin{aligned} 0 &= \left\{ \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} + \dots \right\} dy dz - \left\{ \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \left(-\frac{dx}{2}\right) + \dots \right\} dy dz \\ &+ \left\{ \sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \frac{dy}{2} + \dots \right\} dx dz - \left\{ \sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \left(-\frac{dy}{2}\right) + \dots \right\} dx dz \\ &+ \left\{ \sigma_{xz} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \frac{dz}{2} + \dots \right\} dx dy - \left\{ \sigma_{xz} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \left(-\frac{dz}{2}\right) + \dots \right\} dx dy \\ &+ f_x^M \rho dx dy dz = \left\{ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \dots + f_x^M \rho \right\} dx dy dz . \end{aligned}$$

Wir dividieren wieder durch das Volumenelement $dy dz$ und bilden den Grenzwert $dx, dy, dz \rightarrow 0$. Damit erhalten wir für die x -Richtung und analog für die beiden anderen Richtungen **die lokalen Kraft-Gleichgewichtsbedingungen**

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x^M \rho &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y^M \rho &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z^M \rho &= 0\end{aligned}$$

Es handelt sich hierbei um ein System von drei partiellen Dgls., die in jedem Punkt eines Körpers erfüllt sein müssen, falls er sich im Gleichgewicht befindet.

Um zu sehen, was für die Spannungen aus dem **Gleichgewicht der Momente** folgt, bilden wir die Summe der Momente in z -Richtung bezüglich des KOO-Ursprungs und erhalten unter Benutzung von partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}M_z &= \frac{dx}{2} \times \left\{ (\sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} \frac{dx}{2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma_{yx}}{\partial x^2} \left(\frac{dx}{2}\right)^2 + \dots) dy dz \right. \\ &\quad \left. + (\sigma_{yx} - \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} \frac{dx}{2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma_{yx}}{\partial x^2} \left(\frac{dx}{2}\right)^2 + \dots) dy dz \right\} \\ &\quad - \frac{dy}{2} \times \left\{ (\sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \frac{dy}{2} + \dots) dx dz + (\sigma_{xy} - \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \frac{dy}{2} + \dots) dx dz \right\} \\ &\approx (\sigma_{yx} - \sigma_{xy} + \dots) dx dy dz.\end{aligned}$$

Da die Momente, die aus den Massenkraften resultieren, von höherer Ordnung klein sind, muss obige Vektorkomponente aus Gleichgewichtsgründen Null werden. Dividieren wir alles durch das Volumen $dV = dx dy dz$ und bilden dann den Grenzübergang $dx, dy, dz \rightarrow 0$, so verbleibt die Beziehung

$$0 = \sigma_{yx} - \sigma_{xy}.$$

Analog ergeben die Momentengleichgewichts-Bedingungen in den anderen beiden Richtungen

$$0 = \sigma_{xz} - \sigma_{zx} = \sigma_{zy} - \sigma_{yz}.$$

Satz über die Gleichheit zugeordneter Schubspannungen (BOLTZMANNsches¹⁷ Axiom)

Die Schubspannungen in einer j -Fläche in i -Richtung sind gleich den Schubspannungen in einer i -Fläche in j -Richtung, falls und damit das Momentengleichgewicht im Inneren eines Körpers erfüllt ist:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} \qquad \sigma_{xz} = \sigma_{zx} \qquad \sigma_{yz} = \sigma_{zy}$$

Oder: *die Spannungsmatrix ist symmetrisch.*

Das BOLTZMANNsche Axiom gilt nicht nur in der Statik, sondern auch in der Dynamik. Dort folgt es aus der Drallbilanz, wie wir zeigen werden.

¹⁷ Ludwig Boltzmann (1844 - 1904)

Transformation der Spannungen

Bisher war $\{x, y, z\}$ ein festgewähltes Koordinaten-System. Im Weiteren soll untersucht werden, wie sich die Spannungskomponenten bei Wechsel des KOOS transformieren. Der Einfachheit halber betrachten wir aber nur die ebene Transformation. Sei $\{r, s, z\}$ ein zweites kartesisches KOOS, das aus $\{x, y, z\}$ durch eine Drehung um den Winkel φ um die z -Achse hervorgeht. Wir betrachten eine Scheibe der Dicke dz in Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit dx und dy als Katheten und ds als Hypotenuse. Es gelten die trigonometrischen Beziehungen

$$dx = ds \sin \varphi$$

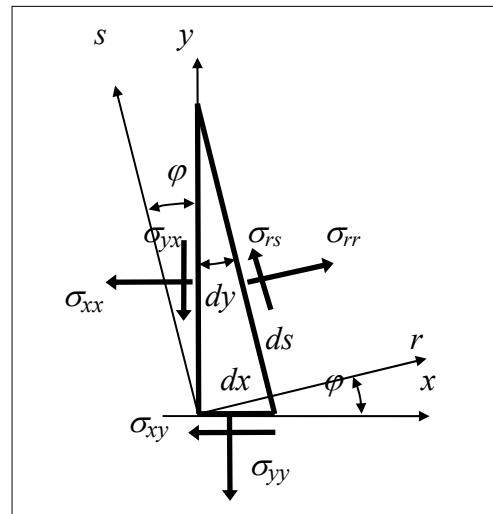
$$dy = ds \cos \varphi$$

$$dz$$

$$\mathbf{e}_x = \cos \varphi \mathbf{e}_r - \sin \varphi \mathbf{e}_s$$

$$\mathbf{e}_y = \sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \varphi \mathbf{e}_s$$

$$\mathbf{e}_z$$



Im Weiteren beschränken wir uns der Einfachheit halber auf den *ebenen Spannungszustand* mit $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$ und $f_z^M = 0$. Gleichgewicht der Kräfte in der $z = \text{konst}$ -Ebene liefert

$$\begin{aligned} & (\sigma_{rr} \mathbf{e}_r + \sigma_{rs} \mathbf{e}_s) ds dz - (\sigma_{yy} \mathbf{e}_y + \sigma_{xy} \mathbf{e}_x) dx dz - (\sigma_{xx} \mathbf{e}_x + \sigma_{yx} \mathbf{e}_y) dy dz \\ & + (f_x^M \rho \mathbf{e}_x + f_y^M \rho \mathbf{e}_y) \frac{dx dy dz}{2} = 0, \end{aligned}$$

wobei wir die Terme höherer Ordnung weggelassen haben, da wir gleich den Grenzübergang $dV \rightarrow 0$ machen, womit auch der Beitrag der Massenkraft Null wird. Daraus folgt nach Division durch dz

$$\begin{aligned} (\sigma_{rr} \mathbf{e}_r + \sigma_{rs} \mathbf{e}_s) ds &= \sigma_{yy} (\sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \varphi \mathbf{e}_s) ds \sin \varphi \\ &+ \sigma_{xy} (\cos \varphi \mathbf{e}_r - \sin \varphi \mathbf{e}_s) ds \sin \varphi \\ &+ \sigma_{xx} (\cos \varphi \mathbf{e}_r - \sin \varphi \mathbf{e}_s) ds \cos \varphi \\ &+ \sigma_{yx} (\sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \varphi \mathbf{e}_s) ds \cos \varphi. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir nach Division durch ds komponentenweise unter Anwendung des BOLTZMANNschen Axioms und der trigonometrischen Regeln

$$2 \sin^2 \varphi = 1 - \cos(2\varphi)$$

$$2 \cos^2 \varphi = 1 + \cos(2\varphi)$$

$$2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin(2\varphi)$$

$$\text{in } \mathbf{e}_r: \quad \sigma_{rr} = \sigma_{yy} \sin^2 \varphi + 2\sigma_{xy} \sin \varphi \cos \varphi + \sigma_{xx} \cos^2 \varphi$$

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos(2\varphi) + \sigma_{xy} \sin(2\varphi)$$

$$\text{in } \mathbf{e}_s: \quad \sigma_{sr} = \sigma_{yy} \sin \varphi \cos \varphi + \sigma_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - \sigma_{xx} \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\sigma_{sr} = \frac{1}{2} (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin(2\varphi) + \sigma_{xy} \cos(2\varphi)$$

Da die r -Achse auf der s -Achse senkrecht steht, ist

$$\sigma_{ss}(\varphi) = \sigma_{rr}(\varphi + \frac{\pi}{2}),$$

und mit

$$\sin\{2(\varphi + \frac{\pi}{2})\} = \sin(2\varphi + \pi) = -\sin(2\varphi)$$

$$\cos\{2(\varphi + \frac{\pi}{2})\} = \cos(2\varphi + \pi) = -\cos(2\varphi)$$

folgt

$$\sigma_{ss} = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - \frac{1}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos(2\varphi) - \sigma_{xy} \sin(2\varphi)$$

Diese Transformationen sind formal identisch mit denjenigen der Flächenträgheitsmomente, wenn man I_i durch σ_{ii} und I_{ij} durch σ_{ij} ersetzt.

MOHRscher Kreis

Zur Interpretation der Transformationsformel der Spannungen hat MOHR¹⁸ ein geometrisches Verfahren vorgeschlagen, bei dem ein Kreis konstruiert wird, an dem man die Spannungsgrößen für beliebige Winkel φ abgreifen kann. Die Konstruktion des MOHRschen Kreises erfolgt in folgenden Schritten.

Annahme: der ebene Spannungszustand ist bezüglich des KOOS $\{x, y\}$ gegeben: σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy}

1) Zeichne ein Diagramm τ (Schubspannung) über σ (Normalspannung).

2) Zeichne einen Kreis mit folgenden Bestimmungsstücken. Der Kreismittelpunkt

hat die KOO

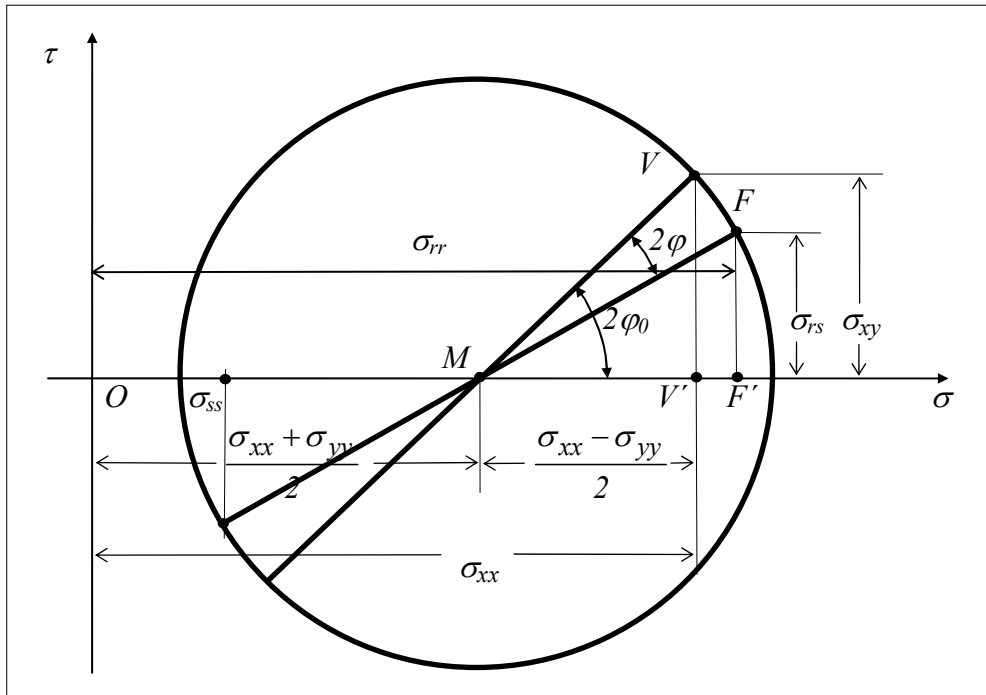
$$\tau_M = 0 \quad \text{und} \quad \sigma_M = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}.$$

Ein Punkt V des Kreises hat die KOO

$$\tau_V = \sigma_{xy}$$

¹⁸ Christian Otto Mohr (1835 - 1918)

$$\sigma_V = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} = \sigma_{xx}.$$



Damit kann der Kreis gezeichnet werden. Sein Radius ist nach dem Satz des PYTHAGORAS

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}.$$

Der Radius in V schließt einen Winkel $2\varphi_0$ mit der σ -Achse ein.

3) Trage den Winkel 2φ im Uhrzeigersinn gegen den Radius in V an. Der zweite Schenkel schneidet den Kreis in F mit den KOO

$$\sigma_F = \sigma_{rr} \quad \text{und} \quad \tau_F = \sigma_{rs}.$$

Um das zu zeigen, verwenden wir die trigonometrischen Formeln

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Wir bezeichnen mit $|XY|$ den Abstand zweier Punkte X und Y . Sei $F' := \{\sigma_F, 0\}$ die Projektion von F auf die σ -Achse. Dann gilt mit $|MF| = |MV|$

$$\begin{aligned} |OF'| &= |OM| + |MF| \cos(2\varphi_0 - 2\varphi) \\ &= |OM| + |MV| \cos(2\varphi_0) \cos(2\varphi) + |MV| \sin(2\varphi_0) \sin(2\varphi) \\ &= |OM| + |MV'| \cos(2\varphi) + |VV'| \sin(2\varphi) \\ &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos(2\varphi) + \sigma_{xy} \sin(2\varphi) \end{aligned}$$

$$= \sigma_{rr}$$

und

$$\begin{aligned} |FF'| &= |MF| \sin(2\varphi_0 - 2\varphi) \\ &= |MV| \sin(2\varphi_0) \cos(2\varphi) - |MV| \cos(2\varphi_0) \sin(2\varphi) \\ &= |VV'| \cos(2\varphi) - |MV'| \sin(2\varphi) \\ &= \sigma_{xy} \cos(2\varphi) - \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin(2\varphi) \\ &= \sigma_{rs} . \end{aligned}$$

Um σ_{ss} zu ermitteln, tragen wir anstelle von 2φ nunmehr $2\varphi + \pi$ an, weil der Winkel zwischen den KOO-Achsen $\pi/2$ beträgt.

Folgende Spezialfälle können wir dem MOHRschen Kreis entnehmen:

- für $\varphi \equiv 0$ erhalten wir trivialerweise $\sigma_{xx} \equiv \sigma_{rr}$ und $\sigma_{xy} \equiv \sigma_{rs}$.
- für $\varphi \equiv \varphi_0$ werden $\sigma_{rs} \equiv 0$ und σ_{rr} und σ_{ss} extremal:

$$\sigma_{rr}^H, \sigma_{ss}^H = |OM| \pm r = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} .$$

Derartige Achsen heißen **Hauptspannungs-Achsen** (HSA) und σ_{rr}^H und σ_{ss}^H **Hauptspannungen**. *Bezüglich HSA sind die Normalspannungen extremal (eine maximal, die andere minimal) und die Schubspannungen Null.*

φ_0 beschreibt also HSA. Dasselbe passiert bei $\varphi \equiv \varphi_0 + n\pi/2$, n ganzzahlig. *Achsen, die auf Hauptachsen senkrecht stehen, sind auch Hauptachsen.*

Wir entnehmen der Zeichnung

$$\tan(2\varphi_0) = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \quad \text{oder} \quad \varphi_0 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} .$$

- für Winkel $\varphi \equiv \varphi_0 \pm \pi/4$ werden die Schubspannungen extremal (gleich dem Radius)

$$\tau_{extr.} = \pm r = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}$$

ohne dass die Normalspannungen verschwinden müssen. *Die Schubspannungen sind extremal unter 45° gegenüber HSA.*

Da die Transformationsformeln für die Flächenträgheitsmomente und - wie wir sehen werden - für die Deformationen mit denen der Spannungen identisch sind, können wir dieselbe Konstruktion auch dafür verwenden.

Wir haben der Einfachheit halber den MOHRschen Kreis nur für ebene Spannungszustände konstruiert. Es gibt auch (ungleich kompliziertere) Konstruktionen für allgemein dreidimensionale Spannungszustände, die wir hier aber nicht wiedergeben wollen. Die Ergebnisse lassen sich sinngemäß auf den allgemeinen räumlichen Spannungszustand übertragen. *Es lässt sich grundsätzlich ein KOOS $\{r, s, z\}$ finden, bezüglich dessen die Spannungsmatrix Diagonalform hat:*

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr}^H & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{ss}^H & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz}^H \end{bmatrix}$$

Alle Schubspannungen sind Null und $\{r, s, z\}$ heißen HSA. Weiterhin gilt für die Hauptspannungen, falls sie wie $\sigma_{rr}^H \geq \sigma_{ss}^H \geq \sigma_{zz}^H$ geordnet sind:

σ_{rr}^H sind die maximalen Normalspannungen,

σ_{zz}^H die minimalen.

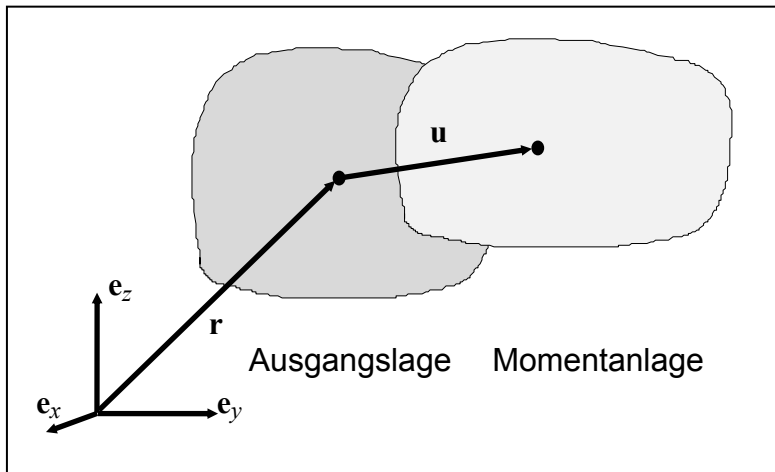
Die extremalen Schubspannungen sind $(\sigma_{rr}^H - \sigma_{zz}^H) / 2$ und treten auf bezüglich Achsen, die unter 45° gegenüber diesen HSA geneigt sind.

Sind alle Hauptspannungen verschieden, so sind die HSA mit obigen Eigenschaften eindeutig. Sind zwei oder drei Hauptspannungen gleich groß, so gibt es unendlich viele HSA. Speziell gilt für $\sigma_{rr}^H \equiv \sigma_{ss}^H \equiv \sigma_{zz}^H$, dass *alle* Achsen HSA sind.

Sind die Spannungen bezüglich eines beliebigen KOOS als Matrix gegeben, so kann man die Komponenten des Spannungsvektors berechnen durch das Matrizenprodukt der Spannungsmatrix mit dem Vektor der äußeren Flächennormalen bez. desselben KOOS:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}$$

Deformationsgeometrie



Wir betrachten einen Körper, der in der Ausgangslage spannungsfrei sei. Wird er belastet, so verformt er sich und jeder seiner Punkte verschiebt sich in die Momentanlage. Wir wollen im Weiteren immer davon ausgehen, dass die Deformationen klein sind (geometrisch **lineare Theorie**). Beschreiben wir die Körperpunkte in der Ausgangslage durch KOO $\{x, y, z\}$ oder durch einen Ortsvektor

$$\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z,$$

so kann man die **Verschiebungen** dieser Punkte in die Momentanlage durch Vektoren darstellen

$$\mathbf{u}(x, y, z) = u(x, y, z) \mathbf{e}_x + v(x, y, z) \mathbf{e}_y + w(x, y, z) \mathbf{e}_z,$$

so dass der Ortsvektor mit den KOO $\{x, y, z\}$ in der Ausgangslage nunmehr in der Momentanlage durch

$$\mathbf{r}(x, y, z) + \mathbf{u}(x, y, z) = (x + u) \mathbf{e}_x + (y + v) \mathbf{e}_y + (z + w) \mathbf{e}_z$$

gekennzeichnet ist. Seine (kartesischen) KOO sind also

$$\{x + u, y + v, z + w\}.$$

Die Deformation in einem solchen Punkt wird beschrieben durch die partiellen Ableitungen

$$\varepsilon_{xx} := \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_{yy} := \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_{zz} := \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right),$$

die alle dimensionslos sind. Dies sind die **Verschiebungs-Verzerrungs-Relationen**.

Man kann die Deformationen analog zu den Spannungen in einer Dehnungsmatrix anordnen

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix},$$

die definitionsgemäß symmetrisch ist.

Von einem **einachsigen Verzerungszustand** spricht man, falls bezüglich eines KOOS ε_{xx} die einzige von Null verschiedene Deformation ist.

Von einem **ebenen Verzerungszustand** spricht man, falls bezüglich eines KOOS gilt

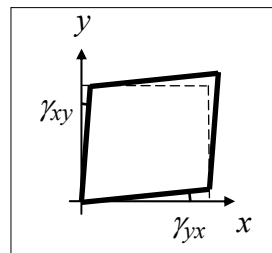
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Die **axialen Dehnungen** (Streckungen für $\varepsilon_{ii} > 0$, Stauchungen für $\varepsilon_{ii} < 0$) sind uns bereits aus der einachsigen Theorie bekannt. Um die anderen Terme zu interpretieren, betrachten wir die (ebene) Scherung eines Rechtecks, die durch

$$u = \gamma_{xy} y$$

$$v = 0$$

$$w = 0$$



gegeben ist. Nun superponieren wir eine zweite Scherung in die andere Richtung

$$v = \gamma_{yx} x.$$

Damit ist insgesamt

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} (\gamma_{xy} + \gamma_{yx}).$$

$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$ heißt deshalb **Schubverzerrung**, wie auch die anderen ε_{ij} für $i \neq j$.

Die (Matrix der) Deformationen hängen definitionsgemäß vom KOOS ab. Damit stellt sich die Frage, wie sie sich bei **Wechsel des Koordinatensystems** transformieren. Der Einfachheit halber beschränken wir uns wieder auf eine ebene KOO-Transformation vom KOOS $\{x, y, z\}$ in $\{r, s, z\}$ gemäß

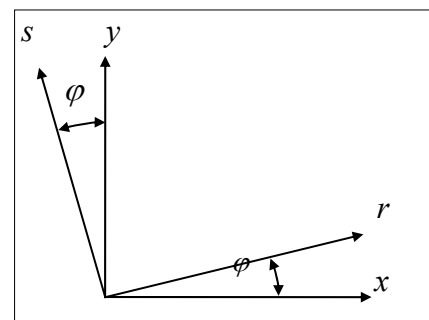
$$x = r \cos \varphi - s \sin \varphi$$

$$y = r \sin \varphi + s \cos \varphi$$

$$z = z$$

$$\mathbf{e}_x = \cos \varphi \mathbf{e}_r - \sin \varphi \mathbf{e}_s$$

$$\mathbf{e}_y = \sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \varphi \mathbf{e}_s$$



$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z.$$

Der Verschiebungsvektor hat bezüglich der beiden ONB die Darstellungen

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= u_x \mathbf{e}_x + u_y \mathbf{e}_y + u_z \mathbf{e}_z = u_r \mathbf{e}_r + u_s \mathbf{e}_s + u_z \mathbf{e}_z \\ &= u_x \cos \varphi \mathbf{e}_r - u_x \sin \varphi \mathbf{e}_s + u_y \sin \varphi \mathbf{e}_r + u_y \cos \varphi \mathbf{e}_s + u_z \mathbf{e}_z\end{aligned}$$

und deshalb

$$\begin{aligned}u_r &= u_x \cos \varphi + u_y \sin \varphi \\ u_s &= -u_x \sin \varphi + u_y \cos \varphi.\end{aligned}$$

Die Deformationen bezüglich $\{r, s, z\}$ sind nach der Kettenregel

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &:= \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{\partial u_r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} \\ &= \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u_y}{\partial x} \sin \varphi \right) \cos \varphi + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \cos \varphi + \frac{\partial u_y}{\partial y} \sin \varphi \right) \sin \varphi \\ &= \varepsilon_{xx} \cos^2 \varphi + \varepsilon_{yy} \sin^2 \varphi + 2\varepsilon_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \\ \varepsilon_{ss} &:= \frac{\partial u_s}{\partial s} = \frac{\partial u_s}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \\ &= \left(-\frac{\partial u_x}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial u_y}{\partial x} \cos \varphi \right) (-\sin \varphi) + \left(-\frac{\partial u_x}{\partial y} \sin \varphi + \frac{\partial u_y}{\partial y} \cos \varphi \right) \cos \varphi \\ &= \varepsilon_{xx} \sin^2 \varphi + \varepsilon_{yy} \cos^2 \varphi - 2\varepsilon_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \\ \varepsilon_{rs} = \varepsilon_{sr} &:= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial r} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u_r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u_s}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u_y}{\partial x} \sin \varphi \right) (-\sin \varphi) + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \cos \varphi + \frac{\partial u_y}{\partial y} \sin \varphi \right) \cos \varphi \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{\partial u_x}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial u_y}{\partial x} \cos \varphi \right) \cos \varphi + \left(-\frac{\partial u_x}{\partial y} \sin \varphi + \frac{\partial u_y}{\partial y} \cos \varphi \right) \sin \varphi \right] \\ &= (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx}) \sin \varphi \cos \varphi + \varepsilon_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi).\end{aligned}$$

Dies kann umgeformt werden zu

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + \frac{1}{2} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \cos(2\varphi) + \varepsilon_{xy} \sin(2\varphi) \\ \varepsilon_{ss} &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) - \frac{1}{2} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \cos(2\varphi) - \varepsilon_{xy} \sin(2\varphi)\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{rs} = \varepsilon_{sr} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xx}) \sin(2\varphi) + \varepsilon_{xy} \cos(2\varphi).$$

Die Transformationsgleichungen sind formal identisch mit denjenigen der Spannungen und der Flächenträgheitsmomente. Die Ursache dafür liegt darin, dass es sich in allen Fällen um sogenannte (symmetrische) Tensoren handelt, deren Transformationsverhalten gleich ist. Mit der Tensorrechnung, die es erlaubt, die Mechanik kompakter und eleganter zu formulieren, beschäftigen wir uns aber hier noch nicht.

In Analogie zu Spannungen und Trägheitsmomenten können wir folgendes konstatieren: In jedem Punkt eines Körpers existiert ein orthogonales Achsenkreuz, bezüglich dessen die Deformationsmatrix Diagonalform besitzt, d. h. die Schubverzerrungen sind Null und die zwei axialen Dehnungen sind extremal (eine maximal, eine minimal). Diese Achsen heißen **Hauptdehnungsachsen**, die Dehnungen **Hauptdehnungen**. Mathematisch gesehen sind erstere die Eigenrichtungen, letztere die Eigenwerte des Deformationstensors. Im ebenen Fall ermittelt man diese Achsen durch den Winkel

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}$$

gegenüber der x - bzw. y -Achse.

Elastizität

Um das HOOKEsche Elastizitätsgesetz $\sigma = E \varepsilon$ dreidimensional zu verallgemeinern, treffen wir einige Annahmen: Das Material sei homogen und

E1: **elastisch**; d. h. die momentanen Spannungen hängen nur von den momentanen Deformationen ab;

E2: diese Abhängigkeit sei **linear** und

E3: **isotrop**; d. h. das Materialverhalten ist in allen Richtungen des Materials gleich.

Alle diese Annahmen stellen starke Einschränkungen der beschreibbaren Materialien und Phänomene dar. So schließt

- *E1* aus, dass die Spannungen von Deformationsgeschwindigkeiten abhängen, wie dies bei viskosen Materialien der Fall ist;
- *E2* aus, dass die Deformationen so groß werden, dass nichtlineare Effekte, die es bei allen Materialien gibt, relevant werden;
- *E3* aus, dass materielle Richtungen ausgezeichnet sind, wie sie bei faser- oder flächenverstärkten Materialien, bei Kristallen, bei Substrukturen (z. B. Holz) vorhanden sind.

Betrachten wir als erstes einen Würfel, der lediglich auf zwei gegenüberliegenden Flächen allein durch homogene Normalspannungen belastet wird. Der Würfel wird sich in dieser Richtung verlängern. Gem. *E2* wird diese Längsdehnung linear in der Spannung sein, also

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \sigma_{xx}.$$

Der Elastizitätsmodul E mit der Dimension [Spannung] ist uns bereits aus dem einachsigen HOOKEschen Gesetz bekannt. Man wird gleichzeitig erwarten müssen, dass auch trans-

versale oder Querdehnungen ε_{yy} und ε_{zz} auftreten. Wegen $E3$ sind sie gleich und wegen $E2$ wiederum proportional zu σ_{xx} bzw. zu ε_{xx}

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} \propto \sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} .$$

Das Verhältnis von Querkontraktion (= negativer Querdehnung) zu Längsdehnung wird als **Querkontraktionszahl** (engl. *POISSON'S*¹⁹ *ratio*) bezeichnet

$$\nu = - \frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}} = - \frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_{xx}} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = - \frac{\nu}{E} \sigma_{xx}$$

und ist wegen $E2$ eine Materialkonstante. Für die meisten Materialien liegt sie zwischen 0 (keine Querkontraktion) und 0,5 (keine Volumenänderung, s. u.), z. B. für

| | |
|-----------|------------------------|
| Stahl | $\nu = 0,34$ |
| Aluminium | $\nu = 0,32 \div 0,34$ |
| Kupfer | $\nu = 0,33 \div 0,36$ |
| Glas | $\nu = 0,21 \div 0,27$ |
| Gummi | $\nu = 0,5$ |

Sie kann aber auch negative Werte annehmen. Wegen $E3$ erwarten wir analog bei Belastungen auf den anderen Flächenpaaren mit σ_{yy}

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} \sigma_{yy} \quad \text{und} \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xx} = - \frac{\nu}{E} \sigma_{yy}$$

bzw. mit σ_{zz}

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} \sigma_{zz} \quad \text{und} \quad \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = - \frac{\nu}{E} \sigma_{zz} .$$

Wegen der Isotropie müssen E und ν nämlich richtungsunabhängig sein. Und wegen $E2$ können wir die drei Spannungs- und Dehnungszustände superponieren

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{zz} + \sigma_{xx})] \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] . \end{aligned}$$

Dies ist das dreidimensionale HOOKEsche Gesetz bezüglich Hauptspannungs- und Hauptdehnungsachsen, da weder Schubspannungen noch Schubverzerrungen in ihm auftreten. Wegen der Isotropie fallen die Spannungshauptachsen mit den Dehnungshauptachsen zusammen. Man sieht aber hier bereits, dass der EDZ nicht dem ESZ entspricht, genauso wenig, wie ein einachsiger SZ einem einachsigen DZ entspricht.

Mit den Abkürzungen

$$e := \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \quad (\text{Spur der Dehnungsmatrix})$$

$$s := \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \quad (\text{Spur der Spannungsmatrix})$$

¹⁹ Simeon-Denis Poisson (1781 - 1840)

können wir das HOOKEsche Gesetz umformen in

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_{xx} - \nu s] = \frac{1+\nu}{E} \left[\sigma_{xx} - \frac{\nu}{1+\nu} s \right] \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_{yy} - \nu s] = \frac{1+\nu}{E} \left[\sigma_{yy} - \frac{\nu}{1+\nu} s \right] \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_{zz} - \nu s] = \frac{1+\nu}{E} \left[\sigma_{zz} - \frac{\nu}{1+\nu} s \right].\end{aligned}$$

Wollen wir auch noch die thermische Ausdehnung berücksichtigen, so erhalten wir das **thermoelastische** Gesetz

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1+\nu}{E} \left[\sigma_{xx} - \frac{\nu}{1+\nu} s \right] + \alpha \Delta\theta \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1+\nu}{E} \left[\sigma_{yy} - \frac{\nu}{1+\nu} s \right] + \alpha \Delta\theta \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1+\nu}{E} \left[\sigma_{zz} - \frac{\nu}{1+\nu} s \right] + \alpha \Delta\theta\end{aligned}$$

Dabei folgt aus der Isotropieannahme $E3$, dass der Wärmeausdehnungskoeffizient α in allen Richtungen gleich groß ist.

Transformation des HOOKEschen Gesetzes

Wir wollen nun das HOOKEsche Gesetz von Hauptachsen auf allgemeine Achsen transformieren. Dabei beschränken wir uns wieder auf eine ebene Drehung des Achsensystems von x in r und y in s um den Winkel φ . Wir nehmen an, dass $\{r, s, z\}$ Hauptachsen sind, nicht jedoch x und y . Mit den Transformations-Formeln für die Spannungen und Deformationen erhalten wir

$$\begin{aligned}s &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_{rr} + \sigma_{ss} + \sigma_{zz} \\ e &= \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{ss} + \varepsilon_{zz},\end{aligned}$$

was daran liegt, dass die Spur eines Tensors eine Invariante ist. Weiterhin gelten

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}^H &= \frac{1+\nu}{E} \left[\sigma_{rr}^H - \frac{\nu}{1+\nu} s \right] + \alpha \Delta\theta \\ &= \varepsilon_{xx} \cos^2 \varphi + \varepsilon_{yy} \sin^2 \varphi + 2 \varepsilon_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \\ &= \frac{1+\nu}{E} \left[\sigma_{xx} \cos^2 \varphi + \sigma_{yy} \sin^2 \varphi + 2 \sigma_{xy} \sin \varphi \cos \varphi - \frac{\nu}{1+\nu} s \right] + \alpha \Delta\theta \\ \varepsilon_{ss}^H &= \frac{1+\nu}{E} \left[\sigma_{ss}^H - \frac{\nu}{1+\nu} s \right] + \alpha \Delta\theta \\ &= \varepsilon_{xx} \sin^2 \varphi + \varepsilon_{yy} \cos^2 \varphi - 2 \varepsilon_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \\ &= \frac{1+\nu}{E} \left[\sigma_{xx} \sin^2 \varphi + \sigma_{yy} \cos^2 \varphi - 2 \sigma_{xy} \sin \varphi \cos \varphi - \frac{\nu}{1+\nu} s \right] + \alpha \Delta\theta\end{aligned}$$

oder äquivalent

$$\begin{aligned} \cos^2 \varphi \left(\varepsilon_{xx} - \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xx} \right) + \sin^2 \varphi \left(\varepsilon_{yy} - \frac{1+\nu}{E} \sigma_{yy} \right) + 2 \left(\varepsilon_{xy} - \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} \right) \sin \varphi \cos \varphi \\ = -\frac{\nu}{E} s + \alpha \Delta \theta \\ \sin^2 \varphi \left(\varepsilon_{xx} - \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xx} \right) + \cos^2 \varphi \left(\varepsilon_{yy} - \frac{1+\nu}{E} \sigma_{yy} \right) - 2 \left(\varepsilon_{xy} - \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} \right) \sin \varphi \cos \varphi \\ = -\frac{\nu}{E} s + \alpha \Delta \theta. \end{aligned}$$

Multiplizieren wir die rechten Seiten mit $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \cos^2 \varphi \left(\varepsilon_{xx} - \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xx} + \frac{\nu}{E} s - \alpha \Delta \theta \right) + \sin^2 \varphi \left(\varepsilon_{yy} - \frac{1+\nu}{E} \sigma_{yy} + \frac{\nu}{E} s - \alpha \Delta \theta \right) \\ + 2 \sin \varphi \cos \varphi \left(\varepsilon_{xy} - \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} \right) = 0 \\ \sin^2 \varphi \left(\varepsilon_{xx} - \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xx} + \frac{\nu}{E} s - \alpha \Delta \theta \right) + \cos^2 \varphi \left(\varepsilon_{yy} - \frac{1+\nu}{E} \sigma_{yy} + \frac{\nu}{E} s - \alpha \Delta \theta \right) \\ - 2 \sin \varphi \cos \varphi \left(\varepsilon_{xy} - \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} \right) = 0. \end{aligned}$$

Wegen der Isotropie soll sich der Typ der Elastizitätsgleichungen nicht ändern, wenn wir das KOOS drehen, also nicht von φ abhängen. Dies wird dann erfüllt, wenn die Klammerausdrücke Null werden

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1+\nu}{E} \left[\sigma_{xx} - \frac{\nu}{1+\nu} s \right] + \alpha \Delta \theta \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1+\nu}{E} \left[\sigma_{yy} - \frac{\nu}{1+\nu} s \right] + \alpha \Delta \theta \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{yx} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} &= \frac{1+\nu}{E} \left[\sigma_{zz} - \frac{\nu}{1+\nu} s \right] + \alpha \Delta \theta \\ \varepsilon_{yz} &= \varepsilon_{zy} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{yz} \\ \varepsilon_{zx} &= \varepsilon_{xz} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{zx} \end{aligned}$$

Dies ist das HOOKEsche Gesetz bez. beliebiger Achsen.

Erinnern wir uns an die *einfache Scherung*. Die einzigen auftretenden Deformationen waren

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \gamma_{xy}.$$

Die hierfür benötigten Spannungen sind die Schubspannungen

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = G \gamma_{xy}$$

mit dem **Schubmodul** (engl. *shear modulus*)

$$G := \frac{E}{2(1+\nu)}$$

als Materialkonstante der Dimension [Spannung].

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{2G} \left[\sigma_{xx} - \frac{\nu}{1+\nu} s \right] + \alpha \Delta\theta \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{2G} \left[\sigma_{yy} - \frac{\nu}{1+\nu} s \right] + \alpha \Delta\theta \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{2G} \left[\sigma_{zz} - \frac{\nu}{1+\nu} s \right] + \alpha \Delta\theta \\ \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} &= \frac{1}{2G} \sigma_{xy} \quad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2G} \sigma_{xz} \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2G} \sigma_{yz} \end{aligned}$$

Wir können das HOOKEsche Gesetz auch alternativ durch G und ν ausdrücken:

In allen Versionen des HOOKEschen Gesetzes sind von den Elastizitätskonstanten immer genau zwei unabhängig. Welche man wählt, ist einem freigestellt.

Inversion des HOOKEschen Gesetzes

Oft will man nicht die Deformationen aus den Spannungen ausrechnen, sondern umgekehrt. Dazu benötigt man eine Spannungs-explicite Form des HOOKEschen Gesetzes. Als Summe der ersten drei Gleichungen der vorigen Seite erhalten wir

$$e := \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{1-2\nu}{E} s + 3\alpha \Delta\theta$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{E}{1-2\nu} (e - 3\alpha \Delta\theta).$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2G (\varepsilon_{xx} - \alpha \Delta\theta) + \frac{\nu}{1+\nu} s \\ &= 2G \varepsilon_{xx} - 2G \alpha \Delta\theta + \frac{\nu}{1+\nu} \frac{2G(1+\nu)}{1-2\nu} (e - 3\alpha \Delta\theta) = \end{aligned}$$

$$\sigma_{xx} = 2G \left[\varepsilon_{xx} + \frac{\nu}{1-2\nu} e - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \Delta\theta \right]$$

$$\sigma_{yy} = 2G \left[\varepsilon_{yy} + \frac{\nu}{1-2\nu} e - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \Delta\theta \right]$$

$$\sigma_{zz} = 2G \left[\varepsilon_{zz} + \frac{\nu}{1-2\nu} e - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \Delta\theta \right]$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 2G \varepsilon_{xy} \quad \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = 2G \varepsilon_{xz} \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 2G \varepsilon_{yz}$$

Man beachte, dass nach dem HOOKEschen Gesetz

- aus der Einachsigkeit des Spannungszustandes *nicht* die des Deformationszustandes
- aus der Einachsigkeit des Deformationszustandes *nicht* die des Spannungszustandes
- aus einem ebenen Deformationszustand *nicht* ein ebener Spannungszustand
- aus einem ebenen Spannungszustand *nicht* ein ebener Deformationszustand folgen.

HOOKEsches Gesetz als Matrizen-Gleichung

Da die obigen Formen des HOOKEschen Gesetzes sehr platzraubend sind, versucht man, Kurzschriften einzuführen. Eine Möglichkeit dafür bildet die Matrizen-Rechnung. Wir hatten bereits die Spannungs-Matrix \mathbf{S} und die Deformationsmatrix \mathbf{E} kennengelernt mit den Spuren $s := sp\mathbf{S}$ und $e := sp\mathbf{E}$. Benötigt wird außerdem die Einismatrix

$$\mathbf{I} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Damit erhalten wir die matriziellen Darstellungen des HOOKEschen Gesetzes

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2G} \left(\mathbf{S} - \frac{\nu}{1+\nu} s \mathbf{I} \right) + \alpha \Delta\theta \mathbf{I}$$

$$\mathbf{S} = 2G \left(\mathbf{E} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \mathbf{I} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \Delta\theta \mathbf{I} \right) = \lambda e \mathbf{I} + 2\mu \left(\mathbf{E} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \Delta\theta \mathbf{I} \right)$$

mit den LAMÉsche²⁰ Konstanten

$$\lambda := \frac{2G\nu}{1-2\nu} \quad \text{und} \quad \mu := G.$$

Manchmal findet man diese Gleichungen auch in Index-Schreibweise als

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left[\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \left(\sum_{k=1}^3 \sigma_{kk} \right) \delta_{ij} + \alpha \Delta\theta \delta_{ij} \right]$$

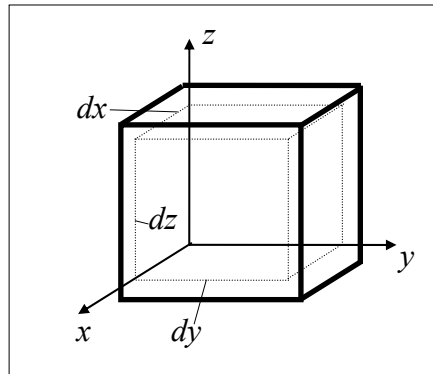
$$\sigma_{ij} = 2G \left[\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk} \right) \delta_{ij} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \Delta\theta \delta_{ij} \right]$$

²⁰ Gabriel Lamé (1795 - 1870)

mit den Komponenten der Einsmatrix δ_{ij} .

Kompression/ Dilatation

Betrachten wir nun einen Würfel mit den Kantenlängen dx , dy , dz , der an den Hauptachsen von Spannungen und Deformationen orientiert ist.



Sein undeformiertes Volumen ist $dV_0 = dx \, dy \, dz$. Die Kantenlängen sind im deformierten Zustand

$$l_x = dx + u(dx) - u(0) \approx (1 + \varepsilon_{xx}) dx$$

$$l_y = dy + v(dy) - v(0) \approx (1 + \varepsilon_{yy}) dy$$

$$l_z = dz + w(dz) - w(0) \approx (1 + \varepsilon_{zz}) dz.$$

Das deformierte Volumen ist in der linearen Theorie

$$dV = l_x l_y l_z \approx (1 + \varepsilon_{xx}) dx \cdot (1 + \varepsilon_{yy}) dy \cdot (1 + \varepsilon_{zz}) dz$$

$$\approx (1 + \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) dx \, dy \, dz = (1 + e) dV_0.$$

e ist also in der linearen Theorie ein Maß für die Volumenänderung.

Nach dem HOOKEschen Gesetz (ohne thermische Ausdehnung) gilt

$$e = \frac{1-2\nu}{E} s.$$

Betrachten wir den speziellen Spannungszustand

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p = \frac{s}{3}$$

(keine Schubspannungen), so beschreibt dieser einen allseitigen **Druckzustand**. Da bei ruhenden Flüssigkeiten und Gasen dies der einzig mögliche Spannungszustand ist, nennt man ihn auch **hydrostatisch**. Hier wird der Radius des MOHRschen Kreises Null und der Kreis entartet zu einem Punkt. Zwischen dem Druck und der Volumenänderung besteht der Zusammenhang

$$-p = K e$$

mit dem **Kompressionsmodul** (engl. *bulk modulus*) von der Dimension [Spannung]

$$K := \frac{E}{3(1-2\nu)},$$

der die Steifigkeit des HOOKEschen Materials für Volumenänderungen angibt.

Es gibt Materialien, für die $\nu \equiv 0,5$ oder nur wenig darunter ist. Solche Materialien werden **inkompressibel** genannt. Damit wird K sehr groß (theoretisch unendlich). Setzen wir endliche Spannungen voraus, so muss $e \equiv 0$ sein. Inkompressible Materialien ändern bei beliebigen Drücken ihr Volumen nicht (und damit auch nicht ihre Dichte).

Für $\nu > 0,5$ würde K negativ, was aus Stabilitätsgründen ausgeschlossen wird, wie auch Werte kleiner als -1 .

Randwertprobleme der Elastostatik

Folgende Gleichungen stehen uns in der Elastostatik zur Verfügung:

die lokalen Kraft-Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x^M \rho &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y^M \rho &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z^M \rho &= 0 \end{aligned}$$

sowie das HOOKEsche Gesetz in beispielsweise der Form

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2G \left[\varepsilon_{xx} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right] \\ \sigma_{yy} &= 2G \left[\varepsilon_{yy} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right] \\ \sigma_{zz} &= 2G \left[\varepsilon_{zz} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right] \\ \sigma_{xy} = \sigma_{yx} &= 2G \varepsilon_{xy} \quad \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = 2G \varepsilon_{xz} \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 2G \varepsilon_{yz} \end{aligned}$$

und die Verschiebungs-Verzerrungs-Relationen

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &:= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_{yy} &:= \frac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_{zz} &:= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} &:= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} &:= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} &:= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)\end{aligned}$$

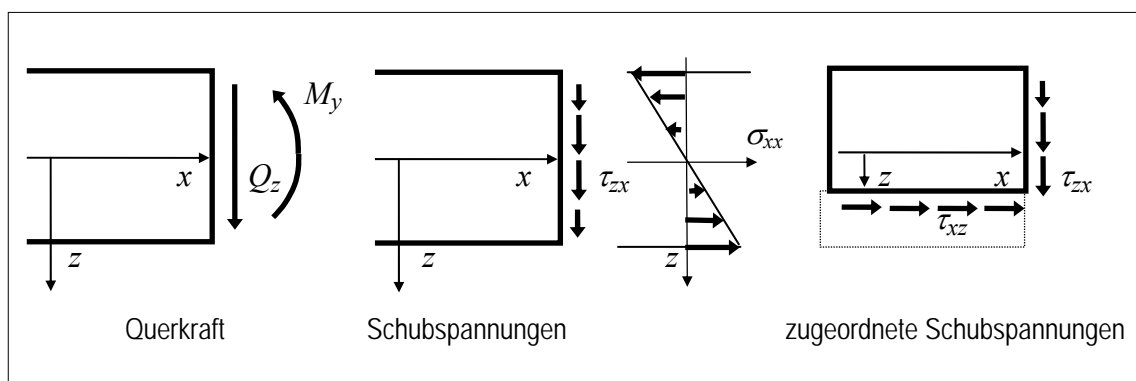
Wenn man nun rückwärts einsetzt, kann man in den Gleichgewichtsbedingungen die Spannungen durch die Ableitungen an den Verschiebungen ausdrücken (Elimination der Spannungen) und erhält drei partielle lineare Dgls. in den Verschiebungen u , v und w . Um dieses zu lösen, werden Randbedingungen benötigt, die entweder

- Spannungsrandbedingungen
- Verschiebungsrandbedingungen, oder
- gemischte Randbedingungen

sein können. In der Elastizitätstheorie wird die eindeutige Lösbarkeit dieses Systems untersucht und Lösungsmethoden entwickelt, die entweder analytisch oder approximativ sein können.

Schubverformungen am Biegebalken

Wir haben bisher bei der Balkenbiegung gem. Annahme (B4) lediglich die Deformationen infolge von Normalspannungen im Querschnitt betrachtet. Da im Querschnitt auch Schubspannungen τ_{yx} , τ_{zx} auftreten, die resultierend zu Querkraften Q_y , Q_z führen, und die nach dem BOLTZMANN'schen Axiom Schubspannungen τ_{xy} bzw. τ_{xz} zugeordnet sind, wollen wir die daraus resultierenden Spannungs- und Deformationszustände untersuchen. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf ebene Probleme in der x - z -Ebene.



Die Untersuchung stützt sich auf drei vereinfachende **Annahmen**:

- nur ebene Biegung ($N \equiv 0, M_z \equiv 0$)
- der Stab sei (abschnittsweise) prismatisch (womit A und I_y nicht von x abhängen).
- für die Normalspannungen gilt weiterhin der aus der BERNOULLI'schen Hypothese resultierende Zusammenhang

$$\sigma_{xx}(x, z) = \frac{M_y(x)}{I_y} z$$

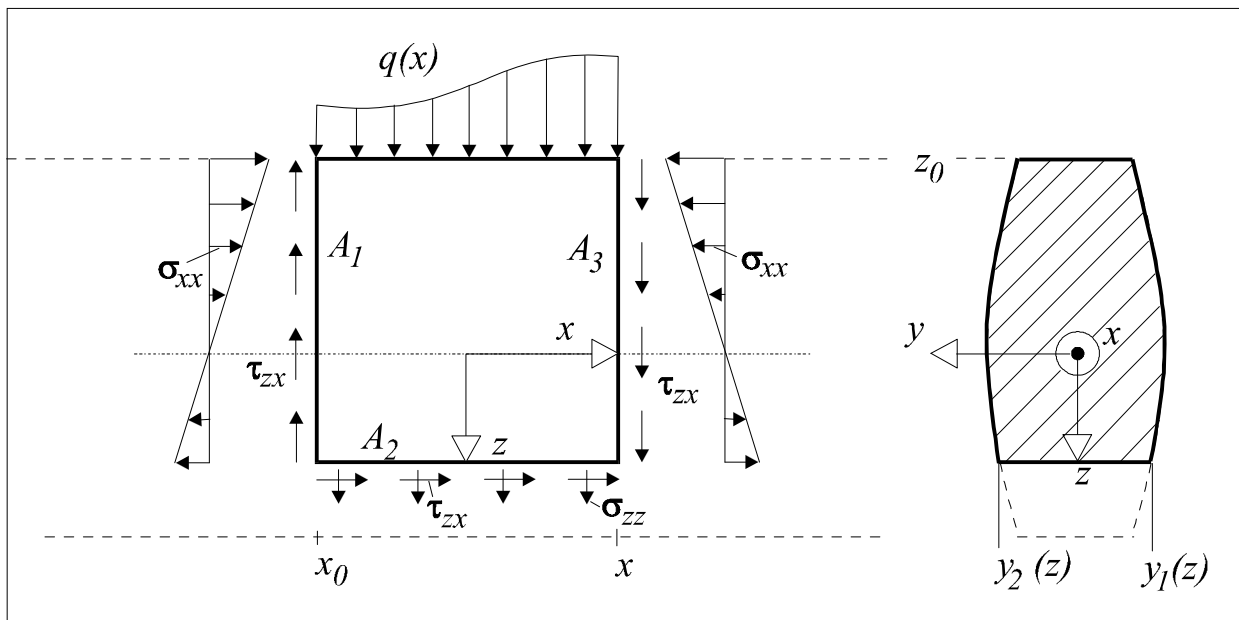
- auch die Schubspannungen hängen nur von x und z ab, nicht aber von y

$$\tau_{xz}(x, z) = \tau_{zx}(x, z)$$

Wir schneiden nun ein Stück des Balkens frei, das durch $x = \text{konstant}$ - und $z = \text{konstant}$ -Ebenen begrenzt ist und nur durch eine Streckenlast $q(x)$ belastet wird.

Kraftgleichgewicht in x -Richtung ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_{\mathcal{A}_1} \sigma_{xx} dA + \int_{\mathcal{A}_2} \tau_{zx} dA + \int_{\mathcal{A}_3} \sigma_{xx} dA \\ &= - \int_{\mathcal{A}_1} \sigma_{xx}(x_0, z) dA + \int_{x_0}^x \int_{y_1(z)}^{y_2(z)} \tau_{zx}(\underline{x}, z) d\underline{y} d\underline{x} + \int_{z_0}^z \int_{y_1(\underline{z})}^{y_2(\underline{z})} \sigma_{xx}(x, \underline{z}) d\underline{y} d\underline{z} \end{aligned}$$



Partielle Differentiation nach x ergibt

$$0 = 0 + \int_{y_1(z)}^{y_2(z)} \tau_{zx}(x, z) d\underline{y} + \int_{z_0}^z \int_{y_1(\underline{z})}^{y_2(\underline{z})} \frac{\partial \sigma_{xx}(x, \underline{z})}{\partial x} d\underline{y} d\underline{z}$$

$$\begin{aligned}
 &= \tau_{zx}(x, z) [y_2(z) - y_1(z)] + \int_{z_0}^z \int_{y_1(\underline{z})}^{y_2(\underline{z})} \frac{dM_y(x)}{dx} \frac{\underline{z}}{I_y} d\underline{y} d\underline{z} \\
 &= \tau_{zx}(x, z) b(z) + \frac{Q_z(x)}{I_y} \int_{z_0}^z \int_{y_1(\underline{z})}^{y_2(\underline{z})} \underline{z} d\underline{y} d\underline{z}
 \end{aligned}$$

mit der Querschnittsbreite

$$b(z) = y_2(z) - y_1(z),$$

die für prismatische Stäbe nicht von x abhängt, und

$$\frac{\partial \sigma_{xx}(x, z)}{\partial x} = \frac{dM_y(x)}{dx} \frac{z}{I_y} = Q_z(x) \frac{z}{I_y}.$$

Das **statischen Moment** der Dimension [Länge³] ist definiert als

$$S_y(z) := - \int_{\mathcal{A}_3} \underline{z} dA = - \int_{z_0}^z \int_{y_1(\underline{z})}^{y_2(\underline{z})} \underline{z} d\underline{y} d\underline{z} = \int_z^{z_0} \int_{y_1(\underline{z})}^{y_2(\underline{z})} \underline{z} d\underline{y} d\underline{z}.$$

Damit erhalten wir die Verteilung der Schubspannung als Funktion der Schnittlasten und der Querschnitts-Geometrie

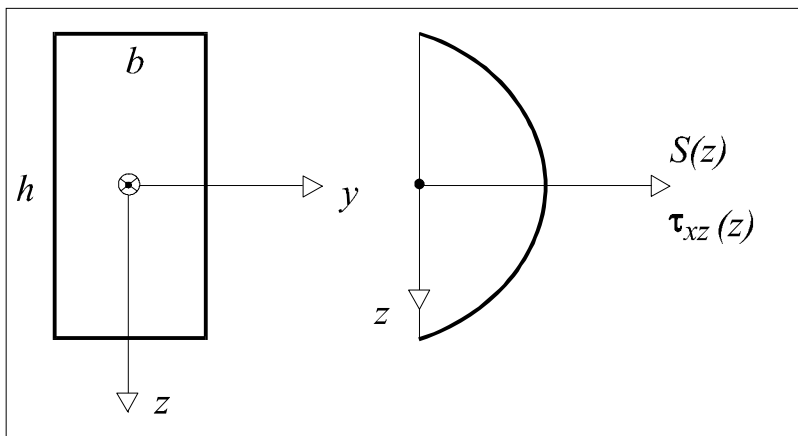
$$\tau_{zx}(x, z) = \frac{Q_z(x) S_y(z)}{I_y b(z)}$$

Die Schubspannung auf der Ober- und Unterseite eines Balkens ohne Schublasten sind immer Null, denn das statische Moment verschwindet am oberen Rand ($z \equiv z_0$) wie auch am unteren (wg. Bezug auf Flächenmittelpunkt), während es dazwischen positiv ist.

Für zusammengesetzte Querschnitte kann man die Integration bereichsweise durchführen

$$S_y(z) = \int_z^{z_1} \int_{y_1(\underline{z})}^{y_2(\underline{z})} \underline{z} d\underline{y} d\underline{z} + \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1(\underline{z})}^{y_2(\underline{z})} \underline{z} d\underline{y} d\underline{z} + \dots + \int_{z_N}^{z_0} \int_{y_1(\underline{z})}^{y_2(\underline{z})} \underline{z} d\underline{y} d\underline{z}.$$

Beispiel 1: Rechteckquerschnitt



In diesem Fall ist das statische Moment

$$S_y(z) = \int_z^{-\frac{h}{2}} \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \underline{z} \, d\underline{y} \, d\underline{z} = \int_z^{-\frac{h}{2}} \underline{z} \, b \, d\underline{z} = \frac{\underline{z}^2 b}{2} \Big|_z^{-\frac{h}{2}} = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right).$$

Es ist maximal bei $z \equiv 0$

$$S_y(z)_{max} = \frac{b h^2}{8}.$$

Die Schubspannungsverteilung ist parabolisch

$$\tau_{zx}(x, z) = \frac{6 Q_z(x)}{b h} \left(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2} \right) = \frac{3 Q_z(x)}{2A} \left[1 - \left(\frac{z}{h/2} \right)^2 \right].$$

Ihr Extremum bezüglich z liegt bei $z \equiv 0$

$$\tau_{extr} = \tau_{zx}(x, 0) = \frac{3 Q_z(x)}{2A}.$$

Für einen Vollkreisquerschnitt mit Radius R ergibt sich ebenfalls ein parabolischer Verlauf

$$\tau_{zx}(x, z) = \frac{4 Q_z(x)}{3A} \left[1 - \left(\frac{z}{R} \right)^2 \right]$$

mit dem Extremum

$$\tau_{extr} = \frac{4 Q_z(x)}{3A}.$$

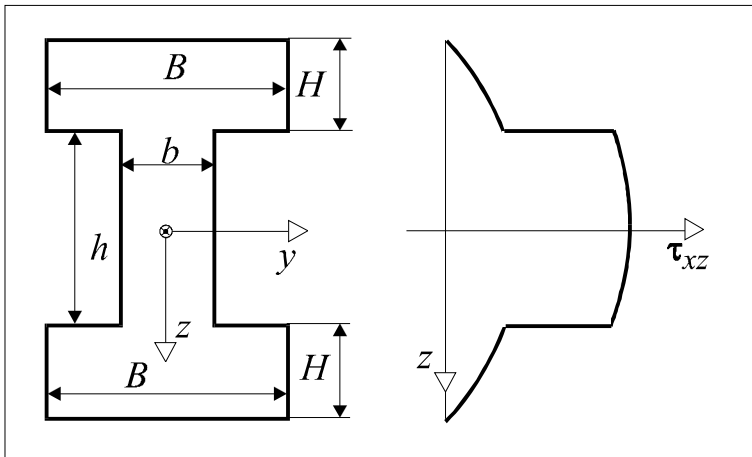
Beispiel 2: **Doppel-T-Profil**

Hier ist

$$I_y = \frac{bh^3}{12} + 2 \frac{BH^3}{12} + 2 BH \left(\frac{h}{2} + \frac{H}{2} \right)^2.$$

Für $z < -h/2$ und $z > +h/2$ gelten

$$S_I(z) = \frac{B}{2} \left[\frac{(2H + h)^2}{4} - z^2 \right]$$



$$\tau_{xz}(x, z) = \frac{Q_z(x) S_1(z)}{I_y B}$$

und für $-h/2 < z < +h/2$

$$S_2(z) = \frac{B}{2} \left[\frac{(2H+h)^2}{4} - \frac{h^2}{4} \right] + \frac{b}{2} \left[\frac{h^2}{4} - z^2 \right]$$

$$\tau_{xz}(x, z) = \frac{Q_z(x) S_2(z)}{I_y b}.$$

Wegen des Sprunges von b macht auch die Schubspannung einen Sprung. An den Übergangsstellen gelten die Voraussetzungen nicht mehr. Dort hängt die Schubspannung auch von y ab.

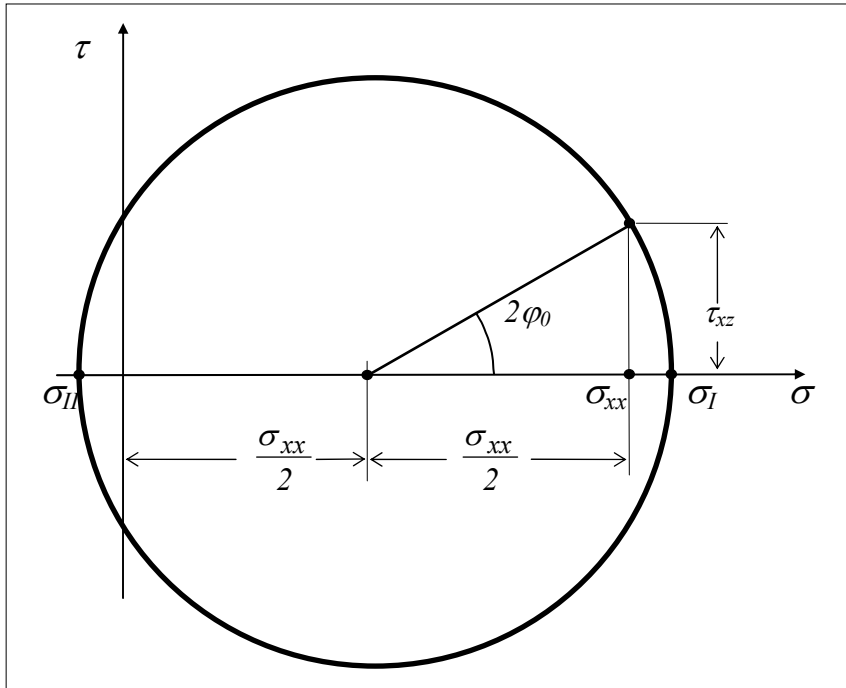
Um den **Spannungszustand** im Balken zu untersuchen, benötigen wir auch die Normalspannungen σ_{zz} . Wir setzen wieder einen ebenen Spannungszustand voraus ($\sigma_{yy} = \tau_{xy} = \tau_{zy} = 0$) und betrachten einen Balkenabschnitt ohne Lasten ($q = 0 \Rightarrow Q_z = \text{konst}$). Die Gleichgewichtsbedingung in z -Richtung ergibt

$$-\int_{\mathcal{A}_1} \tau_{zx} dA + \int_{\mathcal{A}_2} \sigma_{zz} dA + \int_{\mathcal{A}_3} \tau_{zx} dA = 0.$$

Für prismatische Stäbe hängt dann τ_{zx} nicht von x ab, weswegen sich die beiden äußeren Integrale aufheben. Wegen der Beliebbarkeit der Schnittfläche \mathcal{A}_2 folgt $\sigma_{zz} = 0$.

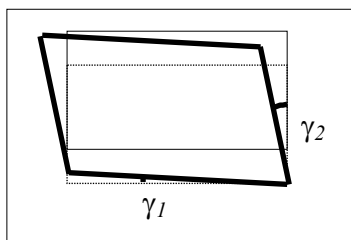
Für die Normalspannungen in x -Richtung gilt weiterhin

$$\sigma_{xx} = \frac{M_y}{I_y} z.$$



Mit Hilfe des MOHRschen Kreises können wir die Spannungsverteilung diskutieren. In der Nähe des oberen und unteren Randes ist $S(z)$ und damit auch τ_{xz} klein. Die Hauptspannung ist ungefähr σ_{xx} und die HSA liegt fast parallel zu der Balkenachse. Im Mittelbereich des Querschnittes erwarten wir das Extremum von τ_{xz} und damit die maximale Abweichung der HSA von der Balkenachse.

Um die **Durchbiegung** w_Q des Balkens mit Rechteckquerschnitt infolge der Schubspannungen konservativ abzuschätzen, machen wir die vereinfachende Annahme, dass im ganzen Querschnitt die konstante Schubspannung τ_{extr} angreift. Mit dem HOOKEschen Gesetz folgt für den Scherwinkel γ



$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\tau_{extr}}{G} \quad \text{mit } \gamma_1 = w_Q',$$

der Ableitung der Verschiebung infolge Schub. Damit ist

$$w_Q' = \frac{\tau_{extr}}{G} - \gamma_2$$

und

$$w_Q(x) = \frac{1}{G} \int \tau_{extr}(x) dx - \gamma_2 x + C$$

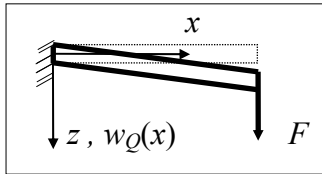
mit

$$\tau_{extr} = \frac{3 Q_z(x)}{2 A}$$

und somit

$$w_Q(x) = \frac{3}{2Gbh} \int Q_z(x) dx - \gamma_2 x + C.$$

Beispiel: **Kragträger mit Rechteckquerschnitt**



Hier sind

$$I_y = \frac{bh^3}{12}, \quad b(z) = b, \quad Q_z = F.$$

Wegen der Einspannung ist $\gamma_2 \equiv 0$ und deshalb

$$w_Q(x) = \frac{3Fx}{2Gbh} + C.$$

Die Randbedingung an der Einspannung ist

$$w_Q(x \equiv 0) = 0 = C$$

und damit

$$w_Q(x) = \frac{3Fx}{2Gbh},$$

also eine lineare Verschiebung. Für die Verschiebung infolge des Biegemomentes $M_y = F(x-l)$ erhalten wir

$$w_B(x) = - \iint \frac{M_y}{EI_y} dx^2 = \frac{F}{EI_y} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right).$$

Sie ist maximal am Ende des Trägers

$$w_{B \max} = w_B(l) = \frac{F}{3EI_y} l^3 = \frac{4Fl^3}{Ebh^3}.$$

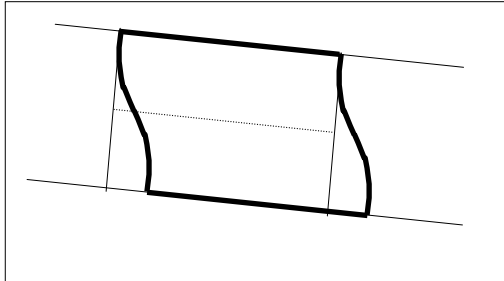
Das Verhältnis der maximalen Durchbiegung für $x \equiv l$ ist für $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

$$\frac{w_Q}{w_B} = \frac{\frac{3Fl}{2Gbh}}{\frac{4Fl^3}{Ebh^3}} = \frac{3Eh^2}{8Gl^2} = {}^{3/4}(1+\nu) \frac{h^2}{l^2}.$$

Für die meisten Materialien liegt ν zwischen 0,0 und 0,5. Für schlanke Stäbe ist $h \ll l$ und deshalb w_Q vernachlässigbar gegenüber w_B .

Lediglich für gedrungene Querschnitte gilt dies nicht. Dabei war unsere Abschätzung sehr konservativ, da wir nicht mit einer mittleren Schubspannung, sondern mit der maximalen gerechnet haben.

Da die tatsächlichen Schubspannungen im Querschnitt nicht konstant sind, tritt eine Verwölbung des Querschnittes ein, die im Widerspruch zur BERNOULLI'schen Hypothese steht.



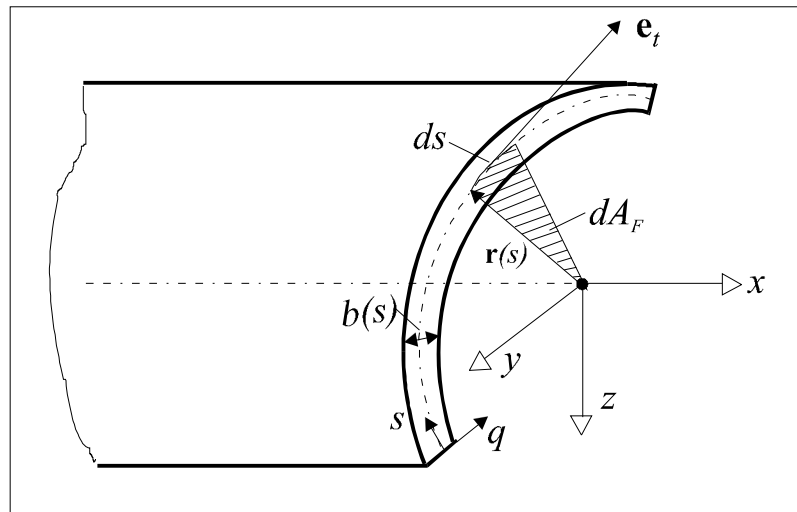
Schubspannungen in dünnwandigen offenen Profilen

für den allgemeinen Fall schiefer Biegung ohne Zug

Die Schubspannungen im Querschnitt

$$\underline{\tau}(x, y, z) dA = \tau_{yx} \mathbf{e}_y + \tau_{zx} \mathbf{e}_z$$

bilden ein Vektorfeld, das äquivalent zur Querkraft ist.



Dieses Vektorfeld ist tangential an die Querschnittsfläche. Ist die Oberfläche des Balkens frei von Schubspannungen, so muss wegen des BOLTZMANN'schen Axioms $\underline{\tau}$ ebenfalls am Rand des Querschnitts tangential verlaufen. Für dünnwandige Querschnitte parametrisieren wir den Querschnitt mit der Kurvenlänge der Querschnittsmittellinie s von 0 bis s_l und mit der Querkoordinate q von $-b/2$ bis $+b/2$. Wir nehmen zur Vereinfachung an, dass $\underline{\tau}$ wie auch σ über die Dicke $b(s)$ des Querschnitts konstant sind, also $\underline{\tau}(x, s)$ und $\sigma(x, s)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(x) &= \int_{\mathcal{A}} \underline{\boldsymbol{\tau}} dA = \int_0^{s_1} \int_{-b(s)/2}^{+b(s)/2} \tau(x, s) \mathbf{e}_t dq ds \\ &= \int_0^{s_1} \tau(x, s) b(s) \mathbf{e}_t ds = \int_0^{s_1} t(x, s) \mathbf{e}_t ds \end{aligned}$$

mit dem Tangentialeinheitsvektor \mathbf{e}_t . Die Größe

$$t(x, s) := \tau(x, s) b(s)$$

wird **Schubfluss** genannt. Gleichgewicht in x -Richtung für einen Abschnitt $x_0 \leq \underline{x} \leq x$ und $0 \leq \underline{s} \leq s$ ergibt ähnlich wie vorher

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_{\mathcal{A}_1} \sigma dA + \int_{\mathcal{A}_2} \tau dA + \int_{\mathcal{A}_3} \sigma dA \\ &= - \int_{\mathcal{A}_1} \sigma(x_0, s) dA + \int_{x_0}^x \int_{-b(s)/2}^{+b(s)/2} \tau(\underline{x}, s) dq d\underline{x} + \int_0^s \int_{-b(\underline{s})/2}^{+b(\underline{s})/2} \sigma(x, \underline{s}) dq d\underline{s} \\ &= - \int_{\mathcal{A}_1} \sigma(x_0, s) dA + \int_{x_0}^x \tau(\underline{x}, s) b(s) d\underline{x} + \int_0^s \sigma(x, \underline{s}) b(\underline{s}) d\underline{s}. \end{aligned}$$

Partielle Ableitung nach x ergibt

$$0 = \tau(x, s) b(s) + \int_0^s \frac{\partial \sigma(x, \underline{s})}{\partial x} b(\underline{s}) d\underline{s}.$$

Aus der schiefen Biegung kennen wir die Verteilung der Normalspannung

$$\sigma = \frac{M_y(x)}{I_y} z - \frac{M_z(x)}{I_z} y$$

so dass

$$\frac{\partial}{\partial x} \sigma = \frac{M_y'(x)}{I_y} z - \frac{M_z'(x)}{I_z} y = \frac{Q_z(x)}{I_y} z + \frac{Q_y(x)}{I_z} y$$

ist und damit

$$t(x, s) = \frac{Q_z(x)}{I_y} S_y(s) + \frac{Q_y(x)}{I_z} S_z(s)$$

mit den statischen Momenten der Restflächen

$$S_y(s) := - \int_0^s z b(\underline{s}) d\underline{s} \quad S_z(s) := - \int_0^s y b(\underline{s}) d\underline{s}.$$

Bilden wir noch das Moment, das die Schubspannungen bezüglich des Querschnittsmittelpunktes erzeugen:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_M(x) &= \int_{\mathcal{A}} \mathbf{r}(s) \times \tau(x, s) \mathbf{e}_t(s) dA \\ &= \mathbf{r}_S \times \mathbf{Q}(x) = \int_0^{s_i} \mathbf{r}(s) \times t(x, s) \mathbf{e}_t(s) ds,\end{aligned}$$

so definiert diese Gleichung einen Punkt des Querschnitts mit dem Ortsvektor \mathbf{r}_S , in dem die Querkraft angreifen muss, damit sie auch momentenmäßig äquivalent zum Schubspannungsfeld ist. Wir setzen $\mathbf{r}_S = y_S \mathbf{e}_y + z_S \mathbf{e}_z$ ein und erhalten

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \mathbf{r}_S \times \mathbf{Q}(x) - \int_0^{s_i} \mathbf{r}(s) \times t(x, s) \mathbf{e}_t(s) ds \\ &= (y_S \mathbf{e}_y + z_S \mathbf{e}_z) \times (Q_y \mathbf{e}_y + Q_z \mathbf{e}_z) \\ &\quad - \int_0^{s_i} \mathbf{r}(s) \times \left(\frac{Q_z}{I_y} S_y(s) + \frac{Q_y}{I_z} S_z(s) \right) \mathbf{e}_t(s) ds \\ &= Q_y \left[-z_S \mathbf{e}_x - \frac{I}{I_z} \int_0^{s_i} \mathbf{r}(s) \times \mathbf{e}_t(s) S_z(s) ds \right] \\ &\quad + Q_z \left[y_S \mathbf{e}_x - \frac{I}{I_y} \int_0^{s_i} \mathbf{r}(s) \times \mathbf{e}_t(s) S_y(s) ds \right].\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wird für *beliebige* Querkräfte Null, wenn beide Ausdrücke in den geschweiften Klammern verschwinden, womit man zwei Bestimmungsgleichungen für die Koordinaten des dadurch definierten **Schubmittelpunktes** erhält, indem man skalar mit \mathbf{e}_x multipliziert:

$$\begin{aligned}y_S &= \frac{I}{I_y} \mathbf{e}_x \cdot \int_0^{s_i} \mathbf{r}(s) \times \mathbf{e}_t(s) S_y(s) ds \\ z_S &= -\frac{I}{I_z} \mathbf{e}_x \cdot \int_0^{s_i} \mathbf{r}(s) \times \mathbf{e}_t(s) S_z(s) ds.\end{aligned}$$

Das hierin auftretende Spatprodukt

$$2 dA_F(s) := \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{r}(s) \times \mathbf{e}_t(s) ds$$

hat die geometrische Interpretation eines doppelten Flächenelementes. Damit folgt

$$z_S = -\frac{2}{I_z} \int_0^{s_i} S_z(s) dA_F(s)$$

mit

$$dA_F = \frac{dA_F}{ds} ds = A_F' ds$$

und

$$A_F(s) = \int_0^s A_F' ds = \frac{1}{2} \int_0^s \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{r}(s) \times \mathbf{e}_t(s) ds$$

und nach partieller Integration

$$\int_0^{s_1} S_z(s) A_F(s)' ds = S_z(s) A_F(s) \Big|_0^{s_1} - \int_0^{s_1} S_z(s)' A_F ds = 0 + \int_0^{s_1} y(s) b(s) A_F(s) ds,$$

weil

$$S_z(0) = 0 = S_z(s_1)$$

und

$$S_z(s) := - \int_0^s y b(s) ds \quad \Rightarrow \quad S_z(s)' = - \frac{d}{ds} \int_0^s y(s) b(s) ds = -y(s) b(s)$$

sind. Es ergeben sich die Bestimmungsgleichungen für die Koordinaten des Schubmittelpunktes

$$y_S = \frac{2}{I_y} \int_0^{s_1} A_F(s) b(s) z(s) ds \quad z_S = - \frac{2}{I_z} \int_0^{s_1} A_F(s) b(s) y(s) ds$$

Wichtig ist, dass dieser Punkt nur von der Querschnittsgeometrie, nicht aber von der Querkraft Q abhängt.

Satz: Greift die Resultierende der äußeren Kräfte an einer Stelle x des Stabes im Schubmittelpunkt an, so erzeugt sie kein Torsionsmoment.

Ist der Querschnitt symmetrisch bezüglich der y -Achse, so ist an gespiegelten Punkten dA_F

gleich, während S_z das Vorzeichen wechselt. Damit ist das Integral $\int_0^{s_1} S_z(s) dA_F(s) = 0$

und somit auch $z_S = 0$.

Satz: Besitzt der Querschnitt eine Symmetrieachse, so liegt der Schubmittelpunkt auf ihr.

Torsion

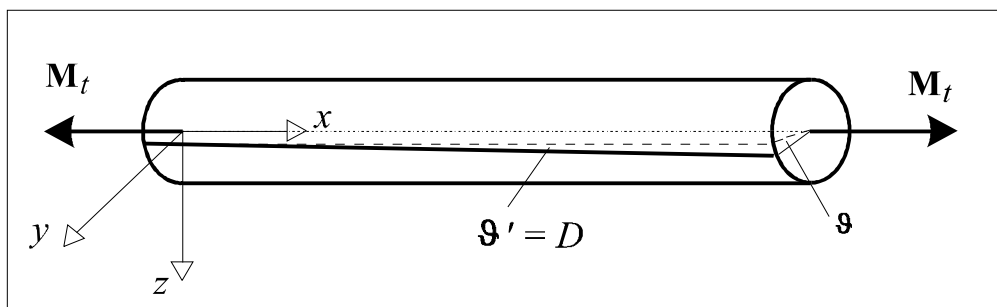
Die Schnittlasten eines Stabes lassen sich angeben als die Schnittkraft

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x) &= \mathbf{N}(x) + \mathbf{Q}(x) \\ &= N(x) \mathbf{e}_x + Q_y(x) \mathbf{e}_y + Q_z(x) \mathbf{e}_z\end{aligned}$$

und das Moment bez. Schubmittelpunkt

$$\mathbf{M}(x) = M_x(x) \mathbf{e}_x + M_y(x) \mathbf{e}_y + M_z(x) \mathbf{e}_z,$$

worin M_y und M_z Biegemomente sind und $M_t = M_x$ das **Torsionsmoment**.



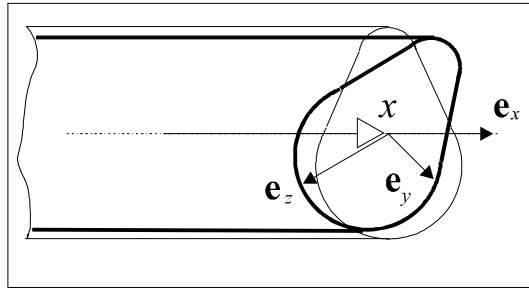
Um die Deformationen infolge M_t zu bestimmen, könnte man den Stab mittels der 3-dimensionalen Elastizitätstheorie berechnen. Da dies jedoch außerordentlich aufwendig ist, sind wir - wie zuvor beim Biege- und Zugstab - an einer 1-dimensionalen Theorie interessiert. Eine solche Torsionstheorie existiert aber allgemein nicht. Lediglich unter starken Einschränkungen sind wir zur Ableitung einer Torsionstheorie in der Lage, die nach DE SAINT-VENANT benannt wird.

Annahmen der DE ST.-VENANTSchen Torsionstheorie

- T1) Der Stab sei gerade und (bereichsweise) prismatisch.
- T2) Das Torsionsmoment sei (bereichsweise) konstant.
- T3) Die Oberfläche des Stabes sei lastfrei.
- T4) **konstante freie Verwölbung**: Die Verschiebungen u in x hängen nicht von x ab.
- T5) **Konturerhaltung**: Die Verschiebungen in der Querschnittsebene ($x = \text{konst.}$) resultieren aus einer (infinitesimalen) Rotation.
- T6) Das Material des Stabes sei (bereichsweise) homogen und isotrop linear elastisch (HOOKEsches Gesetz).

Wir betrachten zunächst die Kinematik der de ST.-VENANTSchen Torsion. Dazu zerlegen wir die Verschiebungen in einen axialen Anteil \mathbf{u}_x und einen planaren \mathbf{u}_p in der Querschnittsebene mit

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{u}_x + \mathbf{u}_p \\ \mathbf{u}_x &= u(y, z) \mathbf{e}_x \\ \mathbf{u}_p &= v \mathbf{e}_y + w \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$



Gemäß (T5) stellen wir die infinitesimale Rotation dar als Kreuzprodukt mit einem axialen oder Drehvektor $\mathcal{G}(x) \mathbf{e}_x$ und dem Ortsvektor \mathbf{r} bezüglich dem Bezugspunkt oder *Drillruhepunkt*, dem allerdings lediglich eine kinematische Bedeutung zukommt:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_p &= v \mathbf{e}_y + w \mathbf{e}_z \\ &= \mathcal{G} \mathbf{e}_x \times \mathbf{r} \\ &= \mathcal{G} \mathbf{e}_x \times (x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z) \\ &= \mathcal{G} (y \mathbf{e}_z - z \mathbf{e}_y) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad v = -z \mathcal{G}(x) \quad \text{und} \quad w = y \mathcal{G}(x).$$

\mathcal{G} heißt **Torsions-** oder **Drillwinkel**, seine Ableitung

$$D := \mathcal{G}' = \frac{d\mathcal{G}}{dx}$$

ist die **Drillung**. Daraus folgt für die Dehnungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_{yy} = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_{zz} = 0 \quad -\frac{\partial v}{\partial z} = \mathcal{G} = \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_{zy} = \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned}$$

Gemäß (T4) ist

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{keine Längsdehnung}).$$

Die einzigen nicht-verschwindenden Deformationen sind

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - z \mathcal{G}' \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - z D \right) \\ \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + y \mathcal{G}' \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + y D \right). \end{aligned}$$

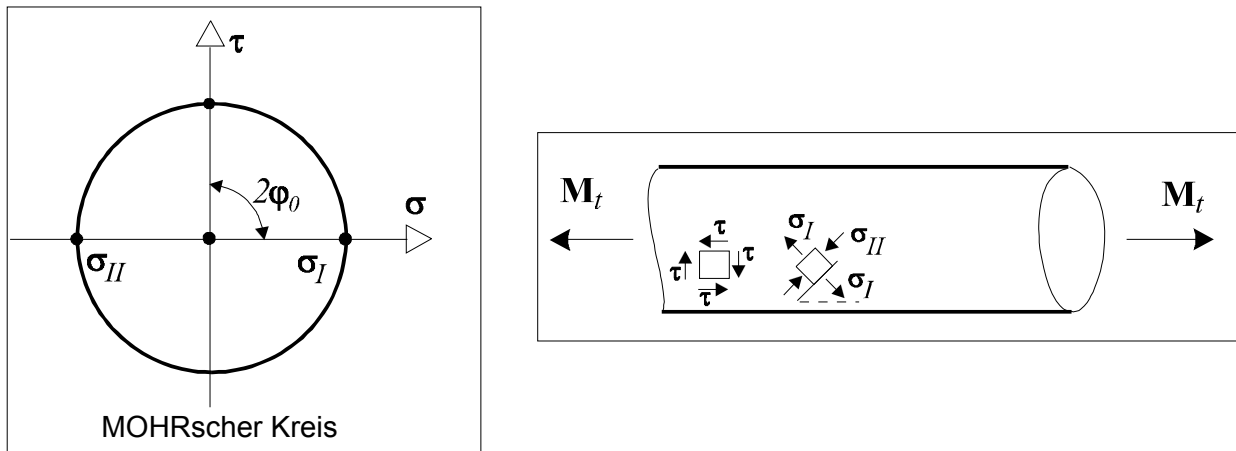
Nach dem HOOKEschen Gesetz sind die einzigen von null verschiedenen Spannungen

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 2G \varepsilon_{xy}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = 2G \varepsilon_{xz}$$

mit dem Schubmodul G . Es treten also bezüglich dieses KOOS keine Normalspannungen auf, insbesondere auch keine in axialer Richtung (*Wölbspannungen*). Dies ist nur möglich, wenn sich der Stab frei verwölben kann. Ist die Verwölbung dagegen behindert, so gilt die vorliegende Theorie nicht mehr und man muss stattdessen *Wölbkrafttorsion* betreiben, was hier aber unterbleiben soll.

Zeichnet man für den gegebenen Spannungszustand den MOHRschen Kreis, so liegt dessen Mittelpunkt im Ursprung.



Die HSA sind demnach um 45° gegenüber dem Querschnitt geneigt. Die Hauptspannungen sind

$$\begin{aligned}\sigma_I &= +\tau \\ \sigma_{II} &= -\tau.\end{aligned}$$

Der Schubspannungsvektor in einem Punkt des Querschnitts ist

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_{xy}(y,z) \mathbf{e}_y + \tau_{xz}(y,z) \mathbf{e}_z.$$

Wegen (T1) und (T2) hängt $\boldsymbol{\tau}$ nur von y und z ab, nicht aber von x . Das daraus resultierende Torsionsmoment ist mit dem planaren Ortsvektor $\mathbf{r}_p = y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$

$$\mathbf{M}_t = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{r}_p \times \boldsymbol{\tau} dA = \int_{\mathcal{A}} (y \tau_{xz} - z \tau_{xy}) dA \mathbf{e}_x.$$

Wenn aber weder das Torsionsmoment, noch der Querschnitt, noch das Material von x abhängen, ist die Drillung D (bereichsweise) konstant.

Damit haben wir die Annahmen der DE ST.-VENANTschen Theorie ausgeschöpft. Wir kommen jetzt nur noch durch weitere Einschränkungen weiter. Die

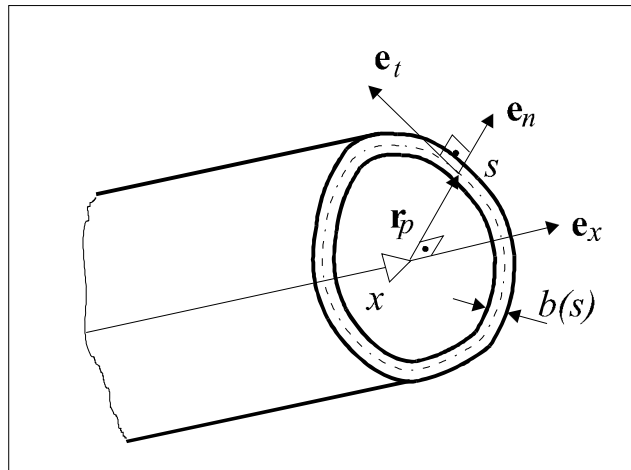
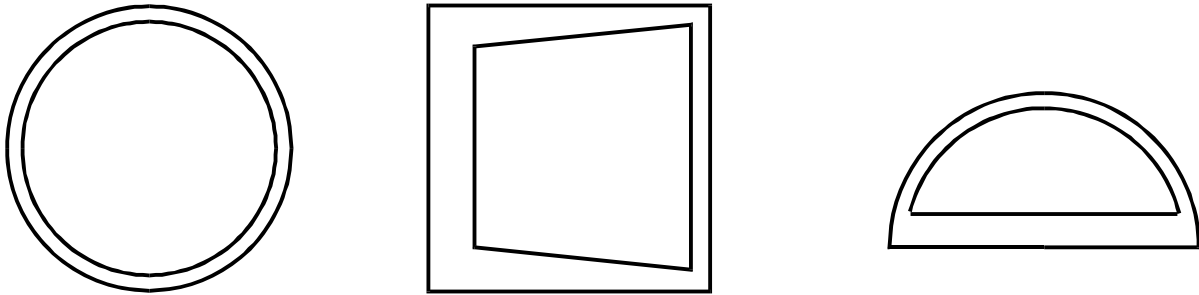
BREDT²¹sche Torsionstheorie

gilt für **einzellige Hohlstäbe mit dünnen Wänden**.

Wir parametrisieren die Wand durch die Bogenlänge s und führen eine von s abhängende positiv orientierte ONB $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_n(s), \mathbf{e}_t(s)\}$ ein mit

- \mathbf{e}_x : axial
- \mathbf{e}_n : äußere Normale
- \mathbf{e}_t : tangential

²¹ Rudolf Bredt (1842 - 1900)

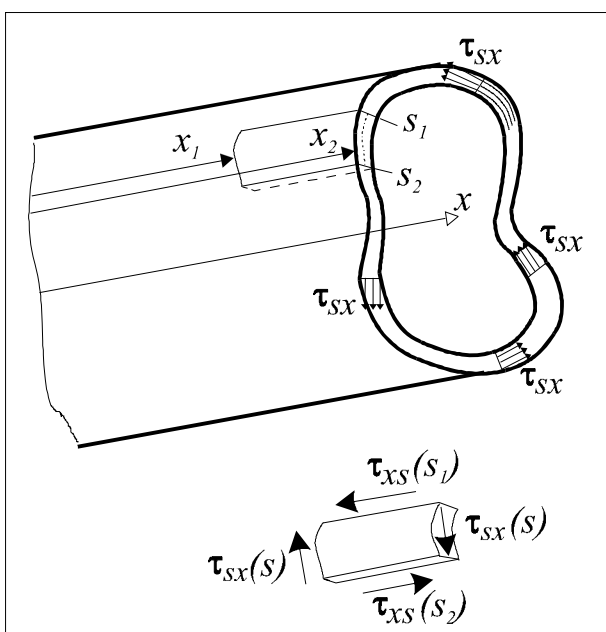


Wir beschreiben die Wanddicke des Querschnitts mit $b(s)$. Wegen (T3) muss das Schubspannungsfeld im Querschnitt tangential an die Oberfläche sein (siehe voriges Kapitel). Wegen der angenommenen Dünnwandigkeit liegt es wiederum nahe, folgendes anzunehmen:

T7) Die Schubspannungen im Querschnitt sind konstant in Querrichtung.

Sie hängen damit nur von s ab: $\tau = \tau(s)$. Da sie dann auch tangential sind, gilt

$$\boldsymbol{\tau} = \tau(s) \mathbf{e}_t(s).$$



Wir schneiden nun einen Teil der Wand zwischen x_1 und x_2 sowie s_1 und s_2 frei und tragen an den Schnittflächen die (einzigen) Spannungen $\tau_{xs} = \tau_{sx}$ an. Gleichgewicht der Kräfte in \mathbf{e}_x liefert

$$\int_{x_1}^{x_2} \tau_{xs}(s_1) b(s_1) dx - \int_{x_1}^{x_2} \tau_{xs}(s_2) b(s_2) dx = 0.$$

Da dies zwischen beliebigen Stellen x_1 und x_2 gelten muss, folgt

$$\tau_{xs}(s_1) b(s_1) = \tau_{xs}(s_2) b(s_2),$$

womit das Produkt, der **Schubfluss**

$$t := \tau_{xs}(s) b(s)$$

als unabhängig von s erkannt wurde.

Die Schubspannung ist also dort am größten, wo die Wandstärke am kleinsten ist.

Wir berechnen damit das resultierende Torsionsmoment bezüglich des Drillruhepunktes

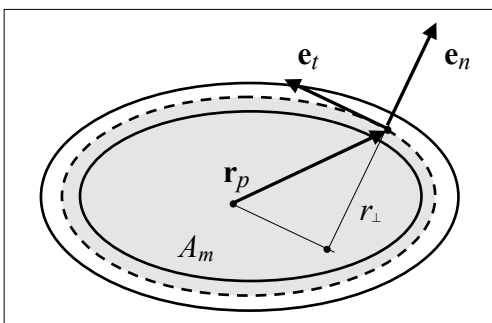
$$\mathbf{M}_t = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{r}_p \times \boldsymbol{\tau} dA = \oint \mathbf{r}_p \times \tau_{xs}(s) \mathbf{e}_t b(s) ds = \oint \mathbf{r}_p \times t \mathbf{e}_t ds$$

oder dessen Größe

$$\begin{aligned} M_t &= \mathbf{M}_t \cdot \mathbf{e}_x = \oint \mathbf{r}_p \times \boldsymbol{\tau} b(s) ds \\ &= \oint \mathbf{r}_p \times t \mathbf{e}_t ds \cdot \mathbf{e}_x \\ &= t \oint \mathbf{r}_p \cdot \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_x ds \\ &= t \oint \mathbf{r}_p \cdot \mathbf{e}_n ds \\ &= t \oint r_{\perp} ds \end{aligned}$$

mit dem Normalabstand der Wand vom Schubmittelpunkt

$$r_{\perp}(s) := \mathbf{r}_p \cdot \mathbf{e}_n.$$



Das Integral

$$\oint r_{\perp} ds = 2 A_m$$

lässt sich als die zweifache Mittelfläche des Querschnitts deuten. Wegen der angenommenen Dünnwandigkeit des Querschnitts ist A_m ungefähr die Fläche des Hohlraumes. Damit gilt

$$M_t = 2 A_m t = 2 A_m b(s) \tau_{xs}(s)$$

oder die **1. BREDT'sche Formel**

$$\tau_{sx}(s) = \tau_{xs}(s) = \frac{M_t}{2 A_m b(s)}$$

Stellen wir nun auch die Kinematik bezüglich der natürlichen ONB dar:

$$\mathbf{u}_p = u_n \mathbf{e}_n + u_t \mathbf{e}_t$$

mit

$$\begin{aligned} u_t &= \mathbf{e}_t \cdot \mathbf{u}_p = \mathbf{e}_t \cdot (\mathcal{G} \mathbf{e}_x \times \mathbf{r}_p) = \mathcal{G} (\mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_x) \cdot \mathbf{r}_p(s) \\ &= \mathcal{G} \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{r}_p = \mathcal{G} r_{\perp}(s). \end{aligned}$$

Durch partielle Ableitung nach x erhalten wir eine Gleichung für die Drillung

$$\frac{\partial u_t}{\partial x} = \mathcal{G}' r_{\perp}(s) = D r_{\perp}.$$

Das HOOKE'sche Gesetz liefert

$$\varepsilon_{xs} = \varepsilon_{sx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial s} + \frac{\partial u_t}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial s} + D r_{\perp} \right) = \frac{\tau_{xs}}{2G} = \frac{t}{2Gb}$$

und aufgelöst nach

$$\frac{\partial u_x}{\partial s} = \frac{t}{Gb} - D r_{\perp}.$$

Die Stammfunktion ist das Integral in den Grenzen $s \equiv 0$ und einem Zwischenwert s

$$u_x(s) - u_x(0) = \int_0^s \left(\frac{t}{Gb} - D r_{\perp} \right) d\underline{s} = \frac{t}{G} \int_0^s \frac{1}{b(\underline{s})} d\underline{s} - D \int_0^s r_{\perp}(\underline{s}) d\underline{s}.$$

Integrieren wir über den gesamten Querschnitt, so ist

$$u_x(s) - u_x(0) = 0 = \frac{t}{G} \oint \frac{ds}{b(s)} - D 2 A_m \quad \Rightarrow \quad \frac{t}{G} = \frac{2 A_m D}{\oint \frac{ds}{b(s)}}$$

oder aufgelöst nach D mit $M_t = 2 A_m t$

$$D = \frac{t}{2 G A_m} \oint \frac{ds}{b(s)} = \frac{M_t}{4 A_m^2 G} \oint \frac{ds}{b(s)}$$

und damit die **2. BREDT'sche Formel**

$$\mathcal{G}' = D = \frac{M_t}{G I_t} \quad \text{mit} \quad I_t := \frac{4 A_m^2}{\oint \frac{ds}{b(s)}}$$

dem **Torsionsflächenmoment**. Der Torsionswinkel ergibt sich als das Integral über x

$$\mathcal{G}(x) = \mathcal{G}_0 + \int \frac{M_t}{G I_t} dx = \mathcal{G}_0 + \frac{M_t}{G I_t} x$$

mit der Randverdrehung \mathcal{G}_0 als Integrationskonstante. Die Längsverschiebung ist

$$u_x(s) = u_x(0) + D \left[\frac{2A_m}{\oint \frac{ds}{b(s)}} \int_0^s \frac{ds}{b(s)} - \int_0^s r_{\perp}(s) ds \right] = u_x(0) + D f(s).$$

Die Konstante $u_x(0)$ beinhaltet eine starre Verschiebung des Querschnittes. Der zweite Term ist die **Querschnittsverwölbung**, die also proportional zur Drillung ist. $f(s)$ ist eine Formfunktion, die nur von der Querschnittsgeometrie abhängt (wie schon I_t). Für *regelmäßige Vielecke* ist die *Querschnittsverwölbung Null*.

Beispiel: Kreisrohr

Radius $r \equiv r_{\perp}$, konstante Wandstärke b

$$A_m = \pi r^2 \quad \oint \frac{ds}{b} = \frac{2\pi r}{b}$$

$$I_t = \frac{4A_m^2}{\oint \frac{ds}{b}} = \frac{4\pi^2 r^4}{\frac{2\pi r}{b}} = 2\pi r^3 b$$

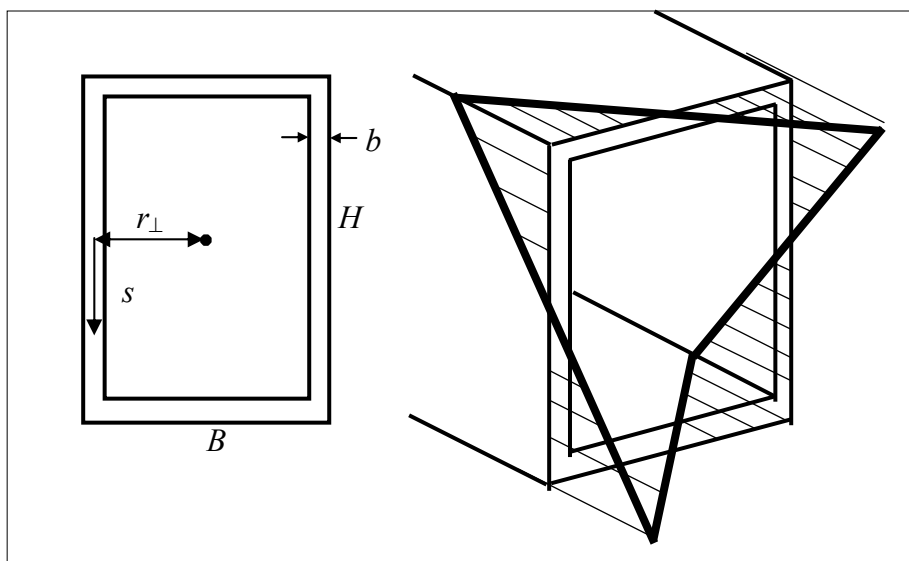
$$\tau = \frac{M_t}{2A_m b(s)} = \frac{M_t}{2\pi r^2 b} \quad \text{also unabhängig von } s$$

$$f(s) = \frac{2A_m}{\oint \frac{ds}{b(s)}} \int_0^s \frac{ds}{b(s)} - \int_0^s r_{\perp}(s) ds = \frac{2\pi r^2}{\frac{2\pi r}{b}} \frac{s}{b} - r s = 0,$$

also keine Verwölbung.

Beispiel: Rechteckprofil konstanter Dicke

Höhe H , Breite B , konstante Wandstärke b



$$A_m = B H \quad \oint \frac{ds}{b} = \frac{2(B+H)}{b}$$

$$I_t = \frac{4A_m^2}{\oint \frac{ds}{b}} = \frac{2B^2H^2}{B+H} b$$

$$\tau = \frac{M_t}{2A_m b(s)} = \frac{M_t}{2B H b} = \text{konst.}$$

$$0 < s < H/2 : \quad f(s) = \frac{2A_m}{\oint \frac{ds}{b(s)}} \int_0^s \frac{d\underline{s}}{b(\underline{s})} - \int_0^s r_{\perp}(\underline{s}) d\underline{s} = \frac{2B H b}{2(B+H)} \frac{s}{b} - \frac{B}{2} s$$

$$= \left(\frac{B H}{(B+H)} - \frac{B}{2} \right) s.$$

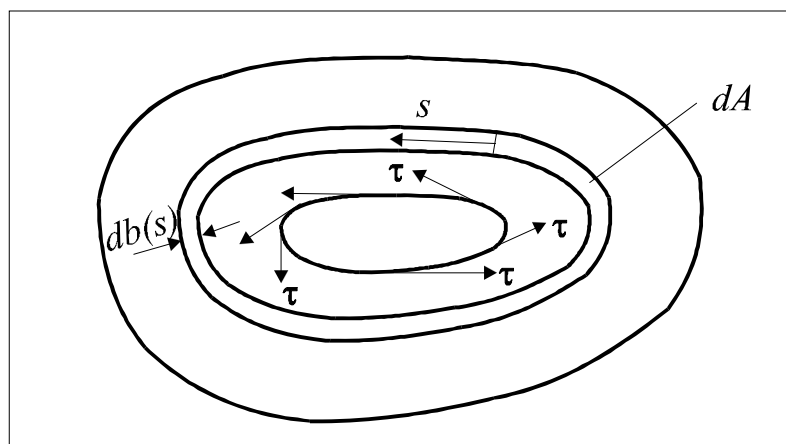
$f(s)$ ist extrem in den Ecken und Null auf den Seitenmitten. Mit Symmetrieargumenten kann man die Funktion auf den anderen Seiten ergänzen.

Für $B \equiv H$ handelt es sich um ein regelmäßiges Viereck und $f(s)$ ist Null, also keine Verwölbung.

Dickwandige und Vollprofile

Lassen wir nun die Annahme der Dünnwandigkeit fallen und betrachten dickwandige Profile bis hin zu Vollprofilen.

Dabei hat man vom Schubspannungsfeld, das wieder zur Oberfläche tangential sein muss, die Vorstellung, dass es auch im Innern tangential an ineinander verschachtelte geschlossene Kurven ist, die **Trajektorien** genannt werden (von lat. *traicere* werfen). Zwei eng benachbarte Trajektorien schließen einen Partialquerschnitt dA ein, für den die Voraussetzungen der BREDT'schen Theorie gelten. Wegen der Konturerhaltung können sich alle Partialquerschnitte gleichzeitig kompatibel verdrillen, wenn die Drillung D für alle gleich ist.



Ist $db(s)$ die (infinitesimale) Dicke von dA und dM_t das von dA getragene Torsionsmoment, so gilt nach der 2. BREDT'schen Formel

$$dM_t = G D dI_t \quad \text{mit} \quad dI_t := \frac{4A_m^2}{\oint \frac{ds}{db}},$$

wobei A_m die Mittelfläche von dA ist. Die Schubspannungen in dA sind nach BREDT 1

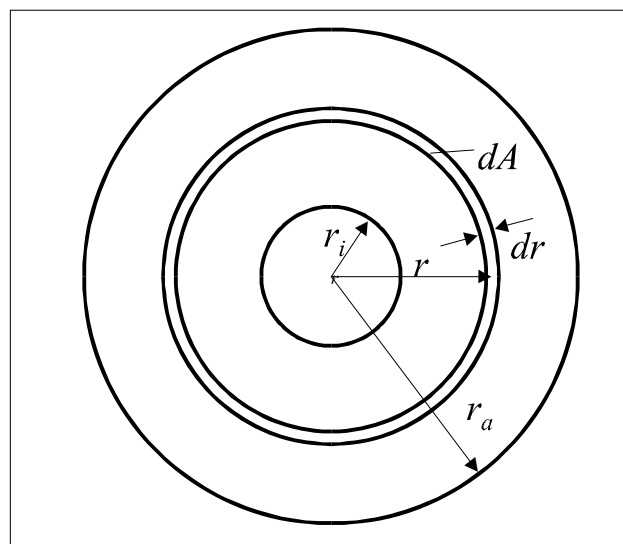
$$\tau_{xs} = \frac{dM_t}{2 A_m db}$$

Die betragsmäßig größten Schubspannungen treten dort auf, wo db am kleinsten ist und die Trajektorien am dichtesten verlaufen. Das gesamte Torsionsmoment ist dann das Integral über alle Partialquerschnitte

$$M_t = \int_{\mathcal{A}} dM_t = G D \int_{\mathcal{A}} dI_t =: G D I_t \quad \text{mit} \quad I_t = \int_{\mathcal{A}} dI_t$$

Das Problem bei diesem Vorgehen besteht darin, die Lage des Trajektorien-Feldes zu ermitteln. Lediglich in Spezialfällen lassen sich hierzu einfache Aussagen machen.

Beispiel: **Kreisquerschnitte**



Wir betrachten einen Kreiszyylinder mit Außenradius r_a und Innenradius r_i . Für Vollkreise ist $r_i \equiv 0$. Aus Symmetrie-Gründen sind die Trajektorien ebenfalls (konzentrische) Kreise. Betrachten wir also einen Partialquerschnitt zwischen r und $r + dr$. Dann sind

$$A_m = \pi r^2 \quad db = dr$$

$$dI_t = \frac{4A_m^2}{\oint \frac{ds}{db}} = \frac{4\pi^2 r^4}{2\pi r} = 2\pi r^3 dr$$

$$dM_t = G D dI_t = 2 G D \pi r^3 dr$$

$$I_t = \int_{\mathcal{A}} dI_t = \int_{r_i}^{r_a} 2\pi r^3 dr = \pi/2 (r_a^4 - r_i^4)$$

$$= \frac{\pi}{2} (r_a - r_i) [r_a^3 + r_a^2 r_i + r_a r_i^2 + r_i^3]$$

und damit

$$M_t = G D I_t = G D \frac{\pi}{2} (r_a^4 - r_i^4)$$

Für $r_a \approx r_i$ wird hieraus wieder

$$I_t = \frac{\pi}{2} b 4 r^3 = 2 \pi b r^3$$

wie für dünnwandige Kreisrohre.

Für Vollkreise bleibt

$$I_t = \frac{\pi}{2} r_a^4 .$$

Die Drillung ist beim dickwandigen Kreisrohr

$$D = \frac{M_t}{G I_t} = \frac{2 M_t}{\pi (r_a^4 - r_i^4) G}$$

und die Schubspannungen

$$\tau_{xs} = \frac{dM_t}{2 A_m db} = \frac{G D dI_t}{2 A_m db} = \frac{G D 2 \pi r^3 dr}{2 \pi r^2 dr} = G D r = \frac{M_t}{I_t} r ,$$

also linear in r . Sie sind am Innenrand (betragsmäßig) am kleinsten und wachsen linear mit r . Bei r_a sind sie am größten.

Für elliptische Vollquerschnitte mit Achsenlängen a und $b < a$ berechnet man

$$I_t = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} \quad \text{und} \quad \tau_{max} = \frac{2 M_t}{\pi a b^2} ,$$

die am äußeren Rand der kleineren Halbachse b auftritt.

Für quadratische Vollquerschnitte (Seitenlänge a) erhält man näherungsweise

$$I_t = 0,141 a^4 \quad \text{und} \quad \tau_{max} = \frac{M_t}{0,208 a^3} ,$$

die in der Mitte der Seiten auftritt.

Seifenhautgleichnis

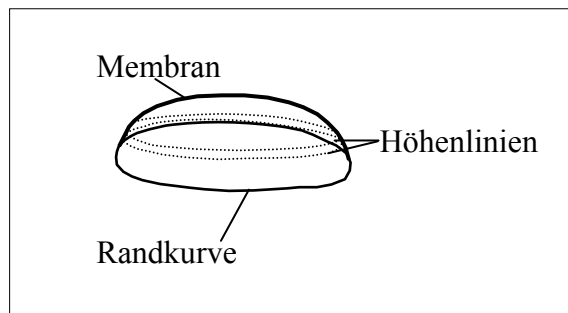
Die vorangehende Torsionstheorie ist leider nur dann anwendbar, wenn man die Lage der Schubspannungstrajektorien kennt. Dies gilt aber nur für einige wenige spezielle Fälle, wie den Kreisquerschnitt. Für alle anderen kann man das Torsionsproblem zwar auch lösen, muss aber dafür i. Allg. ein zweidimensionales Randwertproblem lösen, das im Innern durch eine partielle Dgl. beschrieben wird.

PRANDTL²² ist aufgefallen, dass der gleiche Dgl.-Typ mit denselben Randbedingungen auch ein gänzlich anderes Problem beschreibt. Spannt man nämlich über eine ebene geschlossene Kurve aus Draht eine Membran (Seifenhaut) und setzt diese von der einen Seite einem

²² Ludwig Prandtl (1875 - 1953)

bestimmten Druck aus, so wölbt sie sich mit einer charakteristischen Form, die nur von der Randkurve abhängt. Dann lässt sich folgendes zeigen:

- Die Höhenlinien dieser Membran über der Randkurve entsprechen den Schubspannungstrajektorien eines Vollquerschnitts mit gleicher Kontur;
- Die Größe der Schubspannungen an einer Querschnittsstelle ist proportional zu der Steigung der Membran;
- Die Torsionssteifigkeit I_t ist proportional zu dem Volumen unter der Membran bei vorgegebener Spannkraft und Innendruck.



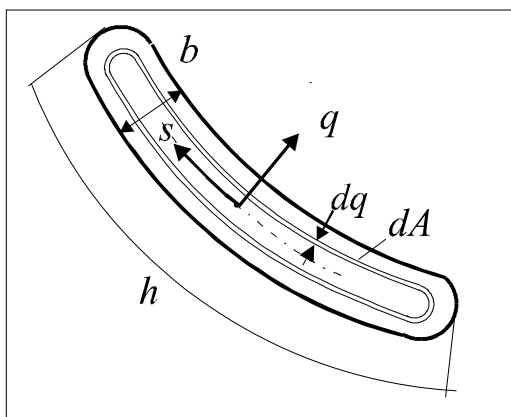
Durch diese Analogie ist eine interessante und anschauliche Interpretation der Trajektorien gegeben.

Hydrodynamisches Gleichnis

Es existiert noch eine weitere Analogie aus der Hydrodynamik. Es kann nämlich gezeigt werden, dass die Stromlinien einer ebenen stationären Strömung mit konstanter Zirkulation in einem Gefäß mit dem Querschnitt des Torsionsstabes ebenfalls mit den Schubspannungstrajektorien zusammenfallen.

Dünnwandige Vollquerschnitte mit parallelen Rändern

Auch für diesen Spezialfall haben wir eine Vorstellung von der Lage der Schubspannungstrajektorien. In Randnähe müssen sie - wie immer - parallel zum Rand sein. Da aber wegen der angenommenen Dünnwandigkeit die Querschnittspunkte randnah sind, sind alle Trajektorien mehr oder weniger randparallel. Lediglich an den Extremen oder bei starken Querschnittsänderungen ist uns die Lage nicht bekannt. Wir gehen aber davon aus, dass diese Bereiche klein und damit vernachlässigbar sind.



Mit den Bezeichnungen aus der Zeichnung erhalten wir

$$A_m \approx 2 q h \quad \oint \frac{ds}{db} \approx \frac{2h}{dq}$$

$$dI_t = \frac{4A_m^2}{\oint \frac{ds}{db}} = \frac{16q^2 h^2}{2h} = 8 q^2 h dq$$

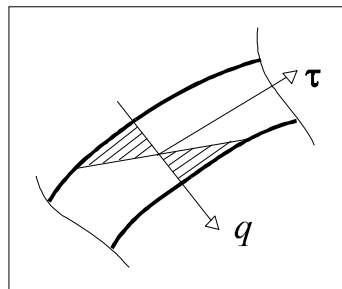
$$I_t = \int_{\mathcal{A}} dI_t = \int_{q=0}^{b/2} 8 q^2 h dq = [8 h q^3/3]_0^{b/2} = \frac{b^3 h}{3}$$

$$D = \frac{M_t}{G I_t} = \frac{3 M_t}{G b^3 h}$$

$$\tau_{xs} = \frac{dM_t}{2A_m db} = G D \frac{dI_t}{2A_m db} = G D \frac{8q^2 h dq}{4q h dq}$$

$$= 2 G D q = \frac{2 M_t}{I_t} q = 6 \frac{M_t}{b^3 h} q,$$

also linear in q , und nicht mehr konstant wie im Falle dünnwandiger Hohlquerschnitte. Der Schubfluss durchläuft den Querschnitt auf der einen Seite in einer Richtung, auf der anderen in Gegenrichtung.



Vergleich un-/geschlitztes dünnwandiges Rohr

Wir hatten für das ungeschlitzte Kreisrohr erhalten

$$I_{to} = 2 \pi r^3 b \quad \tau = \frac{M_t}{2 \pi r^2 b} = konst.$$

Im geschlitzten Fall ergibt sich stattdessen

$$I_{tc} = b^3 h/3 = b^3 2 \pi r / 3 \quad \tau = \frac{2 M_t}{I_{tc}} q = \frac{3 M_t}{b^3 \pi r} q$$

und die maximale Schubspannung tritt bei $q \equiv b/2$ auf und ist

$$\tau_{max} = \frac{3 M_t b}{b^3 \pi r 2} = \frac{3 M_t}{2 b^2 \pi r}.$$

Das Verhältnis der maximalen Schubspannung von ungeschlitzt zu geschlitzt ist $b/3r$ und das Verhältnis der Trägheitsmomente und damit der Torsionssteifigkeiten

$$\frac{I_{tc}}{I_{to}} = \frac{2 b^3 r \pi}{3 2 \pi r^3 b} = \frac{b^2}{3 r^2}.$$

Für ein 3 mm starkes Rohr mit Radius 30 mm ist dies dann beispielsweise 1/300.

Zusammengesetzte Querschnitte

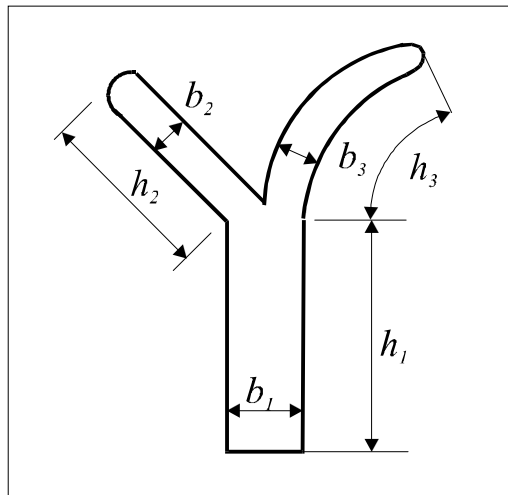
Setzt sich der Gesamtquerschnitt aus n dünnwandigen Vollquerschnitten zusammen, so handelt es sich um eine Parallelschaltung: die Drillung D ist für alle gleich, während sich die Momente addieren

$$\begin{aligned} M_t &= M_{t1} + M_{t2} + \dots + M_{tn} \\ &= G D (I_{t1} + I_{t2} + \dots + I_{tn}) \quad \text{mit } I_{ti} = b_i^3 h_i / 3 \\ &= G D I_t \quad \text{mit } I_t = I_{t1} + I_{t2} + \dots + I_{tn}. \end{aligned}$$

Dabei gilt

$$\frac{M_{ti}}{M_t} = \frac{G D I_{ti}}{G D I_t} = \frac{I_{ti}}{I_t},$$

womit sich die Teilmomente verteilen wie die Teilflächenmomente. Die Schubspannungen im i -ten Teilquerschnitt sind



$$\tau_i = 6 \frac{M_{ti}}{b_i^3 h_i} q_i = 2 \frac{M_{ti}}{I_{ti}} q_i = 2 \frac{M_t}{I_t} q_i = 2 G D q_i.$$

Sie sind dort am größten, wo b_i maximal ist.

Elastische Energie

Viele Verfahren der Elastostatik und der -dynamik benutzen energetische Aussagen über Gleichgewichts- bzw. Bewegungszustände. Diese Verfahren (oder zumindest einen kleinen Teil davon) werden wir später behandeln. Unser Abschnitt über Elastizität wäre allerdings unvollständig, wenn wir die elastische Energie unerwähnt ließen.

Im eindimensionalen Fall ist unter Verwendung des HOOKEschen Gesetzes $\sigma = E \varepsilon$ die volumenspezifische **Spannungsleistung**

$$l_i := \sigma \dot{\varepsilon} = E \varepsilon \dot{\varepsilon} = (\frac{1}{2} E \varepsilon^2) \dot{} = w(\varepsilon) \dot{} = \frac{dw(\varepsilon)}{d\varepsilon} \dot{\varepsilon},$$

also gleich der zeitlichen Änderung der **Formänderungsenergie**

$$w(\varepsilon) := \frac{1}{2} E \varepsilon^2.$$

Für die Spannungen bildet sie ein Potenzial

$$\sigma = \frac{dw(\varepsilon)}{d\varepsilon}.$$

Das Zeitintegral hierüber die **Spannungsarbeit**

$$a_i := \int_0^t l_i d\tau = w(\varepsilon),$$

die als Energie gespeichert wird.

Dies soll nun dreidimensional verallgemeinert werden.

Definition: Die volumenspezifische **elastische** oder **potentielle Energie** eines elastischen Materials ist eine skalare Funktion der Dehnungen

$$w(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{32}, \varepsilon_{33}),$$

die folgenden Potentialbeziehungen erfüllt:

$$\frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \quad \text{für } i, j = 1, 2, 3.$$

Die elastische Energie des Körpers ist dann

$$W = \int_{\mathcal{V}} w dV.$$

Man kann zeigen, dass eine solche Energie für inelastische Körper nicht existiert. Nicht einmal für alle elastischen Körper ist dies der Fall. Für solche, die mit dem HOOKEschen Gesetz beschrieben werden, ist hingegen die Existenz gesichert. Sei nämlich

$$\begin{aligned} w &:= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}(\varepsilon_{11}, \dots, \varepsilon_{33}) \varepsilon_{ij} + w_0 \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \varepsilon_{22} + \sigma_{33} \varepsilon_{33} + \tau_{12} \varepsilon_{12} + \tau_{23} \varepsilon_{23} + \tau_{31} \varepsilon_{31} + \tau_{21} \varepsilon_{21} \\ &\quad + \tau_{32} \varepsilon_{32} + \tau_{13} \varepsilon_{13}) + w_0 \end{aligned}$$

und σ_{ij} mit Hilfe des HOOKEschen Gesetzes durch die Deformationen ausgedrückt, so erfüllt dieses w für beliebige Konstanten w_0 die Potentialbeziehungen (wie gleich gezeigt wird).

Befindet sich der Körper in seiner spannungsfreien Ausgangslage, so sind alle Deformationen Null und $w \equiv w_0$. Diese Konstante besitzt keinerlei physikalische Relevanz und kann deshalb immer zu Null normiert werden.

Wir weisen nun für zwei typische Fälle die Potentialbeziehungen nach. Dazu setzen wir für die Spannungen in w das HOOKEsche Gesetz ein:

$$\begin{aligned} w = & \frac{1}{2} \left\{ 2G \left[\varepsilon_{11} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \right] \varepsilon_{11} \right. \\ & + 2G \left[\varepsilon_{22} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \right] \varepsilon_{22} \\ & + 2G \left[\varepsilon_{33} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \right] \varepsilon_{33} \\ & \left. + 2G [\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2 + \varepsilon_{21}^2 + \varepsilon_{32}^2 + \varepsilon_{13}^2] \right\} \end{aligned}$$

1) $i \equiv 1 \equiv j$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{11}} &= G \left\{ \left[1 + \frac{\nu}{1-2\nu} \right] \varepsilon_{11} + \left[\varepsilon_{11} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \right] + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \right\} \\ &= 2G \left\{ \varepsilon_{11} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \right\} = \sigma_{11} \end{aligned}$$

2) $i \equiv 1, j \equiv 2$

$$\frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{12}} = \frac{1}{2} 2G 2 \varepsilon_{12} = \sigma_{12}.$$

Für alle anderen i und j folgt die Potentialbeziehung völlig analog.

Die Energie-Dichte kann additiv in zwei Anteile zerlegt werden

$$w = w_K + w_G$$

- mit der **Kompressionsenergie** oder Dilatationsenergie (HOOKE: $-p = K e = s/3$)

$$\begin{aligned} w_K &:= -\frac{1}{2} p e = \frac{1}{2} \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \\ &= \frac{1}{6} s e = \frac{K e^2}{2} = \frac{s^2}{18K} \end{aligned}$$

mit der Volumenänderung $e = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ und dem mittleren Druck $-p = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = s/3$,

- und der **Gestaltänderungsenergie**

$$\begin{aligned} w_G &:= w - w_K = \frac{1}{2} \{ (\sigma_{11} + p) \varepsilon_{11} + (\sigma_{22} + p) \varepsilon_{22} + (\sigma_{33} + p) \varepsilon_{33} \\ &+ \tau_{12} \varepsilon_{12} + \tau_{13} \varepsilon_{13} + \tau_{23} \varepsilon_{23} + \tau_{21} \varepsilon_{21} + \tau_{31} \varepsilon_{31} + \tau_{32} \varepsilon_{32} \} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \sigma'_{ij} \varepsilon_{ij}$$

mit den **Deviatorspannungen**

$$\sigma'_{11} := \sigma_{11} + p = \sigma_{11} - \frac{1}{3}s = \frac{1}{3}(2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33})$$

$$\sigma'_{22} := \sigma_{22} + p = \sigma_{22} - \frac{1}{3}s = \frac{1}{3}(2\sigma_{22} - \sigma_{33} - \sigma_{11})$$

$$\sigma'_{33} := \sigma_{33} + p = \sigma_{33} - \frac{1}{3}s = \frac{1}{3}(2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22})$$

$$\sigma'_{ij} = \tau_{ij} \quad \text{für } i \neq j.$$

Während in der obigen Darstellung die Energie sowohl von Spannungen als auch von Dehnungen abhängt, kann man mit dem HOOKEschen Gesetz auch eine reine Spannungsdarstellung erzeugen. Das HOOKEsche Gesetz besagt

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{2G} \left[\sigma_{ii} - \frac{\nu}{1+\nu} s \right] = \frac{1}{2G} \left[\sigma'_{ii} + \left(\frac{1}{3} - \frac{\nu}{1+\nu} \right) s \right]$$

und

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \sigma_{ij} \quad \text{für } i \neq j,$$

und damit für die Summe

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \sigma'_{ii} \varepsilon_{ii} &= \sum_{i=1}^3 \sigma'_{ii} \frac{1}{2G} \left[\sigma'_{ii} + \left(\frac{1}{3} - \frac{\nu}{1+\nu} \right) s \right] \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\sigma'_{ii}{}^2}{2G} + \sum_{i=1}^3 \frac{\sigma'_{ii}}{2G} \left(\frac{1}{3} - \frac{\nu}{1+\nu} \right) s = \sum_{i=1}^3 \frac{\sigma'_{ii}{}^2}{2G}, \end{aligned}$$

weil

$$\sigma'_{11} + \sigma'_{22} + \sigma'_{33} = 0$$

ist. Damit verbleibt

$$w_G = \frac{1}{4G} \sum_{i,j=1}^3 \sigma'_{ij}{}^2.$$

In einem beliebigen KOOS gilt

$$w_G = \frac{1}{12G} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2 + \tau_{23}^2)].$$

Man beachte, dass für linear elastische Materialien die Energie eine quadratische Form der Dehnungen ist, also nichtlinear. Es gilt deshalb bezüglich der Energie das Superpositionsprinzip *nicht* allgemein.

Federenergie

Für eine Feder mit der Steifigkeit C , Federkraft F und der Längung ΔL gilt mit der Federenergie

$$W = \frac{1}{2} C \Delta L^2$$

die Potenzialbeziehung

$$F = \frac{dW}{d\Delta L} .$$

Elastische Energie eines Zug- und Biegestabes

Als besonders wichtiges Beispiel betrachten wir den Biege-Zug-Stab bei ebener Biegung. Die Spannungen in einem Querschnitt mit Schnittlasten $N(x)$, $M_y(x)$ an einer Stelle mit den KOO y und z sind unter Vernachlässigung von Schub

$$\sigma(x, y, z) = \frac{N(x)}{A(x)} + \frac{M_y(x)}{I_y(x)} z .$$

Damit ist die spezifische Energie an dieser Stelle

$$w(x, y, z) = \frac{1}{2} \sigma(x, y, z) \varepsilon(x, y, z) = \frac{1}{2E} \sigma(x, y, z)^2 = \frac{1}{2E} \left(\frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z \right)^2 .$$

Die Energie des Stabes ist mit $dV = dx dA$

$$\begin{aligned} W &= \int_V w dV = \int_0^L \int_{\mathcal{A}} \frac{1}{2E} \left(\frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z \right)^2 dA dx \\ &= \int_0^L \frac{1}{2E} \left[\int_{\mathcal{A}} \frac{N^2}{A^2} dA + \int_{\mathcal{A}} \frac{M_y^2}{I_y^2} z^2 dA + 2 \int_{\mathcal{A}} \frac{N M_y}{A I_y} z dA \right] dx \\ &= \int_0^L \frac{1}{2E} \left(\frac{N^2}{A} + \frac{M_y^2}{I_y} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_y^2}{EI_y} dx . \end{aligned}$$

In diesem speziellen Falle lässt sich also die Energie additiv zerlegen in

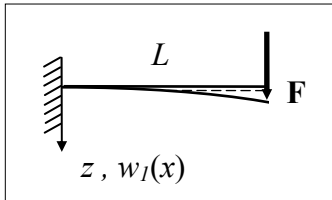
- die Dehnungsenergie $\frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{EA} dx = \frac{1}{2} \int_0^L N u' dx = \frac{1}{2} \int_0^L EA u'^2 dx$
- die Biegeenergie $\frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_y^2}{EI_y} dx = -\frac{1}{2} \int_0^L M_y w'' dx = \frac{1}{2} \int_0^L EI_y w''^2 dx$

Bei schiefer Biegung kommt noch

- die Biegeenergie
$$\frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_z^2}{EI_z} dx = \frac{1}{2} \int_0^L M_z v'' dx = \frac{1}{2} \int_0^L E I_z v''^2 dx$$

hinzu. Sind die Schnittlastenverläufe über die Stablänge bekannt, so kann die Integration über dx ausgeführt werden.

Als Beispiel betrachten wir den Kragarm unter Einzelkraft



Das Biegemoment ist
$$M_y(x) = F(x - L)$$

und damit die Biegeenergie

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_y^2}{EI_y} dx = \frac{1}{2} \frac{F^2}{EI_y} \int_0^L (x - L)^2 dx$$

Damit folgt

$$W = \frac{F^2 L^3}{6EI_y}$$

Die Scherenergie

-Dichte ist nach dem HOOKEschen Gesetz $\tau_{ij} = G \gamma_{ij} = 2G \varepsilon_{ij}$ und dem BOLTZMANNschen Axiom $\tau_{ij} = \tau_{ji}$, sowie definitionsgemäß $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$

$$w = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\tau_{13} \varepsilon_{13} + \tau_{31} \varepsilon_{31}) = \frac{1}{2} \tau^2 / G$$

Die Scherenergie des Stabes ist

$$\begin{aligned} W &= \int_{\mathcal{V}} w dV = \int_{x=0}^L \int_{\mathcal{A}} \frac{\tau^2}{2G} dA dx = \int_{x=0}^L \int_{\mathcal{A}} \frac{Q_z^2 S(z)^2}{2G I_y^2 b(z)^2} dA dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{x=0}^L \frac{Q_z^2}{G I_y^2} \int_{\mathcal{A}} \frac{S(z)^2}{b(z)^2} dA dx = \frac{\beta}{2GA} \int_{x=0}^L Q_z^2 dx \end{aligned}$$

mit der dimensionslosen Formzahl

$$\beta := \frac{A}{I_y^2} \int_{\mathcal{A}} \frac{S(z)^2}{b(z)^2} dA,$$

die sich als $6/5$ für Rechteckquerschnitte und $10/9$ für Kreisquerschnitte ergibt. Für schlanke Stäbe kann sie gegenüber der Biegeenergie vernachlässigt werden.

Torsionsenergie

Nach der DE ST.-VENANTschen Torsionstheorie verbleiben in der spezifischen Formänderungsenergie lediglich

$$w = \frac{1}{2} (\tau_{xs} \varepsilon_{xs} + \tau_{sx} \varepsilon_{sx}) = \tau_{xs} \varepsilon_{xs} = \frac{\tau_{xs}^2}{2G} = 2G \varepsilon_{xs}^2.$$

Für *dünnwandige Hohlquerschnitte* gilt die 1. BREDTschen Formel

$$\tau(s) = \frac{M_t}{2A_m b(s)}$$

und damit

$$w(s) = \frac{M_t^2}{8G A_m^2 b(s)^2}.$$

Die globale Torsionsenergie des Torsionsstabes der Länge L ist mit $I_t := \frac{4A_m^2}{\oint \frac{ds}{b(s)}}$

$$\begin{aligned} W &= \int_V w dV = \int_L \int_{\mathcal{A}} w dA dx = \int_L \oint w(s) b(s) ds dx \\ &= \oint \frac{M_t^2}{8G A_m^2 b(s)} ds L = \frac{M_t^2 L}{8G A_m^2} \oint \frac{ds}{b(s)} \end{aligned}$$

und mit der 2. BREDTschen Formel $D = \frac{M_t}{G I_t}$

$$W = \frac{1}{2} \frac{M_t^2}{G I_t} L = \frac{1}{2} M_t D L = \frac{1}{2} G I_t D^2 L.$$

Für *offene dünnwandige Profile* ist die Torsionsenergie-Dichte mit $\tau = \frac{2M_t}{I_t} q$

$$w(q) = \frac{\tau_{xs}^2}{2G} = \frac{4M_t^2}{2G I_t^2} q^2$$

und mit $I_t = b^3 h/3$

$$\begin{aligned} W &= \int_0^L \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^h \frac{4M_t^2}{2G I_t^2} q^2 ds dq dx = \frac{4M_t^2}{2G I_t^2} \int_{-b/2}^{b/2} h q^2 dq L \\ &= \frac{4M_t^2}{2G I_t^2} h q^3/3 \Big|_{-b/2}^{+b/2} L = \frac{4M_t^2}{2G I_t^2} \frac{b^3 h}{3 \cdot 4} L \\ &= \frac{1}{2} \frac{M_t^2}{G I_t} L = \frac{1}{2} M_t D L, \end{aligned}$$

also genau wie in der BREDT'schen Torsion, aber mit unterschiedlich definiertem I_t .

Für zusammengesetzte Querschnitte ist die Torsionsenergie die Summe aus den Energien der Partialquerschnitte.

Übersicht der Energie von elastischen Stäben (ohne Berücksichtigung von Schub)

| Art | Dgl. | Energie | Potenziale |
|---------|--------------------------|---|--|
| Dehnung | $N = E A u'$ | $W = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{EA} dx = \frac{1}{2} \int_0^L E A u'^2 dx$ | $N = \frac{\partial \bar{w}}{\partial u'}$ |
| Biegung | $M_y = -E I_y w''$ | $W = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_y^2}{EI_y} dx = \frac{1}{2} \int_0^L E I_y w''^2 dx$ | $M_y = \frac{\partial \bar{w}}{\partial w''}$ |
| Biegung | $M_z = E I_z v''$ | $W = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_z^2}{EI_z} dx = \frac{1}{2} \int_0^L E I_z v''^2 dx$ | $M_z = \frac{\partial \bar{w}}{\partial v''}$ |
| Torsion | $M_t = G I_t \vartheta'$ | $W = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_t^2}{GI_t} dx = \frac{1}{2} \int_0^L G I_t \vartheta'^2 dx$ | $M_t = \frac{\partial \bar{w}}{\partial \vartheta'}$ |

Wir haben hier bei den Potenzialbeziehungen im Zähler die spezifische elastische Energie mit einem Balken versehen, damit man sie von den Verschiebungen u , v , w des Stabquerschnitts unterscheiden kann.

Festigkeits-Hypothesen

Um die Festigkeit eines Bauteiles nachzuweisen, werden Kriterien an seine Belastung aufgestellt, die eine obere Grenze der Belastbarkeit definieren, unterhalb derer kein Schaden auftreten soll(te). Derartige Aussagen nennt man Festigkeits-Hypothesen oder -Kriterien. Diese können

- **global oder lokal** sein. Z. B. ist ein Knicksicherheitsnachweis in dem Sinne global, als Knicklänge, Schlankheit, Lagerbedingungen eingehen. Lokale Hypothesen beziehen sich dagegen auf die lokalen Größen in einem/jedem Punkt des Bauteils, wie die Spannungen, Dehnungen, spezifische Energie, usw.
- **elastisch oder inelastisch** sein. Die elastischen beziehen sich lediglich auf die momentanen Zustandsgößen Spannungen und Dehnungen, nicht aber auf die Dehnungsgeschichte, Belastungsgeschwindigkeit, o. ä.
- **isotrop oder anisotrop** sein. Anisotrop sind sie dann, wenn das Materialverhalten richtungsabhängig ist, wie dies bei Holz, faserverstärkten Materialien, Laminaten usw. der Fall ist.

Wir werden uns im Weiteren auf *lokale*, *elastische* und *isotrope* Kriterien konzentrieren.

Hierfür unterscheidet man

- Spannungskriterien
- Dehnungskriterien
- Energiekriterien.

Da man mit dem elastischen Gesetz Spannungen und Dehnungen ineinander umrechnen kann, kann man alle diese Kriterien beispielsweise als Spannungskriterien formulieren.

Die einfachsten und wichtigsten **Spannungskriterien** sind folgende, wobei wir die Hauptspannungen so nummerieren, dass stets $\sigma^H_I \geq \sigma^H_{II} \geq \sigma^H_{III}$ gilt.

Die Normalspannungs-Hypothese (LAMÉ²³ 1831)

Sie begrenzt die maximale Normalspannung in einem Bauteil. Diese ist in jedem Punkt gegeben durch die maximale Hauptspannung σ^H_I :

$$\sigma^H_I \leq \sigma_{zul}^+$$

Oft ist es angebracht, auch die minimale Hauptspannung σ^H_{III} durch eine zulässige Druckspannung nach unten hin zu begrenzen

$$\sigma^H_{III} \geq \sigma_{zul}^-.$$

Bez. beliebiger KOO gilt für den ESZ

$$\sigma^H_{I,III} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}$$

Wir haben dieses Kriterium bereits im Abschnitt über Zug- und Druckstäbe kennengelernt. Dieses Kriterium wird hauptsächlich bei spröden Materialien oder bei hohen Dehngeschwindigkeiten angewendet.

Die Schubspannungs-Hypothese (TRESCA²⁴ 1865)

stellt eine Begrenzung der maximalen Schubspannung τ_{max} im Bauteil dar. Der Zusammenhang mit den Hauptspannungen ist

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} (\sigma^H_I - \sigma^H_{III})$$

oder bez. beliebiger KOO im ebenen Spannungszustand

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}.$$

Das Kriterium nach TRESCA lautet dann

$$\tau_{max} \leq \tau_{zul}$$

²³ Gabriel Lamé (1795 - 1870)

²⁴ Henri Edouard Tresca (1814 - 1885)

Dies wird vielfach bei zähen Materialien angewendet.

Die einfachsten und wichtigsten **Energiekriterien** sind folgende:

Die Energie-Hypothese (BELTRAMI²⁵ 1903)

Wie wir gesehen hatten, ist für ein linear-elastisches isotropes Material

$$w = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

die spezifische elastische Energie. BELTRAMI hat vorgeschlagen, die elastische Energie als Kriterium zu verwenden

$$w \leq w_{zul}$$

Wir zerlegen nun die Energie-Dichte in Kompressions- und Gestaltänderungs-Energie. Da der Kompressionsanteil bei den meisten Materialien das Versagen erheblich weniger beeinflusst als der Gestaltänderungsanteil

$$\begin{aligned} w_G &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \sigma'_{ij} \varepsilon_{ij} \\ &= \frac{1}{12G} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)], \end{aligned}$$

hat sich das Energie-Kriterium nicht durchgesetzt, sondern stattdessen das folgende modifizierte Energiekriterium.

Die Gestaltänderungsenergie-Hypothese (HUBER 1904, v. MISES²⁶ 1913)

begrenzt nun

$$w_G \leq w_{Gzul}$$

Diese Kriterium wird häufig bei duktilen Materialien angewendet. Es unterscheidet sich nur wenig vom TRESCA-Kriterium (max. 15 %).

Alle diese Kriterien lassen sich im *einachsigen Zugversuch* mit $\sigma^H_I \equiv \sigma_Z$, $\sigma^H_{II} \equiv 0 \equiv \sigma^H_{III}$ identifizieren. Man erhält

- für die Normalspannungs-Hypothese

$$\sigma_{zul}^- \leq \sigma_Z \leq \sigma_{zul}^+$$

- für die Schubspannungs-Hypothese

$$\sigma_Z \leq 2 \tau_{zul}$$

- für die Gestaltänderungsenergie-Hypothese

$$\sigma_Z \leq \sqrt{6G w_{Gzul}} .$$

²⁵ Eugenio Beltrami (1835 - 1900)

²⁶ Maksymilian Tytus Huber (1872 - 1950), Richard M. E. von Mises (1883 - 1953)

Kinematik

ist die Lehre der Bewegungen von Körpern. Da es sich bei Bewegungen um raum/zeitliche Vorgänge handelt, ist Voraussetzung unserer Untersuchungen, dass wir Geometrie (räumliche Messungen) und Chronometrie (zeitliche Messungen) anwenden können. Bevor wir uns mit der Kinematik von deformierbaren Körpern beschäftigen, befassen wir uns vorerst mit der - wesentlich einfacheren - Beschreibung von Bewegungen von einzelnen Punkten.

Kinematik der Punktbewegungen

Da Bewegungen grundsätzlich relativ zu Bezugssystemen definiert werden, wollen wir zunächst ein solches einführen.

Definition: Ein **Bezugssystem** (BZS) besteht aus

- einem Bezugspunkt O und
- einer Bezugsbasis $\{\mathbf{e}_i\}$ (der Einfachheit halber als ONB eingeführt).

Man unterscheidet zwischen **raumfesten** und **bewegten** Bezugssystemen. Eine exakte Definition dessen, was unter *raumfest* verstanden werden soll, kann an dieser Stelle noch nicht gegeben werden. Für die meisten ingenieurmäßigen Probleme ist es allerdings ausreichend, sich darunter ein bezüglich der Erde festes BZS vorzustellen. Für astronomische Untersuchungen reicht dies allerdings nicht aus.

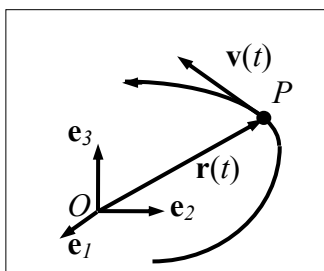
Bezüglich eines BZS können wir die **Bahn eines** (bewegten) **Punktes** P durch dessen Ortsvektor

$$\mathbf{r}(t) := \vec{OP}$$

darstellen, der i. A. von der Zeit abhängt. Bezüglich der ONB hat er die Komponentendarstellung

$$\mathbf{r} = x_1(t) \mathbf{e}_1 + x_2(t) \mathbf{e}_2 + x_3(t) \mathbf{e}_3$$

mit den ebenfalls zeitabhängigen kartesischen KOO $x_i(t)$ des Punktes.



Die **Geschwindigkeit** des Punktes P zur Zeit t gegenüber dem BZS ist dann der (zeitabhängige) Vektor

$$\mathbf{v}(t) := \dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \dot{x}_1(t) \mathbf{e}_1 + \dot{x}_2(t) \mathbf{e}_2 + \dot{x}_3(t) \mathbf{e}_3$$

und die **Beschleunigung** des Punktes P zur Zeit t gegenüber dem BZS der (zeitabhängige) Vektor

$$\mathbf{a}(t) := \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = \ddot{x}_1(t) \mathbf{e}_1 + \ddot{x}_2(t) \mathbf{e}_2 + \ddot{x}_3(t) \mathbf{e}_3.$$

Der hochgestellt Punkt bedeutet die (partielle) Zeitableitung. Ist (zeitweise) $\mathbf{v} \equiv \mathbf{0}$, so heißt der Punkt unbewegt, ist $\mathbf{a} \equiv \mathbf{0}$, so heißt er unbeschleunigt gegenüber dem BZS. Die **Geschwindigkeitsgröße** ist der momentane Betrag der Geschwindigkeit

$$v := |\mathbf{v}| = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}$$

und analog die **Beschleunigungsgröße**

$$a := |\mathbf{a}| = \sqrt{\ddot{x}_1^2 + \ddot{x}_2^2 + \ddot{x}_3^2}.$$

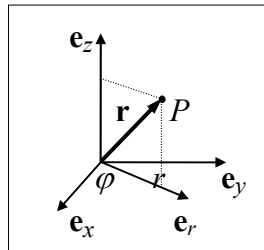
Oft benötigt man die Darstellung der kinematischen Größen in *Zylinderkoordinaten* $\{r, \varphi, z\}$. Es gelten die Koordinaten-Transformationen

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x}$$

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$



Die momentane Lage des Punktes kann dann durch die drei KOO $\{r(t), \varphi(t), z(t)\}$ angegeben werden. Für jeden Wert dieser KOO benutzt man die lokale Basis $\{\mathbf{e}_r(\varphi), \mathbf{e}_\varphi(\varphi), \mathbf{e}_z\}$ mit

$$\mathbf{e}_r(\varphi) = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{e}_\varphi(\varphi) = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y.$$

Daraus folgen

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{d\varphi} = \mathbf{e}_\varphi \quad \text{und} \quad \frac{d\mathbf{e}_\varphi}{d\varphi} = -\mathbf{e}_r.$$

Dabei muss man beachten, dass diese Basis zeitabhängig ist, wenn φ von der Zeit abhängt. Der Ortsvektor des bewegten Punktes P ist

$$\mathbf{r}(t) = r(t) \mathbf{e}_r(\varphi(t)) + z(t) \mathbf{e}_z$$

und mit Produkt- und Kettenregel

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \dot{r} \mathbf{e}_r + r(t) \frac{d\mathbf{e}_r(\varphi)}{d\varphi} \dot{\varphi} + \dot{z} \mathbf{e}_z \\ &= \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \dot{z} \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Die Beschleunigung ist

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= \ddot{r} \mathbf{e}_r + \dot{r} \frac{d\mathbf{e}_r}{d\varphi} \dot{\varphi} + \dot{r} \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + r \dot{\varphi}^2 \mathbf{e}_\varphi + r \dot{\varphi} \frac{d\mathbf{e}_\varphi}{d\varphi} \dot{\varphi} + \ddot{z} \mathbf{e}_z \\ &= \ddot{r} \mathbf{e}_r + 2 \dot{r} \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + r \dot{\varphi}^2 \mathbf{e}_\varphi - r \dot{\varphi}^2 \mathbf{e}_r + \ddot{z} \mathbf{e}_z \\ &= (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_r + (2 \dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi + \ddot{z} \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

FRENET²⁷sches Dreibein

Oft ist es vorteilhaft, statt der festen Bezugsbasis eine bewegte, d. h. zeitabhängige **natürliche Basis** zu benutzen. Wir definieren für beschleunigte Bewegungen

- den **Tangenten(einheits)vektor**

$$\mathbf{e}_t(t) := \frac{\mathbf{v}(t)}{v(t)}.$$

Zerlegt man nun die Beschleunigung

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_t(t) + \mathbf{a}_n(t)$$

in ihren Tangentialanteil, der **Tangentialbeschleunigung**

$$\mathbf{a}_t(t) := (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_t) \mathbf{e}_t$$

und ihren Normalanteil, der **Normalbeschleunigung**

$$\mathbf{a}_n(t) := \mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_t(t),$$

so heißen

- der **Normalen(einheits)vektor**

$$\mathbf{e}_n(t) := \frac{\mathbf{a}_n}{|\mathbf{a}_n|}$$

- und der **Binormalen(einheits)vektor**

$$\mathbf{e}_b(t) := \mathbf{e}_t(t) \times \mathbf{e}_n(t).$$

$\{\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_b\}$ bildet eine zeitabhängige ONB, die **natürliche Basis** oder **FRENETsches Dreibein** (1847) genannt wird. Dabei spannen \mathbf{e}_t und \mathbf{e}_n die **Schmiegeebene** auf. In ihr liegt der Beschleunigungsvektor. Er hat also keine Komponente in Binormalen-Richtung.

Für bewegte Punkte ist die Bogenlänge als Integral über $ds := |\mathbf{dr}|$ eine streng-monoton steigende Funktion der Zeit $s(t)$. Diese Funktion ist umkehrbar, womit man die Zeit auch als Funktion $\hat{t}(s)$ der Bogenlänge darstellen kann.

Zur **Bogenlängenbeschreibung** der Bewegung gelangen wir, wenn wir den Parameter Zeit durch den Parameter Bogenlänge ersetzen

$$\hat{\mathbf{r}}(s) := \mathbf{r}(\hat{t}(s)).$$

Wir kennzeichnen eine Funktion von s mit einem Dach und Ableitungen nach s mit $'$, um sie von Zeitableitungen \bullet zu unterscheiden. Damit gelten

$$\hat{\mathbf{r}}(s)' = \frac{d\hat{\mathbf{r}}(s)}{ds} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{\mathbf{r}\bullet}{s\bullet} = \mathbf{e}_t$$

²⁷ Jean Frédéric Frenet (1816 - 1900)

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\hat{\mathbf{r}}(s)}{ds} \frac{ds}{dt} = \hat{\mathbf{r}}'(s) \dot{s} = \dot{s} \mathbf{e}_t$$

$$v = \dot{s}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \dot{\mathbf{v}} = \dot{s}'' \mathbf{e}_t + \dot{s}' \mathbf{e}_t' \\ &= s'' \hat{\mathbf{e}}_t(s) + \dot{s}' \frac{d\hat{\mathbf{e}}_t(s)}{ds} \frac{ds}{dt} \\ &= s'' \hat{\mathbf{e}}_t + \dot{s}'^2 \hat{\mathbf{e}}_t' \end{aligned}$$

Es ist $\hat{\mathbf{e}}_t$ senkrecht auf $\hat{\mathbf{e}}_t'$, denn

$$\hat{\mathbf{e}}_t \cdot \hat{\mathbf{e}}_t = 1 \quad \Rightarrow \quad (\hat{\mathbf{e}}_t \cdot \hat{\mathbf{e}}_t)' = 2\hat{\mathbf{e}}_t' \cdot \hat{\mathbf{e}}_t = 0.$$

Damit erkennt man

$$\mathbf{a}_t = s'' \hat{\mathbf{e}}_t$$

$$\mathbf{a}_n = \dot{s}'^2 \hat{\mathbf{e}}_t'.$$

Die momentane **Krümmung** der Bahnkurve ist

$$\hat{\kappa}(s) := |\hat{\mathbf{e}}_t'| = \left| \frac{d\hat{\mathbf{e}}_t(s)}{ds} \right|$$

und deren Kehrwert der **Krümmungsradius**

$$\hat{\rho}(s) := \frac{1}{\hat{\kappa}(s)} = \frac{1}{|\hat{\mathbf{e}}_t'|}.$$

Man erhält

$$\hat{\mathbf{e}}(s)_n = \mathbf{e}_n(\hat{t}(s)) = \frac{\dot{s}'^2 \hat{\mathbf{e}}_t'}{|\dot{s}'^2 \hat{\mathbf{e}}_t'|} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_t'}{|\hat{\mathbf{e}}_t'|} = \hat{\rho}(s) \hat{\mathbf{e}}_t'$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\mathbf{e}}_t' = \frac{1}{\hat{\rho}} \mathbf{e}_n$$

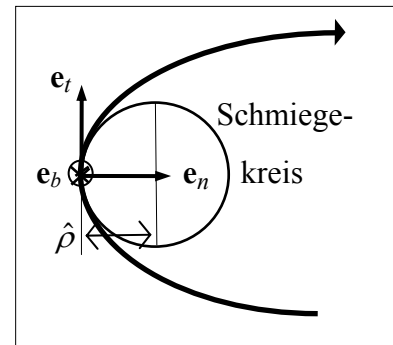
und damit

$$\mathbf{a} = s'' \mathbf{e}_t + \frac{\dot{s}'^2}{\hat{\rho}} \mathbf{e}_n = v' \mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\hat{\rho}} \mathbf{e}_n.$$

Der erste Term heißt **Tangentialbeschleunigung**, der zweite **Normal- oder Zentripetalbeschleunigung**, da er immer nach innen auf das Zentrum des **Schmiegekreises** weist. Letzterer liegt in der Schmiegeebene und hat den Krümmungsradius $\hat{\rho}$.

Die Ableitungen der anderen Basisvektoren erhält man als

$$\mathbf{e}_b' = \mathbf{e}_t' \times \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n' = 1/\hat{\rho} \mathbf{e}_n \times \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n' = \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n'.$$



Da \mathbf{e}_n' senkrecht auf \mathbf{e}_n steht, und mögliche Anteile in Richtung von \mathbf{e}_t in dem Kreuzprodukt entfallen, gehen hier nur Anteile in Richtung von \mathbf{e}_b ein. Das Kreuzprodukt ergibt einen Vektor in $-\mathbf{e}_n$ der Länge $1/W$

$$\mathbf{e}_b' = -1/W \mathbf{e}_n$$

mit dem Kehrwert der **Windung**

$$1/W := -\mathbf{e}_b' \cdot \mathbf{e}_n = -(\mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n') \cdot \mathbf{e}_n = -[\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n', \mathbf{e}_n] = [\mathbf{e}_n', \mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n] = \mathbf{e}_n' \cdot \mathbf{e}_b.$$

Ähnlich erhält man

$$\mathbf{e}_n' = \mathbf{e}_b' \times \mathbf{e}_t + \mathbf{e}_b \times \mathbf{e}_t' = -1/W \mathbf{e}_n \times \mathbf{e}_t + \mathbf{e}_b \times 1/\hat{\rho} \mathbf{e}_n$$

$$\mathbf{e}_n' = 1/W \mathbf{e}_b - 1/\hat{\rho} \mathbf{e}_t$$

(FRENETsche Formeln).

Relativbewegung

Oft ist es praktisch, ein bewegtes Bezugssystem $\{O^*(t), \mathbf{e}_1^*(t), \mathbf{e}_2^*(t), \mathbf{e}_3^*(t)\}$ zu verwenden, wobei $\{\mathbf{e}_i^*(t)\}$ eine beliebige zeitabhängige ONB sein soll. Es gilt dann

$$\mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{e}_i^* = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_i^* \cdot \dot{\mathbf{e}}_i^* = 0,$$

womit die Ableitung eines Basisvektors immer senkrecht auf diesem steht. Es muss also drei zeitabhängige Vektoren $\boldsymbol{\omega}_i(t)$ geben mit

$$\mathbf{e}_i^* \cdot \dot{\mathbf{e}}_i^* = \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{e}_i^*.$$

Bildet man nun für beispielsweise

$$\mathbf{e}_1^* \cdot \mathbf{e}_2^* = 0$$

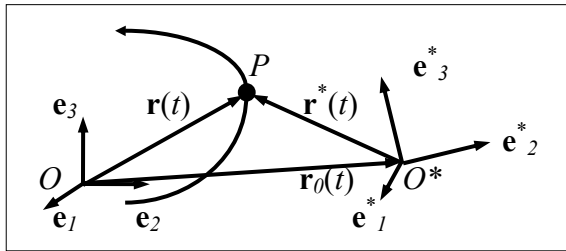
und dessen Zeitableitung

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{e}_1^* \cdot \dot{\mathbf{e}}_2^* + \dot{\mathbf{e}}_1^* \cdot \mathbf{e}_2^* \\ &= (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{e}_1^*) \cdot \mathbf{e}_2^* + \dot{\mathbf{e}}_1^* \cdot (\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{e}_2^*) \\ &= \boldsymbol{\omega}_1 \cdot (\mathbf{e}_1^* \times \mathbf{e}_2^*) + \boldsymbol{\omega}_2 \cdot (\mathbf{e}_2^* \times \mathbf{e}_1^*) \\ &= \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{e}_3^* - \boldsymbol{\omega}_2 \cdot \mathbf{e}_3^* \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{e}_3^* = \boldsymbol{\omega}_2 \cdot \mathbf{e}_3^*. \end{aligned}$$

Also haben $\boldsymbol{\omega}_1$ und $\boldsymbol{\omega}_2$ in \mathbf{e}_3^* -Richtung dieselben Komponenten. Da dies für alle Indizes $i, j, k = 1, 2, 3$ gilt, fallen alle drei $\boldsymbol{\omega}_i$, $i = 1, 2, 3$ zu einem einzigen zeitabhängigen Vektor zusammen, der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}(t)$ (auch DARBOUX²⁸scher Vektor genannt). Es gilt also

$$\mathbf{e}_i^* \cdot \dot{\mathbf{e}}_i^* = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i^*.$$

²⁸ Jean Gaston Darboux (1842 - 1917)



Für den Ortsvektor eines bewegten Punktes gilt nun

$$\mathbf{r}(t) = \vec{OP} = \vec{OO^*} + \vec{O^*P} = \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{r}^*(t)$$

mit dem Ortsvektor von O^* bezüglich festem BZS

$$\mathbf{r}_0(t) = x_{01}(t) \mathbf{e}_1 + x_{02}(t) \mathbf{e}_2 + x_{03}(t) \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 x_{0i}(t) \mathbf{e}_i$$

und dem Ortsvektor von P bezüglich bewegtem BZS

$$\mathbf{r}^*(t) = x^*_1(t) \mathbf{e}^*_1(t) + x^*_2(t) \mathbf{e}^*_2(t) + x^*_3(t) \mathbf{e}^*_3(t) = \sum_{i=1}^3 x^*_i(t) \mathbf{e}^*_i(t).$$

Damit erhalten wir für die (Absolut-) Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{r}}^*$$

mit

$$\dot{\mathbf{r}}_0(t) = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_{0i}(t) \mathbf{e}_i$$

und

$$\dot{\mathbf{r}}^*(t) = \sum_{i=1}^3 (\dot{x}^*_i \mathbf{e}^*_i + x^*_i \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}^*_i) = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^*$$

mit der **Relativgeschwindigkeit** des Punktes gegenüber dem bewegten BZS

$$\mathbf{v}_r := \sum_{i=1}^3 \dot{x}^*_i \mathbf{e}^*_i$$

und der **Führungsgeschwindigkeit** des bewegten BZS, die nicht von der Bewegung von P abhängt,

$$\mathbf{v}_f := \dot{\mathbf{r}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^*,$$

die sich aus der Translations- und der Rotationsgeschwindigkeit zusammensetzt, so dass die **(Absolut-) Geschwindigkeit**

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_f + \mathbf{v}_r = \dot{\mathbf{r}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^* + \mathbf{v}_r$$

aus drei Anteilen besteht. Deren Ableitung ist die **(Absolut-) Beschleunigung**

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}^* + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}^* + \dot{\mathbf{v}}_r$$

mit

und $\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}^* = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^*) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^*)$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_r \dot{} &= \sum_{i=1}^3 (x_i^{*\ddot{}} \mathbf{e}_i^* + \dot{x}_i^* \dot{\mathbf{e}}_i^*) \\ &= \mathbf{a}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r \end{aligned}$$

mit der **Relativbeschleunigung**

$$\mathbf{a}_r := \sum_{i=1}^3 x_i^{*\ddot{}} \mathbf{e}_i^*$$

schließlich

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}_0^{\ddot{}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}^* + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^*) + 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r + \mathbf{a}_r$$

mit der **Führungsbeschleunigung**

$$\mathbf{a}_f := \mathbf{r}_0^{\ddot{}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}^* + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^*),$$

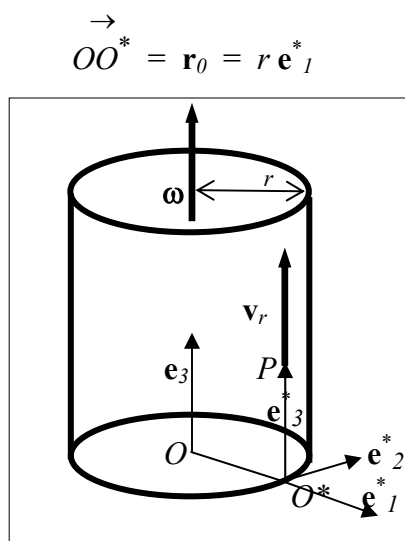
die sich aus **Translations-, Quer- und Zentripetalbeschleunigung** zusammensetzt, so wie der **CORIOLIS²⁹-Beschleunigung**

$$\mathbf{a}_C := 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r.$$

Letztere tritt nur auf, wenn

- 1.) das Führungssystem mit $\boldsymbol{\omega}$ rotiert,
- 2.) der Körper ihm gegenüber eine Relativgeschwindigkeit \mathbf{v}_r besitzt, und
- 3.) die beiden Vektoren nicht parallel sind.

Beispiel 1: Bewegung auf der Mantellinie eines rotierenden Kreiszylinders



$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_3 = \omega \mathbf{e}_3^* \text{ konst.}$$

$$\mathbf{r}^* = x_3(t) \mathbf{e}_3^*$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^* = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{v}_r = x_3(t) \dot{\mathbf{e}}_3^*$$

$$\mathbf{v}_f = \dot{\mathbf{r}}_0^* = r \dot{\mathbf{e}}_1^* = \boldsymbol{\omega} \times r \mathbf{e}_1^* = \omega r \mathbf{e}_2^*$$

also tangential

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^*) = \mathbf{0}$$

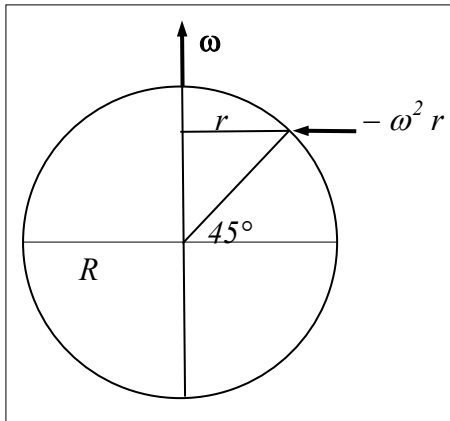
$$\text{CORIOLIS-Beschl. } 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r = \mathbf{0}$$

$$\text{Führungsbeschl. } \mathbf{a}_f = \mathbf{r}_0^{\ddot{}} = -\omega^2 r \mathbf{e}_1^*$$

$$\text{Relativbeschl. } \mathbf{a}_r = x_3(t) \ddot{\mathbf{e}}_3^*$$

²⁹ Gaspard Gustav de Coriolis (1792 - 1843)

Beispiel 2: Zentripetalbeschleunigung eines Punktes auf einer rotierenden Kugel (z. B. auf der Erdoberfläche in Europa). Wir nehmen als Beispiel den 45° Breitenkreis.



Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = 2\pi / \text{Tag} = 2\pi / (24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}) \\ = 7,26 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1} \text{ (klein)}$$

$$r = R \cos 45^\circ = 6.400 \text{ km} / \sqrt{2} = 4.480 \text{ km}$$

Die Führungsgeschwindigkeit gegenüber dem Erdmittelpunkt ist relativ groß

$$\omega r = 7,26 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1} \cdot 4.480.000 \text{ m} = 325 \text{ m/s} = 1170 \text{ km/h}$$

Am Äquator wären es 1700 km/h .

Die Zentripetalbeschleunigung ist dagegen relativ klein

$$\omega^2 r = 7,26^2 \cdot 10^{-10} \text{ s}^{-2} \cdot 4.480.000 \text{ m} = 0,02 \text{ m/s}^2$$

also etwa $2/100$ der Erdbeschleunigung.

Beispiel 3: Radialbewegung auf Drehscheibe

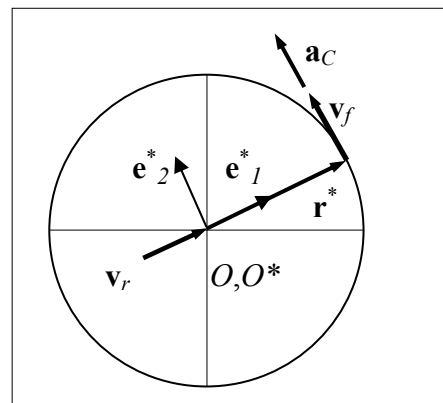
$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{o}$$

$$\mathbf{r}^* = r(t) \mathbf{e}_1^*$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_3 = \omega \mathbf{e}_3^* \text{ konst.}$$

$$\mathbf{v}_r = \frac{d_r \mathbf{r}^*}{dt} = r(t) \dot{\mathbf{e}}_1^* \text{ radial}$$

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{r}_0 \dot{\mathbf{e}}_2^* + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^* = \omega r(t) \mathbf{e}_2^* \text{ tangential}$$



Zentripetalbeschl. $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^*) = -\omega^2 r \mathbf{e}_1^*$

CORIOLIS-Beschl. $\mathbf{a}_C = 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r = 2 r(t) \dot{\omega} \mathbf{e}_2^*$

die sich aus zwei Anteilen speist: Erstens gelangt der Punkt in Bereiche größerer Umfangsgeschwindigkeit, zweitens dreht sich \mathbf{v}_r .

Kinematik des deformierbaren Körpers

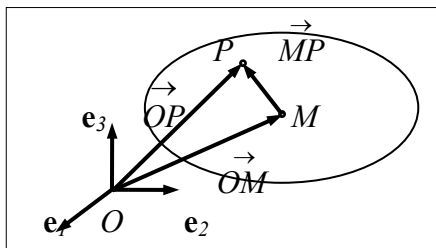
Wir betrachten im Folgenden materielle Körper, die sich im Raum bewegen. Dabei ist es völlig gleich, ob das Material des Körpers fest oder flüssig oder gasförmig ist, ob er elastisch oder inelastisch ist, usw. Die folgenden Untersuchungen sind nämlich Material-unabhängig.

Sei $\mathbf{r}(O, P) = \overrightarrow{OP}$ der Ortsvektor eines Körperpunktes P bezogen auf einen raumfesten Bezugspunkt O zur Zeit t . Für ein festgewähltes P beschreibt $\mathbf{r}(O, P)$ eine Punkt-bewegung.

Der momentane (d. h. zur Zeit t) **Massenmittelpunkt** M ist definiert durch seinen Ortsvektor

$$\mathbf{r}(O, M) := \frac{1}{m} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}(O, P) dm,$$

wobei P alle im Volumengebiet \mathcal{V} des Körpers befindlichen Punkte durchläuft. Für den deformierbaren Körper ist der Massenmittelpunkt im allgemeinen weder körper- noch raumfest, sondern eine Zeitfunktion.



Zerlegen wir nun

$$\mathbf{r}(O, P) = \mathbf{r}(O, M) + \mathbf{r}(M, P),$$

so folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}(O, P) dm &= \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}(O, M) dm + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}(M, P) dm \\ &= \mathbf{r}(O, M) m + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}(M, P) dm. \end{aligned}$$

Da die beiden linken Integrale gleich sind, gilt für die auf den Massenmittelpunkt bezogenen Ortsvektoren $\mathbf{r}(M, P)$

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}(M, P) dm = \mathbf{0}$$

wie auch

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}(M, P)^{\bullet} dm = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}(M, P)^{\bullet\bullet} dm = \mathbf{0}$$

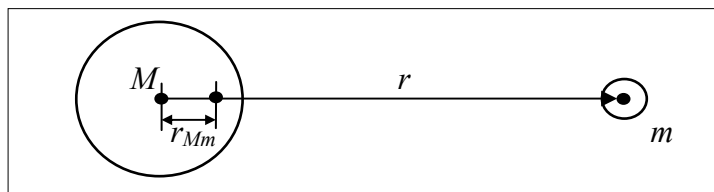
usw.

Beispiel: Massenmittelpunkt des Erde-Mond-Systems

Wir messen den Abstand r vom Mittelpunkt der Erde aus. Sei M die Masse der Erde und m die des Mondes. Der Abstand des Massenmittelpunktes vom Gesamtsystem von dem der Erde ist

$$r_{Mm} = \frac{l}{M+m} (r_M M + r_m m) = \frac{r_m m}{M+m} = \frac{l}{1+M/m} r_m.$$

Der mittlere Abstand zwischen Erde und Mond beträgt $r_m = 384.000 \text{ km}$, was etwa 30 Erddurchmessern entspricht. Das Verhältnis der beiden Massen ist etwa $600/7,3$. Damit erhalten wir $r_{Mm} = 4.670 \text{ km}$, also 1.700 km unter der Erdoberfläche.



Für das Weitere ist die folgende Regel äußerst nützlich: Ist $\phi(P, t)$ eine Funktion von Ort und Zeit, so gilt für die Zeitableitung des Integrals nach der Produktregel

$$\left(\int_{\mathcal{V}} \phi(P, t) dm \right)^{\bullet} = \int_{\mathcal{V}} \phi(P, t)^{\bullet} dm + \int_{\mathcal{V}} \phi(P, t) dm^{\bullet} = \int_{\mathcal{V}} \phi(P, t)^{\bullet} dm.$$

infolge der Massenerhaltung (Differenzieren unterm Integral). Dies gilt aber nur für massenspezifische Größen (also Integrationen über das Massenelement dm), nicht aber für volumenspezifische Größen (also Integrationen über dV).

Ein Beispiel hierfür erhalten wir, wenn wir ϕ mit dem momentanen Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(P, t) := \mathbf{r}(O, P)^{\bullet}$ identifizieren.

Definition: Der **Impuls** des Körpers zur Zeit t ist

$$\mathbf{p}(t) := \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v}(P, t) dm$$

Mit

$$\mathbf{v}(P, t) = \mathbf{r}(O, P)^{\bullet} = \mathbf{r}(O, M)^{\bullet} + \mathbf{r}(M, P)^{\bullet}$$

folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}(O, P)^{\bullet} dm = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}(O, M)^{\bullet} dm + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}(M, P)^{\bullet} dm \\ &= \mathbf{r}(O, M)^{\bullet} m = \mathbf{v}_M(t) m \end{aligned}$$

mit der **Massenmittelpunktsgeschwindigkeit** $\mathbf{v}_M(t) := \mathbf{r}(O, M)^{\bullet}$, die im Allg. nicht die Geschwindigkeit eines materiellen Punktes ist. Wie schon die Geschwindigkeiten, so hängt auch der Impuls nicht von der speziellen Wahl des (raumfesten) Bezugspunktes O ab.

Die Zeitableitung des Impulses ergibt sich zu

$$\mathbf{p}(t)^{\bullet} = \left(\int_{\mathcal{V}} \mathbf{v}(P, t) dm \right)^{\bullet} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v}(P, t)^{\bullet} dm = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{a}(P, t) dm$$

$$= (\mathbf{v}_M m)^\bullet = \mathbf{v}_M^\bullet m = \mathbf{a}_M(t) m$$

mit der **Massenmittelpunktsbeschleunigung** $\mathbf{a}_M := \mathbf{r}(O, m)^\bullet^\bullet$.

Wir benötigen noch zwei weitere globale kinematische Größen.

Definition: Der **Drall** (Drehimpuls) des Körpers zur Zeit t bezüglich eines Bezugspunktes O ist

$$\mathbf{d}_O(t) := \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}(O, P) \times \mathbf{r}(O, P)^\bullet dm = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}(O, P) \times \mathbf{v}(O, P) dm$$

Wir werden in Kürze die Zeitableitung des Dralls benötigen, die sich nach der Produktregel zu

$$\mathbf{d}_O(t)^\bullet = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}(O, P) \times \mathbf{r}(O, P)^\bullet^\bullet dm$$

ergibt, weil $\mathbf{r}(O, P)^\bullet \times \mathbf{r}(O, P)^\bullet = \mathbf{o}$ ist.

Definition: Die **kinetische Energie** des Körpers zur Zeit t ist

$$K(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v}(P, t)^2 dm.$$

Sie ist für jeden unbewegten Körper gleich Null und für jeden bewegten positiv. Es gilt

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}(O, P)^2 dm = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} [\mathbf{r}(O, M)^\bullet + \mathbf{r}(M, P)^\bullet]^2 dm \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{r}(O, M)^\bullet{}^2 m + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}(M, P)^\bullet{}^2 dm + \mathbf{r}(O, M)^\bullet \cdot \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}(M, P)^\bullet dm \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{v}_M(t)^2 m + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}(M, P)^\bullet{}^2 dm. \end{aligned}$$

Deren Zeitableitung ist

$$\begin{aligned} K(t)^\bullet &= \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v}(P, t) \cdot \mathbf{a}(P, t) dm \\ &= \mathbf{v}_M(t) \cdot \mathbf{a}_M(t) m + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}(M, P)^\bullet \cdot \mathbf{r}(M, P)^\bullet^\bullet dm. \end{aligned}$$

Kinetik

Während wir uns bisher nur mit der Beschreibung von Bewegungen (Kinematik) beschäftigt haben, untersuchen wir im Weiteren die Ursachen für Bewegungen und deren Änderung. Dieses Teilgebiet der Mechanik heißt Kinetik.

Kinetik des deformierbaren Körpers

Wir haben uns bisher mit der Lehre der Kräfte und Momente (Dynamik) und der Lehre der Bewegungen (Kinematik) beschäftigt, ohne deren Zusammenhänge zu untersuchen. Diese Verbindung zwischen der Dynamik und der Kinematik leistet die **Kinetik** in Form von

Bewegungsgesetzen. Die klassische (d. h. nicht-relativistische) Kinetik kann mit zwei unabhängigen Gesetzen begründet werden, die wir axiomatisch einführen werden, und die für alle Körper gelten:

Impulsbilanz: Die zeitliche Änderung des Impulses \mathbf{p} eines Körpers bezüglich eines raumfesten Bezugssystems ist gleich der resultierend auf ihn wirkenden Kraft \mathbf{F}

$$\mathbf{p}' = \mathbf{F}$$

Drallbilanz: Die zeitliche Änderung des Dralls \mathbf{d}_O eines Körpers bezüglich eines raumfesten Bezugssystems mit Bezugspunkt O ist gleich dem resultierend auf ihn wirkenden Moment \mathbf{M}_O bezüglich O

$$\mathbf{d}_O' = \mathbf{M}_O$$

Diese beiden Gesetze werden als **EULERSche Bewegungsgleichungen** bezeichnet.

Im Gleichgewicht sind Impuls und Drall gleich Null und wir erhalten die aus der Statik bekannten Gleichgewichtsbedingungen

$$\mathbf{F} = \mathbf{o} \quad \text{und} \quad \mathbf{M}_O = \mathbf{o} .$$

Es sei darauf hingewiesen, dass man die Bewegungsgleichungen auf die Form von den uns bestens vertrauten Gleichgewichtsbedingungen bringen kann, indem man die negativen Trägheitsterme der Impuls- und Dralländerung zu Trägheitskräften bzw. -momenten deklariert und sie mit den Kräften und Momenten zusammenfasst zu den **verlorenen Kräften**

$$\mathbf{F}_v := \mathbf{F} - \mathbf{a}_M m$$

und den **verlorenen Momenten**

$$\mathbf{M}_{Ov} := \mathbf{M}_O - \mathbf{d}_O' .$$

Diese erfüllen dann die Gleichgewichtsbedingungen auch für bewegte Körper (D'ALEMBERTsches Prinzip)

$$\mathbf{F}_v = \mathbf{o} \quad \text{und} \quad \mathbf{M}_{Ov} = \mathbf{o} .$$

Im Sprachgebrauch drückt sich diese Vorgehensweise oft dadurch aus, dass man von "Trägheitskräften" oder "Inertialkräften" statt von Impulsänderungen spricht. Dies kommt bei Drehbewegungen um eine feste Achse auch durch das Wort "Zentrifugalkraft" anstelle von (negativen) Zentripetalbeschleunigungen zum Ausdruck.

Wie wir bereits gesehen haben, kann die Impulsbilanz aber auch auf den Massenmittelpunkt bezogen werden

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{a}(P, t) dm = \mathbf{a}_M(t) m = \mathbf{F} .$$

Man sieht, dass die verbreitete und vermeintlich einfache Sprechweise für dieses Gesetz "Kraft = Masse \times Beschleunigung" bereits einige Kenntnis über Massenmittelpunkt, Impuls usw. voraussetzt. Diese Version der Impulsbilanz wird oft als **NEWTONsches Gesetz** (1686) oder **Massenmittelpunktsatz** bezeichnet. Die konsistente Formulierung von Impuls- und Drallbilanz für kontinuierliche Körper in zwei unabhängigen Axiomen wurde aber erst 1774 von L. EULER erkannt, also ein Jahrhundert nach NEWTONs Prinzipien.

Beispiel: Wurfparabel

Bei Annahme eines konstanten Gravitationsfeldes g und unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes gilt für den Massenmittelpunkt eines geworfener Körpers

$$\mathbf{a}_m = g \mathbf{e}_\downarrow \Rightarrow a = g = \text{konst.}$$

$$\Rightarrow v_\downarrow = a t + c_1 \Rightarrow r_\downarrow = a t^2 + c_1 t + c_2.$$

Die beiden Konstanten können wir aus Anfangsbedingungen bestimmen:

$$v_\downarrow(t=0) = c_1 \quad r_\downarrow(t=0) = c_2.$$

Eine zusätzliche horizontale Bewegung kann dem überlagert werden. Beispielsweise bewegt sich jeder Körper auf der Erdoberfläche in Äquatornähe infolge der Erddrehung mit etwa $40.000 \text{ km} / 24 \text{ h} = 1.666 \text{ km/h}$.

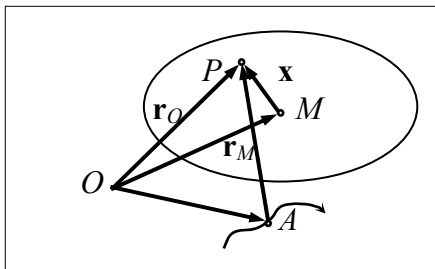
Als ruhend oder raumfest oder **inertial** bezeichnet man ein Bezugssystem, bezüglich dessen die EULERSchen Bewegungsgleichungen in der obigen (einfachen) Form gelten.

Verwendet man statt eines raumfesten Bezugssystems ein beliebig bewegtes Bezugssystem, so können sich ihm gegenüber die Beschleunigungen ändern und damit auch die Impuls- und Dralländerung, während die Kräfte und Momente sich nicht verändern. Damit verlieren die beiden Bewegungsgesetze in der obigen Form bezüglich bewegter Bezugssysteme ihre Gültigkeit.

Sei A ein beliebig bewegter Punkt. Dann folgt aus der Impulsbilanz

$$\mathbf{F} = \mathbf{p}' = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}(O, P)'' dm = \int_{\mathcal{V}} [\mathbf{r}(O, A)'' + \mathbf{r}(A, P)'] dm$$

$$= \mathbf{a}_A m + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}(A, P)'' dm,$$



also mit einem Zusatzterm. Ist A jedoch unbeschleunigt, so gilt die Impulsbilanz wie vorher.

Aus der Drallbilanz bez. des raumfesten Punktes O folgt

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_A + \mathbf{r}(O, A) \times \mathbf{F} \quad (\text{Versetzungsmoment})$$

$$= \mathbf{d}_O(t)' = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}(O, P) \times \mathbf{r}(O, P)'' dm$$

$$= \int_{\mathcal{V}} [\mathbf{r}(O, A) + \mathbf{r}(A, P)] \times \mathbf{r}(O, P)'' dm$$

$$= \mathbf{r}(O, A) \times \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}(O, P)'' dm + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}(A, P) \times \mathbf{r}(O, P)'' dm$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{r}(O, A) \times \mathbf{a}_M m + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}(A, P) \times [\mathbf{r}(O, A) + \mathbf{r}(A, P)]^{\bullet\bullet} dm \\
&= \mathbf{r}(O, A) \times \mathbf{p}^{\bullet} + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}(A, P) dm \times \mathbf{r}(O, A)^{\bullet\bullet} + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}(A, P) \times \mathbf{r}(A, P)^{\bullet\bullet} dm \\
&= \mathbf{r}(O, A) \times \mathbf{F} + \mathbf{r}(A, M) m \times \mathbf{a}_A + \mathbf{d}_A(t)^{\bullet}.
\end{aligned}$$

Mit der Impulsbilanz hebt sich der erste Term der rechten Seite mit dem Versetzungsmoment auf, und es verbleibt die

Drallbilanz bezüglich eines bewegten Punktes A

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{d}_A(t)^{\bullet} + \mathbf{r}(A, M) \times \mathbf{a}_A m \quad \text{mit} \quad \mathbf{d}_A(t)^{\bullet} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}(A, P) \times \mathbf{r}(A, P)^{\bullet\bullet} dm$$

also auch mit einem Zusatzterm. Dieser verschwindet für zwei Spezialfälle:

- $\mathbf{r}(A, M) \equiv \mathbf{o}$, d. h. $A \equiv M$

Drallbilanz bezüglich des (bewegten) Massenmittelpunktes

$$\mathbf{M}_M = \mathbf{d}_M^{\bullet} \quad \text{mit} \quad \mathbf{d}_M(t)^{\bullet} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}(M, P) \times \mathbf{r}(M, P)^{\bullet\bullet} dm$$

- $\mathbf{a}_A \equiv \mathbf{o}$, also A zwar bewegt, aber nicht beschleunigt.

Drallbilanz bezüglich eines unbeschleunigten Punktes A

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{d}_A(t)^{\bullet} \quad \text{mit} \quad \mathbf{d}_A(t)^{\bullet} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}(A, P) \times \mathbf{r}(A, P)^{\bullet\bullet} dm$$

Wir werden später sehen, dass man speziell als unbeschleunigten Bezugspunkt auch den Momentanpol eines starren Körpers verwenden kann, wenn man diesen als momentan unbewegten ($\mathbf{v}_{Mp} = \mathbf{o}$) Raum-Punkt auffasst.

Unbeschleunigte Bezugssysteme werden **Inertialsysteme** genannt. Für sie gelten die Bewegungsgesetze in gleicher Weise wie für ruhende Systeme. Sind die Führungs- und die CORIOLIS-Beschleunigung Null, so ist die Absolutbeschleunigung gleich der Relativbeschleunigung. Dafür ist es notwendig und hinreichend, dass für das Bezugssystem

$$\mathbf{r}_A^{\bullet\bullet} \equiv \mathbf{o} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\omega} \equiv \mathbf{o}$$

sind. Das Bezugssystem darf sich weder gegenüber dem ruhenden zeitabhängig drehen noch beschleunigt werden. Aus letzterer Bedingung folgt $\mathbf{r}_O^{\bullet} = \text{konst.}$ Ein solches Bezugssystem heißt **geradlinig und gleichförmig bewegt**.

Satz: Ein Bezugssystem ist genau dann ein Inertialsystem, wenn es sich gegenüber einem anderen Inertialsystem nur geradlinig und gleichförmig bewegt.

Befindet sich der Körper in Ruhe (Statik), so sind Impuls und Drall gleich Null und man erhält die Gleichgewichtsbedingungen als Spezialfall

$$\mathbf{F} = \mathbf{o} \quad \text{und} \quad \mathbf{M}_O = \mathbf{o}.$$

Dasselbe gilt auch für Körper, die sich bezüglich eines geradlinig und gleichförmig bewegten BZS in Ruhe befinden.

Auch der umgekehrte Fall kann auftreten, dass nämlich keine resultierenden Kräfte und Momente wirken, ohne dass notwendigerweise der Körper in Ruhe ist. Dann sind $\mathbf{p}^\bullet \equiv \mathbf{o}$ und $\mathbf{d}_O^\bullet \equiv \mathbf{o}$, woraus sich die folgenden Erhaltungssätze ergeben:

Impulserhaltungssatz

Wirkt auf den Körper keine resultierende Kraft, so bleibt sein Impuls konstant

$$\mathbf{p}^\bullet \equiv \mathbf{o}$$

Drallerhaltungssatz

Wirkt auf den Körper kein resultierendes Moment bezüglich eines raumfesten Punktes O , so ist sein Drall bez. O konstant

$$\mathbf{d}_O^\bullet \equiv \mathbf{o}$$

Mehrkörpersysteme

In verschiedenen Teilgebieten der Physik wie auch in der Himmelsmechanik betrachtet man Systeme von (deformierbaren) Körpern, die nicht in Kontakt stehen, sondern lediglich über Wechselwirkungskräfte aufeinander einwirken, beispielsweise durch Massenanziehungen.

Annahme: Zwischen den Körpern wirken nur Massenkräfte, die im Massenmittelpunkt angreifen (**Zentralkraft-Hypothese**).

| | | |
|-------|-------------------|--|
| Seien | N | die Anzahl der Körper des betrachteten Systems |
| | m_i | Masse des Körpers i |
| | M_i | Massenmittelpunkt des Körpers i |
| | \mathbf{r}_{Mi} | Ortsvektor von M_i bezüglich raumfestem Bezugspunkt O |
| | \mathbf{F}_{ki} | die Kraft, mit der Körper k auf Körper i wirkt |
| | \mathbf{F}_{0i} | die Kraft, mit der der Rest der Welt auf Körper i wirkt |
| | \mathbf{p}_i | Impuls des Körpers i |
| | \mathbf{d}_{Oi} | Drall des Körpers i bezüglich raumfestem Bezugspunkt O . |
| | \mathbf{d}_{Mi} | Drall des Körpers i bezüglich M_i . |

Damit gilt für den Drall

$$\mathbf{d}_{Oi} = \mathbf{d}_{Mi} + m_i \mathbf{r}_{Mi} \times \mathbf{r}_{Mi}^\bullet .$$

Nachdem Reaktionsprinzip ist

$$\mathbf{F}_{ki} = - \mathbf{F}_{ik}$$

und speziell

$$\mathbf{F}_{ii} = \mathbf{o} .$$

Dann gilt für jede Einzelmasse die Impulsbilanz

$$\mathbf{p}_i \dot{} = m_i \mathbf{r}_{Mi} \ddot{} = \sum_{k=0}^N \mathbf{F}_{ki} \quad i = 1, \dots, N$$

sowie die Drallbilanz bezogen auf einen raumfesten Punkt O

$$\mathbf{d}_{Oi} \dot{} = \mathbf{r}_{Mi} \times \mathbf{r}_{Mi} \ddot{} m_i + \mathbf{d}_{Mi} \dot{} = \mathbf{r}_{Mi} \times \sum_{k=0}^N \mathbf{F}_{ki} + \mathbf{d}_{Mi} \dot{} \quad i = 1, \dots, N$$

oder bezogen auf M_i , bez. dessen Zentralkräfte keine Momente erzeugen

$$\mathbf{d}_{Mi} \dot{} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{d}_{Oi} \dot{} = \mathbf{r}_{Mi} \times \sum_{k=0}^N \mathbf{F}_{ki} \quad i = 1, \dots, N.$$

Unter Zentralkräften gilt für alle Körper die Drallerhaltung bezogen auf den Massenmittelpunkt.

Die Impulsbilanz für das Gesamtsystem erhalten wir als Summe der Einzelimpulse

$$\mathbf{p}_\Sigma \dot{} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \dot{} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_{Mi} \ddot{} \stackrel{(2)}{=} \sum_{i=1}^N \sum_{k=0}^N \mathbf{F}_{ki} \stackrel{(1)}{=} \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{0i},$$

da sich die inneren Kräfte paarweise aufheben. Der Massenmittelpunkt des Systems ist

$$\mathbf{r}_\Sigma := \frac{1}{m_\Sigma} \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_{Mi} m_i \quad \text{mit der Gesamtmasse } m_\Sigma = \sum_{i=1}^N m_i.$$

Der Impulssatz für das Gesamtsystem liefert dasselbe Ergebnis

$$\mathbf{a}_\Sigma m_\Sigma := \mathbf{r}_\Sigma \ddot{} m_\Sigma = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_{Mi} \ddot{} m_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_{Mi} m_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{0i}.$$

Der Gesamtmassenmittelpunkt bewegt sich so, als wenn alle Einzelmassen in ihm vereinigt wären und alle äußeren Kräfte in ihm angriffen.

Die Drallbilanz für das Gesamtsystem ist

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{\Sigma O} \dot{} &= \sum_{i=1}^N \mathbf{d}_{Oi} \dot{} \stackrel{(3)}{=} \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_{Mi} \times \mathbf{r}_{Mi} \ddot{} m_i \stackrel{(2)}{=} \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_{Mi} \times \sum_{k=0}^N \mathbf{F}_{ki} \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_{Mi} \times \mathbf{F}_{0i}, \end{aligned}$$

weil sich die Momente der inneren Wechselwirkungskräfte wiederum herausheben, wie z. B.

$$\mathbf{r}_{M1} \times \mathbf{F}_{21} + \mathbf{r}_{M2} \times \mathbf{F}_{12} = (\mathbf{r}_{M1} - \mathbf{r}_{M2}) \times \mathbf{F}_{21} = \mathbf{0},$$

da $(\mathbf{r}_{M1} - \mathbf{r}_{M2})$ parallel zu \mathbf{F}_{21} ist.

Wenn man die Massenmittelpunktsätze mit \mathbf{r}_{Mj} vektoriell multipliziert und anschließend aufsummiert, so erhält man dasselbe Ergebnis für die Drallbilanz. Umgekehrt kann man auch aus der Drallbilanz die Impulsbilanz ableiten. *Für Zentralkraftsysteme sind Impuls- und Drallbilanz also äquivalent.* Im Allgemeinen hingegen handelt es sich um zwei unabhängige Gesetze.

Die kinetische Energie des Systems ist die Summe der Einzelenergien

$$K = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}_i} \mathbf{v}^{\bullet 2} dm = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}_{Mi}^2 m_i + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}_i} \mathbf{x}_i^{\bullet 2} dm \right) \quad \text{mit } \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{Mi} + \mathbf{x}_i.$$

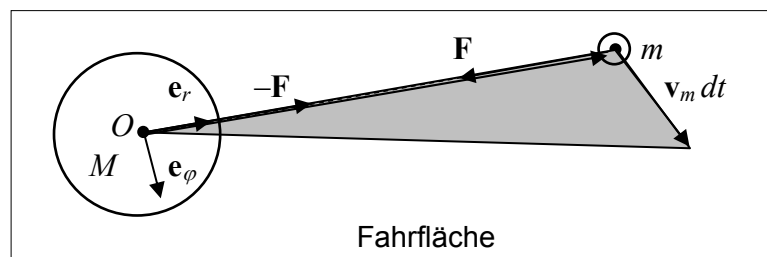
KEPLERsche³⁰ Gesetze

Berechnung der stationären Bewegung einer kleinen Masse m um eine große M .

Massenverhältnisse im Sonnensystem:

$$m_{\text{Sonne}} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg} \quad m_{\text{Erde}} = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \quad m_{\text{Mond}} = 7,3 \cdot 10^{22} \text{ kg}$$

Annahme: M ruht und wird nicht durch m bewegt, weil $M \gg m$.



Zylinderkoordinaten in M .

Ortsvektor von m : $\mathbf{r}_m = r \mathbf{e}_r$

Geschwindigkeit: $\mathbf{v}_m = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \dot{z} \mathbf{e}_z$

Beschleunigung: $\mathbf{a}_m = (r^{\bullet\bullet} - r \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_r + (2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi + \ddot{z} \mathbf{e}_z$

Annahme: Auf m wirkt nur die Gravitation von M als Zentralkraft

$$\mathbf{F}_m = - \frac{\Gamma M}{r^2} m \mathbf{e}_r.$$

Wirkt die resultierende Kraft eines Körpers (und damit auch die Beschleunigung) immer in Richtung auf einen festen Punkt, so spricht man von einer **Zentralbewegung**. Der Massenmittelpunktsatz ergibt

$$\mathbf{F}_m = m \mathbf{a}_m = m (r^{\bullet\bullet} - r \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_r + m (2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi + m \ddot{z} \mathbf{e}_z.$$

Durch Vergleich erhalten wir

$$r^{\bullet\bullet} - r \dot{\varphi}^2 = - \frac{\Gamma M}{r^2}$$

³⁰ Friedrich Johannes Kepler (1571 - 1619)

$$2r\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0 \Rightarrow 2r\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi} = 0 = (r^2\dot{\varphi})' \Rightarrow r^2\dot{\varphi} =: C$$

$$z'' = 0$$

also eine ebene Bewegung. Normierung: $z \equiv 0$. Die ersten beiden Gleichungen sind zwei gekoppelte gewöhnliche nicht-lineare Dgls. 2. Ordnung für r und φ .

Da nur Zentralkräfte wirken, gilt Drallerhaltung

- für M bez. O $\mathbf{d}_M' = \mathbf{o}$

- für m $\mathbf{d}_m' = \mathbf{o}$

- für $M+m$ bez. O $\mathbf{d}_{MO}' + \mathbf{d}_{mO}' = \mathbf{d}_m' + (\mathbf{r}_m \times \mathbf{v}_m m)' + \mathbf{d}_{MO}' = (\mathbf{r}_m \times \mathbf{v}_m m)' = \mathbf{o}$

Damit ist $\mathbf{r}_m \times \mathbf{v}_m = \text{konst.}$

Geometrische Interpretation als Fahrfläche, d. i. die vom Fahrstrahl überstrichene Fläche A .

$$A' = \frac{1}{2} |\mathbf{r}_m \times \mathbf{v}_m| = \text{konst.}$$

$$\Rightarrow A = \int_{t_0}^{t_1} dA = \int_{t_0}^{t_1} A' dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} |\mathbf{r}_m \times \mathbf{v}_m| dt$$

$$= \frac{1}{2} |\mathbf{r}_m(t_1) \times \mathbf{v}_m(t_1)| t_1 - \frac{1}{2} |\mathbf{r}_m(t_0) \times \mathbf{v}_m(t_0)| t_0 = \frac{1}{2} |\mathbf{r}_m \times \mathbf{v}_m| (t_1 - t_0).$$

2. KEPLERsches Gesetz: Die von der Sonne zu den Planeten gezogenen Fahrstrahlen (Radiusvektoren) bestreichen in gleichen Zeiträumen gleiche Fahrflächen.

Wir berechnen nun die Bahn. Ist sie periodisch, so gilt: $\mathbf{r}_m(t) = \mathbf{r}_m(\varphi(t))$.

Wir substituieren $u := 1/r$, womit $\dot{\varphi} = C u^2$ ist. Damit gelten

$$r' = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{d(1/u)}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{d(1/u)}{du} \frac{du}{d\varphi} C u^2$$

$$= -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} C u^2 = -\frac{du}{d\varphi} C$$

$$r'' = -\frac{d^2 u}{d\varphi^2} C \dot{\varphi} = -\frac{d^2 u}{d\varphi^2} C^2 u^2$$

$$\Rightarrow r'' - r \dot{\varphi}^2 = -\frac{d^2 u}{d\varphi^2} C^2 u^2 - C^2 u^3 = -\frac{\Gamma M}{r^2} = -\Gamma M u^2$$

oder $\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \Gamma M / C^2$.

Dies ist eine lineare inhomogene DGL 2. Ordnung in u mit der allg. Lösung

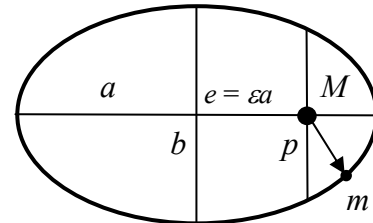
$$u = B \cos(\varphi - \alpha) + \Gamma M / C^2$$

wobei man α durch geeignete Anfangsbedingungen verschwinden lassen kann. Damit ist

$$r(\varphi) = \frac{l}{B \cos \varphi + \frac{\Gamma M}{C^2}} = \frac{p}{\varepsilon \cos \varphi + 1} \quad \text{mit } p := \frac{C^2}{\Gamma M} \quad \text{und } \varepsilon := B p.$$

Dies ist die Brennpunktgleichung von Kegelschnitten

- für $\varepsilon = 0$ Kreis
- für $\varepsilon < 1$ Ellipse
- für $\varepsilon = 1$ Parabel
- für $\varepsilon > 1$ Hyperbel



Für unsere periodische Bewegung muss es eine Ellipse oder ein Kreis sein.

Die große Halbachse ist a , die kleine b .

Die Exzentrizität des Brennpunktes ist $e = \varepsilon a$.

Der Parameter der Ellipse ist $p = b^2/a$.

Die Fläche einer Ellipse ist $A = \pi a b$.

Bei der Mondbahn ist $\varepsilon = 5,5 \%$.

1. KEPLERSches Gesetz:

Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren Brennpunkt die Sonne steht.

Wir berechnen nun die Umlaufzeit T .

$$\begin{aligned} A &= \pi a b = T A^\bullet = T \frac{1}{2} |\mathbf{r}_m \times \mathbf{v}_m| = T \frac{1}{2} |r \mathbf{e}_r \times (r^\bullet \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi)| \\ &= T \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = T C/2 \\ \Leftrightarrow T &= \frac{2\pi a b}{C} \quad \Leftrightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{C^2} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{p \Gamma M} = \frac{4\pi^2 a^3}{\Gamma M} \end{aligned}$$

3. KEPLERSches Gesetz: *Die Quadrate der Umlaufzeiten (Jahre) der Planeten verhalten sich wie die großen Halbachsen hoch 3.*

KEPLER hat die ersten beiden nach ihm benannten Gesetze (1609) und das dritte 9 Jahre später aus Daten von Messungen und Beobachtungen von TYCHO BRAHE (1546-1601) gefolgert, lange bevor dies durch NEWTONs Gesetze (*Principia* 1686) analytisch gezeigt werden konnte.

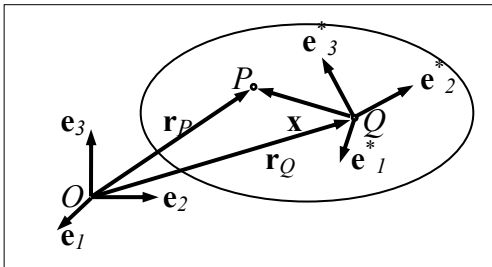


Kinematik des starren Körpers

Obwohl alle realen Körper grundsätzlich deformierbar sind, reicht bei vielen Ingenieur-Problemen die - wesentlich einfachere - Beschreibung als starrer Körper aus. Dazu sollen im Weiteren die wichtigsten kinematischen Beziehungen hergeleitet werden.

Seien O raumfester und P, Q körperfeste Punkte. Dann gilt für die Ortsvektoren

$$\mathbf{r}_P = \vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QP} = \mathbf{r}_Q + \mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q + \mathbf{x}^\bullet.$$



Sind Q und P Punkte eines starren Körpers, so können sie ihren Abstand nicht ändern:

$$\vec{QP} = |\mathbf{x}| = \text{konstant} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})^\bullet = 0 = 2 \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^\bullet.$$

Damit steht \mathbf{x}^\bullet senkrecht auf \mathbf{x} . Dann gibt es wieder einen (zeitabhängigen) Vektor, die **Winkelgeschwindigkeit** $\boldsymbol{\omega}_Q(t)$ mit

$$\mathbf{x}^\bullet = \boldsymbol{\omega}_Q \times \mathbf{x}.$$

Daraus folgt

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega}_Q \times \mathbf{x} = \mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega}_Q \times \vec{QP}.$$

Um die Abhängigkeit von $\boldsymbol{\omega}_Q$ von der Wahl des Bezugspunktes Q zu klären, wählen wir einen zweiten beliebigen körperfesten Punkt R und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_P &= \mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega}_Q \times \vec{QP} && \text{und mit } P \equiv R: \quad \mathbf{v}_R = \mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega}_Q \times \vec{QR} \\ &= \mathbf{v}_R + \boldsymbol{\omega}_R \times \vec{RP} \\ &= \mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega}_Q \times \vec{QR} + \boldsymbol{\omega}_R \times \vec{RP}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\boldsymbol{\omega}_Q \times \vec{QP} = \boldsymbol{\omega}_Q \times \vec{QR} + \boldsymbol{\omega}_R \times \vec{RP}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\omega}_R \times \vec{RP} = \boldsymbol{\omega}_Q \times (\vec{QP} - \vec{QR}) = \boldsymbol{\omega}_Q \times (\vec{QP} + \vec{RQ}) = \boldsymbol{\omega}_Q \times \vec{RP}.$$

Da diese Beziehung für beliebige Körperpunkte P gilt, ist $\boldsymbol{\omega}_Q \equiv \boldsymbol{\omega}_R$.

Die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ ist für alle Körperpunkte dieselbe.

Für die gesamte Geschwindigkeit ergibt sich der folgende wichtige

Satz: Für den starren Körper gilt die **EULERSche Geschwindigkeitsformel**

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \times \vec{QP}$$

wonach sich die Geschwindigkeit eines beliebigen Körperpunktes P als Summe

- der Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}_Q = \dot{\mathbf{r}}_Q$$

eines beliebigen körperfesten Bezugspunktes Q

- und einer Rotationsgeschwindigkeit

$$\boldsymbol{\omega} \times \vec{QP}$$

von P um Q mit der **Winkelgeschwindigkeit** $\boldsymbol{\omega}$ darstellbar ist.

Die Winkelgeschwindigkeit ist also für alle Körperpunkte identisch, hängt aber i. A. von der Zeit ab.

Damit lässt sich das Geschwindigkeitsfeld eines starren Körpers durch die Angabe von lediglich zwei (im Allgemeinen zeitabhängigen) Vektoren \mathbf{v}_Q und $\boldsymbol{\omega}$ oder durch 6 Komponenten determinieren. Im dreidimensionalen Fall lässt sich $\boldsymbol{\omega}$ nicht als Zeitableitung einer endlichen Drehung interpretieren.

Man unterscheidet folgende Sonderfälle:

- $\boldsymbol{\omega} \equiv \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q$ reine Translation
- $\mathbf{v}_Q \equiv \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \vec{MP}$ reine Rotation um Q

Definition: Ein Körperpunkt M_p mit momentan $\mathbf{v}_{M_p} \equiv \mathbf{0}$ heißt **Momentanpol** (Momentanzentrum).

Gibt es einen solchen, so kann die Bewegung des starren Körpers momentan als reine Rotation um den Momentanpol aufgefaßt werden

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \vec{MP}.$$

Alle Punkte, die von M_p aus in Richtung von $\boldsymbol{\omega}$ (momentanen Drehachse) liegen, sind ebenfalls Momentanpole.

Die Beschleunigung von P ist

$$\mathbf{a}_P = \dot{\mathbf{v}}_P = \dot{\mathbf{v}}_Q + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_Q + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})$$

worin

\mathbf{a}_Q **Bezugsbeschleunigung**

$\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x}$ **Winkelbeschleunigung**

$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})$ **Zentripetalbeschleunigung**

heißen.

Bewegungsschraube

Es stellt sich die Frage, ob momentan ein Punkt R gefunden werden kann, für den \mathbf{v}_R parallel zu $\boldsymbol{\omega}$ liegt. Es wären dann

$$\mathbf{v}_R = v_R \mathbf{e} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e} \quad \text{mit} \quad \mathbf{e} := \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|}.$$

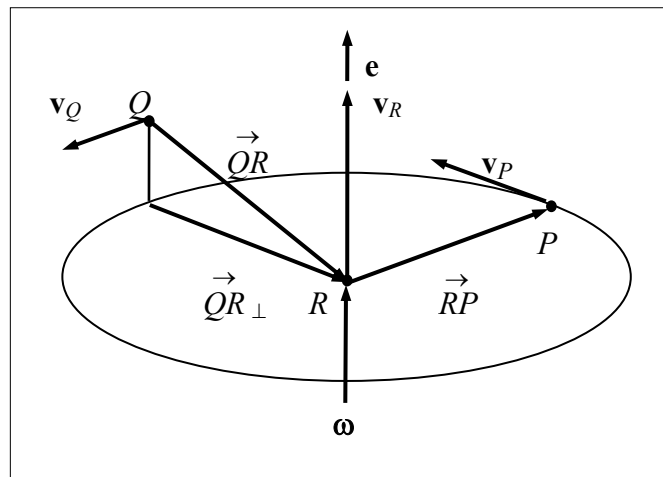
Damit wäre für beliebige Körperpunkte P und Q

$$\mathbf{v}_P = v_R \mathbf{e} + \omega \mathbf{e} \times \vec{RP} = \mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \times \vec{QP}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}_P = v_R \omega = \mathbf{v}_Q \cdot \boldsymbol{\omega}$$

$$\Rightarrow v_R = \frac{\mathbf{v}_Q \cdot \boldsymbol{\omega}}{\omega} = \mathbf{v}_Q \cdot \mathbf{e}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbf{e} \times \mathbf{v}_P &= \mathbf{e} \times (\omega \mathbf{e} \times \vec{RP}) = \mathbf{e} \times \mathbf{v}_Q + \mathbf{e} \times (\omega \mathbf{e} \times \vec{QP}) \\ &= \omega \mathbf{e} (\mathbf{e} \cdot \vec{RP}) - \vec{RP} \omega. \end{aligned}$$



Speziell gilt für $P \equiv Q$

$$\mathbf{e} \times \mathbf{v}_Q = \omega \mathbf{e} (\mathbf{e} \cdot \vec{RQ}) - \vec{RQ} \omega = \omega [\vec{QR} - (\mathbf{e} \cdot \vec{QR}) \mathbf{e}] = \omega \vec{QR}_\perp$$

mit dem auf \mathbf{e} und \mathbf{v}_Q senkrecht stehenden Vektor

$$\vec{QR}_\perp := \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{v}_Q}{\omega} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_Q}{\omega^2}.$$

Mit dieser Formel lässt sich also ein Punkt R finden, für den folgendes gilt:

Die momentane Bewegung des starren Körpers setzt sich aus einer Drehung um die **Zentralachse** \mathbf{e} und einer Translation in Richtung von \mathbf{e} zusammen. Dies bezeichnet man als **Bewegungsschraube**.

Ebene Bewegungen

Im wichtigen Fall einer **ebenen** oder **planaren Bewegung** liegen die Bahnkurven aller Körperpunkte und damit auch deren Geschwindigkeiten in parallelen Ebenen. Hat diese die (raumfeste) Normale \mathbf{e}_3 , so gilt für alle Punkte P und Q

$$\mathbf{v}_P \cdot \mathbf{e}_3 = 0 = \mathbf{v}_Q \cdot \mathbf{e}_3 + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_3 = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_3 \Rightarrow (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \perp \mathbf{e}_3 \quad .$$

Dies ist für alle Punkte nur dann erfüllt, wenn $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_3$ ist. Das ebene Problem hat drei Freiheitsgrade.

Zur Bestimmung des Momentanpols Mp aus der Kenntnis von \mathbf{v}_P und \mathbf{v}_Q setzen wir

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \times \vec{QP} = \boldsymbol{\omega} \times \vec{MpP}$$

an. Für $P \equiv Q$ ergibt dies

$$\mathbf{v}_Q = \boldsymbol{\omega} \times \vec{MpQ} \quad .$$

Multiplizieren wir dies vektoriell mit $\boldsymbol{\omega}$, so erhalten wir

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_Q = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \vec{MpQ}) = \boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{\omega} \cdot \vec{MpQ}) - \vec{MpQ} \omega^2.$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist für ebene Bewegungen bei geeigneter Wahl von Mp (wenn es in derselben Ebene wie Q liegt) Null. Somit ist

$$\vec{QMp} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_Q}{\omega^2} = \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{v}_Q}{\omega}$$

eine Bestimmungsgleichung für den Momentanpol. Ist $\omega = 0$, so liegt der Momentanpol im Unendlichen. Es gilt der

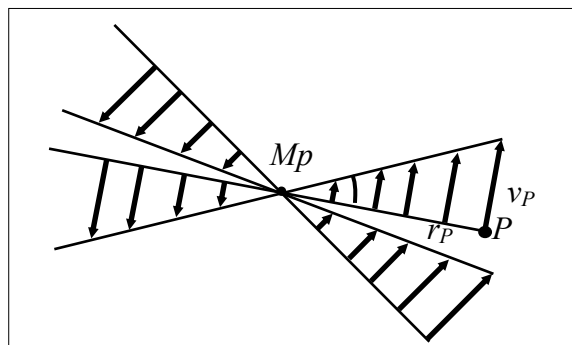
Satz vom Momentanpol

Das Geschwindigkeitsfeld eines starren Körpers bei einer ebenen Bewegung lässt sich zu jedem Zeitpunkt als Rotation um einen Punkt Mp , den Momentanpol, auffassen

$$\mathbf{v}_P = \omega \mathbf{e}_3 \times \vec{MpP}$$

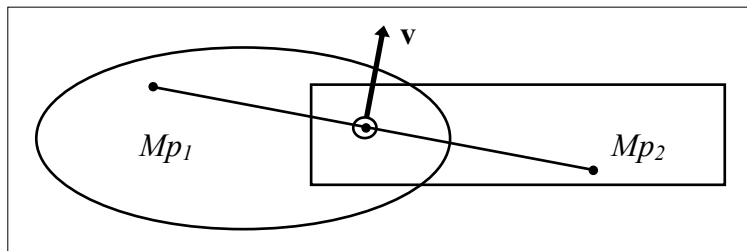
falls $\omega \neq 0$.

Fällt man in einem Punkt das Lot auf dessen Geschwindigkeit in der Bewegungsebene, so führt dieses durch den Momentanpol.



Der obige Satz macht lediglich eine momentane Aussage für ebene Bewegungen. Im Allgemeinen ist der Momentanpol als Körperpunkt zwar momentan ruhend, als geometrischer Ort jedoch zeitabhängig und weder körper- noch ortsfest. Er durchwandert mit der Zeit die **Polkurve** (Polhodie, Rastpolbahn).

Betrachten wir zwei starre Körper, die durch ein Drehgelenk (sog. Relativpol) miteinander verbunden sind, während einer ebenen Bewegung. Dann liegen die beiden Momentanpole Mp_1 und Mp_2 der beiden Körper zu allen Zeiten auf Geraden durch den Gelenkpunkt (**Dreipolsatz**).



Wichtiger Spezialfall einer ebenen Bewegung ist die eines *rollenden oder gleitenden Rades* auf einer Ebene. Hier sei $\omega = \omega \mathbf{e}_3$ und

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_Q + \omega \times \vec{QP}.$$

Sind Rad und Ebene in Kontakt, so ist die Geschwindigkeit des Kontaktpunktes (z. B. Q) tangential an die Ebene, also $\mathbf{v}_Q = v_Q \mathbf{e}_1$. Diese Bewegung wird also durch $v_Q(t)$ und $\omega(t)$ vollständig beschrieben.

Speziell gilt für den Momentanpol $Mp \equiv P$

$$\mathbf{v}_{Mp} = \mathbf{0} = v_Q \mathbf{e}_1 + \omega \mathbf{e}_3 \times \vec{QMp}.$$

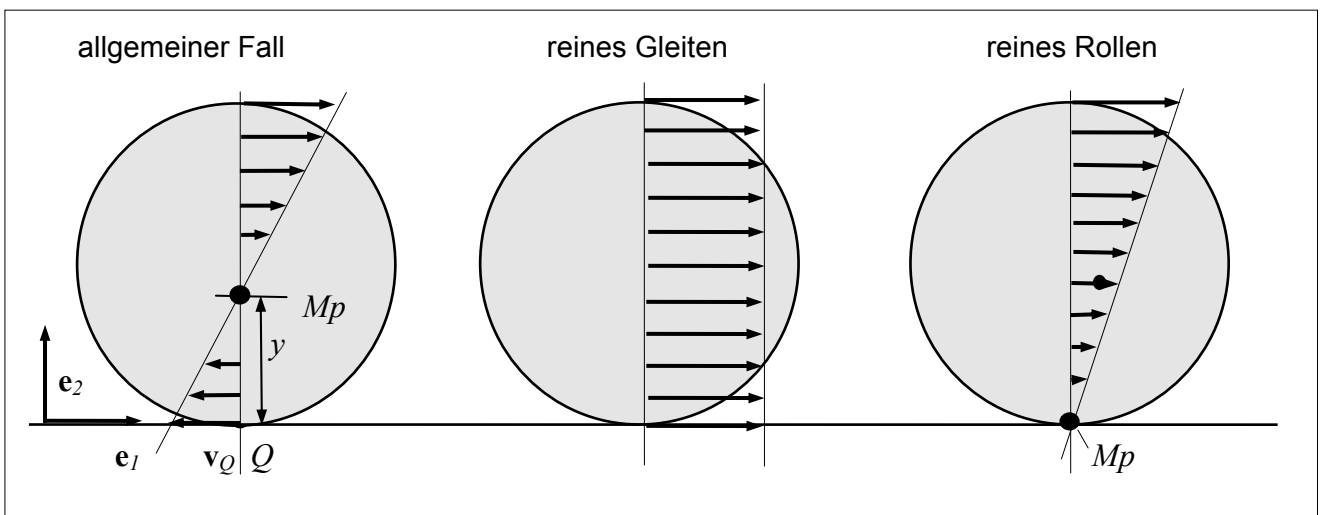
Der Momentanpol liegt in der Ebene senkrecht über dem Kontaktpunkt, also $\vec{QMp} = y \mathbf{e}_2$. Damit ist

$$v_Q \mathbf{e}_1 = -\omega \mathbf{e}_3 \times y \mathbf{e}_2 = \omega y \mathbf{e}_1$$

und folglich

$$y = \frac{v_Q}{\omega}$$

als Bestimmungsgleichung des Momentanpols (Höhe über der Ebene).



Zwei Spezialfälle sind zu unterscheiden:

- reines Gleiten ohne Drehung (Translation): $\omega \equiv 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{v}_Q$
für alle Körperpunkte
- reines Rollen: $v_Q \equiv 0 \Rightarrow y \equiv 0 \Rightarrow Q \equiv Mp$

Der Momentanpol ist der Kontaktpunkt.

Alle anderen ebenen Bewegungen des Rades auf der Ebene sind Kombinationen dieser beiden Fälle.

Freiheitsgrade

Definition: Als Anzahl der **Freiheitsgrade** (engl. *degree of freedom*, DOF) eines kinematischen Systems bezeichnet man die Mindestanzahl von skalaren Größen, die die momentane Lage des Systems determinieren.

Ein Punkt besitzt

| | |
|---------------------|------------------|
| im Raum | 3 Freiheitsgrade |
| auf einer Fläche | 2 Freiheitsgrade |
| auf einer Bahnkurve | 1 Freiheitsgrad |

Der starre Körper besitzt

| | |
|---------------------------------------|------------------|
| im Raum | 6 Freiheitsgrade |
| in der Ebene | 3 Freiheitsgrade |
| bei der Drehung um einen festen Punkt | 3 Freiheitsgrade |
| bei der Drehung um eine feste Achse | 1 Freiheitsgrad. |

Ein deformierbarer Körper hat unendlich viele Freiheitsgrade.

Kinetik des starren Körpers

Wir wollen als nächstes untersuchen, wie sich diese globalen Bewegungsgrößen konkretisieren lassen, wenn wir sie für starre Körper berechnen, für die die EULERSche Geschwindigkeitsformel gilt. Aus dem Drall bez. M wird

$$\begin{aligned}
 \mathbf{d}_M &= \int_{\mathcal{V}} \mathbf{x} \times \mathbf{x}^\bullet \, dm = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{x} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \, dm \\
 &= \int_{\mathcal{V}} [\mathbf{x}^2 \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{x}] \, dm \\
 &= \boldsymbol{\omega} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{x}^2 \, dm - \int_{\mathcal{V}} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{x} \, dm .
 \end{aligned}$$

Beide Ausdrücke sind linear in der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$. Um sie zu konkretisieren, wählen wir eine beliebige (möglicherweise zeitabhängige) ONB $\{\mathbf{e}_i\}$, die wir in den Massenmittelpunkt setzen, so dass die Komponentendarstellungen

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{d}_M = d_{M1} \mathbf{e}_1 + d_{M2} \mathbf{e}_2 + d_{M3} \mathbf{e}_3$$

gelten. Damit ist die erste Komponente

$$\begin{aligned} d_{M1} &= \omega_1 \int_{\mathcal{V}} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) dm - \int_{\mathcal{V}} (x_1 \omega_1 + x_2 \omega_2 + x_3 \omega_3) x_1 dm \\ &= \int_{\mathcal{V}} (x_2^2 + x_3^2) dm \omega_1 - \int_{\mathcal{V}} x_1 x_2 dm \omega_2 - \int_{\mathcal{V}} x_1 x_3 dm \omega_3 \\ &= \Theta_{11} \omega_1 + \Theta_{12} \omega_2 + \Theta_{13} \omega_3 \end{aligned}$$

mit dem **axialen Massenträgheitsmoment**

$$\Theta_{11} := \int_{\mathcal{V}} (x_2^2 + x_3^2) dm = \int_{\mathcal{V}} r_{\perp 1}^2 dm \quad \text{mit} \quad r_{\perp 1} := \sqrt{(x_2^2 + x_3^2)},$$

dem Abstand der Punkte von der \mathbf{e}_1 -Achse, und den **deviatorischen Massenträgheitsmomenten**

$$\Theta_{12} := - \int_{\mathcal{V}} x_1 x_2 dm \quad \Theta_{13} := - \int_{\mathcal{V}} x_1 x_3 dm .$$

Analog erhält man für die anderen beiden Komponenten

$$d_{M2} = \Theta_{21} \omega_1 + \Theta_{22} \omega_2 + \Theta_{23} \omega_3$$

$$d_{M3} = \Theta_{31} \omega_1 + \Theta_{32} \omega_2 + \Theta_{33} \omega_3$$

mit den axialen Trägheitsmomenten

$$\Theta_{22} := \int_{\mathcal{V}} (x_1^2 + x_3^2) dm = \int_{\mathcal{V}} r_{\perp 2}^2 dm$$

und

$$\Theta_{33} := \int_{\mathcal{V}} (x_1^2 + x_2^2) dm = \int_{\mathcal{V}} r_{\perp 3}^2 dm$$

und dem deviatorischen

$$\Theta_{23} := - \int_{\mathcal{V}} x_2 x_3 dm .$$

Man kann alle Massenträgheitsmomente in einer Matrix anordnen

$$[\Theta_{ij}] = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} \\ \Theta_{12} & \Theta_{22} & \Theta_{23} \\ \Theta_{13} & \Theta_{23} & \Theta_{33} \end{bmatrix} ,$$

die definitionsgemäß symmetrisch ist. Ordnet man auch die Komponenten des Drallvektors und des Winkelgeschwindigkeitsvektors in Matrizen an

$$[d_{Mi}] = [d_{M1}, d_{M2}, d_{M3}]$$

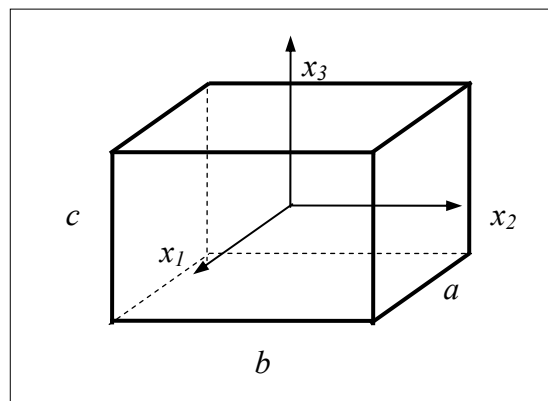
$$[\omega_i] = [\omega_1, \omega_2, \omega_3],$$

so kann man den Drall darstellen durch die Matrizen-Gleichung

$$[d_{Mi}] = [\Theta_{ij}] [\omega_j].$$

Die Matrix der Massenträgheitsmomente hat einige Eigenschaften mit den Matrizen der Dehnungen und der Spannungen gemein.

Die axialen Trägheitsmomente sind immer positiv. Wählt man speziell eine körperfeste, also mitbewegte ONB, so sind die Komponenten x_i zeitlich konstant und damit auch alle Trägheitsmomente, die dann nur noch von der Geometrie und Massenverteilung (Dichte) des starren Körpers abhängen.



Als Beispiel betrachten wir einen Quader mit konstanter Massendichte ρ . Wir legen das KOOS in seinen Mittelpunkt. Es sind dann

$$\begin{aligned} \Theta_{11} &= \int_V (x_2^2 + x_3^2) \rho dV = \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (x_2^2 + x_3^2) \rho dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \frac{abc}{12} (b^2 + c^2) \rho = \frac{V}{12} (b^2 + c^2) \rho = \frac{m}{12} (b^2 + c^2) \end{aligned}$$

und analog

$$\Theta_{22} = \frac{m}{12} (a^2 + c^2) \quad \Theta_{33} = \frac{m}{12} (a^2 + b^2).$$

Dagegen verschwindet

$$\Theta_{12} = - \int_V x_1 x_2 \rho dV = - \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x_1 x_2 \rho dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

wie auch

$$\Theta_{13} = \Theta_{23} = 0.$$

Weitere Beispiele:

- **Kreisringzylinder** mit Länge l , Außenradius r_a , Innenradius r_i

$$\Theta_{\text{quer}} = m/4 (r_a^2 + r_i^2 + 1/3 l^2)$$

$$\Theta_{\text{axial}} = m/2 (r_a^2 + r_i^2)$$

- **schlanker Stab** der Länge l mit Achsenrichtung x

$$\Theta_{yy} = \Theta_{zz} = m/12 l^2 \gg \Theta_{xx} \quad \Theta_{xy} = \Theta_{yz} = \Theta_{xz} = 0$$

- **dünne Kreisscheibe** mit Radius r und Achse x

$$\Theta_{xx} = m/2 r^2 \quad \Theta_{yy} = \Theta_{zz} = m/4 r^2 \quad \Theta_{xy} = \Theta_{yz} = \Theta_{xz} = 0$$

- **Hohlkugel** mit Außenradius r_a , Innenradius r_i

Aufgrund ihrer Symmetrie sind alle axialen Massenträgheitsmomente gleich:

$$\Theta_{xx} = \Theta_{yy} = \Theta_{zz}$$

Addiert man sie, so erhält man

mit der Kugeloberfläche $A(r) = 4 \pi r^2$

und dem Volumen $V = 4 \pi (r_a^3 - r_i^3) / 3$

$$\begin{aligned} 3 \Theta_{ii} &= 2 \int_{\mathcal{V}} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \rho dV = 2 \int_{r_i}^{r_a} r^2 \rho A(r) dr = 2 \int_{r_i}^{r_a} r^2 \rho 4 \pi r^2 dr \\ &= 8 \pi \rho (r_a^5 - r_i^5) / 5 \Rightarrow \Theta_{ii} = \frac{2m(r_a^5 - r_i^5)}{5(r_a^3 - r_i^3)} \quad \text{und} \quad \Theta_{12} = \Theta_{23} = \Theta_{13} = 0. \end{aligned}$$

Für die **Vollkugel** folgt

$$\Theta_{ii} = \frac{2m r_a^2}{5}.$$

Wir untersuchen das Transformationsverhalten der Massenträgheitsmomente von dem Massenmittelpunkt M auf einen beliebigen (nicht notwendig raumfesten) Punkt O mit

$$\mathbf{r}_O = \mathbf{r}_M + \mathbf{x}$$

mit den Darstellungen

$$\mathbf{r}_O = r_{O1} \mathbf{e}_1 + r_{O2} \mathbf{e}_2 + r_{O3} \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{r}_M = r_{M1} \mathbf{e}_1 + r_{M2} \mathbf{e}_2 + r_{M3} \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3,$$

also einer *Parallelverschiebung des Bezugssystems*

1) axiale Massenträgheitsmomente

$$\begin{aligned} \Theta_{O11} &= \int_{\mathcal{V}} [r_{O2}^2 + r_{O3}^2] dm = \int_{\mathcal{V}} [(r_{M2} + x_2)^2 + (r_{M3} + x_3)^2] dm \\ &= \int_{\mathcal{V}} [r_{M2}^2 + 2 r_{M2} x_2 + x_2^2 + r_{M3}^2 + 2 r_{M3} x_3 + x_3^2] dm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= r_{M2}^2 \int_{\mathcal{V}} dm + 2 r_{M2} \int_{\mathcal{V}} x_2 dm + \int_{\mathcal{V}} x_2^2 dm \\
&\quad + r_{M3}^2 \int_{\mathcal{V}} dm + 2 r_{M3} \int_{\mathcal{V}} x_3 dm + \int_{\mathcal{V}} x_3^2 dm \\
&= (r_{M2}^2 + r_{M3}^2) m + \int_{\mathcal{V}} (x_2^2 + x_3^2) dm \\
&= r_{\perp l}^2 m + \Theta_{M11}
\end{aligned}$$

mit dem Abstand von der \mathbf{e}_l -Achse $r_{\perp l}$ und dem auf M bezogenen Massenträgheitsmoment

$$\Theta_{M11} = \int_{\mathcal{V}} (x_2^2 + x_3^2) dm .$$

Allgemein ergibt sich der STEINERsche Satz

$$\Theta_{Oii} = \Theta_{Mii} + r_{\perp i}^2 m$$

2) deviatorische Massenträgheitsmomente

$$\begin{aligned}
\Theta_{O12} &= - \int_{\mathcal{V}} r_{O1} r_{O2} dm = - \int_{\mathcal{V}} (r_{M1} + x_1) (r_{M2} + x_2) dm \\
&= - r_{M1} r_{M2} \int_{\mathcal{V}} dm - r_{M1} \int_{\mathcal{V}} x_2 dm - r_{M2} \int_{\mathcal{V}} x_1 dm - \int_{\mathcal{V}} x_1 x_2 dm \\
&= - r_{M1} r_{M2} m + \Theta_{M12}
\end{aligned}$$

mit dem auf M bezogenen Massenträgheitsmoment

$$\Theta_{M12} := - \int_{\mathcal{V}} x_1 x_2 dm .$$

Der allgemeine STEINERsche Satz lautet hier

$$\Theta_{Oij} = \Theta_{Mij} - r_{Mi} r_{Mj} m \quad \text{für } i \neq j$$

Betrachten wir nun den anderen Fall eines Wechsels des Bezugssystems, der durch eine *Drehung* der alten ONB $\{\mathbf{e}_i\}$ in eine neue ONB $\{\mathbf{e}_i^*\}$ gekennzeichnet ist. Die Richtungskosinus zwischen alten und neuen Basisvektoren sind

$$\cos \alpha_{ij} = \mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{e}_j .$$

Sie werden zweckmäßigerweise in einer Matrix angeordnet

$$[R] := \begin{bmatrix} \cos \alpha_{11} & \cos \alpha_{12} & \cos \alpha_{13} \\ \cos \alpha_{21} & \cos \alpha_{22} & \cos \alpha_{23} \\ \cos \alpha_{31} & \cos \alpha_{32} & \cos \alpha_{33} \end{bmatrix} .$$

Es ergibt sich für die Transformation der entsprechenden Matrizen der Massenträgheitsmomente die Beziehung

$$[\Theta^*] = [R] [\Theta] [R]^T$$

oder komponentenweise

$$\Theta_{ij}^* = \sum_{k,l=1}^3 R_{ik} \Theta_{kl} R_{jl} \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Satz: Es existiert immer ein System von drei orthogonalen Achsen mit ONB $\{\mathbf{e}_i^H\}$, für die die Matrix der Massenträgheitsmomente Diagonalform besitzt

$$\begin{bmatrix} \Theta_1^H & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2^H & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3^H \end{bmatrix}$$

d. h. bezüglich derer alle deviatorischen Massenträgheitsmomente Null sind.

Derartige Achsen heißen **Hauptträgheitsachsen** (HTA) und die zugehörigen axialen Trägheitsmomente **Hauptträgheitsmomente** (HTM). Mathematisch gesehen handelt es sich um die Eigenrichtungen und Eigenwerte einer symmetrischen Matrix.

Regeln zu Hauptträgheitsachsen:

- Für rotationsymmetrische Körper (wie Kreisel) gilt: Symmetrieachsen sind immer HTA.
- Für spiegelsymmetrische Körper (wie Flugzeuge) gilt: eine HTA steht senkrecht auf der Symmetrie-Ebene, die anderen beiden liegen in ihr.
- Für Körper mit zwei Symmetrie-Ebenen (wie Fernschröhre) gilt: deren Schnittgerade ist HTA.
- Sind zwei HTM gleich groß, so sind alle Achsen in der Ebene dieser beiden HTA ebenfalls HTA.
- Sind drei HTM gleich groß (wie Kugeln und Würfel), so sind alle Achsen HTA.

Um in die Drallbilanz einzusetzen, benötigen wir die zeitliche Ableitung des Dralls \mathbf{d}_M^\bullet bezüglich M , wobei man sich zweckmäßig auf eine **körperfeste** ONB $\{\mathbf{e}_i\}$ bezieht. Für sie gilt

$$\mathbf{e}_i^\bullet = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i,$$

also

$$\mathbf{e}_1^\bullet = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_1 = \omega_3 \mathbf{e}_2 - \omega_2 \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{e}_2^\bullet = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_2 = \omega_1 \mathbf{e}_3 - \omega_3 \mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{e}_3^\bullet = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3 = \omega_2 \mathbf{e}_1 - \omega_1 \mathbf{e}_2,$$

sowie für alle i und j bezüglich $\{\mathbf{e}_i\}$

$$\Theta_{ij}^\bullet = 0.$$

Der Drallvektor des starren Körpers ist

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_M &= (\Theta_{11} \omega_1 + \Theta_{12} \omega_2 + \Theta_{13} \omega_3) \mathbf{e}_1 \\ &\quad + (\Theta_{21} \omega_1 + \Theta_{22} \omega_2 + \Theta_{23} \omega_3) \mathbf{e}_2 \\ &\quad + (\Theta_{31} \omega_1 + \Theta_{32} \omega_2 + \Theta_{33} \omega_3) \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

und dessen Ableitung gemäß der Produktregel ist gleich dem resultierenden Moment (Drallsatz)

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_M &= \mathbf{d}_M \dot{} \\
&= (\Theta_{11} \omega_1 \dot{} + \Theta_{12} \omega_2 \dot{} + \Theta_{13} \omega_3 \dot{}) \mathbf{e}_1 + (\Theta_{11} \omega_1 + \Theta_{12} \omega_2 + \Theta_{13} \omega_3) (\omega_3 \mathbf{e}_2 - \omega_2 \mathbf{e}_3) \\
&+ (\Theta_{12} \omega_1 \dot{} + \Theta_{22} \omega_2 \dot{} + \Theta_{23} \omega_3 \dot{}) \mathbf{e}_2 + (\Theta_{21} \omega_1 + \Theta_{22} \omega_2 + \Theta_{23} \omega_3) (\omega_1 \mathbf{e}_3 - \omega_3 \mathbf{e}_1) \\
&+ (\Theta_{31} \omega_1 \dot{} + \Theta_{32} \omega_2 \dot{} + \Theta_{33} \omega_3 \dot{}) \mathbf{e}_3 + (\Theta_{31} \omega_1 + \Theta_{32} \omega_2 + \Theta_{33} \omega_3) (\omega_2 \mathbf{e}_1 - \omega_1 \mathbf{e}_2) . \\
&= [\Theta_{11} \omega_1 \dot{} + \Theta_{21} \omega_2 \dot{} + \Theta_{13} \omega_3 \dot{} \\
&- (\Theta_{21} \omega_1 + \Theta_{22} \omega_2 + \Theta_{23} \omega_3) \omega_3 + (\Theta_{31} \omega_1 + \Theta_{32} \omega_2 + \Theta_{33} \omega_3) \omega_2] \mathbf{e}_1 \\
&+ [\Theta_{21} \omega_1 \dot{} + \Theta_{22} \omega_2 \dot{} + \Theta_{23} \omega_3 \dot{} \\
&+ (\Theta_{11} \omega_1 + \Theta_{12} \omega_2 + \Theta_{13} \omega_3) \omega_3 - (\Theta_{31} \omega_1 + \Theta_{32} \omega_2 + \Theta_{33} \omega_3) \omega_1] \mathbf{e}_2 \\
&+ [\Theta_{31} \omega_1 \dot{} + \Theta_{32} \omega_2 \dot{} + \Theta_{33} \omega_3 \dot{} \\
&- (\Theta_{11} \omega_1 + \Theta_{12} \omega_2 + \Theta_{13} \omega_3) \omega_2 + (\Theta_{21} \omega_1 + \Theta_{22} \omega_2 + \Theta_{23} \omega_3) \omega_1] \mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

oder komponentenweise

$$\begin{aligned}
M_1 &= \Theta_{11} \omega_1 \dot{} + \Theta_{12} \omega_2 \dot{} + \Theta_{13} \omega_3 \dot{} \\
&- (\Theta_{12} \omega_1 + \Theta_{22} \omega_2 + \Theta_{23} \omega_3) \omega_3 + (\Theta_{13} \omega_1 + \Theta_{23} \omega_2 + \Theta_{33} \omega_3) \omega_2 \\
M_2 &= \Theta_{12} \omega_1 \dot{} + \Theta_{22} \omega_2 \dot{} + \Theta_{23} \omega_3 \dot{} \\
&+ (\Theta_{11} \omega_1 + \Theta_{12} \omega_2 + \Theta_{13} \omega_3) \omega_3 - (\Theta_{13} \omega_1 + \Theta_{23} \omega_2 + \Theta_{33} \omega_3) \omega_1 \\
M_3 &= \Theta_{13} \omega_1 \dot{} + \Theta_{23} \omega_2 \dot{} + \Theta_{33} \omega_3 \dot{} \\
&- (\Theta_{11} \omega_1 + \Theta_{12} \omega_2 + \Theta_{13} \omega_3) \omega_2 + (\Theta_{21} \omega_1 + \Theta_{22} \omega_2 + \Theta_{23} \omega_3) \omega_1
\end{aligned}$$

Dies sind die **EULERSchen Kreiselgleichungen** (1758). Analytische Lösungen für dieses gekoppelte und nicht-lineare Differenzialgleichungs-System existieren nur unter sehr starken Einschränkungen.

Eine Vereinfachung der Kreiselgleichungen ergibt sich durch die Bezugnahme auf HTA. Hier reduziert sich die Darstellung der Drall-Komponenten auf

$$\begin{aligned}
d_{M1} &= \Theta^H_1 \omega_1 \\
d_{M2} &= \Theta^H_2 \omega_2 \\
d_{M3} &= \Theta^H_3 \omega_3 .
\end{aligned}$$

Die zeitliche Änderung des Dralls ist mit $\mathbf{e}^H_i \dot{} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}^H_i$

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_M &= [\Theta^H_1 \omega_1 \dot{} + (\Theta^H_3 - \Theta^H_2) \omega_2 \omega_3] \mathbf{e}^H_1 \\
&+ [\Theta^H_2 \omega_2 \dot{} + (\Theta^H_1 - \Theta^H_3) \omega_3 \omega_1] \mathbf{e}^H_2 \\
&+ [\Theta^H_3 \omega_3 \dot{} + (\Theta^H_2 - \Theta^H_1) \omega_1 \omega_2] \mathbf{e}^H_3 .
\end{aligned}$$

Als Spezialfall betrachten wir eine Drehbewegung um die körper- und raumfeste Achse \mathbf{e}_3 : $\boldsymbol{\omega} = \omega_3 \mathbf{e}_3 = \dot{\varphi} \mathbf{e}_3$. Es handelt sich dabei um eine **ebene Drehbewegung**. Dann folgt

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_M &= \Theta_{13} \varphi'' \mathbf{e}_1 + \Theta_{13} \varphi'^2 \mathbf{e}_2 + \Theta_{23} \varphi'' \mathbf{e}_2 - \Theta_{23} \varphi'^2 \mathbf{e}_1 + \Theta_{33} \varphi'' \mathbf{e}_3 \\ &= (\Theta_{13} \varphi'' - \Theta_{23} \varphi'^2) \mathbf{e}_1 + (\Theta_{13} \varphi'^2 + \Theta_{23} \varphi'') \mathbf{e}_2 + \Theta_{33} \varphi'' \mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Selbst bei ebenen Rotationen hat das Antriebsmoment drei Komponenten (dynamische Unwucht). Ist die Bewegung außerdem noch **stationär** ($\varphi'' = 0$), so verbleibt lediglich

$$\mathbf{M}_M = \omega_3^2 (-\Theta_{23} \mathbf{e}_1 + \Theta_{13} \mathbf{e}_2).$$

Für die ebene Drehbewegung mit Drehwinkel φ um eine HTA folgt dann mit $\boldsymbol{\omega} = \omega_3 \mathbf{e}_3 = \varphi' \mathbf{e}_3$

$$\mathbf{M}_M = \Theta^H_3 \varphi'' \mathbf{e}^H_3.$$

Ist die Bewegung außerdem noch **stationär** ($\omega_3' = 0$), so ist die Dralländerung gleich Null

$$\mathbf{M}_M = \mathbf{d}_M' = \mathbf{0}.$$

Die **kinetische Energie** eines Körpers ist - wie bereits gesehen - mit $\mathbf{v} = \mathbf{r}_P' = (\mathbf{r}_M + \mathbf{x})'$
 $= \mathbf{v}_M + \mathbf{x}'$

$$K = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v}^2 dm = \frac{1}{2} \mathbf{v}_M^2 m + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{x}'^2 dm \geq 0.$$

Der erste Term ist derjenige Anteil der Energie, der aus der Translationsgeschwindigkeit des Massenmittelpunktes des Körpers gespeist wird:

$$K_{trans} := \frac{1}{2} \mathbf{v}_M^2 m \geq 0 \quad \Rightarrow \quad K_{trans}' = \mathbf{v}_M \cdot \mathbf{a}_M m.$$

Der zweite Term entsteht bei starren Körpern nur aus der Rotation und kann mit der EULERSchen Geschwindigkeitsformel sowie den Massenträgheitsmomenten bezüglich M noch spezifiziert werden

$$\begin{aligned}K_{rot} &:= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' dm \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) dm \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\omega} \cdot [\mathbf{x} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})] dm \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{d}_M \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \int_{\mathcal{V}} [\mathbf{x}^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{x}] dm \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \omega_i \Theta_{ij} \omega_j \\ &= \frac{1}{2} (\Theta_{11} \omega_1^2 + \Theta_{22} \omega_2^2 + \Theta_{33} \omega_3^2) \\ &\quad + \omega_1 \Theta_{12} \omega_2 + \omega_2 \Theta_{23} \omega_3 + \omega_1 \Theta_{13} \omega_3 \geq 0.\end{aligned}$$

Benutzt man HTA, so verbleibt

$$K_{rot} = \frac{1}{2} (\Theta^H_1 \omega_1^2 + \Theta^H_2 \omega_2^2 + \Theta^H_3 \omega_3^2).$$

Für eine ebene Drehbewegung um eine HTA verbleibt lediglich

$$K_{rot} = \frac{1}{2} \Theta^H_3 \dot{\varphi}^2 \quad \Rightarrow \quad K_{rot} \dot{\quad} = \Theta^H_3 \dot{\varphi} \ddot{\varphi}.$$

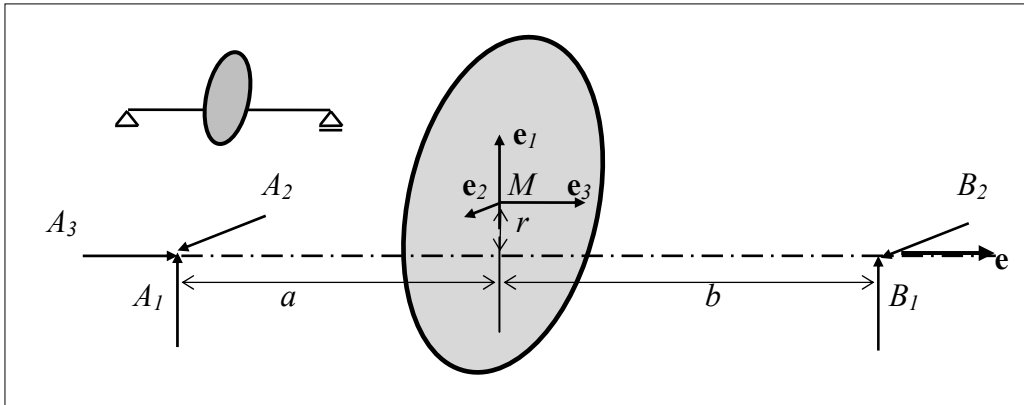
Unwuchtprobleme

Ein starrer Körper drehe sich stationär um eine körper- und raumfeste Achse \mathbf{e} mit einer Exzentrizität des Massenmittelpunktes r . Dann gelten die EULERSchen Kreisgleichungen bez. einer im Massenmittelpunkt fixierten körperfesten ONB $\{\mathbf{e}_i\}$ mit \mathbf{e}_3 in Achsenrichtung \mathbf{e} wie oben. Diese Richtung ist nicht die einer HTA. Die Winkelgeschwindigkeit ist also

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_3 \quad \text{und} \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = 0.$$

Dabei lässt sich die ONB immer so legen, dass

$$\mathbf{r}_M = r \mathbf{e}_1.$$



Die Impulsbilanz lautet mit $\dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i$ unter Vernachlässigung des Eigengewichts

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{a}_M m = \dot{\mathbf{r}}_M m = m (r \dot{\mathbf{e}}_1) = m r \dot{\mathbf{e}}_1 = m r (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_1) \\ &= m r (\omega \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) = m r \omega \mathbf{e}_2 = m r \omega (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_2) \\ &= m r \omega (\omega \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2) = -m r \omega^2 \mathbf{e}_1 \\ &= \mathbf{F} = (A_1 + B_1) \mathbf{e}_1 + (A_2 + B_2) \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad A_1 + B_1 = -m r \omega^2 \quad A_2 = -B_2 \quad A_3 = 0.$$

Die Drallbilanz ergibt für die ebene stationäre Drehung

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_M &= \omega^2 (-\Theta_{23} \mathbf{e}_1 + \Theta_{13} \mathbf{e}_2) \\ &= (A_2 a - B_2 b) \mathbf{e}_1 + (-A_1 a + B_1 b + A_3 r) \mathbf{e}_2 - (A_2 + B_2) r \mathbf{e}_3 \\ &= A_2 (a + b) \mathbf{e}_1 + (-A_1 a + B_1 b) \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad A_2 (a + b) = -\omega^2 \Theta_{23}, \quad -A_1 a + B_1 b = \omega^2 \Theta_{13}$$

$$\Rightarrow \quad A_2 = -\frac{\omega^2}{a+b} \Theta_{23}, \quad A_1 = -\frac{I}{1 + \frac{a}{b}} \left(\frac{\Theta_{13}}{b} + m r \right) \omega^2.$$

M_{M3} ist also gleich Null. Ein antreibendes Moment ist nicht erforderlich.

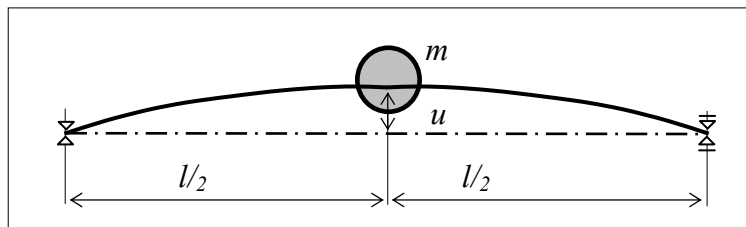
Die umlaufenden Lagerkräfte werden als *kinetische Drücke* bezeichnet. Sie sind nur Null, wenn $r = 0$ (keine statische Unwucht) und e Hauptträgheitsachse ist ($\Theta_{23} = 0 = \Theta_{13}$).

Biegekritische Drehzahlen

Hier betrachten wir eine homogene, masselose, elastische Welle mit einer Einzelmasse in der Mitte. Wir vernachlässigen deren Drehträgheit ebenso wie ihr Gewicht. Das Massenmittelpunktsgesetz liefert für die stationäre Drehung in radialer Richtung für die Zentripetalbeschleunigung mit dem Federgesetz

$$m u \omega^2 = c u$$

mit der Auslenkung u und der Ersatzfedersteifigkeit $c = \frac{48 EI}{l^3}$



aus der Balkentheorie. Die Bewegungsgleichung hat neben der trivialen Lösung $u = 0$ genau dann nicht-triviale Lösungen, wenn die **biegekritische Drehzahl** gemäß

$$m \omega_{krit}^2 = c \quad \Rightarrow \quad \omega_{krit} := \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{48 EI}{l^3 m}}$$

erreicht ist. Hier tritt ein Stabilitätsproblem ein. Die Welle kann in ausgelenkter Form umlaufen, weil sich die elastischen Rückstellkräfte und die "Zentrifugalkräfte" aufheben. Die Größe der Auslenkung u kann im Rahmen dieser Theorie nicht bestimmt werden. Es gilt, diesen Bereich beim Hoch- und Herunterfahren der Welle flott zu durchfahren.

Kinetik deformierbarer Körper in Feldformulierung

Ziel dieses Abschnitts ist es, zu den beiden Bewegungsgesetzen äquivalente Aussagen herzuleiten, deren Anwendung für bestimmte Problemklassen vorteilhaft ist. Hierzu benutzen wir die lokale Formen der Gleichgewichtsbedingungen, indem wir zu den Massenkräften die Trägheitskräfte addieren.

Wir haben gesehen, dass die lokalen Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte auf die Gleichungen

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + \rho g_1 = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + \rho g_2 = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho g_3 = 0$$

führt, die der Momente hingegen auf das BOLTZMANNsche Axiom

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad \sigma_{13} = \sigma_{31} \quad \sigma_{23} = \sigma_{32} .$$

Darin ist $\mathbf{g} = \{g_1, g_2, g_3\}$ das Feld der spezifischen Massenkraft. Nun können wir die Bewegungsgesetze auf Gleichgewichtsaussagen zurückführen, wenn wir die Kräfte durch die Trägheiten ergänzen (D'ALEMBERTsches Prinzip). Führen wir dazu die sog. Inertialkraft

$$-\int_{\mathcal{V}} \mathbf{a} \, dm = -\int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}^{\bullet\bullet} \, dm$$

ein, so erkennt man, dass

$$\mathbf{g}_V := \mathbf{g} - \mathbf{a} = \{g_{V1}, g_{V2}, g_{V3}\} = \{g_1 - a_1, g_2 - a_2, g_3 - a_3\}$$

die spezifische verallgemeinerte Massenkraft ist (die manchmal auch als *verlorene Kraft* bezeichnet wird). Flächenverteilte Inertialkräfte existieren nicht, da Flächen keine (träge) Masse besitzen. Ersetzen wir in den lokalen Kraft-Gleichgewichtsbedingungen also die Massenkraftdichte durch die Kraftdichte der verallgemeinerten Massenkraft, so erhalten wir die

Lokale Form der Impulsbilanz (CAUCHY 1827)

Die Impulsbilanz ist für einen Körper und alle seine Teilkörper genau dann erfüllt, wenn in jedem seiner Punkte gilt:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + \rho (g_1 - a_1) = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + \rho (g_2 - a_2) = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho (g_3 - a_3) = 0$$

Da in die lokale Form des Momentengleichgewichts die Massenkraft nicht eingehen, können auch die verlorenen Massenkraft nicht eingehen, und wir erhalten analog die

Lokale Form der Drallbilanz

Die Drallbilanz ist für einen Körper und alle seine Teilkörper genau dann erfüllt, wenn die Impulsbilanz gilt und in jedem seiner Punkte zugeordnete Schubspannungen gleich sind:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad \sigma_{13} = \sigma_{31} \quad \sigma_{23} = \sigma_{32}$$

Die lokale Drallbilanz führt also wie im statischen Fall auch auf das BOLTZMANNsche Axiom.

Für einen beliebigen Körper (fest oder flüssig oder gasförmig, elastisch oder inelastisch) sind die Bewegungsgesetze äquivalent zur Gültigkeit der obigen 6 Feldgleichungen in jedem Körperpunkt.

Wir werden diese Gleichungen benutzen, um durch identische Umformungen an ihnen weitere äquivalente Aussagen abzuleiten.

Die drei lokalen Impulsbilanzen lassen sich in Form einer einzigen Vektorgleichung

$$\mathbf{c} = \mathbf{0}$$

darstellen, wobei das Vektorfeld \mathbf{c} bezüglich einer ONB die Komponenten

$$c_i = \frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} + \rho (g_i - a_i) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho (g_i - a_i)$$

für $i = 1, 2, 3$ hat. Es ist offensichtlich, dass diese Vektorgleichung äquivalent ist zu der Aussage, dass die skalare Gleichung

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{w} = 0$$

für alle Vektorfelder \mathbf{w} (sog. *Testfunktionen*)

$$\mathbf{w}(x_1, x_2, x_3) = w_1(x_1, x_2, x_3) \mathbf{e}_1 + w_2(x_1, x_2, x_3) \mathbf{e}_2 + w_3(x_1, x_2, x_3) \mathbf{e}_3$$

gilt. Damit erhalten wir anstelle der lokalen Impulsbilanz die Gleichungen

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{w} = \sum_{i=1}^3 c_i w_i = \sum_{i=1}^3 \left[\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} w_i + \rho (g_i - a_i) w_i \right] = 0.$$

Es gilt die Produktregel für die Ortsableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\sigma_{ik} w_i) = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} w_i + \sigma_{ik} \frac{\partial w_i}{\partial x_k}.$$

Wir setzen dies in obige Gleichungen ein und integrieren diese dann über den ganzen Körper.

$$\sum_{i=1}^3 \left[\sum_{k=1}^3 \left\{ \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial x_k} (\sigma_{ik} w_i) dV - \int_{\mathcal{V}} \sigma_{ik} \frac{\partial w_i}{\partial x_k} dV \right\} + \int_{\mathcal{V}} (g_i - a_i) w_i \rho dV \right] = 0.$$

Der GAUSSsche Integralsatz besagt nun, dass für eine beliebige differenzierbare Ortsfunktion $\phi(x_1, x_2, x_3)$ das Volumenintegral in ein Oberflächenintegral transformiert werden kann

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} dV = \int_{\mathcal{A}} \phi n_k dA \quad \text{für } k = 1, 2, 3$$

mit der normierten äußeren Normalen

$$\mathbf{n} = \{n_1, n_2, n_3\}$$

auf der Oberfläche \mathcal{A} des Körpers. Identifizieren wir $\phi \equiv \sigma_{ik} w_i$, so können wir die linken Terme umformen zu

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial x_k} (\sigma_{ik} w_i) dV &= \sum_{k=1}^3 \int_{\mathcal{A}} n_k \sigma_{ik} w_i dA \\ &= \sum_{k=1}^3 \int_{\mathcal{A}} w_i \sigma_{ik} n_k dA = \int_{\mathcal{A}} w_i t_i dA \Rightarrow \sum_{i=1}^3 \int_{\mathcal{A}} w_i t_i dA = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{w} \cdot \mathbf{t} dA, \end{aligned}$$

denn $\sum_{k=1}^3 (\sigma_{ik} n_k)$ ist die i -te Komponente t_i der Oberflächenspannung \mathbf{t} (Satz von CAUCHY). Die mittleren Terme formen wir unter Benutzung des BOLTZMANNschen Axioms um zu

$$\begin{aligned} \sum_{i,k=1}^3 \sigma_{ik} \frac{\partial w_i}{\partial x_k} &= \sum_{i,k=1}^3 \frac{1}{2} (\sigma_{ik} + \sigma_{ki}) \frac{\partial w_i}{\partial x_k} = \sum_{i,k=1}^3 \frac{1}{2} (\sigma_{ik} \frac{\partial w_i}{\partial x_k} + \sigma_{ki} \frac{\partial w_i}{\partial x_k}) \\ &= \sum_{i,k=1}^3 \frac{1}{2} (\sigma_{ik} \frac{\partial w_i}{\partial x_k} + \sigma_{ik} \frac{\partial w_k}{\partial x_i}) = \sum_{i,k=1}^3 \sigma_{ik} \frac{1}{2} (\frac{\partial w_i}{\partial x_k} + \frac{\partial w_k}{\partial x_i}). \end{aligned}$$

Setzen wir dies ein, so erhalten wir die folgende **Mastergleichung**

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w} dA + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{g} \cdot \mathbf{w} dm \\ = \sum_{i,k=1}^3 \int_{\mathcal{V}} \sigma_{ik} \frac{1}{2} (\frac{\partial w_i}{\partial x_k} + \frac{\partial w_k}{\partial x_i}) dV + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{a} \cdot \mathbf{w} dm \end{aligned}$$

Da wir das Feld \mathbf{w} noch nicht physikalisch interpretiert haben, ist die physikalische Bedeutung dieser Gleichung noch offen. Immerhin wissen wir bereits jetzt, dass ihre Erfüllung für beliebige w_i -Felder äquivalent zu den Bewegungsgesetzen ist.

Leistung

Als erstes identifizieren wir das Feld \mathbf{w} mit dem momentanen Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} und erkennen für kleine Verformungen

$$\frac{1}{2} (\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} (\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}) = \varepsilon_{ik}^{\bullet},$$

was zusammen mit den Spannungen die (lokale) Spannungs-Leistung

$$l_i := \sum_{i,k=1}^3 \sigma_{ik} \varepsilon_{ik}^{\bullet}$$

bildet. Wir erhalten aus der Mastergleichung die

Leistungsbilanz

Gelten für einen Körper die Bewegungsgesetze, so gilt die Leistungsbilanz

$$L_a = L_i + K^\bullet$$

- mit der (äußeren) **Leistung der Kräfte**

$$L_a := \int_{\mathcal{A}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, dA + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, dm$$

(\mathbf{t} : oberflächenverteilte Kraft, \mathbf{g} : massenverteilte Kraft),

- der (inneren) **Spannungsleistung**

$$L_i := \sum_{i,k=1}^3 \int_{\mathcal{V}} \sigma_{ik} \varepsilon_{ik}^\bullet \, dV$$

- und der **kinetischen Energie**

$$K := \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v}^2 \, dm.$$

Die Änderung der kinetischen Energie ist nämlich

$$K^\bullet = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} 2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^\bullet \, dm = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} \, dm.$$

Alle Leistungen haben die Dimension $\text{Kraft} \times \text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Masse} \times \text{Länge}^2}{\text{Zeit}^3}$, wofür

das *Watt* $W := \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^3}$ als Einheit eingeführt wurde.

Man beachte, dass wegen der speziellen Identifikation $\mathbf{w} \equiv \mathbf{v}$ die Äquivalenz nicht mehr gilt, sondern die Leistungsbilanz aus den Bewegungsgesetzen folgt, aber nicht umgekehrt. Wir wollen uns als nächstes die einzelnen Leistungsanteile genauer ansehen.

Leistung der Kräfte

In der oben angeführten Definition von L_a leisten die oberflächenverteilten Kräfte \mathbf{t} und die volumenverteilten \mathbf{g} Arbeit. Beim starren Körper ist es oft praktischer, diese Kraftdichten durch statisch äquivalente Einzelkräfte (\mathbf{F}_i , \mathbf{r}_i) zu ersetzen.

Beispiel: die **Leistung der Gewichtskraft**, deren Dichte \mathbf{g} ist und deren Leistung damit

$$L_a = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, dm.$$

Ist \mathbf{g} im Körpergebiet (annähernd) konstant, so gilt

$$L_a = \mathbf{g} \cdot \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v} \, dm = \mathbf{g} \cdot \left(\int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \, dm \right)^\bullet \quad \text{mit } \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}^\bullet \, dm = m \mathbf{v}_M$$

$$= m \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_M = \mathbf{F}_G \cdot \mathbf{v}_M \quad \text{mit } \mathbf{F}_G = m \mathbf{g},$$

wobei Schwerpunkt und Massenmittelpunkt in vielen Anwendungen (annähernd) zusammenfallen und \mathbf{v}_M dessen Geschwindigkeit ist.

In Verallgemeinerung dessen setzen wir für die **Leistung einer Einzelkraft** $(\mathbf{F}_i, \mathbf{r}_i)$ generell an

$$L_a = \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i \quad \text{mit} \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{r}_i^\bullet.$$

Die **Leistung eines Kräftepaars** $\{(\mathbf{F}, \mathbf{r}_1), (-\mathbf{F}, \mathbf{r}_2)\}$ am starren Körper ist unter Benutzung der EULERSchen Geschwindigkeitsformel

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

dann

$$\begin{aligned} L_a &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_1^\bullet - \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_2^\bullet \\ &= \mathbf{F} \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \\ &= \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\ &= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

Damit ist die **Leistung von freien Einzelmomenten** \mathbf{M}_i

$$L_a = \mathbf{M}_i \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Man beachte dabei, dass i. A. $\boldsymbol{\omega}$ nicht die Zeitableitung eines physikalischen Vektors ist.

Lediglich im Falle einer (ebenen) Drehung um eine feste Achse \mathbf{e} um einen Winkel $\varphi(t)$ ist

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\varphi}(t) \mathbf{e} = (\varphi \mathbf{e})^\bullet = \dot{\varphi}(t) \mathbf{e}.$$

Die **Leistung eines komplexen Kraftsystems** am starren Körper ist demnach

$$L_a = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \, dA + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, dm + \sum_{i=1}^K \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^L \mathbf{M}_i \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Da **Reaktionskräfte** einen kinematischen Zustand an ihrem Angriffspunkt erhalten, gilt:
Reaktionskräfte und -momente leisten keine Arbeit bei allen kompatiblen Bewegungszuständen.

Das Zeitintegral der Leistung der äußeren Kräfte über ein Zeitintervall $[t_0, t_1]$ ist die **Arbeit der Kräfte**

$$A_a := \int_{t_0}^{t_1} L_a \, dt \quad \Leftrightarrow \quad L_a = \dot{A}_a.$$

Alle Arbeiten haben die Dimension

$$\text{Leistung} \times \text{Zeit} = \text{Kraft} \times \text{Länge} = \text{Masse} \times \text{Länge}^2 / \text{Zeit}^2,$$

wofür das *Joule*³¹ $J = N m = W s = \frac{m^2 kg}{s^2}$ als Einheit eingeführt wurde.

Für den Spezialfall einer *zeitlich konstanten* Einzelkraft \mathbf{F}_c gilt dann speziell

$$A_a = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}_c \cdot \mathbf{v} dt = \mathbf{F}_c \cdot \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{v} dt = \mathbf{F}_c \cdot [\mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}(t_0)] = \mathbf{F}_c \cdot \Delta \mathbf{r},$$

was der Ausdrucksweise "Arbeit = Kraft \times Weg" entspricht. Ist die Kraft hingegen nicht konstant, so gilt diese Formel nicht.

Arbeitssatz

Gilt der Leistungssatz zu allen Zeitpunkten für die Bewegung eines Körpers in einem Zeitintervall, so können wir ihn auch zeitlich integrieren und erhalten den

Arbeitssatz

Während der Bewegung eines Körpers in einen beliebigen Zeitintervall $[t_0, t_1]$ gilt die Arbeitsbilanz

| | | |
|------------|---------------------------------|------------------------------------|
| | $A_a = A_i + \Delta K$ | |
| <i>mit</i> | $A_a = \int_{t_0}^{t_1} L_a dt$ | Arbeit der Kräfte |
| | $A_i = \int_{t_0}^{t_1} L_i dt$ | Spannungsarbeit |
| | $\Delta K = K(t_1) - K(t_0)$ | Differenz der kinetischen Energie. |

Wegen der Beliebigkeit der Integrationsgrenzen ist der Arbeitssatz äquivalent zum Leistungssatz während der Dauer der Bewegung und ist notwendig für die Gültigkeit der Bewegungsgleichungen.

Für starre Körper ist $A_i \equiv 0$. Für den Fall der Statik ist $\Delta K \equiv 0$.

Kraftpotenziale

Hängt die Arbeit eines bestimmten Kraftfeldes nur von Anfangs- und Endpunkt des Weges ab, ist es also *wegunabhängig*, so nennt man es **konservativ**. Insbesondere sind alle (zeitlich *und* räumlich) konstanten Kraftfelder grundsätzlich auch konservativ. Hingegen sind Reibungskräfte nie konservativ.

Für ein solches konservatives Kraftfeld definieren wir eine skalare Ortsfunktion $U(\mathbf{r})$, genannt **Kraftpotenzial** oder **potenzielle Energie**, durch

³¹ James Prescott Joule (1818 - 1889)

$$U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_0) := A_a \Big|_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1}.$$

Die Zeitableitung der Arbeit ist die Leistung

$$L = A^\bullet = -U(\mathbf{r})^\bullet = -\frac{dU}{d\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} = -\text{grad } U \cdot \mathbf{r}^\bullet = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}^\bullet$$

mit dem Gradienten des Potentials $U(x_1, x_2, x_3)$

$$\text{grad } U = \frac{dU}{d\mathbf{r}} := \frac{\partial U}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial U}{\partial x_3} \mathbf{e}_3.$$

Da dies für alle Geschwindigkeiten \mathbf{r}^\bullet gelten soll, ergibt ein Vergleich

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U.$$

Beispiel: Die Gewichtskraft $\mathbf{F} = mg \mathbf{e}_\downarrow$ besitzt als Potenzial die potentielle Energie der Gravitation

$$U = -m g z = m g h$$

mit der Koordinate z in senkrechter Richtung und der Höhe $h = -z$ über einem willkürlich gewählten Nullniveau.

Spannungsleistung

(innere Leistung) eines deformierbaren Körpers ist definiert als

$$L_i := \int_{\mathcal{V}} \sum_{i,k=1}^3 \sigma_{ik} \varepsilon_{ik}^\bullet dV$$

mit

$$\varepsilon_{ik}^\bullet = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right).$$

In der Matrizen Schreibweise ist dies

$$L_i = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}^\bullet dV.$$

Für starre Körper gilt grundsätzlich $L_i \equiv 0$.

Die **Spannungsarbeit** ist

$$A_i := \int_{t_0}^{t_1} L_i dt \quad \Leftrightarrow \quad A_i^\bullet = L_i.$$

Um diesen Ausdruck zu berechnen, muss die Abhängigkeit der Spannungen von den Deformationen bekannt sein. Gilt das HOOKEsche Gesetz, so kann man die Spannungen als Funktion der Dehnungen ausdrücken und man erhält den Ausdruck

$$L_i = \int_{\mathcal{V}} 2G (\mathbf{E} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \mathbf{I}) \cdot \mathbf{E}^\bullet dV.$$

Auch für die Spannungsleistung vereinfacht sich die Darstellung entscheidend, wenn es eine (potentielle) **elastische Energie** $w(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{32}, \varepsilon_{33})$ gibt mit

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ik}}$$

für $i, k = 1, 2, 3$. Dann ist nämlich die Leistung ein vollständiges Differenzial

$$L_i = \int_{\mathcal{V}} \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ik}} \varepsilon_{ik}^\bullet dV = \int_{\mathcal{V}} w^\bullet dV =: W^\bullet$$

und die Arbeit ist die (wegunabhängige) Energie-Differenz

$$A_i \Big|_{t_0}^{t_1} = W(t_1) - W(t_0).$$

Diese bequeme Eigenschaft findet man aber nur bei elastischen Materialien.

Beispiel: elastische Feder mit Federkonstante c . Ist x die KOO aus der entspannten Lage heraus, so ist die Federkraft

$$F = c x = \frac{dW}{dx}$$

mit der **Federenergie**

$$W = \frac{1}{2} c x^2,$$

so dass

$$L_i = W^\bullet = \frac{dW}{dx} x^\bullet = F x^\bullet.$$

Beispiel: eindimensionales HOOKEsches Material. Hier ist die Spannungsleistung ein vollständiges Differenzial

$$l_i = \sigma \varepsilon^\bullet = E \varepsilon \varepsilon^\bullet = (\frac{1}{2} E \varepsilon^2)^\bullet = w(\varepsilon)^\bullet \quad \text{mit } \sigma = \frac{dw(\varepsilon)}{d\varepsilon}.$$

Beispiel: elastischer Stab der Länge L (prismatisch, homogen, ohne Schubenergie, bzgl. HTA). Hier ist die **Formänderungsenergie**

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L [EA u(x,t)'^2 + E I_z v(x,t)''^2 + E I_y w(x,t)''^2 + G I_t \vartheta(x,t)'^2] dx,$$

so dass

$$L_i = \int_0^L [EA u(x,t)' u(x,t)'\bullet + E I_z v(x,t)'' v(x,t)''\bullet + E I_y w(x,t)'' w(x,t)''\bullet + G I_t \vartheta(x,t)' \vartheta(x,t)'\bullet] dx$$

$$= \int_0^L [N(x,t) u(x,t)' + M_z(x,t) v(x,t)'' - M_y(x,t) w(x,t)'' + M_t(x,t) \vartheta(x,t)'] dx$$

ist.

Beispiel: viskoser Dämpfer mit Viskositätskonstante r . Ist \dot{x} die Geschwindigkeit, mit der er verschoben wird, so ist die Dämpfungskraft

$$F_r = -r \dot{x}.$$

Sie wirkt immer entgegen der Geschwindigkeit. Ihre Leistung ist

$$L_i = F_r \dot{x} = -r \dot{x}^2.$$

Hierfür gibt es kein räumliches Potential.

Energiesatz

Besitzen sowohl die äußeren Kräfte ein Potenzial U als auch die Spannungen ein Potenzial W , dann folgt aus der Leistungsbilanz die Energiebilanz in inkrementeller Form

$$U^\bullet + W^\bullet + K^\bullet = 0 = (U + W + K)^\bullet$$

oder in integraler Form als

Energiesatz

Bei konservativen Systemen ist die Summe der potentiellen Energie der äußeren Lasten, der elastischen Energie und der kinetischen Energie konstant:

$$U + W + K = \text{konstant.}$$

Während die Leistungsbilanz grundsätzliche Gültigkeit besitzt, haben wir zur Herleitung des Energiesatzes sehr starke Einschränkungen vornehmen müssen (konservatives System). Sie gilt also nicht für inelastische oder Reibungs-behaftete Systeme.

Für starre Körper oder Systeme von starren Körpern unter konservativen Belastungen gilt die Energiebilanz in der Form

$$U^\bullet + K^\bullet = 0.$$

In der Thermodynamik gilt für alle Körper die thermodynamische Energiebilanz (1. Hauptsatz). Sie ist zu unterscheiden vom vorangehenden Energiesatz, der nur sehr eingeschränkt gilt.

Arbeits- und Energieprinzipien

Da wir durch die Identifikation $\mathbf{w} \equiv \mathbf{v}(\mathbf{r})$ in der Mastergleichung ein spezielles Vektorfeld ausgewählt haben, ist die Leistungsbilanz notwendig für die Gültigkeit der Bewegungsgleichungen, aber nicht hinreichend. Um dagegen zu äquivalenten Aussagen zu gelangen,

setzen wir ein beliebiges Vektorfeld $\mathbf{w} \equiv \delta\mathbf{v}(\mathbf{r})$ ein und nennen es **virtuelles Geschwindigkeitsfeld**. Unter den unendlich vielen derartigen Feldern $\delta\mathbf{v}(\mathbf{r})$ ist das tatsächliche Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ lediglich ein einzelner Kandidat.

Prinzip der virtuellen Leistung ($PdvL$)

(D'ALEMBERT'sches Prinzip in der LAGRANGE³²schon Fassung)

Für einen Körper sind die Bewegungsgesetze genau dann erfüllt, wenn die virtuelle Leistungsbilanz

$$\delta L_{av} = \delta L_i$$

für alle virtuellen Geschwindigkeitsfelder $\delta\mathbf{v}(\mathbf{r})$ erfüllt ist mit

- der virtuellen äußeren Leistung der verallgemeinerten Kräfte

$$\delta L_{av} := \int_{\mathcal{A}} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{v} dA + \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{g} - \mathbf{a}) \cdot \delta\mathbf{v} dm$$

- und der virtuellen innere Leistung der Spannung

$$\delta L_i := \int_{\mathcal{V}} \sum_{i,k=1}^3 \sigma_{ik} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(\delta v_i)}{\partial x_k} + \frac{\partial(\delta v_k)}{\partial x_i} \right) dV.$$

Die Leistung der Spannungen ist bei starren Körpern Null.

Dieses Prinzip wird auch *Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, der virtuellen Arbeiten, von d'ALEMBERT in der LAGRANGE'schen Fassung* o. ä. genannt.

Bei Einführung von Einzelkräften $(\mathbf{F}_i, \mathbf{r}_i)$ und Einzelmomenten \mathbf{M}_i am starren Körper ist die virtuelle Leistung der verlorenen Kräfte dann entsprechend zu erweitern

$$\delta L_{av} = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{v} dA + \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{g} - \mathbf{a}) \cdot \delta\mathbf{v} dm + \sum_{i=1}^K \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^L \mathbf{M}_i \cdot \delta\boldsymbol{\omega},$$

wobei $\delta\mathbf{v}_i = \delta\mathbf{v}(\mathbf{r}_i)$ ist und $\delta\boldsymbol{\omega}$ die durch $\delta\mathbf{v}$ induzierte virtuelle Winkelgeschwindigkeit des starren Körpers.

Wir wollen den Anteil der Trägheitskräfte nun für *starre Körper* bei *ebener Bewegung* um eine HTA spezifizieren. Dafür wählen wir die virtuellen Geschwindigkeiten vom selben Typ wie die Geschwindigkeiten am starren Körper. Es gilt die EULER'sche Geschwindigkeitsformel bezogen auf den Massenmittelpunkt M des starren Körpers

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_M + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} \quad \text{und virtuell} \quad \delta\mathbf{v} = \delta\mathbf{v}_M + \delta\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}.$$

Bei einer ebenen Bewegung steht \mathbf{v}_M senkrecht auf $\delta\boldsymbol{\omega}$ wie auch $\delta\mathbf{v}_M$ auf $\boldsymbol{\omega}$. Die Winkelgeschwindigkeit ω des starren Körpers ist die Zeitableitung eines Winkels $\omega = \dot{\varphi}$ (was bei nicht-ebenen Bewegungen nicht mehr gilt). Die Beschleunigung ist

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_M + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}).$$

Damit wird dann

³² Jean Louis Lagrange (1736 - 1813)

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{V}} \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{v} \, dm \\
&= \int_{\mathcal{V}} [\mathbf{a}_M + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})] \cdot [\delta \mathbf{v}_M + \delta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}] \, dm \\
&= \mathbf{a}_M \cdot \delta \mathbf{v}_M m + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \int_{\mathcal{V}} \mathbf{x} \, dm \cdot \delta \mathbf{v}_M + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \int_{\mathcal{V}} \mathbf{x} \, dm) \cdot \delta \mathbf{v}_M \\
&+ \mathbf{a}_M \cdot \delta \boldsymbol{\omega} \times \int_{\mathcal{V}} \mathbf{x} \, dm + \int_{\mathcal{V}} (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x}) \cdot (\delta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \, dm \\
&+ \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \cdot (\delta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \, dm .
\end{aligned}$$

Der letzte Term ist Null, weil beide Faktoren in Klammern senkrecht auf der Ebene stehen und damit parallel sind.

Bezogen auf den Massenmittelpunkt ist $\int_{\mathcal{V}} \mathbf{x} \, dm = \mathbf{o}$ und es verbleiben lediglich

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{v} \, dm = \mathbf{a}_M m \cdot \delta \mathbf{v}_M + \int_{\mathcal{V}} (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x}) \cdot (\delta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \, dm .$$

Der letzte Term ergibt mit den Regeln der Vektorrechnung zum doppelten Kreuzprodukt

$$\int_{\mathcal{V}} \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{x} \times (\delta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \, dm = \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \int_{\mathcal{V}} \mathbf{x}^2 \, dm \, \delta \boldsymbol{\omega} - \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \int_{\mathcal{V}} \mathbf{x} (\mathbf{x} \, dm \cdot \delta \boldsymbol{\omega}) = \Theta^H \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \delta \boldsymbol{\omega} .$$

Damit ist

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{v} \, dm = m \mathbf{a}_M \cdot \delta \mathbf{v}_M + \Theta^H \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \delta \boldsymbol{\omega} .$$

Im Falle der *Statik* gilt dieses Prinzip ebenfalls, wobei die Beschleunigungen $\mathbf{a} \equiv \mathbf{o}$ sind und damit die verlorenen Kräfte und die Kräfte identisch werden. Deren virtuelle Leistungen fallen dann ebenfalls zusammen: $\delta L_{av} \equiv \delta L_a$. Im obigen Prinzip wurde $\delta \mathbf{v}$ als virtuelles Geschwindigkeitsfeld interpretiert. Im statischen Fall vermeidet man diese Interpretation mit folgendem Argument. Multipliziert man $\delta \mathbf{v}$ mit dem Zeitinkrement dt , so kann man in Analogie zum Verschiebungsdifferenzial

$$d\mathbf{u} = \mathbf{v} \, dt$$

das Vektorfeld

$$\delta \mathbf{u} := \delta \mathbf{v} \, dt$$

als **virtuelles Verrückungs-** oder **Verschiebungs-Differenzial** interpretieren, das *virtuelle Verschiebung* oder *Verrückung* genannt wird. Man beachte, dass somit dem Symbol δ nicht nur die Bedeutung "virtuell", sondern auch "differenziell" zukommt. Ebenso ersetzt man in Analogie zu

$$L_{a,i} = A_{a,i} \dot{} \quad \Rightarrow \quad L_{a,i} \, dt = dA_{a,i}$$

durch

$$\delta L_{a,i} dt = \delta A_{a,i}$$

und nennt es **virtuelle Arbeit**, die ebenfalls differenziell ist. Ebenso führt man **virtuelle Dehnungen** ein gemäß

$$\delta \varepsilon := \delta d\varepsilon = \delta \varepsilon^\bullet dt$$

im Eindimensionalen oder

$$\delta \varepsilon_{mk} := \delta d\varepsilon_{mk} = \delta \varepsilon_{mk}^\bullet dt = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_m}{\partial x_k} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_m} \right)^\bullet dt$$

im Dreidimensionalen.

Wir kommen damit zu einem dem $PdvL$ im statischen Fall mathematisch äquivalenten, von der physikalischen Interpretation aber etwas unterschiedlichen

Prinzip der virtuellen Verrückungen ($PdvV$)

Für einen Körper sind die Gleichgewichtsbedingungen genau dann erfüllt, wenn die virtuelle Arbeitsbilanz

$$\delta A_a = \delta A_i$$

für alle virtuellen Verrückungen $\delta \mathbf{u}$ erfüllt ist mit

- der virtuellen Arbeit der Kräfte

$$\delta A_a := \int_{\mathcal{A}} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} dA + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} dm$$

- und der virtuellen Arbeit der Spannungen

$$\delta A_i := \int_{\mathcal{V}} \sum_{i,k=1}^3 \sigma_{ik} \delta \varepsilon_{ik} dV \quad \text{mit} \quad \delta \varepsilon_{ik} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial (\delta u_i)}{\partial x_k} + \frac{\partial (\delta u_k)}{\partial x_i} \right).$$

Da die Vektorfelder $\delta \mathbf{v}$ und $\delta \mathbf{u}$ im $PdvL$ bzw. im $PdvV$ grundsätzlich beliebig sind, kann man auch solche auswählen, die vorhandene Verschiebungs-Randbedingungen erfüllen. Dadurch tauchen die dortigen Reaktionskräfte und -momente in dem Variationalausdruck der Prinzipien nicht auf. Man spricht in diesem Falle von δA_a als den virtuellen Leistungen bzw. Arbeiten der äußeren *eingepprägten* Kräfte.

Betrachten wir nun wieder den speziellen Fall *konservativer* Kräfte und Spannungen. Ist beispielsweise $U(x_1, x_2, x_3)$ das Potenzial einer Einzelkraft \mathbf{F} . Dann ist in Analogie zu

$$-dA_a = dU = \text{grad } U \cdot d\mathbf{u} = \frac{\partial U}{\partial x_1} du_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} du_2 + \frac{\partial U}{\partial x_3} du_3 = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{u}$$

hier

$$-\delta A_a = \delta U = \text{grad } U \cdot \delta \mathbf{u} = \frac{\partial U}{\partial x_1} \delta u_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} \delta u_2 + \frac{\partial U}{\partial x_3} \delta u_3 = -\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{u}$$

und analog für die elastische Energie $w(\varepsilon_{ik})$ und deren Variation $\delta w(\delta \varepsilon_{ik})$

$$dw = \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ik}} d\varepsilon_{ik} \quad \delta w := \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ik}} \delta \varepsilon_{ik}$$

und

$$\delta A_i = \delta W := \int_{\mathcal{V}} \delta w dV.$$

Damit ist für konservative Systeme

$$\delta A_i - \delta A_a = \delta W + \delta U = \delta(W + U) = 0.$$

Prinzip vom stationären Wert der potentiellen Energie

Ein konservatives System mit Potenzial U der Kräfte und elastischem Potenzial W der Spannungen befindet sich genau dann im Gleichgewicht, wenn die Variation des Gesamtpotenzials

$$\delta(W + U) = 0$$

ist.

Mathematisch gesehen handelt es sich hier um einen stationären Wert eines Funktionals im Sinne der Variationsrechnung.

Wir wenden nun das $PdvV$ in der Form $\delta W = \delta A_a$ auf **ebene Biegeprobleme** an, die statisch bestimmt oder unbestimmt sein können. Hier ist die elastische Energie

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L E I_y w''^2 dx$$

unter Vernachlässigung der Scherenergie. Dessen Variation ist

$$\delta W = \int_0^L E I_y w'' \cdot \delta w'' dx.$$

Als (nicht notwendig konservative) äußere Lasten soll an dem Stab eine Streckenlasten $q(x)$ und Einzelkräfte F_i an den Stellen x_i in z -Richtung sowie freie Einzelmomente M_j an den Stellen x_j in y -Richtung wirken. Deren virtuelle Arbeit ist

$$\delta A_a = \int_0^L q(x) \delta w dx + \sum_{i=1}^K F_i(x_i) \delta w(x_i) - \sum_{j=1}^M M_j(x_j) \delta w'(x_j).$$

Wenn δw als kompatibel mit den Lagerbedingungen angenommen wird, leisten die Lagerreaktionen (Reaktionskräfte) auch keine virtuelle Arbeit.

Damit erhalten wir nach dem $PdvV$ folgende Variationsgleichung

$$\begin{aligned} \delta W - \delta A_a &= 0 \\ &= \int_0^L [E I_y w'' \delta w'' - q \delta w] dx - \sum_{i=1}^K F_i \delta w(x_i) + \sum_{j=1}^M M_j \delta w'(x_j). \end{aligned}$$

Sie ist sehr gut geeignet, um Näherungslösungen des Biegeproblems zu bestimmen, wie beispielsweise mit dem RITZschen Verfahren oder Finiten Elementen.

RITZsches Verfahren

Wir machen für die Verschiebungen des Biegeproblems den RITZ³³-Ansatz

$$w(x) = \sum_{n=1}^N c_n w_n(x)$$

mit N festgewählten Formfunktionen $w_n(x)$, die für alle Parameter c_n mindestens die kinematischen Randbedingungen erfüllen sollen. Damit leisten die Lagerkräfte keine virtuelle Arbeit. Die virtuellen Verrückungen sind dann

$$\delta w(x) = \sum_{n=1}^N \delta c_n w_n(x).$$

Wir setzen dies in das Prinzip der virtuellen Verrückungen ein

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_0^L E I_y w'' \cdot \delta w'' dx \\ &= \int_0^L [E I_y \sum_{m=1}^N c_m w_m''(x) \cdot \sum_{n=1}^N \delta c_n w_n''(x)] dx \\ &= \delta L_a = \int_0^L q(x) \delta w dx + \sum_{i=1}^K F_i(x_i) \delta w(x_i) - \sum_{j=1}^M M_j(x_j) \delta w'(x_j) \\ &= \int_0^L [q(x) \cdot \sum_{n=1}^N \delta c_n w_n(x)] dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^K F_i(x_i) \cdot \sum_{n=1}^N \delta c_n w_n(x_i) - \sum_{j=1}^M M_j(x_j) \cdot \sum_{n=1}^N \delta c_n w_n'(x_j). \end{aligned}$$

Diese Gleichung muss für beliebige δc_n gelten, wie beispielsweise für ein $\delta c_n \equiv 1$ und alle anderen gleich Null, was auf die N Gleichungen

$$\begin{aligned} \int_0^L E I_y \sum_{m=1}^N w_m''(x) \cdot w_n''(x) dx c_m & \qquad n = 1, \dots, N \\ &= \int_0^L q(x) \cdot w_n(x) dx + \sum_{i=1}^K F_i(x_i) \cdot w_n(x_i) - \sum_{j=1}^M M_j(x_j) \cdot w_n'(x_j) \end{aligned}$$

³³ Walter Ritz (1878-1909)

führt. Dies ist ein lineares inhomogenes Gleichungssystem zur Bestimmung der Parameter c_m von der Form

$$\sum_{m=1}^N A_{nm} c_m = b_n \quad n = 1, \dots, N$$

mit den Linearfaktoren

$$A_{nm} = A_{mn} = \int_0^L E I_y w_m''(x) \cdot w_n''(x) dx .$$

Wird das System mit unterschiedlichen Lasten belastet, so braucht man nur die rechten Seiten b_n neu zu berechnen.

Man kann das Prinzip auch zur näherungsweise Bestimmung von Knicklasten benutzen. Greift nämlich am Ende des Stabes bei $x \equiv L$ (unbelastet L_0) eine axiale Druckkraft P an, so ist deren Weg infolge von der Durchbiegung $w(x)$ nach der Theorie 2. Ordnung unter Vernachlässigung der Längsdehnung

$$u_L = L_0 - L$$

mit der Bogenlänge des geknickten Stabes mit $ds^2 = dw^2 + dx^2 = (1 + w'^2) dx^2$

$$L_0 = \int_{\mathcal{L}} ds = \int_0^L \sqrt{1 + w'^2} dx .$$

Die Reihenentwicklung der Wurzel ist

$$\sqrt{1 + w'^2} = 1 + \frac{1}{2} w'^2 - \frac{1}{8} w'^4 + \dots$$

Bei Vernachlässigung der höheren Terme (Theorie 2. Ordnung) verbleibt damit

$$L_0 \approx L + \int_0^L \frac{1}{2} w'^2 dx \quad \Rightarrow \quad u_L = \frac{1}{2} \int_0^L w'^2 dx .$$

Die virtuelle Arbeit der Axialkraft ist damit

$$\delta A_{aP} = P \cdot \delta u_L = P \cdot \frac{1}{2} \int_0^L \delta(w'^2) dx = P \int_0^L w' \cdot \delta w' dx .$$

Benutzen wir nun den RITZ-Ansatz, so ist dies

$$\delta A_{aP} = P \int_0^L \sum_{m=1}^N c_m w_m'(x) \cdot \sum_{n=1}^N \delta c_n w_n'(x) dx .$$

Addieren wir dies zur obigen variationellen Gleichung, so erhalten wir

$$\int_0^L [E I_y \sum_{m=1}^N c_m w_m''(x) \cdot \sum_{n=1}^N w_n''(x)] dx \delta c_n$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^L [q(x) \cdot \sum_{n=1}^N w_n(x)] dx \delta c_n \\
&+ \sum_{i=1}^K F_i \cdot \sum_{n=1}^N \delta c_n w_n(x_i) + \sum_{j=1}^M M_j \cdot \sum_{n=1}^N \delta c_n w_n'(x_j) \\
&+ P \int_0^L \sum_{m=1}^N c_m w_m'(x) \cdot \sum_{n=1}^N \delta c_n w_n'(x) dx,
\end{aligned}$$

was auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
&\int_0^L E I_y \sum_{m=1}^N w_m''(x) \cdot w_n''(x) dx c_m \\
&= \int_0^L q(x) \cdot w_n(x) dx + \sum_{i=1}^K F_i \cdot w_n(x_i) + \sum_{j=1}^M M_j \cdot w_n'(x_j) \\
&+ P \int_0^L \sum_{m=1}^N w_m'(x) \cdot w_n'(x) dx c_m \qquad n = 1, \dots, N
\end{aligned}$$

führt. Wirkt auf den Stab keine Querbelastrung ($q \equiv 0$, $F_i \equiv 0$, $M_i \equiv 0$), so verbleiben lediglich die beiden Terme

$$\begin{aligned}
&\int_0^L E I_y \sum_{m=1}^N w_m''(x) \cdot w_n''(x) dx c_m \\
&= P \int_0^L \sum_{m=1}^N w_m'(x) \cdot w_n'(x) dx c_m \qquad n = 1, \dots, N.
\end{aligned}$$

Dies ist ein homogenes lineares Gleichungssystem für die Parameter c_m , was nur dann nicht-triviale (von Null verschiedene) Lösungen hat, wenn die Koeffizienten-Determinante singular ist. Für einen eingliedrigen RITZ-Ansatz

$$w(x) = c_1 w_1(x)$$

führt dies auf die Gleichung

$$\int_0^L E I_y w_1''(x)^2 dx = P \int_0^L w_1'(x)^2 dx,$$

woraus man näherungsweise die kritische Last bestimmen kann als Quotient

$$P = \int_0^L E I_y w_1''(x)^2 dx / \int_0^L w_1'(x)^2 dx,$$

während c_1 unbestimmt bleibt.

HAMILTONsches Prinzip

Während die bisherigen Prinzipien den Gleichgewichtsbedingungen zeitunabhängig ($PdvV$) oder den Bewegungsgleichungen zu einem Zeitpunkt ($PdvL$) äquivalent waren, betrachten wir nun einen ganzen Prozess zeitabhängig in einem Zeitintervall $[t_0, t_1]$. Dabei soll sich der Körper aus einer vorgeschriebenen Anfangsposition unter der Einwirkung von äußeren Lasten und Randbedingungen in eine ebenfalls vorgeschriebene Endposition bewegen. Wir identifizieren nun in der Mastergleichung \mathbf{w} mit einem Verschiebungsfeld $\delta\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, das

1. orts- und zeitabhängig und
2. virtuell ist, und
3. die Anfangsbedingungen $\delta\mathbf{u}(\mathbf{r}, t_0) = \mathbf{0}$
4. die Endbedingungen $\delta\mathbf{u}(\mathbf{r}, t_1) = \mathbf{0}$
5. und die kinematischen Randbedingungen (wie vorgegeben)

erfüllt.

Mit den Beziehungen

$$\mathbf{a} \cdot \delta\mathbf{u} = \mathbf{u}'' \cdot \delta\mathbf{u} = (\mathbf{u}' \cdot \delta\mathbf{u})' - \mathbf{u}' \cdot \delta\mathbf{u}'$$

und

$$\delta K := \int_{\mathcal{V}} \mathbf{u}' \cdot \delta\mathbf{u}' dm$$

erhalten wir aus der Mastergleichung

$$\delta A_a = \delta A_i + \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{u}' \cdot \delta\mathbf{u})' dm - \delta K.$$

Das Zeitintegral hierüber führt auf

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta A_a - \delta A_i + \delta K) dt = 0,$$

da

$$\int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{u}' \cdot \delta\mathbf{u})' dt = \mathbf{u}'(t_1) \cdot \delta\mathbf{u}(t_1) - \mathbf{u}'(t_0) \cdot \delta\mathbf{u}(t_0)$$

überall verschwindet. Für *konservative Systeme* gilt wieder

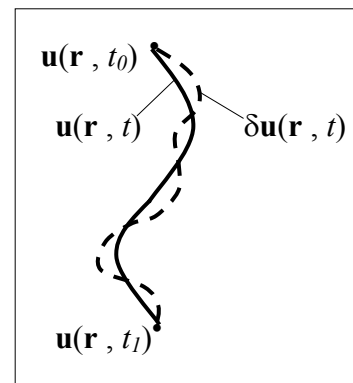
$$\delta A_a = -\delta U$$

und

$$\delta A_i = \delta W.$$

Wir definieren die **LAGRANGE-Funktion**

$$\mathcal{L} := K - U - W,$$



so dass

$$\delta \mathcal{L} = \delta K - \delta U - \delta W = \delta K + \delta A_a - \delta A_i$$

ist, und erhalten das

HALMILTON³⁴sche Prinzip vom stationären Wert der LAGRANGE-Funktion

Die Bewegungsgleichungen eines konservativen Systems sind für eine Bewegung im Zeitintervall $[t_0, t_1]$ genau dann erfüllt, wenn

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta \mathcal{L} dt = 0$$

gilt für alle virtuellen Bewegungen $\delta \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, die den Anfangs-, End- und Rand-Bedingungen genügen.

LAGRANGEsche Bewegungsgleichungen

Wir beschränken uns im Weiteren auf Systeme starrer Körper mit n -Freiheitsgraden. Die Lage eines solchen Systems soll durch einen (minimalen) Satz von n KOO $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ beschrieben werden. Verwendet man mehr als n KOO, so sind diese nicht mehr alle voneinander unabhängig. Verwendet man weniger als n , so ist durch sie die Lage des Systems nicht eindeutig beschrieben. Beschränken wir uns also auf derartige **generalisierte KOO**.

Wir stellen nun die LAGRANGE-Funktion \mathcal{L} als Funktion der generalisierten KOO q_i und deren Ableitungen q_i^\bullet dar

$$\mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, q_1^\bullet, \dots, q_n^\bullet).$$

Deren Variation ist dann

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i^\bullet} \delta q_i^\bullet \right).$$

Dies wird ins HAMILTONsche Prinzip eingesetzt

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta \mathcal{L} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i^\bullet} \delta q_i^\bullet \right) dt = 0.$$

Die rechten Terme können partiell integriert werden zu

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i^\bullet} \delta q_i^\bullet = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i^\bullet} \delta q_i \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i^\bullet} \delta q_i dt.$$

Da der Anfangs- und Endzustand nicht variiert werden dürfen, ist

$$\delta q_i(t_0) = 0 = \delta q_i(t_1).$$

Damit verbleiben vom HAMILTONschen Prinzip

³⁴ William Rowan Hamilton (1805 - 1865)

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = 0.$$

Dies kann für beliebige (zeitabhängige) Variationen δq_i nur dann gelten, wenn während der Bewegung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

sind. Dies sind die **LAGRANGEschen Bewegungsgleichungen 2. Art**. Dabei wurde die LAGRANGE-Funktion durch die Potentiale gemäß

$$\mathcal{L} := K - U - W$$

definiert. Da - im Gegensatz zur kinetischen Energie - die Potentiale U und W nicht von \dot{q}_i abhängen

$$K(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$$

$$U(q_1, \dots, q_n)$$

$$W(q_1, \dots, q_n),$$

gelten die Bewegungsgleichungen auch in der Form

$$\frac{\partial K}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial (U+W)}{\partial q_i}.$$

Die Ausdrücke

$$Q_i := - \frac{\partial (U+W)}{\partial q_i}$$

werden **generalisierte Kräfte** genannt, die an δq_i die virtuelle Arbeit

$$\delta A_{i-a} = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial (U+W)}{\partial q_i} \delta q_i$$

leisten.

Während wir bisher davon ausgegangen sind, dass das System konservativ ist, können wir auch nicht-konservative Kräfte (z. B. Reibungskräfte) dadurch berücksichtigen, dass man deren virtuelle Arbeit ebenfalls als

$$\delta A^R = \sum_{i=1}^n Q_i^R \delta q_i$$

darstellt und den Bewegungsgleichungen zufügt

$$\frac{\partial K}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} + Q_i^R = \frac{\partial (U+W)}{\partial q_i} \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Die LAGRANGESchen Bewegungsgleichungen 1. Art erhält man, wenn man überzählige KOO einführt und die Bindungen zwischen diesen im Variationsausdruck mitberücksichtigt (was hier nicht dargestellt werden soll).

Ergänzungsarbeit

In der Mechanik besteht eine Dualität zwischen kinematischen Größen (\mathbf{r} , $\boldsymbol{\varphi}$, ε_{ij} usw.) und dynamischen Größen (\mathbf{F} , \mathbf{M} , σ_{ij} usw.). In den Arbeitsausdrücken treten sie zusammen auf. Hierfür gibt es zwei Möglichkeiten.

Für die Leistung

$$L_a := \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}^\bullet \qquad L_a^* := \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}^\bullet$$

und für die Arbeit

$$A_a = \int_{\mathbf{u}_0}^{\mathbf{u}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{u} \qquad A_a^* := \int_{\mathbf{F}_0}^{\mathbf{F}_1} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{F}$$

wobei die Größen mit * den Zusatz "Ergänzungs-" erhalten. Für die inneren Arbeiten hat man analog

$$L_i = \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \qquad L_i^* = \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij}$$

und

$$A_i = \int_{\varepsilon_{ij0}}^{\varepsilon_{ij1}} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \qquad A_i^* = \int_{\sigma_{ij0}}^{\sigma_{ij1}} \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij}.$$

Sind die Arbeiten wegunabhängig, so gibt es elastische Energien

$$w(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \dots, \varepsilon_{33}) \qquad w^*(\sigma_{11}, \sigma_{12}, \dots, \sigma_{33})$$

so dass

$$\frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \qquad \frac{\partial w^*}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij}.$$

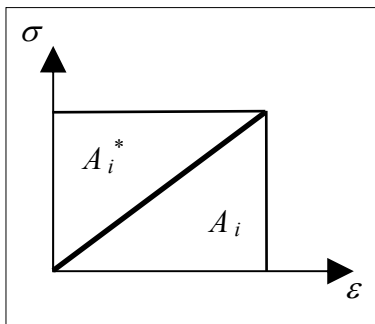
Für die Federenergie kann man beispielsweise schreiben

$$w(\varepsilon) = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \qquad w(\sigma)^* = \frac{1}{2} \sigma^2 / E$$

und für den Biege- und Zugstab

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L (E A u'^2 + E I_y w''^2) dx \qquad W^* = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M_y^2}{EI_y} \right) dx.$$

Im linear-elastischen Fall fallen A_i^* und A_i sowie W^* und W zahlenmäßig zusammen.



Man sollte sie jedoch in jedem Falle begrifflich unterscheiden, da die Arbeits- und Energiegrößen als Funktionen von kinematischen Größen eingeführt werden, während die Ergänzungsgrößen als Funktionen dynamischer Größen benutzt werden.

Duale Energieprinzipien der Elastostatik

Wir wollen annehmen, dass

- 1.) **Gleichgewicht** herrscht (statischer Fall)
- 2.) das **Material linear-elastisch** ist mit **elastischer Energie** W
- 3.) die Belastungen **isotherm** erfolgen (keine Temperaturdehnung)
- 4.) der Körper durch **Einzelkräfte** belastet wird, die ihre Richtung nicht ändern.

Dabei kann das System statisch bestimmt oder unbestimmt sein.

Wir betrachten zunächst eine Einzelkraft $(\mathbf{F}_I, \mathbf{r}_I)$ vom Betrag $|\mathbf{F}_I| = : F_I$ und der Richtung $\mathbf{e}_I := \mathbf{F}_I / F_I$, einem Einheitsvektor in Richtung der Kraft.

Wird nun die Kraft betragsmäßig von 0 langsam (quasistatisch gemäß 1.) bis auf ihren Endwert F_I gesteigert, wobei ihre Richtung (gemäß 4.) konstant bleibt, so erfahren die Körperpunkte eine Verschiebung, die wir $\mathbf{u}_I(\mathbf{r})$ nennen. Speziell verschiebe sich der Angriffspunkt der Kraft \mathbf{r}_I um $\mathbf{u}_{II} := \mathbf{u}_I(\mathbf{r}_I)$. Bei einer Steigerung der Kraft von 0 auf ihren Endwert F_I leistet sie die Arbeit

$$A_{II} = \int_0^{\mathbf{u}_I} \mathbf{F}_I \cdot d\mathbf{u}_{II} = \int_0^{\mathbf{u}_I} F_I \mathbf{e}_I \cdot d\mathbf{u}_i = \int_0^{u_{II}} F_I du_{II} .$$

In die Arbeit geht wegen des Skalarproduktes nur die Verschiebungskomponente in Kraft-Richtung ein, die wir als die **Verschiebung von \mathbf{r}_I im Sinne von \mathbf{F}_I**

$$du_{II} := d\mathbf{u}_I \cdot \mathbf{e}_I \quad \text{und} \quad u_{II} := \mathbf{u}_I \cdot \mathbf{e}_I$$

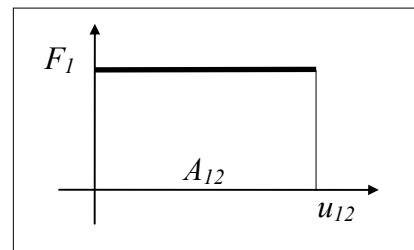
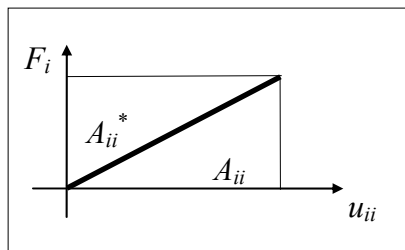
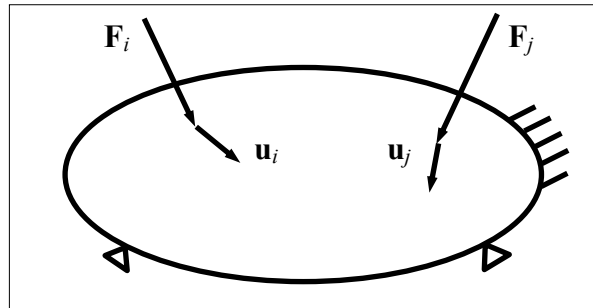
bezeichnen. Wegen der Linearität des Systems ist die Kraft zur Verschiebung proportional, und deshalb

$$du_{II} = \alpha_{II} dF_I \quad \text{und} \quad u_{II} = \alpha_{II} F_I .$$

mit einem Proportionalitätsfaktor α_{11} . Damit wird die Arbeit

$$A_{11} = \int_0^{u_{11}} F_1 \cdot du_{11} = \int_0^{F_1} \underline{E}_1 \alpha_{11} d\underline{E}_1 = \frac{1}{2} F_1^2 \alpha_{11}.$$

Wegen 2) ist sie vom zeitlichen Verlauf der Kraftaufbringung unabhängig.



Halten wir nun diese Kraft F_1 konstant und bringen an einer anderen Stelle r_2 die Last F_2 auf, so werden sich dabei beide Angriffspunkte r_1 und r_2 verschieben. Diese Verschiebungen haben wiederum die Komponenten in der jeweiligen Lastrichtung u_{12} von F_1 bzw. u_{22} von F_2 . Wegen der Proportionalität setzen wir an

$$u_{12} = \alpha_{12} F_2$$

$$u_{22} = \alpha_{22} F_2.$$

Die Nachgiebigkeits-Faktoren α_{ij} werden **Einflusszahlen** genannt. Allgemein haben sie folgende Bedeutung:

Def.: Die **Einflusszahl** α_{ij} ist die Größe der Verschiebung des Kraftangriffspunktes r_i im Sinne der Kraft F_i (Richtung) infolge einer Einskraft $F_j \equiv 1$ an der Stelle r_j .

Bei der Aufbringung von F_2 leistet sie die Arbeit

$$A_{22} = \frac{1}{2} F_2 u_{22} = \frac{1}{2} F_2^2 \alpha_{22}$$

und F_1 (konstant) die Arbeit

$$A_{12} = \int_0^{u_{12}} F_1 du_{12} = F_1 u_{12} = F_1 \alpha_{12} F_2.$$

Die bisher geleistete Arbeit der beiden Kräfte ist

$$A_a = A_{11} + A_{12} + A_{22} = \frac{1}{2} F_1^2 \alpha_{11} + F_1 \alpha_{12} F_2 + \frac{1}{2} F_2^2 \alpha_{22}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 F_i \alpha_{ij} F_j.$$

Es gilt für die partielle Ableitung der Arbeit

$$\frac{\partial A_a}{\partial F_1} = F_1 \alpha_{11} + \alpha_{12} F_2 = \sum_{j=1}^2 \alpha_{1j} F_j = \sum_{j=1}^2 u_{1j} =: u_1,$$

also gleich der Gesamtverschiebung des ersten Angriffspunktes im Sinne von F_1 .

Hätte man erst F_2 aufgebracht und dann F_1 , so hätte man

$$A_a = \frac{1}{2} F_2^2 \alpha_{22} + F_2 \alpha_{21} F_1 + \frac{1}{2} F_1^2 \alpha_{11}$$

leisten müssen. Da wegen des Superpositions-Prinzips die geleistete Arbeit aber wegunabhängig ist, muss

$$\alpha_{12} \equiv \alpha_{21} \quad \text{oder allgemein} \quad \alpha_{ij} \equiv \alpha_{ji}$$

gelten. Damit gilt der

Vertauschungssatz von MAXWELL³⁵ und BETTI³⁶
Unter den gemachten Annahmen bewirkt eine Kraft $(\mathbf{F}_i, \mathbf{r}_i)$ von der Größe l eine Verschiebung des Kraftangriffspunktes \mathbf{r}_j im Sinne einer Kraft $(\mathbf{F}_j, \mathbf{r}_j)$ von derselben Größe wie umgekehrt.

Betrachten wir nun ein System von N Einzelkräften $\{(\mathbf{F}_1, \mathbf{r}_1), \dots, (\mathbf{F}_N, \mathbf{r}_N)\}$. Dieses leistet bei Aufbringung die Arbeit

$$A_a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N F_i \alpha_{ij} F_j,$$

so dass deren partielle Ableitung nach einem F_i

$$\frac{\partial A_a}{\partial F_i} = \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} F_j = \sum_{j=1}^N u_{ij} =: u_i$$

die Gesamtverschiebung des Punktes \mathbf{r}_i im Sinne von \mathbf{F}_i infolge des gesamten Kraftsystems ergibt. Nach dem Arbeitssatz mit $K \equiv 0$ (Statik) und $A_i \equiv W$ (Elastizität) ist

$$A_a = W.$$

Lässt sich A_a als Funktion der F_i , $i = 1, \dots, N$, darstellen, so muss dies auch für W gelten

$$W = W(F_1, \dots, F_N) \quad (\text{Formänderungsenergie})$$

und damit

$$u_i = \frac{\partial A_a}{\partial F_i} = \frac{\partial W}{\partial F_i}.$$

³⁵ James Clerk Maxwell (1831 - 1879)

³⁶ Enrico Betti (1823 - 1892)

Dies ist der

2. Satz von CASTIGLIANO³⁷

Drückt man unter den gemachten Annahmen die Formänderungsenergie durch die Kraftbeträge F_1, \dots, F_N aus, so ist deren partielle Ableitung nach einem F_i die Verschiebung von deren Angriffspunkt im Sinne von \mathbf{F}_i

$$u_i = \frac{\partial W(F_1, \dots, F_N)}{\partial F_i} \quad \text{für } i = 1, \dots, N.$$

Zu einer komplementären Energieaussage gelangt man, wenn man das Prinzip der virtuellen Verrückungen für jeweils eine virtuelle Verrückung δu_i aufschreibt

$$\delta A_a = \sum_{i=1}^N F_i \delta u_i = \delta W = \sum_{i=1}^N \frac{\partial W}{\partial u_i} \delta u_i,$$

wobei die Formänderungsenergie als Funktion der Einzelverschiebungen u_i ausgedrückt wird

$$W(u_1, \dots, u_N).$$

1. Satz von CASTIGLIANO

Unter den gemachten Voraussetzungen ergibt die partielle Ableitung der Formänderungsenergie nach der Verschiebung u_i im Sinne einer Kraft \mathbf{F}_i deren Betrag F_i

$$F_i = \frac{\partial W(u_1, \dots, u_N)}{\partial u_i} \quad \text{für } i = 1, \dots, N.$$

Dieser Satz gilt übrigens auch für nicht-lineare elastische Gesetze. Eine völlig analoge Schlussweise kann man auf den Fall anwenden, dass neben Einzelkräften auch Einzelmomente wirken. Ist \mathbf{M}_i eine solche und $\boldsymbol{\varphi}_i$ der Drehvektor, an dem sie Arbeit leistet im Sinne von

$$dA_a = \mathbf{M}_i \cdot d\boldsymbol{\varphi}_i = M_i d\varphi_i$$

mit

$$M_i := |\mathbf{M}_i| \quad \text{und} \quad d\varphi_i = d\boldsymbol{\varphi}_i \cdot \mathbf{M}_i / M_i,$$

so gelten die CASTIGLIANOschen Beziehungen analog

$$\varphi_i = \frac{\partial W}{\partial M_i} \quad M_i = \frac{\partial W}{\partial \varphi_i}$$

Da

$$\frac{\partial^2 W}{\partial X_i^2} = \alpha_{ii}$$

für stabile Systeme positiv ist, hat die Formänderungsenergie bezüglich der Reaktionskräfte ein Minimum (Satz von MENABREA³⁸ 1857).

³⁷ Carlo Alberto Pio Castigliano (1847 - 1884)

³⁸ Luigi Federigo Menabrea (1809 - 1896)

Kraftgrößenverfahren

Den 1. Satz von CASTIGLIANO kann man dazu benutzen, um bei statisch bestimmten oder unbestimmten Systemen Auflagerreaktionen zu bestimmen. Da diese neben den eingeprägten Lasten ebenfalls äußere Lasten darstellen, muss ihre Größe X_i so bestimmt werden, dass die Verschiebung bzw. Verdrehung in ihrem Sinne Null ist, was nach dem 1. Satz von CASTIGLIANO auf die Bestimmungsgleichung

$$\frac{\partial W}{\partial X_i} = 0 \quad i = 1, \dots, L$$

führt mit

$$W(F_1, \dots, F_N, M_1, \dots, M_K, q_1, \dots, q_Q, X_1, \dots, X_L).$$

Die Formalisierung dieses Verfahrens wird Kraftgrößenverfahren genannt und soll im Folgenden skizziert werden. Wir betrachten ein N -fach statisch unbestimmtes Biegeproblem, das durch ein Lastsystem L_0 von Einzellasten und -momenten, Streckenlasten usw. belastet ist.

1. Schritt:

Wir entfernen N Lagerbindungen und führen stattdessen N *statisch Überzählige* (Kräfte und Momente) X_1, X_2, \dots, X_N am statisch bestimmten *Hauptsystem* ein. Wir bestimmen an diesem System:

$M_0(x)$ die Biegemomente infolge L_0

$M_i(x)$ die Biegemomente infolge der Einslast $X_i \equiv I$

Dann sind infolge des Superpositionsprinzips

$X_i M_i(x)$ die Biegemomente infolge der Last X_i

$M_S(x) := M_0(x) + \sum_{i=1}^N X_i M_i(x)$ die Biegemomente infolge aller Lasten

2. Schritt:

Die Formänderungsenergie des Systems (ohne Längsdehnungs- und Schubanteile) ist

$$W(L_0, X_1, X_2, \dots, X_N) = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_S^2}{EI} dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{(M_0 + X_1 M_1 + \dots + X_N M_N)^2}{EI} dx$$

Da die Verschiebungen und Verdrehungen in den entfernten Lagern im Originalsystem verschwinden müssen, gilt nach CASTIGLIANO 2

$$\frac{\partial W}{\partial X_i} = 0 = \int_0^L \frac{(M_0 + X_1 M_1 + \dots + X_N M_N) M_i}{EI} dx \quad i = 1, \dots, N$$

$$= \int_0^L \frac{M_0 M_i}{EI} dx + \sum_{k=1}^N \int_0^L \frac{M_k M_i}{EI} dx X_k$$

Die *Elastizitätsgleichungen* bilden ein lineares inhomogenes Gleichungssystem zur Bestimmung der statisch Überzähligen X_i

$$\sum_{k=1}^N \delta_{ki} X_k = -\delta_{k0} \quad \text{mit } \delta_{ki} = \delta_{ik} := \int_0^L \frac{M_k M_i}{EI} dx.$$

3. Schritt:

Dessen Lösungen X_i sind die gesuchten Auflagerreaktionen. Eingesetzt in obige Superpositionsgleichungen erhalten wir die gesuchten Schnittlasten.

Stoßvorgänge

Treffen zwei bewegte Körper aufeinander, so können sehr unterschiedliche Ereignisse eintreten, wie z. B.

- die beiden Körper prallen nach einer sehr kurzen Kontaktzeit von einander ab und bewegen sich in unterschiedlichen Richtungen fort (Billardkugeln);
- einer oder beide Körper verformen sich sehr stark und trennen sich danach wieder (Auto gegen Auto) oder
- bleiben dauerhaft vereint (Schneeball gegen Kommilitonen),

wobei sie in den letzten beiden Fällen einen großen Teil ihrer kinetischen Energie verlieren können. Je nach Materialpaarung der Stoßpartner hinterlassen Stoßvorgänge in manchen Fällen fast keine Veränderungen an den Körpern (elastischer Stoß), in anderen führen sie zu kleinen oder großen Deformationen (plastischer Stoß), bis hin zu Schädigungen oder Brüchen. Charakteristisch für Stoßvorgänge ist grundsätzlich, dass die beteiligten Körper in kurzen Zeiträumen große Bewegungsänderungen (Impuls- und Drall-) erleiden, wofür nach den Bewegungsgleichungen kurzzeitig entsprechend große Kräfte und Momente wirken müssen, entweder in der Kontaktfläche zwischen den Stoßpartnern, oder auch - als Reaktion darauf - in Lagern (wie bei einer zuschlagende Tür). Der Stoßvorgang selbst kann außerordentlich komplex sein. Gleit- und Haftreibungsprozesse in der Kontaktzone, große inelastische, dissipative Deformationsprozesse in deren Umgebung, Stoßwellen, bis hin zur Zerstörung des Materials können auftreten. In einer *elementaren Stoßtheorie* versucht man, diese Vorgänge lediglich in pauschaler Weise zu berücksichtigen, um das **Grundproblem der Stoßmechanik** zu lösen:

In welchem Bewegungszustand werden die beiden Körper nach dem Stoß sein, wenn derjenige vor dem Stoß bekannt ist?

Um diese Aufgabe zu lösen, werden wir einige vereinfachende Annahmen treffen müssen. **Annahme:** Gegenüber den Stoßkräften können alle anderen Kräfte des (kurzen) Stoßzeitraumes vernachlässigt werden (wie z. B. Luftreibung, Eigengewicht).

Für die Lösung unserer Grundaufgabe stehen uns die Bewegungsgleichungen zur Verfügung, die wir zweckmäßigerweise über das zeitliche Stoßintervall $[t_a, t_e]$ aufintegrieren, wie die Impulsbilanz für einen Körper

$$\begin{aligned}
 \int_{t_a}^{t_e} \mathbf{p}(t) \bullet dt &= \mathbf{p}(t_e) - \mathbf{p}(t_a) = \Delta \mathbf{p} \\
 &= [\mathbf{v}_M(t_e) - \mathbf{v}_M(t_a)] m = [\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_a] m \\
 &= \int_{t_a}^{t_e} \mathbf{F}(t) dt =: \mathbf{S}
 \end{aligned}$$

und die Drallbilanz

$$\begin{aligned}
 \int_{t_a}^{t_e} \mathbf{d}_0(t) \bullet dt &= \mathbf{d}_0(t_e) - \mathbf{d}_0(t_a) = \mathbf{d}_{0e} - \mathbf{d}_{0a} = \Delta \mathbf{d}_0 \\
 &= \int_{t_a}^{t_e} \mathbf{M}_0(t) dt =: \mathbf{D}_0 .
 \end{aligned}$$

Der Vektor \mathbf{S} wird als **Stoß**, \mathbf{D}_0 als **Drehstoß** bezeichnet. Dabei kann man die Drallbilanz wahlweise auf einen raumfesten Punkt (z. B. Momentanpol) oder auf den Massenmittelpunkt des Systems beziehen.

Wenden wir diese beiden Gesetze auf beide Stoßpartner an, so gelten

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{v}_{1e} - \mathbf{v}_{1a}) m_1 &= \mathbf{S}_1 & \mathbf{d}_{01e} - \mathbf{d}_{01a} &= \mathbf{D}_{01} \\
 (\mathbf{v}_{2e} - \mathbf{v}_{2a}) m_2 &= \mathbf{S}_2 & \mathbf{d}_{02e} - \mathbf{d}_{02a} &= \mathbf{D}_{02} .
 \end{aligned}$$

Resultieren die Stoßkraft und das durch sie induzierte Stoßmoment aus der Kraft zwischen den Körpern, so gilt das Reaktionsprinzip

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_1 &= -\mathbf{S}_2 =: \mathbf{S} \\
 \mathbf{D}_{01} &= -\mathbf{D}_{02} = \int_{t_a}^{t_e} \mathbf{r}_0 \times \mathbf{F}(t) dt =: \mathbf{D}_0 .
 \end{aligned}$$

Dies erhält man übrigens auch, wenn man die Impuls- und Drallbilanz auf den Gesamtkörper m_1 plus m_2 anwendet. Setzen wir dies ein, so erhalten wir 4 vektorielle Gleichungen

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{v}_{1e} - \mathbf{v}_{1a}) m_1 &= \mathbf{S} & \mathbf{d}_{01e} - \mathbf{d}_{01a} &= \mathbf{D}_0 \\
 (\mathbf{v}_{2e} - \mathbf{v}_{2a}) m_2 &= -\mathbf{S} & \mathbf{d}_{02e} - \mathbf{d}_{02a} &= -\mathbf{D}_0
 \end{aligned}$$

für die 6 Unbekannten $\mathbf{v}_{1e}, \mathbf{v}_{2e}, \mathbf{d}_{01e}, \mathbf{d}_{02e}, \mathbf{S}, \mathbf{D}_0$. Die kinematischen Größen vor dem Stoß $\mathbf{v}_{1a}, \mathbf{v}_{2a}, \mathbf{d}_{01a}, \mathbf{d}_{02a}$ seien bekannt. Wir benötigen also noch 2 weitere vektorielle Aussagen. Als erstes nehmen wir an, dass sich der beiden Körpern gemeinsame Angriffspunkt der Stoßkraft $\{\mathbf{F}(t), \mathbf{r}_0\}$ während der kurzen Stoßzeit nicht wesentlich verschiebt. Dann ist

$$\mathbf{D}_0 = \int_{t_a}^{t_e} \mathbf{r}_0 \times \mathbf{F}(t) dt = \mathbf{r}_0 \times \int_{t_a}^{t_e} \mathbf{F}(t) dt = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{S} .$$

Mit derselben Argumentation wird man erwarten können, dass sich die Richtung von $\mathbf{F}(t)$ während des Zeitintervalls nur unwesentlich ändert, also

$$\frac{\mathbf{F}(t)}{|\mathbf{F}(t)|} = \frac{\mathbf{S}}{|\mathbf{S}|} \quad \text{für} \quad t_a \leq t \leq t_e$$

näherungsweise gilt.

Handelt es sich um einen **glatten** oder **reibungsfreien Stoß**, d. h. wirken zwischen den Stoßpartnern nur Normalkräfte, aber keine (tangentialen) Reibungskräfte, so hat \mathbf{S} die Richtung der **Stoßnormalen \mathbf{n}** auf der Kontaktfläche

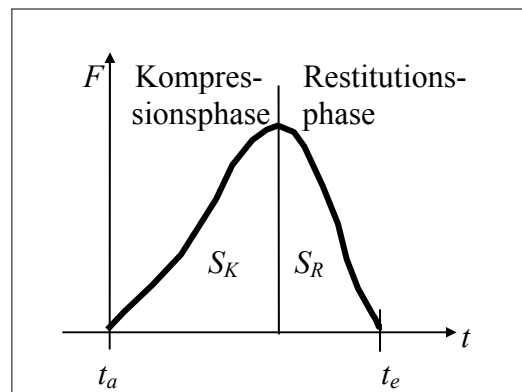
$$\frac{\mathbf{S}}{|\mathbf{S}|} = \mathbf{n}.$$

\mathbf{n} ist also die äußere Normale der Kontaktfläche bezüglich des 1. Stoßpartners. Über den zeitlichen Verlauf von $|\mathbf{F}(t)|$ wird man wenig aussagen können. Die Druckkraft wird von Null während der ersten Stoßphase, der **Kompressionsphase**, schnell anwachsen und in der zweiten Phase, der **Restitutionsphase**, wieder auf Null absinken. Man nimmt an, dass die eine Phase in die andere übergeht, wenn die Kraft ihr Maximum erreicht hat und die beiden Körper keine Relativgeschwindigkeit zueinander haben, sondern sich mit einer gemeinsamen Geschwindigkeit v_g bewegen. Wir berechnen damit die Beträge der Stöße der beiden Phasen als

$$S_K = (v_g - v_{1an}) m_1 = (v_{2an} - v_g) m_2$$

$$S_R = (v_{1en} - v_g) m_1 = (v_g - v_{2en}) m_2$$

wobei a für am Anfang steht, e für am Ende, n für Normalkomponente und 1 und 2 die Körper nummeriert.



Die letzte fehlende skalare Gleichung für das Stoßproblem ergibt sich aus einer pauschalen Annahme über das Verhältnis der Stoßgrößen, die von NEWTON gemacht wurde. Dazu führt man die **Stoßzahl** ein als das Verhältnis von Restitutionsstoß zu Kompressionsstoß

$$k := \frac{S_R}{S_K}.$$

Eine kleine Umrechnung zeigt, dass die Stoßzahl auch als das Verhältnis der Relativgeschwindigkeiten der Stoßpartner vor und nach dem Stoß in Richtung der Stoßnormalen interpretiert werden kann:

$$k = \frac{S_R/m_2 + S_R/m_1}{S_K/m_1 + S_K/m_2} = \frac{-v_{2en} + v_{1en}}{-v_{1an} + v_{2an}} = \frac{(\mathbf{v}_{2e} - \mathbf{v}_{1e}) \cdot \mathbf{n}}{(\mathbf{v}_{1a} - \mathbf{v}_{2a}) \cdot \mathbf{n}}$$

NEWTON hatte an hängenden Kugeln beobachtet, dass die Kugeln in Abhängigkeit der Materialpaarung nach dem Aufprall langsamer als vorher sind. Der (dimensionslose) Wert von k liegt zwischen den idealen Grenzfällen der Elastizität mit $k = 1$ und der Plastizität mit $k = 0$. Empirische Werte sind etwa

| | |
|-------------------------|------------|
| Holz auf Holz | $k = 0,5$ |
| Stahl auf Stahl | $k = 0,8$ |
| Elfenbein auf Elfenbein | $k = 0,89$ |
| Glas auf Glas | $k = 0,95$ |

Genauere Untersuchungen ergeben aber, dass die Stoßzahl nicht nur von den Materialien der Stoßpartner abhängt, sondern auch von deren Form, Struktur, u. a. mehr.

Beispiel: Wir lassen einen Körper von einer Höhe H auf den Boden fallen und messen die Rückprallhöhe h . Der Boden wird als starr angenommen, der Fall als frei, also ohne Luftreibung. Der Energiesatz ergibt

$$m g H = \frac{1}{2} v_a^2 m \quad \Rightarrow \quad v_a = \sqrt{2 g H}$$

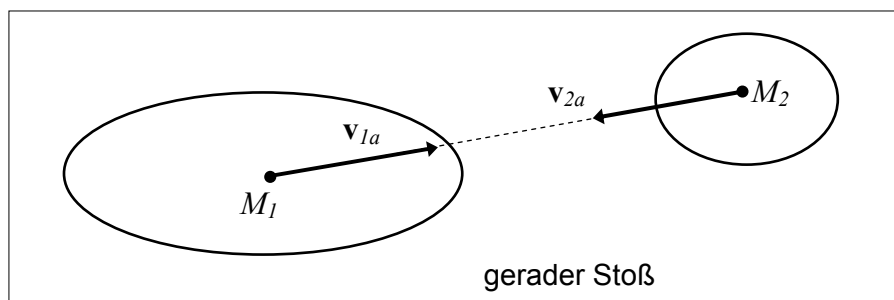
Mit dem Stoßzahlansatz ist $v_e = k v_a$ und der Energiesatz nach dem Stoß liefert

$$m g h = \frac{1}{2} v_e^2 m = \frac{1}{2} k^2 v_a^2 m = \frac{1}{2} k^2 2 g H m$$

und somit $k^2 = h/H$ als Bestimmungsgleichung der Stoßzahl.

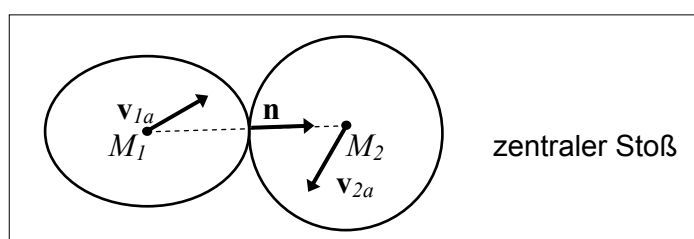
Man unterscheidet bei Stoßvorgängen:

- **gerader Stoß:** die Geschwindigkeitsvektoren vor dem Stoß \mathbf{v}_{1a} und \mathbf{v}_{2a} liegen auf der Verbindungslinie der beiden Massenmittelpunkte M_1 und M_2



- **schiefes Stoß:** sonst

- **zentraler Stoß:** die Stoßnormale im Berührungspunkt liegt auf der Verbindungslinie der beiden Massenmittelpunkte



- **exzentrischer Stoß:** sonst

Betrachten wir zunächst den **zentralen Stoß**. Handelt es sich außerdem um einen **glatten** Stoß, so erzeugt $\mathbf{S} = S \mathbf{n}$ keinen Drehstoß bezüglich M_1 und M_2 und es gilt für beide Stoßpartner Drallerhaltung:

$$\mathbf{d}_{M1e} = \mathbf{d}_{M1a}$$

$$\mathbf{d}_{M2e} = \mathbf{d}_{M2a}.$$

Aus der Impulsbilanz folgen

$$m_1(\mathbf{v}_{1e} - \mathbf{v}_{1a}) \cdot \mathbf{n} = S = m_1(v_{1en} - v_{1an})$$

$$m_2(\mathbf{v}_{2e} - \mathbf{v}_{2a}) \cdot \mathbf{n} = -S = m_2(v_{2en} - v_{2an}).$$

Deren Summe ist

$$m_1(v_{1en} - v_{1an}) + m_2(v_{2en} - v_{2an}) = 0.$$

Hierin kann mit dem Stoßzahl-Ansatz v_{2en} eliminiert werden und der Rest aufgelöst werden nach

$$v_{1en} = \frac{v_{1an}(m_1 - k m_2) + v_{2an} m_2 (1 + k)}{m_1 + m_2}$$

und

$$v_{2en} = \frac{v_{2an}(m_2 - k m_1) + v_{1an} m_1 (1 + k)}{m_2 + m_1}.$$

Im elastischen Grenzfall ($k \equiv 1$) ist

$$\begin{aligned} v_{1en} &= \frac{v_{1an}(m_1 - m_2) + 2v_{2an} m_2}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{v_{1an} m_1 + v_{2an} m_2 + m_2(v_{2an} - v_{1an})}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} v_{2en} &= \frac{v_{2an}(m_2 - m_1) + 2v_{1an} m_1}{m_2 + m_1} \\ &= \frac{v_{2an} m_2 + v_{1an} m_1 + m_1(v_{1an} - v_{2an})}{m_2 + m_1}. \end{aligned}$$

Im plastischen Grenzfall ($k \equiv 0$) hingegen gilt

$$v_{1en} = v_{2en} = \frac{v_{1an} m_1 + v_{2an} m_2}{m_1 + m_2},$$

d. h. beide Körper bewegen sich mit derselben Normalgeschwindigkeit weiter.

In den tangentialen Richtungen (senkrecht auf \mathbf{n}) hat \mathbf{S} keine Komponente, und damit gilt in dieser Richtung Impulserhaltung für beide Körper

$$\begin{aligned} v_{1et} m_1 &= v_{1at} m_1 & \Rightarrow & & v_{1et} &= v_{1at} \\ v_{2et} m_2 &= v_{2at} m_2 & \Rightarrow & & v_{2et} &= v_{2at} . \end{aligned}$$

Die Tangentialgeschwindigkeiten sind vom glatten zentralen Stoß unbeeinflusst. Damit ist das elementare Stoßproblem für den glatten zentralen Stoß gelöst.

Berechnen wir nun die Differenz der translatorischen kinetischen Energie vor und nach dem Stoß

$$\begin{aligned} \Delta K_{trans} &= K_{trans}(t_e) - K_{trans}(t_a) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{v}_{1e}^2 m_1 + \frac{1}{2} \mathbf{v}_{2e}^2 m_2 - \frac{1}{2} \mathbf{v}_{1a}^2 m_1 - \frac{1}{2} \mathbf{v}_{2a}^2 m_2 \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{1e}^2 - \mathbf{v}_{1a}^2) m_1 + \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{2e}^2 - \mathbf{v}_{2a}^2) m_2 \\ &= \frac{1}{2} (v_{1en}^2 + v_{1et}^2 - v_{1an}^2 - v_{1at}^2) m_1 + \frac{1}{2} (v_{2en}^2 + v_{2et}^2 - v_{2an}^2 - v_{2at}^2) m_2 \end{aligned}$$

und mit dem Stoßzahl-Ansatz nach längerer Zwischenrechnung

$$= \frac{1}{2} (k^2 - 1) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{1an} - v_{2an})^2 \leq 0.$$

Im elastischen Fall ($k \equiv 1$) tritt also kein Verlust der kinetischen Energie auf. Während der Kompressionsphase wird ein Teil der kinetischen Energie in Formänderungsenergie der Stoßpartner umgewandelt, in der Restitutionsphase aber vollständig in kinetische Energie zurückverwandelt.

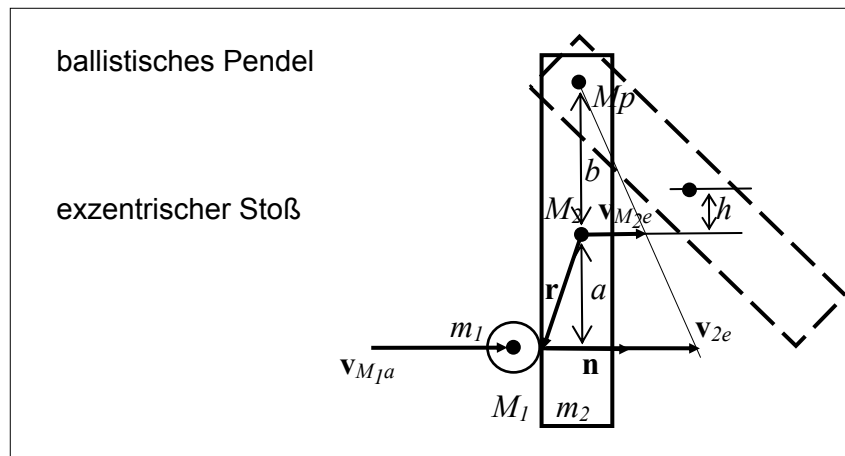
Im plastischen Fall ($k \equiv 0$) hingegen wird die Spannungsarbeit dissipiert und die kinetische Energie wird maximal reduziert. Alle anderen Fälle liegen wieder zwischen diesen beiden Extremen.

Ist der zentrische Stoß außerdem noch **gerade**, so sind die Tangential-Komponenten der Geschwindigkeit vorher und damit auch hinterher Null

$$\begin{aligned} v_{1at} &= 0 = v_{1et} \\ v_{2at} &= 0 = v_{2et} . \end{aligned}$$

Damit handelt es sich um ein 1-dimensionales Problem (in Richtung von \mathbf{n}). Die beiden Körper bewegen sich auf einer Geraden aufeinander zu und prallen auf derselben Geraden ab (für $k > 0$) oder bewegen sich gemeinsam weiter (für $k = 0$).

Kommen wir nun zu dem komplizierteren Fall eines **exzentrischen Stoßes**, der aber immer noch **glatt** (reibungsfrei) sein soll. Es soll weiter der NEWTONsche Stoßzahlansatz gelten. Im Gegensatz zum zentralen Stoß müssen wir nun auch die Dralländerung mitberücksichtigen. Wir wollen annehmen, dass sich beide Körper vor und nach dem Stoß wie starre Körper verhalten. Dies kann während des Stoßes allerdings nicht aufrechterhalten werden, da sonst die Kontaktkräfte unendlich groß würden.

Beispiel: ballistisches Pendel

Betrachten wir einen Körper, der mit einer Geschwindigkeit \mathbf{v}_{M1a} exzentrisch und normal wie skizziert auf einen frei ruhenden Körper auftrifft. Dann sind

$$\mathbf{v}_{2a} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{d}_{2a} = \mathbf{0}.$$

Die Impulsbilanz liefert wieder für die Massenmittelpunkts-Geschwindigkeiten

$$m_1(\mathbf{v}_{M1e} - \mathbf{v}_{M1a}) = \mathbf{S}$$

$$m_2(\mathbf{v}_{M2e} - \mathbf{0}) = -\mathbf{S}$$

und damit für die Geschwindigkeitsbeträge in Normalenrichtung

$$\Rightarrow m_1(v_{M1e} - v_{M1a}) = S$$

$$\Rightarrow m_2 v_{M2e} = -S$$

$$(1) \quad \Rightarrow m_2 v_{M2e} = m_1(v_{M1a} - v_{M1e})$$

und die Drallbilanz bezüglich des Massenmittelpunktes M_2 von m_2

$$\mathbf{d}_{2e} - \mathbf{0} = \mathbf{r} \times (-\mathbf{S})$$

$$(2) \quad \Rightarrow \theta_{M_2} \omega_{2e} = -a S = a m_2 v_{M2e}.$$

Der zweite Körper wird nach dem Stoß als starr betrachtet und führt eine Drehung aus um den Momentanpol M_p . Seine Entfernung von M_2 sei b , die sich aus der Geschwindigkeit v_{M2e} von M_2 nach der EULERSchen Geschwindigkeitsformel berechnet zu

$$(3) \quad b = \frac{v_{M2e}}{\omega_{2e}}.$$

Zusammen mit (2) ergibt dies

$$(4) \quad \theta_{M_2} / a = b m_2.$$

Die Geschwindigkeit des Stoßpunktes ist annähernd

$$(5) \quad v_{2e} = (a + b) \omega_{2e} .$$

Zur Bestimmung der Unbekannten v_{2e} oder ω_{2e} benutzen wir den Stoßzahlansatz für die Normalkomponenten der Geschwindigkeiten des Stoßpunktes

$$(6) \quad k = \frac{v_{2e} - v_{M1e}}{v_{M1a} - 0} .$$

Damit ergeben sich

$$m_1 (v_{M1a} - v_{M1e}) \stackrel{(1)}{=} m_2 v_{M2e} \stackrel{(3)}{=} m_2 b \omega_{2e} \stackrel{(5)}{=} m_2 \frac{b}{(a+b)} v_{2e} = \frac{\theta_{M2}}{a(a+b)} v_{2e}$$

$$\stackrel{(6)}{=} \frac{\theta_{M2}}{a(a+b)} (v_{M1e} + k v_{M1a})$$

$$\Rightarrow v_{M1e} = \frac{\left(m_1 - k \frac{\theta_{M2}}{a(a+b)} \right)}{m_1 + \frac{\theta_{M2}}{a(a+b)}} v_{M1a}$$

und mit (5)
$$\omega_{2e} = \frac{v_{2e}}{a+b} \stackrel{(5)}{=} \frac{v_{M1e} + k v_{M1a}}{a+b}$$

$$= \frac{v_{M1a}}{a+b} \left(k + \frac{\left(m_1 - k \frac{\theta_{M2}}{a(a+b)} \right)}{m_1 + \frac{\theta_{M2}}{a(a+b)}} \right) = \frac{(1+k) m_1}{m_1 + \frac{\theta_{M2}}{a(a+b)}} \frac{v_{M1a}}{a+b} .$$

Da der 2. Körper nach dem Stoß eine Drehung um den **Stoßmittelpunkt** Mp macht, hätte man ihn in Mp aufhängen können, ohne dass es im Lager zu einem Reaktionsstoß gekommen wäre. Er hätte dann eine Pendelschwingung um Mp ausgeführt (ballistisches Pendel). Die max. Pendelhöhe h ergibt sich aus der Energiebilanz als

$$\frac{1}{2} \theta_{Mp} \omega_{2e}^2 = \frac{1}{2} (\theta_{M2} + b^2 m_2) \omega_{2e}^2 = m_2 g h .$$

Sie kann benutzt werden, um die Geschwindigkeit des Geschosses zu bestimmen.

Schwingungslehre

Als Schwingungen werden zeitliche Vorgänge bezeichnet, die (mehr oder weniger) regelmäßig oder periodisch sind. In der mechanischen Schwingungslehre werden periodische Vorgänge mechanischer Größen betrachtet. Sie stellt damit ein Teilgebiet der Kinetik dar.

Als **periodisch** wird eine zeitabhängige Größe $u(t)$ bezeichnet, wenn eine Zeitdauer T existiert, so dass zu allen Zeiten t

$$u(t) = u(t + T)$$

gilt. Man nennt

| | |
|--|----------------------------|
| T | Periode [s] |
| $f := \frac{1}{T}$ | Frequenz [Hertz Hz := 1/s] |
| $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ | Kreisfrequenz [Hz] |
| $A = \frac{1}{2}(u_{\max} - u_{\min})$ | Amplitude |

Es gibt viele Arten, Schwingungen zu klassifizieren. Lenken wir ein System aus und lassen es frei schwingen, so handelt es sich um **freie** oder **Eigenschwingungen**. Wird das System hingegen noch während der Schwingung angeregt, so nennt man sie **erregt**. Bewegt sich das System reibungsfrei (elastisch), so ist es **ungedämpft**, andernfalls **gedämpft**. Außerdem unterscheidet man nach der Anzahl der Freiheitsgrade des System den **N-Massenschwinger** und die **Kontinuumschwingungen** mit unendlich vielen Freiheitsgraden. Wir werden uns zunächst mit freien Schwingungen beschäftigen.

Freie lineare ungedämpfte Einmassen-Schwingung

(ohne Berücksichtigung des Gewichts und Dämpfung)

Es gilt zu allen Zeiten der Energieerhaltungssatz

$$K \dot{\bullet} + W \dot{\bullet} = 0 = m \dot{u} \ddot{u} + c u \dot{u}$$

$$\Rightarrow m \dot{u} \ddot{u} + c u \dot{u} = 0$$

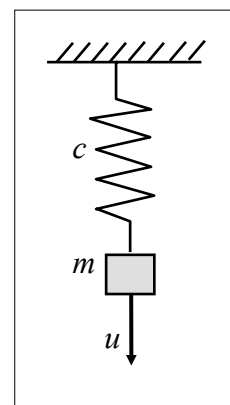
oder

$$u \ddot{\bullet} + \omega^2 u = 0$$

mit der **Eigenkreisfrequenz** $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$,

die unabhängig von der Amplitude ist.

Dies ist eine lineare gewöhnliche homogene Differenzialgleichung 2. Ordnung in der Zeit. Über den Lösungsvorrat derartiger Dgl. gibt uns die Mathematik genaue Auskunft. Sie werden nämlich durch Linearkombinationen von 2 unabhängigen Lösungen gebildet, einem Fundamentalsystem. Der Lösungsansatz ist



$$u(t) = e^{\lambda t}$$

$$u(t)^{\bullet} = \lambda e^{\lambda t}$$

$$u(t)^{\bullet\bullet} = \lambda^2 e^{\lambda t}.$$

Setzen wir dies in die Dgl. ein, so ergibt sich die **Eigenwertgleichung**

$$(\lambda^2 + \omega^2) e^{\lambda t} = 0,$$

was zu allen Zeiten nur dann erfüllt ist, wenn

$$\lambda^2 = -\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\omega^2} = \pm i \omega$$

mit der imaginären Einheit $i = \sqrt{-1}$.

Die vollständige Lösung ist dann die **harmonische Schwingung**

$$u(t) = C_1 e^{+i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$$

Zur Bestimmung von C_1 und C_2 benötigt man 2 zusätzliche Bedingungen, z. B. die **Anfangsbedingungen**

$$u(t=0) = u_0 = C_1 + C_2$$

$$u(t=0)^{\bullet} = v_0 = i \omega (C_1 - C_2)$$

mit den konjugiert komplexen Lösungen

$$C_1 = \frac{1}{2} \left(u_0 + \frac{v_0}{i \omega} \right) = \frac{1}{2} \left(u_0 - i \frac{v_0}{\omega} \right)$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \left(u_0 - \frac{v_0}{i \omega} \right) = \frac{1}{2} \left(u_0 + i \frac{v_0}{\omega} \right).$$

Damit ist das Anfangswert-Problem gelöst.

Zu anderen Darstellungen der Lösung gelangt man mit der EULERSchen Formel

$$e^{\pm i \omega t} = \cos(\omega t) \pm i \sin(\omega t).$$

Damit können wir umformen

$$u(t) = (C_1 + C_2) \cos(\omega t) + (C_1 - C_2) i \sin(\omega t)$$

$$u(t) = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t)$$

mit den reellen Koeffizienten

$$A_1 := C_1 + C_2 = u_0$$

$$A_2 := (C_1 - C_2) i = \frac{v_0}{\omega}.$$

Die harmonische Schwingung kann gedeutet werden als Projektion einer Kreisbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. Da A_1 und A_2 reelle Konstanten sein sollen, müssen C_1 und C_2 grundsätzlich konjugiert komplex sein.

Eine weitere Darstellungsform der vollständigen Lösung folgt aus dem trigonometrischen Additionstheorem

$$\cos(\omega t + \varphi_0) = \cos(\omega t) \cos(\varphi_0) - \sin(\omega t) \sin(\varphi_0)$$

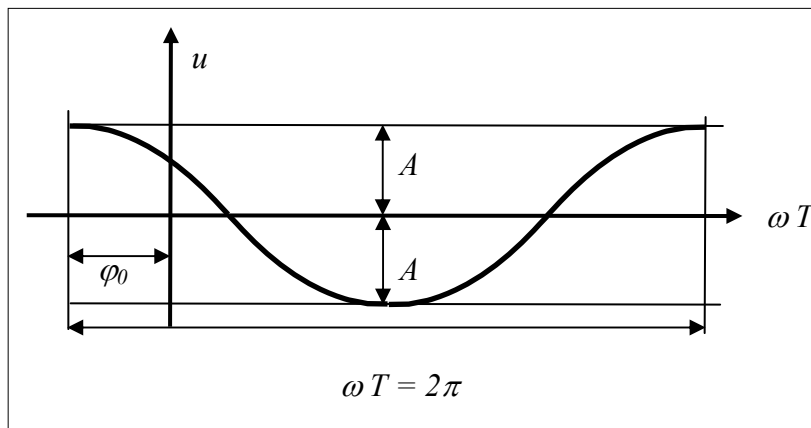
als

$$\begin{aligned} u(t) &= A \cos(\omega t + \varphi_0) = A \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi/2) \\ &= A \cos(\omega t) \cos(\varphi_0) - A \sin(\omega t) \sin(\varphi_0) \end{aligned}$$

mit

$$A_1 = A \cos(\varphi_0) = u_0$$

$$A_2 = -A \sin(\varphi_0) = \frac{v_0}{\omega}$$



Diese Gleichungen können nach der Amplitude und dem Nullphasenwinkel aufgelöst werden

$$A = \sqrt{(A_1^2 + A_2^2)} = \sqrt{(u_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2})} \quad \text{Amplitude}$$

$$\tan \varphi_0 = -\frac{A_2}{A_1} = -\frac{v_0}{\omega u_0} \Rightarrow \varphi_0 = -\arctan \frac{A_2}{A_1} \quad \text{Nullphasenwinkel.}$$

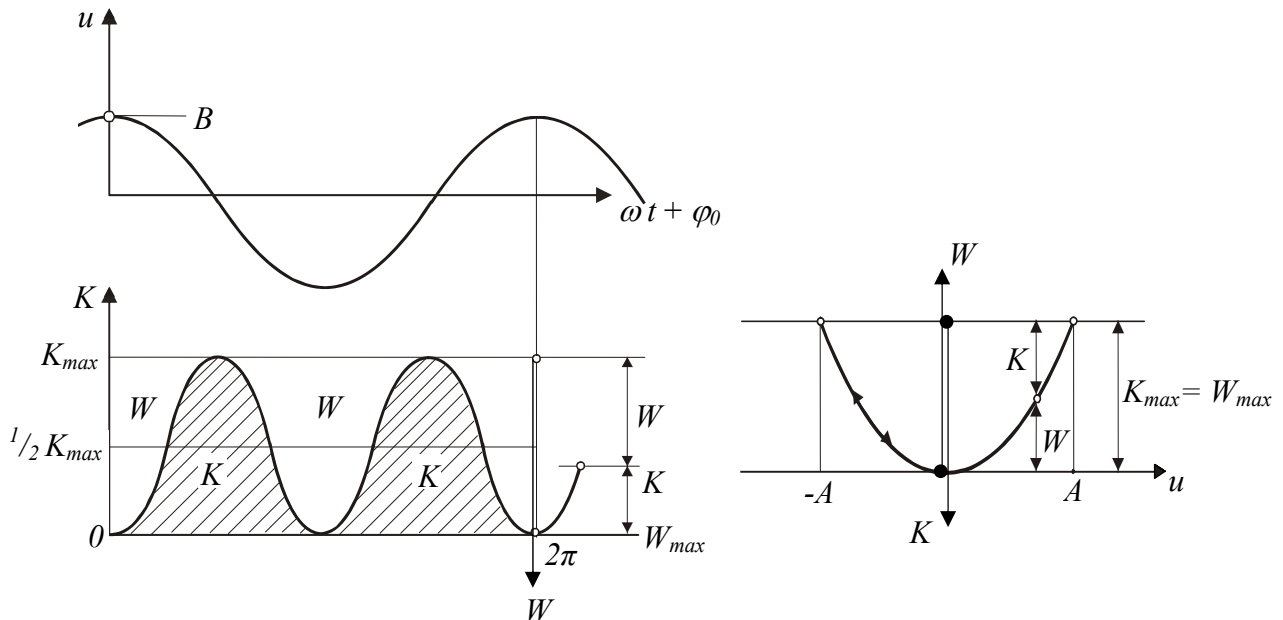
Die beiden Energieformen sind

- die kinetischen Energie $K = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow K_{\max} = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2$

- die Federenergie $W = \frac{1}{2} c A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow W_{\max} = \frac{1}{2} c A^2$

Nach dem Energiesatz ist für unser konservatives Schwingungssystem die Summe aus kinetischer und elastischer Energie konstant

$$\begin{aligned}
 - \quad \text{Gesamtenergie} &= \frac{1}{2} A^2 [m \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) + c \cos^2(\omega t + \varphi_0)] \\
 &= \frac{1}{2} A^2 c [\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0)] = \frac{1}{2} A^2 c = K_{\max} = W_{\max}
 \end{aligned}$$



Berücksichtigung des Eigengewichts

In der **statischen Ruhelage** u_{st} sind Gewicht und Federkraft im Gleichgewicht

$$m g = c u_{st} .$$

Der Energieerhaltungssatz besagt

$$\begin{aligned}
 (K + W + U)^\bullet &= 0 = (\frac{1}{2} m \dot{u}^2 + \frac{1}{2} c u^2 - m g u)^\bullet \\
 &= m \dot{u} \ddot{u} + c u \dot{u} - m g \dot{u}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow m \ddot{u} + c u = m g = c u_{st} \Rightarrow m \ddot{u} + c (u - u_{st}) = 0$$

Mit der KOO-Transformation

$$\underline{u}(t) := u(t) - u_{st}$$

gilt wieder

$$\underline{u}^{\bullet\bullet} + \omega^2 \underline{u} = 0 \quad \text{mit } \omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{g}{u_{st}}} .$$

Man kann also durch Messung der statischen Auslenkung bereits die Eigenfrequenz bestimmen. Die Berücksichtigung des Eigengewichts ändert an der Schwingung lediglich die Mittellage um u_{st} . Wir werden uns im Weiteren deshalb immer auf die statische Ruhelage beziehen.

Lineare gedämpfte Schwingungen

Reale Schwingungsvorgänge sind immer gedämpft, weil während der Bewegung Energie dissipiert wird infolge Lagerreibung, Luftreibung, Materialdämpfung usw. Wir unterscheiden zwischen (Geschwindigkeits-unabhängiger) Trockenreibung und (Geschwindigkeits-abhängiger) viskoser Reibung.

Trockenreibung

Wir betrachten einen Schwinger, der auf einer Ebene reibt. Wir benutzen das COULOMBSche Trockenreibungs-Gesetz mit dem Gleitreibungs-Koeffizienten μ . Die Reibungskraft ist dann

$$R = \mu N = \mu m g$$

und wirkt immer der Geschwindigkeit entgegen. Damit erhalten wir die Dgl.

$$m u'' = -c u - \text{sign}(u') R$$

oder mit $\omega^2 := c/m$ und $r := R/c$

$$u'' + \omega^2 u = -\text{sign}(u') \omega^2 r.$$

Wie lösen dieses System abschnittsweise und führen jedes mal eine neue Zeit ein.

1. Abschnitt $u' < 0$

Hier gilt $u'' + \omega^2 u = +\omega^2 r$

Ansatz: $u(t_1) = u_h(t_1) + u_p(t_1) = A_1 \cos(\omega t_1) + B_1 \sin(\omega t_1) + r$

Als Anfangsbedingung betrachten wir die Anfangsauslenkung

$$u(t_1 = 0) = A_1 + r = u_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad A_1 = u_0 - r$$

$$u'(t_1 = 0) = \omega B_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_1 = 0$$

und damit die spezielle Lösung

$$u(t_1) = (u_0 - r) \cos(\omega t_1) + r$$

eine um r verschobene harmonische Schwingung. Dies gilt bis zum Umkehrzeitpunkt

$$t_1 \equiv \pi / \omega.$$

Hier ist $u(t_1 \equiv \pi / \omega) = -u_0 + 2r$

und $u'(t_1 \equiv \pi / \omega) = 0$.

Zu diesem Zeitpunkt ändert sich das Vorzeichen von u' und es beginnt der

2. Abschnitt $u' > 0$

Jetzt gilt $u'' + \omega^2 u = -\omega^2 r$

Ansatz: $u(t_2) = u_h(t_2) + u_p(t_2) = A_2 \cos(\omega t_2) + B_2 \sin(\omega t_2) - r$

Aus den Übergangsbedingungen folgt

$$u(t_2 \equiv 0) = u(t_1 \equiv \pi/\omega) = -u_0 + 2r = A_2 - r \quad \Rightarrow \quad A_2 = -u_0 + 3r$$

$$u(t_2 \equiv 0)' = u'(t_1 \equiv \pi/\omega) = 0 = \omega B_2 \quad \Rightarrow \quad B_2 = 0$$

und damit die spezielle Lösung

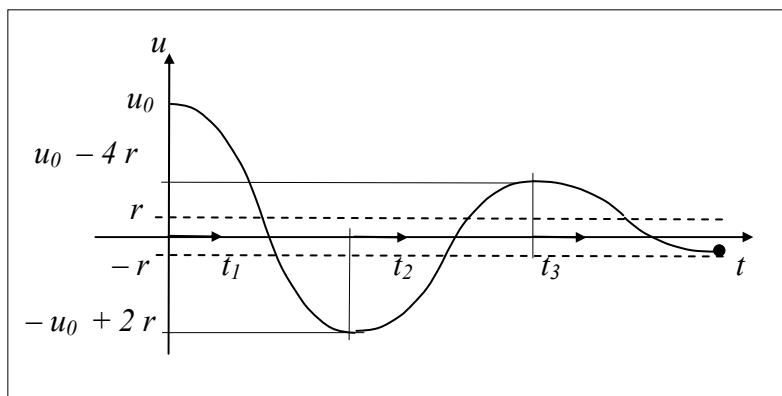
$$u(t_2) = (-u_0 + 3r) \cos(\omega t_2) - r$$

eine um $-r$ verschobene harmonische Schwingung mit kleinerer Amplitude; usw.

Die Frequenz ist gleich derjenigen des reibungsfreien Systems. Die Amplitude nimmt bei jeder Halbschwingung um $2r$ ab. Ist die Verschiebung am Umkehrpunkt

$$|u(t_m = 0)| \leq r \quad \Rightarrow \quad |F_c| = |u(t_m = 0)| c \leq r c = R,$$

so bleibt die Masse liegen.



Viskose Reibung

Die einfachste Art Geschwindigkeits-abhängige Reibung zu berücksichtigen besteht in dem Ansatz einer Geschwindigkeits-proportionalen Dämpfungskraft

$$F_d = -r u' \quad r > 0,$$

die immer der Bewegung entgegenwirkt. Ein solcher Dämpfungsmechanismus wird durch einen Dämpfer symbolisiert.

Für das skizzierte System ergibt sich die lineare homogene Differenzialgleichung 2. Ordnung in der Zeit

$$m u'' + r u' + c u = 0.$$

Sie wird umgeformt in

$$u'' + 2\omega_0 D u' + \omega_0^2 u = 0$$

mit den Konstanten

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} \quad \text{Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems}$$

$$D = \frac{r}{2 m \omega_0} > 0 \quad \text{LEHR}^{39}\text{ches Dämpfungsmaß.}$$

Wir wählen wieder den Lösungsansatz

$$u(t) = e^{\lambda t}$$

und erhalten die **Eigenwertgleichung**

$$\lambda^2 + 2 D \omega_0 \lambda + \omega_0^2 = 0$$

mit den beiden Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\omega_0 D \pm \omega_0 \sqrt{D^2 - 1}.$$

Dabei hängt der Charakter der Lösung davon ab, ob es sich um reelle oder komplexe Eigenwerte handelt.

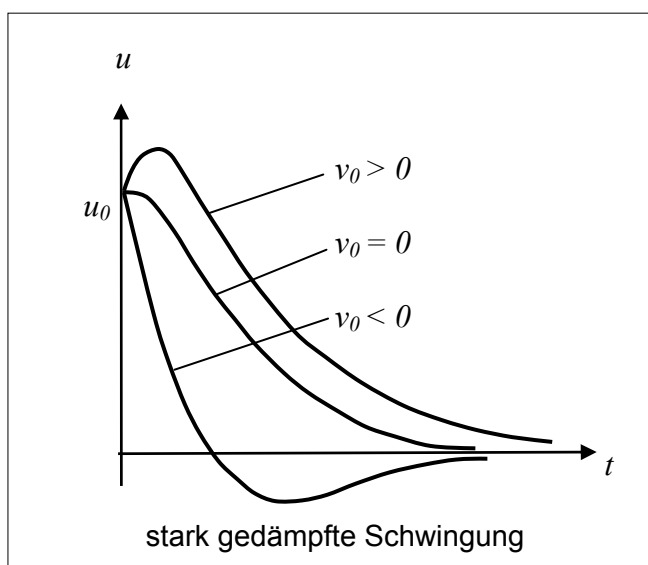
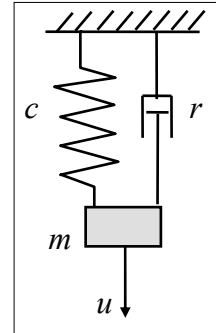
Fallunterscheidung

a) **starke Dämpfung:** $D > 1$

Wegen $\sqrt{D^2 - 1} > 0$ sind $\lambda_{1,2}$ reell. Damit ist die allgemeine Lösung

$$u(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = e^{-\omega_0 D t} (C_1 e^{\omega_0 \sqrt{D^2 - 1} t} + C_2 e^{-\omega_0 \sqrt{D^2 - 1} t}).$$

Die beiden Konstanten werden aus Anfangsbedingungen bestimmt. Es handelt sich um keine Schwingung, sondern um eine Kriechbewegung, die gegen die statische Ruhelage konvergiert. Dabei sind maximal ein Extremum und ein Nulldurchgang möglich.



³⁹ Ernst Lehr (1896 - 1944)

b) **"aperiodischer Grenzfall":** $D = 1$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\omega_0$$

Aus der Theorie der Differentialgleichungen ist folgender Satz bekannt: Wenn λ_i die k -fache Wurzel der charakteristischen Gleichung ist, dann sind

$$t e^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \dots, t^{k-1} e^{\lambda t}$$

auch Lösungen. In unserem Fall ist $k \equiv 2$ und damit die allgemeine Lösung

$$u(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t} = e^{-\omega_0 t} (C_1 + C_2 t)$$

und
$$u(t)^\bullet = e^{-\omega_0 t} [-\omega_0 C_1 + (1 - \omega_0 t) C_2].$$

Mit den Anfangsbedingungen

$$u(0) = u_0 = C_1$$

$$u(0)^\bullet = v_0 = -\omega_0 C_1 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = v_0 + \omega_0 u_0$$

folgt
$$u(t) = e^{-\omega_0 t} [u_0 + (\omega_0 u_0 + v_0) t].$$

Es ist also maximal ein Nulldurchgang möglich, wenn der Klammerausdruck [...] = 0 für eine positive Zeit t_0 ist. Nach der Zeit aufgelöst ergibt sich

$$t_0 = \frac{-u_0}{\omega_0 u_0 + v_0} = \frac{-1}{\omega_0 + v_0 / u_0}.$$

Dies ist nur dann positiv, wenn der Nenner negativ ist oder

$$\frac{v_0}{u_0} < -\omega_0$$

ist.

c) **schwache Dämpfung:** $D < 1$

Dies ist schwingungstechnisch der wichtigste Fall. Hier wird $\sqrt{D^2 - 1}$ imaginär. Die Lösungen der charakteristischen Gleichung sind

$$\lambda_{1,2} = -\omega_0 D \pm \omega_0 \sqrt{D^2 - 1} = -\delta \pm i \omega$$

mit den Konstanten

$$\omega := \omega_0 \sqrt{1 - D^2} < \omega_0 \quad \text{Eigenfrequenz des gedämpften Systems}$$

$$\delta := \omega_0 D = \frac{r}{2m} > 0 \quad \text{Abklingkoeffizient}$$

Die allgemeine Lösung ist

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-\delta t} (C_1 e^{+i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}) \\ &= e^{-\delta t} [A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t)] \\ &= e^{-\delta t} A \cos(\omega t + \varphi_0) \end{aligned}$$

mit den Konstanten C_1 , C_2 , A_1 , A_2 , A , φ_0 , die aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden. Die Schwingung pendelt quasi-harmonisch mit $\cos(\omega t + \varphi_0)$ zwischen $\pm A e^{-\delta t}$. Die Periode ist

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

also etwas länger als im ungedämpften Fall, da die gedämpfte Eigenfrequenz etwas kleiner als die ungedämpfte ist.

Das Verhältnis zweier aufeinander folgender Maxima ist konstant

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{e^{-\delta t}}{e^{-\delta(t+T)}} = e^{\delta T}.$$

Dessen Logarithmus heißt **logarithmisches Dekrement**

$$\varrho := \ln \frac{u_n}{u_{n+1}} = \delta T = \frac{r\pi}{m\omega}.$$

Man kann es zur Identifikation von r benutzen.

Wir haben uns bisher mit der freien Schwingung eines linearen Systems befasst. Dabei gerät das System infolge einer Anfangsstörung (-auslenkung, -geschwindigkeit) in eine Schwingung, die

- im elastischen (also ungedämpften) Fall harmonisch ist und ewig dauert;
- im gedämpften Fall nicht mehr (streng) harmonisch ist und mit der Zeit abklingt.

Erzwungene Schwingungen

In vielen praktischen Fällen gibt es Fremdeinwirkungen auf das System während des Schwingvorganges. Man spricht in diesem Fall von einer erzwungenen oder (fremd-) erregten Schwingung und unterscheidet bezüglich der Art der Erregung

- Krafterregung
 - Wegerregung
 - o. a.
- sowie nach dem zeitlichen Verlauf der Erregergröße
- periodische, speziell
 - harmonische
 - stoßartige

- regellose, zufällige Erregungen.

Erzwungene Schwingung mit Krafterregung

An dem gedämpften oder ungedämpften Einmassenschwinger greife eine **Erregerkraft** $F(t)$ an, deren zeitlicher Verlauf vorgegeben sei. Damit erhalten wir die Schwingungs-Differenzialgleichung

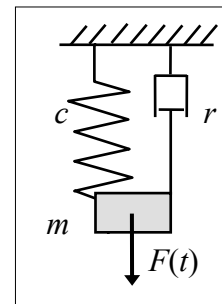
$$m u'' + r u' + c u = F(t),$$

die für $F(t) \neq 0$ inhomogen ist. Die allgemeine Lösung dieser Dgl. $u(t)$ setzt sich additiv aus einer **homogenen Lösung** $u_h(t)$ und einer **partikulären Lösung** $u_p(t)$ zusammen

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t).$$

Die homogene Lösung befriedigt die homogene Dgl.

$$m u_h'' + r u_h' + c u_h = 0$$



und die partikuläre Lösung die inhomogene Dgl. Wegen der Linearität der Dgl. können beide Teillösungen superponiert werden.

Mit der homogenen Lösung haben wir uns bereits im vorigen Abschnitt beschäftigt. Die partikuläre Lösung hängt naturgemäß entscheidend von dem zeitlichen Verlauf der Störkraft $F(t)$ ab. Den zeitlich konstanten Fall haben wir bereits bei der Berücksichtigung des Eigengewichts des Schwingers behandelt. Betrachten wir den Fall einer **harmonischen Erregerkraft** mit der Darstellung

$$F(t) = \hat{F} \cos(\Omega t)$$

mit \hat{F} der Erregerkraft-Amplitude

Ω der Erregerkreisfrequenz.

Wir formen die Dgl. um zu

$$u'' + 2D \omega_0 u' + \omega_0^2 u = \omega_0^2 \hat{u}_F \cos(\Omega t)$$

mit $\omega_0 := \sqrt{\frac{c}{m}}$ Eigenfrequenz des ungedämpften Systems

$D := \frac{r}{2m \omega_0}$ LEHRsches Dämpfungsmaß

$$\hat{u}_F := \frac{\hat{F}}{c} \quad \text{bezogene Erregerkraft-Amplitude}$$

$$\eta := \frac{\Omega}{\omega_0} \quad \text{Abstimmung}$$

Wir unterscheiden nun wieder den gedämpften und den ungedämpften Fall.

a) **ungedämpfter Fall** $D \equiv 0 \equiv r$

Die homogene Lösung ist dieselbe, wie bereits betrachtet. Für die partikuläre Lösung machen wir den Ansatz

$$u_p(t) = \hat{u} \cos(\Omega t),$$

so dass

$$u_p(t)'' = -\Omega^2 u_p(t).$$

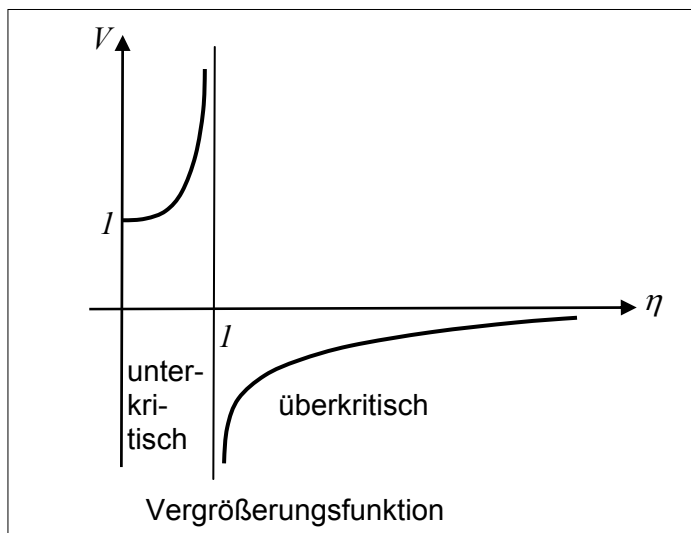
Eingesetzt in die Dgl. ergibt sich

$$(-\Omega^2 + \omega_0^2) \hat{u} = \omega_0^2 \hat{u}_F$$

und damit die **Vergrößerungsfunktion**

$$V(\eta) := \frac{\hat{u}}{\hat{u}_F} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \frac{1}{1 - \eta^2}.$$

Sie hat an der Resonanzstelle $\eta \equiv 1$ einen Pol mit Vorzeichenwechsel.



Folgende Bereiche lassen sich unterscheiden:

- $\eta < 1$ **unterkritische Erregung** $V > 0$
hochabgestimmter Schwinger schwingt gleichphasig mit der Erregung
- $\eta > 1$ **überkritische Erregung** $V < 0$
tiefabgestimmter Schwinger schwingt gegenphasig zur Erregung.

$$\eta = 1 \quad \text{Resonanz} \quad \omega_0 = \Omega \Rightarrow V = \pm \infty$$

Wird diese Stelle von kleineren Abstimmungen zu höheren durchlaufen, wächst die Amplitude (theoretisch) beliebig an. Beim Durchlaufen des Resonanzpunktes springt die Phase von gleich auf gegenphasig. Bei längerer Verweildauer im Resonanzpunkt wird der stationäre Ansatz bedeutungslos. Hier gilt der Ansatz

$$u_p(t) = \hat{u}_F A t \sin(\Omega t)$$

$$u_p'(t) = \hat{u}_F A \sin(\Omega t) + \hat{u}_F A \Omega t \cos(\Omega t)$$

$$u_p''(t) = 2 \hat{u}_F A \Omega \cos(\Omega t) - \hat{u}_F A \Omega^2 t \sin(\Omega t).$$

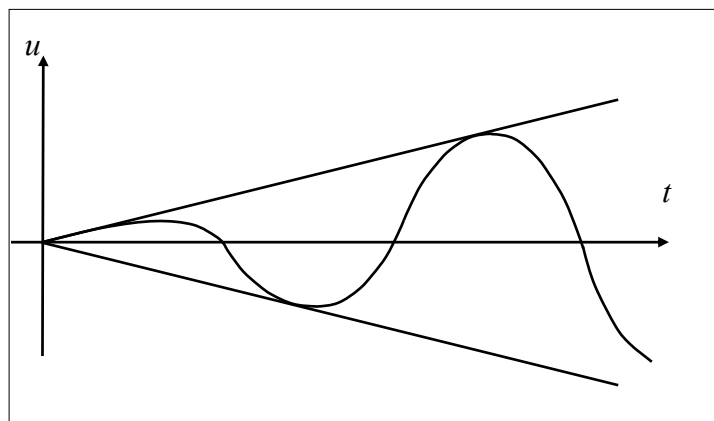
Er wird in die Dgl. mit $\Omega \equiv \omega_0$ eingesetzt

$$u_p'' + \omega_0^2 u_p = \omega_0^2 \hat{u}_F \cos(\Omega t)$$

$$= 2 \hat{u}_F A \Omega \cos(\Omega t) - \hat{u}_F A \Omega^2 t \sin(\Omega t) + \hat{u}_F \Omega^2 A t \sin(\Omega t)$$

$$= \Omega^2 \hat{u}_F \cos(\Omega t) \Rightarrow A = \Omega/2 \Rightarrow u_p(t) = \frac{1}{2} \hat{u}_F \Omega t \sin(\Omega t)$$

also eine linear angefachte Sinus-Schwingung.



b) gedämpfter Fall

Die homogene Lösung wie vorher. Für die partikuläre Lösung machen wir den Ansatz

$$u_p(t) = \hat{u} \cos(\Omega t + \varphi_A).$$

In die Dgl. eingesetzt, ergibt sich schließlich

$$[(\omega_0^2 - \Omega^2) \cos(\Omega t + \varphi_A) - 2D \omega_0 \Omega \sin(\Omega t + \varphi_A)] \hat{u}$$

$$= \omega_0^2 \hat{u}_F \cos(\Omega t)$$

nach den Additionsregeln der Trigonometrie

$$\cos(\Omega t + \varphi_A) = \cos(\Omega t) \cos \varphi_A - \sin(\Omega t) \sin \varphi_A$$

$$\sin(\Omega t + \varphi_A) = \sin(\Omega t) \cos \varphi_A + \cos(\Omega t) \sin \varphi_A$$

und nach Division durch ω_0^2

$$\begin{aligned} & \{[(1 - \eta^2) \cos \varphi_A - 2D\eta \sin \varphi_A] \hat{u} - \hat{u}_F\} \cos(\Omega t) \\ & + [-(1 - \eta^2) \sin \varphi_A - 2D\eta \cos \varphi_A] \hat{u} \sin(\Omega t) = 0. \end{aligned}$$

Da dies für alle t gelten soll, müssen die Koeffizienten-Klammern Null sein. Aus $[\dots] = 0$ folgt der *Phasen-Frequenzgang*

$$\tan \varphi_A = \frac{\sin \varphi_A}{\cos \varphi_A} = -\frac{2D\eta}{1 - \eta^2}$$

und aus $\{\dots\} = 0$

$$\hat{u} = \frac{\hat{u}_F}{(1 - \eta^2) - 2D\eta \tan \varphi_A} \frac{1}{\cos \varphi_A} = V \hat{u}_F.$$

Mit

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos \varphi_A} &= \operatorname{sgn}(1 - \eta^2) \sqrt{1 + \tan^2 \varphi_A} = \operatorname{sgn}(1 - \eta^2) \sqrt{1 + \left(\frac{2D\eta}{1 - \eta^2}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}{1 - \eta^2} \end{aligned}$$

ergibt sich für die Vergrößerungsfunktion der *Amplituden-Frequenzgang*

$$V(\eta) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}.$$

Wir wollen drei Sonderfälle getrennt betrachten.

1. Fall $\Omega = \omega_0 \Leftrightarrow \eta = 1$ ungedämpfter Resonanzfall

Erregerfrequenz = Eigenfrequenz des ungedämpften Systems

Die Vergrößerungsfunktion wird

$$V(\eta) = \frac{1}{2D} = \frac{m\omega_0}{r} = \frac{\sqrt{mc}}{r}.$$

2. Fall maximale Vergrößerung

Das Maximum erreicht die Vergrößerungsfunktion an der Stelle η_r , das sich bestimmt aus der Bedingung

$$\frac{dV}{d\eta} = 0 = -\frac{1}{2} \frac{-2(1-\eta_r^2)2\eta_r + 8D^2 \eta_r}{\left[(1-\eta_r^2)^2 + (2D \eta_r)^2 \right]^{3/2}},$$

also bei

$$\eta_r^2 - 1 + 2D^2 = 0$$

und damit

$$\eta_r = \sqrt{1 - 2D^2}.$$

Dies ist reell für $D^2 < 1/2$. Die Vergrößerungsfunktion hat hier den maximalen Wert

$$V(\eta_r) = [4D^4 + 4D^2(1 - 2D^2)]^{-1/2} = (2D \sqrt{1 - D^2})^{-1}.$$

3. Fall $\Omega = \omega = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$

Erregerfrequenz gleich Eigenfrequenz des gedämpften Systems

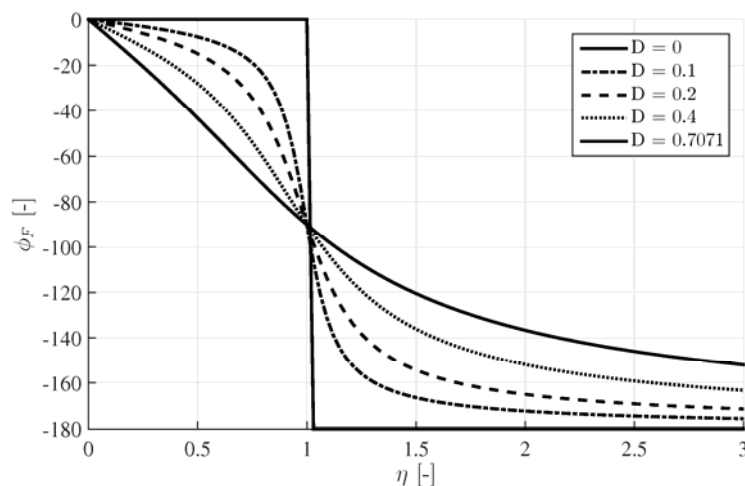
$$\eta_d = \frac{\Omega}{\omega_0} = \frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1 - D^2}.$$

Es gilt die Reihenfolge

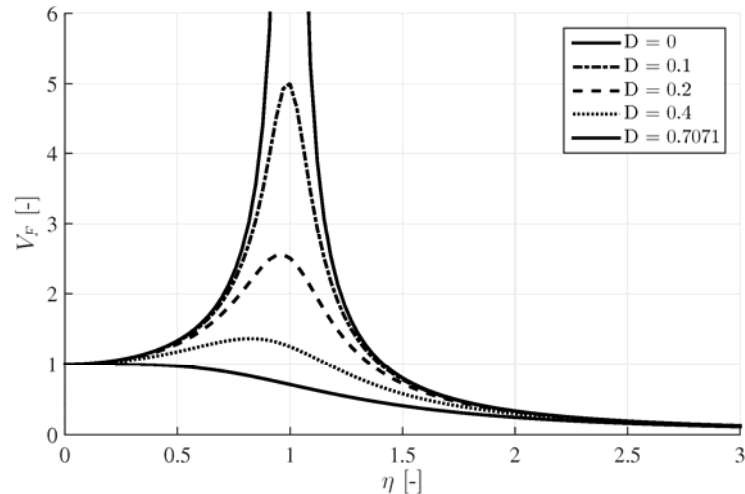
$$\eta_r < \eta_d < 1.$$

Ist $F(t)$ eine Reihe harmonischer Erregungen, so wirken insbesondere die resonanznahen Reihenglieder (Filterwirkung).

Betrachten wir den Verlauf des Phasenwinkels und der Vergrößerungsfunktion als Funktion der Abstimmung für verschiedene Dämpfungen.

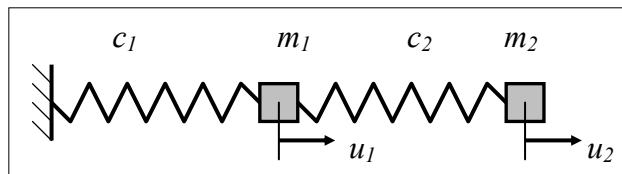


Darstellung des Phasenwinkels φ_A über der Abstimmung η für verschiedene Dämpfungen



Darstellung der Vergrößerungsfunktion V über der Abstimmung η für verschiedene Dämpfungen

Freie Schwingungen des ungedämpften 2-Massen-Schwingers



Wir betrachten die Verschiebungen aus der statischen Ruhelage heraus. Der Massenmittelpunkt-Satz für beide Massen ist

$$\begin{aligned} m_1 u_1'' &= -c_1 u_1 + c_2 (u_2 - u_1) & \Leftrightarrow & \quad m_1 u_1'' + (c_1 + c_2) u_1 - c_2 u_2 = 0 \\ m_2 u_2'' &= c_2 (u_1 - u_2) & \Leftrightarrow & \quad m_2 u_2'' - c_2 u_1 + c_2 u_2 = 0 \end{aligned}$$

Dies sind zwei gekoppelte lineare homogene Dgl. zweiter Ordnung.

Als Ansatz wählen wir

$$\begin{aligned} u_1(t) &= A_1 e^{\lambda t} & \Rightarrow & \quad u_1(t)'' = \lambda^2 u_1(t) \\ u_2(t) &= A_2 e^{\lambda t} & \Rightarrow & \quad u_2(t)'' = \lambda^2 u_2(t) . \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Dgl. ergibt er die Eigenwertgleichungen

$$\begin{aligned} \lambda^2 m_1 A_1 + (c_1 + c_2) A_1 - c_2 A_2 &= 0 = (\lambda^2 m_1 + c_1 + c_2) A_1 - c_2 A_2 \\ \lambda^2 m_2 A_2 - c_2 A_1 + c_2 A_2 &= 0 = -c_2 A_1 + (\lambda^2 m_2 + c_2) A_2 \end{aligned}$$

oder in Matrizen-Schreibweise

$$[\lambda^2 \mathbf{M} + \mathbf{C}] [A_1, A_2] = [0, 0]$$

mit zwei symmetrischen und positiv-definiten Matrizen

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}.$$

Dieses homogene gekoppelte lineare Gleichungssystem hat nur nicht-triviale Lösungen, wenn die Koeffizienten-Determinante Null ist, was auf die charakteristische Gleichung führt

$$\begin{aligned} (\lambda^2 m_1 + c_1 + c_2) (\lambda^2 m_2 + c_2) - c_2 c_2 &= 0 \\ = \lambda^4 m_1 m_2 + \lambda^2 (m_1 c_2 + m_2 c_1 + m_2 c_2) + c_1 c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in λ^2 von der Standard-Form

$$\lambda^4 + a \lambda^2 + b = 0 \quad \text{mit} \quad a, b > 0$$

mit den beiden Lösungen

$$\lambda_{1,2}^2 = -a/2 \pm \sqrt{a^2/4 - b} \leq 0.$$

Jede der beiden EW-Gleichungen liefert für das Amplituden-Verhältnis für λ_i^2 für $i = 1, 2$

$$\mu_i := \frac{A_{2i}}{A_{1i}} = \frac{\lambda_i^2 m_1 + c_1 + c_2}{c_2} = \frac{c_2}{\lambda_i^2 m_2 + c_2}.$$

Mit $\lambda_{1,2}^2 =: -\omega_{1,2}^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\omega_{1,2}^2} = \pm i \omega_{1,2}$

erhalten wir die vollständige Lösung mittels der EULERSchen Formeln

$$\begin{aligned} u_1(t) &= B_1 \cos(\omega_1 t) + \underline{B}_1 \sin(\omega_1 t) + B_2 \cos(\omega_2 t) + \underline{B}_2 \sin(\omega_2 t) \\ u_2(t) &= \mu_1 [B_1 \cos(\omega_1 t) + \underline{B}_1 \sin(\omega_1 t)] + \mu_2 [B_2 \cos(\omega_2 t) + \underline{B}_2 \sin(\omega_2 t)] \end{aligned}$$

mit vier Konstanten, die aus Anfangsbedingungen bestimmt werden müssen.

Betrachten wir den Spezialfall gleicher Massen und gleicher Federkonstanten

$$m_1 = m_2 = m \quad c_1 = c_2 = c,$$

dann ist die charakteristische Gleichung

$$\lambda^4 m^2 + \lambda^2 (3 m c) + c^2 = 0$$

mit den Lösungen

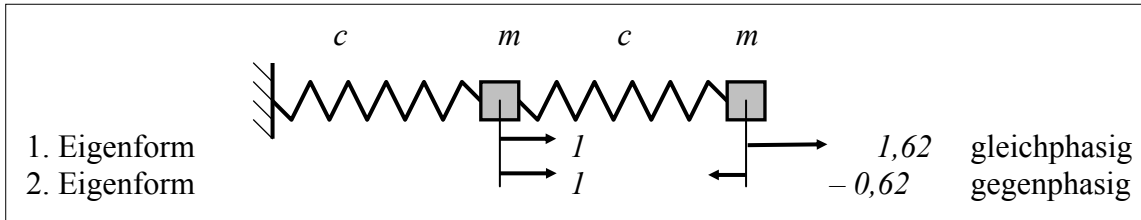
$$\lambda_{1,2}^2 = -\frac{3c}{2m} \pm \sqrt{\frac{9c^2}{4m^2} - \frac{c^2}{m^2}} = -\frac{c}{2m} (3 \pm \sqrt{5}) = -\frac{c}{m} \begin{cases} 0,38 \\ 2,62 \end{cases}$$

und damit

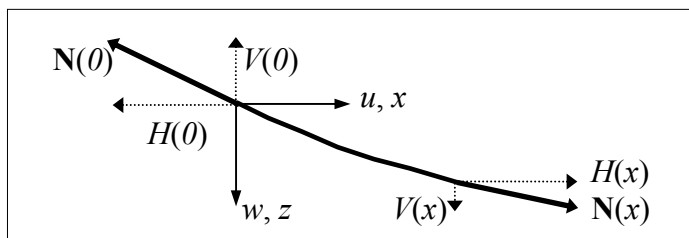
$$\omega_1 = \sqrt{0,38 \frac{c}{m}} = 0,618 \sqrt{\frac{c}{m}} \quad \omega_2 = \sqrt{2,62 \frac{c}{m}} = 1,62 \sqrt{\frac{c}{m}}$$

$$\mu_1 := \frac{A_{21}}{A_{11}} = \frac{\lambda_1^2 m + 2c}{c} = 2 - 0,38 = 1,62$$

$$\mu_2 := \frac{A_{22}}{A_{12}} = \frac{\lambda_2^2 m + 2c}{c} = 2 - 2,62 = -0,62$$



Saitenschwingungen



Wir betrachten eine zwischen zwei Punkten flachgespannte Saite mit der Spannkraft S und der Saitenmasse pro Länge μ . Die Auslenkung aus der Geraden sei klein, so dass wir bei der Massenbelegung nicht zwischen der Bogenlänge und der Projektion in x -Richtung unterscheiden müssen. Die Impulsbilanz liefert

vertikal:
$$V(x) - V(0) = \mu \int_0^x w'' dx \Rightarrow V(x)' = \mu w(x, t)''$$

horizontal:
$$H(x) - H(0) = \mu \int_0^x u'' dx \Rightarrow H(x)' = \mu u(x, t)''$$

Wenn wir die Längsverschiebungen vernachlässigen, folgt hieraus die Konstanz der Horizontalkraft, die gleich der Spannkraft S ist. Zwischen den beiden Kraftanteilen besteht bei kleinen Auslenkungen der geometrische Zusammenhang

$$V/H = w' \Rightarrow V = H w' \Rightarrow V' = H w'' = S w'' \Rightarrow$$

$$w'' = c^2 w'' \quad \text{mit } c^2 := S/\mu$$

Dieselbe Dgl. erhält man auch für die Torsions- und die Longitudinalschwingungen von Stäben. Sie wird als **Wellengleichung** bezeichnet.

1) Lösung nach D'ALEMBERT (Charakteristiken) mit zwei Ansatzfunktionen der Phase

$$w(x, t) = w_1(x - c t) + w_2(x + c t)$$

$$\Rightarrow w^\bullet(x, t) = -c w_1'(x - c t) + c w_2'(x + c t)$$

$$\Rightarrow w^{\bullet\bullet}(x, t) = c^2 w_1''(x - c t) + c^2 w_2''(x + c t) = c^2 w''$$

Dies erfüllt die Dgl. für $c^2 = S/\mu$. Die beiden Funktionen werden aus den Anfangsbedingungen bestimmt:

$$w(x, 0) = w_1(x) + w_2(x)$$

$$w^\bullet(x, 0) = c [-w_1'(x) + w_2'(x)].$$

Die Lösung stellt eine Überlagerung von zwei entgegelaufenden Wellen dar, deren Geschwindigkeit c der Schallgeschwindigkeit im entsprechenden Medium entspricht.

2) Lösung nach BERNOULLI

Wir machen hierfür einen Produktansatz nach BERNOULLI⁴⁰ mit einer Orts- und einer Zeitfunktion

$$w(x, t) = X(x) T(t).$$

Damit folgt

$$X(x) T(t)^{\bullet\bullet} = c^2 X(x)'' T(t)$$

oder

$$c^2 X(x)'' / X(x) = T(t)^{\bullet\bullet} / T(t) = -\omega^2 \quad \text{mit } c^2 := S/\mu,$$

weil eine reine Zeitfunktion nur gleich einer reinen Ortsfunktion sein kann, wenn sie beide konstant sind. Wir erhalten die beiden entkoppelten gewöhnlichen Dgls.

$$T(t)^{\bullet\bullet} + \omega^2 T(t) = 0$$

$$X(x)'' + \frac{\omega^2}{c^2} X(x) = 0.$$

Dafür machen wir folgende Ansätze

$$T(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

$$X(x) = C \cos\left(\frac{\omega}{c} x\right) + D \sin\left(\frac{\omega}{c} x\right).$$

Die Konstanten bestimmen wir aus den Randbedingungen.

$$\text{links: } w(0, t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\text{rechts: } w(L, t) = 0 \Rightarrow X(L) = 0 = D \sin\left(\frac{\omega}{c} L\right)$$

Daraus ergeben sich

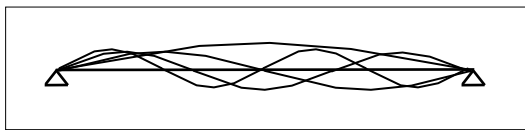
⁴⁰ Daniel Bernoulli (1700 - 1782)

$$\frac{\omega_k L}{c} = k \pi \quad \Rightarrow \quad \omega_k = \frac{kc\pi}{L} = \frac{k\pi}{L} \sqrt{\frac{S}{\mu}} \quad k = 1, 2, \dots$$

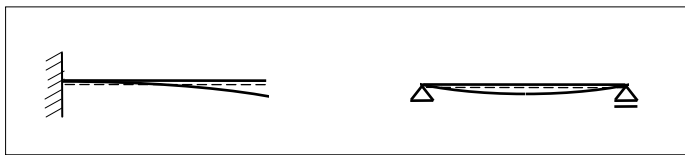
als Eigenkreisfrequenzen der Saite. Die Gesamtlösung ist dann die Linearkombinationen der Eigenformen nach Umbenennung der Konstanten

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t)] \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

wobei die Konstanten A_k und B_k aus Anfangsbedingungen zu bestimmen sind. Die Saite schwingt also als Überlagerung von unendlich-vielen Eigenformen. Zu jeder Eigenform gehört eine Eigenfrequenz. Erhöht man S , so werden alle Eigenfrequenzen höher.



Freie Biegeschwingung



Wir wollen die Biegeschwingungen eines frei schwingenden geraden und prismatischen Stabes berechnen. Dazu wenden wir mit

- keine Leistung der äußeren Lasten $L_a = 0$
- elastische Energie $W = \frac{1}{2} \int_0^L E I_y w''^2 dx \quad \Rightarrow \quad W^\bullet = \int_0^L E I_y w'' w''^\bullet dx$
- kinetische Energie $K = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} w^{\bullet 2} dm = \frac{1}{2} \int_0^L w^{\bullet 2} \rho A dx \quad \Rightarrow \quad K^\bullet = \int_0^L \rho A w^\bullet w^{\bullet\bullet} dx$

unter Vernachlässigung der rotatorischen Anteile den **Energie-Erhaltungssatz** an

$$W^\bullet + K^\bullet = 0 = \int_0^L E I_y w'' w''^\bullet dx + \int_0^L \rho A w^\bullet w^{\bullet\bullet} dx.$$

Das erste Integral integrieren wir zweimal partiell

$$W^\bullet = \int_0^L E I_y w'' w''^\bullet dx = E I_y w'' w' \cdot \Big|_0^L - \int_0^L E I_y w''' w' \cdot dx$$

$$= E I_y w'' w' \Big|_0^L - E I_y w''' w \Big|_0^L + \int_0^L E I_y w'''' w \, dx .$$

Damit wird aus dem Energieerhaltungssatz

$$0 = E I_y w'' w' \Big|_0^L - E I_y w''' w \Big|_0^L + \int_0^L E I_y w'''' w \, dx + \int_0^L \rho A w'' w \, dx .$$

Die Randterme sind für alle Lagerbedingungen Null, weil

- entweder $M = E I_y w'' = 0$ oder $w' = 0$
- entweder $Q = E I_y w''' = 0$ oder $w = 0$

sind. Die verbleibende Gleichung wird dadurch erfüllt, dass

$$E I_y w'''' + \rho A w'' = 0$$

oder

$$w'' + C w'''' = 0 \quad \text{mit } C := \frac{E I_y}{\rho A}$$

ist. Wir machen hierfür einen Produktansatz nach BERNOULLI

$$w(x, t) = X(x) T(t) .$$

Damit folgt

$$C X(x)'''' T(t) + X(x) T(t)'' = 0$$

oder

$$C X(x)'''' / X(x) = -T(t)'' / T(t) =: \omega^2 ,$$

weil eine reine Zeitfunktion nur gleich einer reinen Ortsfunktion sein kann, wenn sie beide konstant sind. Wir erhalten die beiden entkoppelten Dgls.

$$T(t)'' + \omega^2 T(t) = 0$$

$$X(x)'''' - \lambda^4 X(x) = 0 \quad \text{mit } \lambda^4 := \frac{\omega^2}{C} .$$

Dafür machen wir folgende Ansätze mit $\sinh x := \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$ und $\cosh x := \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$

$$T(t) = B_1 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t)$$

$$X(x) = A_1 \cos(\lambda x) + A_2 \sin(\lambda x) + A_3 \cosh(\lambda x) + A_4 \sinh(\lambda x)$$

$$\Rightarrow X(x)'' = -\lambda^2 A_1 \cos(\lambda x) - \lambda^2 A_2 \sin(\lambda x) + \lambda^2 A_3 \cosh(\lambda x) + \lambda^2 A_4 \sinh(\lambda x)$$

Die Konstanten bestimmen wir aus den Randbedingungen für den Balken auf zwei Stützen:

links: $w(0) = 0 = X(0) \Rightarrow A_1 + A_3 = 0$

$$w(0)'' = 0 = X(0)'' \Rightarrow -A_1 + A_3 = 0$$

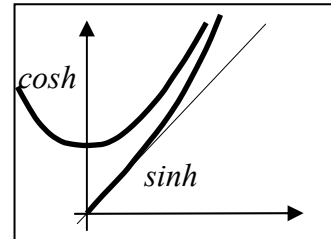
$$\Rightarrow A_1 = A_3 = 0$$

rechts: $w(L) = 0 = X(L) \Rightarrow A_2 \sin(\lambda L) + A_4 \sinh(\lambda L) = 0$

$$w(L)'' = 0 = X(L)'' \Rightarrow -A_2 \sin(\lambda L) + A_4 \sinh(\lambda L) = 0$$

$$\Rightarrow A_4 = 0 \text{ und } \sin(\lambda L) = 0 \Rightarrow \lambda L = k\pi, k = 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow \lambda_k = \frac{k\pi}{L} \quad \text{und} \quad \omega_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI_y}{\rho A}}$$



Damit ist die Lösung nach Umbenennung der Konstanten

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t)] \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

wobei die Konstanten A_k und B_k aus Anfangsbedingungen zu bestimmen sind. Dies ist eine Überlagerung von unendlich vielen sinus-förmigen Eigenformen.

Das Schwingungsproblem des Kragträgers führt auf die transzendente Gleichung

$$\cosh \lambda \cos \lambda = -1,$$

die sich nur näherungsweise lösen lässt.

Für einen Kontinuumsschwinger gibt es abzählbar-unendlich viele Eigenfrequenzen mit zugehörigen Eigenformen. Regt man das System mit einer Eigenfrequenz an, so schwingt es in Resonanz mit genau dieser zugehörigen Eigenform. Regt man es dagegen nicht mit einer Eigenfrequenz an, so schwingt es in einer Kombination von Eigenschwingungen.

RITZ-RAYLEIGH-Quotient

Er dient zur näherungsweise Bestimmung der Eigenfrequenzen bei Kontinuums-schwingungen wie z. B. der Transversalschwingung von Balken. Schwingt dieser nämlich mit einer bestimmten Eigenfrequenz ω , so gilt bei geeigneten Anfangsbedingungen

$$w(x, t) = \sin(\omega t) X(x).$$

Aus dem Energieerhaltungssatz folgt

$$K + W = \text{konst.} = K_{\max} = W_{\max}$$

mit der kinetischen Energie

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \dot{w}^2 \rho A dx = \frac{1}{2} \omega^2 \cos^2(\omega t) \int_0^L X(x)^2 \rho A dx$$

mit dem Maximum für $T(t) \equiv 1$

$$K_{\max} = \omega^2/2 \int_0^L X(x)^2 \rho A dx = \omega^2 K_{\text{bez}}$$

mit der **bezogenen kinetischen Energie**

$$K_{\text{bez}} := \frac{1}{2} \int_0^L X(x)^2 \rho A dx$$

und der elastischen Energie

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L E I_y \dot{w}''^2 dx = \frac{1}{2} \sin^2(\omega t) \int_0^L E I_y X(x)''^2 dx,$$

die ihr Maximum als

$$W_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^L E I_y X(x)''^2 dx$$

annimmt. Damit gilt für die zugehörige Eigenkreisfrequenz der **RAYLEIGH-Quotient**

$$\omega^2 = \frac{W_{\max}}{K_{\text{bez}}}.$$

Dies gilt exakt, wenn $X(x)$ eine Eigenform ist. Machen wir hierfür hingegen einen RITZ-Ansatz, der mindestens die geometrischen Randbedingungen erfüllen soll, so erhalten wir eine Näherungslösung für die Eigenfrequenz, die immer größer als die tatsächliche ist.

Beispiel

Für den beidseitig eingespannten prismatischen Stab machen wir den RITZ-Ansatz

$$X(x) = 1 - \cos \frac{2\pi}{L} x \quad \Rightarrow \quad X(x)'' = \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \cos \frac{2\pi}{L} x ,$$

der die geometrischen Randbedingungen erfüllt. Damit sind

$$W_{max} = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^4 \int_0^L E I_y \cos^2 \left(\frac{2\pi}{L} x \right) dx = 4 E I_y \pi^4 / L^3$$

und

$$K_{bez} := \frac{1}{2} \int_0^L \left(1 - \cos \frac{2\pi}{L} x \right)^2 \rho A dx = \frac{3}{4} \rho A L ,$$

womit der RITZ-RAYLEIGH-Quotient

$$\omega^2 = \frac{W_{max}}{K_{bez}} = \frac{4 E I_y \pi^4}{L^3} \frac{4}{3 \rho A L}$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \frac{22,79}{L^2} \sqrt{\frac{E I_y}{\rho A}} > \omega_{exakt}$$

ist. Dies unterscheidet sich von der exakten Lösung mit Faktor 22,37 nur um 1,8 %.

Index

| | | | |
|------------------------------|-----------------|------------------------------|---------------|
| 2. Ordnung..... | 105 | Charakteristik..... | 252 |
| Abstimmung..... | 246 | Chronometrie..... | 6 |
| AMONTON..... | 59 | CORIOLIS-Beschleunigung..... | 175 |
| Amplitude..... | 236 | COULOMB..... | 59, 240 |
| Andrückkraft..... | 53 | CREMONA-Plan..... | 68 |
| Anfangsbedingung..... | 237 | D'ALEMBERT..... | 212, 252 |
| ANTHEMIOS..... | 74 | D'ALEMBERTsches Prinzip..... | 180, 203 |
| aperiodisch..... | 243 | Dämpfer..... | 211 |
| APOLLODOROS..... | 73 | DARBOUX..... | 173 |
| Arbeit..... | 207 | Deformation..... | 80 |
| Arbeitssatz..... | 208 | Dehnsteifigkeit..... | 82 |
| Ausdehnungskoeffizient..... | 82, 130 | Dehnung..... | 80 |
| BACON..... | 22 | Dehnungsenergie..... | 163 |
| Bahn..... | 169 | Dekrement..... | 244 |
| Basis..... | 17 | Deviationsmoment..... | 87 |
| BELTRAMI..... | 168 | Deviatorspannung..... | 162 |
| BERNOULLI..... | 72, 76, 85, 253 | Dichte..... | 38 |
| BERNOULLIsche Hypothese..... | 85, 102, 143 | Dimension..... | 17 |
| Beschleunigung..... | 169 | Drall..... | 179 |
| BETTI..... | 225 | Drallbilanz..... | 180, 182 |
| Bewegungsgesetze..... | 180 | Drallbilanz, lokal..... | 203 |
| Bewegungsschraube..... | 190 | Drallerhaltungssatz..... | 183 |
| Bezeichnungen..... | 12 | Drehimpuls..... | 179 |
| Bezugsbeschleunigung..... | 189 | Drehstoß..... | 229 |
| Bezugssystem..... | 169 | Dreipolsatz..... | 192 |
| Biegeenergie..... | 163 | Drillung..... | 148 |
| biegekritisch..... | 202 | Druck..... | 134 |
| Biegelinie..... | 86 | Druckstab..... | 78 |
| Biegelinien-Dgl..... | 88 | Dynamik..... | 6 |
| Biegemoment..... | 62 | ebene Kraftsysteme..... | 25 |
| Biegeschwingung..... | 254 | Eigenschwingung..... | 236 |
| Biegesteifigkeit..... | 88 | Eigenwert..... | 237, 250 |
| Biegung..... | 85 | einfaches Material..... | 80 |
| Binormale..... | 171 | Einflusszahl..... | 224 |
| Bogen..... | 69 | eingeprägte Kraft..... | 50 |
| Bogenlänge..... | 31, 171 | elastisch..... | 79 |
| BOLTZMANNsches Axiom..... | 119, 203 | elastische Energie..... | 160, 210, 257 |
| BRAHE..... | 187 | Elastizitätsmodul..... | 81 |
| BREDT..... | 149 | Energie..... | 179, 210, 238 |
| BREDT'sche Formel..... | 152 | Energie-Hypothese..... | 168 |
| BRUNELLESCHI..... | 75 | Energiesatz..... | 211, 254 |
| BZS..... | 169 | Ergänzungsarbeit..... | 222 |
| CASTIGLIANO..... | 226 | Erregerkraft..... | 245 |
| CAUCHY..... | 96, 205 | erzwungene Schwingung..... | 244 |
| CAVENDISH..... | 42 | EUKLID..... | 20 |

| | | | |
|---|----------------------|---|------------|
| EULER | 22, 59, 96, 106, 180 | HIRE | 76 |
| EULER-Hyperbel..... | 113 | homogene Lösung..... | 245 |
| EULERSche Formel | 237, 251 | HOOKE | 81 |
| EULERSche Geschwindigkeitsformel... 189 | | HOOKEsches Gesetz..... | 128 |
| EULERSche Kreisgleichung..... | 199 | HSA | 123 |
| EYTELWEIN..... | 59 | HTA | 198 |
| Fachwerk..... | 67 | HTM | 198 |
| Feder..... | 83 | HUBER..... | 168 |
| Federenergie..... | 162, 210, 238 | HUYGENS | 72, 76, 96 |
| Festigkeit..... | 166 | Hydrodynamik..... | 157 |
| Festigkeitsgrenze..... | 79 | hydrostatisch..... | 134 |
| Festigkeitslehre | 6 | Impuls | 178 |
| Flächenelement..... | 33 | Impulsbilanz | 180 |
| Flächenintegral..... | 32, 37 | Impulsbilanz, lokal | 203 |
| Flächenträgheitsmoment | 87, 93 | Impulserhaltungssatz | 183 |
| Florenz..... | 74 | Inertialkraft..... | 180 |
| Formänderungsenergie | 160, 210 | Inertialsystem..... | 182 |
| freie Schwingung..... | 236 | inkompressibel..... | 135 |
| freies Moment | 27 | ISIDOR..... | 74 |
| Freiheitsgrad..... | 193 | isotrop | 128 |
| freischneiden | 21 | kartesisches KOOS | 20 |
| FRENET..... | 171 | Keil | 55 |
| FRENETsche Formel | 173 | KEPLER | 185 |
| Frequenz..... | 236 | Kettenlinie | 72 |
| Führungsbeschleunigung..... | 175 | Kilogramm..... | 22 |
| Führungsgeschwindigkeit..... | 174 | Kinematik | 169 |
| GALILEI..... | 76 | kinematisch unbestimmt | 51 |
| Gebietsintegral | 30, 37 | Kinetik | 6, 179 |
| generalisierte Kraft..... | 221 | kinetische Energie. 179, 200, 206, 238, 257 | |
| Geschwindigkeit..... | 169 | kinetischer Druck..... | 202 |
| Gestaltänderungsenergie | 161, 168 | Knickfälle | 106 |
| gestrichelte Faser..... | 62 | Knicksicherheit..... | 113 |
| Gewichtskraft | 43 | Knotenpunktverfahren | 68 |
| Gewölbe | 73 | komplexes Kraftsystem | 46 |
| GIOTTO..... | 75 | Komponente..... | 17 |
| Gleichgewichtsbedingungen | 119 | Kompressionsenergie..... | 161 |
| Gleichgewichtssystem..... | 28 | Kompressionsmodul | 135 |
| Gleitreibung..... | 59 | konservativ..... | 208 |
| Gravitation..... | 42 | Kontaktkraft..... | 41 |
| GREGORY..... | 76 | Kontinuumsschwingung | 236, 256 |
| Haftreibung..... | 53 | Konturerhaltung..... | 147 |
| Haftreibungsgesetz | 53 | Koordinaten | 20 |
| Haftreibungszahl | 53 | KOOS | 20 |
| Hagia Sophia | 74 | Körper..... | 21 |
| HAMILTONsches Prinzip | 220 | Körperpunkt..... | 21 |
| harmonisch | 237, 245 | Kraft..... | 22 |
| Hauptdehnungen..... | 128 | Kräftegleichgewicht..... | 28 |
| Hauptspannungen | 123 | Kräftepaar | 27 |
| Hauptträgheitsachse | 97, 198 | Kräftereduktion..... | 25 |
| Hauptträgheitsmoment | 97, 198 | Krafterregung..... | 244 |
| Hebelarm | 24 | Kraftgrößenverfahren | 227 |

| | | | |
|---|--------------------------|---|-------------|
| Kraftsystem | 23 | Normalkraft..... | 62, 69 |
| Kreisgleichung..... | 199 | Normalspannung..... | 78, 116 |
| Kreisfrequenz | 236 | Normalspannungs-Hypothese..... | 167 |
| Kreuzprodukt..... | 18 | Nullphasenwinkel | 238 |
| kritische Last | 108 | Oberflächenkraft..... | 41 |
| Krümmung..... | 88, 172 | ONB | 18 |
| Krümmungsradius | 86 | orthogonal..... | 17 |
| Kuppel | 73 | Orthonormalbasis..... | 18 |
| Lagerkraft | 50 | Ortsvektor | 21 |
| Lagerungsbedingungen | 50 | Pantheon | 73 |
| LAGRANGE..... | 212 | Parallelschaltung..... | 83 |
| LAGRANGE-Funktion | 219 | partikuläre Lösung..... | 245 |
| LAGRANGEsche Bewegungsgleichungen | 221 | PdvV | 214 |
| LAMÉ..... | 167 | Pendel | 234 |
| LAMÉsche Konstanten | 133 | Pendelstütze | 67 |
| Lastsystem..... | 27 | Periode | 236 |
| LEHRsches Dämpfungsmaß | 242 | Petersdom | 75 |
| LEIBNIZ | 72, 76 | POLENI | 75 |
| Leistung..... | 206 | Polkurve..... | 192 |
| Leistungsbilanz..... | 206 | Potenzial | 208 |
| linear..... | 90 | potenzielle Energie | 208, 215 |
| linear unabhängig | 17 | PRANDTL..... | 156 |
| Linearkombination | 17 | Prinzip der virtuellen Verrückungen ... | 214 |
| Linienintegral | 31, 37 | Punktbewegung..... | 169 |
| Linienlast..... | 40 | Querb beschleunigung | 175 |
| Literatur | 8 | Querkontraktionszahl..... | 129 |
| logarithmisches Dekrement..... | 244 | Querkraft..... | 62 |
| Luftwiderstand | 41 | Randbedingung..... | 89, 136 |
| Masse..... | 22, 38 | Raum..... | 20 |
| Massendichte..... | 38 | RAYLEIGH-Quotient..... | 257 |
| Massenelement..... | 39 | Reaktionskraft..... | 50, 207 |
| Massenmittelpunkt | 44, 177 | Reaktionsprinzip..... | 47, 49, 183 |
| Massenmittelpunktsatz..... | 180 | reduzierte Knicklänge..... | 113 |
| Massenträgheitsmoment..... | 194 | Reibung..... | 53 |
| MAXWELL..... | 225 | Reibungskegel | 54 |
| Membran | 73 | Reibungswinkel | 53 |
| MENABREA | 226 | Reibungszahl | 59 |
| Meter | 20 | Reihenschaltung..... | 84 |
| MICHELANGELO | 75 | Relativbeschleunigung..... | 175 |
| MOHRscher Kreis..... | 121, 141 | Relativbewegung | 173 |
| Moment | 23 | Relativgeschwindigkeit | 174 |
| Momentanpol | 189, 191 | Resonanz..... | 246 |
| Momentengleichgewicht | 28 | Resultierende | 23 |
| MORIN..... | 59 | resultierende Kraft | 25 |
| NAVIER..... | 88 | resultierendes Moment | 25 |
| neutrale Faser | 86 | RIEMANN..... | 30 |
| NEWTON..... | 22, 41, 42, 47, 187, 230 | RITZ | 257 |
| NEWTONsches Gesetz | 180 | RITZsches Verfahren..... | 216 |
| Norm..... | 16 | Saitenschwingung..... | 252 |
| Normalbeschleunigung..... | 171, 172 | Scherenergie | 164 |
| | | schiefe Biegung | 99 |

| | | | |
|-------------------------------|-----------|---------------------------------------|---------------|
| Schlankheit..... | 114 | Torsionsflächenmoment | 152 |
| Schmiegeebene..... | 171 | Torsionsmoment | 62, 147 |
| Schnittlast..... | 61 | Trägheitsmoment | 87 |
| Schnittlasten-Dgl..... | 65 | Trägheitsradius | 113 |
| Schnittprinzip | 22 | Trajektorie | 154 |
| Schraubenverbindung..... | 56 | Translationsbeschleunigung | 175 |
| Schubfluss | 144, 151 | TRESCA..... | 167 |
| Schubmittelpunkt | 145 | Trockenreibung..... | 240 |
| Schubspannung..... | 116 | Übergangsbedingung | 89 |
| Schubspannungs-Hypothese..... | 167 | Unwucht..... | 201 |
| Schubverzerrung..... | 126 | VANVITELLI | 76 |
| Schwingung..... | 236 | VARIGNONs Prinzip | 24 |
| Seifenhautgleichnis | 156 | Vektor | 16 |
| Seil..... | 69 | Vektorbasis | 17 |
| Seil-Dgl. | 70 | Vektorfeld..... | 38 |
| Seillinie..... | 69 | Vektorprodukt..... | 18 |
| Seilneigung..... | 71 | Vektorraum | 16 |
| Seilreibung | 58 | Vergrößerungsfunktion..... | 246 |
| Sekunde | 20 | verlorene Kraft..... | 180 |
| Selbsthemmung | 55 | Verschiebung | 125 |
| Skalarprodukt | 16 | Verschiebungs-Verzerrungs-Relation .. | 126 |
| Spannungsarbeit | 209 | Versetzungsmoment | 24 |
| Spannungsleistung..... | 206, 209 | Vertauschungssatz | 225 |
| Spannungsmatrix | 116 | Verwölbung | 153 |
| Spatprodukt | 19 | virtuell..... | 213 |
| spezifisches Gewicht | 43 | viskose Reibung..... | 241 |
| ST.-VENANT | 92, 147 | Volumenelement..... | 35 |
| ST.-VENANTsches Prinzip | 93 | Volumenintegral | 35, 37 |
| starrer Körper | 22 | Volumenkraft..... | 42 |
| Statik..... | 6, 20, 50 | Volumenmittelpunkt | 44 |
| statisch bestimmt..... | 51 | MISES..... | 168 |
| statische Äquivalenz..... | 25 | Wegerregung..... | 244 |
| statische Ruhelage | 239 | Wellengleichung | 252 |
| statisches Moment..... | 138 | Windung | 173 |
| Stauchung..... | 80 | Winkelbeschleunigung | 189 |
| Steifigkeit | 81 | Winkelgeschwindigkeit | 188 |
| STEINERscher Satz | 95, 197 | Wirkungslinie | 23 |
| Stoss | 228 | Wölbkrafttorsion..... | 148 |
| Stoßmittelpunkt | 235 | WREN..... | 76 |
| Stoßzahl | 230 | Wurfparabel | 181 |
| Streckenlast | 40 | YOUNG..... | 81 |
| Streckung..... | 80 | Zeit..... | 20 |
| Stützlinie..... | 73 | Zentralachse..... | 190 |
| Superpositionsprinzip..... | 61, 92 | Zentralbewegung | 185 |
| Tangentialbeschleunigung..... | 171, 172 | Zentralkraft-Hypothese..... | 183 |
| Temperaturdehnung | 81 | Zentralkraftsystem | 26 |
| Thermoelastizität..... | 81, 130 | Zentripetalbeschleunigung.... | 172, 175, 189 |
| Torsion | 147 | Zugstab | 78 |
| Torsionsenergie | 165 | Zylinderkoordinaten | 20 |