

**Bifurkation für ein stark indefinites elliptisches  
System partieller Differentialgleichungen mittels  
klassischem und äquivariantem Spektralfluss**

DISSERTATION

zur Erlangung des  
Doktorgrades der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

der Naturwissenschaftlichen Fakultät II  
Chemie, Physik und Mathematik

der Martin-Luther-Universität  
Halle-Wittenberg

vorgelegt

von Frau Melanie Möckel

Gutachter:

Prof. Dr. Nils Waterstraat (Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg)

Prof. Dr. Marek Izydorek (Gdansk University of Technology)

Tag der Verteidigung: 30.07.2025

# Danksagung

Zuallererst möchte mich von ganzem Herzen bei meinem Betreuer Prof. Nils Waterstraat bedanken, der mir nicht nur die Möglichkeit zur Promotion gegeben hat, sondern mich auch mit seiner fachlichen Expertise und seiner Unterstützung während des gesamten Prozesses begleitet hat.

Die Arbeitsgruppe Analysis war für mich eine inspirierende und bereichernde Umgebung, und ich möchte allen Mitgliedern dafür danken, dass sie diese Zeit so besonders gemacht haben.

Ein besonderer Dank geht an Prof. Marek Izydorek und Dr. Maciej Starostka, für viele wertvolle Gespräche und den fachlichen Austausch. Diese Diskussionen haben nicht nur mein Wissen erweitert, sondern auch oft neue Perspektiven eröffnet. Last but not least möchte ich mich bei meiner Familie und meinen Freunden bedanken, die mich während der gesamten Zeit unterstützt haben und mir auch die nötige Ablenkung geboten haben, um mich zu erholen und neue Energie zu tanken. Ohne die Unterstützung all dieser Menschen wäre diese Promotion nicht möglich gewesen.

Vielen Dank!

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
1.1	Notation und Bezeichnungen . . . . .	1
1.2	Problemstellung . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Vom klassischen Spektralfluss zum äquivarianten Spektralfluss</b>	<b>5</b>
2.1	Der klassische Spektralfluss . . . . .	5
2.2	Der äquivariante Spektralfluss . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Nicht-äquivarianter Fall und Anwendung</b>	<b>23</b>
3.1	System (3.0.1) mit Dirichlet-Randbedingungen . . . . .	24
3.1.1	Index und Bifurkation . . . . .	27
3.1.2	Bifurkation mittels Vergleichsmethoden für (3.1.1) . . . . .	33
3.1.3	Anwendung auf zusammenziehbare Gebiete . . . . .	43
3.2	System (3.0.1) mit Neumann-Randbedingungen . . . . .	50
3.2.1	Index und Bifurkation . . . . .	53
3.2.2	Bifurkation mit Hilfe von Vergleichsprinzipien für (3.2.1) . . . . .	58
<b>4</b>	<b>Äquivarianter Fall und Anwendung</b>	<b>63</b>
4.1	Bifurkationsresultat . . . . .	66
4.2	Anwendung . . . . .	72
4.2.1	Äußere Gruppenwirkung der $SO(2)$ . . . . .	72
4.2.2	Innere Gruppenwirkung der $SO(2)$ . . . . .	81
4.2.3	Gruppenwirkung einer endlichen Liegruppe . . . . .	92
	<b>Quellenverzeichnis</b>	<b>98</b>



## Kapitel 1

# Einführung

### 1.1 Notation und Bezeichnungen

Im ersten Abschnitt legen wir zunächst einige Schreibweisen und Bezeichnungen fest, die im Verlauf der Arbeit verwendet werden.

In dieser Arbeit wird die übliche mengentheoretische Schreibweise verwendet. Dabei sei zu beachten, dass mit  $\mathbb{N}$  die Menge der natürlichen Zahlen ohne Null gemeint ist, wohingegen  $\mathbb{N}_0$  die Menge der natürlichen Zahlen mit Null bezeichnet.

Es sei stets  $H$  ein reeller separabler Hilbertraum. Dann bezeichne  $\mathcal{L}(H)$  den Banachraum aller beschränkten, linearen Operatoren in  $H$ . Des Weiteren bezeichne  $\mathcal{GL}(H)$  die Teilmenge von  $\mathcal{L}(H)$ , die alle invertierbaren Operatoren enthält. Eine wichtige Klasse von linearen Operatoren bilden die Fredholmoperatoren. Sie sind nach dem schwedischen Mathematiker ERIK IVAR FREDHOLM benannt, der Ende des 19. und Anfang des 20. Jahrhunderts wichtige Beiträge zur Theorie linearer Operatoren geleistet hat. Ein linearer Operator  $T \in \mathcal{L}(H)$  heißt Fredholmoperator, falls die Dimension des Kerns von  $T$  und die Kodimension des Bildes von  $T$  endlich sind. Die Zahl

$$\text{ind}(T) = \dim(\ker(T)) - \text{codim}(\text{im}(T)) \in \mathbb{Z}$$

bezeichne den Index von  $T$  und ist in gewisser Art und Weise ein Maß dafür, wie weit der Operator  $T$  von der Invertierbarkeit entfernt ist. Die Menge aller Fredholmoperatoren in  $H$  wird mit  $\mathcal{F}(H) \subset \mathcal{L}(H)$  bezeichnet. Des Weiteren bezeichne

$\mathcal{FS}(H) \subset \mathcal{F}(H)$  die Menge aller selbstadjungierten Fredholmoperatoren. Ein bekanntes Resultat von ATIYAH und SINGER ([4], Theorem B) besagt, dass der Raum  $\mathcal{FS}(H)$  nicht zusammenhängend ist. Sei  $T \in \mathcal{L}(H)$  und bezeichne

$$\sigma_{\text{ess}}(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid T - \lambda I_H \text{ ist kein Fredholmoperator}\}$$

das essentielle Spektrum von  $T$ . Dann hat  $\mathcal{FS}(H)$  die drei Zusammenhangskomponenten

- $T \in \mathcal{FS}^+(H)$  genau dann, wenn  $\sigma_{\text{ess}}(T) \subset \mathbb{R}_+$ ,
- $T \in \mathcal{FS}^-(H)$  genau dann, wenn  $\sigma_{\text{ess}}(T) \subset \mathbb{R}_-$ ,
- $T \in \mathcal{FS}^*(H)$  genau dann, wenn  $T$  sowohl positives, als auch negatives essentielles Spektrum besitzt.

## 1.2 Problemstellung

Die vorliegende Arbeit widmet sich der Untersuchung von Familien elliptischer indefiniter Differentialgleichungen, welche von einem reellen Parameter abhängen und für die die konstante Funktion 0 eine Lösung darstellt. Genauer sei für  $N \in \mathbb{N}$   $U \subset \mathbb{R}^N$  eine offene und beschränkte Menge mit glattem Rand. Dann betrachten wir das System elliptischer Differentialgleichungen

$$\begin{cases} A\Delta u(x) = \nabla_u F(\lambda, x, u(x)) & \text{in } U \\ u \text{ erfülle die Randbedingung,} \end{cases} \quad (1.2.1)$$

wobei  $A := \text{diag}\{-1, \dots, -1, 1, \dots, 1\} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $p \in \mathbb{N}$  und  $F \in \mathcal{C}^2(I \times U \times \mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ . Ein zentrales Anliegen der Bifurkationstheorie ist es, zu untersuchen, unter welchen Bedingungen nichttriviale Lösungen aus der Nulllösung entstehen. Dabei werden die Lösungen der Differentialgleichungen als kritische Punkte von Funktionalen auf einem Hilbertraum betrachtet. Sei nun also  $f : I \times H \rightarrow \mathbb{R}$  eine Familie von  $\mathcal{C}^2$ -Funktionalen, die auf einem Hilbertraum  $H$  definiert sind und für die

$0 \in H$  für alle  $\lambda \in I$  ein kritischer Punkt von  $f_\lambda := f(\lambda, \cdot) : H \rightarrow \mathbb{R}$  ist. Ein Bifurkationspunkt kritischer Punkte von  $f$  ist ein Parameterwert  $\lambda^* \in I$  so, dass jede Umgebung von  $(\lambda^*, 0) \in I \times H$  Elemente  $(\lambda, u)$  enthält so, dass  $u \neq 0$  ein kritischer Punkt von  $f_\lambda$  ist. Um die Frage nach der Existenz von Bifurkationspunkten zu klären, werden nun diese Familien von Funktionalen untersucht. Dazu betrachten wir die Rieszdarstellung der zweiten Ableitung  $\nabla_0^2 f(\lambda, \cdot)$  am kritischen Punkt  $0 \in H$  und erhalten somit einen Weg  $L = \{L_\lambda\}_{\lambda \in I}$  selbstadjungierter Operatoren.

Aus dem Satz über implizite Funktionen erhalten wir, dass Bifurkationspunkte nur für Parameterwerte  $\lambda \in I$ , für den der Operator  $L_\lambda$  nicht invertierbar ist, auftreten kann. Weiterhin besagt ein bekanntes Ergebnis aus der Bifurkationstheorie, dass bei Funktionalen mit endlichem Morseindex, wobei der Morseindex die Anzahl der negativen Eigenwerte gezählt mit Vielfachheiten beschreibt, ein Parameterwert ein Bifurkationspunkt ist, wenn sich der Morseindex beim Durchlaufen dieses Parameterwertes ändert und der Weg invertierbare Anfangs- und Endpunkte besitzt. Im Jahre 1999 haben FITZPATRICK, PEJSACHOWICZ und RECHT ein Resultat vorgestellt, das zur Untersuchung von Bifurkationspunkten den Spektralfluss betrachtet. Ein nichtverschwindender Spektralfluss von  $L = \{L_\lambda\}_{\lambda \in I}$  stellt dabei eine hinreichende Bedingung für die Existenz von Bifurkationspunkten dar. Der Spektralfluss ist eine Homotopieinvariante für Wege selbstadjungierter Fredholmoperatoren, der in den 1960er Jahren von ATIYAH und SINGER eingeführt wurde. Dies eröffnet die Möglichkeit, die Existenz von Bifurkationspunkten auch für Funktionale mit unendlichem Morseindex zu untersuchen.

In Kapitel 2.1 wird zunächst ein Überblick über die Definition des Spektralflusses und dessen Eigenschaften gegeben. Kapitel 3 widmet sich dann dem Versuch, unter Anwendung des genannten Ergebnisses von FITZPATRICK, PEJSACHOWICZ und RECHT Kriterien für die Existenz von Bifurkationspunkten für Systeme vom Typ (1.2.1) zu bestimmen. Im ersten Teil betrachten wir zunächst das System unter Dirichlet-Randbedingungen. Dafür definieren wir zuerst die Familie von Funktionalen auf einem geeigneten Hilbertraum so, dass die schwachen Lösungen des

Systems mit den kritischen Punkten der Funktionale übereinstimmen und bestimmen damit den Weg  $L = \{L_\lambda\}_{\lambda \in I}$  selbstadjungierter Fredholmoperatoren. Anschließend betrachten wir den Fall, dass die rechte Seite des Systems nicht explizit von  $x \in U$  abhängt. Hier definieren wir einen Index durch geeignete Zerlegung des zugehörigen Hilbertraumes und nutzen diesen, um Kriterien für die Existenz von Bifurkationspunkten unter Anwendung des Bifurkationsresultates von FITZPATRICK, PEJSACHOWICZ und RECHT zu bestimmen. Nachfolgend betrachten wir den Fall, in dem die rechte Seite des Systems auch von  $x \in U$  abhängen kann. Dabei zeigen wir ein entsprechendes Bifurkationsresultat unter Anwendung von Vergleichsmethoden für den Spektralfluss. Letzendlich schließen wir das Teilkapitel mit der Anwendung auf Systeme auf zusammenziehenbare Gebieten ab. Das zweite Teilkapitel zeigt, dass unter analogem Vorgehen ähnliche Resultate auch für Systeme unter Neumann-Randbedingungen gezeigt werden können.

Da Differentialgleichungen aus Anwendungen in den Naturwissenschaften, wie Physik oder Chemie, oft Symmetrien, welche durch Wirkung von geeigneten Lie-Gruppen beschrieben werden können, aufweisen, kann eine Bifurkation oft nicht allein mittels des Morseindex oder Spektralflusses nachgewiesen werden. SMOLLER und WASSERMANN haben 1990 eine Methode, die auf Gruppendarstellungen basiert, entwickelt, um das Bifurkationsproblem zu lösen. Mit Hilfe des kürzlich eingeführten äquivarianten Spektralflusses kann eine äquivariante Version des Bifurkationsresultates von FITZPATRICK, PEJSACHOWICZ und RECHT gezeigt werden. Kapitel 2.2 dieser Arbeit liefert zunächst einen Einblick in die äquivariante Definition des Spektralflusses nach IZYDOREK, JANCZEWSKA, und WATERSTRAAT. Kapitel 4 richtet den Fokus auf die Anpassung des Problems auf den äquivarianten Fall, der mit bisherigen Methoden nicht untersucht werden konnte. Hier wird zunächst eine äquivariante Version des Bifurkationsresultates von FITZPATRICK, PEJSACHOWICZ und RECHT mit Hilfe der Ideen von SMOLLER und WASSERMANN entwickelt. Anschließend betrachten wir das äquivariante System unter verschiedenen Gruppenwirkungen, um Kriterien für die Existenz von Bifurkationspunkten zu ermitteln.

## Kapitel 2

# Vom klassischen Spektralfluss zum äquivarianten Spektralfluss

### 2.1 Der klassische Spektralfluss

Der Spektralfluss ist ein Konzept aus der Funktionalanalysis und beschreibt die Veränderung des Spektrums eines selbstadjungierten Fredholmoperators entlang eines Weges im Raum der selbstadjungierten Fredholmoperatoren. Die Anfänge des Spektralflusses liegen in den 1970er Jahren und gehen zurück auf ATIYAH, PATODI und SINGER [3]. Seitdem tauchte der Spektralfluss in vielen Gebieten der Mathematik auf.

Der Spektralfluss eines Weges  $L = \{L_\lambda\}_{\lambda \in I}$  im Raum der selbstadjungierten Fredholmoperatoren, bezeichnet mit  $\text{sf}(L, I)$ , ist ein ganzzahliger Index. Grob gesprochen zählt der Spektralfluss die orientierte Anzahl der Eigenwerte, die im Verlauf des Weges die Null durchqueren. Wir wollen im Folgenden einen kurzen Einblick in die Definition des Spektralflusses für beschränkte Operatoren nach [16] geben. Im Folgenden bezeichnen wir für  $T \in \mathcal{FS}(H)$  und  $a, b \notin \sigma(T)$  mit  $\chi_{[a,b]}(T)$  die Spektralprojektion bezüglich des Intervalls  $[a, b]$ . Mit folgendem Lemma, welches im Wesentlichen auf der Stabilität des Spektrums basiert ([10], II., Theorem 4.1), legen wir die Grundlage für die Definition des Spektralflusses.

**Lemma 2.1.1** ([16]).

*Sei  $T \in \mathcal{FS}(H)$ . Dann existieren eine Zahl  $a > 0$  und eine offene Umgebung  $N$  um  $T$  in*

$\mathcal{FS}(H)$  so, dass die Abbildung

$$N \rightarrow \mathcal{L}(H), S \mapsto \chi_{[-a,a]}(S) \quad (2.1.1)$$

stetig ist und für alle  $T \in N$  gilt

$$\dim(\text{im}(\chi_{[-a,a]}(T))) < \infty.$$

*Beweis.*

Da  $T$  ein selbstadjungierter Fredholmoperator ist, liegt 0 entweder in der Resolvente oder ist ein isolierter Eigenwert mit endlicher Vielfachheit ([23], Cor. 3.4.4). Somit existiert ein  $a > 0$  so, dass  $[-a, a] \cap \sigma(T) \subset \{0\}$ . Da insbesondere  $\pm a \notin \sigma(T)$ , existiert ein  $\epsilon > 0$  so, dass

$$\begin{aligned} [-a - \epsilon, -a + \epsilon] \cap \sigma(T) &= \emptyset, \\ [a - \epsilon, a + \epsilon] \cap \sigma(T) &= \emptyset, \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Menge

$$\tilde{N} := \{S \in \mathcal{F}_S(H) \mid [-a - \epsilon, -a + \epsilon] \cup [a - \epsilon, a + \epsilon] \cap \sigma(S) = \emptyset\}, \quad (2.1.2)$$

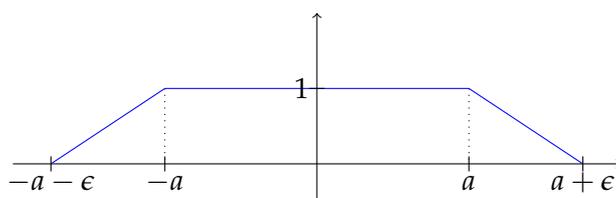
so ist die Abbildung (2.1.1) stetig auf  $\tilde{N}$ , da  $\chi_{[-a,a]}$  mit der stetigen Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x) := \frac{(x + a + \epsilon)}{\epsilon} \chi_{[-a - \epsilon, -a]}(x) + \chi_{[-a,a]}(x) - \frac{(x - a - \epsilon)}{\epsilon} \chi_{[a, a + \epsilon]}(x) \quad (2.1.3)$$

übereinstimmt.

Sei nun

$$N := \{S \in \tilde{N} \mid \|\chi_{[-a,a]}(S) - \chi_{[-a,a]}(T)\| < 1\}. \quad (2.1.4)$$

ABBILDUNG 2.1: Graph von  $f$ 

Da  $\sigma_{\text{ess}}(T) \cap [-a, a] = \emptyset$  gilt, ist  $\chi_{[-a, a]}(T)$  die Orthogonalprojektion auf die direkte Summe der Eigenräume bezüglich Eigenwerte in  $[-a, a]$ . Insbesondere gilt

$$\dim(\text{im}(\chi_{[-a, a]}(T))) < \infty,$$

da  $[-a, a]$  nur isolierte Eigenwerte endlicher Vielfachheit enthält. Mit ([10], Lemma II.4.3) gilt nun für alle  $S \in N$

$$\dim(\text{im}(\chi_{[-a, a]}(S))) = \dim(\text{im}(\chi_{[-a, a]}(T))) < \infty.$$

□

Für  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $N$  (siehe (2.1.4)) bezeichne für alle  $T \in N$

$$E(T, [x, y]) = \bigoplus_{\mu \in [x, y]} \ker(\mu I_H - T) \quad (2.1.5)$$

die direkte Summe der Eigenräume von  $T$  bezüglich der Eigenwerte in  $[x, y]$ . Sei nun

$$L = \{L_\lambda\}_{\lambda \in I} \in \mathcal{FS}(H)$$

ein Weg von selbstadjungierten Fredholmoperatoren in  $H$ . Nach Lemma 2.1.1 existiert für alle  $\lambda \in I$  eine Zahl  $a > 0$  und eine offenen Umgebung  $N_{L_\lambda, a} \subset \mathcal{FS}(H)$  so, dass die Abbildung

$$N_{L_\lambda, a} \longrightarrow \mathcal{L}(H), T \mapsto \chi_{[-a, a]}(T)$$

stetig ist und für alle  $T \in N_{L_\lambda, a}$  gilt  $\pm a \notin \sigma(T)$ . Betrachten wir nun die Urbilder der Umgebungen  $N_{L_\lambda, a}$ , so erhalten wir eine offene Überdeckung des Intervalls  $I = [0, 1]$

und weiter eine Zerlegung

$$0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n = 1 \quad (2.1.6)$$

von  $I = [0, 1]$  und  $a_i, i \in \{1, \dots, n\}$  so, dass die Abbildungen

$$[\lambda_{i-1}, \lambda_i] \ni \lambda \mapsto \chi_{[-a_i, a_i]}(L_\lambda) \in \mathcal{L}(H)$$

stetig sind. Insbesondere gilt mit  $i \in \{1, \dots, n\}$  beliebig, für alle  $\lambda \in [\lambda_{i-1}, \lambda_i]$ , dass

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ess}}(L_\lambda) \cap [-a_i, a_i] &= \emptyset, \\ \pm a_i &\notin \sigma(L_\lambda). \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

**Definition 2.1.2.** (*Spektralfluss*)

Der Spektralfluss des Weges  $L = \{L_\lambda\}_{\lambda \in I}$  wird nun definiert durch

$$\text{sf}(L, I) := \sum_{i=1}^n (\dim E(L_{\lambda_i}, [0, a_i]) - \dim E(L_{\lambda_{i-1}}, [0, a_i])). \quad (2.1.8)$$

Das nachfolgende Lemma zeigt die Wohldefiniert des Spektralflusses, d.h. die Definition ist sowohl unabhängig von der gewählten Zerlegung (2.1.6), als auch den gewählten  $a_i, i \in \{1, \dots, n\}$ .

**Lemma 2.1.3** (Proposition 2, [16]).

Sei  $L : [0, 1] \rightarrow \mathcal{FS}(H)$  ein stetiger Weg. Dann ist der Spektralfluss  $\text{sf}(L)$  wohldefiniert, d.h. er hängt nur von der stetigen Abbildung  $L : [0, 1] \rightarrow \mathcal{FS}(H)$  ab.

Der Spektralfluss hat einige wichtige Eigenschaften, die seine Bedeutung und Anwendbarkeit in vielen Gebieten der Mathematik und Physik unterstreichen.

**Satz 2.1.4.**

Der Spektralfluss (2.1.8) erfüllt folgende Eigenschaften

(N) **Normalisierung:** Sei  $L = \{L_\lambda\}_{\lambda \in I}$  ein Weg in  $\mathcal{FS}(H)$  mit invertierbaren Endpunkten und  $H$  ein endlich dimensionaler Hilbertraum, dann gilt

$$\text{sf}(L, I) = \mu_{\text{Morse}}(L_0) - \mu_{\text{Morse}}(L_1), \quad (2.1.9)$$

wobei  $\mu_{\text{Morse}}(L_\lambda)$  die Anzahl negativer Eigenwerte von  $L_\lambda$ , gezählt mit Vielfachheiten, genannt Morse-Index, bezeichne.

(Z) **Zentralisierung:** Sei  $L = \{L_\lambda\}_{\lambda \in I}$  ein Weg in  $\mathcal{FS}(H)$  so, dass  $L_\lambda$  für alle  $\lambda \in I$  invertierbar ist. Dann gilt

$$\text{sf}(L, I) = 0. \quad (2.1.10)$$

(A) **Additivität:** Seien  $H_1$  und  $H_2$  reelle separable Hilberträume und  $L_1 : I \rightarrow \mathcal{FS}(H_1)$  bzw.  $L_2 : I \rightarrow \mathcal{FS}(H_2)$  Wege mit invertierbaren Endpunkten. Dann gilt

$$\text{sf}(L_1 \oplus L_2, I) = \text{sf}(L_1, I) + \text{sf}(L_2, I). \quad (2.1.11)$$

(H) **Homotopie-Invarianz:** Sei  $h : I \times I \rightarrow \mathcal{FS}(H)$  stetig so, dass  $h(t, 0), h(t, 1)$  invertierbar sind für alle  $t \in I$ . Dann gilt

$$\text{sf}(h(0, \cdot)) = \text{sf}(h(1, \cdot)). \quad (2.1.12)$$

Auf den Beweis von Lemma 2.1.3 und Satz 2.1.4 wird an dieser Stelle verzichtet, da es sich hierbei um Spezialfälle von Resultaten aus Abschnitt 2.2 für  $G = \{id\}$  handelt.

Insbesondere folgt mit ([6], Theorem 5) die Eindeutigkeit des Spektralflusses, d.h. es existiert genau eine Abbildung, die einem Weg selbstadjungierter Fredholmoperatoren eine ganze Zahl zuordnet so, dass die Eigenschaften (N), (Z), (A) und (H) erfüllt sind. Ist  $H$  ein endlich dimensionaler Hilbertraum, so folgt die Eindeutigkeit unmittelbar aus der Eigenschaft (N). Für  $H$  unendlich-dimensional folgt die Eindeutigkeit durch orthogonale Zerlegung von  $H$  und Reduktion auf den endlich

dimensionalen Fall.

Im Folgenden wollen wir uns mit der Anwendung des Spektralflusses in der Bifurkationstheorie beschäftigen. Dazu betrachten wir eine Familie von Funktionalen  $f : I \times H \rightarrow \mathbb{R}$  so, dass für alle  $\lambda \in I$  die Abbildung  $f_\lambda := f(\lambda, \cdot)$  eine  $C^2$ -Abbildung ist und  $0 \in H$  ein kritischer Punkt von  $f_\lambda$  ist. Für alle  $\lambda \in I$  ist somit  $L_\lambda := \nabla_0^2 f_\lambda$ , die Riezdarstellung der zweiten Ableitungen von  $f_\lambda$  am kritischen Punkt  $0 \in H$ , ein selbstadjungierter Operator. Definiert  $L := \{L_\lambda\}_{\lambda \in I}$  einen Weg selbstadjungierter Fredholmoperatoren, so kann für diesen der Spektralfluss berechnet werden. Mit nachfolgenden Resultat von FITZPATRICK, PEJSACHOWICZ und RECHT erhalten wir den Zusammenhang zur Untersuchung von Bifurkationspunkten.

**Satz 2.1.5** ([8], Theorem 1).

*Seien  $L_0, L_1$  invertierbar und  $\text{sf}(L) \neq 0$ . Dann existiert ein Bifurkationspunkt von kritischen Punkten von  $f$ , d.h. ein  $\lambda^* \in (0, 1)$  so, dass in jeder Umgebung  $U \subset I \times H$  von  $(\lambda^*, 0)$  ein  $(\lambda, u)$  existiert so, dass  $u \neq 0$  ein kritischer Punkt von  $f$  ist.*

Die Nichttrivialität des Spektralflusses liefert somit die Existenz von Bifurkationspunkten. Die Herausforderung in der Anwendung von Satz 2.1.5 besteht in der Berechnungen des Spektralflusses, da die exakte Berechnung des Spektralflusses oftmals keine leichte Aufgabe darstellt. Das nachfolgende Resultat von PEJSACHOWICZ und WATERSTRAAT liefert uns als Folgerung eine Möglichkeit den Spektralfluss abzuschätzen, um so Bedingungen zu finden, die die Nichttrivialität des Spektralflusses garantieren. Zunächst halten wir fest, dass auf der Menge der selbstadjungierten Fredholmoperatoren  $\mathcal{FS}(H)$  eine Halbordnung existiert, definiert durch

$$T \geq S, \text{ falls } \langle (T - S)u, u \rangle \geq 0, u \in H.$$

**Satz 2.1.6** ([14], Proposition 7.3).

*Sei  $L : [a, b] \rightarrow \mathcal{FS}(H)$  ein nichtfallender Weg selbstadjungierter Fredholmoperatoren, d.h. für  $\lambda \geq \mu$  gilt  $L_\lambda \geq L_\mu$ . Dann gilt  $\text{sf}(L) \geq 0$ .*

*Beweis.*

Für jedes  $\lambda \in [a, b] =: I$  sei  $B_\lambda = B(L_\lambda, \epsilon_\lambda) \subset \mathcal{FS}(H)$  mit  $\epsilon_\lambda > 0$ . Des Weiteren wählen wir eine Zerlegung  $Z$  von  $I$  mit Maschenweite kleiner einer Lebesguezahl der Überdeckung  $\mathcal{U} := \{L^{-1}(B_\lambda) : \lambda \in I\}$ . Somit ist für  $J \in Z$  beliebig  $L(J)$  enthalten in  $B_J \subset \mathcal{FS}(H)$ . Sei nun  $J = [c, d] \in Z$  beliebig. Weiterhin bezeichne

$$N_\lambda = (d - c)^{-1}[(\lambda - c)L_d + (d - \lambda)L_c]$$

den geradlinigen Weg zwischen  $L_c$  und  $L_d$ . Betrachten wir nun die Homotopie  $h : [0, 1] \times [c, d] \rightarrow \mathcal{FS}(H)$  gegeben durch  $h(t, \lambda) = (1 - t)L_\lambda + tN_\lambda$  zwischen den beiden Wegen  $M = L|_J$  und  $N$ . Insbesondere ist für alle  $t \in [0, 1]$  und  $\lambda \in [c, d]$   $h(t, \lambda) \in \mathcal{FS}(H)$ , da nach Wahl der Zerlegung  $L|_J(J) \subset B_J$ . Aufgrund der Homotopieinvarianz des Spektralflusses erhalten wir

$$\text{sf}(L|_J) = \text{sf}(N)$$

Ist  $T \in \mathcal{FS}(H)$  ein nichtinvertierbarer Operator, so ist 0 ein isolierter Eigenwert mit endlichen Vielfachheit. Daher existiert  $\delta > 0$  so, dass  $T + \lambda I_H$  invertierbar ist für  $0 < \lambda \leq \delta$ . Insbesondere gilt somit

$$\text{sf}(L|_J) = \text{sf}(M) = \text{sf}(N) = \text{sf}(N + \delta I_H), \quad (2.1.13)$$

wobei  $\delta > 0$  so gewählt sei, dass  $N + \lambda I_H$  invertierbar ist für alle  $0 < \lambda \leq \delta$  und zusätzlich  $(N + \delta I_H)(J) \subset B_J$  gilt. Wählen wir nun  $\mu > 0$  hinreichend klein so, dass zwischen dem Weg gegeben durch

$$R_\lambda = (d - c)^{-1}[(\lambda - c)(L_d + \mu I_H) + (d - \lambda)(L_c + \mu I_H)],$$

und  $N$  eine Homotopie in  $\mathcal{FS}(H)$  mit invertierbaren Endpunkten existiert. Dann folgt aus der Homotopieinvarianz (vgl. Satz 2.1.4) und (2.1.13), dass

$$\text{sf}(L|_J) = \text{sf}(N) = \text{sf}(R). \quad (2.1.14)$$

Weiterhin existiert  $\epsilon > 0$  so, dass der Weg  $R^\nu := R_\lambda + \nu I_{H\lambda \in J}$  nur reguläre Crossings besitzt für  $|\nu| < \epsilon$ . Insbesondere folgt aus der Homotopieinvarianz (vgl. ([8], Prop. 3.8)), dass für hinreichend kleines  $\nu > 0$

$$\text{sf}(R) = \text{sf}(R^\nu)$$

gilt. Damit ist  $R^\nu$  ein differenzierbarer Weg und für  $\ker R_\lambda \neq \{0\}$  ist die Crossig-Form

$$Q(R^\nu, \lambda) : \ker R_\lambda + \nu I_H \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q(R, \lambda) := \left\langle \frac{d}{d\lambda}(R_\lambda + \nu I_H)u, u \right\rangle$$

positiv definit nach Voraussetzung. Somit gilt nach ([21], Theorem 2.7) und (2.1.14)

$$\text{sf}(L|_J) = \text{sf}(R^\nu) = \sum_{\lambda \in J} \text{sgn}(Q(R^\nu, \lambda)) \geq 0.$$

Die Aussage des Satzes folgt nun durch Summation über alle Intervalle in der gewählten Zerlegung  $Z$ . □

**Proposition 2.1.7** ([14], Theorem 7.1).

Sei  $h : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \mathcal{FS}(H)$  eine Homotopie so, dass

- $h(\cdot, a)$  fallend, d.h.  $h(\lambda, a) \leq h(\mu, a)$  für  $\lambda \geq \mu$ ,
- $h(\cdot, b)$  wachsend, d.h.  $h(\lambda, b) \geq h(\mu, b)$  für  $\lambda \geq \mu$ .

Dann gilt

$$\text{sf}(h(0, \cdot)) \leq \text{sf}(h(1, \cdot)).$$

*Beweis.*

Da  $D = [0, 1] \times [a, b]$  zusammenziehbar ist, ist der Spektralfluss von der Einschränkung von  $H$  auf den Rand von  $D$  gleich Null. Des Weiteren folgt aus der Voraussetzung, dass  $h(\cdot, a)$  fallend und  $h(\cdot, b)$  wachsend ist und Satz 2.1.6, dass  $\text{sf}(h(1 - \cdot, a)) = -\text{sf}(h(\cdot, a)) \geq 0$  und  $\text{sf}(h(\cdot, b)) \geq 0$ . Insgesamt folgt nun aus ([8], Prop. 3.7)

$$\text{sf}(h(0, \cdot)) \leq \text{sf}(h(1, \cdot))$$

und somit die Aussage.  $\square$

Sind nun  $L = \{L_\lambda\}_{\lambda \in [a,b]}$  und  $M = \{M_\lambda\}_{\lambda \in [a,b]}$  zwei Wege in  $\mathcal{FS}(H)$  so, dass für alle  $\lambda \in [a, b]$  gilt  $L_\lambda - M_\lambda$  ist kompakt, dann ist

$$h(t, \lambda) := M + t(L - M)$$

eine Homotopie in  $\mathcal{FS}(H)$  zwischen den beiden Wegen  $L$  und  $M$ . Gilt zudem  $L_a \leq M_a$  und  $M_b \leq L_b$  so, folgt aus Proposition 2.1.7 die Aussage des folgenden Korollars.

**Korollar 2.1.8** ([14], Korollar 7.2).

Seien  $L = \{L_\lambda\}_{\lambda \in I}$  und  $M = \{M_\lambda\}_{\lambda \in I}$  Wege selbstadjungierter Fredholmoperatoren so, dass  $L_\lambda - M_\lambda$  für alle  $\lambda \in I$  kompakt ist. Gilt nun

$$L_0 \geq M_0 \text{ und } L_1 \leq M_1,$$

dann folgt

$$\text{sf}(L) \leq \text{sf}(M).$$

## 2.2 Der äquivariante Spektralfluss

**Definition 2.2.1** (reeller Darstellungsring, [19]).

Sei  $G$  eine kompakte Liegruppe. Dann heißt die Grothendieck-Gruppe aller Isomorphieklassen von endlich dimensionalen reellen linearen Darstellungen von  $G$  der **reelle Darstellungsring von  $G$** , bezeichnet mit  $RO(G)$ . Die Elemente des Darstellungsring  $RO(G)$  sind Differenzen  $[U] - [V]$  von Isomorphieklassen von  $G$ -Darstellungen  $U, V$  modulo der Äquivalenzrelation gegeben durch

$$[U] - [V] \sim [U \oplus W] - [V \oplus W].$$

**Bemerkung 2.2.2** ([?], Def. 3.26).

Für kompakte Gruppen  $G$  kann der reelle Darstellungsring  $RO(G)$  auch äquivalent als

freie abelsche Gruppe erzeugt von allen Isomorphieklassen irreduzibler reeller Darstellungen von  $G$  aufgefasst werden.

$$RO(G) := \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j [\rho_j] \mid a_j \in \mathbb{Z}, \rho_j, j \in \mathbb{N} \text{ alle irreduziblen Darstellungen von } G \right. \\ \left. \text{über } \mathbb{R} \text{ bis auf Isomorphie} \right\} \quad (2.2.1)$$

### Beispiel 2.2.3.

Wir betrachten die Gruppe

$$G = SO(2) \\ = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \mid \phi \in [0, 2\pi] \right\} \quad (2.2.2)$$

Die irreduziblen reellen Darstellungen von  $G$  sind gegeben durch die eindimensionale triviale Darstellung  $\rho$  und den nichttrivialen Darstellungen  $\rho^j$ ,  $j \in \mathbb{N}$  gegeben durch

$$\forall g \in G, \rho^j(g) := \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}^j = \begin{pmatrix} \cos(j \cdot \phi) & -\sin(j \cdot \phi) \\ \sin(j \cdot \phi) & \cos(j \cdot \phi) \end{pmatrix}. \quad (2.2.3)$$

Man beachte dabei, dass für alle  $j \in \mathbb{N}$  die Darstellung  $\rho^j$  äquivalent zu der Darstellung  $\rho^{-j}$  ist. Nach Gleichung (2.2.1) ist der reelle Darstellungsring  $RO(G)$  die freie abelsche Gruppe, die von allen Isomorphieklassen irreduzibler reeller Darstellungen der Gruppe  $G$  erzeugt wird. Weiter besitzt die Gruppe  $G$  nach Gleichung (2.2.3) abzählbar unendliche viele irreduzible Darstellungen, welche nicht äquivalent zueinander sind. Der reelle Darstellungsring von  $G$  ist als abelsche Gruppe isomorph zum Polynomring  $\mathbb{Z}[x]$ .

Seien nun  $G$  eine kompakte Liegruppe und  $H$  ein reeller separabler Hilbertraum so, dass  $G$  auf  $H$  orthogonal operiert. Wir betrachten nun einen Weg  $L = \{L_\lambda\}_{\lambda \in I}$

selbstadjungierter Fredholmoperatoren so, dass für alle  $\lambda \in I$  der Operator  $L_\lambda$   $G$ -äquivariant ist, d.h. für alle  $g \in G$  und  $u \in H$  gilt

$$L_\lambda(gu) = g(L_\lambda u). \quad (2.2.4)$$

Des Weiteren bezeichnen wir mit  $\mathcal{FS}_G(H)$  die Menge aller selbstadjungierten,  $G$ -äquivarianten Fredholmoperatoren in  $H$ .

Analog zu Abschnitt 2.1 betrachten wir weiter die Zerlegung in (2.1.6) von  $I$  und  $a_i > 0, i \in \{1, \dots, n\}$  so, dass für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$

$$[\lambda_{i-1}, \lambda_i] \ni \lambda \mapsto \chi_{[-a_i, a_i]}(L_\lambda) \in \mathcal{L}(H)$$

eine Familie von stetigen Abbildungen ist. Dann sind nach (2.1.5) für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $\lambda \in (0, 1)$  mit  $\lambda_{i-1} < \lambda < \lambda_i$  die Räume  $E(L_\lambda, [0, a_i])$  endlich dimensionale reelle  $G$ -Darstellungen.

**Definition 2.2.4.** (*äquivariante Spektralfluss*)

Der äquivariante Spektralfluss des Weges  $L = \{L_\lambda\}_{\lambda \in I}$  selbstadjungierter,  $G$ -äquivarianter Fredholmoperatoren ist dann definiert durch

$$\text{sf}_G(L) = \sum_{i=1}^n ([E(L_{\lambda_i}, [0, a_i])] - [E(L_{\lambda_{i-1}}, [0, a_i])]) \in RO(G). \quad (2.2.5)$$

Das nachfolgende Lemma ist ein wichtiges Hilfsmittel für den Beweis der Wohldefiniertheit des äquivarianten Spektralflusses und dessen weiteren Eigenschaften.

**Lemma 2.2.5** ([12], Lemma 2.2).

Seien  $[c, d] \subset I$  und  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  so, dass  $a, b \notin \sigma(L_\lambda)$  und  $[a, b] \cap \sigma_{\text{ess}}(L_\lambda) = \emptyset$  für  $\lambda \in [c, d]$ . Dann sind  $E(L_c, [a, b])$  und  $E(L_d, [a, b])$  als  $G$ -Darstellungen isomorph.

*Beweis.*

Nach Voraussetzung ist die Abbildung  $[c, d] \ni \lambda \mapsto \chi_{[a, b]}(L_\lambda) \in \mathcal{L}(H)$  stetig und somit existiert eine Zerlegung des Intervalls  $[c, d]$  gegeben durch

$$c = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n = d$$

so, dass  $\|\chi_{[a,b]}(L_{\lambda_i}) - \chi_{[a,b]}(L_{\lambda_{i-1}})\| < 1$  gilt. Insbesondere sind diese Projektionen  $G$ -äquivariant.

Seien nun also  $P, Q$   $G$ -äquivariante Projektionen mit endlich dimensionalem Bild und so, dass  $\|P - Q\| < 1$  gilt. Wir zeigen nun, dass dann  $\text{im}(P)$  und  $\text{im}(Q)$  als  $G$ -Darstellungen isomorph sind. Mit ([10], Lemma II.4.3) gilt

$$\dim(\text{im}(P)) = \dim(\text{im}(Q)) < \infty. \quad (2.2.6)$$

Betrachten wir nun die  $G$ -äquivariante Abbildung  $U := PQ + (I_H - P)(I_H - Q)$ , so bildet diese das Bild von  $P$  auf das Bild von  $Q$  ab. Weiter gilt

$$\begin{aligned} & (QP + (I_H - Q)(I_H - P))U \\ &= (QP + (I_H - Q)(I_H - P))(PQ(I_H - P)(I_H - Q)) \\ &= QP^2Q + QP(I_H - P)(I_H - Q) + (I_H - Q)(I_H - P)PQ \\ & \quad + (I_H - Q)(I_H - P)(I_H - P)(I_H - Q) \\ &= QPQ + (I_H - Q)(I_H - P)(I_H - Q) \\ &= I_H - Q - P + PQ + QP \\ &= I_H - (P - Q)^2 \end{aligned}$$

Da  $\|P - Q\| < 1$  gilt, ist  $I_H - (P - Q)^2$  ein Isomorphismus und somit die Abbildung  $U$  injektiv. Demzufolge ist

$$U|_{\text{im}(P)}: \text{im}(P) \longrightarrow \text{im}(Q)$$

ein  $G$ -äquivarianter Isomorphismus. Damit folgt schließlich die Behauptung des Lemmas.  $\square$

**Lemma 2.2.6** ([12]).

*Der in (2.2.5) definierte äquivariante Spektralfluss ist wohldefiniert.*

*Beweis.*

Der Beweis der Wohldefiniertheit gliedert sich in drei Schritte und orientiert sich am nicht äquivarianten Fall nach [16].

Zunächst seien  $\lambda_0, \dots, \lambda_n$  und  $a_1, \dots, a_n$  wie in (2.1.6) und wir fügen ein  $\lambda^* \in (0, 1)$  zu der Zerlegung hinzu so, dass für ein  $i \in \{1, \dots, n\}$  gilt  $\lambda_{i-1} < \lambda^* < \lambda_i$ . Betrachten wir nun statt der Abbildung  $[\lambda_{i-1}, \lambda_i] \ni \lambda \mapsto \chi_{[-a_i, a_i]}(L_\lambda)$  die beiden Abbildungen

$$[\lambda_{i-1}, \lambda^*] \ni \lambda \mapsto \chi_{[-a_i, a_i]}(L_\lambda), \quad [\lambda^*, \lambda_i] \ni \lambda \mapsto \chi_{[-a_i, a_i]}(L_\lambda),$$

führt dies in der Berechnung des äquivarianten Spektralflusses zu folgender Anpassung: Der Term

$$[E(L_{\lambda_i}, [0, a_i])] - [E(L_{\lambda_{i-1}}, [0, a_i])]$$

wird durch den Term

$$([E(L_{\lambda_i}, [0, a_i])] - [E(L_{\lambda^*}, [0, a_i])]) + ([E(L_{\lambda^*}, [0, a_i])] - [E(L_{\lambda_{i-1}}, [0, a_i])])$$

ersetzt. Da  $[E(L_{\lambda^*}, [0, a_i])] - [E(L_{\lambda^*}, [0, a_i])] = 0 \in RO(G)$  ist, hat dies jedoch keine Auswirkungen auf das Ergebnis.

Im nächsten Schritt behalten wir die Zerlegung in (2.1.6) bei und betrachten den Fall, dass für  $i \in \{1, \dots, n\}$   $b_i \neq a_i$  existiert so, dass  $\pm b_i \notin \sigma(L_\lambda)$  und  $[-b_i, b_i] \cap \sigma_{\text{ess}}(L_\lambda) = \emptyset$  für  $\lambda \in [\lambda_{i-1}, \lambda_i]$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir den Fall  $b_i > a_i$ . Als Eigenräume von  $L_{\lambda_i}$  sind  $E(L_{\lambda_i}, [0, a_i])$  und  $E(L_{\lambda_i}, [a_i, b_i])$   $G$ -invariant und schneiden sich nur trivial. Mit Lemma 2.2.5 folgt

$$\begin{aligned} & [E(L_{\lambda_i}, [0, b_i])] - [E(L_{\lambda_{i-1}}, [0, b_i])] \\ &= ([E(L_{\lambda_i}, [0, a_i]) \oplus E(L_{\lambda_i}, [a_i, b_i])] - ([E(L_{\lambda_{i-1}}, [0, a_i]) \oplus E(L_{\lambda_{i-1}}, [a_i, b_i])]) \\ &= ([E(L_{\lambda_i}, [0, a_i])] - [E(L_{\lambda_{i-1}}, [0, a_i])]) + ([E(L_{\lambda_i}, [a_i, b_i])] - [E(L_{\lambda_{i-1}}, [a_i, b_i])]) \\ &= [E(L_{\lambda_i}, [0, a_i])] - [E(L_{\lambda_{i-1}}, [0, a_i])]. \end{aligned}$$

Damit ist die Berechnung des äquivarianten Spektralflusses auch unabhängig von den gewählten  $a_j$ .

Im letzten Schritt betrachten wir nun zwei verschiedene Zerlegungen  $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n = 1$  und  $0 = \nu_0 < \nu_1 < \dots < \nu_m = 1$  von  $I$  mit zugehörigen Zahlen  $a_i, i \in \{1, \dots, n\}$  bzw.  $b_i, i \in \{1, \dots, m\}$  und fügen diese zu einer ggf. feineren Zerlegung zusammen. Für die Berechnung des äquivarianten Spektralflusses nach (2.2.5) können nun sowohl die Zahlen  $a_i, i \in \{1, \dots, n\}$ , als auch die Zahlen  $b_i, i \in \{1, \dots, m\}$  verwendet werden. Nach Schritt 1 und Schritt 2 hat dieses Vorgehen jedoch keine Auswirkungen auf das Ergebnis.  $\square$

Nachfolgend zeigen wir, dass der äquivariante Spektralfluss aus (2.2.5) die selben Eigenschaften, wie der klassische Spektralfluss aus (2.1.8) erfüllt (vgl. Satz 2.1.4).

**Lemma 2.2.7** ([12]).

1. Seien  $L^1 = \{L_\lambda^1\}_{\lambda \in I}$ ,  $L^2 = \{L_\lambda^2\}_{\lambda \in I}$  zwei Wege selbstadjungierter,  $G$ -äquivarianter Fredholmoperatoren so, dass  $L_1^1 = L_0^2$ . Dann gilt

$$\text{sf}_G(L^1 * L^2) = \text{sf}_G(L^1) + \text{sf}_G(L^2).$$

2. Sei  $L = \{L_\lambda\}_{\lambda \in I} \subset \mathcal{FS}_G(H)$  ein Weg und für alle  $\lambda \in I$  sei  $L'_\lambda := L_{1-\lambda}$ . Dann gilt

$$\text{sf}_G(L') = -\text{sf}_G(L).$$

3. Sei  $L = \{L_\lambda\}_{\lambda \in I} \subset \mathcal{FS}_G(H)$  so, dass für alle  $\lambda \in I$  der Operator  $L_\lambda$  invertierbar ist. Dann gilt

$$\text{sf}_G(L) = 0.$$

*Beweis.*

- 1./2. Die ersten beiden Eigenschaften folgen unmittelbar aus der Definition des äquivarianten Spektralflusses (2.2.5). Für die zweite Eigenschaft beachte man, dass das inverse Element von  $[E(L_{\lambda_{i-1}}, [0, a_i])] - [E(L_{\lambda_i}, [0, a_i])] \in RO(G)$  gegeben ist durch  $[E(L_{\lambda_i}, [0, a_i])] - [E(L_{\lambda_{i-1}}, [0, a_i])] \in RO(G)$ .

3. Da  $I = [0, 1]$  kompakt ist und  $\mathcal{GL}(H) \subset \mathcal{L}(H)$  offen, existiert ein  $\delta > 0$  so, dass für alle  $\lambda \in I$  gilt  $\sigma(L_\lambda) \cap [-\delta, \delta] = \emptyset$ . Nun folgt die Behauptung aus der Berechnung des äquivarianten Spektralflusses nach (2.2.5) unter Verwendung von Lemma 2.2.5.

□

**Lemma 2.2.8** ([12]).

Sei  $L = \{L_\lambda\}_{\lambda \in I} \subset \mathcal{FS}_G(H)$ , wobei  $H := H_1 \oplus H_2$  so, dass  $H_1, H_2$   $G$ -invariant sind und für alle  $\lambda \in I$  gilt  $L_\lambda|_{H_i} \in \mathcal{FS}_G(H_i)$ ,  $i \in \{1, 2\}$ . Dann gilt

$$\text{sf}_G(L) = \text{sf}_G(L|_{H_1}) + \text{sf}_G(L|_{H_2}).$$

*Beweis.*

Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Definition des äquivarianten Spektralflusses (2.2.5), da für alle  $\lambda \in I$  und  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  gilt

$$E(L_\lambda, [a, b]) = E(L_\lambda|_{H_1}, [a, b]) \oplus E(L_\lambda|_{H_2}, [a, b]).$$

□

Abschließend betrachten wir, die wohl wichtigste Eigenschaft des äquivarianten Spektralflusses, die Homotopieinvarianz. Der Beweis folgt dabei ([12], Prop. 2.8) und basiert auf dem nicht äquivarianten Fall nach [16].

**Lemma 2.2.9.** [12]

Sei  $h : I \times I \rightarrow \mathcal{FS}_G(H)$  eine Homotopie. Dann gilt

$$\text{sf}_G(h(0, \cdot)) = \text{sf}_G(h(\cdot, 0)) + \text{sf}_G(h(1, \cdot)) - \text{sf}_G(h(\cdot, 1)). \quad (2.2.7)$$

*Beweis.*

Da  $h(I \times I) \subset \mathcal{FS}_G(H)$  kompakt ist, existiert eine endliche Überdeckung

$$h(I \times I) \subset \bigcup_{i=1}^n N_i,$$

wobei  $N_i \subset \mathcal{FS}_G(H)$  die offene Mengen aus der Konstruktion des Spektralflusses sind (siehe Lemma 2.1.1). Damit existiert für jede Menge  $N_i$  ein  $a_i > 0$  so, dass  $\pm a_i \notin \sigma(T)$  und  $[-a_i, a_i] \cap \sigma_{\text{ess}}(T) = \emptyset$  für alle  $T \in N_i$ . Des Weiteren ist die Abbildung

$$N_i \ni T \mapsto \chi_{[-a_i, a_i]}(T) \in \mathcal{L}(H)$$

stetig. Sei nun  $\epsilon > 0$  eine Lebesguezahl der offenen Überdeckung

$$I \times I = \bigcup_{i=1}^n h^{-1}(N_i).$$

so, dass jede Teilmenge  $M$  von  $I \times I$  mit Durchmesser  $d(M) < \epsilon$  für ein  $i \in \{1, \dots, n\}$  im Urbild  $h^{-1}(N_i)$  enthalten ist. Sei nun  $0 = \lambda_0 \leq \dots \leq \lambda_m = 1$  so, dass für  $i \in \{1, \dots, m\}$  gilt  $|\lambda_i - \lambda_{i-1}| \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$ . Dann ist  $h([\lambda_{i-1}, \lambda_i] \times [\lambda_{j-1}, \lambda_j])$  für alle  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  in einer der Mengen  $N_k$  mit  $k \in \{1, \dots, n\}$  enthalten. Seien nun also  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  beliebig und

$$\begin{aligned} h_{i-1,j}^h &:= h(\lambda_{i-1}, \cdot) |_{[\lambda_{j-1}, \lambda_j]}, \\ h_{i,j}^h &:= h(\lambda_i, \cdot) |_{[\lambda_{j-1}, \lambda_j]}, \\ h_{i,j-1}^v &:= h(\cdot, \lambda_{j-1}) |_{[\lambda_{i-1}, \lambda_i]}, \\ h_{i,j}^v &:= h(\cdot, \lambda_j) |_{[\lambda_{i-1}, \lambda_i]}. \end{aligned}$$

bezeichnen die horizontalen beziehungsweise vertikalen Wege des Randes von  $[\lambda_{i-1}, \lambda_i] \times [\lambda_{j-1}, \lambda_j]$ . Dann sind  $h_{i,j-1}^v * h_{i,j}^h * (h_{i,j}^v)'$  und  $h_{i-1,j}^h$  zwei Wege mit identischen Anfangs- und Endpunkten. Dabei bezeichne  $(h_{i,j}^v)'$  den Weg  $h_{i,j}^v$ , der in umgekehrter Richtung durchlaufen wird (siehe Lemma 2.2.7 (2.)). Mit Gleichung (2.2.4)

und Lemma 2.2.7 folgt nun

$$\begin{aligned}
\text{sf}_G(h_{i-1,j}^h) &= [E((h_{i-1,j}^h)_1, [0, a_k])] - [E((h_{i-1,j}^h)_0, [0, a_k])] \\
&= [E((h_{i,j-1}^v * h_{i,j}^h * (h_{i,j}^v)')_1, [0, a_k])] \\
&\quad - [E((h_{i,j-1}^v * h_{i,j}^h * (h_{i,j}^v)')_0, [0, a_k])] \\
&= \text{sf}_G(h_{i,j-1}^v * h_{i,j}^h * (h_{i,j}^v)') \\
&\stackrel{L.2.2.7(1)}{=} \text{sf}_G((h_{i,j-1}^v) + \text{sf}_G(h_{i,j}^h) + \text{sf}_G((h_{i,j}^v)')) \\
&\stackrel{L.2.2.7(2)}{=} \text{sf}_G((h_{i,j-1}^v) + \text{sf}_G(h_{i,j}^h) - \text{sf}_G(h_{i,j}^v)). \tag{2.2.8}
\end{aligned}$$

Damit gilt weiter

$$\begin{aligned}
\text{sf}_G(h(0, \cdot)) &= \sum_{j=1}^m \text{sf}_G(h_{0,j}^h) \\
&\stackrel{(2.2.8)}{=} \sum_{j=1}^m (\text{sf}_G(h_{1,j-1}^v) + \text{sf}_G(h_{1,j}^h) - \text{sf}_G(h_{1,j}^v)) \\
&= \text{sf}_G(h_{1,0}^v) - \text{sf}_G(h_{1,m}^v) + \sum_{j=1}^m \text{sf}_G(h_{1,j}^h).
\end{aligned}$$

Unter Verwendung von Gleichung (2.2.8) folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^m \text{sf}_G(h_{1,j}^h) &= \sum_{j=1}^m (\text{sf}_G(h_{2,j-1}^v) + \text{sf}_G(h_{2,j}^h) - \text{sf}_G(h_{2,j}^v)) \\
&= \text{sf}_G(h_{2,0}^v) - \text{sf}_G(h_{2,m}^v) + \sum_{j=1}^m \text{sf}_G(h_{2,j}^h)
\end{aligned}$$

und erhalten

$$\text{sf}_G(h(0, \cdot)) = \text{sf}_G(h_{1,0}^v) + \text{sf}_G(h_{2,0}^v) - \text{sf}_G(h_{1,m}^v) - \text{sf}_G(h_{2,m}^v) + \sum_{j=1}^m \text{sf}_G(h_{2,j}^h).$$

Berechnen wir nun weiter  $\sum_{j=1}^m \text{sf}_G(h_{2,j}^h)$  unter Verwendung von (2.2.8) und setzen dieses Vorgehen analog fort, so erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \text{sf}_G(h(0, \cdot)) &= \sum_{i=1}^m \text{sf}_G(h_{i,0}^v) - \sum_{i=1}^m \text{sf}_G(h_{i,m}^v) + \sum_{j=1}^m \text{sf}_G(h_{m,j}^h) \\ &= \text{sf}_G(h(\cdot, 0)) - \text{sf}_G(h(\cdot, 1)) + \text{sf}_G(h(1, \cdot)) \end{aligned}$$

□

**Korollar 2.2.10.**

Sei  $h : I \times I \rightarrow \mathcal{FS}_G(H)$  eine Homotopie so, dass  $h(\lambda, 0)$  und  $h(\lambda, 1)$  für alle  $\lambda \in I$  invertierbar ist. Dann gilt

$$\text{sf}_G(h(0, \cdot)) = \text{sf}_G(h(1, \cdot)).$$

*Beweis.*

Dies folgt unmittelbar aus Lemma 2.2.9 unter Verwendung der Normalisierungseigenschaft des äquivarianten Spektralflusses aus Lemma 2.2.7(3.). □

**Bemerkung 2.2.11.**

Es existiert ein klassischer Homomorphismus

$$F : RO(G) \rightarrow \mathbb{Z}, [U] - [V] \mapsto \dim(U) - \dim(V). \quad (2.2.9)$$

Insbesondere gilt so mit der Definition des klassischen bzw. äquivarianten Spektralflusses für jeden Weg  $L$  selbstadjungierter Fredholmoperatoren  $F(\text{sf}_G(L)) = \text{sf}(L)$ .

**Definition 2.2.12.**

Sei  $G$  eine kompakte Liegruppe. Dann heißt  $G$  *nice*, falls für  $V, W$  beliebige  $G$ -Darstellungen gilt:

Falls  $D(V)/S(V)$  und  $D(W)/S(W)$ , wobei für eine  $G$ -Darstellung  $U$  die Einheitssscheibe in  $U$  mit  $D(U)$  und die Einheitssphäre in  $U$  mit  $S(U)$  bezeichnet sei, den gleichen äquivarianten Homotopietyp haben, dann sind  $V$  und  $W$  (als  $G$ -Darstellungen) isomorph.

## Kapitel 3

# Nicht-äquivarianter Fall und Anwendung

Für ein  $N \in \mathbb{N}$  sei stets  $U \subset \mathbb{R}^N$  eine offene und beschränkte Menge mit glattem Rand. Des Weiteren betrachten wir in diesem Abschnitt folgendes System elliptischer Differentialgleichungen

$$\begin{cases} A\Delta u(x) = \nabla_u F(\lambda, x, u(x)) & \text{in } U \\ u \text{ erfülle die Randbedingung,} \end{cases} \quad (3.0.1)$$

wobei  $A := \text{diag}\{a_1, \dots, a_p\} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $p \in \mathbb{N}$ . Das Problem (3.0.1) ist in der Literatur bekannt und wurde beispielsweise von A. Gołębiewski und S. Rybicki in [11] untersucht. Im ersten Teilabschnitt 3.1 werden wir das System (3.0.1) mit Dirichlet-Randbedingungen betrachten. Anschließend werden wir im zweiten Teilabschnitt 3.2 zeigen, dass analoge Resultate unter kleinen Anpassungen auch für Neumann-Randbedingungen gültig sind. Die wesentliche Strategie folgt dabei [22]. Zunächst werden wir eine Familie von  $C^2$ -Funktionalen  $f : I \times H \mapsto \mathbb{R}$ , welche auf einem geeigneten Hilbertraum  $H$  definiert sind, einführen. Die Funktionale  $f$  seien dabei so gewählt, dass  $0 \in H$  für alle  $\lambda \in I$  ein kritischer Punkt von  $f(\lambda, \cdot)$  ist. Betrachten wir nun die Rieszdarstellung von  $\nabla_0^2 f(\lambda, \cdot)$  so erhalten wir einen Weg  $L = \{L_\lambda\}_{\lambda \in I}$  selbstadjungierter Fredholmoperatoren  $L_\lambda$  so, dass der Spektralfluss von  $L$  auf dem Intervall  $I$  untersucht werden kann. Unser Ziel ist es dabei, geeignete Formeln für

die Berechnung des Spektralflusses dieser Operatoren zu finden und unter Verwendung von Satz 2.1.5 Bedingungen für die Existenz von Bifurkationspunkten von System (3.0.1) angeben zu können.

### 3.1 System (3.0.1) mit Dirichlet-Randbedingungen

Wir betrachten zunächst das System (3.0.1) mit Dirichlet-Randbedingung, d.h.

$$\begin{cases} A\Delta u(x) = \nabla_u F(\lambda, x, u(x)) & \text{in } U \\ u(x) = 0 & \text{auf } \partial U. \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Für die weiteren Betrachtungen, gelten folgende Annahmen

(A1)  $F \in \mathcal{C}^2(I \times U \times \mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ ,

(A2) 0 ist ein kritischer Punkt von  $F_\lambda := F(\lambda, x, \cdot) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  für alle  $(\lambda, x) \in I \times U$ .

Des Weiteren sei

$$B_\lambda(x) := \nabla_u^2 F(\lambda, x, 0).$$

(A3) Falls  $N \geq 3$  ist, so existiert ein  $C > 0$  und  $1 \leq s < (N+2)(N-2)^{-1}$  so, dass

$$|\nabla_u^2 F(\lambda, x, u)| \leq C(1 + |u|^{s-1}). \quad (3.1.2)$$

Falls  $N = 2$  ist, so wähle  $s \in [1, \infty)$ . Man beachte, dass für  $N = 1$  keine Wachstumsbedingung, wie in (3.1.2), erforderlich ist.

(A4) Es existiert ein  $p_1 \in \{0, \dots, p\}$  so, dass

$$a_1 = \dots = a_{p_1} = -1, a_{p_1+1} = \dots = a_p = 1,$$

$$\text{d.h., } A = \text{diag} \left\{ \underbrace{-1, \dots, -1}_{p_1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p_2 := p - p_1} \right\}.$$

Sei nun  $H_0^1(U)$  der Standardsobolevraum mit Skalarprodukt

$$\langle u_1, v_1 \rangle_{H_0^1(U)} = \int_U \langle \nabla u_1(x), \nabla v_1(x) \rangle \, dx. \quad (3.1.3)$$

Dann definiert  $H := \bigoplus_{i=1}^p H_0^1(U)$  einen Hilbertraum mit Skalarprodukt gegeben durch

$$\langle u, v \rangle_H := \sum_{i=1}^p \langle u_i, v_i \rangle_{H_0^1(U)}. \quad (3.1.4)$$

Wir betrachten nun die Abbildung  $f : I \times H \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(\lambda, u) := \frac{1}{2} \int_U \sum_{i=1}^p (-a_i |\nabla u_i(x)|^2) dx - \int_U F(\lambda, x, u(x)) dx. \quad (3.1.5)$$

Die Abbildung  $f$  ist so gewählt, dass die schwachen Lösungen von (3.1.1) gerade den kritischen Punkten der Funktionale

$$f_\lambda := f(\lambda, \cdot) : H \rightarrow \mathbb{R}$$

entsprechen und für alle  $\lambda \in I$  ist  $0 \in H$  ein kritischer Punkt von  $f_\lambda$ . Nach Annahme (A2) existiert ein  $g \in \mathcal{C}^2(I \times U \times \mathbb{R}^p, \mathbb{R})$  so, dass

$$F(\lambda, x, u) = \frac{1}{2} \langle B_\lambda(x)u, u \rangle + g(\lambda, x, u)$$

und für jedes  $\lambda \in I, x \in \bar{U}$  gilt  $\nabla_u g(\lambda, x, 0) = 0$ , sowie  $\nabla_u^2 g(\lambda, x, 0) = 0$ .

**Lemma 3.1.1** ([13]).

Unter Anwendung der Annahmen (A1)-(A4) ist  $f \in \mathcal{C}^2(I \times H, \mathbb{R})$ . Des Weiteren erhalten wir

$$\nabla_u f(\lambda, u) = Tu + K_\lambda u - \nabla_u \eta(\lambda, u),$$

wobei

(i)  $T : H \rightarrow H$  ist ein selbstadjungierter, invertierbarer Operator gegeben durch

$$T(u_1, \dots, u_p) := (-a_1 u_1, \dots, -a_p u_p). \quad (3.1.6)$$

(ii)  $K_\lambda : H \rightarrow H$  gegeben durch

$$\langle K_\lambda u, v \rangle_H = - \int_U \langle B_\lambda(x)u(x), v(x) \rangle_{\mathbb{R}^p} dx \quad (3.1.7)$$

ist ein selbstadjungierter, kompakter Operator.

(iii)  $\eta : I \times H \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine  $C^2$ -Abbildung definiert durch

$$\eta(\lambda, u) = \int_U g(\lambda, x, u(x)) dx,$$

und es gelte  $\nabla_u \eta(\lambda, 0) = 0$ , sowie  $\nabla_u^2 \eta(\lambda, 0) = 0$  für alle  $\lambda \in I$ .

*Beweis.*

Wir halten zunächst fest, dass

$$\begin{aligned} f(\lambda, u) &= \frac{1}{2} \int_U \sum_{i=1}^p (-a_i |\nabla u_i(x)|^2) dx - \int_U F(\lambda, x, u(x)) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_U \sum_{i=1}^p (-a_i |\nabla u_i(x)|^2) dx - \int_U \frac{1}{2} \langle B_\lambda(x)u(x), u(x) \rangle + g(\lambda, u(x)) dx \\ &= \frac{1}{2} (\langle Tu, u \rangle_H + \langle K_\lambda u, u \rangle_H) - \eta(\lambda, u). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\langle \nabla_u f(\lambda, u), v \rangle_H = \langle Tu, v \rangle_H + \langle K_\lambda u, v \rangle_H - \langle \nabla \eta(\lambda, u), v \rangle_H, \quad v \in H.$$

Die Eigenschaften aus (i) und (ii) folgen aus der Definition der Operatoren. Der Operator  $K_\lambda : H \rightarrow H$  definiert durch

$$\langle K_\lambda u, v \rangle_H = - \int_U \langle B_\lambda(x)u(x), v(x) \rangle_{\mathbb{R}^p} dx$$

ist kompakt, da die zugrunde liegende Bilinearform über eine punktweise Multiplikation mit einer  $L^\infty$ -Matrixfunktion aus  $\bigoplus_{i=1}^p L^2(U)$  definiert ist und die Einbettung  $H = \bigoplus_{i=1}^p H_0^1(U) \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^p L^2(U)$  kompakt ist. Für den Beweis, dass die Abbildung  $\eta : I \times H \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^2$ -Abbildung ist, siehe [17].  $\square$

Wir erhalten somit, dass die Rieszdarstellung von  $\nabla_u^2 f_\lambda$  an der Stelle  $0 \in H$  die selbstadjungierten Operatoren

$$L_\lambda := T + K_\lambda \quad (3.1.8)$$

sind. Aufgrund der Tatsache, dass der Operator  $T : H \rightarrow H$  als invertierbarer Operator ein Fredholmoperator von Index 0 ist, ist für alle  $\lambda \in I$  der Operator  $L_\lambda$  als kompakte Störung eines Fredholmoperators selbst ein Fredholmoperator vom selben Index. Damit definiert  $L := \{L_\lambda\}_{\lambda \in I}$  einen Weg selbstadjungierter Fredholmoperatoren.

### 3.1.1 Index und Bifurkation

In diesem Abschnitt betrachten wir das System (3.1.1) unter den Annahmen (A1)-(A4) in dem speziellen Fall, dass die Abbildung  $F$  nicht von  $x \in U$  abhängt, d.h.

$$\begin{cases} A\Delta u = \nabla_u F(\lambda, u) & \text{in } U \\ u = 0 & \text{auf } \partial U, \end{cases} \quad (3.1.9)$$

wobei  $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $p \in \mathbb{N}$  und  $U \subset \mathbb{R}^N$  eine offene und beschränkte Menge mit glattem Rand ist. Außerdem sei  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Orthonormalbasis von  $H_0^1(U)$  so, dass  $-\Delta f_n = \beta_n f_n$  gilt. Für die dazugehörigen Eigenwerte  $\beta_n$  gilt  $0 < \beta_n \leq \beta_m$  für  $m \geq n$ . Mit den Greenschen Formeln folgt, für alle  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $m \neq n$

$$0 = \int_U f_n f_m \, dx \quad (3.1.10)$$

und

$$1 = \int_U |\nabla f_n|^2 \, dx = \beta_n \int_U f_n^2 \, dx. \quad (3.1.11)$$

Somit erhalten wir eine orthogonale Zerlegung von  $H$  in endlich dimensionale Teilräume gegeben durch

$$H = \bigoplus_{i=1}^p H_0^1(U) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} H_k \quad (3.1.12)$$

mit  $H_k := \text{span}\{f_k \cdot e_i \mid 1 \leq i \leq p\}$ , wobei  $\{e_i\}_{i=1}^p$  die Standardbasis im  $\mathbb{R}^p$  bezeichne. Aufgrund der Definition des Operators  $T$  (siehe (3.1.6)) folgt, dass  $T$  die Räume  $H_k$  invariant lässt. Das folgende Lemma zeigt, dass die Räume  $H_k$  auch unter dem Operator  $K_\lambda$  (siehe (3.1.7)) invariant sind.

**Lemma 3.1.2** ([13]).

Für alle  $k \in \mathbb{N}$  bezeichne  $P_k$  die Orthogonalprojektion in  $H$  auf  $H_k$ . Seien nun  $k, l \in \mathbb{N}$ ,  $k \neq l$  beliebig. Dann gilt

$$P_k K_\lambda P_l = 0.$$

*Beweis.*

Es gilt

$$\langle P_k K_\lambda P_l u, v \rangle_H = \langle K_\lambda P_l u, P_k v \rangle_H, \quad u, v \in H.$$

Für  $u = f_k e_i$  und  $v = f_l e_j$ , wobei  $1 \leq i, j \leq p$ , folgt

$$\langle K_\lambda u, v \rangle_H = \int_U f_k f_l \langle B_\lambda e_i, e_j \rangle dx = \langle B_\lambda e_i, e_j \rangle \int_U f_k f_l dx \stackrel{(3.1.10)}{=} 0.$$

Damit gilt  $P_k K_\lambda P_l = 0$  für  $k \neq l$ . □

Sei nun die Einschränkung der Operatoren  $L_\lambda$  mit  $\lambda \in I$  definiert durch

$$L_\lambda^k := P_k (T + K_\lambda) P_k : H_k \rightarrow H_k, \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.1.13)$$

Da für alle  $k \in \mathbb{N}$  die Räume  $H_k$  endlich dimensional sind, besitzt der Operator  $L_\lambda^k$  für alle  $k \in \mathbb{N}, \lambda \in I$  eine Darstellung als Matrix.

**Lemma 3.1.3.** [13]

Für alle  $k \in \mathbb{N}$  hat der Operator  $L_\lambda^k$  folgende Darstellung als Matrix

$$L_\lambda^k = \begin{pmatrix} I_{p_1 \times p_1} & 0 \\ 0 & -I_{p_2 \times p_2} \end{pmatrix} - \frac{1}{\beta_k} B_\lambda, \quad \lambda \in I \quad (3.1.14)$$

bezüglich der Orthonormalbasis  $\{f_k e_i \mid 1 \leq i \leq p\}$  von  $H_k$ .

*Beweis.*

Sei  $B_\lambda := (b_{ij}(\lambda))_{i,j \in \{1, \dots, p\}}$  die symmetrische Matrix aus Annahme (A2). Seien weiter  $k \in \mathbb{N}$  fest gewählt und  $u_k := (\alpha_1 f_k, \dots, \alpha_p f_k)^T \in H_k$ .

Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle Tu_k, u_k \rangle_H &= \left\langle T(\alpha_1 f_k, \dots, \alpha_p f_k)^T, (\alpha_1 f_k, \dots, \alpha_p f_k)^T \right\rangle_H \\ &= \left\langle (\alpha_1 f_k, \dots, \alpha_{p_1} f_k, -\alpha_{p_1+1} f_k, \dots, -\alpha_p f_k)^T, (\alpha_1 f_k, \dots, \alpha_p f_k)^T \right\rangle \\ &= \left\langle \text{diag}(I_{p_1 \times p_1}, -I_{p_2 \times p_2}) u_k, u_k \right\rangle_H \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

und

$$\begin{aligned} &\langle K_\lambda u_k, u_k \rangle_H \\ &= - \int_U \langle B_\lambda u_k, u_k \rangle \, dx \quad (3.1.16) \\ &= - \int_U \left\langle \begin{pmatrix} b_{11}(\lambda) \alpha_1 f_k + b_{12}(\lambda) \alpha_2 f_k + \dots + b_{1p}(\lambda) \alpha_p f_k \\ b_{21}(\lambda) \alpha_1 f_k + b_{22}(\lambda) \alpha_2 f_k + \dots + b_{2p}(\lambda) \alpha_p f_k \\ \vdots \\ b_{p1}(\lambda) \alpha_1 f_k + b_{p2}(\lambda) \alpha_2 f_k + \dots + b_{pp}(\lambda) \alpha_p f_k \end{pmatrix}, (\alpha_1 f_k, \dots, \alpha_p f_k)^T \right\rangle \, dx \\ &= - \int_U b_{11}(\lambda) \alpha_1^2 f_k^2 + b_{12}(\lambda) \alpha_1 \alpha_2 f_k^2 + \dots + b_{1p}(\lambda) \alpha_1 \alpha_p f_k^2 \\ &\quad + b_{21}(\lambda) \alpha_1 \alpha_2 f_k^2 + b_{22}(\lambda) \alpha_2^2 f_k^2 + \dots + b_{2p}(\lambda) \alpha_p \alpha_2 f_k^2 \\ &\quad \vdots \\ &\quad + b_{p1}(\lambda) \alpha_1 \alpha_p f_k^2 + b_{p2}(\lambda) \alpha_2 \alpha_p f_k^2 + \dots + b_{pp}(\lambda) \alpha_p^2 f_k^2 \, dx \\ &= - \int_U \left( \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p b_{ij}(\lambda) \alpha_i \alpha_j \right) f_k^2 \, dx = - \left( \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p b_{ij}(\lambda) \alpha_i \alpha_j \right) \int_U f_k^2 \, dx \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

Mit (3.1.11), folgt weiter

$$\begin{aligned}
& - \left( \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p b_{ij}(\lambda) \alpha_i \alpha_j \right) \int_U f_k^2 dx \\
& = - \frac{1}{\beta_k} \left( \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p b_{ij}(\lambda) \alpha_i \alpha_j \right) \\
& = \left\langle - \frac{1}{\beta_k} B_\lambda u_k, u_k \right\rangle_H
\end{aligned} \tag{3.1.18}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\langle L_\lambda u_k, u_k \rangle_H & = \langle T u_k, u_k \rangle_H + \langle K_\lambda u_k, u_k \rangle_H \\
& = \langle \text{diag}(I_{p_1 \times p_1}, -I_{p_2 \times p_2}) u_k, u_k \rangle_H + \left\langle - \frac{1}{\beta_k} B_\lambda u_k, u_k \right\rangle_H \\
& = \left\langle \left( \text{diag}(I_{p_1 \times p_1}, -I_{p_2 \times p_2}) - \frac{1}{\beta_k} B_\lambda \right) u_k, u_k \right\rangle_H
\end{aligned} \tag{3.1.19}$$

Folglich hat der Operator  $L_\lambda^k$  die Darstellung als Matrix

$$L_\lambda^k = \begin{pmatrix} I_{p_1 \times p_1} & 0 \\ 0 & -I_{p_2 \times p_2} \end{pmatrix} - \frac{1}{\beta_k} B_\lambda, \lambda \in I$$

bezüglich der Orthonormalbasis  $\{f_k e_i \mid 1 \leq i \leq p\}$  von  $H_k$ .  $\square$

Da weiterhin  $\beta_k \rightarrow \infty$  für  $k \rightarrow \infty$ , existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  so, dass  $L_\lambda^k$  invertierbar ist und

$$\text{sgn}(L_\lambda^k) - \text{sgn}(-A) = 0 \text{ für alle } k \geq n, \lambda \in I. \tag{3.1.20}$$

Im Folgenden sei nun für alle  $\lambda \in I$  ein Index definiert durch

$$i(B_\lambda) := \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\text{sgn}(L_\lambda^k) - \text{sgn}(-A)).$$

Satz 2.1.6 besagt, dass falls für alle  $\lambda \in I$  die Rieszdarstellungen  $L_\lambda$  von  $\nabla_0^2 f_\lambda$  Fredholmoperatoren und  $L_0, L_1$  invertierbar sind, so ist ein nichtverschwindender

Spektralfluss von  $\{L_\lambda\}_{\lambda \in I}$  eine hinreichende Bedingung für die Existenz von Bifurkationspunkten. Eine Anwendung dieses Resultates liefert uns den nachfolgenden Satz.

**Satz 3.1.4** ([13]).

Unter den oben genannten Annahmen (A1)-(A4) und Notationen gilt:

Falls  $L_0, L_1$  invertierbar sind und  $i(B_1) \neq i(B_0)$  gilt, existiert ein Bifurkationspunkt schwacher Lösungen für (3.1.9) in  $(0, 1)$ .

*Beweis.*

Seien  $n \in \mathbb{N}$  beliebig so, dass  $H = H^1 \oplus H^2$  mit  $H^1 := \bigoplus_{k=1}^n H_k$  und  $H^2 := (H^1)^\perp$ . Für alle  $k \in \mathbb{N}$  bezeichne weiterhin  $P_k$  die Orthogonalprojektion in  $H$  auf  $H_k$ . Dann ist durch  $Q_n := \sum_{k=1}^n P_k$  die Orthogonalprojektion auf  $H^1$  gegeben und entsprechend durch  $Q_n^\perp := (I_H - Q_n)$  die Orthogonalprojektion auf  $H^2$ . Mit Lemma 3.1.2 und Gleichung (3.1.8) folgt nun

$$\begin{aligned} L_\lambda &= T + Q_n K_\lambda Q_n + \underbrace{Q_n K_\lambda Q_n^\perp}_{=0} + \underbrace{Q_n^\perp K_\lambda Q_n}_{=0} + Q_n^\perp K_\lambda Q_n^\perp \\ &= T + Q_n K_\lambda Q_n + Q_n^\perp K_\lambda Q_n^\perp. \end{aligned} \tag{3.1.21}$$

Aus der starken Konvergenz von  $Q_n^\perp$  gegen 0 für  $n \rightarrow \infty$  und der Kompaktheit der Operatoren  $K_\lambda, \lambda \in I$  konvergiert für  $\lambda \in I$  sowohl  $K_\lambda Q_n^\perp$ , als auch  $Q_n^\perp K_\lambda$  in der Operatornorm gegen 0. Da  $\|Q_n^\perp\| = 1$  gilt, folgt insbesondere

$$\|Q_n^\perp K_\lambda Q_n^\perp\| \leq \|Q_n^\perp\| \cdot \|K_\lambda Q_n^\perp\| \leq \|K_\lambda Q_n^\perp\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

Da weiter  $\lambda \mapsto K_\lambda$  normstetig auf dem kompakten Intervall  $I = [0, 1]$  ist, ist die Menge  $\{K_\lambda\}_{\lambda \in I}$  relativ kompakt im Raum der kompakten Operatoren auf  $H$ . Daher ist die Konvergenz

$$\|Q_n^\perp K_\lambda Q_n^\perp\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \tag{3.1.22}$$

gleichmäßig in  $\lambda \in I$ . Nach Voraussetzung ist der Operator  $L_\lambda$  invertierbar für  $\lambda \in \{0, 1\}$ . Somit existiert ein  $C > 0$  so, dass

$$\|L_0 u\| \geq 3C\|u\|, \quad u \in H,$$

und

$$\|L_1 u\| \geq 3C\|u\|, \quad u \in H.$$

Sei nun  $n_0$  geeignet groß so, dass gilt

$$\|Q_n^\perp K_\lambda Q_n^\perp\| < C, \quad n \geq n_0. \quad (3.1.23)$$

Dann folgt aus Gleichung (3.1.21) und Gleichung (3.1.22), dass

$$\|Tu + Q_n K_\lambda Q_n u\| \geq 2C\|u\|, \quad u \in H, \lambda = 0, 1, \quad n \geq n_0. \quad (3.1.24)$$

Im Folgenden sei nun  $n_0 \in \mathbb{N}$  so groß gewählt, dass neben Gleichung (3.1.24), weiterhin  $L_\lambda^k$  invertierbar ist und Gleichung (3.1.20) für alle  $k \geq n_0$  erfüllt ist.

Des Weiteren sei nun für  $n \geq n_0$  die Homotopie

$$h : I \times I \rightarrow \mathcal{F}_S(H)$$

definiert durch

$$h(t, \lambda) = T + Q_n K_\lambda Q_n + t Q_n^\perp K_\lambda Q_n^\perp.$$

Mit Gleichung (3.1.23) und Gleichung (3.1.24), folgt für  $\lambda \in \{0, 1\}$

$$\|h(t, \lambda)u\| \geq C\|u\|, \quad u \in H,$$

so, dass  $h(t, 0)$  und  $h(t, 1)$  invertierbar sind für alle  $t \in I$ . Dann folgt aus den Eigenschaften des Spektralflusses

$$\begin{aligned} \text{sf}(L) &\stackrel{(A)}{=} \text{sf}(L|_{H^1}) + \text{sf}(L|_{H^2}) \stackrel{(Z)/(H)}{=} \text{sf}(L|_{H^1}) \\ &\stackrel{(A)/(Z)}{=} \sum_{k=1}^n \text{sf}(L|_{H_k}) \stackrel{(N)}{=} \sum_{k=1}^n \mu_{\text{Morse}}(L_0|_{H_k}) - \mu_{\text{Morse}}(L_1|_{H_k}) \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

Da zwischen der Signatur und dem Morseindex einer symmetrischen  $p \times p$ -Matrix  $M$  folgender Zusammenhang

$$\text{sgn}(M) = p - 2\mu_{\text{Morse}}(M)$$

besteht, folgt mit Gleichung (3.1.25) weiter

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^n (\mu_{\text{Morse}}(L_0|_{H_k}) - \mu_{\text{Morse}}(L_1|_{H_k})) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{p}{2} - \frac{1}{2} \text{sgn}(L_0^k) - \frac{p}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(L_1^k) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\text{sgn}(L_1^k) - \text{sgn}(L_0^k) + \text{sgn}(-A) - \text{sgn}(-A)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\text{sgn}(L_1^k) - \text{sgn}(-A)) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\text{sgn}(L_0^k) - \text{sgn}(-A)) \\ &= i(B_1) - i(B_0), \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

Insgesamt gilt nun

$$\text{sf}(L) = i(B_1) - i(B_0), \quad (3.1.27)$$

Unter Verwendung von Satz 2.1.5 folgt nun die Aussage von Satz 3.1.4.  $\square$

### 3.1.2 Bifurkation mittels Vergleichsmethoden für (3.1.1)

In diesem Abschnitt betrachten wir erneut das System (3.1.1) unter den Annahmen (A1)-(A4). Das Ziel des folgenden Abschnittes ist es ein Kriterium für die Existenz von Bifurkationspunkten für (3.1.1) mit Hilfe von Vergleichsprinzipien des Spektralflusses zu finden.

Analog zu Abschnitt 3.1 bezeichnet  $L_\lambda$  die Rieszdarstellung von  $\nabla_u^2 f_\lambda$  für den kritischen Punkt  $0 \in H$ . Weiterhin betrachten wir die folgenden Wege  $M = \{M_\lambda\}_{\lambda \in I}$  und  $N = \{N_\lambda\}_{\lambda \in I}$  in  $\mathcal{F}_S(H)$  gegeben durch

$$\langle M_\lambda u, v \rangle_H := \langle Tu, v \rangle_H - \int_U \langle C_\lambda u, v \rangle \, dx \quad (3.1.28)$$

und

$$\langle N_\lambda u, v \rangle_H := \langle Tu, v \rangle_H - \int_U \langle D_\lambda u, v \rangle \, dx, \quad (3.1.29)$$

wobei  $C_\lambda := \begin{pmatrix} C_{1,\lambda} & 0 \\ 0 & C_{2,\lambda} \end{pmatrix}$  und  $D_\lambda := \begin{pmatrix} D_{1,\lambda} & 0 \\ 0 & D_{2,\lambda} \end{pmatrix}$  symmetrische Matrizen seien so, dass die Matrizen  $B_0(x) - C_0, C_1 - B_1(x)$  und  $D_0 - B_0(x), B_1(x) - D_1$  für alle  $x \in U$  positiv semidefinit sind. Des Weiteren bezeichnen wir für eine  $n \times n$ -Matrix  $M$  mit  $n \in \mathbb{N}$  im Folgenden die Eigenwerte von  $M$  durch  $\mu_i(M)$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

**Satz 3.1.5** ([13]).

Unter den Annahmen (A1)-(A4) und falls  $L_0, L_1$  invertierbar sind, gilt

(i) Falls  $C_{1,0} \geq C_{1,1}, C_{2,0} \geq C_{2,1}$  gilt und es ein  $j \in \{1, \dots, p_1\}$  gibt so, dass

$$\mu_j(C_{1,1}) < \beta_k < \mu_j(C_{1,0}) \text{ für } k \in \mathbb{N}$$

oder es ein  $j \in \{1, \dots, p_2\}$  gibt so, dass

$$\mu_j(C_{2,1}) < -\beta_k < \mu_j(C_{2,0}) \text{ für } k \in \mathbb{N},$$

gilt, dann existiert ein Bifurkationspunkt für (3.1.1).

(ii) Falls  $D_{1,1} \geq D_{1,0}, D_{2,1} \geq D_{2,0}$  gilt und es ein  $j \in \{1, \dots, p_1\}$  gibt so, dass

$$\mu_j(D_{1,0}) < \beta_k < \mu_j(D_{1,1}) \text{ für } k \in \mathbb{N}$$

oder es ein  $j \in \{1, \dots, p_2\}$  gibt so, dass

$$\mu_j(D_{2,0}) < -\beta_k < \mu_j(D_{2,1}) \text{ für } k \in \mathbb{N},$$

gilt, dann existiert ein Bifurkationspunkt für (3.1.1).

*Beweis.* Da

$$\langle (L_\lambda - M_\lambda)u, v \rangle_H = \int_U \langle (C_\lambda - B_\lambda(x))u, v \rangle dx, \quad u, v \in H$$

und

$$\langle (L_\lambda - N_\lambda)u, v \rangle_H = \int_U \langle (D_\lambda - B_\lambda(x))u, v \rangle dx, \quad u, v \in H,$$

gilt, sind  $L_\lambda - M_\lambda$  und  $L_\lambda - N_\lambda$  kompakt für alle  $\lambda \in I$ . Für alle  $x \in \bar{U}$  sind  $B_0(x) - C_0, C_1 - B_1(x)$  und  $D_0 - B_0(x), B_1(x) - D_1$  positiv semidefinit und somit gilt  $N_0 \leq L_0 \leq M_0$  und  $M_1 \leq L_1 \leq N_1$ . Damit folgt aus Korollar 2.1.8.

$$\text{sf}(M, I) \leq \text{sf}(L, I) \leq \text{sf}(N, I).$$

Falls wir nun zeigen können, dass  $\text{sf}(M, I) > 0$  unter den Annahmen von (i) und  $\text{sf}(N, I) < 0$  unter den Annahmen von (ii) gilt, folgt die Behauptung mit Satz 2.1.5. Betrachten wir zuerst den Weg  $M$ . Mit Hilfe der Resultate aus Abschnitt 3.1.1, wissen wir das eine Zerlegung von  $H$  in endlich dimensionale Teilräume  $H_k, k \in \mathbb{N}$  existiert, so dass  $L_\lambda$  durch  $H_k$  reduziert wird. Analog wird  $M_\lambda$  durch diese Zerlegung reduziert und wir erhalten für alle  $k \in \mathbb{N}$  folgende Darstellung von  $M_\lambda^k$  als Matrix

$$M_\lambda^k = \begin{pmatrix} I_{p_1 \times p_1} & 0 \\ 0 & -I_{p_2 \times p_2} \end{pmatrix} - \frac{1}{\beta_k} C_\lambda, \quad \lambda \in I.$$

Weiterhin, wissen wir mit (3.1.27), dass gilt

$$\begin{aligned}
\text{sf}(M, I) &= i(C_1) - i(C_0) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\text{sgn}(M_1^k) - \text{sgn}(-A)) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\text{sgn}(M_0^k) - \text{sgn}(-A)) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_{\text{Morse}}(M_0^k) - \mu_{\text{Morse}}(M_1^k)). \tag{3.1.30}
\end{aligned}$$

Da die Matrizen  $\begin{pmatrix} I_{p_1 \times p_1} & 0 \\ 0 & -I_{p_2 \times p_2} \end{pmatrix}$  und  $-\frac{1}{\beta_k} C_\lambda$  für alle  $\lambda \in I$  kommutieren, er-

halten wir die Eigenwerte von  $M_\lambda^k$  als Summe der Eigenwerte von  $\begin{pmatrix} I_{p_1 \times p_1} & 0 \\ 0 & -I_{p_2 \times p_2} \end{pmatrix}$  und  $-\frac{1}{\beta_k} C_\lambda$ . Für das Spektrum von  $C_\lambda$  besteht folgender Zusammenhang

$$\sigma(C_\lambda) = \sigma(C_{1,\lambda}) \cup \sigma(C_{2,\lambda}).$$

Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  gilt nun

$$1 - \frac{\mu_i(C_{1,\lambda})}{\beta_k} < 0 \text{ genau dann, wenn } \beta_k < \mu_i(C_{1,\lambda}) \text{ für } i \in \{1, \dots, p_1\}, \lambda \in I$$

und

$$-1 - \frac{\mu_i(C_{2,\lambda})}{\beta_k} < 0 \text{ genau dann, wenn } -\beta_k < \mu_i(C_{2,\lambda}) \text{ für } i \in \{1, \dots, p_2\}, \lambda \in I.$$

Zusammenfassend gilt nun

$$\mu_{\text{Morse}}(M_\lambda^k) = |(\beta_k, \infty) \cap \sigma(C_{1,\lambda})| + |(-\beta_k, \infty) \cap \sigma(C_{2,\lambda})| \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Zusammen mit Gleichung (3.1.30) erhalten wir somit

$$\begin{aligned}
\text{sf}(M, I) &= \sum_{k=1}^{\infty} (|(\beta_k, \infty) \cap \sigma(C_{1,0})| + |(-\beta_k, \infty) \cap \sigma(C_{2,0})| \\
&\quad - |(\beta_k, \infty) \cap \sigma(C_{1,1})| - |(-\beta_k, \infty) \cap \sigma(C_{2,1})|) \tag{3.1.31}
\end{aligned}$$

Da  $C_{1,0} \geq C_{1,1}$  und  $C_{2,0} \geq C_{2,1}$ ,  $C_{1,0} - C_{1,1}$  sowie  $C_{2,0} - C_{2,1}$  positiv semidefinite Matrizen sind, gilt mit Hilfe der Weyl-Ungleichung für symmetrische Matrizen

$$\mu_i(C_{1,1}) \leq \mu_i(C_{1,1} + (C_{1,0} - C_{1,1})) = \mu_i(C_{1,0}) \text{ für alle } i \in \{1, \dots, p_1\} \quad (3.1.32)$$

und

$$\mu_i(C_{2,1}) \leq \mu_i(C_{2,1} + (C_{2,0} - C_{2,1})) = \mu_i(C_{2,0}) \text{ für alle } i \in \{1, \dots, p_2\}. \quad (3.1.33)$$

Somit erhalten wir für jedes  $k \in \mathbb{N}$

$$|(\beta_k, \infty) \cap \sigma(C_{1,0})| \geq |(\beta_k, \infty) \cap \sigma(C_{1,1})|$$

und

$$|(-\beta_k, \infty) \cap \sigma(C_{2,0})| \geq |(-\beta_k, \infty) \cap \sigma(C_{2,1})|,$$

da  $\beta_k$  eine monoton wachsende Folge ist. Mit Gleichung (3.1.31) erhalten wir somit  $\text{sf}(M, I) \geq 0$  und schließlich ist  $\text{sf}(M, I) > 0$  falls ein  $j \in \{1, \dots, p_1\}$  existiert so, dass

$$\mu_j(C_{1,1}) < \beta_k < \mu_j(C_{1,0}) \text{ für } k \in \mathbb{N}$$

oder ein  $j \in \{1, \dots, p_2\}$  existiert so, dass

$$\mu_j(C_{2,1}) < -\beta_k < \mu_j(C_{2,0}) \text{ für } k \in \mathbb{N}.$$

Auf analoge Art und Weise, zeigt man dass unter der Annahme aus (ii)  $\text{sf}(N, I) < 0$  gilt. □

**Bemerkung 3.1.6** ([13]).

(i) Zuerst halten wir fest, dass wir im Beweis von Satz 3.1.5 die Gültigkeit der folgenden Spektralflussformel

$$\begin{aligned} \text{sf}(M, I) = & \sum_{k=1}^{\infty} (|(\beta_k, \infty) \cap \sigma(C_{1,0})| + |(-\beta_k, \infty) \cap \sigma(C_{2,0})| \\ & - |(\beta_k, \infty) \cap \sigma(C_{1,1})| - |(-\beta_k, \infty) \cap \sigma(C_{2,1})|). \end{aligned}$$

für Wege  $M = \{M_\lambda\}_{\lambda \in I}$  in  $\mathcal{F}_S(H)$  gegeben durch

$$\langle M_\lambda u, v \rangle_H := \langle Tu, v \rangle_H - \int_U \langle C_\lambda u, v \rangle dx$$

wobei  $C_\lambda := \begin{pmatrix} C_{1,\lambda} & 0 \\ 0 & C_{2,\lambda} \end{pmatrix}$  eine symmetrische Matrix ist, gezeigt haben.

(ii) Weiterhin stellten wir fest, dass die Voraussetzungen in Satz 3.1.5 implizieren, dass entweder  $B_0(x) \geq B_1(x)$  oder  $B_1(x) \geq B_0(x)$  für alle  $x \in \bar{U}$  gilt.

Für  $\lambda \in I$  sei

$$\begin{aligned} \gamma_\lambda &:= \sup_{x \in \bar{U}} \{\mu_1(B_\lambda(x)), \dots, \mu_p(B_\lambda(x))\}, \\ \alpha_\lambda &:= \inf_{x \in \bar{U}} \{\mu_1(B_\lambda(x)), \dots, \mu_p(B_\lambda(x))\}. \end{aligned}$$

**Korollar 3.1.7** ([13]).

Betrachten wir System (3.1.1) unter den Annahmen (A1)-(A4).

1. Falls  $\alpha_0 > \gamma_1$  und ein  $k \in \mathbb{N}$  existiert so, dass

$$\gamma_1 < \beta_k < \alpha_0 \quad \text{oder} \quad \gamma_1 < -\beta_k < \alpha_0$$

dann existiert ein Bifurkationspunkt für (3.1.1).

2. Falls  $\alpha_1 > \gamma_0$  und ein  $k \in \mathbb{N}$  existiert so, dass

$$\gamma_0 < \beta_k < \alpha_1 \quad \text{oder} \quad \gamma_0 < -\beta_k < \alpha_1$$

dann existiert ein Bifurkationspunkt für (3.1.1).

*Beweis.*

Wir setzen  $C_\lambda = (\alpha_0 + \lambda(\gamma_1 - \alpha_0))I_{p \times p}$  und  $D_\lambda := (\gamma_0 + \lambda(\alpha_1 - \gamma_0))I_{p \times p}$  in Satz 3.1.5.  $\square$

An dieser Stelle sei erwähnt, dass in ([22], Abschnitt 4) bereits eine Klasse von Systemen stark indefiniter elliptischer Differentialgleichungssysteme mittels Vergleichsmethoden des Spektralflusses auf Existenz von Bifurkationspunkten untersucht wurde und ein zu Korollar 3.1.7 analoges Resultat erzielt wurde. Mit Hilfe der nachfolgenden Bemerkung wollen wir zeigen, dass Satz 3.1.5 jedoch eine echte Verallgemeinerung von Korollar 3.1.7 darstellt.

**Bemerkung 3.1.8** ([13]).

Wir betrachten erneut das System (3.1.9) für den Spezialfall, dass  $U = (0, \pi)$  und  $p_1 = 1 = p_2$ , d.h. das System ist von der Form

$$\begin{cases} -u_1'' = \nabla_{u_1} F(\lambda, u(x)) & \text{in } (0, \pi) \\ u_2'' = \nabla_{u_2} F(\lambda, u(x)) & \text{in } (0, \pi) \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases} \quad (3.1.34)$$

Des Weiteren gelte Annahme (A2) so, dass

$$B_0 := \nabla_u^2 F(0, 0) = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \text{ and } B_1 := \nabla_u^2 F(1, 0) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir halten fest, dass die Dirichleteigenwerte bezüglich des Gebietes  $U = (0, \pi)$  gegeben sind durch  $\beta_k = k^2$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Sei nun  $C_\lambda = (\alpha_0 + \lambda(\gamma_1 - \alpha_0))I_{2 \times 2}$ , wobei  $\alpha_0 = 4$  der kleinste Eigenwert von  $B_0$  und  $\gamma_1 = \frac{\sqrt{29}-1}{2}$  der größte Eigenwert von  $B_1$  ist. Da kein  $k \in \mathbb{N}$  existiert so, dass  $\gamma_1 < \beta_k < \alpha_0$  gilt, können wir Korollar 3.1.7 nicht verwenden, um Bifurkationspunkte von Gleichung (3.1.34) zu untersuchen. Falls wir nun

$$C_0 = \begin{pmatrix} C_{1,0} & 0 \\ 0 & C_{2,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ and } C_1 = \begin{pmatrix} C_{1,1} & 0 \\ 0 & C_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

in Satz 3.1.5 setzen, so erhalten wir die Existenz von Bifurkationspunkten für Gleichung (3.1.34), da

$$\mu(C_{1,1}) = 1 < \underbrace{4}_{=\beta_2} < 5 = \mu(C_{1,0}).$$

Wir betrachten nun den Spezialfall, dass  $p = 2$  und  $p_1 = 1 = p_2$  gilt, d.h. das System (3.1.1) ist von der Form

$$\begin{cases} -\Delta u_1(x) = \nabla_{u_1} F(\lambda, x, u(x)) & \text{in } U \\ \Delta u_2(x) = \nabla_{u_2} F(\lambda, x, u(x)) & \text{in } U \\ u(x) = 0 & \text{auf } \partial U, \end{cases} \quad (3.1.35)$$

wobei für ein  $N \in \mathbb{N}$  die Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^N$  ein beschränktes glattes Gebiet ist. In Anlehnung an Annahme (A2), setzen wir

$$B_\lambda(x) := \begin{pmatrix} b_{11}(\lambda, x) & b_{12}(\lambda, x) \\ b_{12}(\lambda, x) & b_{22}(\lambda, x) \end{pmatrix}, \quad \lambda \in I, x \in U.$$

Reelle, symmetrische und schwachdiagonaldominante Matrizen mit nicht negativen Diagonaleinträgen sind positiv semidefinit. Da nach Annahme (A2) für alle  $\lambda \in I, x \in U$  die Matrizen  $B_\lambda(x)$  reelle symmetrische Matrizen sind, wollen wir diese Eigenschaft nutzen und unter Anwendung von Satz 3.1.5 Bedingungen für die Existenz von Bifurkationspunkten für System (3.1.35) angeben, die nur von den Einträgen der Matrizen  $B_\lambda(x)$  und  $C_\lambda$  abhängen.

Falls wir nun  $C_\lambda := \begin{pmatrix} c_{1\lambda} & 0 \\ 0 & c_{2\lambda} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  und  $D_\lambda := \begin{pmatrix} d_{1\lambda} & 0 \\ 0 & d_{2\lambda} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  wählen, so erhalten wir mit Satz 3.1.5

1. Falls  $c_{10}, c_{11}, c_{20}, c_{21} \in \mathbb{R}$  existieren so, dass

$$\min_{x \in \bar{U}} b_{22}(0, x) - \max_{x \in \bar{U}} |b_{12}(0, x)| \geq c_{20} \geq c_{21} \geq \max_{x \in \bar{U}} b_{22}(1, x) + \max_{x \in \bar{U}} |b_{12}(1, x)|$$

und ein  $k \in \mathbb{N}$  existiert so, dass

$$\min_{x \in \bar{U}} b_{11}(0, x) - \max_{x \in \bar{U}} |b_{12}(0, x)| \geq c_{10} > \alpha_k > c_{11} \geq \max_{x \in \bar{U}} b_{11}(1, x) + \max_{x \in \bar{U}} |b_{12}(1, x)|$$

dann existiert ein Bifurkationspunkt für (3.1.35).

2. Falls  $c_{10}, c_{11}, c_{20}, c_{21} \in \mathbb{R}$  existieren so, dass

$$\max_{x \in \bar{U}} b_{11}(0, x) - \max_{x \in \bar{U}} |b_{12}(0, x)| \geq c_{10} \geq c_{11} \geq \max_{x \in \bar{U}} b_{11}(1, x) + \max_{x \in \bar{U}} |b_{12}(1, x)|$$

und ein  $k \in \mathbb{N}$  existiert so, dass

$$\min_{x \in \bar{U}} b_{22}(0, x) - \max_{x \in \bar{U}} |b_{12}(0, x)| \geq c_{20} > -\alpha_k > c_{21} \geq \max_{x \in \bar{U}} b_{22}(1, x) + \max_{x \in \bar{U}} |b_{12}(1, x)|$$

dann existiert ein Bifurkationspunkt für (3.1.35).

3. Falls  $d_{10}, d_{11}, d_{20}, d_{21} \in \mathbb{R}$  existiert so, dass

$$\min_{x \in \bar{U}} b_{22}(1, x) - \max_{x \in \bar{U}} |b_{12}(1, x)| \geq d_{21} \geq d_{20} \geq \max_{x \in \bar{U}} b_{22}(0, x) + \max_{x \in \bar{U}} |b_{12}(0, x)|$$

und ein  $k \in \mathbb{N}$  existiert so, dass

$$\min_{x \in \bar{U}} b_{11}(1, x) - \max_{x \in \bar{U}} |b_{12}(1, x)| \geq d_{11} > \alpha_k > d_{10} \geq \max_{x \in \bar{U}} b_{11}(0, x) + \max_{x \in \bar{U}} |b_{12}(0, x)|$$

dann existiert ein Bifurkationspunkt für (3.1.35).

4. Falls  $d_{10}, d_{11}, d_{20}, d_{21} \in \mathbb{R}$  existiert so, dass

$$\min_{x \in \bar{U}} b_{11}(1, x) - \max_{x \in \bar{U}} |b_{12}(1, x)| \geq d_{11} \geq d_{10} \geq \max_{x \in \bar{U}} b_{11}(0, x) + \max_{x \in \bar{U}} |b_{12}(0, x)|$$

und ein  $k \in \mathbb{N}$  existiert so, dass

$$\min_{x \in \bar{U}} b_{22}(1, x) - \max_{x \in \bar{U}} |b_{12}(1, x)| \geq d_{21} > -\alpha_k > d_{20} \geq \max_{x \in \bar{U}} b_{22}(0, x) + \max_{x \in \bar{U}} |b_{12}(0, x)|$$

dann existiert ein Bifurkationspunkt für (3.1.35).

**Bemerkung 3.1.9.**

*Man beachte jedoch, dass die Bedingungen 1.-4. nicht äquivalent zu den Bedingungen*

(i),(ii) aus Satz 3.1.5 sind. Das liegt daran, dass es sich bei der Aussage „Jede reelle symmetrische und schwachdiagonaldominante Matrix mit nicht negativen Diagonaleinträgen ist positiv semidefinit.“ um keine Äquivalenzaussage handelt.

**Beispiel 3.1.10.**

Betrachten wir erneut das System (3.1.34) so, dass für alle  $x \in U$  gilt

$$B_0(x) = \begin{pmatrix} b_{11}(0, x) & b_{12}(0, x) \\ b_{12}(0, x) & b_{22}(0, x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2 & 0.3 \\ 0.3 & 1.2 \end{pmatrix}$$

und

$$B_1(x) = \begin{pmatrix} b_{11}(1, x) & b_{12}(1, x) \\ b_{12}(1, x) & b_{22}(1, x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

Wählen wir nun

$$C_0 = \begin{pmatrix} c_{10} & 0 \\ 0 & c_{20} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1.6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } C_1 = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & c_{21} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Nach Wahl von  $C_0$  und  $C_1$  gilt sowohl

$$c_{20} = 1 \geq 0.5 = c_{21} \text{ als auch } c_{10} = 1.6 \geq 0.8 = c_{11}. \quad (3.1.36)$$

Da jedoch

$$\min_{x \in \bar{U}} b_{22}(0, x) - \max_{x \in \bar{U}} |b_{12}(0, x)| = 1.2 - 0.3 = 0.9 < 1 = c_{20}$$

gilt, gilt weder Bedingung (1.) noch (2.). Aufgrund von (3.1.36) erhalten wir  $C_0 \geq C_1$  und weiter gilt für alle  $x \in U$ , dass

$$B_0(x) - C_0 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.2 \end{pmatrix} \text{ und } C_1 - B_1(x) = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

positiv semidefinit sind. Bezüglich der Menge  $U = (0, \pi)$  sind die Dirichleiteigenwerte gegeben durch  $\beta_k = k^2, k \in \mathbb{N}$ . Da weiter

$$\mu_1(c_{11}) = 0.8 < \underbrace{1}_{=\beta_1} < 1.6 = \mu_1(c_{10}) \quad (3.1.37)$$

gilt, erhalten wir mit Satz 3.1.5 die Existenz eines Bifurkationspunktes für System (3.1.34).

### 3.1.3 Anwendung auf zusammenziehbare Gebiete

Ziel dieses Abschnittes ist die Untersuchung von Systemen auf sternförmigen Gebieten bezüglich 0 hinsichtlich der Existenz von Bifurkationspunkten durch Anwendung der im vorherigen Abschnitt erzielten Resultate. Der Bifurkationsparameter wird dabei durch Zusammenziehen des Gebietes eingeführt. Wir betrachten also das folgende System

$$\begin{cases} A\Delta u(x) = \nabla_u F(x, u(x)) & \text{in } U \\ u(x) = 0 & \text{auf } \partial U \end{cases} \quad (3.1.38)$$

wobei  $U \subset \mathbb{R}^N$  ein beschränktes, sternförmiges Gebiet bezüglich 0 mit glattem Rand und  $A$  wie in (A4) am Anfang von Kapitel 3 gewählt sei. Weiterhin sei 0 für alle  $x \in U$  ein kritischer Punkt von  $F(x, \cdot) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  und wir setzen

$$B(x) := \nabla_u^2 F(x, 0). \quad (3.1.39)$$

Zu guter Letzt nehmen wir an, dass analog zur Annahme (A3) aus Kapitel 3 gelte :

Falls  $N \geq 3$  ist, so existieren ein  $C > 0$  und  $1 \leq s < (N+2)(N-2)^{-1}$  so, dass

$$|\nabla_u^2 F(x, u)| \leq C(1 + |u|^{s-1}).$$

Falls  $N = 2$  ist, so wähle  $s \in [1, \infty)$ . Für  $N = 1$  ist keine Wachstumsbedingung notwendig.

Sei nun  $U_r := \{r \cdot x : x \in U\}$  und wir betrachten das System (3.1.38) auf  $U_r$ , d.h.

$$\begin{cases} A\Delta u(x) = \nabla_u F(x, u(x)) & \text{in } U_r \\ u(x) = 0 & \text{auf } \partial U_r. \end{cases} \quad (3.1.40)$$

Da 0 ein kritischer Punkt von  $F(x, \cdot)$  für alle  $x \in U$  ist, ist  $u \equiv 0$  eine Lösung von (3.1.40) für alle  $0 < r \leq 1$ . Zudem nennen wir  $r^* \in (0, 1]$  Bifurkationsradius für (3.1.38), falls eine Folge  $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  und schwache Lösungen  $0 \neq u_n \in H_0^1(U_{r_n}, \mathbb{R}^p)$  existieren so, dass  $r_n \rightarrow r^*$  und  $\|u_n\|_{H_0^1(U_{r_n}, \mathbb{R}^p)} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Betrachten wir nun das Funktional  $\tilde{f} : H_0^1(U_r, \mathbb{R}^p) \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$\tilde{f}(u) := \frac{1}{2} \int_{U_r} \sum_{i=1}^p (-a_i |u^i(x)|^2) dx - \int_{U_r} F(x, u(x)) dx,$$

so entsprechen die Lösungen von (3.1.40) den kritischen Punkten von  $\tilde{f}$ . Durch Koordinatentransformation  $x \mapsto r \cdot x$  erhalten wir

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p -a_i \cdot r^N \int_U \langle \nabla u^i(r \cdot x), \nabla u^i(r \cdot x) \rangle dx - r^N \int_U F(r \cdot x, u(r \cdot x)) dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p -a_i \cdot r^{N-2} \int_U \langle \nabla u_r^i(x), \nabla u_r^i(x) \rangle dx - r^N \int_U F(r \cdot x, u_r(x)) dx, \end{aligned}$$

wobei  $u_r(x) := u(r \cdot x)$  für  $x \in U$ . Im Folgenden betrachten wir nun also die Familie von Funktionalen  $f : [0, 1] \times H_0^1(U, \mathbb{R}^p) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(r, u) := \frac{1}{2} \int_U \sum_{i=1}^p (-a_i |\nabla u_i(x)|^2) dx - r^2 \int_U F(r \cdot x, u(x)) dx.$$

Da die zweite Ableitung von  $f_r : H_0^1(U, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \nabla_0^2 f_r(u, v) &= \int_U \sum_{i=1}^p (-a_i \langle \nabla u_i(x), \nabla v_i(x) \rangle) dx - r^2 \int_U \langle B(r \cdot x)u(x), v(x) \rangle dx \\ &= \langle (T + K_r)u, v \rangle_{H_0^1(U, \mathbb{R})}, \end{aligned}$$

wobei  $B_r(x) := r^2 B(r \cdot x)$  ist, ist die Rieszdarstellung von  $\nabla_0^2 f_r$  an der Stelle  $0 \in H_0^1(U, \mathbb{R}^p)$  gegeben durch die selbstadjungierten Operatoren

$$L_r := T + K_r.$$

Da  $T$  ein Fredholmoperator von Index 0 ist, ist  $L_r$  für alle  $r \in [0, 1]$  als kompakte Störung selbst ein Fredholmoperator vom Index 0.

Wir betrachten nun zunächst den Fall, dass  $B$  in (3.1.39) nicht von  $x \in U$  abhängt.

**Satz 3.1.11.**

Ist  $L_1$  invertierbar, so existiert ein Bifurkationsradius  $r^* \in (0, 1)$  für (3.1.40), falls

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{sgn}(L^k) - \operatorname{sgn}(-A)) \neq 0,$$

wobei

$$L^k := \begin{pmatrix} I_{p_1 \times p_1} & 0 \\ 0 & -I_{p_2 \times p_2} \end{pmatrix} - \frac{1}{\beta_k} B$$

und  $(\beta_k)$  bezeichne die Folge der Dirichleteigenwerte von  $U$ .

*Beweis.*

Für  $r = 0$  gilt  $K_0 = 0$  und somit insbesondere  $i(B_0) = 0$ . Durch Anwendung von Satz 3.1.4 erhalten wir somit das Resultat.  $\square$

Für eine  $p \times p$ -Matrix,  $p \in \mathbb{N}$  bezeichnen wir im Folgenden die Eigenwerte durch  $\mu_j(\cdot)$  für  $j \in \{1, \dots, p\}$ . Insbesondere betrachten wir stets folgende Sortierung der Eigenwerte einer Matrix

$$\mu_{\max}(\cdot) = \mu_1(\cdot) \geq \dots \geq \mu_p(\cdot) = \mu_{\min}(\cdot),$$

wobei  $\mu_{\max}(\cdot)$  bzw.  $\mu_{\min}(\cdot)$  den größten bzw. kleinsten Eigenwert dieser Matrix bezeichne.

**Korollar 3.1.12.** Seien  $1 \leq p_1, p_2 \leq p - 1$ .

(i) Ist  $L_1$  invertierbar, so existiert ein Bifurkationsradius  $r^* \in (0, 1)$  für (3.1.40), falls

$$\mu_{\min}(B) > \beta_1,$$

wobei  $\beta_1$  den kleinsten Dirichleteigenwert bezeichne.

(ii) Ist  $L_1$  invertierbar, so existiert ein Bifurkationsradius  $r^* \in (0, 1)$  für (3.1.40), falls

$$\mu_{\min}(B) > -\beta_1$$

und ein Eigenwert  $\mu$  im Spektrum von  $B$  existiert so, dass

$$\mu > \beta_1,$$

wobei  $\beta_1$  den kleinsten Dirichleteigenwert bezeichne.

*Beweis.*

Für alle  $k \in \mathbb{N}$  sei  $L^k$  definiert durch

$$L^k := \underbrace{\begin{pmatrix} I_{p_1 \times p_1} & 0 \\ 0 & -I_{p_2 \times p_2} \end{pmatrix}}_{:=M} - \frac{1}{\beta_k} B,$$

wobei  $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$  die Folge der Dirichleteigenwerte auf  $U$  bezeichne. Da zwischen der Signatur und dem Morse-Index einer  $p \times p$ -Matrix  $M$ ,  $p \in \mathbb{N}$  folgender Zusammenhang besteht

$$\text{sgn}(M) = p - 2\mu_{\text{Morse}}(M),$$

gilt für alle  $k \in \mathbb{N}$

$$\text{sgn}(L^k) = p - 2\mu_{\text{Morse}}(L^k)$$

$$\text{sgn}(-A) = p - 2\mu_{\text{Morse}}(-A) = p_1 + p_2 - 2p_1 = p_1 - p_2.$$

und somit

$$\operatorname{sgn}(L^k) - \operatorname{sgn}(-A) = p_1 + p_2 - 2\mu_{\text{Morse}}(L^k) - p_1 + p_2 = 2p_2 - 2\mu_{\text{Morse}}(L^k)$$

Damit gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{sgn}(L^k) - \operatorname{sgn}(-A)) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (p_2 - \mu_{\text{Morse}}(L^k)) \quad (3.1.41)$$

Für  $k \in \mathbb{N}$  beliebig und  $j \in \{1, \dots, p\}$  gilt

$$\mu_j(L^k) = \mu_j(M) + \mu_j\left(-\frac{1}{\beta_k}B\right) = \mu_j(M) - \frac{1}{\beta_k}\mu_{p-j+1}(B)$$

- (i) Durch Anwendung des Satzes von Courant-Fischer erhalten wir folgende Abschätzung für die Eigenwerte von  $L^k, k \in \mathbb{N}$ . Sei nun  $k \in \mathbb{N}$  beliebig. Dann gilt für beliebiges  $j \in \{1, \dots, p\}$

$$\mu_j(L^k) \leq \mu_j(M) + \mu_1\left(-\frac{1}{\beta_k}B\right)$$

– Sei  $j \in \{1, \dots, p_1\}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \mu_j(M) + \mu_1\left(-\frac{1}{\beta_k}B\right) &= 1 - \frac{1}{\beta_k}\mu_p(B) < 0 \\ &\iff -\frac{1}{\beta_k}\mu_p(B) < -1 \\ &\iff \mu_p(B) > \beta_k. \end{aligned}$$

– Sei  $j \in \{p_1 + 1, \dots, p\}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \mu_j(M) + \mu_1\left(-\frac{1}{\beta_k}B\right) &= -1 - \frac{1}{\beta_k}\mu_p(B) < 0 \\ &\iff -\frac{1}{\beta_k}\mu_p(B) < 1 \\ &\iff \mu_p(B) > -\beta_k. \end{aligned}$$

Ist nun  $\mu_p(B) = \mu_{\min}(B) > \beta_1$ , so ist der Ausdruck in Gleichung (3.1.41)

verschieden von Null und nach Satz 3.1.11 erhalten wir die Existenz eines Bifurkationsradius von (3.1.40).

(ii) Sei nun  $k \in \mathbb{N}$  beliebig. Mit Hilfe der Weyl-Ungleichung (siehe [24], §1) gilt für  $i, j \in \{1, \dots, p\}$  mit  $i + j \leq p + 1$

$$\mu_{i+j-1}(L^k) \leq \mu_1(M) + \mu_j\left(-\frac{1}{\beta_k}B\right).$$

– Seien  $i \in \{p_1 + 1, \dots, p\}, j \in \{1, \dots, p_2\}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \mu_{i+j-1}(L^k) &\leq -1 + \mu_j\left(-\frac{1}{\beta_k}B\right) = -1 - \frac{1}{\beta_k}\mu_{p-j+1}(B) < 0 \\ &\iff -\frac{1}{\beta_k}\mu_{p-j+1}(B) < 1 \\ &\iff \mu_{p-j+1}(B) > -\beta_k. \end{aligned}$$

– Seien  $i \in \{1, \dots, p_1\}, j \in \{1, \dots, p\}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \mu_{i+j-1}(L^k) &\leq 1 + \mu_j\left(-\frac{1}{\beta_k}B\right) = 1 - \frac{1}{\beta_k}\mu_{p-j+1}(B) < 0 \\ &\iff -\frac{1}{\beta_k}\mu_{p-j+1}(B) < -1 \\ &\iff \mu_{p-j+1}(B) > \beta_k. \end{aligned}$$

Zusammenfassend erhalten wir nun also, dass der Ausdruck in Gleichung (3.1.41) verschieden von Null ist, falls

$$\mu_{\min}(B) \geq -\beta_k \text{ und } \exists \mu \in \sigma(B) : \mu > \beta_k.$$

Nach Satz 3.1.11 liefert dies die Existenz eines Bifurkationsradius von (3.1.40).

□

Wir betrachten nun das allgemeine System (3.1.40) in dem Spezialfall mit zwei Gleichungen, d.h.

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \frac{\partial F}{\partial u}(x, u(x), v(x)) & \text{in } U_r \\ \Delta v(x) = \frac{\partial F}{\partial v}(x, u(x), v(x)) & \text{in } U_r \\ u(x) = 0, & \text{auf } \partial U_r \\ v(x) = 0, & \text{auf } \partial U_r \end{cases} \quad (3.1.42)$$

mit  $u, v$  skalaren Funktionen. Des Weiteren sei

$$B(x) := \begin{pmatrix} b_{11}(x) & b_{12}(x) \\ b_{12}(x) & b_{22}(x) \end{pmatrix},$$

wobei  $B(x) = \nabla_0^2 F$  die Hessische der Funktion mit  $F : U \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  am Punkt  $0 \in \mathbb{R}^2$  sei. Durch Anwendung der Resultate des Kapitels 3.1.2 auf diese Problemstellung erhalten wir folgenden Satz:

**Satz 3.1.13.**

*Ist  $L_1$  invertierbar und gilt*

$$(i) \max_{x \in \bar{U}} b_{11}(x) < -\max_{x \in \bar{U}} |b_{12}(x)| \text{ und } \max_{x \in \bar{U}} b_{22}(x) < -\max_{x \in \bar{U}} |b_{12}(x)| - \beta_1,$$

*oder*

$$(ii) \min_{x \in \bar{U}} b_{22}(x) > \max_{x \in \bar{U}} |b_{12}(x)| \text{ und } \min_{x \in \bar{U}} b_{11}(x) > \max_{x \in \bar{U}} |b_{12}(x)| + \beta_1,$$

*wobei  $\beta_1$  den kleinsten Dirichleteigenwert bezeichne, so existiert ein Bifukrationsradius für (3.1.42).*

**Beispiel 3.1.14.**

*Wir betrachten nun System (3.1.42) auf  $U = D_r^2 \subset \mathbb{R}^2$  mit Radius  $r > 0$ . Die Dirichleteigenwerte auf  $D_r^2$  sind gegeben durch*

$$\beta_{nm} = \left( \frac{\alpha_{mn}}{r} \right)^2, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, m \in \mathbb{N},$$

wobei  $\alpha_{mn}$  die  $m$ -te positive Nullstelle der  $n$ -ten Besselfunktion bezeichnet. Die kleinste dieser Zahlen ist gegeben durch  $\alpha_{0,1} \approx 2.40483$ . Damit gilt  $5 < \alpha_{0,1}^2 < 6$ . Durch Anwendung von Satz 3.1.13 erhalten wir die Existenz eines Bifurkationsradius für (3.1.42) auf  $U = D_r^2$ , wenn entweder

$$\max_{x \in \overline{D_r^2}} b_{11}(x) < -\max_{x \in \overline{D_r^2}} |b_{12}(x)| \quad \text{und} \quad \max_{x \in \overline{D_r^2}} b_{22}(x) < -\max_{x \in \overline{D_r^2}} |b_{12}(x)| - \frac{6}{r^2}$$

oder

$$\min_{x \in \overline{D_r^2}} b_{22}(x) > \max_{x \in \overline{D_r^2}} |b_{12}(x)| \quad \text{und} \quad \min_{x \in \overline{D_r^2}} b_{11}(x) > \max_{x \in \overline{D_r^2}} |b_{12}(x)| + \frac{6}{r^2}$$

gilt.

### 3.2 System (3.0.1) mit Neumann-Randbedingungen

Wir betrachten hier das System (3.0.1) unter Neumann-Randbedingungen, d.h.

$$\begin{cases} A\Delta u(x) = \nabla_u F(\lambda, x, u(x)) & \text{in } U \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{auf } \partial U. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Des Weiteren gelten die Annahmen (A1)-(A4). Wir werden nun durch analoges Vorgehen wie in Abschnitt 3.1 zeigen, dass unter Neumann-Randbedingungen analoge Resultate erhalten werden können.

Wir betrachten hier den Standardsobolevraum  $H^1(U)$  mit Skalarprodukt gegeben durch

$$\langle u_1, v_1 \rangle_{H^1(U)} = \int_U \langle \nabla u_1(x), \nabla v_1(x) \rangle_{\mathbb{R}^p} + u_1(x) \cdot v_1(x) \, dx.$$

Dann ist  $H := \bigoplus_{i=1}^p H^1(U)$  ein Hilbertraum, wobei das Skalarprodukt gegeben ist durch

$$\langle u, v \rangle_H := \sum_{i=1}^p \langle u_i, v_i \rangle_{H^1(U)}.$$

Betrachte nun die Abbildung  $f : I \times H \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(\lambda, u) := \frac{1}{2} \int_U \sum_{i=1}^p (-a_i |\nabla u_i(x)|^2) dx - \int_U F(\lambda, u(x)) dx. \quad (3.2.2)$$

Nach Annahme (A2) existiert ein  $g \in \mathcal{C}^2(I \times U \times \mathbb{R}^p, \mathbb{R})$  so, dass

$$F(\lambda, u) = \frac{1}{2} \langle B_\lambda u, u \rangle_{\mathbb{R}^p} + g(\lambda, x, u)$$

und für jedes  $\lambda \in I, x \in \bar{U}$  gelte  $\nabla_u g(\lambda, x, 0) = 0$  sowie  $\nabla_u^2 g(\lambda, x, 0) = 0$ .

Aufgrund der Annahmen (A1)-(A3) folgt  $f \in \mathcal{C}^2(I \times H, \mathbb{R})$ . Des Weiteren entsprechen die kritischen Punkte von  $f_\lambda := f(\lambda, \cdot)$  den schwachen Lösungen der Gleichung (3.2.1).

**Lemma 3.2.1.**

*Unter Anwendung der Annahmen (A1)-(A4) erhalten wir*

$$\nabla_u f(\lambda, u) = Tu + K_\lambda u - \nabla_u \eta(\lambda, u),$$

wobei

(i)  $T : H \rightarrow H$  gegeben durch

$$T(u_1, \dots, u_p) := (-a_1 u_1, \dots, -a_p u_p)$$

*ist ein selbstadjungierter Fredholmoperator vom Index 0.*

(ii)  $K_\lambda : H \rightarrow H$  gegeben durch

$$\langle K_\lambda u, v \rangle_H = \int_U \langle Au(x) - B_\lambda u(x), v(x) \rangle_{\mathbb{R}^p} dx$$

*ist ein selbstadjungierter, kompakter Operator.*

(iii)  $\eta : I \times H \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine  $C^2$ -Abbildung definiert durch

$$\eta(\lambda, u) = \int_U g(\lambda, x, u(x)) \, dx,$$

und es gelte  $\nabla_u \eta(\lambda, 0) = 0$ , sowie  $\nabla_u^2 \eta(\lambda, 0) = 0$  für alle  $\lambda \in I$ .

*Beweis.*

Zunächst gilt

$$\begin{aligned} f(\lambda, u) &= \frac{1}{2} \int_U \sum_{i=1}^p (-a_i |\nabla u_i(x)|^2) \, dx - \int_U F(\lambda, u(x)) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_U \sum_{i=1}^p (-a_i |\nabla u_i(x)|^2) - \left( \sum_{i=1}^p -a_i |u_i(x)|^2 \right) \, dx + \frac{1}{2} \int_U \sum_{i=1}^p (a_i |u_i(x)|^2) \, dx \\ &\quad - \int_U \frac{1}{2} \langle B_\lambda u(x), u(x) \rangle_{\mathbb{R}^p} + g(\lambda, u(x)) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p (-a_i \|u_i\|_{H^1(U)}^2) + \int_U \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^p a_i |u_i(x)|^2 \right) - \frac{1}{2} \langle B_\lambda u(x), u(x) \rangle_{\mathbb{R}^p} \, dx \\ &\quad - \underbrace{\int_U g(\lambda, u(x)) \, dx}_{:= \eta(\lambda, u)} \\ &= \frac{1}{2} \langle Tu, u \rangle_H + \int_U \frac{1}{2} \langle Au(x), u(x) \rangle_{\mathbb{R}^p} - \frac{1}{2} \langle B_\lambda u(x), u(x) \rangle_{\mathbb{R}^p} \, dx - \eta(\lambda, u) \end{aligned}$$

Somit gilt für alle  $v \in H$

$$\langle \nabla_u f(\lambda, u), v \rangle_H = \langle Tu, v \rangle_H + \int_U \langle (Au(x) - B_\lambda(u(x))), v \rangle_{\mathbb{R}^p} \, dx - \langle \nabla_u \eta(\lambda, u), v \rangle_H.$$

Die Eigenschaften aus (i) und (ii) folgen aus der Definition der Operatoren. Für den Beweis, dass die Abbildung  $\eta : I \times H \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^2$ -Abbildung ist, siehe [2].  $\square$

Die zweite Ableitung  $\nabla_u^2 f_\lambda$  an der Stelle  $0 \in H$  kann mit Hilfe des Rieszschen Darstellungssatz geschrieben werden als

$$L_\lambda := T + K_\lambda. \tag{3.2.3}$$

Für alle  $\lambda \in I$  ist  $L_\lambda$  als kompakte Störung eines Fredholmoperators selbst ein Fredholmoperator. Damit definiert  $L := \{L_\lambda\}_{\lambda \in I}$  einen Weg selbstadjungierter Fredholmoperatoren.

### 3.2.1 Index und Bifurkation

Wir betrachten zunächst wieder den speziellen Fall von System (3.2.1), dass die Abbildung  $F$  nicht von  $x \in U$  abhängt, d.h.

$$\begin{cases} A\Delta u(x) = \nabla_u F(\lambda, u(x)) & \text{in } U \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{auf } \partial U. \end{cases} \quad (3.2.4)$$

Sei weiter  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Orthonormalbasis von  $H^1(U)$  so, dass  $-\Delta f_n = \beta_n f_n$  gilt. Für die dazugehörigen Eigenwerte  $\beta_n$  gilt  $0 \leq \beta_n \leq \beta_m$  für  $m \geq n$ . Mit der ersten Greenschen Formel gilt für alle  $f_k$  mit  $k \in \mathbb{N}$  Lösungen von  $-\Delta f_k = \beta_k f_k, \frac{\partial f_k}{\partial \nu} = 0$

$$\int_U f_n (-\Delta f_m) dx = \int_U \nabla f_n \cdot \nabla f_m dx = \int_U (-\Delta f_n) f_m dx.$$

Daraus folgt somit die Selbstadjungiertheit des Laplaceoperators bzgl. des  $L^2$ -Skalarproduktes

$$\langle -\Delta f_n, f_m \rangle = \langle f_n, -\Delta f_m \rangle.$$

Somit gilt für Eigenfunktionen  $f_n, f_m$  zu verschiedenen Eigenwerten  $\beta_n \neq \beta_m$

$$\begin{aligned} \beta_n \langle f_n, f_m \rangle &= \langle -\Delta f_n, f_m \rangle \\ &= \langle f_n, -\Delta f_m \rangle = \beta_m \langle f_n, f_m \rangle, \end{aligned}$$

also insbesondere  $\langle f_n, f_m \rangle = 0$ . Damit gilt für alle  $n, m \in \mathbb{N}, m \neq n$

$$0 = \int_U f_n f_m dx. \quad (3.2.5)$$

Somit erhalten wir eine orthogonale Zerlegung von

$$H = \bigoplus_{i=1}^p H^1(U) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} H_k \quad (3.2.6)$$

mit  $H_k := \text{span}\{f_k \cdot e_i \mid 1 \leq i \leq p\}$ , wobei  $\{e_i\}_{i=1}^p$  die Standardbasis im  $\mathbb{R}^p$  bezeichne.

**Lemma 3.2.2.**

Für alle  $k \in \mathbb{N}$  bezeichne  $P_k$  die Orthogonalprojektion in  $H$  auf  $H_k$ . Seien nun  $k, l \in \mathbb{N}$ ,  $k \neq l$  beliebig. Dann gilt

$$P_k K_\lambda P_l = 0.$$

*Beweis.*

Es gilt

$$\langle P_k K_\lambda P_l u, v \rangle_H = \langle K_\lambda P_l u, P_k v \rangle_H, \quad u, v \in H.$$

Für  $u = f_k e_i$  und  $v = f_l e_j$ , wobei  $1 \leq i, j \leq p$ , folgt

$$\langle K_\lambda u, v \rangle_H = \int_U f_k f_l \langle (A - B_\lambda) e_i, e_j \rangle \, dx = \langle (A - B_\lambda) e_i, e_j \rangle \int_U f_k f_l \, dx \stackrel{(3.2.5)}{=} 0.$$

Damit gilt  $P_k K_\lambda P_l = 0$  für  $k \neq l$ . □

Somit gilt, dass sowohl  $T$ , als auch  $K_\lambda$  die Räume  $H_k$  invariant lässt.

Da weiterhin  $\beta_k$  für  $k$  gegen unendlich konvergiert, existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  so, dass

$$L_\lambda^k := P_k L_\lambda P_k = P_k (T + K_\lambda) P_k$$

invertierbar ist und

$$\text{sgn}(L_\lambda^k) = \text{sgn}(-A) \quad (3.2.7)$$

für alle  $k \geq n$ . Analog zu Lemma 3.1.3 erhalten wir für alle  $k \in \mathbb{N}$  die folgende Darstellung von  $L_\lambda^k : H_k \rightarrow H_k$  als Matrix

$$L_\lambda^k = \begin{pmatrix} I_{p_1} & 0 \\ 0 & -I_{p_2} \end{pmatrix} + \frac{1}{1 + \beta_k} (A - B_\lambda), \lambda \in I$$

bezüglich der Orthonormalbasis  $\{f_{ke_i} \mid 1 \leq i \leq p\}$  von  $H_k$ .

Im Folgenden sei nun für alle  $\lambda \in I$  ein Index definiert durch

$$i(B_\lambda) := \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sgn}(L_\lambda^k) - \operatorname{sgn}(-A). \quad (3.2.8)$$

Unter Verwendung des Bifurkationsresultates aus Satz 2.1.5, welches besagt, dass unter der Voraussetzung, dass die Rieszdarstellungen  $L_\lambda$  der zweiten Ableitung  $\nabla_u^2 f_\lambda$  an der Stelle  $0 \in H$  Fredholmoperatoren für alle  $\lambda \in I$  und  $L_0, L_1$  invertierbar sind, ein nicht verschwindender Spektralfluss die Existenz von Bifurkation von kritischen Punkten von  $f$  garantiert, erhalten wir:

**Satz 3.2.3.**

*Unter den oben genannten Annahmen und Notationen gilt:*

*Falls  $L_0, L_1$  invertierbar sind und  $i(B_0) \neq i(B_1)$  ist, existiert eine Bifurkationspunkt für (3.2.4) in  $(0, 1)$ .*

*Beweis.*

Der Beweis des Satzes 3.2.3 verläuft analog zum Beweis des Satzes 3.1.4 für Dirichlet-Randbedingungen.

Seien  $n \in \mathbb{N}$  beliebig so, dass  $H = H^1 \oplus H^2$  mit  $H^1 := \bigoplus_{k=1}^n H_k$  und  $H^2 := (H^1)^\perp$ .

Für alle  $k \in \mathbb{N}$  bezeichne weiterhin  $P_k$  die Orthogonalprojektion in  $H$  auf  $H_k$ . Dann ist durch  $Q_n := \sum_{k=1}^n P_k$  die Orthogonalprojektion auf  $H^1$  gegeben und entsprechend durch  $Q_n^\perp := (I_H - Q_n)$  die Orthogonalprojektion auf  $H^2$ .

Aus der Definition der Operatoren  $T$  und  $K_\lambda$  folgt unmittelbar, dass sowohl  $T(H_k) \subset$

$H_k$  als auch  $K_\lambda(H_k) \subset H_k$  gilt. Somit gilt mit Gleichung (3.2.3)

$$\begin{aligned} L_\lambda &= T + Q_n K_\lambda Q_n + \underbrace{Q_n K_\lambda Q_n^\perp}_{=0} + \underbrace{Q_n^\perp K_\lambda Q_n}_{=0} + Q_n^\perp K_\lambda Q_n^\perp \\ &= T + Q_n K_\lambda Q_n + Q_n^\perp K_\lambda Q_n^\perp \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Aus der starken Konvergenz von  $Q_n^\perp$  gegen 0 für  $n \rightarrow \infty$  und da  $\|Q_n^\perp\| = 1$ , folgt

$$\|Q_n^\perp K_\lambda Q_n^\perp\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.2.10)$$

Nach Voraussetzung ist für  $\lambda = 0, 1$  der Operator  $L_\lambda$  invertierbar. Somit existiert ein  $C > 0$  so, dass

$$\|L_0 u\| \geq 3C \|u\|, \quad u \in H,$$

und

$$\|L_1 u\| \geq 3C \|u\|, \quad u \in H.$$

Aus (3.2.9) und (3.2.10) folgt somit, dass ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  existiert so, dass für alle  $n \geq n_0$

$$\|Tu + Q_n K_\lambda Q_n u\| \geq 2C \|u\|, \quad u \in H, \lambda = 0, 1. \quad (3.2.11)$$

Durch die Wahl von  $n_0$  geeignet groß, gilt mit (3.2.10) weiterhin für  $\lambda \in I$

$$\|Q_n^\perp K_\lambda Q_n^\perp\| \leq C. \quad (3.2.12)$$

Im Folgenden sei nun  $n_0 \in \mathbb{N}$  so gewählt, dass neben (3.2.11) und (3.2.12) auch (3.2.7) für alle  $k \geq n_0$  gilt. Des Weiteren sei nun

$$h : I \times I \rightarrow \Phi_S(H)$$

definiert durch

$$h(t, \lambda) = T + Q_n K_\lambda Q_n + t Q_n^\perp K_\lambda Q_n^\perp.$$

Mit (3.2.11) und (3.2.12) folgt für  $\lambda = 0, 1$

$$\|h(t, \lambda)u\| \geq C\|u\|, \quad u \in H$$

sodass  $h(t, 0)$  und  $h(t, 1)$  invertierbar sind für alle  $t \in I$ . Dann folgt aus den Eigenschaften des Spektralflusses

$$\begin{aligned} \text{sf}(L, I) &\stackrel{(A)}{=} \text{sf}(L|_{H^1}, I) + \text{sf}(L|_{H^2}, I) \stackrel{(Z)/(H)}{=} \text{sf}(L|_{H^1}, I) \\ &\stackrel{(A)}{=} \sum_{k=1}^n \text{sf}(L|_{H_k}, I) \stackrel{(N)}{=} \sum_{k=1}^n \mu_{\text{Morse}}(L_0|_{H_k}) - \mu_{\text{Morse}}(L_1|_{H_k}) \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

Da zwischen der Signatur und dem Morseindex einer symmetrischen  $p \times p$ -Matrix  $M$  folgender Zusammenhang besteht

$$\text{sgn}(M) = p - 2\mu_{\text{Morse}}(M),$$

folgt mit (3.2.13) weiter

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^n \mu_{\text{Morse}}(L_0|_{H_k}) - \mu_{\text{Morse}}(L_1|_{H_k}) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{p}{2} - \frac{1}{2} \text{sgn}(L_0^k) - \frac{p}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(L_1^k) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\text{sgn}(L_1^k) - \text{sgn}(L_0^k) + \text{sgn}(-A) - \text{sgn}(-A)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\text{sgn}(L_1^k) - \text{sgn}(-A)) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\text{sgn}(L_0^k) - \text{sgn}(-A)) \\ &= i(B_1) - i(B_0), \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Somit gilt nun also

$$\text{sf}(L, I) = i(B_1) - i(B_0).$$

Unter Verwendung des Bifurkationsresultates von Fitzpatrick, Pejsachowicz und Recht (siehe Satz 2.1.5) folgt nun die Aussage des Satzes.  $\square$

### 3.2.2 Bifurkation mit Hilfe von Vergleichsprinzipien für (3.2.1)

Wir betrachten die folgenden Wege  $M = \{M_\lambda\}_{\lambda \in I}$  und  $N = \{N_\lambda\}_{\lambda \in I}$  in  $\mathcal{F}_S(H)$  gegeben durch

$$\langle M_\lambda u, v \rangle_H := \langle Tu, v \rangle_H - \int_U \langle (A - C_\lambda)u, v \rangle dx$$

und

$$\langle N_\lambda u, v \rangle_H := \langle Tu, v \rangle_H - \int_U \langle (A - D_\lambda)u, v \rangle dx,$$

wobei  $C_\lambda := \begin{pmatrix} C_{1,\lambda} & 0 \\ 0 & C_{2,\lambda} \end{pmatrix}$  und  $D_\lambda := \begin{pmatrix} D_{1,\lambda} & 0 \\ 0 & D_{2,\lambda} \end{pmatrix}$  symmetrische Matrizen seien so, dass die Matrizen  $B_0(x) - C_0, C_1 - B_1(x)$  und  $D_0 - B_0(x), B_1(x) - D_1$  für alle  $x \in U$  positive semidefinit sind.

#### Satz 3.2.4.

Unter den Annahmen (A1)-(A4) und falls  $L_1, L_0$  invertierbar ist, gilt:

(i) Falls  $C_{1,0} \geq C_{1,1}, C_{2,0} \geq C_{2,1}$  gilt und es ein  $j \in \{1, \dots, p_1\}$  gibt so, dass

$$\mu_j(-C_{1,0}) < -\beta_k < \mu_j(-C_{1,1}) \text{ für } k \in \mathbb{N}$$

oder es ein  $j \in \{1, \dots, p_2\}$  gibt so, dass

$$\mu_j(-C_{2,1}) < \beta_k < \mu_j(-C_{2,0}) \text{ für } k \in \mathbb{N},$$

gilt, dann existiert ein Bifurkationspunkt für (3.2.1).

(ii) Falls  $D_{1,1} \geq D_{1,0}, D_{2,1} \geq D_{2,0}$  gilt und es ein  $j \in \{1, \dots, p_1\}$  gibt so, dass

$$\mu_j(-D_{1,1}) < -\beta_k < \mu_j(-D_{1,0}) \text{ für } k \in \mathbb{N}$$

oder es ein  $j \in \{1, \dots, p_2\}$  gibt so, dass

$$\mu_j(-D_{2,0}) < \beta_k < \mu_j(-D_{2,1}) \text{ für } k \in \mathbb{N},$$

gilt, dann existiert ein Bifurkationspunkt für (3.2.1).

*Beweis.*

Da

$$\langle (L_\lambda - M_\lambda)u, v \rangle_H = \int_U \langle (C_\lambda - B_\lambda(x))u, v \rangle dx, \quad u, v \in H$$

und

$$\langle (L_\lambda - N_\lambda)u, v \rangle_H = \int_U \langle (D_\lambda - B_\lambda(x))u, v \rangle dx, \quad u, v \in H,$$

gilt, sind  $L_\lambda - M_\lambda$  und  $L_\lambda - N_\lambda$  kompakt für alle  $\lambda \in I$ . Da außerdem  $B_0(x) - C_0, C_1 - B_1(x)$  und  $D_0 - B_0(x), B_1(x) - D_1$  positiv semidefinit für alle  $x \in U$  sind, gilt  $N_0 \leq L_0 \leq M_0$  und  $M_1 \leq L_1 \leq N_1$ . Damit folgt aus Satz 2.1.8

$$\text{sf}(M, I) \leq \text{sf}(L, I) \leq \text{sf}(N, I).$$

Falls wir nun zeigen können, dass  $\text{sf}(M, I) > 0$  unter den Annahmen von (i) und  $\text{sf}(N, I) < 0$  unter den Annahmen von (ii) gilt, folgt die Behauptung mit Satz 2.1.5. Betrachten wir zuerst den Weg  $M$ . Mit Hilfe der Resultate aus Abschnitt 4.2.1, wissen wir das eine Zerlegung von  $H$  in endlich dimensionale Teilräume  $H_k, k \in \mathbb{N}$  existiert, so dass  $L_\lambda$  durch  $H_k$  reduziert wird. Analog wird  $M_\lambda$  durch diese Zerlegung reduziert und wir erhalten folgende Darstellung von  $M_\lambda^k$  als Matrix

$$M_\lambda^k = \begin{pmatrix} I_{p_1 \times p_1} & 0 \\ 0 & -I_{p_2 \times p_2} \end{pmatrix} - \frac{1}{1 + \beta_k} (A - C_\lambda), \quad \lambda \in I.$$

Weiterhin, wissen wir mit (3.2.8), dass gilt

$$\begin{aligned} \text{sf}(M, I) &= i(C_1) - i(C_0) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\text{sgn}(M_1^k) - \text{sgn}(-A)) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\text{sgn}(M_0^k) - \text{sgn}(-A)) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_{\text{Morse}}(M_0^k) - \mu_{\text{Morse}}(M_1^k)). \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

Da die Matrizen  $\begin{pmatrix} I_{p_1 \times p_1} & 0 \\ 0 & -I_{p_2 \times p_2} \end{pmatrix}$  und  $\frac{1}{1+\beta_k}(A - C_\lambda)$  für alle  $\lambda \in I$  kommutieren, erhalten wir die Eigenwerte von  $M_\lambda^k$  als Summe der Eigenwerte von  $\begin{pmatrix} I_{p_1 \times p_1} & 0 \\ 0 & -I_{p_2 \times p_2} \end{pmatrix}$  und  $\frac{1}{1+\beta_k}(A - C_\lambda)$ . Für das Spektrum von  $A - C_\lambda$  besteht folgender Zusammenhang

$$\sigma(A - C_\lambda) = \sigma(-I_{p_1} - C_{1,\lambda}) \cup \sigma(I_{p_2} - C_{2,\lambda}).$$

Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  gilt nun

$$1 + \frac{\mu_i(-I_{p_1} - C_{1,\lambda})}{1 + \beta_k} < 0 \iff -\beta_k > \mu_i(-C_{1,\lambda}) \text{ für } i \in \{1, \dots, p_1\}$$

und

$$-1 + \frac{\mu_i(-I_{p_2} - C_{2,\lambda})}{1 + \beta_k} < 0 \iff \beta_k > \mu_i(-C_{2,\lambda}) \text{ für } i \in \{1, \dots, p_2\}.$$

Zusammenfassend gilt nun für alle  $k \in \mathbb{N}$

$$\mu_{\text{Morse}}(M_\lambda^k) = |(-\infty, -\beta_k) \cap \sigma(-C_{1,\lambda})| + |(-\infty, \beta_k) \cap \sigma(-C_{2,\lambda})|$$

Zusammen mit Gleichung (3.2.15) erhalten wir somit

$$\begin{aligned} \text{sf}(M, I) &= \sum_{k=1}^{\infty} |(-\infty, -\beta_k) \cap \sigma(-C_{1,0})| + |(-\infty, \beta_k) \cap \sigma(-C_{2,0})| \\ &\quad - |(-\infty, -\beta_k) \cap \sigma(-C_{1,1})| - |(-\infty, \beta_k) \cap \sigma(-C_{2,1})| \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

Da  $C_{1,0} \geq C_{1,1}$  und  $C_{2,0} \geq C_{2,1}$ ,  $C_{1,0} - C_{1,1}$  sowie  $C_{2,0} - C_{2,1}$  positiv semidefinite Matrizen sind, gilt mit Hilfe der Weyl-Ungleichung für symmetrische Matrizen

$$\begin{aligned} \mu_i(C_{1,1}) &\leq \mu_i(C_{1,1} + (C_{1,0} - C_{1,1})) \\ &= \mu_i(C_{1,0}) \text{ für alle } i \in \{1, \dots, p_1\} \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

und

$$\begin{aligned}\mu_i(C_{2,1}) &\leq \mu_i(C_{2,1} + (C_{2,0} + C_{2,1})) \\ &= \mu_i(C_{2,0}) \text{ für alle } i \in \{1, \dots, p_2\}.\end{aligned}\tag{3.2.18}$$

Damit gilt

$$\mu_i(-C_{1,1}) \geq \mu_i(-C_{1,0}) \text{ für alle } i \in \{1, \dots, p_1\}\tag{3.2.19}$$

und

$$\mu_i(-C_{2,1}) \geq \mu_i(-C_{2,0}) \text{ für alle } i \in \{1, \dots, p_2\}.\tag{3.2.20}$$

Somit erhalten wir die für jedes  $k \in \mathbb{N}$  gilt

$$|(-\infty, -\beta_k) \cap \sigma(-C_{1,0})| \geq |(-\infty, -\beta_k) \cap \sigma(-C_{1,1})|$$

und

$$|(-\infty, \beta_k) \cap \sigma(-C_{2,0})| \geq |(-\infty, \beta_k) \cap \sigma(-C_{2,1})|,$$

da  $\beta_k$  eine monoton wachsende Folge ist. Mit Gleichung (3.2.16) erhalten wir somit  $\text{sf}(M, I) \geq 0$  und schließlich ist  $\text{sf}(M, I) > 0$  falls es ein  $j \in \{1, \dots, p_1\}$  gibt so, dass

$$\mu_j(-C_{1,0}) < -\beta_k < \mu_j(-C_{1,1}) \text{ für } k \in \mathbb{N}$$

oder es ein  $j \in \{1, \dots, p_2\}$  gibt so, dass

$$\mu_j(-C_{2,1}) < \beta_k < \mu_j(-C_{2,0}) \text{ für } k \in \mathbb{N}.$$

Auf analoge Art und Weise, zeigt man dass unter der Annahme aus (ii)  $\text{sf}(N, I) < 0$  gilt. □



## Kapitel 4

# Äquivarianter Fall und Anwendung

Im Folgenden verwenden wir die in Kapitel 3 eingeführten Notationen und Bezeichnungen. Auf Anpassungen und abweichende Bezeichnungen im äquivarianten Fall werden wir jedoch an den entsprechenden Stellen hinweisen.

Wir betrachten nun also das System (3.1.9) im äquivarianten Fall unter den Annahmen (A1)-(A4). Sei dazu  $G$  eine kompakte Liegruppe so, dass der Hilbertraum

$$H := \bigoplus_{i=1}^p H_0^1(U)$$

eine orthogonale Darstellung der Gruppe  $G$  ist. Dabei unterscheiden wir zunächst zwischen einer inneren und äußeren Gruppenwirkung auf  $H$ .

(IG) Sei  $U \subset \mathbb{R}^N$  eine  $G$ -invariante Menge. Dann ist die innere Gruppenwirkung von  $G$  auf  $H$  gegeben durch: Für alle  $g \in G$  und  $u \in H$  sei

$$gu(x) := u(g^{-1}x). \quad (4.0.1)$$

Man beachte, falls  $G$  eine abelsche Gruppe ist, betrachten wir die innere Wirkung von  $G$  auf  $H$  gegeben durch: Für alle  $g \in G$  und  $u \in H$  sei

$$gu(x) := u(gx). \quad (4.0.2)$$

(ÄG) Die äußere Gruppenwirkung von  $G$  auf  $H$  sei gegeben durch: Für alle  $g \in G$  und  $u \in H$  sei

$$gu(x) := (gu)(x). \quad (4.0.3)$$

Des Weiteren sei  $G$  so gewählt, dass für das Skalarprodukt (3.1.4) in  $H$  gilt :

(S1) Das Skalarprodukt in  $H$  ist  $G$ -invariant, d.h. für alle  $g \in G, u, v \in H$  gilt

$$\langle gu, gv \rangle_H = \langle u, v \rangle_H.$$

(S2) Insbesondere gelte für alle  $g \in G, u \in H$ , dass

$$\langle Agu, gu \rangle_H = \langle Au, u \rangle_H.$$

Weiterhin ersetzen wir die Annahme (A1) durch

( $\tilde{A}$ 1)  $F \in \mathcal{C}^2(I \times \mathbb{R}^p, \mathbb{R})$  ist  $G$ -invariant. Insbesondere hängt hierbei  $F \in \mathcal{C}^2(I \times \mathbb{R}^p, \mathbb{R})$  nicht von  $x \in U$  ab.

Nach Abschnitt 3 existiert eine Familie von Funktionalen  $f_\lambda : H \rightarrow \mathbb{R}, \lambda \in I$  gegeben durch

$$f_\lambda(u) := \frac{1}{2} \int_U \sum_{i=1}^p (-a_i |\nabla u_i|^2) dx - \int_U F(\lambda, u) dx. \quad (4.0.4)$$

Da für alle  $\lambda \in I$  gilt

$$\begin{aligned} f_\lambda(u) &= \frac{1}{2} \int_U \sum_{i=1}^p (-a_i |\nabla u_i|^2) dx - \int_U F(\lambda, u) dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \left( -a_i \|u_i\|_{H_0^1(U)}^2 \right) - \int_U F(\lambda, u) dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \left( -a_i \langle u_i, u_i \rangle_{H_0^1(U)} \right) - \int_U F(\lambda, u) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \left( \langle -a_i u_i, u_i \rangle_{H_0^1(U)} \right) - \int_U F(\lambda, u) \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle_H - \int_U F(\lambda, u) \, dx,
 \end{aligned}$$

folgt mit (S2) und ( $\tilde{A}1$ ), dass für alle  $\lambda \in I$  die Funktionale  $f_\lambda$   $G$ -invariant sind. Dann ist für alle  $\lambda \in I$  der Operator  $L_\lambda$  aus Gleichung (3.1.8)  $G$ -äquivariant. Somit bezeichnet  $L := \{L_\lambda\}_{\lambda \in I}$  einen Weg selbstadjungierter,  $G$ -äquivarianter Fredholmoperatoren. Für die weiteren Überlegungen gelte zusätzlich folgende Annahme

(A5) Es gibt eine Zerlegung von  $H = \bigoplus_{i=1}^p H_0^1(U)$  gegeben durch

$$H = X \oplus Y, \quad (4.0.5)$$

wobei  $X$  ein endlich dimensionaler  $G$ -invarianter Raum und  $Y = X^\perp$  so, dass  $L_\lambda|_X \in \mathcal{FS}(X)$  und  $L_\lambda|_Y \in \mathcal{FS}(Y)$  invertierbar ist.

Dann gilt  $\text{sf}(L|_Y) = 0$  und somit erhalten wir mit Lemma 2.2.8 weiter

$$\text{sf}_G(L) = \text{sf}_G(L|_X) + \text{sf}_G(L|_Y) = \text{sf}_G(L|_X). \quad (4.0.6)$$

Da  $X$  endlich dimensional ist, sind alle Elemente im Spektrum von  $L_\lambda|_X$  Eigenwerte endlicher Vielfachheit. Des Weiteren existiert ein  $a > 0$  in (2.2.5) so, dass  $\pm a \notin \sigma(L_\lambda|_X)$  und  $\sigma(L_\lambda|_X) \subset [-a, a]$ . Nun gilt mit Lemma 2.2.5 für alle  $[c, d] \subseteq I$

$$\begin{aligned}
 0 &= [E(L_d|_X, [-a, a])] - [E(L_c|_X, [-a, a])] \\
 &= [E(L_d|_X, [-a, 0]) \oplus E(L_d|_X, [0, a])] - [E(L_c|_X, [-a, 0]) \oplus E(L_c|_X, [0, a])] \\
 &= [E(L_d|_X, [-a, 0])] - [E(L_c|_X, [-a, 0])] + [E(L_d|_X, [0, a]) - E(L_c|_X, [0, a])]
 \end{aligned}$$

Damit gilt also

$$[E(L_d|_X, [0, a]) - E(L_c|_X, [0, a])] = [E(L_c|_X, [-a, 0])] - [E(L_d|_X, [-a, 0])] \quad (4.0.7)$$

Sei nun  $0 = \lambda_0 < \dots < \lambda_m = 1$  eine Zerlegung von  $I$  und  $a_i > 0, i = 1, \dots, m$ , wie in (2.2.5). Dann folgt aus (4.0.6) und (4.0.7)

$$\begin{aligned} \text{sf}_G(L) &= \text{sf}_G(L | X) = \sum_{i=1}^m ([E(L_{\lambda_i} | X, [0, a_i])] - [E(L_{\lambda_{i-1}} | X, [0, a_i])]) \\ &= \sum_{i=1}^m ([E^-(L_{\lambda_{i-1}} | X)] - [E^-(L_{\lambda_i} | X)]) \\ &= [E^-(L_0 | X)] - [E^-(L_1 | X)], \end{aligned} \quad (4.0.8)$$

wobei  $E^-(L_\lambda | X)$  für  $\lambda \in [0, 1]$  die direkte Summe der Eigenräume bezüglich negativer Eigenwerte von  $L_\lambda | X$  bezeichne.

## 4.1 Bifurkationsresultat

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass unter der Voraussetzung, dass  $G$  nice ist und  $L_0, L_1$  invertierbar sind, auch im äquivarianten Fall ein nicht verschwindender äquivarianter Spektralfluss eine hinreichende Bedingung für die Existenz von Bifurkationspunkten für das System (3.1.9) darstellt. Dazu benötigen wir zunächst folgende äquivariante Version des Satzes über implizite Funktionen. Der Beweis dieses Satzes nutzt dabei die Gültigkeit der Aussage im nicht-äquivarianten Fall, siehe dazu ([14], Lemma 4.2).

**Satz 4.1.1** ([12], Lemma 3.7).

Seien  $H$  ein reeller Hilbertraum und  $G$  eine kompakte Liegruppe, die auf  $H$  orthogonal operiert. Seien weiter  $U \subset H$  eine offene invariante Teilmenge von  $H$  so, dass  $0 \in U$  und  $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Familie von stetigen  $G$ -invarianten  $C^2$ -Funktionalen ist. Weiter sei

$$M(\lambda, u) := (\nabla f_\lambda)(u)$$

und  $M(\lambda, 0) = 0$  für alle  $\lambda \in I$ . Angenommen es existiert eine orthogonale Zerlegung von  $H$  gegeben durch  $H = X \oplus Y$  mit  $X$  ist ein endlich dimensionaler  $G$ -invarianter Raum so, dass

$$M(\lambda, u) = (M_1(\lambda, x, y), M_2(\lambda, x, y)) \in X \oplus Y, \quad u = (x, y) \in X \oplus Y,$$

wobei  $(\nabla_y M_2)(\lambda, 0, 0) : Y \rightarrow Y$  für alle  $\lambda \in I$  invertierbar ist. Dann gilt:

1. Es existiert eine offene Umgebung  $B_X = B(0, \delta) \subset X$  und eine eindeutige stetige Familie von  $G$ -äquivalenten  $C^1$ -Abbildungen

$$\eta : I \times B_X \rightarrow Y$$

so, dass  $\eta(\lambda, 0) = 0$  für alle  $\lambda \in I$  und

$$M_2(\lambda, x, \eta(\lambda, x)) = 0, \quad (\lambda, x) \in I \times B_X. \quad (4.1.1)$$

2. Sei  $\bar{f} : I \times B_X \rightarrow \mathbb{R}$  ein Familie von Funktionalen und  $\bar{M} : I \times B_X \rightarrow X$  definiert durch

$$\bar{f}(\lambda, x) = f(\lambda, x, \eta(\lambda, x)), \quad \bar{M}(\lambda, x) = M_1(\lambda, x, \eta(\lambda, x)).$$

Dann ist  $\bar{f}$  eine stetige Familie von  $G$ -invarianten  $C^2$ -Funktionalen auf  $B_X$  und

$$\nabla \bar{f}(\lambda, x) = \bar{M}(\lambda, x) \quad (\lambda, x) \in I \times B_X,$$

wobei  $\bar{M}$   $G$ -äquivalent ist.

**Satz 4.1.2.**

Seien  $G$  nice,  $L_0, L_1$  invertierbar und  $\text{sf}_G(L) \neq 0$ . Dann existiert ein Bifurkationspunkt  $\lambda^* \in (0, 1)$  für (3.1.9).

*Beweis.*

Nach Annahme (A5) existiert eine Zerlegung des Raumes  $H$  gegeben durch

$$H = X \oplus Y,$$

wobei  $X$  ein endlich dimensionaler Raum und  $Y := X^\perp$  so, dass  $L_\lambda|_X \in \mathcal{FS}(X)$  und  $L_\lambda|_Y \in \mathcal{FS}(Y)$  invertierbar ist. Zudem bezeichne  $P_X$  die Orthogonalprojektion auf  $X$ . Weiter ist für  $u = (x, y) \in H = X \oplus Y$  und  $\lambda \in I$

$$M(\lambda, u) := (\nabla f_\lambda) = (M_1(\lambda, x, y), M_2(\lambda, x, y))$$

mit  $M_1(\lambda, x, y) := P_X M(\lambda, u)$  und  $M_2(\lambda, x, y) = (I_H - P_X)M(\lambda, u)$ . Mit Satz 4.1.1 existiert eine offene Umgebung  $B_X$  um 0 in  $X$  und eine Familie  $\bar{f} : I \times B_X \rightarrow Y$  von  $G$ -invarianten  $C^2$ -Funktionalen gegeben durch

$$\bar{f}(\lambda, x) := f(\lambda, x, \eta(\lambda, x)), \quad (4.1.2)$$

wobei  $\eta_\lambda : B_X \rightarrow Y$  die stetige Familie  $G$ -äquivarianter  $C^1$ -Abbildungen aus Satz 4.1.1 sei. Dann ist  $\bar{M} : I \times B_X \rightarrow$  definiert durch

$$\bar{M}(\lambda, x) = (\nabla \bar{f}(\lambda, x)) = M_1(\lambda, x, \eta(\lambda, x)).$$

Durch Ableiten von Gleichung (4.1.1) erhalten wir

$$\begin{aligned} \nabla_0 \eta_\lambda &= -(\nabla_y M_2(\lambda, 0, 0))^{-1} \nabla_x M_2(\lambda, 0, 0) \\ &= -(L_\lambda |_Y)^{-1} \underbrace{(I_H - P_X) L_\lambda |_X}_{=0} \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Für alle  $\lambda \in I$  bezeichne nun  $\ell_\lambda$  die Rieszdarstellung von  $\nabla_0^2 \bar{f}_\lambda$  und  $\ell = \{\ell_\lambda\}_{\lambda \in I}$  den Weg der selbstadjungierten Fredholmoperatoren  $\ell_\lambda$ . Mit Gleichung (4.1.3) gilt

$$\ell_\lambda = L_\lambda |_X + L_\lambda |_X \underbrace{\nabla_0 \eta_\lambda}_{=0} = L_\lambda |_X \quad (4.1.4)$$

und somit erhalten wir mit Gleichung (4.0.6) und (4.1.4)

$$0 \neq \text{sf}_G(L) = \text{sf}_G(L |_X) + \text{sf}_G(L |_Y) = \text{sf}_G(L |_X) = \text{sf}_G(\ell) \quad (4.1.5)$$

Des Weiteren folgt aus Gleichung (4.0.8), dass der äquivariante Spektralfluss von  $\ell$  berechnet werden kann durch

$$\text{sf}_G(\ell) = [E^-(\ell_0)] - [E^-(\ell_1)]. \quad (4.1.6)$$

Für den nächsten Schritt des Beweises benötigen wir den äquivarianten Conleyindex. Der Conleyindex ist eine Homotopieinvariante, die in den 1970er Jahren von CHARLES CONLEY in seinen Untersuchungen zu dynamischen Systemen entdeckt wurde. Im Folgenden wollen wir uns die Definition des äquivarianten Conleyindex anschauen. Für einen tieferen Einblick in die klassische Theorie des Conleyindex, siehe [7] oder [18] bzw. in die äquivariante Theorie des Conleyindex, siehe [5], [15] oder [9].

**Definition 4.1.3.**

Seien  $W$  eine Darstellung einer kompakten Liegruppe  $G$  und  $M : W \rightarrow W$  ein  $G$ -äquivariantes Vektorfeld. Dann definiert die Differenzialgleichung

$$\dot{u} = M(u)$$

einen lokalen  $G$ -Fluss, d.h. eine stetige Abbildung  $\phi : \mathbb{R} \times W \rightarrow W$  so, dass

- $\phi(0, x) = x$  für alle  $x \in W$
- $\phi(s + t, x) = \phi(t, \phi(s, x))$  für alle  $t, s \in \mathbb{R}, x \in W$ .

Insbesondere ist  $\phi$  dann  $G$ -äquivariant, d.h.  $\phi(t, gx) = g\phi(t, x)$  für alle  $t \in \mathbb{R}, x \in W$  und  $g \in G$ . Des Weiteren bezeichnen wir mit  $\phi_t : W \rightarrow W$ , die durch  $\phi$  induzierte Abbildung auf  $X$  für festes  $t \in \mathbb{R}$ .

Im Folgenden sei stets  $W$  eine Darstellung der kompakten Liegruppe  $G$ .

**Definition 4.1.4.**

Sei  $\phi : \mathbb{R} \times W \rightarrow W$  ein  $G$ -Fluss. Für eine  $G$ -invariante Menge  $U \subset W$  ist die **maximal invariante Teilmenge** von  $U$  gegeben durch

$$\text{inv}(U) = \{x \in U \mid \phi_s(x) \in U \text{ für alle } s \in \mathbb{R}\}.$$

Insbesondere ist die Menge  $\text{inv}(U)$  dann  $G$ -invariant. Ist zusätzlich  $U \subset W$  kompakt und  $\text{inv}(U) \subset \text{int}(U)$ , dann heißt  $U$  **isolierende invariante Umgebung** und  $\text{inv}(U)$  **isolierte invariante Menge**.

**Definition 4.1.5.**

Sei  $\phi : \mathbb{R} \times W \rightarrow W$  ein  $G$ -Fluss. Für eine isolierte  $G$ -invariante Menge  $U \subset W$  heißt ein kompaktes Paar  $(N, M)$  von  $G$ -invarianten Teilmengen  $M \subset N \subset W$  ein  **$G$ -Indexpaar**  $(N, M)$ , falls

1.  $U \subset \text{int}(N \setminus M)$  und  $\overline{N \setminus M}$  ist eine isolierte Umgebung von  $U$ ,
2.  $M$  ist positiv invariant bezüglich  $N$  unter  $\phi$ ,
3. Ist  $x \in N$  und  $s > 0$  mit  $\phi(s, x) \notin N$ , dann existiert ein  $\tilde{s} \in [0, s]$  so, dass  $\phi(\tilde{s}, x) \in M$ .

**Definition 4.1.6.**

Seien  $\phi : \mathbb{R} \times W \rightarrow W$  ein  $G$ -Fluss und  $U \subset W$  eine isolierte  $G$ -invariante Umgebung. Der **äquivariante Conleyindex**  $h_G(U, \phi)$  von  $\text{inv}(U)$  ist der  $G$ -äquivariante Homotopietyp des punktierten Raumes  $N/M$ , wobei  $(N, M)$  eine  $G$ -Indexpaar für  $U$  ist.

Aus der Definition des äquivarianten Conleyindex und dem Hartman-Grobman-Satz folgt

**Bemerkung 4.1.7** ([20]).

Wir betrachten den Fluss  $\phi_\lambda$ , der durch die Differentialgleichung

$$\dot{u} = (\nabla f_\lambda)(u)$$

induziert wird, wobei für alle  $\lambda \in I$  die Abbildung  $f_\lambda := f(\lambda, \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^2$ -Abbildung sei. Für  $\epsilon > 0$  sei  $N_\epsilon := B_\epsilon(0) \subset H$  eine kleine  $G$ -invariante offene Umgebung von  $0$  so, dass  $\text{inv}(N_\epsilon) \subset N_\epsilon$  und  $N_\epsilon$  eine isolierende Umgebung ist. Falls  $L_\lambda$  invertierbar ist, so kann der äquivariante Conleyindex  $h_G(0, \phi_\lambda)$  identifiziert werden durch

$$h_G(0, \phi_\lambda) := h_G(N_\epsilon, \phi_\lambda) = D(E^-(L_\lambda)) / S(E^-(L_\lambda)).$$

Im äquivarianten Fall gelten für den Conleyindex die selben Eigenschaften, wie für den klassischen Conleyindex. Insbesondere gilt folgende Stetigkeitsaussage

**Lemma 4.1.8.**

Sei  $\phi : I \times \mathbb{R} \times W \rightarrow W$  stetig so, dass  $\phi_\lambda := \phi(\lambda, \cdot, \cdot)$  ein  $G$ -Fluss in  $W$  ist. Falls  $U$  eine isolierte invariante Umgebung für  $\phi_\lambda, \lambda \in [0, 1]$  ist, gilt  $h_G(U, \phi_0) = h_G(U, \phi_1)$ .

Setzen wir nun unseren Beweis von Satz 4.1.2 fort. Analog zu Bemerkung 4.1.7 bezeichne

$$\phi_\lambda : I \times X \rightarrow X$$

den Fluss, der durch die Differentialgleichung

$$\dot{u} = (\nabla \bar{f}_\lambda)(u),$$

wobei  $\{\bar{f}_\lambda\}_{\lambda \in I}$  die in (4.1.2) eingeführt Familie  $G$ -invarianter  $C^2$ -Funktionale sei, induziert wird. Da der äquivariante Spektralfluss von  $\ell$  nach Gleichung (4.1.5) nicht trivial ist, folgt aus Gleichung (4.1.6), dass  $E^-(\ell_1)$  und  $E^-(\ell_0)$  als  $G$ -Darstellung nicht isomorph sind. Da die betrachtete Liegruppe nach Voraussetzung nice ist, folgt, dass  $D(E^-(\ell_0))/S(E^-(\ell_0))$  und  $D(E^-(\ell_1))/S(E^-(\ell_1))$  nicht den gleichen äquivarianten Homotopietyp besitzen. Insbesondere erhalten wir aus der Invertierbarkeit von  $L_0$  und  $L_1$  zusammen mit Gleichung (4.1.4) die Invertierbarkeit der Operatoren  $\ell_0$  und  $\ell_1$ . Somit folgt aus Bemerkung 4.1.7 weiter, dass

$$h_G(0, \phi_0) \neq h_G(0, \phi_1). \quad (4.1.7)$$

Wir wollen nun zeigen, dass aus Gleichung (4.1.7) die Existenz von Bifurkationspunkten für (3.1.9) folgt. Sei dazu  $\epsilon > 0$  und  $N_\epsilon := \overline{B(0, \epsilon)} \subset X$  eine Umgebung in  $X$  um 0. Mit Lemma 4.1.8 erhalten wir für ein  $\lambda \in I$ , dass  $U = \{0\}$  keine maximal invariante Menge in  $N_\epsilon$  sein kann. Also existiert ein  $\lambda_{N_\epsilon} \in I$  so, dass  $U = \{0\}$  keine maximal invariante Menge in  $N_\epsilon$  für  $\phi_{\lambda_{N_\epsilon}}$  ist. Damit existiert ein  $x \in \text{inv}(N_\epsilon)$  so, dass  $x \neq 0$  ist. Betrachten wir nun die zu  $x$  zugehörigen  $\alpha$ - und  $\omega$ -Limesmengen

$$\alpha(x) := \{y \in N_\epsilon : \exists \{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{\lambda_{N_\epsilon}}(s_n, x) = y\}, \quad (4.1.8)$$

$$\omega(x) := \{y \in N_\epsilon : \exists \{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow -\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{\lambda_{N_\epsilon}}(s_n, x) = y\}.$$

Da  $N_\epsilon$  kompakt ist, sind  $\alpha(x)$  und  $\omega(x)$  nichtleer. Des Weiteren gilt

$$\frac{d}{dt}(-f(\phi_{\lambda_{N_\epsilon}}(t, x))) = -\|\dot{\phi}_{\lambda_{N_\epsilon}}(t, x)\|^2. \quad (4.1.9)$$

Mit Gleichung (4.1.9) ist  $-f$  insbesondere streng monoton fallend entlang nichtkonstanten Lösungen. Angenommen  $\alpha(x) = \omega(x) = \{0\}$ . Dann gilt

$$\frac{d}{dt}(-f(\phi_{\lambda_{N_\epsilon}}(t, x))) = 0 \text{ für } t \in \mathbb{R}.$$

Zusammen mit (4.1.9) folgt somit  $x = 0$ . Also existiert ein  $y \in (\omega(x) \cup \alpha(x)) \setminus \{0\}$ . Insbesondere folgt aus Gleichung (4.1.9), dass  $y$  ein kritischer Punkt von  $f$  ist. Ziehen wir nun unsere Umgebung  $N_\epsilon$  auf 0 zusammen, so erhalten wir eine Folge  $(\lambda_{N_\epsilon})_{\epsilon \rightarrow 0} \subset I$ . Da  $I$  kompakt ist, besitzt diese Folge  $(\lambda_{N_\epsilon})$  eine gegen ein  $\lambda_0 \in I$  konvergente Teilfolge. Zusammenfassend erhalten wir aus unseren Überlegungen somit, dass der Punkt  $(0, \lambda_0)$  ein Bifurkationspunkt für das System (3.1.9) ist.  $\square$

## 4.2 Anwendung

### 4.2.1 Äußere Gruppenwirkung der $SO(2)$

In diesem Abschnitt betrachten wir nun das System (3.1.9) im äquivarianten Fall mit einer äußeren Gruppenwirkung der Gruppe  $G = SO(2)$  in dem Spezialfall, dass  $p = 4$ . Für ein  $N \in \mathbb{N}$  sei  $U \subseteq \mathbb{R}^N$  ein beschränktes glattes Gebiet. Wir betrachten nun also das System

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Delta u = \nabla_u F(\lambda, u) & \text{in } U \\ u = 0 & \text{auf } \partial U, \end{array} \right. \quad (4.2.1)$$

unter den Annahmen  $(\tilde{A}1)$ ,  $(A2)$ - $(A4)$ .

Sei nun also  $B_\lambda$  in (A2) so, dass gilt

$$B_\lambda := \lambda I. \quad (4.2.2)$$

Nach Beispiel 2.2.3 ist der Darstellungsring  $RO(SO(2))$  von  $G$  als abelsche Gruppe isomorph zu  $\mathbb{Z}[x]$ . Demzufolge existiert ein Isomorphismus  $\phi : RO(SO(2)) \rightarrow \mathbb{Z}[x]$  gegeben durch

$$\chi = \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j [\rho^j] \mapsto (a_j)_{j \in \mathbb{N}} \quad (4.2.3)$$

Des Weiteren ist  $H := \bigoplus_{i=1}^4 H_0^1(U)$  eine orthogonale Darstellung von  $G$ , wobei die Wirkung von  $G$  auf  $H$  wie folgt gegeben sei:

$$gu(x) := \left( \begin{pmatrix} \rho^s & \\ & \rho^t \end{pmatrix} u \right) (x), \quad (4.2.4)$$

wobei  $s, t \in \mathbb{N}_0$ ,  $s \neq t$  sind und  $\rho^s, \rho^t$  bezeichnen die zugehörigen irreduziblen reellen Darstellungen aus (2.2.3). Man beachte, für  $s, t = 0$  bezeichne  $\rho^0$  die zweidimensionale triviale Darstellung gegeben durch

$$\forall g \in G, \rho^0(g) := \begin{pmatrix} \cos(0 \cdot \phi) & -\sin(0 \cdot \phi) \\ \sin(0 \cdot \phi) & \cos(0 \cdot \phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.2.5)$$

Als nächstes zeigen wir, dass das in (3.1.4) definierte Skalarprodukt invariant unter der in (4.2.4) definierten Gruppenwirkung ist.

Seien dazu  $g := \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \in G$  und  $u := (u_1, \dots, u_4), v := (v_1, \dots, v_4) \in H$

beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle gu, gv \rangle_H &= \langle \cos(s\varphi)u_1 - \sin(s\varphi)u_2, \cos(s\varphi)v_1 - \sin(s\varphi)v_2 \rangle_{H_0^1(U)} \\
&\quad + \langle \sin(s\varphi)u_1 + \cos(s\varphi)u_2, \sin(s\varphi)v_1 + \cos(s\varphi)v_2 \rangle_{H_0^1(U)} \\
&\quad + \langle \cos(t\varphi)u_3 - \sin(t\varphi)u_4, \cos(t\varphi)v_3 - \sin(t\varphi)v_4 \rangle_{H_0^1(U)} \\
&\quad + \langle \sin(t\varphi)u_3 + \cos(t\varphi)u_4, \sin(t\varphi)v_3 + \cos(t\varphi)v_4 \rangle_{H_0^1(U)} \\
&= (\cos^2(s\varphi) + \sin^2(s\varphi)) \langle u_1, v_1 \rangle_{H_0^1(U)} \\
&\quad + (-\sin(s\varphi)\cos(s\varphi) + \sin(s\varphi)\cos(s\varphi)) \langle u_1, v_2 \rangle_{H_0^1(U)} \\
&\quad + (-\sin(s\varphi)\cos(s\varphi) + \sin(s\varphi)\cos(s\varphi)) \langle u_2, v_1 \rangle_{H_0^1(U)} \\
&\quad + (\cos^2(s\varphi) + \sin^2(s\varphi)) \langle u_2, v_2 \rangle_{H_0^1(U)} \\
&\quad + \dots \\
&\quad + (\cos^2(t\varphi) + \sin^2(t\varphi)) \langle u_3, v_3 \rangle_{H_0^1(U)} \\
&\quad + (-\sin(t\varphi)\cos(t\varphi) + \sin(t\varphi)\cos(t\varphi)) \langle u_3, v_4 \rangle_{H_0^1(U)} \\
&\quad + (-\sin(t\varphi)\cos(t\varphi) + \sin(t\varphi)\cos(t\varphi)) \langle u_4, v_3 \rangle_{H_0^1(U)} \\
&\quad + (\cos^2(t\varphi) + \sin^2(t\varphi)) \langle u_4, v_4 \rangle_{H_0^1(U)} \\
&= \sum_{i=1}^4 \langle u_i, v_i \rangle_{H_0^1(U)} = \langle u, v \rangle_H \tag{4.2.6}
\end{aligned}$$

Demzufolge ist das Skalarprodukt in  $H$  invariant unter der Gruppenwirkung (4.2.4) und die Bedingung (S1) erfüllt. Aufgrund der Blockstruktur der Gruppenwirkung (4.2.4) ist zudem die Bedingung (S2) erfüllt.

Mit Gleichung (3.1.12) erhalten wir weiter eine Zerlegung von  $H$  in endlich dimensionale Räume  $H_k$ . Seien nun also  $k \in \mathbb{N}$  fest,  $u = (\alpha_1 f_k, \dots, \alpha_4 f_k)^T \in H_k$  und

$$g := \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \in SO(2)$$

beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
gu(x) &= \left( \begin{pmatrix} \rho_s \\ \rho_{t_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 f_k \\ \vdots \\ \alpha_4 f_k \end{pmatrix} \right) (x) \\
&= \left( \begin{pmatrix} \cos(s\varphi) & -\sin(s\varphi) & 0 & 0 \\ \sin(s\varphi) & \cos(s\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(t\varphi) & -\sin(t\varphi) \\ 0 & 0 & \sin(t\varphi) & \cos(t\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 f_k \\ \vdots \\ \alpha_4 f_k \end{pmatrix} \right) (x) \\
&= \begin{pmatrix} \cos(s\varphi)\alpha_1 f_k - \sin(s\varphi)\alpha_2 f_k \\ -\sin(s\varphi)\alpha_1 f_k + \cos(s\varphi)\alpha_2 f_k \\ \cos(t\varphi)\alpha_3 f_k - \sin(t\varphi)\alpha_4 f_k \\ -\sin(t\varphi)\alpha_3 f_k + \cos(t\varphi)\alpha_4 f_k \end{pmatrix} (x) \\
&= \begin{pmatrix} (\cos(s\varphi)\alpha_1 - \sin(s\varphi)\alpha_2) f_k \\ (-\sin(s\varphi)\alpha_1 + \cos(s\varphi)\alpha_2) f_k \\ (\cos(t\varphi)\alpha_3 - \sin(t\varphi)\alpha_4) f_k \\ (-\sin(t\varphi)\alpha_3 + \cos(t\varphi)\alpha_4) f_k \end{pmatrix} (x) \in H_k
\end{aligned}$$

Also sind für alle  $k \in \mathbb{N}$  die Räume  $H_k$  invariant unter der Gruppenwirkung (4.2.4).

Weiterhin sei für alle  $k \in \mathbb{N}$  die Einschränkung des Operator  $L_\lambda$  auf  $H_k$  mit  $L_\lambda^k$  bezeichnet, siehe (3.1.13). Nach Gleichung (3.1.20) existiert somit ein  $n \in \mathbb{N}$  so, dass  $L_\lambda^k$  für alle  $k \geq n$  ein Isomorphismus ist. Seien nun  $X := \bigoplus_{k=1}^n H_k$  und  $Y := X^\perp$ . Da für alle  $k \in \mathbb{N}$  die Räume  $H_k$  endlich dimensional und  $G$ -invariant sind, ist insbesondere  $X$  endlich dimensional und  $G$ -invariant. Nach Wahl von  $n \in \mathbb{N}$  ist für alle  $k \geq n$  der Operator  $L_\lambda^k$  ein Isomorphismus. Demzufolge ist auch  $L_\lambda|_Y$  ein Isomorphismus und damit gilt

$$\text{sf}_G(L|_Y) = 0.$$

Durch die Wahl der Räume  $X$  und  $Y$  erhalten wir somit eine Zerlegung, wie in Annahme (A5) gefordert. Mit Gleichung (4.0.8) erhalten wir weiter

$$\text{sf}_G(L) = [E^-(L_0 |_X)] - [E^-(L_1 |_X)] = \sum_{k=1}^n [E^-(L_0^k)] - [E^-(L_1^k)] \quad (4.2.7)$$

Im Folgenden wollen wir unter Verwendung von Lemma 3.1.3 die Eigenräume bezüglich negativer Eigenwerte von  $L_\lambda^k$  und dessen  $G$ -Darstellung für  $\lambda \in \{0, 1\}, k \in \mathbb{N}$  genauer betrachten. Sei nun  $k \in \{1, \dots, n\}$  beliebig.

- Betrachtung der Eigenräume bezüglich negativer Eigenwerte von  $L_0^k$ :

Nach Lemma 3.1.3 und Gleichung (4.2.2) ist  $L_0^k$  gegeben durch

$$L_0^k := \begin{pmatrix} I_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -I_{2 \times 2} \end{pmatrix}.$$

Damit ist  $-1$  der einzige negative Eigenwert von  $L_0^k$  und

$$E^-(L_0^k) = \text{span}\{f_k e_i \mid i \in \{3, 4\}\}.$$

Des Weiteren ist  $E^-(L_0^k)$  eine endlich dimensionale reelle  $G$ -Darstellung gegeben durch

$$\rho_{E^-(L_0^k)} = \rho^t. \quad (4.2.8)$$

- Betrachtung der Eigenräume bezüglich negativer Eigenwerte von  $L_1^k$ :

Nach Lemma 3.1.3 und Gleichung (4.2.2) ist  $L_1^k$  gegeben durch

$$L_1^k := \begin{pmatrix} I_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -I_{2 \times 2} \end{pmatrix} - \frac{1}{\beta_k} I_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} (1 - \frac{1}{\beta_k}) I_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & (-1 - \frac{1}{\beta_k}) I_{2 \times 2} \end{pmatrix}.$$

1. Fall  $\beta_k \geq 1$ :

Dann ist  $-1 - \frac{1}{\beta_k}$  der einzige negative Eigenwert von  $L_1^k$  und

$$E^-(L_1^k) = \text{span}\{f_k e_i \mid i \in \{3, 4\}\}.$$

Des Weiteren ist  $E^-(L_1^k)$  eine endlich dimensionale reelle  $G$ -Darstellung gegeben durch

$$\rho_{E^-(L_1^k)} = \rho^t. \quad (4.2.9)$$

2. Fall  $\beta_k < 1$ :

Dann sind alle Eigenwerte von  $L_1^k$  negativ, d.h. sowohl  $1 - \frac{1}{\beta_k}$ , als auch  $-1 - \frac{1}{\beta_k}$ . Demzufolge ist  $E^-(L_1^k) = H_k$  und die endlich dimensionale  $G$ -Darstellung von  $E^-(L_1^k)$  gegeben durch

$$\rho_{E^-(L_1^k)} = \rho^s \oplus \rho^t. \quad (4.2.10)$$

• Folgerungen für den klassischen und äquivarianten Spektralfluss:

1. Fall  $\beta_k \geq 1$ :

Dann gilt  $E^-(L_0^k) = E^-(L_1^k)$ . Insbesondere sind diese beiden Räume dann als  $G$ -Darstellungen isomorph, d.h.

$$[E^-(L_0^k)] - [E^-(L_1^k)] = 0 \in RO(G). \quad (4.2.11)$$

2. Fall  $\beta_k < 1$ :

Dann gilt mit (4.2.8) und (4.2.10)

$$[E^-(L_0^k)] - [E^-(L_1^k)] = [\rho^t] - [(\rho^s \oplus \rho^t)] = [\rho^s] \neq 0 \in RO(G). \quad (4.2.12)$$

Insgesamt folgt nun aus den Gleichungen (4.2.11) und (4.2.12) zusammen mit Gleichung (4.2.7)

$$\text{sf}_G(L) = \sum_{k=1}^n [E^-(L_0^k)] - [E^-(L_1^k)] = |\{k : \beta_k < 1\}| [\rho^s] \quad (4.2.13)$$

**Bemerkung 4.2.1.**

Man beachte, da insbesondere  $\text{sf}(L) = 2 |\{k : \beta_k < 1\}|$  gilt, folgt

$$\text{sf}_G(L) = 0 \in \text{RO}(G) \Leftrightarrow \text{sf}(L) = 0 \in \mathbb{Z}. \quad (4.2.14)$$

Mit dem nachfolgenden Beispiel wollen wir zeigen, dass es durch Doppelung des Systems bei der äußeren Gruppenwirkung dennoch möglich ist, trotz eines trivialen klassischen Spektralfluss einen nichttrivialen äquivarianten Spektralfluss zu erhalten.

**Beispiel 4.2.2.**

Im Folgenden betrachten wir also den Weg  $\tilde{L} = \{\tilde{L}_\lambda\}_{\lambda \in I}$  mit  $\tilde{L}_\lambda : H \times H \rightarrow H \times H$  gegeben durch

$$\tilde{L}_\lambda := \begin{pmatrix} L_\lambda & 0 \\ 0 & -L_\lambda \end{pmatrix}.$$

Des Weiteren ist  $H \times H$  eine orthogonale Darstellung der  $SO(2)$  mittels Wirkung gegeben durch: Seien  $s, t \in \mathbb{N}, s \neq t$ . Für alle  $g \in SO(2), u = (u_1, \dots, u_8)^T \in H \times H$  sei

$$gu(x) := \left( \begin{pmatrix} \rho^s & & & \\ & \rho^s & & \\ & & \rho^t & \\ & & & \rho^t \end{pmatrix} u \right) (x), \quad (4.2.15)$$

wobei  $\rho^s, \rho^t$  die zugehörigen irreduziblen reellen Darstellungen aus (2.2.3) bezeichnen. Mit Gleichung (3.1.12) erhalten wir eine orthogonale Zerlegung von  $H \times H$  in endlich dimensionale Räume  $H_k \times H_k$  so, dass wir die folgende Darstellung von

$$\tilde{L}_\lambda^k := P_k(\tilde{L}_\lambda)P_k : H_k \times H_k \rightarrow H_k \times H_k$$

als Matrix erhalten

$$\tilde{L}_\lambda^k = \begin{pmatrix} I_2 & & & \\ & -I_2 & & \\ & & -I_2 & \\ & & & I_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{\beta_k} \begin{pmatrix} B_\lambda & & & \\ & B_\lambda & & \\ & & -B_\lambda & \\ & & & -B_\lambda \end{pmatrix}, \lambda \in I. \quad (4.2.16)$$

Da  $\beta_k \rightarrow \infty$  für  $k \rightarrow \infty$ , existiert nach Gleichung (3.1.20) ein  $n \in \mathbb{N}$  so, dass für alle  $k \geq n$  die Operatoren  $\tilde{L}_\lambda^k$  Isomorphismen sind. Betrachten wir nun  $X := \bigoplus_{k=1}^n H_k \times \bigoplus_{k=1}^n H_k$  und  $Y := X^\perp$ , so erfüllen diese beiden Räume die Annahme (A5). Insbesondere gilt nun mit Gleichung (4.0.8) für den Spektralfluss von  $\tilde{L}$

$$\begin{aligned} \text{sf}_{SO(2)}(\tilde{L}, I) &= \text{sf}_{SO(2)}(\tilde{L} |_X, I) + \underbrace{\text{sf}_{SO(2)}(\tilde{L} |_Y, I)}_{=0} \\ &= \text{sf}_{SO(2)}(\tilde{L} |_X, I) = \sum_{k=1}^n \text{sf}_{SO(2)}(\tilde{L}_\lambda^k, I) \\ &= \sum_{k=1}^n [E^-(\tilde{L}_0^k)] - [E^-(\tilde{L}_1^k)] \in RO(SO(2)), \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

wobei  $E^-(\tilde{L}_\lambda^k)$  die direkte Summe der Eigenräume von  $\tilde{L}_\lambda^k$  bezüglich negativer Eigenwerte und  $\rho_{E^-(\tilde{L}_\lambda^k)}$  die zugehörige Darstellung bezeichne. Sei nun  $k \in \{1, \dots, n\}$  beliebig.

- Betrachtung der Eigenräume bezüglich negativer Eigenwerte von  $\tilde{L}_0^k$ :

Betrachten wir

$$\tilde{L}_0^k = \begin{pmatrix} I_2 & & & \\ & -I_2 & & \\ & & -I_2 & \\ & & & I_2 \end{pmatrix},$$

so gilt  $-1$  ist der einzige negative Eigenwert von  $\tilde{L}_0^k$  und

$$E^-(\tilde{L}_0^k) = \text{span}(f_k e_3, f_k e_4, f_k e_5, f_k e_6).$$

Des Weiteren ist  $E^-(\tilde{L}_0^k)$  eine endlich dimensionale Darstellung der  $SO(2)$  gegeben durch

$$\rho_{E^-(\tilde{L}_0^k)} = \rho^s \oplus \rho^t. \quad (4.2.18)$$

- Betrachtung der Eigenräume bezüglich negativer Eigenwerte von  $\tilde{L}_1^k$ :

Analog betrachten wir

$$\tilde{L}_1^k = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{1}{\beta_k}\right) I_2 & & & \\ & \left(-1 - \frac{1}{\beta_k}\right) I_2 & & \\ & & \left(-1 + \frac{1}{\beta_k}\right) I_2 & \\ & & & \left(1 + \frac{1}{\beta_k}\right) I_2 \end{pmatrix}$$

1. Fall  $\beta_k \geq 1$ :

Dann sind  $-1 - \frac{1}{\beta_k}$  und  $-1 + \frac{1}{\beta_k}$  die einzigen negativen Eigenwerte. Weiter ist

$$E^-(\tilde{L}_1^k) = \text{span}(f_k e_3, f_k e_4, f_k e_5, f_k e_6).$$

Auch hier ist  $E^-(\tilde{L}_1^k)$  eine endlich dimensionale Darstellung der  $SO(2)$  gegeben durch

$$\rho_{E^-(\tilde{L}_1^k)} = \rho^s \oplus \rho^t. \quad (4.2.19)$$

2. Fall  $\beta_k < 1$ :

So sind  $1 - \frac{1}{\beta_k}$  und  $-1 - \frac{1}{\beta_k}$  die einzigen negativen Eigenwerte. Dann ist

$$E^-(\tilde{L}_1^k) = \text{span}(f_k e_1, f_k e_2, f_k e_3, f_k e_4).$$

Des Weiteren ist  $E^-(\tilde{L}_1^k)$  eine endlich dimensionale Darstellung der  $SO(2)$  gegeben durch

$$\rho_{E^-(\tilde{L}_1^k)} = 2 \cdot \rho^s. \quad (4.2.20)$$

• Folgerungen für den klassischen und äquivarianten Spektralfluss:

1. Fall  $\beta_k \geq 1$ :

Dann gilt  $E^-(L_0^k) = E^-(L_1^k)$ . Damit folgt

$$\text{sf}_{SO(2)}(\tilde{L}_\lambda^k, I) = [E^-(\tilde{L}_0^k)] - [E^-(\tilde{L}_1^k)] = [(\rho^s \oplus \rho^t)] - [(\rho^s \oplus \rho^t)] = 0_{\mathbb{Z}[x]}.$$

2. Fall  $\beta_k < 1$ :

Dann gilt mit (4.2.18) und (4.2.20)

$$\begin{aligned} \text{sf}_{SO(2)}(\tilde{L}_\lambda^k, I) &= [E^-(\tilde{L}_0^k)] - [E^-(\tilde{L}_1^k)] \\ &= [\rho^s \oplus \rho^t] - [2\rho^s] = [(-1) \cdot \rho^s \oplus \rho^t] \neq 0_{\mathbb{Z}[x]}. \end{aligned}$$

Somit folgt mit Gleichung (4.2.17)

$$\begin{aligned} \text{sf}_{SO(2)}(\tilde{L}, I) &= \sum_{k=1}^n [E^-(\tilde{L}_0^k)] - [E^-(\tilde{L}_1^k)] \\ &= |\{k : \beta_k < 1\}| [(-1) \cdot \rho^s] \oplus |\{k : \beta_k < 1\}| [\rho^t] \quad (4.2.21) \end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir, dass der äquivariante Spektralfluss von  $\tilde{L}$  verschieden von Null ist, falls  $|\{k : \beta_k < 1\}| \neq 0$ . Aus Symmetriegründen ist allerdings  $\text{sf}(\tilde{L}, I) = 0$ .

**Bemerkung 4.2.3.**

Man beachte, dass analoge Resultate auch für andere  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 3$  erzielt werden können. Für  $p = 2$  ist unter den Annahmen  $(\tilde{A}1)$ , (A2)-(A5), die einzige mögliche äußere Gruppenwirkung auf  $H$ , die triviale Wirkung auf  $H$ . Dann ist der äquivariante Spektralfluss äquivalent zum klassischen Spektralfluss und kann ggf. durch die Resultate aus Kapitel 3 untersucht werden.

#### 4.2.2 Innere Gruppenwirkung der $SO(2)$

Wir betrachten hier erneut das System (3.1.9) im äquivarianten Fall mit einer inneren Gruppenwirkung der Gruppe  $G = SO(2)$  für den Spezialfall  $N, p = 2$ . Sei

nun also  $U \subset \mathbb{R}^2$  eine offene, beschränkte und  $SO(2)$ -invariante Menge mit glattem Rand. Wir betrachten also das folgende System unter den Annahmen  $(\tilde{A}1)$ ,  $(A2)$ - $(A4)$

$$\begin{cases} A\Delta u(x) = \nabla_u F(\lambda, x, u(x)) & \text{in } U \\ u(x) = 0 & \text{auf } \partial U, \end{cases}$$

wobei  $A := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

Es ist  $\mathbb{R}^2$  eine orthogonale Darstellung der Gruppe  $SO(2)$ , d.h. es existiert ein stetiger Homomorphismus  $\rho : SO(2) \rightarrow O(2, \mathbb{R})$ , wobei die Wirkung von  $SO(2)$  auf  $\mathbb{R}^2$  gegeben sei durch

$$\begin{aligned} \forall (x, y)^T \in \mathbb{R}^2, g = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \in SO(2) : \\ g(x, y)^T := \rho(g)(x, y)^T = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} (x, y)^T \end{aligned}$$

Da  $G$  abelsch ist, ist die Wirkung von  $G$  auf  $H$  gegeben durch

$$\begin{aligned} \forall g = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \in SO(2), (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : \\ gu((x, y)^T) := u(g(x, y)^T) = u \left( \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} (x, y)^T \right). \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

und damit  $H := \bigoplus_{i=1}^2 H_0^1(U)$  eine orthogonale Darstellung von  $G$ .

Als nächstes zeigen wir, dass das in (3.1.3) definierte Skalarprodukt in  $H$   $SO(2)$ -invariant ist. Sei dazu  $g = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \in SO(2)$  beliebig. Dann gilt

$$(\bar{x}, \bar{y}) := g(x, y) = (\cos \phi \cdot x - \sin \phi \cdot y, \sin \phi \cdot x + \cos \phi \cdot y) \in U, (x, y) \in U \quad (4.2.23)$$

Durch Umstellen erhalten wir

$$\begin{aligned} x &= \cos \phi \cdot \bar{x} + \sin \phi \cdot \bar{y}, \\ y &= -\sin \phi \cdot \bar{x} + \cos \phi \cdot \bar{y}. \end{aligned}$$

Mit

$$\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} = \cos \phi, \quad \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} = -\sin \phi, \quad \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} = \sin \phi, \quad \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} = \cos \phi,$$

folgt nun für  $u \in H$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \phi - \frac{\partial u}{\partial y} \sin \phi \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{y}} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial u}{\partial x} \sin \phi + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \phi. \end{aligned}$$

Damit gilt schließlich

$$\nabla u(g(x, y)) = \nabla u(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \nabla u(x, y) = g(\nabla u(x, y)). \quad (4.2.24)$$

Mit Gleichung (4.2.24) erhalten wir nun die Invarianz des Skalarproduktes

$$\begin{aligned}
\langle gu, gv \rangle_{H_0^1(U)} &= \int_U \langle \nabla gu(x), \nabla gv(x) \rangle dx = \int_U \langle \nabla u(gx), \nabla v(gx) \rangle dx \\
&= \int_U \langle g \nabla u(x), g \nabla v(x) \rangle dx = \int_U (g \nabla u(x))^T (g \nabla v(x)) dx \\
&= \int_U (\nabla u(x))^T g^T g \nabla v(x) dx = \int_U (\nabla u(x))^T \nabla v(x) dx \\
&= \int_U \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle dx = \langle u, v \rangle_{H_0^1(U)}. \tag{4.2.25}
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt somit auch die Bedingung (S1), also die Invarianz des Skalarproduktes in  $H$ . Für  $g \in SO(2), u = (u_1, u_2) \in H$  beliebig gilt weiter

$$\begin{aligned}
\langle Ag u, g u \rangle_H &= \left\langle A \begin{pmatrix} u_1(gx) \\ u_2(gx) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1(gx) \\ u_2(gx) \end{pmatrix} \right\rangle_H \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} -u_1(gx) \\ u_2(gx) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1(gx) \\ u_2(gx) \end{pmatrix} \right\rangle_H \\
&= \langle -u_1(gx), u_1(gx) \rangle_{H_0^1(U)} + \langle u_2(gx), u_2(gx) \rangle_{H_0^1(U)} \\
&\stackrel{(4.2.25)}{=} \langle -u_1(x), u_1(x) \rangle_{H_0^1(U)} + \langle u_2(x), u_2(x) \rangle_{H_0^1(U)} \\
&= \langle Au, u \rangle_H, \tag{4.2.26}
\end{aligned}$$

womit auch die Bedingung (S2) erfüllt ist.

Wir betrachten nun die folgende Zerlegung

$$H := \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} H_k \tag{4.2.27}$$

von  $H$  in endlich dimensionale Teilräume  $H_k := V_{-\Delta}(\beta_k) \oplus V_{-\Delta}(\beta_k)$ . Für alle  $k \in \mathbb{N}$  bezeichne dabei

$$\beta_k \in \sigma(-\Delta, U) = \{0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_k < \dots\}$$

die Eigenwerte des Dirichlet-Eigenwertproblem und  $V_{-\Delta}(\beta_k)$  den dazugehörigen Eigenraum, der Dimension  $\mu_k$ . Insbesondere folgt aus der  $G$ -Äquivarianz des Operators  $\Delta$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  die  $G$ -Invarianz der Räume  $H_k$ .

**Bemerkung 4.2.4.**

Man beachte, dass die Zerlegung von  $H$

$$H = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} H_k,$$

mit  $H_k := \text{span}\{f_k \cdot e_i \mid 1 \leq i \leq p\}$ , wobei  $\{e_i\}_{i=1}^p$  die Standardbasis im  $\mathbb{R}^p$  bezeichne aus Kapitel 3, welche wir auch bei der Untersuchung der äußeren Gruppenwirkung von  $G = SO(2)$  verwendet haben, hier keine Anwendung findet, da die Teilräume  $H_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  unter der inneren Gruppenwirkung von  $SO(2)$  nicht invariant sind.

Analog zu Gleichung (3.1.13) bezeichne  $L_\lambda^k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  die Einschränkung des Operators auf den Raum  $H_k$ .

**Lemma 4.2.5.**

Für alle  $k \in \mathbb{N}$  hat der Operator  $L_\lambda^k$  folgende Darstellung als Matrix

$$L_\lambda^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\beta_k} B_\lambda, \lambda \in I \quad (4.2.28)$$

bezüglich einer Orthonormalbasis  $\{b_j \mid 1 \leq j \leq \mu_k\}$  von  $H_k$ .

*Beweis.*

Seien nun also  $B = (b_1, \dots, b_{\mu_k})$  eine Orthonormalbasis von  $V_{-\Delta}(\beta_k)$ , sowie

$$u_k = (u_1, u_2) = (\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_{\mu_k} b_{\mu_k}, \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_{\mu_k} b_{\mu_k}) \in H_k.$$

Weiter sei nach (A2)

$$B_\lambda := \begin{pmatrix} a_1(\lambda) & a_2(\lambda) \\ a_2(\lambda) & a_3(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Nach Gleichung (3.1.8) gilt

$$\langle L_\lambda^k u_k, u_k \rangle_H = \langle Tu_k, u_k \rangle_H + \langle K_\lambda u_k, u_k \rangle_H.$$

Des Weiteren gilt

$$\begin{aligned} \langle Tu_k, u_k \rangle_H &= \langle T(u_1, u_2), (u_1, u_2) \rangle_H \\ &= \langle (u_1, -u_2)(u_1, u_2) \rangle_H = \int_U |\nabla u_1|^2 dx - \int_U |\nabla u_2|^2 dx \\ &= \sum_{j=1}^{\mu_k} \alpha_j^2 - \sum_{j=1}^{\mu_k} \gamma_j^2 \end{aligned} \quad (4.2.29)$$

und

$$\begin{aligned} \langle K_\lambda u_k, u_k \rangle_H &= - \int_U \langle B_\lambda u_k, u_k \rangle dx \quad (4.2.30) \\ &= - \int_U \left\langle \begin{pmatrix} a_1(\lambda) & a_2(\lambda) \\ a_2(\lambda) & a_3(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\rangle dx \\ &= - \int_U \left\langle \begin{pmatrix} a_1(\lambda)u_1 + a_2(\lambda)u_2 \\ a_2(\lambda)u_1 + a_3(\lambda)u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\rangle dx \\ &= - \int_U a_1(\lambda)u_1^2 + 2a_2(\lambda)u_1u_2 + a_3(\lambda)u_2^2 dx \\ &= - \left( a_1(\lambda) \int_U u_1^2 dx + 2a_2(\lambda) \int_U u_1u_2 dx + a_3(\lambda) \int_U u_2^2 dx \right) \\ &= - \frac{1}{\beta_k} \left( a_1(\lambda) \left( \sum_{j=1}^{\mu_k} \alpha_j^2 \right) + 2a_2(\lambda) \left( \sum_{j=1}^{\mu_k} \alpha_j \gamma_j \right) + a_3(\lambda) \left( \sum_{j=1}^{\mu_k} \gamma_j^2 \right) \right) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$L_\lambda^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\beta_k} B_\lambda, \quad \lambda \in I.$$

□

Da  $\beta_k \rightarrow \infty$  für  $k \rightarrow \infty$ , existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  so, dass für alle  $k \geq n$  der Operator  $L_\lambda^k$  invertierbar ist. Damit liefert  $X := \bigoplus_{k=1}^n H_k$  und  $Y := X^\perp$  eine Zerlegung von  $H$ , die die Bedingungen aus Annahme (A5) erfüllt. Weiterhin gilt mit Gleichung (4.0.6)

und (4.0.8)

$$\begin{aligned}
\text{sf}_{SO(2)}(L, I) &= \text{sf}_{SO(2)}(L |X, I) + \underbrace{\text{sf}_{SO(2)}(L |Y, I)}_{=0} \\
&= \text{sf}_{SO(2)}(L |X, I) = \sum_{k=1}^n \text{sf}_{SO(2)}(L_\lambda^k, I) \\
&= \sum_{k=1}^n [E^-(L_1^k)] - [E^-(L_0^k)] \in RO(SO(2)), \quad (4.2.31)
\end{aligned}$$

wobei erneut  $E^-(L_\lambda^k)$  die direkte Summe der Eigenräume von  $L_\lambda^k$  bezüglich negativer Eigenwerte bezeichne.

Sei nun  $k \in \{1, \dots, n\}$  beliebig und

$$B_\lambda := \lambda I_{2 \times 2}. \quad (4.2.32)$$

Betrachten wir nun die Eigenräume von  $L_0^k$  und  $L_1^k$ .

- Betrachtung der Eigenräume bezüglich negativer Eigenwerte von  $L_0^k$ :

Nach Lemma 4.2.5 und Gleichung (4.2.32) ist  $L_0^k$  gegeben durch

$$L_0^k := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist  $-1$  der einzige negative Eigenwert von  $L_0^k$  und

$$E^-(L_0^k) = \{0\} \oplus V_\Delta(\beta_k).$$

Des Weiteren ist  $\dim(E^-(L_0^k)) = \mu_k$ .

- Betrachtung der Eigenräume bezüglich negativer Eigenwerte von  $L_1^k$ :

Nach Lemma 4.2.5 und Gleichung (4.2.32) ist  $L_1^k$  gegeben durch

$$L_1^k := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\beta_k} I_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} (1 - \frac{1}{\beta_k}) & 0 \\ 0 & (-1 - \frac{1}{\beta_k}) \end{pmatrix}.$$

1. Fall  $\beta_k \geq 1$ :

Dann ist  $-1 - \frac{1}{\beta_k}$  der einzige negative Eigenwert von  $L_1^k$  und

$$E^-(L_1^k) = \{0\} \oplus V_\Delta(\beta_k).$$

Des Weiteren ist  $\dim(E^-(L_0^k)) = \mu_k$ .

2. Fall  $\beta_k < 1$ :

Dann sind alle Eigenwerte von  $L_1^k$  negativ, d.h. sowohl  $1 - \frac{1}{\beta_k}$ , als auch  $-1 - \frac{1}{\beta_k}$ . Demzufolge ist  $E^-(L_1^k) = H_k$  und  $\dim(E^-(L_1^k)) = 2\mu_k$ .

• Folgerungen für den klassischen und äquivarianten Spektralfluss:

1. Fall  $\beta_k \geq 1$ :

Dann gilt  $E^-(L_0^k) = E^-(L_1^k)$ . Insbesondere sind diese beiden Räume dann als  $G$ -Darstellungen isomorph, d.h.

$$[E^-(L_0^k)] - [E^-(L_1^k)] = 0 \in RO(G). \quad (4.2.33)$$

2. Fall  $\beta_k < 1$ :

Dann gilt

$$\dim(E^-(L_1^k)) = 2\mu_k \neq \mu_k = \dim(E^-(L_0^k)).$$

Demzufolge sind  $E^-(L_0^k)$  und  $E^-(L_1^k)$  als  $SO(2)$ -Darstellungen nicht isomorph und somit gilt

$$\text{sf}_G(L_\lambda^k) = [E^-(L_0^k)] - [E^-(L_1^k)] \neq 0 \in RO(G). \quad (4.2.34)$$

Insgesamt folgt nun

$$\text{sf}_G(L) = \sum_{k=1}^n [E^-(L_0^k)] - [E^-(L_1^k)] = \sum_{\substack{k \in \{1, \dots, n\} \\ \beta_k < 1}} [E^-(L_0^k)] - [E^-(L_1^k)] \quad (4.2.35)$$

**Bemerkung 4.2.6.**

Man beachte, dass auch hier analog zu Bemerkung 4.2.1  $\text{sf}(L) = 2|\{k : \beta_k < 1\}|$  gilt.

Somit folgt mit Bemerkung 2.2.11

$$\text{sf}_G(L) = 0 \in RO(G) \Leftrightarrow \text{sf}(L) = 0 \in \mathbb{Z}.$$

Als Nächstes betrachten wir die Doppelung des Systems, wie in Beispiel 4.2.2.

**Beispiel 4.2.7.**

Wir betrachten nun also den Weg  $\tilde{L} = \{\tilde{L}_\lambda\}_{\lambda \in I}$  mit  $\tilde{L}_\lambda : H \times H \rightarrow H \times H$  gegeben durch

$$\tilde{L}_\lambda := \begin{pmatrix} L_\lambda & 0 \\ 0 & -L_\lambda \end{pmatrix}.$$

Des Weiteren ist  $H \times H$  eine orthogonale Darstellung der  $SO(2)$ , wobei die Wirkung von  $SO(2)$  auf  $H \times H$  gegeben sei durch :

$$\begin{aligned} \forall g \in SO(2), u = (u_1, u_2) \in H \times H : \\ gu(x) = g(u_1, u_2)(x) = (u_1(gx), u_2(gx)) \end{aligned} \quad (4.2.36)$$

Mit Gleichung (4.2.27) erhalten wir eine Zerlegung von  $H \times H$  in endlich-dimensionale Räume  $H_k \times H_k$  so, dass wir die folgende Darstellung von

$$\tilde{L}_\lambda^k := P_k(\tilde{L}_\lambda)P_k : H_k \times H_k \rightarrow H_k \times H_k$$

als Matrix erhalten

$$\tilde{L}_\lambda^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\beta_k} \begin{pmatrix} B_\lambda & \\ & B_\lambda \end{pmatrix}, \lambda \in I, \quad (4.2.37)$$

Da  $\beta_k \rightarrow \infty$  für  $k \rightarrow \infty$ , existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  so, dass für alle  $k \geq n$  die Operatoren  $\tilde{L}_\lambda^k$  Isomorphismen sind. Betrachten wir nun  $X := \bigoplus_{k=1}^n H_k \times \bigoplus_{k=1}^n H_k$  und  $Y := X^\perp$ , so erfüllen diese beiden Räume die Annahme (A5). Insbesondere gilt nun mit Gleichung

(4.0.8) für den Spektralfluss von  $\tilde{L}$

$$\begin{aligned}
 sf_{SO(2)}(\tilde{L}, I) &= sf_{SO(2)}(\tilde{L} |_X, I) + \underbrace{sf_{SO(2)}(\tilde{L} |_Y, I)}_{=0} \\
 &= sf_{SO(2)}(\tilde{L} |_X, I) = \sum_{k=1}^n sf_{SO(2)}(\tilde{L}_\lambda^k, I) \\
 &= \sum_{k=1}^n [E^-(\tilde{L}_0^k)] - [E^-(\tilde{L}_1^k)] \in RO(SO(2)), \quad (4.2.38)
 \end{aligned}$$

wobei  $E^-(\tilde{L}_\lambda^k)$  die direkte Summe der Eigenräume von  $\tilde{L}_\lambda^k$  bezüglich negativer Eigenwerte bezeichne. Sei nun  $k \in \{1, \dots, n\}$  beliebig.

- Betrachtung der Eigenräume bezüglich negativer Eigenwerte von  $\tilde{L}_0^k$ :

Betrachten wir

$$\tilde{L}_0^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

so ist  $-1$  der einzige negative Eigenwert von  $\tilde{L}_0^k$  und

$$E^-(\tilde{L}_0^k) = \{0\} \oplus V_{-\Delta}(\beta_k) \oplus V_{-\Delta}(\beta_k) \oplus \{0\}$$

Des Weiteren ist  $\dim(E^-(\tilde{L}_0^k)) = 2\mu_k$ .

- Betrachtung der Eigenräume bezüglich negativer Eigenwerte von  $\tilde{L}_1^k$ :

Analog betrachten wir

$$\tilde{L}_1^k = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{1}{\beta_k}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-1 - \frac{1}{\beta_k}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(-1 + \frac{1}{\beta_k}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(1 + \frac{1}{\beta_k}\right) \end{pmatrix}$$

1. Fall  $\beta_k \geq 1$ :

Dann sind  $-1 - \frac{1}{\beta_k}$  und  $-1 + \frac{1}{\beta_k}$  die einzigen negativen Eigenwerte. Weiter

ist

$$E^-(\tilde{L}_1^k) = \{0\} \oplus V_{-\Delta}(\beta_k) \oplus V_{-\Delta}(\beta_k) \oplus \{0\}$$

und  $\dim(E^-(\tilde{L}_1^k)) = 2\mu_k$ .

2. Fall  $\beta_k < 1$ :

So sind  $1 - \frac{1}{\beta_k}$  und  $-1 - \frac{1}{\beta_k}$  die einzigen negativen Eigenwerte. Dann ist

$$E^-(\tilde{L}_1^k) = V_{-\Delta}(\beta_k) \oplus V_{-\Delta}(\beta_k) \oplus \{0\} \oplus \{0\}$$

und  $\dim(E^-(\tilde{L}_1^k)) = 2\mu_k$ .

• Folgerungen für den klassischen und äquivarianten Spektralfluss:

1. Fall Für alle  $k \in \{1, \dots, n\}$  gilt  $\beta_k \geq 1$ :

Dann gilt  $E^-(L_0^k) = E^-(L_1^k)$ . Damit folgt  $[E^-(\tilde{L}_0^k)] = [E^-(\tilde{L}_1^k)]$  und somit

$$sf_{SO(2)}(\tilde{L}_\lambda^k, I) = [E^-(\tilde{L}_0^k)] - [E^-(\tilde{L}_1^k)] = 0_{\mathbb{Z}[x]}.$$

Insgesamt folgt mit Gleichung (4.2.38)

$$sf_{SO(2)}(\tilde{L}, I) = \sum_{k=1}^n sf_{SO(2)}(\tilde{L}_\lambda^k, I) = 0_{\mathbb{Z}[x]}. \quad (4.2.39)$$

2. Fall Existiert ein  $k \in \{1, \dots, n\}$  so, dass  $\beta_k < 1$ :

In diesem Fall kann über die Nichttrivialität des Spektralflusses keine allgemeine Aussage getroffen werden. Der Spektralfluss kann jedoch mit Hilfe der Formel

$$sf_{SO(2)}(\tilde{L}, I) = \sum_{k=1}^n sf_{SO(2)}(\tilde{L}_\lambda^k, I) = \sum_{k=1}^n \left( [E^-(\tilde{L}_0^k)] - [E^-(\tilde{L}_1^k)] \right). \quad (4.2.40)$$

bestimmt werden.

Aus Symmetriegründen gilt in beiden Fällen, dass der klassische Spektralfluss von  $\tilde{L}$  trivial ist.

#### **Bemerkung 4.2.8.**

Auch hier können ganz analoge Resultate für beliebige  $N \in \mathbb{N}$  und  $p \in \mathbb{N}$  gezeigt werden.

Dann ist die Wirkung von  $SO(2)$  auf  $\mathbb{R}^N$  gegeben durch

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, g \in SO(2) : gx := \rho(g)x.$$

Genauer: Für  $N$  gerade gilt

$$\forall g = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \in SO(2) : \rho(g) := \begin{pmatrix} \cos \phi \cdot I_{\frac{N}{2}} & -\sin \phi \cdot I_{\frac{N}{2}} \\ \sin \phi \cdot I_{\frac{N}{2}} & \cos \phi \cdot I_{\frac{N}{2}} \end{pmatrix}$$

und für  $N$  ungerade gilt

$$\forall g = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \in SO(2) : \rho(g) := \begin{pmatrix} \cos \phi \cdot I_{\frac{N-1}{2}} & -\sin \phi \cdot I_{\frac{N-1}{2}} & 0 \\ \sin \phi \cdot I_{\frac{N-1}{2}} & \cos \phi \cdot I_{\frac{N-1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit Gleichung (4.0.2) ist  $H$  dann eine orthogonale Darstellung von  $G$ .

### 4.2.3 Gruppenwirkung einer endlichen Liegruppe

#### Beispiel 4.2.9.

Wir betrachten nun den folgenden Spezialfall von System (3.1.9) im äquivarianten Fall mit  $G = \mathbb{Z}_2$  unter den Annahmen  $(\tilde{A}1)$ ,  $(A2)$ – $(A4)$ , d.h.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Delta u = \nabla_u F(\lambda, u) & \text{in } U \\ u = 0 & \text{auf } \partial U, \end{array} \right. \quad (4.2.41)$$

wobei  $U = (-4, 4) \subset \mathbb{R}$ . Weiter sei  $\mathbb{R}$  eine orthogonale Darstellung von  $\mathbb{Z}_2 = \{1_{\mathbb{Z}_2}, g\}$ , d.h. es existiert ein stetiger Homomorphismus

$$\rho : \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathcal{GL}(\mathbb{R}) \text{ mit } \rho(g) = -1$$

Insbesondere gilt dann

$$\rho(1_{\mathbb{Z}_2}) = \rho(g^2) = \rho(g)\rho(g) = 1.$$

Damit ist die Wirkung von  $G$  auf  $\mathbb{R}$  gegeben durch:

$$\forall g \in \mathbb{Z}_2, x \in \mathbb{R} : gx := \rho(g)x. \quad (4.2.42)$$

Insbesondere ist  $U$  dann  $\mathbb{Z}_2$ -invariant und  $H := \bigoplus_{i=1}^3 H_0^1(U)$  eine orthogonale Darstellung der Gruppe  $\mathbb{Z}_2$  mit Wirkung

$$\forall g \in \mathbb{Z}_2, u \in H : (gu)(x) := u(gx). \quad (4.2.43)$$

Weiter sind für  $U = (-4, 4)$  die Eigenwerte des Dirichlet-Eigenwertproblem gegeben durch  $\beta_k := \frac{(k\pi)^2}{8^2}$  und

$$V_{-\Delta}(\beta_k) := \text{span} \left\{ \sin \left( \frac{k\pi}{8}(x+4) \right) \mid x \in U \right\}. \quad (4.2.44)$$

Betrachten wir nun

$$B_\lambda := \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.2.45)$$

Nach Gleichung ist für alle  $k \in \mathbb{N}$  die Matrix  $L_0^k$  gegeben durch

$$L_0^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Somit gilt weiter für alle  $k \in \mathbb{N}$   $\mu_{\text{Morse}}(L_0^k) = 1$  und  $E^-(L_0^k) = \{0\} \oplus \{0\} \oplus V_{-\Delta}(\beta_k)$ .

Sei nun  $k \in \mathbb{N}$  und wir betrachten  $L_1^k$ :

- Fall  $k = 1$

Dann ist mit Gleichung (4.2.45), sowie  $\beta_1 = \frac{\pi^2}{64}$

$$L_1^k = \begin{pmatrix} 1 - \frac{32}{\pi^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{32}{\pi^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 + \frac{64}{\pi^2} \end{pmatrix}.$$

Somit gilt  $\mu_{\text{Morse}}(L_1^k) = 2$  und  $E^-(L_1^k) = V_{-\Delta}(\beta_1) \oplus V_{-\Delta}(\beta_1) \oplus \{0\}$ . Insbesondere gilt

$$\text{sf}(L_\lambda^1) = \mu_{\text{Morse}}(L_0^1) - \mu_{\text{Morse}}(L_1^1) = 1 - 2 = -1. \quad (4.2.46)$$

- Fall  $k = 2$

Dann ist mit Gleichung (4.2.45), sowie  $\beta_2 = \frac{\pi^2}{16}$

$$L_1^k = \begin{pmatrix} 1 - \frac{8}{\pi^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{8}{\pi^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 + \frac{16}{\pi^2} \end{pmatrix}.$$

Somit hat  $L_1^k$  keine negativen Eigenwerte und  $\mu_{\text{Morse}}(L_1^k) = 0$ . Weiter gilt

$$\text{sf}(L_\lambda^2) = \mu_{\text{Morse}}(L_0^2) - \mu_{\text{Morse}}(L_1^2) = 1 - 0 = 1. \quad (4.2.47)$$

- Fall  $k \geq 3$

Dann ist mit Gleichung (4.2.45), sowie  $\beta_3 \geq \frac{9\pi^2}{64}$

$$L_1^k = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2\beta_k} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{2\beta_k} & 0 \\ 0 & 0 & -1 + \frac{1}{\beta_k} \end{pmatrix}.$$

Somit gilt  $\mu_{\text{Morse}}(L_1^k) = 1$  und  $E^-(L_1^k) = \{0\} \oplus \{0\} \oplus V_{-\Delta}(\beta_k)$ . Damit gilt

$$\text{sf}(L_\lambda^k) = \mu_{\text{Morse}}(L_0^k) - \mu_{\text{Morse}}(L_1^k) = 1 - 1 = 0. \quad (4.2.48)$$

Schließlich folgt aus den Gleichungen (4.2.46)–(4.2.48)

$$\text{sf}(L) = \sum_{k=1}^n \text{sf}(L_\lambda^k) = 0. \quad (4.2.49)$$

Im nächsten Schritt wollen wir den äquivarianten Spektralfluss von  $L$  berechnen. Man beachte dazu, dass ein Isomorphismus  $\alpha : \text{RO}(\mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  existiert, gegeben durch

$$\alpha([E_0] - [E_1]) = (\dim(E_0) - \dim(E_1), \dim((E_0)_G) - \dim((E_1)_G)), \quad (4.2.50)$$

wobei  $(E_0)_G \subset E_0$  bzw.  $(E_1)_G \subset E_1$  die Teilräume von  $E_0$  bzw.  $E_1$ , der unter  $\mathbb{Z}_2$  fixierten Punkten bezeichnet. Für  $k \in \mathbb{N}, k \geq 3$  gilt  $E^-(L_0^k) = E^-(L_1^k)$  und somit erhalten wir mit Gleichung (4.2.50)

$$\begin{aligned} \text{sf}_G(L_\lambda^k) &= [E^-(L_0^k)] - [E^-(L_1^k)] \\ &= (\dim(E^-(L_0^k)) - \dim(E^-(L_1^k)), \dim(E^-(L_0^k)_G) - \dim(E^-(L_1^k)_G)) \\ &= (0, 0). \end{aligned} \quad (4.2.51)$$

Für  $k = 1$  und  $k = 2$  müssen wir zunächst die Eigenräume von  $V_{-\Delta}(\beta_k)$  des Dirichlet-Eigenwertproblems genauer betrachten. Unter Verwendung der Dirichlet-Randbedingung

$$u(-4) = 0 = u(4)$$

erhalten wir mit Gleichung (4.2.44)

$$V_{-\Delta}(\beta_1) = \text{span} \left\{ \sin \left( \frac{\pi}{8}(x+4) \right) \mid x \in U \right\}, \quad (4.2.52)$$

sowie

$$V_{-\Delta}(\beta_2) = \text{span} \left\{ \sin \left( \frac{\pi}{4}(x+4) \right) \mid x \in U \right\}. \quad (4.2.53)$$

Nun gilt

$$E^-(L_\lambda^1)_G = E^-(L_\lambda^1), \lambda \in \{0, 1\} \quad (4.2.54)$$

sowie

$$E^-(L_\lambda^2)_G = \bigoplus_{i=1}^3 \{0\}, \lambda \in \{0, 1\}. \quad (4.2.55)$$

Damit gilt nun zusammen mit Gleichung (4.2.50)

$$\begin{aligned} \text{sf}_G(L_\lambda^1) &= [E^-(L_0^1)] - [E^-(L_1^1)] \\ &= \left( \dim(E^-(L_0^1)) - \dim(E^-(L_1^1)), \dim(E^-(L_0^1)_G) - \dim(E^-(L_1^1)_G) \right) \\ &= (1 - 2, 1 - 2) = (-1, -1), \end{aligned} \quad (4.2.56)$$

sowie

$$\begin{aligned} \text{sf}_G(L_\lambda^2) &= [E^-(L_0^2)] - [E^-(L_1^2)] \\ &= \left( \dim(E^-(L_0^2)) - \dim(E^-(L_1^2)), \dim(E^-(L_0^2)_G) - \dim(E^-(L_1^2)_G) \right) \\ &= (1 - 0, 0 - 0) = (1, 0). \end{aligned} \quad (4.2.57)$$

Schließlich gilt

$$\text{sf}_G(L) = \sum_{k=1}^n \text{sf}_G(L_\lambda^k) = (0, -1) \neq 0_{RO(\mathbb{Z}_2)}. \quad (4.2.58)$$

## Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit mit dem Titel

**Bifurkation für ein stark indefinites elliptisches System partieller  
Differentialgleichungen mittels klassischem und äquivariantem Spektralfluss**

selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, keine anderen als die von mir angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt und die den Werken wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Diese Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form in einem anderen Prüfungsverfahren vorgelegt.

Unterschrift:

Datum:



# Literaturverzeichnis

- [1] J. F. Adams, **Lectures on Lie Groups**, The University of Chicago Press, **65**, 1982
- [2] J., Appell, P., Zabrejeko **Nonlinear Superposition Operators**, Cambridge University Press, 1990
- [3] M.F. Atiyah, V.K. Patodi, I.M. Singer, **Spectral Asymmetry and Riemannian Geometry III**, Proc. Cambridge Philos. Soc. **79**, 1976, 71–99
- [4] M.F. Atiyah, I.M. Singer, **Index theory for skew-adjoint fredholm operators**, IHES Publ.Math.**37**, 1969, 305–326
- [5] T. Bartsch, **Topological methods for variational problems with symmetries**, Lecture Notes in Mathematics **1560**, Springer Verlag Berlin, 1993
- [6] E. Ciriza, P.M. Fitzpatrick, J. Pejsachowicz, **Uniqueness of Spectral Flow**, Math. Comput. Modelling **32**, 2000, 1496–1501
- [7] C. Conley, **Isolated Invariant Sets and the Morse Index**, C.B.M.S., **38**, Am. Math. Soc., 1978
- [8] P.M. Fitzpatrick, J. Pejsachowicz, L. Recht, **Spectral Flow and Bifurcation of Critical Points of Strongly-Indefinite Functionals Part I: General Theory**, J. Funct. Anal. **162**, 1999, 52–95
- [9] A. Floer, **A refinement of the Conley index and an application to the stability of hyperbolic invariant sets**, Ergod. Th. and Dynam. Sys. **7**, 1987, 93–103
- [10] I. Gohberg, S. Goldberg, M. A. Kaashoek, **Classes of Linear Operators Vol. I**, Operator Theory: Advances and Applications,**49**, Birkhäuser, 1990

- 
- [11] A. Gołębiewski, S. Rybicki, **Global bifurcations of critical orbits of  $G$ -invariant strongly indefinite functionals**, *Nonlinear Anal.* ,**74**, Birkhäuser, 2011, 1823–1834
- [12] M. Izydorek, J. Janczewska, N. Waterstraat, **The Equivariant Spectral Flow and Bifurcation of Periodic Solutions of Hamiltonian Systems**, *Nonlinear Analysis* **211**, 2021, Paperno.112475
- [13] J. Janczewska, M. Möckel, N. Waterstraat, **Bifurcation for a Class of Indefinite Elliptic Systems by Comparison Theory for the Spectral Flow via an Index Theorem**, arXiv: 2405.19473, 2024
- [14] J. Pejsachowicz, N. Waterstraat, **Bifurcation of critical points for continuous families of  $C^2$  functionals of Fredholm type**, *J. Fixed Point Theory Appl.* **13**, 2013, 537–560
- [15] F. Pacella, **Equivariant Morse theory for flows and an application to the  $N$ -body problem**, *Trans. Amer. Math. Soc.* **297**, 1986, 41–52
- [16] J. Phillips, **Self-adjoint Fredholm Operators and Spectral Flow**, *Canad. Math. Bull.* **39**, 1996, 460–467
- [17] P. H. Rabinowitz, **Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations**, *Conf. Board Math. Sci.* **65**, 1986
- [18] D. Salamon, **Connected simple systems and the Conley index of isolated invariant sets**, *Trans. Amer. Math. Soc.* **291**, 1985, 1–41
- [19] G. Segal, **The representation ring of a compact Lie group**, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* **34**, 1968, 113–128
- [20] J. Smoller, A. Wasserman, **Bifurcation and symmetry-breaking**, *Invent. Math.* **100**(1), 1990, 63–95
- [21] N. Waterstraat, **Spectral flow, crossing forms and homoclinics of Hamiltonian systems**, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3) **1111**, 2015, S.275–304

- 
- [22] N. Waterstraat, **Spectral flow and bifurcation for a class of strongly indefinite elliptic systems**, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **148**, 2018, 1097–1113
- [23] N., Doll, H., Schulz-Baldes, N. Waterstraat, **Spectral Flow A Functional Analytic and Index-Theoretic Approach**, Berlin, Boston, De Gruyter, 2023
- [24] H. Weyl, **Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen**, Mathematische Annalen **Bd. 71**, 1912, S.441



# Curriculum Vitae

---

## Angaben zur Person:

Name: Melanie Möckel  
Staatsangehörigkeit: Deutsch

---

## Ausbildung:

2013 Abitur am Elsterschloss-Gymnasium Elsterwerda.

2014–2018 Bachelorstudium Mathematik mit Anwendungsfach  
Wirtschaft an der Martin-Luther-Universität  
Halle-Wittenberg  
*Bachelorarbeit: „Der  $p^{\alpha}q^{\beta}$ -Satz nach William Burnside“*

2018–2020 Masterstudium Mathematik mit Anwendungsfach  
Wirtschaft an der Martin-Luther-Universität  
Halle-Wittenberg  
*Masterarbeit: „Funktionalanalysis nach Fitzpatrick und  
unbeschränkte selbstadjungierte Fredholmoperatoren“*

10/2020–07/2024 Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg,  
Wissenschaftlicher Mitarbeiter

seit 08/2024 Schulamt Cottbus, Lehrkraft

---

## Publikationen:

J. Janczewska, M. Möckel, N. Waterstraat, **Bifurcation for a Class of Indefinite Elliptic Systems by Comparison Theory for the Spectral Flow via an Index Theorem**, arXiv: 2405.19473, 2024