

Modellbasierte Ablöseregelung radialer Turboverdichter unter Verwendung des Körperschalls

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktoringenieur

(Dr.-Ing.)

von Dipl.-Ing. (FH) Rico Schulze
geb. am 13.10.1981 in Elsterwerda

genehmigt durch die Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik
der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

Gutachter:

Prof. Dr.-Ing. Ulrich Jumar

Prof. Dr.-Ing. Bernd Henning

Prof. Dr.-Ing. Hendrik Richter

Promotionskolloquium am 30.07.2018

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Leiter des Forschungs- und Entwicklungsteams bei der AviComp Controls GmbH in Leipzig. Dabei befand ich mich stets an der Schnittstelle zwischen Wissenschaft und industrieller Anwendung. Dieser Aspekt ist nicht nur richtungsweisend für den Inhalt dieser Arbeit. Vielmehr verband sich damit ein besonderer Aufwand für alle Beteiligten. Dafür möchte ich mich an dieser Stelle bedanken.

Zunächst danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Ulrich Jumar und Herrn Prof. Dr.-Ing. Hendrik Richter für die Unterstützung im Rahmen fachlicher und strategischer Diskussionen. Die vielen wertvollen Hinweise haben maßgeblich zum Gelingen des gesamten Forschungsprozesses beigetragen.

Mein Dank gilt weiterhin Herrn Wolfram Schöne und Herrn Sascha Becker für die Unterstützung durch die AviComp Controls GmbH. Vor allem die Harmonisierung meiner wissenschaftlichen und operativen Tätigkeit im Unternehmen erfordert besondere Erwähnung.

Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Klaus-Peter Schulze danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und die Initiierung des kooperativen Promotionsverfahrens mit der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Bernd Henning danke ich für die Bereitschaft zur Übernahme der Gutachtertätigkeit.

Es ist mir auch ein Bedürfnis, Herrn Franz Dietel für seine Unterstützung zu danken. Hervorzuheben sind seine wertvollen Vorarbeiten bei der Erfassung und Auswertung der Körperschalldaten im Rahmen gemeinsamer Projekte mit der HTWK Leipzig. In diesem Zusammenhang möchte ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Jens Jäkel für deren Leitung seitens der HTWK Leipzig danken. Meine Achtung und mein Dank gilt allen Mitarbeitern, die hierbei eine gleichermaßen freundschaftliche wie produktive Arbeitsatmosphäre ermöglicht und damit zum Erfolg dieser Arbeit beigetragen haben. Das gilt vor allem für Herrn Marko Kastner.

Ich möchte es nicht versäumen, auch den Kollegen bei AviComp Controls für die vielfältige Hilfe zu danken. Diese reichte von kurzen Fachgesprächen bis zu intensiven Diskussionen zur Regelung von Radialverdichtern. In Bezug auf den letztgenannten Aspekt möchte ich mich explizit bei Herrn Ronald Eichhorn bedanken.

Herrn Sebastian Wöckel vom ifak Magdeburg danke ich für die wertvollen Hinweise zu den theoretischen Gesichtspunkten der Modellierung des Verdichtergehäuses sowie der Körperschallanalyse.

Einen besonderen Dank möchte ich an meine Ehefrau Nicole richten. Über die Jahre hinweg brachte sie viel Geduld gegenüber meinen akademischen und beruflichen Tätigkeiten auf. Sie trieb mich stets an, den nächsten Schritt zu gehen und war damit eine kontinuierliche Quelle der Kraft, die mich auf diesem Weg begleitet hat.

Zusammenfassung

Viele industrielle Prozesse sind auf den Einsatz von Radialverdichtern angewiesen. Dabei übernehmen Radialverdichter die Rolle des Gaslieferanten oder -abnehmers für die angeschlossenen technologischen Prozesse. Die Einstellung der hierfür notwendigen Fördermengen, Drücke und Temperaturen übernimmt eine Prozessregelung. Aufgrund des eingeschränkten Betriebsbereichs von Radialverdichtern muss die Regelung jedoch zusätzlich das Überschreiten der Betriebsgrenzen verhindern.

Diese Arbeit verfolgt zwei Ziele. Das erste Ziel besteht in der Entwicklung eines Regelungskonzeptes für Radialverdichter, das ein simultanes Erreichen mehrerer Regelziele erlaubt. Die Regelziele umfassen die Folgeregelung zeitveränderlicher Trajektorien bei gleichzeitiger Störunterdrückung und Beachtung von Betriebsgrenzen. Dabei sollen die Regelziele nicht inhärent durch einen Gesamtregelungsentwurf berücksichtigt werden. Vielmehr soll der Regelungsentwurf modular auf dem Entwurf unabhängiger Einzelregler basieren. Das zweite Ziel dieser Arbeit besteht in der Ermittlung des aerodynamischen Verdichterzustandes durch Auswertung des Körperschalls am Verdichtergehäuse. Es ergeben sich folgende Forschungsfragen:

- Wie erfolgt der modulare Entwurf eines Regelungsverfahrens für Radialverdichter, der das gleichzeitige Erreichen der oben genannten Regelziele gewährleistet?
- Welches Merkmal ist für die untersuchten Radialverdichter geeignet, um den aerodynamischen Verdichterzustand während der Annäherung an die Pumpgrenze auf Basis einer Körperschallmessung am Verdichtergehäuse zu ermitteln?
- Wie kann das körperschallbasierte Merkmal unter Berücksichtigung der Gehäuseübertragung algorithmisch berechnet werden?
- Wie lässt sich das körperschallbasierte Merkmal in das Regelungskonzept integrieren, um einen körperschallbasierten Pumpgrenzregler zu entwerfen?

Die Beantwortung der Forschungsfragen erfordert die Entwicklung eines fluiddynamischen Modells des Radialverdichtersystems. Das Modell basiert auf den Ansätzen von GREITZER sowie MOORE und GREITZER für Axialverdichter. Mit der Zerlegung in Modellkomponenten und der komponentenweise Entwicklung der Impuls- und Massenbilanz wird ein Modell in Zustandsraumdarstellung entwickelt. Die Beschreibung des Verdichterkennfeldes beruht auf der Interpolation von Isolinien. Das Modell berücksichtigt eine asymmetrische Störung im Ringraum durch einen harmonischen Ansatz. Das führt zum Störkennfeld des Verdichters. Auslöser solcher Störungen können eine gestörte Anströmung oder Wirbelablösungen in Laufrad und Diffusor sein. Diese Auslöser werden nicht direkt berechnet. Vielmehr wird ein empirisches Modell der Initialstörungen formuliert. Deren Wirkung besteht in der Verschiebung der Pumpgrenze in Richtung steigender Fördermenge. Für verschwindende Initialstörungen ist das Systemverhalten äquivalent zum MOORE-GREITZER-Modell. Für ein verschwindendes Stör-

kennfeld ist das Systemverhalten äquivalent zum GREITZER-Modell. Dieser Zusammenhang wird durch eine Bifurkationsanalyse verdeutlicht. Im experimentellen Teil dieser Arbeit wird das Zustandsraummodell erfolgreich an zwei industriellen Radialverdichtern validiert.

Die Körperschallanalyse zeigt, dass die Messung kinematischer Größen am Verdichtergehäuse einen Rückschluss auf den aerodynamischen Verdichtierzustand ermöglicht. Dazu wird die Varianz der breitbandigen Gehäuseanregung untersucht. Die algorithmische Ermittlung basiert auf einem Signalmodell in Form einer Überlagerung mehrerer tonaler Komponenten und additivem weißem Rauschen. Anschließend lässt sich die Varianz des Rauschanteils über eine BAYESSche Schätzung ermitteln. Die Gehäuseübertragung verursacht dabei signifikante Störungen. Um die Körperschallanalyse zu verbessern, wird die Gehäuseübertragung näher betrachtet. Hierfür wird das Verdichtergehäuse als dünner Hohlzylinder mit einfacher Unterstützung modelliert. Dies erlaubt die analytische Modalzerlegung des Verschiebungsfeldes und führt für die radiale Komponente einer Mode zu einer Übertragungsfunktion zwischen Anregung und Gehäuseverschiebung. Die Anwendung des hieraus erzeugten inversen Filters ermöglicht die Störunterdrückung. Die experimentelle Untersuchung umfasst drei einstufige industrielle Radialverdichter. Es zeigt sich, dass der Frequenzbereich bis zur fünften Rotorharmonischen die wesentlichen Informationen enthält. Ein Ansteigen der Varianz wird als Leistungszunahme breitbandig abstrahlender Fluidschallanteile interpretiert. Bei der Reduzierung des Pumpgrenzabstandes überlagern sich ein fallender und einer steigender Trend. Der fallende Trend ist auf einen sinkenden Turbulenzgrad bei sinkender mittlerer Strömungsgeschwindigkeit zurückzuführen. Der steigende Trend deutet auf die Verstärkung breitbandig abstrahlender Strömungsformen wie Sekundärströmungen, Wirbelablösungen und Anströmturbulenzen hin. Diese Strömungsformen werden allgemein mit der Entstehung aerodynamischer Instabilitäten assoziiert. Weiterhin besteht eine Abhängigkeit des körperschallbasierten Merkmals vom Anstellwinkel des Leitgitters. Insbesondere der eingeschwungene Zustand lässt sich als Messgleichung für das fluiddynamische Verdichtermodell nutzen.

Anschließend wird eine modellbasierte MIN/MAX-Ablöseregelung für einen Radialverdichter entworfen. Das Regelungsverfahren beruht auf einer inversionsbasierten Folgeregelung unter Anwendung des Prinzips des inneren Modells. Das Ergebnis ist eine schaltende Regelung, die über MIN/MAX-Schaltgesetze den passenden Einzelregler ermittelt und dadurch eine Überschreitung der Betriebsgrenzen in der Ruhelage verhindert. Das entwickelte körperschallbasierte Merkmal wird hierbei als Regelgröße eines körperschallbasierten Pumpgrenzreglers eingesetzt. In dieser Arbeit wird insbesondere auf die Voraussetzungen für den Entwurf, das Umschaltverhalten zwischen den Einzelreglern und die praktische Stabilität des geschlossenen Regelkreises durch Bestimmung des Modells in Fehlerkoordinaten eingegangen. Bei dem Modell in Fehlerkoordinaten handelt es sich um ein schaltendes System mit Unstetigkeiten zum Schaltzeitpunkt. Im Allgemeinen ist der geschlossene Regelkreis stabil, wenn (i) die Umschaltung zwischen den Reglern ausreichend langsam erfolgt, (ii) sich der Zustand nach einer Umschaltung ausreichend nahe an der neuen Ruhelage befindet und (iii) jeder Einzelregler die asymptotische Stabilität um die jeweilige Ruhelage gewährleistet. Darüber hinaus wird ein Algorithmus für den Regelungsentwurf für minimalphasige MIMO-Systeme bei gleicher Anzahl von Ein- und Ausgängen angegeben. Mehrere Simulationen des geschlossenen Regelkreises zeigen abschließend die Fähigkeit der MIN/MAX-Ablöseregelung zu einer erfolgreichen Folgeregelung bei gleichzeitiger Störunterdrückung und Beachtung von Betriebsgrenzen.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	ix
Tabellenverzeichnis	xiii
Abkürzungsverzeichnis	xv
Symbolverzeichnis	xvii
1 Einführung	1
1.1 Technologischer Hintergrund – Radiale Turboverdichter	2
1.2 Stand der Forschung	3
1.2.1 Aerodynamische Instabilitäten in Turboverdichtern	3
1.2.2 Manipulation des Systemverhaltens	6
1.2.3 Modellierung von Verdichtersystemen	12
1.3 Ziele und Beiträge der Arbeit	16
1.4 Gliederung der Arbeit	17
2 Systembeschreibung	19
2.1 Modell eines Radialverdichtersystems	20
2.1.1 Komponentenmodelle des Verdichtersystems	20
2.1.2 Modellierung des Verdichterkennfeldes	24
2.1.3 Modell der Initialstörungen	27
2.1.4 Vollständiges Zustandsraummodell	28
2.2 Modell des Verdichtergehäuses	34
2.2.1 Verdichtergehäuse als Wellenleiter	34
2.2.2 Dynamik dünner und gekrümmter Strukturen	35
2.2.3 Erzwungene Schwingungen des dünnwandigen Zylinders	40
3 Körperschallanalyse	43
3.1 Stand der Forschung	44
3.1.1 Invasive Früherkennung des Pumpens und der rotierenden Abrissströmung	44
3.1.2 Nichtinvasive Erkennung des aerodynamischen Verdichterszustandes . . .	47
3.2 Aerodynamische Geräuschquellen in Turboverdichtern	49
3.2.1 Tonale Komponenten im Schallspektrum von Radialverdichtern	49
3.2.2 Breitbandige Komponenten im Schallspektrum von Radialverdichtern . .	52
3.3 Modellbasierte Signalanalyse	54
3.3.1 BAYESSche Schätzung der Signalvarianz	54
3.3.2 Orthonormales Signalmodell	57
3.3.3 Verarbeitung des Körperschallsignals	58

4	Experimentelle Untersuchung	61
4.1	Messaufbau	62
4.2	Fluiddynamische Untersuchung	64
4.2.1	Vorbemerkungen	64
4.2.2	Kampagne 1 – V1	66
4.2.3	Kampagne 1 – V2	68
4.2.4	Verschiebung der realen Pumpgrenze	71
4.3	Körperschallanalyse	73
4.3.1	Vorbemerkungen	73
4.3.2	Kampagne 1	75
4.3.3	Kampagne 2	82
4.3.4	Kampagne 3	83
4.4	Erweiterung des Verdichtermodells	85
4.4.1	Abhängigkeit der Varianz vom Pumpgrenzabstand	85
4.4.2	Geschätzte Varianz als Messgleichung für das Verdichtermodell	88
5	Regelung	91
5.1	Stand der Forschung	92
5.2	Grundlagen	94
5.2.1	Dynamische Systeme	94
5.2.2	Stabilitätsbegriffe	96
5.2.3	Relativer Grad, Normalform und Nulldynamik nichtlinearer Systeme	99
5.2.4	Folgeregelung nichtlinearer Systeme durch Ausgangsnachführung	103
5.3	Modellbasierte MIN/MAX-Ablöseregelung	109
5.3.1	Problembeschreibung	109
5.3.2	Umschaltungen in der MIN/MAX-Ablöseregelung	112
5.3.3	Generierung der Solltrajektorien	116
5.3.4	Stabilität der MIN/MAX-Ablöseregelung	117
5.3.5	Entwurf einer MIN/MAX-Ablöseregelung	121
5.4	Verdichterregelung	124
5.4.1	Vorbemerkungen	124
5.4.2	Entwurf einer MIN/MAX-Ablöseregelung für einen Radialverdichter	126
5.4.3	Simulation	128
6	Zusammenfassung und Ausblick	133
	Literaturverzeichnis	135
A	Modellparameter des Verdichtermodells	149
B	Systemanalyse des Verdichtermodells	155
C	Inversion des Verdichtermodells	157
D	Parametrierung der Simulation	161

Abbildungsverzeichnis

1.1	Schematische Darstellung des Rotors eines Radialverdichters und der Teilchenbewegung durch den Rotor.	2
1.2	Aerodynamische Instabilitäten in Verdichtersystemen.	3
1.3	Auslöser aerodynamischer Instabilitäten. [38]	4
1.4	Wirkung verschiedener Arten der Systemmanipulation auf die Charakteristik eines Turboverdichters nach HELVOIRT [88].	6
1.5	Segmentierung des Verdichterkennfeldes in einen sicheren und einen unsicheren Bereich durch experimentelle Ermittlung der Pumpgrenze.	7
1.6	Schematische Sicht auf das Verdichtersystem nach GREITZER.	13
1.7	Schematische Sicht auf das Verdichtersystem nach MOORE und GREITZER.	14
2.1	Schema und Koordinatensystem des Verdichtersystems mit den Drücken p_i , den Geschwindigkeiten c_i und den Dichten ρ_i an den Punkten s_i entlang der Stromlinie. Die Umfangsrichtung wird über den Winkel θ dargestellt.	20
2.2	Modellierung des Verdichterkennfeldes $Y_V(c_2, r_{GV})$	25
2.3	Ermittlung des Arbeitspunktes in Abhängigkeit von der Leitgitterstellung $r_{GV,akt}$ und der eintrittsseitigen Geschwindigkeit $c_{2,akt}$	26
2.4	Definition der Kennlinie von Initialstörungen $u_A(c_2, \cdot)$ (schwarz) im Vergleich zur Verdichterkennlinie $Y_V(c_2, \cdot)$	28
2.5	Bifurkationsanalyse des Modells (2.50) für den Fall $x_3 \equiv 0$	32
2.6	Bifurkationsdiagramme für die Modelle mit und ohne Initialstörung.	33
2.7	Mittlere Mantelfläche \mathcal{M} und zugehörige Beschreibungsgrößen: Koordinaten des krummlinigen Koordinatensystems α und β , Basisvektoren e_i sowie Ortsvektoren r_Q und r_P auf die Punkte $Q \in \mathcal{M}$ und $P \in \mathcal{M}$	37
2.8	Verschiebungsfeld der radialen Bewegung.	39
3.1	Klassifikation aerodynamischer Geräusche durch stationäre und instationäre Schaufelkräfte nach NEISE und MICHEL [137].	49
3.2	Algorithmischer Ablauf für die Verarbeitung des Körperschallsignals zur Varianzschätzung der breitbandigen Gehäuseanregung.	60
4.1	Messstellenübersicht für Verdichter V1 anhand einer verfahrenstechnischen Darstellung.	63
4.2	Stabiler Kennfeldbereich von V1 und V2.	64
4.3	Veränderung der Proportionalfaktoren von Gleichung (2.46a) und (2.46b) in Abhängigkeit vom Druckverhältnis.	65
4.4	Vergleich von Messung und Simulation für Szenario 1-1.	66
4.5	Vergleich von Messung und Simulation für Szenario 1-2.	66

4.6	Vergleich von Messung und Simulation für Szenario 1-3.	67
4.7	Vergleich von Messung und Simulation für Szenario 1-4.	68
4.8	Vergleich von Messung und Simulation für Szenario 1-5.	69
4.9	Vergleich von Messung und Simulation für Szenario 1-6.	70
4.10	Verschiebung zwischen realer und theoretischer Pumpgrenze.	72
4.11	Normiertes Amplitudenspektrum von V1 mit niedriger Last bei 120s.	74
4.12	Geschätzte normierte Varianz bei V1 mit niedriger Last. Darstellung ohne Glättung (grau) und nach Glättung über Mittelwertfilter mit Länge 5,0 s (schwarz).	74
4.13	Klassische Merkmale für Szenario 1-1.	75
4.14	Klassische Merkmale für Szenario 1-2.	76
4.15	Klassische Merkmale für Szenario 1-3.	76
4.16	Geglättete normierte Varianz für Szenario 1-1.	77
4.17	Geglättete normierte Varianz für Szenario 1-2.	77
4.18	Geglättete normierte Varianz für Szenario 1-3.	77
4.19	Klassische Merkmale für Szenario 1-4.	78
4.20	Klassische Merkmale für Szenario 1-5.	78
4.21	Klassische Merkmale für Szenario 1-6.	78
4.22	Geglättete normierte Varianz für Szenario 1-4.	79
4.23	Geglättete normierte Varianz für Szenario 1-5.	79
4.24	Geglättete normierte Varianz für Szenario 1-6.	79
4.25	Geglättete normierte Varianz für Szenario 1-7.	80
4.26	Geglättete normierte Varianz für Szenario 1-8.	81
4.27	Geglättete normierte Varianz für Szenario 2-1.	82
4.28	Geglättete normierte Varianz für Szenario 2-2.	82
4.29	Geglättete normierte Varianz für Szenario 2-3.	83
4.30	Geglättete normierte Varianz für Szenario 3-1 (grau) und 3-2 (schwarz).	84
4.31	Trend der stationären Werte der geglätteten normierten Varianz durch segmentweise Approximation für die Szenarien 1-1 und 1-4.	85
4.32	Trend der stationären Werte der geglätteten normierten Varianz durch segmentweise Approximation für die Szenarien 1-2 und 1-5.	85
4.33	Trend der stationären Werte der geglätteten normierten Varianz durch segmentweise Approximation für die Szenarien 1-3 und 1-6.	86
4.34	Trend der stationären Werte der geglätteten normierten Varianz durch segmentweise Approximation für Szenario 1-7 und 1-8.	87
4.35	Trend der stationären Werte der geglätteten normierten Varianz durch segmentweise Approximation für Szenario 2-2 und 2-3.	87
4.36	Varianzkennfelder für Kampagne 1.	89
5.1	Begrenzung einer Zustandsgröße durch eine MIN- und MAX-Betriebsgrenze.	109
5.2	Allgemeine Struktur einer MIN/MAX-Ablöseregelung für ein MIMO-System.	110
5.3	Wechsel der Zentrumsmannigfaltigkeit durch Ablösung zweier Regelgesetze in einem SISO-System.	113
5.4	Beispiel für die verwendeten Konventionen der Ablösung und Begrenzung für ein SISO-System mit einer Hauptregelung und einer Begrenzungsregelung.	115
5.5	Generierung einer Sollwerttrampe auf Basis der MIN/MAX-Ablöseregelung.	116

5.6	Verfahrenstechnisches Bild des geregelten Prozesses, inklusive ergänztem PGV. .	124
5.7	Struktur der MIN/MAX-Ablöseregulung für den untersuchten Verdichter V1.	125
5.8	Simulationsergebnisse von Szenario 1.	129
5.9	Simulationsergebnisse von Szenario 2.	130
5.10	Simulationsergebnisse von Szenario 3.	132

Tabellenverzeichnis

1.1	Modellbasierte Entwurfsmethoden zur aktiven Unterdrückung.	9
4.1	Kennwerte der untersuchten einstufigen Luftverdichter.	62
4.2	Übersicht der Szenarien. Die Nummer des Szenarios setzt sich aus der Kam- pagne und dem Lauf gemäß <i>Kampagne-Lauf</i> zusammen. Die Körperschall- messung wurde an den mit (*) gekennzeichneten Verdichtern durchgeführt.	63
4.3	Abweichung der realen zur theoretischen Pumpgrenze bezogen auf die Menge der theoretischen Pumpgrenze.	71
4.4	Parameter der Vorverarbeitung für die Schritte Dezimation und Entfaltung. . . .	73
4.5	Bestimmtheitsmaße R^2 und \bar{R}^2 der segmentweisen Approximation.	88
5.1	Überblick über die Regler für Verdichter V1.	126
5.2	Definition der Messgleichungen und Sollgrößen für den Reglerentwurf.	127
A.1	Parameter für die Kennlinienbereiche von V1.	150
A.2	Parameter für die Kennlinienbereiche von V2.	151
A.3	Sonstige Modellparameter für V1.	152
A.4	Sonstige Modellparameter für V2.	152
A.5	Parameter der Varianzkennfelder für V1 und V2.	153
D.1	Initialwerte und Pumpgrenzregelventil (PGV)-Parameter für die Simulationen aus Abschnitt 5.4.3.	161

Abkürzungsverzeichnis

BPF	Blattfolgefrequenz
CCV	Close-Coupled Valve
CFD	Computational Fluid Dynamics
DFT	diskrete FOURIER-Transformation
FEM	Finite-Elemente-Methode
FIR	Filter mit endlicher Impulsantwort
FSI	Fluid-Struktur-Interaktion
KNN	künstliches neuronales Netzwerk
LZI	linear und zeitinvariant
MG3	MOORE-GREITZER-Modell dritter Ordnung
MIMO	System mit mehreren Eingangs- und mehreren Ausgangsgrößen
MPC	Modellprädiktive Regelung
PDGL	System partieller Differentialgleichungen
PG	Pumpgrenze
PGA	Pumpgrenzabstand
PGV	Pumpgrenzregelventil
PI	Proportional-Integral
RSI	Rotor-Stator-Interaktion
SISO	System mit einer Eingangs- und einer Ausgangsgröße
STFT	Kurzzeit-FOURIER-Transformation
TWE	Traveling Wave Energy

Symbolverzeichnis

Lateinische Kleinbuchstaben

Symbol	Einheit	Beschreibung
a		Stellsignaldifferenz Koeffizient, allgemein Index der Schaltzeitpunkte
b		Koeffizient, allgemein Basisfunktion
c	m/s	Geschwindigkeit
d		Koeffizient, allgemein Störgrößenvariable eines Zustandsraummodells
e		Vektor der Regelabweichungen Einheitsvektor Eigenvektor
f	Hz N/m ²	Frequenz Kraft, spezifisch Vektorfeld, allgemein
g		Vektorfeld, allgemein
h	J/kg m m	Enthalpie, spezifisch Hub Höhe Vektor der Messgleichung eines Zustandsraummodells Filterkoeffizient
i		Zählvariable, allgemein
j		Zählvariable, allgemein
k		Faktor, allgemein Zählvariable, allgemein
l		Zählvariable, allgemein
m		Zählvariable, allgemein
\dot{m}	kg/s	Massenstrom
n	m	Normalen-Koordinate im zylindrischen Koordinatensystem Zählvariable, allgemein
p	Pa	Druck Dichtefunktion Vektor der Regelgesetze
q		Vektor der Führungs- und Störgrößenfunktionen
r		Verhältnis, allgemein Ortsvektor

		Relativer Grad
s	m	Weg
	m	Verschiebungsvektor (Aus Schlag gegenüber Ruhelage) Vektorfeld für Exosystem
t	s	Zeit
u	J/kg	Innere Energie, spezifisch
		Eingangsvektor eines Zustandsraummodells
		Verschiebungsfeld einer dünnen und gekrümmten Struktur
v		Kombinierte Zustandsvariable eines Zustandsraummodells
w	J/kg	Technische Arbeit, spezifisch
		Weißes Rauschen
x	m	Führungsgrößenvariable eines Zustandsraummodells
		Axial-Koordinate im zylindrischen Koordinatensystem Zustandsvariable eines Zustandsraummodells
y		Ausgangsvektor eines Zustandsraummodells
		Ausgangsgröße, allgemein
z	m	Koordinate, allgemein
		Zustandsvariable eines Zustandsraummodells in Normalform
		Variable der z-Transformation

Lateinische Großbuchstaben

Symbol	Einheit	Beschreibung
A	m^2	Fläche Amplitude, allgemein Systemmatrix eines linearen Zustandsraummodells Obere Schranke
\mathcal{A}		Nullstellenmenge der Stellsignaldifferenz
B		Amplitude, allgemein
		Eingangsvektor eines linearen Zustandsraummodells Obere Schranke
\mathcal{C}		Menge der stetig differenzierbaren Funktionen
D		Matrix, Dämpfungsmatrix
		Definitionsmenge für Störgrößenvariable d
E		Matrix, Einheitsmatrix
		Erwartungswert
\mathcal{E}		Nullstellenmenge der Regelabweichung
F	N	Kraft
G		Vektor der Reglerverstärkungen
\mathcal{G}		Offene Teilmenge (Gebiet), allgemein
H		Filterfunktion (Impulsantwort)
		Orthonormale Modellfunktion
		Matrix
I		Schaltgesetz
J		JACOBI-Matrix
K		Faktor, allgemein

		Steifigkeitsmatrix
		Anzahl der Regler einer Ablöseregung
L	m	Länge
		Modellmatrix
		Lie-Ableitung
M	Nm	Drehmoment
		Massenmatrix
		Anzahl harmonischer Modellfunktionen
\mathcal{M}		Mittlere Mantelfläche
		Zentrums Mannigfaltigkeit
N		Länge eines Datenblocks
		Schaufelanzahl
\mathbb{N}		Menge der natürlichen Zahlen
P	W	Leistung
		Element einer Menge
Q		Quadratsumme
		Element einer Menge
R	m	Radius
R^2		Bestimmtheitsmaß
R_S	J/kg/K	Gaskonstante, spezifisch
\mathcal{R}		Residuum, allgemein
\mathbb{R}		Menge der reellen Zahlen
S		Systemmatrix eines linearisierten Exosystems
\mathcal{S}		Rückstellmenge
T	s	Zeit, Periode
	K	Temperatur
		Tangentialraum
		Transformationsvektor
U		Offene Teilmenge (Umgebung), allgemein
V	m ³	Volumen
		Definitionsmenge für kombinierte Zustandsvariable v
W		Definitionsmenge für Führungsgrößenvariable w
X		Definitionsmenge für Zustandsvariable x
Y		Kennfeldfunktion, allgemein
\mathbb{Z}		Menge der ganzen Zahlen

Griechische Kleinbuchstaben

Symbol	Einheit	Beschreibung
α	m	Koordinate im gekrümmten Koordinatensystem
		Limesmenge des Flusses ϕ
		Positive Konstante, allgemein
β	m	Koordinate im gekrümmten Koordinatensystem
		Positive Konstante, allgemein
γ		Vektor der Biegewinkel
		Interne Dynamik eines Zustandsraummodells

δ		KRONECKER-Delta Obere Schranke
ϵ		Obere Schranke
ζ		Externe Dynamik eines Zustandsraummodells
η		Zustandsvariable der internen Dynamik γ
θ		Tangential-Koordinate im zylindrischen Koordinatensystem Winkel Realisierung des Zufallsvektors Θ Abbildung zwischen Unterräumen
κ	kg/m ²	Elastizitätskonstante Isentropenexponent
λ	kg/s/m ²	Dämpfungskonstante Eigenwert
μ		Bifurkationsparameter Mittelwert
ν	Hz	Gedämpfte Eigenfrequenz
ξ		Zustandsvariable der externen Dynamik ζ
ρ	kg/m ³	Dichte
σ		Standardabweichung Schaltsignal
σ^2		Varianz
ς		Geplantes Schaltsignal
τ	s	Zeitkonstante, Haltezeit, Zeit Proportionalitätskonstante
ϕ		Fluss eines dynamischen Systems
χ		Abbildung der Zentrumsmanifoldigkeit \mathcal{M}
ψ		Realisierung des Zufallsvektors Ψ
ω	1/s	Kreisfrequenz, Eigenfrequenz Limesmenge des Flusses ϕ

Griechische Großbuchstaben

Symbol	Einheit	Beschreibung
Γ		Gamma-Funktion
Δ		Differenz, allgemein
Θ		Indexmenge (Indizes aller Schaltzeitpunkte) Zufallsvektor
Λ		Norm der Orthogonalitätsrelation
Π		Druckverhältnis
Σ		Schaltsequenz
Ψ		Auslassfunktion Zufallsvektor
Ω		Zeitabhängige Ansatzfunktion für Gehäuseverschiebung Indexmenge (Indizes aller Regelgesetze)

1 Einführung

Dieses Kapitel beschreibt den Forschungsgegenstand dieser Arbeit und beginnt mit Abschnitt 1.1, einer einleitenden Darstellung radialer Turboverdichter. Aufgrund der großen Bedeutung von Radialverdichtern in der heutigen Industrie haben sich einige Forschungsgebiete herausgebildet. Im Rahmen dieser Arbeit werden vor allem drei Aspekte der aktuellen Forschung betrachtet. Deren Darstellung erfolgt in Abschnitt 1.2 und umfasst die Untersuchung aerodynamischer Instabilitäten in der Strömung von Turboverdichtern sowie die Modellierung und Manipulation des Systemverhaltens. Hierbei wird die vorliegende Arbeit in die genannten Forschungsaspekte eingeordnet. Aufbauend auf dem Stand der Forschung werden in Abschnitt 1.3 die Ziele und Beiträge dieser Arbeit dargelegt. Das einführende Kapitel schließt mit einer Übersicht zur Gliederung dieser Arbeit in Abschnitt 1.4.

1.1 Technologischer Hintergrund – Radiale Turboverdichter

Für den Ablauf zahlreicher technologischer Prozesse sind Gase in definierten Fördermengen, Temperaturen und Drücken notwendig. Industriell erforderliche Abnahmemengen werden dabei von Turboverdichtern kontinuierlich bereitgestellt. Praktische Einsatzgebiete liegen in der Petrochemie, der Metallurgie, der Erdgasförderung sowie in Raffinerien, in Wasser- und Klärwerken und als zentrales Organ in Druckluftnetzen. Verdichter stellen daher eine prozesskritische Komponente in vielen Industriezweigen dar. Als integrierte Komponente sind Verdichter aber auch ein Bestandteil von Flugzeug- und Helikoptertriebwerken sowie von Turboladern.

Als Turboverdichter werden Strömungsarbeitsmaschinen bezeichnet, die ein Gas auf ein Druckverhältnis $\geq 1,3$ komprimieren [21]. Sie zeichnen sich durch eine rotierende Arbeitsweise und die damit verbundene kontinuierliche Förderung und Verdichtung eines Gases aus. Es werden zwei grundlegende Typen unterschieden: der axiale und der radiale Turboverdichter. In dieser Arbeit werden ausschließlich Radialverdichter betrachtet. Durch die zusätzliche radiale Umlenkung der Strömung (siehe Abbildung 1.1) können Radialverdichter höhere Drücke als Axialverdichter erzeugen. Der sich auf einer Welle drehende Rotor überträgt hierbei einen Impuls in die Strömung.

Turboverdichter besitzen einen eingeschränkten stabilen Betriebsbereich. Die aus Prozesssicht wichtigste Betriebsgrenze wird durch die Pumpgrenze (PG) markiert und beschränkt den Verdichterbetrieb auf eine Mindestmenge. Ein Unterschreiten der Pumpgrenze führt zu einem aerodynamisch instabilen Betrieb, dem sogenannten Pumpen. Neben hohen mechanischen und thermischen Belastungen kann das Pumpen eine Deformation und ein Anstreifen der Rotorschaukeln sowie die Zerstörung der Lager verursachen. Ein Turboverdichter darf daher ausschließlich im aerodynamisch stabilen Betriebsbereich arbeiten. Dies gilt nicht nur für den normalen Betrieb, sondern auch für An- und Abfahrvorgänge [23]. Hinsichtlich des versorgten technologischen Prozesses können sich ebenfalls signifikante Störungen ergeben. Fällt der Verdichter aus, muss in der Regel auch der dazugehörige technologische Prozess unterbrochen werden. Daher werden zur Sicherung der aerodynamischen Stabilität unter variierenden Prozessbedingungen spezialisierte Regelungsverfahren eingesetzt.

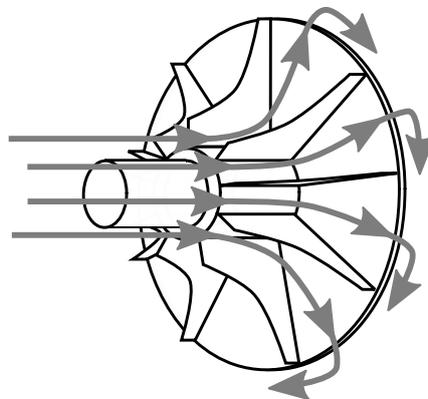


Abbildung 1.1. Schematische Darstellung des Rotors eines Radialverdichters und der Teilchenbewegung durch den Rotor.

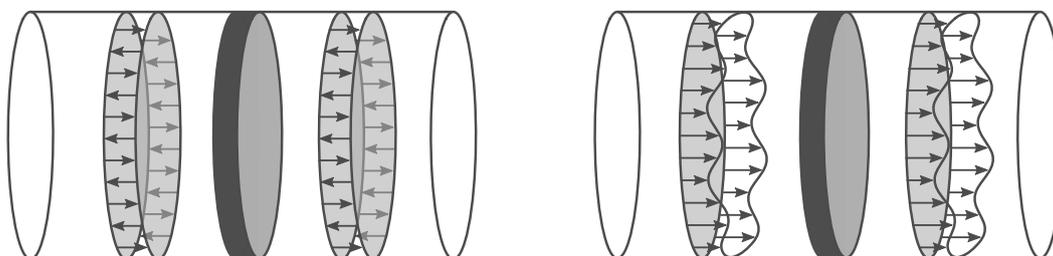
1.2 Stand der Forschung

1.2.1 Aerodynamische Instabilitäten in Turboverdichtern

Heute werden zwei Arten von ausgeprägten aerodynamischen Instabilitäten in Turboverdichtern unterschieden: das Pumpen und die rotierende Abrissströmung. Beide Arten verursachen einen Wirkungsgradverlust sowie eine starke mechanische und thermische Belastung und können so zu Beschädigungen des Verdichters oder angeschlossener Strukturen führen. Während des Verdichterbetriebs auftretende aerodynamische Instabilitäten werden deshalb als unerwünschte Ereignisse betrachtet.

Das Pumpen bezeichnet einen achsensymmetrisch instabilen Strömungszustand in Verdichtersystemen und zeichnet sich durch die kontinuierliche Oszillation von Druck und Fördermenge aus. Ein Pumpzyklus beginnt dabei mit dem Verlassen des stabilen Kennfeldbereichs durch Unterschreiten der Pumpgrenze. Die Strömung reißt zuerst lokal im Ringraum des Verdichters ab. Die entstehende Störung weitet sich schnell auf den gesamten Rotorquerschnitt aus und führt zu einer Reduzierung der Fördermenge. Anschließend erfolgt ein Druckabfall und eine Erhöhung der Fördermenge bis in den stabilen Kennfeldbereich hinein. Hier stabilisiert sich die Verdichterströmung kurzzeitig, bis der Eintritt in den nächsten Pumpzyklus durch wiederholtes Unterschreiten der Pumpgrenze stattfindet. Dies wird von charakteristischen Geräuschen begleitet. Üblicherweise wird das Pumpen als ebene Welle beschrieben, die sich entlang der axialen Achse des Verdichters ausbreitet; siehe Abbildung 1.2a. Darüber hinaus erhält sich der Pumpzustand selbst aufrecht, bis eine Gegenmaßnahme eingeleitet oder der Energietransfer vom Rotor zum Gas unterbrochen wird. Einer gängigen Klassifikation zufolge kann zwischen klassischem, schwachem und tiefem Pumpen sowie einer Mischform aus Pumpen und rotierender Abrissströmung unterschieden werden [99, 52]. Aufgrund der Strömungsumkehr wird das tiefe Pumpen als die folgenschwerste Form bezeichnet.

Die rotierende Abrissströmung erzeugt zwar eine umfangsgerichtete Asymmetrie der Strömung in der Größenordnung eines Schaufelkanals, dennoch handelt es sich um einen achsensymmetrisch stabilen Strömungszustand; siehe Abbildung 1.2b. Der grundlegende Entstehungsmechanismus geht auf EMMONS ET AL. [43] zurück. GREITZER beschreibt den Vorgang wie folgt [75]: Im Bereich kritischer Anströmung reißt die Strömung nur von einer oder wenigen Schaufeln



(a) Pumpen als ebene Welle.

(b) Rotierende Abrissströmung als in Umfangsrichtung laufende asymmetrische Strömung.

Abbildung 1.2. Aerodynamische Instabilitäten in Verdichtersystemen.

ab. In der Folge verblockt der betroffene Kanal teilweise oder vollständig. Dadurch wird die Strömung auf die Nachbarkanäle umgelenkt. Schließlich wird einer der beiden Nachbarkanäle aerodynamisch überlastet, während der zweite einer stabilisierenden Anströmung ausgesetzt wird. Das Ergebnis dieser Entwicklung ist eine Relativbewegung der Störzelle zum Rotor. Die Störzellen bewegen sich mit konstanter Frequenz zwischen 10% und 90% der Rotordrehfrequenz [88] in derselben Drehrichtung wie der Rotor. Dabei können einzelne oder mehrere Störzellen über einen Teil der Schaufelhöhe oder über die gesamte Schaufelhöhe auftreten [75]. So konnten zum Beispiel DAY und FREEMAN mehrere Störzellen an einem Axialverdichter bei geringen Drehzahlen experimentell nachweisen. Unter bestimmten Bedingungen vereinten sich die Störzellen zu einer einzigen stark ausgeprägten Störung. Ferner zeigte SPAKOVSKY, dass die Störzellen auch entgegen der Rotordrehrichtung rotieren können [160]. Die rotierende Abrissströmung kann eine Hysterese des Systemverhaltens erzeugen; die Strömung legt sich in solchen Fällen erst bei größeren Fördermengen im Vergleich zum Abrisspunkt wieder an [75]. Im Weiteren ist allgemein bekannt, dass die rotierende Abrissströmung in industriellen Radialverdichtern eine untergeordnete Rolle spielt. Aufgrund ihrer Konstruktion verursachen moderate aerodynamische Instabilitäten keine übermäßige mechanische Beanspruchung.

Dem Pumpen und der rotierenden Abrissströmung gehen Vorläufer einer Strömungsablösung voraus. Als Auslöser sind Modalwellen und Spikes anerkannt [31]; siehe Abbildung 1.3. Die Modalwellentheorie besagt, dass sich bei Annähern an die Pumpgrenze eine langwellige harmonische Asymmetrie entlang des Rotorumfangs etabliert [38]. Die Amplituden der Modalwellen sind hierbei ein Maß für die Asymmetrie der Strömung. Modalwellen rotieren mit einer nahezu konstanten Frequenz unterhalb der Rotordrehfrequenz in derselben Drehrichtung wie der Rotor [56, 128]. Im stabilen Bereich werden die Störungen zwar stark gedämpft, im pumpgrenznahen Bereich lässt die Dämpfung jedoch nach. Auf diese Weise verliert die Strömung zunehmend ihren rotationssymmetrischen Charakter. MCDOUGALL ET AL. [128] konnten die von MOORE und GREITZER [132, 133] theoretisch vorausgesagten Modalwellen erstmals an einem Verdichter mit geringer Rotorgeschwindigkeit experimentell bestätigen. Den Nachweis an einem schnelllaufenden Verdichter erbrachten GARNIER ET AL. [56]. Ein Spike hingegen ist eine scharf abgegrenzte Störung, welche die Strömung eines Schaufelkanals durch Wirbelbildung beeinflusst und sowohl in Axial- als auch in Radialverdichtern auftritt [142]. Eine Untersuchung von PULLAN ET AL. [142] zeigt, dass die Spikeentstehung in Axialverdichtern mit und ohne Rotorabdeckung sowie in Radialverdichtern mit beschaufeltem Diffusor durch einen ähnlichen Mechanismus verursacht wird. Demnach findet eine Strömungsablösung auf der Eintrittsseite



(a) Über den Umfang des Rotors abgetragene Modalwelle. (b) Spike in einem Schaufelkanal des Rotors.

Abbildung 1.3. Auslöser aerodynamischer Instabilitäten. [38]

der Beschauelung statt. Der dadurch entstehende Wirbel verblockt den Schaufelkanal und lenkt die Strömung auf die Nachbarkanäle um, wo wiederum eine Strömungsablösung erfolgt. Die Wirbelbildung geht mit dem spiketypischen Anstieg und Abfall des statischen Drucks einher [142]. Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass Modalwellen überwiegend in langsam laufenden Verdichtern auftreten, während die Auslösung durch Spikes in hochbelasteten Verdichtern dominiert [172]. Eine Pauschalierung dieser Aussage sollte trotzdem vermieden werden, da die Entstehungstypen im selben Verdichtersystem koexistieren können [48].

Verschiedene Faktoren beeinflussen die aerodynamische Stabilität der Strömung. Ein maßgeblicher Faktor ist die Größe des Spalts zwischen den Rotorspitzen und dem Gehäuse bei nicht abgedeckten Rotoren und der dadurch verursachten Sekundärströmung. Mit steigender Spaltgröße sinken der Wirkungsgrad und der Stabilitätsgrad [97]. Auch die Art der Sekundärströmung hat Einfluss auf die Pumpgrenzlage. Beispielsweise verursacht eine rotierende asymmetrische Sekundärströmung bei Axialverdichtern eine Verschiebung der Pumpgrenze in Richtung steigender Fördermenge [63]. Die Spaltgröße bei nicht abgedeckten Rotoren hat auch bei Radialverdichtern einen starken Einfluss auf die Pumpgrenzlage. Ein größerer Spalt führt auch hier zur Verstärkung von Störungen und Sekundärströmungen sowie dem Abfallen des Wirkungsgrades und wiederum einer Verschiebung der Pumpgrenze in Richtung steigender Fördermenge [148]. Insbesondere die Konstruktion der Schaufeln, des Rotors und des unbeschauelten Zwischenraums beeinflusst die aerodynamische Stabilität. Beispielsweise identifizierten EVERITT und SPAKOVSKY [48] die Wirbelentstehung in der Nähe der Diffusorabdeckung als wichtigen Faktor. Hierbei tritt eine Strömungsablösung auf der Eintrittsseite der Diffusorbeschauelung auf und verursacht Wirbel im unbeschauelten Zwischenraum. Dadurch wird der Diffusor blockiert und schließlich eine aerodynamische Instabilität ausgelöst. Einen ähnlichen Effekt beobachteten WERNET ET AL. [178] in einem schnelllaufenden Radialverdichter mit beschaueltem Diffusor. Die aerodynamische Überlastung erfolgte ebenfalls durch eine Blockierung des Diffusors. Bei genügender Einschnürung des Diffusors kann ein Spike entstehen und den Pumpzyklus auslösen. Neben der Konstruktion des Verdichters verursachen auch Einlaufstörungen einen destabilisierenden Effekt. Mit erhöhter Einlaufstörung verschiebt sich die Pumpgrenze in Richtung steigender Fördermengen [75, 146]. Eine Diskussion maßgeblicher Einflussfaktoren auf das Pumpen bei Radialverdichtern erfolgte durch ELDER und GILL [42]. Diese umfassen demnach den Anströmwinkel der Beschauelung von Rotor und Diffusor, die Nutzung eines beschauelten oder unbeschauelten Diffusors, die Bauweise des Diffusors und des Spiralgehäuses sowie den unbeschauelten Zwischenraum zwischen Rotor und Diffusor. Insbesondere ein unbeschauelter Diffusor wirkt destabilisierend in einem Radialverdichter [52]. Trotz zahlreicher Untersuchungsergebnisse ist der Entstehungsprozess aerodynamischer Instabilitäten noch nicht vollständig verstanden.

Im Rahmen dieser Arbeit wird keine direkte Untersuchung aerodynamischer Instabilitäten vorgenommen, da die hierfür notwendige Messtechnik an den zu untersuchenden Radialverdichtern nicht bereitgestellt werden konnte. Vielmehr erfolgten die Messungen unter Einsatz industriell üblicher Messtechnik. Für die Interpretation des aerodynamisch instabilen Systemverhaltens werden anschließend die bisher aus der Forschung bekannten Mechanismen herangezogen, sofern sie sich über die Datenauswertung zuordnen lassen. Es wird erwartet, dass das aerodynamisch instabile Verhalten durch das Auftreten von Pumpzuständen bestimmt wird.

1.2.2 Manipulation des Systemverhaltens

Für die Manipulation des stabilen und des instabilen Betriebsverhaltens von Verdichtersystemen existieren verschiedene Herangehensweisen. HELVOIRT fasst die Arten der Systemmanipulation wie folgt zusammen [88] (siehe Abbildung 1.4):

- Vermeidung des instabilen Verhaltens,
- Detektion von Instabilitäten,
- Verbesserung der aerodynamischen Auslegung und Konstruktion sowie
- aktive Unterdrückung aerodynamischer Instabilitäten.

Die in der heutigen industriellen Praxis eingesetzten Regelungsverfahren betrachten den aerodynamisch instabilen Betriebsbereich zuzüglich eines Sicherheitsabstandes als unerlaubtes Gebiet (siehe Punkt 1 in Abbildung 1.4). Diese Art der Regelung wird als „konventionelle Pumpgrenzregelung“ bezeichnet. Um auch im Fall schneller Arbeitspunktbewegungen ein sicherndes Verhalten auslösen zu können, muss der Sicherheitsabstand ausreichend groß gewählt werden. Gebräuchliche Werte für diesen Zuschlag liegen zwischen 5% und 20% bezogen auf die Fördermenge an der Pumpgrenze. Die Segmentierung in einen erlaubten und in einen unerlaubten Betriebsbereich erfolgt über die Definition einer Referenzlinie (siehe Abbildung 1.5). Der Abstand des aktuellen Zustands zu dieser Referenzlinie wird als Pumpgrenzabstand (PGA) bezeichnet. Der PGA dient als Sollwert für die Pumpgrenzregelung. Dieser Ansatz geht auf die Arbeiten von BUZZARD [29], HOLLOWAY und PAVLOV [93] sowie STAROSELSKY und LADIN [163] zurück. Insbesondere die Arbeit der letztgenannten Autoren entspricht weitgehend dem heutigen industriellen Standard. Die Messung der Referenzlinie findet in der Inbetriebnahmephase in Form eines Polynoms erster oder zweiter Ordnung oder eines Polygonzugs statt. Während des Betriebs genügen Sensoren geringer Dynamik zur Bestimmung des aktuellen PGAs. Aufgrund der Robustheit und der einfachen Umsetzbarkeit hat sich dieses Verfahren bewährt. Dies bestätigt auch die Patentliteratur; als Beispiele [18, 19, 20, 152]. Alterung, Einlaufstörungen und Änderungen in der Prozessführung verursachen jedoch eine signifikante Verschiebung der realen Pumpgrenze. Dabei kann der letztgenannte Aspekt durch Transformation in ein invariantes Kennfeld weitestgehend kompensiert werden. Dies

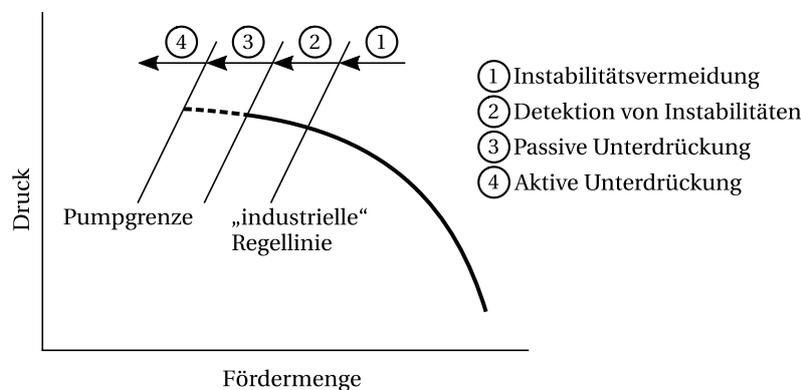


Abbildung 1.4. Wirkung verschiedener Arten der Systemmanipulation auf die Charakteristik eines Turboverdichters nach HELVOIRT [88].

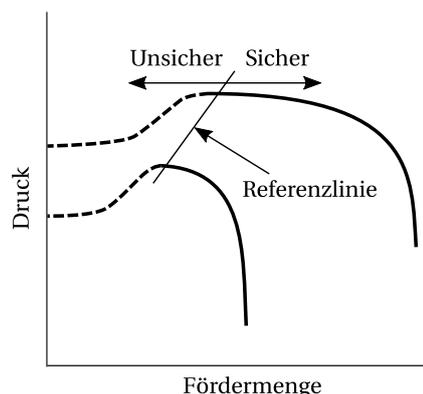


Abbildung 1.5. Segmentierung des Verdichterkennfeldes in einen sicheren und einen unsicheren Bereich durch experimentelle Ermittlung der Pumpengrenze.

gilt beispielsweise für das Überschreiten der in der Auslegungsphase erwarteten eintrittsseitigen Temperaturen oder für eine Variation der Gaszusammensetzung. Für die Kompensation existieren unterschiedliche Ansätze, zum Beispiel die normierte Verdichtungsarbeit in Abhängigkeit des reduzierten und quadrierten Ansaugvolumenstroms [130] oder die Förderhöhe in Abhängigkeit des Volumenstroms [17]. Kennfeldverschiebungen aufgrund mechanischer oder destabilisierender aerodynamischer Einflüsse wie Einlaufstörungen können jedoch nicht ausgeglichen werden. Das liegt an der fehlenden Möglichkeit, diese Effekte im industriellen Umfeld zu messen. In der Folge erfährt die reale Pumpengrenze eine Verschiebung in Bezug auf die Referenzlinie. Es kann daher im Laufe der Zeit zur Reduzierung des Wirkungsgrades und zu häufigem aerodynamisch instabilen Betrieb kommen.

Ein Nachteil der Instabilitätsvermeidung ist die starke Einschränkung des Arbeitsbereichs. Dies führt im Allgemeinen zu einer Verschlechterung des Wirkungsgrades. Um die potenziell gefährlichen Betriebsbereiche nahe der Pumpengrenze freigeben zu können, besteht die Möglichkeit der Detektion aerodynamischer Instabilitäten; siehe Punkt 2 in Abbildung 1.4. In der industriellen Praxis wird dazu der sogenannte Pumpschutz eingesetzt. Dieses Verfahren detektiert einen Pumpzustand durch die Auswertung des aktuellen Gradienten des Enddrucks, der Fördermenge oder des Motorstromes. Wird innerhalb eines vorgegebenen Zeitfensters ein negativer und positiver Grenzwert verletzt, gilt der aktuelle Zustand als gefährlich [40]. Mit dem Verfahren des Pumpschutzes können jedoch nur ausgeprägte Pumpstöße detektiert werden. Die Erkennung schwächerer aerodynamischer Instabilitäten kann damit nicht erreicht werden. Insbesondere die in der Forschung diskutierte Früherkennung instabiler Betriebszustände eröffnet die Möglichkeit zum pumpgrenznahen Betrieb des Turboverdichters [179]. In Abschnitt 3.1 werden einige dieser Methoden dargestellt.

Mithilfe passiver Verfahren der Systemmanipulation kann eine Erweiterung des Betriebsbereichs erreicht werden; siehe Punkt 3 in Abbildung 1.4. Diese Methoden umfassen zum Beispiel bewegliche Wände des austrittsseitigen Volumens [79], wassergefüllte Zusatztanks auf der Austrittsseite [5] und Lufteinblasung auf der Eintrittsseite der Verdichter [37]. Unter Laborbedingungen konnten diese Methoden die Dämpfung gegenüber aerodynamischen Instabilitäten erhöhen. Sie sind jedoch für die industrielle Praxis entweder zu ineffizient oder nur begrenzt realisierbar. Diese Untersuchungen sollten daher als grundlegende Forschung

in Bezug auf die Manipulation des Systemverhaltens verstanden werden. Die Verbesserung der aerodynamischen Auslegung und der Konstruktion stellt eine weitere Art der passiven Systemmanipulation dar. Neben den Leistungsdaten des Verdichters erlaubt dies eine günstige Beeinflussung des Entstehungsprozesses aerodynamischer Instabilitäten [35].

Die aktive Unterdrückung aerodynamischer Instabilitäten durch eine Regelung (Punkt 4 in Abbildung 1.4) wurde erstmals 1986 von EPSTEIN ET AL. [44] vorgestellt. Diese Verfahren erweitern die Primärcharakteristik und erlauben damit eine Stabilisierung von instabilen Arbeitspunkten des offenen Regelkreises [99]. Gemäß EPSTEIN ET AL. werden Störungen mithilfe eines geeigneten Aktors bereits in der Entstehungsphase gedämpft. Für die ersten Untersuchungen wurden unkonventionelle Aktoren verwendet. Beispielsweise nutzten WILLIAMS und HUANG [183] einen Lautsprecher im austrittsseitigen Volumen eines Turboladers. Neben einer gesteigerten Dämpfung von Störungen konnten WILLIAMS und HUANG einen stabilisierenden Effekt auf das tiefe Pumpen erzielen. Einen ähnlichen Ansatz verfolgten GYSLING ET AL. [79] mit einer an einem Feder-Dämpfer-System aufgehängten Gasspeicherwand. Sie erreichten in bestimmten Lastfällen des untersuchten Turboladers eine Verschiebung der Pumpgrenze um etwa 25 % in Richtung sinkender Fördermengen. Ein vergleichbares Ergebnis erzielten PINSLEY ET AL. [140] mit einem hochdynamischen Auslassventil. Weitere experimentelle Untersuchungen führten ARNULFI ET AL. [4] an einem vierstufigen industriellen Radialverdichter durch. ARNULFI ET AL. stellten fest, dass sowohl die passive als auch die aktive Stabilisierung prinzipiell nutzbar ist und diese eine Dämpfung aerodynamischer Instabilitäten bewirken. Die passive Stabilisierung wird als weniger störungsanfällig und weniger wartungsintensiv beschrieben. Aktive Verfahren hingegen erlauben ein Unterdrücken des Pumpens über einen größeren Betriebsbereich. Eine weitere Methode nutzt die geregelte Einblasung von Gas vor dem Rotor. WILLIAMS ET AL. [182] erreichten auf diese Weise eine Dämpfung initialer Störungen im Diffusor eines Radialverdichters. Einen einstufigen Axialverdichter untersuchten WEIGL ET AL. [177]. Als Aktor wurde eine umfangsverteilte Anordnung geregelter Gasinjektoren zur Dämpfung der modalen Dynamik eingesetzt. Dadurch lies sich der stabile Arbeitsbereich um 11,0 % bei transsonischem Betrieb und 3,5 % bei supersonischem Betrieb erweitern. Bei supersonischem Betrieb musste neben der identifizierten Grundschiwingung und der ersten Harmonischen auch die ebene Welle (Pumpen) ausgeregelt werden, um eine signifikante Erweiterung zu erreichen. Bisher untersuchte modellbasierte Methoden sind in Tabelle 1.1 mit den jeweils zugehörigen Referenzen festgehalten.

Die Regelungsverfahren zur aktiven Unterdrückung erlauben die Freigabe eines maximalen Betriebsbereiches und können zu dessen stabiler Erweiterung genutzt werden. Gleichwohl erfordern sie hochdynamische Sensorik und Aktorik und reagieren sensitiv auf Messrauschen [4, 91]. Die Wahl geeigneter Instrumente stellt damit einen wichtigen Aspekt des Praxistransfers dar. Im Bereich der Sensorik nutzen die meisten Verfahren eine Messung der eintrittsseitigen Strömungsgeschwindigkeit und des Enddrucks. Einige weitergehende Regelungsansätze benötigen die schwer zu messende Zeitableitung der eintrittsseitigen Strömungsgeschwindigkeit [47] oder die Amplituden umfangsgerichteter Modalwellen [9, 47, 120]. Neben den bereits genannten Aktoren wurden auch das Close-Coupled Valve (CCV) [71, 68, 69, 156], zwei Umblaseventile unterschiedlicher Nennweite und Bandbreite [16] und der elektrische Antrieb des Verdichters [70, 72] genutzt. Einen systematischen Überblick bezüglich der Wahl des passenden Sensor-Aktor-Paares lieferten SIMON ET AL. [157]. Insbesondere die Messung des Massenstroms

Methoden	Referenz
Lyapunov/Backstepping	
Greitzer	[109]
Greitzer mit Drehmomentbilanz	[70, 72, 121]
Moore-Greitzer (1. Harmonische)	[69, 82, 110]
Moore-Greitzer (n Harmonische)	[8, 116, 117]
Adaptiv/High-Gain	
Greitzer	[14, 15]
Moore-Greitzer (1. Harmonische)	[59]
Bifurkationsbasiert	
Greitzer	[78]
Moore-Greitzer (1. Harmonische)	[77, 105, 120]
Optimalkriterium	
Greitzer mit Drehmomentbilanz	[22]
Moore-Greitzer (1. Harmonische)	[81, 86]
Eigenes Modell (semi-linear)	[83, 84]
Eigenes Modell (linear)	[161, 176]
Fuzzy	
Greitzer mit Drehmomentbilanz	[2]
Sliding-Mode	
Moore-Greitzer (1. Harmonische)	[10]
Eigenes Modell (Neuronales Netz)	[185]
Schaltende Regler	
Greitzer mit Drehmomentbilanz	[118]
Linearisierung durch Ausgangsrückführung	
Greitzer	[7]

Tabelle 1.1. Modellbasierte Entwurfsmethoden zur aktiven Unterdrückung.

in Kombination mit einem CCV oder Gasinjektoren wird für die Verdichterstabilisierung als effektiv bezeichnet. Weitere Analysen zur Thematik der Sensor-Aktor-Wahl sind zum Beispiel bei DE WAL ET AL. [174] zu finden. Auch DE WAL ET AL. charakterisieren die Kombination von Massenstrommessung und CCV als aussichtsreich. Ein wichtiger Faktor in Bezug auf die Aktorik ist deren begrenzte Stellenergie und Stellgeschwindigkeit [91, 157, 174]. Diese Einschränkungen sind zwingend für eine reale Anwendung zu beachten. Jedoch führen alle durchgeführten Untersuchungen zu dem Schluss, dass Verfahren der aktiven Unterdrückung aufgrund der geforderten Dynamik und Genauigkeit der Sensor-Aktor-Paare höhere Kosten bei Anschaffung, Installation, Kalibrierung und Wartung verursachen.

Die meisten in der Literatur vorgestellten Regelungsverfahren für Turboverdichter stabilisieren einen festen Arbeitspunkt, zum Beispiel das lokale Maximum der Primärcharakteristik. Die Stabilisierung dieses Arbeitspunktes ermöglicht theoretisch den sicheren Betrieb an der Pumpgrenze. Die darüber hinausgehenden aktiven Verfahren gestatten auch die Stabilisierung instabiler Arbeitspunkte des offenen Regelkreises jenseits der Pumpgrenze. Bei diesen

Verfahren bestehen jedoch wesentliche Nachteile – insbesondere für Verdichtersysteme im industriellen Umfeld. Zum Ersten erfordert der Betrieb aktiver Regelungen präzise und hochdynamische Sensorik und Aktorik. Zum Zweiten wird der Arbeitsbereich in unmittelbarer Nähe zur Pumpgrenze absichtlich freigegeben. Dies steht jedoch den Sicherheits- und Verfügbarkeitsanforderungen der Anlagenbetreiber entgegen. Aktive Regelungsverfahren kommen aus diesem Grund in der Industrie nicht zum Einsatz. Im industriellen Umfeld wird daher die Instabilitätsvermeidung als primäre Sicherheitsfunktion in Bezug auf das Verhindern des Pumpens verwendet. Diese Methode besteht in der Erzeugung von Zustandsbegrenzungen und beschränkt damit den Betrieb auf einen erlaubten Arbeitsbereich. Ein dritter Nachteil der bisher in der Forschung betrachteten Verfahren bezieht sich auf die fehlende Folgeregulierung des Verdichtersystems auf zeitveränderliche Sollwerte. Nur wenige Verfahren sind explizit unter diesem Aspekt entwickelt oder angewendet worden. Aus Sicht der praktischen Nutzbarkeit kommt der Folgeregulierung jedoch eine große Bedeutung zu, beispielsweise bei einem rampenförmigen Arbeitspunktwechsel.

Den genannten Aspekten wurde in den letzten Jahren eine steigende Aufmerksamkeit in der Forschung zuteil. Das hauptsächlich verwendete Verfahren ist die Modellprädiktive Regelung (MPC). Eine ausführliche Untersuchung geht auf VAN ESSEN zurück [46]. Hierbei wurde die MPC auf eine im Labor installierte Gasturbine angewendet. Dabei kamen lineare MPC und nichtlineare MPC (nichtlinear für Beobachtung und Prädiktion, sukzessive Linearisierung für Optimierung) zum Einsatz. Die MPC berücksichtigt vorausschauend Störgrößen, betriebsbedingte Begrenzungen und zeitveränderliche Führungsgrößen. Es wurden ausführliche Analysen von Parametern wie dem Prädiktionshorizont sowie den Wichtungsfaktoren des Optimierungsproblems vorgenommen. Im Ergebnis verletzte die MPC nur selten die definierten Begrenzungen. Allgemein zeigte sich eine gute Regelgüte für die Laborinstallation. Ferner wurde die MPC einer Verdichterstation mit zwei parallelen Radialverdichtern untersucht. Mehrere Simulationen mit Mengen- und Pumpgrenzregelung sowie einer übergeordneten Lastverteilungsregelung beider Verdichter bewiesen die Fähigkeit zur Folgeregulierung und Störunterdrückung bei gleichzeitiger Berücksichtigung von Betriebsgrenzen. Insgesamt wird die MPC als ein zweckmäßiger Ansatz für die Regelung industrieller Turbomaschinen bezeichnet. Eine weitere Analyse der Verdichterstation mit zwei parallelen Verdichtern durch eine lineare MPC zeigt [158]. Den Einsatz einer nichtlinearen MPC demonstrieren JOHANSEN [101] und GRANCHAROVA ET AL. [65]. Beide Beiträge wenden eine Eingrößen-MPC auf ein einfaches Verdichtermodell an. Die Pumpgrenzregelung erfolgte über ein CCV. Insgesamt konnte die Regelung das tiefe Pumpen erfolgreich unterdrücken. Eine lineare Mehrgrößen-MPC für Radialverdichter entwickelten CORTINOVIS ET AL. [32]. Als Stellgrößen wurden die Stellung des Umblaseventils und die Drehzahl gewählt. Das Verfahren konnte harte Echtzeitanforderungen für industrielle Pumpgrenzregelungen einhalten. Aufgrund der Mehrgrößenregelung zeigte der Vergleich mit einer industriell üblichen Pumpgrenzregelung eine schnellere Entlastung des Verdichters nach dem Einbringen einer Störung. Eine weitere Mehrgrößenregelung wurde von BENTALEB ET AL. [12] vorgestellt. Hierbei erfolgt der Entwurf einer MPC für einen Radialverdichter mit einem Gasturbinenantrieb. Die Enddruckregelung wird durch Verstellung der Drehzahl und des Vorleitgitters realisiert. Im Vergleich zu einem nur auf das Vorleitgitter wirkenden Proportional-Integral (PI)-Regler konnte die MPC die durch Verbraucherventile verursachten Störungen schneller ausgleichen. Für die Beiträge von CORTINOVIS ET AL. und BENTALEB ET

AL. ergibt sich die Verbesserung gegenüber der Eingrößen-PI-Regelung allerdings eher durch die gleichzeitige Nutzung zweier Freiheitsgrade bei der MPC. Der Vergleich zeigt folglich, dass eine Mehrgrößenregelung Vorteile bei einem Verdichtersystem bietet. Es wird jedoch nicht geklärt, welchen konkreten Vorteil die Umsetzung in Form einer MPC liefert. Diese Klärung erfolgte durch BUDINIS und THORNHILL [28]. Die entwickelte lineare MPC implementierte eine Enddruck- und Pumpgrenzregelung durch die Verstellung des Umblaseventils und der Drehzahl. Der Vergleich mit einer Mehrgrößen-PI-Regelung demonstriert die bessere Stör- unterdrückung einer MPC aufgrund ihrer prädiktiven Eigenschaften. Beispielsweise reagiert die klassische PI-Regelung erst nach dem Überschreiten der Regellinie durch das Öffnen des Umblaseventils. Das verursachte eine stärkere Abweichung im Enddruck. Die MPC reagierte vorausschauend auf diese Störung. Daher blieb das Umblaseventil in den Untersuchungen nach dem Auslösen der Störung geschlossen. Dennoch konnte das Überschreiten der Regellinie vermieden werden. Insbesondere die gleichzeitige Gewährleistung der Folgeregelung und Pumpvermeidung beschreiben die Autoren als herausfordernd. Beispielsweise müssen bei unterschiedlichen Störungen auch unterschiedlich parametrisierte Optimierungsprobleme genutzt werden. TORRISI ET AL. vergleichen mehrere MPC-Verfahren (ein lineares und zwei nichtlineare Verfahren) an einer Pumpgrenzregelung auf Basis der Stellung des Umblaseventils und der Drehzahl [167]. Im Allgemeinen erzeugten die nichtlinearen MPC-Verfahren weniger Schwingungen im System. Eines der eingesetzten nichtlinearen Verfahren konnte dabei harte Echtzeitbedingungen für industrielle Pumpgrenzregelungen erfüllen. Eine Besonderheit dieser Untersuchung bestand in der Wahl des Arbeitspunktes. Alle Regler waren in der Lage, instabile Arbeitspunkte des offenen Regelkreises jenseits der Pumpgrenze zu stabilisieren. Damit handelt es sich um eine aktive MPC. In einem weiteren Beitrag vertieften TORRISI ET AL. die Analyse der Pumpgrenzregelung auf Basis von MPC-Verfahren [166]. Hierbei wurden die MPC-Verfahren auf einer speicherprogrammierbaren Steuerung implementiert und erreichten Zykluszeiten von etwa 1 ms. Die Echtzeitfähigkeit für industrielle Anwendungen ist damit gegeben. Anschließend erfolgte der Vergleich mit den klassischen PI-Reglern. Die beiden nichtlinearen Verfahren konnten ein Überschreiten der Pumpgrenze in allen untersuchten Fällen vermeiden und unterdrückten zusätzlich Schwingungen im System.

Weitere Forschungsbeiträge nutzen lineares Gain-Scheduling [151] und einen flachheitsbasierten Ansatz [138] zur Regelung eines Gasturbinensystems. Beide Verfahren verwenden das Einlassventil, das Umblaseventil und die Leitgitterstellung für die Enddruck- und Pumpgrenzregelung. Gegenüber einer PI-Regelung erzeugte der Gain-Scheduling-Regler geringere Schwingungen und erreichte eine bessere Regelgüte. Mit dem flachheitsbasierten Ansatz wurde eine Schnellentlastung der Gasturbine analysiert [138]. Der flachheitsbasierte Regler konnte das System effektiv vor einer unzulässigen Annäherung an die Pumpgrenze schützen. Gleichzeitig erreichte der Regler eine hohe Regelgüte in Bezug auf den eingestellten Sollwert des Enddrucks. Eine nichtlineare Vorsteuerung für die Regelung eines Radialgebläses nutzen RITSCHER ET AL. [147]. In diesem Beitrag wurde ein PI-Regler mit einem durch Vorsteuerung unterstützten PI-Regler verglichen. Die Versuche wurden an einem Radialgebläse mittels Rapid Control Prototyping vorgenommen. Als Regelgrößen wurden die Stellung des Ausblaseventils und die Drehzahl verwendet. Durch die Vorsteuerung konnten Arbeitspunktwechsel durch Sollwert- und Störgrößenänderung etwa doppelt so schnell ausgeglichen werden. Auch eine unzulässige Annäherung an die Pumpgrenze konnte verhindert werden.

Aufgrund der Nachteile hinsichtlich des Praxistransfers von Forschungsergebnissen wird in dieser Arbeit keine aktive Regelungsmethode genutzt. Gleiches gilt für die passive Unterdrückung aerodynamischer Instabilitäten. Die Instabilitätsvermeidung hingegen stellt ein industriell akzeptiertes Verfahren dar und zeigt mit der Anwendung von MPC-Verfahren auch eine stärkere Fokussierung durch die Forschung. Darüber hinaus erlauben MPC-Verfahren die Folgeregelung zeitveränderlicher Trajektorien unter gleichzeitiger Berücksichtigung von Betriebsgrenzen. Die Leistungsfähigkeit von MPC-Verfahren hängt jedoch stark von den Wichtungsfaktoren des Optimierungsproblems, dem Prädiktionshorizont und der gewählten Schrittweite ab [46]. Der Stabilitätsnachweis ist aufgrund des endlichen Prädiktionshorizonts und den im Optimierungsproblem etablierten Begrenzungen schwierig. Darüber hinaus erzeugen lineare MPC-Verfahren im Allgemeinen nur suboptimale Lösungen. Bei einer starken Abweichung vom Linearisierungspunkt kann die Prädiktion fehlschlagen. Die Literatur zeigt, dass nichtlineare Verfahren eine höhere Regelgüte sowie geringere Schwingungen erzeugen und daher bevorzugt angewendet werden sollten. Ein genereller Nachteil besteht im Gesamtentwurf einer MPC. Das Optimierungsproblem wird für das gewählte Modell unter Randbedingungen formuliert. Dabei verändern zusätzlich etablierte Begrenzungen oder veränderte Sollwerte das Optimierungsproblem. Grundsätzlich besteht also die Möglichkeit, dass zusätzliche oder geänderte Randbedingungen zu einem Versagen des Lösungsalgorithmus führen. Daher wird in dieser Arbeit eine Zerlegung des Gesamtentwurfs in den modularen Entwurf mehrerer Teilregler vorgeschlagen. Die Einzelregler werden anschließend in einer MIN/MAX-Ablöseregelung organisiert. Dieses Vorgehen reduziert die Komplexität des Entwurfs und erlaubt eine nachträgliche Erweiterung der Regelungsstruktur ohne Anpassung bereits bestehender Teilregler.

1.2.3 Modellierung von Verdichtersystemen

Die Beschreibung des Strömungsverhaltens von Gasen erfolgt über die Kontinuitäts-, Impuls- und Energiegleichung – den sogenannten fluiddynamischen Grundgleichungen – zusammen mit den Gesetzen der Thermodynamik. Die Impulsgleichung wird dabei auch als NAVIER-STOKES-Gleichung bezeichnet. Im Fall der Strömung durch einen Radialverdichter führt dies zur Modellierung von instationären und reibungsbehafteten dreidimensionalen Strömungsvorgängen. Die fluiddynamischen Grundgleichungen bilden ein nichtlineares System partieller Differentialgleichungen (PDGL) zweiter Ordnung. Da eine analytische Lösung im Allgemeinen nicht verfügbar ist, setzt man numerische Näherungsverfahren ein. Heute werden diese Verfahren unter dem Begriff Computational Fluid Dynamics (CFD) zusammenfasst. Eine naheliegende Möglichkeit der Berechnung ist dabei die Diskretisierung der Bewegungsgleichungen auf ausreichend feinen Gittern. Wenn technisch relevante Strömungen betrachtet werden, steigt der Berechnungsaufwand jedoch sehr stark an. Aus diesem Grund berechnet man die interessierenden Effekte nicht direkt. Vielmehr erfolgt eine Diskretisierung über größere Bereiche, die sogenannten Kontrollräume. In der Folge steigen die Anforderungen an die numerische Lösung. Dies umfasst insbesondere den Nachweis der Konvergenz der Lösung. Um ferner die in technischen Strömungen vorhandene Turbulenz zu berücksichtigen, erfolgt in den fluiddynamischen Grundgleichungen eine Mittlung über die Kontrollräume. Um nun die auf molekularem Maßstab erzeugten Turbulenzverluste auf dem vergleichsweise groben Gitter zu approximieren, setzt man Turbulenzmodelle ein [51, 139].

Eine Alternative zu den ausschließlich durch CFD lösbaren Gleichungen stellen Modelle geringer Ordnung dar – insbesondere für den Regelungstechniker. Diese Modelle erfassen das aus regelungstechnischer Sicht relevante Systemverhalten. Dabei wird die Strömung topologisch nicht als Kontinuum betrachtet oder so stark vereinfacht, dass eine schnelle numerische Lösung möglich ist. Diese Modelle erlauben daher nur eine phänomenologische Sicht auf bestimmte Eigenschaften der Strömung. Einen häufig genutzten Ansatz entwickelte GREITZER für Axialverdichter [74, 73]. Dieser Ansatz basiert auf den Arbeiten von EMMONS ET AL. [43] und ignoriert die räumliche Abhängigkeit der Strömung. Auf diese Weise führt die Modellbildung zu gewöhnlichen Differentialgleichungen, bei denen die Beschreibung der Systemdynamik auf der Nutzung des Punktmassmodells beruht. Das GREITZER-Modell kann nur das achsensymmetrische Verhalten erfassen (Pumpen) und erlaubt das Studium des Systemverhaltens mit einem Minimum an Freiheitsgraden, darunter der fundamentale B -Parameter. Die Systemstruktur nach GREITZER zeigt Abbildung 1.6. Das Gas wird durch den Verdichter angesaugt und strömt nach dem Verdichten in einen Gasspeicher, in dem ein Stauzustand herrscht. Aufgrund der Druckdifferenz zwischen Gasspeicher und Austritt strömt das Gas über eine Drossel aus.

Der phänomenologische Ansatz komprimiert den Verdichter topologisch zu einer Scheibe (grafisch illustriert in Abbildung 1.2), die aber bezüglich des Druckaufbaus dieselbe Auswirkung auf die Strömung hat. Eine Zusammenfassung der Modelle, die den phänomenologischen Ansatz nutzen, findet sich in [181]. Untersuchungen an diesen Modellen zeigen, dass das Verdichterverhalten wesentlich von den umgebenden Komponenten abhängt. Dies gilt insbesondere für den stromabwärts gelegenen Gasspeicher, in dem die kinetische Energie der Strömung den Wert Null annimmt (Stauzustand). Das Volumen des Gasspeichers bestimmt maßgeblich, ob das gegebene System eine rotierende Abrissströmung oder Pumpen ausbildet. Im Falle des GREITZER-Modells geht das Volumen des Gasspeichers in den B -Parameter ein. In industriellen Anlagen folgt jedoch stromabwärts des Verdichters meist kein geschwindigkeitsfreier Bereich, sondern eine Rohrkonstruktion. SPARKES zeigte, dass das instabile Verhalten eines Radialverdichters dann signifikant von der akustischen Impedanz des Rohrsystems abhängt [162]. Dieses Ergebnis wurde durch HELVOIRT und DE JAGER bestätigt [89]. Weitere Anwendungen des klassischen GREITZER-Modells findet man unter anderem bei HANSEN ET AL. [85]. Die Autoren konnten die Validität des GREITZER-Ansatzes auch für radiale Verdichtertypen von der Größenordnung eines Turboladers nachweisen.

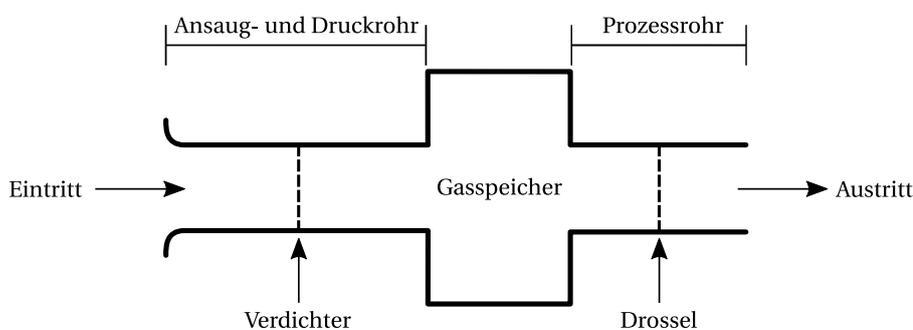


Abbildung 1.6. Schematische Sicht auf das Verdichtersystem nach GREITZER.

Da das GREITZER-Modell die räumliche und zeitliche Entwicklung von Modalwellen nicht beschreiben kann, entwickelten MOORE und GREITZER einen weiteren Ansatz für mehrstufige Axialverdichter [132, 133]. Das heute nach ihnen benannte MOORE-GREITZER-Modell dritter Ordnung (MG3) kombiniert das Modell von GREITZER [73, 74] und das Modell von MOORE [131]. Für die Herleitung vereinfachten MOORE und GREITZER die fluiddynamischen Grundgleichungen, erhielten jedoch für das Ansaugrohr den Charakter eines Kontinuums in Form einer Potentialströmung aufrecht. Da das MG3-Modell Grenzschichtströmungen und Reibung unberücksichtigt lässt, ist der Aspekt des Strömungsabrisses ebenfalls phänomenologisch formuliert. Neben der axialen Strömungsrichtung erfassen MOORE und GREITZER zusätzlich die senkrecht darauf stehende Umfangsrichtung. Durch die Superposition eines zeitabhängigen Mittelwertes und einer umfangsgerichteten harmonischen Störung lässt sich mit dem MG3-Modell auch die Ausbildung von Modalwellen beschreiben. Die Störungen im Strömungsfeld können hierbei ohne Anregung über die stromabwärts oder stromaufwärts gelegenen Grenzen anwachsen. Die Entwicklung von Modalwellen und die voll ausgebildete Abrissströmung werden als selbsterregter Zustand eines Systems mit nichtlinearer Dämpfung erklärt. Dies entspricht grundlegend dem Verhalten des VAN-DER-POL-Systems [131]. Der Übergang zwischen stabilem und instabilem Zustand erfolgt aus Sicht der nichtlinearen Dynamik als Bifurkation und führt zu einem stabilen Grenzzyklus. Aufgrund seiner niedrigen Ordnung und der Fähigkeit zur Abbildung der maßgeblichen aerodynamischen Instabilitäten eignet sich das MG3-Modell für regelungstechnische Untersuchungen. Daher wurden nach dessen Veröffentlichung im Jahre 1986 zahlreiche modellgestützte Regelungsansätze vorgestellt. Die Systemstruktur des MOORE-GREITZER-Modells zeigt Abbildung 1.7.

Neben den abgeschlossenen Modellen wird auch die generische Modellbildung in der Forschung diskutiert. Einen reibungsbehafteten und kompressiblen Ansatz wendeten BADMUS ET AL. [6] erfolgreich auf einen mehrstufigen axialen Verdichter an. Auch komplexere Modelle wie der Ansatz nach SPAKOVSKY [159, 160] verfolgen die Generik als zentralen Aspekt der Modellbildung und berücksichtigen weitere physikalische Effekte, zum Beispiel den Slip an den Schaufelspitzen. Der modulare Charakter des SPAKOVSKY-Ansatzes ist besonders ausgeprägt. Indem die EULER-Gleichungen angepasst, für spezielle Strömungsformen gelöst und in eine Matrixnotation überführt werden, ergibt ein „Hintereinanderschalten“ der einzelnen Matrizen (stellvertretend für das Anordnen einzelner Systemkomponenten) das Gesamtmo-

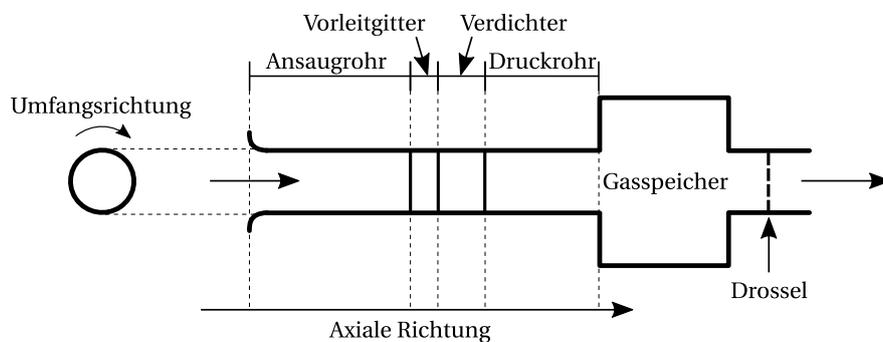


Abbildung 1.7. Schematische Sicht auf das Verdichtersystem nach MOORE und GREITZER.

dell des Systems. Einen generischen Ansatz auf Basis eines n-Tor-Netzwerkes präsentierten SCHULZE ET AL. [150]. Dieses Konzept ermöglicht insbesondere die Echtzeitsimulation von Verdichtersystemen und lässt sich beispielsweise im Rahmen einer virtuellen Inbetriebnahme einsetzen.

Da in Systemen mit Radialverdichtern das Pumpen als Ausprägung aerodynamischer Stabilitäten dominiert, basieren entsprechende Modelle meist auf dem Ansatz von GREITZER. Hierzu zählen das Modell von FINK ET AL. [52] für Turbolader sowie der Ansatz nach GRAVDAHL und EGELAND [70] für beliebige (einstufige) Radialverdichter. Die Untersuchungen an Radialverdichtern industrieller Größenordnung von ARNULFI ET AL. [4], HELVOIRT [88] und HELVOIRT ET AL. [90] bestätigen die Gültigkeit des Ansatzes nach GREITZER. Aus diesem Grund wird in der vorliegenden Arbeit ebenfalls eine auf dem GREITZER-Ansatz basierende Modellierung des dynamischen Verdichterverhaltens durchgeführt. Um die Verschiebung der realen Pumpgrenze durch aerodynamische Instabilitäten zu beschreiben, wird jedoch auf Elemente des MOORE-GREITZER-Ansatzes zurückgegriffen.

1.3 Ziele und Beiträge der Arbeit

Das erste Ziel besteht in der Entwicklung einer modellbasierten MIN/MAX-Ablöseregelung für einen einstufigen Radialverdichter. Dieses Verfahren erweitert das Konzept der MIN/MAX-Ablöseregelung auf nichtlineare Systeme. Die Regelung umfasst eine Hauptregelung und beliebig viele Begrenzungsregler. Das Ziel der Hauptregelung erstreckt sich auf die Folgeregelung einer vorgegebenen Solltrajektorie bei gleichzeitiger Störunterdrückung. Die Begrenzungsregler sichern das System vor dem ungewollten Über- oder Unterschreiten von Betriebsgrenzen. Der Regelungsentwurf basiert auf dem Prinzip des inneren Modells, wobei zu jedem Einzelregler ein separates inneres Modell gehört. Aufbauend auf der inversionsbasierten Folgeregelung nach ISIDORI kann der Entwurf der Ablöseregelung in den modularen Entwurf der Einzelregler und die Festlegung der MIN/MAX-Schaltgesetze zerlegt werden. Es wird folglich kein Gesamtentwurf benötigt. Eine nachträgliche Erweiterung um zusätzliche Einzelregler – beispielsweise für die Etablierung neuer Solltrajektorien und Begrenzungen – lässt sich ohne Anpassungen der bereits bestehenden Einzelregler erreichen. Gleiches gilt für die Optimierung von Einzelreglern.

Das zweite Ziel besteht in der Entwicklung eines körperschallbasierten Merkmals zur Erkennung des aerodynamischen Verdichtierzustandes. Hierzu werden zwei Beiträge geleistet. Zum einen wird statt den bisher genutzten invasiven Messungen eine nichtinvasive Messung der Gehäusebeschleunigung eingesetzt. Diese Idee wurde bereits in einem 2009 begonnenen Forschungsprojekt der HTWK Leipzig und der AviComp Controls GmbH näher untersucht.¹ Da die tonalen Körperschallanteile keinen einheitlichen Rückschluss auf den aerodynamischen Verdichtierzustand zuließen, wird in dieser Arbeit der breitbandige Anteil untersucht. Zum anderen fokussieren bisherige Untersuchungen den Übergang zwischen stabilem und instabilem Verdichterbetrieb im Sinne einer Detektion aerodynamischer Instabilitäten. Im Rahmen dieser Arbeit wird eine andere Herangehensweise gewählt. Statt der Detektion aerodynamischer Instabilitäten wird der Verdichtierzustand über das gesamte Kennfeld ermittelt. Die zu erkennenden Zustände reichen vom stabilen Betrieb im sicheren Kennfeldbereich bis zum instabilen Betrieb jenseits der Pumpgrenze. Das entwickelte Merkmal wird dann als körperschallbasierter Pumpgrenzregler in die Ablöseregelung einbettet.

Die genannten Beiträge erfordern die Formulierung eines fluiddynamischen und eines strukturdynamischen Modells. Das fluiddynamische Modell berücksichtigt hierbei den Einfluss einer asymmetrischen Störung im Ringraum des Verdichters. Dieses Vorgehen erlaubt es, den Effekt der Verschiebung der realen Pumpgrenze aufgrund von aerodynamischen Störungen empirisch zu beschreiben und stellt eine sinngemäße Erweiterung des MOORE-GREITZER-Modellansatzes auf den stabilen Betriebsbereich dar. Die Bifurkation des Verdichtersmodells von einem stabilen Arbeitspunkt zu einem stabilen Grenzzyklus erfolgt mit dem neuen Modell bereits vor Erreichen des lokalen Maximums der Primärcharakteristik. Das entwickelte strukturdynamische Modell wird genutzt, um die körperschallbasierte Erkennung des aerodynamischen Verdichtierzustandes zu verbessern. Das Gehäuse wird dafür als rotations-symmetrischer Zylinder aufgefasst. Eine derartige Struktur besitzt unendlich viele Eigenfrequenzen, die zu signifikanten Verzerrungen der durch die Verdichterströmung erzeugten Anregung führen. Mit einem Entfaltungsfiler lässt sich das anregende Signal schließlich rekonstruieren.

¹Gefördert durch das BMWi unter den Förderkennzeichen KF2180203AB9 und KF2235701AB9.

1.4 Gliederung der Arbeit

Diese Arbeit gliedert sich in vier inhaltlich aufeinander aufbauende Kapitel. Der Entwurf der modellbasierten Ablöseregulation sowie der Körperschallanalyse erfordert als Ausgangspunkt die mathematische Beschreibung der jeweilig betrachteten Komponente. Im Fall der Ablöseregulation gilt dies für das fluiddynamische Verhalten des Radialverdichtersystems; im Fall der Körperschallanalyse betrifft dies das strukturdynamische Verhalten des Verdichtergehäuses. Beide Modelle werden in Kapitel 2 entwickelt.

Kapitel 3 thematisiert die nichtinvasive Erkennung des Verdichterzustandes durch die Analyse des gemessenen Körperschalls. Dazu erfolgt in Abschnitt 3.1 zunächst die Darstellung der invasiven und der nichtinvasiven Erkennung des Verdichterzustandes anhand des aktuellen Standes der Forschung. Die Entwicklung eines geeigneten Analyseverfahrens für die nichtinvasive Körperschallmessung erfordert die Betrachtung aerodynamischer Geräuschquellen in Radialverdichtern (Abschnitt 3.2). Dies erlaubt die Identifikation von Geräuschquellen, die einen nachvollziehbaren Zusammenhang mit der aerodynamischen Stabilität der Verdichterströmung aufweisen. Das Kapitel schließt in Abschnitt 3.3 mit dem Entwurf des Analyseverfahrens. Das Ergebnis ist ein körperschallbasiertes Merkmal, das zur Ermittlung des aerodynamischen Verdichterzustandes herangezogen wird.

Die Validierung des entwickelten Verdichtermodells sowie des körperschallbasierten Merkmals zur Erkennung des aerodynamischen Verdichterzustandes erfolgt anhand von Daten aus insgesamt drei Messkampagnen an einstufigen Radialverdichtern. Kapitel 4 stellt die entsprechenden Ergebnisse dar, wobei in Abschnitt 4.1 zunächst auf den Messaufbau, die Datenerfassung und die Durchführung der einzelnen Kampagnen eingegangen wird. In Abschnitt 4.2 folgt die Validierung des Verdichtermodells. Neben der ausreichend genauen Abbildung des statischen und des dynamischen Systemverhaltens wird auch die Fähigkeit des Modells zur Beschreibung der realen Pumpgrenzlage eingeschätzt. Abschnitt 4.3 umfasst die Auswertung der Körperschalldaten. Dazu werden mehrere bekannte Merkmale mit dem entwickelten Merkmal verglichen. Das entwickelte Merkmal wird in Abschnitt 4.4 als algebraische Messgleichung des Verdichtermodells eingeführt.

In Kapitel 5 wird die modellbasierte MIN/MAX-Ablöseregulation als Möglichkeit zur Regelung von Radialverdichtern vorgestellt. In Abschnitt 5.1 erfolgt die Darstellung des aktuellen Standes der Forschung in Bezug auf Ablöseregulationen. In Abschnitt 5.2 folgen grundlegende Erläuterungen zur Folgeregelung nichtlinearer Zustandsraummodelle sowie zu verschiedenen Stabilitätsbegriffen. Der Entwurf einer MIN/MAX-Ablöseregulation wird in Abschnitt 5.3 behandelt. Zentrale Aspekte umfassen die Betrachtung des Umschaltverhaltens der Einzelregler, die Ermittlung des zugehörigen diskontinuierlich schaltenden Fehlersystems und die Stabilität der Ablöseregulation. Die konkrete Anwendung der Ablöseregulation auf einen einstufigen Radialverdichter thematisiert Abschnitt 5.4. Darauf aufbauend erfolgt der Entwurf einer Ablöseregulation mittels Angabe der Regelgesetze für die Haupt- und Begrenzungsregler. Zum Zweck der Validierung werden mehrere Simulationen mit dem Verdichtermodell durchgeführt.

2 Systembeschreibung

In diesem Kapitel werden das fluiddynamische Modell eines einstufigen Radialverdichtersystems und das strukturdynamische Modell des Verdichtergehäuses entwickelt. Zunächst erfolgt die fluiddynamische Modellierung in Abschnitt 2.1. Hierfür werden die Komponentenmodelle des freigeschnittenen Verdichtersystems in Abschnitt 2.1.1 angegeben. Anschließend wird auf die Modellierung des Verdichterkennfeldes unter Berücksichtigung einer gestörten Rotorströmung in Abschnitt 2.1.2 eingegangen. Speziell für den stabilen Kennfeldbereich erfolgt in Abschnitt 2.1.3 die Erweiterung des Verdichterkennfeldes um ein empirisches Modell der Initialstörungen. Eine Darstellung des vollständigen Zustandsraummodells sowie eine Bifurkationsanalyse in Abschnitt 2.1.4 zeigen anschließend den Vergleich zwischen dem entwickelten Modell mit Initialstörungen und dem GREITZER- sowie dem MG3-Modell. Damit liegt das fluiddynamische Modell des Verdichtersystems in Zustandsraumbeschreibung vor. Abschnitt 2.2 behandelt die Entwicklung des strukturdynamischen Modells des Verdichtergehäuses. Eine einleitende Betrachtung des Verdichtergehäuses als Wellenleiter beinhaltet Abschnitt 2.2.1. Hierbei werden vereinfachende Annahmen vorgestellt, unter deren Anwendung sich das Gehäuse als dünner Hohlzylinder modellieren lässt. Abschnitt 2.2.2 erläutert die Grundlagen der Modellierung dünner und gekrümmter Strukturen sowie das freie Schwingungsverhalten des dünnen Hohlzylinders. Abschließend wird in Abschnitt 2.2.3 ein Modell für die Beschreibung erzwungener Schwingungen des dünnen Hohlzylinders abgeleitet. Als Ergebnis liegt das Gehäusemodell in Form einer Filterfunktion vor, die den Zusammenhang zwischen anregender Kraft und Gehäuseverschiebung für einen spezifischen Messort beschreibt.

2.1 Modell eines Radialverdichtersystems

Den Ausgangspunkt zur Beschreibung der Strömung durch einen Radialverdichter liefert die Kontinuumsmechanik mit den fluiddynamischen Grundgleichungen. Da für die regelungstechnische Untersuchung ein Modell geringer Ordnung notwendig ist, erfolgt eine Vereinfachung der Grundgleichungen. Dazu wird das Verdichtersystem zunächst entsprechend Abbildung 2.1 freigeschnitten und in die Kontrollräume Ansaugrohr, Rotor, Diffusor, druckseitiger Gasspeicher und Drossel zerlegt. Anschließend wird jeder Kontrollraum separat betrachtet und mathematisch beschrieben. Die Zusammenfassung der einzelnen Komponentenmodelle führt zum Zustandsraummodell des Verdichtersystems.

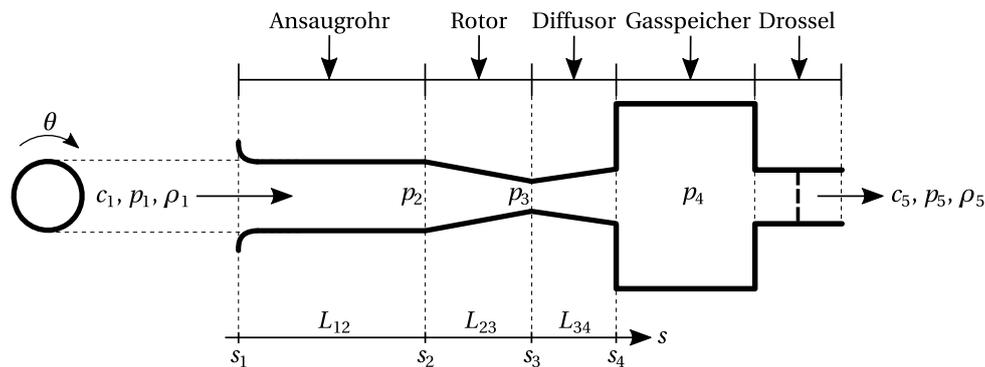


Abbildung 2.1. Schema und Koordinatensystem des Verdichtersystems mit den Drücken p_i , den Geschwindigkeiten c_i und den Dichten ρ_i an den Punkten s_i entlang der Stromlinie. Die Umfangsrichtung wird über den Winkel θ dargestellt.

2.1.1 Komponentenmodelle des Verdichtersystems

Ansaugrohr

Im Ansaugrohr soll die Strömung als reibungsfreie, eindimensionale und inkompressible Fadenströmung ohne Wärmeübergang beschrieben werden. Als Ausgangsgleichung wird daher die integrierte instationäre Bernoulli-Gleichung entlang der Stromlinie von s_1 bis s_2 der Länge L_{12} bei konstanter Querschnittsfläche A_2 betrachtet. Diese Form der Gleichung leitet sich aus dem allgemeinen Impulserhaltungssatz ab. Aufgrund der Inkompressibilität ist bei konstanter durchströmter Querschnittsfläche die Geschwindigkeit im Eintritts- und Austrittsstutzen identisch ($c_1 = c_2$):

$$\frac{1}{\rho} \int_{p_1}^{p_2} dp = - \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial c_2}{\partial t} ds. \quad (2.1)$$

Solange $c_2 \leq 0,3 \text{ Ma}$ ist, führt die Annahme der Inkompressibilität zu einem akzeptablen Fehler. Die Druckänderungsarbeit entspricht damit der Beschleunigung des im Ansaugrohr befindlichen Gases. Nach ausgeführter Integration ergibt sich:

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho_1} = -L_{12} \frac{\partial c_2}{\partial t}. \quad (2.2)$$

Rotor (Radiales Laufrad)

Der Rotor verrichtet Arbeit am System. Dabei herrscht im Rotor ein komplexes Strömungsfeld, das vereinfacht durch einen eindimensionalen und kompressiblen Stromfaden beschrieben werden soll. Zur mathematischen Beschreibung kann der erste Hauptsatz der Thermodynamik für offene und stationär durchströmte Systeme herangezogen werden. Vereinfachend soll hierbei von einer adiabaten Zustandsänderung unter Vernachlässigung des Höhenunterschieds zwischen dem Rotoreintritt bei s_2 und dem Rotoraustritt bei s_3 ausgegangen werden. Aufgrund der adiabaten Zustandsänderung ändert sich die Energie im Kontrollraum nur durch die verrichtete technische Arbeit w_{23} :

$$\Delta h_{23} = w_{23} - \frac{c_3^2 - c_2^2}{2} \quad (2.3)$$

mit der Enthalpiedifferenz Δh_{23} vom Rotoreintritt bei s_2 bis zum Rotoraustritt bei s_3 . Die Berücksichtigung von Übergangsvorgängen erfolgt durch einen additiven Term, der die Abweichung zum stationären Zustand beschreibt. Derartige Ansätze finden sich bei MOORE und GREITZER [132] sowie bei SPAKOVSKY [159] für Lauf- und Leiträder. In der Regel führen diese Ansätze zu einer ausreichenden Übereinstimmung mit den Messdaten:

$$\Delta h_{23} = w_{23} - \frac{c_3^2 - c_2^2}{2} - \int_{s_2}^{s_3} \frac{\partial c}{\partial t} ds. \quad (2.4)$$

Mit der Definition der spezifischen Enthalpie als Summe der spezifischen inneren Energie und der spezifischen Volumenarbeit $h = u + p/\rho$ geht Gleichung (2.4) über in:

$$\frac{p_3}{\rho_3} - \frac{p_2}{\rho_2} = w_{23} - \Delta u_{23} - \frac{c_3^2 - c_2^2}{2} - \int_{s_2}^{s_3} \frac{\partial c}{\partial t} ds. \quad (2.5)$$

Für die weitere Modellbildung ist die Definition einer Ansatzfunktion für die Geschwindigkeit c im radialen Laufrad erforderlich. Um die Wirkung ungleichförmiger instationärer Störungen zu berücksichtigen, wird die Geschwindigkeit im Rotor $c_L(s, \theta, t)$ als Superposition einer umfangsgemittelten Komponente $\bar{c}_L(s, t)$ mit einer umfangsabhängigen Komponente $\tilde{c}_L(s, \theta, t)$ aufgefasst:

$$c_L(s, \theta, t) = \bar{c}_L(s, t) + \tilde{c}_L(s, \theta, t). \quad (2.6)$$

Dieser Ansatz gleicht formal dem Vorgehen von MOORE und GREITZER [132], die den Ansatz jedoch zur Beschreibung von Modalwellen im instabilen Kennfeldbereich des Verdichters nutzten. In dieser Arbeit soll die Wirkung ungleichförmig instationärer Störungen im stabilen Kennfeldbereich betrachtet werden. Dies ermöglicht die Beschreibung der Pumpgrenzverschiebung in Richtung steigender Fördermengen bei realen Radialverdichtern. Der dynamische Term in (2.5) lautet damit:

$$\int_{s_2}^{s_3} \frac{\partial c_L}{\partial t} ds = \int_{s_2}^{s_3} \frac{\partial \bar{c}_L}{\partial t} ds + \int_{s_2}^{s_3} \frac{\partial \tilde{c}_L}{\partial t} ds. \quad (2.7)$$

Für den Ansatz wird vorausgesetzt, dass die Störung beim Eintritt s_2 und beim Austritt s_3 verschwindet. Die Störung bleibt damit auf die Verdichterstufe begrenzt. Im Ansaugrohr und im Diffusor tritt auf diese Weise nur der Umfangsmittelwert \bar{c}_L in Erscheinung. Unter diesen

Voraussetzungen sind $c_2 = c_L(s_2) = \bar{c}_L(s_2)$ und $c_3 = c_L(s_3) = \bar{c}_L(s_3)$. Weiterhin ergibt das Integral über den Umfangsmittelwert bei Annahme einer linearen Änderung des Flächen-Dichte-Verhältnisses $\rho_L(s)A_L(s)/\rho_2A_2$ im Schaufelkanal (vgl. [159]):

$$\int_{s_2}^{s_3} \frac{\partial \bar{c}_L}{\partial t} ds = \frac{\ln(r_L)}{r_L - 1} L_{23} \frac{\partial c_2}{\partial t} = L_{23}^* \frac{\partial c_2}{\partial t}, \quad (2.8)$$

wobei $r_L := \rho_3 A_3 / \rho_2 A_2$. Die effektive Länge des durchströmten Rotors L_{23}^* ist aufgrund der kompressiblen Strömung vom Dichteverhältnis abhängig. Damit folgt das Modell für den Rotor:

$$\frac{p_3}{\rho_3} - \frac{p_2}{\rho_2} = w_{23} - \Delta u_{23} - \frac{c_3^2 - c_2^2}{2} - L_{23}^* \frac{\partial c_2}{\partial t} - \int_{s_2}^{s_3} \frac{\partial \bar{c}_L}{\partial t} ds. \quad (2.9)$$

Diffusor

Im Diffusor werden die einzelnen Gasströme aus den Schaufelkanälen gesammelt und zum Druckstutzen geführt. Der Diffusor kann beschaufelt oder unbeschaufelt ausgeführt sein. Insgesamt herrscht im Diffusor ein komplexes Strömungsfeld. Die Strömung soll vereinfacht durch einen inkompressiblen Stromfaden beschrieben werden, ohne dabei technische Arbeit am System zu verrichten oder Wärme über die Systemgrenzen zu führen:

$$\frac{1}{\rho} \int_{s_3}^{s_4} dp = -\frac{c_4^2 - c_3^2}{2} - \int_{s_3}^{s_4} \frac{\partial c_D}{\partial t} ds. \quad (2.10)$$

Die Wirkung des Diffusors besteht unter anderem in einer Umwandlung des durch den Rotor aufgebauten dynamischen Drucks in statischen Druck. Zusätzlich durch die Wirkung einer gegebenenfalls vorhandenen Beschaufelung wird dies durch einen bis zum Druckstutzen ansteigenden Querschnitt erreicht. Daher ist $A_4 > A_3$ und $c_4 < c_3$ sowie $p_4 > p_3$. Im Fall stationärer Strömung gilt aus der Kontinuitätsgleichung $A_4 c_4 = A_3 c_3$. Daraus kann für eine lineare Änderung des Flächenverhältnisses $A_D(s)/A_3$ bis zum Druckstutzen der dynamische Term in (2.10) bestimmt werden:

$$\int_{s_3}^{s_4} \frac{\partial c_D}{\partial t} ds = \frac{\ln(r_D)}{r_L(r_D - 1)} L_{34} \frac{\partial c_2}{\partial t} = L_{34}^* \frac{\partial c_2}{\partial t} \quad (2.11)$$

wobei $r_D := A_4/A_3$. Die effektive Länge des durchströmten Diffusors L_{34}^* ist aufgrund der Inkompressibilität vom Dichteverhältnis unabhängig. Das Modell des Diffusors lautet damit:

$$\frac{p_4 - p_3}{\rho_4} = -\frac{c_4^2 - c_3^2}{2} - L_{34}^* \frac{\partial c_2}{\partial t}. \quad (2.12)$$

Gasspeicher und Drosselarmatur

Das aus dem Diffusor austretende Gas strömt in den stromabwärts gelegenen Gasspeicher mit dem Volumen V . Für den druckseitigen Gasspeicher wird die Bilanzgleichung der Massenerhaltung genutzt, um Dichte und Druck zu bestimmen. Durch die zuströmende Masse aus dem Verdichter \dot{m}_V und die zum Prozess über die Drossel ausströmende Masse \dot{m}_{PV} variiert die Dichte im Gasspeicher ρ_4 :

$$V \frac{d\rho_4}{dt} = \dot{m}_V - \dot{m}_{PV}. \quad (2.13)$$

Unter Annahme einer isentropen Zustandsänderung des Gaszustandes kann der Gasspeicherdruck p_4 mittels der Isentropengleichung $dp/p - \kappa d\rho/\rho = 0$ bestimmt werden:

$$\frac{dp_4}{dt} = \frac{\kappa p_4}{V \rho_4} (\dot{m}_V - \dot{m}_{pV}). \quad (2.14)$$

Der Massenstrom \dot{m}_{pV} strömt über eine Drossel in den angeschlossenen Prozess. Üblicherweise findet die Berechnung des Massenstroms mittels eines quadratischen Ansatzes statt, beispielsweise bei GRAVDAHL und EGELAND [70]. Dessen Gültigkeit bezieht sich jedoch ausschließlich auf unterkritische und inkompressible Ausströmungen. Da Radialverdichter hohe Druckverhältnisse erreichen können, kann alternativ aus der Energiegleichung für ideale, reibungsfreie und kompressible Gase die BENDEMANNsche Gleichung hergeleitet werden. Dieser Ansatz modelliert das isentrope Ausströmen aus einem Druckbehälter durch eine Düse mit dem Querschnitt A_{pV} und der Auslassfunktion Ψ [155]:

$$\dot{m}_{pV} = A_{pV} \Psi \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \rho_4 p_4}. \quad (2.15)$$

Unter Nutzung der Isentropenbeziehung für den Zustandsübergang im Verdichter sowie der thermodynamischen Zustandsgleichung idealer Gase folgt das Modell für den Gasspeicher mit Drosselarmatur. Darüber hinaus wird die Gleichung um den für die spezifische Armatur gültigen Korrekturfaktor K_{pV} erweitert:

$$\frac{dp_4}{dt} = \frac{\kappa A_2 p_4 \rho_2}{V \rho_4} \left(c_2 - K_{pV} \Psi \frac{A_{pV}}{A_2} \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{\rho_4 p_4}{\rho_2^2}} \right). \quad (2.16)$$

Der Korrekturfaktor K_{pV} berücksichtigt die in realen Strömungen auftretende Reibung sowie die durch die Querschnittsverringerng verursachte Kontraktion [155]. Für Ψ kann die NUSSELT-Auslassfunktion angesetzt werden:

$$\Psi = \sqrt{\left(\frac{p_5}{p_4}\right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{p_5}{p_4}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}}}. \quad (2.17)$$

Die Auslassfunktion gibt bei Erreichen des kritischen Druckverhältnisses:

$$\left. \frac{p_5}{p_4} \right|_{\text{krit.}} = \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (2.18)$$

den maximalen Massendurchsatz vor. Eine Steigerung des Massendurchsatzes durch Anheben des Gasspeicherdrucks p_4 oder Absenken des Ausgangsdrucks p_5 ist dann nicht mehr möglich. Bei der Verstellung der Drosselarmatur wird die Querschnittsfläche A_{pV} verändert. Zur Beschreibung dieser Veränderung wird der relative Hub $h_{pV} := A_{pV}/A_{pV,\max}$ mit der maximalen Querschnittsfläche $A_{pV,\max}$ eingeführt. Bei der Veränderung von A_{pV} erfolgt jedoch keine direkte Verstellung des Hubes. Vielmehr wird die Position r_{pV} in einem Bereich zwischen 0 und 100% verstellt. Dabei ist der Zusammenhang zwischen dem relativen Hub h_{pV} und der Position r_{pV} vom Kennlinientyp der Drossel abhängig. Im Allgemeinen gilt $h_{pV} = Y_{pV}(r_{pV})$ mit $Y_{pV}(0) = A_{pV,\min}$ und $Y_{pV}(1) = A_{pV,\max}$. Unter Berücksichtigung der Auslassfunktion (2.17) und der Drosselkennlinie $Y_{pV}(r_{pV})$ ergibt sich aus Gleichung (2.16) das Modell des Gasspeichers:

$$\frac{dp_4}{dt} = \frac{\kappa A_2 p_4 \rho_2}{V \rho_4} \left[c_2 - k_{pV} Y_{pV}(r_{pV}) \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{\rho_4 p_4}{\rho_2^2} \left[\left(\frac{p_5}{p_4}\right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{p_5}{p_4}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}} \right]} \right] \quad (2.19)$$

mit $k_{pV} = K_{pV} A_{pV, \max} / A_2$ bei unterkritischer Ausströmung. Die Position r_{pV} wird über den Eingang u_{pV} verstellt. Dabei erfolgt der Verstellvorgang mit einer Zeitverzögerung. Das dynamische Verhalten aufgrund von Stelleingriffen muss daher berücksichtigt werden. Unter Annahme eines PT1-Verhaltens lautet die Systemantwort der Drossel auf Stelleingriffe u_{pV} :

$$\frac{dr_{pV}}{dt} = \frac{1}{\tau_{pV}} [u_{pV} - r_{pV}]. \quad (2.20)$$

2.1.2 Modellierung des Verdichterkennfeldes

Gemäß Gleichung (2.6) wird die Strömung im Rotor durch einen Mittelwert \bar{c}_L mit überlagerter Störung \tilde{c}_L beschrieben. Durch den Einfluss von Leitschaufeln sowie dem Umströmen der Laufschaufeln kommt es zur Ausbildung einer umfangsgerichteten Strömungskomponente in jedem Schaufelkanal. Diese Komponente bewegt sich mit der Kreisfrequenz des Rotors ω_R und verteilt sich ungleich über den Umfang. Sie kann jedoch entlang des Umfangs in ihre harmonischen Anteile zerlegt werden. Wird im Weiteren nur die Grundschiwingung beachtet, gilt:

$$\tilde{c}_L = A(s, t) \sin(\omega_R + \theta). \quad (2.21)$$

Die Amplitude $A(s, t)$ beschreibt das zeitliche Wachstum der Störung. Wenn sich $A(s, t)$ durch eine Überlagerung einer weg- und einer zeitabhängigen Ansatzfunktion bilden lässt, kann eine Zerlegung $A(s, t) = A(t)g(s)$ erfolgen. Unter der Annahme einer verschwindenden Störung an den Grenzen s_2 und s_3 gilt dabei $g(s_2) = g(s_3) = 0$. Diese Festlegung ermöglicht die Lösung des verbliebenen Integrals in Gleichung (2.9). Für die Auswertung muss keine weitere A-priori-Information über $g(s)$ vorliegen. Aufgrund der gewählten Vereinfachungen geht $g(s)$ direkt in die Proportionalitätskonstante τ_A ein:

$$\int_{s_2}^{s_3} \frac{\partial \tilde{c}_L}{\partial t} ds = \frac{dA}{dt} \sin(\omega_R + \theta) \int_{s_2}^{s_3} g(s) ds = \tau_A \frac{\partial A}{\partial t} \sin(\omega_R + \theta). \quad (2.22)$$

Die Proportionalitätskonstante τ_A kann nun als freier Parameter zur Anpassung des Modells an die Messergebnisse genutzt werden. Das Modell für die radiale Verdichterstufe (2.9) lässt sich damit wie folgt umformulieren:

$$\frac{p_3}{\rho_3} - \frac{p_2}{\rho_2} = w_{23} - \Delta u_{23} - \frac{c_3^2 - c_2^2}{2} - L_{23}^* \frac{\partial c_2}{\partial t} - \tau_A \frac{\partial A}{\partial t} \sin(\omega_R + \theta). \quad (2.23)$$

Die Zusammenfassung der Gleichungen (2.2), (2.12) und (2.23) für Ansaugrohr, Diffusor und Rotor führt mit der Substitution $\theta^* = \omega_R + \theta$ zu folgender Gleichung:

$$\frac{p_4}{\rho_4} - \frac{p_1}{\rho_1} = w_{23} - \Delta u_{23} - \frac{c_4^2 - c_2^2}{2} - L \frac{\partial c_2}{\partial t} - \tau_A \frac{\partial A}{\partial t} \sin(\theta^*) \quad (2.24)$$

mit der effektiv durchströmten Länge des Verdichters $L = L_{12} + L_{23}^* + L_{34}^*$. Die stationären Terme auf der rechten Seite können als statische Kennlinie des Radialverdichters Y_V interpretiert werden:

$$Y_V := w_{23} - \Delta u_{23} - \frac{c_4^2 - c_2^2}{2}. \quad (2.25)$$

Damit ergibt sich schließlich das Modell für den Radialverdichter unter Berücksichtigung einer gestörten Rotorströmung:

$$\frac{p_4}{\rho_4} - \frac{p_1}{\rho_1} = Y_V - L \frac{\partial c_2}{\partial t} - \tau_A \frac{\partial A}{\partial t} \sin(\theta^*). \quad (2.26)$$

Das Verdichterkennfeld Y_V lässt sich auf Basis mehrerer Kennlinien beschreiben. Für die Messung einer Kennlinie werden am Verdichtersystem sowohl die Drehzahl als auch die Leitgitterstellung und die saugseitigen Bedingungen konstant gehalten. Eine Kennlinie setzt sich aus der Primär-, der Sekundär- und der Tertiärcharakteristik zusammen. Die Primärcharakteristik beschreibt den stabilen Kennlinienbereich und kann direkt gemessen werden. Die Modellierung erfolgt durch eine oder mehrere polynomiale Funktionen zweiten oder dritten Grades. Die Sekundär- und die Tertiärcharakteristik beschreiben den instabilen Kennlinienbereich und können aufgrund des Auftretens aerodynamischer Instabilitäten nicht direkt gemessen werden. Für deren Modellierung hat sich der polynomiale Ansatz dritter Ordnung nach MOORE und GREITZER [132] durchgesetzt.

Das Kennfeld $Y_V(c_2, r_{GV})$ beschreibt den stationären Druckaufbau des Verdichters in Abhängigkeit der eintrittsseitigen Geschwindigkeit c_2 und der Leitgitterstellung r_{GV} ; siehe hierzu Abbildung 2.2a. Die Modellierung erfolgt durch die Interpolation von Isolinien. Die erste Art von Isolinien entspricht der Kennlinie entlang der konstanten Leitgitterstellung r_{GV} . Die zweite Art von Isolinien entspricht den sogenannten β -Linien. Die Grundidee für die Einführung der β -Linien besteht in der Erzeugung eines bijektiven Koordinatensystems [111]. Auf diese Weise kann der Verdichterzustand eindeutig aus der Leitgitterstellung r_{GV} und dem β -Wert ermittelt werden. Bei entsprechender Wahl der β -Linien lässt sich darüber hinaus jeder dieser Isolinien eine physikalische Interpretation zuordnen. Beispielsweise markiert die β_{\max} -Linie entlang der Pumpgrenze den Übergang zwischen aerodynamisch stabilem und aerodynamisch instabilem Betrieb. Die β_{\min} -Linie markiert die Stopfgrenze. Hier erreicht die Verdichterströmung lokal Schallgeschwindigkeit und verhindert auf diese Weise ein weiteres Ansteigen der Fördermenge. Entlang der β -Linien verhält sich der Verdichter also aerodynamisch ähnlich. Der Vorteil dieser Methode besteht in der Erzeugung eines überall differenzierbaren Kennfeldes.

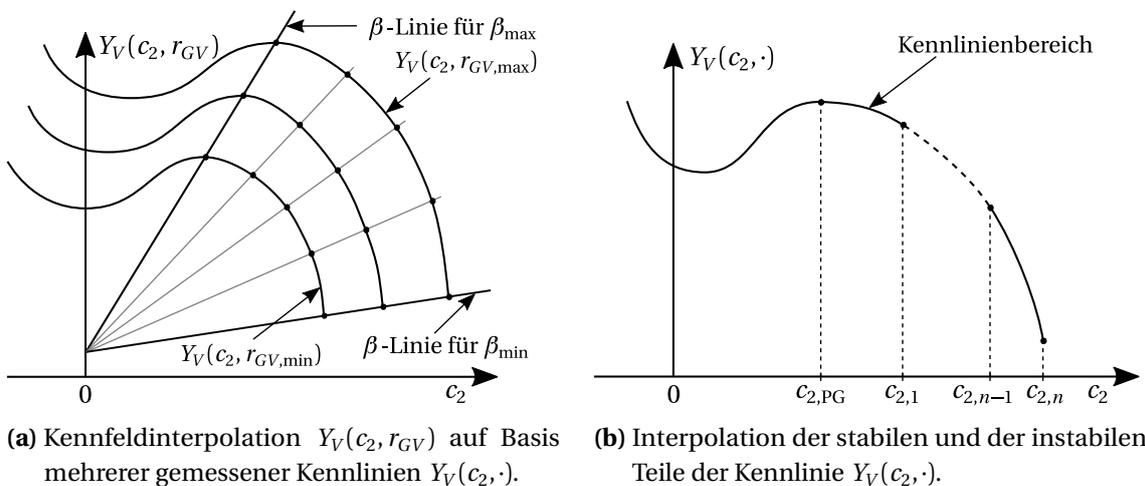


Abbildung 2.2. Modellierung des Verdichterkennfeldes $Y_V(c_2, r_{GV})$.

Die Verdichterkennlinie für eine gegebene Leitgitterstellung r_{GV} setzt sich nach Abbildung 2.2b aus mehreren Kennlinienbereichen zusammen. Hierzu zeigt Abbildung 2.2b beispielhaft das Modell einer vollständigen Kennlinie für einen beliebigen, aber konstanten Wert der Leitgitterstellung $Y_V(c_2, \cdot)$. Jeder Kennlinienbereich wird durch eine kubische Polynomfunktion approximiert:

$$Y_V(c_2, \cdot) = a_3 c_2^3 + a_2 c_2^2 + a_1 c_2 + a_0. \quad (2.27)$$

Für die Primärcharakteristik kann gegebenenfalls $a_3 = 0$ sein, wenn ein Polynom zweiten Grades für den entsprechenden Kennlinienbereich genügt. Die Sekundär- und die Tertiärcharakteristik werden gemeinsam als kubische Funktion modelliert (vgl. [132]). Der Übergang zwischen Sekundär- und Tertiärcharakteristik erfolgt nicht bei $c_2 = 0$, sondern kann als freier Parameter für die Anpassung des Modellverhaltens an die Messdaten genutzt werden. Die gesamte Kennlinie $Y_V(c_2, \cdot)$ besteht nach Abbildung 2.2b folglich aus der Sekundär- und der Tertiärcharakteristik links der Pumpgrenze und n weiteren Polynomfunktionen rechts der Pumpgrenze (Primärcharakteristik):

$$Y_V(c_2, \cdot) = \begin{cases} a_{3,PG} c_2^3 + a_{2,PG} c_2^2 + a_{1,PG} c_2 + a_{0,PG} & c_2 \leq c_{2,PG}, \\ a_{3,1} c_2^3 + a_{2,1} c_2^2 + a_{1,1} c_2 + a_{0,1} & c_{2,PG} \leq c_2 < c_{2,1}, \\ \vdots & \vdots \\ a_{3,n} c_2^3 + a_{2,n} c_2^2 + a_{1,n} c_2 + a_{0,n} & c_{2,n-1} \leq c_2 < c_{2,n}. \end{cases} \quad (2.28)$$

Die Ermittlung des aktuellen stationären Druckaufbaus $Y_V(c_{2,akt}, r_{GV,akt})$ erfolgt in zwei Schritten. Zunächst wird eine aktuelle Kennlinie auf Basis der aktuellen Leitgitterstellung $r_{GV,akt}$ berechnet. Hierzu werden die interpolierten β -Linien genutzt; Abbildung 2.3 zeigt die Vorgehensweise. Die Stützpunkte der aktuellen Kennlinie werden auf Basis der β -Linien zwischen den beiden angrenzenden gemessenen Kennlinien $Y_V(c_2, r_{GV,min})$ und $Y_V(c_2, r_{GV,max})$ ermittelt. Die auf diese Weise gewonnenen Stützpunkte bilden den Ausgangspunkt für die Interpolation der aktuellen Kennlinie $Y_V(c_2, r_{GV,akt})$. Anschließend wird der Kennlinienbereich ermittelt, in dem sich die aktuelle Eintrittsgeschwindigkeit $c_{2,akt}$ befindet. Dies erlaubt die Berechnung des aktuellen stationären Druckaufbaus gemäß Gleichung (2.27).

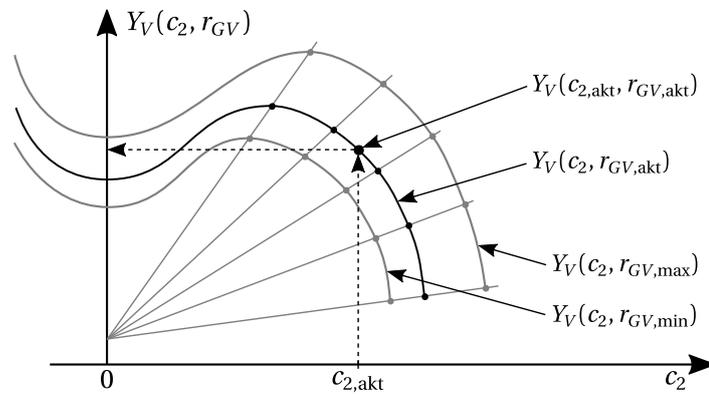


Abbildung 2.3. Ermittlung des Arbeitspunktes in Abhängigkeit von der Leitgitterstellung $r_{GV,akt}$ und der eintrittsseitigen Geschwindigkeit $c_{2,akt}$.

Abschließend wird das dynamische Verhalten der Leitgitterverstellung betrachtet. Der Verstellvorgang erfolgt mit einer Zeitverzögerung. Unter Annahme eines PT1-Verhaltens lautet die Systemantwort der Leitgitterposition r_{GV} auf den Stelleingriff u_{GV} :

$$\frac{dr_{GV}}{dt} = \frac{1}{\tau_{GV}} [u_{GV} - r_{GV}]. \quad (2.29)$$

2.1.3 Modell der Initialstörungen

Das Modell der Kennlinie (2.28) ermöglicht ausschließlich die Beschreibung des ungestörten Betriebsverhaltens. Um den Einfluss einer gestörten Rotorströmung zu berücksichtigen, wird Gleichung (2.27) um die Abhängigkeit von der Störampplitude erweitert (vgl. [132]). Dies führt zum gestörten Kennlinienbereich:

$$Y_V(c_2 + A, \cdot) = a_3 c_2^3 + a_2 c_2^2 + a_1 c_2 + a_0 + a_3 A^3 + (3a_3 + a_2)A^2 + (3a_3 + 2a_2 + a_1)A. \quad (2.30)$$

Diese Gleichung lässt sich als Überlagerung der ungestörten Charakteristik und einer Verlustcharakteristik ΔY_V darstellen:

$$Y_V(c_2 + A, \cdot) = Y_V(c_2, \cdot) + \Delta Y_V(c_2, \cdot, A). \quad (2.31)$$

Die Verlustcharakteristik ΔY_V repräsentiert die Verluste, die durch die umfangsgerichtete Störung im Strömungsfeld der Verdichterstufe entstehen. Im Fall $A \neq 0$ verändert sich also der durch die ungestörte Verdichterkennlinie vorgegebene Druckaufbau durch die Verlustcharakteristik $\Delta Y_V(c_2, \cdot, A)$. Um nun die Verschiebung zwischen realer und theoretischer Pumpgrenze zu beschreiben, wird im Folgenden eine Modifikation der Verlustcharakteristik $\Delta Y_V(c_2, \cdot, A)$ aus Gleichung (2.30) vorgeschlagen. Aus experimentellen Untersuchungen ist bekannt, dass die Lage der realen Pumpgrenze von mehreren Faktoren abhängt (siehe Abschnitt 1.2.1). Beispielsweise verschiebt sich die reale Pumpgrenze unter dem Einfluss von Einlaufstörungen in Richtung steigender Fördermengen (siehe Abschnitt 1.2.1). Entsprechend wird ein Modell gewählt, bei dem die von außen eingepprägten initialen Störungen im Strömungsfeld $u_A(c_2, r_{GV})$ bis zur theoretischen Pumpgrenze ansteigen und dort ein Maximum erreichen:

$$u_A(c_2, \cdot) = b_2 c_2^2 + b_1 c_2 + b_0. \quad (2.32)$$

Eine grafische Darstellung von (2.32) ist in Abbildung 2.4 zu sehen, wobei die Höhe des Scheitelpunktes k_{PG} im Vergleich zur Verdichterkennlinie zur Verdeutlichung angehoben wurde. Aus Abbildung 2.4 können die Koeffizienten b_i in Abhängigkeit der Kurvenparameter der instabilen Kennlinienseite identifiziert werden:

$$b_2 = -\frac{k_{PG}}{2c_{2,PG}}, \quad b_1 = k_{PG}, \quad b_0 = 0. \quad (2.33)$$

Die initialen Störungen $u_A(c_2, \cdot)$ liefern einen Beitrag zur Verlustcharakteristik $\Delta Y_V(c_2, \cdot, A)$ und sollen sich dabei über die Störampplitude A skalieren:

$$\Delta Y_V(c_2, \cdot, A) = a_3 A^3 + (3a_3 + a_2)A^2 + (3a_3 + 2a_2 + a_1 + u_A)A. \quad (2.34)$$

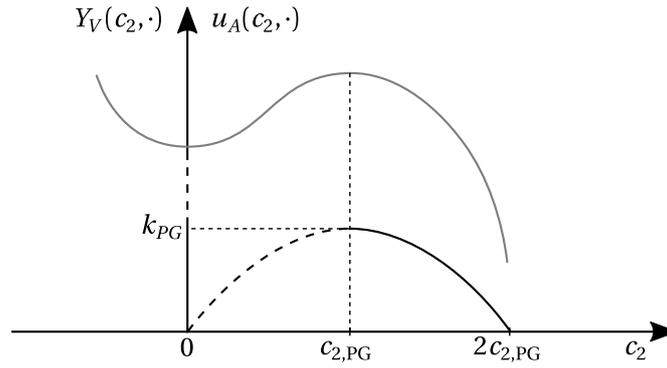


Abbildung 2.4. Definition der Kennlinie von Initialstörungen $u_A(c_2, \cdot)$ (schwarz) im Vergleich zur Verdichterkennlinie $Y_V(c_2, \cdot)$.

Das Modell für $u_A(c_2, r_{GV})$ kann jedoch nur im stabilen Kennfeldbereich gültig sein. Die darüber hinaus auftretenden aerodynamischen Störungen erzeugen in einem realen Verdichter ein komplexes dreidimensionales Strömungsfeld. Ansatz (2.32) weist im instabilen Bereich nach Abbildung 2.4 eine fallende Charakteristik auf. Diese kann im Rahmen der experimentellen Untersuchung nicht validiert werden. Um die Stetigkeit der Verlustcharakteristik zu gewährleisten, wird der Ansatz (2.32) trotzdem sowohl im stabilen als auch im instabilen Kennlinienbereich entsprechend Abbildung 2.4 verwendet:

$$u_A(c_2, \cdot) = \begin{cases} 0 & c_2 < 0, \\ b_2 c_2^2 + b_1 c_2 + b_0 & 0 \leq c_2 < 2c_{2,PG}, \\ 0 & c_2 > 2c_{2,PG}. \end{cases} \quad (2.35)$$

Unter Berücksichtigung des Modells der Initialstörungen kann das Modell des Radialverdichters (2.26) für einen Kennlinienbereich nun wie folgt umgeschrieben werden:

$$\frac{p_4}{\rho_4} - \frac{p_1}{\rho_1} = Y_V(c_2, \cdot) + \Delta Y_V(c_2, \cdot, A) - L \frac{\partial c_2}{\partial t} - \tau_A \frac{\partial A}{\partial t} \sin(\theta^*). \quad (2.36)$$

2.1.4 Vollständiges Zustandsraummodell

Um ein System in Zustandsraumdarstellung zu erhalten, muss Gleichung (2.36) vereinfacht werden. MOORE und GREITZER [132] schlagen die GALERKIN-Methode vor. Dieses Verfahren ist eine Variante der Methode der gewichteten Residuen, bei dem zunächst ein Funktionenraum unter Zuhilfenahme von Basisfunktionen b_i definiert wird. Für die Differentialgleichung (2.36) verwendet man die folgenden Basisfunktionen b_i :

$$b_1 = 1, \quad b_2 = \sin(\theta^*). \quad (2.37)$$

Nun wird das innere Produkt aus dem Residuum \mathcal{R} und den Basisfunktionen b_i gebildet:

$$\langle \mathcal{R}(\theta^*), b_i(\theta^*) \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{R}(\theta^*) b_i(\theta^*) d\theta^*. \quad (2.38)$$

Die Differentialgleichung (2.36) lässt sich in zwei Anteile trennen. Der erste Anteil $f_1(A)$ beinhaltet die von der Stör-Amplitude A abhängigen Terme. Der zweite Anteil $f_2(c_2)$ umfasst die

restlichen Terme. Die Konstruktion des Residuums ist formal durch folgende Vorschrift gegeben:

$$\mathcal{R}(\theta^*) = f_1(A) + f_2(c_2). \quad (2.39)$$

Während $f_1(A)$ damit die Zeitableitung der Störamplitude A enthält, beinhaltet $f_2(c_2)$ die Zeitableitung der Geschwindigkeit am Rotoreintritt c_2 . Um eine Näherungslösung zu erhalten, muss das Residuum verschwinden:

$$\langle \mathcal{R}(\theta^*), b_i(\theta^*) \rangle = 0. \quad (2.40)$$

Durch diese Operation wird (2.36) auf die einzelnen Ebenen des Funktionenraums projiziert:

$$\frac{dc_2}{dt} = \frac{1}{L} \left[a_3 c_2^3 + a_2 c_2^2 + a_1 c_2 + a_0 + \frac{3a_3 c_2 + a_2}{2} A^2 - \left(\frac{p_4}{\rho_4} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) \right], \quad (2.41)$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{\tau_A} \left[\frac{3a_3}{4} A^3 + (3a_3 + b_2) c_2^2 A + (2a_2 + b_1) c_2 A + a_1 A \right]. \quad (2.42)$$

Durch die Projektion mit b_1 verschwindet die Zeitableitung der Störamplitude in (2.41). Durch die Projektion mit b_2 verschwindet die Zeitableitung der Geschwindigkeit am Rotoreintritt in (2.42). Die Gleichungen (2.19), (2.20), (2.29), (2.41) und (2.42) bilden nun ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung und beschreiben das Verdichtersystem entsprechend Abbildung 2.1. Die Gleichungen können in einer Weise umgestellt werden, dass sie nur noch das Dichteverhältnis ρ_4/ρ_2 , die Druckverhältnisse p_4/p_2 und p_5/p_4 sowie die Druck-Dichte-Verhältnisse p_1/ρ_1 und p_2/ρ_2 enthalten:

$$\frac{dc_2}{dt} = \frac{1}{L} \left[a_3 c_2^3 + a_2 c_2^2 + a_1 c_2 + a_0 + \frac{3a_3 c_2 + a_2}{2} A^2 - \frac{p_1}{\rho_1} \left(\frac{p_4}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_4} - 1 \right) \right], \quad (2.43a)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p_4}{p_2} \right) = \frac{\kappa A_2}{V} \frac{p_4}{p_2} \frac{\rho_2}{\rho_4} \left[c_2 - k_{PV} Y_{PV}(r_{PV}) \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{\rho_4}{\rho_2} \frac{p_4}{p_2} \frac{p_2}{\rho_2} \left[\left(\frac{p_5}{p_4} \right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{p_5}{p_4} \right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}} \right]} \right], \quad (2.43b)$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{\tau_A} \left[\frac{3a_3}{4} A^3 + (3a_3 + b_2) c_2^2 A + (2a_2 + b_1) c_2 A + a_1 A \right], \quad (2.43c)$$

$$\frac{dr_{GV}}{dt} = \frac{1}{\tau_{GV}} [u_{GV} - r_{GV}], \quad (2.43d)$$

$$\frac{dr_{PV}}{dt} = \frac{1}{\tau_{PV}} [u_{PV} - r_{PV}]. \quad (2.43e)$$

Die Verhältnisse müssen nun durch bekannte Größen ersetzt werden. Wenn der Verdichter aus der Umgebung ansaugt und nach der Drosselarmatur in die Umgebung entspannt, dann gilt $p_5 = p_1$. Wenn gleichzeitig eine quasistatische Änderung des Arbeitspunktes oder ein kurzes Ansaugrohr vorliegt, dann gilt zusätzlich $p_1 \approx p_2$. Damit ist das Gleichungssystem noch abhängig vom Dichteverhältnis ρ_4/ρ_1 , vom Druckverhältnis p_4/p_1 und vom Druck-Dichte-Verhältnis p_1/ρ_1 . Letzteres kann durch die thermodynamische Zustandsgleichung idealer Gase $p_1/\rho_1 = R_S T_1$ ersetzt werden, wobei R_S die spezifische Gaskonstante und T_1 die Umgebungstemperatur sind. Diese Größen können als bekannt vorausgesetzt werden. Weiterhin kann das Dichteverhältnis $\rho_4/\rho_1 = \rho_4/\rho_2$ aufgrund der Inkompressibilität im Ansaugrohr über eine isentrope Zustandsänderung vom Ansaugrohr zum Diffusoraustritt formuliert werden:

$$\frac{\rho_4}{\rho_1} = \frac{\rho_4}{\rho_2} = \left(\frac{p_4}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}}. \quad (2.44)$$

Damit können alle verbliebenen Druck- und Dichteverhältnisse durch das Druckverhältnis $\Pi := p_4/p_1$ im Verdichtermodell (2.43) ausgedrückt werden. Abschließend wird die Betrachtung noch auf das gesamte Kennfeld erweitert. Im Verdichtermodell (2.43) variieren dann die Koeffizienten a_3, \dots, a_0 und b_2, \dots, b_0 in Abhängigkeit vom aktuellen Wert der Leitgitterstellung r_{GV} und der eintrittsseitigen Geschwindigkeit c_2 . Diese Erweiterung führt zur Definition des Verdichterkennfeldes $Y_V(c_2, r_{GV})$ sowie des Verlustkennfeldes $Y_D(c_2, r_{GV}, A)$ und des Störkennfeldes $Y_A(c_2, r_{GV}, A)$:

$$Y_V(c_2, r_{GV}) := a_3(c_2, r_{GV})c_2^3 + a_2(c_2, r_{GV})c_2^2 + a_1(c_2, r_{GV})c_2 + a_0(c_2, r_{GV}), \quad (2.45a)$$

$$Y_D(c_2, r_{GV}, A) := \frac{3a_3(c_2, r_{GV})c_2 + a_2(c_2, r_{GV})}{2} A^2, \quad (2.45b)$$

$$Y_A(c_2, r_{GV}, A) := \frac{3a_3}{4} A^3 + [3a_3(c_2, r_{GV}) + b_2(c_2, r_{GV})]c_2^2 A + [2a_2(c_2, r_{GV}) + b_1(c_2, r_{GV})]c_2 A + a_1(c_2, r_{GV})A. \quad (2.45c)$$

Mit den Zustandsvariablen $x = (c_2, \Pi, A, r_{GV}, r_{PV})^T$ lautet das Verdichtermodell nun

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{L(x_2)} [Y_V(x_1, x_4) + Y_D(x_1, x_3, x_4) - k_1(x_2^{r_k} - 1)], \quad (2.46a)$$

$$\dot{x}_2 = k_2 x_2^{r_k} \left[x_1 - k_{PV}(x_2) Y_{PV}(x_5) \sqrt{2k_1(x_2^{r_k} - 1)/r_k} \right], \quad (2.46b)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{\tau_A} Y_A(x_1, x_3, x_4), \quad (2.46c)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{\tau_{GV}} [u_{GV} - x_4], \quad (2.46d)$$

$$\dot{x}_5 = \frac{1}{\tau_{PV}} [u_{PV} - x_5] \quad (2.46e)$$

mit den Modellparametern

$$L(x_2) = L_{12} + \frac{L_{23}}{x_2^{\frac{1}{k}} \frac{A_3}{A_2} - 1} \ln \left(x_2^{\frac{1}{k}} \frac{A_3}{A_2} \right) + \frac{L_{34}}{x_2^{\frac{1}{k}} \frac{A_3}{A_2} \left(\frac{A_4}{A_3} - 1 \right)} \ln \left(\frac{A_4}{A_3} \right), \quad (2.47a)$$

$$k_1 = R_S T_1, \quad (2.47b)$$

$$k_2 = \kappa A_2 / V, \quad (2.47c)$$

$$r_k = (\kappa - 1) / \kappa, \quad (2.47d)$$

$$k_{PV}(x_2) = \begin{cases} K_{PV} \frac{A_{PV, \max}}{A_2} & x_2 \leq \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{-\frac{1}{r_k}}, \\ K_{PV} \frac{A_{PV, \max}}{\sqrt{2} A_2} \left(\frac{2x_2^{r_k}}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa+1}{2\kappa-2}} \left(\frac{\kappa-1}{x_2^{r_k} - 1} \right)^{\frac{1}{2}} & x_2 > \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{-\frac{1}{r_k}}. \end{cases} \quad (2.47e)$$

Die effektiv durchströmte Länge des Verdichters L hängt gemäß Gleichung (2.47a) ausschließlich vom Druckverhältnis x_2 ab. Ein steigendes Druckverhältnis führt in der realen Anlage wegen der Kompressibilität des Gases zu einer höheren Dichte auf der Austrittsseite des Rotors und des Diffusors. Dadurch steigt die bewegte Gasmasse durch den Verdichter. Diesen Effekt berücksichtigt Gleichung (2.47a) durch die Abnahme der effektiv durchströmten Länge des Verdichters.

Für die Beschreibung des störfreien Betriebs mit $x_3 \equiv 0$ genügt wegen $Y_D(\cdot, \cdot, 0) = 0$ und $Y_A(\cdot, \cdot, 0) = 0$ das ungestörte Verdichterkennfeld $Y_V(x_1, x_4)$. Dann ähnelt das Modell dem GREITZER-Modell, das bereits erfolgreich für Radialverdichter eingesetzt wurde. Folglich kann erwartet werden, dass sich die maßgeblichen Betriebszustände eines Radialverdichtersystems beschreiben lassen. Beim GREITZER-Modell erfolgt der Eintritt in das instabile Systemverhalten am Scheitelpunkt der Primärcharakteristik. Dieses Verhalten ist auch bei Modell (2.46) für den störfreien Betrieb mit $x_3 \equiv 0$ zu beobachten und soll anhand einer Bifurkationsanalyse näher erläutert werden. Dazu wird zunächst der Gleichgewichtszustand des Modells bestimmt. Die Lösung des resultierenden algebraischen Gleichungssystems für $\dot{x} = 0$ führt zur Ruhelage \bar{x} . Zur Bestimmung des linearen Stabilitätsverhaltens erfolgt die Linearisierung des Modells um die ermittelte Ruhelage. Die Ruhelage ist asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte λ_i der Systemmatrix A des linearisierten Systems die Eigenschaft $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ aufweisen. Die Systemmatrix ist identisch mit der JACOBI-Matrix und für die Modellfunktionen f in der Ruhelage wie folgt gegeben:

$$A = J_f(x) \Big|_{x=\bar{x}} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}}. \quad (2.48)$$

Unter Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung lautet das linearisierte Differentialgleichungssystem mit dem Bifurkationsparameter μ :

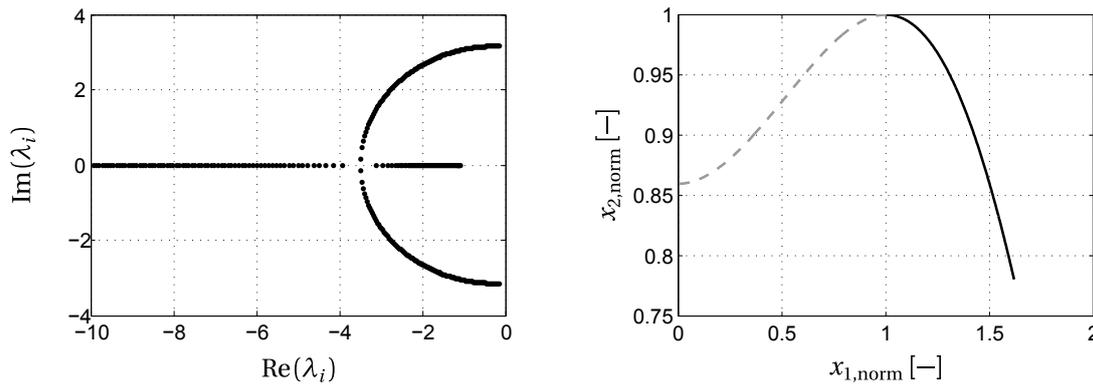
$$\frac{dx}{dt} = A(x, \mu). \quad (2.49)$$

Als Bifurkationsparameter wird $\mu = k_{pV}$ gewählt. Dieser Parameter enthält die maximal durchströmte Querschnittsfläche $A_{pV, \max}$ der Drosselarmatur. Die Variation dieses Parameters entspricht einer veränderten Drosselung des Verdichtersystems. Für den ungestörten Fall mit $x_3 \equiv 0$ und für vernachlässigbare Aktordynamik reduziert sich das Verdichtermmodell (2.46) auf die Gleichungen (2.46a) und (2.46b) bei unterkritischer Ausströmung aus dem Gasspeicher:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{L(x_2)} [Y_V(x_1, \cdot) - k_1(x_2^{r_k} - 1)], \quad (2.50a)$$

$$\dot{x}_2 = k_2 x_2^{r_k} \left[x_1 - k_{pV} \sqrt{2k_1(x_2^{r_k} - 1)/r_k} \right]. \quad (2.50b)$$

Abbildung 2.5a zeigt das Pol-Nullstellen-Diagramm des Modells (2.50) unter Verringerung von μ im Intervall $[\mu_2, \mu_0]$ mit $\mu_2 > \mu_1 > \mu_0$. Bei μ_1 und μ_0 ändert das System die Stabilitätseigenschaften. Für $\mu_2 \geq \mu > \mu_1$ liegen zwei reelle Eigenwerte mit negativem Realteil und damit ein stabiler Knoten vor. Bei $\mu_1 \geq \mu > \mu_0$ gehen die beiden reellen Eigenwerte in zwei konjugiert komplexe Eigenwerte in der linken offenen Halbebene über. Das System erzeugt einen stabilen Fokus. Bei weiterer Reduzierung von μ nehmen die entsprechenden Imaginärteile größere Werte an, was eine Reduzierung der Dämpfung zur Folge hat. Die Verdichterkennlinie $Y_V(x_1, \cdot)$ übernimmt also die Funktion einer durchflussabhängigen Dämpfung. Bei $\mu = \mu_0$ degeneriert schließlich die stationäre Lösung. Die Realteile der konjugiert komplexen Eigenwerte verschwinden und es tritt eine HOPF-Bifurkation auf. Nach dem Durchlaufen von μ_0 bildet sich ein stabiler Grenzzyklus heraus. Dies entspricht bei Radialverdichtern dem Übergang von einem aerodynamisch stabilen in einen aerodynamisch instabilen Betrieb und führt zu einem Pumpzyklus. Wie in Abbildung 2.5b zu sehen ist, liegt der kritische Wert des Bifurkationsparameters μ_0 am Scheitelpunkt der Primärcharakteristik. Dies entspricht dem Ergebnis für das GREITZER-Modell (vgl. [94]).



(a) Pol-Nullstellen-Diagramm im Intervall $[\mu_2, \mu_0]$ mit $\mu_2 > \mu_0, \mu_0 \neq 0$. (b) Bifurkationsdiagramm in der x_1 - x_2 -Ebene im Intervall $[\mu_2, 0]$ mit $\mu_2 > 0$. Stabile Ruhelagen (schwarz), instabile Ruhelagen (grau).

Abbildung 2.5. Bifurkationsanalyse des Modells (2.50) für den Fall $x_3 \equiv 0$.

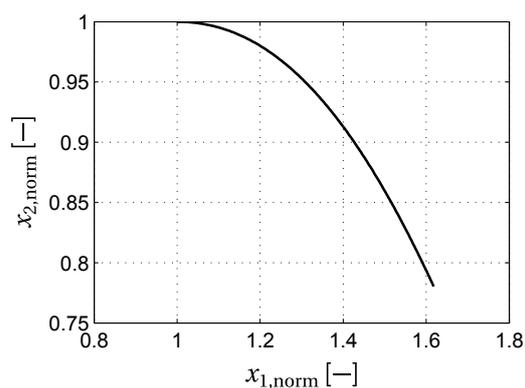
Abschließend soll der Einfluss des Modells der Initialstörungen (2.32) auf das Systemverhalten untersucht werden. Die Bifurkationsanalyse erfolgt wiederum unter Vernachlässigung der Aktordynamik, womit sich das Verdichtermodell auf die Gleichungen (2.46a) bis (2.46c) für einen festgelegten Wert der Leitgitterstellung reduziert:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{L(x_2)} \left[Y_V(x_1, \cdot) + Y_D(x_1, x_3, \cdot) - k_1(x_2^{r_k} - 1) \right], \quad (2.51a)$$

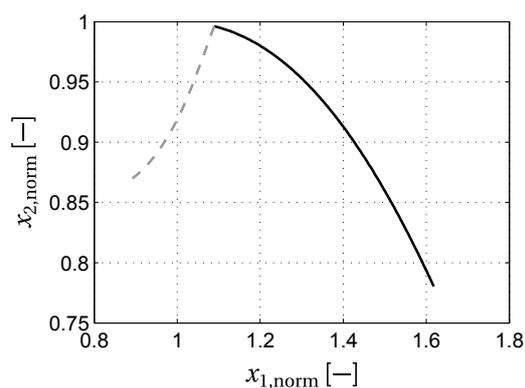
$$\dot{x}_2 = k_2 x_2^{r_k} \left[x_1 - k_{PV} \sqrt{2k_1(x_2^{r_k} - 1)/r_k} \right], \quad (2.51b)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{\tau_A} Y_A(x_1, x_3, \cdot). \quad (2.51c)$$

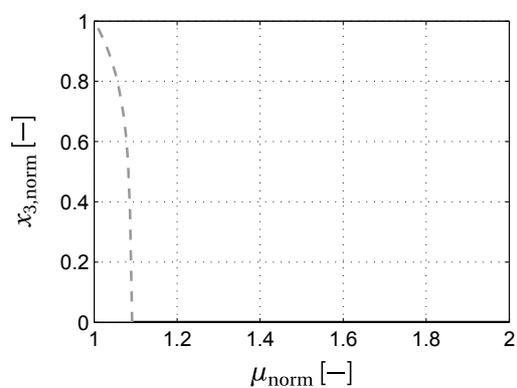
Dabei wird wieder von unterkritischer Ausströmung aus dem Gasspeicher ausgegangen. Dieses Modell ähnelt dem MG3-Modell und kann daher den Einfluss einer gestörten Rotorströmung charakterisieren. Der Unterschied zwischen dem Modell mit und ohne Initialstörungen besteht in den Parametern b_2, \dots, b_0 der Störkennlinie $Y_A(x_1, x_3, \cdot)$ in Gleichung (2.51c). Für das Modell ohne Initialstörungen werden diese Parameter zu Null gesetzt. Die Bifurkationsdiagramme in Abbildung 2.6 zeigen den Vergleich zwischen beiden Modellen. In Abbildung 2.6a ist das Ergebnis für das Modell (2.51) ohne Initialstörungen bis zum Erreichen der theoretischen Pumpgrenze dargestellt. In Übereinstimmung mit den Ergebnissen für das MG3-Modell (vgl. [94]) tritt kein instabiler Systemzustand auf. Abbildung 2.6b zeigt das Ergebnis für das Modell (2.51) mit Initialstörungen. Hierbei treten instabile Systemzustände bereits vor dem Erreichen der theoretischen Pumpgrenze auf. Die Analyse der Eigenwerte offenbart dabei wiederum den Verlust der Stabilität durch eine HOPF-Bifurkation. Folglich unterscheiden sich die reale und die theoretische Pumpgrenze. Auf diese Weise verursachen die Initialstörungen eine Verschiebung der Pumpgrenze in Richtung steigender Fördermenge. Der Übergang in den instabilen Betrieb wird von einem starken Anstieg der Störampplitude x_3 ausgelöst; siehe Abbildung 2.6c. Dies führt zu einem Absinken des Druckverhältnisses x_2 ; siehe Abbildung 2.6d. In Abbildung 2.6c lässt sich gut erkennen, dass die Störampplitude x_3 erst bei Erreichen der realen Pumpgrenze zu relevanter Größe wächst. Folglich lässt sich das stabile Verhalten auch unter Vernachlässigung der Störampplitude x_3 beschreiben.



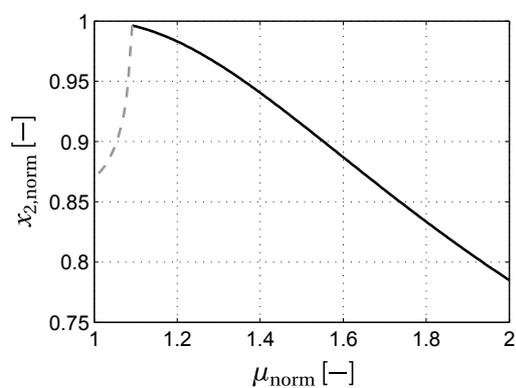
(a) Bifurkationsdiagramm in der x_1 - x_2 -Ebene für das Modell ohne Initialstörung, stabile Ruhelagen (schwarz), instabile Ruhelagen (grau).



(b) Bifurkationsdiagramm in der x_1 - x_2 -Ebene für das Modell mit Initialstörung, stabile Ruhelagen (schwarz), instabile Ruhelagen (grau).



(c) Bifurkationsdiagramm $x_3(\mu)$ für das Modell mit Initialstörung, stabile Ruhelagen (schwarz), instabile Ruhelagen (grau).



(d) Bifurkationsdiagramm $x_2(\mu)$ für das Modell mit Initialstörung, stabile Ruhelagen (schwarz), instabile Ruhelagen (grau).

Abbildung 2.6. Bifurkationsdiagramme für die Modelle mit und ohne Initialstörung.

2.2 Modell des Verdichtergehäuses

Die von Schallwellen durchsetzte Verdichterströmung regt die umgebende Struktur zu Schwingungen an. Es handelt sich um ein System mit Fluid-Struktur-Interaktion (FSI). Die im Rotor und im Diffusor induzierten Schallmoden koppeln sich mit den elastischen Moden des Gehäuses und verursachen den charakteristischen Klang einer Maschine. Nach der Definition von CREMER und HECKL [34] werden Schwingungen in elastischen Körpern im hörbaren Frequenzbereich als Körperschall bezeichnet. Dabei nennen CREMER und HECKL einen Frequenzbereich von 16 Hz bis 16 kHz. Solche Angaben sind jedoch nicht als starr zu betrachten [34]. Körperschallprobleme ordnen sich in das Gebiet der Strukturmechanik ein; es besteht aber eine enge Verbindung zur Akustik. Der Begriffsklärung von GASCH zufolge beschäftigt sich die Strukturmechanik mit „Schwingungsvorgängen von komplizierten technischen Strukturen“ [57]. Vor allem der Rotor steht hierbei im Mittelpunkt. Erzwungene sowie selbsterregte Schwingungen werden insbesondere in der Rotordynamik untersucht. In Bezug auf die FSI bei Verdichtern erfolgt in Abschnitt 2.2.1 zunächst eine qualitative Erläuterung des Gehäuses als Wellenleiter. Anschließend wird in Abschnitt 2.2.2 die freie Schwingung von dünnen gekrümmten Strukturen thematisiert. Dabei erfolgt der Übergang auf dünne Hohlzylinder. Die Lösung des erzwungenen Schwingungsproblems in Abschnitt 2.2.3 baut auf dieser Betrachtung auf.

2.2.1 Verdichtergehäuse als Wellenleiter

Die Gehäusebewegung wird maßgeblich durch Wellen bestimmt – das Verdichtergehäuse verhält sich dabei als Wellenleiter. Die beiden wesentlichen Schwierigkeiten bestehen in der Wellenausbreitung in komplexen elastischen Körpern und in der Kopplung zwischen Fluid- und Körperschall. Beispielsweise führt eine komplexe Geometrie zu komplexen räumlichen Wellenformen, den sogenannten Moden. Dies verhindert eine analytische Modalzerlegung des Verschiebungsfeldes. In diesem Fall geht man zu numerischen Lösungsverfahren wie der Finite-Elemente-Methode (FEM) über. Neben der räumlichen Analyse müssen auch die transiente Schallausbreitung und Dämpfungsphänomene im Gehäuse berücksichtigt werden [145]. Bei der Kopplung zwischen Fluid- und Körperschall müssen ebenfalls einige Aspekte beachtet werden. Die Kopplung findet an der Grenzfläche zwischen zwei Medien statt. Dabei treffen longitudinale Wellen im kompressiblen Gas unter einem bestimmten Winkel auf die Grenzfläche. Hierbei werden sowohl Wellen in das Gas reflektiert als auch in das Gehäuse transmittiert. Da ein Gas keine Scherkräfte erzeugen kann, werden ausschließlich longitudinale Wellen reflektiert. Bei der Transmission in das Gehäuse werden jedoch neben der longitudinalen Körperschallwelle auch eine Transversalwelle [1] sowie eine Kombinationen von Longitudinal- und Transversalwellen [76] erzeugt. Dieser Vorgang wird als Modenkonzersion bezeichnet [1]. Durch eine Messung der Körperschallmoden kann daher im Allgemeinen nicht direkt auf die auslösenden Fluidschallmoden geschlossen werden. Ferner regt die mit einer definierten Frequenz einfallende Welle mehrere Eigenfrequenzen des Verdichtergehäuses an. Auch Einkopplungen aus benachbarten Strukturen können auftreten und erschweren die Körperschallanalyse. Um dennoch Informationen über den aerodynamischen Verdichtierzustand zu erhalten, werden zwei Vereinfachungen vorgestellt. Unter diesen Voraussetzungen existiert eine analytisch geschlossene Lösung für die Modalzerlegung.

Die erste Vereinfachung besteht in der Annahme kleiner Auslenkungen. Das Gehäusemodell muss nur die Antwort auf die Anregung des Fluidschalls im Normalbetrieb abbilden können. Da die entstehende aerodynamische Instabilität bis zur Pumpgrenze nur eine kleine Schwingungsamplitude erreicht, genügt ein lineares Modell. Derartige Empfehlungen finden sich zum Beispiel bei GASCH [58]. Weitere Hinweise für die Nutzung eines linearen Übertragungsverhaltens geben CREMER und HECKL [34]. Sie argumentieren, dass sich der Rechenaufwand von numerischen Verfahren wie der FEM für Körperschallprobleme nur bei niedrigen Eigenfrequenzen lohnt. Dies gilt unter der Voraussetzung, dass eine detaillierte örtliche Auflösung nicht interessiert. Als vollkommen ausreichend hat sich hingegen die Übereinstimmung statistischer Kennwerte eines linearen Modells über den interessierenden Frequenzbereich bewährt. Lineare Modelle gekrümmter Strukturen lassen sich vor allem dann einsetzen, wenn eine vernachlässigbare Ausbreitung in mindestens einer Raumdimension besteht [34, 53].

Die zweite Vereinfachung bezieht sich auf die Gehäuseform. Obwohl unterschiedliche Radialverdichter unterschiedliche Gehäusekonstruktionen aufweisen, besitzen sie aus topologischer Sicht eine Ähnlichkeit: Befreit man das Gehäuse von den Aufbauten, bleibt eine zylindrische Form zurück. Es erscheint somit zweckmäßig, die Verdichtergehäuse in eine Klasse zylindrischer Strukturen einzuordnen. Die Berechnung von Schwingungen in zylindrischen Strukturen ist mittels verschiedener Modellansätze möglich. Prinzipiell stehen diskrete und kontinuierliche Modelle zur Verfügung, was mit einem sinkenden Abstraktionsgrad verbunden ist. Experimente an elastischen Strukturen zeigen, dass die Anzahl der Eigenfrequenzen nicht begrenzt ist [34, 57]. Einkörper- oder Mehrkörpersysteme (als Ausprägungen diskreter Modelle) sind aufgrund der endlichen Anzahl von Freiheitsgraden nicht dazu geeignet, das Körperschallspektrum über einen größeren Frequenzbereich qualitativ korrekt wiederzugeben. Dies erfordert die Anwendung eines kontinuierlichen Modells. Hierbei ähneln die Bewegungsgleichungen eines elastischen Körpers denen eines Gases. Der Unterschied besteht im Auftreten von Schubspannungen im elastischen Körper.

2.2.2 Dynamik dünner und gekrümmter Strukturen

Das Gehäuse wird als dünner Hohlzylinder modelliert. Den dünnen Hohlzylinder kann man als Spezialfall einer dünnen und gekrümmten Struktur betrachten. Deren Beschreibung beruht auf der Bewegung einer zweidimensionalen reellen Untermannigfaltigkeit $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$; \mathcal{M} wird als mittlere Mantelfläche oder In-plane-Anteil bezeichnet. Dabei greift man auf die parametrische Darstellung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zurück. Die Berechnung beschränkt sich nun auf dünnwandige Strukturen unter Zuhilfenahme der LOVE-Postulate [126].

- Die Strukturdicke h ist im Vergleich zu anderen Abmessungen (Wellenlänge einer Schwingung oder kleinster vorhandener Krümmungsradius) gering.
- Spannungen und Verschiebungen bleiben so klein, dass nur die entsprechenden linearen Terme berücksichtigt werden müssen.
- Die Normalenkomponente der Schubspannungen bleibt gegenüber den Normalenkomponenten anderer Spannungen klein.
- Alle Normalenvektoren der undeformierten Oberfläche verbleiben auch nach der Deformation normal zu ihrer Bezugsfläche und erfahren weder Streckung noch Stauchung.

Die erste Bedingung definiert ein nützliches Kriterium für eine dünnwandige gekrümmte Struktur. Ein Beispiel soll dies veranschaulichen. Im Falle zylindrischer Gehäuse ist meist die Dicke des Zylinders im Vergleich zu anderen Abmessungen gering. Für eine reine longitudinale Welle, die parallel zur radialen Richtung ausgelöst wird, beträgt der Weg beispielsweise 2 cm. Geht man von Stahl als Gehäusematerial aus, das eine longitudinale Ausbreitungsgeschwindigkeit von ca. 4500 m/s besitzt, ergibt sich für die obere Grenze des Körperschalls (16 kHz) eine Wellenlänge von ca. 30 cm. Damit liegt die Wellenlänge um eine Größenordnung höher als die Dicke der Struktur – sie kann folglich gegenüber der Wellenlänge als klein angesehen werden. Die hier betrachtete Longitudinalwelle ist zwar ausbreitungsfähig, aber vernachlässigbar. Die zweite Bedingung stellt sicher, dass die beschreibenden Gleichungen linearer Natur sind. Durch die dritte und die vierte Bedingung wird ausgedrückt, dass das Material eine unendliche Steifigkeit in z -Richtung aufweist. Es liegt demnach keine Dehnung in z -Richtung vor und die Radialkomponente der Verschiebung ist über die Strukturdicke konstant. Dies wird umso besser erfüllt, je kleiner der senkrecht auf der Oberfläche stehende Anteil einer Spannung oder der einer auslösenden Kraft ist. Umgekehrt führt die Kraft zwar zu einer Verschiebung, doch nicht zu einer Welle innerhalb der Struktur. Im Kontext des obigen Beispiels wäre eine parallel zur Radialkomponente ausgelöste Longitudinalwelle nicht mehr ausbreitungsfähig. In der Struktur treten damit nur noch Transversalwellen sowie Longitudinalwellen parallel zur Mantelfläche auf.

Die Bewegung einer dünnen und gekrümmten Struktur lässt sich unter Vernachlässigung der Strukturdicke mit $h \rightarrow 0$ charakterisieren [114]. Hierbei ist zunächst die Beschreibung der Mantelfläche \mathcal{M} im \mathbb{R}^3 notwendig. Dazu wird der Vektor r_P auf den Punkt $P \in \mathcal{M}$ als vektorielle Summe des Ortsvektors r_Q auf $Q \in \mathcal{M}$ und den ortsabhängigen Spannvektoren $e_\alpha(\alpha, \beta)$ und $e_\beta(\alpha, \beta)$ mit den Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entwickelt [114]:

$$r_P(\alpha, \beta) = r_Q + \alpha e_\alpha(\alpha, \beta) + \beta e_\beta(\alpha, \beta), \quad (2.52)$$

siehe hierzu Abbildung 2.7. Die Größen α und β kann man nun als Koordinaten im krummlinigen Koordinatensystem mit der Basis $e_\alpha(\alpha, \beta)$, $e_\beta(\alpha, \beta)$ interpretieren. Die Form der Struktur bestimmt die Abhängigkeit der Spannvektoren von den Koordinaten α und β . Zur Beschreibung der zeitlichen Entwicklung der Mantelflächenbewegung wird (2.52) um eine Normalenkomponente $e_n(\alpha, \beta)$ mit der Eigenschaft der paarweisen Orthogonalität $\langle e_n, e_\alpha \rangle = 0$ und $\langle e_n, e_\beta \rangle = 0$ erweitert [114]:

$$r_P(\alpha, \beta, n) = r_Q + \alpha e_\alpha(\alpha, \beta) + \beta e_\beta(\alpha, \beta) + n e_n(\alpha, \beta), \quad -h/2 \leq n \leq h/2. \quad (2.53)$$

Die Basisvektoren e_α , e_β , e_n bilden ein triorthonormales Koordinatensystem und sind Elemente des Tangentialraumes $T\mathbb{R}_P^3$ am Punkt P . $T\mathbb{R}_P^3$ ist äquivalent zum Standardkoordinatenraum $T\mathbb{R}_x^3$ mit der kanonischen Basis $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Die Beschreibung kann daher prinzipiell in beiden Vektorräumen erfolgen. Die Abbildung $\phi_P : T\mathbb{R}_P^3 \rightarrow T\mathbb{R}_x^3$ bestimmt die spezifische Koordinatentransformation in Punkt P . Der Verschiebungsvektor $s_{\mathcal{M}} = (s_\alpha, s_\beta, s_n)_{\mathcal{M}}^T$ der Mantelfläche ergibt sich anschließend durch Differenzbildung zwischen dem undeformierten Zustand $r_{P,0}(\alpha, \beta, n)$ zur Zeit $t = 0$ und dem Zustand $r_{P,t}(\alpha, \beta, n)$ zur gesuchten Zeit $t > 0$ (vgl. [34]):

$$s_{\mathcal{M}}(t, \alpha, \beta, n) := r_{P,t} - r_{P,0} \quad (2.54)$$

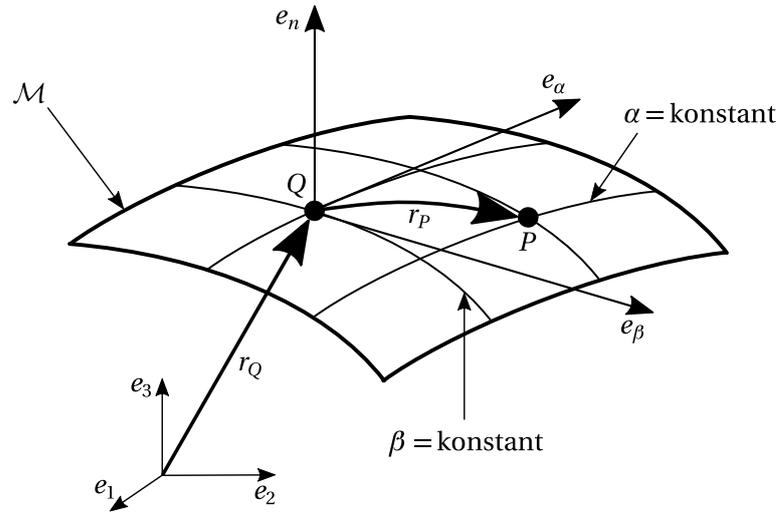


Abbildung 2.7. Mittlere Mantelfläche \mathcal{M} und zugehörige Beschreibungsgrößen: Koordinaten des krummlinigen Koordinatensystems α und β , Basisvektoren e_i sowie Ortsvektoren r_Q und r_P auf die Punkte $Q \in \mathcal{M}$ und $P \in \mathcal{M}$.

bezüglich des Tangentialraumes $T\mathbb{R}_{P_0}^3$. Dabei muss beachtet werden, dass alle $P \in \mathcal{M}$ in unterschiedlichen Tangentialräumen liegen können. Ein geschlossenes Modell, das die Beziehungen zwischen allen Punkten $P \in \mathcal{M}$ berücksichtigt, besitzt jedoch erst dann eine einfache Struktur, wenn alle Tangentialräume $T\mathbb{R}_{P_0}^3$ entsprechend einer gegebenen invarianten Abbildung für alle Punkte $P \in \mathcal{M}$ in einen Tangentialraum $T\mathbb{R}_{\mathcal{M}}^3$ transformiert werden können. Vor allem im Fall einfacher Strukturen führt die Verwendung entsprechend definierter Basisvektoren zur Minimierung des mathematischen Aufwandes.

Gleichung (2.54) definiert lediglich die Verschiebung der Mantelfläche. Das Verdichtergehäuse besitzt jedoch eine endliche Dicke $h > 0$. Die Gehäuseverschiebung $s = (s_\alpha, s_\beta, s_n)^T$ eines jeden Ortes (α, β, n) kann als Überlagerung der Mantelflächenverschiebung $s_{\mathcal{M}}$ und einem linear mit der Normalen-Komponente n ($-h/2 \leq n \leq h/2$) variierenden Biegewinkelvektor $\gamma_{\mathcal{M}}$ ausgedrückt werden [34]:

$$s(t, \alpha, \beta, n) = s_{\mathcal{M}} + n\gamma_{\mathcal{M}} \quad (2.55)$$

mit $\gamma_{\mathcal{M}} = [\gamma_\alpha, \gamma_\beta, 0]^T$. Durch die Definition einer stetigen Gehäuseform lässt sich nun das Ziel einer analytisch geschlossenen Lösung erreichen. Hierfür wird das Verdichtergehäuse vereinfacht als kreisförmiger und geschlossener Zylinder beschrieben. Das bis hierher verwendete krummlinige Koordinatensystem schließt den Spezialfall der zylindrischen Koordinaten ein. Der Übergang zur Zylinderform erfolgt durch die Annahme einer in radialer Richtung θ mit dem Radius R konstant entfernten Mantelfläche sowie einer verschwindenden Krümmung in axialer Richtung x :

$$\alpha = x/R, \quad \beta = \theta, \quad n = r. \quad (2.56)$$

Der kinematische Ansatz nach Gleichung (2.55) liefert zwar bereits eine Möglichkeit, die Strukturverschiebung s zu messen, umfasst jedoch noch kein Modell der Beziehungen zwischen den Punkten P der mittleren Mantelfläche. Dazu kann die kinetische Grundgleichung für ein differentielles Stück der mittleren Mantelfläche herangezogen werden. Für kleine Auslenkungen lautet die kinetische Grundgleichung in den drei Raumkoordinaten (x, θ, n) dann (vgl.

[108]):

$$F_A = M \ddot{s}_{\mathcal{M}} + D \dot{s}_{\mathcal{M}} + K s_{\mathcal{M}} \quad (2.57)$$

mit der Verschiebung der mittleren Mantelfläche $s_{\mathcal{M}} = (s_x, s_\theta, s_r)^T$, der Massenmatrix M , der Dämpfungsmatrix D , der Steifigkeitsmatrix K sowie der anregenden Flächenkraft F_A . Für ein homogenes und isotropes Material entfällt die Richtungsabhängigkeit der Matrizenelemente und sie reduzieren sich zu Faktoren:

$$F_A = \rho h \ddot{s}_{\mathcal{M}} + \lambda \dot{s}_{\mathcal{M}} + (\kappa + L) s_{\mathcal{M}} \quad (2.58)$$

wobei ρ die Dichte des Materials, λ die Dämpfungskonstante und κ die Elastizitätskonstante sind. Die Matrix L ist ein 3×3 Differentialoperator dessen Elemente vom gewählten Modellansatz abhängen. Verschiedene Modellansätze werden in [114] diskutiert. Eine freie ungedämpfte Schwingung ergibt sich für $\lambda = \kappa = 0$ [108, 180]. Dieser Fall soll näher untersucht werden, da hierauf die Berechnung der erzwungenen gedämpften Schwingung aufbaut.

Unter den gegebenen Vereinfachungen kann für die mittlere Mantelfläche des Zylinders eine kontinuierliche Ansatzfunktion gefunden werden. Dieses Vorgehen erfordert eine Modalzerlegung des Verschiebungsfeldes $s_{\mathcal{M}}$ in einzelne Moden s_{mk} (vgl. [34, 115]). Die Variablen m und k geben die Modenzahl in axiale Richtung x und tangentialer Richtung θ an. Die für eine numerische Lösung notwendige Begrenzung der Modenzahl verursacht einen Abbruchfehler \mathcal{R} . Gleichzeitig werden die Freiheitsgrade auf eine endliche – und damit berechenbare – Menge reduziert:

$$s_{\mathcal{M}} = \sum_{m=0}^M \sum_{k=0}^K s_{mk} + \mathcal{R}. \quad (2.59)$$

Die Mode s_{mk} ist eine Eigenfunktion des Verschiebungsfeldes. Für $M, K \rightarrow \infty$ lässt sich jede Schwingungsform des Verschiebungsfeldes durch eine Summe von Moden entwickeln [34]. Weiterhin existiert eine Abhängigkeit der Mode s_{mk} von den vorherrschenden Randbedingungen am Untersuchungsobjekt. Es wird von einer Fixierung der zylindrischen Flansche des Verdichtergehäuses in radialer und tangentialer Richtung ausgegangen. Aufgrund der hohen Trägheit in vertikaler Richtung und der Materialverstärkung der Anflanschung liegt eine Fixierung des Verdichtergehäuses auf der Eintrittsseite $x = 0$ und der Austrittsseite $x = L$ vor. Innerhalb der Theorie elastischer Strukturen wird dabei von einer einfachen Unterstützung gesprochen. Dies entspricht der Anbringung einer kreisrunden dünnen Platte an den Flanschen. Eine solche Platte besitzt eine hohe Steifigkeit in tangentialer und radialer Richtung. Dadurch werden die θ - und n -Komponente gegenüber der x -Komponente stark unterdrückt. Entsprechend können die Normalkraft $F_{N,x}$ und das Biegemoment M_x an der Grenze vernachlässigt werden. Auf diese Weise treten keine Reflexionen auf. Folgende Randbedingungen muss die Ansatzfunktion s_{mk} nun erfüllen [114]:

$$\begin{pmatrix} s_\theta, s_r \\ F_{N,x} \\ M_x \end{pmatrix} = 0 \text{ für } x = 0, L_C. \quad (2.60)$$

Vor der Berechnung der Eigenfrequenzen muss noch eine weitere Vereinfachung in Bezug auf die Ansatzfunktion s_{mk} erfolgen. Diese Vereinfachung besteht in der Aufspaltung des zeitabhängigen Verschiebungsfeldes in einen ortsabhängigen Term $A_{mk}(x, \theta)$ sowie einen

zeitabhängigen Term $\Omega_{mk}(t)$ (vgl. [34]):

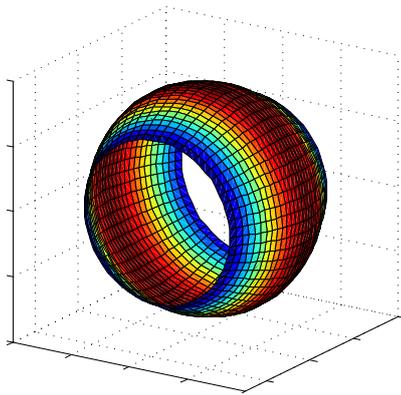
$$s_{mk}(x, \theta, t) = A_{mk}(x, \theta) \Omega_{mk}(t). \quad (2.61)$$

Hierbei beschreibt A_{mk} die Schwingungsform einer Mode des Verschiebungsfeldes und Ω_{mk} dessen zeitliche Veränderung. Folgender Ansatz kann für einen dünnen endlichen Zylinder mit einfacher Unterstützung gemacht werden (vgl. [114, 115]):

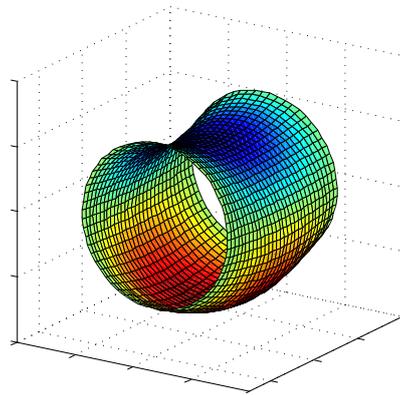
$$A_{mk}(x, \theta) = \begin{pmatrix} A_{mk,x} \\ A_{mk,\theta} \\ A_{mk,r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A}_{mk,x} \cos(\pi m x / L_C) \cos(k \theta) \\ \hat{A}_{mk,\theta} \sin(\pi m x / L_C) \sin(k \theta) \\ \hat{A}_{mk,r} \sin(\pi m x / L_C) \cos(k \theta) \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

mit den Amplituden \hat{A}_{mk} in die drei Raumrichtungen und der Frequenz ω_{mk} für die Mode $\{mk\}$. Neben den Randbedingungen (2.60) garantiert dieser Ansatz die für geschlossene Zylinder notwendige Periodizität in tangentialer Richtung. Nun werden der Ansatz für die Modalzerlegung (2.59) und der Ansatz für das Verschiebungsfeld (2.62) in die Bewegungsgleichung (2.58) substituiert. Zusammen mit $\lambda = \kappa = 0$ und mit $\Omega_{mk}(t) = \cos(\omega_{mk} t)$ für die freie ungedämpfte Schwingung lässt sich für jede Mode $\{mk\}$ eine Bestimmungsgleichung für die zugehörigen Eigenfrequenzen ω_{mk} formulieren:

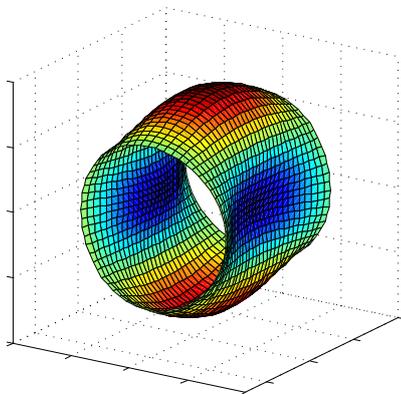
$$(L_{mk} - \rho h \omega_{mk}^2 E) A_{mk} = 0 \quad (2.63)$$



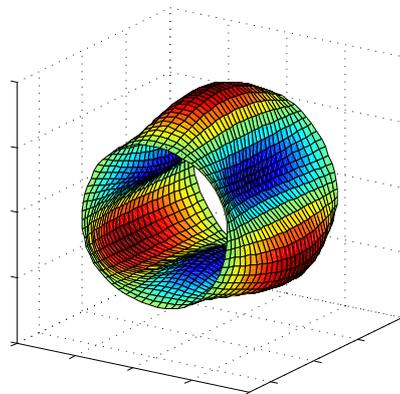
(a) Für die Mode $m = 1, k = 0$.



(b) Für die Mode $m = 1, k = 1$.



(c) Für die Mode $m = 1, k = 2$.



(d) Für die Mode $m = 1, k = 3$.

Abbildung 2.8. Verschiebungsfeld der radialen Bewegung.

wobei L_{mk} nun eine reelle 3×3 Matrix und E die 3×3 Einheitsmatrix ist. Außer der trivialen Lösung $A_{mk} \equiv 0$ hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen, wenn der Klammerterm singular ist. Durch das Nullsetzen der Frequenzdeterminante $\det(L_{mk} - \rho h \omega_{mk}^2 E)$ lässt sich schließlich die der Mode $\{mk\}$ zugehörige Eigenfrequenz ω_{mk} ermitteln. Die Symmetrie von L_{mk} führt bei dieser Auswertung zu drei reellen Eigenfrequenzen ω_{mk}^i , $i = 1 \dots 3$. Jede Mode $\{mk\}$ schwingt also in drei unterschiedlichen Frequenzen ω_{mk}^i . Entsprechend des Beitrags zu den Amplituden des Verschiebungsfeldes \hat{A}_{mk} kann eine mit der Frequenz ω_{mk}^i schwingende Mode $\{mk\}$ als tendenziell axial, tangential oder radial klassifiziert werden. Da die von einem Sensor gemessenen Schwingungen radialer Natur sind, illustrieren die Abbildungen 2.8 beispielhaft verschiedene Moden $\{mk\}$ der radialen Bewegung. Die überproportional ausgeprägten Verschiebungen dienen lediglich der Verdeutlichung der entsprechenden Mode. Die Abbildungen zeigen weiterhin die Abhängigkeit des Messergebnisses vom Ort der Messung.

2.2.3 Erzwungene Schwingungen des dünnwandigen Zylinders

Während des Betriebs wird das Verdichtergehäuse zum Schwingen angeregt. Es stellt sich damit eine erzwungene Schwingung ein, die maßgeblich durch den inhomogenen Ansatz bestimmt wird. Die zu lösende inhomogene Bewegungsgleichung (2.58) lautet mit den im letzten Abschnitt vorgestellten Vereinfachungen:

$$f_A(t) = \sum_{m=0}^M \sum_{k=0}^K \left[\ddot{\Omega}_{mk} + \frac{\lambda}{\rho h} \dot{\Omega}_{mk} + \frac{1}{\rho h} (\kappa + L) \Omega_{mk} \right] A_{mk} \quad (2.64)$$

mit der spezifischen Flächenkraft $f_A(t) = (f_{A,x}, f_{A,\theta}, f_{A,r})^T$. Der Term LA_{mk} kann nun durch den freien Schwingungsfall gemäß Gleichung (2.63) ersetzt werden. Nach der Substitution ergibt sich folgende Bewegungsgleichung: (vgl. [180]):

$$f_A(t) = \sum_{m=0}^M \sum_{k=0}^K \left[\ddot{\Omega}_{mk} + \frac{\lambda}{\rho h} \dot{\Omega}_{mk} + \left(\frac{\kappa}{\rho h} + \omega_{mk}^2 \right) \Omega_{mk} \right] A_{mk} \quad (2.65)$$

für die eine Lösung $\Omega_{mk}(t)$ gesucht wird. Hierbei lässt sich der Umstand ausnutzen, dass die Eigenfunktion (2.62) ein vollständiges Orthogonalsystem beschreibt. In diesem Fall wird das System als abgeschlossen bezeichnet und es kann keine Energie über die Ränder abwandern [34]. Gleichzeitig gilt die Orthogonalitätsrelation:

$$\iint_{\mathcal{M}} (A_{m_1 k_1})^T A_{m_2 k_2} d\mathcal{M} = (\delta_{m_1 m_2})_{k_1 k_2} \Lambda_{mk} \quad (2.66)$$

mit

$$\Lambda_{mk} = \iint_{\mathcal{M}} (A_{mk})^T A_{mk} d\mathcal{M} \quad (2.67)$$

sowie mit dem KRONECKER-Delta δ ($\delta = 1 \forall m_1 = m_2 \cap k_1 = k_2$, $\delta = 0 \forall m_1 \neq m_2 \cup k_1 \neq k_2$). Es verschwinden also alle Summanden mit ungleichen Indizes. Dieses Ergebnis lässt sich direkt für die Lösung der Bewegungsgleichung (2.65) anwenden. Hierzu erfolgt die Transponierung von (2.65), die Multiplikation mit A_{mk} und die Integration über die mittlere Mantelfläche \mathcal{M} . Damit kann die Bewegungsgleichung der erzwungenen Schwingung (2.65) für jede Mode

$\{mk\}$ in (2.65) separat gelöst werden. Dabei fließt die Anregung $f_A(t)$ in eine äquivalente, zeitabhängige Funktion $f_{mk}(t)$ ein:

$$f_{mk}(t) = \ddot{\Omega}_{mk} + \frac{\lambda}{\rho h} \dot{\Omega}_{mk} + \left[\frac{\kappa}{\rho h} + (\omega_{mk})^2 \right] \Omega_{mk} \quad (2.68)$$

mit

$$f_{mk}(t) = \frac{1}{\Lambda_{mk}} \iint_{\mathcal{M}} f_A(t)^T A_{mk} d\mathcal{M}. \quad (2.69)$$

Für den Fall schwacher Dämpfung mit $(\lambda/2\rho h)^2 < (\kappa/\rho h + \omega_{mk}^2)$ und verschwindender Initialverschiebung lässt sich folgende Lösung mit der gedämpften Eigenfrequenz ν_{mk} angeben (vgl. [108]):

$$\Omega_{mk}(t) = \frac{1}{\nu_{mk}} \int_0^t f_{mk}(\tau) \exp(-\lambda(t-\tau)/2\rho h) \sin(\nu_{mk}(t-\tau)) d\tau \quad (2.70)$$

mit

$$\nu_{mk} = \sqrt{(\kappa/\rho h) + \omega_{mk}^2 - (\lambda/2\rho h)^2}. \quad (2.71)$$

Damit liegt die Lösung der Bewegungsgleichung vor. Nach der Superposition aller Moden gemäß (2.59) führt dies zum fremderregten Verschiebungsfeld der mittleren Mantelfläche. Im Bereich der rotierenden Maschinen werden üblicherweise einachsige Sensoren verwendet. Wenn Querempfindlichkeiten unberücksichtigt bleiben, erfasst ein auf dem Verdichtergehäuse platzierter Sensor die radiale Gehäuseverschiebung $y_G(x, \theta, t)$. Nach Gleichung (2.55) ist die radiale Bewegung über die gesamte Gehäusedicke konstant. Damit entspricht die radiale Bewegung der Gehäuseoberfläche $y_G(x, \theta, t)$ der radialen Bewegung der mittleren Mantelfläche $s_r(x, \theta, t)$. Unter Berücksichtigung der drei reellen Eigenfrequenzen zu einer Mode $\{mk\}$ ergibt sich:

$$y_G(x, \theta, t) = \sum_{m=0}^M \sum_{k=0}^K \sum_{i=1}^3 \frac{A_{mk,r}^i(x, \theta)}{\nu_{mk}^i} \int_0^t f_{mk}^i(\tau) \exp(-\lambda(t-\tau)/2\rho h) \sin(\nu_{mk}^i(t-\tau)) d\tau. \quad (2.72)$$

Gleichung (2.72) beschreibt die Gehäuseverschiebung als Superposition unterschiedlich stark angeregter Moden und stellt im Wesentlichen eine Summe von Faltungsintegralen dar. Der Wert des Anregungsterms $f_{mk}^i(\tau)$ skaliert die in Gleichung (2.72) auftretende Verschiebungsfunktion. Diese kennzeichnet sich im Fall reibungsbehafteter Vorgänge durch eine mit der Abklingkonstante $\lambda/2\rho h$ abnehmende harmonische Schwingung. Weiterhin kann der Term vor dem Faltungsintegral als Amplitude $B_{mk,r}^i$ der radialen Bewegung einer Mode $\{mk\}$ aufgefasst werden. Aufgrund der Kommutativität der Faltungsoperation lässt sich (2.72) für eine gegebene Mode $\{mk\}$ und eine gegebene Eigenfrequenz ω_{mk}^i wie folgt umformulieren:

$$\begin{aligned} y_{G,mk}^i(x, \theta, t) &= B_{mk,r}^i(x, \theta) \int_0^t H_{mk}^i(\tau) f_{mk}^i(t-\tau) d\tau \\ &= B_{mk,r}^i(x, \theta) (H_{mk}^i * f_{mk}^i)(t) \end{aligned} \quad (2.73)$$

mit

$$B_{mk,r}^i(x, \theta) = \frac{A_{mk,r}^i(x, \theta)}{\nu_{mk}^i}, \quad (2.74)$$

$$H_{mk}^i(\tau) = \exp(-\lambda\tau/2\rho h) \sin(\nu_{mk}^i\tau). \quad (2.75)$$

In diesem Zusammenhang kann H_{mk}^i als Impulsantwort des Gehäuses für die radiale Bewegung der Mode $\{mk\}$ bei gegebener Eigenfrequenz ω_{mk}^i interpretiert werden. Gleichung (2.73) beschreibt damit ein Filter. Anregende Frequenzen können je nach Lage im Körperschallspektrum verstärkt (bei Lage in der Nähe einer Eigenfrequenz) oder auch gedämpft werden und damit gegebenenfalls nicht mehr sichtbar sein.

3 Körperschallanalyse

Zentraler Gegenstand dieses Kapitels ist die Erkennung des aerodynamischen Zustands eines einstufigen Radialverdichters auf Basis der Körperschallmessung. Im Gegensatz zu den invasiven Methoden, die einleitend in Abschnitt 3.1.1 zusammengefasst werden, erfolgt die Datenerfassung durch eine minimal instrumentelle und nichtinvasive Beschleunigungsmessung am Verdichtergehäuse. Darauf aufbauend wird in Abschnitt 3.1.2 der aktuelle Forschungsstand in Bezug auf die Erkennung des aerodynamischen Verdichterzustandes erläutert. Die bisher genutzten Verfahren beruhen im Wesentlichen auf der Auswertung tonaler Komponenten des Körperschallspektrums sowie unterschiedlicher Frequenzbänder ohne Signalmodell. Im Rahmen dieser Arbeit hingegen wird eine modellbasierte Signalanalyse der breitbandigen Gehäuseanregung verwendet. Dazu wird in Abschnitt 3.2 auf die Geräuschenstehung in Turboverdichtern eingegangen. Die Geräusche lassen sich in tonale Komponenten (Abschnitt 3.2.1) und breitbandige Komponenten (Abschnitt 3.2.2) einordnen. Anschließend wird die modellbasierte Signalanalyse zur Auswertung der breitbandigen Komponenten in Abschnitt 3.3 vorgestellt. Als Ergebnis dieses Kapitels liegt der Algorithmus für die Verarbeitung des Körperschallsignals vor. Die algorithmische Auswertung umfasst eine Vorverarbeitung durch Bandpassfilterung und Entfaltung, die BAYESSche Schätzung der Signalvarianz und die abschließende Verarbeitung durch einen gleitenden Mittelwertfilter.

3.1 Stand der Forschung

3.1.1 Invasive Früherkennung des Pumpens und der rotierenden Abrissströmung

Dem Pumpen und der rotierenden Abrissströmung gehen Vorläufer einer Ablösung voraus. Durch eine Früherkennung ist die Entwicklung von Regelungsverfahren möglich, die gefährdete Betriebszustände erkennen und entsprechend sichernd eingreifen können [179]. Seit Anfang der 1990er-Jahre wird diese Art der Früherkennung durch invasive Messung untersucht. Die Verfahren beruhen entweder auf der Auswertung mehrerer Messsignale (umfangsverteilte oder axialverteilte Druckaufnehmer und Hitzdrahtsonden) oder eines einzigen Messsignals (Druckaufnehmer).

Einen erfolgreichen Ansatz mittels einer Anordnung umfangsverteilter Druckaufnehmer und Hitzdrahtsonden entwickelten GARNIER ET AL. [56]. Hierbei wurde eine räumliche diskrete FOURIER-Transformation (DFT) über die Signale durchgeführt. Dies erlaubte die Messung und Überwachung von Amplitude und Phase modaler Störungen in drei Axialverdichtern. Das Verfahren hat sich inzwischen in Laboranordnungen als weitgehend zuverlässig für die Erkennung von Modalwellen herausgestellt. Dies bestätigt auch die entsprechende Patentliteratur, zum Beispiel [45, 67, 175]. Durch ein mehrstufiges Verfahren unter Anwendung eines GABOR-Spektrogramms und räumlicher DFT konnten KIM und FLEETER [107] ähnliche Resultate erreichen. Ein mehrstufiges Verfahren entwickelten TRYFONIDIS ET AL. [168] mit der Traveling Wave Energy (TWE)-Analyse. Dieses Verfahren beginnt wiederum mit einer räumlichen DFT. Die anschließende Auswertung der spektralen Leistungsdichte quantifiziert die Energie umlaufender Modalwellen, deren Amplituden sich beim Übergang in den instabilen Zustand erhöhen. TRYFONIDIS ET AL. konnten anschließend die Möglichkeit zur Früherkennung experimentell unter Beweis stellen. Die Vorhersage war an neun Hochdruckverdichtern im Bereich von 100 bis 200 Umdrehungen vor dem Einsetzen der rotierenden Abrissströmung möglich. Zunächst war die TWE-Analyse ausschließlich zur Detektion von Modalwellen gedacht. Inzwischen zeigte dieses Verfahren aber auch die Fähigkeit zur Erkennung des Spike-Auslösemechanismus [172]. In [33] wird eine Regelstrategie vorgestellt, die modale Störungen erkennt und eine Gegenreaktion in einem axialen Hochgeschwindigkeitsverdichter auslöst. Hierfür wurden hochdynamische Druckaufnehmer entlang der axialen Achse montiert. Damit ließen sich modale Störungen anhand ihrer Frequenz und Amplitude bewerten. Hierzu erfolgte die Integration der spektralen Leistungsdichte über einen gegebenen Frequenzbereich. Das resultierende Merkmal entscheidet dann mittels Grenzwertvergleich über die Öffnung eines Auslassventils. Hingegen nutzten CAMERON und MORRIS [30] eine gefensterter Kreuzkorrelationsfunktion für zwei unterschiedlich lokalisierte Druckaufnehmer. Die Detektion von umlaufenden Störungen konnte durch die Integration über den maßgeblichen Bereich der Rotationsgeschwindigkeit ermöglicht werden. Das zugehörige Merkmal zeigte für den von CAMERON und MORRIS untersuchten axialen Hochgeschwindigkeitsverdichter eine deutliche Veränderung. Eine Allgemeingültigkeit ist aufgrund der geringen Datengrundlage jedoch nicht sichergestellt. Ein weiteres Verfahren zur Erkennung des Verdichterzustandes geht auf SHEARD ET AL. zurück [153]. Die Autoren untersuchten den Fluidschall im Ringraum eines Axialventilators mit einer Anordnung von Mikrofonen, die bündig mit der Wandinnenseite installiert wurden.

Die bisher vorgestellten Verfahren benötigen eine aufwendige Instrumentierung durch mehrere verteilte Sensoren. Für einen praktischen Einsatz ist diese Vorgehensweise aufgrund hoher Installations- und Wartungskosten nicht als zweckmäßig zu bezeichnen. Daher kommen diese Messanordnungen nur in der Forschung zum Einsatz. Für den industriellen Gebrauch muss der instrumentelle Aufwand möglichst gering gehalten werden. Beispielsweise zeigte GRAUER [66], dass umlaufende Störungen auch durch die Auswertung nur eines Druckaufnehmers detektiert werden können. Er nutzte sowohl eine zeitliche DFT als auch eine Wavelet-Transformation. LEINHOS ET AL. [113] demonstrierten einen Regler zur Pumpvermeidung, dessen Sollwert auf Basis einer Wavelet-Analyse berechnet wurde. Durch die Ansteuerung eines Auslassventils konnte in den meisten Fällen der Eintritt in die Instabilität verzögert oder vermieden werden. Ein ebenfalls auf der Wavelet-Analyse beruhendes Merkmal stellte UHLMANN [172] vor. Signifikante Änderungen beobachtete er im Frequenzbereich bis 500 Hz. Eine Detektion war mit diesem Vorgehen zwischen 0,1 s und 1,3 s vor Eintritt der rotierenden Abrissströmung möglich. Die Früherkennung konnte damit ohne Gewährleistung der Übertragbarkeit auf andere Systeme belegt werden, wenngleich die Vorwarnzeiten für eine ausreichende Gegenmaßnahme teilweise zu gering sind. Insbesondere erhöhtes Grundrauschen und eine hohe Drosselgeschwindigkeit äußerten sich als maßgebliche Störfaktoren. Eine weitere Anwendung der Wavelet-Analyse zum Zweck der Erkennung von Verdichterinstabilitäten an den Schaufelspitzen zeigten LIN ET AL. [124]. Ein umfangreicher Beitrag zur Thematik minimaler Instrumentierung geht auf METHLING [129] zurück. Neben der zeitlichen DFT evaluierte METHLING ein künstliches neuronales Netzwerk (KNN). Diese Methode kann besser mit Unsicherheiten umgehen und besitzt im Allgemeinen eine hohe Erkennungsrate, wenn ausreichend Trainingsdaten vorliegen. Allerdings identifizieren KNN nicht direkt eine aerodynamische Instabilität, sondern klassifizieren vielmehr den Verdichtierzustand. Dabei erfolgt eine Trennung in einen sicheren und einen unsicheren Betriebsbereich. Der Erfolg war bei den Untersuchungen von METHLING jedoch nur für gut reproduzierbare Signale und stationäre Betriebsbedingungen gegeben. Unter dem Wirken von Arbeitspunktveränderungen erreichte die Klassifikation kein zufriedenstellendes Niveau. Eine kontinuierliche Ermittlung des PGA war deshalb nicht möglich. METHLING präsentierte mit der Cepstralanalyse einen weiteren Ansatz für die Früherkennung. Dieses Verfahren hebt auch schwache harmonische Komponenten des auszuwertenden Signals hervor. Im resultierenden Merkmal äußern sich die harmonischen Komponenten als Hervorhebung der zugehörigen Quereigenfrequenz. METHLING nutzte zur Analyse dominanter harmonischer Komponenten ein Leistungscepstrum, das aus den Daten eines Wanddruckaufnehmers berechnet wurde. Die von ihm durchgeführten Experimente zeigten, dass sich einige dieser Komponenten bei Annäherung an die Pumpgrenze reproduzierbar veränderten. Diese „Intensität der Blattfolgefrequenz“ [129] charakterisierte METHLING schlussfolgernd als geeignetes Maß für die Verdichterstabilität in einem weiten Lastbereich für den untersuchten vierstufigen transsonischen Axialverdichter. Insbesondere die Abhängigkeit des berechneten Merkmals von der Fördermenge ermöglichte die kontinuierliche Bestimmung des PGA. Das Verfahren beruht jedoch auf der Annahme einer proportionalen Abhängigkeit zwischen charakteristischen Drehfrequenzen und dem Anströmwinkel sowie der Anströmgeschwindigkeit. Daher ist das Verfahren auf Verdichtersysteme mit dieser besonderen Abhängigkeit beschränkt. BRIGHT ET AL. [26] hingegen nutzten eine auf dem Korrelationsintegral basierende Technik. Damit waren im untersuchten System Vorwarnzeiten von bis zu 2000 Rotorumdrehungen möglich. In einer weiteren Untersuchung von fünf verschiedenen

Konfigurationen eines axialen Hochgeschwindigkeitsverdichters wurde die Fähigkeit zur Früherkennung unter gestörter Einlaufströmung sowie geregelter und statischer Luftenblasung durch BRIGHT ET AL. weiter erforscht [27]. Vor allem beim modalen Auslösemechanismus zeigte der berechnete Korrelationsfaktor eine erhebliche Veränderung. Weniger deutlich fiel die Reaktion auf einen Spike aus. Für korrelationsbasierte Verfahren existieren auch Untersuchungen an Radialverdichtern. SUN ET AL. [164] entwickelten hierfür eine Variante des Korrelationsintegrals für Echtzeitanwendungen. Die Auswertung des Drucks auf der Austrittsseite eines einstufigen Niedergeschwindigkeitsverdichters ermöglichte die Detektion 1 bis 2 s vor dem Eintritt in den Pumpzustand.

Eine Gegenüberstellung verschiedener Verfahren findet man zum Beispiel bei REUSS [146]. Er untersuchte einen fünfstufigen axialen Hochdruckverdichter. Die Anwendung der Kurzzeit-FOURIER-Transformation (STFT) auf einen Wanddrucksensor ermöglichte keine Früherkennung. Sowohl die TWE-Analyse als auch die Wavelet-Analyse ließen sich mit einem gewissen Erfolg anwenden. Unter dem Vorhandensein von Eintrittsstörungen lieferten diese Verfahren aufgrund der Überdeckung wichtiger Frequenzbereiche oft nur ein verrauschtes Spektrum. Die damit einhergehenden Fehlinterpretationen senken die Praxistauglichkeit. Gleiches gilt für die Schwierigkeiten bei der Ermittlung passender Schwellwerte für die Detektion. Die Wavelet-Analyse erzeugt laut REUSS zwar schärfere Spektren, den Detektionserfolg bezeichnete er dennoch als mäßig. Zu einem ähnlichen Ergebnis in Bezug auf die DFT eines Wanddrucksignals kommt METHLING [129]. In seiner Untersuchung an einem vierstufigen Axialverdichter zeigten sich zwar Veränderungen in bestimmten Frequenzbereichen; diese konnte jedoch nicht für alle Drehzahlen reproduziert werden. Einen weiteren Vergleich zeigen CAMERON und MORRIS [30]. Die mehrere Aspekte umfassende Gegenüberstellung (zeitliche und räumliche Auflösung, Detektierbarkeit umlaufender Störungen, Parameterrobustheit, Fähigkeit der Früherkennung) stellte die räumliche DFT als schwächste Methode dar. Eine bessere Gesamtbeurteilung erhielten die TWE-Analyse und die Wavelet-Analyse, wobei diese deutliche Unterschiede in den einzelnen Aspekten aufwiesen. Die beste Bewertung erhielt ein auf der räumlichen Korrelation beruhendes Verfahren, das von CAMERON und MORRIS [30] vorgestellt wurde. Eine weitere vergleichende Analyse geht auf HÖSS ET AL. [95] zurück. Mit der zeitlichen DFT war die Früherkennung aufgrund schwacher Nutzsignale schwierig bis unmöglich. Die räumliche DFT ist hingegen gut geeignet, wenn sich die Instabilität durch eine Modalwelle ankündigt. Die TWE-Analyse detektierte sowohl Modalwellen als auch für Spikes und ist daher für die Früherkennung gut geeignet. Ein ähnliches Ergebnis ermöglichte die Wavelet-Analyse eines Drucksignals, wobei etwas längere Vorwarnzeiten gegenüber der TWE-Analyse erzielt wurden.

Zusammenfassend lässt sich der Stand der Forschung durch die Anwendung von Merkmalen beschreiben, die auf der Veränderung der Leistung oder Energie des Spektrums oder einer Korrelationsfunktion basieren. Jedes dieser Merkmale wurde mehr oder weniger erfolgreich bei bestimmten Verdichtern eingesetzt. Eine Allgemeingültigkeit konnte bisher höchstens bei modalen Störungen in axialen Verdichtersystemen nachgewiesen werden. Für Radialverdichter ist eine Aussage kaum möglich, da entsprechende Untersuchungen fehlen. Den bisherigen Ergebnissen zufolge mangelt es insbesondere an der Zuverlässigkeit. Ferner sind die Vorwarnzeiten für eine ausreichende Gegenreaktion teilweise zu gering. Daher liegt noch keine Information zu einem Praxistransfer vor.

3.1.2 Nichtinvasive Erkennung des aerodynamischen Verdichterzustandes

Aufgrund der Kopplung zwischen Fluid- und Körperschall müssen sich physikalische Vorgänge in der Verdichterströmung auch im Körperschall manifestieren. Das eröffnet die Möglichkeit, Informationen über den Zustand der Verdichterströmung durch Auswertung des Körperschalls zu gewinnen. Aus diesem Grund wurde von 2009 bis 2011 ein Forschungsprojekt zwischen der HTWK Leipzig und der AviComp Controls GmbH eingerichtet. Das Ziel bestand in der Evaluierung verschiedener Ansätze zur Klassifikation des aerodynamischen Verdichterzustandes auf Basis der Körperschalldaten. Aufgrund der komplexen Wellenausbreitung in elastischen Strukturen ist die Datenaufnahme und -auswertung verteilter Sensoren sehr aufwendig. Dieser Aufwand ist aus Sicht einer minimalen Instrumentierung wenig wünschenswert. Daher beschränkte sich die Sensorik auf eine einzelne Beschleunigungsmessung am Verdichtergehäuse. Die grundlegende Schwierigkeit besteht in der geringen Selektivität des Körperschallsignals im Vergleich zu invasiven Messungen sowie der Veränderung des Signals durch die Gehäuseübertragung. Insgesamt wurden Merkmale aus folgenden drei Kategorien untersucht:

- statistische Verfahren,
- Zeit-Frequenz-Verfahren und
- korrelationsbasierte Verfahren.

In der ersten Klasse wurden Stationaritätsanalysen sowie statistische Verteilungstests durchgeführt. Hierbei konnte jedoch kein eindeutiger Zusammenhang zum aerodynamischen Verdichterzustand gefunden werden. Ferner verursachen diese Verfahren eine vergleichsweise große Zeitverzögerung bis zur Detektion eines Ereignisses.

Aus dem Bereich der Zeit-Frequenz-Verfahren wurden neben der STFT- auch die Cepstral- und Wavelet-Analyse genutzt. Die untersuchten Merkmale bezogen sich entweder auf die Auswertung einer oder mehrerer charakteristischer Frequenzen oder eines vollständigen Frequenzbandes. Mehrere Merkmale konnten als mögliche Indikatoren einer Zustandsveränderung identifiziert werden. Jedoch war ein konkreter physikalischer Bezug zum aerodynamischen Verdichterzustand nicht auffindbar. Ferner konnte keines der Merkmale eine zuverlässige Klassifikation durch einfache Schwellwertüberschreitung ermöglichen. Dies führte zu Fehlklassifikationen, indem ein sicherer Zustand als unsicher erkannt wurde. Daher wurde eine Kombination mehrerer Merkmale in einem mehrdimensionalen Merkmalsraum und unter anschließender Anwendung von Klassifikationsmethoden untersucht. Die Klassifikation übernahm ein künstliches Immunsystem [149]. Damit konnte das Klassifikationsergebnis verbessert werden. Eine vollständige Unterdrückung von Fehlklassifikationen war jedoch nicht möglich. Insbesondere der hohe Trainingsaufwand wirkte sich nachteilig auf den Umfang der Parametrierung aus. Ein weiteres Verfahren basiert auf der Modulation charakteristischer Frequenzen im Körperschallspektrum. Eine Veränderung modulierter Frequenzen konnte in vielen Fällen beobachtet werden, wenn der Verdichter im pumpgrenznahen Bereich betrieben wurde. Zur Detektion und Quantifizierung dieses Effektes kam ein Algorithmus zur Schätzung spezifischer Spektralanteile zum Einsatz [39]. Das zugehörige Merkmal konnte durch einen einfachen Schwellwertvergleich erfolgreich sowohl starke als auch schwache Pumpstöße in den untersuchten einstufigen Radialverdichtern detektieren. Ein direkter Zusammenhang zum aerodynamischen Verdichterzustand war jedoch in mehreren Fällen nicht nachweisbar.

Aus der letzten Kategorie kommen für Körperschallsignale im Zeitbereich nur Verfahren auf Basis der Autokorrelation infrage. Andere korrelationsbasierte Methoden aus dem Zeitbereich können nicht eingesetzt werden, da die starke Verzerrung durch die Gehäuseübertragung sowie Rauschen keine sinnvolle Definition eines Mustersignals erlaubt. Für die Analysen wurde daher eine Autokorrelationssumme eingesetzt.

Zusammenfassend konnten einige Erfolge bei den untersuchten Verdichtern erzielt werden, ohne dass die Ergebnisse einen zufriedenstellenden Zusammenhang mit dem aerodynamischen Verdichterzustand zuließen. Die bisherigen Untersuchungen beschränken sich – wie die Verfahren der invasiven Früherkennung – auf einzelne Frequenzen oder schmalbandige Frequenzbereiche ohne spezifisches Signalmodell. Im Rahmen dieser Arbeit wird eine modellbasierte Signalanalyse für die Auswertung breitbandiger Frequenzbereiche vorgestellt. Diese Entwicklung basiert zu großen Teilen auf den Ergebnissen des gemeinsamen Forschungsprojekts zwischen der HTWK Leipzig und der AviComp Controls GmbH und ist als Weiterführung dieser Untersuchungen zu betrachten.

3.2 Aerodynamische Geräuschquellen in Turboverdichtern

Die Geräuschenstehung durch akustische Abstrahlung der Strömung (direkte Schallerzeugung) sowie die akustische Übertragung an Gehäuse und Rotor (indirekte Schallerzeugung) haben sich als eigene Forschungsgebiete etabliert. Das Ziel dieser Untersuchungen besteht in einer akustisch möglichst optimalen Auslegung (Lärminderung) sowie in der Materialuntersuchung oder in der Gewinnung von Zustandsinformationen einer Maschine (Zustands- und Schadensanalyse) [34]. Letzterer Punkt trifft auf die Ermittlung des aerodynamischen Verdichtierzustandes zu. Insofern wird im Folgenden die Geräuschenstehung in Turboverdichtern näher betrachtet. NEISE und MICHEL charakterisierten hierfür verschiedene aerodynamische Geräusche aufgrund ihrer physikalischen Ursachen [135, 137]. Abbildung 3.1 zeigt die stationären und instationären Schaufelkräfte als Auslöser tonaler und breitbandiger aerodynamischer Geräusche. Diese Schaufelkräfte gelten als die wichtigsten Geräuschauslöser [143] und werden in den beiden folgenden Abschnitten erläutert.

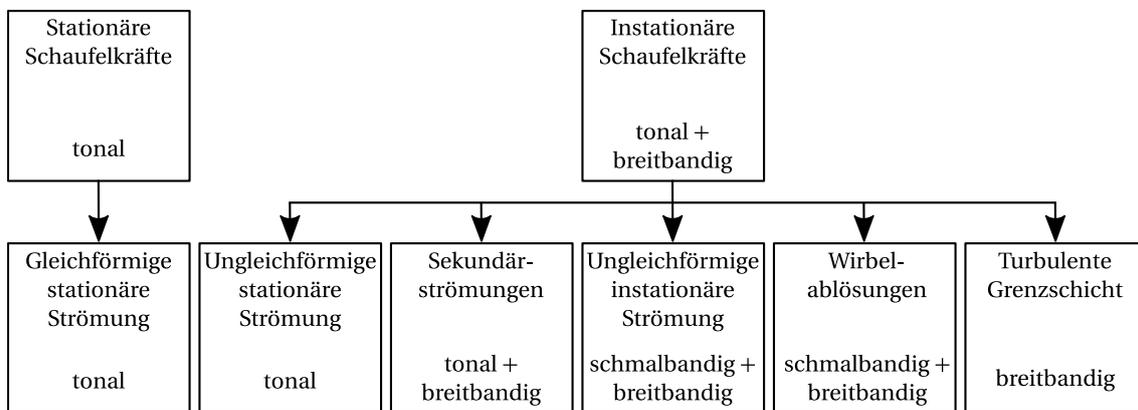


Abbildung 3.1. Klassifikation aerodynamischer Geräusche durch stationäre und instationäre Schaufelkräfte nach NEISE und MICHEL [137].

3.2.1 Tonale Komponenten im Schallspektrum von Radialverdichtern

Gleichförmige stationäre Strömung

Die Rotorbewegung in einem stationären und gleichförmigen Strömungsfeld führt zu rotorgekoppelten und periodischen Druckschwankungen [137]. Ein ortsfester Beobachter nimmt die Druckschwankungen als tonale Komponente im Schallspektrum wahr. Hierbei handelt es sich um die sogenannte Blattfolgefrequenz (BPF) f_{BPF} . In Experimenten an Radialverdichtern von RAITOR und NEISE [144] waren diese Komponenten deutlich erkennbar. Dabei wurden drei Radialverdichter sowohl mit beschaufeltem als auch unbeschaufeltem Diffusor untersucht. Zur Messung kamen wandbündig montierte Mikrofone im Saug- und Druckrohr zum Einsatz. Zusätzlich wurden Druckaufnehmer im Ringraum des Verdichters und im Druckrohr installiert. Für einen Verdichter mit $N_R \in \mathbb{N}_+$ Rotorschaukeln ist die Ordnungszahl der BPF m_{BPF} gegeben durch:

$$m_{BPF}(n_R) = n_R N_R. \quad (3.1)$$

Hierbei ist $n_R \in \mathbb{N}_+$ die Ordnungszahl für die Rotorbewegung. Für $n_R = 1$ ergibt sich die BPF:

$$f_{BPF}(f_R) = N_R f_R. \quad (3.2)$$

Zusammen mit ihren Harmonischen $n_R f_{BPF}$ bildet die BPF den Drehklang der Maschine [143]. Der Drehklang wird auch als GUTIN-Lärm bezeichnet. Mit Anhebung der Drehzahl trat die BPF in den Untersuchungen von RAITOR und NEISE in steigendem Maße hervor [144].

Ungleichförmige stationäre Strömung

Zu instationären Schaufelkräften durch ein ungleichförmiges und stationäres Strömungsfeld tragen verschiedene Erzeugungsmechanismen bei. Der erste Mechanismus beruht auf der Wechselwirkung zwischen Strömung und bewegtem Rotor, beispielsweise bei örtlich ungleich verteilter Anströmung des Rotors [137]. Dies verursacht wiederum BPF-Komponenten im Schallspektrum. Die Abstrahlung ist jedoch effektiver als bei stationären Schaufelkräften, insbesondere an den Schaufelspitzen [137]. Ein weiterer Erzeugungsmechanismus beruht auf der Wechselwirkung von drehenden und feststehenden Teilen im Verdichter [137]. Die Rotorbewegung erzeugt ein mitbewegtes Druckfeld im nichtrotierenden Bezugsrahmen sowie eine Nachlaufströmung, die bei jeder Rotorumdrehung auf die feststehenden Teile treffen [143]. Die feststehenden Teile umfassen Leitgitter und Leitschaufeln sowie die Zunge des Spiralgehäuses. Auf diese Weise werden instationäre Druckgradienten verursacht, die den nach TYLER und SOFRIN definierten Ordnungszahlen des Fluidschalls entsprechen [171]. Wenn der Verdichter über $N_L \in \mathbb{N}_+$ Leitschaufeln verfügt, ergibt sich für die Ordnungszahl der Rotor-Stator-Interaktion (RSI) m_{RSI} :

$$m_{RSI}(n_R, n_L) = n_R N_R \pm n_L N_L \quad (3.3)$$

mit der Ordnungszahl $n_L \in \mathbb{Z}$ für die feststehenden Leitschaufeln. Ein ortsfester Druckaufnehmer im Ringraum des Verdichters nimmt die RSI als tonale Komponente mit folgender Frequenz f_{RSI} wahr [143]:

$$f_{RSI}(n_R, n_L, f_R) = \frac{n_R N_R}{n_R N_R \pm n_L N_L} f_R. \quad (3.4)$$

Instationäre Schaufelkräfte werden auch durch die rotierende Abrissströmung verursacht. Die Störzellen bewegen sich mit einer konstanten Frequenz unterhalb der Rotordrehfrequenz f_R und erzeugen eine tonale Komponente im Schallspektrum; bei mehreren Störzellen können auch Komponenten oberhalb der Rotordrehfrequenz gemessen werden [137]. Ein weiterer Erzeugungsmechanismus basiert auf einer ungleichmäßigen Rotorgeometrie [137]. Da die Rotorschaukeln nicht ideal entlang der Umfangsrichtung verteilt sind, entsteht eine tonale Komponente bei der Rotordrehfrequenz f_R . Diese Komponente moduliert sich darüber hinaus um die BPF im Abstand von f_R . In hohen Drehzahlbereichen trägt ein weiterer Effekt zur Pegelanhebung dieses Geräusches bei. Erreichen die Rotorblattspitzen beim Wechsel in den Überschallbetrieb lokale Schallgeschwindigkeit, wird das mit dem Rotor bewegte Druckfeld zunehmend von Stoßwellen durchsetzt. Wegen der ungleichmäßigen Verteilung der Rotorschaukeln entstehen Unterschiede in Form und Amplitude der Stoßwellen [137]. Das resultierende Geräusch wird als Sägen bezeichnet. RAITOR und NEISE untersuchten den entsprechenden Geräuschauslöser bei Radialverdichtern. Demnach setzt sich das Sägen aus tonalen Komponenten bei der Rotordrehfrequenz und ihren Harmonischen zusammen [144].

Sekundärströmung

Aufgrund des Spalts zwischen Rotorspitzen und Gehäuse sowie dem Druckunterschied zwischen Saug- und Druckseite der Rotorscheufeln wird eine Sekundärströmung durch den Spalt erzeugt. Dieser Vorgang verursacht Blattspitzenwirbel [143] und durch Wirbelablösung eine rotierende Instabilität [137]. Durch die Wechselwirkung zwischen der rotierenden Instabilität und den bewegten Rotorscheufeln entsteht der sogenannte Blattspitzenwirbellärm [143]. Diese Komponente ist von der Rotordrehzahl abhängig [144]. Hierbei nimmt das Geräusch an Intensität zu, wenn der Spalt vergrößert wird oder die Spaltströmung durch hohe Druckunterschiede ansteigt. Dieser Effekt ist bereits von axialen Strömungsmaschinen bekannt [102, 103, 134]. Die exakte Klärung für die Drehzahlabhängigkeit steht noch aus. Es wird allerdings vermutet, dass die Breite des Spalts zwischen Blattspitze und Gehäuse aufgrund von Biegeerscheinungen der Rotorscheufeln sowie infolge von Verschiebungen des Rotors durch ein geschwindigkeitsabhängiges Verhalten der Lagerung nicht konstant bleibt [144]. Das entstehende Geräusch tritt im Bereich von 0 Hz bis f_{BPF} auf [144]. Nach KAMEIER und NEISE lässt sich Ansatz (3.3) für den Blattspitzenwirbellärm modifizieren [103]. Dazu muss die rotierende Instabilität eine von der Rotordrehzahl verschiedene Frequenz aufweisen. Allerdings müssen hierfür die äquivalente Anzahl von Störzellen der rotierenden Instabilität N_{RI} und deren Frequenz f_{RI} bekannt sein. Hieraus lässt sich die Ordnungszahl des Blattspitzenwirbellärms m_{TCN} ableiten:

$$m_{TCN}(n_R, n_{RI}) = n_R N_R - n_{RI} N_{RI} \quad (3.5)$$

mit der Ordnungszahl der dominanten harmonischen Komponenten $n_{RI} \in \mathbb{N}_+$. Daraus ergibt sich eine schmalbandige Komponente um die Frequenz f_{TCN} :

$$f_{TCN}(n_R, n_{RI}, f_R, f_{RI}) = n_R N_R f_R - n_{RI} f_{RI}. \quad (3.6)$$

Bei RAITOR und NEISE war vor allem eine schmalbandige Komponente um die Frequenz f_{TCN} mit $n_{RI} = 1$ zu erkennen [144].

Anregung des Gehäuses

In [64, 173] wurden Beschleunigungsaufnehmer an der Gehäuseoberfläche eines Radialverdichters [64] und eines Radialgebläses [173] montiert. Auf diese Weise konnte das Körperschallspektrum untersucht werden. Da die oben beschriebenen Erzeugungsmechanismen zu einer Kraftwirkung auf das Gehäuse führen, war die BPF-Komponente auch in den Körperschallspektren sichtbar [173]. Die tonalen Komponenten können sich also prinzipiell auch über das Gehäuse fortpflanzen. Da dies jedoch als Filter auf die zu messende Information wirkt, sinkt die Selektivität gegenüber einer invasiven Druck- oder Mikrofonmessung. Ferner breiten sich elastische Wellen schnell über große Distanzen aus. Auf diese Weise vergrößert sich das Einzugsgebiet. Beispielsweise können im Körperschallspektrum weitere tonale Komponenten aus benachbarten Verdichterstufen oder anderen drehenden Maschinen zu finden sein. Weitere tonale Komponenten entstehen durch Anregung der elastischen Struktur bei ihren mechanischen Eigenfrequenzen [173]. Deren Zuordnung ist aufgrund des Übertragungsverhaltens des Gehäuses nicht immer eindeutig möglich.

3.2.2 Breitbandige Komponenten im Schallspektrum von Radialverdichtern

Sekundärströmung

Sekundärströmungen führen bei Vergrößerung des Spalts zwischen Rotorspitzen und Gehäuse auch zu einem Anheben breitbandiger Abstrahlung in die Strömung [136, 137]. Ab einer bestimmten Spaltbreite ist dieser Entstehungsmechanismus signifikant für das Gesamtgeräusch – zumindest für Axialventilatoren [137].

Ungleichförmige instationäre Strömung

Durch zeitveränderliche Störungen bei der Wechselwirkung zwischen Rotor und Strömung tritt ein Verschmieren der von der BPF abhängigen tonalen Komponenten auf. Zeitlich langsame Änderungen führen zu schmalbandigen Komponenten um die BPF; schnelle oder stochastische Änderungen erzeugen ein breitbandiges Geräusch [137]. Insbesondere bei turbulenter Anströmung werden stochastische Schaufelkräfte erzeugt. Neben der Anströmturbulenz beruht ein weiterer Entstehungsmechanismus auf Strömungsablösungen durch das Umlenken der Strömung in drehenden und feststehenden Teilen des Verdichters [137]. Hierfür untersuchten FEHSE und NEISE Einflussfaktoren auf die breitbandige Abstrahlung in Radialventilatoren [49]. Die Analyse von fünf verschiedenen Rotoren ergab, dass niederfrequentes Rauschen durch eine Strömungsablösung im Rotor erzeugt wurde. Insbesondere die Krümmungsradien der Rotorabdeckung beeinflussten die Strömungsablösung. Eine Reduzierung des Krümmungsradius erhöhte den Schalldruckpegel des niederfrequenten Rauschanteils. Ein ähnliches Ergebnis erhielten FEHSE und NEISE bei der Untersuchung zweier Diffusoren mit unterschiedlichem Öffnungswinkel. Bei großem Öffnungswinkel traten Strömungsablösungen auf, die den Schalldruckpegel des niederfrequenten Rauschanteils erhöhten [50].

Wirbelablösungen

Die Ablösung von Wirbeln verändert die Schaufelumströmung [136]. Dadurch werden instationäre Schaufelkräfte hervorgerufen [137]. Wirbelablösungen an Schaufeln entstehen beispielsweise durch große Anstellwinkel und verursachen schmalbandige oder breitbandige Geräusche [136]. Daher können sowohl der Anstellwinkel der Schaufeln als auch die Geschwindigkeit und der Winkel der Anströmung den Anteil breitbandiger Abstrahlung verändern. FUKANO gibt im Weiteren für axiale Ventilatoren an, dass das breitbandige Geräusch bei geringer Anströmturbulenz maßgeblich durch Wirbelablösung verursacht wird [55].

Turbulente Grenzschicht

Auch in vollkommen störungsfreien Strömungen besteht immer eine turbulente Grenzschicht um die Rotorschaukeln [136]. Stochastische Druckschwankungen in der Grenzschicht an den Schaufeln verursachen eine breitbandige Schallabstrahlung, insbesondere beim Umströmen der Hinterkante der Rotorschaukeln [137]. Die untere Pegelgrenze für die breitbandigen Komponenten bilden Druckschwankungen in der turbulenten Grenzschicht der Verdichterströmung; sie werden im Normalfall von den anderen Erzeugungsmechanismen übertönt [136, 137].

Anregung des Gehäuses

In dieser Arbeit wird davon ausgegangen, dass auch breitbandige Geräusche sich über das Gehäuse als Körperschall fortsetzen. Da die Auslöser breitbandiger Schallentstehung – hier insbesondere Sekundärströmungen, Wirbelablösungen und Anströmturbulenz – eng mit der aerodynamischen Stabilität in Verbindung stehen, erscheint eine entsprechende Untersuchung sinnvoll. Dazu wird im nächsten Abschnitt eine spezielle Signalanalyse vorgestellt.

3.3 Modellbasierte Signalanalyse

Gemäß Abschnitt 3.1.2 zeigt die Untersuchung tonaler Komponenten im Körperschallspektrum kein konsistentes Bild hinsichtlich des Zusammenhangs mit dem aerodynamischen Verdichterzustand. Daher sollen die breitbandigen Komponenten näher untersucht werden. Einen maßgeblichen Einfluss auf den Entstehungsprozess breitbandiger Geräuscherzeugung haben Sekundärströmungen, Wirbelablösungen und die instationäre Anströmung. Diese Effekte spielen jedoch auch im Entstehungsprozess aerodynamischer Instabilitäten eine wichtige Rolle. In Abschnitt 1.2.1 werden sie als maßgebliche Einflussfaktoren der aerodynamischen Stabilität beschrieben und unterliegen während der Entstehung aerodynamischer Instabilitäten einer deutlichen Veränderung. Dies führt zu einer Veränderung des Fluidschalls und damit zu einer veränderten Anregung des Verdichtergehäuses. Aufgrund der komplexen Geometrie des Verdichters können die Ausbreitungseffekte bei der Kopplung von Fluid- und Körperschall jedoch nicht direkt berechnet werden. Daher wird ein statistischer Ansatz gewählt, wodurch die genaue Erfassung der Ausbreitungseffekte entfällt. Das Ziel besteht in der Quantifizierung der breitbandigen Anregung des Verdichtergehäuses als Indikator für den aerodynamischen Verdichterzustand. In Abschnitt 3.3.1 wird dazu eine Schätzung für den Erwartungswert der Varianz im Sinne BAYES' vorgestellt. Hierfür muss ein Signalmodell für die anregende Kraft definiert werden. In Abschnitt 3.3.2 erfolgt die konkrete Schätzung der Varianz mithilfe einer Orthonormalisierung des Signalmodells. Der gesamte algorithmische Ablauf, inklusive der notwendigen Vorverarbeitung des Körperschallsignals, wird in Abschnitt 3.3.3 erläutert.

3.3.1 BAYESSche Schätzung der Signalvarianz

Die gehäuseanregende Kraft wird als Superposition von harmonischen Funktionen $A_m g_m(t)$ und einem additiven weißen Rauschen $w(t)$ aufgefasst:

$$y_A(t) = g(t) + w(t) = \sum_{m=1}^M A_m g_m(t) + w(t). \quad (3.7)$$

Ein solches Modell enthält die beiden nach Abschnitt 3.2 maßgeblichen Signaltypen im Körperschall. Die insgesamt M harmonischen Schwingungen modellieren hierbei die tonalen Komponenten des Körperschalls. Der Rauschanteil enthält sowohl das Messrauschen als auch die breitbandige Anregung durch die Strömung. Unter der Annahme eines konstanten Messrauschens ist die Quantifizierung des Einflusses des letzteren Effektes besonders interessant für das aktuelle Untersuchungsziel. Es findet jedoch eine frequenzselektive Übertragung durch das Gehäuse statt. Daher muss zwischen dem anregenden Signal und der gemessenen Gehäuseverschiebung unterschieden werden. Das anregende Signal wird gemäß den individuellen Eigenschaften des Gehäuses durch das Filter H verändert. Die Gehäuseverschiebung wird nach Gleichung (2.73) modelliert:

$$y_G(t) = (H * y_A)(t). \quad (3.8)$$

Um das anregende Signal $y_A(t)$ zu erhalten, muss ein inverses Filter H^{-1} bestimmt werden. Dies wird in Abschnitt 3.3.3 noch einmal gesondert betrachtet. Im Folgenden sei angenommen, dass das Körperschallsignal $y_G(t)$ bereits durch das inverse Filter H^{-1} entfaltet wurde. Dann

liegt die Rekonstruktion des anregenden Signals $y_A(t)$ bis auf einen Proportionalfaktor vor. Nach der Digitalisierung geht die Anregung in ein zeitdiskretes Signal $y_A(t_n)$ über. Gleiches gilt für das additive weiße Rauschen $w(t_n)$. Für die weitere Betrachtung seien zunächst die Zufallsvektoren Θ (interessierender Parameter), Ψ (Nuisance-Parameter) und W_k (Messung des Rauschanteils) als k -ter Datenblock der insgesamt K ermittelten Blöcke mit der konstanten Blocklänge N definiert:

$$\Theta := (\Theta), \quad (3.9)$$

$$\Psi := (\Psi), \quad (3.10)$$

$$W_k := (W_n)_k, \quad k = 1 \dots K, \quad n = 1 \dots N. \quad (3.11)$$

Dann sind $\theta := \{\theta\}$, $\psi := \{\psi\}$ und $w_k := (w_1, w_2, \dots, w_N)_k$ jeweils konkrete Realisierungen der Zufallsvektoren Θ , Ψ und W_k . Dabei entspringt jedes w_k einem stationären GAUSSprozess. Für solche Zufallsprozesse ergibt sich die mittlere Leistung durch den Wert der Autokorrelationsfunktion für verschwindende Verschiebung [104]:

$$P_w = \sigma_w^2 + |\mu_w|^2. \quad (3.12)$$

Aufgrund der Mittelwertfreiheit für die untersuchten Körperschallsignale kann die Leistung der breitbandigen Anregung P_w allein durch die Schätzung des Erwartungswertes der Varianz $E(\sigma_w^2)$ für jeden der K Datenblöcke erfolgen; es gilt also $\theta = \sigma_w^2$. Eine Erhöhung der Varianz wird dann als Leistungszunahme breitbandig abstrahlender Strömungsformen interpretiert. Gesucht wird nun der Erwartungswert der Varianz für den k -ten Datenblock unter der Bedingung, dass die Daten w_k gemessen wurden. Dieser Ansatz führt zum bedingten Erwartungswert $E(\sigma_w^2 | w_k)$ für den k -ten Datenblock:

$$E(\sigma_w^2 | w_k) = \int_0^\infty \sigma_w^2 p(\sigma_w^2 | w_k) d\sigma_w^2. \quad (3.13)$$

Hierbei ist $p(\sigma_w^2 | w_k)$ eine bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte. Sie gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der σ_w^2 unter der konkreten Messung w_k realisiert wird. Die bedingte Dichte $p(\sigma_w^2 | w_k)$ ist nicht bekannt und muss deswegen mithilfe des Satzes von BAYES ersetzt werden:

$$p(\sigma_w^2 | w_k) = \frac{p(w_k | \sigma_w^2) p(\sigma_w^2)}{p(w_k)}. \quad (3.14)$$

Hierbei wird die bedingte Dichte $p(w_k | \sigma_w^2)$ als Likelihood-Funktion bezeichnet. Sie gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der w_k unter der konkreten Varianz σ_w^2 realisiert wird. Weiterhin ist $p(\sigma_w^2)$ die A-priori-Wahrscheinlichkeitsdichte. Sie enthält alle Informationen, die bezüglich der Varianz aufgrund des Vorwissens bestehen. Der Term $p(w_k)$ wird als Evidenz bezeichnet und dient der Normierung. Das Ersetzen von $p(\sigma_w^2 | w_k)$ in Gleichung (3.13) durch den Satz von BAYES (3.14) führt zu:

$$E(\sigma_w^2 | w_k) = \frac{1}{p(w_k)} \int_0^\infty \sigma_w^2 p(w_k | \sigma_w^2) p(\sigma_w^2) d\sigma_w^2. \quad (3.15)$$

Die Zufallsvektoren σ_w^2 und w_k bilden eine gemeinsame multivariate Verteilung, die im Folgenden durch eine Dichte $p(w_k, \sigma_w^2)$ beschrieben wird. Durch die Marginalisierung von $p(w_k, \sigma_w^2)$ lässt sich dann die Evidenz wie folgt berechnen:

$$p(w_k) = \int_0^\infty p(w_k, \sigma_w^2) d\sigma_w^2. \quad (3.16)$$

Als letzter Schritt wird in Gleichung (3.16) die gemeinsame Dichte $p(w_k, \sigma_w^2)$ über die Produktregel der Wahrscheinlichkeitsrechnung $p(w_k, \sigma_w^2) = p(w_k | \sigma_w^2) p(\sigma_w^2)$ ersetzt. Das anschließende Einsetzen in Gleichung (3.15) führt zu:

$$E(\sigma_w^2 | w_k) = \frac{\int_0^\infty \sigma_w^2 p(w_k | \sigma_w^2) p(\sigma_w^2) d\sigma_w^2}{\int_0^\infty p(w_k | \sigma_w^2) p(\sigma_w^2) d\sigma_w^2}, \quad (3.17)$$

wobei nur noch die Likelihood-Funktion und die A-priori-Wahrscheinlichkeitsdichte auftreten. Zur Berechnung des gesuchten Erwartungswertes müssen die beiden Dichten bekannt sein. Die Likelihood-Funktion kann für den k -ten Datenblock über die Definition einer Randverteilungsdichte für einen Messwert w_{kn} abgeleitet werden [25]. Aufgrund der Annahme eines GAUSSprozesses wird hierfür eine GAUSSverteilung genutzt. Die entsprechende Randverteilungsdichte für einen Messwert w_{kn} lautet dann:

$$p(w_{kn} | \sigma_w^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} \exp\left(-\frac{w_{kn}^2}{2\sigma_w^2}\right), \quad (3.18)$$

Infolge der stochastischen Unabhängigkeit jeweils zweier Messungen in einem Datenblock kann die resultierende multivariate Dichte als Produkt der Randverteilungen

$$p(w_k | \sigma_w^2) = \prod_{n=1}^N p(w_{kn} | \sigma_w^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}}\right)^N \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_w^2} w_k w_k^T\right) \quad (3.19)$$

ausgedrückt werden. Unter der weiteren Voraussetzung, dass das Signalmodell (3.7) die rekonstruierte Anregung exakt repräsentiert, lässt sich der Rauschanteil w_k durch die Differenz $w_k = y_k - g_k$ zwischen dem Modell $g_k := (g(t_1), g(t_2), \dots, g(t_N))_k$ und der rekonstruierten Anregung $y_k := (y_A(t_1), y_A(t_2), \dots, y_A(t_N))_k$ für den k -ten Datenblock ersetzen [25, 100]. Das Modell der tonalen Komponenten g_k enthält dabei weitere Modellparameter ψ . Aufgrund der Substitution von w_k durch die Daten y_k und das Modell der tonalen Komponenten g_k kann nun die Dichte $p(w_k | \sigma_w^2)$ durch die Dichte $p(y_k | \sigma_w^2, \psi)$ ausgedrückt werden:

$$p(w_k | \sigma_w^2) = p(y_k | \sigma_w^2, \psi), \quad (3.20)$$

wobei nun mit den entfalteten Körperschalldaten y_k gerechnet werden kann. Das Modell der tonalen Komponenten g_k beinhaltet Amplitudenparameter $\{A\}$ und Frequenzparameter $\{\omega\}$. Die Frequenzparameter lassen sich aus einem Spektrum vorab ermitteln. Daher werden sie im Folgenden nicht weiter als Zufallsvariablen betrachtet. Damit bleibt die konkrete Realisierung der Amplitudenparameter als Unbekannte zurück und es gilt $\psi = \{A\}$. Unter Anwendung von (3.20) geht (3.19) schließlich über in:

$$p(y_k | \sigma_w^2, \{A\}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}}\right)^N \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_w^2} [y_k - g_k(\{A\})][y_k - g_k(\{A\})]^T\right). \quad (3.21)$$

Um die gesuchte Likelihood-Funktion für die Berechnung des Erwartungswertes (3.17) zu erhalten, muss die Dichte (3.21) marginalisiert werden [25]. Die Marginalisierung erfordert insgesamt M Integrationen über alle im Modell enthaltenen Amplitudenparameter $\{A\}$:

$$p(y_k | \sigma_w^2) = \int_{\{A\}} p(y_k | \{A\}, \sigma_w^2) d\{A\}, \quad (3.22)$$

wodurch der Einfluss der Amplitudenparameter eliminiert wird. Man erhält folglich eine von den Amplituden unabhängige Dichte $p(y_k|\sigma_w^2)$. Abschließend muss eine zweckmäßige A-priori-Wahrscheinlichkeitsdichte gefunden werden. Da kein Vorwissen über den Wert der Varianz besteht, wird ein nichtinformatives A-priori gewählt. Nach HELD [87] ist hierfür JEFFREYS' A-priori $p(\sigma_w^2) \propto 1/\sigma_w^2$ geeignet. Damit kann der bedingte Erwartungswert (3.17) nun wie folgt angegeben werden:

$$E(\sigma_w^2|y_k) = \frac{\int_0^\infty p(y_k|\sigma_w^2) d\sigma_w^2}{\int_0^\infty \sigma_w^{-2} p(y_k|\sigma_w^2) d\sigma_w^2} \propto P_w \quad (3.23)$$

mit der bedingten Dichte $p(y_k|\sigma_w^2)$ nach Gleichung (3.22). Im folgenden Abschnitt wird die konkrete Berechnung des bedingten Erwartungswertes nach der Orthonormalisierung des Signalmodells durchgeführt.

3.3.2 Orthonormales Signalmodell

Die analytische Marginalisierung (3.22) ist Voraussetzung für die Berechnung von $E(\sigma_w^2|y_k)$ und erfordert die Vereinfachung des Exponenten. Eine besonders einfache Form erhält der Exponent, wenn die Modellfunktionen H_m orthonormal zueinander gemäß folgender Konvention sind [25]:

$$\sum_{n=1}^N H_{m_1}(t_n) H_{m_2}(t_n) = \delta_{m_1 m_2}. \quad (3.24)$$

Hierbei ist δ wieder das KRONECKER-Delta ($\delta = 1 \forall m_1 = m_2$, $\delta = 0 \forall m_1 \neq m_2$). Die Umformung eines allgemeinen Signalmodells $g_m(t)$ in ein orthonormales Signalmodell kann mittels folgender Gleichung stattfinden [25]:

$$H_m(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}} \sum_{l=1}^M e_{ml} g_l(t), \quad m, l = 1 \dots M, \quad (3.25)$$

wobei die Eigenwerte λ_l und die Eigenvektoren e_{ml} über eine Bestimmungsgleichung zusammenhängen. Eine zweckmäßige Ansatzfunktion für eine einzelne tonale Komponente des Signalmodells (3.7) lautet:

$$g_1(t_n) = \cos \omega_1 t_n \quad \text{und} \quad g_2(t_n) = \sin \omega_2 t_n. \quad (3.26)$$

Eine Überlagerung von g_1 und g_2 entspricht einer harmonischen Funktion mit beliebiger Phasenlage und ist bereits orthogonal. Die Eigenwerte λ_l und der Eigenvektor e_{ml} für die Normalisierung können für den Fall $N \gg 1$ und ausreichend getrennter Frequenzen ω_m berechnet werden [25]. Für eine beliebige Überlagerung von harmonischen Funktionen mit ausreichend getrennten Frequenzen geht die Likelihood-Funktion (3.21) über in:

$$p(y_k|\sigma_w^2, \{B\}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} \right)^N \exp \left(-\frac{1}{2\sigma_w^2} \left[\sum_{n=1}^N y(t_n)^2 - 2 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M y(t_n) B_m H_m(t_n) + \sum_{m=1}^M B_m^2 \right] \right), \quad (3.27)$$

wobei die Amplituden $\{B\}$ durch die Normierung linear mit den Amplituden $\{A\}$ zusammenhängen. Die Marginalisierung von (3.27) kann nun analytisch über alle Amplitudenparameter

{B} durchgeführt werden und liefert die folgende Proportionalität (vgl. [25]):

$$p(y_k | \sigma_w^2) \propto \sigma^{-N+M} \exp\left(-\frac{Q_Y - Q_H}{2\sigma_w^2}\right) \quad (3.28)$$

mit

$$Q_Y = \sum_{n=1}^N y(t_n)^2, \quad (3.29)$$

$$Q_H = \sum_{m=1}^M \left(\sum_{n=1}^N y(t_n) H_m(t_n) \right)^2. \quad (3.30)$$

Abschließend wird die Dichte (3.28) in die Gleichung (3.23) zur Berechnung des Erwartungswertes der Varianz eingesetzt. Da der Proportionalfaktor sowohl in den Nenner als auch in den Zähler von Gleichung (3.23) eingeht, kürzt er sich bei der Berechnung heraus. Dabei muss für die analytische Berechnung des bedingten Erwartungswertes (3.23) die Substitution $\vartheta := \sigma_w^2$ eingeführt werden. Die Integration von (3.23) unter Einbeziehung der marginalisierten Likelihood-Funktion (3.28) ergibt mit der Gammafunktion Γ (vgl. [25]):

$$\begin{aligned} E(\sigma_w^2 | y_k) &= \frac{Q_Y - Q_H}{2} \Gamma\left(\frac{N - M - 2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{N - M}{2}\right)^{-1} \\ &= \frac{Q_Y - Q_H}{N - M - 2}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

BRETTTHORST [25] gibt dazu folgende Standardabweichung des bedingten Erwartungswertes (3.20) an:

$$\sqrt{\text{Var}(E(\sigma_w^2 | y_k))} = \sqrt{\frac{2}{N - M - 4} E(\sigma_w^2 | y_k)}. \quad (3.32)$$

Gleichung (3.31) liefert nur sinnvolle Werte, wenn eine zweckmäßige Anzahl nicht redundanter Modellfunktionen mit den korrekten Frequenzparametern definiert wurde. Ein entsprechender Algorithmus zur Varianzschätzung der breitbandigen Gehäuseanregung muss beide Voraussetzungen sicherstellen. Dies wird im nächsten Abschnitt thematisiert.

3.3.3 Verarbeitung des Körperschallsignals

Die Verarbeitung des Körperschallsignals erfolgt blockweise. Nach der vollständigen Ermittlung eines Datenblocks schließen sich die weiteren Schritte gemäß Abbildung 3.2 an. Da im Allgemeinen nicht das gesamte Frequenzspektrum verarbeitet werden muss, erfolgt zunächst eine Dezimation. Nach der Tiefpassfilterung führt das entsprechende Dezimationsfilter eine ganzzahlige Reduzierung der Abtastfrequenz bis zum gewünschten Wert durch. Eine anschließende Bandpassfilterung extrahiert den interessierenden Frequenzbereich. Durch die Vernachlässigung niedriger Frequenzen bei der Varianzschätzung, stellt die Bandpassfilterung darüber hinaus die Anwendbarkeit von Gleichung (3.31) sicher. Der nächste Schritt im algorithmischen Ablauf umfasst die Entfaltung des Körperschallsignals. Dieser Schritt ist notwendig, um die Übertragung durch das Gehäuse zu eliminieren oder zumindest stark zu reduzieren. Nach Gleichung (3.8) ergibt sich das gemessene Signal $y_G(t)$ durch eine Faltung des anregenden Signals $y_A(t)$ mit der Impulsantwort des Gehäuses $H(\tau)$:

$$y_G(t) = (H * y_A)(t) = \int_0^t H(\tau) y_A(t - \tau) d\tau, \quad (3.33)$$

wobei die Impulsantwort des Gehäuses $H(\tau) = \exp(-\lambda_i \tau / 2\rho h) \sin(\nu_i \tau)$ mit der i -ten gedämpften Eigenfrequenz ν_i und dem zugehörigen Abklingkoeffizienten $\lambda_i / 2\rho h$ ist. Nach der Abtastung des gemessenen Signals $y_G(t)$ mit der Abtastfrequenz $f_A = 1/T_A$ und dem Übergang zu zeitdiskreten Werten $y_G(kT_A) := y_G(k)$ lässt sich Gleichung (3.33) als diskrete Faltung durch das folgende Filter mit endlicher Impulsantwort (FIR) ausdrücken:

$$y_G(k) = \sum_{n=0}^k h(n) y_A(k-n). \quad (3.34)$$

Die z -transformierte Systemfunktion $H(z)$ des FIR lautet:

$$H(z) = \frac{y_G(z)}{y_A(z)} = \sum_{n=0}^k h(n) z^{-n}, \quad (3.35)$$

wobei sich die Filterkoeffizienten durch $h(n) = \exp(-\lambda_i n T_A / 2\rho h) \sin(\nu_i n T_A) \forall n \geq 0$ berechnen lassen. Die Systemfunktion (3.35) ist linear und zeitinvariant (LZI). Um nun die anregende Signalfolge $y_A(z)$ zu erhalten, muss (3.35) invertiert werden. Das zu $H(z)$ gehörige inverse Filter $H^{-1}(z)$ definiert sich über die Konvention $H(z)H^{-1}(z) = 1$ [141]. Damit ergibt sich für das inverse Filter, das die anregende Signalfolge $y_A(z)$ rekonstruiert:

$$H^{-1} = \frac{y_A(z)}{y_G(z)} = \frac{1}{H(z)}. \quad (3.36)$$

Dieser Vorgang wird als Entfaltung bezeichnet und entspricht in der konkreten Anwendung der Minimierung des Einflusses einer Eigenfrequenz. Für die Eliminierung der gesamten Gehäuseübertragung innerhalb des untersuchten Frequenzbereichs kommt (3.36) für jede Eigenfrequenz mit den individuellen Parametern ν_i und λ_i zur Anwendung. Dabei ist die Ortsabhängigkeit der Messung zu beachten. Die Anzahl und die Lage der Eigenfrequenzen sowie die daraus ermittelten Parameter ν_i und λ_i müssen im Allgemeinen individuell für jeden Messpunkt bestimmt werden.

Im Anschluss an die Vorverarbeitung folgt die Ermittlung der relevanten Frequenzen. Nach Abschnitt 3.2.1 existieren verschiedene tonale Komponenten im Körperschallspektrum. Um das Signalmodell nach Gleichung (3.7) aufstellen zu können, müssen diese Komponenten bekannt sein. Das erfordert Kenntnisse über den inneren Aufbau des Verdichters. Beispielsweise müssen neben der Antriebsdrehzahl sowohl das Übersetzungsverhältnis (bei Getriebeverdichtern) als auch die Anzahl der Leit- und Laufschaufeln bekannt sein. Bei einem Turboverdichter mit konstanter Drehzahl bleibt die Lage der Frequenzen im Körperschallspektrum konstant. Die Amplituden der einzelnen harmonischen Komponenten können jedoch je nach Betriebszustand variieren und gegebenenfalls in die Größenordnung des Rauschens absinken. Deshalb ist eine Anpassung des Signalmodells hinsichtlich der Anzahl der relevanten harmonischen Komponenten für jeden Datenblock notwendig. Übersteigt die Amplitude einer untersuchten Komponente einen Schwellwert, wird diese im Signalmodell berücksichtigt. Innerhalb eines Datenblocks werden dann sowohl die Anzahl als auch die Amplituden der tonalen Komponenten als konstant betrachtet, wodurch die Gleichungen (3.29), (3.30) und (3.31) angewendet werden können. Abschließend wird der gleitende Mittelwert gebildet.

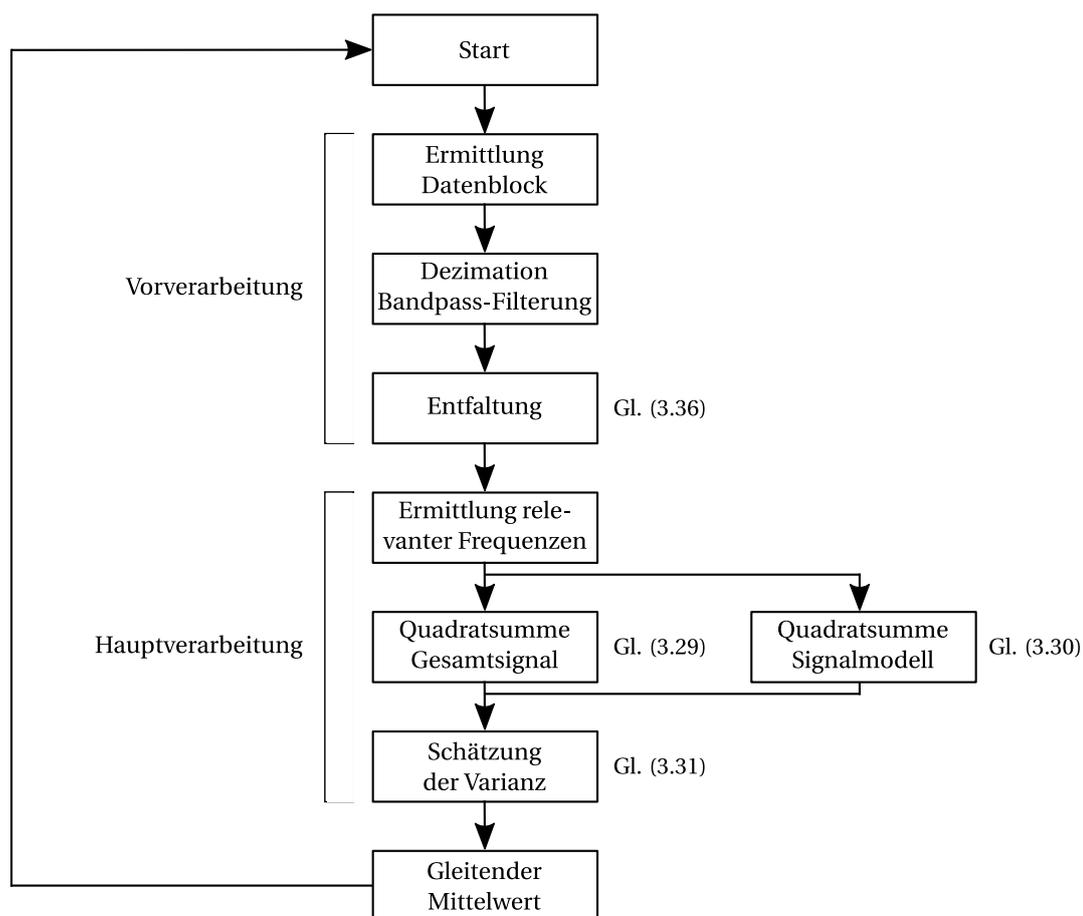


Abbildung 3.2. Algorithmischer Ablauf für die Verarbeitung des Körperschallsignals zur Varianzschätzung der breitbandigen Gehäuseanregung.

4 Experimentelle Untersuchung

In diesem Kapitel werden sowohl das Modell des Radialverdichtersystems aus Kapitel 2 als auch die modellbasierte Signalanalyse zur Varianzschätzung der breitbandigen Gehäuseanregung aus Kapitel 3 experimentell untersucht. Dafür wurden in 3 Kampagnen fluid- und strukturdynamische Daten von drei einstufigen Luftverdichtern in unterschiedlichen Lastbereichen erfasst. In Abschnitt 4.1 werden einleitend der Messaufbau und die Versuchsdurchführung dargestellt. Abschnitt 4.2 zeigt die Validierung des fluiddynamischen Modells, beginnend mit der Ermittlung des Verdichter kennfeldes sowie der Parameterbestimmung des Modells in Abschnitt 4.2.1. Die Abschnitte 4.2.2 und 4.2.3 zeigen den Vergleich der erfassten Daten mit den Simulationsergebnissen. Der Vergleich beinhaltet sowohl den stabilen als auch den instabilen Kennfeldbereich. Anschließend wird in Abschnitt 4.2.4 gezeigt, dass die reale Pumpgrenzlage mit dem entwickelten Modell ausreichend genau abgebildet wird. Damit eignet sich das Modell des Radialverdichtersystems für den Regelungsentwurf. Weiterhin wird in Abschnitt 4.3 der Zusammenhang zwischen dem gemessenen Körperschall und dem aerodynamischen Verdichterzustand experimentell untersucht. Hierfür wird in Abschnitt 4.3.1 die Parametrierung der algorithmischen Auswertung dargestellt. Die Abschnitte 4.3.2 bis 4.3.4 zeigen anschließend die Ergebnisse der experimentellen Untersuchung. Der Fokus liegt dabei auf einer konsistenten physikalischen Interpretation des Verhaltens der Varianz während der Androsselung an die Pumpgrenze. In Abschnitt 4.4 wird der gefundene Zusammenhang zwischen fluid- und strukturdynamischem Verhalten vertieft analysiert. Der Zusammenhang lässt sich dann als Messgleichung des fluiddynamischen Modells einführen.

4.1 Messaufbau

Die untersuchten einstufigen Radialverdichter verdichten Luft. Daher war der Eintrittszustand hinsichtlich Druck und Temperatur mit dem atmosphärischen Umgebungszustand identisch. Der Aufbau entsprach dem Schema aus Abbildung 2.1. Der Antrieb erfolgte bei allen Maschinen elektrisch über ein Getriebe mit festem Übersetzungsverhältnis. Alle Verdichter wurden bei einer festen Drehzahl betrieben. Daher werden ausschließlich tonale Komponenten mit konstanter Frequenz im Spektrum erwartet. Weitere Kennwerte sind in Tabelle 4.1 festgehalten. Eine Lastverstellung zwischen verschiedenen Szenarien wurde durch Leitgitter erreicht. Für die Arbeitspunktverstellung kam eine druckseitige Drosselarmatur gemäß Abbildung 2.1 zum Einsatz. Insgesamt wurden drei Kampagnen an den Verdichtern durchgeführt. Tabelle 4.2 zeigt hierfür die Szenarien und hält die aufgetretenen Ereignisse fest.

Verdichter	Leitgitter	Antrieb	Drehzahl	Aufbau	Baujahr
V1	Nachleitgitter	elektrisch max. 1800kW	fest 8101 U/min	Betrieb	1977
V2	Vorleitgitter	elektrisch max. 1800kW	fest 13424 U/min	Betrieb	1981
V3	Vorleitgitter	elektrisch max. 2500kW	fest 28830 U/min	Teststand	2010

Tabelle 4.1. Kennwerte der untersuchten einstufigen Luftverdichter.

Die fluiddynamischen Daten liegen nur für V1 und V2 vor. Für die Validierung des Verdichtermodells wurden die Prozessgrößen entsprechend Abbildung 4.1 erfasst. Für die Drücke wurden Rosemount-Aufnehmer vom Typ 1511 verwendet; für die Temperaturen kamen Pt100-Aufnehmer zum Einsatz. Die Abtastfrequenz des Erfassungssystems (siehe Erfassung I in Abbildung 4.1) wurde mit 50 Hz oder 100 Hz für die zu beobachtenden niederfrequenten Pumpstöße ausreichend groß gewählt. Aufgrund der beschränkten Speicherkapazität der Datenerfassung traten in einigen Kampagnen kurze Unterbrechungen auf. Diese Zeiträume wurden für die spätere Datenauswertung nicht herangezogen. Die Validierung des fluiddynamischen Modells fand nur für den Einzelbetrieb von V1 und V2 der ersten Kampagne statt (siehe Tabelle 4.2, Szenario 1-1 bis 1-6). Die restlichen Szenarien dienen insbesondere der Untersuchung des Körperschalls. Dessen Messung erfolgte in allen Fällen durch einen Beschleunigungsaufnehmer vom Typ B&K 4382 mit entsprechendem Ladungsverstärker bei einer Abtastfrequenz des Erfassungssystems (siehe Erfassung II in Abbildung 4.1) von 52,1 kHz. Der Beschleunigungsaufnehmer arbeitet im Frequenzbereich von 0,1 Hz bis 8,4 kHz mit einer maximalen Abweichung von $\pm 10\%$ und wurde am Spiralgehäuse bei einem Winkel von 90° zur vertikalen Gehäuseachse magnetisch befestigt. Alle Szenarien wurden nach derselben Vorgehensweise durchgeführt, wobei ein Szenario mit dem Betrieb im sicheren Kennfeldbereich und weit geöffneter druckseitiger Drosselarmatur (siehe PV in Abbildung 4.1) startete. Anschließend wurde die Drosselarmatur schrittweise geschlossen, um den Arbeitspunkt in Richtung der Pumpgrenze zu verlagern. Die Drosselbewegungen wurden bei Annäherung an die Pumpgrenze verkleinert, um den pumpgrenznahen Bereich besser aufzulösen. Dadurch konnte sowohl der pumpgrenznahe Bereich genauer untersucht als auch die reale Lage der

Kampagne	Lauf	Fahrweise	Last	Ereignis
1	1	V1*	niedrig (18,5%)	Instabilität
	2	V1*	mittel (47,5%)	Instabilität
	3	V1*	hoch (63,0%)	1 Pumpstoß
	4	V2*	niedrig (20,0%)	1 Pumpstoß
	5	V2*	mittel (50,0%)	3 Pumpstöße
	6	V2*	hoch (71,5%)	2 Pumpstöße
	7	V1+V2* min. Zwischenkühlung	V1 mittel (48,0%) V2 hoch (76,5%)	Instabilität
	8	V1+V2* max. Zwischenkühlung	V1 mittel (48,0%) V2 hoch (76,5%)	Instabilität
2	1	V1*	niedrig (28,0%)	1 Pumpstoß
	2	V2*, langsame Androsselung	mittel (30,0%)	—
	3	V2*, schnelle Androsselung	mittel (30,0%)	—
3	1	V3*	niedrig (10,0%)	Instabilität
	2	V3*	hoch (75,0%)	Instabilität

Tabelle 4.2. Übersicht der Szenarien. Die Nummer des Szenarios setzt sich aus der Kampagne und dem Lauf gemäß *Kampagne-Lauf* zusammen. Die Körperschallmessung wurde an den mit (*) gekennzeichneten Verdichtern durchgeführt.

Pumpgrenze zuverlässig bestimmt werden. Die Pumpgrenze markiert den Übergang von der Primär- zur Sekundärcharakteristik und wurde als derjenige Punkt identifiziert, in dem Austrittsdruck und Fördermenge den typischen negativen Gradienten als Zeichen des Eintritts in einen Pumpzyklus aufwiesen. Anschließend erfolgte eine Entlastung durch schnelles Öffnen der Drosselarmatur, um eine Beschädigung des Verdichters zu vermeiden.

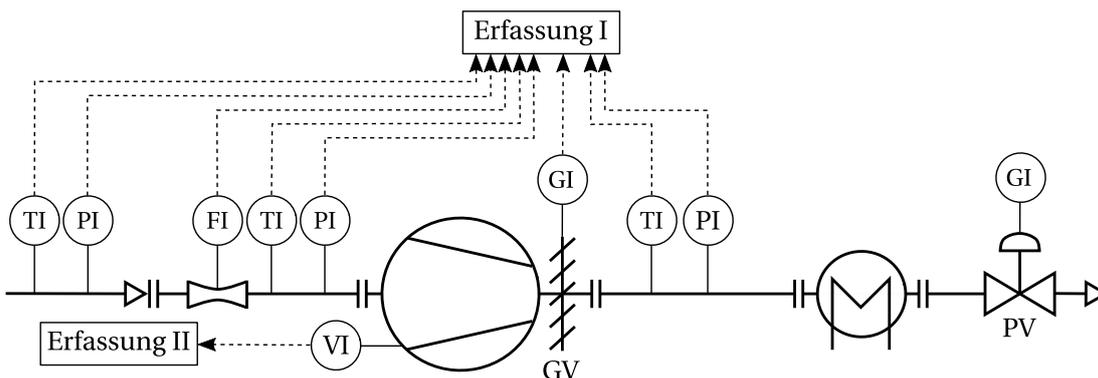
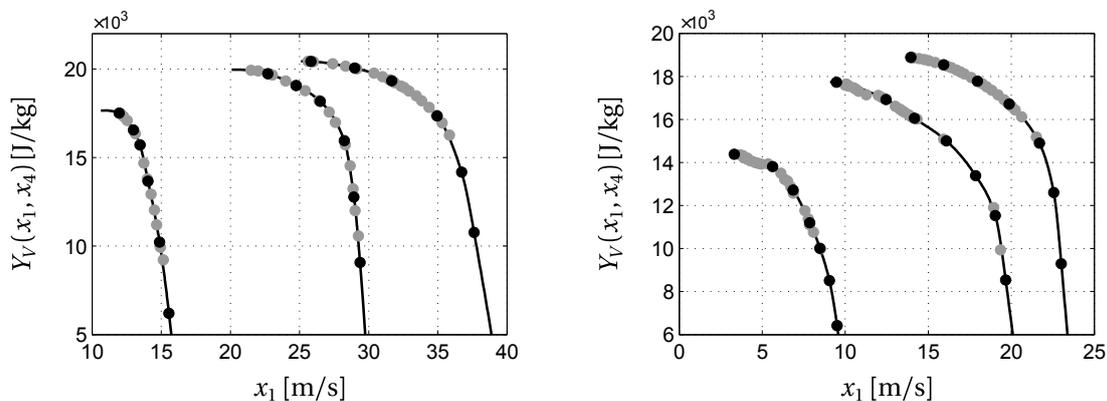


Abbildung 4.1. Messstellenübersicht für Verdichter V1 anhand einer verfahrenstechnischen Darstellung.

4.2 Fluiddynamische Untersuchung

4.2.1 Vorbemerkungen

Vor der Validierung des Verdichtermodells erfolgt die Bestimmung der Modellparameter. Dies betrifft das statische Verdichterkennfeld und die sonstigen Modellparameter nach (2.47) für Verdichter V1 und V2. Das Kennfeld für V1 wird aus den Szenarien 1-1 bis 1-3 ermittelt; für V2 aus den Szenarien 1-4 bis 1-6. Jede Messung enthält einen Drosselvorgang aus dem stabilen Kennlinienbereich bis zum Erreichen der Pumpgrenze unter Beibehaltung der Leitgitterstellung. Hierbei kann die Primärcharakteristik durch schrittweise Androsselung und anschließendes Verharren bis zum stationären Zustand messtechnisch approximiert werden. Als stationärer Zustand wird der Zustand verstanden, in dem sichtbare Übergangsvorgänge in der Fördermenge und dem Enddruck abgeklungen sind. Alle bei der Androsselung erfassten stationären Punkte lassen sich für die Approximation heranziehen und bilden die messtechnisch ermittelte Kennlinie. Dazu werden für jedes Szenario der Eintritts- und der Austrittsdruck, die Eintrittstemperatur und die Eintrittsgeschwindigkeit ausgewertet. Da die Strömung auf der instabilen Kennlinienseite keinen stationären Zustand einnimmt, ist eine direkte Messung der Sekundär- und der Tertiärcharakteristik nicht möglich. Die Parameter der instabilen Kennlinienseite werden deswegen in einer Weise gewählt, dass der instabile Systemzustand hinsichtlich Pumpfrequenz und Pumpamplitude eine ausreichende Übereinstimmung mit den Messdaten erreicht. Die so gewonnenen Kennlinien erzeugen zusammen ein Kennfeld für V1 und V2; siehe hierzu Abbildung 4.2. Aus diesen Daten ergibt sich im Folgenden die theoretische Pumpgrenze des Verdichtersystems. Dabei entspricht die theoretische Pumpgrenze dem Scheitelpunkt der jeweiligen Primärcharakteristik.



(a) Modelliertes Kennfeld (schwarz) und stationäre Zustände aus Messdaten (grau) für V1. (b) Modelliertes Kennfeld (schwarz) und stationäre Zustände aus Messdaten (grau) für V2.

Abbildung 4.2. Stabiler Kennfeldbereich von V1 und V2.

Die fehlenden Modellparameter nach (2.47) werden für jeden Verdichter individuell bestimmt und dabei für möglichst viele Szenarien genutzt. Auf diese Weise kann untersucht werden, wie gut sich das Verhalten im stabilen und instabilen Kennfeldbereich durch einen Parametersatz beschreiben lässt. Die Simulationen basieren auf Modell (2.46) unter Berücksichtigung von Initialstörungen. Anhand der gewonnenen Parameter lässt sich das Modell weiter vereinfachen.

Beispielsweise stellte sich bei der Analyse der Proportionalfaktoren von Gleichung (2.46a) und Gleichung (2.46b) heraus, dass deren Variation im betrachteten Bereich des Druckverhältnisses gering ausfällt. Die messtechnisch erfassten Daten beschränken sich für V1 und V2 im Einzelbetrieb auf den Bereich $x_2 = 1,4 \dots 2,2$. Abbildung 4.3 bestätigt die geringe Veränderung der Proportionalfaktoren. Ein signifikanter Einfluss der Proportionalfaktoren ist erst bei höheren Druckverhältnissen zu erwarten. Für die Simulation mehrstufiger Verdichter sollte daher das vollständige Modell (2.46) herangezogen werden. Infolgedessen werden im Modell (2.46) die gemittelten Werte τ_L und τ_V für die Proportionalfaktoren verwendet:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{\tau_L} [Y_V(x_1, x_4) + Y_D(x_1, x_3, x_4) - k_1(x_2^{r_k} - 1)], \quad (4.1a)$$

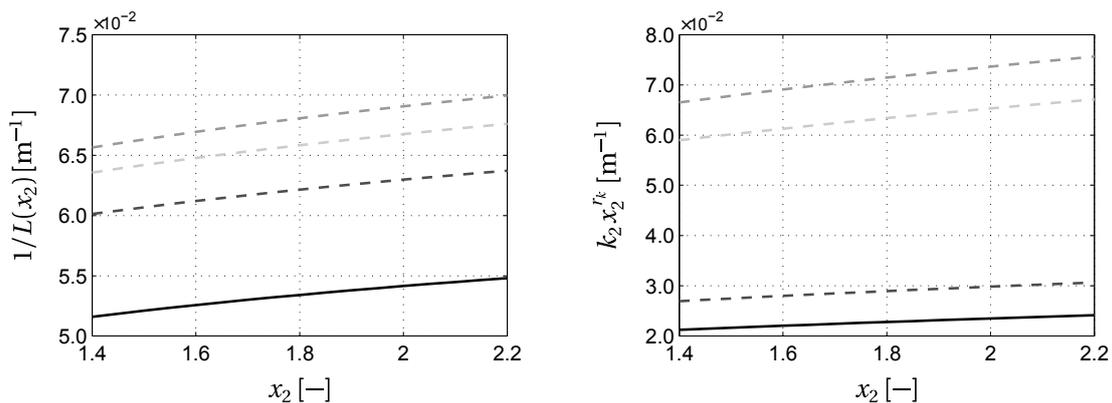
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{\tau_V} [x_1 - k_{pV}(x_2)Y_{pV}(x_5)\sqrt{2k_1(x_2^{r_k} - 1)/r_k}], \quad (4.1b)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{\tau_A} Y_A(x_1, x_3, x_4), \quad (4.1c)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{\tau_{GV}} [u_{GV} - x_4], \quad (4.1d)$$

$$\dot{x}_5 = \frac{1}{\tau_{pV}} [u_{pV} - x_5] \quad (4.1e)$$

mit k_1 , r_k und $k_{pV}(x_2)$ entsprechend der Gleichungen (2.47b), (2.47d) und (2.47e). Alle Modellparameter sind in Appendix A festgehalten. Während der Simulation werden nun u_{GV} und u_{pV} vorgegeben. Für jedes Szenario ist $u_{GV} = \text{konstant}$. Die Arbeitspunktbewegung wird nur durch die Verstellung der druckseitigen Drosselarmatur u_{pV} ausgelöst. Für die Drosselstellung liegen jedoch keine dynamischen Daten vor. Daher wird jede Veränderung für die Simulation idealisiert als Sprung beschrieben. Dies kann zu Abweichungen führen, wenn die Drosselstellung beispielsweise in Form einer Rampe verstellt wurde. Anschließend wird das Simulationsergebnis mit den Messdaten verglichen. Die Auswertung erfolgt unter besonderer Beachtung der Ergebnisse für den stabilen Betriebsbereich.



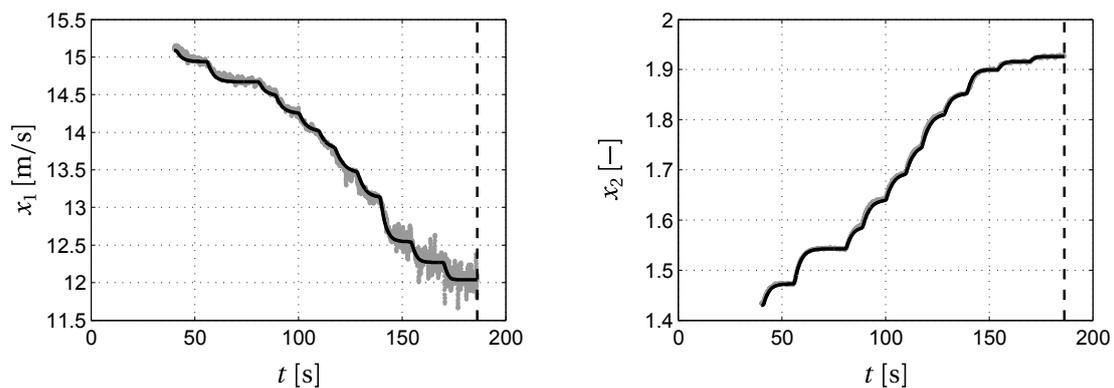
(a) V1 (schwarz), max. Abweichung vom Mittelwert $\pm 3,01\%$. V2 (grau, gestrichelt), max. Abweichung vom Mittelwert $\pm 3,18\%$.

(b) V1 (schwarz), max. Abweichung vom Mittelwert $\pm 6,44\%$. V2 (grau, gestrichelt), max. Abweichung vom Mittelwert $\pm 6,44\%$.

Abbildung 4.3. Veränderung der Proportionalfaktoren von Gleichung (2.46a) und (2.46b) in Abhängigkeit vom Druckverhältnis.

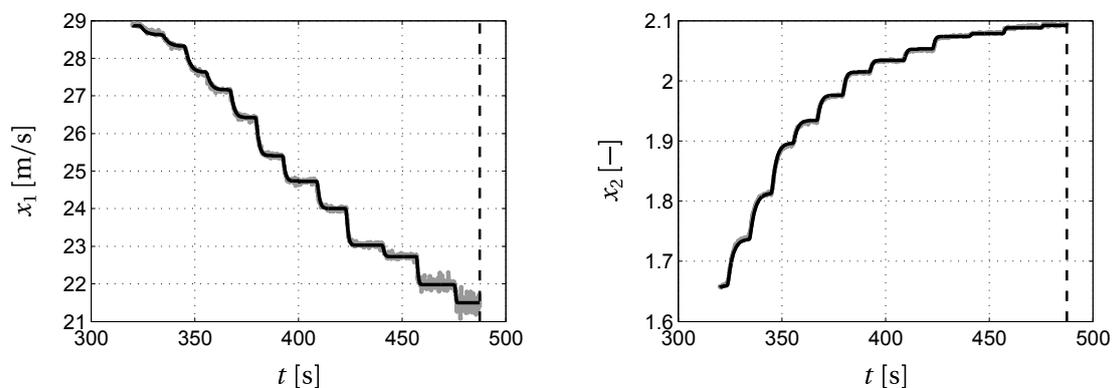
4.2.2 Kampagne 1 – V1

Abbildung 4.4 zeigt den Vergleich der Daten und der Simulationsergebnisse für V1 bei niedriger Last (Szenario 1-1). Durch die Drosselung sinkt der PGA mit zunehmender Zeit. Dagegen steigt das Druckverhältnis bei der Drosselung bis zu einem maximalen Wert an. Am Ende des Szenarios erreicht der Arbeitspunkt die gemessene Pumpgrenze, deren zeitliches Auftreten als vertikale gestrichelte Linie in den Abbildungen dargestellt ist. In Szenario 1-1 wurde V1 nicht über die Pumpgrenze hinaus gedrosselt. Unmittelbar nach Erreichen der Pumpgrenze wurde der Verdichter entlastet; ein Pumpzustand konnte sich daher nicht einstellen. Der stabile Bereich wird durch das Modell statisch und dynamisch sehr gut abgebildet. Die Übergänge von einem stationären Zustand zum folgenden stationären Zustand können als Systemantwort auf die sprungartige Veränderung der druckseitigen Drosselarmatur erklärt werden. Das simulierte Verhalten im stabilen Bereich entspricht einer aperiodischen Angleichung an den jeweiligen neuen stationären Zustand. Dieses Ergebnis ist konsistent mit den Messergebnissen und lässt sich physikalisch auf das Füllen des druckseitigen Gasspeichers zurückführen. Sowohl die Eintrittsgeschwindigkeit als auch das Druckverhältnis sind von einem Rauschanteil überlagert,



(a) Simulierte (schwarz) und gemessene (grau) Eintrittsgeschwindigkeit. (b) Simuliertes (schwarz) und gemessenes (grau) Druckverhältnis.

Abbildung 4.4. Vergleich von Messung und Simulation für Szenario 1-1.

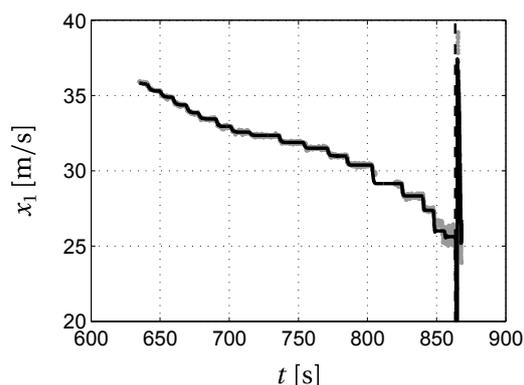


(a) Simulierte (schwarz) und gemessene (grau) Eintrittsgeschwindigkeit. (b) Simuliertes (schwarz) und gemessenes (grau) Druckverhältnis.

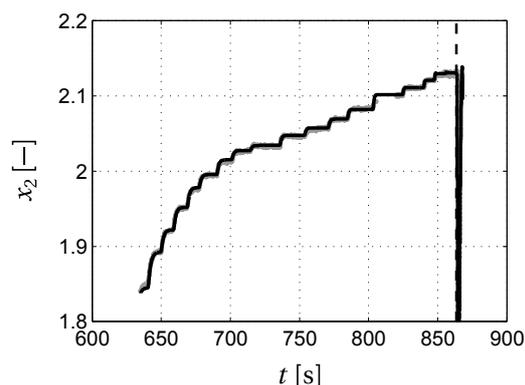
Abbildung 4.5. Vergleich von Messung und Simulation für Szenario 1-2.

wobei die Eintrittsgeschwindigkeit deutlich stärker gestört wird. Die Intensität des Rauschanteils steigt mit sinkendem PGA. Vor allem im pumpgrenznahen Bereich sind die Schwingungen sehr deutlich zu erkennen. Diese Abhängigkeit vom PGA kann nicht durch Sensorrauschen erklärt werden. Wahrscheinlich ist der Effekt auf zunehmende aerodynamische Instabilitäten in der Strömung zurückzuführen. In Abbildung 4.5 sind die Ergebnisse der Simulation für V1 bei mittlerer Last zu sehen (Szenario 1-2). Wie bei Szenario 1-1 wird der stabile Arbeitsbereich sowohl statisch als auch dynamisch sehr gut abgebildet. Auch hier wurde der Verdichter bei Erreichen der Pumpgrenze sofort entlastet. Das simulierte Systemverhalten bei Änderung der Drosselstellung entspricht wiederum einer aperiodischen Angleichung.

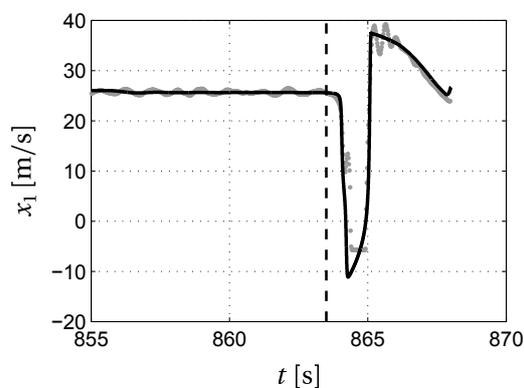
Abbildung 4.6 zeigt die Simulationsergebnisse für V2 bei hoher Last (Szenario 1-3). Der Vergleich offenbart wiederum eine sehr hohe Übereinstimmung mit den gemessenen Daten. Statik und Dynamik im stabilen Betriebsbereich werden sehr gut erfasst. In der Nähe der Pumpgrenze wechselt das Systemverhalten in eine abklingende Schwingung, was der Bifurkation eines stabilen Knotens zu einem stabilen Fokus entspricht. Aufgrund des überlagerten Rauschanteils, dessen Intensität in Pumpgrenznähe am größten ist, kann dieser Stabilitätswechsel in der Messung nicht eindeutig nachvollzogen werden. Im Gegensatz zur niedrigen und mittleren Last konnte V1 bei Erreichen der Pumpgrenze nicht schnell genug entlastet



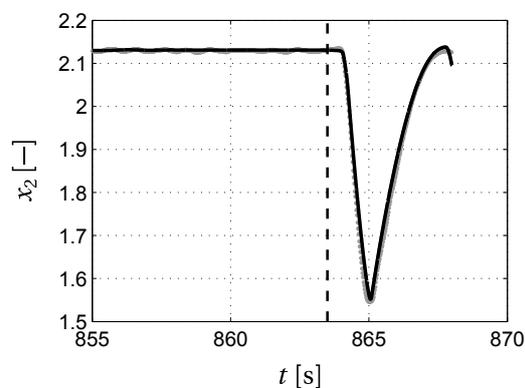
(a) Simulierte (schwarz) und gemessene (grau) Eintrittsgeschwindigkeit.



(b) Simuliertes (schwarz) und gemessenes (grau) Druckverhältnis.



(c) Simulierte (schwarz) und gemessene (grau) Eintrittsgeschwindigkeit an der Pumpgrenze.



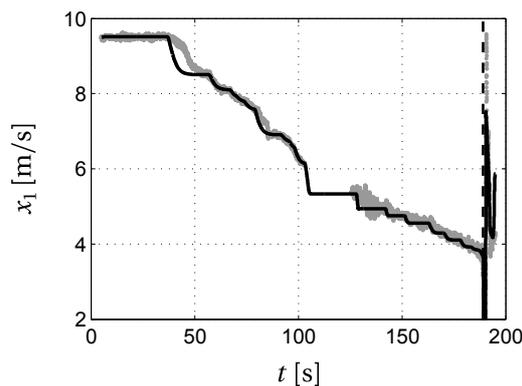
(d) Simuliertes (schwarz) und gemessenes (grau) Druckverhältnis an der Pumpgrenze.

Abbildung 4.6. Vergleich von Messung und Simulation für Szenario 1-3.

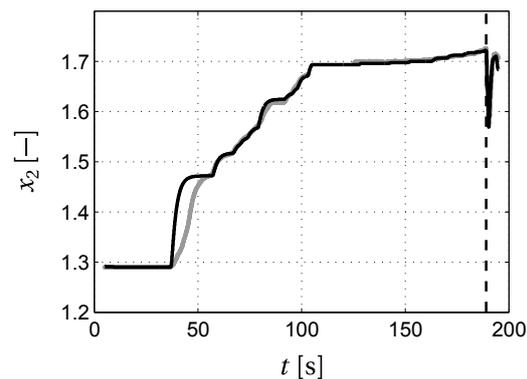
werden. Daher tritt der Verdichter bei 863,6 s in einen Pumpzyklus ein. Wegen der Strömungsumkehr im Verdichter handelt es sich um ein tiefes Pumpen. Den Übergang in den stabilen Grenzzyklus zeigen die Abbildungen 4.6c und 4.6d in vergrößerter Auflösung. Der zeitliche Verlauf der Eintrittsgeschwindigkeit und des Druckverhältnisses wird dabei durch das Modell gut wiedergegeben. Sowohl für die Eintrittsgeschwindigkeit als auch für das Druckverhältnis erfasst die Simulation die messtechnisch ermittelte Frequenz und Amplitude des Pumpzyklus. Zusammenfassend zeigt der Vergleich eine gute Übereinstimmung des entwickelten Verdichtermodells mit den gemessenen Daten. Sowohl der stabile als auch der instabile Betriebsbereich werden durch das Modell ausreichend gut beschrieben. Dabei erfolgte die Durchführung aller Simulationen mit denselben Parameterwerten (2.47). Folglich genügt ein Parametersatz für die Szenarien 1-1 bis 1-3. Das Modell eignet sich damit für den Regelungsentwurf.

4.2.3 Kampagne 1 – V2

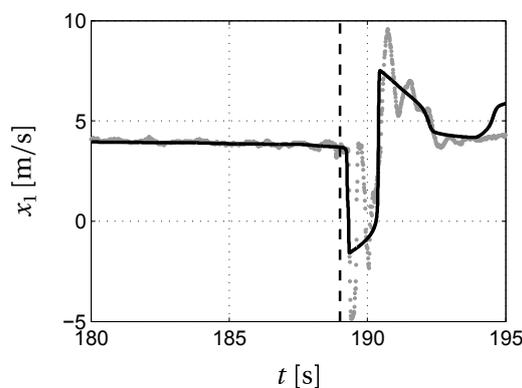
Abbildung 4.7 stellt die gemessenen Daten den Simulationsergebnissen für V2 bei niedriger Last gegenüber (Szenario 1-4). Die Statik und die Dynamik im stabilen Kennlinienbereich werden bis auf die erste Stellungsänderung der druckseitigen Drosselarmatur gut erfasst. Diese



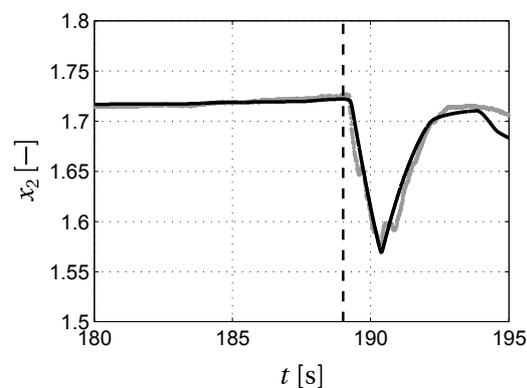
(a) Simulierte (schwarz) und gemessene (grau) Eintrittsgeschwindigkeit.



(b) Simuliertes (schwarz) und gemessenes (grau) Druckverhältnis.



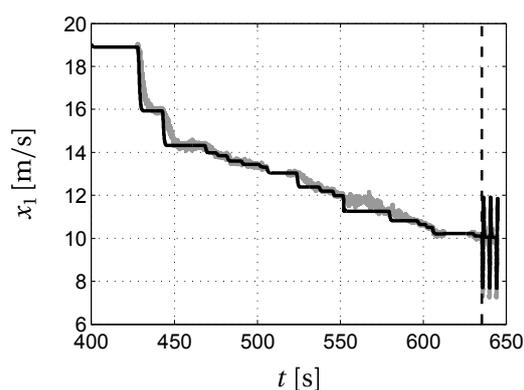
(c) Simulierte (schwarz) und gemessene (grau) Eintrittsgeschwindigkeit an der Pumpgrenze.



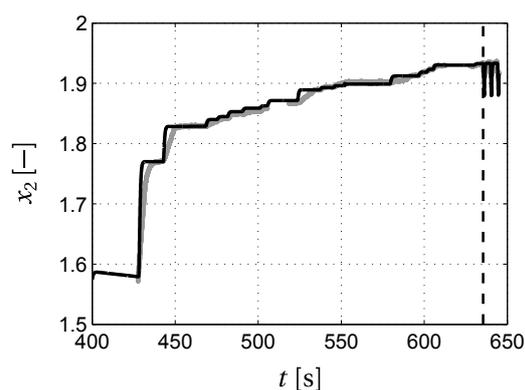
(d) Simuliertes (schwarz) und gemessenes (grau) Druckverhältnis an der Pumpgrenze.

Abbildung 4.7. Vergleich von Messung und Simulation für Szenario 1-4.

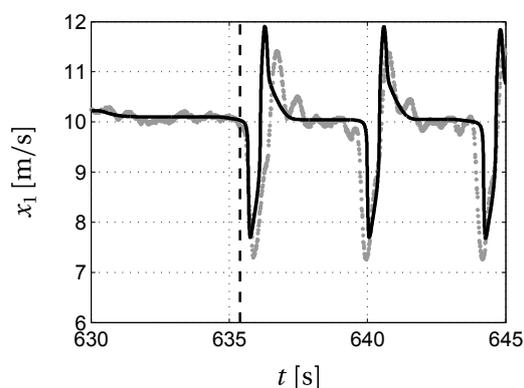
Abweichung ist auf eine nicht sprunghafte Stellungsänderung während der Versuchsdurchführung zurückzuführen. Hierbei erfolgte die Drosselung in Form einer Rampe. Im Bereich zwischen 105 s und 125 s fehlen die Messdaten aufgrund einer Unterbrechung in der Datenerfassung. Weiterhin fällt auf, dass das Druckverhältnis zwischen 125 s und 150 s trotz Reduzierung der Eintrittsgeschwindigkeit weitgehend konstant bleibt. Hierbei wird ein größerer Teil der eingebrachten Rotationsenergie in Strömungsverluste umwandelt. Eine genaue Bestimmung dieses Effekts ist aufgrund fehlender Daten aus dem Ringraum des Verdichters nicht möglich. Die Verluste führen jedoch zu einem deutlichen Abknicken der Verdichterkennlinie. Eine weitergehende Betrachtung wird im Zusammenhang mit der Körperschallanalyse in Abschnitt 4.3.2 durchgeführt. Durch die Modifizierung des Verlustkennfeldes $Y_D(x_1, x_3, x_4)$ lässt sich dieser Effekt berücksichtigen (siehe dazu Appendix A). Nach dem Erreichen der Pumpgrenze geht das reale System in einen tiefen Pumpzyklus über und wird danach entlastet. Die Abbildungen 4.7c und 4.7d zeigen hierfür den zeitlichen Verlauf. Frequenz und Amplitude des Pumpstoßes werden vom Modell gut abgebildet. Das gilt insbesondere für den zeitlichen Verlauf des Druckverhältnisses. Bei der Eintrittsgeschwindigkeit hingegen wird die Amplitude des Pumpstoßes zu gering berechnet.



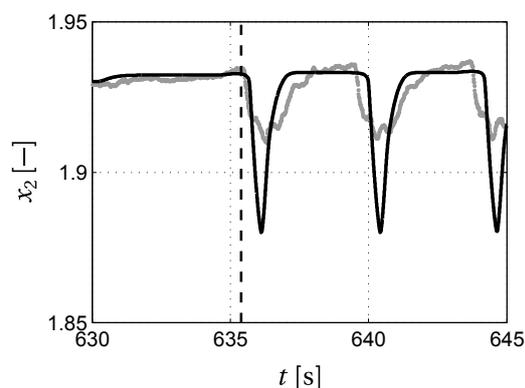
(a) Simulierte (schwarz) und gemessene (grau) Eintrittsgeschwindigkeit x_1 .



(b) Simuliertes (schwarz) und gemessenes (grau) Druckverhältnis x_2 .



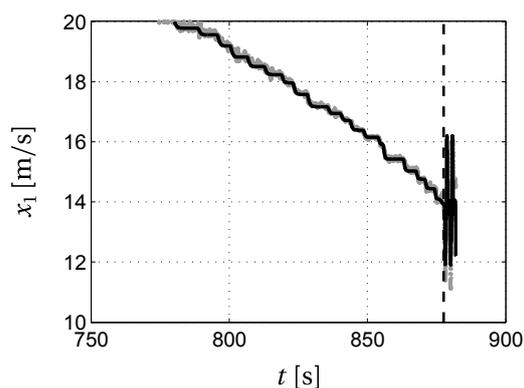
(c) Simulierte (schwarz) und gemessene (grau) Eintrittsgeschwindigkeit x_1 an der Pumpgrenze.



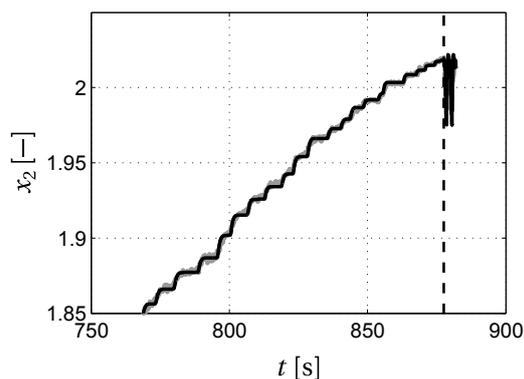
(d) Simuliertes (schwarz) und gemessenes (grau) Druckverhältnis x_2 an der Pumpgrenze.

Abbildung 4.8. Vergleich von Messung und Simulation für Szenario 1-5.

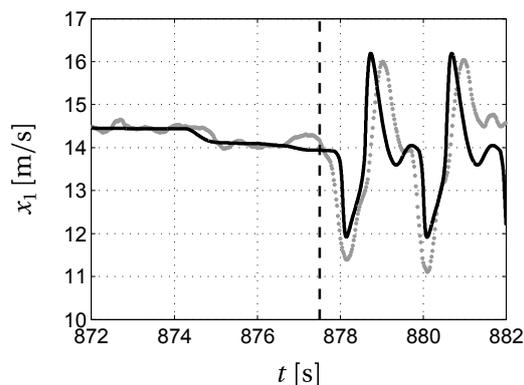
Die Ergebnisse für V2 bei mittlerer Last (Szenario 1-5) zeigt Abbildung 4.8. Auch in diesem Lastbereich kann ein verlusterzeugender Effekt zwischen 550 s und 580 s beobachtet werden. Trotz der Reduzierung der Eintrittsgeschwindigkeit von 12 m/s auf 10,8 m/s verbleibt das Druckverhältnis bei etwa 1,9. Die geringfügigen Abweichungen während der Drosselvorgänge können wiederum einer nicht sprungförmigen Stellungsänderung zugeschrieben werden. In diesem Lastbereich fällt darüber hinaus auf, dass sich die Intensität des überlagerten Rauschanteils mit sinkendem PGA nicht erhöht; der Rauschanteil bleibt weitgehend unverändert. Nach Erreichen der Pumpgrenze werden drei Pumpstöße erzeugt. Hierbei handelt es sich wegen der fehlenden Strömungsumkehr und der geringen Amplitude des Druckverhältnisses um ein schwaches Pumpen. Eine genauere Analyse dieses Vorgangs ermöglicht die Darstellung in den Abbildungen 4.8c und 4.8d. Es fällt auf, dass sowohl der qualitative Verlauf als auch Frequenz und Amplitude des Pumpstoßes für die Eintrittsgeschwindigkeit gut erfasst werden. Für das Druckverhältnis hingegen wird die Amplitude zu groß berechnet. Eine weitere Optimierung der Simulationsergebnisse durch die Modifikation der instabilen Kennlinienseite lieferte keine Verbesserung der Ergebnisse. In Bezug auf die Simulation schwacher Pumpstöße zeigt sich folglich ein Nachteil des entwickelten Modells.



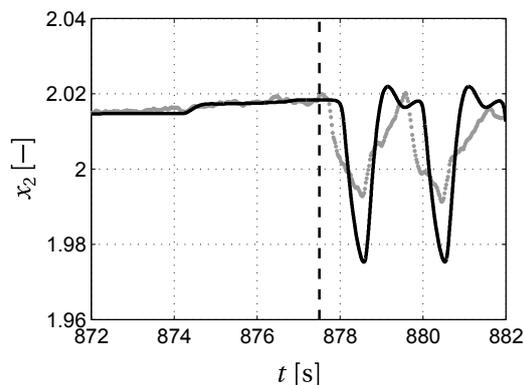
(a) Simulierte (schwarz) und gemessene (grau) Eintrittsgeschwindigkeit x_1 .



(b) Simuliertes (schwarz) und gemessenes (grau) Druckverhältnis x_2 .



(c) Simulierte (schwarz) und gemessene (grau) Eintrittsgeschwindigkeit x_1 an der Pumpgrenze.



(d) Simuliertes (schwarz) und gemessenes (grau) Druckverhältnis x_2 an der Pumpgrenze.

Abbildung 4.9. Vergleich von Messung und Simulation für Szenario 1-6.

Ähnliche Beobachtungen lassen sich für den hohen Lastbereich von V2 machen (Szenario 1-6). Der stabile Betriebsbereich wird hinsichtlich Statik und Dynamik gut abgebildet (siehe Abbildung 4.9). Für den instabilen Betriebsbereich zeigt sich jedoch ein zu Szenario 1-5 vergleichbares Ergebnis. Es handelt sich auch hier wegen der fehlenden Umkehrung der Strömungsrichtung und der geringen Amplitude um ein schwaches Pumpen. Dabei werden der qualitative Verlauf, die Frequenz und die Amplitude der Eintrittsgeschwindigkeit wieder am besten erfasst. Für das Druckverhältnis wird die Amplitude zu groß berechnet. Weiterhin lässt sich keine Intensitätszunahme des Rauschanteils bei sinkendem PGA nachweisen.

Insgesamt kann der stabile Betriebsbereich von V2 durch das Modell gut wiedergegeben werden. Der instabile Betriebsbereich wird jedoch nur für tiefe Pumpstöße quantitativ gut abgebildet. Für das schwache Pumpen errechnet das Modell für die untersuchten Verdichter zu große Amplituden des Druckverhältnisses. Dies ist auf die Verwendung einer kubischen Funktion für die instabile Kennlinienseite und die Annahme eines Stauzustands im druckseitigen Volumen zurückzuführen. Im realen System stellt sich in der Rohrleitung nach dem Verdichter kein Stauzustand ein. In diesem Fall ist das instabile Systemverhalten von der akustischen Impedanz des Rohrsystems abhängig [162]. Dieser Ansatz wird jedoch nicht weiter verfolgt, da für den Entwurf der Ablöseregulung das stabile Systemverhalten maßgeblich ist.

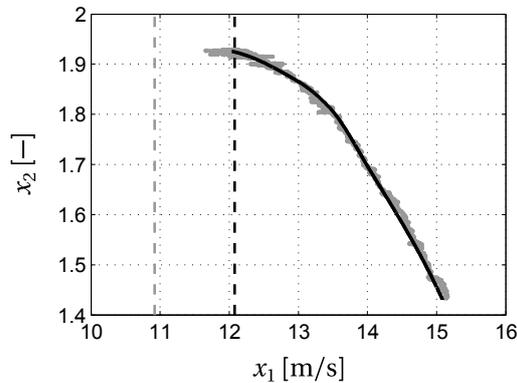
4.2.4 Verschiebung der realen Pumpgrenze

Die beiden vorangegangenen Abschnitte zeigen die Zeitverläufe der Eintrittsgeschwindigkeit und des Druckverhältnisses für verschiedene Szenarien. Um den Effekt der Verschiebung der realen gegenüber der theoretischen Pumpgrenze zu verdeutlichen, ist jedoch die Darstellung in Form der Verdichterkennlinie zweckmäßig (siehe hierzu die Abbildungen 4.10a-4.10f). In den Abbildungen sind jeweils die Verdichterkennlinien von V1 und V2 im gleichen Lastbereich zu sehen. Die schwarz gestrichelte Linie stellt die gemessene Pumpgrenze dar. Im Vergleich dazu ist die theoretische Pumpgrenze als grau gestrichelte Linie festgehalten. In jedem Szenario liegt die theoretische Pumpgrenze bei geringeren Werten der Eintrittsgeschwindigkeit. Diese Beobachtung bestätigt die aus der Literatur bekannten Ergebnisse (siehe Abschnitt 1.2.1). Die Abweichung befindet sich in einem Bereich zwischen 1,25 und 10,60 % (siehe Tabelle 4.3). Das entspricht der Größenordnung, in der sich üblicherweise der PGA der Regellinie eines industriellen Pumpverhütungssystems befindet. Werte zwischen 5 % und 20 % gelten hierfür als typisch. Dieses Ergebnis verdeutlicht, dass die Verschiebung der realen gegenüber der theoretischen Pumpgrenze bei der Modellierung berücksichtigt werden muss. Aus dem Modell ohne Initialstörungen kann die reale Pumpgrenze nicht ausreichend genau bestimmt werden. Dies zeigt vor allem die Notwendigkeit einer Messung für das individuelle Verdichtersystem –

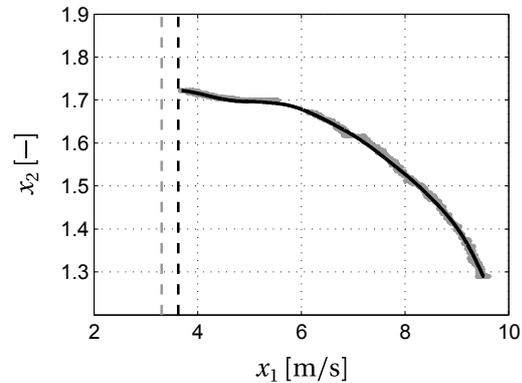
Lastbereich	Abweichung bei V1 [%]	Abweichung bei V2 [%]
Niedrig	10,60	9,48
Mittel	4,52	8,65
Hoch	1,25	3,69

Tabelle 4.3. Abweichung der realen zur theoretischen Pumpgrenze bezogen auf die Menge der theoretischen Pumpgrenze.

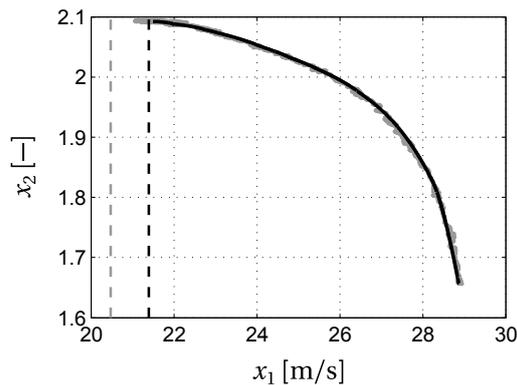
insbesondere wenn der PGA der Regellinie möglichst gering sein soll. Ohne eine entsprechende messtechnische Überprüfung lässt sich die reale Pumpgrenzlage nicht ausreichend genau ermitteln. In der Folge kann das Verdichtersystem nicht vor Pumpstößen geschützt werden. Die Verwendung der theoretischen Pumpgrenze als Ausgangspunkt für die Bestimmung der Regellinie stellt daher eine unzulässige Näherung dar.



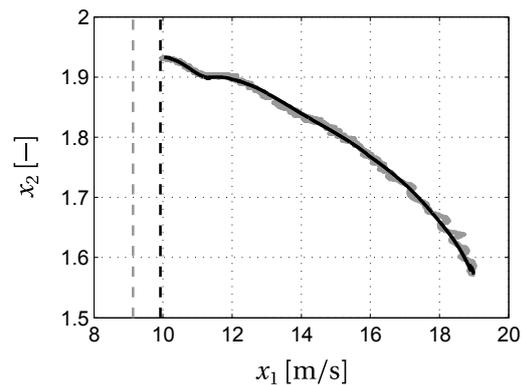
(a) Simulierter (schwarz) und gemessener (grau) Verlauf bei V1 bei niedriger Last.



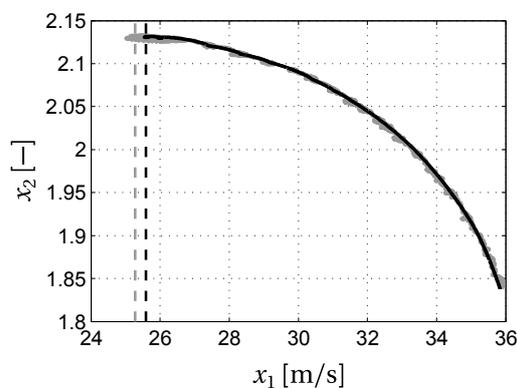
(b) Simulierter (schwarz) und gemessener (grau) Verlauf bei V2 bei niedriger Last.



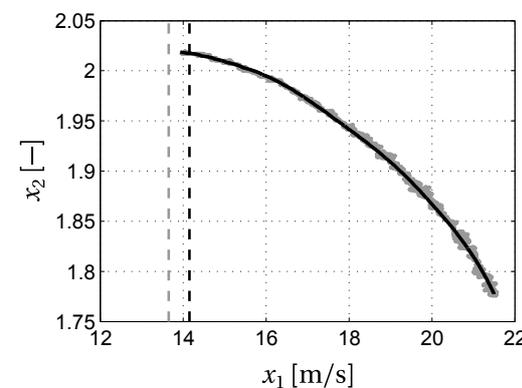
(c) Simulierter (schwarz) und gemessener (grau) Verlauf bei V1 bei mittlerer Last.



(d) Simulierter (schwarz) und gemessener (grau) Verlauf bei V2 bei mittlerer Last.



(e) Simulierter (schwarz) und gemessener (grau) Verlauf bei V1 bei hoher Last.



(f) Simulierter (schwarz) und gemessener (grau) Verlauf bei V2 bei hoher Last.

Abbildung 4.10. Verschiebung zwischen realer und theoretischer Pumpgrenze.

4.3 Körperschallanalyse

4.3.1 Vorbemerkungen

Die Schätzung der Varianz der breitbandigen Gehäuseanregung benötigt gemäß Abbildung 3.2 verschiedene algorithmische Schritte. Die Schritte der Vorverarbeitung erfolgen für jeden Verdichter mit identischen Parametern; siehe hierzu Tabelle 4.4. Dies gilt insbesondere für die Entfaltung der Körperschalldaten. Dies legt die These nahe, dass die gewählte Art der Entfaltung unabhängig vom Lastbereich des Verdichters ist und damit tatsächlich nur der Korrektur des Übertragungsverhaltens des Gehäuses dient. Eine Ausnahme stellt Verdichter V3 dar. Dessen Übertragungsverhalten wirkt sich nicht nachteilig auf die Schätzung der Varianz aus. Daher wird bei Verdichter V3 keine Entfaltung vorgenommen. Die Parameter für die Entfaltung wurden mithilfe einer datengestützten Analyse ermittelt. Da sich Eigenfrequenzen in ihrer Wirkung auf das Körperschallspektrum von anregenden tonalen Komponenten unterscheiden, lassen sie sich direkt dem Spektrum entnehmen. Dieser Vorgang wird iterativ durchgeführt, da nach der Entfernung einer Eigenfrequenz andere Eigenfrequenzen sichtbar werden können. Eine anschließende Validierung stellte sicher, dass es sich bei den gefundenen Eigenfrequenzen nicht um tonale Komponenten gemäß Abschnitt 3.2.1 handelt. Abbildung 4.11 zeigt das normierte Amplitudenspektrum von V1 bei niedriger Last (Szenario 1-1) vor und nach der Entfaltung. Im Amplitudenspektrum lassen sich vor der Entfaltung mehrere Bereiche stark erhöhter Amplituden erkennen, beispielsweise um 470 Hz oder 625 Hz. Durch die Entfaltung werden diese Komponenten gedämpft. Alle in Abbildung 4.11b verbleibenden tonalen Komponenten lassen sich dann auf instationäre Schaufelkräfte (ungleichförmig stationäre Strömung) oder Anregung durch den elektrischen Motor zurückführen. Insbesondere die tonalen Komponenten der Motor- und Rotordrehfrequenz sowie deren Harmonische sind deutlich zu erkennen. Die größten Erhöhungen zeigt die Motorfrequenz bei 25 Hz und deren erste Harmonische bei 50 Hz. Rotor-Stator-Interaktionen sind weniger deutlich ausgeprägt und finden sich vor allem im Bereich unter 100 Hz. Ferner wurden die breitbandigen Komponenten nach der Entfaltung auf ein gleichmäßiges Niveau über den gesamten Frequenzbereich herabgesetzt.

Parameter	V1	V2	V3
Dezimationsfaktor (dez. Abtastfrequenz [Hz])	32 (1600)	16 (3200)	8 (6400)
Blocklänge	4096	2048	4096
Grenzfrequenzen Bandpass [Hz]	20...580	20...1200	20...3200
Entfaltung	ja	ja	nein
Gedämpfte Eigenfrequenzen [Hz]	80, 184, 264, 309, 371, 477, 553, 607, 624, 651	337, 623, 910, 1110, 1304	—
Abklingkonstanten der Eigenfrequenzen [1/s]	75, 125, 600, 100, 250, 300, 300, 400, 400, 400	250, 250, 800, 250, 500	—

Tabelle 4.4. Parameter der Vorverarbeitung für die Schritte Dezimation und Entfaltung.

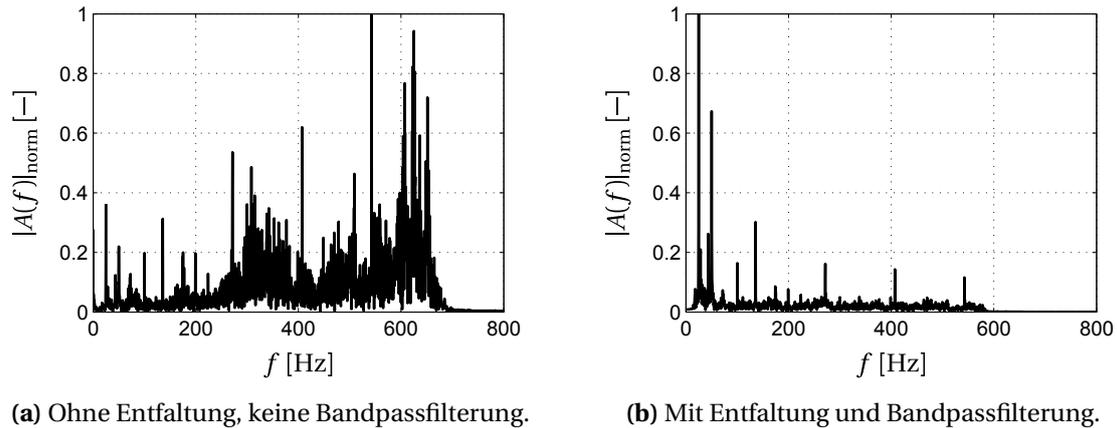


Abbildung 4.11. Normiertes Amplitudenspektrum von V1 mit niedriger Last bei 120 s.

Trotz des hohen Abstraktionsgrades bei der Modellierung des Verdichtergehäuses liefert das Filter (2.73) also eine ausreichend genaue Beschreibung des Übertragungsverhaltens in Bezug auf die Entfaltung der Messdaten. Der letzte Schritt der algorithmischen Abarbeitung umfasst die Anwendung eines gleitenden Mittelwertfilters. Ein solches Filter glättet das Merkmal und verdeutlicht dessen Trend. Ein Beispiel für V1 bei niedriger Last (Szenario 1-1) ist in Abbildung 4.12 zu sehen. Neben dem Schätzwert der Varianz nach Gleichung (3.31) werden noch weitere spektralbasierte Merkmale berechnet. Diese Merkmale umfassen (jeweils ohne Entfaltung):

- (i) die normierte Signalleistung im Frequenzbereich 0...6400 Hz,
- (ii) die normierte Signalleistung im Bandpassbereich nach Tabelle 4.4,
- (iii) die normierte spektrale Leistung der Blattfolgefrequenz,
- (iv) die normierte cepstrale Leistung der Blattfolgefrequenz und
- (v) die normierte spektrale Leistung der Rotorfrequenz.

Die Signalleistung in einem vollständigen Frequenzbereich stellt ein naheliegendes Merkmal dar. Merkmal 3 und 5 lassen nach SCHULZE ET AL. [149] für die untersuchten Verdichter eine Klassifikation des Verdichterszustandes mit einem künstlichen Immunsystem zu. Merkmal

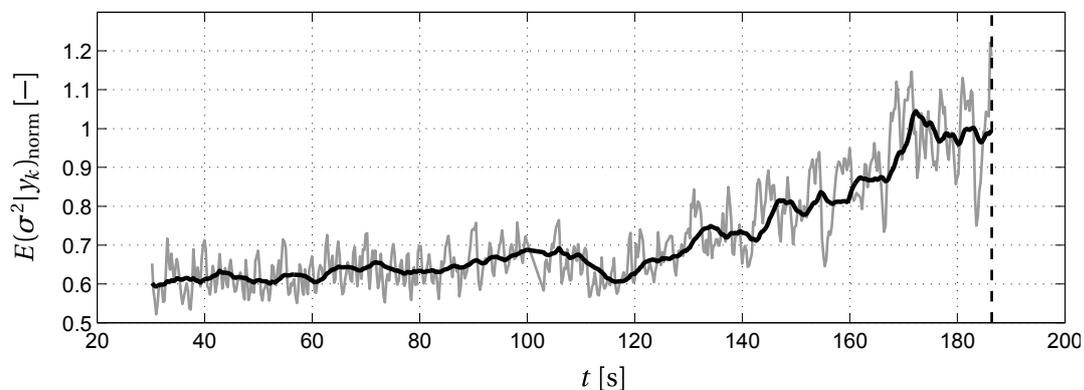


Abbildung 4.12. Geschätzte normierte Varianz bei V1 mit niedriger Last. Darstellung ohne Glättung (grau) und nach Glättung über Mittelwertfilter mit Länge 5,0 s (schwarz).

4 wird von METHLING als Möglichkeit zur Früherkennung aerodynamischer Instabilitäten beschrieben [129]. Ursprünglich wurde Merkmal 4 jedoch auf invasiv gewonnene Daten angewendet. Der Vergleich aller Merkmale verdeutlicht die jeweilige Fähigkeit zur Erkennung des aerodynamischen Verdichterzustandes.

4.3.2 Kampagne 1

Die Abbildungen 4.13 bis 4.15 zeigen die Merkmale 1 bis 5 für Verdichter V1 aus der ersten Kampagne (Szenarien 1-1 bis 1-3). Hierbei wurde V1 in drei verschiedenen Lastbereichen in Richtung der Pumpgrenze angedrosselt, die als vertikaler Strich gegen Ende der Szenarien zu erkennen ist. Durch die Drosselung sinkt der PGA mit zunehmender Zeit. Die Normierung der Merkmale erfolgte auf den Wert an der Pumpgrenze. Alle Merkmale weisen eine Abhängigkeit vom PGA auf. Merkmal 1 zeigt für Szenario 1-1 und 1-2 zu Beginn der Androsselung etwa denselben Wert wie an der Pumpgrenze. Dabei verbleibt das Merkmal vor allem in Szenario 1-1 weitestgehend um den Wert Eins. Für die Szenarien 1-1 bis 1-3 ist Merkmal 2 über weite Bereiche gut für eine Erkennung des PGA geeignet. Bei niedriger und mittlerer Last steigt der Wert graduell bis zur Pumpgrenze an. Bei hoher Last bestätigt sich dieses Verhalten jedoch nicht. Hierbei bleibt der Wert bis kurz vor der Pumpgrenze um 1,25 und nimmt dann deutlich ab. Merkmal 3 ist aufgrund der starken Schwankungen in einem großen Wertebereich als alleiniger Indikator ungeeignet. Für Merkmal 4 lässt sich in Szenario 1-2 und 1-3 kein eindeutiger Trend erkennen. Für hohe Last ändert sich der Wert hingegen kaum. Merkmal 5 scheint für eine Zustandserkennung ebenfalls nicht geeignet. Der Wert sinkt zwar während aller Szenarien bis zur Pumpgrenze ab. Allerdings ist kein eindeutiger Trend erkennbar. Beispielsweise ist bei niedriger und mittlerer Last eine Erhöhung bei 100s beziehungsweise 320s zu erkennen. Insgesamt weisen die Merkmale keine offensichtliche Abhängigkeit von den charakteristischen Strömungsformen auf, die mit aerodynamischen Instabilitäten assoziiert werden. Daher zeigt keines der Merkmale einen für die Erkennung des aerodynamischen Verdichterzustandes wünschenswerten Zusammenhang mit dem PGA.

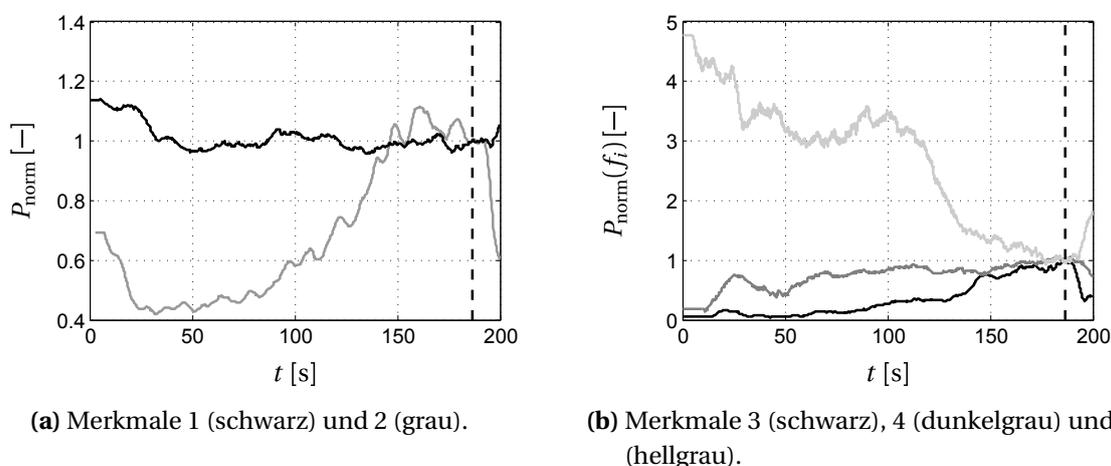
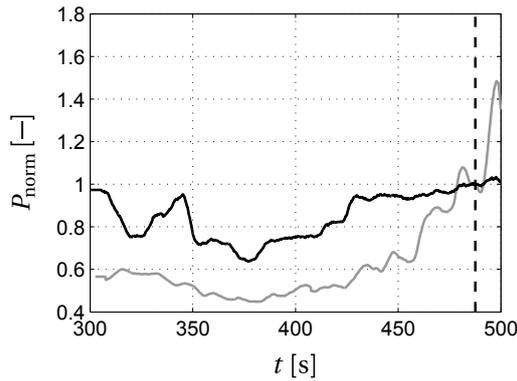
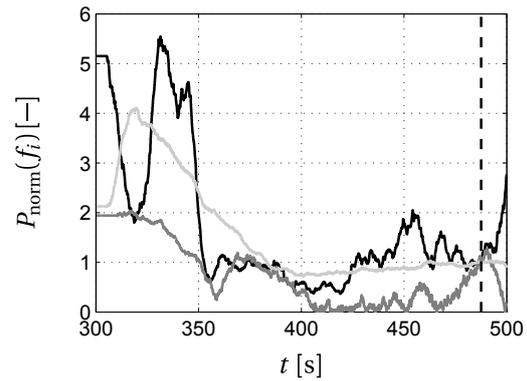


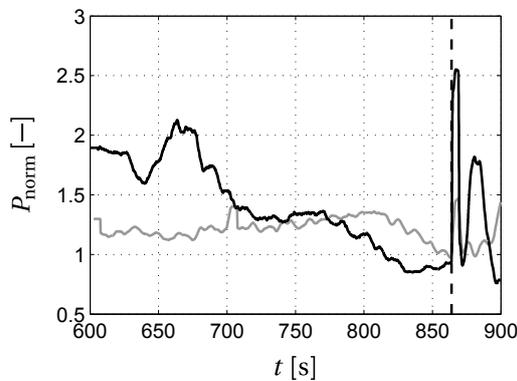
Abbildung 4.13. Klassische Merkmale für Szenario 1-1.



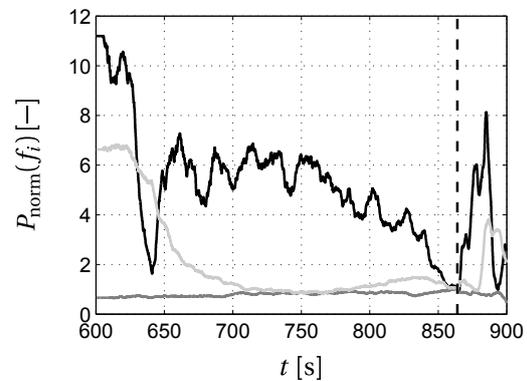
(a) Merkmale 1 (schwarz) und 2 (grau).



(b) Merkmale 3 (schwarz), 4 (dunkelgrau) und 5 (hellgrau).

Abbildung 4.14. Klassische Merkmale für Szenario 1-2.

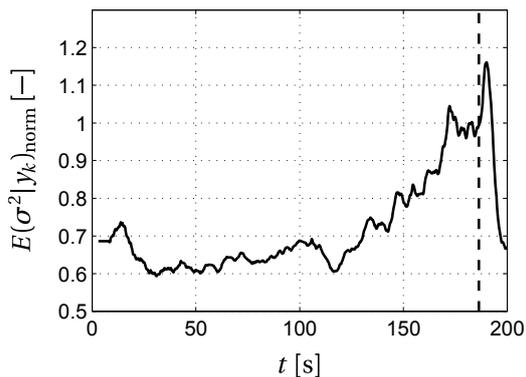
(a) Merkmale 1 (schwarz) und 2 (grau).



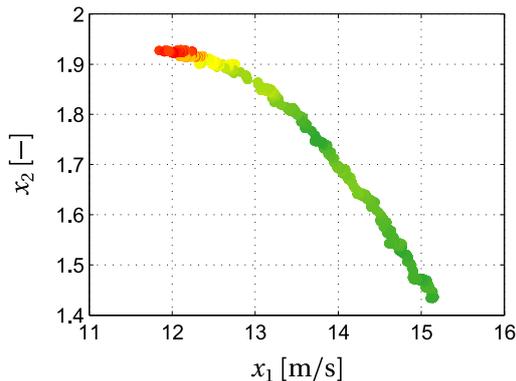
(b) Merkmale 3 (schwarz), 4 (dunkelgrau) und 5 (hellgrau).

Abbildung 4.15. Klassische Merkmale für Szenario 1-3.

Die Abbildungen 4.16 bis 4.17 zeigen die normierte geschätzte Varianz nach Gleichung (3.31) für VI in den Szenarien 1-1 bis 1-3. Die Normierung des Merkmals bezieht sich wieder auf den Wert an der Pumpgrenze. Zur Verdeutlichung des Zusammenhangs mit der aktuellen Lage des Arbeitspunktes ist die farbcodierte Verdichterkennlinie jeweils auf der rechten Seite der Abbildungen zu sehen. Dabei reicht die Farbskala von Grün (entspricht niedrigem Wert der Varianz) über Gelb bis Rot (entspricht hohem Wert der Varianz). Die Szenarien zeigen zwei Trends, die sich in den drei Lastbereichen unterschiedlich stark äußern. Bei niedriger Last fällt die Varianz bis 30s auf einen minimalen Wert ab und steigt anschließend bis zur Pumpgrenze an. Kurz nach dem Überschreiten der Pumpgrenze ist die Varianz maximal. Danach sinkt die Varianz aufgrund des Entlastungsvorgangs des Verdichters wieder ab. Im mittleren Lastbereich ist ein ausgeprägter fallender Trend bis 380s zu sehen, bevor die Varianz wiederum bis zur Pumpgrenze ansteigt. Bei hoher Last ist ausschließlich ein fallender Trend zu beobachten. Ein Ansteigen ist erst kurz vor dem Erreichen der Pumpgrenze erkennbar. Aufgrund des Pumpstoßes steigt die Varianz auf ein Vielfaches des Wertes an der Pumpgrenze an. Während also der fallende Trend bei steigender Last einen größer werdenden Anteil des Drosselvorgangs ausmacht, verhält es sich für den steigenden Trend genau umgekehrt.

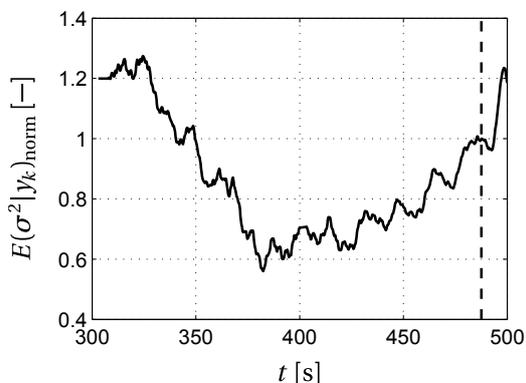


(a) Darstellung in Abhängigkeit der Zeit.

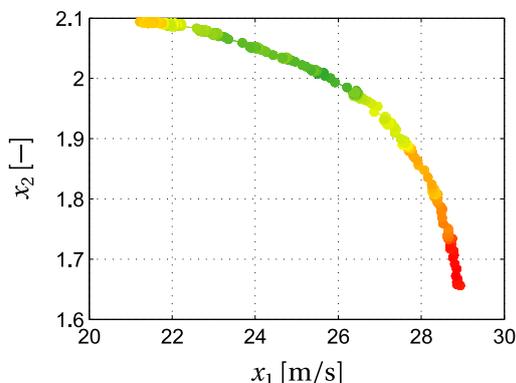


(b) Darstellung als farbcodierte Kennlinie.

Abbildung 4.16. Geglättete normierte Varianz für Szenario 1-1.

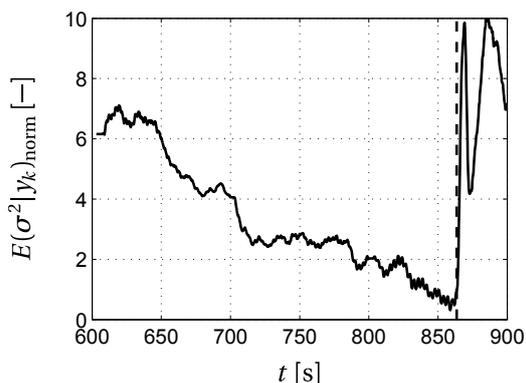


(a) Darstellung in Abhängigkeit der Zeit.

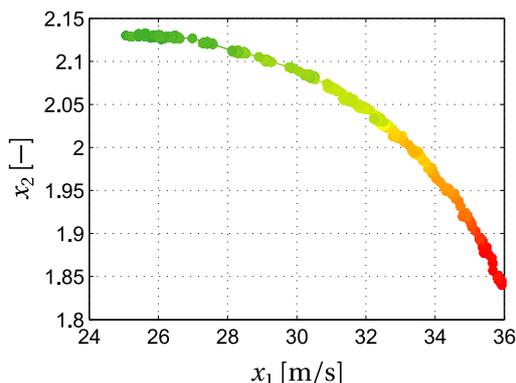


(b) Darstellung als farbcodierte Kennlinie.

Abbildung 4.17. Geglättete normierte Varianz für Szenario 1-2.



(a) Darstellung in Abhängigkeit der Zeit.

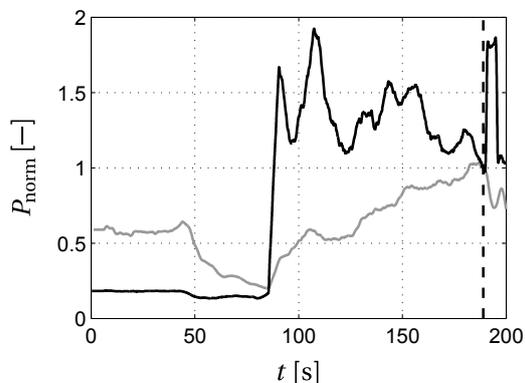


(b) Darstellung als farbcodierte Kennlinie.

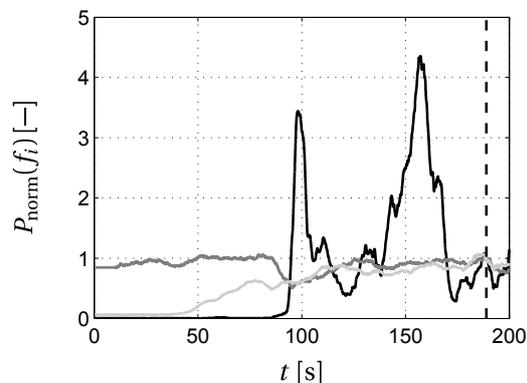
Abbildung 4.18. Geglättete normierte Varianz für Szenario 1-3.

In den Abbildungen 4.19 bis 4.21 sind die Ergebnisse von V2 (Szenario 1-4 bis 1-6) für die klassischen Merkmale festgehalten. Merkmal 1 und 3 zeigen ein ungünstiges Verhalten. Beide Merkmale variieren während der Verringerung des PGA sehr stark. Die beste Eignung für eine Erkennung des PGA weist wiederum Merkmal 2 auf. Der Wert an der Pumpgrenze unterscheidet sich von den vorhergehenden Werten. Darüber hinaus zeigt sich in weiten Bereichen ein

monotones Verhalten. Eine Ausnahme bildet hierbei der Einbruch zwischen 50 und 100 s bei niedriger Last sowie um 750 s bei hoher Last. Die Merkmale 4 und 5 lassen ebenfalls keine Erkennung zu, da sie kein nachvollziehbares Muster offenbaren.

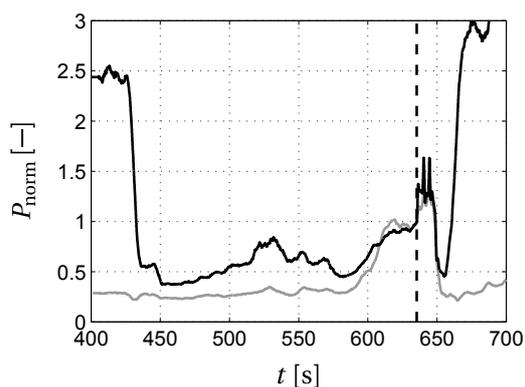


(a) Merkmale 1 (schwarz) und 2 (grau).

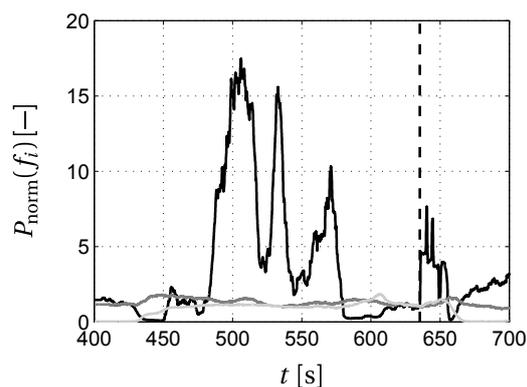


(b) Merkmale 3 (schwarz), 4 (dunkelgrau) und 5 (hellgrau).

Abbildung 4.19. Klassische Merkmale für Szenario 1-4.

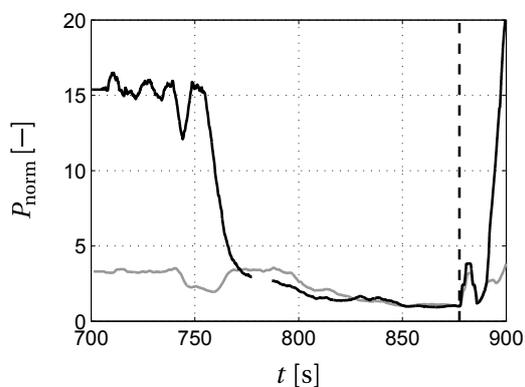


(a) Merkmale 1 (schwarz) und 2 (grau).

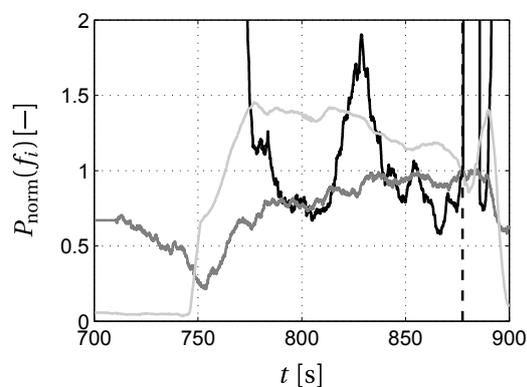


(b) Merkmale 3 (schwarz), 4 (dunkelgrau) und 5 (hellgrau).

Abbildung 4.20. Klassische Merkmale für Szenario 1-5.



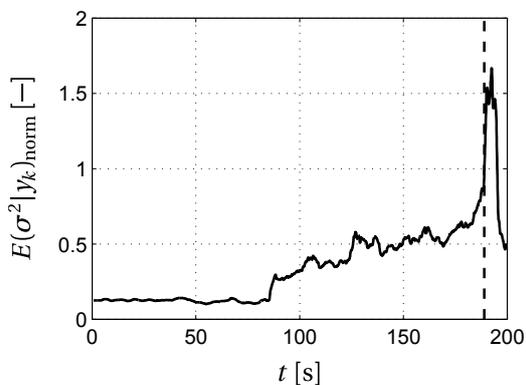
(a) Merkmale 1 (schwarz) und 2 (grau).



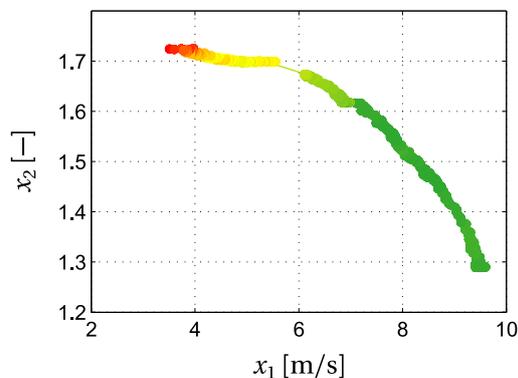
(b) Merkmale 3 (schwarz), 4 (dunkelgrau) und 5 (hellgrau).

Abbildung 4.21. Klassische Merkmale für Szenario 1-6.

In Abbildung 4.22 bis Abbildung 4.24 sind die geschätzten Varianzen für die Szenarien 1-4 bis 1-6 zu sehen. Auch für V2 ist ein ähnliches Muster wie bei V1 erkennbar. Bei niedriger Last steigt die Varianz mit zunehmender Drosselung an. Der Sprung um 80s fällt dabei mit dem Knick in der Verdichterkennlinie zusammen. Diese Abweichung von der normalen Form der

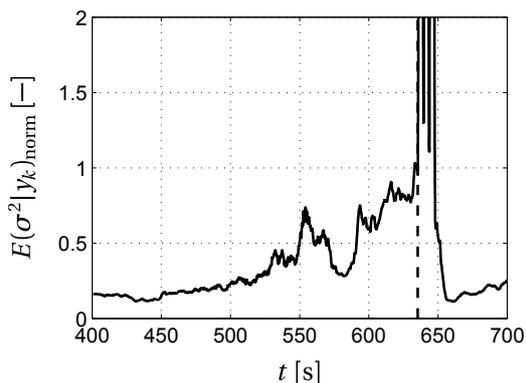


(a) Darstellung in Abhängigkeit der Zeit.

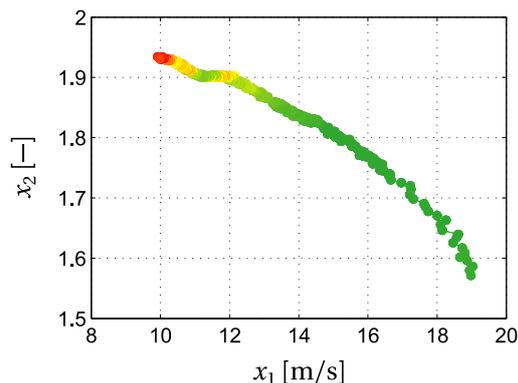


(b) Darstellung als farbcodierte Kennlinie.

Abbildung 4.22. Geglättete normierte Varianz für Szenario 1-4.

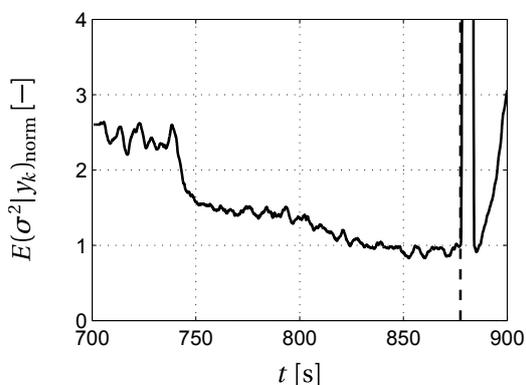


(a) Darstellung in Abhängigkeit der Zeit.

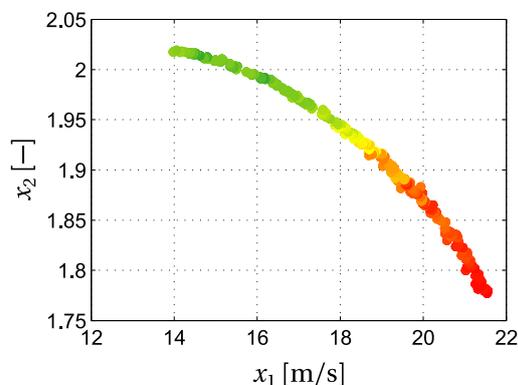


(b) Darstellung als farbcodierte Kennlinie.

Abbildung 4.23. Geglättete normierte Varianz für Szenario 1-5.



(a) Darstellung in Abhängigkeit der Zeit.

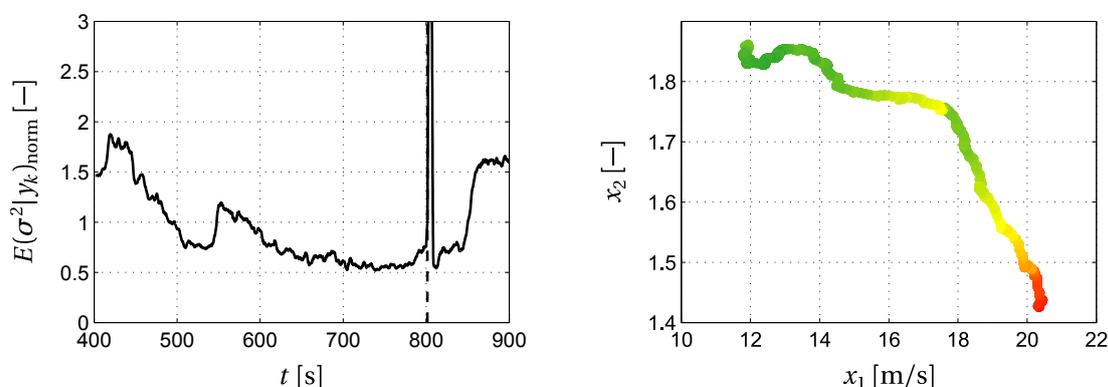


(b) Darstellung als farbcodierte Kennlinie.

Abbildung 4.24. Geglättete normierte Varianz für Szenario 1-6.

Verdichterkennlinie ist auf einen störenden Effekt in der Verdichterströmung zurückzuführen. Ein größerer Teil der vom Motor eingebrachten Leistung geht in einen verlusterzeugenden Mechanismus ein. Die erhöhte Varianz in diesem Bereich weist auf verstärkte Wirbelbildungen oder Sekundärströmungen hin. Eine zweifelsfreie Identifikation des Effektes ist aufgrund fehlender invasiver Druckdaten aus dem Ringraum des Verdichters nicht möglich. Jedoch zeigen auch die klassischen Merkmale 1,2 und 3 einen deutlichen Anstieg (siehe Abbildungen 4.19a und 4.19b), der auf eine qualitative Änderung in der Verdichterströmung hinweist. Der störende Effekt tritt auch bei mittlerer Last auf. Beispielsweise zeigt die Verdichterkennlinie in Abbildung 4.23b einen Knick bei 12 m/s. Dieser Knick fällt mit der deutlichen Erhöhung der Varianz ab 550 s zusammen. Bei mittlerer Last weist keines der klassischen Merkmale einen Anstieg auf. Die Varianz scheint demnach ein zweckmäßiger Indikator für den beobachteten Effekt. Für den niedrigen und mittleren Lastbereich liegt die Vermutung nahe, dass ein erhöhter Energietransfer in den Erzeugungsmechanismus breitbandig abstrahlender Strömungsformen stattfindet. Dadurch werden Verlusteffekte generiert, die zum Abknicken der Verdichterkennlinie führen. Diese Auswirkungen sind besonders gut in der farbcodierten Darstellung der Arbeitspunkte bei 5,5 m/s (siehe Abbildung 4.22b) und bei 12 m/s (siehe Abbildung 4.23b) zu beobachten. Im hohen Lastbereich (Szenario 1-6) ist ein vergleichbarer Verlauf zur hohen Last von V1 (Szenario 1-3) zu erkennen. Auch der Trend bei V2 nimmt mit Verringerung des PGA ab, wobei der starke Abfall bei 740 s keiner eindeutigen Ursache in Bezug auf die Verdichterkennlinie in Abbildung 4.24b zuordenbar ist. Insgesamt stellen sich zu V1 vergleichbare Verläufe ein.

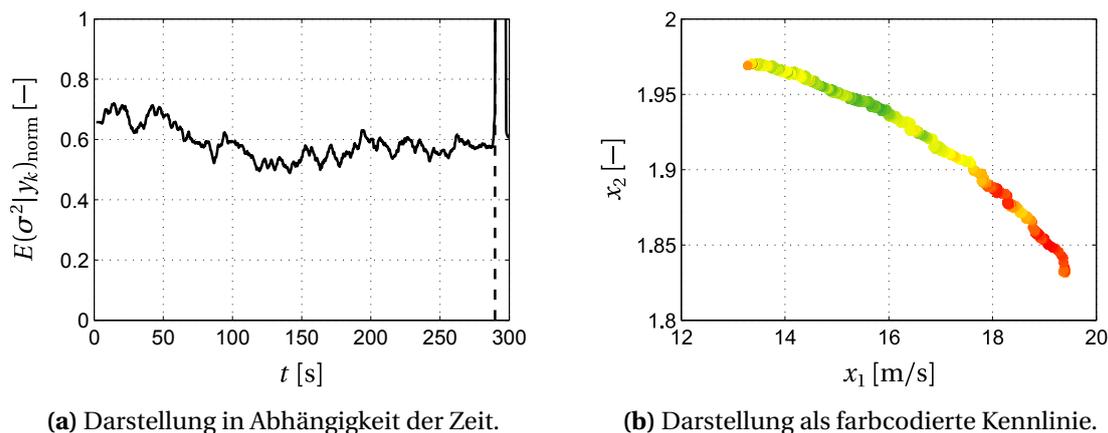
In den Szenarien 1-7 und 1-8 wurden die Verdichter V1 und V2 im Serienbetrieb mit Zwischenkühlung betrieben. Hierbei saugte V1 Umgebungsluft an. Die Luft wurde nach der Passage eines Kühlers von V2 weiter verdichtet. In beiden Szenarien wurde V1 im mittleren Lastbereich betrieben. V2 arbeitete im hohen Lastbereich. Die Szenarien unterscheiden sich nur durch die Leistung der Zwischenkühlung. Die Messung des Körperschalls erfolgte bei V2. Hierfür zeigen Abbildung 4.25 und Abbildung 4.26 die geschätzte Varianz und die farbcodierten Arbeitspunkte des Verdichters. Die klassischen Merkmale 1 bis 5 wurden für den Serienbetrieb nicht weiter beachtet, da sie bereits für den Einzelbetrieb keine ausreichende Erkennung des Verdichterszustandes zulassen. Im hohen Lastbereich von V2 wäre gemäß den Ergebnissen aus



(a) Darstellung in Abhängigkeit der Zeit.

(b) Darstellung als farbcodierte Kennlinie.

Abbildung 4.25. Geglättete normierte Varianz für Szenario 1-7.



(a) Darstellung in Abhängigkeit der Zeit.

(b) Darstellung als farbcodierte Kennlinie.

Abbildung 4.26. Geglättete normierte Varianz für Szenario 1-8.

dem Einzelbetrieb eine kontinuierliche Abnahme der Varianz mit Verringerung des PGA zu erwarten. Bis auf den Anstieg bei 550 s in Abbildung 4.31 entspricht der Verlauf dieser Erwartung. Dabei fällt die Erhöhung wiederum mit dem Zeitpunkt des Abknickens der Kennlinie bei ca. 17,7 m/s zusammen. Dies ist in Abbildung 4.25b gut durch den Farbwechsel an der Knickstelle zu erkennen. Für die maximale Zwischenkühlung zeigt Abbildung 4.26 ebenfalls eine graduelle Verringerung der Varianz. Damit entspricht auch der Betrieb bei maximaler Zwischenkühlung den Erwartungen aus dem Einzelbetrieb von V2.

Insgesamt existiert eine ausgeprägte Abhängigkeit von der Leitgitterstellung und damit vom Lastbereich, in dem der Verdichter betrieben wird. Bei der Annäherung des Arbeitspunktes an die Pumpgrenze überlagern sich ein fallender und einer steigender Trend. Ein Ansteigen der Varianz kann dabei als Leistungszunahme breitbandig abstrahlender Strömungsformen interpretiert werden. Diese umfassen gemäß Abschnitt 3.2.2 vor allem Sekundärströmungen, Wirbelablösungen und Anströmturbulenz. Aufgrund des größeren Anstellwinkels werden bei niedriger Last verstärkt Wirbelablösungen erzeugt. Den Beitrag von Wirbelablösungen zur Schallentstehung hebt beispielsweise NEISE heraus [136]. Er gibt an, dass zusätzliche stochastische Schaufelkräfte entstehen, wenn sich die Strömung durch einen großen Anstellwinkel vom Schaufelprofil ablöst. Der Effekt sollte sich folglich bei Verringerung des Anstellwinkels abschwächen. Bei Erreichen des optimalen Anstellwinkels sollte der Effekt vernachlässigbar sein. Liegt weiterhin eine geringe Anströmturbulenz – insbesondere fehlende Einlaufstörungen – vor, ist die untere Pegelgrenze der breitbandigen Komponenten durch Druckschwankungen in der turbulenten Grenzschicht der Verdichterströmung gegeben [136, 137]. Da der Turbulenzgrad einer Strömung mit der mittleren Strömungsgeschwindigkeit abnimmt, sollte auch die untere Pegelgrenze bei Annäherung an die Pumpgrenze abnehmen. Dies erklärt den fallenden Trend der Varianz. Zusammenfassend überlagern sich zwei maßgebliche Beiträge und bilden den beobachteten Verlauf der Varianz. Der erste Beitrag lässt sich auf Sekundärströmungen, Wirbelablösungen und Anströmturbulenz zurückführen und steigt bei deren Verstärkung. Der zweite Beitrag kann auf die mittlere Strömungsgeschwindigkeit zurückgeführt werden und sinkt bei deren Verringerung.

4.3.3 Kampagne 2

Um die Ergebnisse aus Kampagne 1 zu bestätigen, wurden V1 und V2 in einer zweiten Kampagne erneut untersucht. Die beiden Verdichter wurden in Einzelfahrweise betrieben. Zunächst ist in Abbildung 4.27 Verdichter V1 für niedrige Last zu sehen. Über den Zeitraum bis 700 s scheinen sich die beiden Trends nahezu aufzuheben. Erst kurz vor der Pumpgrenze überwiegt die Erzeugung breitbandig abstrahlender Strömungsformen, was zu einem starken Ansteigen der Varianz führt. Die farbcodierten Arbeitspunkte des Verdichters entsprechen dabei denen der Szenarien für niedrige Last aus Kampagne 1. Insofern ergibt sich ein vergleichbares Ergebnis. Die Szenarien 2-2 und 2-3 sind in Abbildung 4.28 und Abbildung 4.29 darstellt. Beide Szenarien wurden am Verdichter V2 bei gleichbleibender Leitgitterstellung durchgeführt. Der Unterschied bestand in der Geschwindigkeit der Androsselung. In Szenario 2-2 dauerte der Drosselvorgang etwa 250 s. In Szenario 2-3 wurde derselbe Wertebereich bezüglich des Druckverhältnisses in 125 s durchfahren; die Drosselgeschwindigkeit wurde damit verdoppelt. Dabei ist zu beachten, dass die vertikale Linie in beiden Abbildungen nicht die Pumpgrenze darstellt. Vielmehr markiert diese Linie einen Arbeitspunkt deutlich vor der Pumpgrenze. Dieser Punkt wurde aus Sicherheitsgründen gewählt, da ein schnelles Anfahren der Pumpgrenze

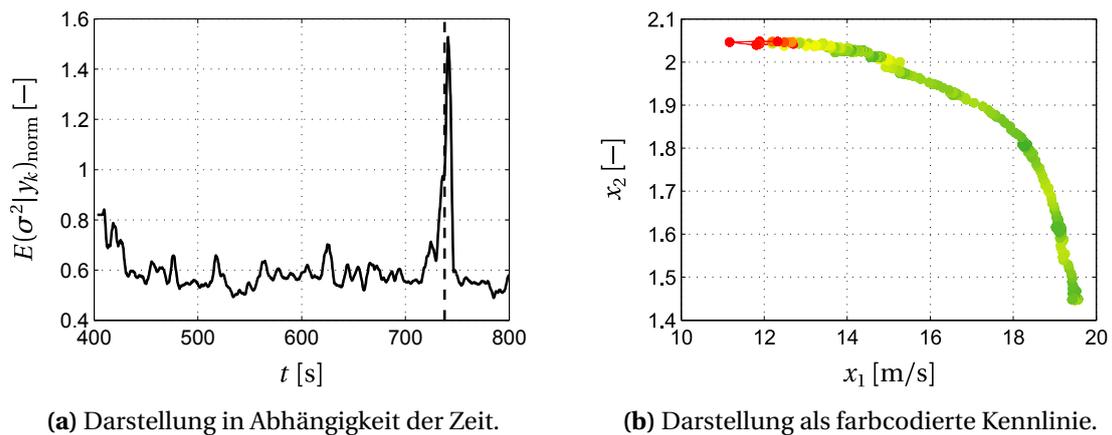


Abbildung 4.27. Geglättete normierte Varianz für Szenario 2-1.

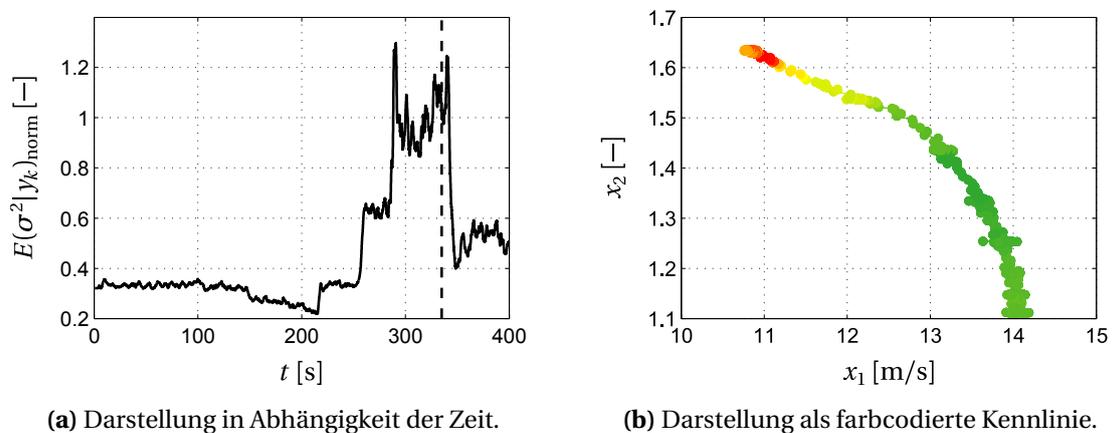


Abbildung 4.28. Geglättete normierte Varianz für Szenario 2-2.

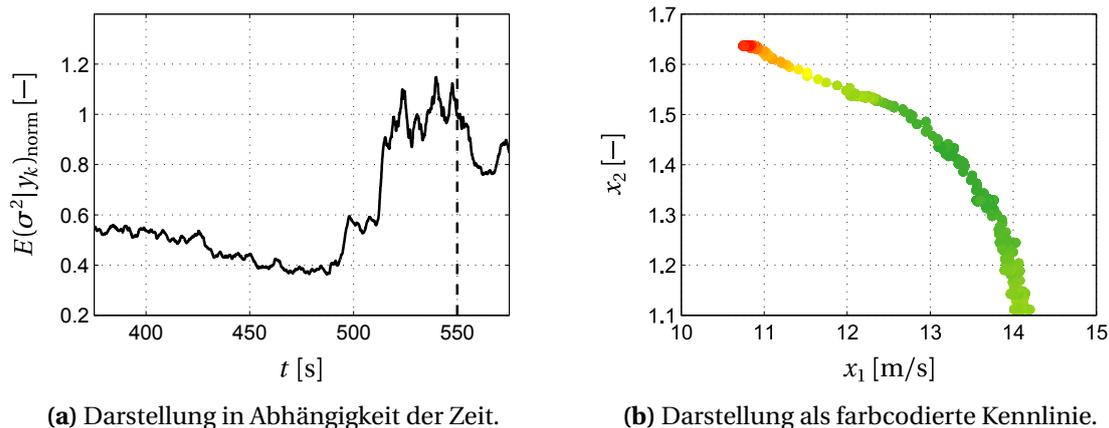


Abbildung 4.29. Geglättete normierte Varianz für Szenario 2-3.

auch mit gesteigertem Risiko mechanischer Schäden einhergeht. Beide Verläufe weisen eine ausgeprägte Ähnlichkeit auf. Das zeigt vor allem die farbcodierte Verdichterkennlinie in den Abbildungen 4.28b und 4.29b. Zunächst erfolgt eine Verringerung der Varianz. Dies deutet auf eine fallende Strömungsgeschwindigkeit hin. Anschließend nimmt die Varianz zu, wobei in beiden Fällen ein Überschwingen über den Referenzwert stattfindet. Die Übereinstimmung beider Fälle ist ein Hinweis auf die Reproduzierbarkeit der Ergebnisse. Unter gleichbleibenden äußeren Bedingungen ist das Ergebnis für beide Drosselgeschwindigkeiten ähnlich.

4.3.4 Kampagne 3

In der dritten Kampagne wurde ein weiterer einstufiger Radialverdichter untersucht. Im Gegensatz zu V1 und V2 handelt es sich dabei um einen Verdichter, der für die Kennfeldaufnahme in einen Teststand integriert wurde. Auch V3 wurde in verschiedenen Lastbereichen bis an die Pumpgrenze gedrosselt. Im Gegensatz zu V1 und V2 ist die deutlich größere Anzahl an Harmonischen im Spektrum auffällig. Dies weist auf eine größere Anzahl tonaler Komponenten aus Rotor-Stator-Interaktionen hin. Darüber hinaus erscheint das Spektrum weitgehend frei von Verzerrungen durch die Gehäuseübertragung. Entsprechend war eine Entfaltung nicht notwendig, um die Anwendbarkeit von Gleichung (3.31) sicherzustellen. Da keine fluidodynamischen Werte vorliegen, wird für V3 ausschließlich die geschätzte Varianz analysiert. Für die beiden Lastbereiche sind die Ergebnisse in Abbildung 4.30 dargestellt. Für den niedrigen Lastbereich zeigt die Varianz einen graduellen Anstieg bis zur Pumpgrenze bei etwa 2030 s. Danach erfolgte eine moderate Entlastung des Verdichters. Ein fallender Trend infolge der Reduzierung der Strömungsgeschwindigkeit ist nicht erkennbar. Diese Ergebnisse decken sich mit den Szenarien für V1 und V2 bei niedriger Last. Gegenüber den deutlich älteren Verdichtern V1 und V2 ist jedoch jeder Drosselvorgang durch ein sprunghaftes Ansteigen der Varianz bereits im Körperschall gut sichtbar. Das Ergebnis für den hohen Lastbereich ist als schwarze Linie in Abbildung 4.30 zu sehen. Der fallende Trend infolge der Reduzierung der Strömungsgeschwindigkeit lässt sich bis etwa 1710 s noch erkennen. Anschließend steigt die Varianz bis zur Pumpgrenze an und erreicht dort ein Maximum. Im Gegensatz zu V1 und V2 bei hoher Last fällt der Anstieg jedoch sehr deutlich aus. Mögliche Erklärungen umfassen insbesondere eine unterschiedliche Konstruktion von Lauf- und Leitschaufeln sowie des Diffusors als auch das

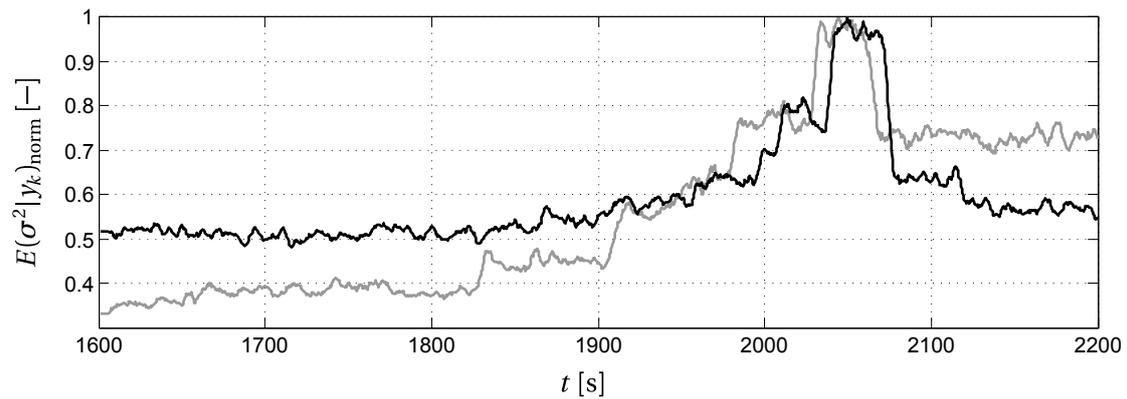


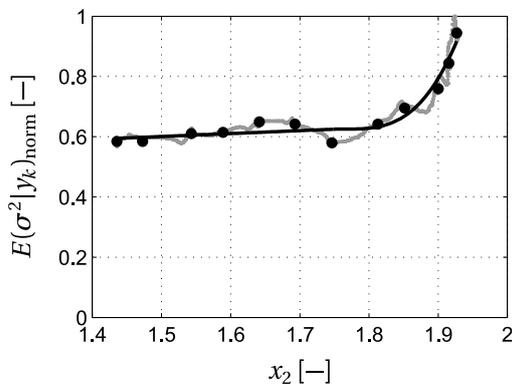
Abbildung 4.30. Geglättete normierte Varianz für Szenario 3-1 (grau) und 3-2 (schwarz).

geringe Alter des Verdichters. Das Szenario endet wiederum mit einer geringfügigen Entlastung nach einem kurzen Betrieb an der Pumpgrenze. Insgesamt zeigt auch V3 mit abnehmendem PGA einen signifikanten Anstieg der Varianz. Wie bei den vorherigen Kampagnen kann dieser Anstieg auf die Entstehung von Wirbelablösungen und Sekundärströmungen zurückgeführt werden. Die Varianz der breitbandigen Gehäuseanregung ist damit auch für Kampagne 3 ein sinnvoller Indikator für den PGA.

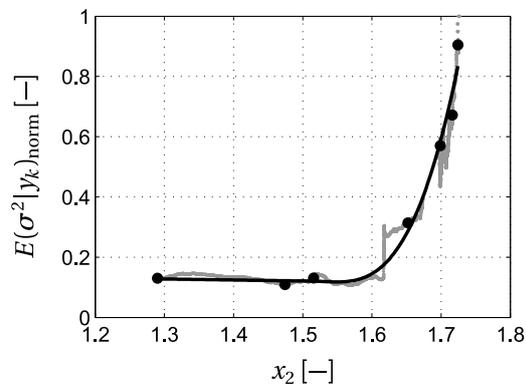
4.4 Erweiterung des Verdichtermodells

4.4.1 Abhängigkeit der Varianz vom Pumpgrenzabstand

Die Varianz der breitbandigen Gehäuseanregung zeigt für alle Kampagnen ein erklärbares und reproduzierbares Muster. Um den Zusammenhang mit dem PGA zu verdeutlichen, wird die geschätzte Varianz in Abhängigkeit des Druckverhältnisses für die Kampagnen 1 und 2 dargestellt. Das Druckverhältnis dient hierbei als Maß für den PGA. Mit Zunahme des Druckverhältnisses sinkt der PGA und erreicht beim maximalen Druckverhältnis an der Pumpgrenze den Wert Null. Abbildung 4.31 bis Abbildung 4.33 illustrieren damit die Abhängigkeit der Varianz vom PGA. Die jeweils gleichen Lastbereiche von V1 und V2 sind dabei gegenübergestellt (beispielsweise niedrige Last in Abbildung 4.31a und 4.31b).

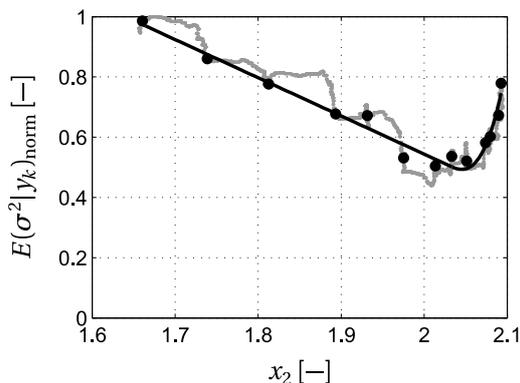


(a) Varianz in Abhängigkeit vom Druckverhältnis (grau) und Trend (schwarz) für Szenario 1-1.

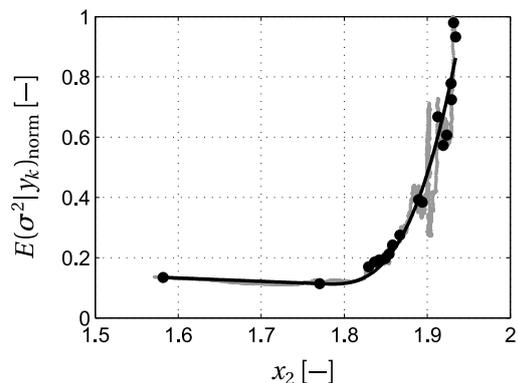


(b) Varianz in Abhängigkeit vom Druckverhältnis (grau) und Trend (schwarz) für Szenario 1-4.

Abbildung 4.31. Trend der stationären Werte der geglätteten normierten Varianz durch segmentweise Approximation für die Szenarien 1-1 und 1-4.

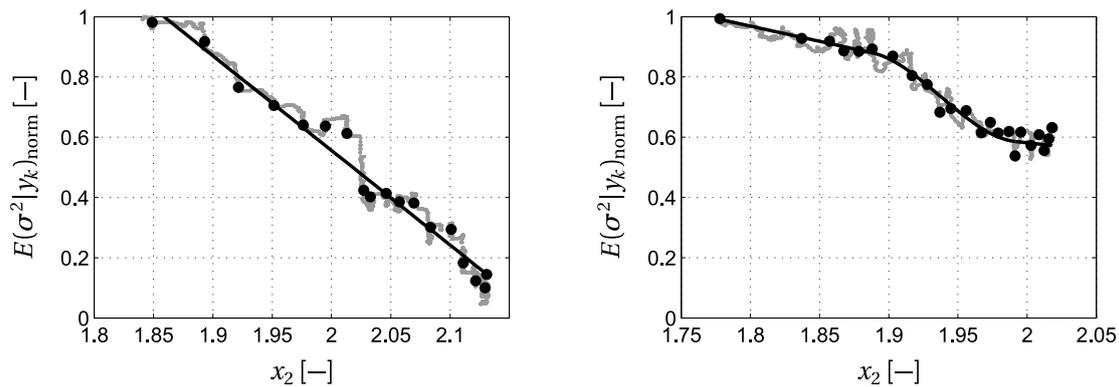


(a) Varianz in Abhängigkeit vom Druckverhältnis (grau) und Trend (schwarz) für Szenario 1-2.



(b) Varianz in Abhängigkeit vom Druckverhältnis (grau) und Trend (schwarz) für Szenario 1-5.

Abbildung 4.32. Trend der stationären Werte der geglätteten normierten Varianz durch segmentweise Approximation für die Szenarien 1-2 und 1-5.

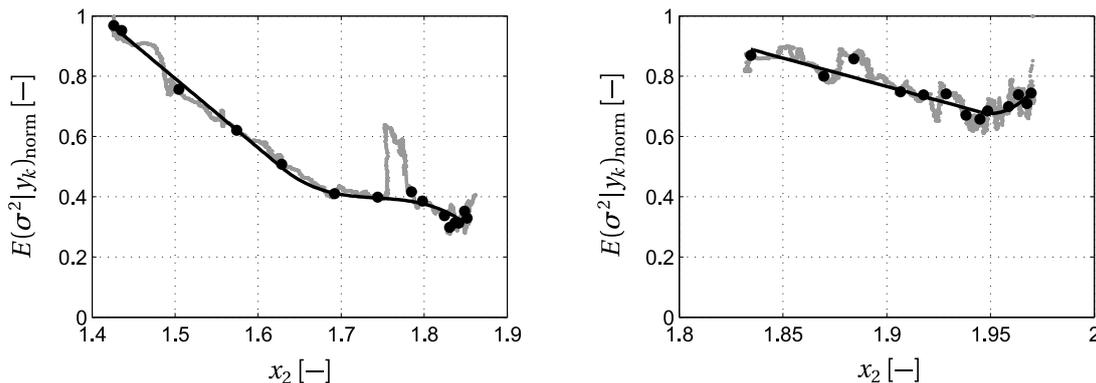


(a) Varianz in Abhängigkeit vom Druckverhältnis (grau) und Trend (schwarz) für Szenario 1-3. (b) Varianz in Abhängigkeit vom Druckverhältnis (grau) und Trend (schwarz) für Szenario 1-6.

Abbildung 4.33. Trend der stationären Werte der geglätteten normierten Varianz durch segmentweise Approximation für die Szenarien 1-3 und 1-6.

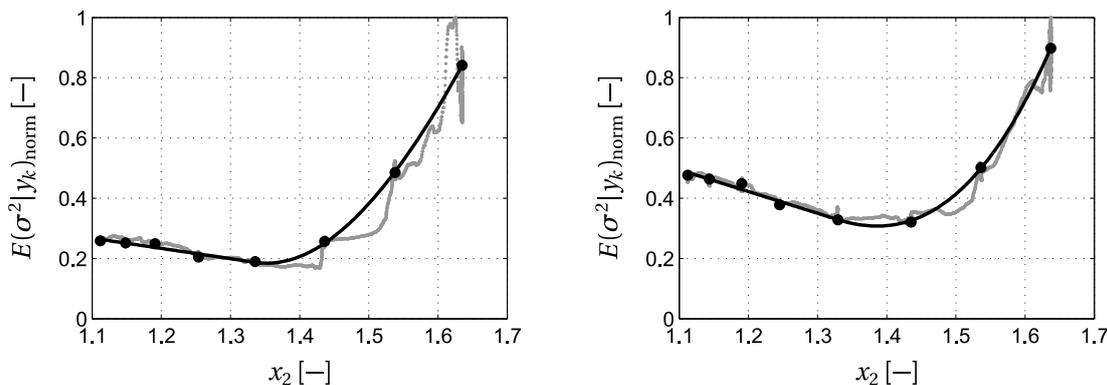
Die graue Kurve stellt die geglättete normierte Varianz dar. Die stationären Zustände auf diesem Verlauf sind durch schwarze Punkte gekennzeichnet. Für V2 wurden die stationären Zustände an den Knickstellen der Verdichterkennlinien (vgl. Abbildung 4.22b und Abbildung 4.23b) entfernt. Diese stationären Zustände werden durch einen zusätzlichen verlusterzeugenden Effekt verursacht und überlagern den eigentlichen Trend. Basierend auf den berücksichtigten Stützpunkten erfolgt eine segmentweise Approximation durch polynomiale Funktionen. An der Übergangsstelle zwischen den beiden Funktionen stimmen sowohl der Funktionswert als auch die erste Ableitung überein. In dieser Darstellung fällt besonders auf, dass für niedrige und mittlere Last zwei Segmente zur Beschreibung des Verhaltens genügen. Für große PGA ist eine lineare Funktion ausreichend. Für geringe PGA steigt die Varianz überproportional an. Entsprechend ist eine Funktion zweiten oder dritten Grades für die Approximation erforderlich. Der hohe Lastbereich von V1 und V2 ist durch einen fallenden Trend gekennzeichnet. Für V1 genügt hierbei bereits eine lineare Funktion, um die Varianz adäquat zu modellieren.

Abbildung 4.34 zeigt die geschätzte Varianz für den Serienbetrieb von V1 und V2 in Abhängigkeit des Druckverhältnisses. Die starke Abweichung in Szenario 1-7 bei einem Druckverhältnis von etwa 1,75 ist wiederum dem verlusterzeugenden Effekt zuzuschreiben. Die zugehörigen stationären Arbeitspunkte wurden aus Abbildung 4.34a entfernt und für die Approximation nicht weiter beachtet. Aufgrund der unterschiedlichen Zwischenkühlung verschiebt sich die Pumpgrenze von Szenario 1-7 zu 1-8. Bei geringem PGA unterscheidet sich die Varianz der beiden Szenarien nur durch die starke Abweichung in Szenario 1-7. Diese ist bei maximaler Zwischenkühlung nicht zu beobachten und lässt zwei Interpretationen zu: Zum einen könnte der Wertebereich in Szenario 1-8 nicht ausgereicht haben, um den verlusterzeugenden Effekt zu erfassen. Zum anderen könnte der Effekt aufgrund des veränderten Ansaugzustandes nicht aufgetreten sein. Die Frage kann auf Basis der vorhandenen Daten nicht abschließend beantwortet werden. Es zeigen sich jedoch fallende Trends in beiden Szenarien. Dies weist auf die Reduzierung breitbandig abstrahlender Strömungsformen durch sinkende Strömungsgeschwindigkeit hin und entspricht damit den Erwartungen bei hoher Last. In Abbildung 4.35 wird Verdichter V2 mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten in Richtung der Pumpgrenze ge-



(a) Varianz in Abhängigkeit vom Druckverhältnis (grau) und Trend (schwarz) für Szenario 1-7. (b) Varianz in Abhängigkeit vom Druckverhältnis (grau) und Trend (schwarz) für Szenario 1-8.

Abbildung 4.34. Trend der stationären Werte der geglätteten normierten Varianz durch segmentweise Approximation für Szenario 1-7 und 1-8.



(a) Varianz in Abhängigkeit vom Druckverhältnis (grau) und Trend (schwarz) für Szenario 2-2. (b) Varianz in Abhängigkeit vom Druckverhältnis (grau) und Trend (schwarz) für Szenario 2-3.

Abbildung 4.35. Trend der stationären Werte der geglätteten normierten Varianz durch segmentweise Approximation für Szenario 2-2 und 2-3.

drosselt. Wie bereits aus den Zeitverläufen ersichtlich, lässt sich das Ergebnis aus Szenario 2-2 in Szenario 2-3 trotz Verdopplung der Drosselgeschwindigkeit reproduzieren. Die Abweichung bei den normierten Werten lässt sich auf die Nutzung unterschiedlicher Normierungsfaktoren zurückführen. Die absoluten Werte der geschätzten Varianz in den stationären Zuständen weichen nur wenig voneinander ab. Zumindest bei den untersuchten Szenarien zeigt sich demnach keine ausgeprägte Abhängigkeit von der Drosselgeschwindigkeit. Dies lässt sich auf die Dynamik breitbandig abstrahlender Störungen zurückzuführen. In beiden Szenarien genügte die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Drosselvorgängen, um einen stationären Zustand zu erreichen. Bei weiterer Erhöhung der Drosselgeschwindigkeit ist jedoch eine qualitative Veränderung zu erwarten. Insbesondere sollte dies für den Fall gelten, in dem die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Drosselvorgängen nicht für die Beendigung von Übergangsvorgängen ausreicht. Ein solcher Versuch war aufgrund der Gefährdung der Anlage nicht möglich.

Zusammenfassend zeigen die Ergebnisse einen nachvollziehbaren Zusammenhang der Varianz mit dem aerodynamischen Verdichterzustand. In allen Fällen erfolgte eine sehr gute Approximation der stationären Zustände der Varianz durch polynomiale Funktionen. Hierfür stellt Tabelle 4.5 die Güte der segmentweisen Approximation für die präsentierten Szenarien dar. Nur die Güte für Szenario 1-8 weicht stärker vom optimalen Ergebnis ab. Die hohen Werte von R^2 für die Szenarien 1-4, 2-2 und 2-3 sind dabei nicht ausschließlich auf die geringe Anzahl an Stützpunkten im Vergleich zur Anzahl an Freiheitsgraden zurückzuführen. Dies bestätigt das korrigierte Bestimmtheitsmaß \bar{R}^2 .

Verdichter	Szenario	Stützpunkte	R^2 [%]	\bar{R}^2 [%]
V1	1-1	12	95,13	92,09
V1	1-2	13	95,50	94,56
V1	1-3	18	97,21	97,03
V1	2-1	11	94,85	91,18
V2	1-4	7	97,13	92,36
V2	1-5	18	95,37	93,72
V2	1-6	23	95,70	94,20
V2	2-2	8	99,90	99,78
V2	2-3	8	99,75	99,43
V1+V2	1-7	15	99,05	98,62
V1+V2	1-8	13	83,69	77,17

Tabelle 4.5. Bestimmtheitsmaße R^2 und \bar{R}^2 der segmentweisen Approximation.

4.4.2 Geschätzte Varianz als Messgleichung für das Verdichtermodell

Die Werte der geschätzten Varianz im stationären Zustand können durch eine segmentweise polynomiale Approximation gut erfasst werden, wobei für ein Segment Polynome erster bis dritter Ordnung genügen. Das Modell dritter Ordnung für den stationären Zustand der Varianz $E(\sigma^2|y_k)_{\text{stat}}$ innerhalb eines Segments lautet in ausreichend guter Näherung damit:

$$E(\sigma^2|y_k)_{\text{stat}} \approx d_3 c_2^3 + d_2 c_2^2 + d_1 c_2 + d_0. \quad (4.2)$$

Für die Segmente erster und zweiter Ordnung werden die entsprechenden Koeffizienten zu Null gesetzt. Ferner muss eine Umschaltung der Koeffizienten bei einem Wechsel des Segments erfolgen. Die Art der verwendeten Approximation stellt jedoch den stetigen Übergang bis zur ersten Ableitung sicher. Damit kann die durch eine Körperschallanalyse gewonnene Varianz in Abhängigkeit der Zustandsgrößen des Verdichtermodells ausgedrückt werden. Gleichung (4.2) beschränkt sich dabei auf die Modellierung von $E(\sigma^2|y_k)_{\text{stat}}$ für eine konstante Leitgitterstellung r_{GV} . Die Erweiterung von Gleichung (4.2) auf das gesamte Verdichterkennfeld führt zum Varianzkennfeld des Körperschalls $Y_K(x_1, x_2)$. Das Varianzkennfeld $Y_K(x_1, x_2)$ lässt sich nun als Messgleichung für das fluiddynamische Modell auffassen. Ausgehend von Modell (4.1)

führt dies zu:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{\tau_L} [Y_V(x_1, x_4) + Y_D(x_1, x_3, x_4) - k_1(x_2^{r_k} - 1)], \quad (4.3a)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{\tau_V} [x_1 - k_{PV}(x_2)Y_{PV}(x_5)\sqrt{2k_1(x_2^{r_k} - 1)/r_k}], \quad (4.3b)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{\tau_A} Y_A(x_1, x_3, x_4), \quad (4.3c)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{\tau_{GV}} [u_{GV} - x_4], \quad (4.3d)$$

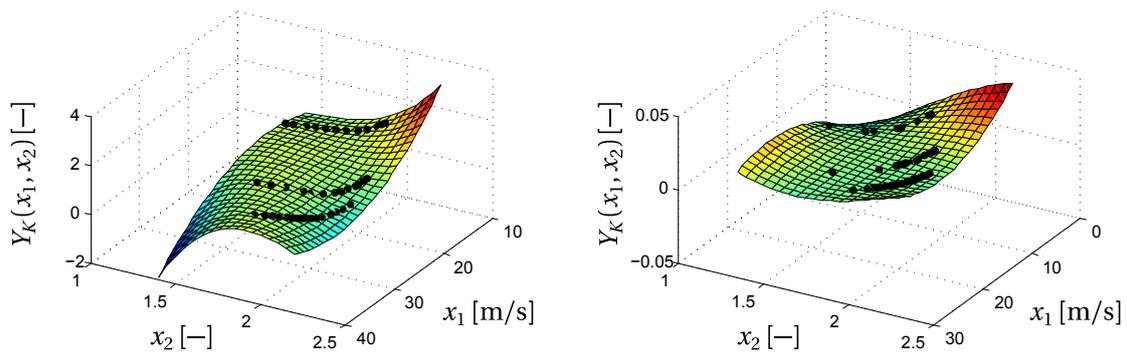
$$\dot{x}_5 = \frac{1}{\tau_{PV}} [u_{PV} - x_5], \quad (4.3e)$$

$$y = Y_K(x_1, x_2), \quad (4.3f)$$

wobei sich die Varianzkennfelder für V1 und V2 in Kampagne 1 durch den gleichen polynomialen Ansatz beschreiben lassen:

$$Y_K(x_1, x_2) = d_{00} + d_{10}x_1 + d_{01}x_2 + d_{20}x_1^2 + d_{11}x_1x_2 + d_{02}x_2^2 + d_{21}x_1^2x_2 + d_{12}x_1x_2^2 + d_{03}x_2^3. \quad (4.4)$$

Die Koeffizienten d sind in Appendix A zusammengefasst. Abbildung 4.36 zeigt hierfür die approximierten Varianzkennfelder für V1 (Szenarien 1-1 bis 1-3) und V2 (Szenarien 1-4 bis 1-6). Die Ausgangsgleichung $y(x)$ des Modells (4.3) beschreibt den Wert der Varianz im stationären Zustand $E(\sigma^2|y_k)_{\text{stat}}$ in Abhängigkeit der Eintrittsgeschwindigkeit x_1 und des Druckverhältnisses x_2 . Eine derartige Interpretation ist mit dem Konzept des Zustandsraummodells verträglich. Danach stellt die Messgleichung lediglich eine von den Zustandsgrößen des dynamischen Modells abhängige algebraische Größe dar. In diesem Konzept werden keine Voraussetzungen bezüglich der Komplexität einer Messung getroffen. Folglich modelliert die Messgleichung eine Größe, die in der konkreten Anwendung messtechnisch erfasst werden kann. Es bleibt jedoch festzuhalten, dass die Parameter d des Varianzkennfeldes (4.4) von den in der Signalanalyse konkret verwendeten Parametern abhängen. Eine Veränderung der Signalanalyse zieht damit



(a) Varianzkennfeld (Fläche) basierend auf den Varianzschätzungen im stationären Zustand (schwarze Punkte) für V1 (Szenario 1-1 – 1-3).

(b) Varianzkennfeld (Fläche) basierend auf den Varianzschätzungen im stationären Zustand (schwarze Punkte) für V2 (Szenario 1-4 – 1-6).

Abbildung 4.36. Varianzkennfelder für Kampagne 1.

auch immer eine Veränderung der Parameter d des Varianzkennfeldes (4.4) nach sich. Allerdings gilt dieser Hinweis grundsätzlich für die Messgleichung der Zustandsraumdarstellung. In vielen Fällen gibt die genutzte Messtechnik den Wert der interessierenden Zustandsgröße jedoch unmittelbar wieder; dann entfällt eine Parameterabhängigkeit. Der Unterschied zur hier genutzten Messung liegt folglich in der Komplexität der Parameterermittlung. Zusammenfassend zeigen die Ergebnisse aus Abschnitt 4.2 und Abschnitt 4.3, dass das Modell (4.3) eine ausreichend genaue Beschreibung des Systemverhaltens liefert und daher für den Entwurf einer Ablöseregung geeignet ist.

5 Regelung

Ziel dieses Kapitels ist der Entwurf einer modellbasierten MIN/MAX-Ablöseregelung für ein Radialverdichtersystem. Der Regler soll die Folgeregelung bei gleichzeitiger Einhaltung von Betriebsgrenzen und Unterdrückung von Störungen gewährleisten. In Abschnitt 5.1 erfolgt dazu die Darstellung des aktuellen Forschungsstandes in Bezug auf Ablöseregelungen. Abschnitt 5.2 präsentiert die notwendigen Grundlagen für den Entwurf einer Folgeregelung nichtlinearer Systeme. Dies umfasst die Einführung dynamischer Systeme in Zusammenhang mit den hier verwendeten Stabilitätsbegriffen. Nach der Darstellung verschiedener Methoden der Analyse nichtlinearer Systeme wird die Folgeregelung dynamischer Systeme durch Ausgangsnachführung auf Basis der vollständigen Zustandsrückführung thematisiert. Eine allgemeine Betrachtung der MIN/MAX-Ablöseregelung sowie den entsprechenden Entwurf zeigt Abschnitt 5.3. Dabei werden Aspekte der Umschaltung zwischen den Einzelreglern, der Generierung von Solltrajektorien und der Stabilität der Ablöseregelung untersucht. Das Ergebnis ist ein Algorithmus, der den Entwurf einer MIN/MAX-Ablöseregelung für ein minimalphasiges System mit mehreren Eingangs- und mehreren Ausgangsgrößen (MIMO) beschreibt. In Abschnitt 5.4 erfolgt die Anwendung der Entwurfsmuster auf ein Modell eines Radialverdichtersystems. Abschließend wird durch drei Simulationen gezeigt, dass die genannten Regelziele durch eine MIN/MAX-Ablöseregelung sichergestellt werden können.

5.1 Stand der Forschung

Eine MIN/MAX-Ablöseregulation kennzeichnet sich durch einen einfachen Aufbau und die Erzeugung einer stetigen Stellgröße. Wegen der Möglichkeit, Regelstrecken mit mehreren Regelgrößen durch den Entwurf von Eingrößenreglern zu handhaben, wird diese Form der Ablöseregulation in der Prozessindustrie häufig verwendet. Trotz der praktischen Bedeutung von Ablöseregulationen existieren nur wenige Forschungsbeiträge. Die umfangreichsten Arbeiten wurden von GLATTFELDER und SCHAUFELBERGER durchgeführt [60, 61, 62]. Dabei wurden lineare Strecken mit einer Ein- und Ausgangsgröße sowie mit mehreren Ein- und Ausgangsgrößen untersucht. Die Betrachtung umfasste auch den Stabilitätsnachweis, beispielsweise unter Anwendung des Kreiskriteriums [62]. Die Arbeiten von GLATTFELDER und SCHAUFELBERGER zeigen auch den engen Zusammenhang zwischen Ablöseregulationen und Regelungen mit begrenzender Aufgabe [61]. Beispielsweise können MIN/MAX-Selektoren effektiv für die Etablierung von Begrenzungen eingesetzt werden. Aus methodischer Sicht charakterisieren GLATTFELDER und SCHAUFELBERGER die Ablöseregulation als einen intuitiven Ansatz, der zwei Stufen beinhaltet [61]. In einem ersten Schritt wird die eigentliche Prozessregelung erzeugt. In einem zweiten Schritt werden weitere Maßnahmen umgesetzt, um die Spezifikationen an den geschlossenen Regelkreis zu erfüllen. Solche Maßnahmen umfassen auch die Generierung von Begrenzungsreglern [170]. Dieser Ansatz wird auch in den folgenden Abschnitten dieses Kapitels verfolgt. Es bleibt jedoch festzuhalten, dass die Arbeiten von GLATTFELDER und SCHAUFELBERGER ausschließlich auf lineare Strecken begrenzt sind. Ein weiterer früher Forschungsbeitrag geht auf FOSS zurück [54]. FOSS nutzte die Methode der harmonischen Balance und passivitätsbasierte Verfahren, um die Stabilität einer MIN-Ablöseregulation für ein lineares Gasturbinenmodell zu untersuchen. Als ein interessantes Ergebnis stellte sich dabei heraus, dass die Stabilität der einzelnen geschlossenen Regelkreise kein hinreichendes Kriterium für die Stabilität des Systems unter dem Wirken einer MIN/MAX-Ablösung ist. Vielmehr muss die durch eine MIN/MAX-Ablösestruktur verursachte Nichtlinearität beim Nachweis der Stabilität berücksichtigt werden.

Eine andere Form der Ablöseregulation wurde von TURNER und POSTLETHWAITE entwickelt [169]. Statt MIN/MAX-Selektoren, die zwischen verschiedenen Reglern umschalten, entwarfen TURNER und POSTLETHWAITE einen einzigen Mehrgrößenregler für eine lineare Regelstrecke. Beim Entwurf dieses Reglers wurde die Umschaltung bereits inhärent berücksichtigt. Das führte zur Formulierung und Lösung eines linearen Optimierungsproblems. Eine Erweiterung dieses Ansatzes auf E/A-linearisierbare Systeme erfolgte ebenfalls durch TURNER und POSTLETHWAITE in [170]. Beide Arbeiten beschränken sich jedoch auf weiche Grenzen. In diesem Sinne kann der Ablöseregler das Überschwingen über Betriebsgrenzen während dynamischer Übergangsvorgänge nicht vermeiden. Harte Begrenzungen wurden von HERRMANN ET. AL. eingeführt [92]. Dabei wurde der Ablöseregler für eine lineare Regelstrecke mit mehreren Ein- und Ausgangsgrößen unter Zuhilfenahme einer un stetigen LYAPUNOV-Funktion entworfen. Nachteile dieses Verfahrens bestehen insbesondere im Entwurfsaufwand sowie in der fehlenden Möglichkeit zur nachträglichen Abstimmung auf die gegebene Regelstrecke. Diese Aspekte wurden von MARCH ET. AL. [127] untersucht. Auch hierbei beschränkten sich die Autoren auf lineare Systeme. Da das zu untersuchende Modell (4.3) nichtlinear ist, lassen sich die bisher genannten Entwurfsmethoden der MIN/MAX-Ablöseregulation nicht anwenden. Ablöse-

regelungen können jedoch auch als Spezialfall schaltender Systeme betrachtet werden. Man spricht hierbei von Systemen mit schaltenden Reglern [122]. Unter dem Aspekt schaltender Regler existieren verschiedene Methoden, um die Stabilität zu untersuchen. LIBERZON fasste zwei wichtige Erkenntnisse hinsichtlich der Stabilität zusammen [122]:

- Umschaltungen können zur Instabilität führen, auch wenn jedes Einzelsystem stabil ist,
- Umschaltungen können ein System aus instabilen Einzelsystemen stabilisieren.

Der Stabilitätsnachweis schaltender Systeme fordert also eine weitergehende Betrachtung. Hierfür existieren verschiedene Ansätze. Dies betrifft lineare kontinuierliche Systeme [123, 125, 154], lineare diskrete Systeme [36, 123, 154], nichtlineare kontinuierliche und diskrete Systeme [24] sowie kontinuierliche Systeme mit Verzögerungen [184]. Ein nichtlineares und schaltendes System ist unter willkürlichem Schalten stabil, wenn es eine gemeinsame LYAPUNOV-Funktion gibt [122, 186]. Eine gemeinsame LYAPUNOV-Funktion ist eine positiv definite und kontinuierlich differenzierbare Funktion, bei der die Steigung entlang der Funktion unabhängig vom Schaltvorgang ist [122, 186]. Diese Forderung ist vergleichsweise streng und das Finden einer solchen Funktion stellt sich dementsprechend schwierig dar. Für den Fall nichtwillkürlicher Umschaltungen kann die Stabilität des schaltenden Systems auf Basis der Stabilität der Einzelsysteme gewährleistet werden [24, 122]. Dieser Ansatz wird als „Verfahren der mehrfachen LYAPUNOV-Funktionen“ bezeichnet. Hierbei wird die Stabilität auf Basis der LYAPUNOV-Funktionen der Einzelsysteme nachgewiesen. Es bedarf dann jedoch zusätzlicher Bedingungen in Bezug auf die Umschaltungen. Somit ist das schaltende System asymptotisch stabil, wenn die Umschaltungen zu einer sequenziellen Reduzierung der Energie des Systems führen [24, 41, 122]. Eine weitere wichtige Erkenntnis bezieht sich auf die Geschwindigkeit der Umschaltung. Erfolgen die Umschaltungen zwischen stabilen Einzelsystemen langsam genug, dann ist das schaltende System ebenfalls stabil [122, 186]. Dieses Konzept wird als „Stabilität unter langsamem Schalten“ oder „Haltezeit-Stabilität“ bezeichnet. Hierbei muss nach jeder Umschaltung eine gewisse Haltezeit eingehalten werden. In dieser Haltezeit dürfen keine weiteren Umschaltungen stattfinden. Darüber hinaus bestehen – abhängig von der spezifischen Struktur der Regelstrecke – weitere Verfahren für den Stabilitätsnachweis. Beispielsweise wurden die Methode der harmonischen Balance und passivitätsbasierte Verfahren [154] sowie ein Verfahren unter Verwendung von LIE-Operatoren [123] genutzt. Weitere Beiträge thematisieren unter anderem auch die Stabilität schaltender Systeme unter gleichzeitiger Nachführung und Beachtung von Begrenzungen für spezielle nichtlineare Systeme [11].

Die intuitive Behandlung einer MIN/MAX-Ablöseregelung durch GLATTFELDER und SCHAUFELBERGER geht unter den Methoden schaltender Systeme verloren. Wenn gleichzeitig die Folgeregelung und die Etablierung von Begrenzungen berücksichtigt werden, dann verstärkt sich dieser Aspekt. Daher wird in dieser Arbeit der Entwurf für nichtlineare (eingangsaﬃne) Systeme nach dem Prinzip des inneren Modells vorgestellt. Dies stellt eine Erweiterung der Folgeregelung durch Ausgangsnachführung nach ISIDORI unter dem Wirken von MIN/MAX-Ablösungen dar. Unter Zuhilfenahme dieser Methode lässt sich eine komplexe Ablöseregelung durch Zerlegung in Teilprobleme entwickeln. Eine Begrenzung wird in diesem Kontext durch einen nachführenden Begrenzungsregler etabliert. Bei Erreichen der Begrenzung erfolgt durch die MIN/MAX-Ablösestruktur eine Umschaltung auf den zugehörigen Begrenzungsregler, der das sichernde Verhalten auslöst und den Systemzustand auf die Begrenzung nachführt.

5.2 Grundlagen

5.2.1 Dynamische Systeme

In diesem Abschnitt sollen die verschiedenen dynamischen Systeme vorgestellt werden, die im Rahmen dieser Arbeit als Beschreibung für das dynamische Verhalten des Verdichtersystems zur Anwendung kommen.

Definition 5.1. Zeitkontinuierliches dynamisches System [13]. Ein zeitkontinuierliches dynamisches System ist das Tripel (X, T, ϕ) mit dem Zustandsraum X sowie dem Zeitraum $T = \mathbb{R}$ und einer Operation $\phi(x, t) : X \times T \rightarrow X$, das die folgenden Eigenschaften aufweist:

- (i) $\phi(x, 0) = x, \forall x \in X$ (Identitätseigenschaft),
- (ii) $\phi(\phi(x, t_1), t_2) = \phi(x, t_1 + t_2), \forall x \in X, \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ (Halbgruppeneigenschaft) und
- (iii) $\phi(x, t)$ ist kontinuierlich. △

Die Operation $\phi(x, t)$ wird auch als Fluss des dynamischen Systems bezeichnet und kennzeichnet alle Lösungen des dynamischen Systems. Die Identitätseigenschaft fordert, dass sich der Fluss des Systems $\phi(x, t)$ für eine feste Zeit $t = t_0$ nicht verändert und somit das System im Zustandsraum bei x verharret. Die Halbgruppeneigenschaft fordert, dass das System ausgehend von einem Zustand x zur Zeit $t_1 + t_2$ den gleichen Zustand $\phi(x, t_1 + t_2)$ einnimmt wie ausgehend vom Zustand $\phi(x, t_1)$ zur Zeit t_2 . Besonders anschaulich lässt sich die Halbgruppeneigenschaft an einer Trajektorie des dynamischen Systems erklären. Eine Trajektorie ist definiert durch $x(t) := \{\phi(x, t) \mid x(t_0) = x_0, t \in \mathbb{R}\}$. Sie ist damit die Menge aller Punkte im Zustandsraum, die ausgehend von einem Anfangszustand $x(t_0) \in X$ während der zeitlichen Entwicklung des Systems eingenommen werden. Bezogen auf eine Trajektorie bedeutet die Halbgruppeneigenschaft, dass die Trajektorie zum Zeitpunkt $t_1 + t_2$ immer den Zustand $x(t_1 + t_2)$ einnimmt, egal ob sie aus dem Anfangszustand $x(t_0)$ oder $x(t_1)$ startet.

Ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen ist ein dynamisches System im oben definierten Sinn. Handelt es sich um ein autonomes und ungesteuertes System in Zustandsraumdarstellung, gilt:

$$\dot{x} = f(x), \tag{5.1}$$

wobei $f(x)$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld in n ($n \geq 1$) Zustandsvariablen mit $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $X \subset \mathbb{R}^n$ ist. Die Kontinuität des dynamischen Systems (5.1) gemäß Punkt 3 von Definition 5.1 wird üblicherweise durch die LIPSCHITZ-Stetigkeit des Vektorfeldes $f(x)$ sichergestellt [13, 106]. Die Ruhelagen des Systems $\bar{x} \in X$ sind über die Bestimmungsgleichung $f(\bar{x}) = 0$ gegeben.

Verfügt das dynamische System über m_E affine Eingänge $u \in \mathbb{R}^{m_E}$ und m_A Ausgänge $y \in \mathbb{R}^{m_A}$, modifiziert sich Gleichung (5.1) zu:

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{j=1}^{m_E} g_j(x) u_j, \tag{5.2a}$$

$$y = h(x), \tag{5.2b}$$

wobei nun $g_j(x), h(x)$ die stetig differenzierbaren Vektorfelder $g_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_A}$ sind. Die einzelnen Koordinaten werden mit i indiziert, also $x = [x_i]^T$ mit $i = 1, \dots, n$. Die

Ein- und Ausgänge werden mit $j = 1, \dots, m_E$ und $k = 1, \dots, m_A$ indiziert. Daraus ergibt sich folgende Darstellung für die Vektorfelder $f(x)$, $g(x)$ und $h(x)$:

$$f(x) = [f_i(x)]_{i=1, \dots, n}, \quad g_j(x) = [g_{ji}(x)]_{i=1, \dots, n}, \quad h(x) = [h_k(x)]_{k=1, \dots, m_A}. \quad (5.3)$$

Für das System (5.2) sollen darüber hinaus durch einen Stelleingang $u(t)$ verursachte zeitveränderliche Ruhelagen zugelassen werden. Die durch den Stelleingang $\bar{u}(t)$ generierte Ruhelage $\bar{x}(t)$ von (5.2) ist durch

$$f(\bar{x}(t)) + \sum_{j=1}^{m_E} g_j(\bar{x}(t)) \bar{u}_j(t) = 0 \quad (5.4)$$

gegeben. Für die Systemanalyse ist es häufig vorteilhaft, wenn die Ruhelagen im Koordinatensprung liegen. Dazu werden sowohl der Zustand $x(t)$ als auch der Eingang $u(t)$ durch die jeweiligen Ruhelagen $\bar{x}(t)$, $\bar{u}(t)$ und die Fehlerkoordinaten $\tilde{x}(t)$, $\tilde{u}(t)$ ausgedrückt:

$$x(t) = \tilde{x}(t) + \bar{x}(t), \quad (5.5a)$$

$$u(t) = \tilde{u}(t) + \bar{u}(t) \quad (5.5b)$$

und in System (5.2a) substituiert. Dieses Vorgehen resultiert mit $\tilde{f}(\tilde{x}, \bar{x}) := f(\tilde{x} + \bar{x}) - f(\bar{x})$, $\tilde{g}_j(\tilde{x}, \bar{x}) := g_j(\tilde{x} + \bar{x}) - g_j(\bar{x})$ und $g_j(\tilde{x}, \bar{x}) := g_j(\tilde{x} + \bar{x})$ im folgenden autonomen Fehlersystem:

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}, \bar{x}) + \sum_{j=1}^{m_E} \tilde{g}_j(\tilde{x}, \bar{x}) \tilde{u}_j + \sum_{j=1}^{m_E} g_j(\tilde{x}, \bar{x}) \tilde{u}_j. \quad (5.6)$$

Wegen $\dot{\tilde{x}}(t) = 0$ bei $\tilde{u} = 0$, $\tilde{x} = 0$ besitzt das Fehlersystem (5.6) eine Ruhelage bei $\tilde{x} = 0$.

In diesem Kapitel soll eine Ablöseregung entworfen werden. Eine derartige Struktur verursacht Umschaltungen in den Eingängen $u_j(t)$. Daher werden noch die schaltenden dynamischen Systeme eingeführt. Die Beschreibung des Verdichtersystems verändert sich nicht. Entsprechend bleiben die Vektorfelder $f(x)$, $g_j(x)$ und $h(x)$ erhalten. Es erfolgt jedoch für jeden Eingang $u_j(t)$ eine Umschaltung zwischen K_j Regelgesetzen. Diese wirken auf den jeweiligen Eingang über ein Schaltgesetz. Dazu sei zu jedem Eingang $u_j(t)$ die Menge aller Indizes der Regelgesetze durch $\Omega_j := \{1, \dots, K_j\}$ definiert. Handelt es sich um ein autonomes System mit schaltendem Regler ohne Unstetigkeiten an den Schaltstellen, kann es durch

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{j=1}^{m_E} g_j(x) u_j \sigma_j, \quad (5.7a)$$

$$y = h(x) \quad (5.7b)$$

mit dem Schaltsignal $\sigma_j(t) \in \Omega_j$ beschrieben werden. Das Schaltsignal $\sigma_j(t)$ wird durch das Schaltgesetz $I_j : \mathbb{R}^{K_j} \rightarrow \Omega_j$ generiert:

$$\sigma_j(t) = I_j(u_{j1}, \dots, u_{jK_j}). \quad (5.8)$$

Das Schaltgesetz verarbeitet bei einer Ablöseregung nur die Stellwerte der Regler und gewährt einem der Regler den Stellzugriff auf den Eingang u_j . Der Zustand des dynamischen Systems (5.7) ist damit durch $(x(t), \sigma_1(t), \dots, \sigma_{m_E}(t))$ vollständig festgelegt. Der im Rahmen dieser Arbeit betrachtete Ablöseregler erzeugt einen stetigen Stellwert. Dadurch bleibt sowohl jedes u_j als

auch der Fluss $\phi(x, t)$ des Systems stetig. Für die Systemanalyse ist weiterhin die Schaltsequenz $\Sigma_{j\sigma_j}$ des j -ten Stelleingangs u_j von Interesse:

$$\Sigma_{j\sigma_j} = \{\sigma_j(t_0), \sigma_j(t_1^+), \dots, \sigma_j(t_a^+)\}, \quad a \in \Theta \quad (5.9)$$

wobei $\Theta := \{0, 1, \dots, a\}$, $a \in \mathbb{N}$ die Indexmenge der Schaltzeitpunkte ist.

Wird nun das Fehlersystem von (5.7) gebildet, entsteht im Allgemeinen ein autonomes System mit Unstetigkeiten in \tilde{x} an den Schaltstellen. Die Umschaltung zwischen den Reglern erzeugt jeweils ein neues $\tilde{u}_j(t)$, das heißt, es gilt $\tilde{u}_{j\sigma_j}(t)$. Bei stetiger Trajektorie in den Originalkoordinaten $x(t)$ führt dies über die Separation (5.5a) zu Unstetigkeiten in \tilde{x} -Koordinaten an den Schaltstellen. Das Fehlersystem von (5.7) kann daher durch

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{f}_\sigma(\tilde{x}) + \sum_{j=1}^{m_E} \tilde{g}_{j\sigma_j}(\tilde{x}) \tilde{u}_{j\sigma_j} + \sum_{j=1}^{m_E} g_{j\sigma_j}(\tilde{x}) \tilde{u}_{j\sigma_j}, \quad (t, \tilde{x}(t)) \notin \mathcal{S}, \quad (5.10a)$$

$$\tilde{x}(t_a^+) = \tilde{x}(t_a^-) + \Delta \tilde{x}(t_a), \quad (t, \tilde{x}(t)) \in \mathcal{S} \quad (5.10b)$$

mit der Zustandsverschiebung $\Delta \tilde{x}$ und dem Schaltzeitpunkt t_a mit $a \in \mathbb{N}$ beschrieben werden. Hierbei wird $\mathcal{S} \subset [0, \infty) \times \tilde{X}$ als Rückstellmenge bezeichnet. Sie beschreibt die Menge aller Zeiten und Punkte im Zustandsraum \tilde{X} , an denen eine Umschaltung stattfindet [80]. Wenn der Systemzustand die Schaltfläche \mathcal{S} durchquert, also $(t, \tilde{x}(t)) \in \mathcal{S}$ gilt, dann springt die Trajektorie unmittelbar zu $\tilde{x}(t_a^+) = \tilde{x}(t_a^-) + \Delta \tilde{x}(t_a)$. Das dynamische System (5.10a) wird also durch das Rückstellgesetz (5.10b) neu initialisiert. Vom neuen Anfangszustand $\tilde{x}(t_a^+)$ erfolgt die weitere kontinuierliche Entwicklung des Systems bis zur nächsten Umschaltung. Es wird vorausgesetzt, dass sich Rückstellung und kontinuierliche Bewegung abwechseln, also $(t_a, \tilde{x}(t_a^+)) \notin \mathcal{S}$ [80]. Folglich ist jeder Schaltzeitpunkt t_a eindeutig. Bezugnehmend auf [119] bezeichnet man (5.10a) und (5.10b) auch als quantitative und qualitative Änderung des Systems. Wenn die Umschaltungen nur vom Systemzustand selbst abhängen, spricht man von einem zustandsabhängig schaltenden System mit Unstetigkeiten an den Schaltstellen [80]. Im Rahmen dieser Arbeit ist ausschließlich das zustandsabhängige Umschalten von Interesse. System (5.10) besitzt wiederum eine Ruhelage bei $\tilde{x} = 0$, unabhängig davon, welcher Regler gerade auf das System wirkt.

5.2.2 Stabilitätsbegriffe

Im Folgenden soll auf die verschiedenen Stabilitätsbegriffe eingegangen werden, die für dieses Kapitel von Bedeutung sind. Dies umfasst die folgenden Stabilitätsdefinitionen:

- LYAPUNOV-Stabilität,
- asymptotische Stabilität,
- lineare Stabilität,
- POISSON-Stabilität,
- neutrale Stabilität und
- praktische Stabilität.

Definition 5.2. LYAPUNOV-Stabilität [106]. Die Ruhelage $\bar{x} = 0$ eines autonomen dynamischen Systems $\dot{x} = f(x)$ ist LYAPUNOV-stabil, wenn $\forall \epsilon > 0$ ein $\delta(\epsilon) > 0$ existiert, sodass ausgehend von einem Anfangszustand $x(t_0)$ für die Trajektorie $x(t)$ gilt:

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \forall t \geq t_0.$$

△

Damit wird die LYAPUNOV-Stabilität als Eigenschaft einer Ruhelage $\bar{x} = 0$ definiert. Da sich jedoch sowohl jeder Punkt als auch jede Trajektorie im Zustandsraum auf die Ruhelage $\bar{x} = 0$ zurückführen lassen, kann diese Stabilitätsdefinition allgemein verwendet werden. Anschaulich ist die Ruhelage $\bar{x} = 0$ genau dann stabil, wenn alle in ihrer Nähe startenden Trajektorien in der Nähe verbleiben. Damit bezieht sich die LYAPUNOV-Stabilität auf die Beschränktheit des Flusses $\phi(x, t)$ des Vektorfeldes $f(x)$ gegenüber einer willkürlich gewählten Grenze ϵ , fordert aber noch kein Streben der Trajektorien gegen die Ruhelage. Dies wird durch eine zusätzliche Eigenschaft der Ruhelage erreicht und führt zur Definition der asymptotischen Stabilität.

Definition 5.3. Asymptotische Stabilität [106]. Die Ruhelage $\bar{x} = 0$ eines autonomen dynamischen Systems $\dot{x} = f(x)$ ist asymptotisch stabil, wenn sie LYAPUNOV-stabil ist und zusätzlich gilt:

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0.$$

△

Die asymptotische Stabilität stellt damit eine stärkere Forderung an das Verhalten der Trajektorien um die Ruhelage $\bar{x} = 0$ als die LYAPUNOV-Stabilität. Die asymptotische Stabilität verlangt zusätzlich die Konvergenz des Flusses $\phi(x, t)$ aus allen Anfangszuständen $\|x(t_0)\| < \delta$ gegen die Ruhelage $\bar{x} = 0$. Man unterscheidet weiterhin zwischen globaler und lokaler asymptotischer Stabilität, abhängig von der Größe des Einzugsgebiets. Die obigen Stabilitätsdefinitionen lassen sich auf lineare Systeme anwenden. Daraus ergibt sich die Möglichkeit für eine Charakterisierung der Stabilität nichtlinearer Systeme um die Ruhelage $\bar{x} = 0$. Hierzu wird das nichtlineare System $\dot{x} = f(x)$ an der Ruhelage $\bar{x} = 0$ durch Berechnung der JACOBI-Matrix $A = J_f(0)$ linearisiert. Das resultierende System $\dot{x} = Ax$ ist LZI. Anschließend kann die Stabilität des LZI-Systems untersucht werden. Daraus ergibt sich folgende Definition:

Definition 5.4. Lineare Stabilität. Die Ruhelage $\bar{x} = 0$ eines autonomen dynamischen Systems $\dot{x} = f(x)$ ist linear stabil, wenn das an der Ruhelage $\bar{x} = 0$ linearisierte System $\dot{x} = Ax$ asymptotisch stabil ist. △

Eine andere Stabilitätsdefinition stellt die POISSON-Stabilität dar. Für die POISSON-Stabilität sind zwei Definitionen gebräuchlich. Die erste Definition nutzt eine offene Umgebung um einen zu untersuchenden Punkt x_0 .

Definition 5.5. POISSON-Stabilität I [13]. Ein Punkt $x_0 \in X$ ist POISSON-stabil, wenn für jede Umgebung X_0 von x_0 und für jede reelle Zahl $T > 0$ sowohl eine Zeit $t_1 > T$ existiert, sodass $\phi(x_0, t_1) \in X_0$ (positive POISSON-Stabilität), als auch eine Zeit $t_2 < -T$ existiert, sodass $\phi(x_0, t_2) \in X_0$ (negative POISSON-Stabilität). Ist $x_0 \in X$ POISSON-stabil, ist auch der Fluss $\phi(x_0, t)$ POISSON-stabil. △

Die zweite gebräuchliche Definition nutzt Limesmengen des Flusses des dynamischen Systems. Als eine $\omega(x, \phi)$ - und $\alpha(x, \phi)$ -Limesmenge eines Punktes $x \in X$ unter dem Fluss $\phi(x, t)$ versteht man die Mengen nach folgender Definition:

Definition 5.6. Limesmenge [13]. Es sei $\{t_n\} \in \mathbb{R}$ eine Folge von Zeitpunkten t_n mit $t_{n+1} > t_n$ $\forall n \in \mathbb{Z}$. Die $\omega(x, \phi)$ - und $\alpha(x, \phi)$ -Limesmengen sind gegeben durch:

$$\begin{aligned}\omega(x, \phi) &:= \{ \bar{x} \in X \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(x, t_n) = \bar{x} \}, \\ \alpha(x, \phi) &:= \{ \bar{x} \in X \mid \lim_{n \rightarrow -\infty} \phi(x, t_n) = \bar{x} \}.\end{aligned}$$

Ein Element der $\omega(x, \phi)$ - oder $\alpha(x, \phi)$ -Limesmenge wird $\omega(x, \phi)$ - oder $\alpha(x, \phi)$ -Limespunkt genannt. △

Definition 5.7. POISSON-Stabilität II [13]. Ein Punkt $x_0 \in X$ ist POISSON-stabil, wenn für ihn sowohl $x_0 \in \omega(x, \phi)$ (positive POISSON-Stabilität) als auch $x_0 \in \alpha(x, \phi)$ (negative POISSON-Stabilität) gilt. Ist $x_0 \in X$ POISSON-stabil, ist auch der Fluss $\phi(x_0, t)$ POISSON-stabil. △

Aus beiden Definitionen kann geschlossen werden, dass eine POISSON-stabile Trajektorie zu beliebig großen Zeiten dem Limespunkt \bar{x} beliebig nahekommt. Über die Zeitpunkte zwischen t_n und t_{n+1} wird nichts ausgesagt. Eine Trajektorie kann sich also zwischen t_n und t_{n+1} auch unbeschränkt von den Limesmengen entfernen. Im Gegensatz zur LYAPUNOV-Stabilität muss eine Trajektorie also nur eine Schranke im Sinne einer Folgekonvergenz einhalten. Bei der LYAPUNOV-Stabilität muss der Fluss zu allen Zeiten $t \geq t_0$ beschränkt bleiben, jedoch nicht zwangsweise konvergieren. Es handelt sich folglich um unterschiedliche Konzepte der Stabilität. Darüber hinaus existieren weitere Unterschiede. Beispielsweise erfolgt bei der LYAPUNOV-Stabilität eine Differenzierung in lokale oder globale Stabilität, je nachdem, ob die definierten Eigenschaften in einer lokalen Umgebung oder im gesamten betrachteten Raum bestehen. Bei der POISSON-Stabilität hingegen wird zwischen positiver und negativer Stabilität unterschieden, je nachdem, ob die Konvergenz in positiv oder negativ voranschreitender Zeit betrachtet wird. Die Konzepte der LYAPUNOV- und der POISSON-Stabilität liefern in geeigneter Kombination die Definition der neutralen Stabilität.

Definition 5.8. Neutrale Stabilität [98]. Die Ruhelage $\bar{x} = 0$ eines autonomen dynamischen Systems $\dot{x} = f(x)$ ist neutral stabil, wenn die Ruhelage $\bar{x} = 0$ LYAPUNOV-stabil ist und alle Punkte in einer offenen Umgebung um $\bar{x} = 0$ POISSON-stabil sind. △

Bei der neutralen Stabilität muss die Ruhelage also gleichzeitig LYAPUNOV-stabil und nicht asymptotisch stabil sein. Die Forderung nach der LYAPUNOV-Stabilität verhindert die Divergenz des Flusses $\phi(x, t)$ um die Ruhelage \bar{x} , indem alle in dessen Nähe startenden Trajektorien auch in dessen Nähe verbleiben. Die fehlende Konvergenz gegen die Ruhelage wird durch die zusätzliche Forderung der POISSON-Stabilität erreicht. Folglich erfüllen nur spezielle Trajektorien die Forderung der neutralen Stabilität, zum Beispiel beschränkte Trajektorien mit periodischem Verhalten. Das Konzept der neutralen Stabilität wird bei der Folgeregelung nichtlinearer Systeme nochmals aufgegriffen. Abschließend soll noch die praktische Stabilität erläutert werden. Sie ist für die Analyse der Stabilität autonomer Systeme mit Unstetigkeiten an den Schaltstellen nützlich.

Definition 5.9. Praktische Stabilität [112]. Die Ruhelage $\tilde{x} = 0$ des schaltenden Systems (5.10) ist praktisch stabil bezüglich der Grenzen (δ, ϵ) , wenn die Grenzen δ und ϵ mit $0 < \delta < \epsilon$ existieren, sodass ausgehend von einem Anfangszustand $\tilde{x}(t_0)$ für die Trajektorie $\tilde{x}(t)$ gilt:

$$\|\tilde{x}(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|\tilde{x}(t)\| < \epsilon, \forall t \geq t_0.$$

△

Das Konzept der praktischen Stabilität ist an die LYAPUNOV-Stabilität angelehnt. Die praktische Stabilität verzichtet aber auf die Forderung, dass zu jeder ϵ -Schranke auch eine δ -Schranke existiert. Dennoch muss es mindestens zu einem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ geben, sodass eine Trajektorie beim Start innerhalb der δ -Schranke auch innerhalb der ϵ -Schranke bleibt.

5.2.3 Relativer Grad, Normalform und Nulldynamik nichtlinearer Systeme

Die Normalform ist ein wichtiges Hilfsmittel für die Analyse nichtlinearer Systeme. Aus der Normalform lässt sich unter anderem die Nulldynamik eines Systems ableiten. Hierfür muss zunächst der relative Grad r des nichtlinearen Systems (5.2) ermittelt werden. Handelt es sich um ein System mit einer Eingangs- und einer Ausgangsgröße (SISO), ist der relative Grad r wie folgt definiert:

Definition 5.10. Relativer Grad [96]. Das System (5.2) besitzt einen relativen Grad r in einer offenen Umgebung X_0 um x_0 , wenn

- (i) $L_g L_f^l h(x_0) = 0, \forall l < r - 1, \forall x_0 \in X_0$ und
- (ii) $L_g L_f^{r-1} h(x_0) \neq 0.$

△

Hier ist $L_f h(x)$ die LIE-Ableitung der Funktion $h(x)$ entlang des Vektorfeldes $f(x)$. Die mehrfache Anwendung der LIE-Ableitung ist durch folgende rekursive Formel gegeben:

$$L_f^l h(x) = \frac{\partial L_f^{l-1} h(x)}{\partial x} f(x). \quad (5.11)$$

Wenn nun das System einen relativen Grad in einer offenen Umgebung X_0 um x_0 besitzt, dann lässt sich das System (5.2) mithilfe einer Koordinatentransformation in die Normalform überführen. Dazu wird der Transformationsvektor T wie folgt gebildet:

$$T(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{r-1} h(x) \\ T_{r+1}(x) \\ \vdots \\ T_n x \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

Wenn also $r < n$, dann werden $n - r$ weitere Transformationsvorschriften T_{r+1}, \dots, T_n benötigt. Die Koordinatentransformation ist dann durch $z_i(t) = T_i(x(t))$ ($i = 1, \dots, n$) in den neuen

Koordinaten z gegeben. Anschließend kann die Normalform in den neuen Koordinaten z gebildet werden [96]:

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= z_2(x), \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_{r-1} &= z_r, \\
 \dot{z}_r &= (L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x) u)_{x=T^{-1}(z)}, \\
 \dot{z}_{r+1} &= (L_f T_{r+1}(x) + L_g T_{r+1}(x) u)_{x=T^{-1}(z)}, \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_n &= (L_f T_n(x) + L_g T_n(x) u)_{x=T^{-1}(z)}, \\
 y &= z_1.
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Aus der Normalform lässt sich eine anschauliche Interpretation des relativen Grades r ableiten. Somit gibt der relative Grad r eines dynamischen Systems an, wie oft der Ausgang $y(t)$ zeitlich abgeleitet werden muss, bis eine Ableitung erstmals die explizite Abhängigkeit vom Eingang $u(t)$ aufweist [3]. Um eine übersichtlichere Darstellung für die nachfolgenden Betrachtungen zu erhalten, werden die Abkürzungen $\xi(t) = [z_1, \dots, z_r]^T$ und $\eta(t) = [z_{r+1}, \dots, z_n]^T$ sowie die Vektorfelder

$$\zeta(\xi, \eta, u) = \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_r \\ L_f^r h(T^{-1}(\xi, \eta)) + L_g L_f^{r-1} h(T^{-1}(\xi, \eta)) u \end{bmatrix}, \tag{5.14a}$$

$$\gamma(\xi, \eta, u) = \begin{bmatrix} L_f T_{r+1}(T^{-1}(\xi, \eta)) + L_g T_{r+1}(T^{-1}(\xi, \eta)) u \\ \vdots \\ L_f T_n(T^{-1}(\xi, \eta)) + L_g T_n(T^{-1}(\xi, \eta)) u \end{bmatrix} \tag{5.14b}$$

eingeführt. Damit geht die Normalform über in:

$$\dot{\xi} = \zeta(\xi, \eta, u), \tag{5.15a}$$

$$\dot{\eta} = \gamma(\xi, \eta, u), \tag{5.15b}$$

$$y = \xi_1, \tag{5.15c}$$

wobei das Teilsystem (5.15a) als externe Dynamik und das Teilsystem (5.15b) als interne Dynamik bezeichnet wird [165]. Die Transformationsvorschriften T_i ($i = r + 1, \dots, n$) in Gleichung (5.12) können beliebig gewählt werden, solange die Invertierbarkeit von $T(x)$ gewährleistet bleibt. In der Literatur finden sich verschiedene Varianten. ISIDORI [98] schlägt die Wahl entsprechend der PDGL $L_g T_i(x) = 0$ ($i = r + 1, \dots, n$) vor. Nach dem FROBENIUS-Theorem können hierbei die $T_i(x)$ ($i = r + 1, \dots, n$) immer so gefunden werden, dass der Transformationsvektor $T(x)$ mindestens lokal in einer offenen Umgebung um x_0 invertierbar ist [96]. Hieraus entsteht die BYRNES-ISIDORI-Normalform. Bei HUANG [96] hingegen ist die naheliegende Wahl $T_i = x_i$ ($i = r + 1, \dots, n$) zu finden. Die konkrete Wahl hängt letztendlich davon ab, unter welchen Aspekten die Systemanalyse durchgeführt werden soll. Beispielsweise ist die Variante von HUANG vorteilhaft, wenn die Nulldynamik in originalen Koordinaten berechnet werden soll, ohne die gesamte Transformation in die BYRNES-ISIDORI-Normalform vorzunehmen. Dieser Aspekt wird im nächsten Abschnitt nochmals aufgegriffen. Aus den Gleichungen (5.15) kann nun die Nulldynamik berechnet werden. Dazu erfolgt zunächst die Definition dieses Begriffs.

Definition 5.11. Nulldynamik [165]. Die Nulldynamik beschreibt die interne Dynamik eines Systems für den Fall, dass die Ausgangsgröße $y(t)$ für bestimmte Eingangssignale $u(t) = \bar{u}(t)$ und Anfangsbedingungen $x(t_0)$ für alle Zeiten $t \geq t_0$ identisch Null ist. \triangle

Um die Nulldynamik zu berechnen, muss $u(t)$ so gefunden werden, dass der Ausgang $y(t)$ sowie dessen Ableitungen $\dot{y}(t), \dots, \overset{(v)}{y}(t)$ identisch Null sind. Dies kann über die Normalform erfolgen, da für die transformierten Größen $\xi(t) = [z_1, \dots, z_r]^T$ gilt:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= y = h(x), \\ \xi_2 &= \dot{y} = L_f h(x), \\ &\vdots \\ \xi_r &= \overset{(v)}{y} = L_f^{r-1} h(x).\end{aligned}\tag{5.16}$$

Entsprechend muss $\xi_1(t) = \xi_2(t) = \dots = \xi_r(t) = 0$ in System (5.15) gelten. Aus diesen Bedingungen lässt sich der Eingang $\bar{u}(t)$ ermitteln, der die Nulldynamik erzeugt:

$$\bar{u}(t) = -\frac{L_f^r h(T^{-1}(\xi, \eta))}{L_g L_f^{r-1} h(T^{-1}(\xi, \eta))} = -\frac{L_f^r h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)}.\tag{5.17}$$

Aus dem Teilsystem (5.15b) ergibt sich dadurch die Nulldynamik eines SISO-Systems:

$$\dot{\eta} = \gamma(0, \eta, \bar{u}).\tag{5.18}$$

Die Nulldynamik entsteht also durch die Zustandsrückführung $u(t) = \bar{u}(t)$ gemäß Gleichung (5.17) und kann Bewegungen ausführen, ohne dass diese am Ausgang $y(t)$ sichtbar werden. Die Zustandsrückführung (5.17) erzeugt somit ein $n - r$ -dimensionales unbeobachtbares Teilsystem. Aus der Nulldynamik kann anschließend abgeleitet werden, ob es sich um ein minimalphasiges System handelt. Diese Aussage ist für viele Entwurfsverfahren entscheidend. Gleiches gilt für die Folgeregelung dynamischer Systeme, dessen Beschreibung im folgenden Abschnitt thematisiert wird. Vorher sollen die obigen Betrachtungen noch auf ein MIMO-System erweitert werden.

Für ein MIMO-System ist $m_E > 1$ und $m_A > 1$. Somit kann für jeden Ausgang $k = 1, \dots, m_A$ der relative Grad r_k bestimmt werden. Alle r_k werden zum relativen Vektorgrad zusammengefasst. Daraus ergibt sich die folgende Definition:

Definition 5.12. Relativer Vektorgrad [96]. Für jedes $k = 1, \dots, m_A$ besitzt der k -te Ausgang von System (5.2) den relativen Grad r_k in einer Umgebung X_0 um x_0 wenn

(i) $\forall l < r_k - 1$ und $\forall x \in X_0$

$$L_g L_f^l h_k(x) := [L_{g_j} L_f^l h_k(x)]_{j=1, \dots, m_E}\tag{5.19}$$

$$= 0_{1 \times m_E}\tag{5.20}$$

(ii) und

$$L_g L_f^{r_k-1} h_k(x_0) \neq 0_{1 \times m_E}\tag{5.21}$$

gilt. Das System (5.2) besitzt einen relativen Vektorgrad $\{r_1, \dots, r_{m_A}\}$ in einer Umgebung X_0 um x_0 , wenn

- (i) der k -te Ausgang $h_k(x)$, $\forall k = 1, \dots, m_A$ einen relativen Grad r_k um x_0 besitzt und
(ii) die $m_A \times m_E$ -Matrix $D(x)$ mit

$$D(x) = [L_g L_f^{r_k-1} h_k(x)]_{k=1, \dots, m_A} \quad (5.22)$$

den vollen Rang bei $x = x_0$ besitzt. \triangle

Analog zu den SISO-Systemen kann damit die Normalform abgeleitet werden. Hierzu sei $r := r_1 + \dots + r_k < n$ definiert. Dann kann der Transformationsvektor [96]:

$$T(x) = \begin{bmatrix} H(x) \\ T_{r+1}(x) \\ \vdots \\ T_n(x) \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

mit

$$H(x) = \begin{bmatrix} h_k(x) \\ L_f h_k(x) \\ \vdots \\ L_f^{r_k-1} h_k(x) \end{bmatrix}_{k=1, \dots, m_A} \quad (5.24)$$

genutzt werden, um die Transformation $z = T(x)$ in die neuen Koordinaten z mit:

$$z(t) = [z_1^k, \dots, z_{r_k}^k]_{k=1, \dots, m_A}^T \quad (5.25)$$

vorzunehmen. Die Normalform für ein MIMO-System lautet [96]:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1^k &= z_2^k(x), \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r_k-1}^k &= z_{r_k}^k, \\ \dot{z}_{r_k}^k &= (L_f^{r_k} h_k(x) + L_g L_f^{r_k-1} h_k(x)u)_{x=T^{-1}(z)}, \\ \dot{z}_{r+1} &= (L_f T_{r+1}(x) + L_g T_{r+1}(x)u)_{x=T^{-1}(z)}, \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= (L_f T_n(x) + L_g T_n(x)u)_{x=T^{-1}(z)}, \\ y_k &= z_1^k, \quad k = 1, \dots, m_A. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Mit den Abkürzungen $\xi(t) = [z_1^k, \dots, z_{r_k}^k]_{k=1, \dots, m_A}^T$ und $\eta(t) = [z_{r+1}, \dots, z_n]^T$ sowie den Vektorfeldern

$$\zeta(\xi, \eta, u) = \begin{bmatrix} \xi_2^k \\ \vdots \\ \xi_{r_k}^k \\ L_f^{r_k} h_k(T^{-1}(\xi, \eta)) + L_g L_f^{r_k-1} h_k(T^{-1}(\xi, \eta))u \end{bmatrix}_{k=1, \dots, m_A}, \quad (5.27a)$$

$$\gamma(\xi, \eta, u) = \begin{bmatrix} L_f T_{r+1}(T^{-1}(\xi, \eta)) + L_g T_{r+1}(T^{-1}(\xi, \eta))u \\ \vdots \\ L_f T_n(T^{-1}(\xi, \eta)) + L_g T_n(T^{-1}(\xi, \eta))u \end{bmatrix} \quad (5.27b)$$

besitzt die Normalform wieder die Form von (5.15). Anhand von System (5.15) kann die Null-dynamik für MIMO-Systeme bestimmt werden. Dazu wird der erzeugende Eingang \bar{u} unter der Forderung $\xi_1^k(t) = \xi_2^k(t) = \dots = \xi_{r_k}^k(t) = 0, \forall k = 1, \dots, m_A$ berechnet. Wenn $m_E = m_A$, dann kann \bar{u} eindeutig durch eine Inversion berechnet werden [96]:

$$\bar{u}(t) = -D^{-1}(x)E(x) \quad (5.28)$$

mit $D(x)$ gemäß Gleichung (5.22) und einer $m_A \times 1$ -Matrix $E(x)$ gemäß:

$$E(x) = [L_f^{r_k} h_k(x)]_{k=1, \dots, m_A}. \quad (5.29)$$

Die Matrizen $D(x)$ und $E(x)$ werden als Entkopplungsmatrizen bezeichnet [96]. Die Null-dynamik hat damit wieder die Form von (5.18).

5.2.4 Folgeregelung nichtlinearer Systeme durch Ausgangsnachführung

Analog zum letzten Abschnitt wird zunächst die Folgeregelung von SISO-Systemen betrachtet und danach auf MIMO-Systeme erweitert. Da für die Ablöseregulierung neben der Folgeregelung die gleichzeitige Störunterdrückung von Interesse ist, erfolgt sowohl die Einführung der Zustandsgröße $w \in W \subseteq \mathbb{R}^{m_W}$ für die Generierung der Sollgrößen $q_W(w)$ als auch die Einführung der Zustandsgröße $d \in D \subseteq \mathbb{R}^{m_D}$ für die Generierung der Störgrößen $q_D(d)$. Die Zustandsgrößen w und d können zur kombinierten Zustandsgröße $v = [w, d]^T$ mit $v \in V = W \times D \subseteq \mathbb{R}^{m_V}$ und $m_V = m_W + m_D$ zusammengefasst werden. Entsprechend dem Ansatz von ISIDORI wird die Zustandsgröße v als Exozustand bezeichnet und durch ein neutral stabiles Exosystem mit dem Vektorfeld $s: V \rightarrow V$:

$$\dot{v} = s(v) \quad (5.30)$$

erzeugt [98]. Das neutral stabile Exosystem (5.30) wird dem bestehenden Modell des Verdichtersystems (5.2) hinzugefügt. Mit der Definition der Regelabweichung

$$e(x, v) := y(x) - q_W(v) \quad (5.31)$$

ergibt sich das nachstehende dynamische System:

$$\dot{x} = f(x, v) + g(x, v)u, \quad (5.32a)$$

$$\dot{v} = s(v), \quad (5.32b)$$

$$e = h(x) - q_W(v). \quad (5.32c)$$

Für die folgenden Betrachtungen wird angenommen, dass $f(0, 0) = 0$, $g(0, 0) = 0$, $s(0) = 0$ und $e(0, 0) = 0$. Dies kann immer durch eine Koordinatentransformation sichergestellt werden. Das Ziel der Folgeregelung besteht nun in der Konstruktion eines Regelgesetzes $p(x, v)$, sodass sich die Messgleichung $h(x)$ an die Solltrajektorie $q_W(v)$ angleicht. Die Konstruktion erfolgt also unter der Bedingung $e(t) = 0$. Die Forderung nach neutraler Stabilität von (5.30) erlaubt die Konstruktion einer Zentrumsmannigfaltigkeit für das System (5.32). Diese Zentrumsmannigfaltigkeit besitzt dann Eigenschaften, die sie für die Ausgangsrückführung nichtlinearer Systeme interessant macht. Insbesondere ist die neutrale Stabilität sichergestellt, wenn die Ruhelage $v_S = 0$ von (5.30) LYAPUNOV-stabil ist und alle Eigenwerte λ_v des um die Ruhelage linearisierten

Exosystems die Eigenschaft $\operatorname{Re}(\lambda_\nu) = 0$ aufweisen. Dies schließt die unerwünschte Konvergenz der Trajektorie gegen $\nu = 0$ sowie eine Divergenz gegen Unendlich aus. Ein solches Exosystem kann aufgrund der Forderung der Beschränktheit durch die LYAPUNOV-Stabilität ausschließlich begrenzte Signale erzeugen [98]. Sollwertrampen lassen sich daher nicht generieren. Wenn nun das Teilsystem (5.32a) unter dem Regelgesetz $u = p(x, \nu)$ mit $\nu = 0$:

$$\dot{x} = f(x, 0) + g(x, 0)p(x, 0) \quad (5.33)$$

linear stabil ist, dann lässt sich die Bewegung des Teilsystems (5.32a) durch das Exosystem (5.32b) beschreiben. Da die Eigenwerte des linearisierten Exosystems um $\nu = 0$ auf der imaginären Achse liegen, besitzt das System (5.32) unter dem Wirken des Regelgesetzes $u = p(x, \nu)$ eine Zentrumsmannigfaltigkeit \mathcal{M} bei $(x, \nu) = (0, 0)$ als Graph einer Abbildung $x = \chi(\nu)$ [98]. Die Zentrumsmannigfaltigkeit \mathcal{M} ist dann wie folgt definiert:

Definition 5.13. Zentrumsmannigfaltigkeit (vgl. [98]). Existiert für das System (5.32) unter dem Regelgesetz $u = p(x, \nu)$ eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^{m_w} \times \mathbb{R}^{m_D}$ um $\nu = 0$ und eine \mathcal{C}^{l-1} -Abbildung $\chi(\nu): V \rightarrow X$ mit $\chi(0) = 0$, sodass

$$\mathcal{M} := \{(x, \nu) \in X \times V \mid x = \chi(\nu)\} \quad (5.34)$$

erfüllt ist, wird \mathcal{M} eine Zentrumsmannigfaltigkeit für das System (5.32) genannt. \triangle

Die Zentrumsmannigfaltigkeit besitzt wichtige Eigenschaften. Zum einen ist sie lokal invariant.

Definition 5.14. Invariante Mannigfaltigkeit [98]. Eine Mannigfaltigkeit \mathcal{M} wird als lokal invariant unter dem System (5.32) bezeichnet, wenn für jeden Anfangszustand $(x(t_0), \nu(t_0)) \in \mathcal{M}$ ein Zeitraum $t_1 < 0 < t_2$ existiert, sodass die Trajektorie $(x(t), \nu(t)) \forall t \in (t_1, t_2)$ auf der Mannigfaltigkeit \mathcal{M} liegt. \triangle

Zum anderen kann eine Aussage zur Stabilität für Zustände in der Nähe der Zentrumsmannigfaltigkeit gemacht werden.

Lemma 5.1. Exponentielle Stabilität [98]. Angenommen $x = \chi(\nu)$ ist die Abbildung einer Zentrumsmannigfaltigkeit \mathcal{M} für das System (5.32) um $(x, \nu) = (0, 0)$. Es seien weiterhin $(x(t), \nu(t))$ eine Lösung des Systems (5.32) und α sowie β positive Konstanten. Für eine aus dem Initialzustand $(x(t_0), \nu(t_0))$ startende Lösung $(x(t), \nu(t))$ gilt dann in einer offenen Umgebung $X_0 \times V_0$ um $(0, 0)$:

$$\|x(t) - \chi(\nu(t))\| \leq \beta \exp(-\alpha t) \|x(t_0) - \chi(\nu(t_0))\| \quad (5.35)$$

$\forall t > t_0$, wenn $(x(t_0), \nu(t_0)) \in X_0 \times V_0$.

Die Trajektorie $(x(t), \nu(t))$ des Systems (5.32) wird die offene Umgebung $X_0 \times V_0$ also nicht verlassen, solange der Initialzustand $(x(t_0), \nu(t_0))$ in dieser Umgebung liegt. Folglich konvergiert der Systemzustand $\forall (x(t_0), \nu(t_0)) \in X_0 \times V_0$ exponentiell gegen die Ruhelage $\bar{x}(t)$, der genau dem Zustand auf der Zentrumsmannigfaltigkeit \mathcal{M} entspricht:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\bar{x}(t) - \chi(\nu(t))\| = 0, \quad (5.36)$$

womit das Ziel der Folgeregelung erreicht ist. Dabei ist zu beachten, dass diese Aussagen ohne Weiteres nur lokal in $X_0 \times V_0$ gültig sind.

Zusammenfassend bestehen die Ziele für den Entwurf einer Folgeregelung durch Zustandsrückführung wie folgt [98]: Gegeben sei System (5.32). Finde eine Zustandsrückführung $p(x, v)$, sodass:

- (i) die Ruhelage $\bar{x} = 0$ des Teilsystems (5.32a) unter der Zustandsrückführung $u = p(x, v)$ mit $v = 0$ linear stabil ist und
- (ii) eine Umgebung $X_0 \times V_0$ von $(0, 0)$ existiert in der die Lösung von (5.32) für $t \rightarrow \infty$ und $\forall (x_0, v_0) \in X_0 \times V_0$ dem Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$ genügt (Ausgangsnullung).

Damit lässt sich folgendes Lemma formulieren, das die Entwurfsziele (i) und (ii) in einer Bestimmungsgleichungen bündelt.

Lemma 5.2. Ausgangsnullung durch Zustandsrückführung [98]. *Angenommen, dass für ein $p(x, v)$ die Bedingung (i) erfüllt ist. Dann und nur dann ist Bedingung (ii) ebenfalls erfüllt, wenn es eine Abbildung $x = \chi(v)$ mit $\chi(0) = 0$ in der Umgebung $V_0 \subset V$ um den Koordinatenursprung gibt, die folgende Bedingungen $\forall v \in V_0$ erfüllt:*

$$\frac{\partial \chi}{\partial v} s(v) = f(\chi(v), v) + g(\chi(v), v)p(\chi(v), v), \quad (5.37a)$$

$$0 = e(\chi(v), v). \quad (5.37b)$$

Bemerkung. Gleichung (5.37a) ist ein PDGL-System, das unter der Nebenbedingung (5.37b) gelöst werden muss. Beide Gleichungen bilden die Bestimmungsgleichung für das Problem der Folgeregelung durch Zustandsrückführung. Eine analytische Lösung lässt sich im Allgemeinen nicht angeben. Für diesen Fall geht man entweder zu einer näherungsweise oder zu einer numerischen Lösung über. Die näherungsweise Lösung besteht in der Vorgabe eines Polynoms für die Abbildung $\chi(v)$ bis zu einer vorgegebenen Ordnung [96]. Unter bestimmten Voraussetzungen kann durch anschließendes Einsetzen des Polynoms in (5.37) die Berechnung der Koeffizienten des Polynoms erfolgen. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass ein Finden der Abbildung $x = \chi(v)$ für ein gegebenes System nach der Transformation in die Normalform oftmals einfacher ist. \triangle

Da die hinreichende Bedingung (i) lineare Stabilität fordert, erfolgt die Linearisierung von (5.32) um $\bar{x} = 0$. Folgende Notationen werden dafür genutzt:

$$\dot{x} = (A + BK)x + (P + BN)v, \quad (5.38a)$$

$$\dot{v} = Sv \quad (5.38b)$$

mit

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(0,0)} + \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(0,0)}, \quad B = g|_{(0,0)}, \quad K = \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{(0,0)} \quad (5.39)$$

und

$$P = \left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_{(0,0)} + \left. \frac{\partial g}{\partial v} \right|_{(0,0)}, \quad N = \left. \frac{\partial p}{\partial v} \right|_{(0,0)}, \quad S = \left. \frac{\partial s}{\partial v} \right|_{(0)} \quad (5.40)$$

Lineare Stabilität ist gegeben, wenn alle Eigenwerte der stabilitätsbestimmenden Matrix $A+BK$ um $\bar{x} = 0$ einen negativen Realteil besitzen. Für eine Lösung kann nun folgendes zentrales Ergebnis angegeben werden:

Theorem 5.3. Folgeregelung durch Zustandsrückführung [98]. Die Aufgabe der Folgeregelung durch Zustandsrückführung ist dann und nur dann lösbar, wenn (A, B) steuerbar ist und die Abbildungen $x = \chi(v)$ sowie $u = p(\chi(v), v)$ mit $\chi(0) = 0$ sowie $p(\chi(0), 0) = 0$ in einer Umgebung $V_0 \subset V$ um den Koordinatenursprung mit den folgenden Eigenschaften $\forall v \in V_0$ existieren:

$$\frac{\partial \chi}{\partial v} s(v) = f(\chi(v), v) + g(\chi(v), v)p(\chi(v), v), \quad (5.41a)$$

$$0 = e(\chi(v), v). \quad (5.41b)$$

Mithilfe der Nulldynamik kann dieses Ergebnis umformuliert werden. Dies soll unter gleichzeitiger Erweiterung auf MIMO-Systeme geschehen. Dazu werden die folgenden Annahmen eingeführt:

Annahme 5.1. System (5.32) besitzt einen relativen Vektorgrad $\{r_1, \dots, r_{m_A}\}$ in $(x, v) = (0, 0)$. Daraus ist $r = r_1 + \dots + r_{m_A}$ mit $r \in \mathbb{N}_+$, $r \leq n$. \triangle

Annahme 5.2. Es existiert eine (lokal) maximale ausgangsnulldende Mannigfaltigkeit \mathcal{M}_e für das kombinierte System (5.32), definiert durch:

$$\mathcal{M}_e := \{(x, v) \mid (x, v) \in X_e \times V_e, H_e(x, v) = 0\} \quad (5.42)$$

mit $H_e : \mathbb{R}^{n+m_V} \rightarrow \mathbb{R}^r$, $H_e(0, 0) = 0$, wobei $X_e \times V_e$ eine offene Umgebung um $(x, v) = (0, 0)$ ist. \triangle

Abbildung $H_e(x, v)$ erzeugt nach Annahme 5.2 unter der Bedingung $H_e(x, v) = 0$ die ausgangsnulldende Mannigfaltigkeit \mathcal{M}_e und damit gleichzeitig die Nulldynamik von System (5.32). Zweckmäßigerweise wird also $H_e(x, v)$ so gewählt, dass es die Transformation des kombinierten Systems (5.32) in die Normalform erlaubt. Entsprechend erfolgt die Anwendung von Gleichung (5.24) auf das kombinierte System (5.32):

$$H_e(x, v) = \begin{bmatrix} e_k(x, v) \\ L_{f_e} e_k(x, v) \\ \vdots \\ L_{f_e}^{r_k-1} e_k(x, v) \end{bmatrix}_{k=1, \dots, m_A} \quad (5.43)$$

mit dem kombinierten Vektorfeld $f_e = [f, s]^T$, wobei der Index e auf die Ergänzung des Verdichtmodells durch das Exosystem hinweist. Nun ist die Transformation in die neuen Koordinaten z_e mit:

$$z_e = \begin{bmatrix} H_e(x, v) \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \\ v \end{bmatrix} := T_e(x, v) \quad (5.44)$$

gegeben [96] und erzeugt die Normalform von (5.32). Hierbei muss Annahme 5.1 erfüllt sein, um die Transformation zu ermöglichen [96]. Es ist zu beachten, dass zur Bestimmung des relativen Vektorgrades von (5.32) die LIE-Ableitungen in Definition 5.12 nun entlang des kombinierten Vektorfeldes f_e gebildet werden müssen. Aus der resultierenden Normalform lässt

sich schließlich der ausgangsnulldende Eingang von (5.32) bei $m_E = m_A$ gemäß der Inversion (5.28) bestimmen:

$$\bar{u}(t) = -D_e^{-1}(x, v)E_e(x, v). \quad (5.45)$$

Die Entkopplungsmatrizen $D_e(x)$ und $E_e(x)$ für das kombinierte System (5.32) lauten im MIMO-Fall:

$$D_e(x, v) = [L_{g_e} L_{f_e}^{r_k-1} e_k(x, v)]_{k=1, \dots, m_A}, \quad (5.46)$$

$$E_e(x, v) = [L_{f_e}^{r_k} e_k(x, v)]_{k=1, \dots, m_A} \quad (5.47)$$

mit den kombinierten Vektorfeldern $f_e = [f, s]^T$ und $g_e = [g(x, v), 0_{m_v \times m_E}]^T$.

Durch das Regelgesetz (5.45) wird also die Nulldynamik von (5.32) erzeugt, das heißt: $e_k(t) = 0$, $\forall t > t_0$, $\forall k \in \Omega$, wenn $(x(t_0), v(t_0)) \in \mathcal{M}_e$. Nach Definition 5.14 muss \mathcal{M}_e also eine invariante Mannigfaltigkeit sein. Aus den Annahmen 5.1 und 5.2 lässt sich darüber hinaus mit dem Satz der impliziten Funktionen zeigen, dass eine Separation $x = [x^1, x^2]^T$ mit $x^1 \in \mathbb{R}^r$ und $x^2 \in \mathbb{R}^{n-r}$ sowie eine Abbildung $x^1 = \theta(x^2, v)$ mit den Eigenschaften $\theta(0, 0) = 0$ und $H_e(\theta(x^2, v), x^2, v) = 0$ existiert [96]. Daher lässt sich die Folgeregelung unter bestimmten weiteren Eigenschaften sicherstellen. Hierfür muss das Modell (5.32) zunächst über die Separation $x = [x^1, x^2]^T$ aufgetrennt werden:

$$\dot{x}^1 = f^1(x^1, x^2, v) + g^1(x^1, x^2, v)u, \quad (5.48a)$$

$$\dot{x}^2 = f^2(x^1, x^2, v) + g^2(x^1, x^2, v)u, \quad (5.48b)$$

$$\dot{v} = s(v), \quad (5.48c)$$

$$e = h(x) - q_W(v), \quad (5.48d)$$

wobei das Teilsystem (5.48a) der externen Dynamik entspricht und die Teilsysteme (5.48b/c) der internen Dynamik entsprechen. Die unter der Zustandsrückführung (5.45) und der Abbildung $x^1 = \theta(x^2, v)$ entstehende Nulldynamik von (5.48):

$$\dot{x}^2 = f^2(\theta(x^2, v), x^2, v) + g^2(\theta(x^2, v), x^2, v)\bar{u}, \quad (5.49a)$$

$$\dot{v} = s(v) \quad (5.49b)$$

kann als kombinierte Nulldynamik in Originalkoordinaten unter Vorhandensein des Exosystems betrachtet werden. Das gesamte Exosystem geht damit als ein Teilsystem in die Nulldynamik von (5.32) ein. Daraus kann nun das zweite zentrale Ergebnis dieses Abschnitts angegeben werden.

Theorem 5.4. Lösung der Bestimmungsgleichung [96]. *Angenommen, das kombinierte System (5.32) besitzt einen relativen Vektorgrad $\{r_1, \dots, r_{m_A}\}$ in $(x, v) = (0, 0)$. Es sei weiterhin angenommen, dass unter der ausreichend glatten Zustandsrückführung \bar{u} gemäß Gleichung (5.45) eine ausreichend glatte Funktion $\chi^2 : V \rightarrow \mathbb{R}^{n-r}$ mit $\chi^2(0) = 0$ existiert, sodass*

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial v} s(v) = f^2(\theta(\chi^2(v), v), \chi^2(v), v) + g^2(\theta(\chi^2(v), v), \chi^2(v), v)\bar{u}. \quad (5.50)$$

Dann lösen die Abbildungen $\chi(v) = (\chi^1(v), \chi^2(v))$ und $\bar{u} = p(\chi(v), v)$ die Bestimmungsgleichungen (5.41), wobei $\chi^1(v) = \theta(\chi^2(v), v)$.

Bemerkung. Unter Zuhilfenahme von Theorem 5.4 lässt sich die Aufgabe der Folgeregelung auf Basis der Nulldynamik von System (5.32) lösen. Obwohl dieses Vorgehen im Allgemeinen die Transformation in die Normalform erfordert, kann durch den gewählten Transformationsvektor (5.44) explizit darauf verzichtet werden. Darüber hinaus kann Theorem 5.4 den Berechnungsaufwand reduzieren. Statt das volle nichtlineare PDGL-System mit n Gleichungen zu lösen (siehe Theorem 5.3), werden zwei kleinere PDGL-Systeme getrennt voneinander gelöst; ein PDGL-System mit $n - r$ Gleichungen nach (5.50) und ein PDGL-System mit den restlichen r Gleichungen. Die Nulldynamik muss jedoch hyperbolisch sein, das heißt, die Ruhelage $(x^2, v) = (0, 0)$ von (5.49a) muss linear stabil sein. Damit beschränken sich die Aussagen von Theorem 5.4 auf minimalphasige Systeme. \triangle

Basierend auf den Aussagen in diesem Abschnitt kann schließlich ein Algorithmus für die Lösung der Bestimmungsgleichung (5.41) von MIMO-Systemen angegeben werden:

Algorithmus 5.1. Lösung der Bestimmungsgleichung für den Fall minimalphasiger MIMO-Systeme bei gleicher Anzahl von Ein- und Ausgängen [96].

- (i) Löse die Gleichung $H_e(x, v) = 0$ für $\chi^1(v)$ mit $H_e(x, v)$ nach Gleichung (5.43) unter Berücksichtigung der Separation $x = \chi = [\chi^1, \chi^2]^T$ und der Abbildung $\chi^1 = \theta(\chi^2(v), v)$, sodass:

$$H_e(\chi^1(v), \chi^2(v), v) \Big|_{\chi^1 = \theta(\chi^2(v), v)} = 0.$$

- (ii) Berechne \bar{u} aus der Inversion (5.45).
 (iii) Löse Gleichung (5.50) für $\chi^2(v)$.

Die Lösung ergibt sich aus den Abbildungen $\chi(v) = (\chi^1(v), \chi^2(v))$ und $\bar{u} = p(\chi(v), v)$, wobei $\chi^1(v) = \theta(\chi^2(v), v)$. \triangle

Nach der Anwendung von Algorithmus 5.1 liegt schließlich der ausgangsnulldende Eingang $\bar{u} = p(\chi(v), v)$ für System (5.32) vor. Dieser Eingang kann bereits als Vorsteuergesetz genutzt werden, um die Folgeregelung in einer ausreichend kleinen Umgebung um den Koordinatenursprung zu gewährleisten. Abhängig von den Forderungen an das geregelte System (zum Beispiel eine gewünschte Dynamik), muss das Vorsteuergesetz gegebenenfalls um eine Zustandsrückführung ergänzt werden. Dessen Entwurf wird an dieser Stelle nicht weiter betrachtet und kann prinzipiell mit verschiedenen Verfahren erfolgen. Das entworfene Regelgesetz muss jedoch die Stabilität der Ruhelage sicherstellen sowie die Bestimmungsgleichung (5.41) erfüllen.

5.3 Modellbasierte MIN/MAX-Ablöseregung

5.3.1 Problembeschreibung

Das Ziel einer Ablöseregung besteht in der Etablierung stabiler Begrenzungen für Zustands- und Ausgangsgrößen des Systems. Üblicherweise soll ein Über- oder Unterschreiten einer bestimmten Betriebsgrenze vermieden werden. Dabei handelt es sich häufig um konstante Grenzen (siehe Abbildung 5.1), die den Zustandsraum in einen erlaubten und in einen unerlaubten Betriebsbereich zerlegen. Innerhalb des erlaubten Betriebsbereichs darf sich die Trajektorie des Systems frei bewegen. Bei Annäherung an eine Betriebsgrenze findet optimalerweise eine asymptotische Angleichung statt. Für eine praktische Anwendung erfolgt die Wahl der Grenzwerte jedoch unter Beachtung eines tolerierbaren Überschwingens der Trajektorie. Prinzipiell wäre auch ein Regelungsentwurf denkbar, der die Solltrajektorien der Prozessregelung dergestalt vorgibt, dass der Systemzustand nicht in den unerlaubten Betriebsbereich gerät. Dies ist allerdings aus mehreren Gründen entweder nicht zweckmäßig oder nicht möglich. Beispielsweise gibt der Anlagenführer die Solltrajektorie der Prozessregelung unabhängig von den gültigen Prozessbegrenzungen vor. Den notwendigen Schutz des zu regelnden Systems soll die Ablöseregung mittels Begrenzungsregler selbsttätig übernehmen. Während des Anlagenbetriebs müssen die Regler also unabhängig voneinander arbeiten. Ein Vorabentwurf der Prozessregler unter Berücksichtigung aller Prozessbegrenzungen ist folglich nicht möglich. Darüber hinaus sollte die Regelungsstruktur aus Sicht des Regelungstechnikers leicht erweiterbar sein, ohne die bereits entworfenen Regler zu verändern. Die in Abbildung 5.2 gezeigte Struktur ist flexibel genug, um diesen Rahmenbedingungen Rechnung zu tragen.

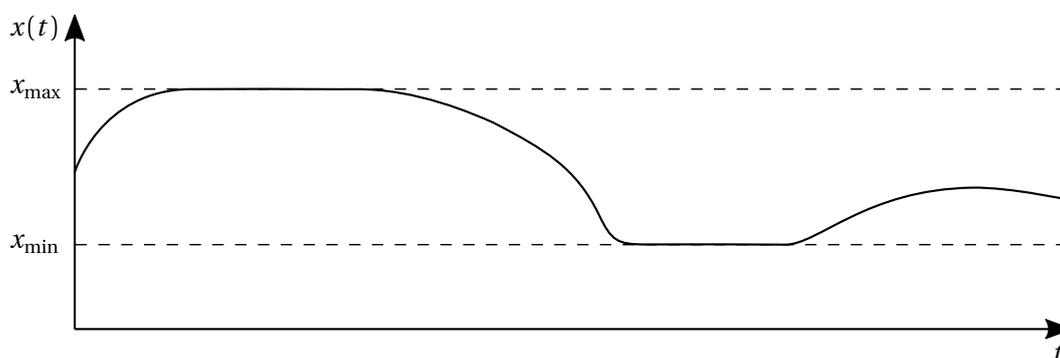


Abbildung 5.1. Begrenzung einer Zustandsgröße durch eine MIN- und MAX-Betriebsgrenze.

Die Struktur einer MIN/MAX-Ablöseregung für das MIMO-System (5.32) ist in Abbildung 5.2 dargestellt. Jeder Regler wird auf Basis genau einer Regelabweichung der Form $e = h(x) - q(w)$ entworfen. Folglich gilt für Entwurfs- und Betriebsphase grundsätzlich $m_E = m_A = m$, und Algorithmus 5.1 lässt sich für den Entwurf nutzen – vorausgesetzt, das System ist minimalphasig. Es existieren immer genau eine Hauptregelung (Prozessregelung) und $K - 1$ Begrenzungsregler. Insgesamt existieren also K Regler mit jeweils m Ausgängen. Folglich

besteht jeder Regler aus m Teilreglern und es gilt:

$$p_k(x, w_k, d) = \begin{bmatrix} p_{k1}(x, w_{k1}, d) \\ \vdots \\ p_{km}(x, w_{km}, d) \end{bmatrix}. \quad (5.51)$$

Für jeden Eingang des Systems besteht ein Schaltgesetz I_j ($j = 1, \dots, m$), das über eine beliebige, aber passende Kombination von MIN/MAX-Selektoren das Schaltsignal $\sigma_j(t)$ ($j = 1, \dots, m$) erzeugt. Jedem Schaltgesetz sind genau K Stellausgänge zugeordnet. Dabei findet durch die MIN/MAX-Bildung eine Priorisierung der Regler statt. Abbildung 5.2 zeigt darüber hinaus, dass trotz der Definition beliebig vieler Regelgesetze immer nur genau m Reglerausgänge aktiv sein können. Weiterhin stehen jedem Regelgesetz der vollständige Systemzustand $x(t)$, der Zustand des jeweils exklusiv zugeordneten Exosystems für die Generierung der Sollgröße $w_j(t)$ sowie alle Zustandsgrößen der Störung $d(t)$ zur Verfügung. Gemäß Abbildung 5.2 wird folgende Konvention hinsichtlich der Indizierung genutzt:

- die Koordinaten von x werden mit i indiziert, also $x = [x_i]^T$ mit $i = 1, \dots, n$,
- die Ein- und Ausgänge werden wegen $m_E = m_A = m$ mit $j = 1, \dots, m$ indiziert und
- die Indizierung der einzelnen Regler erfolgt durch k mit $k = 1, \dots, K$, wobei der Index $k = 1$ immer für die Hauptregelung reserviert bleibt.

Die MIN/MAX-Ablöseregung erzeugt eine Umschaltung zwischen den Reglerausgängen; siehe hierzu das autonome System mit schaltendem Regler ohne Unstetigkeiten an den Schaltstellen (5.7). Mit expliziter Auftrennung von Soll- und Störgrößen sowie unter Berücksichtigung

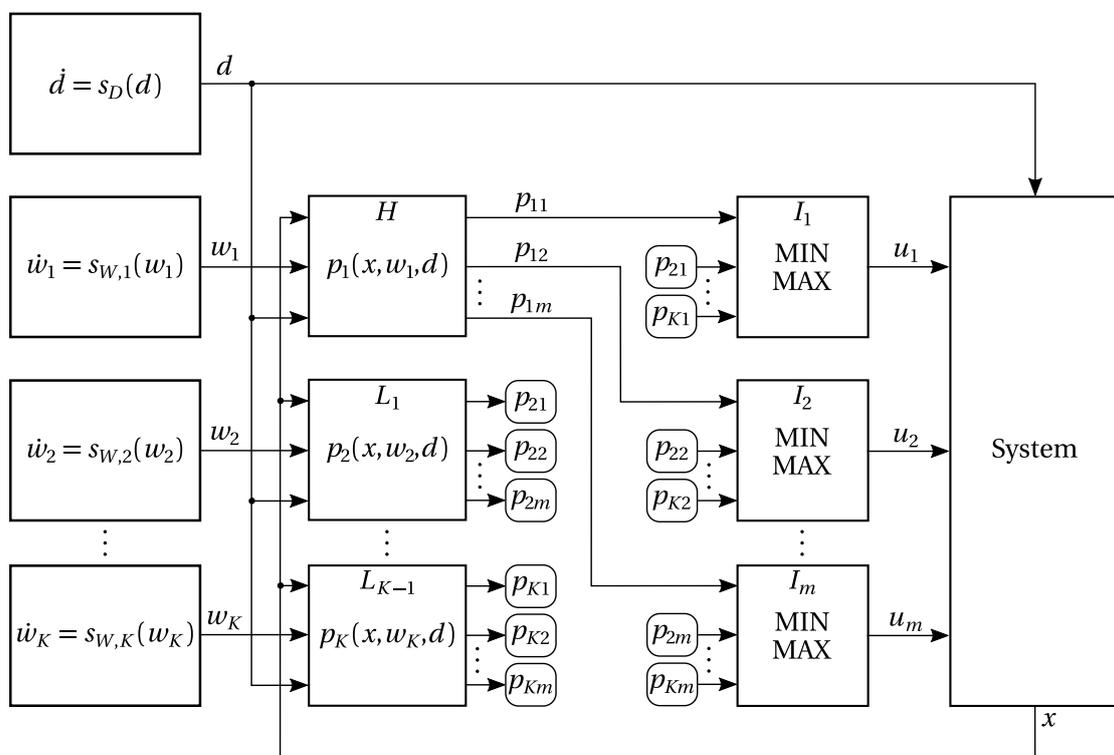


Abbildung 5.2. Allgemeine Struktur einer MIN/MAX-Ablöseregung für ein MIMO-System.

des Exosystems ergibt sich folgende Beschreibung für das Verdichtersystem:

$$\dot{x} = f(x, d) + \sum_{j=1}^m g_j(x, d) p_{\sigma_j}(x, w_{\sigma_j}, d), \quad (5.52a)$$

$$\dot{w} = s_W(w), \quad (5.52b)$$

$$\dot{d} = s_D(d), \quad (5.52c)$$

$$e = h(x) - q_W(w) \quad (5.52d)$$

wobei das Schaltsignal σ_j aus dem Schaltgesetz $I_j : \mathbb{R}^K \rightarrow \Omega$ durch die Vorschrift $\sigma_j(t) = I_j(p_{1j}, \dots, p_{Kj})$ erzeugt wird. Hierbei ist K die Anzahl aller vom Schaltgesetz I_j verarbeiteten Regelgesetze. Die Vektorfelder $f, g_j : \mathbb{R}^{n+m_D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $s_W : \mathbb{R}^{m_W} \rightarrow \mathbb{R}^{m_W}$, $s_D : \mathbb{R}^{m_D} \rightarrow \mathbb{R}^{m_D}$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{K m}$ und $q_W : \mathbb{R}^{m_W} \rightarrow \mathbb{R}^{K m}$ sind stetig differenzierbar. Das Exosystem für die Generierung der Solltrajektorien von Haupt- und Begrenzungsreglern lautet wegen der gegenseitigen Unabhängigkeit der Regler:

$$s_W(w) = \text{diag}(s_{W,1}(w_1), \dots, s_{W,K}(w_K)) \quad (5.53)$$

mit:

$$s_{W,k}(w_k) = \text{diag}(s_{W,k1}(w_{k1}), \dots, s_{W,km}(w_{km})), \quad k = 1, \dots, K. \quad (5.54)$$

Darüber hinaus sind der Vektor der Messgleichungen $h(x)$ und der Vektor der Sollgrößen $q_W(w)$ aus Gleichung (5.52d) gegeben durch:

$$h(x) = \begin{bmatrix} h_{k1}(x) \\ \vdots \\ h_{km}(x) \end{bmatrix}_{k=1, \dots, K}, \quad q_W(w) = \begin{bmatrix} q_{W,k1}(w_k) \\ \vdots \\ q_{W,km}(w_k) \end{bmatrix}_{k=1, \dots, K}. \quad (5.55)$$

Das kombinierte System (5.52) stellt den Ausgangspunkt für die folgenden Betrachtungen des Umschaltverhaltens und der Stabilität dar. Das Ziel besteht in der Folgeregelung des Systemzustands entsprechend $q_W(w)$ unter gleichzeitiger Störunterdrückung und Einhaltung von Betriebsgrenzen. Die Entwurfsziele lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- (i) Nach jeder Ablösung zwischen den Reglern zum Zeitpunkt t_a existiert für den aktiven Regler p_k ein Zeitpunkt $t_{\delta,a}$ mit $t_a < t_{\delta,a} < t_{a+1}$ und eine ausreichend kleine Grenze δ_k , sodass:

$$\|e_k(t)\| < \delta_k, \quad t \in [t_{\delta,a}, t_{a+1}). \quad (5.56)$$

- (ii) Bedingung (5.56) bleibt auch unter der Anwesenheit von Störungen $q_D(d)$ erhalten.

- (iii) Das System darf in der Ruhelage keine der definierten Begrenzungen verletzen.

Die Wahl der Grenze δ_k hängt maßgeblich von den Forderungen an das Verdichtersystem ab. Wird eine schnelle Ausregelung gewünscht, muss der k -te Regler den Zustand ausreichend schnell in die durch (5.56) definierte Menge nachführen. Wird eine hohe Regelgenauigkeit von p_k verlangt, muss man δ_k klein genug wählen. Das Entwurfsziel (5.56) beschreibt folglich die im praktischen Sinne erfolgreiche Nachführung des Systemzustands nach jeder Ablösung.

5.3.2 Umschaltungen in der MIN/MAX-Ablöseregung

Die hier zu entwickelnde Ablöseregung erlaubt explizit ein Überschwingen über Betriebsgrenzen während dynamischer Übergangsvorgänge – es handelt sich daher um eine weiche Grenze im Sinne von HERRMANN ET AL [92]. Im statischen Zustand muss die Messgleichung jedoch alle definierten Begrenzungen einhalten. Im Gegensatz zu GLATTFELDER und SCHAUFELBERGER [61] wird also in der Ruhelage keine Abweichung zugelassen.

Definition 5.15. MIN/MAX-Begrenzung. Gegeben sei System (5.52). Eine Begrenzung wird als MIN-Begrenzung oder als MAX-Begrenzung bezeichnet, wenn die Messgleichung $h_{kj}(x)$ die Begrenzung $q_{W,kj}(w_{kj})$ mit $k = 2, \dots, K$ und $j = 1, \dots, m$ in der Ruhelage nicht unterschreiten oder nicht überschreiten soll:

- (i) $h_{kj}(x) \geq q_{W,kj}(w_{kj}) \forall t \in \mathbb{R} : t > t_0, \dot{x} = 0$ (MIN-Begrenzung),
- (ii) $h_{kj}(x) \leq q_{W,kj}(w_{kj}) \forall t \in \mathbb{R} : t > t_0, \dot{x} = 0$ (MAX-Begrenzung). △

Bemerkung. Eine Begrenzung der i -ten Zustandsgröße kann erreicht werden, indem die Messgleichung zu $h_{kj}(x) = x_i$ gesetzt wird. Eine MAX-Bildung kann sowohl eine MAX-Begrenzung als auch eine MIN-Begrenzung umsetzen. Bei System (5.52) hängt dies vom Vorzeichen von $g_j(x, d)$ und dem Wirkungssinn der Stellgröße ab. Eine äquivalente Aussage besteht für die MIN-Bildung. △

Bei einer Ablöseregung erfolgt die Berechnung des Schaltgesetzes durch eine MIN- oder durch eine MAX-Bildung der Stellgrößen gemäß Abbildung 5.2. Die konkrete Anordnung der MIN/MAX-Selektoren ist vom betrachteten System sowie den Zielen des Regelungsentwurfs abhängig und ist ausführlich bei GLATTFELDER und SCHAUFELBERGER erläutert [61]. Generell bleibt jedoch festzuhalten, dass die MIN/MAX-Struktur der Begrenzung der Hauptregelung durch die zugehörigen Begrenzungsregler dient. Die Begrenzungsregler beschränken also den Stellwert der Hauptregelung. Als besonders effektiv für die Erläuterung des resultierenden Schaltverhaltens stellt sich die paarweise Betrachtung der Regelgesetze heraus. Somit kommt es zur Ablösung zwischen den beiden Teilreglern $p_{k_1j}(x, w_{k_1}, d)$ und $p_{k_2j}(x, w_{k_2}, d)$ mit $k_1 \neq k_2$, wenn beide Stellsignale denselben Wert erzeugen. Hieraus ergibt sich die folgende Definition:

Definition 5.16. MIN/MAX-Ablösung. Gegeben seien die beiden Teilregler $p_{k_1j}(x, w_{k_1}, d)$ und $p_{k_2j}(x, w_{k_2}, d)$ mit $k_1 \neq k_2$. Als Schaltzustand wird der Systemzustand $(x(t_a), w(t_a), d(t_a)) = (x_a, w_a, d_a)$ bezeichnet, für den zum Schaltzeitpunkt t_a die Stellsignaldifferenz $a_{k_1k_2}^j$ der beiden durch das Schaltgesetz I_j verarbeiteten Teilregler gleich Null ist:

$$a_{k_1k_2}^j(t_a) := p_{k_1j}(t_a) - p_{k_2j}(t_a) = 0. \quad (5.57)$$

Dann ist eine MIN/MAX-Ablösung von Regler k_1 durch Regler k_2 zum Schaltzeitpunkt t_a aufgetreten, wenn $a_{k_1k_2}^j(t_1) a_{k_1k_2}^j(t_2) < 0$ ($t_1 < t_a < t_2$). Eine Ablösung von Regler k_1 durch Regler k_2 ($k_1 \neq k_2$) wird durch $p_{k_1j} \rightsquigarrow p_{k_2j}$ gekennzeichnet. △

Die MIN/MAX-Bildung erzeugt ein stetiges Signal, solange alle Regelgesetze ein stetiges Signal erzeugen. Daher treten trotz der Umschaltung in System (5.52) keine Unstetigkeiten in den Zustandsgrößen auf. Aufgrund der fehlenden Unstetigkeiten an den Schaltflächen kann es folglich keine Sliding modes geben.

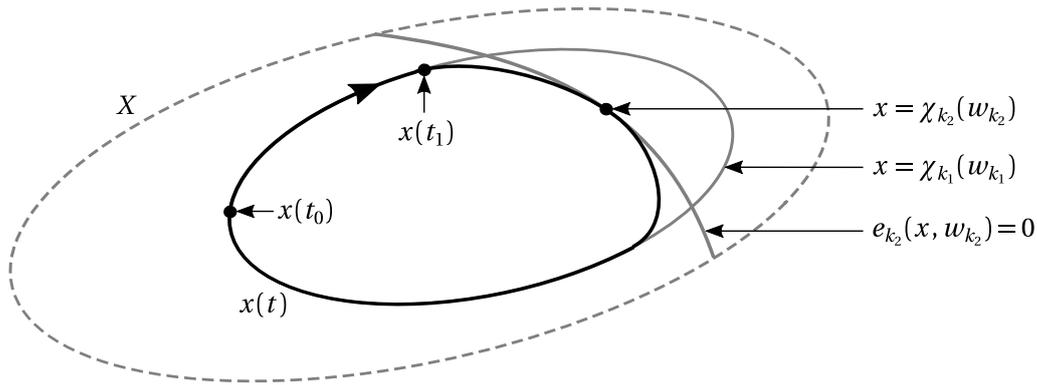


Abbildung 5.3. Wechsel der Zentrumsmannigfaltigkeit durch Ablösung zweier Regelgesetze in einem SISO-System.

Abbildung 5.3 zeigt beispielhaft eine durch Regler k_1 stabilisierte Trajektorie $x(t)$ eines SISO-Systems, für die zum Ablösezeitpunkt t_a eine Ablösung durch Regler k_2 stattfindet: $p_{k_1} \rightarrow p_{k_2}$. Vor der Umschaltung folgt $h_{k_1}(x)$ dem Sollwert $q_{W,k_1}(w_{k_1})$. Zum Ablösezeitpunkt t_a ist die Stellsignaldifferenz $a_{k_1 k_2}(t_a) = 0$. Folglich ist der Ablösezustand $x(t_a)$ Element der durch $a_{k_1 k_2}(x, w_{k_1}, w_{k_2}, d) = 0$ definierten Nullstellenmenge $\mathcal{A}_{k_1 k_2}$ der Stellsignaldifferenz in X . Nach der Ablösung durch Regler k_2 entfernt sich die Trajektorie $x(t)$ von \mathcal{M}_{k_1} und nähert sich der aktiven Zentrumsmannigfaltigkeit \mathcal{M}_{k_2} an. Wenn der Ablösezustand ausreichend nah an \mathcal{M}_{k_2} auftritt, dann wird sich die Trajektorie $x(t)$ gemäß Lemma 5.1 exponentiell an \mathcal{M}_{k_2} annähern. Sofern keine weitere Ablösung stattfindet, muss $x(t)$ für $t \rightarrow \infty$ notwendigerweise sowohl auf \mathcal{M}_{k_2} als auch auf der durch $e_{k_2}(x, w_{k_2}) = 0$ implizit definierten Nullstellenmenge zum Liegen kommen und die neue Ruhelage $\bar{x} = \chi(w_{k_2}, d)$ einnehmen. Die Regelabweichung $e_k(x, w_k)$ jedes Reglers definiert also eine Nullstellenmenge \mathcal{E}_k der Funktion $e_k(x, w_k) = 0$ auf der offenen Umgebung $X \times W_k$. Das Beispiel zeigt, dass die Nullstellenmengen $\mathcal{A}_{k_1 k_2}$ und \mathcal{E}_k für das Systemverständnis grundlegend sind. In dieser Arbeit wird davon ausgegangen, dass beide Nullstellenmengen jeweils ihre Definitionsmengen disjunkt zerlegen. Daraus ergeben sich die beiden folgenden Definitionen:

Definition 5.17. Einfache Ablösung. Gegeben seien die beiden Teilregler $p_{k_1 j}(x, w_{k_1}, d)$ und $p_{k_2 j}(x, w_{k_2}, d)$. Eine durch die Nullstellenmenge $\mathcal{A}_{k_1 k_2}^j$ der Funktion $a_{k_1 k_2}^j(x, w_{k_1}, w_{k_2}, d) := p_{k_1 j}(x, w_{k_1}, d) - p_{k_2 j}(x, w_{k_2}, d) = 0$ definierte Ablösung ist einfach, wenn sie die Definitionsmenge $X \times W_{k_1} \times W_{k_2} \times D$ in zwei offene disjunkte Umgebungen $\mathcal{G}_{k_1 k_2}^{\mathcal{A}^j}$ und $\bar{\mathcal{G}}_{k_1 k_2}^{\mathcal{A}^j}$ zerlegt. In $\mathcal{G}_{k_1 k_2}^{\mathcal{A}^j}$ ist $p_{k_1 j}$ aktiv und in $\bar{\mathcal{G}}_{k_1 k_2}^{\mathcal{A}^j}$ ist $p_{k_2 j}$ aktiv. \triangle

Definition 5.18. Einfache Begrenzung. Gegeben sei die Regelabweichung $e_{k j}(x, w_{k j})$ des Begrenzungsreglers $p_{k j}(x, w_k, d)$ mit $k > 1$. Eine durch die Nullstellenmenge \mathcal{E}_k^j der Funktion $e_{k j}(x, w_k) = 0$ definierte Begrenzung ist einfach, wenn sie die Definitionsmenge $X \times W_k$ in zwei offene disjunkte Umgebungen $\mathcal{G}_k^{\mathcal{E}^j}$ und $\bar{\mathcal{G}}_k^{\mathcal{E}^j}$ zerlegt. In $\mathcal{G}_k^{\mathcal{E}^j}$ darf sich die Trajektorie $x(t)$ in Bezug auf den Teilregler $p_{k j}$ frei bewegen. \triangle

Mithilfe des Satzes der impliziten Funktion lässt sich nun ein Kriterium angeben, wann es sich bei $\mathcal{A}_{k_1 k_2}^j$ und \mathcal{E}_k^j um Nullstellenmengen gemäß den Definitionen 5.17 und 5.18 handelt. Hierfür sei zunächst der Satz der impliziten Funktionen in einer besonderen Form angegeben.

Theorem 5.5. Sei $a : U \subset \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und bezeichne A die Nullstellenmenge von a im \mathbb{R}^l . Ist $\nabla a(P) \neq 0 \forall P \in A$, so ist A eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^l der Dimension $l - 1$.

Hieraus ergeben sich die beiden folgenden Aussagen in Bezug auf die Existenz einer einfachen Ablösung und einer einfachen Begrenzung:

Korollar 5.6. Existenz einer einfachen Ablösung. Gegeben sei System (5.52). Dann existiert eine einfache Ablösung zwischen den beiden Teilreglern $p_{k_1 j}(x, w_{k_1}, d)$ und $p_{k_2 j}(x, w_{k_2}, d)$ mit $k_1 \neq k_2$ in der Umgebung $U = X \times W_{k_1} \times W_{k_2} \times D \subset \mathbb{R}^l$, wenn $\nabla a_{k_1 k_2}^j(P) \neq 0 \forall P \in \mathcal{A}_{k_1 k_2}^j \cap U \neq \emptyset$.

Beweis. Auf der Umgebung U mit der Dimension $l = n + \dim(W_i) + \dim(W_j) + m_D$ ist die Stellsignaldifferenz $a_{k_1 k_2}^j : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ definiert. Die Bedingung $P \in \mathcal{A}_{k_1 k_2}^j \cap U \neq \emptyset$ stellt die Existenz einer Nullstellenmenge zur Funktion $a_{k_1 k_2}^j$ in U sicher. Damit eine Ablösung in U einfach sein kann, muss es überhaupt eine Ablösung in U geben. Die Nullstellenmenge $\mathcal{A}_{k_1 k_2}^j$ ist einfach, zerlegt also U in zwei disjunkte Umgebungen, wenn $\mathcal{A}_{k_1 k_2}^j$ eine doppelpunktfreie Hyperfläche mit der Dimension $l - 1$ ist. Dies ist aber äquivalent zu der Aussage, dass $\mathcal{A}_{k_1 k_2}^j$ eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension $\text{kodim}(\mathcal{A}_{k_1 k_2}^j) = 1$ in U sein muss. Da die Vektorfelder und Funktionen in (5.52) stetig differenzierbar, also jeweils \mathcal{C}^p -Funktionen mit $p \geq 1$ sind, wird das Problem der Folgeregelung durch \mathcal{C}^p -Regelgesetze sichergestellt [98]. Folglich gilt $p_{k_1} \in \mathcal{C}^p(U)$ und $p_{k_2} \in \mathcal{C}^p(U)$. Dies impliziert wegen der Definition der Stellsignaldifferenz 5.16 nun $a_{k_1 k_2}^j \in \mathcal{C}^p(U)$. Damit ist $a_{k_1 k_2}^j : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und nach Theorem 5.5 folgt, dass die Nullstellenmenge $\mathcal{A}_{k_1 k_2}^j$ eine Untermannigfaltigkeit mit der Kodimension $\text{kodim}(\mathcal{A}_{k_1 k_2}^j) = 1$ in U ist, wenn $\nabla a(P) \neq 0 \forall P \in \mathcal{A}_{k_1 k_2}^j \cap U$ und das Korollar folgt. \square

Korollar 5.7. Existenz einer einfachen Begrenzung. Gegeben sei System (5.52). Dann existiert eine einfache Begrenzung der Regelabweichung $e_{k j}(x, w_k)$ des Begrenzungsreglers $p_{k j}(x, w_k, d)$ in der Umgebung $U = X \times W_k \subset \mathbb{R}^l$, wenn $\nabla e_{k j}(P) \neq 0 \forall P \in \mathcal{E}_k^j \cap U \neq \emptyset$.

Beweis. Der Beweis folgt dem Beweis von Korollar 5.6 mit $l = n + \dim(W_k)$. Die stetige Differenzierbarkeit ist wegen $e_{k j}(x, w_k) = h_{k j}(x) - q_{W, k j}(w_k)$ und durch die stetige Differenzierbarkeit von $h_{k j}(x)$ und $q_{W, k j}(w_k)$ sichergestellt. \square

Für die weiteren Betrachtungen wird nun eine Annahme bezüglich der Nullstellenmengen $\mathcal{A}_{k_1 k_2}^j$ und \mathcal{E}_k^j formuliert.

Annahme 5.3. Alle $\mathcal{A}_{k_1 k_2}^j$, $k_1, k_2 \in \Omega$, $k_1 \neq k_2$, $j = 1, \dots, m$ mit $\mathcal{A}_{k_1 k_2}^j \neq \emptyset$ sowie alle \mathcal{E}_k^j , $k = 2, \dots, K$, $j = 1, \dots, m$ mit $\mathcal{E}_k^j \neq \emptyset$ sind einfach gemäß den Definitionen 5.17 und 5.18.

Ausgezeichnete Nullstellenmengen können für $\mathcal{A}_{k_1 k_2}^j$ angegeben werden, wenn es sich bei Regler k_1 um eine Hauptregelung und bei Regler k_2 um eine Begrenzungsregelung handelt. Die durch die Stellsignaldifferenz mit $a_{k_1 k_2}^j = 0$ definierte Nullstellenmenge $\mathcal{A}_{k_1 k_2}^j$ kann dann wie folgt interpretiert werden:

Definition 5.19. Haupt- und Begrenzungsregelungsgebiet. Gegeben seien ein Teilregler der Hauptregelung $p_{1 j}$ und ein Teilregler einer Begrenzungsregelung $p_{k j}$ mit $k = 2, \dots, K$. Es existiere weiterhin eine einfache Ablösung zwischen $p_{1 j}$ und $p_{k j}$; die Schaltfläche $\mathcal{A}_{1 k_2}^j$ erfülle

also Korollar 5.6. Dann wird die Definitionsmenge $X \times W_1 \times W_k \times D$ in zwei offene Umgebungen zerlegt. Die offene Umgebung $\mathcal{G}_{1k}^{A_j}$ wird als Hauptregelungsgebiet für den Hauptregler p_{1j} bezüglich des Begrenzungsreglers p_{kj} bezeichnet. Hier erhält p_{1j} den Stellzugriff und die Trajektorie $x(t)$ kann der Solltrajektorie der Hauptregelung p_{1j} folgen. Andererseits wird $\bar{\mathcal{G}}_{1k}^{A_j}$ als Begrenzungsregelungsgebiet bezeichnet, in dem p_{kj} den Stellzugriff erhält. \triangle

Bemerkung. Für den Entwurf einer Ablöseregung muss für jeden Teilregler der Hauptregelung eine nicht leere offene Umgebung $\mathcal{G}^{A_j} = \bigcap \mathcal{G}_{1k}^{A_j} \neq \emptyset$ ($k = 2, \dots, K$) existieren. Hier erhält p_{1j} den Stellzugriff. Wäre $\mathcal{G}^{A_j} = \emptyset$, dann würde der j -te Teilregler der Hauptregelung niemals den Stellzugriff erhalten. Es wird weiterhin $\mathcal{G}^A = \bigcap \mathcal{G}^{A_j} \neq \emptyset$ ($j = 1, \dots, m$) vorausgesetzt. Damit existiert ein Gebiet, in dem ausschließlich die Hauptregelung den Stellzugriff erhält. \triangle

Definition 5.20. Erlaubtes und unerlaubtes Gebiet. Gegeben sei eine beliebige Begrenzungsregelung p_{kj} mit $j = 1, \dots, m$ und $k = 2, \dots, K$. Es existiere weiterhin eine einfache Begrenzung; die Begrenzungsfläche \mathcal{E}_k^j erfülle also Korollar 5.7. Dann wird die Definitionsmenge $X \times W_k$ in zwei offene Umgebungen zerlegt. Die offene Umgebung $\mathcal{G}_k^{\mathcal{E}_j}$ wird als erlaubtes Gebiet für den Hauptregler p_{1j} bezüglich des Begrenzungsreglers p_{kj} bezeichnet. Hier darf sich die Trajektorie $x(t)$ aus Sicht des Begrenzungsreglers p_{kj} frei bewegen. Andererseits wird $\bar{\mathcal{G}}_k^{\mathcal{E}_j}$ als unerlaubtes Gebiet für den Hauptregler p_{1j} bezeichnet. \triangle

Bemerkung. Die Lösungsmenge von $e_{kj}(x, w_k) = 0$ muss $\forall j = 1, \dots, m$ und $\forall k = 2, \dots, K$ mindestens eine Lösung besitzen, ansonsten kann der Entwurf der Regelung nicht begonnen werden. Im Falle mehrerer (gegebenenfalls unendlich vieler) Lösungen müssen zusätzlich Nebenbedingungen formuliert werden, um eine bestimmte Lösung aus der Lösungsmenge auswählen zu können. Ferner muss für den Entwurf jedes Teilreglers der Hauptregelung eine nicht leere offene Umgebung $\mathcal{G}^{\mathcal{E}_j} = \bigcap \mathcal{G}_k^{\mathcal{E}_j} \neq \emptyset$ ($k = 2, \dots, K$) existieren, in der sich die Trajektorie $x(t)$ bewegen darf. Anderenfalls gibt es für die betroffene Hauptregelung kein erlaubtes Gebiet. Es wird weiterhin $\mathcal{G}^{\mathcal{E}} = \bigcap \mathcal{G}^{\mathcal{E}_j} \neq \emptyset$ ($j = 1, \dots, m$) vorausgesetzt. Damit existiert ein Gebiet, in dem sich die komplette Hauptregelung bewegen darf. \triangle

Definition 5.21. Nutzbares Gebiet. Die Vereinigungsmenge $\mathcal{G} = \mathcal{G}^A \cap \mathcal{G}^{\mathcal{E}}$ wird als nutzbares Gebiet der Hauptregelung bezeichnet. \triangle

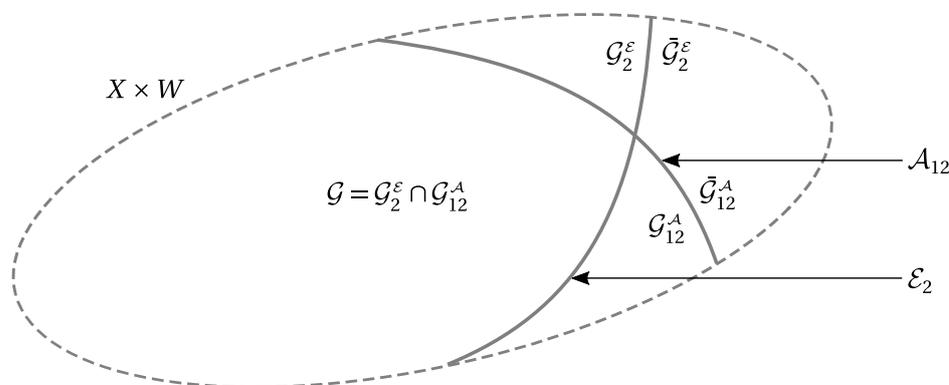


Abbildung 5.4. Beispiel für die verwendeten Konventionen der Ablösung und Begrenzung für ein SISO-System mit einer Hauptregelung und einer Begrenzungsregelung.

Bemerkung. Das nutzbare Gebiet \mathcal{G} ist damit eine Umgebung, in der sich die Trajektorie $x(t)$ bewegen darf und die Hauptregelung p_1 tatsächlich den Stellzugriff erhält. Wie zuvor wird für die weitere Betrachtung $\mathcal{G} \neq \emptyset$ vorausgesetzt. Ein Beispiel für die verwendeten Konventionen in Bezug auf die Definitionen 5.19, 5.20 und 5.21 zeigt Abbildung 5.4. Ein maßgebliches Entwurfsziel für eine Ablöseregelung kann die Maximierung von \mathcal{G} sein. Der nutzbare Betriebsbereich soll dann unter den gegebenen technischen Rahmenbedingungen möglichst groß sein, ohne die Sicherheit des geregelten Prozesses zu gefährden. \triangle

5.3.3 Generierung der Solltrajektorien

Die am häufigsten genutzten Solltrajektorien in der Prozessindustrie werden durch konstante Sollwerte und Sollwertrampen gebildet. Für einen konstanten Sollwert muss lediglich ein Exosystem der Form $\dot{w} = 0$ vorgegeben werden. Bei einer Rampe handelt es sich jedoch um ein nicht begrenztes Signal. Eine Rampe kann daher nicht durch ein einziges neutral stabiles Exosystem generiert werden [96]. Es besteht jedoch die Möglichkeit, eine Rampe auf Basis der vorgestellten Methode der Ablöseregelung in ausreichender Genauigkeit zu approximieren. Das Prinzip besteht in der Überführung des Systemzustandes von einem unteren (oberen) Grenzwert zu einem oberen (unteren) Grenzwert durch eine Sinusfunktion. Abbildung 5.5 zeigt dieses Prinzip anhand einer Sollwertrampe für die Zustandsgröße x_1 . Der Rampengenerator besteht aus zwei Generatoren für eine konstante Trajektorie und einen Generator für eine sinusförmige Trajektorie. Vor Beginn der Rampe ist p_3 aktiv und das System befindet sich in der Ruhelage bei $x_{1,L}$. Im konkreten Beispiel erfolgt der Übergang zum Sinusgenerator durch die Ablösung $p_3 \rightarrow p_1$. Der Sinusgenerator soll insbesondere einen näherungsweise linearen Funktionsverlauf zwischen $x_{1,L}$ und $x_{1,H}$ sicherstellen. Dies lässt sich durch eine zweckmäßige Initialisierung des Sinusgenerators ermöglichen. Bei einer Rampe von $x_{1,L}$ nach $x_{1,H}$ wird dabei der ansteigende Verlauf der sinusförmigen Trajektorie genutzt; bei einer Rampe von $x_{1,H}$ nach $x_{1,L}$ wird der abfallende Verlauf genutzt. Kurz vor dem Erreichen der durch $x_{1,H}$ markierten Begrenzung findet im konkreten Beispiel die Ablösung $p_1 \rightarrow p_2$ statt. Nach Abschluss der Rampe befindet sich das System in der Ruhelage $x_{1,H}$. Neben der Stabilität muss lediglich sichergestellt werden, dass der Sinusgenerator vor Durchqueren der Schaltfläche \mathcal{A}_{13} eingeschaltet und nach Durchqueren des Schaltfläche \mathcal{A}_{12} abgeschaltet wird. Da der Sinusge-

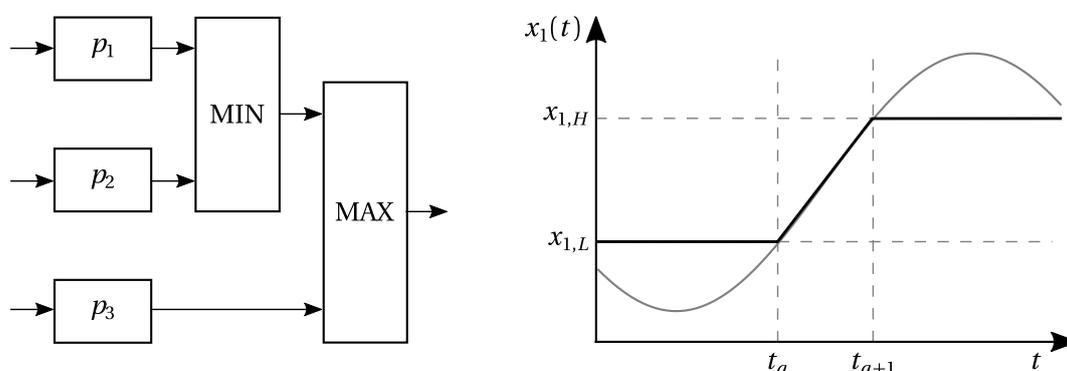


Abbildung 5.5. Generierung einer Sollwertrampe auf Basis der MIN/MAX-Ablöseregelung.

nerator in diesen Zuständen keinen Stellzugriff erhält, wirkt sich dessen Zu- oder Abschaltung im Schaltmoment nicht auf das System aus. Abgesehen von dieser Zu- und Abschaltung unterscheidet sich der Entwurf einer Rampe nicht von dem der anderen Regelgesetze. Das Exosystem für die Generierung einer Rampe auf Basis der MIN/MAX-Ablöseregelung lautet damit:

$$\dot{w}_1 = [0 \quad \alpha w_{13} \quad -\alpha w_{12}]^T, \quad (5.58a)$$

$$\dot{w}_2 = 0, \quad (5.58b)$$

$$\dot{w}_3 = 0 \quad (5.58c)$$

mit w_1 als Zustandsgrößen für den Sinusgenerator und w_2, w_3 als Zustandsgrößen für die Begrenzungsregler. Der Parameter α bestimmt die Frequenz der Sinusschwingung. Insgesamt beschreibt das Exosystem (5.58a) eine Sinusschwingung mit Gleichanteil. Ferner erfordert der Regelungsentwurf für p_1 (Sinusgenerator) und p_2, p_3 (Begrenzungsregler) folgende Regelabweichungen:

$$e_1(x, w_1) = h(x) - (w_{11} + w_{12}), \quad (5.59a)$$

$$e_2(x, w_2) = h(x) - (w_{21}), \quad (5.59b)$$

$$e_3(x, w_3) = h(x) - (w_{31}), \quad (5.59c)$$

wobei $h(x)$ für alle Regelabweichungen identisch sein muss und der Ausgangsgröße entspricht, die der Sollwertrampe folgen soll. Für das Beispiel aus Abbildung 5.5 ist $h(x) = x_1$ zu setzen.

5.3.4 Stabilität der MIN/MAX-Ablöseregelung

Die Stabilität von System (5.52) lässt sich auf die Stabilität des entsprechenden Fehlersystems zurückführen. Gemäß den Ausführungen in Abschnitt 5.2.1 entsteht auf diese Weise ein autonomes System mit Unstetigkeiten in \tilde{x} an den Schaltstellen. Im Sinne der Übersichtlichkeit wird nur das unstetig schaltende Teilsystem in \tilde{x} dargestellt (ohne Exosystem). Zunächst erfolgt die Analyse eines SISO-Systems; die Struktur des Verdichtermodells entspricht dann dem System (5.10) für $m_E = m_A = 1$ bei zustandsabhängiger Umschaltung:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{f}_\sigma(\tilde{x}, \tilde{v}) + \tilde{g}_\sigma(\tilde{x}, \tilde{v})\tilde{u}_\sigma + g_\sigma(\tilde{x}, \tilde{v})\tilde{v}_\sigma, \quad (\tilde{x}(t), \tilde{v}(t)) \notin \mathcal{S}(t), \quad (5.60a)$$

$$\tilde{x}(t_a^+) = \tilde{x}(t_a^-) + \Delta\chi_\sigma(t_a), \quad (\tilde{x}(t), \tilde{v}(t)) \in \mathcal{S}(t) \quad (5.60b)$$

wobei der Index j nun nicht mehr mitgeführt wird. Damit besteht jeder Regler aus genau einem Teilregler. Weiterhin geht System (5.60) mit den Zustandsrückführungen $\tilde{u}_\sigma = p_\sigma(\chi_\sigma(v_\sigma), v_\sigma)$ und $\tilde{v}_\sigma = p_\sigma(x, v_\sigma)$ in einen geschlossenen Regelkreis über. Während jeder Umschaltung $p_{k_1} \rightarrow p_{k_2}$ ($k_1, k_2 \in \Omega$, $k_1 \neq k_2$) wird die Solltrajektorie umgeschaltet. Bei dieser Umschaltung tritt eine Unstetigkeit in \tilde{x} auf. Die Zustandsverschiebung $\Delta\chi_\sigma(t_a)$ des Rückstellgesetzes (5.60b) erhält man durch die Separation (5.5a) unter Beachtung der Kontinuität der Trajektorie in den Originalkoordinaten $x(t_a^+) = x(t_a^-)$ zum Schaltzeitpunkt t_a :

$$\Delta\chi_\sigma(t_a) := \chi_{\sigma(t_a^-)}(v_{\sigma(t_a^-)}) - \chi_{\sigma(t_a^+)}(v_{\sigma(t_a^+)}). \quad (5.61)$$

Damit das Fehlersystem tatsächlich $\forall t > t_0$ existiert, muss die Aufgabe der Folgeregelung entsprechend Algorithmus 5.1 für alle definierten Regelabweichungen lösbar sein. Daraus ergibt sich folgende Annahme:

Annahme 5.4. Die Aufgabe der Folgeregelung gemäß Algorithmus 5.1 ist $\forall k \in \Omega$ Regelabweichungen lösbar.

Weiterhin ist es notwendig, dass auch die Schaltflächen $\mathcal{A}_{k_1 k_2}$ in die Fehlerkoordinaten transformiert werden. Dieses Vorgehen führt zu den transformierten Schaltflächen $\tilde{\mathcal{A}}_{k_1 k_2}$. Damit setzt sich die Schaltfläche \mathcal{S} in System (5.60) aus allen transformierten Schaltflächen $\tilde{\mathcal{A}}_{k_1 k_2}$ zusammen:

$$\mathcal{S}(t) := \bigcup_{k_1=1}^K \bigcup_{k_2=k_1+1}^K \tilde{\mathcal{A}}_{k_1 k_2}. \quad (5.62)$$

Die transformierten Schaltflächen $\tilde{\mathcal{A}}_{k_1 k_2}$ bewegen sich durch den Zustandsraum des Fehlersystems $\tilde{X} \times \tilde{V}$ und verhalten sich während einer Umschaltung ebenfalls unstetig. Ein interessanter Zustand entsteht, wenn ein $\tilde{\mathcal{A}}_{k_1 k_2}$ den Koordinatenursprung von $\tilde{X} \times \tilde{V}$ zum Zeitpunkt t durchquert, das heißt: $0 \in \tilde{\mathcal{A}}_{k_1 k_2}$. Angenommen, das Fehlersystem ist zu diesem Zeitpunkt in der Ruhelage $(\tilde{x}, \tilde{v}) = (0, 0)$, dann gilt $t = t_a$ und es kommt zu einer Umschaltung. Dieser Zustand lässt sich vollständig durch den Exozustand $v(t_a)$ beschreiben und kann genutzt werden, um aus (5.8) ein invariantes Schaltsignal $\zeta(t)$ zu definieren:

$$\zeta(t) := I(\bar{u}_1(v_1), \dots, \bar{u}_K(v_K)). \quad (5.63)$$

Da das invariante Schaltsignal $\zeta(t)$ ausschließlich vom Exosystem abhängt, wird es als geplantes Schaltsignal bezeichnet. Auf diese Weise lässt sich folgende Proposition ableiten:

Proposition 5.8. *Wenn $\zeta(t)$ nicht konstant ist, dann ist auch $\sigma(t)$ nicht konstant.*

Beweis. Die Annahmen 5.3 und 5.4 seien erfüllt. Die Proposition wird durch einen Widerspruch bewiesen. Daher wird nun angenommen, dass $\sigma = \text{konstant}$ ist. Folglich gibt es keine Umschaltungen und die Regelabweichung wird gemäß Lemma 5.1 exponentiell gegen Null streben. Zusammen mit der neutralen Stabilität des Exosystems folgt $(\tilde{x}, \tilde{v}) \in U_\delta \forall t > t_\delta$, das heißt, der Systemzustand verbleibt in einer offenen Umgebung U_δ . Da aber $\zeta(t)$ nicht konstant ist, muss es eine Zeit geben, zu der eine Schaltfläche den Koordinatenursprung $(\tilde{x}, \tilde{v}) = (0, 0)$ durchquert. Folglich gilt zu diesem Zeitpunkt $0 \in \tilde{\mathcal{A}}_{k_1 k_2}$. Wird nun U_δ genügend klein gewählt, wird darüber hinaus jedes Element von U_δ auch Element von $\tilde{\mathcal{A}}_{k_1 k_2}$ sein. Das führt zu einer Umschaltung zum Zeitpunkt t_a und der Ablösung $p_{k_1} \rightarrow p_{k_2}$. Das widerspricht der Annahme eines konstanten Schaltsignals und die Proposition folgt. \square

Bemerkung. Die Proposition ist nur lokal erfüllt, da Lemma 5.1 die asymptotische Stabilität nur in einer lokalen Umgebung um den Koordinatenursprung sicherstellt. Wenn $q_k(w_k)$ nicht konstant ist, dann gilt wegen der neutralen Stabilität des Exosystems $w_k(t + T_k) = w_k$ sowie $\chi_k(w_k(t + T_k)) = \chi_k(w_k(t))$ mit der Periode $T_k > 0$. Daher kommt es zu einer unendlichen Anzahl an Umschaltungen, wenn $t \rightarrow \infty$. \triangle

Für die weitere Systemanalyse muss das Verhalten des Fehlersystems bei einer Umschaltung etwas genauer betrachtet werden. Dazu sei nachfolgende Proposition formuliert:

Proposition 5.9. *Wenn $\|\chi_{k_1}(v_{k_1}(t)) - \chi_{k_2}(v_{k_2}(t))\| > 0, \forall k_1, k_2 \in \Omega, k_1 \neq k_2, t > t_0$, dann existiert eine offene Umgebung \tilde{X}_ϵ um $\tilde{x} = 0$, sodass $\forall \tilde{x} \in \tilde{X}_\epsilon$ folgt:*

$$\tilde{x}(t_a^-) \in \tilde{X}_\epsilon \Rightarrow \tilde{x}(t_a^+) \notin \tilde{X}_\epsilon. \quad (5.64)$$

Beweis. Die Annahmen 5.3 und 5.4 seien erfüllt. Wenn der EUKLIDISCHE Abstand zwischen den beiden Abbildungen $\|\chi_{k_1}(v_{k_1}(t)) - \chi_{k_2}(v_{k_2}(t))\| \forall t > t_0$ ungleich Null ist, dann wird \tilde{x} unstetig umschalten. Das folgt direkt aus Gleichung (5.60b). Die offene Umgebung \tilde{X}_ϵ sei definiert als $\tilde{X}_\epsilon := \{\tilde{x} \in \tilde{X} \mid \|\tilde{x}\| < \epsilon\}$. Wenn nun $0 < \epsilon \leq \|\chi_{k_1}(v_{k_1}(t_a^-)) - \chi_{k_2}(v_{k_2}(t_a^+))\|/2$, dann werden alle $\tilde{x} \in \tilde{X}_\epsilon$ während einer Umschaltung zum Zeitpunkt t_a aus der Umgebung \tilde{X}_ϵ herausspringen. Damit folgt die Proposition. \square

Aus den beiden Propositionen 5.8 und 5.9 lässt sich eine wichtige Schlussfolgerung ziehen: Sind beide Propositionen erfüllt, kann System (5.60) nicht LYAPUNOV-stabil sein. Proposition 5.8 sagt aus, dass es eine unendliche Anzahl an Umschaltungen gibt, wenn $t \rightarrow \infty$. Proposition 5.9 sagt aus, dass ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass:

$$\forall \delta > 0, \exists \|\tilde{x}(t_0)\| \text{ und } \exists t \geq t_0 \text{ mit } \|\tilde{x}(t)\| \geq \epsilon. \quad (5.65)$$

Gemäß der δ - ϵ -Konstruktion für die LYAPUNOV-Stabilität existiert daher nicht zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass die Trajektorie $\tilde{x}(t)$ LYAPUNOV-stabil ist. Daraus lässt sich im Umkehrschluss folgende Aussage formulieren:

Korollar 5.10. *Gegeben sei System (5.60) in einer Umgebung $U = \tilde{X} \times \tilde{V}$ und eine genügend kleine Umgebung $U_0 = \tilde{X}_0 \times \tilde{V}_0$, jeweils um $(\tilde{x}, \tilde{v}) = (0, 0)$. Die Ruhelage $\tilde{x} = 0$ ist exponentiell stabil, wenn $U \cap \mathcal{S}(t) = \emptyset \forall t > t_0$ und $(\tilde{x}(t_0), \tilde{v}(t_0)) \in U_0$, solange $(x(t), v(t)) \in U_0$.*

Beweis. Wenn die Bedingung $U \cap \mathcal{S}(t) = \emptyset$ erfüllt ist, dann reduziert sich System (5.60) zu einem nicht schaltenden System in U . Entsprechend gilt $\sigma = \text{konstant}$. Wenn das System innerhalb einer genügend kleinen Umgebung $\tilde{X}_0 \times \tilde{V}_0$ um die Ruhelage $(\tilde{x}, \tilde{v}) = (0, 0)$ startet, dann folgt aus Lemma 5.1 die exponentielle Stabilität. \square

Im Allgemeinen kann das Fehlersystem (5.60) nicht LYAPUNOV-stabil sein. Da jedoch nur bestimmte $\epsilon > 0$ Bedingung (5.65) erfüllen, lässt sich das Konzept der praktischen Stabilität nach Definition 5.9 nutzen. Anhand der bisherigen Erkenntnisse kann nun das zentrale Ergebnis dieses Abschnitts für SISO-Systeme angegeben werden. Dafür wird noch folgende Annahme benötigt:

Annahme 5.5. Für den Systemzustand nach einer Umschaltung gilt $(\tilde{x}(t_a^+), \tilde{v}(t_a^+)) \in \tilde{X}_a \times \tilde{V}_a \forall a \in \Theta$ mit den genügend kleinen Umgebungen $\tilde{X}_a \times \tilde{V}_a$ um $(\tilde{x}, \tilde{v}) = (0, 0)$.

Theorem 5.11. *Die Annahmen 5.3 bis 5.5 seien erfüllt. Gegeben sei System (5.60) mit den Initialbedingungen $(\tilde{x}(t_0), \tilde{v}(t_0)) \in U_\delta$ und einer Umgebung U_δ um $(\tilde{x}, \tilde{v}) = (0, 0)$. Ferner sei $\zeta(t)$ ein nicht konstantes geplantes Schaltsignal. Wenn $t_{a+1} - t_a > \tau_a$ mit einer ausreichend großen Haltezeit $\tau_a > 0 \forall a \in \Theta$, dann ist System (5.60) praktisch stabil.*

Beweis. Annahme 5.3 garantiert, dass bei jeder Umschaltung auch eine Ablösung $p_{k_1} \rightarrow p_{k_2}$ mit $k_1 \neq k_2$ stattfindet. Annahme 5.4 garantiert, dass das Fehlersystem (5.60) $\forall t > t_0$ existiert. Damit System (5.60) nun praktisch stabil ist, muss die Dreiecksungleichung:

$$\|\tilde{x}(t_a^+)\| \leq \|\tilde{x}(t_a^-)\| + \|\Delta\chi_{\sigma(t_a)}\| < A \quad (5.66)$$

für alle Umschaltungen erfüllt werden. Gleichung (5.66) lässt sich über die Betragsbildung von (5.60b) ableiten. Wegen Annahme 5.5 gewährleistet jeder Regler des Systems (5.60) asymptotische Stabilität. Dies ergibt sich aus dem Umstand, dass nach jeder Umschaltung der Systemzustand $(x(t_a^+), v(t_a^+))$ in einer Umgebung U_ϵ liegt, in der nach Lemma 5.1 asymptotische Stabilität des Systems unter dem Wirken des aktiven Reglers vorliegt. Daher existiert nach jeder Umschaltung mit der oberen Schranke $A > 0$ auch eine obere Schranke $\epsilon > A$, sodass für die Lösung des dynamischen Systems (5.60a) $\|\tilde{x}(t)\| < \epsilon$ mit $(\tilde{x}(t), \tilde{v}(t)) \notin \mathcal{S}(t)$ und $t > t_a$ gilt. Der Term $\|\Delta\chi_{\sigma(t_a)}\|$ in Gleichung (5.66) hängt ausschließlich vom Exozustand ab und muss aufgrund der neutralen Stabilität des Exosystems eine obere Schranke B besitzen:

$$\|\Delta\chi_{\sigma(t_a)}\| \leq \|\Delta\chi_{\sigma(t)}\| < B, \forall t > t_0. \quad (5.67)$$

Die Kombination der Bedingungen (5.66) und (5.67) führt zu folgender Bedingung:

$$\|\tilde{x}(t_a^-)\| < \delta < A - B, \forall a \in \Theta. \quad (5.68)$$

Wenn also alle Umschaltungen in $U_\delta = \tilde{X}_\delta \times \tilde{V}_\delta$ stattfinden, dann verbleibt die Trajektorie $(x(t), v(t)) \forall t > t_0$ in einer Umgebung U_ϵ . Das System (5.60) ist dann praktisch stabil. Das Theorem formuliert nun die Bedingung, unter der die Umschaltungen tatsächlich in U_δ stattfinden. Dazu sei angenommen, dass der Regler k_1 zum Schaltzeitpunkt t_a mit $\|\tilde{x}(t_a^+)\| < A$ aktiviert wird. Wegen Annahme 5.5 garantiert die Haltezeit τ_a die asymptotische Stabilität des aktiven Reglers für die Dauer der Haltezeit. Ist die Haltezeit lang genug, gilt die folgende Implikation:

$$(\tilde{x}(t_a^+), \tilde{v}(t_a^+)) \in U_\epsilon \Rightarrow (\tilde{x}(t), \tilde{v}(t)) \in U_\delta, t \in [t_{\delta,a}, t_{a+1}] \quad (5.69)$$

mit einem Zeitpunkt $t_{\delta,a}$ zwischen zwei Umschaltungen $t_a < t_{\delta,a} < t_{a+1}$. Wegen des nicht konstanten geplanten Schaltsignals $\zeta(t)$ (siehe Proposition 5.8) ist die Existenz einer weiteren Umschaltung auf einen Regler k_2 sichergestellt. Da die Umschaltung in U_δ stattfindet, verbleibt die Trajektorie $(\tilde{x}(t), \tilde{v}(t))$ unter dem Regler k_2 während der nächsten Haltezeit τ_{a+1} in U_ϵ . Folglich ist das System praktisch stabil, wenn die Haltezeit τ_a die Implikation (5.69) $\forall a \in \Theta$ sicherstellt. Genau dann ist $t_{a+1} - t_a > \tau_a \forall a \in \Theta$ und das Theorem folgt. \square

Bemerkung. Die Implikation (5.69) muss gemäß Theorem 5.11 $\forall a \in \Theta$ erfüllt sein, um praktische Stabilität zu gewährleisten. Eine simulationsgestützte Überprüfung der praktischen Stabilität ist aufgrund dieser Forderung gegebenenfalls nicht ohne Weiteres möglich. \triangle

Aus der Stabilitätsanalyse lassen sich wichtige Schlussfolgerungen ziehen. Beispielsweise zeigt Theorem 5.11, dass zwei elementare Aussagen zur LYAPUNOV-Stabilität von schaltenden Systemen ohne Unstetigkeiten auch für die praktische Stabilität von System (5.60) erhalten bleiben. Zum einen ist die asymptotische Stabilität der einzelnen Regler keine hinreichende Bedingung, um auf die Stabilität von System (5.60) zu schließen. Zum anderen ist das System stabil, wenn die Einzelsysteme asymptotisch stabil sind und die Umschaltungen nicht zu schnell erfolgen. Eine weitere wichtige Konsequenz von Theorem 5.11 bezieht sich auf die Entwurfsziele (i)-(iii) aus Abschnitt 5.3.1. Wenn Theorem 5.11 mit einem ausreichend kleinen U_δ erfüllt ist, dann sind die Entwurfsziele erreicht. Forderung (i) mit Bedingung (5.56) und Forderung (ii) sind erfüllt, da es für jede Umschaltung eine ausreichend kleine Umgebung $U_\delta \subset U_\epsilon$ und einen Zeitpunkt $t_{\delta,a}$ mit $t_a < t_{\delta,a} < t_{a+1}$ gibt, sodass $\tilde{x} \in U_\delta$ für das Zeitintervall $[t_{\delta,a}, t_{a+1}]$. Forderung (iii) ist erfüllt, da die Regelabweichungen e_k ($k = 2, \dots, K$) die Betriebsgrenzen beschreiben.

Die Erweiterung auf MIMO-Systeme erfordert eine zusätzliche Betrachtung. Die allgemeine Struktur einer MIN/MAX-Ablöseregelung für MIMO-Systeme zeigte bereits Abbildung 5.2. Der Abbildung ist zu entnehmen, dass jeder Regler auf alle Eingänge des Systems wirkt. Die MIN/MAX-Bildung durch das Schaltgesetz $I_j(p_{1j}, \dots, p_{kj})$ erfolgt separat für jeden Eingang u_j . Folglich können Zustände auftreten, zu denen zwei oder mehr unterschiedliche Regler den Stellzugriff erhalten. Die aktiven Teilregler erzeugen dann keine ausgangsnulldende Mannigfaltigkeit gemäß Annahme 5.2 und es existiert mindestens eine bleibende Regelabweichung. Daher ist die Ruhelage durch keine der k Abbildungen $\chi_k(v_k)$ beschreibbar und System (5.52) lässt sich nicht ohne Weiteres in das Fehlersystem (5.60) transformieren. Diese Transformation ist jedoch Voraussetzung für die Übertragbarkeit der hier entwickelten Ergebnisse auf ein MIMO-System. Daher wird eine weitere Annahme formuliert, die die Anwendbarkeit von Lemma 5.1 in der Stabilitätsanalyse des MIMO-Systems sichert.

Annahme 5.6. Die Ruhelage von System (5.52) lässt sich immer durch genau eine Abbildung der Zentrumsmannigfaltigkeiten $\chi_1(v_1), \dots, \chi_K(v_K)$ beschreiben.

5.3.5 Entwurf einer MIN/MAX-Ablöseregelung

Im Folgenden wird das Regelgesetz der Form $p_{kj}(x, v_k) = \bar{u}_{kj}(v_k) + G_{kj}(v_k)(x - \chi_k(v_k))$ mit der Regelverstärkung $G_{kj}(v_k)$ für den Entwurf jedes Teilreglers vorausgesetzt. Dieser Regler ist eine Standardform, die das Problem der Zustandsrückführung löst, wenn der Reglerausgang in der Ruhelage $\bar{u}_k(v_k) = [\bar{u}_{k1}(v_k), \dots, \bar{u}_{km}(v_k)]^T$ und die Abbildung der Zentrumsmannigfaltigkeit $\chi_k(v_k)$ gemeinsam Theorem 5.4 erfüllen. Die Stellsignaldifferenz der beiden Teilregler $p_{k_1j}(x, v_{k_1})$ und $p_{k_2j}(x, v_{k_2})$ ergibt sich dann zu:

$$a_{k_1k_2}^j(x, v_{k_1}, v_{k_2}) = \bar{u}_{k_1j}(v_{k_1}) - \bar{u}_{k_2j}(v_{k_2}) + [G_{k_1j}(v_{k_1}) \quad G_{k_2j}(v_{k_2})] \begin{bmatrix} x - \chi_{k_1}(v_{k_1}) \\ \chi_{k_2}(v_{k_2}) - x \end{bmatrix}. \quad (5.70)$$

Diese Gleichung ist linear in x . Ein Nullsetzen und Umformen der Stellsignaldifferenz führt zu $0 = a_0(v_{k_1}, v_{k_2}) + a_1(v_{k_1}, v_{k_2})x_1 + \dots + a_n(v_{k_1}, v_{k_2})x_n$, wobei die Koeffizienten nur vom Exozustand abhängen. Die Nullstellenmenge in X ist damit eine Hyperebene, wenn mindestens einer der Koeffizienten $\forall t > t_0$ ungleich Null ist.

Bevor der Algorithmus für den Entwurf einer MIN/MAX-Ablöseregelung angegeben wird, erfolgt die Zusammenfassung der notwendigen Voraussetzungen. Neben den bereits formulierten Annahmen 5.3 bis 5.6 enthält die Aufzählung die in den Definitionen 5.19 und 5.20 genannten Voraussetzungen.

- (i) Alle $\mathcal{A}_{k_1k_2}^j$, $k_1, k_2 \in \Omega$, $k_1 \neq k_2$, $j = 1, \dots, m$ mit $\mathcal{A}_{k_1k_2}^j \neq \emptyset$ sowie alle \mathcal{E}_k^j , $k = 2, \dots, K$, $j = 1, \dots, m$ mit $\mathcal{E}_k^j \neq \emptyset$ sind einfach gemäß den Definitionen 5.17 und 5.18.
- (ii) Für das nutzbare Gebiet gilt $\mathcal{G} \neq \emptyset$.
- (iii) Die Aufgabe der Folgeregelung gemäß Algorithmus 5.1 ist $\forall k \in \Omega$ definierten Regelabweichungen lösbar.
- (iv) Für den Systemzustand nach einer Umschaltung gilt $(\tilde{x}(t_a^+), \tilde{v}(t_a^+)) \in \tilde{X}_a \times \tilde{V}_a \quad \forall a \in \Theta$ mit den genügend kleinen Umgebungen $\tilde{X}_a \times \tilde{V}_a$ um $(\tilde{x}, \tilde{v}) = (0, 0)$.
- (v) Die Ruhelage von System (5.52) lässt sich immer durch genau eine Abbildung der Zentrumsmannigfaltigkeiten $\chi_1(v_1), \dots, \chi_K(v_K)$ beschreiben.

Bemerkung. Punkt (i) gewährleistet den Wechsel der Regler bei jeder Ablösung $p_{k_1 j} \rightsquigarrow p_{k_2 j}$ ($k_1 \neq k_2$). Auf diese Weise muss bei Durchschreiten jeder Schaltfläche ein Wechsel der Ruhelage auftreten. Durch Punkt (ii) wird sichergestellt, dass alle Teilregler der Hauptregelung gleichzeitig den Stellzugriff im erlaubten Gebiet erhalten können. Diese Voraussetzungen dienen der Plausibilität des Regelungsentwurfs. Aus praktischer Sicht macht es keinen Sinn, eine MIN/MAX-Ablöseregelung zu entwerfen, bei der die Hauptregelung nie zum Einsatz kommt oder bei der ausschließlich Begrenzungsregler aktiv sein können. Die Punkte (i) und (ii) sind in der Praxis meist erfüllt. Den erfolgreichen Regelungsentwurf jedes Einzelreglers, inklusive der asymptotischen Stabilität in einer Umgebung um die Ruhelage, stellt Punkt (iii) sicher. Punkt (iv) gewährleistet, dass jede Ablösung $p_{k_1 j} \rightsquigarrow p_{k_2 j}$ ($k_1 \neq k_2$) nahe genug an der neuen Ruhelage auftritt. Damit liegt der Systemzustand nach jeder Umschaltung in der Umgebung um die Ruhelage, für die der aktive Regler asymptotische Stabilität sicherstellt. Diese Voraussetzung ist auch bei der praktischen Anwendung von großer Bedeutung. Die Aktivierung eines Reglers in großer Entfernung zur neuen Ruhelage verursacht oft starke Aktorbewegungen und kann unter Umständen sogar zur Instabilität des Regelkreises führen. Punkt (iii) und (iv) sind für den hier vorgestellten Regelungsentwurf eine notwendige Voraussetzung für die Stabilität der MIN/MAX-Ablöseregelung. Punkt (v) ist ausschließlich für MIMO-Systeme relevant und sichert die Anwendbarkeit von Lemma 5.1 in der Stabilitätsanalyse des MIMO-Systems. \triangle

Die Aufgaben einer MIN/MAX-Ablöseregelung entsprechend den Entwurfszielen (i)-(iii) aus Abschnitt 5.3.1 können nun durch folgenden Algorithmus erfüllt werden:

Algorithmus 5.2. MIN/MAX-Ablöseregelung für minimalphasige MIMO-Systeme bei gleicher Anzahl von Ein- und Ausgängen.

- (i) Trajektorienplanung gemäß Abschnitt 5.3.3 und Überprüfung der Annahmen (i) und (ii).
- (ii) Entwurf der Einzelregler $\forall k \in \Omega$ mittels Algorithmus 5.1 und damit Sicherstellung von Annahme (iii).
- (iii) Gegebenenfalls Optimierung der Einzelregler durch weitere Verfahren zur Sicherstellung von Annahme (iv) und (v).

Die Lösung ergibt sich aus der Abbildung $\chi_k(v_k(t)) \forall k \in \Omega$ und dem Stelleingang in der Ruhelage $\bar{u}_k(t) = p_k(\chi_k(v_k), v_k) \forall k \in \Omega$.

Mögliche Ziele einer Optimierung umfassen die Reduzierung überflüssiger Umschaltungen sowie das Erreichen einer geforderten Regelgenauigkeit oder einer geforderten Geschwindigkeit der Nachführung. Ob überflüssige Umschaltungen auftreten, lässt sich durch einen Vergleich der tatsächlichen Schaltsequenz Σ_σ mit der geplanten Schaltsequenz Σ_ζ feststellen. Jede Umschaltung zu den Zeitpunkten t_a ($a \in \Theta$) initialisiert das dynamische System (5.60a) gemäß dem Rückstellgesetz (5.60b) neu. Hieraus ergibt sich die tatsächliche Schaltsequenz Σ_σ , welche die zeitliche Abfolge der Teilregler am Eingang j beschreibt:

$$\Sigma_{\sigma,j} = \{\sigma_j(t_0), \sigma_j(t_1^+), \dots, \sigma_j(t_a^+)\}, \quad a \in \Theta. \quad (5.71)$$

Die gesamte Schaltsequenz ergibt sich aus $\Sigma_\sigma = [\Sigma_{\sigma,1}, \Sigma_{\sigma,2}, \dots, \Sigma_{\sigma,m}]^T$. Die geplante Schaltsequenz für Eingang j :

$$\Sigma_{\zeta,j} = \{\zeta_j(t_0), \zeta_j(t_1^+), \dots, \zeta_j(t_a^+)\}, \quad a \in \Theta \quad (5.72)$$

und damit die gesamte geplante Schaltsequenz $\Sigma_\zeta = [\Sigma_{\zeta,1}, \Sigma_{\zeta,2}, \dots, \Sigma_{\zeta,m}]^T$ kann schrittweise unter der Forderung

$$\|x(t) - \chi_k(v_k(t))\| = 0 \quad (5.73)$$

bestimmt werden. Ausgehend vom Initialzustand des Systems $(x(t_0), v(t_0))$ und Bedingung (5.73) lässt sich die erste geplante Umschaltung berechnen, indem die Stellsignaldifferenz zwischen allen Reglerpaaren $a_{k_1 k_2}^j$ ($k_1, k_2 \in \Omega, k_1 \neq k_2, j = 1, \dots, m$) ermittelt wird. Unter Bedingung (5.73) führt dies für die Stellsignaldifferenz $a_{k_1 k_2}^j$ zu:

$$a_{k_1 k_2}^j(v_{k_1}, v_{k_2}) = \bar{u}_{k_1 j}(v_{k_1}) - \bar{u}_{k_2 j}(v_{k_2}) + G_{k_2 j}(v_{k_2})(\chi_{k_2}(v_{k_2}) - \chi_{k_1}(v_{k_1})). \quad (5.74)$$

Die Nullstellenmenge $\mathcal{B}_{k_1 k_2}^j$ von (5.74) ist eine Teilmenge der Nullstellenmenge $\mathcal{A}_{k_1 k_2}^j$. Wenn $\mathcal{A}_{k_1 k_2}^j$ gemäß Definition 5.17 einfach ist, dann ist $\mathcal{B}_{k_1 k_2}^j$ eine Untermannigfaltigkeit von $V_{k_1} \times V_{k_2}$ mit $\text{kodim}(\mathcal{B}_{k_1 k_2}^j) = 1$ und damit eine Hyperfläche in $V_{k_1} \times V_{k_2}$ sowie invariant in Bezug auf die Zustandsvariablen x . Eine Ablösung $p_{k_1 j} \rightarrow p_{k_2 j}$ ($k_1 \neq k_2$) tritt auf, wenn die Exotrajektorie (v_{k_1}, v_{k_2}) einen Schnittpunkt mit der invarianten Schaltfläche $\mathcal{B}_{k_1 k_2}^j$ aufweist. Ist die Trajektorienplanung abgeschlossen, kann der Schnittpunkt – und damit auch der geplante Zeitpunkt der Umschaltung – vorausberechnet werden. Nach Überführung des Schnittpunkts in die Systemumgebung X mittels der zugehörigen Abbildung $x = \chi_k(v_k)$ kann der Ablösepunkt bereits im Entwurfsprozess angegeben, überprüft und gegebenenfalls korrigiert werden. Die invariante Schaltsequenz Σ_ζ lässt sich schrittweise berechnen, indem nach jeder geplanten Umschaltung die Bedingung (5.73) auf die aktuelle (geplante) Ruhelage $\chi_k(v_k(t))$ angewendet wird. Sind nun die geplante und die tatsächliche Schaltsequenz identisch, finden keine überflüssigen Umschaltungen statt. Forderungen an die Regelgenauigkeit oder an die Geschwindigkeit der Nachführung lassen sich durch Optimierung der Regelverstärkungen $G_{k j}(v_k)$ erreichen. Dabei kann jeder Regler separat optimiert werden, was als Vorteil des modularen Entwurfs einer MIN/MAX-Ablöseregung zu werten ist.

5.4 Verdichterregelung

5.4.1 Vorbemerkungen

Um die Anwendung der beschriebenen MIN/MAX-Ablöseregung zu demonstrieren, wird das Verdichtersystem (4.3) um ein PGV erweitert. Das PGV ermöglicht die schnelle Druckreduzierung im Gasspeicher und kann daher effektiv zur Regelung des PGA genutzt werden. Die Stellung des Prozessventils wird nun als Störgröße aufgefasst. Abbildung 5.6 zeigt das Verdichtersystem als verfahrenstechnisches Fließschema und verdeutlicht die Art und Position der Messungen sowie die genutzten Aktoren.

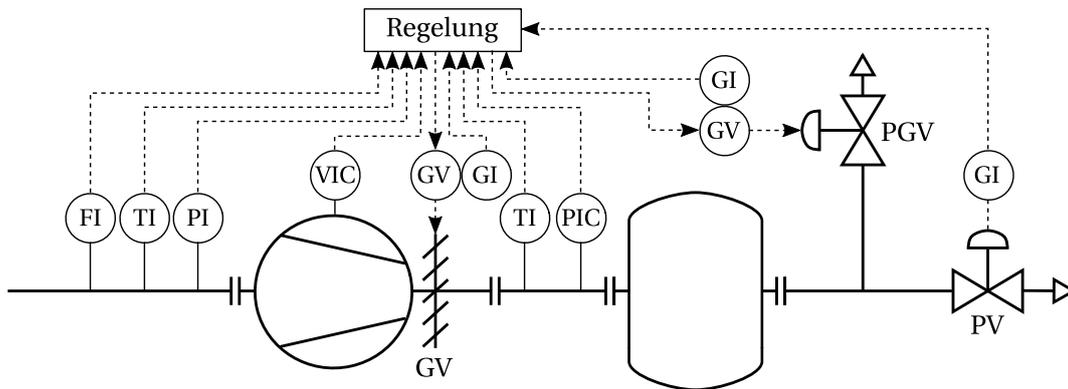


Abbildung 5.6. Verfahrenstechnisches Bild des geregelten Prozesses, inklusive ergänztem PGV.

Der Verdichter verfügt über eine Hauptregelung für Leitgitter und PGV, um die Folgeregelung und Störunterdrückung im stabilen Betriebsbereich sicherzustellen. Dabei beschränkt sich der Betrieb ausschließlich auf stabile Arbeitspunkte des offenen Regelkreises. Gemäß den Aussagen der Bifurkationsanalyse aus Abschnitt 2.1.4 bleibt die Stör-Amplitude in Modell (4.3) bis zum Erreichen der Pumpgrenze vernachlässigbar klein. In diesem Fall kann die entsprechende Modellgleichung vernachlässigt werden. Zusammen mit der Erweiterung um das PGV lautet das Verdichtersmodell (4.3) nun:

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{\tau_L} [Y_V(x_1, x_3) - k_1(x_2^{r_k} - 1)], \quad (5.75a)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{\tau_V} \left[x_1 - (k_{PV}(x_2)Y_{PV}(x_4) + k_{PGV}(x_2)Y_{PGV}(x_5))\sqrt{2k_1(x_2^{r_k} - 1)/r_k} \right], \quad (5.75b)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{\tau_{GV}} [u_1 - x_3], \quad (5.75c)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{\tau_{PV}} [q_D(d) - x_4], \quad (5.75d)$$

$$\dot{x}_5 = \frac{1}{\tau_{PGV}} [u_2 - x_5], \quad (5.75e)$$

wobei Y_{PGV} die lineare Ventilkennlinie des PGV beschreibt und die Stellung des Prozessventils nun als Störgröße mit der Solltrajektorie $q_D: \mathbb{R}^{m_D} \rightarrow \mathbb{R}$ betrachtet wird. Nach der Ergänzung durch die Exosysteme für Führungs- und Störgrößen entspricht das folgende kombinierte

Modell dem bereits in Abschnitt 5.2.4 formulierten Gleichungssystem (5.32):

$$\dot{x} = f(x, d) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2, \quad (5.76a)$$

$$\dot{w} = s_W(w), \quad (5.76b)$$

$$\dot{d} = s_D(d), \quad (5.76c)$$

$$e = h(x) - q_W(w). \quad (5.76d)$$

Abbildung 5.7 zeigt die betrachtete Regelstruktur für den Verdichter V1. In Bezug auf die Regelung sind zwei Gebiete zu unterscheiden. Im Gebiet rechts der Regellinie bleibt das PGV geschlossen und das Modell (5.75) reduziert sich auf ein SISO-System aus den Gleichungen (5.75a-d). Bei Erreichen der Regellinie wird das PGV geöffnet, es handelt sich um ein MIMO-System. Die Regelung verfügt über eine Hauptregelung und zwei Begrenzungsregelungen. Der erste Begrenzungsregler schützt den Verdichter und die druckseitig angeschlossenen Prozesskomponenten vor einem zu hohen Ausgangsdruck. Der zweite Begrenzungsregler gewährleistet die Folgeregelung sowie die Störunterdrückung an der Regellinie und sichert somit das System vor dem Pumpen. Dieser Pumpgrenzregler beruht auf der Anwendung des körperschallbasierten Merkmals aus Kapitel 3 – es handelt sich also um eine körperschallbasierte Pumpgrenzregelung. Ein Überblick über die Regler liefert Tabelle 5.1. Für den SISO-Bereich erfolgt der Regelungsentwurf für die Regler R1 bis R3 und die Maximaldruckbegrenzung R4. Die Regler R1 bis R3 werden hierbei für die Erzeugung einer Sollwerttrampe genutzt; siehe Abschnitt 5.3.3. Für den MIMO-Bereich werden zusätzlich die körperschallbasierten Pumpgrenzregler R5 bis R7 (Sollwerttrampe) und die Maximaldruckbegrenzung R8 entworfen.

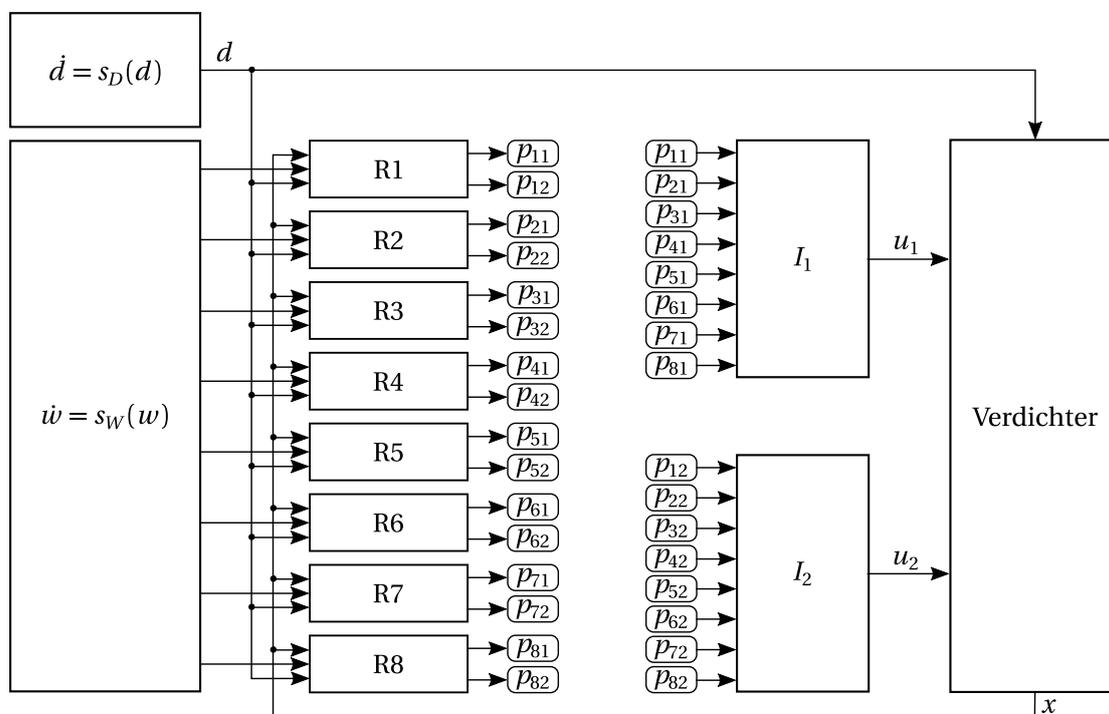


Abbildung 5.7. Struktur der MIN/MAX-Ablöseregung für den untersuchten Verdichter V1.

Trajektorie	Regler für SISO-Gebiet	Zusätzliche Regler für MIMO-Gebiet
Sinus	R1	R5
	Hauptregelung	Körperschallbasierte PG-Regelung
Konstant	R2	R6
	Hauptregelung (unten)	Körperschallbasierte PG-Regelung (unten)
Konstant	R3	R7
	Hauptregelung (oben)	Körperschallbasierte PG-Regelung (oben)
Konstant	R4	R8
	Maximaldruckbegrenzung	Maximaldruckbegrenzung

Tabelle 5.1. Überblick über die Regler für Verdichter V1.

Die Schaltgesetze I_1 und I_2 in Abbildung 5.7 lauten:

$$I_1 = \max(\min(\max(p_{11}, p_{21}), p_{31}, p_{41}), \min(\max(p_{51}, p_{61}), p_{71}, p_{81})), \quad (5.77a)$$

$$I_2 = \max(p_{12}, p_{22}, p_{32}, p_{42}, \min(\max(p_{52}, p_{62}), p_{72}, p_{82})). \quad (5.77b)$$

5.4.2 Entwurf einer MIN/MAX-Ablöseregung für einen Radialverdichter

Gemäß Abbildung 5.7 müssen acht Einzelregler entworfen werden. Die Hauptregelung R1 sowie deren Begrenzungsregler R2 und R3 dienen der Nachführung des gewünschten Ausgangsdrucks durch das Leitgitter. Das PGV ist hierbei vollständig geschlossen, wodurch (5.75) in ein SISO-System übergeht. Bei aktivierter Pumpgrenzregelung gilt in (5.75) jedoch $u_2 \neq 0$ und der Entwurf muss für ein MIMO-System durchgeführt werden. Für den Fall einer aktiven Maximaldruckbegrenzung kann das System sowohl SISO als auch MIMO sein. Um die Funktionsfähigkeit der MIN/MAX-Ablöseregung zu demonstrieren, werden im nächsten Abschnitt drei Simulationsszenarien durchgeführt.

- Szenario 1: Sollwertrampe für das Druckverhältnis ohne Erreichen der Maximaldruckbegrenzung bei konstanter Störung
- Szenario 2: Sollwertrampe für das Druckverhältnis mit Erreichen der Maximaldruckbegrenzung bei zeitveränderlicher Störung
- Szenario 3: Sollwertrampe für das Druckverhältnis mit Erreichen der Regellinie bei zeitveränderlicher Störung

Für diese Szenarien erfolgt nun der Entwurf gemäß Algorithmus 5.2 beginnend mit der Trajektorienplanung für Führungs- und Störgrößen. Für die Führungsgrößen wird entweder ein konstanter oder ein zeitveränderlicher (sinusförmiger) Verlauf benötigt. Beide Verläufe können durch das folgende Exosystem beschrieben werden:

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= 0, \\ \dot{w}_2 &= \alpha_W w_3, \\ \dot{w}_3 &= -\alpha_W w_2, \end{aligned} \quad (5.78)$$

wobei der Parameter α_W die Frequenz der Sinusschwingung bestimmt. Durch $\alpha_W = 0$ kann eine konstante Führungsgröße erzeugt werden. Die Kombination mehrerer Sollwertgeneratoren

Trajektorie	SISO-Gebiet	MIMO-Gebiet	
Sinus	$h_1 = x_2$	$h_1 = x_2$	$h_2 = Y_K(x_1, x_2)$
	$q_{W,1} = w_1 + w_2$	$q_{W,1} = w_1 + w_2$	$q_{W,2} = Y_K(w_1, w_2)$
Konstant (unten)	$h_1 = x_2$	$h_1 = x_2$	$h_2 = Y_K(x_1, x_2)$
	$q_{W,1} = w_4$	$q_{W,1} = w_4$	$q_{W,2} = Y_K(w_4)$
Konstant (oben)	$h_1 = x_2$	$h_1 = x_2$	$h_2 = Y_K(x_1, x_2)$
	$q_{W,1} = w_5$	$q_{W,1} = w_5$	$q_{W,2} = Y_K(w_5)$
Konstant	$h_1 = x_2$	$h_1 = x_2$	$h_2 = Y_K(x_1, x_2)$
	$q_{W,1} = w_6$	$q_{W,1} = w_6$	$q_{W,2} = Y_K(w_6)$

Tabelle 5.2. Definition der Messgleichungen und Sollgrößen für den Reglerentwurf.

kann nach Abschnitt 5.3.3 zur Erzeugung einer Sollwertrampe genutzt werden. Auch für die Störgrößen wird sowohl ein konstanter als auch ein zeitveränderlicher (sinusförmiger) Verlauf benötigt. Äquivalent zu obigem Exosystem gilt also:

$$\begin{aligned}
 \dot{d}_1 &= 0, \\
 \dot{d}_2 &= \alpha_D d_3, \\
 \dot{d}_3 &= -\alpha_D d_2,
 \end{aligned} \tag{5.79}$$

wobei der Parameter α_D wiederum die Frequenz der Sinusschwingung bestimmt. Durch $\alpha_D = 0$ kann eine konstante Störgröße erzeugt werden. Das gesamte Exosystem ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}
 \dot{w}_1 &= 0, \\
 \dot{w}_2 &= \alpha_W w_3, \\
 \dot{w}_3 &= -\alpha_W w_2, \\
 \dot{w}_4 &= 0, \\
 \dot{w}_5 &= 0, \\
 \dot{w}_6 &= 0, \\
 \dot{d}_1 &= 0, \\
 \dot{d}_2 &= \alpha_D d_3, \\
 \dot{d}_3 &= -\alpha_D d_2
 \end{aligned} \tag{5.80}$$

mit $[w_1, w_2, w_3]^T$ als Zustandsgrößen für die Sinustrajektorien der Regler R1 und R5, $[w_4, w_5]^T$ als Zustandsgrößen für die konstanten Trajektorien der Regler R2 und R3 sowie R6 und R7, w_6 als Zustandsgröße für die Maximaldruckbegrenzer R4 und R8 sowie $[d_1, d_2, d_3]^T$ als Zustandsgrößen für die Sinustrajektorie der Störgröße. Tabelle 5.2 zeigt die Messgleichungen und Sollwerte für die Regler des SISO- und MIMO-Gebiets. Die Solltrajektorie der Störgröße ist durch $q_D = d_1 + d_2$ gegeben.

Bevor Algorithmus 5.2 weiter angewendet werden kann, werden der relative Grad und die Nulldynamik des kombinierten Modells (5.76) ermittelt. Die Berechnung zeigt Appendix B. Im SISO-Gebiet besitzt das kombinierte System (5.76) einen relativen Grad $r = 3$. Im MIMO-Gebiet besitzt das kombinierte System (5.76) einen relativen Vektorgrad $r = \{2, 2\}$. Die kombinierte

interne Dynamik lautet damit:

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{\tau_{PV}} [q_d(d) - x_4], \quad (5.81a)$$

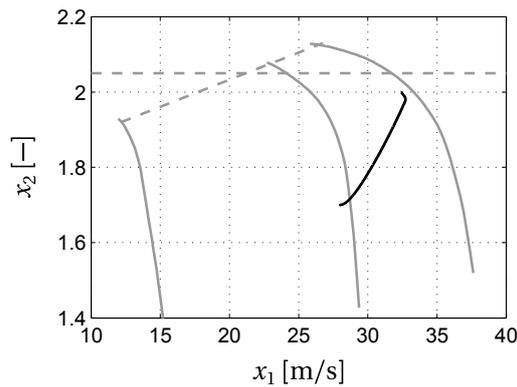
$$\dot{w} = s_W(w), \quad (5.81b)$$

$$\dot{d} = s_D(d), \quad (5.81c)$$

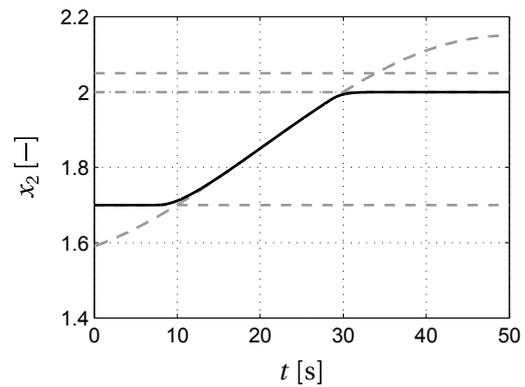
siehe hierzu Gleichung (B.6) aus Appendix B. Daher kann das kombinierte Verdichtersystem (5.76) im SISO-Gebiet durch $x^1 = [x_1, x_2, x_3]^T$ und $x^2 = [x_4]^T$ sowie im MIMO-Gebiet durch $x^1 = [x_1, x_2, x_3, x_5]^T$ und $x^2 = [x_4]^T$ separiert werden. Die interne Dynamik (5.81) hängt nicht von x^1 und den Eingängen u_1 und u_2 ab. Deswegen ist die kombinierte interne Dynamik in diesem Fall auch gleichzeitig die kombinierte Nulldynamik des Systems. Der Entwurf einer inversionsbasierten Folgeregelung ist möglich, wenn das Teilsystem der Nulldynamik (5.81a) linear stabil ist [96]. Gemäß Appendix B ist diese Bedingung sowohl für das SISO- als auch für das MIMO-Gebiet erfüllt. Folglich handelt es sich um ein minimalphasiges System und Algorithmus 5.2 kann weiter angewendet werden. Im zweiten Schritt erfolgt der Entwurf aller Einzelregler nach Algorithmus 5.1 auf Basis einer vollständigen Zustandsrückführung. Die Lösung ist in Appendix C dokumentiert. Für das SISO-Gebiet setzt sich die Lösung aus den Gleichungen (C.3), (C.4), (C.5), (C.8) und (C.10) zusammen. Für das MIMO-Gebiet ist die Lösung den Gleichungen (C.3), (C.10), (C.12), (C.15), (C.16) und (C.17) zu entnehmen. Der dritte Schritt des Algorithmus wird übersprungen. Es findet also keine weitere Optimierung der Regelgesetze statt.

5.4.3 Simulation

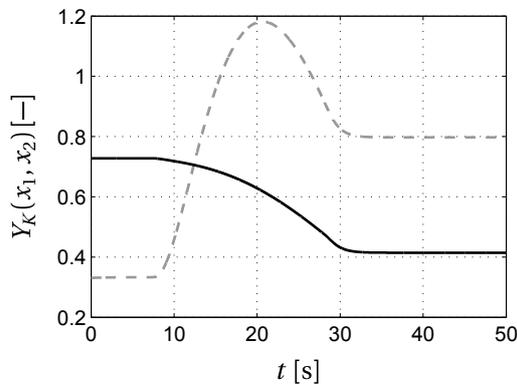
Im ersten Szenario wird das Druckverhältnis durch eine Sollwertrampe von $x_2 = 1,7$ auf $x_2 = 2,0$ verstellt. Die Position des Prozessventils wird konstant gehalten; siehe Abbildung 5.8d. Für die Simulation wurde der Rampengenerator in einer Weise initialisiert, dass die Androsselung bei 10s beginnt und das System innerhalb von 20s auf den oberen Sollwert $x_2 = 2,0$ nachführt. Die Parameter und Initialwerte der Simulation sind in Appendix D festgehalten. Das System wird zunächst auf R2 bei einem Wert von $x_1 = 28$ m/s initialisiert. Nach der Ablösung erhält R1 den Stellzugriff und führt das System über eine Sinustrajektorie auf den Sollwert von R3. Dieser Vorgang ist in Abbildung 5.8a und 5.8b zu sehen. Der Systemzustand im x_1 - x_2 -Kennfeld überschreitet keine der in Abbildung 5.8a eingezeichneten Begrenzungen. Daher erhalten weder die Maximaldruckbegrenzung noch die körperschallbasierte Pumpgrenzregelung den Stellzugriff. Alle Ablösungen zeigt das Schaltsignal in Abbildung 5.8e. Die beiden gezeigten Ablösungen R2 \rightarrow R1 und R1 \rightarrow R3 lassen sich auch in der Abbildung 5.8f nachvollziehen. Das Kennfeld in den Fehlerkoordinaten weist zwei Ablösungen auf, wobei die Kreuze den Zustand unmittelbar nach der Ablösung zeigen. Durch das Rückstellgesetz des Systems in den Fehlerkoordinaten kommt es bei jeder Ablösung zu einer unstetigen Veränderung von \tilde{x} . Die Kreise in \tilde{x} markieren den Systemzustand unmittelbar vor der Ablösung. Es ist zu erkennen, dass jeder Regler den Systemzustand erfolgreich auf die Ruhelage $\tilde{x} = 0$ nachführt. Der Regelungsentwurf ist damit erfolgreich.



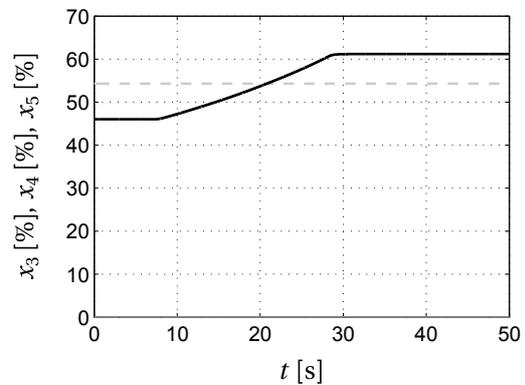
(a) Arbeitspunkt im x_1 - x_2 -Kennfeld (schwarz), Regellinie für Pumpgrenze und Maximaldruckbegrenzung (grau, gestrichelt).



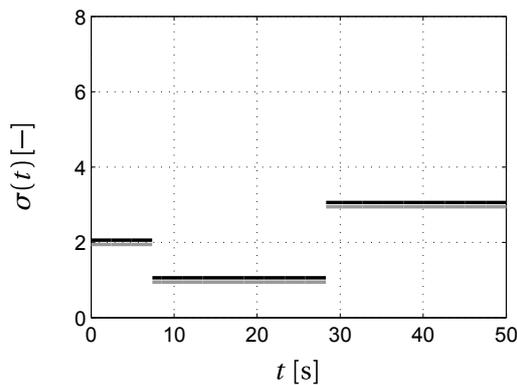
(b) Druckverhältnis (schwarz), Solltrajektorien für Hauptregelung und Maximaldruckbegrenzung (grau).



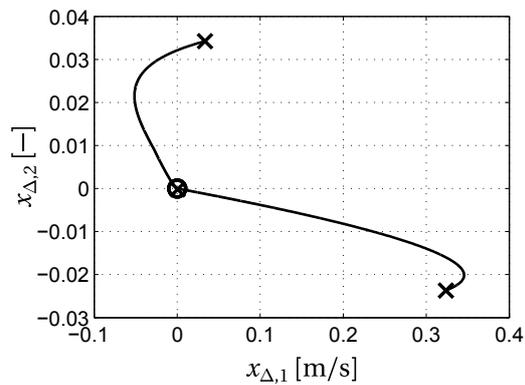
(c) Varianz (schwarz) und Regellinie der körper-schallbasierten Pumpgrenze (grau).



(d) Stellung Leitgitter (schwarz), PG-Regelventil (dunkelgrau) und Prozessventil (hellgrau).



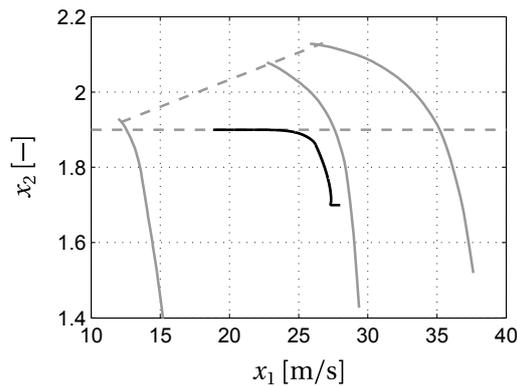
(e) Schaltsignal für das Leitgitter (schwarz) und für das PG-Regelventil (grau).



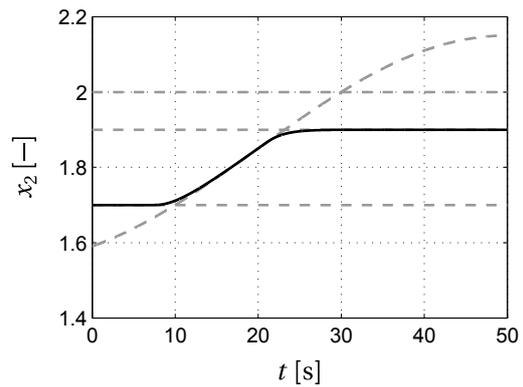
(f) Arbeitspunkt im x_1 - x_2 -Kennfeld in den Fehlerkoordinaten (schwarz).

Abbildung 5.8. Simulationsergebnisse von Szenario 1.

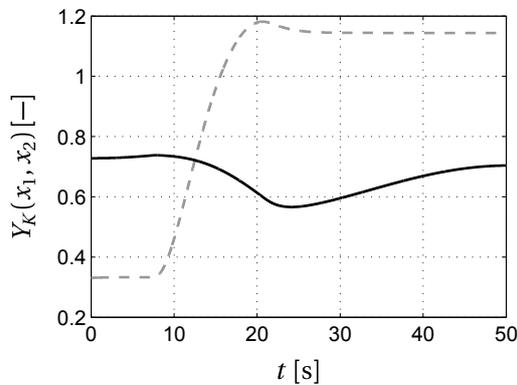
Im zweiten Szenario werden zwei Veränderungen im Vergleich zu Szenario 1 vorgenommen. Zum einen erfolgt eine Reduzierung des erlaubten Maximaldruckverhältnisses. Dadurch wird während der rampenartigen Verstellung des Druckverhältnisses der Maximaldruck erreicht. Zum anderen wird das Exosystem der Störgröße so eingestellt, dass sich die Position des Pro-



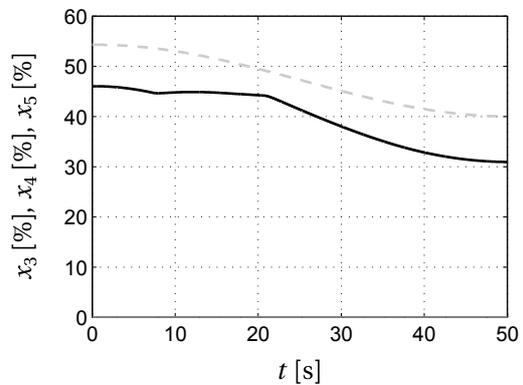
(a) Arbeitspunkt im x_1 - x_2 -Kennfeld (schwarz), Regellinie für Pumpgrenze und Maximaldruckbegrenzung (grau, gestrichelt).



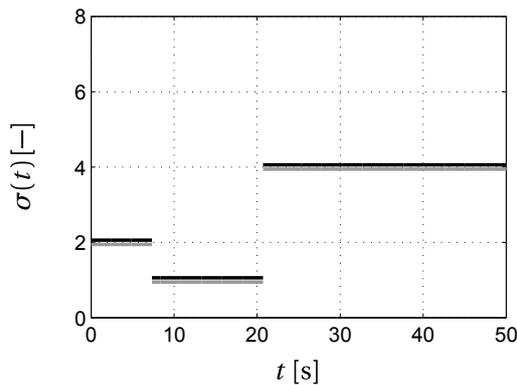
(b) Druckverhältnis (schwarz), Solltrajektorien für Hauptregelung und Maximaldruckbegrenzung (grau).



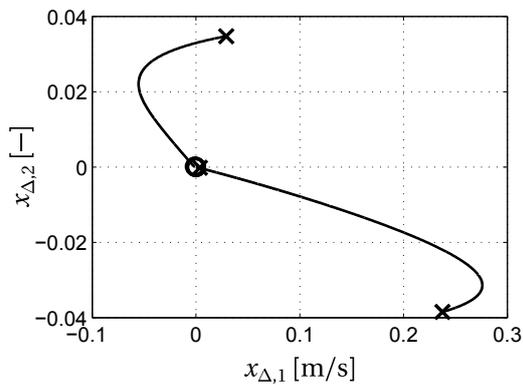
(c) Varianz (schwarz) und Regellinie der körper-schallbasierten Pumpgrenze (grau).



(d) Stellung Leitgitter (schwarz), PG-Regelventil (dunkelgrau) und Prozessventil (hellgrau).



(e) Schaltsignal für das Leitgitter (schwarz) und für das PG-Regelventil (grau).



(f) Arbeitspunkt im x_1 - x_2 -Kennfeld in den Fehlerkoordinaten (schwarz).

Abbildung 5.9. Simulationsergebnisse von Szenario 2.

zessventils in Form einer Sinusschwingung verändert. Das entspricht einer zeitveränderlichen Prozessabnahme; siehe Abbildung 5.9d. Das System wird wieder auf R2 bei einem Wert von $x_1 = 28 \text{ m/s}$ initialisiert. Nach der Ablösung $R2 \rightarrow R1$ erhält R1 den Stellzugriff und führt das System über eine Sinustrajektorie in Richtung des Sollwerts von R3. Das Simulationsergebnis

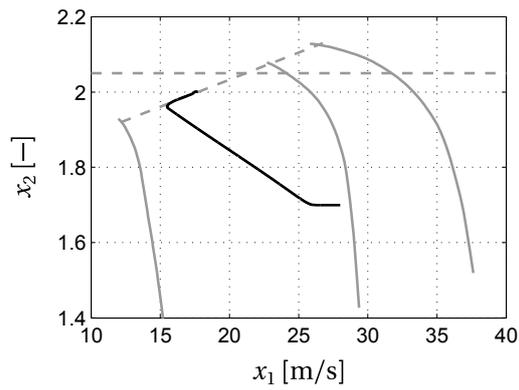
im x_1 - x_2 -Kennfeld zeigt hierbei die erfolgreiche Maximaldruckbegrenzung durch R4, bevor R3 den Stellzugriff erhält. Die Ablösungen zeigt wiederum das Schaltsignal in Abbildung 5.9e. Da die Regellinie in diesem Szenario nicht erreicht wird, erhalten die Regler R5 bis R8 erneut keinen Stellzugriff. Die Ablösungen R2 \rightarrow R1 und R1 \rightarrow R4 zeigt auch Abbildung 5.8f. Wiederum kann aus dem Kennfeld in den Fehlerkoordinaten die erfolgreiche Nachführung bei gleichzeitiger Störunterdrückung geschlussfolgert werden.

Im dritten Szenario wird das erlaubte Maximaldruckverhältnis wieder auf den Wert aus Szenario 1 zurückgesetzt. Diesmal wird das Prozessventil innerhalb von 50 s vom Ausgangswert auf 15 % gesenkt. Aufgrund der starken Drosselung der Prozessabnahme erreicht der Verdichter nun die Regellinie. Das System wird wieder auf R2 bei einem Wert von $x_1 = 28$ m/s initialisiert. Nach der Ablösung R2 \rightarrow R1 erhält R1 den Stellzugriff und führt das System über eine Sinustrajektorie in Richtung des Sollwerts von R3. Bevor die Ablösung auf R3 stattfinden kann, erreicht der Systemzustand die körperschallbasierte Regellinie. Dieser Vorgang ist in den Abbildungen 5.10a und 5.10c zu sehen. Bei Annäherung an die Regellinie erfolgt die Ablösung R1 \rightarrow R5 und damit eine Angleichung des körperschallbasierten Merkmals an den Sollwert $Y_K(w_5)$. Dieser Zustand korrespondiert mit dem Betrieb des Verdichters auf der Regellinie in Abbildung 5.10a. Der körperschallbasierte Pumpgrenzregler R5 führt das System weiterhin auf der Sinustrajektorie in Richtung des oberen Sollwertes der Rampe. Schließlich erfolgt eine weitere Ablösung: R5 \rightarrow R7. Der körperschallbasierte Pumpgrenzregler R7 führt das System auf das gewünschte Druckverhältnis von $x_2 = 2,0$ nach. Das Pumpen wird also erfolgreich durch das Öffnen des PGV verhindert. Die Ventilöffnung zeigt Abbildung 5.10d; das PGV öffnet gegen Ende des Szenarios bis auf einen Wert von $x_5 = 23,74$ %. Abbildung 5.10f zeigt den Arbeitspunkt des Verdichters im x_1 - x_2 -Kennfeld in den Fehlerkoordinaten. In dieser Abbildung sind die drei Ablösungen zu sehen. Nach jeder Ablösung wird der Systemzustand erfolgreich auf die Ruhelage $\tilde{x} = 0$ nachgeführt.

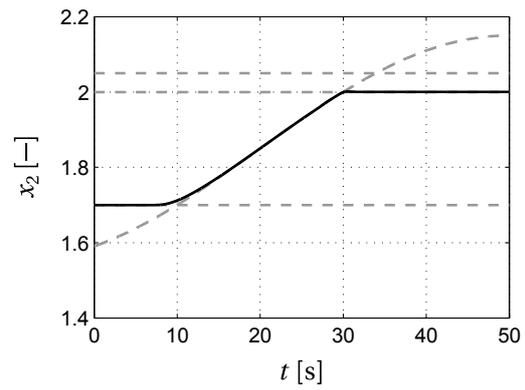
Der hier demonstrierte Entwurfsprozess einer MIN/MAX-Ablöseregelung lässt Rückschlüsse auf das industrielle Umfeld zu. Typischerweise wird ausschließlich das PGV als Aktor für die Pumpgrenzregelung verwendet. Die dritte Simulation zeigt, dass die modellbasierte Ablöseregelung ebenfalls das PGV als Aktor für die Pumpgrenzregelung bevorzugt. Das Leitgitter wird von der modellbasierten Ablöseregelung vor allem für den Arbeitspunktwechsel bei einer Veränderung der Führungsgröße eingesetzt. Weiterhin zeigt die Stabilitätsanalyse folgende drei maßgebliche Herausforderungen beim Regelungsentwurf:

- (i) Die Ablösung der Regler erfolgt ausreichend langsam.
- (ii) Der Ablösezustand befindet sich ausreichend nah an der neuen Ruhelage.
- (iii) Die Einzelregler gewährleisten die asymptotische Stabilität um die jeweilige Ruhelage.

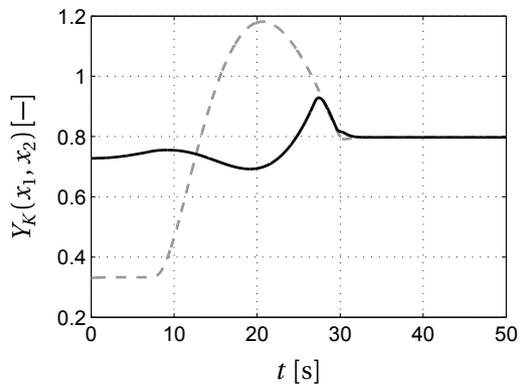
Diese Herausforderungen bestehen auch im industriellen Umfeld und entscheiden über die Leistungsfähigkeit einer projektspezifischen Ablöseregelung. Das Verletzen der Forderungen kann zu einem instabilen Regelkreis führen. Prinzipiell lässt sich der Entwurf der Einzelregler auch durch andere Verfahren erreichen. Die gewählte Methode der inversionsbasierten Folgeregelung ist dabei nur ein möglicher Ansatz. Im Sinne einer notwendigen Bedingung für die praktische Stabilität des geschlossenen Regelkreises muss der gewählte Entwurfsprozess allerdings die asymptotische Stabilität jedes Einzelreglers um die gewünschte Ruhelage sicherstellen.



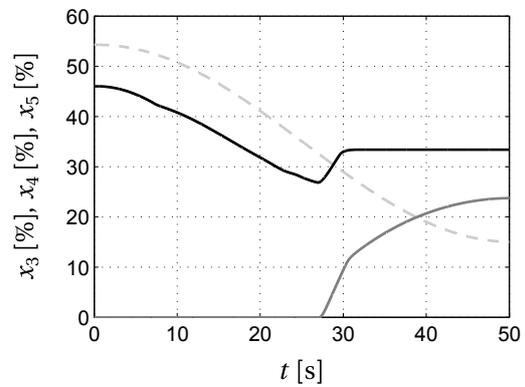
(a) Arbeitspunkt im x_1 - x_2 -Kennfeld (schwarz), Regellinie für Pumpgrenze und Maximaldruckbegrenzung (grau, gestrichelt).



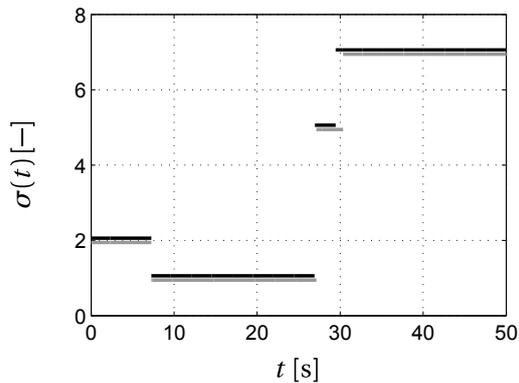
(b) Druckverhältnis (schwarz), Solltrajektorien für Hauptregelung und Maximaldruckbegrenzung (grau).



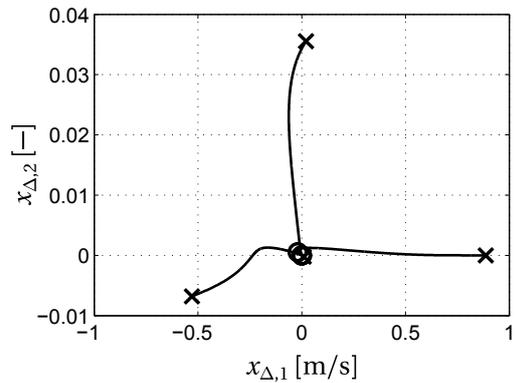
(c) Varianz (schwarz) und Regellinie der körper-schallbasierten Pumpgrenze (grau).



(d) Stellung Leitgitter (schwarz), PG-Regelventil (dunkelgrau) und Prozessventil (hellgrau).



(e) Schaltsignal für das Leitgitter (schwarz) und für das PG-Regelventil (grau).



(f) Arbeitspunkt im x_1 - x_2 -Kennfeld in den Fehlerkoordinaten (schwarz).

Abbildung 5.10. Simulationsergebnisse von Szenario 3.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Zum einen wurde in dieser Arbeit eine modellbasierte MIN/MAX-Ablöseregulung für Radialverdichter entwickelt. Hierzu erfolgte die Modellbildung eines industriellen Radialverdichtersystems. Das resultierende Zustandsraummodell wurde an zwei einstufigen Radialverdichtern experimentell validiert und belegt dessen Fähigkeit zur Beschreibung der Statik und Dynamik des realen Systems sowie der realen Pumpgrenzlage. Unter Anwendung des Verdichtermodells erfolgte der modulare Entwurf der MIN/MAX-Ablöseregulung. In drei Simulationen konnte dessen Fähigkeit zur Folgeregelung des Verdichters unter Berücksichtigung von Betriebsgrenzen gezeigt werden. Die Regelung unterdrückt darüber hinaus Störungen durch das Prozessventil. Zum anderen wurde in dieser Arbeit ein Algorithmus zur Erkennung des aerodynamischen Verdichterszustandes durch Auswertung des Körperschalls präsentiert. Es konnte gezeigt werden, dass das entwickelte körperschallbasierte Merkmal eine nachvollziehbare Veränderung bei der Reduzierung des Pumpgrenzabstandes aufweist. Bei den drei experimentell untersuchten Radialverdichtern konnte der gefundene Zusammenhang zwischen Verdichterszustand und erzeugtem Körperschall beobachtet werden. Das entwickelte Entfaltungsfiter verbesserte die algorithmische Erkennung erheblich. Hierdurch lies sich das Merkmal als Messgröße einer körperschallbasierten Pumpgrenzregelung nutzen.

In Bezug auf das fluiddynamische Verdichtermodell ergeben sich mehrere Ansatzpunkte für die weitere Forschung. Der größte Nachteil des Modells besteht in der Annahme eines Stauzustands zwischen Verdichter und Prozess. Dies ist eine prinzipielle Einschränkung des Modellansatzes nach GREITZER sowie nach MOORE und GREITZER. Insbesondere im industriellen Umfeld können diese Modelle daher nur begrenzt zur Vorhersage des instabilen Systemverhaltens genutzt werden. Durch eine Parameteroptimierung lässt sich jedoch ein gemessenes instabiles Systemverhalten gut abbilden. Tiefe Pumpstöße können dabei besser beschrieben werden als schwache Pumpstöße. Zur Verbesserung der Simulationsergebnisse kann die Annahme des druckseitigen Stauzustands abgemildert werden. Einen Ausgangspunkt für diese Erweiterung stellt die Arbeit von HELVOIRT und DE JAGER dar [89], die zwischen Verdichter und druckseitigem Gasbehälter eine Rohrleitung unter Beachtung dessen akustischer Impedanz hinzufügten. Ein weiterer Aspekt bezieht sich auf die kompressible Modellbildung des Verdichters. Dieser Ansatz führte in der vorliegenden Arbeit zu einer Variation der effektiv durchströmten Länge des Verdichters in Abhängigkeit des Druckverhältnisses. Die untersuchten Radialverdichter wiesen jedoch einen zu kleinen Bereich des Druckverhältnisses auf, um den Effekt in den Messdaten beobachten zu können. Folglich besteht ein weiterer Forschungsaspekt in der Anwendung des Modells auf einen Hochdruckverdichter oder einen mehrstufigen Verdichter. Die Anwendung auf mehrstufige Radialverdichter stellt dabei noch weitere Anforderungen an die Modellbildung und erfordert grundsätzlich weitere messtechnische Untersuchungen. Beispielsweise sind aus der Forschung keine Untersuchungen an mehrstufigen Radialverdichtern mit hohen Druckverhältnissen bekannt. Dieser Umstand lässt sich auf die fehlende Möglich-

keit zur Durchführung von Messungen zurückführen. Derartige Verdichtersysteme stehen der Forschung nicht zur Verfügung. Ein letzter Aspekt bezieht sich auf das empirische Modell der Initialstörungen, das in dieser Arbeit zur Abbildung der realen Pumpgrenzlage verwendet wird. Die Eignung dieses Ansatz sollte auch für andere Verdichtersysteme untersucht werden.

Weitergehende Fragestellungen bestehen in Bezug auf das körperschallbasierte Merkmal zur Erkennung des aerodynamischen Verdichterzustandes. In dieser Arbeit wurde beispielsweise die Veränderung des Varianzkennfeldes mit der Betriebsdauer und dem Alter des Verdichters nicht untersucht. Gleiches gilt für mehrstufige Radialverdichter. Darüber hinaus sollte der postulierte Zusammenhang zwischen breitbandig abstrahlenden Strömungsformen und dem breitbandigen Anteil des Körperschalls messtechnisch genauer untersucht werden. Dazu ist ein Vergleich invasiv gewonnener Druckdaten aus dem Ansaug-, Rotor- und Diffusorbereich des Verdichters mit dem entwickelten körperschallbasierten Merkmal erforderlich. Weitere Forschungsaspekte ergeben sich hinsichtlich der Anwendung des Merkmals für eine körperschallbasierte Pumpgrenzregelung im industriellen Umfeld. Als nachteilig sind die im experimentellen Teil dieser Arbeit beobachteten Schwankungen des Merkmals zu bezeichnen. Ein gleitender Mittelwertfilter kann zwar den Trend herausheben. Eine starke Glättung kann jedoch nur durch lange Filterzeiten erreicht werden. Dies erzeugt wiederum eine steigende Latenzzeit bei der Erkennung des aerodynamischen Zustands. Ohne weitere Maßnahmen ist die Varianz der breitbandigen Gehäuseanregung folglich noch nicht für eine Regelung im industriellen Umfeld geeignet. Darüber hinaus wurde hierbei das stationäre Varianzkennfeld verwendet. Die experimentellen Untersuchungen offenbaren jedoch Dynamiken, die im Sinne einer körperschallbasierten Pumpgrenzregelung berücksichtigt werden sollten.

Für die entwickelte Methode der Mehrgrößenregelung eines Verdichtersystems durch eine nichtlineare und modellbasierte MIN/MAX-Ablöseregung ergeben sich weiterführende Fragestellungen insbesondere in Bezug auf den gewählten Ansatz einer „perfekten Folgeregelung“ und die Robustheit gegenüber Modell- und Parameterunsicherheiten. Der Begriff der „perfekten Folgeregelung“ bezieht sich auf die Eigenschaft der Regelung, in der Ruhelage alle definierten Begrenzungen sowie die Trajektorienfolge der Hauptregelung sicherzustellen. In bestimmten Fällen ist es jedoch zweckmäßig, eine oder mehrere bleibende Regelabweichungen zu tolerieren. In diesem Fall können Zustände auftreten, zu denen zwei oder mehr unterschiedliche Regler den Stellzugriff am MIMO-System erhalten. Die aktiven Teilregler erzeugen dann keine ausgangsnulldende Mannigfaltigkeit gemäß Annahme 5.2. Ein Forschungsaspekt bezieht sich damit auf die Verallgemeinerung des vorgestellten Ansatzes im Sinne einer teilweisen Folgeregelung. Hierbei kann eine Priorisierung der Regelabweichungen abhängig vom Systemzustand erfolgen, bei der Begrenzungsregler höher priorisiert werden als die Hauptregelung. Damit lässt sich die Ruhelage für MIMO-Systeme jedoch nicht durch die Abbildungen der Zentrumsmanigfaltigkeiten beschreiben. Die asymptotische Stabilität der aktiven Teilregler muss dann explizit untersucht werden. In der vorliegenden Arbeit werden darüber hinaus Aspekte der Robustheit nicht untersucht. Generell existieren für nichtlineare MIN/MAX-Ablöseregungen noch keine derartigen Analysen. Weiterführende Fragestellungen umfassen die Rückführung einer Messung (statt vollständiger Zustandsrückführung) und die Störgrößenvorhersage im industriellen Umfeld.

Literaturverzeichnis

- [1] ACHENBACH, J. D. ; LAUWERIER, H. A. (Hrsg.) ; KOITER, W. T. (Hrsg.): *North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics*. Bd. 16: *Wave propagation in Elastic Solids*. 1. Aufl. Amsterdam/London: North-Holland Publishing Company, 1973. – ISBN 0720423678
- [2] AHMED, H. ; LAAOUAD, F. ; GUEMANA, M. : A New Engineering Method for Fuzzy Reliability Analysis of Surge Control in Centrifugal Compressor. In: *American Journal of Engineering and Applied Sciences* 2 (2009), Nr. 4, S. 676–682
- [3] ALLGÖWER, F. ; GILLES, E. D.: Nichtlinearer Reglerentwurf auf der Grundlage exakter Linearisierungstechniken. In: AUTOMATISIERUNGSTECHNIK, V.-G. M. (Hrsg.): *Nichtlineare Regelung: Methoden, Werkzeuge, Anwendungen*. Düsseldorf: VDI Verlag, 1993 (1026)
- [4] ARNULFI, G. L. ; BLANCHINI, F. ; GIANNATTASIO, P. ; MICHELI, D. ; PINAMONTI, P. : Extensive Study on the Control of Centrifugal Compressor Surge. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part A: Journal of Power and Energy* 220 (2006), Nr. 3, S. 289–304
- [5] ARNULFI, G. L. ; GIANNATTASIO, P. ; MICHELI, D. ; PINAMONTI, P. : An Innovative Device for Passive Control of Surge in Industrial Compression Systems. In: *Journal of Turbomachinery* 123 (2000), Nr. 3, S. 473–482
- [6] BADMUS, O. O. ; CHOWDHURY, S. ; EVEKER, K. M. ; NETT, C. N.: Control-Oriented High-Frequency Turbomachinery Modeling: Single-Stage Compression System One-Dimensional Model. In: *Journal of Turbomachinery* 117 (1995), Nr. 1, S. 47–61
- [7] BADMUS, O. O. ; CHOWDHURY, S. ; NETT, C. N.: Nonlinear Control of Surge in Axial Compression Systems. In: *Automatica* 32 (1996), Nr. 1, S. 59–70
- [8] BANASZUK, A. ; HAUSSON, H. A. ; MEZIC, I. : A Backstepping Controller for a Nonlinear Partial Differential Equation Model of Compression System Instabilities. In: *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)* Bd. 2, 1997, S. 1050–1055
- [9] BANASZUK, A. ; HAUSSON, H. A. ; MEZIC, I. : Control of Stall and Surge in Compressors Based on Moore-Greitzer PDE Model. In: *Proceedings of the 1997 IEEE Conference on Control Applications (CCA)*, 1997, S. 677–682
- [10] BARTOLINI, G. ; MUNTONI, A. ; PISANO, A. ; USAI, E. : Compressor Surge Suppression by Second-Order Sliding Mode Control Technique. In: *Proceedings of the 17th IFAC World Congress, 2008* (IFAC Proceedings Volumes Bd. 41 Nr. 2), S. 6238–6244
- [11] BEN, N. ; JUN, Z. : Tracking Control for Output-Constrained Nonlinear Switched Systems with a Barrier Lyapunov Function. In: *International Journal of Systems Science* 44 (2013), Nr. 5, S. 978–985
- [12] BENTALEB, T. ; CACITTI, A. ; FRANCISCIS, S. de ; GARULLI, A. : Multivariable Control for Regulating High Pressure Centrifugal Compressor with Variable Speed and IGV. In:

- Proceedings of the 2014 IEEE Conference on Control Applications (CCA)*, 2014, S. 486–491
- [13] BHATIA, N. P.; SZEGÖ, G. P.: *Stability Theory of Dynamical Systems*. 1. Aufl., repr. 2002. Berlin/Heidelberg/New York u.a.: Springer Verlag, 1970 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften (161)). – ISBN 3540427481
- [14] BLANCHINI, F.; GIANNATTASIO, P.; MICHELI, D.; PINAMONTI, P.: Experimental Evaluation of a High-Gain Control for Compressor Surge Suppression. In: *Journal of Turbomachinery* 124 (2002), Nr. 1, S. 27–35
- [15] BLANCHINI, P. F. und G. F. und Giannattasio: Adaptive Control of Compressor Surge Instability. In: *Automatica* 38 (2002), Nr. 8, S. 1373–1380
- [16] Schutzrecht DE 19541192: Verfahren zum Schutz eines Turbokompressors vor Betrieb im instabilen Arbeitsbereich mittels einer Abblaseeinrichtung (Anmeldung: 04.11.1995, Veröffentlichung: 04.02.1999). BLOTENBERG, W. (Erfinder); GHH Borsig Turbomaschinen GmbH (Anmelder).
- [17] Schutzrecht DE 10304063: Verfahren zum sicheren Betreiben von Turbokompressoren mit einer Pumpgrenzregelung und einem Pumpgrenzregelventil (Anmeldung: 31.01.2003, Veröffentlichung: 12.08.2004). BLOTENBERG, W. (Erfinder); MAN Turbomaschinen AG (Anmelder).
- [18] Schutzrecht DE 3540087: Verfahren zum Regeln von Turbokompressoren (Anmeldung: 12.11.1985, Veröffentlichung: 14.05.1987). BLOTENBERG, W. (Erfinder); MAN Gutehoffnungshütte GmbH (Anmelder).
- [19] Schutzrecht DE 19528253: Verfahren und Vorrichtung zur Vermeidung von Reglerinstabilitäten bei Pumpgrenzregelungen beim Betrieb von Strömungsmaschinen mit Reglern hoher Proportionalverstärkung (Anmeldung: 01.08.1995, Veröffentlichung: 16.10.1997). BLOTENBERG, W. (Erfinder); MAN Gutehoffnungshütte GmbH (Anmelder).
- [20] Schutzrecht DE 3544822: Verfahren zur Pumpgrenzregelung von Turbokompressoren (Anmeldung: 18.12.1985, Veröffentlichung: 19.06.1987). BLOTENBERG, W. (Erfinder); MAN Gutehoffnungshütte GmbH (Anmelder).
- [21] BOHL, W.; ELMENDORF, W.: *Strömungsmaschinen 1: Aufbau und Wirkungsweise*. 9. veränd. Aufl. Würzburg: Vogel Business Media, 2004 (Kamprath-Reihe). – ISBN 380231980X
- [22] BOINOV, K. O.; LOMONOVA, E. A.; VANDENPUT, A. J. A.; TYAGUNOV, A.: Surge Control of the Electrically Driven Centrifugal Compressor. In: *IEEE Transactions on Industry Applications* 42 (2006), Nr. 6, S. 2887–2894
- [23] BOTROS, K. K.: Transient Phenomena in Compressor Stations During Surge. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 116 (1994), Nr. 1, S. 133–142
- [24] BRANICKY, M. S.: Multiple Lyapunov Functions and Other Analysis Tools for Switched and Hybrid Systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 43 (1998), Nr. 4, S. 475–482
- [25] BRETTHORST, G. L.; BERGER, J. (Hrsg.); FIENBERG, S. (Hrsg.); GANI, J. (Hrsg.); KRICKEBERT, K. (Hrsg.); SINGER, B. (Hrsg.): *Bayesian Spectrum Analysis and Parameter Estimation*. 1. Aufl. Berlin/Heidelberg/New York: Springer Verlag, 1988 (Lecture Notes in Statistics

- (48)). – ISBN 3540968717
- [26] BRIGHT, M. M. ; QAMMAR, H. K. ; WEIGL, H. J. ; PADUANO, J. D.: Stall Precursor Identification in High-Speed Compressor Stages using Chaotic Time Series Analysis Methods. In: *Journal of Turbomachinery* 119 (1997), Nr. 3, S. 491–500
- [27] BRIGHT, M. M. ; QAMMER, H. K. ; WANG, L. : Investigation of Pre-Stall Mode and Pip Inception in High-Speed Compressors through the Use of Correlation Integral. In: *Journal of Turbomachinery* 121 (1999), Nr. 4, S. 743–750
- [28] BUDINIS, S. ; THORNHILL, N. E: Control of Centrifugal Compressors via Model Predictive Control for Enhanced Oil Recovery Applications. In: *IFAC-PapersOnLine* 48 (2015), Nr. 6, S. 9–14
- [29] BUZZARD, W. S.: Centrifugal Compressor Anti-Surge and Recycle Control. In: *Proceedings of the 28th Annual Instrumentation Society of America Conference*, 1973
- [30] CAMERON, J. D. ; MORRIS, S. C.: Spatial Correlation Based Stall Inception Analysis. In: *Proceedings of the 2007 ASME Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air* Bd. 6, 2007, S. 433–444
- [31] CAMP, T. R. ; DAY, I. J.: A Study of Spike and Modal Stall Phenomena in a Low-Speed Axial Compressor. In: *Journal of Turbomachinery* 120 (1998), Nr. 3, S. 393–401
- [32] CORTINOVIS, A. ; PARESCHI, D. ; MARCANGOEZ, M. ; BESSELMANN, T. : Model Predictive Anti-Surge Control of Centrifugal Compressors with Variable-Speed Drives. In: *Proceedings of the 2012 IFAC Workshop on Automatic Control in Offshore Oil and Gas Production (OOGP)*, 2012, S. 251–256
- [33] COURTIADÉ, N. ; OTTAVY, X. : Experimental Study of Surge Precursors in a High-Speed Multistage Compressor. In: *Journal of Turbomachinery* 135 (2013), Nr. 6, S. 061018–9
- [34] CREMER, L. ; HECKL, M. : *Körperschall - Physikalische Grundlagen und technische Anwendungen*. Berlin/Heidelberg: Springer Verlag, 1996. – ISBN 3540546316
- [35] CUMPSTY, N. A.: *Compressor Aerodynamics*. 2. überarb. Aufl. location: Krieger Publishing Company, 2004. – ISBN 1575242478
- [36] DAAFOUZ, J. ; RIEDINGER, P. ; IUNG, C. : Stability Analysis and Control Synthesis for Switched Systems: A Switched Lyapunov Function Approach. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 47 (2002), Nr. 11, S. 1883–1887
- [37] DAY, I. J.: Active Suppression of Rotating Stall and Surge in Axial Compressors. In: *Journal of Turbomachinery* 115 (1993), Nr. 1, S. 40–47
- [38] DAY, I. J.: Stall Inception in Axial Flow Compressors. In: *Journal of Turbomachinery* 115 (1993), Nr. 1, S. 1–9
- [39] DIETEL, F. ; SCHULZE, R. ; RICHTER, H. ; JÄKEL, J. : Fault Detection in Rotating Machinery Using Spectral Modeling. In: *Proceedings of the 9th France-Japan and 7th Europe-Asia Congress on Research and Education in Mechatronics (REM)*, 2012, S. 353–357
- [40] Schutzrecht WO 2006029816: Verfahren und Vorrichtung zum Ermitteln eines Fehlerzustandes eines rotierenden Verdichters (Anmeldung: 13.09.2005, Veröffentlichung: 23.03.2006). EICHHORN, R. ; GOTTMANN, A. ; SCHÖNE, W. (Erfinder); Avicomp Controls

- GmbH (Anmelder).
- [41] EL-FARRA, N. H. ; MHASKAR, P. ; CHRISTOFIDES, P. D.: Output Feedback Control of Switched Nonlinear Systems Using Multiple Lyapunov Functions. In: *Systems & Control Letters* 54 (2005), Nr. 12, S. 1163–1182
- [42] ELDER, R. L. ; GILL, M. E.: A Discussion of the Factors Affecting Surge in Centrifugal Compressors. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 107 (1985), Nr. 2, S. 499–506
- [43] EMMONS, H. W. ; PEARSON, C. E. ; GRANT, H. P.: Compressor Surge and Stall Propagation. In: *Transactions of the ASME* 77 (1955), Nr. 4, S. 455–469
- [44] EPSTEIN, A. H. ; WILLIAMS, J. E. F. ; GREITZER, E. M.: Active Suppression of Compressor Instabilities. In: *Proceedings of the 10th AIAA Aeroacoustics Conference*, 1986
- [45] Schutzrecht EP 1138952: Verfahren zur Früherkennung von aerodynamischen Unbeständigkeiten in einem Turbokompressor (Anmeldung: 01.02.2001, Veröffentlichung: 04.10.2001). ESCURET, J. F. ; LECONTE, T. ; PREVITALI, R. (Erfinder); SNECMA (Anmelder).
- [46] ESSEN, H. A.: *Modelling and Model Based Control of Turbomachinery*, Technische Universität Eindhoven, Dept. of Mechanical Engineering, Diss., 1998
- [47] EVEKER, K. M. ; GYSLING, D. L. ; NETT, C. N. ; SHARMA, O. P.: Integrated Control of Rotating Stall and Surge in Aeroengines. In: *Proceedings of the 1995 SPIE Conference on Sensing, Actuation and Control in Aeropulsion* Bd. 2494, 1995, S. 21–35
- [48] EVERITT, J. N. ; SPAKOVSKY, Z. S.: An Investigation of Stall Inception in Centrifugal Compressor Vaned Diffusers. In: *Journal of Turbomachinery* 135 (2013), Nr. 1, S. 011025–10
- [49] FEHSE, K. R. ; NEISE, W. : Generation Mechanisms of Low-Frequency Centrifugal Fan Noise. In: *AIAA Journal* 37 (1999), Nr. 10, S. 1173–1179
- [50] FEHSE, K. R. ; NEISE, W. : Low Frequency Sound Generated by Flow Separation in a Conical Diffuser. In: *European Journal of Mechanics - B/Fluids* 19 (2000), Nr. 5, S. 637–652
- [51] FERZIGER, J. H. ; PERIC, M. : *Computational Methodes for Fluid Dynamics*. 3. Aufl. Berlin/Heidelberg: Springer Verlag, 2002. – ISBN 3540420746
- [52] FINK, D. A. ; CUMPSTY, N. A. ; GREITZER, E. M.: Surge Dynamics in a Free-Spool Centrifugal Compressor System. In: *Journal of Turbomachinery* 114 (1992), Nr. 2, S. 321–331
- [53] FLÜGGE, W. : *Stresses in Shells*. 1. Aufl. Berlin/Heidelberg: Springer Verlag, 1962
- [54] FOSS, A. M.: Criterion to Assess Stability of a 'Lowest Wins' Control Strategy. In: *IEE Proceedings D - Control Theory and Applications* 128 (1981), Nr. 1, S. 1–8
- [55] FUKANO, T. ; KODAMA, Y. ; SENOO, Y. : Noise Generated by Low Pressure Axial Flow Fans: Part I - Modeling of the Turbulent noise. In: *Journal of Sound Vibration* 50 (1977), Nr. 1, S. 63–74
- [56] GARNIER, V. H. ; EPSTEIN, A. H. ; GREITZER, E. M.: Rotating Waves as a Stall Inception Indication in Axial Compressors. In: *Journal of Turbomachinery* 113 (1991), Nr. 2, S. 290–301

- [57] GASCH, R. ; KNOTHE, K. : *Strukturdynamik*. Bd. 1: Diskrete Systeme. 1. Aufl. Berlin/Heidelberg: Springer Verlag, 1987. – ISBN 3540168494
- [58] GASCH, R. ; KNOTHE, K. : *Strukturdynamik*. Bd. 2: Kontinua und ihre Diskretisierung. 1. Aufl. Berlin/Heidelberg: Springer Verlag, 1989. – ISBN 354050771X
- [59] GIARRÉ, L. ; BAUSO, D. ; FALUGI, P. ; BAMIEH, B. : LPV Model Identification for Gain Scheduling Control: An Application to Rotating Stall and Surge Control Problem. In: *Control Engineering Practice* 14 (2006), Nr. 4, S. 351–361
- [60] GLATTFELDER, A. H. ; SCHAUFELBERGER, W. : Stability of Discrete Override and Cascade-Limiter Single-Loop Control Systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 33 (1988), Nr. 6, S. 532–540
- [61] GLATTFELDER, A. H. ; SCHAUFELBERGER, W. ; GRIMBLE, M. J. (Hrsg.) ; JOHNSON, M. A. (Hrsg.): *Control Systems with Input and Output Constraints*. 1. Aufl. London: Springer Verlag, 2003 (Advanced Textbooks in Control and Signal Processing). – ISBN 1852333871
- [62] GLATTFELDER, A. H. ; SCHAUFELBERGER, W. ; FÄSSLER, H. P.: Stability of Override Control Systems. In: *International Journal of Control* 37 (1983), Nr. 5, S. 1023–1037
- [63] GORDON, K. A.: *Three-dimensional rotating stall inception and effects of rotating tip clearance asymmetry in axial compressors*, Massachusetts Institute of Technology (MIT), Dept. of Aeronautics and Astronautics, Diss., 1999
- [64] GOTTMANN, A. : *Untersuchung zur Erkennung der Pumpgrenze von Turboverdichtern durch akustische Messung*, Hochschule Mittweida, Fachbereich Maschinenbau und Feinwerktechnik, Diplomarbeit, 2004
- [65] GRANCHAROVA, A. ; JOHANSEN, T. A. ; TØNDEL, P. : Computational Aspects of Approximate Explicit Nonlinear Model Predictive Control. In: FINDEISEN, R. (Hrsg.) ; (Hrsg.) ; ALLGÖWER, F. (Hrsg.) ; BIEGLER, L. T. (Hrsg.): *Assessment and Future Directions of Nonlinear Model Predictive Control*. Berlin/Heidelberg: Springer, 2007 (1026), S. 181–192
- [66] GRAUER, F. : *Entwicklung einer Pumpgrenzwarnung für mehrstufige, hochbelastete Axialverdichter*. Düsseldorf: VDI Verlag, 1999 (Fortschritte Berichte VDI Bd. 7 Strömungstechnik, Nr. 355). – ISBN 3183355078
- [67] Schutzrecht DE 10152026: Warnung vor Pumpgrenze oder Schaufelschäden bei einer Turbomaschine (Anmeldung: 23.10.2001, Veröffentlichung: 19.02.2004). GRAUER, F. (Erfinder); MTU Aero Engines GmbH (Anmelder).
- [68] GRAVDAHL, J. T. ; EGELAND, O. : Compressor Surge Control Using a Close-Coupled Valve and Backstepping. In: *Proceedings of the 1997 American Control Conference*, 1997, S. 982–986
- [69] GRAVDAHL, J. T. ; EGELAND, O. : Control of the Three State Moore-Greitzer Compressor Model Using a Close-Coupled Valve. In: *Proceedings of the 1997 European Control Conference (ECC)*, 1997, S. 890–895
- [70] GRAVDAHL, J. T. ; EGELAND, O. : Centrifugal Compressor Surge and Speed Control. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 7 (1999), Nr. 5, S. 567–579
- [71] GRAVDAHL, J. T. ; EGELAND, O. : *Compressor Surge and Rotating Stall: Modeling and*

- Control*. 1. Aufl. London: Springer Verlag, 1999. – ISBN 9781447112112
- [72] GRAVDAHL, J. T. ; EGELAND, O. ; VATLAND, S. O.: Drive Torque Actuation in Active Surge Control of Centrifugal Compressors. In: *Automatica* 38 (2002), Nr. 11, S. 1881–1893
- [73] GREITZER, E. M.: Surge and Rotating Stall in Axial Flow Compressors - Part I: Theoretical Compression System Model. In: *Journal of Engineering for Power* 98 (1976), Nr. 2, S. 190–198
- [74] GREITZER, E. M.: Surge and Rotating Stall in Axial Flow Compressors - Part II: Experimental Results and Comparison With Theory. In: *Journal of Engineering for Power* 98 (1976), Nr. 2, S. 199–211
- [75] GREITZER, E. M.: The Stability of Pumping Systems - The 1980 Freeman Scholar Lecture. In: *Journal of Fluids Engineering* 103 (1981), Nr. 2, S. 193–242
- [76] GRÄFE, B. : *Luftgekoppeltes Ultraschallecho-Verfahren für Betonbauteile*, Technische Universität Berlin, Fakultät VI - Planen, Bauen, Umwelt, Diss., 2008
- [77] GU, G. ; SPARKS, A. G. ; BANDA, S. S.: Bifurcation Based Rotating Stall Nonlinear Feedback Control in Axial Flow Compressors. In: *International Journal of Control* 68 (1997), Nr. 6, S. 1524–1528
- [78] GU, G. ; SPARKS, A. G. ; KANG, W. : Bifurcation Analysis and Control for Surge Model via the Projection Method. In: *Proceedings of the 1998 American Control Conference* Bd. 6, 1998, S. 3617–3621
- [79] GYSLING, D. L. ; DUGUNDJI, J. ; GREITZER, E. M. ; EPSTEIN, A. H.: Dynamic Controls of Centrifugal Compressor Surge Using Tailored Structures. In: *Journal of Turbomachinery* 113 (1991), Nr. 4, S. 710–722
- [80] HADDAD, W. M. ; CHELLABOINA, V. ; NERSESOV, S. G. ; DAUBECHIES, I. (Hrsg.) ; WEINAN, E. (Hrsg.) ; LENSTRA, J. K. (Hrsg.) ; SÜLI, E. (Hrsg.): *Impulsive and Hybrid Dynamical Systems*. 1. Aufl. Princeton: Princeton University Press, 2006 (Princeton Series in Applied Mathematics). – ISBN 0691127158
- [81] HADDAD, W. M. ; CHELLABOINA, V. S. ; FAUSZ, J. L. ; LEONESSA, A. : Optimal Nonlinear Robust Control for Nonlinear Uncertain Cascade Systems. In: *Proceedings of the 1997 American Control Conference* Bd. 1, 1997, S. 403–407
- [82] HADDAD, W. M. ; LEONESSA, A. ; CHELLABOINA, V. S. ; FAUSZ, J. L.: Nonlinear Robust Disturbance Rejection Controllers for Rotating Stall and Surge in Axial Flow Compressors. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 7 (1999), Nr. 3, S. 391–398
- [83] HAGEN, G. ; MEZIC, I. ; BAMIEH, B. : Distributed Control Design for Parabolic Evolution Equations: Application to Compressor Stall Control. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 49 (2004), Nr. 8, S. 1247–1258
- [84] HAGEN, G. ; MEZIC, I. ; BAMIEH, B. ; ZHANG, K. : Modelling and Control of Axial Compressors via Air Injection. In: *Proceedings of the 1999 American Control Conference* Bd. 4, 1999, S. 2703–2707
- [85] HANSEN, K. E. ; JORGENSEN, P. ; LARSEN, P. S.: Experimental and Theoretical Study of Surge in a Small Centrifugal Compressor. In: *Journal of Fluids Engineering* 103 (1981),

- Nr. 3, S. 391–395
- [86] HARDT, M. ; HELTON, J. W. ; KREUTZ-DELGADO, K. : Numerical Solution of Nonlinear H_2 and H_∞ Control Problems with Application to Jet Engine Compressors. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 8 (2000), Nr. 1, S. 98–111
- [87] HELD, L. : *Methoden der statistischen Inferenz: Likelihood und Bayes*. 1. Aufl. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 2008. – ISBN 9783827419392
- [88] HELVOIRT, J. van: *Centrifugal Compressor Surge - Modeling and Identification for Control*, Technische Universität Eindhoven, Diss., 2007
- [89] HELVOIRT, J. van ; JAGER, B. de: Dynamic Model Including Piping Acoustics of a Centrifugal Compression System. In: *Journal of Sound and Vibration* 302 (2007), Nr. 1, S. 361–378
- [90] HELVOIRT, J. van ; JAGER, B. de ; STEINBUCH, M. ; SMEULERS, J. : Stability Parameter Identification for a Centrifugal Compression System. In: *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC)* Bd. 4, 2004, S. 3400–3405
- [91] HELVOIRT, J. van ; JAGER, B. de ; STEINBUCH, M. ; SMEULERS, J. : Practical Issues in Model-based Surge Controls for Centrifugal Compressors. In: *Proceedings of the 9th European Fluid Machinery Congress*, 2006, S. 285–295
- [92] HERRMANN, G. ; TURNER, M. C. ; POSTLETHWAITE, I. : A Robust Override Scheme Enforcing Strict Output Constraints for a Class of Strictly Proper Systems. In: *Automatica* 44 (2008), Nr. 3, S. 753–760
- [93] HOLLOWAY, C. ; PAVLOV, D. : Anti-Surge Control of Large Compressors. In: *Chemsa* 1 (1975), S. 190–192
- [94] HÖS, C. ; CHAMPNEYS, A. ; KULLMANN, L. : Bifurcation Analysis of Surge and Rotating Stall in the Moore-Greitzer Compression System. In: *IMA Journal of Applied Mathematics* 68 (2003), Nr. 2, S. 205–228
- [95] HÖSS, B. ; LEINHOS, D. ; FOTTNER, L. : Stall Inception in the Compressor System of a Turbofan Engine. In: *Journal of Turbomachinery* 122 (2000), Nr. 1, S. 32–44
- [96] HUANG, J. : *Nonlinear Output Regulation - Theory and Applications*. 1. Aufl. Philadelphia: SIAM, 2004 (Advances in Design and Control (8)). – ISBN 0898715628
- [97] INOUE, M. ; KUROMARU, M. ; YOSHIDA, S. ; FURUKAWA, M. : Short and Long Length-Scale Disturbances Leading to Rotating Stall in an Axial Compressor Stage With Different Stator/Rotor Gaps. In: *Journal of Turbomachinery* 124 (2002), Nr. 3, S. 379–387
- [98] ISIDORI, A. ; DICKINSON, B. W. (Hrsg.) ; FETTWEIS, A. (Hrsg.) ; L., M. J. (Hrsg.) ; MODESTINO, J. W. (Hrsg.) ; SONTAG, E. D. (Hrsg.) ; THOMA, M. (Hrsg.): *Nonlinear Control Systems*. 3. überarb. Aufl. Berlin/Heidelberg/New York: Springer Verlag, 1995 (Communications and Control Engineering). – ISBN 3540199160
- [99] JAGER, B. de: Rotating Stall and Surge Control: A Survey. In: *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)* Bd. 2, 1995, S. 1857–1862
- [100] JAYNES, E. T.: Bayesian Spectrum and Chirp Analysis. In: *Proceedings of the 3rd Workshop on Maximum Entropy and Bayesian Methods in Applied Statistics*, 1983, S. 1–29

- [101] JOHANSEN, T. A.: On Multi-Parametric Nonlinear Programming and Explicit Nonlinear Model Predictive Control. In: *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)* Bd. 3, 2002, S. 2768–2773
- [102] KAMEIER, F.: *Experimentelle Untersuchung zur Entstehung und Minderung des Blattspitzen-Wirbellärms axialer Strömungsmaschinen*. Düsseldorf: VDI Verlag, 1994 (Fortschritte Berichte VDI Bd. 7 Strömungstechnik, Nr. 243). – ISBN 3183243075
- [103] KAMEIER, F.; NEISE, W.: Rotating Blade Flow Instability as a Source of Noise in Axial Turbomachines. In: *Journal of Sound and Vibration* 203 (1997), Nr. 5, S. 833–853
- [104] KAMMEYER, K.-D.; KROSCHER, K.: *Digitale Signalverarbeitung: Filterung und Spektralanalyse mit MATLAB-Übungen*. 9. korr. und erg. Aufl. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2002. – ISBN 9783658201340
- [105] KANG, W.; GU, G.; SPARKS, A. G.; BANDA, S. S.: Surge Control and Test Functions for Axial Flow Compressors. In: *Proceedings of the 1997 American Control Conference* Bd. 6, 1997, S. 3721–3725
- [106] KHALIL, H. K.: *Nonlinear Systems*. 3. Aufl. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002. – ISBN 0130673897
- [107] KIM, K. H.; FLEETER, S.: Compressor Unsteady Aerodynamic Response to Rotating Stall and Surge Excitations. In: *Journal of Propulsion and Power* 10 (1994), Nr. 5, S. 698–708
- [108] KRAUS, H.; KALNINS, A.: Transient Vibration of Thin Elastic Shells. In: *Journal of the Acoustic Society of America* 38 (1965), Nr. 6, S. 994–1002
- [109] KRSTIC, M.; FONTAINE, D.; KOKOTOVIC, P. V.; PADUANO, J. D.: Useful Nonlinearities and Global Stabilization of Bifurcations in a Model of Jet Engine Surge and Stall. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 43 (1998), Nr. 12, S. 1739–1745
- [110] KRSTIC, M.; PROTZ, J. M.; PADUANO, J. D.; KOKOTOVIC, P. V.: Backstepping Designs for Jet Engine Stall and Surge Control. In: *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)* Bd. 3, 1995, S. 3049–3055
- [111] KURZKE, J.: How to Get Component Maps for Aircraft Gas Turbine Performance Calculations. In: *Proceedings of the 1996 ASME International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exhibition*, 1996
- [112] LAKSHMIKANTHAM, V.; LEELA, S.; MARTYNYUK, A. A.: *Practical Stability of Nonlinear Systems*. Singapur: World Scientific Publishing, 1990. – ISBN 9810203519
- [113] LEINHOS, D. C.; SCHEIDLER, S. G.; FOTTNER, L.: Experiments in Active Stall Control of a Twin-Spool Turbofan Engine. In: *Proceedings of the 2002 ASME Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air*, 2002, S. 9–20
- [114] LEISSA, A. W.: *Vibration of Shells*. repr. 1993. New York: Acoustical Society of America, 1973. – ISBN 1563962934
- [115] LEISSA, A. W.; IYER, K. M.: Modal Response of Circular Cylindrical Shells with Structural Damping. In: *Journal of Sound and Vibration* 77 (1981), Nr. 1, S. 1–10
- [116] LEONESSA, A.; CHELLABOINA, V.; HADDAD, W. M.: Robust Stabilization of Axial Flow Compressors with Uncertain Pressure-Flow Maps. In: *IEEE Transactions on Control*

- Systems Technology* 8 (2000), Nr. 3, S. 466–473
- [117] LEONESSA, A. ; CHELLABOINA, V. S. ; HADDAD, M. M.: Globally Stabilizing Controllers for Multi-Mode Axial Flow Compressors via Equilibria-Dependent Lyapunov Functions. In: *Proceedings of the 1997 American Control Conference* Bd. 2, 1997, S. 993–997
- [118] LEONESSA, A. ; HADDAD, W. M. ; LI, H. : Globally Stabilizing Switching Controllers for a Centrifugal Compressor Model with Spool Dynamics. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 8 (2000), Nr. 3, S. 474–482
- [119] LI, T. ; SOH, Y. ; WEN, C. ; ALLGÖWER, F. (Hrsg.) ; MORARI, M. (Hrsg.): *Switched and Impulsive Systems: Analysis, Design and Applications*. 1. Aufl. Berlin/Heidelberg: Springer Verlag, 2005 (Lecture Notes in Control and Information Sciences (313)). – ISBN 3540239529
- [120] LIAW, D. C. ; ABED, E. H.: Active Control of Compressor Stall Inception: a Bifurcation-Theoretic Approach. In: *Automatica* 32 (1996), Nr. 1, S. 109–115
- [121] LIAW, D. C. ; SONG, C. C. ; HUANG, J. T.: Robust Stabilization of a Centrifugal Compressor With Spool Dynamics. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 12 (2004), Nr. 6, S. 966–972
- [122] LIBERZON, D. ; BASAR, T. (Hrsg.): *Switching in Systems and Control*. 1. Aufl. Boston/Basel/Berlin: Birkhäuser, 2003 (Systems and Control: Foundations and Applications). – ISBN 3764342978
- [123] LIBERZON, D. ; HESPANHA, J. P. ; MORSE, A. S.: Stability of Switched Systems: A Lie-Algebraic Condition. In: *Systems & Control Letters* 37 (1999), Nr. 3, S. 117–122
- [124] LIN, F. ; CHEN, J. ; LI, M. : Wavelet Analysis of Rotor-Tip Disturbances in an Axial-Flow Compressor. In: *Journal of Propulsion and Power* 20 (2004), Nr. 2, S. 319–334
- [125] LIN, H. ; ANTSAKLIS, P. J.: Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: A Survey of Recent Results. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 54 (2009), Nr. 2, S. 308–322
- [126] LOVE, A. E. H.: *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. 4. Aufl., repr. 1944. New York: Dover Publications, 1927. – ISBN 0486601749
- [127] MARCH, P. ; TURNER, M. C.: Practical Considerations for Override Compensator Synthesis and Implementation. In: *IFAC Proceedings Volumes* 41 (2008), Nr. 2, S. 1165–1170
- [128] MCDUGALL, N. M. ; CUMPSTY, N. A. ; HYNES, T. P.: Stall Inception in Axial Compressors. In: *Journal of Turbomachinery* 112 (1990), Nr. 1, S. 116–123
- [129] METHLING, F. O.: *Überwachung der aerodynamischen Stabilität in einem vierstufigen Axialverdichter mit minimalem instrumentellen Aufwand*, Ruhr-Universität Bochum, Fakultät für Maschinenbau, Diss., 2002
- [130] Schutzrecht DE 68916555: Modus und Gerät zur Vermeidung des Pumpens in einem dynamischen Verdichter (Anmeldung: 15.03.1989, Veröffentlichung: 20.10.1994). MIRSKY, S. ; REINKE, P. A. ; STAROSELSKY, N. (Erfinder); Continuous Control Solutions Inc. (Anmelder).
- [131] MOORE, F. K.: A Theory of Rotating Stall of Multistage Axial Compressors / National Aeronautics and Space Administration (NASA), Lewis Research Center. 1983 (Contractor Report 3685). – Forschungsbericht

- [132] MOORE, F. K. ; GREITZER, E. M.: A Theory of Post-Stall Transients in Axial Compression Systems Part I - Development of Equations. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 108 (1986), Nr. 1, S. 68–76
- [133] MOORE, F. K. ; GREITZER, E. M.: A Theory of Post-Stall Transients in Axial Compression Systems Part II - Application. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 108 (1986), Nr. 2, S. 231–239
- [134] MÄRZ, J. ; HAH, C. ; NEISE, W. : An Experimental and Numerical Investigation into the Mechanisms of Rotating Instability. In: *Journal of Turbomachinery* 124 (2002), Nr. 3, S. 367–374
- [135] NEISE, W. : Lärm und Lärmbekämpfung bei Ventilatoren - Eine Bestandsaufnahme / Deutsche Forschungs- und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt (DFVLR), Köln. 1980 (FB 80-16). – Forschungsbericht
- [136] NEISE, W. : Aerodynamische Geräusche von Ventilatoren: Erzeugungsmechanismen und Minderungsmaßnahmen. In: *Tagungsband Seminar Aeroakustik - Schallerzeugung, Geräuschminderung, akustische Messungen und Berechnungen in Strömungen*, 2004
- [137] NEISE, W. ; MICHEL, U. : Aerodynamic Noise of Turbomachines / Deutsche Forschungsanstalt für Luft- und Raumfahrt (DLR), Berlin. 1994 (5). – Forschungsbericht
- [138] OSMIC, S. ; BERNER, M. O. ; SCHWUNG, A. ; JOST, M. ; MÖNNIGMANN, M. : Flatness-Based Feedforward Control for Fast Operating Point Transitions of Compressor Systems. In: *Proceedings of the 2014 IEEE Conference on Control Applications (CCA)*, 2014, S. 1753–1758
- [139] PETRILA, T. ; TRIF, D. ; BREZINSKI, C. (Hrsg.): *Basics of Fluid Mechanics and Introduction to Computational Fluid Dynamics*. New York: Springer Science + Business Media Inc., 2005 (Numerical Methods and Algorithms (3)). – ISBN 0387238379
- [140] PINSLEY, J. E. ; GUENETTE, G. R. ; EPSTEIN, A. H. ; GREITZER, E. M.: Active Stabilization of Centrifugal Compressor Surge. In: *Journal of Turbomachinery* 113 (1991), Nr. 4, S. 723–732
- [141] PROAKIS, J. G. ; MANOLAKIS, D. G.: *Digital Signal Processing*. 4. Aufl. Upper Saddle River, New Jersey: Pearson Education Inc., 2007. – ISBN 0132287315
- [142] PULLAN, G. ; YOUNG, A. M. ; DAY, I. J. ; GREITZER, E. M. ; SPAKOVSKY, Z. S.: Origins and Structure of Spike-Type Rotating Stall. In: *Journal of Turbomachinery* (2015), S. 051007–11
- [143] RAITOR, T. : *Experimentelle Ermittlung dominanter Schallquellmechanismen von Radialverdichtern*, Technische Universität Berlin, Fakultät V - Verkehrs- und Maschinensysteme, Diss., 2009
- [144] RAITOR, T. ; NEISE, W. : Sound Generation in Centrifugal Compressors. In: *Journal of Sound and Vibration* 314 (2008), Nr. 3-5, S. 738–756
- [145] RAUTENBERG, J. : *Ein wellenleiterbasiertes Verfahren zur Bestimmung von Materialdaten für die realitätsnahe Simulation von Schallausbreitungsphänomenen am Beispiel stark absorbierender Kunststoffe*, Universität Paderborn, Fakultät für Elektrotechnik,

- Informatik und Mathematik, Diss., 2012
- [146] REUSS, N. : *Untersuchung von kombinierten Eintrittstotaldruckstörungen auf das instationäre Betriebsverhalten eines fünfstufigen Hochdruckverdichters*, Universität der Bundeswehr München, Fakultät für Luft- und Raumfahrttechnik, Diss., 2005
- [147] RITSCHEL, R. ; JÄKEL, J. ; SCHULZE, R. : Vorsteuerungsbasierte Regelung für Radialverdichter. In: *atp edition* 58 (2016), Nr. 03, S. 44–53
- [148] SCHLEER, M. ; SONG, S. J. ; ABHARI, R. S.: Clearance Effects on the Onset of Instability in a Centrifugal Compressor. In: *Journal of Turbomachinery* 130 (2008), Nr. 3, S. 031002–11
- [149] SCHULZE, R. ; DIETEL, F. ; JÄKEL, J. ; RICHTER, H. : An Artificial Immune System for Classifying Aerodynamic Instabilities of Centrifugal Compressors. In: *International Journal of Computational Intelligence and Applications* 11 (2012), Nr. 1, S. 1–15
- [150] SCHULZE, R. ; RAUCHFUSS, T. ; HUBER, R. ; SCHÖNBERG, F. ; JÄKEL, J. : Virtuelle Inbetriebnahme von Verdichter- und Turbinensteuerungen. In: *Tagungsband Automation 2014*, 2014
- [151] SCHWUNG, A. ; BERNER, P. ; OSMIC, S. ; JOST, M. ; MÖNNIGMANN, M. : Nonlinear Decoupling Control of Compressor Systems for Fast Load Transients in Combined Cycle Power Plants. In: *Proceedings of the 2014 IEEE Conference on Control Applications (CCA)*, 2014, S. 27–32
- [152] Schutzrecht US 7094019: System and method of surge limit control for turbo compressors (Anmeldung: 17.05.2004, Veröffentlichung: 22.08.2006). SHAPIRO, V. (Erfinder); Continuous Control Solutions Inc. (Anmelder).
- [153] SHEARD, A. G. ; CORSINI, A. ; BIANCHI, S. : Stall Warning in a Low-Speed Axial Fan by Visualization of Sound Signals. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 133 (2011), Nr. 4, S. 041601–0–41601–10
- [154] SHORTEN, R. ; WIRTH, F. ; WIRTH, O. ; WULFF, K. ; KING, C. : Stability Criteria for Switched and Hybrid Systems. In: *SIAM Review* 49 (2007), Nr. 4, S. 545–592
- [155] SIGLOCH, H. : *Technische Fluidmechanik*. 5. Aufl. Berlin/Heidelberg: Springer Verlag, 2005. – ISBN 3540220089
- [156] SIMON, J. S. ; VALAVANI, L. : A Lyapunov Based Nonlinear Control Scheme for Stabilizing a Basic Compression System Using a Close-Coupled Control Valve. In: *Proceedings of the 1991 American Control Conference*, 1991, S. 2398–2406
- [157] SIMON, J. S. ; VALAVANI, L. ; EPSTEIN, A. H. ; GREITZER, E. M.: Evaluation of Approaches to Active Compressor Surge Stabilization. In: *Journal of Turbomachinery* 115 (1993), Nr. 1, S. 57–67
- [158] SMEULERS, J. P. M. ; BOUMAN, W. J. ; ESSEN, H. A.: Model Predictive Control of Compressor Installations. In: *Proceedings of the International Conference on Compressors and Their Systems*, 1999 (IMEchE conference transactions 1999-6)
- [159] SPAKOVSKY, Z. S.: *Applications of Axial and Radial Compressor Dynamic System Modeling*, Massachusetts Institute of Technology (MIT), Dept. of Aeronautics and Astronautics, Diss., 2001

- [160] SPAKOVSKY, Z. S.: Backward Traveling Rotating Stall Waves in Centrifugal Compressors. In: *Journal of Turbomachinery* 126 (2004), Nr. 1, S. 1–12
- [161] SPAKOVSKY, Z. S. ; WEIGL, H. J. ; PADUANO, J. D. ; SCHALKWYK, C. M. ; SUDER, K. L. ; BRIGHT, M. M.: Rotating Stall Control in a High-Speed Stage With Inlet Distortion: Part I - Radial Distortion. In: *Journal of Turbomachinery* 121 (1999), Nr. 3, S. 510–516
- [162] SPARKS, C. R.: On the Transient Interaction of Centrifugal Compressors and Their Piping Systems. In: *Journal of Engineering for Power* 105 (1983), Nr. 4, S. 891–901
- [163] STAROSELSKY, N. ; LADIN, L. : Improved Surge Control for Centrifugal Compressors. In: *Chemical Engineering* 86 (1979), S. 175–184
- [164] SUN, T. ; XU, G. ; ZHANG, C. : Self-adaptive Surge Adjustment Based on Fast Correlation Integral Method in Centrifugal Compressors. In: *Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Automation Science and Engineering*, 2006, S. 661–666
- [165] SVARICEK, F. : Nulldynamik linearer und nichtlinearer Systeme: Definitionen, Eigenschaften und Anwendungen. In: *at - Automatisierungstechnik* 54 (2006), Nr. 7, S. 310–322
- [166] TORRISI, G. ; GRAMMATICO, S. ; CORTINOVIS, A. ; MERCANGÖZ, M. ; MORARI, M. ; SMITH, R. S.: Model Predictive Approaches for Active Surge Control in Centrifugal Compressors. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* PP (2017), Nr. 99, S. 1–14
- [167] TORRISI, G. ; GRAMMATICO, S. ; MORARI, M. ; SMITH, R. S.: Model Predictive Control Approaches for Centrifugal Compression Systems. In: *Proceedings of the 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 2015, S. 4320–4325
- [168] TRYFONIDIS, M. ; ETCHEVERS, O. ; PADUANO, J. D. ; EPSTEIN, A. H.: Prestall Behavior of Several High Speed Compressors. In: *Journal of Turbomachinery* 117 (1995), Nr. 1, S. 62–80
- [169] TURNER, M. C. ; POSTLETHWAITE, I. : Output Violation Compensation for Systems with Output Constraints. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 47 (2002), Nr. 9, S. 1540–1546
- [170] TURNER, M. C. ; POSTLETHWAITE, I. : Multivariable Override Control for Systems with Output and State Constraints. In: *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 14 (2004), Nr. 13–14, S. 1105–1131
- [171] TYLER, J. M. ; SOFRIN, T. G.: Axial Flow Compressor Noise Studies. In: *Transactions of the Society of Automotive Engineers* 70 (1962), S. 309–332
- [172] UHLMANN, H. G.: *Früherkennung aerodynamischer Verdichterstabilitäten mittels Wavelet-Transformationsregeln*, Technische Universität München, Fakultät für Maschinenwesen, Diss., 2003
- [173] VELARDE-SUÁREZ, S. ; BALLESTEROS-TAJADURA, R. ; HURTADO-CRUZ, J. P. ; SANTOLARIA-MORROS, C. : Experimental Determination of the Tonal Noise Sources in a Centrifugal Fan. In: *Journal of Sound and Vibration* 295 (2006), Nr. 3–5, S. 781–796
- [174] WAL, M. van d. ; WILLEMS, F. ; JAGER, B. de: Selection of Actuators and Sensors for Active Surge Control. In: *Proceedings of the 1997 IEEE Conference on Control Applications (CCA)*, 1997, S. 121–126

- [175] Schutzrecht EP 0654161: Verfahren zur Überwachung und Steuerung eines Verdichters und Vorrichtung hierfür (Anmeldung: 10.08.1992, Veröffentlichung: 24.05.1995). WALTER, H. A. ; HÖNEN, H. ; GALLUS, H. E. (Erfinder); Dow Deutschland Inc. (Anmelder).
- [176] WEIGL, H. J. ; PADUANO, J. D. ; BRIGHT, M. M.: Application of H_∞ Control with Eigenvalue Perturbations to Stabilize a Transonic Compressor. In: *Proceedings of the 1997 IEEE Conference on Control Applications (CCA)*, 1997, S. 691–698
- [177] WEIGL, H. J. ; PADUANO, J. D. ; FRECHETTE, L. G. ; EPSTEIN, A. H. ; GREITZER, E. M. ; BRIGHT, M. M. ; STRAZISAR, A. J.: Active Stabilization of Rotating Stall and Surge in a Transonic Single-Stage Axial Compressor. In: *Journal of Turbomachinery* 120 (1998), Nr. 4, S. 625–636
- [178] WERNET, M. P. ; BRIGHT, M. M. ; SKOCH, G. J.: An Investigation of Surge in a High-Speed Centrifugal Compressor Using Digital PIV. In: *Journal of Turbomachinery* 123 (2001), Nr. 2, S. 418–428
- [179] WILKE, I. : *Verdichterstabilisierung mit passiven Gehäusestrukturen - Eine numerische Analyse*, Technische Universität München, Fakultät für Maschinenwesen, Diss., 2005
- [180] WILKINSON, J. P.: Transient Response of Thin Elastic Shells. In: *Journal of the Acoustic Society of America* 39 (1966), Nr. 5, S. 895–898
- [181] WILLEMS, F. ; JAGER, B. de: Modeling and Control of Compressor Flow Instabilities. In: *IEEE Control Systems* 19 (1999), Nr. 5, S. 8–18
- [182] WILLIAMS, J. E. F. ; HARPER, M. F. L. ; ALLWRIGHT, D. J.: Active Stabilization of Compressor Instability and Surge in a Working Engine. In: *Journal of Turbomachinery* 115 (1993), Nr. 1, S. 68–75
- [183] WILLIAMS, J. E. F. ; HUANG, X. Y.: Active Stabilization of Compressor Surge. In: *Journal of Fluid Mechanics* 204 (1989), S. 245–262
- [184] YUANGONG, S. ; LONG, W. : On Stability of a Class of Switched Nonlinear Systems. In: *Automatica* 49 (2013), Nr. 1, S. 305–307
- [185] ZHAO, D. ; GAO, F. ; BOUQUAIN, D. ; DOU, M. ; MIRAOUI, A. : Sliding-Mode Control of an Ultrahigh-Speed Centrifugal Compressor for the Air Management of Fuel-Cell Systems for Automotive Applications. In: *IEEE Transactions on Vehicular Technology* 63 (2014), Nr. 1, S. 51–61
- [186] ZHENDONG, S. ; SHUZHI, S. G. ; ISIDORI, A. (Hrsg.) ; SCHUPPEN J. H. van (Hrsg.) ; SONTAG, E. D. (Hrsg.) ; THOMA, M. (Hrsg.) ; KRSTIC, M. (Hrsg.): *Stability Theory of Switched Dynamical Systems*. 1. Aufl. London/Dordrecht/Heidelberg/New York: Springer Verlag, 2011 (Communications and Control Engineering). – ISBN 9780857292551

A Modellparameter des Verdichtersmodells

Dieser Anhang dokumentiert die genutzten Parameter des Modells (4.1). Tabelle A.1 und A.2 halten die Kennlinienparameter für die Szenarien 1-1 bis 1-6 fest. Jede Kennlinie ist dabei in mehrere Kennlinienbereiche unterteilt; siehe dazu Abbildung 2.2b. Die Kennlinienbereiche von (2.45a) mit den jeweils gültigen Koeffizienten sind als Block in den Tabellen dargestellt. Wird ein Wert $Y_V < 0$ gemäß der Interpolation aus Tabelle A.1 und A.2 berechnet, dann erfolgt eine Begrenzung auf Null.

Parameter	1-1	1-2	1-3	Einheit
c_0	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	[m/s]
$c_{2,PG}$	11,956	22,708	25,824	[m/s]
a_0	$1,2255 \times 10^4$	$1,3809 \times 10^4$	$1,2869 \times 10^4$	[m ² /s ²]
a_1	0,0	0,0	0,0	[m/s]
a_2	135,91	44,0599	35,539	[-]
a_3	-8,2943	-1,4349	-0,9373	[s/m]
$c_{2,PG}$	11,956	22,708	25,824	[m/s]
$c_{2,1}$	12,990	24,764	28,986	[m/s]
a_0	$-5,1230 \times 10^5$	$-8,4675 \times 10^4$	$-5,8345 \times 10^4$	[m ² /s ²]
a_1	$1,2352 \times 10^5$	$1,2776 \times 10^4$	$8,3114 \times 10^3$	[m/s]
a_2	$-9,5184 \times 10^3$	-508,21	-287,79	[-]
a_3	241,98	6,5200	3,2553	[s/m]
$c_{2,1}$	12,990	24,764	28,986	[m/s]
$c_{2,2}$	13,465	26,496	31,674	[m/s]
a_0	$-3,6033 \times 10^4$	$5,5295 \times 10^5$	$-1,1591 \times 10^4$	[m ² /s ²]
a_1	290,54	$-6,4034 \times 10^4$	$2,5100 \times 10^3$	[m/s]
a_2	987,85	$2,5760 \times 10^3$	-54,448	[-]
a_3	-53,775	-34,759	0,1901	[s/m]
$c_{2,1}$	13,465	26,496	31,674	[m/s]
$c_{2,2}$	14,048	28,231	34,949	[m/s]
a_0	$-6,8451 \times 10^6$	$2,0472 \times 10^6$	$3,0595 \times 10^5$	[m ² /s ²]
a_1	$1,4868 \times 10^6$	$-2,3144 \times 10^5$	$-2,7705 \times 10^4$	[m/s]
a_2	$-1,0714 \times 10^5$	$8,8270 \times 10^3$	903,86	[-]
a_3	$2,5667 \times 10^3$	-112,56	-9,9411	[s/m]
$c_{2,2}$	14,048	28,231	34,949	[m/s]
$c_{2,3}$	14,882	28,935	36,718	[m/s]
a_0	$1,7155 \times 10^6$	$-4,1415 \times 10^7$	$-2,0597 \times 10^6$	[m ² /s ²]
a_1	$-3,5503 \times 10^5$	$4,2792 \times 10^6$	$1,6152 \times 10^5$	[m/s]
a_2	$2,4942 \times 10^4$	$-1,4713 \times 10^5$	$-4,1143 \times 10^3$	[-]
a_3	-590,36	$1,6837 \times 10^3$	34,142	[s/m]

$c_{2,3}$	14,882	28,935	36,718	[m/s]
$c_{2,4}$	15,560	29,372	37,623	[m/s]
a_0	$-1,9258 \times 10^6$	$-1,2295 \times 10^8$	$-3,7126 \times 10^7$	[m ² /s ²]
a_1	$3,7255 \times 10^5$	$1,2539 \times 10^7$	$2,9661 \times 10^6$	[m/s]
a_2	$-2,3514 \times 10^4$	$-4,2588 \times 10^5$	$-7,8850 \times 10^4$	[-]
a_3	485,27	$4,8177 \times 10^3$	697,66	[s/m]
$c_{2,4}$	15,560	29,372	37,623	[m/s]
$c_{2,5}$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	[m/s]
a_0	$-9,7459 \times 10^4$	$-8,7221 \times 10^5$	$2,8186 \times 10^4$	[m ² /s ²]
a_1	$2,0058 \times 10^4$	$6,9996 \times 10^4$	$3,5020 \times 10^3$	[m/s]
a_2	-860,94	$-1,3616 \times 10^3$	-105,39	[-]
a_3	0,0	0,0	0,0	[s/m]

Tabelle A.1. Parameter für die Kennlinienbereiche von VI.

Parameter	1-4	1-5	1-6	Einheit
c_0	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	[m/s]
$c_{2,PG}$	3,3109	9,4670	13,955	[m/s]
a_0	$1,1936 \times 10^4$	$3,2954 \times 10^4$	$6,5699 \times 10^4$	[m ² /s ²]
a_1	0,0	$-6,6383 \times 10^3$	$-1,2176 \times 10^4$	[m/s]
a_2	669,02	905,86	$1,0302 \times 10^3$	[-]
a_3	-134,71	-39,587	-28,530	[s/m]
$c_{2,PG}$	3,3109	9,4670	13,955	[m/s]
$c_{2,1}$	5,6309	12,453	15,930	[m/s]
a_0	$1,2264 \times 10^4$	$8,8858 \times 10^3$	-726,10	[m ² /s ²]
a_1	$1,4479 \times 10^3$	$2,4300 \times 10^3$	$3,6574 \times 10^3$	[m/s]
a_2	-295,53	-205,66	-216,46	[-]
a_3	15,478	5,0107	3,9412	[s/m]
$c_{2,1}$	5,6309	12,453	15,930	[m/s]
$c_{2,2}$	6,8678	14,164	17,966	[m/s]
a_0	$-2,9173 \times 10^4$	$-6,1431 \times 10^4$	$-1,0120 \times 10^5$	[m ² /s ²]
a_1	$2,0487 \times 10^4$	$1,7954 \times 10^4$	$2,1091 \times 10^4$	[m/s]
a_2	$-3,1374 \times 10^3$	$-1,3386 \times 10^3$	$-1,2175 \times 10^3$	[-]
a_3	151,78	32,295	22,936	[s/m]
$c_{2,1}$	6,8678	14,164	17,966	[m/s]
$c_{2,2}$	7,8638	16,091	19,874	[m/s]
a_0	$-7,0000 \times 10^4$	$6,3700 \times 10^4$	$1,0712 \times 10^5$	[m ² /s ²]
a_1	$3,4363 \times 10^4$	$-9,0543 \times 10^3$	$-1,4501 \times 10^4$	[m/s]
a_2	$-4,5814 \times 10^3$	603,69	808,74	[-]
a_3	193,89	-14,246	-15,500	[s/m]

$c_{2,2}$	7,8638	16,091	19,874	[m/s]
$c_{2,3}$	8,4767	17,851	21,691	[m/s]
a_0	$1,1667 \times 10^5$	$1,1096 \times 10^5$	$7,2409 \times 10^5$	[m ² /s ²]
a_1	$-3,8528 \times 10^4$	$-1,7673 \times 10^4$	$-1,0511 \times 10^5$	[m/s]
a_2	$4,9012 \times 10^3$	$1,1273 \times 10^3$	$5,2400 \times 10^3$	[-]
a_3	-217,11	-24,844	-87,673	[s/m]
$c_{2,3}$	8,4767	17,851	21,691	[m/s]
$c_{2,4}$	9,0459	19,041	22,557	[m/s]
a_0	$6,1448 \times 10^5$	$2,2573 \times 10^6$	$3,9192 \times 10^6$	[m ² /s ²]
a_1	$-2,1062 \times 10^5$	$-3,7240 \times 10^5$	$-5,5686 \times 10^5$	[m/s]
a_2	$-2,4722 \times 10^4$	$2,0664 \times 10^4$	$2,6521 \times 10^4$	[-]
a_3	-977,57	-383,41	-421,68	[s/m]
$c_{2,4}$	9,0459	19,041	22,557	[m/s]
$c_{2,5}$	9,5147	19,662	23,014	[m/s]
a_0	$-1,2281 \times 10^6$	$-2,3515 \times 10^7$	$-9,3064 \times 10^7$	[m ² /s ²]
a_1	$3,8907 \times 10^5$	$3,6039 \times 10^6$	$1,2151 \times 10^7$	[m/s]
a_2	$-4,0313 \times 10^4$	$-1,8374 \times 10^5$	$-5,2836 \times 10^5$	[-]
a_3	$1,3725 \times 10^3$	$3,1173 \times 10^3$	$7,6530 \times 10^3$	[s/m]
$c_{2,5}$	9,5147	19,662	23,014	[m/s]
$c_{2,6}$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	[m/s]
a_0	$-4,5985 \times 10^4$	$1,8087 \times 10^5$	$2,1436 \times 10^5$	[m ² /s ²]
a_1	$1,6329 \times 10^4$	$-1,1604 \times 10^4$	$-8,9690 \times 10^3$	[m/s]
a_2	$-1,1374 \times 10^3$	144,45	2,5171	[-]
a_3	0,0	0,0	0,0	[s/m]

Tabelle A.2. Parameter für die Kennlinienbereiche von V2.

Neben dem Verdichterkennfeld Y_V ergeben sich auch die Parameter für das Verlustkennfeld Y_D nach Gleichung (2.45b) und das Störkennfeld Y_A nach Gleichung (2.45c) aus den Tabellen A.1 und A.2. Im Weiteren zeigen die Tabellen A.3 und A.4 die sonstigen Modellparameter für das Modell (4.1). Das Prozessventil wird durch eine gleichprozentige Ventilkennlinie modelliert:

$$Y_{PV}(r_{PV}) = k_{PV,0} \left(\frac{1}{k_{PV,0}} \right)^{r_{PV}}$$

mit dem dimensionslosen Kv0-Wert des Ventils $k_{PV,0}$. Das Abknicken der Kennlinien bei V2 in den Szenarien 1-4 und 1-5 wird durch eine Modifikation des Verlustkennfelds Y_D erreicht. Konkret wird eine additive Komponente ΔY_D in Form einer kontinuierlichen Gauß-Funktion genutzt. Ein solcher Ansatz modelliert den Verlust im betroffenen Kennlinienbereich, ohne den Rest der Kennlinie signifikant zu beeinflussen:

$$\Delta Y_D(c_2, r_{GV}) = k_{D,a}(r_{GV}) \exp[k_{D,s}(r_{GV})(c_2 - k_{D,m}(r_{GV}))^2]$$

mit den Modellparametern $k_{D,a}$, $k_{D,s}$ und $k_{D,m}$. Dieser Ansatz wird dem bestehenden Verlustkennfeld Y_D additiv überlagert. Gleichung (2.45b) geht damit über in:

$$Y_D(c_2, A, r_{GV}) = \frac{3a_3(c_2, r_{GV})c_2 + a_2(c_2, r_{GV})}{2} A^2 + k_{D,a}(r_{GV}) \exp[k_{D,s}(r_{GV})(c_2 - k_{D,m}(r_{GV}))^2].$$

Parameter	1-1	1-2	1-3	Einheit
τ_L	18,814	18,814	18,814	[m]
τ_V	44,326	44,326	44,326	[m]
τ_A	5,0	5,0	5,0	[m]
τ_{GV}	0,5	0,5	0,5	[s]
τ_{PV}	0,35	0,35	0,35	[s]
k_1	$8,4944 \times 10^4$	$8,4880 \times 10^4$	$8,4749 \times 10^4$	$[\text{m}^2/\text{s}^2]$
k_{PV}	0,4462	0,4462	0,4462	[-]
r_k	0,2857	0,2857	0,2857	[-]
k_{PG}	82,15	9,25	2,36	[-]
$k_{PV,0}$	0,03	0,03	0,03	[-]
$k_{D,a}$	0,0	0,0	0,0	$[\text{m}^2/\text{s}^2]$
$k_{D,s}$	0,0	0,0	0,0	$[\text{s}^2/\text{m}^2]$
$k_{D,m}$	0,0	0,0	0,0	[m/s]

Tabelle A.3. Sonstige Modellparameter für V1.

Parameter	1-4	1-5	1-6	Einheit
τ_L	16,161	14,761	15,261	[m]
τ_V	34,907	14,129	15,9297	[m]
τ_A	6,0	6,0	6,0	[m]
τ_{GV}	0,5	0,5	0,5	[s]
τ_{PV}	0,35	0,35	0,35	[s]
k_1	$8,5255 \times 10^4$	$8,4024 \times 10^4$	$8,4963 \times 10^4$	$[\text{m}^2/\text{s}^2]$
k_{PV}	0,4462	0,4462	0,4462	[-]
r_k	0,2857	0,2857	0,2857	[-]
k_{PG}	86,10	44,30	15,45	[-]
$k_{PV,0}$	0,03	0,03	0,03	[-]
$k_{D,a}$	-235,0	-235,0	0,0	$[\text{m}^2/\text{s}^2]$
$k_{D,s}$	-2,0	-2,88	0,0	$[\text{s}^2/\text{m}^2]$
$k_{D,m}$	4,6	11,2	0,0	[m/s]

Tabelle A.4. Sonstige Modellparameter für V2.

Das stationäre Varianzkennfeld für V1 und V2 lässt sich durch den gleichen polynomialen Ansatz (4.4) ausreichend genau beschreiben. Die Parameter der Approximation sind in Tabelle A.5 festgehalten. Die Approximation für V1 erfolgt mit einem Bestimmtheitsmaß von $R^2 = 96,94\%$ (korrigiertes Bestimmtheitsmaß $\bar{R}^2 = 96,22\%$); die Approximation für V2 erfolgt mit einem Bestimmtheitsmaß von $R^2 = 96,47\%$ (korrigiertes Bestimmtheitsmaß $\bar{R}^2 = 95,82\%$).

Parameter	V1	V2	Einheit
d_{00}	-8,6683	$-6,9554 \times 10^{-2}$	[-]
d_{10}	-0,23543	$2,2907 \times 10^{-2}$	[s/m]
d_{01}	17,320	$-4,2871 \times 10^{-2}$	[-]
d_{20}	$-2,6512 \times 10^{-2}$	$-4,5444 \times 10^{-4}$	[s ² /m ²]
d_{11}	0,98307	$-1,9012 \times 10^{-2}$	[s/m]
d_{02}	-14,843	$9,2335 \times 10^{-2}$	[-]
d_{21}	$1,5079 \times 10^{-2}$	$2,8114 \times 10^{-4}$	[s ² /m ²]
d_{12}	-0,48486	$2,9248 \times 10^{-3}$	[s/m]
d_{03}	4,5940	$-2,3337 \times 10^{-2}$	[-]

Tabelle A.5. Parameter der Varianzkennfelder für V1 und V2.

B Systemanalyse des Verdichtersmodells

Die Bestimmung des relativen Grades für das kombinierte Verdichtersystem (5.76) erfolgt im SISO-Gebiet nach Definition 5.10 und im MIMO-Gebiet nach Definition 5.12. Das kombinierte Verdichtersystem (5.76) lässt sich dabei in die benötigte Standardform überführen:

$$\dot{x}_e = f_e(x_e) + g_e(x_e), \quad (\text{B.1a})$$

$$e = h_e(x_e) \quad (\text{B.1b})$$

mit der Zustandsgröße $x_e = [x, w, d]^T$ und den Vektorfeldern $f_e(x_e) = [f(x, d), s_W(w), s_D(d)]^T$, $g_e(x_e) = [g_1(x), 0_{m_W+m_D \times m_E}]^T$ und $h_e(x_e) = [h(x) - q_W(w)]$. Für das SISO-Gebiet ist $n = 4$, $m_W = 6$ und $m_D = 3$. Im SISO-Gebiet lautet die Bestimmungsgleichung für $l = 0$ nach Definition 5.10:

$$L_{g_e} L_{f_e}^0 h_e(x_e) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & -\frac{\partial q_W}{\partial w} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ 0_{m_W \times 1} \\ 0_{m_D \times 1} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

Mit $h(x) = x_2$ für alle SISO-Regler nach Tabelle 5.2 ergibt sich wegen

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x} g(x) = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] g_1 = 0 \quad (\text{B.3})$$

schließlich $L_{g_e} L_{f_e}^0 h_e(x_e) = 0$. Für $l = 1$ ergibt sich wegen:

$$L_g L_f^1 h(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \end{bmatrix} g_1 = 0 \quad (\text{B.4})$$

ebenfalls $L_{g_e} L_{f_e}^1 h_e(x_e) = 0$. Für $l = 2$ führt die wiederholte LIE-Ableitung zu:

$$L_{g_e} L_{f_e}^2 h_e(x_e) = g_{1,3} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + f_4 \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \right) = \frac{1}{\tau_L \tau_V \tau_{GV}} \frac{\partial Y_V}{\partial x_3}. \quad (\text{B.5})$$

Damit ist der relative Grad $r = 3$. Nach ausgeführter Transformation in die Normalform ergibt sich die kombinierte interne Dynamik, wenn die Transformationsvorschriften gemäß Gleichung (5.44) genutzt werden:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_4 \\ \dot{w} \\ \dot{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_4(x_4, d) \\ s_W(w) \\ s_D(d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (q_D(d) - x_4)/\tau_{PV} \\ s_W(w) \\ s_D(d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1(x_4, d) \\ \gamma_2(w) \\ \gamma_3(d) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

Die interne Dynamik (B.6) ist gleichzeitig die Nulldynamik; siehe auch Gleichung (5.81). Damit Algorithmus 5.1 angewendet werden kann, muss $\gamma_1(x_4, d)$ linear stabil sein. Die erste Zeile in Gleichung (B.6) entspricht einem PT1-Glied. Dessen charakteristisches Polynom ist durch $\lambda \tau_{PV} + 1$ gegeben. Aus $\tau_{PV} > 0$ folgt die exponentielle Stabilität. Damit handelt es sich beim kombinierten Verdichtersystem (5.76) im SISO-Gebiet um ein minimalphasiges System.

Die Bestimmung des relativen Grades für das MIMO-Gebiet erfolgt nach Definition 5.12. Hier gilt $n = 5$, $m_W = 6$ und $m_D = 3$. Für $k = 1$ und $l = 0$ sowie $h_1(x) = x_2$ für alle MIMO-Regler nach Tabelle 5.2 ergibt sich wegen:

$$\frac{\partial h_1(x)}{\partial x} g_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} g_1 = 0, \quad (\text{B.7a})$$

$$\frac{\partial h_1(x)}{\partial x} g_2(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} g_2 = 0 \quad (\text{B.7b})$$

für die Bestimmungsgleichung $L_{g_e} L_{f_e}^0 h_{e,1}(x_e) = [0, 0]$. Für $k = 1$ und $l = 1$ lauten die interessierenden LIE-Ableitungen:

$$L_{g_{e,1}} L_{f_e}^1 h_{e,1}(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} & \frac{\partial f_2}{\partial x_5} \end{bmatrix} g_1 = 0, \quad (\text{B.8a})$$

$$L_{g_{e,2}} L_{f_e}^1 h_{e,1}(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} & \frac{\partial f_2}{\partial x_5} \end{bmatrix} g_2 = \frac{1}{\tau_{PGV}} \frac{\partial f_2}{\partial x_5}. \quad (\text{B.8b})$$

Damit folgt für die Bestimmungsgleichung $L_{g_e} L_{f_e}^1 h_{e,1}(x_e) = [0, 1]$; es ist also $r_1 = 2$. Für $k = 2$ und $l = 0$ sowie $h_2 = Y_K(x_1, x_2)$ für alle MIMO-Regler nach Tabelle 5.2 ergibt sich wegen:

$$\frac{\partial h_2(x)}{\partial x} g_1(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial Y_K}{\partial x_1} & \frac{\partial Y_K}{\partial x_2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} g_1 = 0, \quad (\text{B.9a})$$

$$\frac{\partial h_2(x)}{\partial x} g_2(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial Y_K}{\partial x_1} & \frac{\partial Y_K}{\partial x_2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} g_2 = 0 \quad (\text{B.9b})$$

für die Bestimmungsgleichung $L_{g_e} L_{f_e}^0 h_{e,2}(x_e) = [0, 0]$. Für $k = 2$ und $l = 1$ lauten die interessierenden LIE-Ableitungen:

$$L_{g_{e,1}} L_{f_e}^1 h_{e,2}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left[f_1 \frac{\partial Y_K}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial Y_K}{\partial x_2} \right] g_1 = \frac{1}{\tau_{GV}} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(f_1 \frac{\partial Y_K}{\partial x_1} \right), \quad (\text{B.10a})$$

$$L_{g_{e,2}} L_{f_e}^1 h_{e,2}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left[f_1 \frac{\partial Y_K}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial Y_K}{\partial x_2} \right] g_2 = \frac{1}{\tau_{PGV}} \frac{\partial}{\partial x_5} \left(f_2 \frac{\partial Y_K}{\partial x_2} \right). \quad (\text{B.10b})$$

Damit folgt für die Bestimmungsgleichung $L_{g_e} L_{f_e}^1 h_{e,2}(x_e) = [1, 1]$; es ist also $r_2 = 2$. Insgesamt ergibt sich für das MIMO-Gebiet dann folgende Matrix $D(x_e)$ gemäß Definition 5.12:

$$D(x_e) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\tau_{PGV}} \frac{\partial f_2}{\partial x_5} \\ \frac{1}{\tau_{GV}} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(f_1 \frac{\partial Y_K}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{\tau_{PGV}} \frac{\partial}{\partial x_5} \left(f_2 \frac{\partial Y_K}{\partial x_2} \right) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.11})$$

Die Matrix (B.11) ist eine Dreiecksmatrix. Eine Rechnung zeigt, dass kein weiteres Element der Matrix mit Null identisch ist. Damit besitzt $D(x_e)$ den vollen Rang, und das kombinierte Verdichtersystem (5.76) besitzt im MIMO-Gebiet den relativen Vektorgrad $r = \{2, 2\}$. Nach ausgeführter Transformation in die Normalform ergibt sich wiederum die kombinierte Nullodynamik (B.6), wenn die Transformationsvorschriften gemäß Gleichung (5.44) genutzt werden. Wie bereits für den SISO-Fall gezeigt, handelt es sich auch im MIMO-Gebiet um ein minimalphasiges System. Folglich lässt sich Algorithmus 5.1 auch für den Regelungsentwurf im MIMO-Gebiet anwenden.

C Inversion des Verdichtersmodells

Nach Appendix B handelt es sich beim kombinierten Verdichtersystem (5.76) sowohl im SISO- als auch im MIMO-Gebiet um ein minimalphasiges System. Die Anwendung von Algorithmus 5.1 ist damit zulässig. Der Algorithmus startet mit der Lösung $H_e(x, w, d) = 0$, wobei H_e nach Gleichung (5.43) zu berechnen ist. Für das SISO-Gebiet lautet die Bestimmungsgleichung:

$$H_e(x, w, d) = \begin{bmatrix} e_1(x, w) \\ L_{f_e}^1 e_1(x, w) \\ L_{f_e}^2 e_1(x, w) \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{C.1})$$

mit dem kombinierten Vektorfeld $f_e(x, w, d) = [f(x, d), s_W(w), s_D(d)]^T$. Hierbei ist $e_1(x, w)$ die Regelabweichung für den jeweiligen SISO-Regler nach Tabelle 5.2. Statt jeden Einzelregler zu berechnen, wird der Entwurf nur für die Regelabweichung der Sinustrajektorie $e_1 = h_1 - q_{W,1} = x_2 - w_1 + w_2$ und das innere Modell der Störgröße über das Exosystem:

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= 0, \\ \dot{w}_2 &= \alpha_W w_3, \\ \dot{w}_3 &= -\alpha_W w_2, \\ \dot{d}_1 &= 0, \\ \dot{d}_2 &= \alpha_D d_3, \\ \dot{d}_3 &= -\alpha_D d_2 \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

durchgeführt; siehe hierzu auch das Exosystem (5.80). Die Lösung für die Sinustrajektorie beinhaltet auch die Lösung für die konstanten Solltrajektorien. Hierfür muss $\alpha_W = 0$ in (C.2) gesetzt werden. Die Berechnung von Element 1 von (C.1) führt zu:

$$x_2(w, d) = \chi_2 = w_1 + w_2. \quad (\text{C.3})$$

Für Element 2 von (C.1) ergibt sich:

$$x_1(w, d) = \chi_1 = \tau_V \alpha_W w_3 + k_{PV} Y_{PV}(\chi_4) \sqrt{2k_1(\chi_2^{r_k} - 1)/r_k}. \quad (\text{C.4})$$

Für Element 3 von (C.1) ergibt sich bei unterkritischer Ausströmung aus dem Gasspeicher folgende implizite Funktion in χ_3 :

$$\begin{aligned} 0 = & Y_V(\chi_1, \chi_3) - k_1(x_2^{r_k} - 1) + \tau_L \tau_V \alpha_W^2 w_2 - \frac{2k_1 \tau_L \alpha_W w_3 k_{PV}}{\sqrt{2k_1(x_2^{r_k} - 1)/r_k}} f_{PV}(\chi_4) \chi_2^{r_k - 1} \\ & - \frac{\tau_L k_{PV}}{\tau_{PV}} \ln\left(\frac{1}{k_{PV,0}}\right) [q_D(d) - \chi_4] \sqrt{2k_1(x_2^{r_k} - 1)/r_k} \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

mit $q_D(d) = d_1 + d_2$. Die Berechnung von χ_3 erfordert demnach die Inversion des Verdichterkennfeldes. Aufgrund des gewählten Ansatzes für die Kennfeldmodellierung ist dies zwar

analytisch möglich, allerdings rechnerisch sehr aufwendig. Daher wird für die Inversion eine numerische Lösung verwendet. Bei der Implementierung der numerischen Lösung wird nur der stabile Teil des Verdichterkennfeldes berücksichtigt. Wegen des gewählten bijektiven Ansatzes für die Kennfeldmodellierung ist eine eindeutige Lösung garantiert, solange sich die Solltrajektorie im Bereich des Kennfeldes befindet. Damit ist die Lösung

$$H_e(\chi^1(w, d), \chi^2(w, d), w, d) \Big|_{\chi^1 = \theta(\chi^2(w, d), w, d)} = 0 \quad (\text{C.6})$$

gemäß Schritt 1 von Algorithmus 5.1 und der für das SISO-Gebiet implizierten Separation $\chi^1 = [\chi_1, \chi_2, \chi_3]^T$ und $\chi^2 = [\chi_4]^T$ mit der Abbildung $\chi^1(w, d) = \theta(\chi^2(w, d), w, d)$ bekannt. In Schritt 2 des Algorithmus wird der Stelleingang \bar{u}_1 gemäß Gleichung (5.45) berechnet. Da χ_3 nur als numerische Lösung vorliegt, kann u_1 nicht analytisch angegeben werden. Unter Verwendung der Näherungen

$$\frac{\partial \chi_3}{\partial w_2} \approx \frac{\Delta \chi_3}{\Delta w_2} \Big|_{w, d = \text{konst.}}, \quad (\text{C.7a})$$

$$\frac{\partial \chi_3}{\partial w_3} \approx \frac{\Delta \chi_3}{\Delta w_3} \Big|_{w, d = \text{konst.}}, \quad (\text{C.7b})$$

$$\frac{\partial \chi_3}{\partial d_2} \approx \frac{\Delta \chi_3}{\Delta d_2} \Big|_{w, d = \text{konst.}}, \quad (\text{C.7c})$$

$$\frac{\partial \chi_3}{\partial d_3} \approx \frac{\Delta \chi_3}{\Delta d_3} \Big|_{w, d = \text{konst.}} \quad (\text{C.7d})$$

folgt für den Stelleingang \bar{u}_1 :

$$\begin{aligned} \bar{u}_1(w, d) = & \tau_{GV} \alpha_W w_3 \frac{\Delta \chi_3}{\Delta w_2} \Big|_{w, d = \text{konst.}} - \tau_{GV} \alpha_W w_2 \frac{\Delta \chi_3}{\Delta w_3} \Big|_{w, d = \text{konst.}} \\ & + \tau_{GV} \alpha_D d_3 \frac{\Delta \chi_3}{\Delta d_2} \Big|_{w, d = \text{konst.}} - \tau_{GV} \alpha_D d_2 \frac{\Delta \chi_3}{\Delta d_3} \Big|_{w, d = \text{konst.}} + \chi_3. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Im letzten Schritt erfolgt die Lösung der Bestimmungsgleichung (5.50):

$$\frac{\partial \chi_4}{\partial w} + \frac{\partial \chi_4}{\partial d} = \frac{1}{\tau_{PV}} [d_1 + d_2 - \chi_4]. \quad (\text{C.9})$$

Mit der Ansatzfunktion $\chi_4 = a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3$ kann die PDGL (C.9) über einen Koeffizientenvergleich nach Einsetzen in (C.9) für die Koeffizienten a_1 , a_2 und a_3 gelöst werden:

$$\chi_4 = d_1 + \frac{1}{1 + \tau_{PV}^2 \alpha_D^2} d_2 - \frac{\tau_{PV} \alpha_D}{1 + \tau_{PV}^2 \alpha_D^2} d_3. \quad (\text{C.10})$$

Die gesamte Lösung der inversionsbasierten Folgeregelung für das SISO-Gebiet setzt sich aus den Gleichungen (C.3), (C.4), (C.5), (C.8) und (C.10) zusammen.

Für den Regelungsentwurf im MIMO-Gebiet kann wiederum Algorithmus 5.1 genutzt werden. Hierbei lautet die Bestimmungsgleichung:

$$H_e(x, w, d) = \begin{bmatrix} e_1(x, w) \\ L_{f_e}^1 e_1(x, w) \\ e_2(x, w) \\ L_{f_e}^1 e_2(x, w) \end{bmatrix} = 0. \quad (\text{C.11})$$

Die Lösung erfolgt wieder unter Verwendung des Exosystems (C.2). Die Elemente 1 und 3 entsprechen den Lösungen der beiden Regelabweichungen nach Tabelle 5.2. Für Element 1 von (C.11) ergibt sich wieder Gleichung (C.3). Für die Berechnung von Element 3 in (C.11) wird zunächst der Sollwert $q_{W,2} = Y_K(w_1, w_2)$ der Pumpgrenzregelung angegeben. Dies erfolgt unter der Annahme einer linearen Regellinie der Form $\chi_1 = m_{PG} \chi_2 + n_{PG}$. Die Koeffizienten m_{PG} und n_{PG} bestimmen die Lage der Regellinie im Verdichterkennfeld. Folglich ergibt sich der Sollwert der Pumpgrenzregelung zu $Y_K(w_1, w_2) = Y_K(\chi_1, \chi_2)$ unter der Nebenbedingung $\chi_1 = m_{PG} \chi_2 + n_{PG}$. Das führt zusammen mit dem Varianzkennfeld Y_K nach Gleichung (4.4):

$$Y_K(x_1, x_2) = d_{00} + d_{10}x_1 + d_{01}x_2 + d_{20}x_1^2 + d_{11}x_1x_2 + d_{02}x_2^2 + d_{21}x_1^2x_2 + d_{12}x_1x_2^2 + d_{03}x_2^3$$

und den Koeffizienten d_{ij} nach Tabelle A.5 zu folgender Lösung:

$$\chi_1 = -\frac{b_1 + \sqrt{(b_1^2 - 4b_2b_0)}}{2b_2} \quad (C.12)$$

mit:

$$\begin{aligned} b_0 &= -d_{10}n_{PG} - d_{20}n_{PG}^2 \\ &\quad - (d_{10}m_{PG} + 2d_{20}m_{PG}n_{PG} + d_{11}n_{PG} + d_{21}n_{PG}^2)\chi_2 \\ &\quad - (d_{11}m_{PG} + d_{20}m_{PG}^2 + d_{12}n_{PG} + 2d_{21}m_{PG}n_{PG})\chi_2^2 \\ &\quad - (d_{21}m_{PG}^2 + d_{12}m_{PG})\chi_2^3, \\ b_1 &= d_{10} + d_{11}\chi_2 + d_{12}\chi_2^2, \\ b_2 &= d_{20} + d_{21}\chi_2. \end{aligned}$$

Die Berechnung der Elemente 2 und 4 in (C.11) liefert χ_3 und χ_5 . Die Berechnung von χ_3 erfordert dabei wiederum die Lösung einer impliziten Gleichung bei unterkritischer Ausströmung aus dem Gasspeicher:

$$0 = Y_V(\chi_1, \chi_3) - k_1(x_2^{r_k} - 1) - \tau_L \alpha_W w_3 \frac{\partial \chi_1}{\partial w_2}. \quad (C.13)$$

Das Differential in der Bestimmungsgleichung bildet die partielle Ableitung der bereits bekannten Lösung χ_1 nach w_2 . Wegen der komplexen Abhängigkeit der Gleichung (C.12) von w_2 wird auf eine numerische Näherungslösung zurückgegriffen:

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial w_2} \approx \left. \frac{\Delta \chi_1}{\Delta w_2} \right|_{w,d=\text{konst.}}. \quad (C.14)$$

Damit ergibt sich die implizite Bestimmungsgleichung für χ_3 :

$$0 = Y_V(\chi_1, \chi_3) - k_1(x_2^{r_k} - 1) - \tau_L \alpha_W w_3 \left. \frac{\Delta \chi_1}{\Delta w_2} \right|_{w,d=\text{konst.}}, \quad (C.15)$$

die wie im SISO-Fall eine Inversion des Verdichterkennfeldes benötigt. Des Weiteren ist χ_5 als Lösung der impliziten Gleichung

$$Y_{PGV}(\chi_5) = \frac{1}{k_{PGV}} \left[\frac{\chi_1 - \tau_V \alpha_W w_3}{\sqrt{2k_1(x_2^{r_k} - 1)/r_k}} - k_{PV} Y_{PV}(\chi_4) \right] \quad (C.16)$$

gegeben. Die Lösung erfordert die Inversion der Ventilkennlinie. Für das PGV wird typischerweise eine lineare Ventilkennlinie vorgesehen. Die Kennlinie lässt sich also durch $Y_{PGV}(\chi_5) = \chi_5$ beschreiben und ermöglicht damit die sofortige Lösung. Schließlich können die Stelleingänge berechnet werden. Wegen der numerischen Näherungslösungen bei der Berechnung von χ_3 erfolgt die Angabe der Stelleingänge unter Verwendung der Näherungen (C.7a), (C.7b) und (C.14):

$$\bar{u}_1(w, d) = \tau_{GV} \alpha_W w_3 \left. \frac{\Delta \chi_3}{\Delta w_2} \right|_{w, d = \text{konst.}} - \tau_{GV} \alpha_W w_2 \left. \frac{\Delta \chi_3}{\Delta w_3} \right|_{w, d = \text{konst.}} + \chi_3 \quad (\text{C.17a})$$

$$\bar{u}_2(w, d) = \tau_{PGV} \alpha_W w_3 \frac{\partial \chi_5}{\partial w_2} - \tau_{PGV} \alpha_W w_2 \frac{\partial \chi_5}{\partial w_3} + \tau_{PGV} \alpha_D d_3 \frac{\partial \chi_5}{\partial d_2} - \tau_{PGV} \alpha_D d_2 \frac{\partial \chi_5}{\partial d_3} + \chi_5 \quad (\text{C.17b})$$

mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_5}{\partial w_2} &= \frac{k_1}{k_{PGV}} \frac{(\tau_V \alpha_W w_3 - \chi_1) \chi_2^{r_k - 1}}{(2k_1(\chi^{r_k} - 1)/r_k)^{3/2}} + \frac{1}{k_{PGV}} \frac{1}{(2k_1(\chi_2^{r_k} - 1)/r_k)^{1/2}} \left. \frac{\Delta \chi_1}{\Delta w_2} \right|_{w, d = \text{konst.}}, \\ \frac{\partial \chi_5}{\partial w_3} &= -\frac{1}{k_{PGV}} \frac{\tau_V \alpha_W}{(2k_1(\chi^{r_k} - 1)/r_k)^{1/2}}, \\ \frac{\partial \chi_5}{\partial d_2} &= -\ln\left(\frac{1}{k_{PV,0}}\right) \frac{k_{PV}}{k_{PGV}(1 + \tau_{PV}^2 \alpha_D^2)} Y_{PV}(\chi_4), \\ \frac{\partial \chi_5}{\partial d_3} &= \ln\left(\frac{1}{k_{PV,0}}\right) \frac{k_{PV} \tau_{PV} \alpha_D}{k_{PGV}(1 + \tau_{PV}^2 \alpha_D^2)} Y_{PV}(\chi_4). \end{aligned}$$

Die gesamte Lösung der inversionsbasierten Folgeregelung für das MIMO-Gebiet setzt sich aus den Gleichungen (C.3), (C.10), (C.12), (C.15), (C.16) und (C.17) zusammen.

D Parametrierung der Simulation

Die folgende Tabelle beinhaltet die Initialwerte der drei Simulationen aus Abschnitt 5.4.3 sowie die Modellparameter des ergänzten PGV und die Parameter der Regellinie für die körperschallbasierte Pumpgrenzregelung.

Parameter	Simulation 1	Simulation 2	Simulation 3	Einheit
$x_1(t_0)$	28,0	28,0	28,0	[m/s]
$x_2(t_0)$	1,70	1,70	1,70	[-]
$x_3(t_0)$	0,46022	0,46022	0,46022	[-]
$x_4(t_0)$	0,0	0,0	0,0	[-]
$x_5(t_0)$	0,54282	0,54282	0,54282	[-]
$w_1(t_0)$	1,85	1,85	1,85	[-]
$w_2(t_0)$	-0,25981	-0,25981	-0,25981	[-]
$w_3(t_0)$	-0,15	-0,15	-0,15	[-]
$w_4(t_0)$	1,70	1,70	1,70	[-]
$w_5(t_0)$	2,00	2,00	2,00	[-]
$w_6(t_0)$	2,05	1,90	2,05	[-]
α_W	$-5,2360 \times 10^{-2}$	$-5,2360 \times 10^{-2}$	$-5,2360 \times 10^{-2}$	[1/s]
$d_1(t_0)$	0,54282	0,47141	0,34641	[-]
$d_2(t_0)$	0,0	$7,1409 \times 10^{-2}$	0,19641	[-]
$d_3(t_0)$	0,0	0,0	0,0	[-]
α_D	0,0	$6,2832 \times 10^{-2}$	$6,2832 \times 10^{-2}$	[1/s]
n_{PG}	69,479	69,479	69,479	[m/s]
m_{PG}	-121,24	-121,24	-121,24	[m/s]
k_{PGV}	0,1116	0,1116	0,1116	[-]
τ_{PGV}	0,35	0,35	0,35	[s]

Tabelle D.1. Initialwerte und PGV-Parameter für die Simulationen aus Abschnitt 5.4.3.