

**Der Nicht-Charakteristik-2-Fall des lokalen Struktursatzes
Gruppen mit 2-lokalen Untergruppen vom orthogonalen Typ**

Dissertation

zur Erlangung des
Doktorgrades der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

der Naturwissenschaftlichen Fakultät II
Chemie, Physik und Mathematik

der Martin-Luther-Universität
Halle-Wittenberg

vorgelegt

von Herrn Christian Prösel
geb. am 02.06.1985 in Bernburg (Saale)

Gutachter:

Prof. Dr. Gernot Stroth (Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg)

PD Dr. Barbara Baumeister (Universität Bielefeld)

Tag der Verteidigung: 11.01.2019

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	iii
1 Einführung	1
1.1 Notation und Bezeichnungen	1
1.2 Große Untergruppen	2
1.3 Problemstellung und erste Resultate	3
1.4 Allgemeine Resultate	8
2 Die große Untergruppe Q	13
3 Untersuchung von $C_G(y)$	19
4 Identifizierung der Komponente K	33
4.1 Die alternierenden Gruppen	40
4.2 Die sporadischen Gruppen	42
4.3 Gruppen vom Lie-Typ in Charakteristik 2	45
4.4 Gruppen vom Lie-Typ in ungerader Charakteristik	49
5 Die Fälle $K/Z(K) \cong Fi_{22}$ und $K/Z(K) \cong BM$	55
6 Der Fall $K/Z(K) \cong PSU_4(3)$	67
6.1 Erste Reduktion: Die Bestimmung von ϵ	70
6.2 Weitere Reduktion auf den „kleinstmöglichen“ Fall	74
6.3 Bestimmung von $F^*(G)$	85
Literaturverzeichnis	101

Vorwort

Eine Gruppe $G \neq 1$ heißt einfach, wenn sie außer der trivialen Untergruppe keine echten Normalteiler besitzt. Einfache Gruppen spielen in der Theorie der endlichen Gruppen an vielen Stellen eine zentrale Rolle. So existiert zum Beispiel zu jeder endlichen Gruppe G eine Reihe

$$1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G,$$

in der die Faktoren G_i/G_{i-1} für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ einfach sind. Während es für eine gegebene Gruppe G im Allgemeinen viele Reihen dieser Art gibt, sind die auftretenden einfachen Faktoren jedoch nach dem Satz von Jordan-Hölder bis auf Reihenfolge eindeutig bestimmt und haben zudem starken Einfluss auf die Struktur und auf verschiedene Eigenschaften von G . Deshalb wurde bereits im 19. Jahrhundert die Frage aufgeworfen, ob es möglich ist, alle endlichen einfachen Gruppen zu klassifizieren. In der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts startete dann eines der wahrscheinlich umfangreichsten Projekte in der Geschichte der Mathematik, welches schließlich vor einigen Jahren erfolgreich in folgendem Satz mündete:

Satz (Klassifikationssatz): *Jede endliche einfache Gruppe ist isomorph zu*

- *einer zyklischen Gruppe von Primzahlordnung,*
- *einer alternierenden Gruppe A_n mit $n \geq 5$,*
- *einer endlichen einfachen Gruppe vom Lie-Typ oder*
- *einer von 26 sporadischen einfachen Gruppen.*

In dieses Ergebnis fließen zahllose Publikationen ein, die von etwa einhundert MathematikerInnen über einen Zeitraum von gut vierzig Jahren in verschiedensten Zeitschriften und Schriftenreihen veröffentlicht wurden. Entsprechend liegt für dieses wichtige Resultat leider kein Beweis in lesbarer Form vor und darum gibt es bereits seit längerer Zeit Bestrebungen, die Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen einer Revision zu unterziehen und dabei das bisherige Vorgehen mit modernen Methoden zu vereinfachen. So wird in einem von D. Gorenstein, R. Lyons und R. Solomon initiierten Programm eine Reihe von Büchern veröffentlicht, welche schließlich in kompakterer und zusammenhängender Form einen überarbeiteten

Beweis für den Klassifikationssatz liefern sollen. Andere Projekte verfolgen zum Teil gänzlich neue Strategien, M. Aschbacher arbeitet etwa zur Zeit mit einem Ansatz unter Verwendung von Fusionssystemen an einem alternativen Beweis.

In einem weiteren Projekt unter der Leitung von U. Meierfrankenfeld, B. Stellmacher und G. Stroth - kurz als MSS-Projekt bezeichnet - liegt das Hauptaugenmerk auf der p -lokalen Struktur endlicher Gruppen (für beliebige Primzahlen p). Dabei stehen Gruppen G im Vordergrund, in denen $F^*(M) = O_p(M)$ für jede p -lokale Untergruppe M gilt, die eine Sylow- p -Untergruppe von G enthält - man sagt dann auch, G hat parabolische Charakteristik p . Es stellt sich heraus, dass viele der bekannten Gruppen parabolischer Charakteristik p eine sogenannte große p -Untergruppe enthalten, weshalb sich das MSS-Projekt zunächst auf Gruppen mit großen Untergruppen konzentriert. Eine p -Untergruppe Q von G heißt *große Untergruppe*, wenn gilt:

- $C_G(Q) \leq Q$ und
- für alle $1 \neq A \leq Z(Q)$ ist $N_G(A) \leq N_G(Q)$.

Beispielsweise hat mit Ausnahme von $Sp_{2n}(2^m)$, $n \geq 2$, $F_4(2^m)$ und $G_2(3^m)$ jede einfache Gruppe $L \in \mathcal{L}ie(p)$ eine große p -Untergruppe. Als zentraler Bestandteil des MSS-Projekts liefert der lokale Struktursatz [MSS, Theorem A] wesentliche Informationen über die p -lokalen Untergruppen einer \mathcal{K}_p -Gruppe G , die eine große p -Untergruppe Q hat.¹ Sei $M \not\leq N_G(Q)$ eine p -lokale Untergruppe von G , die eine Sylow- p -Untergruppe von $N_G(Q)$ enthält und sei Y_M der größte elementarabelsche p -Normalteiler von M mit $O_p(M/C_M(Y_M)) = 1$. Dann beschreibt [MSS] die Struktur von $M/C_M(Y_M)$ und die Operation von $M/C_M(Y_M)$ auf Y_M . Diese Aussagen werden in zahlreichen Arbeiten im Rahmen des MSS-Projektes verwendet, wobei das weitere Vorgehen oft von folgenden beiden Fragestellungen abhängig ist:

$$\text{Ist } F^*(C_G(y)) = O_p(C_G(y)) \text{ für alle } 1 \neq y \in Y_M? \quad (1)$$

$$\text{Liegt } Y_M \text{ in der großen Untergruppe } Q? \quad (2)$$

Die Antwort auf (1) bleibt dabei in [MSS] meistens offen. Lediglich für einige wenige Konfigurationen wurde bewiesen, dass (1) nicht gilt, und Punkt (10) des Struktursatzes gibt eine Auflistung solcher Fälle, ohne jedoch Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben. Zum einen ist nun eine genauere Bestimmung derjenigen Situationen, in denen (1) fehlschlägt, von generellem Interesse, und einige Fälle wurden beispielsweise bereits in [MSt] oder [PPS] behandelt.

¹Eine endliche Gruppe G heißt \mathcal{K} -Gruppe, wenn für jedes $U \leq G$ und $N \trianglelefteq U$ gilt: Ist $|U/N| < |G|$ und U/N eine einfache Gruppe, so ist U/N isomorph zu einer der „bekannteren“ einfachen Gruppen, also zu einer der Gruppen, die im Klassifikationssatz auftauchen. Die Gruppe G heißt \mathcal{K}_p Gruppe, wenn jede p -lokale Untergruppe von G eine \mathcal{K} -Gruppe ist. Diese Konzepte entstammen dem ursprünglichen Projekt zur Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen und ermöglichen ein induktives Vorgehen, da ein minimales Gegenbeispiel zum Klassifikationssatz eine \mathcal{K} -Gruppe ist.

Zum anderen sind für zwei der in [MSS, Theorem A (10)] aufgeführten Situationen keine Beispiele bekannt und daher ist zu vermuten, dass derartige Konfigurationen gar nicht auftreten können.

Die Motivation für die vorliegende Arbeit ist einer dieser Fälle, genauer Theorem A (10:4) von [MSS]. Wir untersuchen hier eine \mathcal{K}_2 -Gruppe G , die eine große 2-Untergruppe Q und eine 2-lokale Untergruppe M mit folgenden Eigenschaften enthält:²

- Eine Sylow-2-Untergruppe von $N_G(Q)$ liegt in M ,
- $M/C_M(Y_M)$ ist isomorph zu einer orthogonalen Gruppe der Dimension $2n$ ($n \geq 3$) über $GF(2)$,
- $[Y_M, M]$ ist der zugehörige natürliche Modul und
- es gibt Elemente $1 \neq y$ in Y_M , für die $F^*(C_G(y)) \neq O_2(C_G(y))$ ist.

Wir werden zeigen, dass $F^*(G)$ dann isomorph zu $P\Omega_8^+(3)$, Fi'_{24} oder dem Fischer-Griess-Monster ist, wobei in allen Fällen Y_M nicht in der großen Untergruppe Q liegt. Damit erhalten wir einerseits, dass der Fall (10:4) des lokalen Struktursatzes für $n \geq 3$ nicht eintreffen kann, andererseits liefern wir so einen Beitrag zum Verständnis derjenigen Gruppen, für die (1) mit „nein“ zu beantworten ist.

Die Antwort auf (2) kann hingegen in vielen der möglichen Situationen aus dem Struktursatz abgelesen werden und abhängig davon entscheidet sich, mit welcher Strategie die betreffenden Gruppen nun weiter untersucht werden. Gibt es ein M mit $Y_M \not\leq Q$, so wird der in Arbeit befindliche sogenannte H -Struktursatz im Wesentlichen zeigen, dass G eine Untergruppe H hat, die isomorph zu einer Gruppe vom Lie-Typ ist und eine Sylow- p -Untergruppe von G enthält. Damit werden dann in [PPSS] die möglichen Gruppen G bestimmt. Ist hingegen $Y_M \leq Q$ für alle M , so liefern [PPS] und [MMPS] wichtige Informationen über M und $N_G(Q)$. Leider verwenden diese beiden Arbeiten dabei den Struktursatz unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass G von lokaler Charakteristik p ist, also $F^*(M) = O_p(M)$ für *alle* p -lokalen Untergruppen M gilt. Im MSS-Projekt wird nun versucht, diese Annahme wenn möglich durch die schwächere Voraussetzung parabolischer Charakteristik p zu ersetzen. Wenn das - zumindest für die in der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen mit Abstand wichtigste Primzahl $p = 2$ - erfolgreich ist, besteht unter anderem eine gute Aussicht darauf, dass sich das MSS-Projekt mit der aktuellen Arbeit von M. Aschbacher verbinden lässt und somit beide Ansätze gemeinsam einen neuen Beweis für den Klassifikationssatz liefern können. Möchte man die Resultate aus [PPS] und [MMPS] für $p = 2$ und ohne die Voraussetzung lokaler Charakteristik 2 beweisen, müssen zwei weitere Situationen untersucht werden. Die erste Konfiguration [MSS, Theorem A (10:1)] wird in [PS2] behandelt, die zweite ist im Wesentlichen diejenige,

²Eine genaue Beschreibung der Problemstellung findet sich in Abschnitt 1.3.

Vorwort

mit der sich diese Arbeit befasst, lediglich der Fall $n = 2$ bleibt hier offen. Wenn es nun gelingt, diesen Fall gesondert zu untersuchen, erhält man dieselben Resultate wie in [PPS] und [MMPS] unter schwächeren Voraussetzungen und von diesem Punkt aus sind im MSS-Projekt bereits weitere Schritte in Planung.

Um das Hauptresultat dieser Arbeit zu beweisen, werden wir wie folgt vorgehen: In den ersten beiden Kapiteln stellen wir einige Werkzeuge für die kommenden Abschnitte bereit und untersuchen die große Untergruppe Q genauer, welche später an vielen Stellen eine wesentliche Rolle spielen wird. Anschließend betrachten wir in Kapitel 3 den Zentralisator eines speziellen Elements $y \in Y_M$ und werden zeigen, dass dieser genau eine Komponente K hat. In diesem Zuge erhalten wir außerdem einige Informationen über die Struktur bestimmter Untergruppen von K , was uns im folgenden Kapitel erlauben wird, die Möglichkeiten für den Isomorphietyp von $K/Z(K)$ unter Ausnutzung der \mathcal{K}_2 -Hypothese auf die drei Gruppen Fi_{22} , BM und $PSU_4(3)$ einzuschränken. Die beiden Fälle $K/Z(K) \cong Fi_{22}$ und $K/Z(K) \cong BM$ lassen eine sehr ähnliche Herangehensweise und schließlich in Kapitel 5 eine Identifizierung von G mittels Resultaten über Standarduntergruppen zu. Der verbleibende Fall $K/Z(K) \cong PSU_4(3)$ gestaltet sich ein wenig komplizierter und wird im letzten Kapitel behandelt, wo wir schließlich $F^*(G)$ mit Hilfe von [MSW] und [PS1] bestimmen können.

Zuletzt ist zu erwähnen, dass meine Diplomarbeit [Pr] bereits einen Spezialfall der hier beschriebenen Situation untersucht. Zum Teil wurden Ergebnisse aus [Pr] in diese Arbeit übernommen und dabei oft überarbeitet und für die hier veränderte Situation angepasst. Derartige Resultate werden an entsprechender Stelle kenntlich gemacht.

Kapitel 1

Einführung

1.1 Notation und Bezeichnungen

In diesem ersten Abschnitt einigen wir uns zunächst auf diverse Schreibweisen und Bezeichnungen, die wir im Verlauf dieser Arbeit verwenden werden.

Abbildungen schreiben wir im Allgemeinen von rechts. So werden wir für eine Gruppe G und einen Automorphismus $\alpha \in \text{Aut}(G)$ das Bild eines Elementes $g \in G$ mit g^α bezeichnen. Analog dazu ist für $g, h \in G$ stets $g^h := h^{-1}gh$ das Bild von g unter dem von h induzierten inneren Automorphismus von G .

Ist N ein Normalteiler der Gruppe G , so verwenden wir Linksnebenklassen für Elemente gN der Faktorgruppe G/N , weil die Verwendung von Rechtsnebenklassen an einigen Stellen zu Mehrdeutigkeiten und Verwechslungen führen könnte.

Ist $n \in \mathbb{N}$ und p eine Primzahl, so bezeichnen wir mit n_p die größte Potenz von p , die n teilt. Entsprechend ist also für eine endliche Gruppe G stets $|G|_p$ die Ordnung einer Sylow- p -Untergruppe von G .

Um die Struktur von Gruppen und ihren Untergruppen zu beschreiben, übernehmen wir großteils die Atlas-Notation (siehe S. xx in [Atl]). Sei p eine Primzahl, dann bezeichnet also beispielsweise $p^4 : A_6$ eine Gruppe mit einem elementarabelschen Normalteiler der Ordnung p^4 , zu dem es ein Komplement isomorph zur alternierenden Gruppe A_6 gibt. Entsprechend steht $2_+^{1+24} \cdot Co_1$ für eine Gruppe mit einem extraspeziellen Normalteiler der Ordnung 2^{25} vom $+$ -Typ, dessen Faktorgruppe isomorph zur einfachen Conway-Gruppe Co_1 ist und zu dem es kein Komplement gibt. Da durch derartige Angaben der Isomorphietyp einer Gruppe im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt ist, schreiben wir $G \sim 2^6.A_8$ um auszusagen, dass G einen elementarabelschen Normalteiler der Ordnung 2^6 mit Faktorgruppe A_8 hat, wobei in diesem Fall keine Aussage darüber getroffen wird, ob die Erweiterung zerfällt oder nicht. Gelegentlich werden wir diese Notation noch erweitern, indem wir konkrete Untergruppen

1. Einführung

unserer betrachteten Gruppe für die vorkommenden Normalteiler verwenden. Sind beispielsweise N und U Untergruppen der Gruppe G , so schreiben wir $U \sim N.A_6$, um auszudrücken, dass N ein Normalteiler von U ist, für den $U/N \cong A_6$ gilt.

Bei der Bezeichnung konkreter Gruppen weichen wir allerdings teilweise von der Notation in [Atl] ab. Für die symmetrische Gruppe auf $n \in \mathbb{N}$ Symbolen wird in dieser Arbeit stets Σ_n anstatt S_n geschrieben. Gelegentlich werden wir auch Gruppen von Permutationen einer konkret gegebenen Menge M betrachten, in diesem Fall notieren wir die symmetrische bzw. alternierende Gruppe auf M als Σ_M bzw. A_M .

Außerdem werden wir beim Umgang mit den klassischen Gruppen die Bezeichnungen aus [Ta] verwenden. Wir schreiben also

$$GL_k(q), SL_k(q), Sp_{2k}(q), O_{2k}^\epsilon(q), \Omega_{2k}^\epsilon(q), O_{2k+1}(q), \Omega_{2k+1}(q) \text{ und } U_k(q)$$

für die im Allgemeinen nicht einfachen klassischen Gruppen. Die daraus gewonnenen einfachen Gruppen notieren wir dann als

$$PSL_k(q), PSP_{2k}(q), P\Omega_{2k}^\epsilon(q), P\Omega_{2k+1}(q) \text{ und } PSU_k(q).$$

1.2 Große Untergruppen

Wir wollen in diesem Abschnitt einige Resultate über große Untergruppen von endlichen Gruppen sammeln. Dazu sei hier p stets eine Primzahl. Zunächst wiederholen wir die Definition einer großen Untergruppe:

1.1 Definition: Eine p -Untergruppe Q einer endlichen Gruppe G heißt große Untergruppe, wenn gilt:

- $C_G(Q) \leq Q$ und
- für $1 \neq A \leq Z(Q)$ ist $N_G(A) \leq N_G(Q)$.

Eine Gruppe G hat Charakteristik p , wenn $C_G(O_p(G)) \leq O_p(G)$ gilt. Dies ist äquivalent zu $F^*(G) = O_p(G)$. Wir erhalten:

1.2 Lemma: Seien G eine endliche Gruppe und Q eine große p -Untergruppe von G . Ist $O_p(G) \neq 1$, so hat G Charakteristik p .

Beweis: Wir betrachten die p -Untergruppe $QO_p(G)$. Es ist $O_p(G) \trianglelefteq QO_p(G)$, daher folgt $O_p(G) \cap Z(QO_p(G)) \neq 1$. Weiter ist $Z(QO_p(G)) \leq C_G(Q) = Z(Q)$. Insgesamt ergibt sich somit $A := O_p(G) \cap Z(Q) \neq 1$.

Sei nun $q \neq p$ eine weitere Primzahl, dann ist $[O_q(G), A] \leq [O_q(G), O_p(G)] = 1$, also ist

$O_q(G) \leq N_G(A) \leq N_G(Q)$ und daher gilt $[O_q(G), Q] \leq O_q(G) \cap Q = 1$. Das liefert $O_q(G) \leq C_G(Q) \leq Q$ und damit $O_q(G) = 1$. Also ist $F(G) = O_p(G)$.

Wir zeigen noch $E(G) = 1$. Dazu nehmen wir an, dass G eine Komponente K enthält. Dann ist genauso $[K, A] \leq [K, O_p(G)] = 1$ und daher $K \leq N_G(A) \leq N_G(Q)$. Nun folgt zum Beispiel mit (31.6)(1) in [As1], dass K in Q liegt oder $[K, Q] = 1$ gilt. Zweiteres führt zu $K \leq C_G(Q) \leq Q$ und daher ebenfalls zu $K \leq Q$. Nun erhalten wir einen Widerspruch, da K keine p -Gruppe sein kann.

Also ist $F^*(G) = F(G) = O_p(G)$, wie gewünscht. \square

Ein endliche Gruppe G hat parabolische Charakteristik p , wenn für jede p -Untergruppe $1 \neq P \leq G$ gilt: Enthält $N_G(P)$ eine volle Sylow- p -Untergruppe von G , so hat $N_G(P)$ Charakteristik p . Wir halten fest:

1.3 Lemma: *Sei G eine endliche Gruppe, die eine große p -Untergruppe Q enthält. Dann hat G parabolische Charakteristik p .*

Beweis: Sei S eine Sylow- p -Untergruppe von G und $1 \neq P \leq S$. Wir können $Q \leq S$ und damit auch $Q \leq N_G(P)$ annehmen. Da Q dann auch eine große p -Untergruppe von $N_G(P)$ ist, liefert uns $1 \neq P \leq O_p(N_G(P))$ zusammen mit 1.2, dass $N_G(P)$ von Charakteristik p ist. Somit folgt die Behauptung. \square

Außerdem gilt:

1.4 Lemma: [Pr, 2.1] *Sei Q eine große p -Untergruppe der Gruppe G . Dann ist auch auch $O_p(N_G(Q))$ eine große Untergruppe von G .*

Beweis: Sei $\tilde{Q} = O_p(N_G(Q))$. Dann ist $Q \leq \tilde{Q}$ und daher $C_G(\tilde{Q}) \leq C_G(Q) \leq Q \leq \tilde{Q}$. Sei $U \neq 1$ eine Untergruppe von $Z(\tilde{Q})$. Dann liegt U auch in $C_G(Q) = Z(Q)$, also folgt $N_G(U) \leq N_G(Q) \leq N_G(\tilde{Q})$. Folglich ist auch \tilde{Q} eine große Untergruppe von G . \square

1.3 Problemstellung und erste Resultate

Wir beschreiben hier die Situation, mit der sich diese Arbeit beschäftigen wird. Dazu benötigen wir zunächst etwas Notation, die wir der Vollständigkeit halber teilweise auch aus dem Vorwort wiederholen.

Sei G eine endliche Gruppe. Dann setzen wir

$$\mathcal{L} := \{L \leq G \mid C_G(O_2(L)) \leq O_2(L) \text{ und } O_2(L) \neq 1\}$$

und

$$\mathcal{M} := \{L \in \mathcal{L} \mid L \text{ ist bezüglich Inklusion maximal in } \mathcal{L}\}.$$

1. Einführung

Ist H ein Untergruppe von G , so sei $\mathcal{M}(H) := \{M \in \mathcal{M} \mid H \leq M\}$. Außerdem existiert nach den Ergebnissen in [MS1] ein eindeutig bestimmter größter elementarabelscher 2-Normalteiler Y_H von H mit $O_2(H/C_H(Y_H)) = 1$. Insbesondere gilt also $Y_H \leq \Omega_1(Z(O_2(H)))$.

Für $M \in \mathcal{L}$ sei $M^\dagger := MC_G(Y_M)$. Weiter sei \mathfrak{M} die Menge aller $M \in \mathcal{L}$, für die gilt

- (a) $\mathcal{M}(M) = \{M^\dagger\}$ und $Y_M = Y_{M^\dagger}$ und
- (b) $C_M(Y_M)$ ist 2-abgeschlossen und $C_M(Y_M)/O_2(M) \leq \Phi(M/O_2(M))$.

Die Gruppe G heißt \mathcal{K} -Gruppe, wenn für jedes $U \leq G$ und $N \trianglelefteq U$ gilt: Ist $|U/N| < |G|$ und U/N eine einfache Gruppe, so ist U/N isomorph zu einer der „bekannten“ einfachen Gruppen, also zu einer zyklischen Gruppe von Primzahlordnung, einer alternierenden Gruppe, einer Gruppe vom Lie-Typ oder einer der 26 sporadischen Gruppen. Sei p eine Primzahl. Dann ist G eine \mathcal{K}_p -Gruppe, wenn jede p -lokale Untergruppe von G eine \mathcal{K} -Gruppe ist.

Nun können wir die Problemstellung dieser Arbeit formulieren. Sie lautet wie folgt:

1.5 Voraussetzung: Sei G eine endliche \mathcal{K}_2 -Gruppe, $S \in \text{Syl}_2(G)$ und $Q \leq S$ eine große 2-Untergruppe von G . Es existiere ein $M \in \mathfrak{M}(S)$, ein $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, und ein $\epsilon \in \{+, -\}$ mit folgenden Eigenschaften:

- (a) $M/O_2(M)$ ist isomorph zu $O_{2n}^{\epsilon}(2)$ oder $\Omega_{2n}^{\epsilon}(2)$.
- (b) $[Y_M, O^2(M)]$ ist ein natürlicher Modul für $M/O_2(M)$.
- (c) Ist $y \in [Y_M, O^2(M)]$ nicht singulär, so ist $C_G(y)$ nicht von Charakteristik 2.
- (d) Q ist nicht normal in M .

Unser Ziel ist es, den folgenden Satz zu beweisen:

1.6 Hauptsatz: Unter der Voraussetzung 1.5 gilt genau einer der folgenden Fälle:

- (a) Es ist $M/O_2(M) \cong \Omega_6^+(2) \cong A_8$ und G ist isomorph zu Fi'_{24} oder Fi_{24} .
- (b) Es ist $M/O_2(M) \cong \Omega_{10}^+(2)$ und G ist isomorph zu F_1 .
- (c) Es ist $M/O_2(M) \cong \Omega_6^+(2)$ oder $O_6^+(2)$ und $F^*(G) \cong P\Omega_8^+(3)$. Weiter ist $Y_M = O_2(M)$.

In allen Fällen liegt Y_M nicht in Q .

Die in 1.5 gegebene Situation entstammt im Wesentlichen [MSS, Theorem C] und umfasst die dort untersuchten Gruppen für $n \geq 3$. Im Vergleich dazu setzen wir hier allerdings implizit voraus, dass $C_M(Y_M) = O_2(M)$ ist (was wir in 1.10 auch noch einmal festhalten werden), allerdings stellt das mit [MSS, Lemma 3.3.(h)] keine Einschränkung dar.

Den Ausgangspunkt für unsere Betrachtungen wird die Untergruppe M bilden. Da $M/O_2(M)$ isomorph zu einer orthogonalen Gruppe ist, stellen wir im folgenden Lemma wichtige Informationen über die Struktur dieser Gruppen bereit, was sich noch oft als nützlich erweisen wird.

1.7 Lemma: Sei V ein natürlicher Modul für $X = O_{2k}^\epsilon(2)$ oder $\Omega_{2k}^\epsilon(2)$, $k \geq 2$. Dann gilt:

(a) X ist transitiv auf der Menge aller nicht singulären Elemente und auf der Menge aller nicht trivialen singulären Elemente von V .

(b) Sei $0 \neq z \in V$ singulär. Dann ist $C_X(z) = AB$ mit:

- $B \cong O_{2k-2}^\epsilon(2)$ für $X = O_{2k}^\epsilon(2)$ und $B \cong \Omega_{2k-2}^\epsilon(2)$ für $X = \Omega_{2k}^\epsilon(2)$.
- A ist elementarabelsch der Ordnung 2^{2n-2} , A und $z^\perp/\langle z \rangle$ sind natürliche Moduln für B .
- Es ist $[z^\perp, A] = \langle z \rangle$ und $C_X(z^\perp) = 1$.
- B operiert irreduzibel auf A und auf $z^\perp/\langle z \rangle$.
- Ist $(2k, \epsilon) \neq (4, +)$, so ist $O_2(C_X(z)) = A \leq \Omega_{2k}^\epsilon(2)$.
- $C_X(z)$ ist eine parabolische Untergruppe von X .

(c) Sei $y \in V$ nicht singulär. Dann ist $C_X(y) = C \times E$ mit:

- E ist isomorph zu $Sp_{2k-2}(2) \cong O_{2k-1}(2)$, y^\perp ist ein natürlicher $O_{2k-1}(2)$ -Modul für E und $y^\perp/\langle y \rangle$ ist ein natürlicher $Sp_{2k-2}(2)$ -Modul für E .
- $C \cong C_2$ für $X = O_{2k}^\epsilon(2)$ und $C = 1$ für $X = \Omega_{2k}^\epsilon(2)$.
- Für $X = O_{2k}^\epsilon(2)$ ist $C = C_X(y^\perp)$ und $[V, C] = \langle y \rangle$.
- Sei \mathcal{Z} die Menge der nicht trivialen, singulären Elemente in y^\perp . Dann ist E transitiv auf \mathcal{Z} und es gilt $y^\perp = \langle \mathcal{Z} \rangle$.
- $C_X(y)$ ist keine parabolische Untergruppe von X .

Beweis: Die Aussagen für $X = O_{2k}^\epsilon(2)$ findet man z.B. in 3.1 in [MSS]. Daraus folgen dann auch die Behauptungen für $X = \Omega_{2k}^\epsilon(2)$ entsprechend. \square

1. Einführung

1.8 Bezeichnung: Wir wählen ein singuläres Element $z \in [Y_M, O^2(M)]^\#$ und ein nicht singuläres $y \in [Y_M, O^2(M)]$ mit $y \perp z$. Aus 1.7 folgt, dass singuläre Elemente 2-zentral in M sind, also können wir ohne Einschränkung $z \in Z(S)$ wählen. Diese Bezeichnungen werden wir für den Rest dieser Arbeit beibehalten.

Dabei gilt:

1.9 Lemma: Wir können y in 1.8 so wählen, dass $S \cap C_M(y)$ eine Sylow-2-Untergruppe von $C_M(y)$ ist.

Beweis: Angenommen, es ist $S \cap C_M(y) \notin \text{Syl}_2(C_M(y))$. Wir betrachten die Operation von $Sp_{2n-2}(2)$ auf dem natürlichen Modul. Der Stabilisator eines nicht trivialen Vektors ist eine parabolische Untergruppe von $Sp_{2n-2}(2)$, mit 1.7(c) enthält $C_M(\langle y, z \rangle)$ also eine Sylow-2-Untergruppe S_1 von $C_M(y)$. Nun gibt es ein $g \in C_M(z)$ mit $S_1^g \leq S$. Dann ist $S \cap C_M(y^g) = S \cap C_M(y)^g = S_1^g \in \text{Syl}_2(C_M(y^g))$. Außerdem gilt auch $y^g \perp z$, weil $g \in C_M(z)$ die Bilinearform auf $[Y_M, O^2(M)]$ erhält. Also können wir y in diesem Fall durch y^g ersetzen. \square

1.10 Lemma: Es gilt $C_M([Y_M, O^2(M)]) = C_M(Y_M) = O_2(M)$ und $Y_M = \Omega_1(Z(O_2(M)))$.

Beweis: Sei $Z := \Omega_1(Z(O_2(M)))$. Dann ist $[Y_M, O^2(M)] \leq Y_M \leq Z$. Weil $[Y_M, O^2(M)]$ der natürliche Modul für $M/O_2(M)$ ist, können wir $O_2(M) \geq C_M([Y_M, O^2(M)]) \geq C_M(Y_M) \geq C_M(Z)$ schließen und erhalten damit $C_M([Y_M, O^2(M)]) = C_M(Y_M) = C_M(Z) = O_2(M)$. Daher ist insbesondere $O_2(M/C_M(Z))$ trivial und es folgt auch $Y_M = Z$. \square

Das folgende Lemma liefert wichtige Informationen über den Modul $[Y_M, O^2(M)]$. Die Beweisidee entstammt dabei im Wesentlichen Lemma 3.3. (f) in [MSS].

1.11 Lemma: Es ist $[Y_M, O^2(M)] = Y_M$, oder es ist $(2n, \epsilon) = (6, +)$ und Y_M ist ein Faktormodul der Ordnung 2^7 des natürlichen Permutationsmoduls für $O_6^+(2) \cong \Sigma_8$. In diesem Spezialfall ist also $Y_M \cong \langle v_1, \dots, v_8 \rangle / \langle v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_8 \rangle$ und $M/O_2(M) \cong O_6^+(2) \cong \Sigma_8$ bzw. $M/O_2(M) \cong \Omega_6^+(2) \cong A_8$ operiert darauf durch Vertauschung der Indizes.

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass $C_{Y_M}(O^2(M)) = 1$ ist. Anderenfalls ist $C_{Y_M}(O^2(M))$ ein nicht trivialer 2-Normalteiler von M und es folgt $Z(S) \cap C_{Y_M}(O^2(M)) \neq 1$. Nun gilt aber $M = O^2(M)S$, also liegt $Z(S) \cap C_{Y_M}(O^2(M))$ in $Z(M) \neq 1$. Weil Q eine große 2-Untergruppe von G ist, erhalten wir $Z(M) \leq Z(Q)$ und dann $Q \trianglelefteq N_M(Z(M))$. Damit ist insbesondere Q normal in M , was aber unserer Voraussetzung 1.5 (d) widerspricht.

Folglich ist $C_{Y_M}(O^2(M)) = 1$ und wir erhalten mit 6.1 in [MS2] die Behauptung. \square

Also ist Y_M der natürliche Modul für $M/O_2(M)$, oder es ist $(2n, \epsilon) = (6, +)$ und $|Y_M| = 2^7$. Den Ausnahmefall $Y_M \neq [Y_M, O^2(M)]$ werden wir zwar oft gesondert betrachten müssen,

allerdings ist dabei die Operation von $M/O_2(M)$ auf Y_M besonders einfach zu verstehen und dies werden wir uns zunutze machen. Wir schreiben dann für einen Vektor

$$v\langle v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_8 \rangle \in \langle v_1, \dots, v_8 \rangle / \langle v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_8 \rangle \cong Y_M$$

verkürzend einfach \bar{v} . Dabei ist $[Y_M, O^2(M)] = \langle \overline{v_1 v_2}, \overline{v_1 v_3}, \overline{v_1 v_4}, \overline{v_1 v_5}, \overline{v_1 v_6}, \overline{v_1 v_7} \rangle$ der natürliche Modul für $M/O_2(M)$. Weiterhin können wir in diesem Fall y und z speziell wählen bzw. konkret angeben. So ist $\overline{v_1 v_2 v_3 v_4}$ ein singuläres Element von $[Y_M, O^2(M)]$, das senkrecht auf dem nicht singulären Vektor $\overline{v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6} = \overline{v_7 v_8}$ steht. Daher halten wir fest:

1.12 Definition: Im Falle $(2n, \epsilon) = (6, +)$ wählen wir $z := \overline{v_1 v_2 v_3 v_4}$ und $y := \overline{v_7 v_8}$.

1.13 Lemma: Es ist entweder $\Phi(O_2(M)) = 1$ und damit $O_2(M) = Y_M$, oder es gilt $[Y_M, O^2(M)] \leq \Phi(O_2(M))$.

Beweis: Im Fall $\Phi(O_2(M)) = 1$ ist $O_2(M)$ elementarabelsch und 1.10 liefert uns schon $Y_M = O_2(M)$. Sei also $\Phi(O_2(M)) \neq 1$. Dann folgt

$$\Phi(O_2(M)) \cap \Omega_1(Z(O_2(M))) = \Phi(O_2(M)) \cap Y_M \neq 1.$$

Ist $[Y_M, O^2(M)] = Y_M$, so folgt wegen der irreduziblen Operation von $M/O_2(M)$ auf $[Y_M, O^2(M)] = Y_M$ schon $Y_M \leq \Phi(O_2(M))$. Aber auch in dem in 1.11 aufgeführten Spezialfall $(2n, \epsilon) = (6, +)$ und $|Y_M| = 2^7$ sind Y_M und $[Y_M, O^2(M)]$ die einzigen beiden nicht trivialen, unter $M/O_2(M)$ invarianten Untergruppen von Y_M und es folgt ebenfalls die Behauptung. \square

1.14 Lemma: Die Gruppe G hat parabolische Charakteristik 2.

Beweis: Nach Voraussetzung hat G eine große 2-Untergruppe, also folgt die Behauptung mit 1.3. \square

1.15 Lemma: Ist p eine Primzahl und H eine endliche Gruppe mit $F^*(H) = O_p(H)$, so hat H lokale Charakteristik p .

Beweis: Sei $1 \neq P$ eine p -Untergruppe von H und $R := O_p(N_H(P))$. Sei außerdem $x \in C_H(R)$ ein p' -Element. Dann operiert $\langle x \rangle \times R$ auf $O_p(H)$ und es ist

$$C_{O_p(H)}(R) = O_p(H) \cap C_H(R) \leq O_p(H) \cap C_H(P) \leq O_p(H) \cap N_H(P) \leq O_p(N_H(P)) = R.$$

Es folgt nun $[x, C_{O_p(H)}(R)] = 1$, das $A \times B$ -Lemma (siehe z.B. (24.2) in [As1]) liefert uns $x \in C_H(O_p(H)) \leq O_p(H)$ und damit $x = 1$. Insgesamt ist also $C_H(R)$ eine p -Gruppe und es folgt die Behauptung. \square

1. Einführung

1.16 Lemma: *Es ist $O_2(G) = 1$.*

Beweis: Wir nehmen $O_2(G) \neq 1$ an. Mit 1.2 ist dann $F^*(G) = O_2(G)$, da G nach Voraussetzung eine große 2-Untergruppe enthält. Nun liefert 1.15, dass G lokale Charakteristik 2 hat. Allerdings ist $C_G(y)$ nach Voraussetzung nicht von Charakteristik 2, ein Widerspruch. \square

Die Beweisidee für folgendes Lemma stammt im Wesentlichen aus Lemma 3.5 in [MSS].

1.17 Lemma: *Sei $O_2(M) = Y_M$. Dann ist $N_G([Y_M, O^2(M)]) = N_G(Y_M) = M$.*

Beweis: Wir betrachten $M^\dagger = MC_G(Y_M)$. Dann ist Y_M normal in M^\dagger . Weil S in $M \leq M^\dagger$ liegt, folgt $O_2(M^\dagger) \leq S \leq M$ und wir erhalten $O_2(M^\dagger) = O_2(M) = Y_M$. Außerdem ist M^\dagger ein Element von \mathcal{L} und daher gilt $C_G(Y_M) = C_G(O_2(M^\dagger)) \leq O_2(M^\dagger) = Y_M$. Folglich ist $M = M^\dagger \in \mathcal{M}$ ein bezüglich Inklusion maximales Element von \mathcal{L} . Die Untergruppen $N_G([Y_M, O^2(M)])$ und $N_G(Y_M)$ sind 2-lokal und enthalten M , folglich sind sie zudem parabolisch. Wegen Lemma 1.14 liegen sie in $\mathcal{L}(M)$ und damit auch in M . \square

Außerdem wird folgendes Lemma oft hilfreich sein:

1.18 Lemma: *Sei $1 \neq v \in [Y_M, O^2(M)]$ singulär und sei $w \in [Y_M, O^2(M)]$ nicht singulär. Dann sind v und w in G nicht konjugiert. Insbesondere ist z in G weder zu y noch zu yz konjugiert.*

Beweis: Nach 1.7 (b) ist $C_G(v)$ eine parabolische Untergruppe von G und hat daher laut 1.14 Charakteristik 2, während $C_G(w)$ nach Voraussetzung 1.5 (c) nicht von Charakteristik 2 ist. Folglich können v und w nicht konjugiert sein. \square

1.4 Allgemeine Resultate

Bevor wir mit der Untersuchung der in 1.5 geschilderten Situation fortfahren, sammeln wir in diesem Abschnitt noch einige allgemeine Ergebnisse für eine spätere Verwendung. Dabei ist 1.19 (a) im Wesentlichen aus [Pr, 1.26] entnommen.

1.19 Lemma: *Sei P eine extraspezielle 2-Gruppe mit $Z(P) = \langle x \rangle$ und $|P| > 8$. Sei weiterhin $t \in P \setminus Z(P)$ eine Involution. Dann gilt:*

- (a) *Es ist $|P : C_P(t)| = 2$ und $C_P(t) = \langle t \rangle \times U$, wobei $U \leq P$ ebenfalls extraspeziell mit Zentrum $\langle x \rangle$ ist.*
- (b) *Ist $\alpha \in \text{Aut}(P)$ mit $[C_P(t), \alpha] = 1$, so ist schon $\alpha \in \text{Inn}(P)$.*

Beweis:

- (a) Zunächst ist $P' = \langle x \rangle$, also ist $t^P = \{t, tx\}$ und wir erhalten $|P : C_P(t)| = 2$.
 Da $C_P(t)/\langle x \rangle$ elementarabelsch ist, können wir eine Untergruppe $U \leq P$ so wählen, dass $U/\langle x \rangle$ ein Komplement zu $\langle t \rangle \langle x \rangle / \langle x \rangle$ in $C_P(t)/\langle x \rangle$ ist. Dann gilt $C_P(t) = \langle t \rangle \times U$ und auch $U/\langle x \rangle$ ist elementarabelsch, also müssen wir nur noch $Z(U) = \langle x \rangle$ zeigen.
 Nach Voraussetzung ist $|P| > 8$, daher gilt auch $|U| \geq 8$. Wir nehmen $Z(U) > \langle x \rangle$ an. Für $s \in Z(U) \setminus \langle x \rangle$ gilt dann $C_P(s) = C_P(t)$. Jedes $g \in C_P(t)$ erfüllt nun $(st)^g = st$, aber auch für $g \in P \setminus C_P(t)$ gilt $(st)^g = s^g t^g = sxtx = st$ und wir erhalten den Widerspruch $st \in Z(P)$.
- (b) Wegen $[C_P(t), \alpha] = 1$ folgt aus (a) schon $|P : C_P(\alpha)| \leq 2$. Daher gibt es ein $c \in C_P(t)$ mit $[P, \alpha] = \langle c \rangle$.
 Nun ist $[C_P(t), P, \alpha] = [\langle x \rangle, \alpha] = 1 = [\alpha, C_P(t), P]$, das Drei-Untergruppen-Lemma liefert uns $[P, \alpha, C_P(t)] = [\langle c \rangle, C_P(t)] = 1$. Also ist $c \in Z(C_P(t))$. Wir verwenden erneut (a) und erhalten, dass $o(c) \leq 2$ ist. Wir nehmen nun an, dass $c \notin Z(P) = \langle x \rangle$ ist, insbesondere ist dann $o(c) = 2$ und $C_P(c) = C_P(t)$. Sei dann $g \in P \setminus C_P(t)$. Es ist $g^2 \in C_P(t) \leq C_P(\alpha)$ und daher folgt

$$g^2 = (g^2)^\alpha = (g^\alpha)^2 = gcgc = gg^c = ggx = g^2x,$$

was zu dem Widerspruch $x = 1$ führt. Folglich ist $c \in Z(P)$. Ist $c = 1$, so ist α die Identität, für $c = x$ ist $g^\alpha = g^t$ für alle $g \in P$, also ist α ein innerer Automorphismus.

□

1.20 Lemma: Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Ist $|Sp_{2n}(2)'|$ ein Teiler $|GL_m(2)|$, so ist $2n \leq m$.

Beweis: Es ist $|GL_m(2)| = 2^{m(m-1)/2} \prod_{i=1}^m (2^i - 1)$, $|Sp_{2n}(2)| = 2^{n^2} \prod_{i=1}^n (2^{2i} - 1)$ und $Sp_{2n}(2)'$ hat in $Sp_{2n}(2)$ höchstens Index 2. Sei zunächst $n \neq 3$. Dann gibt es nach Zsigmondy eine Primzahl p , die $2^{2n} - 1$ teilt, aber kein Teiler von $2^k - 1$ für $k < 2n$ ist. Damit erhalten wir direkt $m \geq 2n$.

Für $n = 3$ ist $|Sp_6(2)'| = 2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$ kein Teiler von $|GL_5(2)| = 2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 31$ und wir erhalten auch hier $m \geq 6 = 2n$. □

1.21 Lemma: Sei H eine endliche Gruppe und sei $\tau \in H$ eine Involution. Gibt es ein $k \geq 3$ und eine Untergruppe $T \leq H$ mit $T \cong D_{2^k}$ so, dass $S := \langle \tau \rangle \times T$ eine Sylow-2-Untergruppe von H ist, so hat H eine Untergruppe U vom Index 2 mit $\tau \notin U$. Insbesondere ist dann eine Sylow-2-Untergruppe von U isomorph zu D_{2^k} .

Beweis: Angenommen, τ liegt in H' . Dann ist τ nach Proposition 15.15. in [GLS2] zu einem Element $t \in S$ mit $|C_S(t)| \geq |C_S(\tau)| = |S|$ konjugiert. Es folgt $t \in Z(T) \leq Z(S)$. Nach dem

1. Einführung

Lemma von Burnside (7.1.5. in [KS]) gibt es ein $h \in N_H(S)$ mit $\tau^h = t$. Da aber $t \in \Phi(S)$ und $\tau \notin \Phi(S)$ gilt, ist dies ein Widerspruch und es folgt $\tau \notin H'$. Weil $\langle \tau \rangle$ ein Komplement in S hat, gibt es auch ein Komplement U/H' zu $\langle gH' \rangle$ in H/H' , dabei hat U die gewünschten Eigenschaften. \square

1.22 Lemma: Seien q eine ungerade Primzahlpotenz, $m, k \in \mathbb{N}$ und $U \leq GL_m(q)$ eine elementarabelsche 2-Gruppe der Ordnung 2^k . Dann ist $m \geq k$.

Beweis: Da jedes Element aus U diagonalisierbar und zudem U abelsch ist, sind die Elemente aus U simultan diagonalisierbar. Folglich ist U isomorph zu einer Untergruppe der Gruppe aller $m \times m$ -Diagonalmatrizen mit Diagonaleinträgen 1 und -1 . Da diese Gruppe die Ordnung 2^m hat, folgt nun die Behauptung. \square

1.23 Lemma: Sei H eine quasia einfache Gruppe und p ein Primzahl. Seien weiter $g \in Z(H)$ ein p -Element und $P \in \text{Syl}_p(H)$. Dann ist $g \in \Phi(P)$.

Beweis: Sei T eine maximale Untergruppe von P und $Z := T \cap \langle g \rangle$. Dann ist P/Z eine Sylow- p -Untergruppe von H/Z und $\langle gZ \rangle \leq Z(H/Z)$ hat in P/Z das Komplement T/Z . Der Satz von Gaschütz liefert nun ein Komplement zu $\langle gZ \rangle$ in H/Z . Da H/Z perfekt ist, folgt $g \in T$. \square

1.24 Lemma: Seien p und q verschiedene Primzahlen, sei V ein endlichdimensionaler $GF(p)$ -Vektorraum und $1 \neq A \leq \text{Aut}(V)$ eine elementarabelsche q -Gruppe mit $C_V(A) = 0$. Sei weiter $\mathcal{H} := \{H \leq A \mid |A : H| = q\}$ die Menge aller Hyperebenen von A . Dann gilt

$$V = \bigoplus_{H \in \mathcal{H}} C_V(H).$$

Beweis: Seien H_1, \dots, H_m paarweise verschieden und so, dass $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_m\}$ ist. Mit [KS, 8.3.4. a)] gilt $V = \sum_{i=1}^m C_V(H_i)$, wir müssen also nur noch zeigen, dass diese Summe direkt ist.

Für $m = 1$ ist nichts zu beweisen, wir nehmen also $m > 1$ an. Dann ist $C_V(H_1) \cap C_V(H_2) = C_V(\langle H_1, H_2 \rangle) = C_V(A) = 0$. Sei nun $k \in \{2, \dots, m-1\}$ und $v \in \left(\sum_{i=1}^k C_V(H_i) \right) \cap C_V(H_{k+1})$. Per Induktion ist $\sum_{i=1}^k C_V(H_i) = \bigoplus_{i=1}^k C_V(H_i)$, also ist $v = v_1 + \dots + v_k$ mit eindeutig bestimmten $v_i \in C_V(H_i)$. Für alle $i \in \{1, \dots, k\}$ ist $C_V(H_i)$ unter H_{k+1} invariant und es gilt $[v, H_{k+1}] = 0$, damit erhalten wir auch $[v_i, H_{k+1}] = 0$ und $v_i \in C_V(H_i) \cap C_V(H_{k+1}) = 0$. Insgesamt ist $v = 0$, also folgt $\sum_{i=1}^{k+1} C_V(H_i) = \bigoplus_{i=1}^{k+1} C_V(H_i)$ und so auch die Behauptung. \square

Weil wir es oft brauchen werden, halten wir noch fest:

1.25 Lemma: *Die Ordnung jeder quasieinfachen endlichen Gruppe ist durch 4 teilbar.*

Beweis: Sei L eine quasieinfache endliche Gruppe. Dann ist die Ordnung von L mit [FT] gerade. Hätte eine Sylow-2-Untergruppe von L Ordnung 2, so gäbe es in L nach [KS, 7.2.2.] ein normales 2-Komplement und wir erhalten einen Widerspruch. Also wird $|L|$ von 4 geteilt. \square

Kapitel 2

Die große Untergruppe Q

Nach Voraussetzung besitzt G eine große 2-Untergruppe und wie wir beispielsweise bereits in 1.14 und 1.16 gesehen haben, zieht dies erhebliche Auswirkungen bezüglich der Struktur von G nach sich. Auch in vielen unserer folgenden Untersuchungen wird die große Untergruppe Q eine zentrale Rolle spielen, darum tragen wir in diesem Abschnitt einige wichtige Informationen über Q zusammen. Große Teile wurden dabei, oft in überarbeiteter Form, aus [Pr] übernommen. So findet man für 2.1, viele Aussagen aus 2.2, 2.3, 2.6, 2.7, 2.8 und 2.9 ähnliche Resultate in [Pr, Kapitel 2].

Zuerst stellen wir fest:

2.1 Lemma: *Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $Q = O_2(N_G(Q))$ ist.*

Beweis: Laut 1.4 gibt es eine große Untergruppe \tilde{Q} von G , die $\tilde{Q} = O_2(N_G(\tilde{Q}))$ erfüllt. Wir können Q ohne Einschränkung auf diese Weise wählen. \square

2.2 Lemma: (a) *Es ist $z \in Z(Q)$, insbesondere ist Q normal in $C_G(z)$.*

(b) *Es gilt $QO_2(M) = O_2(C_M(z))$, $QO_2(M)/O_2(M)$ ist elementarabelsch der Ordnung 2^{2n-2} und es ist $[z^\perp, Q] = \langle z \rangle$.*

(c) *Es ist $C_{z^\perp}(Q) = \langle z \rangle$. Insbesondere ist $[x, Q] = \langle z \rangle$ für alle $x \in z^\perp \setminus \langle z \rangle$.*

(d) *Es ist $C_Q(z^\perp) \leq O_2(M)$. Insbesondere ist $[z^\perp, q] = \langle z \rangle$ für alle $q \in Q \setminus O_2(M)$.*

(e) *Sei $k \in \{0, \dots, 2n - 2\}$ und $U \leq Q$ mit $|UO_2(M)/O_2(M)| = 2^{2n-2-k}$. Dann ist $|C_{z^\perp}(U)| = 2^{k+1}$.*

(f) *Sei $w \in [Y_M, O^2(M)] \setminus z^\perp$ und $q \in Q \setminus O_2(M)$. Dann ist $[w, q] \notin \langle z \rangle$. Insbesondere ist $C_Q(w) \leq O_2(M)$.*

2. Die große Untergruppe Q

(g) Es ist $[[Y_M, O^2(M)], Q] = z^\perp$. Für $w \in [Y_M, O^2(M)] \setminus z^\perp$ gilt außerdem $[w, Q]\langle z \rangle / \langle z \rangle = z^\perp / \langle z \rangle$.

(h) Es ist $z^\perp \leq Q$.

Beweis:

(a) Wir haben z in 1.8 als Element von $Z(S)$ gewählt. Weil Q in S liegt und Q eine große Untergruppe von G ist, folgt nun $z \in C_G(Q) = Z(Q)$ und $Q \leq N_G(\langle z \rangle) = C_G(z)$.

(b) Mit (a) ist Q normal in $C_M(z)$. Angenommen, es ist $Q \leq O_2(M)$. Dann ist $Z(O_2(M)) \leq C_G(Q) = Z(Q)$ und wir erhalten $M = N_M(Z(O_2(M))) \leq N_M(Q)$, was aber 1.5 (d) widerspricht. Somit folgt $1 \neq QO_2(M)/O_2(M) \leq O_2(C_M(z)/O_2(M)) =: A$. Laut 1.7 (b) ist A elementarabelsch der Ordnung 2^{2n-2} und $C_M(z)/O_2(M)$ operiert irreduzibel auf A , also erhalten wir $QO_2(M)/O_2(M) = A$. Demnach ist $QO_2(M) = O_2(C_M(z))$ und $QO_2(M)/O_2(M)$ ist elementarabelsch der Ordnung $|A| = 2^{2n-2}$. Außerdem gilt $[z^\perp, Q] = [z^\perp, A] = \langle z \rangle$.

(c) Wegen $z \in Z(Q)$ ist $z \in C_{z^\perp}(Q)$, außerdem ist $C_{z^\perp}(Q)$ normal in $C_M(z)$. Wir verwenden erneut 1.7 (b) und erhalten, dass $C_M(z)$ irreduzibel auf $z^\perp / \langle z \rangle$ operiert. Also ist $C_{z^\perp}(Q) = \langle z \rangle$ oder $C_{z^\perp}(Q) = z^\perp$. Da mit (b) aber $[z^\perp, Q] = \langle z \rangle \neq 1$ folgt, ist $C_{z^\perp}(Q) = \langle z \rangle$.

(d) Mit 1.7 (b) ist $C_M(z^\perp) \leq O_2(M)$, also folgt insbesondere die Behauptung.

(e) Wir führen den Beweis per Induktion nach k . Für $k = 0$ ist $U(O_2(M) \cap Q) = Q$, also folgt mit (c) schon $|C_{z^\perp}(U)| = 2$.

Sei nun $k > 0$. Nach (b) ist $QO_2(M)/O_2(M)$ elementarabelsch, wir können daher Elemente $x_1, \dots, x_{2n-2} \in Q$ so wählen, dass $QO_2(M)/O_2(M) = \langle x_1, \dots, x_{2n-2} \rangle$ und $UO_2(M)/O_2(M) = \langle x_1, \dots, x_{2n-2-k} \rangle$ ist. Dann ist $C_{z^\perp}(U) = \bigcap_{i=1}^{2n-2-k} C_{z^\perp}(x_i)$. Wegen (d) gilt $[z^\perp, x_i] = \langle z \rangle$ für alle $i \in \{1, \dots, 2n-2\}$, also folgt $|z^\perp : C_{z^\perp}(x_i)| = 2$. Das führt zu

$$|z^\perp : C_{z^\perp}(U)| = |z^\perp : \bigcap_{i=1}^{2n-2-k} C_{z^\perp}(x_i)| \leq 2^{2n-2-k}$$

und wir erhalten $|C_{z^\perp}(U)| \geq 2^{k+1}$. Per Induktion ist aber $|C_{z^\perp}(\langle U, x_{2n-2-k+1} \rangle)| = |C_{z^\perp}(U) \cap C_{z^\perp}(x_{2n-2-k+1})| = 2^k$, also folgt die Gleichheit und damit die Behauptung.

(f) Für $w \in [Y_M, O^2(M)] \setminus z^\perp$ ist $[Y_M, O^2(M)] = z^\perp \times \langle w \rangle$. Sei $q \in Q \setminus O_2(M)$, dann gilt $[w, q] \in z^\perp$, da q die Hyperebene z^\perp normalisiert. Wir nehmen $[w, q] \in \langle z \rangle$ an. Dann ist $[[Y_M, O^2(M)], q] = [z^\perp, q][\langle w \rangle, q] = \langle z \rangle$, also induziert $qO_2(M) \in M/O_2(M) \lesssim O_{2n}^\epsilon(2)$ eine Transvektion zu dem singulären Vektor z . Dies widerspricht aber beispielsweise 11.11 in [Ta].

2. Die große Untergruppe Q

- (g) Für $w \in [Y_M, O^2(M)] \setminus z^\perp$ ist wieder $[Y_M, O^2(M)] = z^\perp \times \langle w \rangle$ und wir erhalten $[[Y_M, O^2(M)], Q] = [z^\perp, Q][w, Q] = \langle z \rangle[w, Q] \leq z^\perp$. Mit (f) folgt $[w, Q] \not\leq \langle z \rangle$ und da $[[Y_M, O^2(M)], Q]$ normal in $C_M(z)$ ist und $C_M(z)$ nach 1.7 (b) irreduzibel auf $z^\perp/\langle z \rangle$ operiert, gilt $[[Y_M, O^2(M)], Q] = z^\perp$ und damit auch $[w, Q]\langle z \rangle = z^\perp$.
- (h) Es ist $[Y_M, O^2(M)] \leq C_G(z) \leq N_G(Q)$ und daher $[[Y_M, O^2(M)], Q] \leq Q$. Nach (g) ist $[[Y_M, O^2(M)], Q] = z^\perp$ und es folgt die Behauptung.

□

2.3 Lemma: *Es ist $|Q : C_Q(y)| = 2$ und $y^Q = \{y, yz\}$. Außerdem gilt $C_{Y_M}(C_Q(y)) = \langle y, z \rangle$ und $|C_Q(y)O_2(M)/O_2(M)| = 2^{2n-3}$.*

Beweis: Laut 2.2 (c) ist $[y, Q] = \langle z \rangle$. Daraus folgt $y^Q = \{y, yz\}$ und auch $|Q : C_Q(y)| = 2$. Damit erhalten wir aus 2.2 (b) außerdem $|C_Q(y)O_2(M)/O_2(M)| = 2^{2n-3}$.

Mit 2.2 (f) ist nun $C_{[Y_M, O^2(M)]}(C_Q(y)) \leq z^\perp$ und 2.2 (e) liefert uns schon $|C_{z^\perp}(C_Q(y))| = 4$, daher ist insgesamt $C_{[Y_M, O^2(M)]}(C_Q(y)) = \langle y, z \rangle$. Gilt also $Y_M = [Y_M, O^2(M)]$, so sind wir fertig. Anderenfalls ist nach 1.11 schon $(2n, \epsilon) = (6, +)$ und Y_M ist ein Faktormodul des natürlichen Permutationsmoduls für $M/O_2(M) \cong A_8$ oder Σ_8 und wie in 1.12 können wir dann $z = \overline{v_1 v_2 v_3 v_4}$ und $y = \overline{v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6} = \overline{v_7 v_8}$ annehmen. Mit 2.2 (b) ist

$$QO_2(M)/O_2(M) = O_2(C_M(z)/O_2(M)) \cong \langle (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (5, 6)(7, 8), (5, 7)(6, 8) \rangle$$

und entsprechend gilt

$$C_Q(y)O_2(M)/O_2(M) \cong \langle (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (5, 6)(7, 8) \rangle.$$

Damit erhält man nun auch, dass kein Element von $Y_M \setminus [Y_M, O^2(M)]$ von $C_Q(y)$ zentralisiert wird. □

Außerdem werden wir folgendes Lemma benötigen:

2.4 Lemma: *$C_G(C_Q(y))$ ist eine 2-Gruppe.*

Beweis: Es ist $z \in C_Q(y)$, daher gilt $C_G(C_Q(y)) \leq C_G(z) \leq N_G(Q)$.

Sei nun $g \in C_G(C_Q(y))$ ein Element ungerader Ordnung, dann operiert $\langle g \rangle$ teilerfremd auf Q . Dabei zentralisiert $\langle g \rangle$ einerseits $C_Q(y)$ und, wegen $|Q : C_Q(y)| = 2$, auch $Q/C_Q(y)$. Wir verwenden 8.2.2. b) aus [KS] und erhalten $g \in C_G(Q) \leq Q$. Daraus folgt $g = 1$ und somit die Behauptung. □

2. Die große Untergruppe Q

Wir notieren noch folgendes Resultat, das im späteren Verlauf dieser Arbeit hilfreich sein wird, um die Untergruppe Q zu bestimmen, nachdem wir G identifiziert haben:

2.5 Lemma: *Ist $O_2(C_G(z))$ extraspeziell, so ist $Q = O_2(C_G(z))$.*

Beweis: Nach 2.2 (a) ist Q enthalten in $O_2(C_G(z))$. Außerdem liegt z in $Z(O_2(C_G(z)))$, also ist $Q' \leq O_2(C_G(z))' = \langle z \rangle$. Weil Q beispielsweise nach 2.3 nicht abelsch ist, folgt $Q' = \langle z \rangle$. Daher ist insgesamt

$$N_G(Q) \leq N_G(Q') = C_G(z) \leq N_G(Q)$$

und wir erhalten insbesondere $O_2(N_G(Q)) = O_2(C_G(z))$. Nun liefert uns 2.1 die Behauptung. \square

Wir werden uns später einige Male mit dem Spezialfall $O_2(M) = Y_M$ beschäftigen müssen, darum halten wir hier noch einige Informationen über Q in dieser besonderen Situation fest:

2.6 Lemma: *Sei $O_2(M) = Y_M$. Ist $N_G(Q) \not\leq M$, so ist $Q \cap Y_M = z^\perp$.*

Beweis: Laut 2.2 (h) ist $z^\perp \leq Q$. Wir nehmen nun $z^\perp < Q \cap Y_M$ an.

Sei zunächst $[Y_M, O^2(M)] = Y_M$. Dann ist $Y_M \leq Q$. Sei weiter $W \leq Q$ eine elementarabelsche Untergruppe mit $W \not\leq Y_M$. Laut 2.2 (f) zentralisiert kein Element von $Q \setminus Y_M$ ein Element aus $Y_M \setminus z^\perp$. Da W abelsch ist, folgt $W \cap Y_M \leq C_{z^\perp}(W)$. Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ so, dass $|WY_M/Y_M| = 2^{2n-2-k}$ ist, dann liefert uns 2.2 (e) schon

$$|W| = |W \cap Y_M| \cdot |WY_M/Y_M| \leq |C_{z^\perp}(W)| \cdot |WY_M/Y_M| = 2^{k+1} \cdot 2^{2n-2-k} = 2^{2n-1} < |Y_M|.$$

Also gilt $Y_M = J(Q)$ und daher $N_G(Q) \leq N_G(Y_M)$. Nach 1.17 ist $N_G(Y_M) = M$, also folgt $N_G(Q) \leq M$, ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Sei nun $(2n, \epsilon) = (6, +)$ und $|Y_M| = 2^7$. Im Fall $Q \cap Y_M = [Y_M, O^2(M)]$ folgt wie oben $J(Q) = [Y_M, O^2(M)]$ und nach 1.17 ist auch $N_G([Y_M, O^2(M)]) = M$. Damit erhalten wir wieder $N_G(Q) \leq M$ und so erneut einen Widerspruch.

Sonst enthält Q ein Element aus $Y_M \setminus [Y_M, O^2(M)]$, also ein Element der Form \bar{v}_i mit einem $i \in \{1, \dots, 8\}$ oder ein Element der Form $\overline{v_i v_j v_k}$ mit paarweise verschiedenen $i, j, k \in \{1, \dots, 8\}$. Nun ist M/Y_M isomorph zu A_8 oder Σ_8 und wegen $z \stackrel{1.12}{=} \overline{v_1 v_2 v_3 v_4}$ ist $C_M(z)/O_2(M)$ der Stabilisator der Zerlegung $\{1, 2, 3, 4\} \cup \{5, 6, 7, 8\}$. Dann gibt es in Y_M keinen echten Teilmodul, der unter $C_M(z)$ invariant ist und eines der obigen Elemente enthält. Weil Q von $C_M(z)$ normalisiert wird, folgt nun $Y_M \leq Q$. Sei wieder W eine elementarabelsche Untergruppe von Q mit $W \not\leq Y_M$ und sei $k \in \mathbb{N}$ mit $|WY_M/Y_M| = 2^{4-k}$. Mit 2.2 (f) und (e) ist erneut $|W \cap [Y_M, O^2(M)]| \leq 2^{k+1}$ und daher gilt

$$|W| = |W \cap Y_M| \cdot |WY_M/Y_M| \leq |W \cap [Y_M, O^2(M)]| \cdot 2 \cdot |WY_M/Y_M| \leq 2^{k+1} \cdot 2 \cdot 2^{4-k} = 2^6 < |Y_M|.$$

Es folgt also ebenfalls $Y_M = J(Q)$ und somit $N_G(Q) \leq N_G(Y_M) = M$, ein Widerspruch. \square

2.7 Lemma: Sei $O_2(M) = Y_M$. Dann gilt $Z(Q) = \langle z \rangle$ und $C_G(z) = N_G(Q)$.

Beweis: Laut 2.2 (a) ist $z \in Z(Q)$. Mit 2.2 (d) und (h) ist $C_Q(z^\perp) \leq Y_M$ und $z^\perp \leq Q$, also folgt $Z(Q) \leq Y_M$. Sei zunächst $Y_M = [Y_M, O^2(M)]$. Dann zentralisiert Q laut 2.2 (f) kein Element in $Y_M \setminus z^\perp$, also ist $Z(Q) \leq C_{z^\perp}(Q) \stackrel{2.2(c)}{=} \langle z \rangle$.

Sei nun $(2n, \epsilon) = (6, +)$ und $|Y_M| = 2^7$. Mit 1.12 können wir $z = \overline{v_1 v_2 v_3 v_4}$ annehmen und nach 2.2 (b) ist $QY_M/Y_M = O_2(C_M(z))/Y_M$. Diese Gruppe operiert transitiv auf $\{1, \dots, 4\}$ und auf $\{5, \dots, 8\}$, also wird kein Element der Form $\overline{v_i}$ oder $\overline{v_i v_j v_k}$ mit paarweise verschiedenen $i, j, k \in \{1, \dots, 8\}$ von Q zentralisiert. Somit ist $C_{Y_M}(Q) \leq [Y_M, O^2(M)]$ und es folgt wie oben $Z(Q) = \langle z \rangle$.

Nun ist $N_G(Q) \leq N_G(Z(Q)) = C_G(z) \leq N_G(Q)$, also gilt $N_G(Q) = C_G(z)$. \square

Als Ergänzung zu 2.6 ergibt sich nun:

2.8 Lemma: Sei $O_2(M) = Y_M$. Ist zusätzlich $N_G(Q) \leq M$, so ist $Y_M \leq Q$.

Beweis: Es ist $Q \stackrel{2.1}{=} O_2(N_G(Q))$. Ist $N_G(Q) \leq M$, so folgt

$$Y_M \leq O_2(C_M(z)) \stackrel{2.7}{=} O_2(N_M(Q)) = O_2(N_G(Q)) = Q.$$

\square

Schließlich erhalten wir mit dem bisher Gezeigten das folgende Resultat:

2.9 Satz: Ist $O_2(M) = Y_M$ und $N_G(Q) \not\leq M$, so ist Q extraspeziell vom $+$ -Typ mit Zentrum $\langle z \rangle$ und es gilt $|Q| = 2^{1+4n-4}$.

Beweis: Wir haben oben bereits $Z(Q) = \langle z \rangle$ gezeigt. Wir überprüfen nun noch, dass $\Phi(Q) = \langle z \rangle$ gilt.

Nach 2.2 (b) ist QY_M/Y_M elementarabelsch, daher folgt $\Phi(Q) \leq Y_M \cap Q \stackrel{2.6}{=} z^\perp$. Wegen $Q \trianglelefteq C_M(z)$ ist $\Phi(Q)$ normal in $C_M(z)$, ferner ist $\Phi(Q) \cap Z(Q) \neq 1$ und deshalb $z \in \Phi(Q)$. Da $C_M(z)$ nach 1.7 (b) irreduzibel auf $z^\perp/\langle z \rangle$ operiert, folgt $\Phi(Q) = \langle z \rangle$ oder $\Phi(Q) = z^\perp$.

Wir nehmen nun $\Phi(Q) = z^\perp$ an. Nach III.3.18 in [Hu] ist $C_{N_G(Q)}(Q/\Phi(Q))$ eine 2-Gruppe und wir schließen

$$C_{N_G(Q)}(Q/\Phi(Q)) \leq O_2(N_G(Q)) = Q.$$

Weil aber $[Y_M, Q] \leq Y_M \cap Q = z^\perp$ ist, erhalten wir $Y_M \leq C_{N_G(Q)}(Q/\Phi(Q)) \stackrel{2.1}{=} Q$, was allerdings 2.6 widerspricht.

Somit ist $\Phi(Q) = \langle z \rangle$ und Q ist extraspeziell, wie gewünscht.

Laut 2.6 ist $Q \cap Y_M = z^\perp$, mit 2.2 (b) folgt $|QY_M/Y_M| = 2^{2n-2}$, insgesamt ist daher

$$|Q| = 2^{1+4n-4} = 2^{1+2(2n-2)}.$$

Da Q den elementarabelschen Normalteiler z^\perp der Ordnung 2^{2n-1} enthält, ist Q nach III.13.8 in [Hu] vom $+$ -Typ. \square

2. Die große Untergruppe Q

Abschließend geben wir noch das folgende, nützliche Lemma an:

2.10 Lemma: *Sei Q extraspeziell und $t \in Q$ eine Involution. Dann ist $C_G(C_Q(t)) \leq Q$. Außerdem hat eine Sylow-2-Untergruppe von $C_G(t)$ ein Zentrum der Ordnung höchstens 4.*

Beweis: Wir betrachten zuerst den Fall $t = z$. Dann ist $C_Q(t) = Q$ und es folgt sofort $C_G(C_Q(t)) = C_G(Q) \leq Q$. Außerdem ist $z \in Q \leq S \in \text{Syl}_2(G)$ und $Z(S) \leq Z(Q) = \langle z \rangle$. Anderenfalls sei $g \in C_G(C_Q(t))$. Weil z in $Z(Q) \leq C_Q(t)$ liegt, gilt insbesondere $[z, g] = 1$ und damit ist $g \in C_G(z) \leq N_G(Q)$. Laut 1.19 (b) induziert g einen inneren Automorphismus auf Q und liegt daher in $QC_G(Q) = Q$. Sei nun $R \in \text{Syl}_2(C_G(t))$ mit $C_Q(t) \leq R$. Dann ist $Z(R) \leq C_G(C_Q(t)) \leq C_Q(C_Q(t)) = Z(C_Q(t))$, also hat $Z(R)$ nach 1.19 (a) höchstens Ordnung 4. \square

Kapitel 3

Untersuchung von $C_G(y)$

In diesem Abschnitt wollen wir den Zentralisator von y näher betrachten. Als Hauptresultat werden wir erhalten, dass $C_G(y)$ genau eine Komponente hat. Die wesentliche Strategie folgt dabei der aus [Pr, Kapitel 3], dabei mussten große Teile allerdings stark überarbeitet werden. Lediglich die Beweise von 3.4, 3.6, 3.7, 3.8 und Teile von 3.11 findet man in einer ähnlichen Fassung ebenda, den Beweis von 3.19 findet man in vergleichbarer Form auf S. 40f in [Pr].

Wir beginnen unsere Untersuchungen, indem wir wichtige Informationen über die Sylow-2-Untergruppen von G beziehungsweise von $C_G(y)$ sammeln. Dabei werden wir häufig verwenden, dass M nach unserer Voraussetzung in \mathcal{L} liegt und darum $C_G(O_2(M)) = Z(O_2(M))$ gilt. Laut 1.9 können wir außerdem annehmen, dass $S \cap C_M(y)$ eine Sylow-2-Untergruppe von $C_M(y)$ ist. Wir halten fest:

3.1 Definition: *Es sei im Folgenden $S_1 := S \cap C_M(y) = C_S(y) \in \text{Syl}_2(C_M(y))$.*

Dann erhalten wir:

3.2 Lemma: (a) *Es ist $\Omega_1(Z(S)) = \langle z \rangle$. Ist $Y_M = O_2(M)$, so ist $Z(S) = \Omega_1(Z(S))$.*

(b) *Es ist $\Omega_1(Z(S_1)) = \langle y, z \rangle$. Ist $O_2(M) = Y_M$, so ist $Z(S_1) = \Omega_1(Z(S_1))$.*

Beweis: Wir notieren zunächst, dass $z \in Z(S)$ und $\langle y, z \rangle \leq Z(S_1)$ gilt.

Umgekehrt ist $O_2(M) \leq S_1 \leq S$, also gilt $Z(S) \leq C_G(O_2(M)) = Z(O_2(M)) \geq Z(S_1)$. Daher haben wir insbesondere $\Omega_1(Z(S)) \leq \Omega_1(Z(S_1)) \leq \Omega_1(Z(O_2(M))) \stackrel{1.10}{=} Y_M$. Weiter ist $C_Q(y) \leq S_1 \leq S$ und damit folgt nun schon $\Omega_1(Z(S_1)) \leq C_{Y_M}(C_Q(y)) \stackrel{2.3}{=} \langle y, z \rangle$. Außerdem ist nach 2.3 auch $|Q : C_Q(y)| = 2$, also wird y nicht von Q zentralisiert, insbesondere ist $y \notin Z(S)$ und wir schließen insgesamt $\Omega_1(Z(S)) = \langle z \rangle$.

Ist zusätzlich $Y_M = O_2(M)$, so ist $Z(S) \leq Z(S_1) \leq Z(O_2(M)) = Y_M$ und daher $Z(S) = \Omega_1(Z(S))$ bzw. $Z(S_1) = \Omega_1(Z(S_1))$. □

3. Untersuchung von $C_G(y)$

Als später hilfreiches Korollar aus 3.2 (b) notieren wir hier:

3.3 Korollar: *Es ist $\Omega_1(Z(C_G(y))) = \langle y \rangle$. Ist zusätzlich $O_2(M) = Y_M$, so gilt außerdem $Z(C_G(y)) = \Omega_1(Z(C_G(y)))$.*

Beweis: Es ist $O_2(M) \leq C_G(y)$, also gilt $Z(C_G(y)) \leq C_G(O_2(M)) \leq O_2(M) \leq S_1$ und folglich ist $\Omega_1(Z(C_G(y))) \leq \Omega_1(Z(S_1)) = \langle y, z \rangle$. Dabei wird z beispielsweise nach 1.7 (c) nicht von $C_M(y)$ zentralisiert und wir erhalten $\Omega_1(Z(C_G(y))) = \langle y \rangle$. Ist zusätzlich $Y_M = O_2(M)$, so gilt $Z(C_G(y)) \leq Z(O_2(M)) = Y_M$ und daher ist $Z(C_G(y)) = \Omega_1(C_G(y))$. \square

Außerdem können wir nun auch das Zentrum einer Sylow-2-Untergruppe von $C_G(y)$ bestimmen.

3.4 Lemma: *Sei $\tilde{S} \in \text{Syl}_2(C_G(y))$ mit $S_1 \leq \tilde{S}$. Dann ist $\Omega_1(Z(\tilde{S})) = \langle y, z \rangle$.*

Beweis: Es ist $O_2(M) \leq S_1 \leq \tilde{S}$ und daher $\Omega_1(Z(\tilde{S})) \leq \Omega_1(Z(O_2(M))) \stackrel{1.10}{=} Y_M \leq S_1$. Folglich gilt $\Omega_1(Z(\tilde{S})) \leq \Omega_1(Z(S_1)) = \langle y, z \rangle$. Wegen $\tilde{S} \leq C_G(y)$ ist $y \in Z(\tilde{S})$. Es bleibt also $z \in Z(\tilde{S})$ zu zeigen.

Angenommen, es ist $\Omega_1(Z(\tilde{S})) = \langle y \rangle$. Dann ist $U := C_{\tilde{S}}(\langle y, z \rangle)$ eine echte Untergruppe von \tilde{S} . Wegen $O_2(M) \leq S_1 \leq U$ folgt wieder $\Omega_1(Z(U)) \leq \Omega_1(Z(S_1)) = \langle y, z \rangle$ und damit gilt $\Omega_1(Z(U)) = \langle y, z \rangle$. Sei $g \in N_{\tilde{S}}(U) \setminus U$. Dann wird $\Omega_1(Z(U)) = \langle y, z \rangle$ von g normalisiert und es ist $[\langle y, z \rangle, g] \neq 1 = [\langle y \rangle, g]$. Also muss $z^g = yz$ gelten, das widerspricht aber 1.18. Daher ist $C_{\tilde{S}}(\langle y, z \rangle) = \tilde{S}$ und damit $Z(\tilde{S}) = \langle y, z \rangle$. \square

3.5 Lemma: *Es gibt einen Teilraum $V \leq y^\perp$ der Dimension 2, für den gilt: Alle $x \in V^\#$ sind singulär und in $C_M(y)$ zu z konjugiert.*

Beweis: Wie beispielsweise auf S. 138 in [Ta] beschrieben wird, hat $[Y_M, O^2(M)]$ Teilräume L_1, L_2, \dots, L_{n-1} , die jeweils von einem hyperbolischen Paar erzeugt werden, und einen Teilraum W mit $|W| = 4$ so, dass $[Y_M, O^2(M)] = L_1 \perp \dots \perp L_{n-1} \perp W$ gilt. Dabei wird W für $\epsilon = +$ ebenfalls von einem hyperbolischen Paar erzeugt, für $\epsilon = -$ enthält $W^\#$ nur nicht singuläre Vektoren. Weil W in jedem Fall einen nicht singulären Vektor enthält, können wir mit dem Satz von Witt (siehe z.B. 7.4 in [Ta]) annehmen, dass y in W liegt. Wir wählen nicht triviale, singuläre Vektoren $v_1 \in L_1$ und $v_2 \in L_2$, dann liegt der total singuläre Teilraum $V := \langle v_1, v_2 \rangle$ in y^\perp . Da $C_M(y)$ laut 1.7 (c) transitiv auf der Menge der nicht trivialen, singulären Elemente von y^\perp ist, ist jedes Element von $V^\#$ in $C_M(y)$ zu z konjugiert. \square

3.6 Lemma: *Sei p eine ungerade Primzahl und $P \leq G$ eine p -Untergruppe, die von $C_G(y)$ normalisiert wird. Dann ist $P = 1$. Insbesondere gilt $O_p(C_G(y)) = 1 = O_p(G)$.*

Beweis: Sei V wie in 3.5. Diese nicht zyklische, abelsche 2-Gruppe operiert teilerfremd auf P und mit 8.3.4. b) in [KS] folgt $P = \langle C_P(v) \mid v \in V^\# \rangle$. Sei $v \in V^\#$ beliebig. Dann gibt es ein

3. Untersuchung von $C_G(y)$

$g \in C_M(y)$ mit $v = z^g$. Wir setzen $Q_v := Q^g$. Dann liegt Q_v in M und außerdem ist Q_v normal in $C_G(v)$, denn mit 2.2 (a) ist $Q \trianglelefteq C_G(z)$. Also gilt $[Q_v \cap C_G(y), C_P(v)] \leq [Q_v, C_G(v)] \leq Q_v$ und $[Q_v \cap C_G(y), C_P(v)] \leq [C_G(y), P] \leq P$. Daher erhalten wir $[C_{Q_v}(y), C_P(v)] \leq Q_v \cap P = 1$ und somit $C_P(v) \leq C_G(C_{Q_v}(y))$. Da Q_v in $C_M(y)$ zu Q konjugiert ist, ist auch $C_G(C_{Q_v}(y))$ zu $C_G(C_Q(y))$ konjugiert. Nach 2.4 ist $C_G(C_Q(y))$ eine 2-Gruppe, was uns schließlich zu $C_P(v) = 1$ führt. Das liefert uns nun auch $P = 1$, wie behauptet. \square

Es gilt also $F(C_G(y)) = O_2(C_G(y))$. Nach Voraussetzung 1.5 (c) ist jedoch $C_G(y)$ nicht von Charakteristik 2. Es folgt also:

3.7 Korollar: *Es ist $E(C_G(y)) \neq 1$, $C_G(y)$ hat also eine Komponente.*

Das folgende Lemma wird noch häufig gute Dienste leisten:

3.8 Lemma: *Sei K eine Komponente von G oder von $C_G(y)$. Dann ist $[z, K] \neq 1$.*

Beweis: Die Sylow-2-Untergruppe S von G liegt in $C_G(z)$ und weil G nach 1.14 parabolische Charakteristik 2 hat, folgt $E(C_G(z)) = 1$. Insbesondere gibt es keine Komponente K von G mit $[z, K] = 1$.

Nehmen wir also an, dass ein $K \in \text{Comp}(C_G(y))$ mit $[z, K] = 1$ existiert. Dann erhalten wir $K \leq N_G(Q)$ und wegen $K \leq C_G(y)$ gilt sogar $K \leq N_G(C_Q(y))$. Daher liegt K nach [As1, (31.6)(1)] in $C_Q(y)$ oder es ist $[K, C_Q(y)] = 1$. Weil aber $C_G(C_Q(y))$ laut 2.4 eine 2-Gruppen ist, führen beide Fälle zu einem Widerspruch. \square

Nun können wir eine später sehr nützliche Aussage beweisen:

3.9 Satz: *$F^*(G)$ ist einfach.*

Beweis: Aus 1.16 und 3.6 erhalten wir zunächst $F(G) = 1$. Also ist $F^*(G)$ das direkte Produkt von einfachen Gruppen L_1, \dots, L_m für ein $m \in \mathbb{N}$. Wir nehmen nun $m \geq 1$ an. Zuerst zeigen wir, dass $O_2(M)$ transitiv auf $\text{Comp}(G)$ operiert. Wir setzen $L := \langle L_1^{O_2(M)} \rangle$, dann wird L von $O_2(M)$ normalisiert und folglich gibt es eine Sylow-2-Untergruppe T von L , die unter $O_2(M)$ invariant ist. Also ist $\Omega_1(C_T(O_2(M))) \neq 1$ und wegen $C_G(O_2(M)) = Z(O_2(M))$ erhalten wir $1 \neq T \cap \Omega_1(Z(O_2(M))) \stackrel{1.10}{=} T \cap Y_M \leq L \cap Y_M$. Sei jetzt $M_0 \leq M$ so, dass $M_0/O_2(M) \cong \Omega_{2n}^\epsilon(2)$ ist. Wir können Elemente m_1, \dots, m_4 aus M_0 so wählen, dass $(L \cap Y_M)^{m_1} \cdot \dots \cdot (L \cap Y_M)^{m_4} \leq (L^{m_1} \cdot \dots \cdot L^{m_4}) \cap Y_M$ mindestens Ordnung 2^4 hat. Mit 1.11 hat dann $(L^{m_1} \cdot \dots \cdot L^{m_4}) \cap [Y_M, O^2(M)]$ mindestens Ordnung 2^3 und enthält nach [Ta, 11.2] ein nicht triviales singuläres Element. Weil alle singulären Elemente aus $[Y_M, O^2(M)]^\#$ in M_0 konjugiert sind, liefert uns nun 3.8 schon $F^*(G) = L^{m_1} \cdot \dots \cdot L^{m_4}$. Insbesondere hat also $O_2(M)$ höchstens vier Bahnen auf $\text{Comp}(G)$, die nun von M_0 permutiert werden. Allerdings ist $M_0/O_2(M)$ perfekt, daher muss M_0 jede dieser Bahnen stabilisieren. Weil wir oben

3. Untersuchung von $C_G(y)$

$m_1, \dots, m_4 \in M_0$ gewählt haben, folgt $L^{m_1} = \dots = L^{m_4} = L$ und damit $L = F^*(G)$, demnach ist $O_2(M)$ und damit insbesondere auch M transitiv auf $Comp(G)$. Außerdem halten wir fest, dass $F^*(G) \cap [Y_M, O^2(M)] \neq 1$ ist und wegen der irreduziblen Operation von M auf $[Y_M, O^2(M)]$ bereits $[Y_M, O^2(M)] \leq F^*(G)$ folgt.

Sei nun $i \in \{1, \dots, m\}$. Dann wird $L_i \cap Y_M$ von $O_2(M)$ zentralisiert. Wäre nun $L_i \cap Y_M \neq 1$, so würde L_i von $O_2(M)$ normalisiert werden, was aber der Transitivität widerspricht. Also folgt $L_i \cap Y_M = 1$. Genauso erhalten wir, dass für alle $j \in \{1, \dots, m\}$ auch $\langle L_i \mid i \neq j \rangle \cap Y_M = 1$ ist. Da nun $[Y_M, O^2(M)] \leq F^*(G)$ ist, muss also die Projektion von $[Y_M, O^2(M)]$ auf jede Komponente nicht trivial sein. Außerdem ist jede Komponente normal in $F^*(G)$ und wird daher insbesondere von $[Y_M, O^2(M)]$ normalisiert. Somit erhalten wir für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ schon $[[Y_M, O^2(M)], M \cap L_i] \leq [Y_M, O^2(M)] \cap L_i = 1$ und mit 1.10 schließen wir $M \cap L_i \leq O_2(M)$. Demnach liegt dann mit $S \cap L_i$ auch eine Sylow-2-Untergruppe von L_i in $O_2(M)$.

Wir wählen wieder M_0 wie oben. Dann gilt $M_0 = O_2(M)N_{M_0}(L_1)$, weil $O_2(M)$ transitiv auf $Comp(G)$ operiert. Weiter setzen wir $X := N_{M_0}(L_1) \cap (L_1 C_G(L_1))$. Dann ist X genau die Untergruppe von Elementen von $N_{M_0}(L_1)$, die innere Automorphismen auf L_1 induzieren. Weil L_1 in $N_G(O_2(M) \cap (L_2 \times \dots \times L_m))$ liegt, können wir die \mathcal{K}_2 -Hypothese anwenden und erhalten mit Hilfe der Schreierschen Vermutung, dass $N_{M_0}(L_1)/X$ auflösbar ist. Nun gilt

$$N_{M_0}(L_1)/O_2(N_{M_0}(L_1)) \cong N_{M_0}(L_1)O_2(M)/O_2(M) = M_0/O_2(M) \cong \Omega_{2n}^\epsilon(2),$$

also muss auch $X/O_2(X) = X/(O_2(M) \cap X)$ isomorph zu $\Omega_{2n}^\epsilon(2)$ sein.

Sei jetzt $T := L_1 \cap O_2(M)$, dann ist nach unseren obigen Überlegungen $T \in Syl_2(L_1)$, außerdem ist T normal in X . Nun ist $|N_{L_1}(T) : T|$ und damit auch $|X : TC_X(L_1)|$ ungerade, folglich ist $C_X(L_1) \not\leq O_2(X)$. Da $X/O_2(X)$ einfach ist, gilt insgesamt $X = C_X(L_1)O_2(X)$. Nun operiert $C_X(L_1)$ insbesondere trivial auf der Projektion von $[Y_M, O^2(M)]$ auf L_1 , damit operiert $C_X(L_1)O_2(X) = X$ auch trivial auf $[Y_M, O^2(M)]$. Daraus folgt aber, dass $[Y_M, O^2(M)]$ von $XO_2(M) = M_0$ zentralisiert wird, das widerspricht allerdings 1.10 und wir erhalten somit die Behauptung. \square

Wir kehren zur Untersuchung der Struktur von $C_G(y)$ zurück und halten fest:

3.10 Korollar: Die Untergruppe $C_G(y)$ ist nicht parabolisch in G . Es ist also $|C_G(y)|_2 < |G|_2$ und für $\tilde{S} \in Syl_2(C_G(y))$ wie in 3.4 gilt insbesondere $|C_G(y) : C_M(y)|_2 = |\tilde{S} : S_1| \leq 2^{n-2}$.

Beweis: Die Gruppe G hat nach 1.14 parabolische Charakteristik 2. Weil $C_G(y)$ laut Voraussetzung 1.5 (c) aber nicht von Charakteristik 2 ist, kann $C_G(y)$ keine parabolische Untergruppe sein. Sei $a := 0$ für $M/O_2(M) = \Omega_{2n}^\epsilon(2)$ und $a := 1$ sonst, dann ist

$$|C_G(y)|_2 \leq \frac{|G|_2}{2} = \frac{|M|_2}{2} = \frac{|O_2(M)| \cdot |\Omega_{2n}^\epsilon(2)|_2 \cdot 2^a}{2} = |O_2(M)| \cdot 2^{n(n-1)-1+a}$$

und

$$|C_M(y)|_2 = |O_2(M)| \cdot |Sp_{2n-2}(2)| \cdot 2^a = |O_2(M)| \cdot 2^{(n-1)^2+a},$$

also folgt auch $|C_G(y) : C_M(y)|_2 = |\tilde{S} : S_1| \leq 2^{n-2}$. \square

Wie wir in 3.7 gesehen haben, besitzt $C_G(y)$ mindestens eine Komponente. Wir werden nun zeigen, dass $O^2(C_M(y))$ jede solche Komponente normalisiert. Zu diesem Zweck tragen wir hier zunächst einige Resultate über $O^2(C_M(y))$ zusammen:

- 3.11 Lemma:** (a) Es ist $y^\perp \leq O^2(C_M(y))$. Außerdem ist $O^2(C_M(y))O_2(M)/O_2(M) \cong Sp_{2n-2}(2)$ für $n \geq 4$ bzw. $O^2(C_M(y))O_2(M)/O_2(M) \cong A_6$ für $n = 3$. Insbesondere ist $O^2(C_M(y))O_2(M)/O_2(M)$ einfach und es gilt $|C_M(y) : O^2(C_M(y))O_2(M)| \leq 4$.
- (b) Es gibt keinen echten Normalteiler $N \triangleleft O^2(C_M(y))$ mit $N \not\leq O_2(M)$. Insbesondere hat $O^2(C_M(y))$ keine nicht trivialen, auflösbaren Faktorgruppen.
- (c) Ist $N \leq C_M(y)$ mit $O^2(C_M(y)) \leq N_G(N)$ und $N \cap [Y_M, O^2(M)] \not\leq \langle y \rangle$, so ist $y^\perp \leq N$.
- (d) Sei N ein Normalteiler von $C_M(y)$, der ein Element ungerader Ordnung enthält. Dann ist schon $O^2(C_M(y)) \leq N$.
- (e) $O^2(C_M(y))$ ist perfekt.
- (f) Sei K eine Komponente von $C_G(y)$, dann ist $[O^2(C_M(y)), K] \neq 1$.
- (g) Es gilt $O^2(C_M(y)) \leq \langle C_Q(y)^{C_M(y)} \rangle$.

Beweis:

- (a) Nach 1.7(c) gibt es in $C_M(y)/O_2(M)$ einen Normalteiler $E \cong Sp_{2n-2}(2)$ mit Index höchstens 2. Für $n \geq 4$ ist E einfach, im Falle $n = 3$ ist E isomorph zu Σ_6 und daher ist $E' \cong A_6$ einfach. Somit ist insgesamt $|C_M(y)/O_2(M) : E'| \in \{1, 2, 4\}$ und wir erhalten $O^2(C_M(y))O_2(M)/O_2(M) = E'$. Außerdem ist y^\perp laut 1.7(c) der natürliche $O_{2n-1}(2)$ -Modul für E und es folgt $y^\perp = [y^\perp, E'] = [y^\perp, O^2(C_M(y))] \leq O^2(C_M(y))$.
- (b) Sei N normal in $O^2(C_M(y))$ und $N \not\leq O_2(M)$. Da $O^2(C_M(y))O_2(M)/O_2(M)$ laut (a) einfach ist, gilt $NO_2(M)/O_2(M) = O^2(C_M(y))O_2(M)/O_2(M)$. Demnach ist also $|O^2(C_M(y))/N|$ eine 2-Potenz und es folgt $N = O^2(C_M(y))$.
- (c) Wie in (a) ist y^\perp der natürliche $O_{2n-1}(2)$ -Modul für $O^2(C_M(y))O_2(M)/O_2(M)$. Liegt also ein Element v aus $y^\perp \setminus \langle y \rangle$ in N , so folgt $y^\perp = [v, O^2(C_M(y))] \leq N$. Enthält N hingegen ein Element v von $[Y_M, O^2(M)] \setminus y^\perp$, so ist $[Y_M, O^2(M)] = y^\perp \times \langle v \rangle$ und es gilt $[v, O^2(C_M(y))] \leq y^\perp$, da $O^2(C_M(y))$ die Hyperebene y^\perp normalisiert. Wir nehmen nun $[v, O^2(C_M(y))] \leq \langle y \rangle$ an. Dann ergibt sich $v^{O^2(C_M(y))} \subseteq \{v, vy\}$, also gilt $|O^2(C_M(y)) : C_{O^2(C_M(y))}(v)| \in \{1, 2\}$. Da $O^2(C_M(y))$ keine Untergruppe vom Index 2 hat, folgt $[v, O^2(C_M(y))] = 1$. Dann wird v^\perp von $O^2(C_M(y))$ normalisiert und damit ist $\langle y \rangle \neq y^\perp \cap v^\perp < y^\perp$ ein invarianter Unterraum von y^\perp , ein Widerspruch. Also ist $[v, O^2(C_M(y))] \not\leq \langle y \rangle$. Da $[v, O^2(C_M(y))] \leq N$ gilt, folgt nun wie oben $y^\perp \leq N$.
- (d) Sei N ein Normalteiler von $C_M(y)$, der ein Element ungerader Ordnung enthält. Dann ist $N \cap O^2(C_M(y)) \not\leq O_2(M)$, also folgt die Behauptung mit (b).

3. Untersuchung von $C_G(y)$

- (e) Weil $O^2(C_M(y))O_2(M)/O_2(M) \cong Sp_{2n-2}(2)'$ einfach und daher insbesondere perfekt ist, enthält $O^2(C_M(y))'$ also Elemente ungerader Ordnung. Nach (d) ist dann $O^2(C_M(y)) = O^2(C_M(y))'$.
- (f) Sei $K \in \text{Comp}(C_G(y))$. Nach (a) gilt $z \in y^\perp \leq O^2(C_M(y))$, und da laut 3.8 schon $[z, K] \neq 1$ ist, folgt auch $[O^2(C_M(y)), K] \neq 1$.
- (g) Es hat $C_Q(y)O_2(M)/O_2(M)$ nach 2.3 Ordnung $2^{2n-3} \geq 2^3$. Mit (a) ist also

$$(O^2(C_M(y))O_2(M)/O_2(M)) \cap (\langle C_Q(y)^{C_M(y)} \rangle O_2(M)/O_2(M)) \neq 1$$

und es folgt bereits $O^2(C_M(y))O_2(M) \leq \langle C_Q(y)^{C_M(y)} \rangle O_2(M)$. Insbesondere ist also $|C_M(y) : \langle C_Q(y)^{C_M(y)} \rangle|$ eine 2-Potenz und wir erhalten die Behauptung.

□

Wir führen nun folgende Bezeichnung ein:

3.12 Definition: Wir setzen

$$\mathcal{N} := \{g \in C_M(y) \mid L^g = L \text{ für alle } L \in \text{Comp}(C_G(y))\} = \bigcap_{L \in \text{Comp}(C_G(y))} N_{C_M(y)}(L).$$

Dabei ist \mathcal{N} normal in $C_M(y)$. Wir wollen $O^2(C_M(y)) \leq \mathcal{N}$ zeigen. Zunächst stellen wir folgendes fest:

3.13 Lemma: (a) Es ist $y^\perp \leq \mathcal{N}$.

(b) Ist $L \in \text{Comp}(C_G(y))$, so ist $C_{y^\perp}(L) = \langle y \rangle$.

Beweis:

- (a) Sei $L \in \text{Comp}(C_G(y))$ beliebig und sei $\tilde{S} \in \text{Syl}_2(C_G(y))$ wie in 3.4. Dann gilt $z \in Z(\tilde{S})$ und außerdem ist $L \cap \tilde{S} \in \text{Syl}_2(L)$. Folglich zentralisiert z eine Sylow-2-Untergruppe von L . Würde $L^z \neq L$ gelten, so wäre $L \cap \tilde{S} \leq L \cap L^z \leq Z(L)$ und daher wäre $L/Z(L)$ eine nicht abelsche, einfache Gruppe ungerader Ordnung, was aber 1.25 widerspricht. Also ist $z \in \mathcal{N}$, weshalb uns 3.11 (c) nun die Behauptung liefert.
- (b) Da $L \leq C_G(y)$ ist, gilt $\langle y \rangle \leq C_{y^\perp}(L)$. Angenommen, es ist $\langle y \rangle < C_{y^\perp}(L)$. Sei dann $v \in y^\perp \setminus \langle y \rangle$ mit $[v, L] = 1$. Ist v nicht singulär, so ist vy singulär und es ist auch $[vy, L] = 1$. Also können wir annehmen, dass v singulär ist. Nach 1.7 (c) gibt es dann ein $g \in C_M(y)$ mit $v^g = z$ und es folgt $[z, L^g] = [v, L]^g = 1$, im Widerspruch zu 3.8.

□

Also operiert y^\perp auf jeder Komponente von $C_G(y)$ und induziert dabei eine elementarabelsche Gruppe von Automorphismen der Ordnung $|y^\perp/\langle y \rangle| = 2^{2n-2}$.

3.14 Lemma: Sei $K \in \text{Comp}(C_G(y))$ und $H := \langle K^{C_M(y)} \rangle$. Dann gilt:

- (a) $Z(K)$ und $Z(H)$ sind 2-Gruppen.
- (b) Es ist $y \in Z(H)$, also sind $Z(K)$ und $Z(H)$ nicht triviale 2-Gruppen.

Beweis:

- (a) Da $Z(K) \leq Z(H) \leq F(C_G(y))$ ist, folgt die Behauptung mit 3.6.
- (b) Wir setzen $T := H \cap C_M(y)$. Dann ist T normal in $C_M(y)$. Ist T keine 2-Gruppe, so folgt mit 3.11 (d) und (a) schon $y^\perp \leq T \leq H$, also ist dann insbesondere $y \in H$ und wegen $H \leq C_G(y)$ auch $y \in Z(H)$.
Wir können also davon ausgehen, dass $T \leq O_2(C_M(y))$ ist. Sei $S_1 \in \text{Syl}_2(C_M(y))$ wie in 3.1. Dann ist T normal in S_1 und daher auch $T \cap \Omega_1(Z(S_1)) \neq 1$, wobei $\Omega_1(Z(S_1)) = \langle y, z \rangle$ nach 3.2 (b) ist. Gilt $y \in T$, so sind wir fertig. Anderenfalls liegt z oder yz in T , weshalb uns 3.11 (c) wieder $y^\perp \leq T$ liefert und es folgt ebenfalls die Behauptung.

□

3.15 Lemma: Sei $K \in \text{Comp}(C_G(y))$. Dann gilt:

- (a) Zentralisiert z ein Element ungerader Ordnung in $K^\#$, so ist $C_Q(y) \leq N_G(K)$.
- (b) Genau dann zentralisiert z ein Element ungerader Ordnung in $K^\#$, wenn z ein Element ungerader Ordnung in $(K/Z(K))^\#$ zentralisiert.
- (c) Zentralisiert z in jeder Komponente von $C_G(y)$ ein nicht triviales Element ungerader Ordnung, so ist $O^2(C_M(y)) \leq \mathcal{N}$.

Beweis:

- (a) Sei $g \in K^\#$ ein Element ungerader Ordnung mit $[z, g] = 1$ und sei $t \in C_Q(y)$. Angenommen, es ist $K^t \neq K$, insbesondere gilt dann $[K, K^t] = 1$. Es ist $g \in C_G(z) \leq N_G(Q)$ mit 2.2 (a), also folgt $g^{-1}g^t = [g, t] \in Q$. Wegen $[g^{-1}, g^t] = 1$ hat aber $[g, t]$ ungerade Ordnung. Das führt zu $[g, t] = 1$ und damit zu $g \in K \cap K^t \leq Z(K)$, im Widerspruch zu 3.14 (a).

3. Untersuchung von $C_G(y)$

(b) Nach 3.13 (a) wird K von z normalisiert. Zentralisiert z ein Element ungerader Ordnung in $K^\#$, dann auch in $(K/Z(K))^\#$, da $Z(K)$ eine 2-Gruppe ist.

Sei umgekehrt $g \in K^\#$ so, dass $gZ(K) \in K/Z(K)$ ungerade Ordnung hat und außerdem $[g, z] \in Z(K)$ gilt. Da $Z(K)$ eine 2-Gruppe ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass g ungerade Ordnung hat. Indem wir 8.2.2. a) aus [KS] auf $\langle Z(K), z \rangle \langle g \rangle$ anwenden, erhalten wir ein $a \in Z(K)$ mit $1 = [g, az] = [g, z]$.

(c) Zentralisiert z in jeder Komponente von $C_G(y)$ ein Element ungerader Ordnung, so liegt $C_Q(y)$ mit (a) in \mathcal{N} . Folglich ist auch $\langle C_Q(y)^{C_M(y)} \rangle$ in \mathcal{N} enthalten und die Behauptung folgt mit 3.11 (g).

□

Sei wieder $K \in \text{Comp}(C_G(y))$. Wir wissen, dass z im Zentrum einer Sylow-2-Untergruppe von $C_G(y)$ liegt und daher auch eine Sylow-2-Untergruppe von K zentralisiert. Weiterhin normalisiert z jede Komponente, ohne sie zu zentralisieren (3.13 (a) und 3.8). Also induziert z auf jeder Komponente $K \in \text{Comp}(C_G(y))$ und damit auch auf $K/Z(K)$ einen Automorphismus der Ordnung 2. Hat die einfache Gruppe $K/Z(K)$ keinen Automorphismus der Ordnung 2, der genau eine Sylow-2-Untergruppe von $K/Z(K)$ zentralisiert, so zentralisiert z in $K/Z(K)$ und nach obigem Lemma dann auch in K ein Element ungerader Ordnung. Unter erneuter Anwendung von 3.15 erhalten wir dann:

3.16 Lemma: *Hat für keine Komponente $K \in \text{Comp}(C_G(y))$ die einfache Gruppe $K/Z(K)$ einen Automorphismus α mit $o(\alpha) = 2$ und $C_{K/Z(K)}(\alpha) \in \text{Syl}_2(K/Z(K))$, so ist schon $O^2(C_M(y)) \leq \mathcal{N}$.*

Wir betrachten also von nun an den Fall, dass es eine Komponente K von $C_G(y)$ gibt, die einen involutorischen Automorphismus hat, der in K und damit auch in $K/Z(K)$ genau eine Sylow-2-Untergruppe zentralisiert. Gruppen mit einem solchen Automorphismus wurden in [Ba] klassifiziert. Wir erhalten:

3.17 Lemma: *Falls $O^2(C_M(y)) \not\leq \mathcal{N}$ ist, so hat $C_G(y)$ eine Komponente K , für die $K/Z(K)$ isomorph zu einer der folgenden Gruppen ist:*

- $PSL_2(q), Sz(q), PSU_3(q), PSL_3(q), PSp_4(q)$ mit $q = 2^k > 2, k \in \mathbb{N}$, oder
- $PSL_2(q)$ mit $q = 2^k \pm 1 > 3, k \in \mathbb{N}$.

Beweis: Wie oben erwähnt, muss es eine Komponente $K \in \text{Comp}(C_G(y))$ geben, die einen involutorischen Automorphismus α besitzt, der in $\bar{K} := K/Z(K)$ genau eine Sylow-2-Untergruppe zentralisiert. Dann ist α in $\langle \bar{K}, \alpha \rangle = \bar{K} : \langle \alpha \rangle$ eine 2-zentrale Involution, deren

Zentralisator eine 2-Gruppe und damit insbesondere 2-abgeschlossen ist. Der kleinste Normalteiler von $\langle \overline{K}, \alpha \rangle$ mit 2-abgeschlossener Faktorgruppe ist \overline{K} , laut [Ba] ist \overline{K} dann isomorph zu einem direkten Produkt von einfachen Gruppen aus obiger Liste. Da \overline{K} einfach ist, muss \overline{K} selbst eine der Gruppen von dieser Liste sein. \square

Wir werden im Folgenden die Gruppen aus obiger Liste untersuchen und zeigen, dass keine Erweiterung von ihnen als Komponente von $C_G(y)$ infrage kommt. Dazu werden wir die bisher über die Komponenten K von $C_G(y)$ gesammelten Informationen benutzen, um die Liste aus Lemma 3.17 nach und nach zu reduzieren. Zunächst werden wir die Möglichkeiten für den Isomorphietyp von $K/Z(K)$ deutlich verkleinern.

3.18 Lemma: *Falls $O^2(C_M(y)) \not\leq \mathcal{N}$ ist, so hat $C_G(y)$ eine Komponente K , für die $K/Z(K)$ isomorph zu einer der folgenden Gruppen ist:*

- $PSL_2(4), Sz(8), PSL_3(4)$ oder
- $PSL_2(q)$ mit $q = 2^k \pm 1 > 3, k \in \mathbb{N}$.

Beweis: Wir wissen, dass $C_G(y)$ eine Komponente K hat, für die $K/Z(K)$ auf der Liste aus Lemma 3.17 steht. Außerdem hat mit 3.14 (b) das Zentrum jeder Komponente von $C_G(y)$ gerade Ordnung. Mit Tabelle 6.1.2 und Tabelle 6.1.3 in [GLS3] hat aber bis auf die obigen Gruppen keine der Gruppen aus 3.17 einen Schur-Multiplikator gerader Ordnung. \square

Wir werden im Folgenden die Gruppen aus 3.18 einzeln betrachten. Als Hilfsresultat benötigen wir zunächst:

3.19 Lemma: *Sei q eine Potenz einer ungeraden Primzahl und $H := SL_2(q)$. Dann hat H keinen Automorphismus der Ordnung 2, der eine Sylow-2-Untergruppe von H zentralisiert.*

Beweis: Mit [GLS3, 2.5.12.] ist $\text{Aut}(H) = \text{Inndiag}(H)\Phi_H\Gamma_H$, wobei $\text{Inndiag}(H) \trianglelefteq \text{Aut}(H)$ die Gruppe der innderdiagonalen Automorphismen ist, Φ_H aus Körper- und Γ_H aus Graphautomorphismen besteht (siehe auch [GLS3, Definition 2.5.10.]). Wegen $H \cong SL_2(q)$ ist hier $\Gamma_H = 1$.

Sei nun $\alpha \in \text{Aut}(H)$ eine Involution. Dann ist $\alpha = \beta\gamma$ mit $\beta \in \text{Inndiag}(H)$ und $\gamma \in \Phi_H$. Sei zunächst $\gamma = 1$. Dann gilt $o(\beta) = 2$ und mit Tabelle 4.5.2 in [GLS3] erhalten wir, dass $C_H(\alpha) = C_H(\beta)$ die Ordnung $q - 1$ oder $q + 1$ hat. Da $|H| = q \cdot (q + 1) \cdot (q - 1)$ gilt, ist $|H : C_H(\alpha)|$ gerade und daher enthält $C_H(\alpha)$ keine volle Sylow-2-Untergruppe von H . Sei also $\gamma \neq 1$ und wegen $o(\alpha) = 2$ folgt dann $o(\gamma) = |\langle \alpha \rangle \text{Inndiag}(H) / \text{Inndiag}(H)| = 2$. Somit ist $q = p^f$ mit einer ungeraden Primzahl p und einem geraden $f \in \mathbb{N}$. Mit 4.9.1. (d) in [GLS3] folgt nun, dass α und γ in $\text{Aut}(H)$ konjugiert sind, also ist $C_H(\alpha) \cong C_H(\gamma) \cong SL_2(p^{\frac{f}{2}})$. Damit erhalten wir $|C_H(\alpha)| = p^{\frac{f}{2}} \cdot ((p^{\frac{f}{2}})^2 - 1) = p^{\frac{f}{2}} \cdot (q - 1)$ und daher ist auch in diesem Fall $|H : C_H(\alpha)|$ gerade. \square

3. Untersuchung von $C_G(y)$

Wir wenden uns nun den Gruppen aus 3.18 zu. Wir erhalten:

3.20 Lemma: Sei $K \in \text{Comp}(C_G(y))$, dann gilt:

- (a) $K/Z(K)$ ist nicht isomorph zu $PSL_2(4)$.
- (b) $K/Z(K)$ ist nicht isomorph zu $Sz(8)$.
- (c) $K/Z(K)$ ist nicht isomorph zu $PSL_2(q)$ mit $q = 2^k \pm 1 > 3, k \in \mathbb{N}$.

Beweis:

- (a) Laut 3.13 ist $y^\perp/\langle y \rangle$ isomorph zu einer Untergruppe von $\text{Aut}(K)$ und damit auch zu einer Untergruppe von $\text{Aut}(K/Z(K))$. Da $\text{Aut}(PSL_2(4)) \cong \text{Aut}(A_5) \cong \Sigma_5$ aber keine Untergruppe der Ordnung $2^{2n-2} \geq 2^4$ enthält, kann $K/Z(K)$ nicht isomorph zu $PSL_2(4)$ sein.
- (b) Wir nehmen $K/Z(K) \cong Sz(8)$ an. Wie in (a) hat $\text{Aut}(K/Z(K))$ eine elementarabelsche Untergruppe der Ordnung $2^{2n-2} \geq 2^4$. Wegen $|\text{Out}(Sz(8))| = 3$ hat dann $\text{Inn}(Sz(8)) \cong Sz(8)$ eine solche Untergruppe. Allerdings ist der 2-Rang von $Sz(8)$ lediglich 3, wie man z.B. Tabelle 3.3.1 in [GLS3] entnehmen kann.
- (c) Angenommen, es ist $K/Z(K) \cong PSL_2(q)$ mit $q = 2^k \pm 1 > 3, k \in \mathbb{N}$. Der Schurmultiplikator von $PSL_2(r)$, r ungerade, hat die Ordnung 2, außer im Falle $r = 9$, hier hat er die Ordnung 6. Nach 3.14 (a) und (b) ist $Z(K)$ eine nicht triviale 2-Gruppe. Also erhalten wir $|Z(K)| = 2$ und damit $K \cong SL_2(q)$.
Laut 3.8 und 3.13 (a) induziert z auf K einen nicht trivialen Automorphismus der Ordnung 2, und nach 3.4 liegt z im Zentrum einer Sylow-2-Untergruppe von $C_G(y)$ und zentralisiert daher auch eine Sylow-2-Untergruppe von K . Dies widerspricht aber 3.19.

□

Ein wenig mehr Aufwand benötigen wir, um die letzte Gruppe aus 3.18 auszuschließen. Es gilt:

3.21 Lemma: Sei $K \in \text{Comp}(C_G(y))$. Dann ist $K/Z(K)$ nicht isomorph zu $PSL_3(4)$.

Beweis: Sei $\bar{K} := K/Z(K)$. Angenommen, es ist $\bar{K} \cong PSL_3(4)$. Wir zeigen zuerst, dass dann $O^2(C_M(y)) \not\leq N_G(K)$ gelten muss.

Wir nehmen also weiter an, dass K von $O^2(C_M(y))$ normalisiert wird. Dann ist $C_{O^2(C_M(y))}(K)$ normal in $O^2(C_M(y))$. Da $\text{Out}(PSL_3(4)) \cong 2 \times \Sigma_3$ auflösbar ist und $O^2(C_M(y))$ mit 3.11 (b) keine nicht trivialen, auflösbaren Faktorgruppen hat, induziert $O^2(C_M(y))$ innere Automorphismen, daher hat \bar{K} eine Untergruppe, die zu $O^2(C_M(y))/C_{O^2(C_M(y))}(K)$ isomorph ist.

3. Untersuchung von $C_G(y)$

Laut 3.11 (a) ist $y^\perp \leq O^2(C_M(y))$ und nach 3.13 (b) gilt $C_{O^2(C_M(y))}(K) \cap y^\perp = \langle y \rangle$. Außerdem ist $C_{O^2(C_M(y))}(K) \leq O_2(M)$, denn sonst wäre mit 3.11 (b) schon $[O^2(C_M(y)), K] = 1$, was aber 3.11 (f) widerspricht. Also gilt

$$|y^\perp / \langle y \rangle| \cdot |Sp_{2n-2}(2)'| \mid |O^2(C_M(y)) / C_{O^2(C_M(y))}(K)|$$

und es ist insbesondere $2^4 \cdot |A_6|$ ein Teiler von $|K/Z(K)| = |PSL_3(4)|$. Das widerspricht aber $|PSL_3(4)|_2 = 2^6$ und es folgt $O^2(C_M(y)) \not\leq N_G(K)$.

Nach 3.13 induziert $y^\perp / \langle y \rangle$ auf K und damit auch auf \bar{K} eine elementarabelsche Gruppe V von Automorphismen mit $|V| = 2^{2n-2} \geq 2^4$. Wir zeigen zuerst, dass $V \leq \text{Inn}(\bar{K})$ gilt. Dazu überprüfen wir, dass alle elementarabelschen Untergruppen von $\text{Aut}(PSL_3(4))$ der Ordnung mindestens 2^4 in $\text{Inn}(PSL_3(4))$ enthalten sind.

Es ist $\text{Out}(\bar{K}) = C_2 \times S_3$. Außerdem ist $|\text{Inndiag}(\bar{K}) / \text{Inn}(\bar{K})| = 3$ und damit insbesondere $\text{Aut}(\bar{K}) / \text{Inndiag}(\bar{K}) = \langle \alpha, \beta \rangle \text{Inndiag}(\bar{K}) / \text{Inndiag}(\bar{K}) \cong C_2 \times C_2$. Dabei ist α der Körperautomorphismus, der die Abbildung $x \mapsto x^2$ auf jeden Eintrag einer Matrix aus $SL_3(4)$ anwendet, und β ist der Graphautomorphismus von $PSL_3(4)$, wie er z.B. auf S. 68 in [GLS3] beschrieben wird.

Wir nehmen nun $V \cdot \text{Inn}(\bar{K}) / \text{Inn}(\bar{K}) \neq 1$ an. Weil $|V| \geq 2^4$ ist, muss $V \cap \text{Inn}(\bar{K})$ dabei mindesten Ordnung 2^2 haben. Es gibt nun Elemente $v \in V$ und $x \in \{\alpha, \beta, \alpha\beta\}$ mit $\langle v \rangle \text{Inndiag}(\bar{K}) = \langle x \rangle \text{Inndiag}(\bar{K})$. Nach Proposition 4.9.1. (d) und 4.9.2. (g) in [GLS3] ist v in $\text{Aut}(\bar{K})$ zu x konjugiert, insbesondere ist dann $C_{\text{Inn}(\bar{K})}(v) \cong C_{\bar{K}}(x)$. Im Fall $x = \alpha\beta$ ist $C_{\text{Inn}(\bar{K})}(x)$ nach Proposition 4.9.1. (a) in [GLS3] isomorph zu ${}^2A_2(2) \cong 3^2 : Q_8$. Diese Gruppe enthält keine elementarabelsche Untergruppe der Ordnung 2^2 , im Widerspruch zu $|V \cap \text{Inn}(\bar{K})| \geq 2^2$. Also ist $\alpha\beta \text{Inndiag}(\bar{K}) \notin V \cdot \text{Inndiag}(\bar{K})$, insbesondere erhalten wir so $V \cdot \text{Inndiag}(\bar{K}) = \langle x \rangle \text{Inndiag}(\bar{K})$ und $|V \cap \text{Inn}(\bar{K})| \geq 2^3$.

Für $x = \alpha$ ist $C_{\text{Inn}(\bar{K})}(x) \cong C_{\bar{K}}(x) \cong PSL_3(2) \cong GL_3(2)$. Da eine Sylow-2-Untergruppe von $GL_3(2)$ isomorph zu D_8 ist, enthält $C_{\text{Inn}(\bar{K})}(v)$ dann keine elementarabelsche Untergruppe der Ordnung mindestens 2^3 und wir erhalten erneut einen Widerspruch. Sei also zuletzt $x = \beta$. Nach 4.9.2. (b) in [GLS3] ist dann $C_{\text{Inn}(\bar{K})}(v) \cong C_1(4) \cong PSL_2(4) \cong A_5$, also enthält auch hier $C_{\bar{K}}(v)$ keine elementarabelsche 2-Gruppe der Ordnung mindestens 2^3 .

Also induziert $y^\perp / \langle y \rangle$ innere Automorphismen auf K und auf \bar{K} . Da $PSL_3(4)$ keine elementarabelsche Untergruppe der Ordnung mindestens 2^6 enthält, folgt $n = 3$. Mit 1.7 (c) ist dann $|M : C_M(y)|_2 = |G : C_M(y)|_2 = 2^2$, daher liefert uns 3.10 nun $|C_G(y) : C_M(y)|_2 \leq 2$. Sei $H := \langle K^{C_M(y)} \rangle$. Dann ist $HC_M(y) \leq C_G(y)$ und wir erhalten $|H : H \cap C_M(y)|_2 \leq 2$. Außerdem ist $H \cap C_M(y)$ normal in $C_M(y)$ und wegen $O^2(C_M(y)) \not\leq N_G(K)$ ist insbesondere auch $O^2(C_M(y)) \not\leq H$. Demnach ist $H \cap C_M(y)$ mit 3.11 (d) eine 2-Gruppe. Also ist auch $K \cap C_M(y)$ eine 2-Gruppe und es gilt $|K : K \cap C_M(y)|_2 \leq 2$.

Wegen $y^\perp \trianglelefteq C_M(y)$ und $y^\perp \leq N_G(K)$ ist $[y^\perp, K \cap C_M(y)] \leq K \cap y^\perp$. Wir nehmen nun $[y^\perp, K \cap C_M(y)] \leq \langle y \rangle$ an. Dann ist insbesondere $[y^\perp, K \cap C_M(y)] \leq Z(K)$ und es ist

3. Untersuchung von $C_G(y)$

$[y^\perp, (K \cap C_M(y))Z(K)/Z(K)] = 1$. Weil $y^\perp/\langle y \rangle$ innere Automorphismen auf \overline{K} induziert, hat \overline{K} nun eine zu $y^\perp/\langle y \rangle$ isomorphe Untergruppe V der Ordnung 2^4 , für die ebenfalls $[V, (K \cap C_M(y))Z(K)/Z(K)] = 1$ gilt.

Weiter ist $K \cap C_M(y)$ eine 2-Gruppe mit $[K : K \cap C_M(y)]_2 \leq 2$, insbesondere erhalten wir $|(K \cap C_M(y))Z(K)/Z(K)| \in \{2^5, 2^6\}$. Es gibt also in \overline{K} eine Untergruppe U der Ordnung 2^5 , die die elementarabelsche Untergruppe V zentralisiert. Dabei können wir U so wählen, dass $V \leq U$ gilt. Dann ist $V \leq Z(U)$ und $|U : V| = 2$, also ist U abelsch. Da ein Punktstabilisator in $PSL_3(4)$ eine volle Sylow-2-Untergruppe enthält, ist U in einem solchen enthalten. Ein Punktstabilisator hat in $PSL_3(4)$ die Form $W : F$, wobei W eine elementarabelsche Gruppe der Ordnung 2^4 und ein natürlicher $GF(4)$ -Modul für $F \cong SL_2(4)$ ist. Es folgt $|U \cap W| \geq 2^3$ und $|U \cap F| \geq 2$. Also gibt es ein nicht triviales Element $g \in F$, das eine Untergruppe der Ordnung mindestens 2^3 in W zentralisiert. Da W ein $GF(4)$ -Modul für F ist, folgt dann schon $[W, g] = 1$. Da aber F auf natürliche Weise auf W operiert, gibt es kein nicht triviales Element in F , das ganz W zentralisiert und wir erhalten einen Widerspruch.

Also ist $[y^\perp, K \cap C_M(y)] \not\leq \langle y \rangle$ und daher auch $y^\perp \cap K \not\leq \langle y \rangle$. Dabei liegt $y^\perp \cap K$ im Zentralisator jeder von K verschiedenen Komponente von $C_G(y)$, weshalb uns 3.13 (b) schon $Comp(C_G(y)) = \{K\}$ liefert. Insbesondere ist $O^2(C_M(y)) \leq N_G(K)$, da wir aber bereits gezeigt haben, dass dies nicht der Fall sein kann, erhalten wir einen abschließenden Widerspruch. \square

Damit haben wir alle Gruppen aus 3.18 ausgeschlossen und wir folgern insgesamt das gewünschte Resultat:

3.22 Satz: *Sei K eine Komponente von $C_G(y)$, dann ist $O^2(C_M(y)) \leq N_G(K)$.*

Nun können wir das Hauptergebnis dieses Abschnitts beweisen. Es gilt:

3.23 Satz: *$C_G(y)$ hat genau eine Komponente K . Außerdem ist $O^2(C_M(y)) \leq K$.*

Beweis: Mit 3.7 sei $K \in Comp(C_G(y))$. Enthält $K \cap C_M(y)$ ein Element ungerader Ordnung, so ist $K \cap O^2(C_M(y))$ keine 2-Gruppe. Nach 3.11 (b) folgt dann schon $O^2(C_M(y)) \leq K$ und laut 3.11 (a) ist dann auch $z \in y^\perp \leq K$. Daher liefert uns 3.8 die Behauptung.

Wir nehmen also im Folgenden an, dass $T := K \cap C_M(y)$ eine 2-Gruppe ist und führen dies zu einem Widerspruch.

Laut 3.22 ist $O^2(C_M(y)) \leq N_G(K)$ und mit 3.11 (f) gilt $[O^2(C_M(y)), K] \neq 1$. Außerdem hat $O^2(C_M(y))$ nach 3.11 (b) keine nicht trivialen, auflösbaren Faktorgruppen und induziert deshalb mit der Schreierschen Vermutung innere Automorphismen auf K und damit auch auf $K/Z(K)$. Sei $Z := Z(E(C_G(y)))$ und $C := C_{O^2(C_M(y))}(K)$. Dann hat KZ/Z also eine Untergruppe U , die isomorph zu $O^2(C_M(y))/C$ ist und auf KZ/Z genau wie $O^2(C_M(y))/C$ operiert. Wegen $O^2(C_M(y)) \leq N_G(K)$ wird insbesondere TZ/Z von U normalisiert. Demnach

3. Untersuchung von $C_G(y)$

ist $(TZ/Z) \cap U \leq O_2(U) \cong O_2(O^2(C_M(y))/C)$ und deshalb hat $U/(U \cap (TZ/Z))$ nach 3.11 (a) eine Faktorgruppe, die isomorph zu $Sp_{2n-2}(2)'$ ist. Insbesondere haben wir also

$$|U(TZ/Z) : (TZ/Z)|_2 = |U : U \cap (TZ/Z)|_2 \geq |Sp_{2n-2}(2)'|_2 \geq 2^{(n-1)^2-1}.$$

Wir folgern

$$2^{(n-1)^2-1} \left| |U(TZ/Z) : (TZ/Z)| \right| \left| |KZ/Z : TZ/Z| = |KZ : TZ| \right| \left| |K : T| = |K : K \cap C_M(y)| \right|.$$

Seien nun $E := E(C_G(y))$ und R eine Sylow-2-Untergruppe von $E \cap C_M(y)$. Dann ist $K \cap R = K \cap C_M(y)$ und es gilt $|K : K \cap R|_2 \geq 2^{(n-1)^2-1}$. Also gilt auch

$$|E : R|_2 = |E : E \cap C_M(y)|_2 \geq 2^{(n-1)^2-1}$$

und wir erhalten

$$|C_G(y)|_2 \geq |C_M(y)E|_2 = |C_M(y)|_2 \cdot |E : E \cap C_M(y)|_2 \geq |C_M(y)|_2 \cdot 2^{(n-1)^2-1}.$$

Mit 3.10 ist allerdings $|C_G(y) : C_M(y)|_2 \leq 2^{n-2}$ und wir haben den gewünschten Widerspruch erreicht. \square

Kapitel 4

Identifizierung der Komponente K

Als wichtigstes Resultat des vorangegangenen Kapitels haben wir erhalten, dass $C_G(y)$ genau eine Komponente hat. Wir halten als Notation fest:

4.1 Definition: *Im Folgenden sei K die nach 3.23 eindeutig bestimmte Komponente von $C_G(y)$.*

Wir wollen nun den Isomorphietyp von $K/Z(K)$ bestimmen. Weil K in $C_G(y)$ liegt, können wir dabei Verwendung von der \mathcal{K}_2 -Hypothese machen und $K/Z(K)$ nacheinander mit allen „bekannt“ nicht abelschen einfachen Gruppen vergleichen. Bevor wir damit beginnen, sammeln wir noch einige nützliche Informationen über K , die uns schließlich helfen werden, mit Ausnahme von drei möglichen Kandidaten alle einfachen Gruppen auszuschließen. Teile von 4.2 und 4.4 und der Beweis von 4.5 stammen dabei aus [Pr, Kapitel 4].

4.2 Lemma: *Es ist $C_{[Y_M, O^2(M)]}(K) = \langle y \rangle$. Ist $n = 3$ und $|Y_M| = 2^7$, so ist (bei geeigneter Nummerierung) $C_{Y_M}(K) \leq \langle \overline{v_7}, \overline{v_8} \rangle$.*

Beweis: Die Untergruppen $C_{[Y_M, O^2(M)]}(K)$ und $C_{Y_M}(K)$ sind Normalteiler von $C_M(y)$, die y enthalten. Wäre $C_{[Y_M, O^2(M)]}(K) > \langle y \rangle$, so würde 3.11 (c) sofort $z \in y^\perp \leq C_{[Y_M, O^2(M)]}(K)$ und damit ein Widerspruch zu 3.8 liefern.

Im Falle $n = 3$ und $|Y_M| = 2^7$ können wir wie in 1.12 annehmen, dass $y = \overline{v_1 \cdot \dots \cdot v_6} = \overline{v_7 v_8}$ ist und entsprechend $y^\perp = \langle \overline{v_1 v_2}, \overline{v_1 v_3}, \overline{v_1 v_4}, \overline{v_1 v_5}, \overline{v_1 v_6} \rangle$ gilt. Dann enthält $C_M(y)/O_2(M)$ eine zu Σ_6 isomorphe Untergruppe, die (aufgefasst als Untergruppe von $A_8 \cong \Omega_6^+(2)$) die Bahnen $\{1, \dots, 6\}$ und $\{7, 8\}$ auf $\{1, \dots, 8\}$ hat. Daher ist $\langle \overline{v_7}, \overline{v_8} \rangle$ neben $\langle \overline{v_7 v_8} \rangle = \langle y \rangle$ die einzige mögliche $C_M(y)$ -invariante Untergruppe von Y_M , die $[Y_M, O^2(M)]$ lediglich in $\langle y \rangle$ anschneidet. \square

4. Identifizierung der Komponente K

4.3 Lemma: (a) Es ist $C_{C_M(y)}(K) \leq O_2(C_M(y))$.

(b) Sei $M_0 \leq M$ mit $M_0/O_2(M) \cong \Omega_{2n}^\epsilon(2)$. Dann ist $C_{C_{M_0}(y)}(K) \leq O_2(M)$. Insbesondere ist $C_{O^2(C_M(y))}(K) \leq O_2(M)$.

(c) Ist $O_2(M) = Y_M$ und $n \geq 4$, so ist $C_{O^2(C_M(y))}(K) = O^2(C_M(y)) \cap Z(K) = \langle y \rangle$.

Beweis:

(a) Zunächst ist $C_{C_M(y)}(K)$ normal in $C_M(y)$. Würde $C_{C_M(y)}(K)$ ein Element ungerader Ordnung enthalten, wäre mit 3.11 (d) schon $[O^2(C_M(y)), K] = 1$, was aber 3.11 (f) widerspricht. Also ist $C_{C_M(y)}(K)$ eine 2-Gruppe und liegt daher in $O_2(C_M(y))$.

(b) Es ist $C_{M_0}(y)/O_2(M) \cong Sp_{2n-2}(2)$ laut 1.7 (c) und nach (a) liegt $C_{C_{M_0}(y)}(K)$ in $O_2(C_M(y)) \cap C_{M_0}(y) = O_2(M)$. Außerdem gilt $O^2(C_M(y)) \leq M_0$, also folgt insgesamt die Behauptung.

(c) Aus (b) erhalten wir schon $C_{O^2(C_M(y))}(K) \leq C_{O_2(M)}(K) = C_{Y_M}(K)$. Wegen $n \geq 4$ gilt $Y_M = [Y_M, O^2(M)]$, daher folgern wir mit 4.2 nun $C_{O^2(C_M(y))}(K) = \langle y \rangle$. Zuletzt liegt $O^2(C_M(y))$ laut 3.23 in K , demnach ist $C_{O^2(C_M(y))}(K) = O^2(C_M(y)) \cap Z(K)$.

□

4.4 Lemma: (a) Es ist $y \in Z(K)$, insbesondere hat der Schur-Multiplikator der einfachen Gruppe $K/Z(K)$ eine durch 2 teilbare Ordnung. Außerdem ist $Z(K)$ eine 2-Gruppe.

(b) Es ist $y^\perp \leq K$.

(c) Die Involution z ist 2-zentral in K und z liegt nicht in $Z(K)$.

(d) Es sei y die einzige Involution in $Z(K)$. Ist $g \in N_G(K)$ mit $[z, g] \in C_G(K)$, so gilt bereits $[z, g] = 1$. Insbesondere ist dann $C_{N_G(K)/C_G(K)}(zC_G(K)) = C_{N_G(K)}(z)/C_G(K)$ und $C_{K/Z(K)}(zZ(K)) = C_K(z)/Z(K)$.

(e) Es ist $|K/Z(K)|_2 \geq 2^{2n-2+(n-1)^2}$ für $n \geq 4$ und $|K/Z(K)|_2 \geq 2^7$ für $n = 3$.

(f) Es ist $|\text{Aut}(K/Z(K))|_2 \geq 2^{2n-1+(n-1)^2}$.

Beweis:

(a) Dies folgt aus 3.14.

(b) Nach 3.23 ist $O^2(C_M(y)) \leq K$, also folgt die Behauptung mit der ersten Aussage von 3.11 (a).

4. Identifizierung der Komponente K

- (c) In 3.4 haben wir gezeigt, dass z im Zentrum einer Sylow-2-Untergruppe \tilde{S} von $C_G(y)$ liegt. Nach (b) ist $z \in y^\perp \leq K$ und daher gilt $z \in Z(\tilde{S} \cap K)$, wobei $\tilde{S} \cap K$ eine Sylow-2-Untergruppe von K ist. Zuletzt erhalten wir mit 3.8, dass z nicht im Zentrum von K liegen kann.
- (d) Laut (b) ist $z \in K$ und wegen $g \in N_G(K)$ folgt $x := [z, g] \in K \cap C_G(K) = Z(K)$. Nun gilt $z^2 = 1 = (z^g)^2 = (zx)^2 = x^2$ und daher ist $x \in \langle y \rangle$. Weil z laut 1.18 nicht zu yz konjugiert ist, muss $x = 1$ sein und wir erhalten $[z, g] = 1$.
- (e) Da $O^2(C_M(y)) \leq K$ ist, liefert 3.11 (a) nun $|K|_2 \geq |y^\perp| \cdot |Sp_{2n-2}(2)|_2$ für $n \geq 4$ und $|K|_2 \geq |y^\perp| \cdot |A_6|_2$ für $n = 3$. Da $C_{O^2(C_M(y))}(K)$ nach 4.3 (b) in $O_2(M)$ liegt und laut 4.2 außerdem $C_{O^2(C_M(y))}(K) \cap y^\perp = \langle y \rangle$ gilt, folgt nun die Behauptung.
- (f) Sei $C := C_{C_M(y)}(K)$. Dann ist $C_M(y)/C$ isomorph zu einer Untergruppe von $\text{Aut}(K)$. Dabei liegt C nach 4.3 (a) in $O_2(C_M(y))$ und laut 4.2 ist $|Y_M : Y_M \cap C| \geq 2^{2n-1}$. Also ist insgesamt $|C_M(y)/C|_2 \geq |C_M(y) : O_2(C_M(y))|_2 \cdot |Y_M : Y_M \cap C| \geq |Sp_{2n-2}(2)|_2 \cdot 2^{2n-1} = 2^{2n-1+(n-1)^2}$.

□

Das folgende Lemma wird bei der Abschätzung von $|K|_2$ hilfreich sein.

4.5 Lemma: *Es sei $Y_M = O_2(M)$. Dann ist $|C_G(y)|_2 \leq \frac{|G|_2}{4}$. Für $M/O_2(M) \cong O_{2n}^\epsilon(2)$ gilt also $|C_G(y)|_2 \leq |Y_M| \cdot 2^{n \cdot (n-1) - 1}$, im Fall $M/O_2(M) \cong \Omega_{2n}^\epsilon(2)$ ist $|C_G(y)|_2 \leq |Y_M| \cdot 2^{n \cdot (n-1) - 2}$.*

Beweis: Nach 3.10 ist $C_G(y)$ nicht parabolisch.

Wir nehmen also $|C_G(y)| = \frac{|G|_2}{2}$ an und wählen $P \in \text{Syl}_2(C_G(y))$. Dann ist $y \in Z(P)$ und es gibt ein $g \in G$ mit $P^g \leq S$. Angenommen, es gilt $y^g \in [Y_M, O^2(M)]$. Laut 1.18 ist y^g nicht singular und 1.7 (c) liefert $|C_M(y^g)|_2 < |P^g| = \frac{|G|_2}{2}$, ein Widerspruch. Also haben wir $y^g \notin [Y_M, O^2(M)]$.

Sei zunächst $[Y_M, O^2(M)] = Y_M$. Es folgt $Y_M \not\leq P^g$, da $y^g \in Z(P^g)$ ist und $C_M(Y_M) \stackrel{1.10}{=} Y_M$ gilt. Daher ist $|P^g \cap Y_M| = 2^{2n-1}$. Außerdem gilt $P^g \leq S \leq C_M(z)$, also ist $P^g Y_M / Y_M$ eine Sylow-2-Untergruppe von $C_M(z)/Y_M$ und $y^g Y_M$ liegt in $Z(P^g Y_M / Y_M)$. Mit 1.7 (b) ist $C_M(z)/Y_M = AB$, wobei $B \cong O_{2n-2}^\epsilon(2)$ oder $\Omega_{2n-2}^\epsilon(2)$ gilt und $A = O_2(C_M(z)/Y_M)$ der natürliche Modul für B ist. Also liegt $y^g Y_M$ in $A \stackrel{2.2(b)}{=} QY_M / Y_M$. Nun folgt mit 2.2 (b) und (d), dass $[z^\perp, y^g] = \langle z \rangle$ ist. Wegen $|C_{Y_M}(y^g)| = 2^{2n-1}$ müsste dann $[Y_M, y^g] = \langle z \rangle$ gelten, was aber 2.2 (f) widerspricht.

Sei nun $(2n, \epsilon) = (6, +)$ und $|Y_M| = 2^7$. Wir nehmen zuerst $y^g \in Y_M \setminus [Y_M, O^2(M)]$ an. Es ist entweder $P^g Y_M / Y_M = S / Y_M \in \text{Syl}_2(M / Y_M)$ oder $P^g Y_M / Y_M$ ist eine Untergruppe vom Index 2 in S / Y_M . Da S / Y_M transitiv auf $\{1, \dots, 8\}$ ist, ist dann $P^g Y_M / Y_M$ entweder auch transitiv oder hat zwei Bahnen der Länge 4. Dann wird aber kein Vektor der Form \bar{v}_i oder

4. Identifizierung der Komponente K

$\overline{v_i v_j v_k}$ mit paarweise verschiedenen $i, j, k \in \{1, \dots, 8\}$ von P^g zentralisiert, was $y^g \in Z(P^g)$ widerspricht. Also ist $y^g \notin Y_M$ und $|P^g \cap Y_M| = 2^6$. Da $C_M([Y_M, O^2(M)]) = Y_M$ ist, folgt $P^g \cap [Y_M, O^2(M)] = 2^5$ und dann der gleiche Widerspruch wie oben. \square

4.6 Lemma: *Es gilt $|K : K \cap C_M(y)|_2 \leq 2^{n-2}$. Ist $Y_M = O_2(M)$, so haben wir sogar $|K : K \cap C_M(y)|_2 \leq 2^{n-3}$.*

Beweis: Da $C_G(y)$ nach 3.10 nicht parabolisch ist und $KC_M(y)$ in $C_G(y)$ liegt, erhalten wir

$$2 \leq |G : C_G(y)|_2 \leq |G : KC_M(y)|_2 = \frac{|G : C_M(y)|_2}{|K : K \cap C_M(y)|_2},$$

woraus wir wegen $|G : C_M(y)|_2 = 2^{n-1}$ schon $|K : K \cap C_M(y)|_2 \leq 2^{n-2}$ folgern können.

Ist $Y_M = O_2(M)$, so gilt nach 4.5 sogar $|G : C_G(y)|_2 \geq 4$, was auf demselben Weg zu $|K : K \cap C_M(y)|_2 \leq 2^{n-3}$ führt. \square

4.7 Lemma: *Es sei $Y_M = O_2(M)$. Setze $a := 0$ für $M/O_2(M) \cong \Omega_{2n}^\epsilon(2)$ und $a := 1$ für $M/O_2(M) \cong O_{2n}^\epsilon(2)$. Dann gilt:
Es ist $|K/Z(K)|_2 \leq 2^{n(n+1)-3+a}$ für $[Y_M, O^2(M)] = Y_M$. Im Sonderfall $(2n, \epsilon) = (6, +)$ und $|Y_M| = 2^7$ ist $|K/Z(K)|_2 \leq 2^{10+a}$.*

Beweis: Mit 4.5 folgt $|K|_2 \leq \frac{|G|_2}{4}$, wegen $y \in Z(K)$ ist also $|K/Z(K)|_2 \leq \frac{|G|_2}{8}$. \square

4.8 Lemma: *Es sei $Y_M = O_2(M)$. Dann ist $2^a \leq |K/Z(K)|_2 \leq 2^b$ für $M/O_2(M) \cong O_{2n}^\epsilon(2)$ bzw. $2^a \leq |K/Z(K)|_2 \leq 2^{b-1}$ für $M/O_2(M) \cong \Omega_{2n}^\epsilon(2)$, wobei a und b aus folgender Tabelle entnommen werden können:*

Situation	a	b	Situation	a	b
$n = 3, Y_M = 2^6$	7	10	$n = 3, Y_M = 2^7$	7	11
$n = 4$	15	18	$n = 5$	24	28
$n = 6$	35	40	$n = 7$	48	54
$n \geq 8$	≥ 63	≥ 70			

Beweis: Sämtliche Abschätzungen folgen mit 4.4 (e) und 4.7. \square

Nachdem wir bis hier einige Informationen über den 2-Anteil von $K/Z(K)$ für den Fall $Y_M = O_2(M)$ zusammengetragen haben, wenden wir uns nun dem Fall $Y_M < O_2(M)$ zu. Dann können wir die Ordnung einer Sylow-2-Untergruppe von K leider nicht so einfach nach oben beschränken, dafür erhalten wir bessere Abschätzungen nach unten.

4.9 Lemma: *Es sei $Y_M < O_2(M)$. Dann gilt:*

- (a) *Die Gruppe $C_M(y)/C_{C_M(y)}(K)$ enthält eine Untergruppe U mit $|O_2(U)| \geq 2^{4n-3}$ und $U/O_2(U) \cong Sp_{2n-2}(2)$.
Insbesondere ist $|\text{Aut}(K/Z(K))|_2 \geq 2^{4n-3} \cdot |Sp_{2n-2}(2)|_2 = 2^{4n-3+(n-1)^2}$.*
- (b) *Die Gruppe $(K \cap C_M(y))Z(K)/Z(K)$ hat eine Untergruppe U mit $|O_2(U)| \geq 2^{4n-4}$ und $U/O_2(U) \cong Sp_{2n-2}(2)'$.
Insbesondere ist also $|K/Z(K)|_2 \geq 2^{4n-4} \cdot |Sp_{2n-2}(2)'|_2 = 2^{4n-4+(n-1)^2-a}$ mit $a = 1$ für $n = 3$ und $a = 0$ für $n \geq 4$.*

Beweis: Seien $M_0 \leq M$ mit $M_0/O_2(M) \cong \Omega_{2n}^\epsilon(2)$ und $X := C_{M_0}(y)$. Es liegt $O^2(C_M(y))$ in X , außerdem ist $X/O_2(M) \cong Sp_{2n-2}(2)$ und es gilt $O_2(X) = O_2(M)$. Sei weiter $C := C_X(K)$. Dann ist X/C isomorph zu einer Untergruppe von $\text{Aut}(K)$ und mit 4.3 (b) ist $C \leq O_2(M)$. Nach 1.13 ist $y^\perp \leq [Y_M, O^2(M)] \leq \Phi(O_2(M)) < O_2(M)$. Wir nehmen nun an, dass $[O^2(C_M(y)), O_2(M)/(C \cdot \Phi(O_2(M)))] = 1$ ist. Dann wäre für jede ungerade Primzahl p und jede Sylow- p -Untergruppe P von $C_M(y)$ schon $[O_2(M), P] \leq C \cdot \Phi(O_2(M))$, wegen $O^2(C_M(y)) \leq K$ ist weiterhin $[C, P] = 1$ und wir erhalten $[O_2(M)/\Phi(O_2(M)), P, P] = 1$. Mit 8.2.7. und 8.2.9. in [KS] folgt nun $[O_2(M)/\Phi(O_2(M)), P] = 1$ und dann sogar $[O_2(M), P] = 1$. Das widerspricht allerdings 1.10.

Daher ist $[O^2(C_M(y)), O_2(M)/(C \cdot \Phi(O_2(M)))] \neq 1$. Unter allen $O^2(C_M(y))$ -invarianten Untergruppen von $O_2(M)/(C \cdot \Phi(O_2(M)))$, auf denen $O^2(M)$ nicht trivial operiert, wählen wir nun eine bezüglich Inklusion minimale Untergruppe V . Wie eben folgt dann wieder aus 8.2.9. in [KS], dass auch $[O^2(M), V/\Phi(V)] \neq 1$ und wegen der Minimalität von V sogar $[O^2(M), V/\Phi(V)] = V/\Phi(V) =: \bar{V}$ ist. Dann ist $O^2(C_M(y))/C_{O^2(C_M(y))}(\bar{V})$ isomorph zu einer Untergruppe von $\text{Aut}(\bar{V})$. Weil alle echten Normalteiler von $O^2(C_M(y))$ nach 3.11 (b) in $O^2(C_M(y)) \cap O_2(M)$ liegen, hat $O^2(C_M(y))/C_{O^2(C_M(y))}(\bar{V})$ also einen Abschnitt, der isomorph zu $O^2(C_M(y))/O^2(C_M(y)) \cap O_2(M) \cong Sp_{2n-2}(2)'$ ist. Mit Lemma 1.20 erhalten wir nun $|\bar{V}| \geq 2^{2n-2}$.

Insbesondere ist $2^{2n-2} \leq |O_2(X)/(C \cdot \Phi(O_2(M)))| \leq |O_2(X)/(C \cdot [Y_M, O^2(M)])|$. Laut 4.2 gilt außerdem $|C \cdot [Y_M, O^2(M)] : C| = |[Y_M, O^2(M)] : [Y_M, O^2(M)] \cap C| = 2^{2n-1}$. Damit ergibt sich insgesamt

$$|O_2(X)/C| = |O_2(M)/(C \cdot [Y_M, O^2(M)])| \cdot |(C \cdot [Y_M, O^2(M)]) / C| \geq 2^{2n-2} \cdot 2^{2n-1} = 2^{4n-3}.$$

Demnach erfüllt $U := X/C \lesssim \text{Aut}(K)$ die Behauptung von (a).

Seien nun $A, B \leq O_2(M)$ mit $C \cdot \Phi(O_2(M)) \leq A$ und $A/(C \cdot \Phi(O_2(M))) = \Phi(V)$, weiterhin sei $A \leq B$ und $B/(C \cdot \Phi(O_2(M))) = V$. Dann erhalten wir

$$\bar{V} = [\bar{V}, O^2(C_M(y))] = [B/A, O^2(C_M(y))A/A] = [B, O^2(C_M(y))]A/A.$$

4. Identifizierung der Komponente K

Wir setzen zur Verkürzung $\tilde{B} := [B, O^2(C_M(y))]$ und $N := C \cdot [Y_M, O^2(M)]$. Dann ist $\bar{V} = \tilde{B}A/A \cong (\tilde{B}N/N) \cdot (A/N) / (A/N)$ und daher ist $|\tilde{B}N/N| \geq |\bar{V}| \geq 2^{2n-2}$. Nun gilt

$$\begin{aligned} \tilde{B}N/N &\leq O_2((O^2(C_M(y))N)/N) \cong O_2(O^2(C_M(y))/(O^2(C_M(y)) \cap N)) \\ &= (O_2(M) \cap O^2(C_M(y))) / (O^2(C_M(y)) \cap N) \end{aligned}$$

und weiter ist mit 3.11 (a)

$$O^2(C_M(y)) \cap N = O^2(C_M(y)) \cap (C \cdot [Y_M, O^2(M)]) \geq (C \cap O^2(C_M(y))) \cdot y^\perp.$$

Entsprechend ist auch $|(O_2(M) \cap O^2(C_M(y))) / ((C \cap O^2(C_M(y))) \cdot y^\perp)| \geq 2^{2n-2}$ und außerdem gilt $((C \cap O^2(C_M(y))) \cdot y^\perp) / (C \cap O^2(C_M(y))) \cong y^\perp / (y^\perp \cap C) = y^\perp / \langle y \rangle$. Nach 3.23 ist $O^2(C_M(y)) \leq K$ und daher erfüllt

$$\begin{aligned} U := O^2(C_M(y))Z(K)/Z(K) &\cong O^2(C_M(y)) / (O^2(C_M(y)) \cap Z(K)) \\ &= O^2(C_M(y)) / (O^2(C_M(y)) \cap C) \end{aligned}$$

die Bedingungen an die Ordnung und die Struktur von U aus (b). □

Zusammenfassend notieren wir noch:

4.10 Lemma: Die Untergruppe $W := (K \cap C_M(y))Z(K)/Z(K)$ von $K/Z(K)$ hat folgende Eigenschaften:

- (a) Es ist $O_2(W) \neq 1$ und $O_2(W)$ enthält einen minimalen Normalteiler der Ordnung 2^{2n-2} von W .
- (b) $W/O_2(W) \cong Sp_{2n-2}(2)'$ oder $W/O_2(W) \cong Sp_{2n-2}(2)$
- (c) Für $Y_M > O_2(M)$ ist $|K/Z(K) : W|_2 \leq 2^{n-2}$, im Fall $Y_M = O_2(M)$ gilt sogar $|K/Z(K) : W|_2 \leq 2^{n-3}$.

Beweis: Nach 4.6 erfüllt $W = (K \cap C_M(y))Z(K)/Z(K)$ die Bedingung (c). Außerdem liegt $U := O^2(C_M(y))Z(K)/Z(K)$ nach 3.23 in W und 3.11 (a) liefert $UO_2(W)/O_2(W) \cong Sp_{2n-2}(2)'$. Weil aber $C_M(y)/O_2(C_M(y)) \cong Sp_{2n-2}(2)$ ist, folgt auch $W/O_2(W) \cong Sp_{2n-2}(2)'$ oder $W/O_2(W) \cong Sp_{2n-2}(2)$. Weiter ist $y^\perp \cap Z(K) \stackrel{4.2}{=} \langle y \rangle$ und weil $O^2(C_M(y))$ irreduzibel auf $y^\perp / \langle y \rangle \cong y^\perp Z(K)/Z(K)$ operiert, ist $y^\perp Z(K)/Z(K)$ ein minimaler Normalteiler von W und es gilt (a). □

Außerdem erhalten wir strukturelle Informationen über $C_K(z)$, es gilt nämlich:

4.11 Lemma: *Es ist $E(C_K(z)) = 1$.*

Beweis: Zunächst ist $C_Q(y) \leq C_G(z) \cap C_G(y) \leq C_G(z) \cap N_G(K) \leq N_G(C_K(z))$. Angenommen, es gilt $E := E(C_K(z)) \neq 1$. Da E charakteristisch in $C_K(z)$ ist, erhalten wir sogar $C_Q(y) \leq N_G(E)$. Umgekehrt ist $E \leq C_G(z) \cap C_G(y) \leq N_G(Q) \cap C_G(y) \leq N_G(C_Q(y))$. Das führt uns zu $[E, C_Q(y)] \leq E \cap C_Q(y) \leq O_2(E) \leq Z(E)$. Insbesondere ist also $[E, C_Q(y), E] = 1 = [C_Q(y), E, E]$, und eine Anwendung des Drei-Untergruppen-Lemmas liefert uns schließlich $1 = [E, E, C_Q(y)] = [E', C_Q(y)] = [E, C_Q(y)]$. Demnach ist $E \leq C_G(C_Q(y))$, was aber einen Widerspruch zu 2.4 darstellt. \square

Für eine Verwendung in den letzten beiden Kapiteln halten wir hier außerdem noch folgende beiden Ergebnisse fest:

4.12 Lemma: *Es gilt:*

- (a) *Ist $N \trianglelefteq Q$ und $N \leq C_G(K)$, so ist $N = 1$.*
- (b) *Die Untergruppe $C_G(\langle y, z \rangle)$ wird von Q normalisiert.*

Beweis:

- (a) Angenommen, es ist $N \neq 1$. Dann folgt $N \cap Z(Q) \neq 1$ und weil Q eine große Untergruppe von G ist, ist Q normal in $C_G(N \cap Z(Q))$. Außerdem ist $K \leq C_G(N \cap Z(Q))$, weshalb insgesamt $K \cap Q$ ein 2-Normalteiler von K ist, was wiederum zu $K \cap Q \leq Z(K)$ führt. Allerdings ist nach 2.2 (h) beispielsweise $z \in K \cap Q$ und wir erhalten einen Widerspruch zu 4.4 (c).
- (b) Es ist $z \in Z(Q)$ und mit 2.3 folgt $[y, Q] = \langle z \rangle$, also ist $\langle y, z \rangle \trianglelefteq Q$. Folglich normalisiert Q auch $C_G(\langle y, z \rangle)$.

\square

4.13 Lemma: *Sei $g \in Q \setminus C_Q(y)$. Dann gilt:*

- (a) *$C_G(K)$ und $C_G(K)^g$ sind normal in $C_G(\langle y, z \rangle)$.*
- (b) *Es ist $C_G(K) \cap C_G(K)^g = 1$, insbesondere ist $C_G(K) \cdot C_G(K)^g = C_G(K) \times C_G(K)^g$.*
- (c) *$C_G(K)$ ist eine 2-Gruppe, es ist also $C_G(K) = O_2(C_G(y))$.*

4. Identifizierung der Komponente K

Beweis:

- (a) Laut 4.4 (b) ist $\langle y, z \rangle \leq y^\perp \leq K$ und wegen $K \trianglelefteq C_G(y)$ ist $C_G(K)$ normal in $C_G(y)$, insgesamt gilt also auch $C_G(K) \trianglelefteq C_G(\langle y, z \rangle)$. Nach 4.12 (b) wird $C_G(\langle y, z \rangle)$ von Q normalisiert, daher ist auch $C_G(K)^g$ normal in $C_G(\langle y, z \rangle)$.
- (b) Wegen $|Q : C_Q(y)| = 2$ und $z \in Z(Q)$ ist $g^2 \in C_G(\langle y, z \rangle)$, also wird mit (a) insbesondere $C_G(K)$ von g^2 normalisiert. Daher werden $C_G(K)$ und $C_G(K)^g$ von g vertauscht und wir erhalten $g \in N_G(C_G(K) \cap C_G(K)^g)$. Außerdem ist $C_Q(y) \leq C_G(\langle y, z \rangle)$ und es folgt $Q = \langle g, C_Q(y) \rangle \leq N_G(C_G(K) \cap C_G(K)^g)$. Umgekehrt ist $C_G(K) \cap C_G(K)^g \leq C_G(z) \leq N_G(Q)$. Sei nun $N := [Q, C_G(K) \cap C_G(K)^g]$. Dann ist $N \trianglelefteq Q$ und $N \leq C_G(K)$, weshalb uns 4.12 (a) schon $N = 1$ liefert. Weil Q eine große 2-Untergruppe von G ist, folgt dann $C_G(K) \cap C_G(K)^g \leq Z(Q)$ und durch erneute Anwendung von 4.12 (a) erhalten wir $C_G(K) \cap C_G(K)^g = 1$.
- (c) Es sei $a \in C_G(K)$ mit ungerader Ordnung. Dann ist wegen $C_G(K) \leq C_G(z) \leq N_G(Q)$ bereits $[a, g] \in Q$. Andererseits ist aber $[a, g] = a^{-1} \cdot a^g \in C_G(K) \times C_G(K)^g$ und es folgt $o([a, g]) = o(a)$. Also ist $a = 1$ und damit $C_G(K)$ eine 2-Gruppe, daher gilt auch $C_G(K) \leq O_2(C_G(y))$. Umgekehrt ist $O_2(C_G(y)) \leq C_G(K)$ und es folgt die Behauptung.

□

Wir wollen jetzt die einfache Gruppe $K/Z(K)$ bestimmen. Dazu werden wir uns in den nun folgenden Abschnitten unter Ausnutzung der \mathcal{K}_2 -Hypothese den verschiedenen Klassen von einfachen Gruppen einzeln zuwenden und dabei die bisher gesammelten Informationen über Ordnung und Struktur $K/Z(K)$ mit den jeweiligen Kandidaten vergleichen.

4.1 Die alternierenden Gruppen

Zuerst werden wir die alternierenden Gruppen betrachten und zeigen, dass diese Gruppen nicht für den Isomphietyp von $K/Z(K)$ infrage kommen. Dazu nehmen wir hier an, dass $K/Z(K)$ isomorph zu einer Gruppe A_m mit $m \geq 5$ ist, und führen dies zu einem Widerspruch. Dieser Abschnitt ist dabei eine überarbeitete Fassung von [Pr, Abschnitt 4.1].

Nach 4.4 (f) ist $|\text{Aut}(K/Z(K))|_2 \geq 2^9$, also gilt $m \geq 12$ und [GLS3, 5.2.1] liefert uns $\text{Aut}(K/Z(K)) \cong \Sigma_m$. Außerdem hat der Schur-Multiplikator von A_m nach [GLS3, 5.2.3.] für $m \geq 12$ die Ordnung 2 und es folgt $Z(K) = \langle y \rangle$.

Seien $C := C_G(K) = C_G(K/Z(K))$ und $U := C_G(y)$. Weiter setzen wir $\bar{U} := U/C$. Dann ist \bar{U} isomorph zu einer Untergruppe von $\text{Aut}(K/Z(K))$, weil K in U liegt ist also $\bar{U} \cong A_m$ oder Σ_m .

Wegen $Q \trianglelefteq C_G(z)$ ist auch $C_Q(y)$ normal in $C_U(z)$ und wir erhalten $\overline{C_Q(y)} \trianglelefteq \overline{C_U(z)} \stackrel{4.4(d)}{=} C_{\overline{U}}(\overline{z})$. Dabei liegt z mit 3.8 nicht in C , also ist $\overline{z} \in \overline{U}$ ein Element der Ordnung 2. Wir setzen $R := \overline{C_Q(y)} \cong C_Q(y)/C_Q(K)$ und werden im Folgenden zeigen, dass weder A_m noch Σ_m eine Involution enthält, deren Zentralisator einen Normalteiler passender Struktur hat. Dazu untersuchen wir zuerst die Gruppe R genauer.

4.14 Lemma: (a) Es ist $z^\perp \trianglelefteq R$ und $|z^\perp| = 2^{2n-2}$.

(b) Es gilt $[z^\perp, R] = \langle \overline{z} \rangle \neq 1$, insbesondere ist R nicht abelsch.

(c) $|R| \geq 2^{4n-5}$

(d) $|R/C_R(\overline{z^\perp})| = 2^{2n-3}$

(e) $C_{z^\perp}(R) = \langle \overline{z} \rangle$

Beweis: Mit 2.2 (h) ist $z^\perp \leq C_Q(y)$ und wegen $Q \leq C_M(z)$ ist z^\perp normal in Q . Weiter liefert uns 4.2 insbesondere $C_{z^\perp}(K) = \langle y \rangle$ und es folgt $\overline{z^\perp} \cong z^\perp / \langle y \rangle$, somit haben wir (a).

Nach 2.3 ist $|C_Q(y)O_2(M)/O_2(M)| = 2^{2n-3}$ und daher insbesondere $C_Q(y) \not\leq O_2(M)$, also folgern wir aus 2.2 (d), dass $[z^\perp, \overline{C_Q(y)}] = \langle \overline{z} \rangle$ ist. Wie wir uns oben bereits überlegt haben, ist $z \notin C$ und wir erhalten (b).

Sei $M_0 \leq M$ mit $M_0/O_2(M) \cong \Omega_{2n}^\epsilon(2)$. Zusammen mit 2.2 (b) und 1.7 (b) ist $C_Q(y) \leq M_0$, also können wir 4.3 (b) verwenden und schließen $C_Q(K) \leq O_2(M)$. Das heißt

$$\begin{aligned} |R| &= |C_Q(y)/C_Q(K)| \geq |z^\perp C/C| \cdot |C_Q(y)O_2(M)/O_2(M)| \\ &= |z^\perp / \langle y \rangle| \cdot 2^{2n-3} = 2^{2n-2} \cdot 2^{2n-3} = 2^{4n-5} \end{aligned}$$

und es gilt (c).

Außerdem ist $[z^\perp, Q] \cap C \stackrel{2.2(b)}{=} \langle z \rangle \cap C = 1$, insbesondere gilt also $C_R(\overline{z^\perp}) = \overline{C_Q(z^\perp)}$. Daher ist wegen 2.2 (d) und $z^\perp \leq Y_M \leq Z(O_2(M))$ schon $C_R(\overline{z^\perp}) = (C_Q(y) \cap O_2(M))C/C$ und zusammen mit $C_Q(y) \cap C = C_Q(K) \leq O_2(M)$ erhalten wir (d) aus

$$|R/C_R(\overline{z^\perp})| = |C_Q(y)C/(C_Q(y) \cap O_2(M))C| = |C_Q(y)/(C_Q(y) \cap O_2(M))| = 2^{2n-3}.$$

Ferner ergibt sich für $x \in z^\perp$ mit $[\overline{x}, R] = 1$ auch $[x, C_Q(y)] = 1$, nach 2.3 ist dann also $x \in \langle y, z \rangle$ und es gilt insgesamt $C_{z^\perp}(R) = \langle \overline{z} \rangle$, das ist (e). \square

Wir nehmen nun zuerst an, dass $\overline{U} \cong \Sigma_m$ ist. Wie oben ist $[\overline{z^\perp}, \overline{C_Q(y)}] = \langle \overline{z} \rangle$, daher ist \overline{z} ein Kommutator und damit in A_m enthalten. Dabei entspricht \overline{z} also o.B.d.A. einer Involution der Form $(1, 2)(3, 4)\dots(k-1, k)$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $4 \mid k$. Ein Element in Σ_m zentralisiert \overline{z} genau dann, wenn es die Transpositionen $(1, 2), (3, 4), \dots, (k-1, k)$ permutiert. Also ist

$$X := C_{\Sigma_m}(\overline{z}) = \Gamma \times \Sigma_{\{k+1, \dots, m\}}$$

4. Identifizierung der Komponente K

mit

$$\Gamma = C_{\Sigma_{\{1, \dots, k\}}}((1, 2) \dots (k-1, k)) \sim \langle (1, 2), \dots, (k-1, k) \rangle \cdot \Sigma_{k/2}.$$

Es ist $O_2(X) = O_2(\Gamma) \times O_2(\Sigma_{\{k+1, \dots, m\}})$ und da $O_2(\Sigma_{\{k+1, \dots, m\}}) \in \{1, C_2, V_4\}$ immer elementarabelsch ist, aber $O_2(X)$ eine zu R isomorphe und daher laut 4.14 (b) nicht abelsche Untergruppe hat, muss $O_2(\Gamma)$ nicht abelsch sein. Insbesondere ist $O_2(\Gamma) \not\leq \langle (1, 2), \dots, (k-1, k) \rangle$, was zu $O_2(\Sigma_{k/2}) \neq 1$ und damit zu $k \in \{4, 8\}$ führt. Dann ist $O_2(\Gamma)$ isomorph zu D_8 oder $2^4 : V_4$. Zusammen mit $m \geq 12$ ist $O_2(X)$ also isomorph zu einer der folgenden Gruppen:

$$O_2(X) \cong D_8, 2^4 : V_4 \text{ oder } (2^4 : V_4) \times V_4.$$

Mit 4.14 (c) ist $|O_2(X)| \geq |R| \geq 2^{4n-5} \geq 2^7$, weshalb nun $O_2(X) \cong (2^4 : V_4) \times V_4$ und $n = 3$ folgen. Dabei ist $\overline{z^\perp} \leq R \leq O_2(X)$ und laut 4.14 (a), (d) und (e) gilt $|\overline{z^\perp}| = 2^4$, $\overline{z^\perp} \cap Z(O_2(X)) \leq \langle \overline{z} \rangle$ und $|R/C_R(\overline{z^\perp})| = 2^3$. Weil aber $Z(O_2(X))$ die Ordnung 8 hat, ist für jede abelsche Untergruppe $A \leq O_2(X)$ mit $|A| = 2^4$ und $|A \cap Z(O_2(X))| \leq 2$ allerdings $|C_{O_2(X)}(A)| \geq 2^6$ und demnach $|O_2(X) : C_{O_2(X)}(A)| \leq 2^2$, ein Widerspruch.

Somit ist $U/C \not\cong \Sigma_m$. Also gilt $U/C \cong A_m$ und es müsste der Zentralisator einer Involution in A_m einen zu R isomorphen Normalteiler enthalten. Ist allerdings $t \in A_m$ ein Involution, so gilt $O_2(C_{A_m}(t)) \leq O_2(C_{\Sigma_m}(t))$. Da bereits $O_2(C_{\Sigma_m}(t))$ niemals eine zu R isomorphe Untergruppe hatte, gibt es eine solche folglich auch nicht in $O_2(C_{A_m}(t))$.

Damit erhalten wir einen abschließenden Widerspruch und es gilt:

4.15 Satz: $K/Z(K)$ ist zu keiner alternierenden Gruppe isomorph.

4.2 Die sporadischen Gruppen

In diesem Abschnitt nehmen wir an, dass $K/Z(K)$ zu einer der sporadischen einfachen Gruppen isomorph ist. Wir werden zeigen, dass unter dieser Voraussetzung lediglich die Gruppen Fi_{22} und BM für den Isomphietyp von $K/Z(K)$ infrage kommen. Dabei wird [Atl] ein wichtiges Hilfsmittel sein.

Nach 4.4 (a) ist $Z(K)$ eine nicht triviale 2-Gruppe, damit können wir die meisten der 26 sporadischen Gruppen direkt ausschließen. So haben

$$M_{11}, M_{23}, M_{24}, J_1, J_3, J_4, Co_2, Co_3, Fi_{23}, Fi'_{24}, McL, He, O'N, HN, Ly, Th \text{ und } F_1$$

laut 6.1.1. (c) und Tabelle 6.1.3 in [GLS3] einen Schur-Multiplikator ungerader Ordnung.

Außerdem kann $K/Z(K)$ nicht isomorph zu M_{12} , M_{22} oder J_2 sein. Denn nach 4.4 (f) gilt $|\text{Aut}(K/Z(K))|_2 \geq 2^9$, aber es ist $|\text{Aut}(M_{12})|_2 = 2^7$ und $|\text{Aut}(M_{22})|_2 = |\text{Aut}(J_2)|_2 = 2^8$.

Die verbleibenden 6 sporadischen Gruppen Co_1 , Fi_{22} , HS , Ru , Suz und B werden wir nun gesondert betrachten. Wir erhalten:

4.16 Lemma: $K/Z(K)$ ist nicht isomorph zu einer der folgenden Gruppen:

$$(a) Co_1, \quad (b) HS, \quad (c) Ru, \quad (d) Suz.$$

Beweis:

(a) Angenommen, es ist $K/Z(K) \cong Co_1$. Wegen $|Co_1|_2 = 2^{21}$ können wir mit 4.8 schon $O_2(M) > Y_M$ schließen. Außerdem ist $\text{Out}(Co_1) = 1$ und daher folgt $K/Z(K) \cong \text{Aut}(K/Z(K)) \cong \text{Aut}(K)$, weshalb uns 4.9 (a) dann $n = 3$ liefert. Zudem enthält $K/Z(K)$ mit 4.10 eine Untergruppe U , die folgende Eigenschaften hat:

- $|U| = 2^a \cdot 3^2 \cdot 5$ mit $a \in \{20, 21\}$ und
- $U/O_2(U) \cong A_6$ oder $U/O_2(U) \cong \Sigma_6$.

Nun liegt U in einer maximalen Untergruppe H von Co_1 . Wir verwenden S. 183 in [Atl] und stellen fest, dass aus Ordnungsgründen H die Struktur

$$2^{11} : M_{24}, \quad 2_+^{1+8} \cdot \Omega_8^+(2), \quad 2^{2+12} : (A_8 \times \Sigma_3) \text{ oder } 2^{4+12} \cdot (\Sigma_3 \times 3\Sigma_6)$$

haben muss.

Angenommen, es ist $H \sim 2^{4+12} \cdot (\Sigma_3 \times 3\Sigma_6)$. Dann liegt $\bar{U} := UO_2(H)/O_2(H)$ in $H/O_2(H) \cong \Sigma_3 \times 3\Sigma_6$ und $\bar{U}/O_2(\bar{U})$ hat eine zu A_6 isomorphe Untergruppe. Solch eine Untergruppe existiert aber in $\Sigma_3 \times 3\Sigma_6$ nicht.

Nehmen wir also an, dass $H \sim 2^{2+12} : (A_8 \times \Sigma_3)$ ist. Sei dann $N \trianglelefteq H$ der Normalteiler mit $N/O_2(H) \cong \Sigma_3$. Es folgt $U \cap N \leq O_2(U)$ und $H/N \cong A_8$ hat eine Untergruppe UN/N der Ordnung $2^b \cdot 3^2 \cdot 5$ mit $b \in \{5, 6\}$ und folglich mit Index 7 oder 14, was es aber in A_8 nicht gibt.

Wäre hingegen $H \sim 2_+^{1+8} \cdot \Omega_8^+(2)$, so würde $H/O_2(H) \cong \Omega_8^+(2)$ die Untergruppe $\bar{U} := UO_2(H)/O_2(H)$ mit $|O_2(\bar{U})| \geq 2^7$ und $\bar{U}/O_2(\bar{U}) \cong U/O_2(U)$ enthalten. Mit dem Satz von Borel-Tits (siehe z.B. [GLS3, 3.1.3.]) liegt \bar{U} dann in einer maximalen parabolischen Untergruppe \tilde{H} von $\Omega_8^+(2)$. Weil dann \tilde{H} durch 5 teilbare Ordnung hat, ist \tilde{H} von der Form $2^6 : A_8$, was aber erneut zur Existenz einer Untergruppe der Ordnung $2^b \cdot 3^2 \cdot 5$ mit $b \in \{5, 6\}$ in A_8 und damit ebenso zu einem Widerspruch führt.

Sei also zuletzt $H \sim 2^{11} : M_{24}$. Wieder existiert dann in $H/O_2(H) \cong M_{24}$ die Untergruppe $\bar{U} := UO_2(H)/O_2(H)$ mit $|U| = 2^b \cdot 3^2 \cdot 5$ ($b \in \{9, 10\}$) und $\bar{U}/O_2(\bar{U}) \cong A_6$

4. Identifizierung der Komponente K

oder Σ_6 . Wir verwenden S. 96 in [Atl] und erhalten $2^4 : A_8$ und $2^6 : 3 \cdot \Sigma_6$ als einzige maximale Untergruppen von M_{24} , die aus Ordnungsgründen \bar{U} enthalten könnten. Die Untergruppe der Form $2^4 : A_8$ schließen wir erneut auf dieselbe Art wie oben aus. Und weil für $H_2 \cong 2^6 : 3 \cdot \Sigma_6$ in der Gruppe $H_2/(O_2(H_2)) \cong 3 \cdot \Sigma_6$ keine Untergruppe isomorph zu A_6 existiert, kann \bar{U} auch nicht in einer solchen Untergruppe liegen. Insgesamt erhalten wir also somit, dass $K/Z(K)$ nicht zu Co_1 isomorph sein kann.

- (b) Wir nehmen an, dass $K/Z(K) \cong HS$ ist. Dann ist $|K/Z(K)|_2 = 2^9$, weshalb wir mit 4.9 (b) folgern können, dass $Y_M = O_2(M)$ ist, und 4.8 liefert uns dann $n = 3$.

Laut 4.10 gibt es in $K/Z(K)$ eine Untergruppe U , die eine Sylow-2-Untergruppe von $K/Z(K)$ enthält und durch $|A_6|$ teilbare Ordnung hat. Nun zeigt uns aber S. 80 in [Atl], dass $K/Z(K) \cong HS$ keine maximale Untergruppe hat, deren Ordnung von $2^9 \cdot 3^2 \cdot 5$ geteilt wird und wir erhalten einen Widerspruch.

- (c) Angenommen, es ist $K/Z(K) \cong Ru$. Also ist $|K/Z(K)|_2 = 2^{14}$ und nach 4.8 gilt dann $O_2(M) > Y_M$. Außerdem ist $\text{Out}(Ru) = 1$, daher liefert uns 4.9 (a) zunächst $n = 3$ und anschließend die Existenz einer Untergruppe $U \leq K/Z(K)$ der Gestalt $[2^k].\Sigma_6$ mit $k \geq 9$. Nun zeigt uns aber S. 126 in [Atl], dass Ru keine maximale Untergruppe hat, deren Ordnung durch $|U|$ teilbar ist und wir erhalten einen Widerspruch.

- (d) Zuletzt nehmen wir an, dass $K/Z(K)$ isomorph zur sporadischen Suzuki-Gruppe ist. Erneut liefern uns 4.8 und 4.9 (b) zusammen mit $|K/Z(K)|_2 = 2^{13}$, dass $O_2(M) > Y_M$ ist und $n = 3$ gilt. Außerdem hat $K/Z(K)$ nach 4.10 eine Untergruppe U der Gestalt $[2^k].A_6$ mit $k \geq 8$. Wir verwenden nun S.131 in [Atl] und stellen fest, dass U aus Ordnungsgründen in einer maximalen Untergruppe L von Suz liegen muss, die von der Form $G_2(4)$, $2_-^{1+6} \cdot U_4(2)$, $2^{4+6} : 3A_6$ oder $2^{2+8} : (A_5 \times \Sigma_3)$ ist. Dabei hat eine Gruppe $2^{2+8} : (A_5 \times \Sigma_3)$ keinen Abschnitt isomorph zu A_6 und kann daher U nicht enthalten. Genauso hat keine maximale parabolische Untergruppe von $G_2(4)$ einen zu A_6 isomorphen Abschnitt, mit dem Satz von Borel-Tits ist also $L \not\cong G_2(4)$.

Sei $L \sim 2_-^{1+6} \cdot U_4(2)$. Da dann $O_2(L)$ keine elementarabelsche Untergruppe der Ordnung 2^4 enthält, müsste für den in 4.9 beschriebenen minimalen Normalteiler N von U schon $N \cap O_2(L) = 1$ gelten. Folglich hat $L/O_2(L)$ eine Untergruppe der Form $[2^m].A_6$ mit $m \geq 4$, was aber $|U_4(2)|_2 = 2^6$ widerspricht.

Zuletzt nehmen wir $L \sim 2^{4+6} : 3A_6$ an. Dann hat $L/O_2(L) \cong 3A_6$ die Untergruppe $UO_2(L)/O_2(L)$ der Form $[2^m].A_6$ mit $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, was aber ebenfalls nicht möglich ist. Also gilt $K/Z(K) \not\cong Suz$.

□

Damit können wir als Ergebnis dieses Abschnitts folgenden Satz festhalten:

4.17 Satz: *Ist $K/Z(K)$ isomorph zu einer der 26 sporadischen einfachen Gruppen, so ist entweder $K/Z(K) \cong Fi_{22}$ oder $K/Z(K) \cong B$. Im ersten Fall ist $n = 3$, im zweiten Fall ist $n \leq 5$. In beiden Fällen gilt $O_2(M) > Y_M$.*

Beweis: Die einzigen bisher nicht ausgeschlossenen sporadischen Gruppen sind Fi_{22} und das Babymonster.

Sei $K/Z(K) \cong Fi_{22}$. Wir nehmen nun außerdem an, dass $O_2(M) = Y_M$ ist. Dann liefert uns 4.8 wegen $|Fi_{22}|_2 = 2^{17}$ schon $n = 4$. Laut 4.10 hat nun $K/Z(K)$ eine Untergruppe U mit $U/O_2(U) \cong Sp_6(2)$ und $|O_2(U)| \geq 2^7$. Laut [KW] hat jede maximale Untergruppe von Fi_{22} , deren Ordnung durch $2^{16} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$ teilbar ist, die Form $2.PSU_6(2)$. Also liegt U in einer solchen Untergruppe H , weshalb $UZ(H)/Z(H)$ mit dem Satz von Borel-Tits in einer maximalen parabolischen Untergruppe von $PSU_6(2)$ enthalten ist. Allerdings ist für jede solche maximale parabolische Untergruppe P von $PSU_6(2)$ stets $P/O_2(P)$ isomorph zu $(3 \times A_5) : 2$, $PSL_3(4)$ oder $PSU_4(2)$ und hat daher schon allein aus Ordnungsgründen keinen Abschnitt isomorph zu $Sp_6(2)$.

Folglich muss $O_2(M) > Y_M$ sein und damit liefert uns 4.9 schon $n = 3$, wie gewünscht.

Zuletzt sei $K/Z(K) \cong B$. Wir wenden erneut 4.8 an und erhalten wegen $|B|_2 = 2^{41}$ schon $O_2(M) > Y_M$. Abschließend folgern wir wieder mit 4.9, dass $n \leq 5$ sein muss. \square

4.3 Gruppen vom Lie-Typ in Charakteristik 2

Hier untersuchen wir die Gruppen vom Lie-Typ in Charakteristik 2. Wir werden feststellen, dass $K/Z(K)$ zu keiner solchen Gruppe isomorph sein kann.

Wie schon bei den sporadischen Gruppen verwenden wir zuerst 4.4 (a), um die Anzahl der möglichen Kandidaten stark zu reduzieren. Laut Tabelle 6.1.2 und Tabelle 6.1.3 in [GLS3] haben nur die folgenden einfache Gruppen vom Lie-Typ in Charakteristik 2 einen Schur-Multiplikator mit gerader Ordnung:

$$SL_2(4), SL_3(2), PSL_3(4), SL_4(2), \Omega_8^+(2), \Omega_7(2) \cong Sp_6(2),$$

$$F_4(2), G_2(4), SU_4(2), PSU_6(2), {}^2E_6(2) \text{ und } Sz(8).$$

Weiter ist $|K/Z(K)|_2 \geq 2^7$ laut 4.4 (e), allerdings gilt $|SL_2(4)|_2 = 2^2$, $|SL_3(2)|_2 = 2^3$ und $|PSL_3(4)|_2 = |SL_4(2)|_2 = |SU_4(2)|_2 = |Sz(8)|_2 = 2^6$.

Für die Untersuchung der restlichen Gruppen wird der Satz von Borel-Tits (siehe z.B. 3.1.3 in [GLS3]) ein wichtiges Hilfsmittel sein. Unsere bisherigen Resultate wie beispielsweise 4.10

4. Identifizierung der Komponente K

liefern uns nämlich stets eine Untergruppe $U \leq K/Z(K)$ mit $O_2(U) \neq 1$, diese muss dann in einer maximalen parabolischen Untergruppe von $K/Z(K)$ liegen, was wir im Folgenden oft ausnutzen werden.

Nehmen wir also zuerst an, dass $K/Z(K) \cong \Omega_8^+(2)$ ist. Wegen $|\Omega_8^+(2)|_2 = 2^{12}$ können wir mit 4.8 schon $O_2(M) > Y_M$ folgern. Deshalb liefert uns 4.9 (b) nun $n = 3$ und auch die Existenz einer Untergruppe $U \leq K/Z(K)$ der Ordnung $2^a \cdot 3^2 \cdot 5$ mit $a \geq 11$ und $O_2(U) \neq 1$. Wie wir bereits bei der Untersuchung von C_{O_1} im vorangegangenen Abschnitt festgestellt haben, sind alle maximalen parabolischen Untergruppen von $\Omega_8^+(2)$ mit durch 5 teilbarer Ordnung von der Form $2^6 : A_8$ und U kann in keiner solchen Gruppe enthalten sein, weil sich sonst eine Untergruppe vom Index 7 oder 14 in A_8 ergeben würde. Also ist $K/Z(K) \not\cong \Omega_8^+(2)$.

Angenommen, $K/Z(K)$ ist isomorph zu $P\Omega_7(2) \cong Sp_6(2)$. Dann ist $|K/Z(K)|_2 = 2^9$ und laut 4.9 (b) muss $O_2(M) = Y_M$ sein. Nun verwenden wir 4.8 und erhalten $n = 3$. Sei $M_0 \leq M$ mit $M_0/O_2(M) = \Omega_{2n}^\epsilon(2)$ und $X := C_{M_0}(y)$. Dann ist $X \sim 2^6.\Sigma_6$ für $|Y_M| = 2^6$ bzw. $X \sim 2^7.\Sigma_6$ im Fall $|Y_M| = 2^7$. Mit 4.3 (b) folgt $C_X(K) \leq O_2(M) = Y_M$, daher gibt es laut 4.2 zwei Möglichkeiten: Entweder es ist $Y_M = [Y_M, O^2(M)]C_X(K)$ und $X/C_X(K) \sim 2^5.\Sigma_6$, oder es ist $|Y_M| = 2^7$, $C_X(K) = \langle y \rangle$ und $X/C_X(K) \sim 2^6.\Sigma_6$. Wegen $\text{Out}(P\Omega_7(2)) = 1$ und $X \leq N_G(K)$ induziert $X/C_X(K)$ innere Automorphismen auf $K/Z(K)$. Somit hat $K/Z(K)$ eine zu $X/C_X(K)$ isomorphe Untergruppe. Nun ist $|2^6.\Sigma_6|_2 = 2^{10} > |K/Z(K)|_2$, also gilt $Y_M = [Y_M, O^2(M)]C_X(K)$ und $U := X/C_X(K) \sim 2^5.\Sigma_6 \sim 2^5.Sp_4(2)$.

Daher folgt bereits, dass U isomorph zu einer $Sp_4(2)$ -parabolischen Untergruppe von $K/Z(K)$ und damit auch zum Zentralisator einer Involution in $K/Z(K)$ ist, insbesondere hat U ein nicht triviales Zentrum. Also gibt es einen Normalteiler $N \triangleleft X$ mit $\langle y \rangle \leq C_X(K) \leq N \leq Y_M$ und $|N/C_X(K)| = 2$. Dies widerspricht aber 3.11 (c) und es gilt $K/Z(K) \not\cong P\Omega_7(2)$.

Sei nun $K/Z(K) \cong G_2(4)$. Nach 4.10 gibt es eine Untergruppe $U \leq K/Z(K)$ mit $O_2(U) \neq 1$ und $U/O_2(U) \cong Sp_{2n-2}(2)'$. Wie wir aber bereits im Beweis von 4.16 (d) festgestellt haben, hat keine maximale parabolische Untergruppe von $G_2(4)$ einen Abschnitt isomorph zu A_6 und wir erhalten eine Widerspruch.

Nehmen wir nun an, dass $K/Z(K) \cong PSU_6(2)$ ist. Im Fall $O_2(M) = Y_M$ erhalten wir aus 4.8 zunächst $n = 4$ und 4.10 liefert uns eine Untergruppe $U \leq K/Z(K)$ mit $O_2(U) \neq 1$ und $U/O_2(U) \cong Sp_6(2)$. Allerdings hat keine maximale parabolische Untergruppe von $PSU_6(2)$ einen Abschnitt isomorph zu $Sp_6(2)$, wie wir auch schon im Beweis von 4.17 gesehen haben. Folglich ist $O_2(M) > Y_M$ und daher können wir aus 4.9 bereits $n = 3$ schließen. Deshalb existiert nach 4.10 in $K/Z(K)$ eine Untergruppe U mit $2^{14} \leq |U|_2 \leq 2^{15}$ und $U/O_2(U) \cong A_6$ oder $U/O_2(U) \cong \Sigma_6$. Diese muss nun auch in einer maximalen parabolischen Untergruppe P von $K/Z(K)$ liegen, dabei ist $P/O_2(P)$ isomorph zu $(3 \times A_5) : 2$, $PSL_3(4)$ oder $PSU_4(2)$.

Weil im Falle $P/O_2(P) \sim (3 \times A_5) : 2$ kein zu A_6 isomorpher Abschnitt in $P/O_2(P)$ zu finden ist, gilt also $P/O_2(P) \cong PSL_3(4)$ oder $PSU_4(2)$. Dann ist aber $|O_2(P)| = 2^9 < O_2(U)$, weshalb eine erneute Anwendung des Satzes von Borel-Tits auf $PSU_4(2)$ bzw. $PSL_3(4)$ nun einen Widerspruch liefert. Folglich ist $K/Z(K)$ nicht isomorph zu $PSU_6(2)$.

Als nächstes nehmen wir an, dass $K/Z(K) \cong F_4(2)$ ist. Wir betrachten zuerst den Fall $O_2(M) = Y_M$. Aus $|F_4(2)|_2 = 2^{24}$ folgt dann mit 4.8 schon $n = 5$. Außerdem hat $K/Z(K)$ laut 4.10 eine Untergruppe U mit $O_2(U) \neq 1$ und $U/O_2(U) \cong Sp_8(2)$. Mit dem Satz von Borel-Tits liegt U nun in einer maximalen parabolischen Untergruppe von $K/Z(K)$. Allerdings hat keine dieser Untergruppen einen Abschnitt isomorph zu $Sp_8(2)$.

Also ist $O_2(M) > Y_M$, weshalb uns 4.9 (b) und 4.10 neben $n \leq 4$ auch eine Untergruppe $U \leq K/Z(K)$ liefern, für die $|K/Z(K) : U|_2 \leq 2^{n-2}$ ist und $U/O_2(U) \cong Sp_{2n-2}(2)'$ gilt. Wir verwenden wieder den Satz von Borel-Tits oder S. 170 in [Atl] und stellen fest, dass U in einer maximalen Untergruppe $H \leq K/Z(K)$ mit $H \sim (2_+^{1+8} \times 2^6) : Sp_6(2)$ liegen muss, dabei sind alle maximalen Untergruppen dieser Form in der Automorphismengruppe von $F_4(2)$ konjugiert und daher insbesondere isomorph. Wir setzen $V := Z(O_2(H))$. Dann ist V elementarabelsch der Ordnung 2^7 und laut (4.5)(i), (ii) und (iv) in [CKS] gilt: Das Zentrum von H hat Ordnung 2 und liegt in V , außerdem operiert H irreduzibel auf $O_2(H)/V$ und V ist der natürliche $O_7(2)$ -Modul für $H/O_2(H) \cong Sp_6(2) \cong O_7(2)$. Entsprechend ist $V/Z(H)$ der natürliche $Sp_6(2)$ -Modul für $H/O_2(H)$.

Wir nehmen nun zuerst an, dass $n = 4$ ist. Dann ist $U/O_2(U) \cong Sp_6(2)$ und es folgt $UO_2(H) = H$, insbesondere liegt also $O_2(U)$ in $O_2(H)$. Nach 4.10 (a) enthält $Z(O_2(U))$ dabei einen minimalen Normalteiler W von U der Ordnung 2^6 . Weil H und damit auch U irreduzibel auf $O_2(H)/V$ operieren, folgt $W \leq V$. Da es im natürlichen $O_7(2)$ -Modul allerdings keinen invarianten Unterraum der Dimension 6 gibt, erhalten wir einen Widerspruch und es folgt $n = 3$. Daher ist $U/O_2(U) \cong A_6$ oder Σ_6 und $|H : U|_2 \leq 2$. Wir stellen mit abermaliger Anwendung des Satzes von Borel-Tits oder auch mit Hilfe der maximalen Untergruppen von $Sp_6(2)$ auf S. 46 in [Atl] fest, dass U dann in einer Untergruppe \tilde{H} von H liegen muss, für die $\tilde{H}/O_2(H) \sim 2^5 : \Sigma_6$ ein Punktstabilisator in $Sp_6(2)$ ist. Wieder enthält $Z(O_2(U))$ einen minimalen Normalteiler W von U , der in diesem Fall Ordnung 2^4 hat. Nun ist $|O_2(\tilde{H}) : O_2(U)| \leq 2$ und alle Untergruppen der Ordnung 2^4 von $O_2(\tilde{H})$, die eine maximale Untergruppe von $O_2(H)$ zentralisieren, liegen in $O_2(H) \cong 2_+^{1+8} \times 2^6$ und schneiden dabei $Z(O_2(H))$ nicht trivial an. Damit erhalten wir also $W \leq V$ und $Z(H) \not\leq W$. Allerdings gibt es im natürlichen $Sp_6(2)$ -Modul $V/Z(H)$ keinen Unterraum der Dimension 4, der unter einem Punktstabilisator invariant ist. Dieser Widerspruch zeigt $K/Z(K) \not\cong F_4(2)$.

Zuletzt nehmen wir an, dass $K/Z(K) \cong {}^2E_6(2)$ ist. Wäre nun $O_2(M) = Y_M$, dann könnten wir mit $|K/Z(K)|_2 = 2^{36}$ aus 4.8 schon $n = 6$ folgern, weshalb uns 4.10 die Existenz einer Untergruppe $U \leq K/Z(K)$ mit $U/O_2(U) \cong Sp_{10}(2)$ liefern würde. Allerdings ist beispielsweise 31 ein Teiler von $|Sp_{10}(2)|$ aber kein Teiler von $|{}^2E_6(2)|$, ein Widerspruch.

4. Identifizierung der Komponente K

Also ist $O_2(M) > Y_M$ und mit 4.9 (b) ist $n \leq 5$. Erneut verwenden wir 4.10 und erhalten eine Untergruppe $U \leq K/Z(K)$ mit $O_2(U) \neq 1$, $|K/Z(K) : U|_2 \leq 2^{n-2}$ und $U/O_2(U) \cong Sp_{2n-2}(2)'$ oder $U/O_2(U) \cong Sp_{2n-2}(2)$. Nach dem Satz von Borel-Tits gibt es eine maximale parabolische Untergruppe $P \leq K/Z(K)$ mit $U \leq P$. Nun ist für jede maximale parabolische Untergruppe P von $K/Z(K)$ die Faktorgruppe $P/O_2(P)$ isomorph zu $PSU_6(2)$, $\Omega_8^-(2)$, $PSL_3(4) \times \Sigma_3$ oder $SL_2(4) \times SL_3(2) \cong A_5 \times SL_3(2)$. Da keine dieser Gruppen eine durch $|Sp_8(2)|$ teilbare Ordnung hat, ist $n \neq 5$. Außerdem kann U nicht in einer parabolischen P mit $P/O_2(P) \cong A_5 \times SL_3(2)$ liegen, denn in diesem Fall enthält $P/O_2(P)$ keinen Abschnitt $Sp_{2n-2}(2)'$ für $n \in \{3, 4\}$. Wir untersuchen also, ob die anderen 3 Klassen maximaler parabolischer Untergruppen die Untergruppe U enthalten können.

Sei dazu zunächst $n = 3$. Dann ist $U/O_2(U)$ isomorph zu Σ_6 oder A_6 und $|K/Z(K) : U|_2 \leq 2$. Insbesondere ist also $|O_2(U)| \geq 2^{31}$. Angenommen, U liegt in einer parabolischen Untergruppe P mit $P/O_2(P) \cong PSL_3(4) \times \Sigma_3$. Dann ist $|O_2(P)| = 2^{29}$ und nach Herausfaktorisieren des Normalteilers N von P mit $N/O_2(P) \cong \Sigma_3$ würde dies zu einer Untergruppe $\bar{U} \leq PSL_3(4)$ mit $O_2(\bar{U}) \neq 1$ und $\bar{U}/O_2(\bar{U}) \cong A_6$ oder Σ_6 führen. Indem wir nun den Satz von Borel-Tits erneut anwenden, erhalten wir einen Widerspruch.

Nehmen wir also an, dass U in einer parabolischen P mit $P/O_2(P) \cong \Omega_8^-(2)$ liegt. Dann ist $|O_2(P)| = 2^{24}$ und $P/O_2(P)$ hat die Untergruppe $\bar{U} := UO_2(P)/O_2(P)$ mit $|O_2(\bar{U})| \geq 2^7$. Wir wenden nun den Satz von Borel-Tits auf $\Omega_8^-(2)$ an. Weil \bar{U} einen Abschnitt isomorph zu A_6 hat, kann \bar{U} in keiner parabolischen Untergruppe \bar{P} von $\Omega_8^-(2)$ mit $\bar{P}/O_2(\bar{P}) \cong SL_3(2) \times 3$ oder $\Sigma_3 \times A_5$ liegen. Also ist \bar{U} in einer Untergruppe \bar{P} mit $\bar{P}/O_2(\bar{P}) \cong PSU_4(2)$ und $|O_2(\bar{P})| = 2^6 < |O_2(\bar{U})|$ enthalten. Indem wir auch $O_2(\bar{P})$ herausfaktorisieren, erhalten wir nun durch Betrachten der parabolischen Untergruppen von $PSU_4(2)$ schließlich einen Widerspruch.

Also muss U in einer parabolischen P mit $P/O_2(P) \cong PSU_6(2)$ und $|O_2(P)| = 2^{21}$ liegen, weshalb wieder $PSU_6(2) \cong P/O_2(P)$ eine Untergruppe $\bar{U} := UO_2(P)/O_2(P)$ mit $|\bar{U}|_2 \geq 2^{14}$ und $\bar{U}/O_2(\bar{U}) \cong A_6$ oder Σ_6 hat. Das ist aber exakt dieselbe Situation, die wir oben für den Fall $K/Z(K) \cong PSU_6(2)$ bereits untersucht und dort zum Widerspruch geführt haben.

Also bleibt noch der Fall $n = 4$ zu betrachten. Dann ist $U/O_2(U) \cong Sp_6(2)$ und wegen $|K/Z(K) : U|_2 \leq 2^2$ gilt $|U|_2 \geq 2^{34}$, entsprechend ist $|O_2(U)| \geq 2^{25}$. Nun kann U auch nicht in einer parabolischen P mit $P/O_2(P) \cong SL_3(4) \times \Sigma_3$ liegen. Ist aber U in einer parabolischen Untergruppe P mit $P/O_2(P) \cong PSU_6(2)$ oder $\Omega_8^-(2)$ enthalten, so können wir wieder die Gruppe $\bar{U} := UO_2(P)/O_2(P)$ betrachten, für die $O_2(\bar{U}) \neq 1$ gilt und wir erhalten durch abermalige Anwendung des Satzes von Borel-Tits auf $PSU_6(2)$ und $\Omega_8^-(2)$ einen Widerspruch. Insgesamt ist also $K/Z(K) \not\cong {}^2E_6(2)$.

Zusammenfassend halten wir fest:

4.18 Satz: $K/Z(K)$ ist zu keiner Gruppe vom Lie-Typ in Charakteristik 2 isomorph.

4.4 Gruppen vom Lie-Typ in ungerader Charakteristik

Zuletzt nehmen wir in diesem Abschnitt an, dass $K/Z(K)$ isomorph zu einer einfachen Gruppen vom Lie-Typ in ungerader Charakteristik ist. Wir werden zeigen, dass dann schon $K/Z(K) \cong PSU_4(3)$ sein muss. Dabei findet man 4.19 und Varianten von 4.20 und 4.24 in [Pr, Abschnitt 4.4].

Wir benötigen zunächst:

4.19 Lemma: *Sei q eine ungerade Primzahlpotenz. Dann ist $K/Z(K)$ nicht isomorph zu einer der Gruppen $PSL_2(q)$ oder ${}^2G_2(q)$.*

Beweis: Der Schur-Multiplikator von ${}^2G_2(q)$ ist trivial, aber nach 4.4 (a) ist $y \in Z(K)$. Die Gruppen $PSL_2(q)$ haben mit Ausnahme von $PSL_2(9)$ einen Schur-Multiplikator der Ordnung 2, aber $|PSL_2(9)|_2 = 2^3$ ist nach 4.4 (e) ohnehin zu klein. Wäre also $K/Z(K)$ isomorph zu $PSL_2(q)$, so würde $K \cong SL_2(q)$ folgen. Laut 8.6.2. in [KS] enthält $SL_2(q)$ genau eine Involution, allerdings liegt y^\perp mit 4.4 (b) in K und wir erhalten einen Widerspruch. \square

Nach 4.19 und unserer Annahme ist nun $K/Z(K) \in \mathcal{L}ie(q) \setminus \{PSL_2(q), {}^2G_2(q)\}$ für eine ungerade Primzahlpotenz q (siehe [GLS3, 2.2.2.] für die Definition von $\mathcal{L}ie(q)$). Diese Gruppen werden in [As2] anhand bestimmter Untergruppen untersucht, die isomorph zu $SL_2(q)$ sind und Fundamentalgruppen genannt werden. Wie in [As2] erläutert, übertragen sich die dort erlangten Resultate auch auf fast alle perfekten, zentralen Erweiterungen der betrachteten, einfachen Gruppen, außer eventuell für die Fälle $P\Omega_7(3)$ und $G_2(3)$. Diese werden wir aber später ohnehin näher untersuchen. Eine übersichtliche Zusammenfassung der für uns hier wesentlichen Ergebnisse aus [As2] findet sich übrigens auch in Theorem 4.10.6. in [GLS3]. Wir verwenden dies, um zu zeigen:

4.20 Lemma: *Sei q eine ungerade Primzahlpotenz und $K/Z(K) \in \mathcal{L}ie(q)$. Dann gilt:*

- (a) *Es ist $q = 3$.*
- (b) *Ist $O_2(M) = Y_M$, so ist $N_G(Q) \not\leq M$.*

Beweis: Wir halten zunächst noch einmal fest, dass $K/Z(K)$ mit 4.19 nicht isomorph zu $PSL_2(q)$ oder ${}^2G_2(q)$ ist und wir deshalb die Ergebnisse aus [As2] bzw. [GLS3, 4.10.6.] verwenden können.

Wie wir in 1.9 gezeigt haben, ist ohne Einschränkung $S_1 := S \cap C_M(y)$ eine Sylow-2-Untergruppe von $C_M(y)$. Wegen $Q \leq S$ folgt jetzt auch $C_Q(y) \leq S_1$. Ist \tilde{S} eine Sylow-2-Untergruppe von $C_G(y)$ mit $S_1 \leq \tilde{S}$, so erhalten wir mit 3.4 schon $z \in Z(\tilde{S})$. Sei nun $T := \tilde{S} \cap K$, dann ist $T \in Syl_2(K)$ und $z \in Z(T)$.

Weiter sei L eine Fundamentalgruppe von K mit $T \cap L \in Syl_2(L)$. Dann gilt $[z, T \cap L] = 1$

4. Identifizierung der Komponente K

und wir schließen $T \cap L^z = (T \cap L)^z = T \cap L$. Wäre $L^z \neq L$, so würde uns [GLS3, 4.10.6. (b)] schon $[L^z, L] = 1$ und damit $T \cap L \leq Z(L)$ liefern, ein Widerspruch. Es ist also $z \in N_G(L)$ und außerdem ist $[z, T \cap L] = 1$. Nach 3.19 hat $L \cong SL_2(q)$ keinen Automorphismus der Ordnung 2, der eine Sylow-2-Untergruppe von L zentralisiert. Daher ist $[L, z] = 1$ und mit 2.2 (a) folgt $L \leq C_G(z) \leq N_G(Q)$. Außerdem ist $L \leq C_G(y)$, was uns dann auch $L \leq N_G(C_Q(y))$ liefert.

Sei umgekehrt $t \in C_Q(y) \leq \tilde{S}$. Dann ist wegen $K \trianglelefteq C_G(y)$ schon $t \in N_G(\tilde{S} \cap K) = N_G(T)$. Das wiederum liefert uns $(L \cap T)^t = L^t \cap T \in \text{Syl}_2(L^t)$. Demnach sind L und L^t zwei Fundamentalgruppen von K mit Sylow-2-Untergruppe in T .

Angenommen, es ist $L \neq L^t$. Wir verwenden erneut [GLS3, 4.10.6. (b)] und erhalten so $[L, L^t] = 1$. Sei $1 \neq a \in L$ ein Element ungerader Ordnung. Dann ist $a \notin L \cap L^t \leq Z(L)$, weil $Z(SL_2(q))$ die Ordnung 2 hat. Also ist einerseits $o(a^{-1}a^t) = o(a)$, andererseits liegt $a^{-1}a^t = [a, t]$ aber in $C_Q(y)$, weil $L \leq N_G(C_Q(y))$ ist. Dieser Widerspruch zeigt $L = L^t$ und damit ist insgesamt $C_Q(y) \leq N_G(L)$.

Daher gilt nun $[C_Q(y), L] \leq C_Q(y) \cap L \leq O_2(L)$. Wir nehmen an, dass $q > 3$ ist. Dann ist $L \cong SL_2(q)$ quasieinfach und insbesondere ist $O_2(L) = Z(L)$. Daher ist $[C_Q(y), L, L] = 1 = [L, C_Q(y), L]$, das Drei-Untergruppen-Lemma liefert jetzt $[L, C_Q(y)] = 1$. Dies widerspricht allerdings 2.4. Also ist $q = 3$ und es gilt (a).

Sei nun zusätzlich $O_2(M) = Y_M$. Wir nehmen außerdem an, dass $N_G(Q) \leq M$ ist. Wegen $L \leq N_G(Q)$ ist dann $L \leq M$ und insbesondere $L \leq N_G(Y_M)$. Nach 2.8 ist außerdem $Y_M \leq Q$ und wir erhalten $Y_M \leq C_Q(y) \leq N_G(L)$. Daher ist wieder $[Y_M, L] \leq Y_M \cap L$ ein 2-Normalteiler von $L \cong SL_2(3) \cong Q_8 : 3$. Weil Y_M elementarabelsch ist, folgt $[Y_M, L] \not\cong Q_8$ und daher ist $[Y_M, L] \leq Z(L)$. Mit dem Drei-Untergruppen-Lemma schließen wir wieder $[Y_M, L] = 1$. Dabei ist $Q_8 \cong L' \leq M$, laut 1.10 ist aber $C_M(Y_M) = O_2(M) = Y_M$ elementarabelsch und wir erhalten einen Widerspruch. Somit folgt (b). \square

4.21 Lemma: Sei $\bar{K} := K/Z(K)$. Dann ist \bar{z} eine 2-zentrale Involution in \bar{K} und es ist $E(C_{\bar{K}}(\bar{z})) = 1$.

Beweis: Nach 4.4 (c) ist \bar{z} eine 2-zentrale Involution von \bar{K} .

Seien $H_0 := C_K(z)$ und $H \leq K$ mit $H/Z(K) = C_{\bar{K}}(\bar{z})$. Für $g, h \in H$ ist schon $[g, h] \in H_0$, also ist H_0 normal in H und H/H_0 abelsch, insbesondere gilt $E(H) \leq E(H_0) \stackrel{4.11}{=} 1$. Laut 6.5.1. in [KS] ist dann auch $E(H/Z(K)) = E(C_{\bar{K}}(\bar{z})) = 1$. \square

Diese Information werden wir im Folgenden ausnutzen. Nach Annahme ist $K/Z(K)$ isomorph zu einer einfachen Gruppe vom Lie-Typ in ungerader Charakteristik und mit obigem Lemma muss es in dieser einfachen Gruppe eine 2-zentrale Involution geben, deren Zentralisator keine Komponenten hat. Eine solche Situation tritt nur sehr selten auf, zusammen mit 4.20 (a) können wir so die Anzahl verbleibenden Möglichkeiten für K auf eine sehr kurze Liste reduzieren.

4.4. Gruppen vom Lie-Typ in ungerader Charakteristik

Zu diesem Zweck verwenden wir Tabelle 4.5.1 aus [GLS3]. Dort finden wir für jede einfache Gruppe L vom Lie-Typ in ungerader Charakteristik r und jede Involution $t \in \text{Aut}(L)$, die einen innderdiagonalen oder einen Graphautomorphismus bewirkt, unter anderem die Struktur von $O^{r'}(C_{\text{Inndiag}(L)}(t))$. Jede Komponente von $O^{r'}(C_{\text{Inndiag}(L)}(t))$ liegt auch in $\text{Comp}(C_{\text{Inndiag}(L)}(t))$ und ist dann schon eine Komponente von $C_{\text{Inn}(L)}(t) \cong C_L(t)$, weil $\text{Inndiag}(L)/\text{Inn}(L)$ laut [GLS3, 2.5.112 (c)] stets abelsch ist. Damit L für den Isomphietyp von $K/Z(K)$ infrage kommt, muss es nach 4.21 also eine Involution $t \in \text{Inn}(L)$ geben, für die $O^{r'}(C_{\text{Inndiag}(L)}(t))$ keine Komponenten hat. Da $O^{r'}(C_{\text{Inndiag}(L)}(t))$ stets ein Produkt von Gruppen vom Lie-Typ ist, muss dann $O^{r'}(C_{\text{Inndiag}(L)}(t))$ sogar auflösbar sein. Zusätzlich ist uns aus 4.20 (a) auch noch bekannt, dass $L \in \mathcal{L}ie(3)$ sein muss.

Damit erhalten wir insgesamt:

4.22 Lemma: *Ist $K/Z(K)$ isomorph zu einer einfachen Gruppe vom Lie-Typ in ungerader Charakteristik, so ist $K/Z(K)$ isomorph zu einer der folgenden Gruppen:*

$${}^2A_3(3) \cong PSU_4(3), B_3(3) \cong P\Omega_7(3) \text{ oder } D_4(3) \cong P\Omega_8^+(3).$$

Beweis: Wie oben ausgeführt ist $K/Z(K)$ isomorph zu einer einfachen Gruppe $L \in \mathcal{L}ie(3)$, für die eine Involution $t \in \text{Inn}(L)$ so existiert, dass $O^{3'}(C_{\text{Inndiag}(L)}(t))$ auflösbar ist. Unter Verwendung von Tabelle 4.5.1 aus [GLS3] erhält man, dass dies nur für folgende Gruppen der Fall ist:

$$A_2(3) \cong PSL_3(3), A_3(3) \cong PSL_4(3), {}^2A_2(3) \cong PSU_3(3), {}^2A_3(3) \cong PSU_4(3),$$

$$B_2(3) \cong C_2(3) \cong P\Omega_5(3), B_3(3) \cong P\Omega_7(3), D_4(3) \cong P\Omega_8^+(3) \text{ und } G_2(3).$$

Wir schließen nun noch die Gruppen von dieser Liste aus, die in unserer Behauptung nicht vorkommen.

Nach 4.4 (a) liegt die Involution y im Zentrum von K , allerdings haben die Schurmultipkatoren von $A_2(3) \cong PSL_3(3)$, ${}^2A_2(3) \cong PSU_3(3)$ und $G_2(3)$ ungerade Ordnung.

Außerdem ist $|B_2(3)|_2 = 2^6$, nach 4.4 (e) ist aber $|K/Z(K)|_2 \geq 2^7$.

Zuletzt nehmen wir an, dass $K/Z(K) \cong A_3(3) \cong PSL_4(3)$ ist. Da der Schurmultipikator von $PSL_4(3)$ die Ordnung 2 hat, wäre dann $K \cong SL_4(3)$. Mit 4.4 (b) erhalten wir $y^\perp \leq K$, also enthält K eine elementarabelsche 2-Gruppe der Ordnung mindestens 2^5 . Dies widerspricht allerdings 1.22. \square

Wir werden nun im Folgenden die beiden Gruppen $P\Omega_7(3)$ und $D_4(3) \cong P\Omega_8^+(3)$ gesondert betrachten und zeigen, dass $K/Z(K)$ nicht isomorph zu einer dieser beiden Gruppen sein kann. Damit erhalten wir dann das gewünschte Resultat $K/Z(K) \cong PSU_4(3)$.

Dafür wenden wir uns zunächst folgendem Lemma zu:

4. Identifizierung der Komponente K

4.23 Lemma: *Ist $n = 3$, so operiert $O^2(C_M(y))$ sowohl transitiv auf den nichttrivialen Elementen als auch auf den Hyperebenen von $y^\perp/\langle y \rangle$. Insbesondere gibt es eine perfekte Untergruppe A von $N_{K/Z(K)}(y^\perp Z(K)/Z(K))$ mit $A/C_A(y^\perp Z(K)/Z(K)) \cong Sp_4(2)' \cong A_6$, die jeweils transitiv auf den nichttrivialen Elementen und den Hyperebenen von $y^\perp Z(K)/Z(K)$ operiert.*

Beweis: Wir wissen mit 1.7(c), dass $C_M(y)/O_2(M)$ eine zu $Sp_4(2) \cong \Sigma_6$ isomorphe Untergruppe E hat, für die $y^\perp/\langle y \rangle$ ein natürlicher Modul ist. Nun folgt z.B. mit dem Satz von Witt (7.4 in [Ta]), dass diese Gruppe transitiv auf den eindimensionalen Unterräumen und damit auch auf den nichttrivialen Elementen von $y^\perp/\langle y \rangle$ operiert. Nach 3.11 ist $A_6 \cong Sp_4(2)' \cong O^2(C_M(y))O_2(M)/O_2(M) \leq E$, und da $Sp_4(2)'$ nicht zwei gleich lange Bahnen auf den 15 eindimensionalen Unterräumen von $y^\perp/\langle y \rangle$ haben kann, ist auch $O^2(C_M(y))$ transitiv darauf.

Daraus folgt außerdem, dass die Operation von $O^2(C_M(y))$ auf den 15 Hyperebenen von $y^\perp/\langle y \rangle$ keinen Fixpunkt hat. Die größten echten Untergruppen von A_6 haben Index 6 oder 10, demnach hat jede Bahn von $O^2(C_M(y))$ auf der Menge der Hyperebenen eine Länge k mit $k = 6, k = 10$ oder $k > 10$, also kann es nur eine Bahn der Länge 15 geben und die Operation ist transitiv.

Weiter ist $y^\perp \cap Z(K) \stackrel{4.2}{=} \langle y \rangle$ und $O^2(C_M(y))$ liegt nach 3.23 in K . Außerdem ist $O^2(C_M(y))$ laut 3.11 (e) perfekt und es gilt $C_{O^2(C_M(y))}(y^\perp) = O^2(C_M(y)) \cap O_2(M) = C_{O^2(C_M(y))}(y^\perp/\langle y \rangle)$, also gelten die restlichen Aussagen für $A := O^2(C_M(y))Z(K)/Z(K)$. \square

4.24 Lemma: *$K/Z(K)$ ist nicht isomorph zu $P\Omega_7(3)$.*

Beweis: Wir nehmen $K/Z(K) \cong P\Omega_7(3)$ an. Dann ergibt sich aus $|P\Omega_7(3)|_2 = 2^9$ und 4.4 (e) schon $n = 3$.

Nach 4.23 hat $K/Z(K)$ nun eine elementarabelsche Untergruppe U der Ordnung 2^4 , deren sämtliche Hyperebenen in $N_{K/Z(K)}(U)$ konjugiert sind. Außerdem ist $O_7(3) \sim C_2 \times P\Omega_7(3).2$, also operiert $P\Omega_7(3)$ auf einem 7-dimensionalen Vektorraum V über $GF(3)$. Wir zeigen, dass selbst $GL_3(7)$ keine solche Untergruppe U hat.

Seien H_1, \dots, H_{15} die 15 Hyperebenen in U . Da U teilerfremd auf der abelschen Gruppe V operiert, liefert [KS, 8.4.2.] jetzt $V = C_V(U) \oplus [V, U]$, dabei ist $\tilde{V} := [V, U]$ sowohl unter U als auch unter $N_{K/Z(K)}(U)$ invariant und es gilt $C_{\tilde{V}}(U) = 0$. Nun operiert die elementarabelsche 2-Gruppe U fixpunktfrei auf dem $GF(3)$ -Vektorraum \tilde{V} , mit 1.24 folgt daher

$$\tilde{V} = \bigoplus_{i=1}^{15} C_{\tilde{V}}(H_i).$$

Da alle Hyperebenen H_i unter $N_{K/Z(K)}(U)$ konjugiert sind, ist insbesondere $\dim(C_{\tilde{V}}(H_i)) = \dim(C_{\tilde{V}}(H_j))$ für alle $i, j \in \{1, \dots, 15\}$ und dies führt uns zu

$$7 = \dim(V) = \dim(C_V(U)) + \dim(\tilde{V}) = \dim(C_V(U)) + 15 \cdot \dim(C_{\tilde{V}}(H_1)).$$

4.4. Gruppen vom Lie-Typ in ungerader Charakteristik

Folglich ist $\dim(C_{\tilde{V}}(H_1)) = 0$ und $\dim(C_V(U)) = 7$. Das bedeutet aber $[V, U] = 1$, ein Widerspruch zu $1 \neq U \leq GL(V)$. Insgesamt ist also $K/Z(K) \not\cong P\Omega_7(3)$ \square

4.25 Lemma: $K/Z(K)$ ist nicht isomorph zu $P\Omega_8^+(3)$.

Beweis: Wir werden hier eine ähnliche Strategie wie in 4.24 verfolgen, allerdings wird dieses Vorgehen ein wenig durch die Tatsache erschwert, dass $P\Omega_8^+(3)$ leider nicht auf einem 8-dimensionalen $GF(3)$ -Vektorraum operiert und auch nicht notwendig $K \lesssim O_8^+(3)$ folgt.

Wir nehmen wieder an, dass $K/Z(K)$ isomorph zu $P\Omega_8^+(3)$ ist. Dann erhalten wir wegen $|P\Omega_8^+(3)|_2 = 2^{12}$ mit 4.4 (e) erneut, dass $n = 3$ ist. Weiterhin gibt es in $K/Z(K)$ mit 4.23 wieder eine elementarabelsche Untergruppe \tilde{W} der Ordnung 2^4 , deren Normalisator eine Untergruppe \tilde{A} enthält, die sowohl transitiv auf den nicht trivialen Elementen als auch auf den Hyperebenen von \tilde{W} operiert und für die $\tilde{A}/C_{\tilde{A}}(\tilde{W}) \cong A_6$ ist.

Wir betrachten nun die Gruppe $H := SO_8^+(3)$, die auf einem 8-dimensionalen $GF(3)$ -Vektorraum V operiert. Sei dabei $1 \neq x \in Z(H)$. Dann ist $x = -id$ und $H/\langle x \rangle$ hat eine Untergruppe vom Index 2, die zu $K/Z(K)$ isomorph ist. Folglich hat also H eine Untergruppe W der Ordnung 2^5 mit $x \in W$ so, dass $W/\langle x \rangle$ elementarabelsch ist und jeweils alle nicht trivialen Elemente und alle Hyperebenen von $W/\langle x \rangle$ in einer Untergruppe $A \leq N_H(W)$ mit $A/C_A(W/\langle x \rangle) \cong A_6$ konjugiert sind. Wir zeigen, dass bereits W elementarabelsch ist. Anderenfalls gibt es ein Element $v \in W$ mit $v^2 = x$. Dann enthält die Nebenklasse $v\langle x \rangle = \{v, vx\} = \{v, v^{-1}\}$ nur Elemente der Ordnung 4. Da alle nicht trivialen Elemente von $W/\langle x \rangle$ in H konjugiert sind, enthält sogar für jedes $w \in W \setminus \langle x \rangle$ die Nebenklasse $w\langle x \rangle$ nur Elemente der Ordnung 4 und folglich ist x die einzige Involution in W . Das ist aber z.B. mit 5.3.7. in [KS] nicht möglich. Also ist W eine elementarabelsche Gruppe der Ordnung 2^5 .

Wir betrachten die Operation von A auf den 31 Hyperebenen von W . Es gibt 15 solcher Hyperebenen $\tilde{H}_1, \dots, \tilde{H}_{15}$, die x enthalten, und die Menge $\{\tilde{H}_1, \dots, \tilde{H}_{15}\}$ ist wegen $x \in Z(H)$ unter A invariant.

Wir werden nun die Operation auf den restlichen 16 Hyperebenen H_1, \dots, H_{16} untersuchen und dabei mögliche Bahnlänge von A auf $\Omega := \{H_1, \dots, H_{16}\}$ ermitteln.

Wir wissen, dass $A/C_A(W/\langle x \rangle) \cong A_6$ ist. Außerdem ist $A/C_A(W)$ wegen $[x, A] = 1$ isomorph zu einer Untergruppe eines Punktstabilisators B in $\text{Aut}(W) = GL_5(2)$ und B hat die Form $2^4 : GL_4(2)$, wobei $O_2(B)$ ein natürlicher Modul für $B/O_2(B)$ ist. Es ist $O_2(B) = C_B(W/\langle x \rangle)$, daher gilt insbesondere $C_A(W/\langle x \rangle)/C_A(W) = O_2(A/C_A(W)) \leq O_2(B)$. Die Gruppe $B/O_2(B) \cong GL_4(2) \cong A_8$ enthält nur eine Konjugiertenklasse von Untergruppen isomorph zu $Sp_4(2)' \cong A_6 \cong A/C_A(W/\langle x \rangle)$, und da jede dieser Untergruppen irreduzibel auf $O_2(B)$ operiert, ist nun entweder $O_2(A/C_A(W)) = 1$ und damit $A/C_A(W) \cong A_6$ oder es ist $O_2(A/C_A(W)) = O_2(B)$ und dann $A/C_A(W) \sim 2^4.A_6$.

Im zweiten Fall ist bereits $O_2(A/C_A(W))$ transitiv auf Ω . Betrachten wir also den ersten Fall. Untergruppen von A_6 mit Index kleiner oder gleich 16 haben Index 1, 6, 10 oder 15, folglich

4. Identifizierung der Komponente K

kommen nur diese Zahlen als Bahnlängen von A auf Ω infrage. Außerdem kann A maximal einen Fixpunkt auf Ω haben, denn anderenfalls seien o.B.d.A. H_1 und H_2 unter A invariant. Dann ist $(H_1 \cap H_2) + \langle x \rangle / \langle x \rangle$ eine Hyperebene in $W / \langle x \rangle$, die von A normalisiert wird, ein Widerspruch. Demnach zerfällt Ω in diesem Fall entweder in zwei Bahnen der Länge 1 und 15 oder in zwei Bahnen der Länge 6 und 10.

Nun wenden wir wieder 1.24 auf V und W an und erhalten

$$[V, W] = \bigoplus_{i=1}^{15} C_{[V,W]}(\tilde{H}_i) \oplus \bigoplus_{i=1}^{16} C_{[V,W]}(H_i).$$

Für $i \in \{1, \dots, 15\}$ ist $x = -id \in \tilde{H}_i$, also ist $[V, W] = V$ und $C_{[V,W]}(\tilde{H}_i) = 0$. Die möglichen Bahnlängen von A auf den restlichen Hyperebenen H_1, \dots, H_{16} liefern die Existenz eines Paares $(a, b) \in \{(0, 16), (1, 15), (6, 10)\}$ und $i, j \in \{1, \dots, 16\}$, für die

$$8 = \dim(V) = a \cdot \dim(C_V(H_i)) + b \cdot \dim(C_V(H_j))$$

gilt, was lediglich für $(a, b) = (1, 15)$, $\dim(C_V(H_i)) = 8$ und $\dim(C_V(H_j)) = 0$ möglich ist. Allerdings ist dann $[V, H_i] = 0$ und wir erhalten unseren abschließenden Widerspruch. Folglich ist $K/Z(K) \not\cong P\Omega_8^+(3)$. \square

Insgesamt halten wir also fest:

4.26 Satz: *Ist $K/Z(K)$ isomorph zu einer Gruppe vom Lie-Typ in ungerader Charakteristik, so ist $K/Z(K) \cong PSU_4(3)$. Außerdem ist dann $n = 3$, $O_2(M) = Y_M$ und es gilt $N_G(Q) \not\leq M$.*

Beweis: Da wir alle anderen Gruppen ausgeschlossen haben, muss $K/Z(K) \cong PSU_4(3)$ sein. Dann ist insbesondere $|K/Z(K)|_2 = 2^7$, also liefert uns 4.9 (b) schon $O_2(M) = Y_M$. Nun folgt $n = 3$ aus 4.8 und zuletzt ist $N_G(Q) \not\leq M$ laut 4.20 (b). \square

Als Zusammenfassung dieses gesamten Kapitels notieren wir noch:

4.27 Satz: *Es gilt genau einer der folgenden drei Fälle:*

- (a) $K/Z(K)$ ist isomorph zu Fi_{22} und es ist $n = 3$ und $O_2(M) > Y_M$.
- (b) $K/Z(K)$ ist isomorph zu BM und es ist $n \leq 5$ und $O_2(M) > Y_M$.
- (c) $K/Z(K)$ ist isomorph zu $PSU_4(3)$ und es ist $n = 3$ und $O_2(M) = Y_M$. Außerdem ist $N_G(Q) \not\leq M$.

Beweis: Da G nach Voraussetzung eine \mathcal{K}_2 -Gruppe ist und K in $C_G(y)$ liegt, ist $K/Z(K)$ eine „bekannte“ einfache Gruppe. Mit 4.15 und 4.18 ist $K/Z(K)$ zu keiner alternierenden Gruppe und keiner Gruppe vom Lie-Typ in Charakteristik 2 isomorph. Daher folgt die Behauptung mit 4.17 und 4.26. \square

Kapitel 5

Die Fälle $K/Z(K) \cong Fi_{22}$ und $K/Z(K) \cong BM$

Nach unseren vorigen Untersuchungen ist $K/Z(K)$ isomorph zu $PSU_4(3)$, Fi_{22} oder dem Babymonster. In diesem Kapitel wenden wir uns den beiden sporadischen Gruppen zu, während wir $PSU_4(3)$ im nächsten Abschnitt behandeln werden.

Wir nehmen hier also an:

5.1 Voraussetzung: *Es sei $K/Z(K)$ isomorph zu Fi_{22} oder BM .*

Wir werden zeigen, dass in diesen Fällen $F^*(G)$ isomorph zu Fi'_{24} bzw. dem Fischer-Griess-Monster F_1 ist. (Anmerkung: Wir verwenden hier für das Monster die Bezeichnung F_1 statt M , um mögliche Verwechslungen mit der Untergruppe M zu vermeiden.)

5.2 Lemma: *Es gilt:*

- (a) *Es ist $Z(K) = \langle y \rangle$ und $C_G(y) = N_G(K)$.*
- (b) *Ist $K/Z(K) \cong BM$, so ist $C_G(y) = KC_G(K)$.*
- (c) *Ist $K/Z(K) \cong Fi_{22}$, so hat $KC_G(K)$ höchstens Index 2 in $C_G(y)$. Es gibt also ein $\tau \in C_G(y)$ mit $\tau^2 \in KC_G(K)$ und $C_G(y) = KC_G(K)\langle \tau \rangle$. Dabei kann $\tau \in C_G(z)$ gewählt werden.*

Beweis: Der Schurmultiplikator von Fi_{22} hat die Ordnung 6, während der Schurmultiplikator von BM die Ordnung 2 hat. Nach 4.4 (a) ist $y \in Z(K)$ und $Z(K)$ ist eine 2-Gruppe, folglich muss $Z(K) = \langle y \rangle$ sein. Insgesamt ist daher $C_G(y) \leq N_G(K) \leq N_G(Z(K)) = C_G(y)$, das ist (a).

5. Die Fälle $K/Z(K) \cong Fi_{22}$ und $K/Z(K) \cong BM$

Weiter ist $N_G(K)/C_G(K) = C_G(y)/C_G(K)$ isomorph zu einer Untergruppe von $\text{Aut}(K)$, die $KC_G(K)/C_G(K) \cong \text{Inn}(K)$ enthält. Im Falle $K/Z(K) \cong BM$ ist $\text{Out}(K) = 1$, also folgt $N_G(K) = KC_G(K)$ und damit (b). Ist hingegen $K/Z(K) \cong Fi_{22}$, so hat $\text{Out}(K)$ Ordnung 2 und wir erhalten $|C_G(y) : KC_G(K)| \leq 2$. Sei nun $\tilde{S} \in \text{Syl}_2(C_G(y))$ wie in 3.4, dann ist $z \in Z(\tilde{S})$ und es gilt $C_G(y) = KC_G(K)\tilde{S}$. Folglich können wir ein τ wie in der Behauptung in $\tilde{S} \leq C_G(z)$ wählen und es folgt (c). \square

5.3 Satz: *Es gelte 5.1. Dann ist $C_G(K) = \langle y \rangle$, oder es ist $K/Z(K) \cong Fi_{22}$ und $C_G(K)$ ist elementarabelsch der Ordnung 4.*

Beweis: Wir haben in 4.12 (b) gezeigt, dass $C_G(\langle y, z \rangle)$ von Q normalisiert wird. Also liegt Q auch im Normalisator des auflösbaren Residuums $C_G(\langle y, z \rangle)^{(\infty)}$ von $C_G(\langle y, z \rangle)$. Wir bestimmen nun $C_G(\langle y, z \rangle)^{(\infty)}$.

Sei zunächst $K/Z(K) \cong BM$, nach 5.2 (a) ist dann also $K \cong 2 \cdot BM$. Mit 5.2 (b) folgt jetzt

$$C_G(\langle y, z \rangle) = C_G(y) \cap C_G(z) = (KC_G(K)) \cap C_G(z) = (K \cap C_G(z)) C_G(K) = C_K(z) C_G(K).$$

Weil $C_G(K)$ laut 4.13 (c) eine 2-Gruppe ist, erhalten wir nun

$$C_G(\langle y, z \rangle)^{(\infty)} = (C_K(z) C_G(K))^{(\infty)} = C_K(z)^{(\infty)} C_G(K)^{(\infty)} = C_K(z)^{(\infty)}.$$

Mit 4.4 (c) ist z eine 2-zentrale Involution in K , die nicht in $Z(K)$ liegt. Mit Hilfe von [Atl] stellen wir fest, dass es in BM nur eine Klasse 2-zentraler Involutionen gibt und folglich gilt $C_K(z) \sim 2 \cdot (2_+^{1+22} \cdot C_{O_2})$, insbesondere ist $C_K(z)$ perfekt und wir erhalten insgesamt $C_G(\langle y, z \rangle)^{(\infty)} = C_K(z)$.

Nun normalisiert Q mit $C_G(\langle y, z \rangle)$ und $C_G(\langle y, z \rangle)^{(\infty)} = C_K(z)$ auch

$$\begin{aligned} C_{C_G(\langle y, z \rangle)}(C_K(z)) &= C_G(\langle y, z \rangle) \cap C_G(C_K(z)) = (C_K(z) C_G(K)) \cap C_G(C_K(z)) \\ &= Z(C_K(z)) C_G(K). \end{aligned}$$

Es ist $Z(C_K(z)) = \langle y, z \rangle$ und folglich gilt

$$C_{C_G(\langle y, z \rangle)}(C_K(z)) = \langle y, z \rangle C_G(K) = \langle z \rangle \times C_G(K).$$

Sei nun $g \in Q \setminus C_Q(y)$, dann ist nach 4.13 (b) schon $C_G(K) \cap C_G(K)^g = 1$. Zusätzlich ist

$$C_G(K)^g \leq C_{C_G(\langle y, z \rangle)}(C_K(z)) = \langle z \rangle \times C_G(K),$$

was zu $|C_G(K)| \leq 2$ führt. Weil $y \in C_G(K)$ ist, folgt jetzt $C_G(K) = \langle y \rangle$.

Nehmen wir also nun $K/Z(K) \cong Fi_{22}$ an. Wir gehen analog zu oben vor, verwenden 5.2 (c) und erhalten

$$C_G(\langle y, z \rangle) = C_G(y) \cap C_G(z) = C_K(z) C_G(K) \langle \tau \rangle.$$

5. Die Fälle $K/Z(K) \cong Fi_{22}$ und $K/Z(K) \cong BM$

Folglich ist $C_G(\langle y, z \rangle)' \leq C_K(z)C_G(K)$ und es ergibt sich wieder $C_G(\langle y, z \rangle)^{(\infty)} = C_K(z)^{(\infty)}$. Erneut erhalten wir aus [Atl], dass auch Fi_{22} genau eine Klasse 2-zentraler Involutionen hat und daher $C_K(z) \sim 2 \cdot ((2 \times 2_+^{1+8}) : SU_4(2) : 2)$ ist. Es folgt $|C_K(z) : C_K(z)'| = 2$ und $C_K(z)'$ ist perfekt, insgesamt gilt also $C_G(\langle y, z \rangle)^{(\infty)} = C_K(z)'$. Wir betrachten nun wieder die Untergruppe

$$C_{C_G(\langle y, z \rangle)}(C_K(z)') = C_G(K) \cdot Z(C_K(z)'),$$

die von Q normalisiert wird. Dabei ist $Z(C_K(z)')$ elementarabelsch der Ordnung 8 und enthält natürlich $\langle y, z \rangle$. Also gibt es insgesamt eine Vierergruppe $V \leq K$ mit

$$C_{C_G(\langle y, z \rangle)}(C_K(z)') = V \times C_G(K).$$

Weil wie oben für $g \in Q \setminus C_Q(y)$ wieder $C_G(K) \cap C_G(K)^g = 1$ und $y \in C_G(K)$ ist, muss $C_G(K)$ isomorph zu einer nicht trivialen Untergruppe von V sein und es folgt die Behauptung. \square

5.4 Korollar: *Ist $K/Z(K) \cong BM$, so ist $C_G(y) = K \cong 2 \cdot BM$.*

Ist $K/Z(K) \cong Fi_{22}$, so ist $C_G(y) \cong 2 \cdot Fi_{22}, 2 \cdot Fi_{22}.2, 2 \times 2 \cdot Fi_{22}$ oder $(2 \times 2 \cdot Fi_{22}).2$.

Beweis: Dies folgt aus 5.2 und 5.3. \square

Wir wollen nun Theorem 4.2 und Theorem 5.2 aus [DS] benutzen, um zu zeigen, dass $F^*(G)$ isomorph zu F_1 bzw. Fi'_{24} ist. Dazu benötigen wir zuerst die Definition einer Standarduntergruppe, die wir aus [As3] entnehmen:

5.5 Definition: *Eine quasiainfache Untergruppe A der endlichen Gruppe H heißt Standarduntergruppe von H , wenn gilt:*

- (a) *Es ist $[A, A^g] \neq 1$ für alle $g \in G$,*
- (b) *$|C_G(A)|$ ist gerade und $|C_G(A) \cap C_G(A)^g|$ ist ungerade für alle $g \in G \setminus N_G(C_G(A))$ und*
- (c) *$N_G(A) = N_G(C_G(A))$.*

Wir halten fest:

5.6 Lemma: *Es gelte 5.1 und es sei $H \leq G$ mit $K \leq H$. Ist zusätzlich $C_H(K) = Z(K) = \langle y \rangle$, so ist K eine Standarduntergruppe von H .*

Beweis: Wegen $|C_H(K)| = 2$ ist $C_H(K) \cap C_H(K)^g = 1$ für alle $g \in H \setminus N_H(C_H(K))$. Gäbe es ein $g \in H$ mit $[K, K^g] = 1$, so wäre insbesondere $K^g \leq C_H(K) = \langle y \rangle$ und wir erhalten einen Widerspruch. Zudem liefert uns 5.2 (a) schon $N_H(C_H(K)) = N_H(\langle y \rangle) = C_H(y) = N_H(K)$. \square

5. Die Fälle $K/Z(K) \cong Fi_{22}$ und $K/Z(K) \cong BM$

Außerdem werden die beide Sätze aus [DS], die wir hier benutzen wollen, unter Verwendung der Voraussetzung „Hypothesis K“ formuliert, die besagt:

Ist H eine endliche Gruppe, $F^*(H)$ einfach und x eine 2-zentrale Involution von H , für die $F^*(C_H(x)/\langle x \rangle)$ einfach ist, so ist $F^*(C_H(x)/\langle x \rangle)$ eine bekannte einfache Gruppe.

Wir zeigen zunächst:

5.7 Lemma: Sei $U \leq G$. Dann gilt die in [DS] formulierte „Hypothesis K“ in U und in $C_U(\rho)/\langle \rho \rangle$ für jedes Element $\rho \in U$ der Ordnung 3.

Beweis: Weil U eine \mathcal{K}_2 -Gruppe ist, gilt „Hypothesis K“ in U .

Seien $\rho \in U$ von der Ordnung 3 und $t\langle \rho \rangle \in C_U(\rho)/\langle \rho \rangle$ eine Involution. Dann können wir annehmen, dass $t \in C_U(\rho)$ eine Involution ist. Nun folgt mit [KS, 8.2.2. a)] schon $C_{C_U(\rho)/\langle \rho \rangle}(t\langle \rho \rangle) = (C_U(\rho) \cap C_U(t))/\langle \rho \rangle$ und wieder können wir die \mathcal{K}_2 -Hypothese verwenden, um die Behauptung zu folgern. \square

5.8 Satz: Es sei $K/Z(K) \cong BM$. Dann ist $G \cong F_1$ und $M/O_2(M) \cong \Omega_{10}^+(2)$, außerdem liegt Y_M nicht in Q .

Beweis: Mit 5.4 und 5.3 erhalten wir $C_G(y) = K$ und $C_G(K) = \langle y \rangle$. Nun liefert uns 5.6, dass K eine Standarduntergruppe von G mit $|Z(K)| = 2$ und $K/Z(K) \cong BM$ ist, außerdem ist $F^*(G)$ laut 3.9 einfach. Zusammen mit 5.7 sind somit alle Voraussetzungen von Theorem 5.2 in [DS] erfüllt und wir erhalten, dass G vom F_1 -Typ ist. Das Hauptergebnis aus [GMS] liefert dann $G \cong F_1$.

Also hat G genau eine Klasse 2-zentraler Involutionen und es folgt $C_G(z) \sim 2_+^{1+24} \cdot Co_1$. Mit 2.5 erhalten wir nun $Q = O_2(C_G(z))$, insbesondere ist Q extraspeziell mit $Q' = \langle z \rangle$.

Wir setzen jetzt $V := [Y_M, O^2(M)]$. Dann ist $V \not\leq Q$ und insbesondere $Y_M \not\leq Q$, denn nach 2.2 (g) ist $[V, Q] = z^\perp$, aber es gilt $Q' = \langle z \rangle$. Mit 2.2 (h) ist $V \cap Q = z^\perp$ und folglich gibt es ein $t \in V$ mit $V = (V \cap Q)\langle t \rangle = z^\perp \cdot \langle t \rangle$. Wegen $V \trianglelefteq M$ ist auch $VQ/Q = \langle t \rangle Q/Q = \langle tQ \rangle$ normal in $N_M(Q)/Q = C_M(z)/Q$. Zudem enthält M eine Sylow-2-Untergruppe von G , folglich ist tQ eine 2-zentrale Involution in $C_G(z)/Q = C_G(z)/O_2(C_G(z)) \cong Co_1$. Dabei hat Co_1 ebenfalls nur eine Klasse 2-zentraler Involutionen, weshalb wir $C_{C_G(z)/Q}(tQ) \sim 2_+^{1+8} \cdot \Omega_8^+(2)$ erhalten. Nun operiert $C_{C_G(z)/Q}(tQ)$ auf der elementarabelschen Gruppe $[tQ, Q/\langle z \rangle] = z^\perp/\langle z \rangle$ der Ordnung 2^{2n-2} . Wäre $n \leq 4$, so würde $C_{C_G(z)/Q}(tQ)$ trivial auf $z^\perp/\langle z \rangle$ operieren, weil $GL_6(2)$ schon aus Ordnungsgründen keinen Abschnitt isomorph zu $\Omega_8^+(2)$ hat. Dann wäre aber auch $[C_M(z)/Q, z^\perp/\langle z \rangle] = 1$, was sicherlich nicht der Fall ist. Folglich muss $n \geq 5$ sein und 4.17 liefert uns nun $n = 5$.

Dann ist $C_M(z)/O_2(C_M(z))$ nach 1.7 (b) isomorph zu $\Omega_8^\epsilon(2)$ oder $O_8^\epsilon(2)$, gleichzeitig aber auch isomorph zu einem Abschnitt von $C_{C_G(z)/Q}(tQ) \cong 2_+^{1+8} \cdot \Omega_8^+(2)$. Damit folgt $\epsilon = +$ und $C_M(z)/O_2(C_M(z)) \cong \Omega_8^+(2)$, was schließlich auch zu $M/O_2(M) \cong \Omega_{10}^+(2)$ führt. \square

5. Die Fälle $K/Z(K) \cong Fi_{22}$ und $K/Z(K) \cong BM$

Wir müssen in diesem Abschnitt also noch den Fall $K/Z(K) \cong Fi_{22}$ behandeln. Satz 5.3 zeigt uns, dass dann $C_G(K)$ entweder Ordnung 2 hat oder elementarabelsch der Ordnung 4 ist. Zunächst behandeln wir den leichteren Fall $C_G(K) = \langle y \rangle$ und erhalten:

5.9 Satz: Sei $K/Z(K) \cong Fi_{22}$ und $C_G(K) = \langle y \rangle$. Dann ist $G \cong Fi'_{24}$ und $M/O_2(M)$ ist isomorph zu $\Omega_6^+(2) \cong A_8$. Außerdem liegt Y_M nicht in Q .

Beweis: Laut 5.6 ist K eine Standarduntergruppe von G mit $|Z(K)| = 2$. Zusammen mit 3.9 und 5.7 sind somit alle Voraussetzungen von Theorem 4.2 in [DS] erfüllt und wir erhalten $G \cong Fi_{23}$ oder $G \cong Fi'_{24}$. Wäre G isomorph zu Fi_{23} , so wäre $|G : K| = |G : C_G(y)|$ ungerade und damit y eine 2-zentrale Involution in G , was aber 3.10 widerspricht. Also ist $G \cong Fi'_{24}$. Nun ist z ein 2-zentrales Element in G und [Atl] zeigt uns, dass Fi'_{24} nur eine Klasse 2-zentraler Involutionsen hat und daher $C_G(z) \sim 2_+^{1+12} \cdot 3PSU_4(3).2$ ist. Mit 2.5 erhalten wir nun $Q = O_2(C_G(z)) \cong 2_+^{1+12}$ und wegen $[[Y_M, O^2(M)], Q] \stackrel{2.2(g)}{=} z^\perp > \langle z \rangle = Q'$ ist $Y_M \not\leq Q$. Nach 4.17 ist $n = 3$. Wir betrachten jetzt $C_M(z) = N_M(Q)$ und wir nehmen zunächst an, dass $\epsilon = -$ ist. Laut 1.7 (b) ist dann $C_M(z)/O_2(C_M(z))$ isomorph zu $\Omega_4^-(2) \cong A_5$ oder $O_4^-(2) \cong \Sigma_5$. Weiterhin enthält $C_M(z)$ die Sylow-2-Untergruppe S von $G \cong Fi'_{24}$ und es folgt $|S| = 2^{21}$. Damit ist insgesamt $|C_M(z)/Q| = 2^8 \cdot 3 \cdot 5$. Es ist $C_M(z)/Q$ eine Untergruppe von $C_G(z)/Q = C_G(z)/O_2(C_G(z)) \cong 3PSU_4(3).2$. Weil A_5 kein zentrales Element der Ordnung 3 hat, müsste dann $PSU_4(3)$ eine Untergruppe der Ordnung $2^7 \cdot 3 \cdot 5$ haben. Seite 52 in [Atl] zeigt nun, dass $PSU_4(3)$ lediglich zwei (isomorphe) Klassen maximaler Untergruppen hat, deren Ordnung durch $2^7 \cdot 3 \cdot 5$ teilbar ist, diese haben die Struktur $2^4 : A_6$ und können die gesuchte Untergruppe nicht enthalten, weil A_6 keine Untergruppe vom Index 3 hat. Somit erhalten wir einen Widerspruch und es folgt $\epsilon = +$.

Wir wollen noch zeigen, dass $M/O_2(M)$ isomorph zu $\Omega_6^+(2) \cong A_8$ und nicht zu $O_6^+(2) \cong \Sigma_8$ ist. Dazu verwenden wir die Liste der maximalen Untergruppen von $G \cong Fi'_{24}$, die wir z.B. in [LW] finden, und erhalten, dass die einzigen maximalen Untergruppen von Fi'_{24} mit ungeradem Index die Gestalt $2^{6+8} (\Sigma_3 \times A_8)$, $2^{3+12} (PSL_3(2) \times A_6)$, $2_+^{1+12} \cdot 3PSU_4(3).2$ und $2^{11} \cdot M_{24}$ haben. Eine Untergruppe aus den ersten beiden Klassen enthält modulo ihrem größten 2-Normalteiler keinen Abschnitt isomorph zu Σ_8 , eine Gruppe aus der dritten Klasse hat ein zentrales Element der Ordnung 2, aber es ist $Z(M) = 1$, und für die letzte Klasse verwenden wir S. 96 in [Atl] und stellen fest, dass auch M_{24} keine parabolische maximale Untergruppe H hat, für die $H/O_2(H)$ eine Σ_8 involviert. Somit folgt die Behauptung. \square

Wir werden nun im restlichen Teil dieses Abschnitts den letzten verbleibenden Fall untersuchen. Es gelte also:

5.10 Voraussetzung: Von nun an sei $K/Z(K)$ isomorph zu Fi_{22} und $C_G(K)$ eine Vierergruppe. Sei dabei $v \in C_G(K)$ mit $C_G(K) = \langle y, v \rangle$.

5. Die Fälle $K/Z(K) \cong Fi_{22}$ und $K/Z(K) \cong BM$

5.11 Lemma: *Es gilt:*

- (a) *Es ist $n = 3$.*
- (b) *Es ist $[v, C_G(y)] = \langle y \rangle$.*
- (c) *Es ist $|C_G(y) : KC_G(K)| = 2$, also ist τ in 5.2 (c) nicht in $KC_G(K)$ enthalten und $C_G(y)$ induziert die volle Automorphismengruppe auf $K \cong 2Fi_{22}$.*
- (d) *Die Involution v liegt in $O_2(M)$.*
- (e) *$O_2(M)$ liegt in $KC_G(K) = K \times \langle v \rangle$.*
- (f) *Es gilt $v \in Y_M \setminus [Y_M, O^2(M)]$.*
- (g) *Es ist $\epsilon = +$ und Y_M ist ein Faktormodul der Ordnung 2^7 des natürlichen Permutationsmoduls für $O^+(6, 2) \cong \Sigma_8$.*

Beweis:

- (a) Dies folgt aus 4.17.
- (b) Nach 3.3 liegt v nicht in $Z(C_G(y))$. Weiterhin operiert $C_G(y)$ trivial auf der Gruppe $C_G(K)/\langle y \rangle$ der Ordnung 2, also folgt $[v, C_G(y)] = \langle y \rangle$.
- (c) Laut 5.2 (c) ist $|C_G(y) : KC_G(K)| \leq 2$. Angenommen, es ist $C_G(y) = KC_G(K)$. Dann ist $C_G(K) \leq Z(C_G(y))$ und damit insbesondere $[v, C_G(y)] = 1$, ein Widerspruch zu (b).
- (d) Wegen $[v, C_G(y)] = \langle y \rangle$ normalisiert v alle Untergruppen von $C_G(y)$, die y enthalten. Insbesondere ist also $v \in N_G(O_2(M))$. Dabei ist $M \leq N_G(O_2(M)) \in \mathcal{L}(S)$. Da nach 1.5 außerdem $M \in \mathfrak{M}(S)$ ist, folgt schon $v \in N_G(O_2(M)) \leq MC_G(Y_M)$. Nun enthält M eine Sylow-2-Untergruppe von G und damit auch von $MC_G(Y_M)$, also gibt es Elemente $c \in C_G(Y_M)$ und $m \in M$ mit $v^{cm} \in M$. Es folgt $v^c \in M$ und weil $c \in C_G(Y_M) \leq C_G(y)$ ist, gilt laut (b) zudem $v^c \in \{v, vy\}$, weshalb sich insgesamt $v \in M$ ergibt.
In der hier betrachteten Situation ist $Y_M < O_2(M)$ laut 4.17, demnach liefert uns 1.13 für eine Sylow-2-Untergruppe \tilde{S} von $C_G(y)$ schon $[Y_M, O^2(M)] \leq \Phi(O_2(M)) \leq \Phi(\tilde{S})$. Weil $C_{C_G(y)}(v) = K \times \langle v \rangle$ Index 2 in $C_G(y)$ hat, ist auch $\Phi(\tilde{S})$ in $C_{C_G(y)}(v)$ enthalten. Daher gilt $[v, [Y_M, O^2(M)]] = 1$ und weil $C_M([Y_M, O^2(M)]) \stackrel{1.10}{=} O_2(M)$ ist, folgt die Behauptung.
- (e) Angenommen, $O_2(M)$ liegt nicht in $KC_G(K) = K \times \langle v \rangle$. Dann hat $C_M(y) \cap (KC_G(K))$ Index 2 in $C_M(y)$ und es gilt

$$C_M(y) = O_2(M) (C_M(y) \cap (K\langle v \rangle)) = O_2(M)(C_M(y) \cap K)\langle v \rangle = O_2(M)(C_M(y) \cap K).$$

Damit folgt nun

$$\begin{aligned} C_M(y)/O_2(M) &= O_2(M) \cdot (C_M(y) \cap K)/O_2(M) \\ &\cong (C_M(y) \cap K)/(C_M(y) \cap K) \cap O_2(M) = (C_M(y) \cap K)/(O_2(M) \cap K). \end{aligned}$$

Setze $U := K \cap C_M(y)$. Nach 1.7(c) ist $C_M(y)/O_2(M) \cong \Sigma_6$ oder $\Sigma_6 \times 2$, also ist $U/O_2(U) \cong \Sigma_6$. Außerdem gilt $|K : U|_2 \leq 2$ laut 4.6 und daher ist $|O_2(U)| \geq 2^{13}$. Wir verwenden nun [KW], um zu zeigen, dass $2Fi_{22}$ keine solche Untergruppe besitzt. Denn aus Ordnungsgründen müsste $U/\langle y \rangle$ in einer maximalen Untergruppe der Form $2PSU_6(2)$, $2^{10} : M_{22}$, $(2 \times 2_+^{1+8} : SU_4(2)) : 2$ oder $2^{5+8}(\Sigma_3 \times A_6)$ liegen. Dabei enthält $2^{5+8}(\Sigma_3 \times A_6)$ keinen Abschnitt isomorph zu Σ_6 . Und indem wir den Satz von Borel-Tits auf $PSU_6(2)$ und $SU_4(2)$ anwenden und die [Atl]-Informationen zu M_{22} benutzen, erkennen wir, dass U auch in keiner maximalen Untergruppe aus den verbleibenden Klassen liegen kann und wir erhalten einen Widerspruch.

- (f) Wegen $O_2(M) \leq K \cdot C_G(K) = K \times \langle v \rangle$ folgt insgesamt $[O_2(M), v] = 1$. Zusammen mit (d) ist nun $v \in \Omega_1(Z(O_2(M))) \stackrel{1.10}{=} Y_M$. Laut 4.2 gilt zuletzt $C_{[Y_M, O^2(M)]}(K) = \langle y \rangle$, also ist $v \in Y_M \setminus [Y_M, O^2(M)]$.
- (g) Lemma 1.11 zeigt, dass $Y_M > [Y_M, O^2(M)]$ nur in dem angegebenen Fall möglich ist.

□

5.12 Korollar: *Mit den Bezeichnungen aus 1.11 können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $v = \overline{v_8}$ ist.*

Beweis: Es ist $v \in C_{[Y_M, O^2(M)]}(K)$, nach 4.2 ist $y = \overline{v_7 v_8} \in C_{[Y_M, O^2(M)]}(K) \leq \langle \overline{v_7}, \overline{v_8} \rangle$, also erhalten wir $v \in \{\overline{v_7}, \overline{v_8}\}$. Da alle bisherigen Aussagen richtig bleiben, wenn wir v durch v_7 ersetzen, können wir $v = \overline{v_8}$ annehmen. □

Als nächstes bestimmen wir $C_G(v)$. Wir erhalten:

5.13 Lemma: *Es sei $T \in Syl_2(K)$ mit $z \in Z(T)$, also $T \in Syl_2(C_K(z))$. Dann gilt:*

- (a) *Es ist $\langle v \rangle \times T \in Syl_2(C_G(v))$.*
- (b) *Es existiert eine Untergruppe $H \leq C_G(v)$ mit $C_G(v) = \langle v \rangle \times H$.*
- (c) *H ist isomorph zu Fi_{23} .*
- (d) *Die Involution v ist in G kein Quadrat.*

5. Die Fälle $K/Z(K) \cong Fi_{22}$ und $K/Z(K) \cong BM$

Beweis:

- (a) Angenommen, es existiert eine Sylow-2-Untergruppe \hat{T} von $C_G(v)$ mit $\langle v \rangle \times T < \hat{T}$. Sei dann $\sigma \in N_{\hat{T}}(\langle v \rangle \times T) \setminus (\langle v \rangle \times T)$.

Weil T eine Sylow-2-Untergruppe von $K \cong 2Fi_{22}$ ist und z im Zentrum von T liegt, gilt $Z(T) = \langle y, z \rangle \leq \Phi(T)$. Dann ist die Gruppe

$$Z(\langle v \rangle \times T) \cap \Phi(\langle v \rangle \times T) = (\langle v \rangle \times Z(T)) \cap \Phi(T) = \langle y, z \rangle$$

invariant unter σ . Dabei ist $\sigma \notin C_G(y)$ und y ist nach 1.18 nicht zu z konjugiert, also muss $y^\sigma = yz$ sein. Sei nun $g \in Q \setminus C_Q(y)$, dann ist ebenfalls $y^{g^{-1}} \stackrel{2.3}{=} yz$ und demnach gilt $\sigma g \in C_G(y)$. Mit 5.11 (b) ist dann $v^g = v^{\sigma g} \in \{v, vy\}$ und daher insbesondere $C_G(K) \cap C_G(K)^g \neq 1$, im Widerspruch zu 4.13 (b).

- (b) Weil $\langle v \rangle$ normal in $C_G(v)$ ist und ein Komplement T in einer Sylow-2-Untergruppe von $C_G(v)$ hat, gibt es nach dem Satz von Gaschütz (siehe z.B. 3.3.2. in [KS]) ein Komplement H zu $\langle v \rangle$ in $C_G(v)$.
- (c) Es ist $K \leq C_G(v)$ und demnach auch $K \leq H$. Zudem ist $C_H(K) = C_G(K) \cap H = \langle y, v \rangle \cap H = \langle y \rangle$, daher ist K mit 5.6 eine Standarduntergruppe von H .

Wir zeigen nun, dass $F^*(H)$ einfach ist. Weil $T \leq K$ eine Sylow-2-Untergruppe von H ist, folgt $O_2(H) \leq O_2(K) = \langle y \rangle$. Wäre $O_2(H) = \langle y \rangle$, so würde $y \in Z(H)$ und damit $y \in Z(C_G(v))$ folgen, allerdings gibt es z.B. Elemente aus M , die zwar $v = \bar{v}_8$ zentralisieren (siehe 5.12), aber nicht y . Folglich ist $O_2(H) = 1$.

Sei nun $p \neq 2$ eine Primzahl und $P := \Omega_1(Z(O_p(H)))$. Wir nehmen an, dass $P \neq 1$ ist. Dann operiert K auf P und $C_P(y) = P \cap C_G(y)$ ist eine p -Untergruppe, die von K normalisiert wird. Wegen $C_G(y) \stackrel{5.2(c)}{=} (KC_G(K))\langle \tau \rangle$ schließen wir $C_P(y) = 1$ und folglich wird P von y invertiert. Sei nun m ein Element von M , das auf $[Y_M, O^2(M)]$ wie $(5, 6, 7) \in A_8$ operiert. Dann ist $m \in C_G(v)$ und demnach liegt auch K^m in H , wobei $Z(K^m) = \langle y^m \rangle$ ist. Mit demselben Argument wie oben wird P auch von y^m invertiert und daher ist $P \leq C_G(yy^m) = C_G(\bar{v}_5\bar{v}_7)$. Nun gibt es ein $g \in M$ mit $\bar{v}_5\bar{v}_7 = y^g$, also ist $P \leq C_G(y)^g$ und weil K jede Sylow- p -Untergruppe von $C_G(y)$ enthält, muss $P \leq K^g$ sein. Laut Tabelle 5.6.1 auf S. 303 in [GLS3] ist $m_3(K) = 6, m_5(K) = 2$ und $m_q(K) = 1$ für alle Primteiler q von K mit $q \geq 7$. Sei $|P| = p^k$. Damit K auf P nicht trivial operieren kann, müsste K isomorph zu einer Untergruppe von $GL_k(p)$ sein, für die mögliche Werte von p und k ist das allerdings schon aus Ordnungsgründen nicht der Fall. Daher ist $P = 1$ und dann auch $O_p(H) = 1$.

Also ist $F^*(H)$ das direkte Produkt einfacher Gruppen L_1, \dots, L_k für ein $k \in \mathbb{N}$. Da nach 1.25 jedes L_i durch 4 teilbare Ordnung hat und K eine Sylow-2-Untergruppe von H enthält, ist $|K \cap L_1| \geq 4$, was sofort zu $K \leq L_1$ und dann zu $k = 1$ führt. Also ist $F^*(H)$ einfach.

5. Die Fälle $K/Z(K) \cong Fi_{22}$ und $K/Z(K) \cong BM$

Die in [DS] formulierte „Hypothese K“ gilt laut 5.7 in $C_G(v)$, also können wir jetzt [DS, Theorem 4.2] anwenden und erhalten $H \cong Fi_{23}$ oder $H \cong Fi'_{24}$. Weil K eine Sylow-2-Untergruppe von H enthält und $|Fi'_{24}|_2 > |2Fi_{22}|_2$ ist, folgt die Behauptung.

- (d) Gäbe es $g \in G$ mit $g^2 = v$, so wäre $g \in C_G(v)$. Da v auf Grund von (b) kein Quadrat in $C_G(v)$ ist, ist v also auch kein Quadrat in G .

□

5.14 Lemma: *Es ist $M/O_2(M) \cong \Omega_6^+(2) \cong A_8$.*

Beweis: Nach 5.11 (a) und (g) ist $(2n, \epsilon) = (6, +)$. Wir nehmen $M/O_2(M) \cong O_6^+(2) \cong \Sigma_8$ an. Laut 5.12 ist $v = \overline{v_8}$ und damit gilt $C_M(v)/O_2(M) \cong \Sigma_7$. Weiter ist

$$C_M(v) = M \cap C_G(v) = M \cap (\langle v \rangle \times H) = \langle v \rangle \times (M \cap H) = \langle v \rangle \times (C_M(v) \cap H).$$

Daher enthält $Fi_{23} \cong H \cong C_G(v)/\langle v \rangle$ die Untergruppe $U := C_M(v)/\langle v \rangle$, für die $O_2(U) = O_2(M)/\langle v \rangle$ und damit $U/O_2(U) \cong C_M(v)/O_2(M) \cong \Sigma_7$ gilt. Da laut 4.6 außerdem $|K : K \cap C_M(y)|_2 \leq 2$ ist, $\langle v \rangle \times (K \cap C_M(y))$ in $C_M(v)$ liegt und $|K|_2 = |H|_2$ ist, folgt auch $|Fi_{23} : U|_2 \leq 2$. Wir verwenden nun die Liste der maximalen Untergruppen von Fi_{23} in [KPW] und erhalten zusammen mit den [Atl]-Informationen zu $PSU_6(2), M_{23}, M_{22}, PSU_4(2)$ und $PSL_3(4)$, dass Fi_{23} keine Untergruppe passender Struktur besitzt, hierbei können wir auch verwenden, dass wir im Beweis von 5.11 (e) bereits gezeigt haben, dass die meisten der zu betrachtenden Gruppen keine Untergruppe passender Ordnung mit einem Abschnitt isomorph zu Σ_6 haben. Dieser Widerspruch zeigt die Behauptung. □

5.15 Definition: *Wir setzen $R := O_2(M) \cap K$.*

5.16 Lemma: *Es gilt*

- (a) *R ist normal in M . Außerdem gilt $R = O_2(M) \cap H$ und $O_2(M) = R \times \langle v \rangle$.*
 (b) *M/R ist isomorph zu $A_8 \times 2$.*

Beweis:

- (a) Es ist $C_M(y) \leq N_G(K)$ und $O_2(M) \trianglelefteq C_M(y)$, also ist auch $R = O_2(M) \cap K \trianglelefteq C_M(y)$. Außerdem liefern uns 5.11 (d) und (e), dass $v \in O_2(M)$ und $O_2(M) \leq \langle v \rangle \times K$ ist, weshalb $O_2(M) = O_2(M) \cap (\langle v \rangle \times K) = \langle v \rangle \times (O_2(M) \cap K) = \langle v \rangle \times R$ folgt. Laut 5.13 (b) ist $C_G(v) = \langle v \rangle \times H$ mit $K \leq H$ und wir erhalten $R = O_2(M) \cap H$. Nun gilt $C_M(v) = M \cap C_G(v) = M \cap (\langle v \rangle \times H) = \langle v \rangle \times (M \cap H)$ und es ist $O_2(M) \cap H \trianglelefteq M \cap H$, also ist R auch normal in $C_M(v)$.

Weil $C_M(v)$ und $C_M(y)$ zwei verschiedene maximale Untergruppen von M sind, erhalten wir nun $R \trianglelefteq \langle C_M(v), C_M(y) \rangle = M$ und damit die Behauptung.

5. Die Fälle $K/Z(K) \cong Fi_{22}$ und $K/Z(K) \cong BM$

- (b) Es ist $M/O_2(M) \cong A_8$ nach 5.14 und daher gilt $M/R \sim 2.A_8$. Dabei enthält M/R die Untergruppe $C_M(v)/R = (\langle v \rangle \times (M \cap H))/R = \langle v \rangle R/R \times (M \cap H)/R$ und weil $C_M(v)/O_2(M) \cong A_7$ ist, folgt $C_M(v)/R \cong 2 \times A_7$. Laut 5.2.4. b) in [GLS3] enthält die quasieinfache Gruppe $2 \cdot A_8$ keine Untergruppe $2 \times A_7$, also muss $M/R \cong A_8 \times 2$ sein.

□

5.17 Definition: Wie wir oben gezeigt haben, ist $M/R \cong A_8 \times 2$. Nun sei $U \leq M$ mit $U/R \cong A_8$. Dann ist $|M : U| = 2$ und $v \notin U$.

5.18 Lemma: Es gilt:

- (a) Es gibt kein $g \in G$ mit $v^g \in C_U(v)$.
(b) Es ist $v \notin G'$.

Beweis:

- (a) Es ist $C_U(v) \leq C_G(v) = \langle v \rangle \times H$. Da R in H liegt und $C_U(v)/R \cong A_7$ einfach ist, folgt $C_U(v) \leq H$. Wir zeigen, dass v zu keinem Element von $H \cong Fi_{23}$ konjugiert sein kann. Die Charaktertafel von Fi_{23} auf S. 178 in [Atl] zeigt, dass Fi_{23} genau 3 Klassen von Involutionen hat. Elemente aus den Klassen 2B und 2C sind Quadrate von Elementen aus den Klassen 4A bzw. 4B, allerdings ist v laut 5.13 (d) kein Quadrat. Für jedes Element x aus der verbleibenden Klasse 2A ist $C_H(x) \cong 2 \cdot Fi_{22} \cong K = C_H(y)$, also ist x in H zu y konjugiert. Allerdings kann v nicht zu y konjugiert sein, da $C_G(y) \sim (2 \times 2 \cdot Fi_{22}).2$ und $C_G(v) \cong 2 \times Fi_{23}$ verschiedene Strukturen haben.
- (b) Sei $S_0 := S \cap U$, dann ist $|S : S_0| = 2$ und $v \in S \setminus S_0$. Angenommen, v liegt in G' . Dann zeigt Proposition 15.15. in [GLS2], dass v in G zu einem $x \in S_0$ mit $|C_S(x)| \geq |C_S(v)|$ konjugiert sein muss. Es ist $C_M(v)/O_2(M) \cong A_7$ und $S \cap C_M(v) = C_S(v)$ ist eine Sylow-2-Untergruppe von $C_M(v)$, also gilt $|S : C_S(v)| = |A_8 : A_7|_2 = 2^3 \geq |S : C_S(x)|$. Wie wir oben gesehen haben, ist v zu keinem Element aus $C_U(v)$ konjugiert. Also ist insbesondere $x \notin O_2(M)$ und x hat auf den Vektoren $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_8\}$ keinen Fixpunkt. Folglich muss x in $U \setminus R$ liegen und $xO_2(M)$ muss einem Element vom Typ $(1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8)$ entsprechen. Dann ist aber $|C_{Y_M}(x)| = 2^4$ bzw. $|Y_M : C_{Y_M}(x)| = 2^3$, wegen $|S : C_S(x)| \leq 2^3$ folgt dann $S = C_S(x)Y_M$. Daher gilt $[x, O_2(M)] \leq [x, S] = [x, Y_M] \leq [Y_M, O^2(M)]$ wegen $|Y_M : [Y_M, O^2(M)]| \stackrel{5.11(g)}{=} 2$. Also ist $x \in C_M(O_2(M)/[Y_M, O^2(M)])$, weil außerdem $M/O_2(M) \cong A_8$ einfach ist, erhalten wir $M = O_2(M)C_M(O_2(M)/[Y_M, O^2(M)])$. Insbesondere operiert dann für jeden Primzahl $p \neq 2$ jede Sylow- p -Untergruppe P von M trivial auf $O_2(M)/[Y_M, O^2(M)]$. Laut 1.13 ist $[Y_M, O^2(M)] \leq \Phi(O_2(M))$, deshalb liefert 8.2.9. in [KS] nun sogar $[P, [Y_M, O^2(M)]] = 1$, ein Widerspruch zu 1.10. Also ist $v \notin G'$ und es gilt die Behauptung.

□

5. Die Fälle $K/Z(K) \cong Fi_{22}$ und $K/Z(K) \cong BM$

Nun können wir abschließend beweisen:

5.19 Satz: *Es gelte Voraussetzung 5.10. Dann ist G isomorph zu Fi_{24} . Außerdem gilt dann $M/O_2(M) \cong \Omega_6^+(2) \cong A_8$ und Y_M liegt nicht in Q .*

Beweis: Laut 3.9 ist $F^*(G)$ eine einfach Gruppe. Weil $F^*(G') \leq F^*(G)$ ist, muss also $F^*(G') = F^*(G)$ sein. Nun liegt v nach 5.18 (b) nicht in G' , daher ist $C_{G'}(K) = \langle y \rangle$ und 5.6 liefert uns, dass K eine Standarduntergruppe von G' ist. Mit 5.7 gilt die in [DS] formulierte „Hypothese K“ auch in G' , wir können also Theorem 4.2 aus [DS] anwenden und erhalten, dass G' isomorph zu Fi_{23} oder Fi'_{24} ist. Weil G' die echte Untergruppe $H \cong Fi_{23}$ enthält, folgt schon $G' = F^*(G) \cong Fi'_{24}$. Weiter ist $F^*(G) = G' < G$ und $G/F^*(G)$ ist isomorph zu einer Untergruppe von $\text{Out}(F^*(G)) = \text{Out}(Fi'_{24}) \cong C_2$, somit erhalten wir insgesamt $G \cong \text{Aut}(Fi'_{24}) = Fi_{24}$. Wie im Beweis von 5.9 ist dann $Q \cong 2_+^{1+12}$ extraspeziell und darum $Q' = \langle z \rangle < z^\perp \stackrel{2.2(g)}{\leq} [Y_M, Q]$, also liegt Y_M nicht in Q . Die restlichen Behauptungen folgen aus 5.11 (g) und 5.14. \square

Zuletzt fassen wir die Resultate dieses Abschnitts zusammen und erhalten:

5.20 Satz: *Es gilt:*

- (a) *Ist $K/Z(K) \cong Fi_{22}$, so ist $M/O_2(M) \cong \Omega_6^+(2) \cong A_8$ und G ist entweder isomorph zu Fi'_{24} oder zu Fi_{24} .*
- (b) *Ist $K/Z(K) \cong BM$, so ist $M/O_2(M) \cong \Omega_{10}^+(2)$ und G ist isomorph zu F_1 .*

In beiden Fällen liegt Y_M nicht in Q .

Kapitel 6

Der Fall $K/Z(K) \cong PSU_4(3)$

In diesem Kapitel wollen wir uns mit dem letzten verbleibenden Fall $K/Z(K) \cong PSU_4(3)$ beschäftigen. Es gelte also von nun an:

6.1 Voraussetzung: *Es sei $K/Z(K)$ isomorph zu $PSU_4(3)$.*

Wir wollen zeigen, dass $F^*(G) \cong P\Omega_8^+(3)$ gilt. Dazu werden wir im folgenden Abschnitt zunächst die Möglichkeiten für den Isomorphietyp von $M/O_2(M)$ weiter einschränken, indem wir $\epsilon = +$ nachweisen. Anschließend werden wir die zu betrachtenden Situationen noch weiter reduzieren und schließlich eine zu $\Omega_8^+(2)$ isomorphe Untergruppe von G konstruieren, die es ermöglichen wird, das Hauptresultat aus [PS1] zu verwenden. Dabei wird [MSW] ein sehr nützliches Hilfsmittel sein, was auch in [PS1] eine wesentliche Rolle spielt.

Die Ausführungen in Abschnitt 6.1 folgen dabei grob denn Ideen aus [Pr, Kapitel 5]. Varianten von 6.6, 6.9 und 6.14 findet man ebenda. Auch einige Argumente aus 6.11 und 6.12 sind von dort entnommen, diese wurden hier aber überarbeitet und stark vereinfacht.

Zunächst tragen wir noch einmal einige wichtige Resultate für die folgenden Untersuchungen zusammen.

6.2 Lemma: *Unter der Voraussetzung 6.1 gilt:*

- (a) *Es ist $n = 3$ und $O_2(M) = Y_M$.*
- (b) *Der Normalisator von Q liegt nicht in M und Q ist eine extraspezielle Gruppe vom $+-$ Typ der Ordnung 2^9 mit $Z(Q) = \langle z \rangle$.*
- (c) *Es ist $N_G(Q) = C_G(z)$.*
- (d) *Es gilt $Q \cap Y_M = z^\perp$.*
- (e) *Es ist $QY_M/Y_M = O_2(C_M(z)/Y_M)$ elementarabelsch der Ordnung 2^4 .*

6. Der Fall $K/Z(K) \cong PSU_4(3)$

Beweis: Laut 4.26 ist $n = 3$, $O_2(M) = Y_M$ und $N_G(Q) \not\leq M$. Dann folgt aus 2.6 schon $Q \cap Y_M = z^\perp$. Ferner liefert 2.9 auch $Q \cong 2_+^{1+8}$ und $Z(Q) = \langle z \rangle$. Weil Q eine große Untergruppe ist, gilt zudem $N_G(Q) = N_G(Z(Q)) = C_G(z)$. Zuletzt zeigt 2.2 (b), dass $QY_M/Y_M = O_2(C_M(z)/Y_M)$ elementarabelsch der Ordnung 2^4 ist. \square

6.3 Lemma: Sei $R \in Syl_3(C_K(z))$. Wir setzen $V := Q/\langle z \rangle$. Dann können wir $a, b \in R$ so wählen, dass gilt:

- $R = \langle a, b \rangle$
- $|C_V(a)| = |C_V(b)| = 2^6$
- $|[V, a]| = |[V, b]| = 2^2$
- $[V, a] \leq C_V(b)$ und $[V, b] \leq C_V(a)$
- Für $c \in R \setminus (\langle a \rangle \cup \langle b \rangle)$ ist $C_V(c) = C_V(a) \cap C_V(b)$ und $|C_V(c)| = 2^4$.

Beweis: Der Zentralisator einer 2-zentralen Involution in $PSU_4(3)$ hat eine elementarabelsche Sylow-3-Untergruppe R der Ordnung 9. Wegen $C_G(z) = N_G(Q)$ operiert R dabei auf dem orthogonalen Raum V vom +-Typ. Für Elemente $g\langle z \rangle \in V$ werden wir hier einfach kurz \bar{g} schreiben.

Es ist $K \leq C_G(y)$, also zentralisiert R das Element \bar{y} in V und folglich normalisiert R auch \bar{y}^\perp und zentralisiert V/\bar{y}^\perp (wobei wir hier $\bar{y}^\perp = C_Q(y)/\langle z \rangle$ in V bilden, nicht in Y_M). Laut 8.2.2. in [KS] gibt es nun ein Element $\bar{v} \in V \setminus \bar{y}^\perp$, das von R zentralisiert wird. Außerdem ist \bar{y} wegen $y^2 = 1$ ein singulärer Vektor in V . Also ist R isomorph zu einer Untergruppe des Stabilisators P eines singulären Vektors in $\text{Aut}(V) = O_8^+(2)$, dabei ist $P \sim 2^6 : \Sigma_8$ und demnach operiert R auf V genauso wie eine Sylow-3-Untergruppe von $\Sigma_8 \leq P$. Weil $\bar{y}^\perp/\langle \bar{y} \rangle$ der natürliche Modul für $\Sigma_8 \cong O_6^+(2)$ ist, können wir a, b so wählen, dass gilt:

$$|C_{\bar{y}^\perp/\langle \bar{y} \rangle}(a)| = |C_{\bar{y}^\perp/\langle \bar{y} \rangle}(b)| = 2^4, \quad |[\bar{y}^\perp/\langle \bar{y} \rangle, a]| = |[\bar{y}^\perp/\langle \bar{y} \rangle, b]| = 2^2, \\ [\bar{y}^\perp/\langle \bar{y} \rangle, a] \leq C_{\bar{y}^\perp/\langle \bar{y} \rangle}(b) \quad \text{und} \quad [\bar{y}^\perp/\langle \bar{y} \rangle, b] \leq C_{\bar{y}^\perp/\langle \bar{y} \rangle}(a).$$

Außerdem ist dann für $c \in R \setminus (\langle a \rangle \cup \langle b \rangle)$ auch $C_{\bar{y}^\perp/\langle \bar{y} \rangle}(c) = C_{\bar{y}^\perp/\langle \bar{y} \rangle}(a) \cap C_{\bar{y}^\perp/\langle \bar{y} \rangle}(b)$ von der Ordnung 2^2 . Wegen $[\bar{y}, R] = 1$ folgt nun mit erneuter Anwendung von 8.2.2. in [KS] die Behauptung. \square

6.4 Lemma: Es gelte 6.1 und zusätzlich $[Y_M, O^2(M)] = Y_M$. Sei $a \in C_{M'}(z) = N_{M'}(Q)$ so, dass $aY_M \in C_{M'}(z)/Y_M$ eine Involution ist. Dann ist $a^2 \in z^\perp = Q \cap Y_M$. Außerdem gilt dann: Ist $w \in Y_M \setminus z^\perp$, so ist wQ in $N_{M'}(Q)/Q$ kein Quadrat.

Beweis: Zunächst gilt $Y_M = [Y_M, O^2(M)] \leq M'$. Laut 6.2 gilt $Q \cong 2_+^{1+8}$ und $Q \cap Y_M = z^\perp$, außerdem ist $QY_M/Y_M = O_2(C_{M'}(z)/Y_M)$. Nun ist M'/Y_M isomorph zu $\Omega_6^+(2)$ oder $\Omega_6^-(2)$,

beide Gruppen haben genau zwei Klassen von Involutionen und der größte 2-Normalteiler des Stabilisators eines singulären Vektors enthält jeweils Elemente aus beiden Klassen. Also ist jede Involution von M'/Y_M zu einem Element in QY_M/Y_M konjugiert. Es gibt eine elementarabelsche Untergruppe $V \leq Q$ der Ordnung 2^4 mit $Q = z^\perp V$ und es folgt $QY_M/Y_M = VY_M/Y_M$. Also enthält jede Nebenklasse $qY_M \in QY_M/Y_M$ Involutionen, demnach gibt es auch in der Nebenklasse aY_M eine Involution.

Nehmen wir nun an, dass $a^2 = w \in Y_M \setminus z^\perp$ ist. Dann gilt insbesondere $Y_M = z^\perp \times \langle w \rangle$ und es ist $[w, a] = 1$. Sei nun $u \in Y_M$ beliebig, dann gibt es Elemente $u_0 \in z^\perp$ und $i \in \{0, 1\}$ mit $u = u_0 w^i$. Wir erhalten

$$(au)^2 = au_0 w^i a u_0 w^i = a^2 u_0^a (w^i)^a u_0 w^i = w u_0^a w^i u_0 w^i = w u_0^a u_0.$$

Weil $a \in C_M(z)$ ist, normalisiert a auch z^\perp und es gilt $u_0^a u_0 \in z^\perp$. Insgesamt ist daher $(au)^2 \neq 1$, also enthält die Nebenklasse aY_M keine Involution, ein Widerspruch.

Wir nehmen nun an, dass es ein $w \in Y_M \setminus z^\perp$ und ein $g \in C_{M'}(z) = N_{M'}(Q)$ mit $g^2 Q = wQ$ gibt. Dann können wir $g \in S \cap M'$ annehmen. Da $C_{M'}(z)/Y_M \stackrel{1.7(b)}{=} O_2(C_{M'}(z)/Y_M) : \Omega_4^\epsilon(2)$ eine zerfallende Erweiterung ist, gibt es nun ein $T \leq S \cap M'$, für das $(S \cap M')/Y_M = O_2(C_{M'}(z)/Y_M) : T/Y_M = QY_M/Y_M : T/Y_M$ ist. Also können wir sogar $g \in T$ annehmen und es folgt, dass $gY_M \in C_{M'}(z)/Y_M$ eine Involution mit $g^2 \in Y_M \setminus z^\perp$ ist, ein Widerspruch. \square

Wir werden im weiteren Verlauf dieses Kapitels die Gruppe $N_G(Q)/Q$ genauer untersuchen. Zur Verkürzung führen wir folgende Notation ein:

6.5 Definition: Von nun an sei $H := N_G(Q)/Q$ und $X := N_M(Q)/Q$.

Das folgende Lemma stellt einige grundlegende Informationen für die Gruppe H bereit.

6.6 Lemma: Es gelte 6.1. Weiterhin sei $a = |G|_2/2^9$. Dann gilt:

- (a) H ist isomorph zu einer Untergruppe von $O_8^+(2)$.
- (b) Die Ordnung von H teilt $a \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$ und $a \cdot 3^2$ ist ein Teiler von $|H|$.
- (c) Es ist $O_2(H) = 1$.

Beweis: Wegen $C_G(Q) \leq Q$ ist H isomorph zu einer Untergruppe von $\text{Out}(Q)$, dabei ist Q nach 6.2 (b) eine extraspezielle 2-Gruppe vom $+$ -Typ der Ordnung 2^{1+8} und laut III.13.9 in [Hu] ist dann $\text{Out}(Q)$ isomorph zu $O_8^+(2)$. Folglich ist $|H|$ ein Teiler von $|O_8^+(2)| = 2^{13} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$. Da Q normal in einer Sylow-2-Untergruppe von G ist, gilt auch $|H|_2 = |G|_2/|Q| = |G|_2/2^9$. Zudem ist $Q \stackrel{2.1}{=} O_2(N_G(Q))$ und damit $O_2(H) = 1$.

6. Der Fall $K/Z(K) \cong PSU_4(3)$

Weiterhin hat $K/Z(K) \cong PSU_4(3)$ den Schurmultipplikator $3^2 \times C_4$, also ist y die einzige Involution in $Z(K)$. Laut 4.4 (d) und (c) ist dann $C_K(z)/Z(K) = C_{K/Z(K)}(zZ(K))$ und $zZ(K)$ ist 2-zentral in $K/Z(K)$. Weil der Zentralisator einer 2-zentralen Involution in $PSU_4(3)$ eine durch 3^2 teilbare Ordnung hat, gilt dies also auch für $C_K(z) \leq C_G(z) \leq N_G(Q)$ und demnach auch für H . \square

Das Urbild von $Z(H/O(H))$ in H wird mit $Z^*(H)$ bezeichnet. Es gilt:

6.7 Lemma: *Sei $x \in Z^*(H)$ eine Involution. Dann gibt es eine ungerade Primzahl p , für die $O_p(H) \neq 1$ ist.*

Beweis: Laut 6.6 (c) ist $O_2(H) = 1$, insbesondere ist $x \notin Z(H)$ und daher gilt $O(H) \neq 1$. Weiter ist $O(H)$ laut [FT] auflösbar und es folgt $1 \neq O_p(O(H)) \leq O_p(H)$ für eine ungerade Primzahl p . \square

6.1 Erste Reduktion: Die Bestimmung von ϵ

Für unser weiteres Vorgehen wird es sehr nützlich sein, die Struktur von $M/O_2(M) = M/Y_M$ zu kennen und wir wollen dafür in diesem Abschnitt zeigen, dass $\epsilon = +$ ist. Dazu nehmen wir $\epsilon = -$ an und führen dies zu einem Widerspruch. Es gelte also:

6.8 Voraussetzung: *In diesem Abschnitt sei $K/Z(K)$ isomorph zu $PSU_4(3)$ und $\epsilon = -$.*

Mit 1.11 erhalten wir mit $\epsilon = -$ schon $Y_M = [Y_M, O^2(M)]$. Wir werden nun die Gruppe $H = N_G(Q)/Q$ genauer untersuchen.

Laut 1.7 (b) ist $C_M(z)/Y_M = AB$ mit $A \cong 2^4$ und $B \cong O_4^-(2) \cong \Sigma_5$ oder $B \cong \Omega_4^-(2) \cong A_5$ und nach 6.2 (e) ist $QY_M/Y_M = A$. Sei $w \in Y_M$ mit $Y_M = z^\perp \times \langle w \rangle$. Wegen 6.2 (d) und (c) ist $Q \cap Y_M = z^\perp$ und $C_M(z) = N_M(Q)$, also folgt $X = N_M(Q)/Q = C_M(z)/Q \sim \langle wQ \rangle . \Sigma_5$ bzw. $X \sim \langle wQ \rangle . A_5$. Dabei liegt wQ im Zentrum von X . Weiter gilt:

6.9 Lemma: *Ist g ein Element der Ordnung 5 in X , dann operiert g fixpunktfrei auf $Q/\langle z \rangle$. Insbesondere operiert also X fixpunktfrei auf $Q/\langle z \rangle$.*

Beweis: Nach 1.7 (b) und 6.2 (e) sind $z^\perp/\langle z \rangle$ und Q/z^\perp natürliche $O_4^-(2)$ -Moduln für X . Nun hat der Stabilisator eines Punktes in $GL_4(2)$ die Form $2^3 : GL_3(2)$ und damit insbesondere nicht durch 5 teilbare Ordnung. Folglich ist g fixpunktfrei auf $z^\perp/\langle z \rangle$ und auf Q/z^\perp und daher auch auf $Q/\langle z \rangle$. \square

6.10 Satz: *Es ist $F^*(X) \cong 2 \times A_5$. Insbesondere gilt: Ist $M/Y_M \cong \Omega_6^-(2)$, so ist $X \cong 2 \times A_5$ und H hat eine elementarabelsche Sylow-2-Untergruppe.*

Beweis: Für $M/O_2(M) \cong \Omega_6^-(2)$ ist $X \sim 2.A_5$ und für $M/O_2(M) \cong O_6^-(2)$ ist $X \sim 2.\Sigma_5$, also gilt $F^*(X) \sim 2.A_5$. Wir nehmen nun an, dass $F^*(X) \cong 2 \cdot A_5$ quasieinfach ist. Dann ist $F^*(X)$ auch in $X' \leq N_{M'}(Q)/Q$ enthalten und für $w \in Y_M \setminus z^\perp$ ist $wQ \in Z(2 \cdot A_5)$ ein Quadrat, das widerspricht aber 6.4. \square

6.11 Lemma: *Sei $U := A_5 \leq F^*(X)$ und sei p eine ungerade Primzahl. Ist $P \leq H$ eine p -Gruppe mit $U \leq N_H(P)$, so ist $P = 1$. Insbesondere ist $F(H) = 1$ und es gilt $E(H) \neq 1$.*

Beweis: Wegen $U \cap P = 1$ ist mit 6.6 schon $|P| \in \{1, 3, 3^2, 3^3, 3^4, 5, 7\}$. Angenommen, U operiert nicht trivial auf P . Dann ist $C_U(P) = 1$ und weil ein Element der Ordnung 5 von U auf Gruppen der Ordnung 3, 3^2 , 3^3 , 5 oder 7 nur trivial operieren kann, folgt $|P| = 3^4$. Also ist $P : U$ eine Untergruppe der Ordnung $2^2 \cdot 3^5 \cdot 5$ von $H \leq O_8^+(2)$, die sogar in $\Omega_8^+(2)$ liegt. Wir verwenden S. 85 in [Atl] und erhalten, dass die einzigen maximalen Untergruppen von $\Omega_8^+(2)$, die $P : U$ aus Ordnungsgründen enthalten könnten, von der Form $(3 \times PSU_4(2)) : 2$ sind. Läge eine Untergruppe $P : A_5$ in solch einer maximalen Untergruppe, müsste $PSU_4(2) \cong PSp_4(3)$ eine Untergruppe A mit einem zu A_5 isomorphen Abschnitt und $O_3(A) \neq 1$ haben. Dann läge A mit dem Satz von Borel-Tits in einer Parabolischen von $PSp_4(3)$, allerdings hat keine Parabolische von $PSp_4(3)$ durch 5 teilbare Ordnung. Also gilt $[U, P] = 1$.

Da laut [Atl, S. 86] der Zentralisator eines Elements der Ordnung 5 in $\Omega_8^+(2)$ die Ordnung 300 hat, folgt nun aus $[P, U] = 1$ schon $|P| \in \{1, 3, 5\}$. Angenommen, es ist $|P| = 5$. Dann wird P von keiner Untergruppe der Ordnung 9 zentralisiert, mit 6.6 ist die Ordnung einer Sylow-3-Untergruppe R von $H \cap \Omega_8^+(2)$ aber durch 9 teilbar und wegen $|\text{Aut}(P)| = 4$ folgt $[R, P] = 1$, ein Widerspruch.

Wir nehmen nun also an, dass $|P| = 3$ ist und setzen $V := Q/\langle z \rangle$. Ist g ein Element der Ordnung 3 aus $O_8^+(2)$, welches auf dem natürlichen Modul einen Kommutator der Dimension 4 oder 6 hat, so hat der Zentralisator von g in $O_8^+(2)$ eine nicht durch 5 teilbare Ordnung. Daher muss $[V, P]$ entweder Dimension 2 haben oder P ist fixpunktfrei auf V . Im ersten Fall operiert $U \leq C_H(P)$ auf $[V, P]$, was aber wegen $|[V, P]| = 4$ zu $[[V, P], U] = 1$ führt und damit 6.9 widerspricht. Also muss P fixpunktfrei auf V sein. Sei R eine Sylow-3-Untergruppe von $C_K(z)Q/Q$. Dann enthält R nach 6.3 kein fixpunktfreies Element, also ist R keine Sylow-3-Untergruppe von H und es folgt $|H|_3 \geq 3^3$. Wir fassen weiterhin H als Untergruppe von $O_8^+(2)$ auf und setzen $N := N_{O_8^+(2)}(P)$. Dann ist N von der Form $(P \times \Omega_6^-(2)) : 2$, außerdem gilt $N/P \cong O_6^-(2)$ und $C_N(P)/P \cong \Omega_6^-(2)$. Nun liegen $U \cong A_5$ und eine 3-Sylow-Gruppe von H in $C_H(P)$, weshalb $C_H(P)/P \leq C_N(P)/P$ durch $3 \cdot |A_5|$ teilbare Ordnung hat. Laut S. 26 in [Atl] ist nun $C_H(P)/P$ isomorph zu einer Untergruppe von Σ_6 , also muss H/P eine A_6 enthalten. Demnach ist insbesondere eine Sylow-2-Untergruppe von H nicht elementarabelsch und mit 6.10 erhalten wir $M/Y_M \cong O_6^-(2)$. Also ist $|H|_2 = 2^4$ und es gilt $X \leq H$ mit $X/Z(X) \cong \Sigma_5$ und $|Z(X)| = 2$. Nun ist aber H/P isomorph zu einer Untergruppe

6. Der Fall $K/Z(K) \cong PSU_4(3)$

von $N/P \cong O_6^-(2)$. Wieder folgt durch die Betrachtung der maximalen Untergruppen von $O_6^-(2)$, dass H/P isomorph zu einer Untergruppe von $A := \Sigma_6 \times 2$ ist. Jetzt enthält H/P die eindeutig bestimmte Untergruppe von A , die isomorph zu A_6 ist, außerdem ist $|H/P|_2 = 2^4$. Damit folgt $H/P \cong A_6 \times 2$ oder $H/P \cong \Sigma_6$. Allerdings gibt es in keiner dieser Gruppen eine Involution, deren Zentralisator einen Abschnitt isomorph zu Σ_5 hat. Weil aber H/P die Untergruppe $XP/P \cong X$ enthält, ergibt sich so der gewünschte Widerspruch.

Also ist $P = 1$ und wir erhalten insgesamt $F(H) = O_2(H) \stackrel{6.6(c)}{=} 1$ und damit $E(H) \neq 1$. \square

6.12 Lemma: *Es gibt in X ein Komplement zu $Z(X) = \langle wQ \rangle$, es ist also $X \cong \Sigma_5 \times \langle wQ \rangle$ bzw. $X \cong A_5 \times \langle wQ \rangle$.*

Beweis: Ist $M/O_2(M) \cong \Omega_6^-(2)$, so ist $X = F^*(X)$ und die Behauptung folgt aus 6.10. Sei also $M/O_2(M) \cong O_6^-(2)$ und somit $X \cong (\langle wQ \rangle \times A_5).2$. Wir nehmen nun an, dass es ein $s \in X \setminus F^*(X)$ mit $s^2 = wQ$ gibt. Dann können wir eine Sylow-2-Untergruppe \hat{T} von $F^*(X)$ so wählen, dass $T := \langle \hat{T}, s \rangle$ eine Sylow-2-Untergruppe von X und damit auch von H ist. Dabei ist \hat{T} elementarabelsch von der Ordnung 8 und enthält alle Involutionsen von T , insbesondere ist also \hat{T} schwach abgeschlossen in T . Laut (37.6) in [As1] kontrolliert $N_H(\hat{T})$ die Fusion in $C_H(\hat{T})$ und, weil \hat{T} abelsch ist, auch in \hat{T} . Wir setzen nun

$$L := N_H(\hat{T})/C_H(\hat{T}).$$

Dann ist L isomorph zu einer Untergruppe von $GL_3(2)$. Es ist T nicht abelsch und \hat{T} ist normal in T , somit gilt $|L|_2 = 2$. Außerdem gibt es in $F^*(X)$ ein Element der Ordnung 3, das \hat{T} normalisiert aber nicht zentralisiert, also folgt $2 \cdot 3 \mid |L|$. Weil $GL_3(2)$ keine Untergruppe von der Ordnung $2 \cdot 3 \cdot 7$ bzw. vom Index 4 hat, folgt $|L| = 6$ und damit erhalten wir, dass L wie $N_X(\hat{T})/C_X(\hat{T})$ auf \hat{T} operiert. Da wQ im Zentrum von X liegt, ist also wQ zu keinem anderen Element von \hat{T} konjugiert, somit gilt $wQ \in Z^*(H)$ laut [Gl2, Corollary 1]. Nach 6.7 ist nun $O_p(H) \neq 1$ für eine ungerade Primzahl p , das widerspricht aber 6.11. \square

6.13 Lemma: *Sei $M/O_2(M) \cong O_6^-(2)$. Dann hat H eine Untergruppe \hat{H} vom Index 2. Dabei ist eine Sylow-2-Untergruppe von \hat{H} isomorph zu D_8 und es gilt $A_5 \cong E(X) \leq \hat{H}$. Außerdem ist $X \cap \hat{H} \cong \Sigma_5$.*

Beweis: Mit 6.12 hat H eine Sylow-2-Untergruppe der Form $\langle wQ \rangle \times D_8$. Nun liefert uns 1.21 eine Untergruppe \hat{H} vom Index 2 in H , die wQ nicht enthält. Dabei ist auch $E(X) \leq \hat{H}$. Außerdem folgt

$$X \cap \hat{H} \cong (X \cap \hat{H}) \cdot \langle wQ \rangle / \langle wQ \rangle = X / \langle wQ \rangle \cong \Sigma_5$$

und damit die Behauptung. \square

6.14 Lemma: Sei q eine Primzahlpotenz so, dass H eine Untergruppe isomorph zu $PSL_2(q)$ enthält. Dann ist $q \in \{2, 4, 8, 3, 3^2, 5, 7\}$.

Beweis: Es ist stets q ein Teiler von $|PSL_2(q)|$, also folgt mit 6.6 an dieser Stelle bereits $q \in \{2, 2^2, 2^3, 2^4, 3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 5, 5^2, 7\}$. Allerdings werden die Ordnungen von $PSL_2(2^4)$, $PSL_2(3^3)$, $PSL_2(3^4)$, $PSL_2(3^5)$ und $PSL_2(5^2)$ jeweils von einer der Primzahlen 11, 13, 17 bzw. 41 geteilt, also liefert erneute Anwendung von 6.6 die Behauptung. \square

Wir können nun den gewünschten Widerspruch erhalten.

6.15 Satz: M/Y_M ist isomorph zu $\Omega_6^+(2)$ oder $O_6^+(2)$.

Beweis: Wir nehmen weiter an, dass $\epsilon = -$ ist.

Laut 6.11 ist $F^*(H) = E(H) \neq 1$. Wir setzen nun $L := H$ für $M/O_2(M) \cong \Omega_6^-(2)$ und $L := \widehat{H}$ wie in 6.13 für $M/O_2(M) \cong O_6^-(2)$. Dann liegt jede Komponente von H in L , außerdem ist $|L|_2 = 2^3$ und eine Sylow-2-Untergruppe von L ist entweder elementarabelsch oder isomorph zu D_8 . Sei nun C eine Komponente von H . Dann ist C einfach und die Ordnung von C ist nach 1.25 durch 4 teilbar, insbesondere ist C wegen $|L|_2 = 2^3$ die einzige Komponente von H und es folgt $C = F^*(H)$. Sei $A_5 \cong U \leq F^*(X)$ wie in 6.11. Dann ist $C \cap U \neq 1$, weshalb U in C liegt.

Wir nehmen zuerst an, dass eine Sylow-2-Untergruppe von C abelsch ist. Laut Theorem I aus [Wa] und 6.14 ist C dann isomorph zu einer der Gruppen $PSL_2(4)$, $PSL_2(8)$ oder $PSL_2(5)$, oder es ist $C_C(t) \cong 2 \times PSL_2(q)$ ($q \equiv 3, 5 \pmod{8}$) für jede Involution $t \in C$.

Die Annahme $C \cong PSL_2(4) \cong PSL_2(5) \cong A_5$ führt zu einem Widerspruch, denn es ist $C = F^*(H)$ und H hat mit 6.6 (b) durch 9 teilbare Ordnung, $\text{Aut}(A_5) = \Sigma_5$ jedoch nicht. Weiter kann $PSL_2(8)$ allein schon aus Ordnungsgründen nicht die Untergruppe $U \cong A_5$ enthalten, daher ist C auch nicht isomorph zu $PSL_2(8)$. Zuletzt verbleibt also der Fall, dass $C_C(t) \cong 2 \times PSL_2(q)$ ($q \equiv 3, 5 \pmod{8}$) für jede Involution $t \in C$ gilt. Dann enthält C eine volle Sylow-2-Untergruppe von L und diese ist elementarabelsch. Daher folgt $L = H$, $2 \times A_5 \cong X \leq C$ und $PSL_2(q)$ muss eine A_5 enthalten. Nun erhalten wir $PSL_2(q) \cong A_5$ aus 6.14 und [Ja] liefert nun insbesondere, dass 11 ein Teiler von C ist (C ist dann isomorph zur ersten Janko-Gruppe J_1), was aber 6.6 widerspricht.

Also ist eine Sylow-2-Untergruppe T von C nicht abelsch. Das führt zu $M/O_2(M) \cong O_6^-(2)$, $L = \widehat{H}$ und $T \cong D_8$. Es liegt U in C und außerdem enthält C nun jede Sylow-2-Untergruppe von \widehat{H} , also gilt nach 6.13 auch $\Sigma_5 \cong X \cap \widehat{H} \leq C$. Wir verwenden Theorem 1 aus [GW] zusammen mit 6.14 und erhalten so, dass C isomorph zu $PSL_2(9) \cong A_6$, $PSL_2(5) \cong A_5$, $PSL_2(7)$ oder A_7 ist. Da C eine zu Σ_5 isomorphe Untergruppe hat, kann C allerdings nicht isomorph zu einer der Gruppen $PSL_2(9) \cong A_6$, $PSL_2(5) \cong A_5$ oder $PSL_2(7)$ sein.

Wir nehmen nun an, dass C isomorph zu A_7 ist. Weil $C = F^*(H)$ ist, folgt schon $H \cong \Sigma_7$. Sei $R \in \text{Syl}_3(C_K(z))$, dann ist $\widetilde{R} := RQ/Q \in \text{Syl}_3(C)$. Wir setzen nun $V := Q/\langle z \rangle$, dann ist V ein orthogonaler Raum der Dimension 8 vom $+$ -Typ, auf dem $H \leq \text{Out}(Q) \cong O_8^+(2)$ operiert.

6. Der Fall $K/Z(K) \cong PSU_4(3)$

In $\text{Aut}(V)$ gibt es eine Untergruppe $A \cong O_6^+(2) \cong A_8$, für die eine Zerlegung $V = W_1 \perp W_2$ so existiert, dass $\dim(W_1) = 6, \dim(W_2) = 2, W_2 = C_V(A)$ und $W_1 = [V, A]$ gilt, dabei sind W_1 und W_2 jeweils Räume vom $+$ -Typ und es ist $A = C_{\text{Aut}(V)}(W_2)$. Weil A ein Element der Ordnung 7 enthält und alle Elemente der Ordnung 7 in $O_6^+(2)$ konjugiert sind, können wir annehmen, dass ein Element g der Ordnung 7 aus C in A liegt. Dann ist g fixpunktfrei auf W_1 und es gilt $C_V(g) = W_2$ und $[V, g] = W_1$. Es gibt nun ein Element $d \in C \cong A_7$ der Ordnung 3, welches $\langle g \rangle$ normalisiert. Dabei können wir ohne Einschränkung $d \in \tilde{R}$ annehmen. Nun sind sowohl $[V, g] = W_1$ als auch $C_V(g) = W_2$ unter d invariant und W_2 ist ein orthogonaler Raum der Dimension 2 vom $+$ -Typ, der keinen Automorphismus der Ordnung 3 hat. Also folgt $[W_2, d] = 1$ und damit ist auch $d \in C_{\text{Aut}(V)}(W_2) = A \cong A_8$. Ein Element der Ordnung 3 in A_8 , das auf einer Untergruppe der Ordnung 7 operiert, ist ein Produkt von zwei 3-Zyklen und hat damit auf dem natürlichen $O_6^+(2)$ -Modul W_1 einen Kommutator der Ordnung 2^4 , insgesamt ist also $|[V, d]| = |[W_2, d]| = 2^4$. Seien jetzt $a, b \in R$ mit $\langle a, b \rangle = R$ wie in 6.3. Dann liefert uns 6.3, dass d nicht in $\langle aQ \rangle \cup \langle bQ \rangle$ liegt und daher $W_2 \leq C_V(d) = C_V(aQ) \cap C_V(bQ)$ ist. Insbesondere ist also $W_2 \leq C_V(\langle g, aQ, bQ \rangle)$. Dabei gilt $\langle g, aQ, bQ \rangle = C \cong A_7$, demnach operiert C trivial auf W_2 . Weil aber $U \leq C$ ist, erhalten wir damit einen Widerspruch zu 6.9, also muss insgesamt $\epsilon = +$ sein. \square

6.2 Weitere Reduktion auf den „kleinstmöglichen“ Fall

Wir wissen nun, dass $(2n, \epsilon) = (6, +)$ ist. Nach 1.11 ist daher $|Y_M : [Y_M, O^2(M)]| \leq 2$, außerdem ist M/Y_M isomorph zu $O_6^+(2) \cong \Sigma_8$ oder $\Omega_6^+(2) \cong A_8$. Wir werden nun die verschiedenen Möglichkeiten für M durch mehrmalige Anwendung des Thompson-Transfer-Lemmas auf den „kleinstmöglichen“ Fall $M/Y_M \cong A_8$ und $|Y_M| = 2^6$ reduzieren. Dabei wird unser Vorgehen in groben Zügen dem aus unseren Untersuchungen im vorangegangenen Kapitel ähneln. So werden wir beispielsweise zunächst $C_G(K)$ bestimmen. Dies wird hier allerdings erheblich durch die Tatsache erleichtert, dass wir wegen $O_2(M) = Y_M$ Kontrolle über die Ordnung und Struktur von $S \in \text{Syl}_2(G)$ haben. Außerdem stehen uns etwa in 6.2(b) deutlich stärkere Informationen über die große Untergruppe Q zur Verfügung.

Wir werden von nun an häufig Gebrauch von der Tatsache machen, dass in der zu untersuchenden Situation die Operation von M/Y_M auf Y_M besonders einfach zu verstehen ist: Wie in 1.11 beschrieben sei W eine elementarabelsche 2-Gruppe der Ordnung 2^8 , die von v_1, \dots, v_8 erzeugt wird, und es sei $\overline{W} = W/\langle v_1 v_2 \dots v_8 \rangle$. Dann ist entweder $Y_M \cong \overline{W} = \langle \overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_7} \rangle$ oder $Y_M \cong \langle \overline{v_1 v_2}, \overline{v_1 v_3}, \dots, \overline{v_1 v_7} \rangle$, dabei operiert $M/Y_M \cong A_8$ bzw. Σ_8 auf Y_M durch Permutation der Indices. Weiter ist $z = \overline{v_1 v_2 v_3 v_4} = \overline{v_5 v_6 v_7 v_8}$ und $y = \overline{v_1 \dots v_6} = \overline{v_7 v_8}$ (siehe 1.12). Für $M/Y_M \cong A_8$ gilt $C_M(y)/Y_M \cong \Sigma_6 \leq A_8$, insbesondere ist dann $O_2(C_M(y)) = Y_M$. Im Falle $M/Y_M \cong \Sigma_8$ hingegen ist $C_M(y)/Y_M \cong \Sigma_6 \times 2$, wobei $O_2(C_M(y)/Y_M) = O_2(C_M(y))/Y_M$ Ordnung 2 hat und auf Y_M wie $(7, 8)$ operiert.

6.16 Lemma: Wie in 3.1 sei $S_1 \in \text{Syl}_2(C_M(y))$. Dann gilt:

- (a) S_1 ist eine Sylow-2-Untergruppe von $C_G(y)$.
- (b) $K \cap C_M(y)$ enthält eine Sylow-2-Untergruppe von K .
- (c) S_1 enthält $C_G(K)$, insbesondere liegt $C_G(K)$ also in M .
- (d) Es ist $C_G(y) = KS_1$.
- (e) Wir haben $C_G(K) \leq O_2(C_M(y))$.
- (f) Es ist $Z(K) = \langle y \rangle$, insbesondere ist $C_G(y) = N_G(K)$.
- (g) $K \cap C_M(y) = O^2(C_M(y))$ und $(K \cap C_M(y)) / \langle y \rangle \sim 2^4 : A_6$.
- (h) $K \cap Y_M = y^\perp$
- (i) $(K \cap C_M(y)) Y_M / Y_M = E(C_M(y) / Y_M) \cong A_6$
- (j) $|C_M(y) : (KC_G(K) \cap C_M(y)) Y_M| \geq 2$
- (k) Es ist $Y_M \cap KC_G(K) = y^\perp C_{Y_M}(K)$ und $|Y_M : KC_G(K) \cap Y_M| \geq 2$
- (l) $|C_G(y) / KC_G(K)| \geq 4$

Beweis: Es ist $n = 3$ und daher $|G : C_M(y)|_2 = 2^2$. Laut 4.5 ist $|G : C_G(y)| \geq 2^2$ und wir erhalten schon $S_1 \in \text{Syl}_2(C_G(y))$. Damit folgt außerdem, dass $T := K \cap S_1$ eine Sylow-2-Untergruppe von K ist, die in $C_M(y)$ liegt.

Weiter ist $C_G(y) / KC_G(K)$ isomorph zu einer Untergruppe von $\text{Out}(K/Z(K)) \cong D_8$. Demnach ist $C_G(y) / KC_G(K)$ eine 2-Gruppe und es folgt $C_G(y) = KC_G(K)S_1$. Laut 4.13 (c) ist $C_G(K) = O_2(C_G(y)) \leq S_1$ und wir erhalten sogar $C_G(y) = KS_1$ und $C_G(K) \leq O_2(C_M(y))$. Der Schur-Multiplikator von $PSU_4(3)$ ist $3^2 \times C_4$ und nach 4.4 (a) ist $Z(K)$ eine 2-Gruppe. Wir nehmen nun an, dass $Z(K)$ zyklisch der Ordnung 4 ist. Dann liegt $Z(K)$ nicht in Y_M , weshalb jetzt schon $Z(K)Y_M / Y_M = O_2(C_M(y) / Y_M)$ folgt, was insbesondere auch zu $M / Y_M \cong O_6^+(2)$ und daher zu $C_M(y) / Y_M \cong \Sigma_6 \times 2$ führt. Außerdem erhalten wir dann $Z(K) \not\leq \Phi(S_1)$. Sei $T := K \cap S_1$ wie oben, dann gilt auch $Z(K) \not\leq \Phi(T)$, was allerdings einen Widerspruch zu 1.23 darstellt. Also ist $Z(K) = \langle y \rangle$ und damit auch $C_G(y) = N_G(K)$.

Mit 3.23 ist $O^2(C_M(y)) \leq K \cap C_M(y)$, weiter ist nach 3.11 (a) auch $y^\perp \leq O^2(C_M(y))$ und $O^2(C_M(y))Y_M / Y_M \cong A_6$. Es folgt

$$O^2(C_M(y))Z(K) / Z(K) = O^2(C_M(y)) / \langle y \rangle \sim 2^4 : A_6,$$

da dies eine maximale Untergruppe von $PSU_4(3)$ ist. Insbesondere erhalten wir daraus auch $K \cap C_M(y) = O^2(C_M(y))$, $K \cap Y_M = y^\perp$ und $(K \cap C_M(y))Y_M / Y_M = E(C_M(y) / Y_M) \cong A_6$.

6. Der Fall $K/Z(K) \cong PSU_4(3)$

Zusätzlich folgt jetzt zusammen mit (c) und (e) auch $|C_M(y) : (KC_G(K) \cap C_M(y))Y_M| = |C_M(y) : (K \cap C_M(y))C_G(K)Y_M| \geq 2$.

Seien nun $a \in K$ und $b \in C_G(K)$ mit $ab \in Y_M$. Weil $C_G(K)$ in $C_M(y)$ liegt, folgt auch $a \in K \cap C_M(y)$. Weiter ist $(K \cap C_M(y))Y_M/Y_M \cap C_G(K)Y_M/Y_M = 1$, daher schließen wir $a \in K \cap Y_M = y^\perp$ und $b \in C_{Y_M}(K)$. Deshalb liefert 4.2 schon $|Y_M : KC_G(K) \cap Y_M| \geq 2$ und insgesamt ist damit auch $|C_G(y)/KC_G(K)| \geq 4$. □

6.17 Lemma: Die Gruppe $C_G(y)/KC_G(K)$ ist elementarabelsch der Ordnung 4. Genauer: $C_G(y)/KC_G(K)$ induziert auf $K/Z(K)$ eine Gruppe von äußeren Automorphismen, die in [Atl]-Notation mit $(2^2)_{122}$ bezeichnet wird.

Beweis: Sei $A := C_G(y)/C_G(K) \stackrel{6.16(d)}{=} KS_1/C_G(K)$. Dann hat A laut 6.16 (1) mindestens die Ordnung 4 und ist isomorph zu einer Untergruppe von $\text{Aut}(K/Z(K)) = \text{Aut}(PSU_4(3))$, die $\text{Inn}(PSU_4(3)) \cong PSU_4(3)$ enthält. Dabei normalisiert $S_1/C_G(K) \in \text{Syl}_2(A)$ die Untergruppe

$$B := (K \cap C_M(y))/C_G(K) \stackrel{6.16(g)}{=} O^2(C_M(y))/C_G(K) \stackrel{6.16(f)}{=} O^2(C_M(y))/\langle y \rangle \sim 2^4 : A_6,$$

welche maximal in $PSU_4(3)$ ist. Nun zeigt S. 52 in [Atl], dass $N_{\text{Aut}(PSU_4(3))}(B) \sim 2^5 \cdot \Sigma_6$ und A isomorph zu einer Untergruppe von $PSU_4(3).(2^2)_{122}$ ist. Wegen $|C_G(y)/KC_G(K)| \geq 4$ folgt nun die Behauptung. □

Damit sind wir jetzt in der Lage, $C_G(K)$ zu bestimmen:

6.18 Lemma: Es gilt:

- (a) Ist $M \sim 2^6.A_8$, so ist $C_G(K) = \langle y \rangle$.
- (b) Ist $M \sim 2^7.A_8$, so ist $C_G(K) = \langle \bar{v}_7, \bar{v}_8 \rangle$.
- (c) Ist $M \sim 2^6.\Sigma_8$, so hat $C_G(K)$ Ordnung 4. Außerdem ist $C_G(K) \cap Y_M = \langle y \rangle$ und $C_G(K)Y_M = O_2(C_M(y))$.
- (d) Ist $M \sim 2^7.\Sigma_8$, so ist $C_G(K) \cong D_8$. Außerdem ist $C_G(K) \cap Y_M = \langle \bar{v}_7, \bar{v}_8 \rangle$ und $C_G(K)Y_M = O_2(C_M(y))$.

Beweis: Es ist $|C_M(y)|_2 = |M|_2/4 = |G|_2/4$ und nach 6.16 (a) enthält $C_M(y)$ eine Sylow-2-Untergruppe von $C_G(y)$. Zusammen mit 6.17 liefert uns das

$$|M|_2/4 = 2^2 \cdot |KC_G(K)|_2 = 2^2 \cdot |K/Z(K)|_2 \cdot |C_G(K)| = 2^9 \cdot |C_G(K)|.$$

Außerdem liegt $C_G(K)$ nach 6.16 (c) in $C_M(y)$.

Im Fall $M \sim 2^6.A_8$ ist daher $|C_G(K)| = 2$ und wegen $y \in Z(K)$ ist folglich $C_G(K) = \langle y \rangle$.

6.2. Weitere Reduktion auf den „kleinstmöglichen“ Fall

Für $M \sim 2^7.A_8$ folgt $|C_G(K)| = 4$, dabei ist $O_2(C_M(y)) = Y_M$ und mit 4.3 (a) erhalten wir $C_G(K) \leq Y_M$. Daher ist mit 4.2 schon $C_G(K) = \langle \bar{v}_7, \bar{v}_8 \rangle$.

Im Fall $M \sim 2^6.\Sigma_8$ ist ebenfalls $|C_G(K)| = 4$. Da dann mit 4.2 aber $C_{Y_M}(K) = \langle y \rangle$ ist, muss $C_G(K)Y_M/Y_M \neq 1$ sein und es folgt mit 4.3 (a) die Behauptung.

Im letzten verbleibenden Fall $M \sim 2^7.\Sigma_8$ ist dann $|C_G(K)| = 8$ und weil $C_G(K)Y_M/Y_M$ mit 4.3 (a) höchstens Ordnung 2 hat, muss $|C_G(K) \cap Y_M| \geq 4$ sein. Das liefert mit 4.2 schon $C_G(K) \cap Y_M = \langle \bar{v}_7, \bar{v}_8 \rangle$ und $C_G(K)Y_M/Y_M = O_2(C_M(y)/Y_M)$. Nun gilt $\bar{v}_7^\sigma = \bar{v}_8$ für jedes Element $\sigma \in O_2(C_M(y)) \setminus Y_M$, also ist $C_G(K) \cong D_8$. \square

Wir werden später die Untergruppe $N_G(Q)$ genauer untersuchen. Wir fassen hier bereits einige Resultate über $N_G(Q)$ und $N_M(Q)$ zusammen:

6.19 Lemma: *Seien $d_1, d_2 \in M$ so, dass d_1 wie (1, 2, 3) und d_2 wie (5, 6, 7) auf Y_M operieren und $\langle d_1, d_2 \rangle$ eine Sylow-3-Untergruppe von $C_M(z)$ ist. Sei weiter $\{i, j\} = \{1, 2\}$, dann gilt $[Q, d_i] \cong Q_8 * Q_8 \cong D_8 * D_8$, $[Q, d_i] = C_Q(d_j)$ und $Q = [Q, d_i] * [Q, d_j]$. Insbesondere ist für $a, b \in \{1, 2\}$ stets $C_Q(d_1^a d_2^b) = \langle z \rangle$ und $[Q, d_1^a d_2^b] = Q$.*

Beweis: Es ist $Q \cap Y_M \stackrel{6.2(d)}{=} z^\perp = \langle \bar{v}_1 \bar{v}_2, \bar{v}_1 \bar{v}_3, \bar{v}_1 \bar{v}_4, \bar{v}_5 \bar{v}_6, \bar{v}_5 \bar{v}_7 \rangle$ und $Q/z^\perp \cong QY_M/Y_M \stackrel{6.2(e)}{=} O_2(C_M(z))/Y_M = \langle (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (5, 6)(7, 8), (5, 7)(6, 8) \rangle$. Damit erhalten wir schon $[z^\perp, d_1] = \langle \bar{v}_1 \bar{v}_2, \bar{v}_1 \bar{v}_3 \rangle$ und $[QY_M/Y_M, d_1] = \langle (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4) \rangle$. Wir setzen nun zur Vereinfachung $R := [Q, d_1]$. Weil Q extraspeziell mit Zentrum $\langle z \rangle$ und R normal in Q ist, folgt $z \in R$. Außerdem ist $Q/\langle z \rangle = R/\langle z \rangle \times C_Q(d_1)/\langle z \rangle$ und insgesamt sind R und $C_Q(d_1)$ von der Ordnung 2^5 . Weiter zentralisiert $[QY_M/Y_M, d_1] \cong [Q/z^\perp, d_1]$ in $[z^\perp, d_1]\langle z \rangle = R \cap z^\perp$ lediglich $\langle z \rangle$, also gilt $Z(R) = \langle z \rangle = Q'$ und es folgt auch $R' = \langle z \rangle$, demnach ist R extraspeziell. Dabei enthält R die elementarabelsche Untergruppe $R \cap z^\perp$ der Ordnung 2^3 , nach III.13.8 in [Hu] ist R deshalb vom $+$ -Typ.

Nun sind im Normalisator der Sylow-3-Untergruppe $\langle d_1, d_2 \rangle QY_M/QY_M$ von $C_M(z)/QY_M$ die Nebenklassen von d_1 und d_2 konjugiert, mit dem Frattini-Argument erhalten wir, dass auch d_1 und d_2 in $C_M(z)$ konjugiert sind. Also gelten alle Aussagen analog für $[Q, d_2]$ bzw. $C_Q(d_2)$. Außerdem ist wegen $[d_1, d_2] = 1$ insbesondere R unter d_2 invariant. Nun werden sowohl $R \cap z^\perp = \langle \bar{v}_1 \bar{v}_2, \bar{v}_1 \bar{v}_3, z \rangle$ als auch $Rz^\perp/z^\perp \cong R/(R \cap z^\perp)$ von d_2 zentralisiert, demnach ist $R \leq C_Q(d_2)$ und aus Ordnungsgründen folgt die Gleichheit. Entsprechend ist dann auch $[Q, d_2] = C_Q(d_1)$. Schließlich gilt $[C_Q(d_1), Q, d_1] = [\langle z \rangle, d_1] = 1 = [d_1, C_Q(d_1), Q]$ und daher erhalten wir $[Q, d_1, C_Q(d_1)] = [R, C_Q(d_1)] = 1$. Somit ist $Q = R * C_Q(d_1) = [Q, d_1] * [Q, d_2]$. Seien nun $a, b \in \{1, 2\}$. Dann ist mit 8.2.7. in [KS] schon

$$\begin{aligned} [Q, d_1^a d_2^b] &= [C_Q(d_1) * C_Q(d_2), d_1^a d_2^b] = [C_Q(d_2), d_1^a] * [C_Q(d_1), d_2^b] \\ &= [Q, d_1, d_1^a] * [Q, d_2, d_2^b] = [Q, d_1] * [Q, d_2] = Q. \end{aligned}$$

Mit $Q/\langle z \rangle = [Q/\langle z \rangle, d_1^a d_2^b] \times C_{Q/\langle z \rangle}(d_1^a d_2^b)$ folgt jetzt $C_Q(d_1^a d_2^b) = \langle z \rangle$. \square

6. Der Fall $K/Z(K) \cong PSU_4(3)$

6.20 Lemma: *Es gilt:*

- (a) *In $N_M(Q)$ gibt es ein Element d der Ordnung 3, das fixpunktfrei auf $Q/\langle z \rangle$ operiert. Insbesondere ist $[Q, d] = Q$.*
- (b) *Sei $R \in Syl_3(C_K(z))$. Dann gibt es kein $g \in N_G(Q)$ mit $R^g \leq M$. Insbesondere hat eine Sylow-3-Untergruppe von $N_G(Q)$ mindestens die Ordnung 3^3 .*

Beweis:

- (a) Das folgt direkt aus 6.19.
- (b) Auf $Q/\langle z \rangle$ hat R den Fixpunkt $y\langle z \rangle$, außerdem ist $|R| = 3^2$. Gäbe es ein $g \in N_G(Q)$ mit $R^g \leq M$, so wäre $R^g \in Syl_3(N_M(Q))$ und damit hätte jedes Element der Ordnung 3 aus $N_M(Q)$ einen Fixpunkt auf $Q/\langle z \rangle$, was aber (a) widerspricht. Insbesondere kann R keine Sylow-3-Untergruppe von $N_G(Q)$ sein und es folgt die Behauptung.

□

Zuerst betrachten wir nun den Fall $|Y_M| = 2^7$. Wir erhalten:

6.21 Lemma: *Es sei $|Y_M| = 2^7$. Dann ist $M/[Y_M, O^2(M)] \cong 2 \times A_8$ oder $2 \times \Sigma_8$. Insbesondere ist $M' = O^2(M) \sim 2^6 \cdot A_8$ mit $M' \cap Y_M = [Y_M, O^2(M)]$. Weiter gilt: Ist $S_0 \in Syl_2(M)$ und $a \in M \setminus M'$, so ist $a \notin \Phi(S_0)$.*

Beweis: Es sei $V := [Y_M, O^2(M)]$ und $v \in Y_M \setminus V$. Mit 6.2(d) und (e) ist $Q \cap Y_M = z^\perp \leq V$ und damit QV/V elementarabelsch der Ordnung 2^4 . Nun liegt $\langle vV \rangle$ im Zentrum von M/V und es ist $M/V \sim 2 \cdot A_8$ oder $2 \cdot \Sigma_8$. Außerdem ist $vV \notin QV/V$, demnach ist $\langle v \rangle QV/V$ elementarabelsch der Ordnung 2^5 . Nach 5.2.10. (d) in [GLS3] hat die quasieinfache Gruppe $2 \cdot A_8$ keine elementarabelsche Untergruppe der Ordnung 2^5 , daher ist $F^*(M/V) \cong 2 \times A_8$. Im Fall $M/Y_M \cong A_8$ sind wir also fertig.

Im anderen Fall ist nun $M/V \sim (2 \times A_8).2$ und laut 6.18 gilt dann $C_G(K) \cong D_8$ und $C_G(K)Y_M = O_2(C_M(y))$. Also gibt es eine Involution $\sigma \in C_G(K)$, die in $O_2(C_M(y)) \setminus Y_M$ liegt. Dann ist σV nicht in $F^*(M/V)$ enthalten, daher existiert in $(M/V) \setminus F^*(M/V)$ eine Involution und es folgt $M/V \cong 2 \times \Sigma_8$.

Insbesondere ist $M' \sim 2^6 \cdot A_8$ und M/M' hat entweder Ordnung 2 oder ist eine Vierergruppe. Ist nun $a \in M \setminus M'$, so hat also M eine Untergruppe vom Index 2, die a nicht enthält. Demnach hat auch jedes $S_0 \in Syl_2(M)$ eine maximale Untergruppe, in der a nicht liegt und es folgt $a \notin \Phi(S_0)$. □

6.22 Lemma: *Es sei $a \in C_G(K) \setminus \langle y \rangle$ eine Involution. Dann gilt:*

- (a) *Es ist $[C_G(y), a] = [C_M(y), a] = \langle y \rangle$, insbesondere ist $|C_G(y) : C_G(\langle y, a \rangle)| = |C_M(y) : C_M(\langle y, a \rangle)| = 2$.*
- (b) *$C_M(y)$ enthält eine Sylow-2-Untergruppe von $C_G(a)$.*
- (c) *Sei $T \in \text{Syl}_2(C_G(a))$. Dann ist $|Z(T)| \geq 8$.*

Beweis: Zunächst stellen wir mit 6.18 fest, dass a entweder in $\{\overline{v_7}, \overline{v_8}\}$ liegt oder $a \in M \setminus Y_M$ eine Involution ist, die auf Y_M wie (7, 8) operiert. In diesem zweiten Fall sind a und ay die einzigen beiden Involutionen in $C_G(K) \setminus Y_M$.

- (a) Laut 6.16 (d) gibt es eine Sylow-2-Untergruppe S_1 von $C_M(y)$ mit $C_G(y) = KS_1$. Damit ist $[C_G(y), a] = [KS_1, a] = [S_1, a]$. Ist $a \in \{\overline{v_7}, \overline{v_8}\}$, folgt sofort $[S_1, a] = \langle y \rangle$. Anderenfalls sind a und ay die einzigen Involutionen in $C_G(K) \setminus Y_M$ und außerdem gilt $S_1 \leq N_G(Y_M) \cap N_G(C_G(K))$. Weil a mit 3.2 (b) nicht in $Z(S_1)$ liegt, erhalten wir ebenfalls $[S_1, a] = \langle y \rangle$. Daher ist insgesamt $[C_G(y), a] = [S_1, a] = \langle y \rangle = [C_M(y), a]$.

- (b) Wir können laut 3.2 (b) ein $S_1 \in \text{Syl}_2(C_M(y)) \subseteq \text{Syl}_2(C_G(y))$ so wählen, dass $z \in Z(S_1)$ ist. Sei $T := K \cap S_1$. Dann ist $T \in \text{Syl}_2(C_K(z))$ und es folgt $Z(T) = \langle y, z \rangle \leq T'$ und $y^\perp \stackrel{6.16(h)}{=} K \cap Y_M \leq K \cap S_1 = T$. Sei nun $\widehat{S} := S_1 \cap C_G(\langle y, a \rangle) = C_{S_1}(a)$, dann ist $|S_1 : \widehat{S}| = 2$ und $\widehat{S} \in \text{Syl}_2(C_M(\langle y, a \rangle)) \subseteq \text{Syl}_2(C_G(\langle y, a \rangle))$ mit (a), außerdem gilt $T \leq \widehat{S}$.

Es ist $|S_1| = |C_M(y)|_2 \stackrel{6.16(a)}{=} |C_G(y)|_2 \leq 2^{12}$ und $|K|_2 = |T| = 2^8$, also ist $|\widehat{S}/T| \leq 8$. Sei $x \in [Y_M, O^2(M)] \setminus y^\perp$, dann ist $[x, \widehat{S}] \leq [x, C_M(y)] = y^\perp \leq T$ und folglich liegt $\langle aT, xT \rangle$ in $Z(\widehat{S}/T)$, weshalb schon $\widehat{S}' \leq T$ ist. Außerdem gilt $Z(\widehat{S}) \cap T \leq Z(T) = \langle y, z \rangle$ und umgekehrt $\langle y, z \rangle \leq Z(S_1) \cap \widehat{S} \leq Z(\widehat{S})$, also erhalten wir insgesamt $Z(\widehat{S}) \cap \widehat{S}' = \langle y, z \rangle$. Wir nehmen nun an, dass \widehat{S} echt in einer Sylow-2-Untergruppe P von $C_G(a)$ enthalten ist. Für $h \in N_P(\widehat{S}) \setminus \widehat{S}$ ist dann $(Z(\widehat{S}) \cap \widehat{S}')^h = \langle y, z \rangle^h = \langle y, z \rangle$. Da h nicht in $C_G(y)$ liegt und y nach 1.18 nicht zu z konjugiert ist, schließen wir $y^h = yz$. Weiter gilt für jedes $g \in Q \setminus C_Q(y)$ ebenfalls $y^{g^{-1}} \stackrel{2.3}{=} yz$ und es folgt $hg \in C_G(y)$. Also ist $a^g = a^{hg} \in \{y, ya\}$ nach (a), das widerspricht aber 4.13 (b) und es folgt die Behauptung.

- (c) Wir wählen S_1 und \widehat{S} wie in (b). Dann ist $\widehat{S} = C_{S_1}(a) \in \text{Syl}_2(C_G(a))$ und dabei gilt $\langle z, y, a \rangle \leq Z(C_{S_1}(a))$, also folgt die Behauptung.

□

Mit den bisher gezeigten Resultaten können wir nun Aussagen über Involutionen in M' treffen, die später nützlich sein werden. Stets ist $[Y_M, O^2(M)] \leq M'$. Ist $Y_M = [Y_M, O^2(M)]$, so ist $M'/[Y_M, O^2(M)] \cong A_8$. Und auch im Fall $|Y_M| = 2^7$ ist $O^2(M) = M'$, $M' \cap Y_M = [Y_M, O^2(M)]$ und $M'/[Y_M, O^2(M)] \cong A_8$ mit 6.21. Dabei gilt:

6. Der Fall $K/Z(K) \cong PSU_4(3)$

6.23 Lemma: (a) Q liegt in M' .

(b) Jede Involution aus M' ist zu einem Element von Q konjugiert.

(c) Sei $t \in Q$ eine Involution und $T \in Syl_2(C_G(t))$. Dann ist $|Z(T)| \leq 4$.

(d) Sei $a \in C_G(K) \setminus \langle y \rangle$ eine Involution. Dann ist a zu keinem Element von M' konjugiert.

Beweis:

(a) Nach 6.20 (a) gibt es ein Element $d \in N_M(Q)$ mit $Q = [Q, d] \leq M'$.

(b) Sei $a \in M'$ eine Involution. Liegt a in $[Y_M, O^2(M)]$, so ist a in M zu einem Element in $z^\perp \stackrel{6.2(d)}{=} Q \cap Y_M$ konjugiert. Anderenfalls ist $a[Y_M, O^2(M)] \in M'/[Y_M, O^2(M)]$ eine Involution und weil $Q[Y_M, O^2(M)]/[Y_M, O^2(M)] = O_2(C_{M'}(z)/[Y_M, O^2(M)])$ Vertreter beider Klassen von Involutionen in $A_8 \cong M'/[Y_M, O^2(M)]$ enthält, ist a dann zu einem Element von $Q[Y_M, O^2(M)]$ konjugiert.

Sei nun $b \in Q[Y_M, O^2(M)] \setminus [Y_M, O^2(M)]$ eine Involution. Wir zeigen, dass b dann schon in Q liegt. Anderenfalls gibt es $t_1 \in Q$ und $t_2 \in [Y_M, O^2(M)] \setminus z^\perp$ mit $b = t_1 t_2$. Dabei ist insbesondere $t_2^2 = 1$ und es folgt

$$1 = b^2 = t_1 t_2 t_1 t_2 = t_1^2 [t_1, t_2].$$

Weil Q extraspeziell mit Zentrum $\langle z \rangle$ ist, gilt daher $[t_1, t_2] = t_1^{-2} \in \langle z \rangle$, was aber 2.2 (f) widerspricht. Folglich ist a zu einem Element von Q konjugiert und wir erhalten (b).

(c) Dies folgt direkt aus 2.10.

(d) Anderenfalls wäre a mit (b) zu einem Element von Q konjugiert. Dann liefert (c) aber einen Widerspruch zu 6.22 (c).

□

6.24 Lemma: Sei $|Y_M| = 2^7$ und $M/Y_M \cong O_6^+(2) \cong \Sigma_8$ und es sei $v := \bar{v}_8$. Mit 6.18 gibt es dann eine Involution $\sigma \in C_G(K) \setminus Y_M \subseteq M \setminus Y_M$, die auf Y_M wie (7, 8) operiert. Sei $\tau := \bar{v}_1 \sigma$ und $\widehat{M} := M' \cdot \langle \tau \rangle$. Weiter sei $t \in \widehat{M} \setminus M'$ eine Involution. Dann ist $|C_M(t)|_2 < |C_M(v)|_2$.

Beweis: Zunächst stellen wir fest, dass $|C_M(v)|_2 = |Y_M| \cdot |\Sigma_7|_2 = 2^{11}$ ist. Wir setzen hier nun $V := [Y_M, O^2(M)] = \widehat{M} \cap Y_M$.

Weil t nicht in M' liegt, entspricht tY_M einer Involution in Σ_8 mit negativem Signum. Operiert t auf Y_M wie eine Involution vom Typ (1, 2)(3, 4)(5, 6), so ist $|C_{Y_M}(t)| = 2^4$ und $C_{M/Y_M}(tY_M) \sim 2^3 : \Sigma_3 \times 2$, also ist insgesamt $|C_M(t)|_2 \leq 2^9 < |C_M(v)|_2$.

Ist tY_M hingegen eine Involution vom Typ (1, 2), so ist t in \widehat{M} in die Nebenklasse τV konjugiert, also können wir $t = w \cdot \bar{v}_1 \cdot \sigma$ mit einem $w \in C_V(\sigma) = y^\perp$ annehmen. Weiter gilt

6.2. Weitere Reduktion auf den „kleinstmöglichen“ Fall

$C_M(t)Y_M/Y_M \leq C_{M/Y_M}(tY_M) = C_M(y)/Y_M$, also ist $C_M(t) = C_{C_M(y)}(t)$. Für $g \in C_M(t)$ ist daher nach 6.22 (a) schon $[\sigma, g] \in \langle y \rangle$ und es folgt wegen $t = t^g = (w\bar{v}_1)^g \cdot \sigma^g$, dass entweder $C_M(t) = C_M(\langle \sigma, w\bar{v}_1 \rangle)$ ist oder $C_M(\langle \sigma, w\bar{v}_1 \rangle)$ in $C_M(t)$ Index 2 hat. Ist $w = 1$ oder $w\bar{v}_1$ in M konjugiert zu $\overline{v_1 v_2 \dots v_5}$, so ist $w\bar{v}_1$ in $C_M(y)$ nicht zu $w\bar{v}_1 y$ konjugiert und wir erhalten $C_M(t)Y_M/Y_M = C_M(\langle \sigma, w\bar{v}_1 \rangle)Y_M/Y_M \lesssim \Sigma_5 \times 2$. Wegen $|C_{Y_M}(t)| = |C_{Y_M}(\sigma)| = 2^6$ ist also $|C_M(t)|_2 \leq 2^{10}$. Anderenfalls ist $w\bar{v}_1$ in $C_M(y)$ konjugiert zu $\overline{v_1 v_2 v_3}$ und es ist $C_{C_M(y)}(w\bar{v}_1)Y_M/Y_M \cong \Sigma_3 \times \Sigma_3 \times 2$, also folgt zusammen mit $|C_{Y_M}(t)| = 2^6$ wieder $|C_M(t)| \leq 2^{10}$ und damit die Behauptung. \square

6.25 Lemma: *Es sei $|Y_M| = 2^7$. Dann hat G eine Untergruppe G_0 vom Index 2 mit folgenden Eigenschaften: Sei $M_0 := M \cap G_0$. Dann ist $Y_M \cap M_0 = [Y_M, O^2(M)] = Y_{M_0} = [Y_{M_0}, O^2(M_0)]$. Außerdem ist $M_0/Y_{M_0} \cong M/Y_M$ und es gilt $F^*(G) \leq G_0$.*

Beweis: Wir setzen wieder $v := \bar{v}_8 \in C_G(K)$. Dann ist v mit 6.23 (d) nicht zu einem Element von M' konjugiert. Ist nun $M/Y_M \cong A_8$, so gilt $|M : M'| = 2$ und mit 15.15. in [GLS2] hat G eine Untergruppe G_0 vom Index 2 mit $v \notin G_0$.

Ist hingegen $M/Y_M \cong \Sigma_8$, so gibt es mit 6.24 eine Untergruppe $\widehat{M} \leq M$ mit $|M : \widehat{M}| = 2$, die kein Konjugiertes t von v mit $|C_M(t)|_2 \geq |C_M(v)|_2$ enthält. Nun liefert uns [GLS2, 15.15.] ebenfalls eine Untergruppe G_0 von G mit $|G : G_0| = 2$, die v nicht enthält.

Für $M_0 := M \cap G_0$ gilt nun $|M : M_0| = 2$. Weiter ist wegen $v \notin G_0$ auch $|Y_M : Y_M \cap G_0| = 2$ und weil $Y_M \cap G_0$ von M normalisiert wird, erhalten wir $Y_M \cap G_0 = [Y_M, O^2(M)]$. Damit ist dann auch $M_0/(Y_M \cap G_0) \cong M/Y_M$ und daher gilt $Y_M \cap G_0 = Y_{M_0}$. Weil $O_2(G)$ nach 1.16 trivial ist, folgt auch $F^*(G) \leq G_0$. \square

Da die Untergruppen G_0 und M_0 aus obigem Lemma ebenfalls die Generalvoraussetzung dieser Arbeit erfüllen, können wir von G zu G_0 übergehen und erhalten:

Wir können ohne Einschränkung davon ausgehen, dass
 $Y_M = [Y_M, O^2(M)]$ ist, also $|Y_M| = 2^6$ gilt.

Wir wollen die Situation insgesamt auf den „kleinstmöglichen“ Fall $M \sim 2^6.A_8$ reduzieren. Dazu werden wir nun noch den Fall $M \sim 2^6.\Sigma_8$ betrachten und erneut durch die Anwendung des Thompson-Transfer-Lemmas eine Untergruppe vom Index 2 in G mit den gewünschten Eigenschaften finden.

Sei also von nun an $M \sim 2^6.\Sigma_8$. In diesem Fall hat $M' \sim 2^6.A_8$ Index 2 in M , außerdem liefert uns 6.18, dass $C_G(K)$ Ordnung 4 hat. Der Fall, dass $C_G(K)$ elementarabelsch ist, lässt dich sehr leicht behandeln, es gilt nämlich:

6. Der Fall $K/Z(K) \cong PSU_4(3)$

6.26 Lemma: Sei $M/Y_M \cong \Sigma_8$ und $Y_M = [Y_M, O^2(M)]$. Ist $C_G(K)$ elemtarabelsch und $\sigma \in C_G(K) \setminus \langle y \rangle$, so gibt es eine Untergruppe G_0 vom Index 2 in G , die σ nicht enthält. Insbesondere ist dann für $M_0 := M \cap G_0$ schon $Y_{M_0} = Y_M$ und $M_0/Y_M \cong A_8$. Außerdem ist $F^*(G) \leq G_0$.

Beweis: M' hat Index 2 in M und nach 6.23 ist σ zu keinem Element von M' konjugiert. Nun liefert 15.15. aus [GLS2] wieder eine Untergruppe G_0 vom Index 2 in G , die σ nicht enthält und daher die gewünschten Eigenschaften hat. Dabei ist erneut wegen $O_2(G) = 1$ auch $F^*(G) \leq G_0$. \square

Wir betrachten also nun noch den Fall, dass $C_G(K) = \langle \sigma \rangle$ zyklisch von der Ordnung 4 ist. Insbesondere ist dann $\sigma^2 = y$ und daher gilt $C_G(\sigma) \leq C_G(y)$. Dabei operiert σ auf Y_M wie die Transposition $(7, 8)$. Insgesamt erhalten wir:

6.27 Lemma: Es sei $Y_M = [Y_M, O^2(M)]$, $M/Y_M \cong \Sigma_8$ und $C_G(K) = \langle \sigma \rangle$ zyklisch. Weiter sei $a := \overline{v_6 v_7} \sigma$. Dann gilt:

- (a) Das Element a ist eine Involution in $M \setminus M'$.
- (b) Es ist $C_{C_G(y)}(a) = (C_{C_G(y)}(\overline{v_6 v_7}) \cap C_G(\sigma)) \times \langle a \rangle$.
- (c) $C_{C_M(y)}(a) \sim (y^\perp \cdot \Sigma_5) \times \langle a \rangle$.
- (d) $C_{C_M(y) \cap K}(a) = C_{C_M(y) \cap K}(\overline{v_6 v_7}) \sim y^\perp \cdot A_5$
- (e) $C_K(a) = C_K(\overline{v_6 v_7}) \sim \langle y \rangle \cdot SU_4(2)$.
- (f) Es ist a nicht zu z konjugiert.
- (g) Es gibt ein $T \in Syl_2(C_{C_G(y)}(a))$ mit $Z(T) = \langle y, z, a \rangle$ und $Z(T) \cap T' = \langle z \rangle$ oder $\langle y, z \rangle$.
- (h) Die Involution a ist zu keinem Element von M' konjugiert.

Beweis:

- (a) Es ist $a^2 = \overline{v_6 v_7} (\overline{v_6 v_7} \sigma^{-1}) \sigma^2 = \overline{v_7 v_8} y = y^2 = 1$, außerdem liegt $a Y_M = \sigma Y_M$ nicht in $M'/Y_M \cong A_8$, also ist $a \notin M'$.
- (b) Es ist $\langle \sigma \rangle = C_G(K) \trianglelefteq C_G(y)$ und $\sigma \notin Z(C_G(y))$ nach 3.3, also ist $[\sigma, C_G(y)] = \langle y \rangle$. Daher ist für $g \in C_G(y)$ genau dann $[a, g] = 1$, wenn $[\overline{v_6 v_7}, g] = 1 = [\sigma, g]$ oder $[\overline{v_6 v_7}, g] = y = [\sigma, g]$ gilt. Folglich hat $C_{C_G(y)}(\overline{v_6 v_7}) \cap C_G(\sigma)$ höchstens Index 2 in $C_{C_G(y)}(a)$. Weil $[\sigma, a] = y$ ist, folgt die Behauptung.

6.2. Weitere Reduktion auf den „kleinstmöglichen“ Fall

- (c) Laut (b) ist $C_{C_M(y)}(a) = (C_{C_M(y)}(\overline{v_6 v_7}) \cap C_M(\sigma)) \times \langle a \rangle$. Nun gilt $[\sigma, C_G(y)] = \langle y \rangle$ und daher folgt $|C_G(y) : C_{C_G(y)}(\sigma)| = |C_M(y) : C_{C_M(y)}(\sigma)| = 2$. Dabei ist $C_{Y_M}(\sigma) = y^\perp$ und damit auch $C_{C_M(y)}(\sigma)Y_M = C_M(y)$. Weiter ist $C_{C_M(y)}(\overline{v_6 v_7})/Y_M \cong \Sigma_5$, also gilt insgesamt $C_{C_M(y)}(\overline{v_6 v_7}) \cap C_M(\sigma) \sim y^\perp \cdot \Sigma_5$ und es folgt die Behauptung.
- (d) Wir setzen $U := C_M(y) \cap K$. Mit 6.16 (g) und 3.11 (a) ist dann $U \sim y^\perp \cdot A_6$, wobei $U/y^\perp \cong UY_M/Y_M \cong A_6 = A_{\{1, \dots, 6\}}$ auf natürliche Weise auf $\{1, \dots, 6\}$ operiert. Daher ist $C_U(\overline{v_6 v_7}) \sim y^\perp \cdot A_5$. Wegen $\sigma \in C_G(K) \leq C_G(U)$ ist auch $C_U(\overline{v_6 v_7}) = C_U(a)$.
- (e) Wieder ist wegen $\sigma \in C_G(K)$ bereits $C_K(a) = C_K(\overline{v_6 v_7})$. Außerdem liegt $\overline{v_6 v_7}$ wegen $KC_G(K) \cap Y_M \stackrel{6.16(k)}{=} y^\perp C_{Y_M}(K) \stackrel{4.2}{=} y^\perp$, nicht in $KC_G(K)$ und induziert folglich keinen inneren Automorphismus auf K . Mit 6.17 ist dann $K\langle \overline{v_6 v_7} \rangle / \langle y \rangle$ (in Atlas-Notation) isomorph zu $PSU_4(3).2_1$ oder $PSU_4(3).2_2$. Dabei ist laut (d) die Ordnung von $C_{K/\langle y \rangle}(\overline{v_6 v_7})$ durch $2^4 \cdot |A_5|$ teilbar. Indem wir die entsprechenden Charaktertafeln in [Atl] verwenden, stellen wir fest, dass lediglich die Involutionen vom Typ $2D$ einen Zentralisator passender Ordnung haben und dieser hat die Struktur $SU_4(2)$. Weil $[y, \overline{v_6 v_7}] = 1$ ist und $SU_4(2)$ keine Untergruppe vom Index 2 hat, ist also $C_K(\overline{v_6 v_7}) \cong 2 \cdot SU_4(2)$.
- (f) Wir nehmen an, dass es ein $g \in G$ mit $z^g = a$ gibt. Dann ist Q^g normal in $C_G(a)$ und hat Ordnung 2^9 . Weil $C_G(a)$ laut (e) aber auch die einfache Gruppe $SU_4(2)$ involviert, führt dies zu $|C_G(a)|_2 \geq 2^9 \cdot 2^6 = 2^{15}$, was aber $|G|_2 = |M|_2 = |Y_M| \cdot |\Sigma_8|_2 = 2^{13}$ widerspricht.
- (g) Nach (c) ist $C_{C_M(y)}(a) \sim (y^\perp \cdot \Sigma_5) \times \langle a \rangle$. Sei \widehat{T} eine Sylow-2-Untergruppe von $y^\perp \cdot \Sigma_5$, für die \widehat{T}/y^\perp wie $\langle (1, 2), (1, 3)(2, 4) \rangle$ auf Y_M operiert. Dann ist $Z(\widehat{T}) = \langle \overline{v_1 v_2 v_3 v_4}, \overline{v_5 v_6} \rangle = \langle y, z \rangle$ und $T := \widehat{T} \times \langle a \rangle$ ist eine Sylow-2-Untergruppe von $C_{C_M(y)}(a)$ mit $|T| = 2^9$. Wir nehmen nun an, dass $|C_{C_G(y)}(a)|_2 \geq 2^{10}$ ist. In diesem Fall liefert uns (b) schon $|C_{C_G(y)}(\overline{v_6 v_7}) \cap C_G(\sigma)|_2 \geq 2^9$. Weiter ist $|C_G(y)| = 2^{11}$ und $|C_G(y) : C_G(\sigma)| = 2$, also folgt $|C_G(\sigma)|_2 = 2^{10}$. Dabei ist $KC_G(K) = K\langle \sigma \rangle \trianglelefteq C_G(\sigma)$ mit $|K\langle \sigma \rangle|_2 = 2^9$. Daher wäre insgesamt $|C_{K\langle \sigma \rangle}(\overline{v_6 v_7})| \geq 2^8$. Da aber $\overline{v_6 v_7}$ nach (e) in $K\langle \sigma \rangle / \langle \sigma \rangle \cong K / \langle y \rangle$ nur eine Untergruppe mit einem 2-Anteil von 2^6 zentralisiert und σ nicht in $C_G(\overline{v_6 v_7})$ liegt, ist dies ein Widerspruch.
Folglich ist $T \in \text{Syl}_2(C_{C_G(y)}(a))$. Nun ist $T' \leq \widehat{T}$ und damit $T' \cap Z(T) \leq Z(\widehat{T}) = \langle y, z \rangle$. Weil $z = [\overline{v_1 v_2}, (1, 3)(2, 4)]$ in T' liegt, folgt die Behauptung.
- (h) Wir nehmen an, dass a zu einem Element von M' konjugiert ist. Es sei $R \in \text{Syl}_2(C_G(a))$ und $\widehat{S} \in \text{Syl}_2(G)$ mit $R \leq \widehat{S}$. Weil a nach (f) nicht zu z konjugiert ist, folgt mit 3.2 (a), dass a nicht in $Z(\widehat{S})$ liegt und daher $\langle a \rangle < \langle a, Z(\widehat{S}) \rangle \leq Z(R)$ ist, insbesondere gilt $|Z(R)| \geq 4$. Weiter liefert uns 6.23, dass a zu einem Element von Q konjugiert ist und sogar $|Z(R)| = 4$ gilt.
Wir können nun annehmen, dass T aus (g) in R liegt. Dann ist wegen $\langle y, a \rangle \leq T$ schon $Z(R) \leq C_{C_G(y)}(a)$ und damit $Z(R) \leq Z(T) = \langle y, z, a \rangle$. Weil $Z(R) \neq Z(T)$ ist, gilt insbesondere $R > T$ und wir können ein $h \in N_R(T) \setminus T$ wählen. Dann ist

6. Der Fall $K/Z(K) \cong PSU_4(3)$

$h \notin C_G(y)$ und h normalisiert $Z(T) \cap T'$. Ist $Z(T) \cap T' = \langle z \rangle$, so ist $[z, h] = 1$, im Falle $Z(T) \cap T' = \langle y, z \rangle$ folgt mit 1.18 ebenfalls $[z, h] = 1$. Insgesamt ist daher $Z(T\langle h \rangle) = \langle z, a \rangle$ und aus $Z(R) \leq Z(T)$ und $|Z(R)| = 4$ schließen wir $Z(R) = \langle z, a \rangle$. Sei nun $g \in G$ mit $b := a^g \in Q$. Wir können $C_Q(b) \leq R^g$ annehmen, also ist $Z(R^g) \leq C_G(C_Q(b)) \leq Z(C_Q(b)) = \langle z, b \rangle$ mit 2.10 und 1.19 (a). Folglich ist $\langle z, a \rangle^g = \langle z, b \rangle$ und es gilt $z^g = z$ oder $z^g = zb$. Im Fall $z^g = z$ ist aber $g \in C_G(z) \stackrel{6.2(c)}{=} N_G(Q)$ und wir erhalten einen Widerspruch, denn es ist $b \in Q$, wohingegen a nicht in M' und damit nach 6.23 (a) auch nicht in Q liegt. Daher ist $z^g = zb$. Allerdings gibt es ein $q \in Q$ mit $(zb)^q = b$ und wir erhalten, dass z zu b und damit auch zu a konjugiert ist, ein Widerspruch zu (f).

□

6.28 Lemma: *Es sei $Y_M = [Y_M, O^2(M)]$ und $M/Y_M \cong \Sigma_8$. Dann hat G eine Untergruppe G_0 vom Index 2 mit folgenden Eigenschaften: Sei $M_0 := M \cap G_0$. Dann ist $Y_{M_0} = Y_M \leq M_0$. Außerdem ist $M_0/Y_{M_0} \cong A_8$ und es gilt $F^*(G) \leq G_0$.*

Beweis: Mit 6.18 hat $C_G(K)$ Ordnung 4. Ist $C_G(K)$ elementarabelsch, so liefert uns 6.26 die gewünschte Untergruppe.

Anderenfalls ist $C_G(K)$ zyklisch und mit 6.27 (a) und (h) gibt es eine Involution a in M , die nicht zu einem Element von M' konjugiert ist. Weil M' in M Index 2 hat, liefert uns dann 15.15. aus [GLS2] eine Untergruppe G_0 vom Index 2 in G , die a nicht enthält. Dann muss $Y_M \leq G_0$ und $(M \cap G_0)/Y_M \cong A_8$ sein. Außerdem ist wegen $O_2(G) = 1$ auch $F^*(G) \leq G_0$.

□

Zusammenfassend halten wir fest:

6.29 Satz: *Es gibt einen Subnormalteiler G_0 von G mit Index höchstens 4, für den gilt: Setze $M_0 := M \cap G_0$. Dann ist $Y_M \cap G_0 = Y_{M_0}$, $M_0/Y_{M_0} \cong A_8$ und $Y_{M_0} = [Y_{M_0}, O^2(M_0)]$ hat Ordnung 2^6 . Außerdem ist $F^*(G_0) = F^*(G)$. Die Gruppen G_0 und M_0 erfüllen dabei die Generalvoraussetzung dieser Arbeit, wir können also von nun an ohne Einschränkung davon ausgehen, dass $Y_M = [Y_M, O^2(M)]$ und $M/Y_M \cong A_8$ gilt.*

Beweis: 6.25 und 6.28 liefern den Subnormalteiler G_0 , der alle geforderten Eigenschaften hat.

□

6.3 Bestimmung von $F^*(G)$

In diesem letzten Abschnitt bestimmen wir schließlich die einfache Gruppe $F^*(G)$. Wie wir in 6.29 gezeigt haben, können wir dabei davon ausgehen, dass $M \sim 2^6.A_8$ ist und mit 6.18 gilt dann $C_G(K) = \langle y \rangle$, insbesondere ist K eine Standarduntergruppe von G . Leider stehen, anders als im vorangegangenen Kapitel, keine geeigneten Resultate zu Verfügung, die eine Gruppe G anhand einer Standarduntergruppe vom Typ $2.PSU_4(3)$ identifizieren. Zwar beschäftigt sich etwa [As4] mit einer solchen Situation, stellt dabei allerdings relativ starke Voraussetzungen an die Gruppe G . So soll G beispielsweise die sogenannte B -conjecture erfüllen, deren Verwendung wir hier vermeiden wollen.

Stattdessen verfolgen wir eine relativ elementare Herangehensweise. Wir beginnen mit einer eingehenden Untersuchung der Gruppe $H = N_G(Q)/Q$, über die wir letztendlich sehr genaue Informationen erhalten werden. Davon ausgehend finden wir in G eine weitere Untergruppe der Form $2^6.A_8$, mit deren Hilfe wir dann die Ergebnisse aus [MSW] anwenden können, was uns abschließend auch zum Ziel führen wird. Zunächst erhalten wir:

6.30 Lemma: Sei $w \in Y_M \setminus Q \stackrel{6.2(d)}{=} Y_M \setminus z^\perp$. Dann gilt:

- (a) Die Involution $\langle wQ \rangle$ liegt im Zentrum von $X = N_M(Q)/Q$.
- (b) Es ist $S/Q \in Syl_2(X) \subseteq Syl_2(H)$ und S/Q ist elementarabelsch.
- (c) Die Gruppe X ist isomorph zu $2 \times \Sigma_3 \times \Sigma_3$.
- (d) Es gilt $C_H(wQ) = X$.

Beweis:

- (a) Es ist $Y_M Q/Q$ normal in $N_M(Q)/Q$ und wegen $Q \cap Y_M \stackrel{6.2(d)}{=} z^\perp$ gilt $Y_M Q = \langle w \rangle Q$, also hat $Y_M Q/Q = \langle wQ \rangle$ Ordnung 2 und liegt daher im Zentrum von X .
- (b) Es gilt $N_M(Q) = C_M(z)$ und weil z in $Z(S)$ liegt, ist dabei $S \leq N_M(Q)$ und daher auch $S/Q \in Syl_2(H)$.
Laut 2.2 (b) ist $QY_M = O_2(C_M(z))$ und mit 1.7 (b) ist deshalb $C_M(z)/QY_M$ isomorph zu $\Omega_4^+(2) \cong \Sigma_3 \times \Sigma_3$, also folgt $X \sim \langle wQ \rangle.(\Sigma_3 \times \Sigma_3)$. Insbesondere erhalten wir dann $\bar{U}(S/Q) \leq \langle wQ \rangle$ und 6.4 liefert nun $\bar{U}(S/Q) = 1$. Also ist S/Q elementarabelsch.
- (c) Weil $\langle wQ \rangle$ im Zentrum von X liegt und mit (b) ein Komplement in S/Q hat, gibt es mit dem Satz von Gaschütz auch ein Komplement von $\langle wQ \rangle$ in X . Nun ist $X/\langle wQ \rangle$ isomorph zu $\Sigma_3 \times \Sigma_3$, also folgt die Behauptung.

6. Der Fall $K/Z(K) \cong PSU_4(3)$

- (d) Wegen $\langle wQ \rangle \leq Z(X)$ ist zunächst $X \leq C_H(wQ)$. Sei umgekehrt $g \in N_G(Q)$ so, dass $x := [g, w] \in Q$ ist. Dann gilt $g \in N_G(Q\langle w \rangle)$ und $1 = w^2 = (w^g)^2 = (xw)^2 = x^2[x, w]$. Weil Q extraspeziell mit Zentrum $\langle z \rangle$ ist, muss dann $x^2 = [x, w] \in \langle z \rangle$ sein. Nun liefert uns 2.2 (f), dass x in z^\perp liegt und außerdem $C_{Q\langle w \rangle}(w) = (Q \cap Y_M)\langle w \rangle = z^\perp\langle w \rangle = Y_M$ ist, genauso gilt auch $C_{Q\langle w \rangle}(xw) = Y_M$. Zusammen erhalten wir so

$$Y_M^g = C_{Q\langle w \rangle}(w)^g = C_{Q\langle w \rangle}(w^g) = C_{Q\langle w \rangle}(xw) = Y_M.$$

Also ist $g \in N_G(Y_M) \stackrel{1.17}{=} M$ und es folgt die Behauptung. □

6.31 Lemma: Sei R eine extraspezielle 2-Gruppe und $R = U_1 * U_2$ mit $U_1 \cong U_2$. Sei weiter $\alpha \in \text{Aut}(R)$ mit $\alpha^2 \in \text{Inn}(R)$. Dann gilt:

- (a) Ist $U_1^\alpha = U_2$, so ist $[R, \alpha]$ elementarabelsch.
 (b) Ist $U_1 \cong Q_8 \cong U_2$, so enthält R genau zwei zu Q_8 isomorphe Untergruppen.
 (c) Ist $U_1 \cong Q_8 \cong U_2$ und $\alpha \notin \text{Inn}(R)$, so ist $[R, \alpha]$ genau dann elementarabelsch, wenn $U_1^\alpha = U_2$ ist.

Beweis:

- (a) Zunächst ist $[[R, \alpha], \alpha] \leq Z(R)$, weil α auf $R/Z(R)$ trivial oder wie eine Involution wirkt. Daher gilt $[[R, \alpha], \alpha, R] = 1 = [R, [R, \alpha], \alpha]$ und so erhalten wir auch $[R, \alpha, [R, \alpha]] = 1$. Folglich ist $[R, \alpha]$ abelsch. Weiter ist $[R, \alpha] = [U_1, \alpha][U_2, \alpha] = [U_1, \alpha][U_1, \alpha]^\alpha = [U_1, \alpha]$. Sei $u \in U_1$, dann gilt wegen $U_1^\alpha = U_2$ schon $[u, \alpha]^2 = u^{-1}u^\alpha u^{-1}u^\alpha = (u^2)^{-1}(u^2)^\alpha$. Ist $u^2 = 1$, so ist auch $[u, \alpha]^2 = 1$. Anderenfalls ist u^2 das nicht triviale Element aus $Z(R)$ und es folgt $u^2 = (u^2)^\alpha$ und damit ebenfalls $[u, \alpha]^2 = 1$. Also wird $[R, \alpha]$ von Involutionen erzeugt und ist daher elementarabelsch.
 (b) Wir können $R/Z(R)$ als orthogonalen Raum vom +-Typ auffassen, nach 11.5 in [Ta] gibt es dann in $R/Z(R)$ genau 9 nicht triviale singuläre Vektoren. Folglich gibt es genau 6 nicht singuläre Vektoren und damit in R genau 6 zyklische Untergruppen der Ordnung 4. Je 3 davon liegen in U_1 bzw. U_2 . Wegen $[U_1, U_2] = 1$ erzeugen also zwei Elemente der Ordnung 4 in R entweder eine Gruppe $C_4 \times C_2$ oder eine der Gruppen U_1 oder U_2 .
 (c) Mit (a) müssen wir nur noch zeigen, dass $U_1^\alpha = U_2$ gilt, falls $[R, \alpha]$ elementarabelsch ist. Anderenfalls liefert uns (b) schon $U_1^\alpha = U_1$ und $U_2^\alpha = U_2$. Da α nicht inner ist, können wir annehmen, dass α einen nicht inneren Automorphismus auf $U_1 \cong Q_8$ induziert. Dann ist aber $[U_1, \alpha]$ zyklisch der Ordnung 4 und damit $[R, \alpha]$ nicht elementarabelsch. □

6.32 Lemma: Sei $w \in Y_M \setminus z^\perp$, seien $\tau, t \in M$ so, dass τ wie $(1, 2)(5, 6)$ und t wie $(1, 5)(2, 6)(3, 7)(4, 8)$ auf Y_M operieren, und seien d_1, d_2 wie in 6.19. Dann ist $\langle wQ, \tau Q, tQ \rangle$ eine Sylow-2-Untergruppe von H . Weiter gibt es genau ein Element $g \in \{\tau Q, w\tau Q\}$, für das $[Q, g]$ nicht elementarabelsch ist. Für alle anderen $h \in \langle wQ, \tau Q, tQ \rangle \setminus \langle g \rangle$ ist $[Q, h]$ elementarabelsch der Ordnung 2^5 . Also liegt g in $Z^*(H)$. Außerdem ist $\langle d_1Q, d_2Q \rangle \leq O(H)$.

Beweis: Zunächst halten wir fest, dass kein Element von $N_G(Q) \setminus Q$ einen inneren Automorphismus auf Q induziert, weil Q eine große 2-Untergruppe von G und daher $C_G(Q) \leq Q$ ist. Weiterhin gilt für $a, b \in N_G(Q)$ mit $aQ = bQ$ auch $[Q, a] = [Q, b]$, weil Q extraspeziell ist, wir können also für Elemente $aQ \in H$ den Kommutator $[Q, aQ] = [Q, a]$ betrachten.

Nun ist $T := \langle wQ, \tau Q, tQ \rangle$ eine Sylow-2-Untergruppe von X und T ist deshalb nach 6.30 (b) elementarabelsch und auch eine Sylow-2-Untergruppe von H . Außerdem ist $\langle d_1Q, d_2Q \rangle$ nach 6.30 (c) normal in X . Für $i \in \{1, 2\}$ sei $D_i := [Q, d_i]$. Dann liefert uns 6.19, dass $Q = D_1 * D_2$ ist und $D_1 \cong Q_8 * Q_8 \cong D_2$ gilt.

Für $i \in \{1, 2\}$ ist $\langle d_iQ \rangle^{wQ} = \langle d_iQ \rangle = \langle d_iQ \rangle^{\tau Q}$ und $\langle d_iQ \rangle^{tQ} = \langle d_{3-i}Q \rangle$. Folglich vertauscht jedes Element aus $\langle wQ, \tau Q \rangle tQ$ die beiden Gruppen $\langle d_1Q \rangle$ und $\langle d_2Q \rangle$ und damit auch D_1 und D_2 . Laut 6.31 (a) ist dann $[Q, a]$ elementarabelsch für alle $a \in \langle wQ, \tau Q \rangle tQ$ und es folgt auch $|[Q, a]| = 2^5$.

Weiter ist D_1 unter $\langle wQ, \tau Q \rangle$ invariant. Mit 6.31 (b) seien A_1 und A_2 die beiden zu Q_8 isomorphen Untergruppen von D_1 . Laut 2.2 (g) ist $[D_1, w] \leq [Q, w] = z^\perp$ elementarabelsch, also vertauscht wQ nach 6.31 (c) insbesondere A_1 und A_2 . Daher ist $\{\tau, w\tau\} = \{b, c\}$, wobei A_1 und A_2 von b normalisiert und von c vertauscht werden. Angenommen, b induziert einen inneren Automorphismus auf D_1 . Dann gilt dies auch für jedes andere Element aus bQ . Weil $D_1^t = D_2$ und $[t, b] \in Q$ ist, induziert b dann auch einen inneren Automorphismus auf D_2 und damit insgesamt einen inneren Automorphismus auf Q , ein Widerspruch. Daher liefert uns nun 6.31 (c), dass $[D_1, b] \leq [Q, b]$ nicht elementarabelsch ist. Andererseits ist aber $[D_1, c]$ mit 6.31 (a) elementarabelsch und wegen $D_1^t = D_2$ und $[t, c] \in Q$ ist $[D_1, c] \cong [D_2, c]$. Also ist auch $[Q, c] = [D_1, c] * [D_2, c]$ elementarabelsch und hat Ordnung 2^5 .

Insgesamt ist also bQ das einzige Element aus T , für das der Kommutator mit Q nicht elementarabelsch ist. Daher ist bQ in H zu keinem anderen Element von T konjugiert und mit [Gl2, Corollary 1] liegt bQ in $Z^*(H)$. Für $i \in \{1, 2\}$ gilt außerdem $(d_iQ)^{bQ} = d_i^{-1}Q$, also ist $\langle d_1Q, d_2Q \rangle \leq O(H)$. \square

6.33 Bemerkung: Wir können in der Formulierung von 6.32 das Element τ durch $w\tau$ ersetzen und somit o.B.d.A. $\tau Q \in Z^*(N_G(Q)/Q)$ annehmen.

6.34 Lemma: (a) Es ist $F^*(H) = O_3(H)$.

(b) Die Ordnung von $O_3(H)$ beträgt wenigstens 3^3 .

(c) H ist eine $\{2, 3\}$ -Gruppe, insbesondere ist $O_3(H) = O(H)$. Außerdem liegt eine Sylow-3-Untergruppe von X in $O_3(H)$.

6. Der Fall $K/Z(K) \cong PSU_4(3)$

Beweis: Wir stellen zunächst fest, dass H nach 6.6 isomorph zu einer Untergruppe von $O_8^+(2)$ ist, wegen $|O_8^+(2) : \Omega_8^+(2)| = 2$ ist also $O^2(H)$ isomorph zu einer Untergruppe von $\Omega_8^+(2)$. Weiter gilt $|G|_2 = |M|_2 = 2^6 \cdot |A_8|_2 = 2^{12}$ und daher ist $|H|$ ein Teiler von $2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$ mit $|H|_2 = 2^3$. Außerdem ist $O_2(H) = 1$.

- (a) Wir nehmen an, dass H eine Komponente L hat. Weil S/Q mit 6.30 (b) eine Sylow-2-Untergruppe von H ist, ist dann auch $L \cap (S/Q) \leq X$ eine Sylow-2-Untergruppe von L , die nach 1.25 wenigstens Ordnung 4 hat. Laut 6.32 liegt eine Sylow-3-Untergruppe R von X in $O(H)$ und wir erhalten $[L, R] = 1$. Allerdings zeigt 6.30 (c), dass der Zentralisator von R in X Ordnung 18 hat, ein Widerspruch. Also ist $F^*(H) = F(H)$. Sei T eine Sylow-3-Untergruppe von H . Mit 6.20 (b) ist dann $|T| \geq 3^3$. Angenommen, es ist $F(H) \neq O_3(H)$. Weil $O_2(H)$ trivial ist, hat H dann einen Normalteiler P , der zyklisch der Ordnung 5, zyklisch der Ordnung 7 oder elementarabel der Ordnung 5^2 ist. In jedem Fall ist $|\text{Aut}(P)|_3 \leq 3$ und weil T auf P operiert, folgt $|C_T(P)| \geq 3^2$. Allerdings hat mit S. 86 in [Atl] kein Element der Ordnung 5 oder 7 in $O_8^+(2)$ einen Zentralisator mit durch 9 teilbarer Ordnung und wir erhalten einen Widerspruch.
- (b) Nach (a) ist $C_H(O_3(H)) \leq O_3(H)$, insbesondere ist S/Q isomorph zu einer Untergruppe von $\text{Aut}(O_3(H))$. Weil die Automorphismengruppe von Gruppen der Ordnung 3 oder 9 keine elementarabelsche Untergruppe der Ordnung 8 hat, folgt die Behauptung.
- (c) Wir zeigen zuerst, dass 7 kein Teiler von $|H|$ ist. Anderenfalls sei $g \in H$ mit $o(g) = 7$. Dann operiert g auf $O_3(H)$ und weil der Zentralisator eines Elements der Ordnung 7 in $\Omega_8^+(2)$ die Ordnung 7 hat, folgt $C_{O_3(H)}(g) = 1$. Nun ist aber $|O_3(H)| = 3^i$ mit $i \in \{3, 4, 5\}$ und daher $|O_3(H)| - 1$ nicht durch 7 teilbar, ein Widerspruch. Wir nehmen also an, dass es in H ein Element der Ordnung 5 gibt. Wir wissen bereits, dass $O_3(H)$ wenigstens die Ordnung 3^3 hat, es ist also insgesamt $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$ ein Teiler von $|H|$. Indem wir H als Untergruppe von $O_8^+(2)$ auffassen, erhalten wir dann eine Untergruppe $\tilde{H} := H \cap \Omega_8^+(2)$ von $\Omega_8^+(2)$, deren Ordnung von $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$ geteilt wird und die einen 3-Normalteiler der Ordnung wenigstens 3^3 hat. Mit S. 85 in [Atl] stellen wir fest, dass \tilde{H} aus Ordnungsgründen dann in einer Untergruppe $Sp_6(2)$, A_9 oder $(3 \times SU_4(2)) : 2$ liegen müsste. In A_9 sind die einzigen 3-Untergruppen, die von einem Element der Ordnung 5 normalisiert werden, zyklisch der Ordnung 3. Weiter zeigen uns S. 46 in [Atl] und der Satz von Borel-Tits angewandt auf $SU_4(2) \cong PSp_4(3)$, dass es in $SU_4(2)$ oder $Sp_6(2)$ ebenfalls keine 3-Untergruppe passender Ordnung gibt, die von einem Element der Ordnung 5 normalisiert wird, und wir erhalten einen Widerspruch. Also ist H eine $\{2, 3\}$ -Gruppe, wie behauptet. Daher ist $O(H) = O_3(H)$ und mit 6.32 folgt nun auch, dass eine Sylow-3-Untergruppe von X in $O_3(H)$ liegt.

□

6.35 Lemma: (a) Sei A eine $\{2, 3\}$ -Gruppe mit $O_3(A) = 1$ und Sylow-2-Untergruppe isomorph zu V_4 . Dann ist $A \cong V_4$ oder $A \cong A_4$.

(b) Die Gruppe $H/O_3(H)$ ist elementarabelsch der Ordnung 8 oder isomorph zu $2 \times A_4$.

(c) Sei $N \trianglelefteq H$ und $g \in H \setminus N$ ein Element ungerader Ordnung. Wird gN in H/N von einer Involution invertiert, so ist $g \in O_3(H)$.

Beweis:

(a) Mit dem $p^\alpha q^\beta$ -Satz von Burnside ist A auflösbar und folglich enthält $F(A) = O_2(A)$ seinen eigenen Zentralisator. Demnach ist $F(A) \cong V_4$ und $A/F(A)$ ist eine 3-Untergruppe von $\text{Aut}(V_4) = \Sigma_3$, also folgt die Behauptung.

(b) Sei $B := H/O_3(H)$. Laut 6.32 gibt es eine Involution $x \in H$, für die die Nebenklasse $xO_3(H)$ in $Z^*(H)/O_3(H) = Z^*(H)/O(H) = Z(H/O(H)) = Z(B)$ liegt. Sei dann $A := B/\langle xO_3(H) \rangle$. Weil $S/Q \in \text{Syl}_2(H)$ laut 6.30 (b) elementarabelsch der Ordnung 8 ist, ist eine Sylow-2-Untergruppe von A isomorph zu V_4 . Wegen $\langle xO_3(H) \rangle \in Z(B)$ ist das Urbild von $O_3(A)$ in B nilpotent und folglich ist $O_3(A) = 1$. Mit (a) ist $A \cong V_4$ oder $A \cong A_4$. Für $A \cong V_4$ ist B elementarabelsch. Anderenfalls ist eine Sylow-2-Untergruppe T von B normal in B . Sei $d \in B$ ein Element der Ordnung 3. Dann ist $T = [T, d] \times C_T(d)$ und wir erhalten $C_T(d) = \langle xO_3(H) \rangle$ und insgesamt $B \cong 2 \times A_4$.

(c) Nach (b) gibt es in keiner Faktorgruppe von $H/O_3(H)$ kein Element ungerader Ordnung, das von einer Involution invertiert wird, also folgt die Behauptung. □

6.36 Lemma: (a) Sei W eine Untergruppe von $Q/\langle z \rangle$, die unter $X = N_M(Q)/Q$ invariant ist. Dann ist $|W| \in \{1, 2^4, 2^8\}$.

(b) Es gilt: $O_3(H)$ ist elementarabelsch der Ordnung 3^4 .

(c) Ist $a \in (S/Q)^\#$, so ist $C_{O_3(H)}(a)$ entweder trivial oder hat Ordnung 3^2 .

Beweis: Laut 1.7 (b) operiert $C_M(z) = N_M(Q)$ irreduzibel auf $z^\perp/\langle z \rangle \stackrel{6.2(d)}{=} Y_M \cap Q$ und auf $O_2(C_M(z))/Y_M \stackrel{6.2(e)}{=} QY_M/Y_M \cong Q/z^\perp$. Dabei haben $z^\perp/\langle z \rangle$ und Q/z^\perp jeweils Ordnung 2^4 und daher folgt (a).

Wir verwenden nun wieder, dass wir H nach 6.6 als Untergruppe von $O_8^+(2)$ auffassen können. Dabei ist dann $V := Q/\langle z \rangle$ ein orthogonaler Raum der Dimension 8 vom $+$ -Typ. Nun lässt sich V als orthogonale Summe von vier jeweils zweidimensionalen orthogonalen Teilräumen U_1, \dots, U_4 vom $-$ -Typ schreiben, der Stabilisator dieser Zerlegung in $O_8^+(2)$ ist isomorph zu $S_3 \wr S_4$ und enthält eine Sylow-3-Untergruppe $T \cong (3 \wr 3) \times 3$ von $O_8^+(2)$. Dabei hat T genau eine

6. Der Fall $K/Z(K) \cong PSU_4(3)$

elementarabelsche Untergruppe der Ordnung 3^4 . Diese wird von Elementen x_1, \dots, x_4 erzeugt, wobei für $i \in \{1, \dots, 4\}$ stets $[V, x_i] = U_i$ und $C_V(x_i) = \langle U_j | j \in \{1, \dots, 4\} \setminus \{i\} \rangle$ ist. Wir können nun $Z(T) = \langle x_1 x_2 x_3, x_4 \rangle$ und damit auch $\mathcal{U}(T) = \langle x_1 x_2 x_3 \rangle$ annehmen. Außerdem können wir weiter davon ausgehen, dass $O_3(H)$ in T liegt.

Angenommen, $O_3(H)$ ist nicht elementarabelsch. Enthält $O_3(H)$ ein Element der Ordnung 9, so ist $\mathcal{U}(O_3(H)) = \mathcal{U}(T)$. Sonst ist $\exp(O_3(H)) = 3$ und $O_3(H)$ nicht abelsch. Das führt zu $O_3(H) \cong 3^{1+2}$ oder $3 \times 3^{1+2}$. In diesen Fällen ist $\Phi(O_3(H)) = \mathcal{U}(T)$. Sei $\delta := x_1 x_2 x_3$. Dann ist insgesamt also $\mathcal{U}(T) = \langle \delta \rangle$ charakteristisch in $O_3(H)$ und es folgt $\langle \delta \rangle \trianglelefteq H$. Demnach ist auch $C_{Q/\langle z \rangle}(\delta) = U_4$ invariant unter H , das widerspricht aber (a). Folglich ist $O_3(H)$ elementarabelsch.

Nach 6.34 (b) ist $|O_3(H)| \geq 3^3$. Wir nehmen an, dass $|O_3(H)| = 3^3$ ist. Wir können w in 6.30 aus y^\perp wählen. Dann zentralisiert wQ nach 6.30 eine Sylow-3-Untergruppe R_1 von X , wobei R_1 mit 6.34 (c) in $O_3(H)$ enthalten ist. Außerdem liegt w nach 6.16 (h) in $C_K(z)$. Nun ist $|C_G(y)|_2 \stackrel{6.16(a)}{=} |C_M(y)|_2 = 2^{10}$, $|C_Q(y)| \stackrel{2.3}{=} |Q|/2 = 2^8$ und $|K|_2 = |2 \cdot PSU_4(3)|_2 = 2^8$, daher folgt $|Q \cap K| \geq 2^6$ und weil $Q \cap K$ in $O_2(C_K(z))$ liegt und $|O_2(C_K(z))| = 2^6$ gilt, erhalten wir $O_2(C_K(z)) = Q \cap K$. Demnach ist

$$C_K(z)Q/Q \cong C_K(z)/(C_K(z) \cap Q) = C_K(z)/O_2(C_K(z)) \cong \Sigma_3 \times \Sigma_3.$$

Sei jetzt R_2 eine Sylow-3-Untergruppe von $C_K(z)Q/Q$. Dann ist R_2 unter wQ invariant, außerdem wird jedes Element von R_2 von einer Involution invertiert und nach 6.35 (c) liegt R_2 in $O_3(H)$. Weil beispielsweise laut 6.20 (b) insbesondere $R_1 \neq R_2$ ist, folgt nun mit unserer Annahme $O_3(H) = \langle R_1, R_2 \rangle = R_1 R_2$. Es ist $O_3(H) = C_{O_3(H)}(wQ) \times [O_3(H), wQ]$ und wegen $R_1 \leq C_{O_3(H)}(wQ)$ hat $[O_3(H), wQ] = [R_2, wQ] = \langle \mu \rangle$ Ordnung 3. Mit 6.30 liegt wQ im Zentrum von X , also sind $[O_3(H), wQ] = \langle \mu \rangle$ und dann auch $U := [Q/\langle z \rangle, \mu]$ unter X invariant. Wegen $\mu \in R_2$ hat U nach 6.3 Ordnung 2^2 oder 2^4 , daher liefert (a) nun $|U| = 2^4$. Allerdings ist $\mu^{wQ} = \mu^{-1}$ und daher gilt $|C_U(wQ)| = |[U, wQ]| = 2^2$ (siehe z.B. Lemma 1.2.(d) in Appendix A1 von [G1]), wobei auch $[U, wQ]$ unter X invariant ist. Dies widerspricht jedoch (a). Also hat $O_3(H)$ wenigstens die Ordnung 3^4 . Da T nicht abelsch ist, gilt auch $|O_3(H)| \leq 3^4$ und es folgt (b).

Außerdem erhalten wir $|[O_3(H), wQ]| = 3^2 = |C_{O_3(H)}(wQ)|$. Denn anderenfalls ist wegen $R_1 \leq C_{O_3(H)}(wQ)$ wieder $[O_3(H), wQ] = [R_2, wQ] = \langle \mu \rangle$, was erneut zu einem Widerspruch führt. Insbesondere ist also $R_1 = C_{O_3(H)}(wQ)$.

Nun ist $O_3(H)$ als Untergruppe $\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$ von T eindeutig bestimmt. Wir wählen d_1, d_2 wie in 6.19 und zusätzlich t und τ wie in 6.32. Im Folgenden bestimmen wir, wie $\langle wQ, tQ, \tau Q \rangle$ auf $O_3(H)$ operiert und verwenden dabei, dass die Menge $\{\langle x_i \rangle | i \in \{1, \dots, 4\}\}$ unter $H \leq N_{O_8^+(2)}(\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle)$ invariant ist.

Laut 6.19 ist $V = [V, d_1] \times [V, d_2]$ mit $|[V, d_1]| = 2^4 = |[V, d_2]|$. Daher können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $d_1 Q = x_1 x_2$ und $d_2 Q = x_3 x_4$ ist. Wie wir oben gezeigt haben, ist $\langle d_1 Q, d_2 Q \rangle = R_1 = C_{O_3(H)}(wQ)$, also muss nun $x_1^{wQ} = x_2$ und $x_3^{wQ} = x_4$ sein. Es ist $R_1 = \langle x_1 x_2, x_3 x_4 \rangle$ auch unter $\langle tQ, \tau Q \rangle$ invariant und tQ vertauscht $d_1 Q$ und $d_2 Q$. Daher

können wir weiter annehmen, dass $x_1^{tQ} = x_3$ und $x_2^{tQ} = x_4$ ist. Zuletzt werden d_1Q und d_2Q von τQ invertiert. Weil außerdem $[tQ, \tau Q] = 1$ ist, folgt nun, dass für ein $a \in \{\tau Q, w\tau Q\}$ schon $x_i^a = x_i^{-1}$ für alle $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ gilt. Zusammen mit all diesen Informationen folgt jetzt auch (c). \square

Wir werden nun eine weitere, von M verschiedene Untergruppe M_2 von G mit der Struktur $2^6.A_8$ konstruieren. Dazu beginnen wir mit Untersuchungen in M , die uns eine von Y_M verschiedene elementarabelsche Untergruppe der Ordnung 2^6 liefern werden, deren Normalisator wir später bestimmen können.

6.37 Definition: Wir setzen $E := \langle \overline{v_1v_2v_3v_4}, \overline{v_1v_2v_5v_6}, \overline{v_1v_3v_5v_7} \rangle \leq Y_M$. Dann ist E ein maximaler total singulärer Unterraum von Y_M . Weiter sei $L := N_M(E)$.

6.38 Lemma: Es gilt:

(a) Es ist

$$\begin{aligned} L/Y_M &= \langle (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8), (1, 3)(2, 4)(5, 7)(6, 8), (1, 5)(2, 6)(3, 7)(4, 8) \\ &\quad : \langle (2, 3, 7, 8, 6, 4, 5), (1, 2, 3)(5, 6, 7) \rangle \sim 2^3 : GL_3(2). \end{aligned}$$

(b) Es ist $Z(O_2(L)) = E$, $O_2(L) = C_L(E) = C_M(E)$ und Y_M/E liegt im Zentrum von $O_2(L)/E$.

(c) Es gilt $E \leq Q \leq L$.

(d) Setze $U := (Q \cap O_2(L))Y_M/E$. Dann ist $|O_2(L)/E : U| = 2$ und U ist elementarabelsch.

(e) Es ist auch $O_2(L)/E$ elementarabelsch. Insbesondere ist $O_2(L)/E = C_{L/E}(O_2(L)/E)$.

(f) Es gibt ein $L/O_2(L)$ -invariantes Komplement W zu Y_M/E in $O_2(L)/E$.

(g) Sei W wie in (f). Dann sind die Operationen von $L/O_2(L)$ auf E und W nicht äquivalent, E und W sind also verschiedene Moduln für $L/O_2(L)$. Sei weiter $V \leq O_2(L)$ mit $V/E = W$. Dann ist V elementarabelsch und es gilt $VY_M = O_2(L)$ und $|Q \cap V| = 2^5$.

(h) Sei V wie in (g). Dann ist $L = N_M(V)$.

Beweis:

(a) Der Stabilisator eines maximalen singulären Unterraums in $M/Y_M \cong \Omega_6^+(2) \cong A_8$ hat die Struktur $2^3 : GL_3(2)$ und ist eine maximale Untergruppe von A_8 . Die angegebenen Permutationen normalisieren dabei alle E und erzeugen eine Gruppe passender Struktur.

6. Der Fall $K/Z(K) \cong PSU_4(3)$

- (b) Es ist $[O_2(L), E] < E$ und weil eine zu $GL_3(2)$ isomorphe Untergruppe von L/Y_M nicht trivial und daher irreduzibel auf E operiert, ist $[O_2(L), E] = 1$ und $O_2(L) = C_L(E)$. Analog ist $[O_2(L)/E, Y_M/E] < Y_M/E$ und eine zu $GL_3(2)$ isomorphe Untergruppe von L/Y_M operiert nicht trivial auf Y_M/E , also ist auch $[O_2(L)/E, Y_M/E] = 1$. Wäre $Z(O_2(L)) > E$, so würde auch $(Y_M/E) \cap (Z(O_2(L))/E) \neq 1$ sein und wir würden $Y_M \leq Z(O_2(L))$ erhalten, was wegen $C_M(Y_M) \stackrel{1.10}{=} Y_M$ aber ein Widerspruch ist.
- (c) Es ist $z = \overline{v_1 v_2 v_3 v_4} \in E \leq z^\perp \stackrel{2.2(h)}{\leq} Q$ und daher $[Q, E] \leq Q' \stackrel{6.2(b)}{=} \langle z \rangle \leq E$, also ist $Q \leq N_M(E)$.
- (d) Wir verwenden 6.2 (e) und erhalten

$$QY_M/Y_M = O_2(C_M(z))/Y_M = \langle (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (5, 6)(7, 8), (5, 7)(6, 8) \rangle.$$

Also ist $(QY_M \cap O_2(L))/Y_M = \langle (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8), (1, 3)(2, 4)(5, 7)(6, 8) \rangle$ und folglich hat $(QY_M) \cap O_2(L) = (Q \cap O_2(L))Y_M$ Index 2 in $O_2(L)$. Weiter ist $Q' = \Phi(Q) = \langle z \rangle \leq E$, also ist $(Q \cap O_2(L))/E$ elementarabelsch. Weil nach (b) die elementarabelsche Gruppe Y_M/E im Zentrum von $O_2(L)/E$ liegt, folgt die Behauptung.

- (e) Sei U wie in (d) und $t \in O_2(L)/E$. Weil $L/O_2(L)$ nicht trivial auf $O_2(L)/Y_M$ operiert, ist folglich $L/O_2(L) \cong GL_3(2)$ transitiv auf $(O_2(L)/Y_M)^\#$. Daher ist t zu einem Element von U konjugiert und es folgt $t^2 = 1$ mit (d). Also ist $O_2(L)/E$ elementarabelsch.
- (f) In $L/O_2(L) \cong GL_3(2)$ gibt es eine maximale Untergruppe F der Ordnung 21. Weil Y_M/E unter F invariant ist, liefert der Satz von Maschke (siehe z.B. 8.4.6. in [KS]) ein F -invariantes Komplement W von Y_M/E in $O_2(L)/E$. Dabei operiert F auf W genauso wie auf $O_2(L)/Y_M$, insbesondere ist also F transitiv auf $W^\#$. Wir werden zeigen, dass W auch unter ganz $L/O_2(L)$ invariant ist. Dazu bestimmen wir den Stabilisator eines geeigneten Punktes aus W in $L/O_2(L)$.
- Sei U wie in (d), dann ist $|O_2(L)/E : U| = 2$. Mit 6.2 (d) ist $Q \cap Y_M = z^\perp$, also ist insgesamt $|O_2(L) : (Q \cap O_2(L))| = 4$. Daher gibt es ein $q \in Q$ mit $1 \neq qE \in W$. Weiter sei $q_2 \in Q$ so, dass $\{qY_M, q_2Y_M\}$ eine Basis für $(Q \cap O_2(L))Y_M/Y_M$ ist. Wir betrachten den zweidimensionalen Unterraum $R := \langle qE, q_2E \rangle$ von $O_2(L)/E$. Wegen $Q' = \langle z \rangle \leq E$ gilt $A := QO_2(L)/O_2(L) \leq C_{L/O_2(L)}(R) \leq C_{L/O_2(L)}(\langle qY_M, q_2Y_M \rangle)$. Dabei ist $|A| = 4$, denn es gilt $|Q| = 2^9 = |O_2(L)|$ und $|O_2(L) : (Q \cap O_2(L))| = 4$. Weil der Zentralisator eines zweidimensionalen Unterraums in $GL_3(2)$ ebenfalls die Ordnung 4 hat, folgt nun $A = C_{L/O_2(L)}(\langle qY_M, q_2Y_M \rangle) = C_{L/O_2(L)}(R) \leq C_{L/O_2(L)}(qE) \leq C_{L/O_2(L)}(qY_M)$, wobei $C_{L/O_2(L)}(qY_M)$ als Punktstabilisator in $GL_3(2)$ isomorph zu Σ_4 ist. Nun hat jedes Element der Ordnung 3 in F einen Fixpunkt auf W . Weil F transitiv auf W operiert, können wir also ein $\alpha \in F$ der Ordnung 3 mit $\alpha \in C_{L/O_2(L)}(qE)$ wählen. Der Zentralisator eines zweidimensionalen Unterraums in $GL_3(2)$ ist nicht normal im Punktstabilisator und dadurch erhalten wir $\Sigma_4 \cong \langle A, \alpha \rangle \leq C_{L/O_2(L)}(qE)$. Das liefert

uns insbesondere $|C_{L/O_2(L)}(qE)| = 24$ und damit $|(qE)^{L/O_2(L)}| = 7 = |(qE)^F| = |W^\#|$, also ist W invariant unter $L/O_2(L)$.

- (g) Es ist $C_L(z)/O_2(L)$ ein Punktstabilisator in $L/O_2(L)$. Dabei liegt $C_L(z)$ in $N_G(Q)$, insbesondere normalisiert $C_L(z)$ also $Q \cap O_2(L)$. Wie wir in (d) festgestellt haben, ist $(Q \cap O_2(L))Y_M/Y_M$ ein zweidimensionaler Unterraum von $O_2(L)/Y_M$ und weil $L/O_2(L)$ auf W genauso operiert wie auf $O_2(L)/Y_M \cong (W(Y_M/E))/(Y_M/E)$, ist $C_L(z)/O_2(L)$ auf W also ein Hyperebenenstabilisator und folglich sind die Operationen von $L/O_2(L)$ auf E und W verschieden.

Weiterhin ist dann $C_L(z)$ irreduzibel auf $(Q \cap O_2(L))Y_M/Y_M$ und weil wir im Beweis von (f) bereits festgestellt haben, dass $(Q/E) \cap W \neq 1$ ist, folgt damit auch $|(Q/E) \cap W| \geq 2^2$ und daher $|V \cap Q| \geq 2^5$. Wir nehmen nun an, dass es in V ein Element v der Ordnung 4 gibt. Dann ist $1 \neq v^2 \in E$ und weil E mit (b) im Zentrum von $O_2(L)$ liegt, ist für alle $e \in E$ auch $(ev)^2 = e^2v^2 = v^2$. Nun ist die Menge $\{(ve)^2 | e \in E\} = \{v^2\}$ unter $C_{L/O_2(L)}(vE)$ invariant und wir erhalten, dass ein Punktstabilisator von $L/O_2(L)$ auf W auch ein Punktstabilisator auf E ist. Das widerspricht aber den Ergebnissen von oben. Also ist $v^2 = 1$ für alle $v \in V$ und daher ist V elementarabelsch. Weil Q als extraspezielle Gruppe der Ordnung 2^9 keine elementarabelsche Untergruppe der Ordnung 2^6 hat, folgt auch $|Q \cap V| = 2^5$.

- (h) Es ist $V \trianglelefteq L$ und $N_M(V)$ liegt in $N_M(VY_M) = N_M(O_2(L))$. Dabei gilt $N_M(O_2(L)) = L$, weil $O_2(L)$ nicht normal in M und L/Y_M eine maximale Untergruppe von $M/Y_M \cong A_8$ ist.

□

Obiges Lemma liefert uns eine elementarabelsche Gruppe $V \leq L \leq M$ mit $|V| = 2^6$ und $V \neq Y_M$. Dabei ist $|M : L|$ ungerade und Q liegt in L , also können wir ohne Einschränkung auch $S \leq L$ annehmen. Wir werden zeigen, dass $N_G(V)/V$ isomorph zu A_8 ist. Zur Vereinfachung halten wir fest:

6.39 Definition: Von nun an sei V wie in 6.38 (g) und $M_2 := N_G(V)$.

6.40 Lemma: Laut 6.38 (g) gibt es ein $x \in V$ mit $V = (V \cap Q) \langle x \rangle$. Sei $g \in N_G(Q)$ mit $[x, g] \in Q$. Dann ist $g \in M_2$. Weiter ist $|N_G(Q) \cap M_2|_3 \geq 3^2$ und eine Sylow-3-Untergruppe von $N_G(Q) \cap M_2$ liegt nicht in M . Insbesondere liegt also M_2 nicht in M .

Beweis: Es ist $VY_M = O_2(L)$ und

$$QY_M/Y_M \stackrel{6.2(e)}{=} O_2(C_M(z)/Y_M) = \langle (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (5, 6)(7, 8), (5, 7)(6, 8) \rangle,$$

also können wir mit 6.38 (a) ohne Einschränkung x so wählen, dass x wie $(1, 5)(2, 6)(3, 7)(4, 8)$ auf Y_M operiert. Dann liefert uns 6.32 schon, dass $[Q, x]$ elementarabelsch von der Ordnung

6. Der Fall $K/Z(K) \cong PSU_4(3)$

2^5 ist. Insbesondere ist also $[[Q/\langle z \rangle, x]] = 2^4$, zusammen mit $[Q/\langle z \rangle, x] \leq C_{Q/\langle z \rangle}(x)$ und $[[Q/\langle z \rangle, x]] \cdot |C_{Q/\langle z \rangle}(x)| = |Q/\langle z \rangle| = 2^8$ folgt $[Q/\langle z \rangle, x] = C_{Q/\langle z \rangle}(x)$. Weiter ist $Q \cap V \leq C_Q(x)$ und $|Q \cap V| = 2^5$ nach 6.38 (g), demnach gilt $C_{Q/\langle z \rangle}(x) = (Q \cap V) / \langle z \rangle = [Q, x] / \langle z \rangle$. Nun ist $1 = (x\langle z \rangle)^2 = (x^g\langle z \rangle)^2 = (x[x, g]\langle z \rangle)^2$, also liegt die Involution $[x, g]\langle z \rangle$ in $C_{Q/\langle z \rangle}(x) = (V \cap Q) / \langle z \rangle = [Q, x] / \langle z \rangle$. Daher wird $[Q, x]\langle x \rangle = (V \cap Q)\langle x \rangle = V$ von g normalisiert.

Wir betrachten jetzt den Zentralisator von xQ in $H = N_G(Q)/Q$. Wir wählen eine Sylow-3-Untergruppe R von $N_M(Q)$ wie in 6.19, dann hat $C_{RQ/Q}(xQ)$ Ordnung 3. Mit 6.34 (c) liegt RQ/Q in $O_3(H)$, daher liefert uns 6.36 (c), dass $C_H(xQ)$ durch 3^2 teilbare Ordnung hat. Also ist mit obigen Überlegungen auch $|N_G(Q) \cap M_2|_3 \geq 3^2$. Weil $|N_M(V)|_3 \stackrel{6.38(h)}{=} |L|_3 = 3$ ist, liegt eine 3-Sylow-Untergruppe von $N_G(Q) \cap M_2$ nicht in M . \square

6.41 Lemma: *Es gilt:*

- (a) Die Untergruppe M_2 ist parabolisch in G .
- (b) Es ist $F^*(M_2) = O_2(M_2)$.
- (c) $V = O_2(M_2)$
- (d) $C_G(V) = V$
- (e) $O_3(M_2/V) = 1$
- (f) Es ist E nicht normal in M_2 .
- (g) Die Operation von M_2/V auf V ist irreduzibel.

Beweis:

- (a) Wegen $V \trianglelefteq L$ ist $L \leq M_2$ und L enthält eine Sylow-2-Untergruppe von M , also auch eine von G .
- (b) Laut 1.14 hat H parabolische Charakteristik 2, also liefert (a) schon $F^*(M_2) = O_2(M_2)$.
- (c) Sei $A := O_2(M_2)$. Dann ist $V \leq A$ und weil L eine Sylow-2-Untergruppe von M_2 enthält, liegt A in $O_2(L)$. Wir nehmen nun $A > V$ an. Da $L/O_2(L) \cong GL_3(2)$ nicht trivial und damit irreduzibel auf $O_2(L)/V = VY_M/V \cong V/(V \cap Y_M) = V/E$ operiert, folgt $A = O_2(L)$. Sei R eine Sylow-3-Untergruppe von $M_2 \cap N_G(Q)$. Dann liegt R mit 6.40 nicht in M und hat wenigstens Ordnung 3^2 . Außerdem operiert R auch auf $A \cap Q$ und auf $AQ/Q \cong A/A \cap Q$. Laut 6.38 (d) ist $|A : (Q \cap A)Y_M| = 2$, weiter gilt $|Y_M : Q \cap Y_M| = |Y_M : z^\perp| = 2$ und wir erhalten $|AQ/Q| = |A : Q \cap A| = 4$. Nun ist auch die Untergruppe $VQ/Q \leq AQ/Q$ unter R invariant und mit 6.38 (g) ist dabei $|VQ/Q| = |V/(V \cap Q)| = 2$, also wird VQ/Q von R zentralisiert. Damit folgt insgesamt $[R, AQ/Q] = 1$. Sei $w \in Y_M \setminus Q$, dann ist insbesondere $[R, w] \leq Q$. Nun liefert uns 6.30 (d) aber $R \leq M$ und wir erhalten einen Widerspruch.

(d) Es gilt $C_G(V) \stackrel{(c)}{=} C_{M_2}(O_2(M_2)) \stackrel{(b)}{=} C_{M_2}(F^*(M_2)) \leq F^*(M_2) = V$.

(e) Wir nehmen an, dass $O_3(M_2/V) \neq 1$ ist. Wir untersuchen dann die Operation von $O_2(L)/V$ auf $P := \Omega_1(Z(O_3(M_2/V)))$.

Wir setzen $\widehat{P} := [P, O_2(L)/V]$ und nehmen zunächst $\widehat{P} \neq 1$ an. Dann operiert $O_2(L)/V$ fixpunktfrei auf \widehat{P} . Weiter ist $O_2(L)/V$ elementarabelsch der Ordnung 8, es gibt also genau 7 Hyperebenen H_1, \dots, H_7 in $O_2(L)/V$, auf denen $L/O_2(L) \cong GL_3(2)$ transitiv operiert. Nun liefert uns 1.24 schon $\widehat{P} = \times_{i=1}^7 C_{\widehat{P}}(H_i)$ und weil alle H_i konjugiert sind, gilt $|C_{\widehat{P}}(H_i)| = |C_{\widehat{P}}(H_j)|$ für alle $i, j \in \{1, \dots, 7\}$. Wegen $\widehat{P} \neq 1$ hat dann $C_{\widehat{P}}(H_1)$ wenigstens Ordnung 3 und folglich wird $|P|$ von 3^7 geteilt. Nach (d) ist aber M_2/V isomorph zu einer Untergruppe von $\text{Aut}(V) = GL_6(2)$ und 3^7 ist kein Teiler von $|GL_6(2)| = 2^{15} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 31$, ein Widerspruch.

Daher ist $\widehat{P} = 1$ und wir erhalten $[P, O_2(L)/V] = 1$. Dann operiert P auch auf $[V, O_2(L)]$. Nach 6.38 (b) und (e) ist dabei $1 \neq [V, O_2(L)] \leq E$. Weil $L/O_2(L) \cong GL_3(2)$ irreduzibel auf E operiert, ist $[V, O_2(L)] = E$. Insgesamt operiert also die Gruppe $(L/V)P$ auf E und auch auf V/E , wobei aber L/V jeweils schon die volle Automorphismengruppe auf E und auf V/E induziert. Demnach muss $P = O_3((L/V)P)$ im Kern dieser Operationen liegen und wir erhalten $[E, P] = 1$ und $[V/E, P] = 1$. Daher folgt mit [KS, 8.2.2. b)] insgesamt sogar $[V, P] = 1$, was aber (d) widerspricht.

(f) Wir nehmen $E \trianglelefteq M_2$ an. Dann ist auch $C_{M_2}(E)$ normal in M_2 und wir schließen $V \leq O_2(C_{M_2}(E)) \leq O_2(M_2) \stackrel{(c)}{=} V$. Weiter ist wegen $z \in E$ schon $C_{M_2}(E) \leq N_G(Q)$, daher ist $C_{M_2}(E)$ mit 6.34 (c) eine $\{2, 3\}$ -Gruppe und damit insbesondere auflösbar. Weil nach 6.40 die Ordnung von M_2 durch 3^2 teilbar ist, während dies für die Gruppe $\text{Aut}(E) = GL_3(2)$ nicht gilt, ist $C_{M_2}(E)$ keine 2-Gruppe. Somit erhalten wir

$$1 \neq O_3(C_{M_2}(E)/O_2(C_{M_2}(E))) = O_3(C_{M_2}(E)/V) \leq O_3(M_2/V),$$

im Widerspruch zu (e).

(g) Sei $W \trianglelefteq M_2$ mit $1 \neq W \leq V$. Gibt es ein $w \in W \setminus E$, so ist mit 6.38 (b) und (e) schon $1 \neq [w, O_2(L)] \leq E \cap W$, also ist in jedem Fall $E \cap W \neq 1$. Weil L irreduzibel auf E operiert, folgt $E \leq W$. Nach (f) ist aber $W \neq E$ und damit $W > E$. Nun operiert L auch irreduzibel auf V/E und wir erhalten insgesamt $W = V$.

□

6. Der Fall $K/Z(K) \cong PSU_4(3)$

6.42 Lemma: Die Gruppe M_2/V ist isomorph zu A_8 und V ist ein natürlicher $\Omega_6^+(2)$ -Modul für $M_2/V \cong A_8 \cong \Omega_6^+(2)$.

Beweis: Wir setzen hier $\overline{M}_2 := M_2/V$. Mit 6.41 (d) ist \overline{M}_2 isomorph zu einer Untergruppe von $\text{Aut}(V) = GL_6(2)$, die nach 6.41 (g) irreduzibel auf V operiert. Außerdem gilt laut 6.41 (a) schon $|\overline{M}_2|_2 = |G|_2/|V| = |M|_2/2^6 = |A_8|_2 = 2^6 < |GL_6(2)|_2$, insbesondere ist \overline{M}_2 also isomorph zu einer echten Untergruppe von $GL_6(2)$.

Wir verwenden nun Tabelle 8.24 und Tabelle 8.25 in [BMR] mit $q = 2$, um den Isomorphietyp von \overline{M}_2 zu bestimmen. Weil M_2 irreduzibel auf V operiert, liegt \overline{M}_2 dabei nicht in einer maximalen Untergruppe aus einer der \mathcal{C}_1 -Klassen und folglich ist \overline{M}_2 in einer Gruppe $(GL_3(2) \times GL_3(2)).2$, $SL_3(4).\Sigma_3$, $SL_2(8).7.3$ oder $Sp_6(2)$ enthalten. Da $L/V \sim 2^3.GL_3(2)$ in \overline{M}_2 liegt, kann \overline{M}_2 keine Untergruppe von $(GL_3(2) \times GL_3(2)).2$ oder $SL_2(8).7.3$ sein. Wir nehmen nun an, dass \overline{M}_2 in einer Gruppe $SL_3(4).\Sigma_3$ enthalten ist. Weil L/V keine Normalteiler vom Index ≤ 6 hat, gibt es dann in $SL_3(4)$ eine zu L/V isomorphe Untergruppe und wir erhalten mit dem Satz von Borel-Tits einen Widerspruch.

Daher liegt \overline{M}_2 in einer bis auf Konjugation in $GL_6(2)$ eindeutig bestimmten Untergruppe $Sp_6(2)$, für die V der natürliche $Sp_6(2)$ -Modul ist. Wir wissen, dass $|\overline{M}_2|_2 = 2^6$ gilt, \overline{M}_2 eine Untergruppe $L/V \cong 2^3.GL_3(2)$ enthält und \overline{M}_2 nach 6.40 durch 3^2 teilbare Ordnung hat. Mit S. 46 in [Atl] stellen wir fest, dass \overline{M}_2 dann schon aus Ordnungsgründen lediglich in einer Gruppe Σ_8 oder $PSU_3(3) : 2$ liegen kann. Da aber $|PSU_3(3) : 2|_2 = |\overline{M}_2|_2$ ist und $L/V \cong 2^3.GL_3(2)$ und daher auch \overline{M}_2 keine Untergruppe vom Index 2 haben, muss \overline{M}_2 in einer bis auf Konjugation in $Sp_6(2)$ eindeutig bestimmten Untergruppe $\Sigma_8 \cong O_6^+(2)$ liegen, für die V der natürliche $O_6^+(2)$ -Modul ist. Wir verwenden erneut, dass \overline{M}_2 keine Untergruppe vom Index 2 hat und erhalten, dass \overline{M}_2 sogar in A_8 liegt. Weil nun $|A_8 : \overline{M}_2| \leq 5$ ist, folgt $\overline{M}_2 \cong A_8 \cong \Omega_6^+(2)$ und V ist der natürliche $\Omega_6^+(2)$ -Modul für \overline{M}_2 . \square

6.43 Lemma: Sei $A = \Omega_6^+(2)$ und W der natürliche Modul für A . Dann gilt:

- (a) Ist U ein Teilraum von W der Dimension 3. Dann ist $N_A(U) \sim 2^3.GL_3(2)$ genau dann, wenn U ein maximaler total singulärer Teilraum ist.
- (b) Sei $U \leq W$ ein maximaler total singulärer Teilraum und $B := N_A(U)$. Sei weiter $v \in U^\#$ und \tilde{H} eine Hyperebene von U , die v enthält. Wir setzen $R_1 := C_B(v)$ und $R_2 := N_B(\tilde{H})$. Sei T eine gemeinsame Sylow-2-Untergruppe von R_1 und R_2 . Dann gibt es eine Involution $\alpha \in \text{Aut}(A) \setminus \text{Inn}(A)$ mit $R_2^\alpha = R_2$, $R_1^\alpha \not\leq B$, $[R_1^\alpha, v] = 1$ und $T^\alpha = T$. Weiter ist dann $\langle R_1, R_2, R_1^\alpha \rangle = A$.

Beweis:

- (a) Es gibt genau zwei Klassen maximaler total singulärer Teilräume in W . Ist U ein solcher Teilraum, dann ist $N_A(U) \sim 2^3 : GL_3(2)$.

Umgekehrt hat A genau zwei Klassen maximaler parabolischer Untergruppe der Form $2^3.GL_3(2)$ und jede solche Untergruppe stabilisiert einen maximalen total singulären Teilraum. Aus $N_A(U) \sim 2^3.GL_3(2)$ folgt also die Existenz eines total singulären Teilraums $U_2 \leq W$ mit $[N_A(U), U_2] \leq U_2$. Dabei operiert $N_A(U)$ irreduzibel auf U_2 . Wir nehmen $U_2 \neq U$ an. Dann ist $U \cap U_2 = 1$ und folglich gilt $W = \langle U, U_2 \rangle$. Weil dann aber $O_2(N_A(U))$ sowohl U als auch U_2 zentralisiert, erhalten wir $[W, O_2(N_A(U))] = 1$, ein Widerspruch.

- (b) Wir betrachten A als Untergruppe von $O_6^+(2)$. Sei $\alpha \in O_6^+(2)$ eine Transvektion. Dann liegt α beispielsweise mit 1.7(c) nicht in A und es ist insbesondere $O_6^+(2) = A\langle\alpha\rangle$. Weil A auf der Menge aller maximalen total singulären Unterräume von W zwei Bahnen hat, während $O_6^+(2)$ mit dem Satz von Witt transitiv operiert, wird U von α nicht normalisiert. Damit ist $C_U(\alpha)$ eine Hyperebene von U . Nun operiert $B \sim 2^3 : GL_3(2)$ transitiv auf der Menge aller Hyperebenen von U , daher können wir $C_U(\alpha) = \tilde{H} = U \cap U^\alpha$ annehmen. Der vierdimensionale Teilraum \tilde{H}^\perp von W enthält nun genau zwei maximale total singuläre Teilräume, diese sind notwendig U und U^α . Weil \tilde{H}^\perp insbesondere von $R_2 = N_B(\tilde{H})$ normalisiert wird, liegt R_2 auch in $N_A(U^\alpha) = B^\alpha$. Außerdem ist R_2 maximal in B , also folgt $R_2 = B \cap B^\alpha$ und deshalb auch $R_2 = R_2^\alpha$. Damit normalisiert α eine Sylow-2-Untergruppe von R_2 und wir können gegebenenfalls durch Konjugation in R_2 annehmen, dass es sich dabei um T handelt. Wegen $[v, \alpha] \in [\tilde{H}, \alpha] = 1$ ist auch $[R_1^\alpha, v] = [R_1, v]^\alpha = 1$. Schließlich gilt $B^\alpha \neq B$ und $B = \langle R_1, R_2 \rangle$, also kann R_1^α nicht in B liegen. Weil B maximal in A ist, erhalten wir außerdem $\langle R_1, R_2, R_1^\alpha \rangle = \langle B, R_1^\alpha \rangle = A$.

□

Wir konstruieren nun Untergruppe P_1, P_2, P_3 und P_4 von M bzw. M_2 , von denen wir anschließend zeigen werden, dass sie wesentliche Eigenschaften mit den parabolischen Untergruppen gemeinsam haben, die zu einem D_4 -Diagramm von $\Omega_8^+(2)$ gehören. Mit Hilfe der Resultate aus [MSW] erhalten wir dann $\langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle = \langle M, M_2 \rangle \cong \Omega_8^+(2)$.

Wir wählen in E eine Hyperebene \tilde{H} , die z enthält. Dann setzen wir $P_3 = C_L(z)$ und $P_2 = N_L(\tilde{H})$. Dabei gilt $P_2/O_2(P_2) \cong \Sigma_3 \cong P_3/O_2(P_3)$ und wir können $S \leq P_2 \cap P_3$ annehmen. Nun gibt es mit 6.43(b) eine Untergruppe $P_1 \leq M$ mit folgenden Eigenschaften:

- P_1/Y_M ist isomorph zu P_3/Y_M ,
- $\langle P_1, P_2 \rangle/Y_M$ ist isomorph zu $\langle P_2, P_3 \rangle/Y_M = L/Y_M \sim 2^3 : GL_3(2)$,
- $[P_1, z] = 1$,
- S liegt in P_1 und
- $\langle P_1, P_2, P_3 \rangle = M$.

6. Der Fall $K/Z(K) \cong PSU_4(3)$

Nun konstruieren wir noch ein $P_4 \leq M_2$. Dabei ist $M_2 = N_G(V)$, $M_2/V \cong A_8 \cong \Omega_6^+(2)$ und V ist der natürliche $\Omega_6^+(2)$ -Modul für M_2/V . Es gilt weiter $E \leq V \leq L \leq M_2$, dabei ist $L/V \sim 2^3.GL_3(2)$ und wir haben $E \trianglelefteq L$. Weil L eine maximale Untergruppe von M_2 ist, folgt mit 6.41 (f) schon $L = N_{M_2}(E)$. Wir verwenden 6.43 (a) und erhalten, dass E auch ein maximaler total singulärer Teilraum von V ist. Nun liefert uns eine erneute Anwendung von 6.43 (b) eine Untergruppe $P_4 \leq M_2$ mit folgenden Eigenschaften:

- P_4/V ist isomorph zu P_3/V ,
- $\langle P_2, P_4 \rangle/V$ ist isomorph zu $\langle P_2, P_3 \rangle/V = L/V \sim 2^3 : GL_3(2)$,
- $[P_4, z] = 1$,
- S liegt in P_4 und
- $\langle P_2, P_3, P_4 \rangle = M_2$.

6.44 Lemma: (a) Seien $i, j \in \{1, \dots, 4\}$ verschieden, dann ist $P_i \cap P_j = S$.

(b) Es ist $O^2(P_i) = P_i$ für alle $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

(c) Sei $i \in \{1, 3, 4\}$. Dann ist $P_i \leq N_G(Q)$ und $O^2(P_i)Q/Q \leq O_3(N_G(Q))$.

(d) Sei $i \in \{1, 3\}$. Dann ist $Q \leq O^2(P_i)$.

Beweis:

(a) Es ist $S \leq P_i \cap P_j$ und wegen $P_i/O_2(P_i) \cong \Sigma_3$ folgt die Gleichheit.

(b) Dies folgt direkt aus $P_i/O_2(P_i) \cong \Sigma_3$.

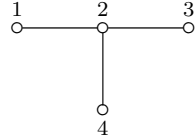
(c) Wir haben $[P_i, z] = 1$ und folglich ist $P_i \leq C_G(z) \stackrel{6.2(c)}{=} N_G(Q)$. Sei $g \in P_i$ ein Element der Ordnung 3. Dann ist wegen $P_i/O_2(P_i) \cong \Sigma_3$ schon $O^2(P_i) = \langle g^{P_i} \rangle$. Außerdem gilt $gQ \in O_3(N_G(Q)/Q)$ nach 6.35 (c) und es folgt die Behauptung.

(d) Sei $g \in P_3 = C_L(z)$ ein Element der Ordnung 3. Dann ist $\langle g \rangle$ eine Sylow-3-Untergruppe von L und von P_3 . Laut 6.38 (a) ist $\langle gY_M \rangle$ in $P_3 \leq N_G(Q)$ zu $\langle (1, 2, 3)(5, 6, 7)Y_M \rangle$ konjugiert, daher liefert uns 6.19 schon $[Q, g] = Q$ und damit $Q \leq O^2(P_3)$. Wir haben P_1/Y_M als Bild von P_3/Y_M unter einem Automorphismus $\alpha \in \text{Aut}(M/Y_M) = \Sigma_8$ erhalten, also ist auch für ein Element $h \in P_1 \leq C_M(z)$ der Ordnung 3 die Nebenklasse hY_M ein Doppeldreizyklus. Daher ist auch $\langle hY_M \rangle$ in $C_M(z) = N_M(Q)$ zu $\langle (1, 2, 3)(5, 6, 7)Y_M \rangle$ oder $\langle (1, 2, 3)(5, 7, 6)Y_M \rangle$ konjugiert und wir erhalten genauso $[Q, h] = Q$.

□

6.45 Lemma: *Es ist $\langle M, M_2 \rangle = \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle \cong \Omega_8^+(2)$.*

Beweis: Wir wollen die Resultate aus Abschnitt 6 in [MSW] verwenden. Wir übernehmen hier auch große Teile der dortigen Notationen aus 6.1. Sei dazu $\widehat{L} \cong D_4(2) \cong \Omega_8^+(2)$ und Δ das zugehörige Gebäude. Sei weiter c eine beliebige Kammer aus Δ und Π das Coxeter-Diagramm zu Δ , dessen Knoten durch die Elemente von $I := \{1, 2, 3, 4\}$ wie folgt nummeriert sind:



Für eine Teilmenge $J \subseteq I$ ist $\Delta_J(c)$ das J -Residuum von Δ , welches c enthält. Ist weiter $T \subseteq J$, so ist $\widehat{L}_J := \text{Aut}^\dagger(\Delta_J(c))$ und $\widehat{L}_{JT} := N_{\widehat{L}_J}(\Delta_T(c))$ (für die Definition von $\text{Aut}^\dagger(\Delta_J(c))$ siehe [MSW, Abschnitt 3]).

Wir setzen $\mathcal{D} := \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}$, für $D = \{i, j\} \in \mathcal{D}$ sei außerdem $G_D := \langle P_i, P_j \rangle$. Wie wir oben festgestellt haben, ist dann stets $G_D/O_2(G_D) \cong GL_3(2)$.

Weiter ist $\widehat{L}_D = \text{Aut}^\dagger(\Delta_D(c)) \cong PSL_3(2) \cong GL_3(2) \cong G_D/O_2(G_D)$. Also gibt es surjektive Homomorphismen $\phi_D : G_D \rightarrow \widehat{L}_D$, deren Kern K_D einfach $O_2(G_D)$ ist, und wir können ϕ_D dabei sogar so wählen, dass für $i \in D$ stets $\phi_D(P_i) = N_{\widehat{L}_D}(\Delta_{\{i\}}(c)) = \widehat{L}_{D\{i\}}$ gilt. Zudem haben wir $S \in \text{Syl}_2(P_k)$ für alle $k \in I$, daher ist insbesondere die Borel-Untergruppe $\widehat{L}_{D\emptyset}$ von \widehat{L}_D das Bild von S unter ϕ_D .

Für $J \subseteq D \in \mathcal{D}$ setzen wir wie in [MSW] hier $G_{DJ} := \phi_D^{-1}(\widehat{L}_{DJ})$. Mit unseren obigen Überlegungen erhalten wir nun schon:

- Ist $J = D$, so ist $G_{DJ} = G_D$.
- Ist $J = \{j\}$, so ist $G_{DJ} = P_j$.
- Ist $J = \emptyset$, so ist $G_{DJ} = S$.

Insbesondere gilt für die in 6.1 in [MSW] definierten Untergruppen $B_D := G_{D\emptyset}$ stets $B_D = S$ und damit auch $B = \langle B_D \mid D \in \mathcal{D} \rangle = S$.

Wir prüfen nun, dass damit die Voraussetzungen aus 6.2 in [MSW] erfüllt sind.

Zunächst ist offenbar jede irreduzible Teilmenge der Mächtigkeit 2 von I eine \mathcal{D} -Menge und die oben definierten Homomorphismen ϕ_D sind surjektiv. Außerdem ist für $D, E \in \mathcal{D}$ und $i \in D$ stets $B_E = S \leq G_{D\{i\}}$, insbesondere wird also $G_{D\{i\}}$ von B_E normalisiert.

Für $J \subseteq D \in \mathcal{D}$ sei $H_{DJ} := O^2(O^{2'}(G_{DJ}))$. Seien nun $D, E \in \mathcal{D}$ und $i \in D \cap E$. Dann ist $H_{D\{i\}} = O^2(O^{2'}(G_{D\{i\}})) = O^2(O^{2'}(P_i)) = O^2(O^{2'}(G_{E\{i\}})) = H_{E\{i\}}$. Damit gilt auch (iii) aus 6.2 in [MSW] und entsprechend der dortigen Notation setzen wir $H_i := O^2(O^{2'}(P_i))$.

Seien nun $i, j \in \{1, \dots, 4\}$ so, dass $\{i, j\}$ keine \mathcal{D} -Menge ist. Dann ist $i \neq 2 \neq j$ und wir können ohne Einschränkung $i \in \{1, 3\}$ annehmen. Mit 6.44 (b) und (c) erhalten wir nun

6. Der Fall $K/Z(K) \cong PSU_4(3)$

$H_i = O^2(P_i)$, $H_j = O^2(P_j)$, $H_i, H_j \leq N_G(Q)$ und $H_iQ/Q \leq O_3(N_G(Q)/Q) \geq H_jQ/Q$. Weil $O_3(N_G(Q)/Q)$ nach 6.36 (b) abelsch ist, folgt nun $H_iH_jQ = H_jH_iQ$. Allerdings liegt Q laut 6.44 (d) in P_i und wir können $H_iH_j = H_jH_i$ schließen. Außerdem ist $P_i \cap P_j \stackrel{6.44(a)}{=} S$ und damit insbesondere $H_i \neq H_j$, wie gewünscht.

Zuletzt ist für jedes $D \in \mathcal{D}$ stets $K_D = O_2(G_D)$ und damit insbesondere $[K_D, G_D] \leq O_2(K_D)$. Daher gelten alle Voraussetzungen aus [MSW, 6·2] für $G_1 := \langle G_D \mid D \in \mathcal{D} \rangle = \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$.

Weiter ist $|O_2(B)| = |S| = 2^{12} = |\Omega_8^+(2)|_2 = |\widehat{L}_0|$. Zudem liegt $O_2(G_1)$ in $S \leq M \cap M_2$ und folglich gilt $O_2(G_1) \leq O_2(M) \cap O_2(M_2) = Y_M \cap V = E$. Weil aber z.B. M irreduzibel auf Y_M operiert, erhalten wir $O_2(G_1) = 1$. Sei nun $F := \{2, 3\} \in \mathcal{D}$. Dann ist $K_F = O_2(\langle P_2, P_3 \rangle)$ und insbesondere ist $Y_M \leq K_F$. Daher gilt $C_{G_1}(O_2(K_F)) = C_{G_1}(K_F) \leq C_G(Y_M) = C_G(O_2(M))$. Nach unserer Generalvoraussetzung ist $C_G(O_2(M)) \leq O_2(M)$ und das führt uns insgesamt zu $C_{G_1}(O_2(K_F)) \leq Y_M \leq K_F = O_2(K_F)$.

Somit sind auch alle Voraussetzungen von [MSW, 6·8] erfüllt und wir erhalten

$$O^{2'}(G_1) \cong \Omega_8^+(2).$$

Nun ist für jedes $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ schon $O^{2'}(P_i) = P_i$ nach 6.44 (b), woraus wir $P_i \leq O^{2'}(G_1)$ und daher $G_1 = O^{2'}(G_1)$ schließen können. Somit folgt die Behauptung. \square

6.46 Satz: *Es gelte Voraussetzung 6.1. Dann ist $F^*(G)$ isomorph zu $P\Omega_8^+(3)$. Außerdem liegt Y_M nicht in Q .*

Beweis: Wir verwenden hier Theorem 1 aus [PS1]. Die Gruppe G hat nach 1.14 parabolische Charakteristik 2. Sei weiter $G_1 := \langle M, M_2 \rangle$. Dann ist G_1 nach 6.45 isomorph zu $\Omega_8^+(2)$ und außerdem liegt Y_M in G_1 . Daher folgt $C_G(G_1) \leq C_G(Y_M) = Y_M \leq G_1$ und insgesamt ist $C_G(G_1) = Z(G_1) = 1$. Folglich ist $U := N_G(G_1)$ eine Untergruppe mit $F^*(U) = G_1 \cong \Omega_8^+(2)$ und U hat wegen $|\Omega_8^+(2)|_2 = |M|_2 = |G|_2$ ungeraden Index in G .

Damit liefert uns Theorem 1 aus [PS1] nun $F^*(G) \cong \Omega_8^+(2)$ oder $F^*(G) \cong P\Omega_8^+(3)$. Weil dann $G/F^*(G)$ auflösbar ist, enthält $F^*(G)$ die perfekte Untergruppe $K \cong 2.PSU_4(3)$, was schon allein aus Ordnungsgründen nur für $F^*(G) \cong P\Omega_8^+(3)$ möglich ist.

Zuletzt gilt beispielsweise $Q \cap Y_M = z^\perp$ nach 6.2 (d), also liegt Y_M nicht in Q . \square

Zuletzt fassen wir noch einmal alle Resultate zusammen und beweisen den Hauptsatz dieser Arbeit.

Beweis des Hauptsatzes: Mit 3.23 hat $C_G(y)$ genau eine Komponente K . Nun liefert 4.27 zusammen mit 5.20 und 6.46 die Behauptung. \square

Literaturverzeichnis

- [As1] M. Aschbacher: Finite group theory, Cambridge studies in advanced mathematics 10, Cambridge University Press, 1986
- [As2] M. Aschbacher: On Finite Groups of Lie Type and Odd Characteristic, J. Algebra 66 (1980), 400-424
- [As3] M. Aschbacher: On finite groups of component type, Illinois J. Math. 19 (1975), 87-115
- [As4] M. Aschbacher: A Characterization of Some Finite Groups of Characteristic 3, J. Algebra 76 (1982), 400-441
- [Ba] B. Baumann: Endliche Gruppen mit einer 2-zentralen Involution, deren Zentralisator 2-abgeschlossen ist, Illinois J. Math. 22 (1978), 240-261
- [BMR] J. N. Bray, D. F. Holt, C. M. Roney-Dougal: The Maximal Subgroups of the Low-Dimensional Finite Classical Groups, London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, 2013
- [Atl] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson: Atlas of Finite Groups, Clarendon Press, Oxford, korrigierte Auflage von 2009
- [CKS] C. W. Curtis, W. M. Kantor, G. M. Seitz: The 2-Transitive Permutation Representations of the Finite Chevalley Groups, Transactions of the American Mathematical Society 218 (1976), 1-59
- [DS] S. L. Davis, R. Solomon: Some sporadic characterizations, Communications in Algebra 9 (1981), 1725-1742
- [FT] W. Feit, J. G. Thompson: Solvability of groups of odd order, Pacific J. Math. 13 (1963), 755 - 1029
- [GI1] G. Glaubermann: Factorizations in Local Subgroups of Finite Groups, Regional Conference Series in Mathematics, no 33, American Mathematical Society, Providence, 1977

Literaturverzeichnis

- [G12] G. Glaubermann: Central Elements in Core-Free Groups, *J. Algebra* 4 (1966), 403-420
- [GW] D. Gorenstein, J. H. Walter: The characterization of finite groups with dihedral Sylow 2-subgroups, *J. Algebra* 2 (1965), 85-151
- [GLS2] D. Gorenstein, R. Lyons, R. Solomon: The Classification of the Finite Simple Groups, Number 2, *Mathematical Surveys and Monographs*, Volume 40, Number 2, American Mathematical Society, 1996
- [GLS3] D. Gorenstein, R. Lyons, R. Solomon: The Classification of the Finite Simple Groups, Number 3, *Mathematical Surveys and Monographs*, Volume 40, Number 3, American Mathematical Society, 1998
- [GMS] R. L. Griess, U. Meierfrankenfeld, Y. Segev: A Uniqueness Proof for the Monster, *Annals of Mathematics*, Second Series, Vol. 130, no. 3 (1989), 567-602.
- [Hu] B. Huppert: *Endliche Gruppen I*, *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen*, Band 134, Springer, Berlin 1967
- [Ja] Z. Janko: A New Finite Simple Group with Abelian Sylow 2-Subgroups and Its Characterization, *J. Algebra* 3 (1966), 147-186
- [KPW] P. B. Kleidman, R. A. Parker, R. A. Wilson: The Maximal Subgroups of the Fischer Group Fi_{23} , *J. London Math. Soc.* 39 (1989), 89-101
- [KW] P. B. Kleidman, R. A. Wilson: The maximal subgroups of Fi_{22} , *Mathematical Proceedings of the Cambridge Phil. Soc.* 102 (1987), 17-23
- [KS] H. Kurzweil, B. Stellmacher: *Theorie der endlichen Gruppen*, Springer, Berlin, 1998
- [LW] S. A. Linton, R. A. Wilson: The Maximal Subgroups of the Fischer Groups Fi_{24} and Fi'_{24} , *Proceedings of the London Math. Soc.* 63 (1991), 113-164
- [MMPS] M. Mainardis, U. Meierfrankenfeld, G. Parmeggiani, B. Stellmacher: The \tilde{P} -Theorem, *J. Algebra* 292 (2005), no. 2, 363-392.
- [MS1] U. Meierfrankenfeld, B. Stellmacher: F-stability in Finite groups, *Transactions of the American Mathematical Society*, 361 (2009), no. 5, 2509-2525.
- [MS2] U. Meierfrankenfeld, B. Stellmacher: The general FF-module theorem, *J. Algebra* 351 (2012), 1-63
- [MSt] U. Meierfrankenfeld, G. Stroth: A characterization of $\text{Aut}(G_2(3))$, *J. Group Theory* 11 (2008), no. 4, 479-494

- [MSS] U. Meierfrankfeld, B. Stellmacher, G. Stroth: The Local Structure Theorem for Finite Groups with a Large p -Subgroup, *Memoirs of the American Mathematical Society*, Vol. 242 (2016), no. 1147
- [MSW] U. Meierfrankfeld, G. Stroth, R. M. Weiss: Local identification of spherical buildings and finite simple groups of Lie type, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Phil. Soc.* 154 (2013), 527-547
- [PPS] C. Parker, G. Parmeggiani, B. Stellmacher: The $P!$ -Theorem, *J. Algebra* 263 (2003), 17-58.
- [PPSS] C. Parker, G. Pientka, A. Seidel, G. Stroth: Finite groups which are almost groups of Lie type in characteristic p , eingereicht (2017)
- [PS1] C. Parker, G. Stroth: A 2-local identification of $P\Omega_8^+(3)$, *Journal of Pure and Applied Algebra* 220 (2016), 3403-3424
- [PS2] C. Parker, G. Stroth: The Local Structure Theorem, The Non-Characteristic 2 Case, Preprint
- [Pr] C. Pröseler: $\Omega_8^+(3)$ fast eine orthogonale Gruppe über $GF(2)$, Diplomarbeit, Halle (Saale) (2011)
- [Ta] D. E. Taylor: *The Geometry of the Classical Groups*, Sigma Series in Pure Mathematics, Volume 9, Heldermann Verlag Berlin, 1992
- [Wa] J. H. Walter: The Characterization of Finite Groups with Abelian Sylow 2-subgroups, *The Annals of Mathematics, Second Series*, Vol. 89, No. 3 (1969), 405-514

Curriculum Vitae

Persönliche Angaben

Name: Christian Pröseler
Geburtsdatum: 02.06.1985
Geburtsort: Bernburg (Saale)
Nationalität: Deutsch
Anschrift: Burgstraße 34b
06114 Halle

Ausbildung

2004 Abitur am Gymnasium Carolinum in Bernburg (Saale)
2005 - 2011 Mathematikstudium an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Abschluss als Diplom-Mathematiker

Tätigkeiten

2011 - 2015 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
seit 2016 Softwareentwickler bei der VermCad GmbH

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich allen danken, die mich beim Anfertigen dieser Arbeit unterstützt haben.

Ein ganz besonderer Dank geht dabei an Herrn Prof. Dr. Gernot Stroth für die umfangreiche Betreuung, die vielen nützlichen Gespräche und die zahlreichen Gedankenanstöße.

Des Weiteren danke ich meinen Kollegen aus dem Büro, Imke und Mathias, die immer ein offenes Ohr für Probleme jeder Art hatten und stets für ein sehr angenehmes Arbeitsklima gesorgt haben.

Weiterhin möchte ich meinen Dank dafür ausdrücken, dass ich meinen Arbeitsplatz im mathematischen Institut auch nach dem Ende meiner Beschäftigung als wissenschaftlicher Mitarbeiter weiter benutzen durfte und mich im Büro stets willkommen gefühlt habe.

Außerdem bedanke ich mich bei meinen Kollegen in der VermCad GmbH dafür, dass sie mich so herzlich aufgenommen und mir maximale Freiheiten eingeräumt haben, was schließlich das Fertigstellen dieser Arbeit ermöglicht hat.

Nicht zuletzt danke ich meiner Familie und meinen Freunden für die moralische Unterstützung in jeder Lage.

Selbständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig, ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus anderen Werken wörtlich oder inhaltlich entnommenen Daten, Fakten und Konzepte sind unter Angabe der entsprechenden Quelle als solche gekennzeichnet.

Diese Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form in einem anderen Prüfungsverfahren vorgelegt.

Halle (Saale), 16.07.2018