



**Fachbereich Elektrotechnik**  
Prof. Dr.-Ing. Jürgen Schwarz

# **Ein Beitrag zur Berechnung von Ausgleichskurven und Approximationsfunktionen aus Exponentialsummen**



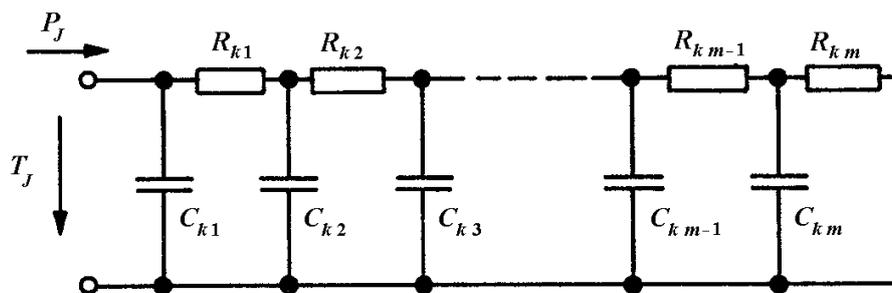
## Inhaltsverzeichnis

1	Veranlassung .....	5
2	Ausgleichskurve und Approximationsfunktion .....	7
3	Diskrete Approximation (Ausgleichsrechnung).....	9
3.1	Allgemeines Gleichungssystem .....	9
3.1.1	Gleichungssystem in eindimensionalem Fall.....	9
3.1.2	Funktionalmatrix im eindimensionalen Fall .....	10
3.1.3	Gleichungen zur Einhaltung von Nebenbedingungen.....	11
3.2	Lösung des Gleichungssystems.....	12
3.2.1	Reduziertes Gleichungssystem ohne Einhaltung von Nebenbedingungen .....	12
3.2.2	Gleichungssystem mit Einhaltung von Nebenbedingungen.....	12
3.2.3	Lösung des reduzierten nichtlinearen Gleichungssystems.....	13
3.3	Vereinfachungen im eindimensionalen Fall.....	14
3.4	Mehrdimensionaler Fall .....	15
3.4.1	Gleichungssystem.....	15
3.4.2	Funktionalmatrix .....	16
3.4.3	Reduktion des Gleichungssystems .....	16
3.5	Beispiel.....	17
4	Kontinuierliche Approximation .....	19
4.1	Lösung des Integrals.....	19
4.1.1	Berechnung eines speziellen Integrals .....	19
4.1.2	Ableitungen des speziellen Integrals.....	21
4.1.3	Vollständige Lösung des Integrals .....	22
4.2	Vollständiges Gleichungssystem.....	22
4.2.1	Bestimmungsgleichungen .....	22
4.2.2	Funktionalmatrix .....	23
4.2.3	Reduktion und Lösung des Gleichungssystems .....	23
4.3	Fehlerbewertung.....	24
4.3.1	Stationäre Abweichung .....	24
4.3.2	Mittlere quadratische Abweichung .....	24
4.3.3	Maximale absolute Abweichung.....	24
4.3.4	Maximale relative Abweichung .....	24
4.4	Beispiel.....	25
5	Zusammenfassung .....	29
6	Literatur .....	31

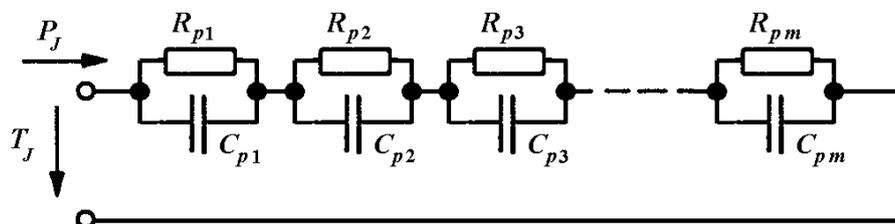


## 1 VERANLASSUNG

Das von Beuken [2] eingeführte thermische Modell für elektrische Öfen hat sich zur Ermittlung von transienten thermischen Belastungen von Halbleiterbauelementen (und auch in anderen Fachgebieten) weitgehend durchgesetzt. Beuken führte das thermische Verhalten von Öfen auf ein elektrisches Ersatzschaltbild von RC-Gliedern in Kettenbruchsaltung (**Bild 1**) zurück, das er experimentell untersuchte. Mit diesem physikalisch sinnvollen Modell kann man nur schlecht arbeiten, so daß die Umrechnung in ein äquivalentes Ersatzschaltbild in Partialbruchsaltung nach **Bild 2** zweckmäßig ist. Eine solche Umrechnung ist immer möglich, und beide Ersatzschaltbilder sind kanonisch, d. h., sie weisen beide eine minimale Zahl von Bauelementen auf [4]. Die Umrechnung führt auf eine Nullstellenbestimmung eines Polynoms  $m$ -ten Grades, die bei größeren  $m$  nicht immer einfach zu lösen ist [10] [12] [14].



**Bild 1:** Thermisches Ersatzschaltbild in Kettenbruchsaltung



**Bild 2:** Thermisches Ersatzschaltbild in Partialbruchsaltung

Die thermischen Daten von Halbleiterbauelementen kann man in der Regel dem Datenblatt entnehmen. Diese Daten sind entweder berechnet [11] oder experimentell ermittelt [8]. Im Datenblatt werden grafische Darstellungen des Wärmewiderstandes gezeigt und/oder die Parameter des thermischen Ersatzschaltbildes in Partialbruchsaltung angegeben (meist mit den Zeitkonstanten der einzelnen Glieder  $\tau_{p_i} = R_{p_i} \cdot C_{p_i}$ ). Für die Parameter der Kühlkörper unter definierten Bedingungen kann man von den Herstellern ebenfalls entsprechende Daten erhalten.

Bei der Entwicklung von Serienprodukten und bei der Konzeption größerer Anlagen genügen die standardisierten Bedingungen der Kühlkörperumgebung den Anforderung an eine ökonomische Produktgestaltung nicht. Zur optimalen Bemessung der Erzeugnisse kommt man um die genaue Berücksichtigung der Wärmeentwicklung anderer Bauteile wie Kabel, Drosseln, Widerstände usw. und auf die Einbeziehung des Einflusses der Wärmeleitung, des Wärmeübergangs und der Strömungsverhältnisse des Kühlmittels (Luft und/oder Wasser) in den Geräten nicht herum. Die genaue Modellierung solcher Systeme ist mit einem erheblichen Aufwand verbunden, so daß noch meist auf experimentelle Untersuchungen zurückgegriffen wird.

In dieser Arbeit soll ein Betrag zur Ermittlung des Ersatzschaltbildes nach **Bild 2** aus gemessenen oder berechneten Verläufen geliefert werden. Im folgenden werden die Gleichungen zur Lösung dieses Problems nach dem mehrdimensionalen Newton-Verfahren abgeleitet. Es stellte sich als

wesentlich stabiler und auch besser konvergierend heraus, als die zuerst erprobte regula falsi. Sie beanspruchte mehr Rechenzeit als das Newton-Verfahren, da die Berechnung der Funktionalmatrix weniger Aufwand erforderte, als die Berechnung der Vielzahl von zu lösenden Exponentialfunktionen. Das in [7] beschriebene Such-Weg-Verfahren (eine Kombination vom Gradienten- und Newton-Verfahren) hat sich zur Lösung der Gleichungen nicht bewährt.

Zur Berechnung des Junction-Temperatur-Verlaufes der Halbleiterbauelemente aus den Case-Temperatur-Verläufen benötigt man eine Zeitkonstantenzerlegung, bei der die Nebenbedingung  $d\mathcal{G}/dt(t=0) = 0$  einzuhalten ist [11]. Dies muß durch geeignete zusätzliche Gleichungen berücksichtigt werden.

Soll aus der Übergangsfunktionsmatrix von Kühldosen, die in Säulen angeordnet sind, der Junction-Temperatur-Verlauf der Halbleiterbauelemente berechnet werden, so ist eine mehrdimensionale Zerlegung erforderlich. Hier sind bis zu sechs zeitliche Verläufe in gleiche Zeitkonstanten zu zerlegen. Zur Berechnung der Verhältnisse in einer Doppelsäule aus wassergekühlten Halbleiterbauelementen ist sogar eine neundimensionale Zerlegung durchzuführen [11].

Für die oben genannten Rechenverfahren werden hier die Gleichungen abgeleitet.

## 2 AUSGLEICHSKURVE UND APPROXIMATIONSFUNKTION

In dieser Arbeit werden Algorithmen abgeleitet, durch die zu gegebenen Funktionen  $f(x)$  Näherungsfunktionen  $\varphi(x)$  so bestimmt werden, daß die  $\varphi(x)$  bezüglich der  $f(x)$  gewisse Minimalforderungen erfüllen. Diese Frage tritt einerseits bei empirisch gegebenen Funktionen auf, andererseits bei analytisch gegebenen Funktionen, die jedoch in der Form komplizierter Ausdrücke vorliegen. Sind von der Funktion  $f(x)$   $n$  Wertepaare  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  bekannt, so heißt die Näherungsfunktion  $\varphi(x)$  Ausgleichskurve. Ist die Funktion  $f(x)$  analytisch gegeben, so nennt man  $\varphi(x)$  eine Approximationsfunktion.

Im Gegensatz zum Konstruieren von Interpolationsfunktionen wird für Ausgleichskurven und Approximationsfunktionen jedoch nicht gefordert, daß  $\varphi(x)$  an gegebenen Stellen  $x$  mit den Funktionswerten übereinstimmt. Die Forderung  $f(x_i) = \varphi(x_i)$  für Interpolationsfunktionen zeigt oftmals die sehr störende Erscheinung, daß zufällige Fehler bei empirisch gegebenen Funktionen den Funktionsverlauf verzerren (Extrema).

Bei einer über einem Intervall  $[a, b]$  analytisch gegebenen Funktion ist es das Ziel der Approximation, eine möglichst einfache Funktion zu finden, die die gegebene Funktion näherungsweise gut darstellt. Das Vorgehen bei der Konstruktion von Ausgleichskurven und Approximationsfunktionen ist dem bei der Bestimmung von Interpolationsfunktionen ähnlich. Es wird eine Menge von Funktionen  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ , ...,  $\varphi_k(x)$  zugrunde gelegt, die über dem Intervall  $[a, b]$ , über dem eine Näherungsfunktion für  $f(x)$  gesucht wird, linear unabhängig sind. Gesucht werden dann die Koeffizienten von  $\varphi(x)$ , so daß  $f(x)$  durch die Ausgleichskurve bzw. Approximationsfunktion angenähert dargestellt wird. Dazu werden Aussagen über die Güte der Ausgleichung bzw. Approximation gebraucht, was die Formulierung von Forderungen an die Näherungsfunktion voraussetzt, aus denen sich dann Gleichungen für die Berechnung der Koeffizienten ableiten lassen.

Für den Fall einer durch  $n$  Wertepaare gegebenen Funktion wird hier nur die Forderung betrachten, daß die Summe der Quadrate der Abweichungen minimal sein soll (Gaußsche Methode der kleinsten Quadrate), also

$$F = \sum_{i=1}^n w_i \cdot [f(x_i) - \varphi(x_i)]^2 = \min. \quad (1)$$

Im Falle einer analytisch gegebenen Funktion wird diese Summe durch das Integral (Approximation im quadratischen Mittel), also

$$F = \int_a^b w(x) \cdot [f(x) - \varphi(x)]^2 dx = \min \quad (2)$$

ersetzt. Dabei stellt  $w(x) > 0$  eine gegebene, auf  $[a, b]$  integrierbare Gewichtsfunktion dar. Entsprechendes gilt für die Gewichte  $w_i > 0$  in Gl. (1).

Für die Ausgleichskurve und für die Approximationsfunktion setzen wir in dieser Arbeit grundsätzlich eine Summe aus mit Zeitkonstanten behafteten Widerständen der Art

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^m R_j (1 - e^{-t/\tau_j}) \quad (3)$$

an. Als elektrisches Ersatzschaltbild entspricht dies der Partialbruchsaltung aus Widerständen und Kondensatoren (**Bild 2**).



### 3 DISKRETE APPROXIMATION (AUSGLEICHSRECHNUNG)

#### 3.1 Allgemeines Gleichungssystem

##### 3.1.1 Gleichungssystem in eindimensionalem Fall

Gegeben seien  $n$  Punkte einer zeitabhängigen Funktion  $f_i = f(t_i)$ . Diese soll durch eine Ausgleichsfunktion nach Gl. (3) angenähert werden. Dabei soll das Gaußsche Prinzip der kleinsten Quadrate

$$F = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - \varphi(x_i)]^2 = \min \quad (4)$$

verwendet werden. Die Gewichte aus Gl. (1) brauchen im allgemeinen keine Anwendung zu finden, wenn die Dichte der Stützpunkte  $t_i$  „vernünftig“ gewählt wurde. Diese Forderung bereitet lediglich im Bereich kleiner Zeiten Schwierigkeiten. Zu empfehlen ist, daß zur Erzielung einer guten Approximation die Bedingung

$$\frac{t_{i+1}}{t_i} \approx \text{const} \quad (5)$$

in grober Näherung eingehalten wird.

Aus Gl. (4) erhält man als notwendige Bedingungen für ein Minimum

$$f_k = \frac{\partial F}{\partial R_k} = \frac{\partial}{\partial R_k} \sum_{i=1}^n \left[ f(t_i) - \sum_{j=1}^m R_j (1 - e^{-t_i/\tau_j}) \right]^2 = 0$$

$$g_k = \frac{\partial F}{\partial \tau_k} = \frac{\partial}{\partial \tau_k} \sum_{i=1}^n \left[ f(t_i) - \sum_{j=1}^m R_j (1 - e^{-t_i/\tau_j}) \right]^2 = 0. \quad (6)$$

$$k = 1(1)m$$

Nach Ausmultiplizieren und Ableiten der Gleichungen ergibt sich

$$f_k = 2 \sum_{i=1}^n \left\{ \left( 1 - e^{-t_i/\tau_k} \right) \left\langle \sum_{j=1}^m [R_j (1 - e^{-t_i/\tau_j})] - f(t_i) \right\rangle \right\} = 0$$

$$g_k = -2 \frac{R_k}{\tau_k^2} \sum_{i=1}^n \left\{ t_i e^{-t_i/\tau_k} \left\langle \sum_{j=1}^m [R_j (1 - e^{-t_i/\tau_j})] - f(t_i) \right\rangle \right\} = 0. \quad (7)$$

$$k = 1(1)m$$

Dies sind  $2m$  Bestimmungsgleichungen für die  $2m$  Parameter der Gleichung (3).

Hinreichende Bedingung für ein Minimum ist, daß die Funktionalmatrix an der Stelle des Minimums positiv definit ist [3]. Da der Nachweis relativ aufwendig ist und man aus den erzielten Ergebnissen schließen können, ob diese vernünftig sind und damit ein Minimum vorliegt, wird auf den Nachweis eines vorliegenden Minimums verzichtet.

### 3.1.2 Funktionalmatrix im eindimensionalen Fall

Zur Anwendung eines produktiven Lösungsverfahrens wird die Funktionalmatrix des Gleichungssystems (7) benötigt, d. h.

$$\|D\| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial R_1} & \frac{\partial f_1}{\partial R_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial R_m} & \frac{\partial f_1}{\partial \tau_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \tau_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial R_1} & \frac{\partial f_2}{\partial R_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial R_m} & \frac{\partial f_2}{\partial \tau_1} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial \tau_m} \\ \vdots & \vdots & & & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial R_1} & \frac{\partial f_m}{\partial R_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial R_m} & \frac{\partial f_m}{\partial \tau_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial \tau_m} \\ \frac{\partial g_1}{\partial R_1} & \frac{\partial g_1}{\partial R_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial R_m} & \frac{\partial g_1}{\partial \tau_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial \tau_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ \frac{\partial g_m}{\partial R_1} & \frac{\partial g_m}{\partial R_2} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial R_m} & \frac{\partial g_m}{\partial \tau_1} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial \tau_m} \end{vmatrix}, \quad (8)$$

die identisch ist mit der Jacobi-Matrix von  $F = F(R_1, R_2, \dots, R_m, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)$  nach Gl. (4). Zuerst leiten wir nach den Widerständen ab und erhalten

$$\frac{\partial f_k}{\partial R_l} = 2 \sum_{i=1}^n [(1 - e^{-t_i/\tau_k})(1 - e^{-t_i/\tau_l})] \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial g_k}{\partial R_l} \right|_{l \neq k} = -2 \frac{R_k}{\tau_k^2} \sum_{i=1}^n [t_i e^{-t_i/\tau_k} (1 - e^{-t_i/\tau_l})] \quad (10)$$

und speziell für  $l = k$

$$\frac{\partial g_k}{\partial R_k} = \frac{\partial f_k}{\partial \tau_k} = -\frac{2}{\tau_k^2} \sum_{i=1}^n \left\{ t_i e^{-t_i/\tau_k} \left\langle \sum_{j=1}^m [K_{jk} R_j (1 - e^{-t_i/\tau_j})] - f(t_i) \right\rangle \right\} \quad (11)$$

mit

$$K_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{für } j \neq k \\ 2 & \text{für } j = k \end{cases}. \quad (12)$$

Für die Ableitungen nach den Zeitkonstanten ergibt sich

$$\left. \frac{\partial f_k}{\partial \tau_l} \right|_{l \neq k} = -2 \frac{R_l}{\tau_l^2} \sum_{i=1}^n [t_i e^{-t_i/\tau_l} (1 - e^{-t_i/\tau_k})] \quad (13)$$

$$\left. \frac{\partial g_k}{\partial \tau_l} \right|_{l \neq k} = -2 \frac{R_k R_l}{\tau_k^2 \tau_l^2} \sum_{i=1}^n (t_i^2 e^{-t_i/\tau_k} e^{-t_i/\tau_l}) \quad (14)$$

$$\frac{\partial g_k}{\partial \tau_k} = -2 \frac{R_k}{\tau_k^4} \sum_{i=1}^n \left\{ (t_i - 2\tau_k) t_i e^{-t_i/\tau_k} \left\langle \sum_{j=1}^m [R_j (1 - e^{-t_i/\tau_j})] - f(t_i) \right\rangle - t_i^2 R_k e^{-2t_i/\tau_k} \right\}. \quad (15)$$

Für  $\frac{\partial f_k}{\partial \tau_k}$  gilt aus Symmetriegründen Gl. (11).

### 3.1.3 Gleichungen zur Einhaltung von Nebenbedingungen

Für gewisse Rechnungen (siehe Abschnitt 0 und [11]) ist es erforderlich, daß die Ausgleichsfunktion nach Gl. (3) bestimmte Nebenbedingungen erfüllt.<sup>1</sup>

#### 3.1.3.1 Festlegung des Endwertes

Ist der stationäre Endwert festzulegen, müssen die Parameter der Gl. (3) die Bedingung

$$h_0 = \sum_{j=1}^m R_j = R_{end} \quad (16)$$

erfüllen.

#### 3.1.3.2 Festlegung der Anstiegsgeschwindigkeit

Manchmal ist die Anstiegsgeschwindigkeit bei der Zeit Null mit null festzulegen, eventuell sind auch noch höhere Ableitungen mit null festzulegen. Aus

$$\frac{d}{dt} \varphi(t) = \sum_{j=1}^m \frac{R_j}{\tau_j} e^{-t/\tau_j} \quad (17)$$

und allgemein

$$\frac{d^\mu}{dt^\mu} \varphi(t) = - \sum_{j=1}^m \frac{R_j}{(-\tau_j)^\mu} e^{-t/\tau_j} \quad (18)$$

folgt allgemein für die Zeit  $t = 0$ :

$$h_\mu = \sum_{j=1}^m \frac{R_j}{\tau_j^\mu} = 0. \quad (19)$$

#### 3.1.3.3 Berechnung der Ableitungen

Für die weitere Berechnung ist die Bereitstellung der Ableitungen notwendig:

$$\frac{\partial h_0}{\partial R_l} = 1 \quad (20)$$

$$\frac{\partial h_0}{\partial \tau_l} = \frac{\partial^2 h_\mu}{\partial R_l^2} = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial h_\mu}{\partial R_l} = \frac{1}{\tau_l^\mu} \quad (22)$$

$$\frac{\partial h_\mu}{\partial \tau_l} = -\mu \frac{R_l}{\tau_l^{\mu+1}} \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 h_\mu}{\partial \tau_l^2} = \mu(\mu+1) \frac{R_l}{\tau_l^{\mu+2}} \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 h_\mu}{\partial \tau_l \partial R_l} = -\frac{\mu}{\tau_l^{\mu+1}}. \quad (25)$$

---

<sup>1</sup> Bei Einhaltung dieser Nebenbedingungen reichen die bisher berechneten Ableitungen nicht aus. Hier sind die Ableitungen der Lagrange-Funktion zu verwenden (siehe Abschnitt 3.2.2).

### 3.2 Lösung des Gleichungssystems

#### 3.2.1 Reduziertes Gleichungssystem ohne Einhaltung von Nebenbedingungen

Beide Gleichungsarten des Gleichungssystems (7) lassen sich (bei gegebenen  $\tau_j$ ) direkt nach den  $R_j$ -Werten auflösen. Es handelt sich dann um ein lineares Gleichungssystem mit  $m$  Unbekannten. Nehmen wir beispielsweise die  $m$  Gleichungen für  $f_k$  zur Berechnung der  $R_j$ -Werte, dann bleiben uns  $m$  Gleichungen für  $g_k = 0$  zur Bestimmung der Zeitkonstanten. Hier gelten aber die Gleichungen (14) und (15) nicht mehr, sondern wir müssen die Ableitungen neu bestimmen.

Es ist die Gleichung

$$g_k = g_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m, R_1, R_2, \dots, R_m) \tag{26}$$

zu differenzieren mit den eingesetzten Werten für die Widerstände

$$R_j = R_j(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) \tag{27}$$

aus den aufgelösten Gleichungen  $f_k = 0$  aus Gl. (7).

Dann gilt nach der Kettenregel

$$\frac{\partial g_k^*}{\partial \tau_l} = \frac{\partial g_k}{\partial \tau_l} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_k}{\partial R_j} \frac{\partial R_j}{\partial \tau_l} \tag{28}$$

für das zu lösende Gleichungssystem

$$g_k^* = g_k^*(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m). \tag{29}$$

Dazu müssen wir die  $\frac{\partial R_j}{\partial \tau_l}$  aus Gl. (27) berechnen. Da aber die Gleichungen für die  $R_j$  nur implizit

gegeben sind, ergibt sich die Lösung aus dem linearen Gleichungssystem

$$\left\| \frac{\partial f_i}{\partial R_j} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial R_j}{\partial \tau_l} \right\| = - \left\| \frac{\partial f_i}{\partial \tau_l} \right\|. \tag{30}$$

$i, j, l = 1(1)m$

Unter der Voraussetzung, daß die Determinante von  $\left\| \frac{\partial f_i}{\partial R_j} \right\|$  ungleich Null ist, kann dieses Gleichungssystem gelöst werden [9].

#### 3.2.2 Gleichungssystem mit Einhaltung von Nebenbedingungen

Nach den bekannten Extremwertbedingungen für Funktionen beim Einhalten von Nebenbedingungen (z. B. [3] und [9]) erhalten wir folgendes Gleichungssystem mit  $2m + n + 1$  Unbekannten. Aus

$$F^* = \sum_{i=1}^n [f(t_i) - \varphi(t_i)]^2 + \sum_{\mu=1_0^a} \lambda_\mu h_\mu \tag{31}$$

werden die Gleichungen

$$f_l^* = \frac{\partial F^*}{\partial R_l} = \frac{\partial F}{\partial R_l} + \sum_{\mu=1_0^a} \lambda_\mu \frac{\partial h_\mu}{\partial R_l} = 0$$

$$g_l^* = \frac{\partial F^*}{\partial \tau_l} = \frac{\partial F}{\partial \tau_l} + \sum_{\mu=1_0^a} \lambda_\mu \frac{\partial h_\mu}{\partial \tau_l} = 0 \tag{32}$$

$l = 1(1)m$

und dazu die Gleichungen aus (19)

$$h_\mu = \sum_{j=1}^m \frac{R_j}{\tau_j^\mu} = 0, \quad \mu = 1(1)a \tag{33}$$

sowie bei Bedarf Gl. (16) für  $\mu = 0$ .

Hier können wir die Gleichungen für die  $f^*$ , die Gleichungen (33) und eventuell die Gl. (16) linear nach den  $R_j$  und  $\lambda_\mu$  auflösen und wir erhalten analog zu den Gleichungen ohne Nebenbedingungen ein  $m$ -dimensionales nichtlineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Zeitkonstanten

$$g_k^+ = g_k^+ (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) \quad (34)$$

mit

$$\frac{\partial g_k^+}{\partial \tau_l} = \frac{\partial g_k^*}{\partial \tau_l} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_k^*}{\partial R_j} \frac{\partial R_j}{\partial \tau_l} + \sum_{\mu=0}^a \frac{\partial g_k^*}{\partial \lambda_\mu} \frac{\partial \lambda_\mu}{\partial \tau_l}, \quad (35)$$

wobei hier die Ableitungen  $\frac{\partial R_j}{\partial \tau_l}$  und  $\frac{\partial \lambda_\mu}{\partial \tau_l}$  mit einem Gleichungssystem analog Gl. (30) berechnet werden können.

### 3.2.3 Lösung des reduzierten nichtlinearen Gleichungssystems

In allen hier behandelten Fällen bleibt als zu lösendes Problem ein  $m$ -dimensionales nichtlineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ f_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ f_3 &= f_3(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \\ &\vdots \\ f_m &= f_m(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

welches kurzgefaßt mit der Vektorgleichung

$$\vec{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (37)$$

beschrieben werden kann.

#### 3.2.3.1 Näherungslösung mit einem sukzessiven Verfahren

Bei den bekannten Iterationsverfahren zur Lösung solcher Gleichungssysteme besteht die Hauptschwierigkeit darin, eine Ausgangsnäherung  $\mathbf{x}^{(0)}$  zu finden, die so nahe an der Lösung liegt, daß das Verfahren konvergiert. Für den hier vorliegenden Fall hat sich ein Verfahren bewährt, bei dem die zu bestimmenden Zeitkonstanten  $\tau_j$  einzeln so verschoben werden, daß die Funktion  $F$  bzw.  $F^*$  immer kleiner wird. So kommt man sicher in die Nähe einer Lösung. Die Widerstände und  $\lambda$ -Werte werden dabei jeweils durch Lösung der linearen Gleichungssysteme, wie oben beschrieben, bestimmt.

#### 3.2.3.2 Iterationsverfahren nach Newton

Bei gegebener Funktionalmatrix

$$\|D\| = \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right\|; \quad i, k = 1(1)n \quad (38)$$

lautet die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens

$$\mathbf{x}^{(v+1)} = \mathbf{x}^{(v)} - \|D\|^{-1}(\mathbf{x}^{(v)}) \cdot \vec{f}(\mathbf{x}^{(v)}). \quad (39)$$

Das Verfahren konvergiert mit mindestens zweiter Ordnung gegen die Lösung, wenn der Startvektor nur genügend nahe bei der Lösung liegt [7].

### 3.3 Vereinfachungen im eindimensionalen Fall

Im eindimensionalen Fall läßt sich das Gleichungssystem (7) vereinfachen, indem man es durch 2 bzw.  $-2 \frac{R_k}{\tau_k^2} \neq 0$  dividiert.

Man erhält dann

$$f_k = \sum_{i=1}^n \left\{ \left( 1 - e^{-t_i/\tau_k} \right) \left\langle \sum_{j=1}^m [R_j (1 - e^{-t_i/\tau_j})] - f(t_i) \right\rangle \right\} = 0$$

$$g_k = \sum_{i=1}^n \left\{ t_i e^{-t_i/\tau_k} \left\langle \sum_{j=1}^m [R_j (1 - e^{-t_i/\tau_j})] - f(t_i) \right\rangle \right\} = 0 \quad (40)$$

$$k = 1(1)m$$

bzw. in anderer, der Implementation auf dem Rechner mehr entgegenkommender Form,

$$f_k = \sum_{j=1}^m \left\{ R_j \sum_{i=1}^n \left[ (1 - e^{-t_i/\tau_j})(1 - e^{-t_i/\tau_k}) \right] \right\} - \sum_{i=1}^n [f(t_i)(1 - e^{-t_i/\tau_k})] = 0$$

$$g_k = \sum_{j=1}^m \left\{ R_j \sum_{i=1}^n [t_i e^{-t_i/\tau_k} (1 - e^{-t_i/\tau_j})] \right\} - \sum_{i=1}^n [t_i f(t_i) e^{-t_i/\tau_k}] = 0 \quad (41)$$

$$k = 1(1)m$$

Für die Ableitungen gelten dann folgende vereinfachte Gleichungen:

$$\frac{\partial f_k}{\partial R_l} = \sum_{i=1}^n [(1 - e^{-t_i/\tau_k})(1 - e^{-t_i/\tau_l})] \quad (42)$$

$$\frac{\partial g_k}{\partial R_l} = \sum_{i=1}^n [t_i e^{-t_i/\tau_k} (1 - e^{-t_i/\tau_l})] \quad (43)$$

$$\left. \frac{\partial f_k}{\partial \tau_l} \right|_{l \neq k} = -\frac{R_l}{\tau_l^2} \sum_{i=1}^n [t_i e^{-t_i/\tau_l} (1 - e^{-t_i/\tau_k})] \quad (44)$$

$$\left. \frac{\partial g_k}{\partial \tau_l} \right|_{l \neq k} = -\frac{R_l}{\tau_l^2} \sum_{i=1}^n (t_i^2 e^{-t_i/\tau_k} e^{-t_i/\tau_l}) \quad (45)$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial \tau_k} = -\frac{1}{\tau_k^2} \sum_{i=1}^n \left\{ t_i e^{-t_i/\tau_k} \left\langle \sum_{j=1}^m [K_{jk} R_j (1 - e^{-t_i/\tau_j})] - f(t_i) \right\rangle \right\} \quad (46)$$

$$\frac{\partial g_k}{\partial \tau_k} = -\frac{1}{\tau_k^2} \sum_{i=1}^n \left\{ t_i^2 e^{-t_i/\tau_k} \left\langle \sum_{j=1}^m [R_j (1 - K_{jk} e^{-t_i/\tau_j})] - f(t_i) \right\rangle \right\}. \quad (47)$$

Die Symmetrie der Funktionalmatrix geht dabei natürlich verloren.

### 3.4 Mehrdimensionaler Fall

Die Kühldosenparameter lassen sich bekanntlich [11] durch den Ansatz

$$\begin{pmatrix} T_1(p) \\ T_2(p) \\ T_B(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11}(p) & Z_{12}(p) & Z_{13}(p) \\ Z_{21}(p) & Z_{22}(p) & Z_{23}(p) \\ Z_{31}(p) & Z_{32}(p) & Z_{33}(p) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_1(p) \\ P_2(p) \\ T_A(p) \end{pmatrix}$$

beschreiben. Für die Auswertung hat es sich als am zweckmäßigsten erwiesen, gleiche Pole für alle  $Z$ -Parameter anzunehmen, d. h. alle auftretenden Parameter werden in die gleiche Zeitkonstanten zerlegt. Hierfür soll ein geeignetes Gleichungssystem aufgestellt und gelöst werden. Die Einhaltung von Nebenbedingungen werden hier nicht gefordert und darum auch nicht weiter betrachtet.

#### 3.4.1 Gleichungssystem

Wir setzen auch hier für alle Ausgleichsfunktionen

$$\varphi^v(t) = \sum_{j=1}^m R_j^v (1 - e^{-t/\tau_j}) \quad (48)$$

an. Eigentlich wollen wir auch hier für jeden einzelnen Kühldosenparameter, daß bei ihnen die Gl. (1) erfüllt wird. Dies ist hier aber nicht zu erfüllen, da hier die  $\tau_j$ -Werte nicht mehr einzeln frei wählbar sind. Wir fordern also

$$F = \sum_{v=1}^p K^v \left\{ \sum_{i=1}^{n^v} [f^v(t_i^v) - \varphi^v(t_i^v)]^2 \right\} = \min, \quad (49)$$

wobei  $p$  die Anzahl der Parameter (Dimension des Verfahrens) und  $K^v$  ein Faktor, der eine unterschiedliche Bewertung der einzelnen Parameter, je nach Größe und Anzahl der Stützstellen, zum Ausdruck bringt, sind.

Wir erhalten daraus die Gleichungen durch partielle Differentiation als notwendige Bedingung für ein Minimum

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial R_k^v} \sum_{v=1}^p K^v \left\{ \sum_{i=1}^{n^v} [f^v(t_i^v) - \sum_{j=1}^m R_j^v (1 - e^{-t_i^v/\tau_j})]^2 \right\} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \tau_k} \sum_{v=1}^p K^v \left\{ \sum_{i=1}^{n^v} [f^v(t_i^v) - \sum_{j=1}^m R_j^v (1 - e^{-t_i^v/\tau_j})]^2 \right\} &= 0 \end{aligned} \quad (50)$$

Aus der oberen Gleichung folgt sofort analog Gl. (7)

$$f_k^v = \frac{\partial F}{\partial R_k^v} = \sum_{i=1}^{n^v} \left\{ (1 - e^{-t_i^v/\tau_k}) [\varphi^v(t_i^v) - f^v(t_i^v)] \right\} = 0 \quad (51)$$

$$k = 1(1)m, \quad v = 1(1)p$$

und damit  $p$  lineare Gleichungssysteme für die  $R_j^v$ , die wir sofort nach den  $R_j^v$  auflösen können.

Für die  $g_k$  erhalten wir analog Gl. (7) durch partielle Ableitung von  $F$  nach  $\tau_k$  und anschließende Multiplikation mit  $-1/2 \tau_k^2$  die Beziehung

$$g_k = \sum_{v=1}^p \left\langle K^v R_k^v \sum_{i=1}^{n^v} \left\{ t_i^v e^{-t_i^v/\tau_k} [\varphi^v(t_i^v) - f^v(t_i^v)] \right\} \right\rangle^2 = 0 \quad (52)$$

$$k = 1(1)m$$

### 3.4.2 Funktionalmatrix

Analog zu Abschnitt 3.1.2 ergibt sich für die Komponenten der Funktionalmatrix

$$\frac{\partial f_k^v}{\partial R_l^v} = \sum_{i=1}^{n^v} \left[ \left(1 - e^{-t_i^v / \tau_k}\right) \left(1 - e^{-t_i^v / \tau_l}\right) \right] \quad (53)$$

$$\frac{\partial g_k}{\partial R_l^v} \Big|_{l \neq k} = K^v R_k^v \sum_{i=1}^{n^v} \left[ t_i^v e^{-t_i^v / \tau_k} \left(1 - e^{-t_i^v / \tau_l}\right) \right] \quad (54)$$

$$\frac{\partial f_k^v}{\partial \tau_l} \Big|_{l \neq k} = -\frac{R_l^v}{\tau_l^2} \sum_{i=1}^{n^v} \left[ t_i^v e^{-t_i^v / \tau_l} \left(1 - e^{-t_i^v / \tau_k}\right) \right] \quad (55)$$

$$\frac{\partial g_k}{\partial \tau_l} \Big|_{l \neq k} = -\frac{1}{\tau_l^2} \sum_{v=1}^p \left\{ K^v R_k^v R_l^v \sum_{i=1}^{n^v} \left[ \left(t_i^v\right)^2 e^{-t_i^v / \tau_k} e^{-t_i^v / \tau_l} \right] \right\} \quad (56)$$

$$\frac{\partial g_k}{\partial R_k^v} = K^v \sum_{i=1}^{n^v} \left\{ t_i^v e^{-t_i^v / \tau_k} \left\langle \sum_{j=1}^m \left[ K_{jk} R_j^v \left(1 - e^{-t_i^v / \tau_j}\right) \right] - f^v(t_i^v) \right\rangle \right\} \quad (57)$$

$$\frac{\partial f_k^v}{\partial \tau_k} = -\frac{1}{\tau_k^2} \sum_{i=1}^{n^v} \left\{ t_i^v e^{-t_i^v / \tau_k} \left\langle \sum_{j=1}^m \left[ K_{jk} R_j^v \left(1 - e^{-t_i^v / \tau_j}\right) \right] - f^v(t_i^v) \right\rangle \right\} \quad (58)$$

$$\frac{\partial g_k}{\partial \tau_k} = \frac{1}{\tau_k^2} \sum_{v=1}^p \left\{ K^v R_k^v \sum_{i=1}^{n^v} \left\langle \left(t_i^v\right)^2 e^{-t_i^v / \tau_k} \left\{ \sum_{j=1}^m \left[ R_j^v \left(1 - K_{jk} e^{-t_i^v / \tau_j}\right) \right] - f^v(t_i^v) \right\} \right\rangle \right\}. \quad (59)$$

### 3.4.3 Reduktion des Gleichungssystems

Verwenden wir die  $p$  linearen Gleichungssysteme (51) zur Bestimmung der  $R_j^v$ -Werte, so bleiben auch hier  $m$  Gleichungen

$$g_k^* = g_k^*(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) \quad (60)$$

$$k = 1(1)m$$

übrig. Hier gilt dann

$$\frac{\partial g_k^*}{\partial \tau_l} = \frac{\partial g_k}{\partial \tau_l} + \sum_{v=1}^p \left\{ \sum_{j=1}^m \left[ \frac{\partial g_k^v}{\partial R_j^v} \frac{\partial R_j^v}{\partial \tau_l} \right] \right\}. \quad (61)$$

Mit den  $p$  Matrixensystem aus je drei Matrizen

$$\|B_{kl}^v\| = \left\| \frac{\partial f_k^v}{\partial R_l^v} \right\| \quad (62)$$

$$\|D_{kl}^v\| = \left\| \frac{\partial f_k^v}{\partial \tau_l} \right\| \quad (63)$$

können wir die Gleichung

$$\|B^v\| \cdot \|C^v\| = -\|D^v\| \quad (64)$$

mit der Lösung

$$\|C_{kl}^v\| = \left\| \frac{\partial R_k^v}{\partial \tau_l} \right\| \quad (65)$$

bestimmen, die dann in Gl. (61) eingesetzt werden kann.

### 3.5 Beispiel

**Tabelle 1** zeigt die Ergebnisse einer Messung an einem Stromrichterschrank mit einer Bemessungsleistung von 500 kVA bei einem Verlustleistungssprung von 800 W. Für diese Meßwerte wurden zunächst vier Ausgleichsrechnungen mit unterschiedlicher Zahl von Zeitkonstanten durchgeführt. Die Ergebnisse sind in **Tabelle 2** zu sehen und sind in **Bild 3** teilweise visualisiert. Man sieht, daß mit steigender Zahl von Zeitkonstanten  $m$  die Qualität der Ausgleichung steigt. Die mögliche Qualitätssteigerung ist aber begrenzt. Eine Vorgabe von  $m = 4$  liefert für das Beispiel keine nennenswerte Verbesserung mehr. Bei einer weiteren Erhöhung von  $m$  konvergiert das Newton-Verfahren nicht mehr. Meist „laufen“ dann zwei Zeitkonstanten aufeinander zu und die dazugehörigen Widerstände heben sich gegenseitig auf. Zudem kann die Ausgleichsrechnung durchaus auch unterschiedliche Ergebnisse liefern, die davon abhängen, welche Startwerte man wählt.

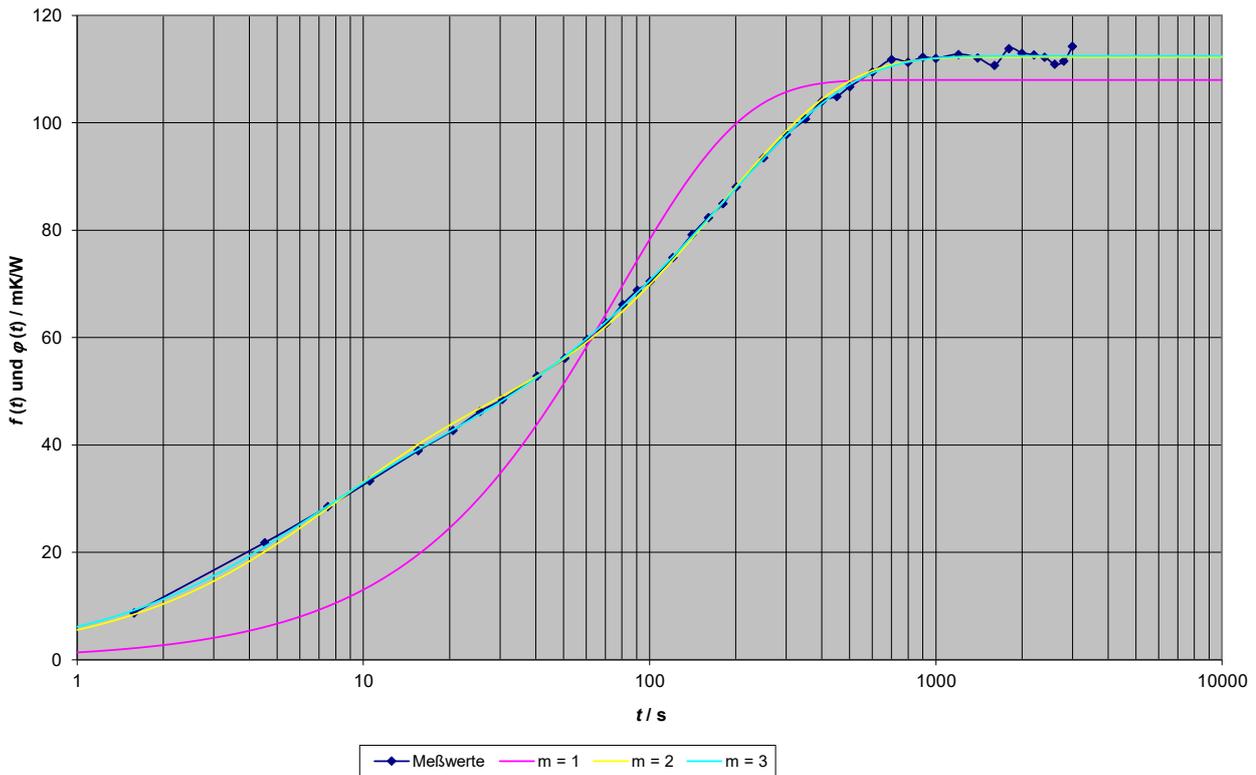
Werden Rechnungen mit den Nebenbedingungen für die Ableitungen nach Abschnitt 3.1.3.2 durchgeführt, muß mindestens ein Parameter  $R_{pi}$  negativ sein. **Tabelle 3** zeigt drei Beispiele. Die Qualität der Näherungen wird zwangsläufig etwas, aber nicht wesentlich, schlechter.

$t / s$	$Z_{th} / mK/W$						
1,58	8,75	70,5	62,6	350,6	100,7	1600,5	110,7
4,52	21,8	80,5	66,2	400,5	104,1	1800,5	113,8
7,52	28,5	90,5	68,8	450,6	104,9	2000,5	113,0
10,5	33,3	100,5	70,5	500,5	106,7	2200,5	112,6
15,5	38,9	120,5	74,9	600,6	109,4	2400,5	112,2
20,5	42,7	140,5	79,1	700,5	111,8	2600,5	110,9
25,5	46,2	160,5	82,4	800,6	111,3	2800,5	111,5
30,5	48,5	180,6	84,9	900,6	112,2	3000,5	114,2
40,5	52,8	200,6	88,1	1000,5	112,0	–	–
50,5	56,1	250,6	93,4	1200,6	112,7	–	–
60,5	59,6	300,6	97,8	1400,5	112,0	–	–

**Tabelle 1:** Ergebnisse einer thermischen Messung an einem Stromrichterschrank (forcierte Luftkühlung)

Ausgleichsrechnung mit	$m = 1$		$m = 2$		$m = 3$		$m = 4$	
$R_{p1} [mK/W] / \tau_{p1} [s]$	108	77,5	37,8	6,86	30,4	5,13	18,0	4,03
$R_{p2} [mK/W] / \tau_{p2} [s]$	–		74,4	178	13,5	34,0	15,0	8,35
$R_{p3} [mK/W] / \tau_{p3} [s]$	–		–		68,5	196	11,8	42,6
$R_{p4} [mK/W] / \tau_{p4} [s]$	–		–		–		67,6	197
Summe von $R_p$	107,7 mK/W		112,2 mK/W		112,5 mK/W		112,5 mK/W	
mittlere quadratische Abweichung	9,25 mK/W		0,872 mK/W		0,650 mK/W		0,646 mK/W	
größte Abweichung	– 19,6 mK/W		– 2,03 mK/W		– 1,76 mK/W		– 1,75 mK/W	
größte relative Abweichung	– 75,1 %		– 7,84 %		5,47 %		7,44 %	

**Tabelle 2:** Ergebnisse der Ausgleichsrechnung mit unterschiedlicher Zahl von Zeitkonstanten



**Bild 3:** Meßwerte und drei Ausgleichskurven nach **Tabelle 2** mit  $m = 1, 2$  und  $3$

Ausgleichsrechnung mit	$m = 3$		$m = 4$		$m = 4$	
Nebenbedingungen	$\frac{d\varphi}{dt} = 0$		$\frac{d\varphi}{dt} = 0$		$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$	
$R_{p1} / \tau_{p1}$	- 284 $\mu\text{K/W}$	47,3 ms	- 734 $\mu\text{K/W}$	104 ms	25,8 $\mu\text{K/W}$	3,74 ms
$R_{p2} / \tau_{p2}$	37,5 mK/W	6,71 s	30,2 mK/W	4,82 s	- 89,6 $\mu\text{K/W}$	6,98 ms
$R_{p3} / \tau_{p3}$	74,8 mK/W	173 s	14,1 mK/W	31,2 s	37,8 mK/W	6,83 s
$R_{p4} / \tau_{p4}$	-		68,9 mK/W	195 s	74,5 mK/W	178 s
Summe von $R_p$	112,0 mK/W		112,5 mK/W		112,2 mK/W	
mittlere quadratische Abweichung	0,900 mK/W		0,647 mK/W		0,874 mK/W	
größte Abweichung	- 2,20 mK/W		- 1,77 mK/W		- 2,03 mK/W	
größte relative Abweichung	- 8,29 %		- 3,06 %		- 7,78 %	

**Tabelle 3:** Ergebnisse der Ausgleichsrechnung mit unterschiedlicher Zahl von Zeitkonstanten und bei Einhaltung von Nebenbedingungen

## 4 KONTINUIERLICHE APPROXIMATION

Gegeben sei eine Funktion

$$f(t) = \sum_{i=1}^n R_i (1 - e^{-t/\tau_i}) \quad (66)$$

mit großem  $n$  (15 ... 30). Gesucht ist nun eine Approximationsfunktion, die zur Unterscheidung von Gl. (66) im Unterschied zu Gl. (3)

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^m G_j (1 - e^{-t/\gamma_j}) \quad (67)$$

genannt wird. Dabei soll  $m = 3 \dots 6$  sein und die Gl. (2) soll erfüllt werden.

Mit der Gewichtsfunktion  $w(t) = 1$  liefert aber Gl. (2) gänzlich unbrauchbare Ergebnisse, da der hier entscheidende Bereich mit kleinem  $t$  kaum berücksichtigt wird. Man braucht sich dazu nur einmal  $f(t)$  mit linearer Zeitachse aufgetragen vorzustellen!

Bei Verwendung der Gewichtsfunktion  $w(t) = 1/t$  wird der Bereich kleiner Zeiten besser berücksichtigt. Damit ergibt sich durch Integration mit der Substitutionsmethode als zu lösendes Problem die Gleichung

$$F = \int_{t_0^* = \ln t_0}^{t_1^* = \ln t_1} [f(e^{t^*}) - \varphi(e^{t^*})]^2 dt^* = \min \quad (68)$$

aus einer Zeittransformation (Substitution)

$$t = e^{t^*} \quad | \quad t^* = \ln t. \quad (69)$$

Gl. (68) entspricht einer „linearen“ Lösung der Approximation mit logarithmischer Abszisse. Die Einhaltung von Nebenbedingungen wird hier nicht gefordert.

### 4.1 Lösung des Integrals

#### 4.1.1 Berechnung eines speziellen Integrals

Um das Integral aus Gl. (68) zu lösen, muß man als Zwischenergebnis ein spezielles Integral

$$I = \int_{t_0^*}^{t_1^*} (e^{-1/\tau})^{e^{t^*}} \cdot dt^* \quad (70)$$

bereitstellen. Durch die Substitution  $z = e^{t^*}$  erhält man

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \frac{e^{-z/\tau}}{z} dz = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z} \frac{(-z/\tau)^n}{n!} \right] dz = \ln|z| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z/\tau)^n}{n \cdot n!} \Big|_{t_0}^{t_1}. \quad (71)$$

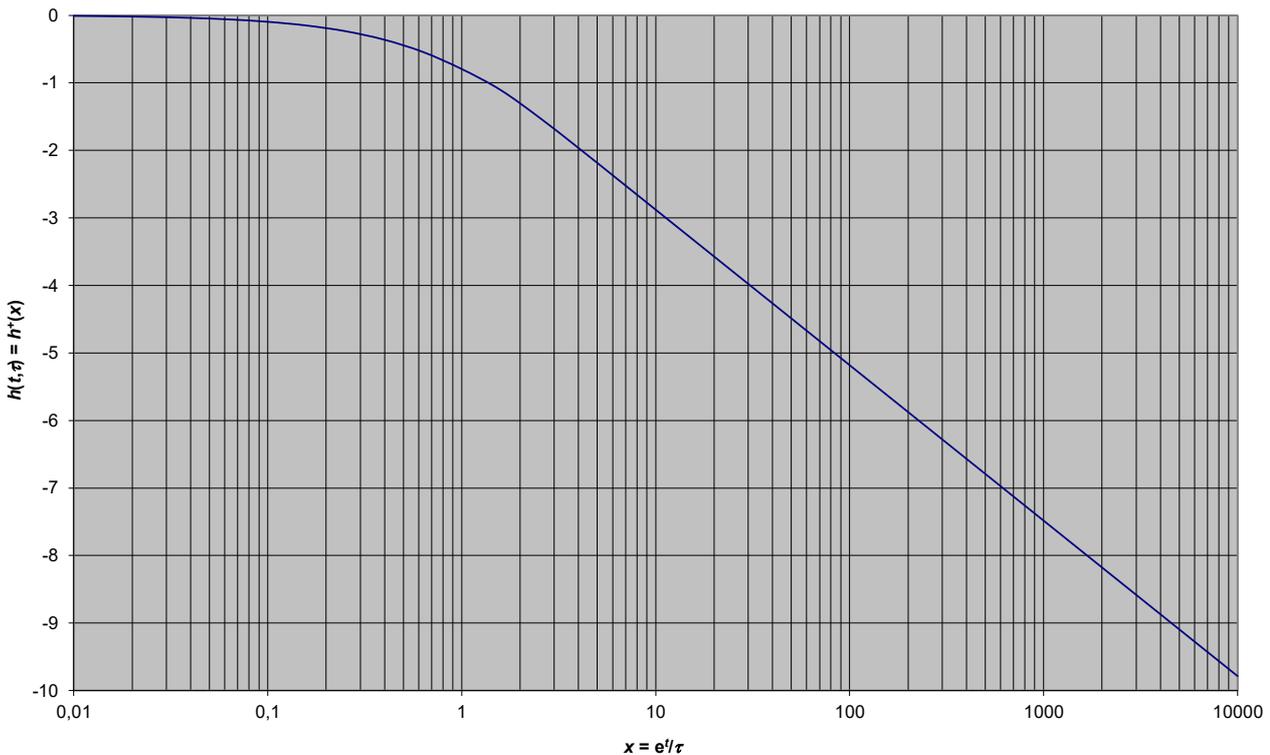
Eine geschlossene Lösung für das Integral existiert nicht. Definiert man

$$h(t, \tau) = h^+ \left( \frac{e^t}{\tau} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left( -\frac{e^t}{\tau} \right)^n}{n \cdot n!}, \quad (72)$$

so erhält man eine Funktion, mit der formal weitergerechnet werden kann. Als Lösung für Gl. (70) ergibt sich nun

$$I = t_1 + h(t_1, \tau) - t_0 - h(t_0, \tau). \quad (73)$$

**Bild 4** zeigt den Funktionsverlauf von  $h^+(x)$ . Nun müssen wir nur noch einen brauchbaren, d. h. numerisch auswertbaren Ausdruck für  $h(t, \tau)$  suchen.



**Bild 4:** Verlauf von  $h^+(x)$

Die direkte Reihenentwicklung scheidet für größere Argumente  $x$  von  $h^+$  aus. Die Reihe ist zwar absolut konvergent, aber sie setzt sich für kleine Werte von  $n$  aus sehr großen alternierenden Beträgen zusammen [z. B.  $x = 1000$ :  $h^+ = -1000 + 250\,000 - 55\,555\,555,5 + 10,416\,666\bar{6} \cdot 10^9 - \dots$ ; die Lösung ist  $h^+(1000) = -7,48497\dots$ ]. Bei der begrenzten Stellenzahl des Rechners löschen sich die gültigen Stellen gegenseitig aus. Auch das Zusammenfassen einzelner Gruppen führt nicht ans Ziel.

Das hier gesuchte Integral ist mit dem Exponentialintegral verwandt, welches in der Literatur vielfach behandelt wird ([1], [5], [6], [13]) und auch tabelliert ([1] und [13]) vorliegt. Mit dem eigentlichen Exponentialintegral

$$Ei(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt = C + \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!}, \quad (C = 0,577\,215\,664\,901 \dots \text{ Eulersche Konstante}) \quad (74)$$

können wir für die gesuchte Funktion

$$h^+(x) = Ei(-x) - C - \ln|x| \quad (75)$$

ableiten. Bei Verwendung des von Gl. (74) abgeleiteten Integrals

$$E_1(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = -C - \ln|x| - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^n}{n \cdot n!} \quad (76)$$

erhalten wir analog

$$h^+(x) = -E_1(x) - C - \ln|x|. \quad (77)$$

Die in [1] angegebene polynomiale bzw. rationale Approximation für  $E_1(x)$  gibt dann die Möglichkeit der schnellen Berechnung von  $h^+(x)$

$$h^+(x) = \begin{cases} -a_1x - a_2x^2 - \dots - a_5x^5 \pm 2 \cdot 10^{-7} & \text{für } x \leq 1 \\ -C - \ln|x| - \frac{e^{-x} x^4 + \dots + a_4}{x x^4 + \dots + b_4} \pm 2 \cdot 10^{-8} & \text{für } x > 1 \\ \text{speziell: } -C - \ln|x| & \text{für } x \geq 23^2 \end{cases} \quad (78)$$

**Tabelle 4** zeigt die Koeffizienten zur Berechnung.

polynomiale Approximation für $x \leq 1$		rationale Approximation für $x > 1$	
$a_0 = -C =$	$-0,577215665$		
$a_1 =$	$0,99999193$	$a_1 =$	$8,57332874$
$a_2 =$	$-0,24991055$	$a_2 =$	$18,05901697$
$a_3 =$	$0,05519968$	$a_3 =$	$8,634760893$
$a_4 =$	$-0,00976004$	$a_4 =$	$0,26777373$
$a_5 =$	$0,00107857$	$b_1 =$	$9,573322345$
		$b_2 =$	$25,63295615$
		$b_3 =$	$21,09965308$
		$b_4 =$	$3,95849692$

**Tabelle 4:** Koeffizienten zur Approximation von  $h^+(x)$  nach Gl. (78) (aus [1])

Reicht die mit Gl. (78) erreichte Genauigkeit nicht aus, so kann eine Berechnung mit Tschebyscheffschen Polynomen ([5] und [6]) Abhilfe schaffen. Hier ist die Rechengenauigkeit  $|\varepsilon| < 1 \cdot 10^{-12}$ . [5] hält außerdem Faktoren zur Berechnung bis zu  $|\varepsilon| < 1 \cdot 10^{-20}$  bereit.

#### 4.1.2 Ableitungen des speziellen Integrals

An dieser Stelle schreiben wir noch drei Gleichungen mit Ableitungen von  $h(t, \tau)$  auf, die später oft benötigt werden:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} h(t, \tau) = \frac{1}{\tau} \left( 1 - e^{-\frac{e^t}{\tau}} \right) \quad (79)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_1} h\left(t, \frac{\tau_1 \cdot \tau_2}{\tau_1 + \tau_2}\right) = \frac{\tau_2}{\tau_1(\tau_1 + \tau_2)} \left( 1 - e^{-\frac{(\tau_1 + \tau_2) e^t}{\tau_1 \cdot \tau_2}} \right) \quad (80)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} h\left(t, \frac{\tau}{2}\right) = \frac{1}{\tau} \left( 1 - e^{-\frac{2e^t}{\tau}} \right). \quad (81)$$

<sup>2</sup> Für größere Argumente ergibt sich gegenüber der mittleren Zeile kein relevanter Unterschied.

### 4.1.3 Vollständige Lösung des Integrals

Mit Hilfe der in Abschnitt 4.1.1 bereitgestellten Funktion  $h(t, \tau)$  können wir durch ausmultiplizieren und nach längerer Rechnung aufschreiben:

$$\begin{aligned}
 F &= \int_{t_0^*=\ln t_0}^{t_1^*=\ln t_1} [f(e^{t^*}) - \varphi(e^{t^*})]^2 dt^* \\
 F &= 2 \left[ \left( \sum_{i=1}^n R_i \right) - \left( \sum_{j=1}^m G_j \right) \right] \cdot \left\{ \sum_{j=1}^m \langle G_j [h(t_1, \gamma_j) - h(t_0, \gamma_j)] \rangle - \sum_{i=1}^n \langle R_i [h(t_1, \tau_i) - h(t_0, \tau_i)] \rangle \right\} - \dots \\
 &\dots - 2 \sum_{j=1}^m \left\{ G_j \cdot \sum_{i=1}^n \langle R_i [h(t_1, \gamma_j \| \tau_i) - h(t_0, \gamma_j \| \tau_i)] \rangle \right\} + \sum_{j=1}^m \left\{ G_j \cdot \sum_{l=1}^m \langle G_l [h(t_1, \gamma_j \| \gamma_l) - h(t_0, \gamma_j \| \gamma_l)] \rangle \right\} + \dots \\
 &\dots + \sum_{i=1}^n \left\{ R_i \cdot \sum_{k=1}^m \langle R_k [h(t_1, \tau_i \| \tau_k) - h(t_0, \tau_i \| \tau_k)] \rangle \right\}
 \end{aligned} \tag{82}$$

## 4.2 Vollständiges Gleichungssystem

### 4.2.1 Bestimmungsgleichungen

Notwendige Bedingung für ein Minimum von Gl. (68) ist auch hier, daß die Ableitungen nach dem zu berechnenden Koeffizienten  $G_j$  und  $\gamma_j$  der Approximationsfunktion Null werden

$$f_k = \frac{\partial}{\partial G_k} \int_{t_0^*}^{t_1^*} [f(e^{t^*}) - \varphi(e^{t^*})]^2 dt^* = 0 \tag{83}$$

$$g_k = \frac{\partial}{\partial \gamma_k} \int_{t_0^*}^{t_1^*} [f(e^{t^*}) - \varphi(e^{t^*})]^2 dt^* = 0$$

Wir müssen also die Gl. (82) nach den  $G_j$  und  $\gamma_j$  ableiten. Daraus ergeben sich  $2m$  Gleichungen

$$\begin{aligned}
 f_k &= \left[ \left( \sum_{i=1}^n R_i \right) - \left( \sum_{j=1}^m G_j \right) \right] \cdot [h(t_1^*, \gamma_k) - h(t_0^*, \gamma_k)] + \dots \\
 &\dots + \sum_{i=1}^n \left\{ R_i \cdot [h(t_1^*, \tau_i) - h(t_0^*, \tau_i) - h(t_1^*, \gamma_k \| \tau_i) + h(t_0^*, \gamma_k \| \tau_i)] \right\} + \dots \\
 &\dots + \sum_{j=1}^m \left\{ G_j \cdot [h(t_1^*, \gamma_j \| \gamma_k) - h(t_0^*, \gamma_j \| \gamma_k) - h(t_1^*, \gamma_j) + h(t_0^*, \gamma_j)] \right\}
 \end{aligned} \tag{84}$$

$k = 1(1)m$

$$\begin{aligned}
 g_k &= \left[ \left( \sum_{j=1}^m G_j \right) - \left( \sum_{i=1}^n R_i \right) \right] \cdot \left[ e^{\frac{t_1}{\gamma_k}} - e^{\frac{t_0}{\gamma_k}} \right] + \dots \\
 &\dots + \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\tau_i R_i}{\gamma_k + \tau_i} \cdot \left[ e^{\frac{\gamma_k + \tau_i t_1}{\gamma_k \tau_i}} - e^{\frac{\gamma_k + \tau_i t_0}{\gamma_k \tau_i}} \right] \right\} - \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{\gamma_j G_j}{\gamma_k + \gamma_j} \cdot \left[ e^{\frac{\gamma_k + \gamma_j t_1}{\gamma_k \gamma_j}} - e^{\frac{\gamma_k + \gamma_j t_0}{\gamma_k \gamma_j}} \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{85}$$

$k = 1(1)m$

## 4.2.2 Funktionalmatrix

Um auch hier das Newton-Verfahren anwenden zu können, benötigen wir die Funktionalmatrix des Gleichungssystems (84/85).

Einfach anzugeben sind die Ableitungen nach den  $G$ -Werten

$$\frac{\partial f_k}{\partial G_l} = -h(t_1^*, \gamma_k) + h(t_0^*, \gamma_k) + h(t_1^*, \gamma_k \| \gamma_l) - h(t_0^*, \gamma_k \| \gamma_l) - h(t_1^*, \gamma_l) + h(t_0^*, \gamma_l) \quad (86)$$

$$\frac{\partial g_k}{\partial G_l} = e^{-\frac{t_1}{\gamma_k}} - e^{-\frac{t_0}{\gamma_k}} - \frac{\gamma_l}{\gamma_k + \gamma_l} \cdot \left[ e^{-\frac{\gamma_k + \gamma_l t_1}{\gamma_k \gamma_l}} - e^{-\frac{\gamma_k + \gamma_l t_0}{\gamma_k \gamma_l}} \right] \quad (87)$$

$$l, k = 1(1)m$$

Schwieriger ist die Ableitung nach den  $\gamma$ -Werten. Mit Hilfe der Gleichungen aus Abschnitt 0 erhalten wir hier

$$\left. \frac{\partial f_k}{\partial \gamma_l} \right|_{l \neq k} = \frac{G_l}{\gamma_l} \left[ e^{-\frac{t_1}{\gamma_l}} - e^{-\frac{t_0}{\gamma_l}} - \frac{\gamma_k}{\gamma_k + \gamma_l} \cdot \left( e^{-\frac{\gamma_k + \gamma_l t_1}{\gamma_k \gamma_l}} - e^{-\frac{\gamma_k + \gamma_l t_0}{\gamma_k \gamma_l}} \right) \right] \quad (88)$$

$$\left. \frac{\partial g_k}{\partial \gamma_l} \right|_{l \neq k} = -G_l \left[ \frac{1}{\gamma_l (\gamma_k + \gamma_l)} \left( t_1 e^{-\frac{t_1}{\gamma_k \| \gamma_l}} - t_0 e^{-\frac{t_0}{\gamma_k \| \gamma_l}} \right) + \frac{\gamma_k}{(\gamma_k + \gamma_l)^2} \left( e^{-\frac{t_1}{\gamma_k \| \gamma_l}} - e^{-\frac{t_0}{\gamma_k \| \gamma_l}} \right) \right] \quad (89)$$

und für  $l = k$  gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_k}{\partial \gamma_k} &= \frac{1}{\gamma_k} \left[ \left( \sum_{j=1}^m K_{jk} \cdot G_j \right) - \left( \sum_{i=1}^n R_i \right) \right] \cdot \left[ e^{-\frac{t_1}{\gamma_k}} - e^{-\frac{t_0}{\gamma_k}} \right] + \dots \\ &\dots + \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\tau_i R_i}{\gamma_k (\gamma_k + \tau_i)} \cdot \left[ e^{-\frac{\gamma_k + \tau_i t_1}{\gamma_k \tau_i}} - e^{-\frac{\gamma_k + \tau_i t_0}{\gamma_k \tau_i}} \right] \right\} - \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{\gamma_j K_{jk} G_j}{\gamma_k (\gamma_k + \gamma_j)} \cdot \left[ e^{-\frac{\gamma_k + \gamma_j t_1}{\gamma_k \gamma_j}} - e^{-\frac{\gamma_k + \gamma_j t_0}{\gamma_k \gamma_j}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (90)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_k}{\partial \gamma_k} &= \frac{1}{\gamma_k^2} \left[ \left( \sum_{j=1}^m G_j \right) - \left( \sum_{i=1}^n R_i \right) \right] \cdot \left[ t_1 e^{-\frac{t_1}{\gamma_k}} - t_0 e^{-\frac{t_0}{\gamma_k}} \right] - \frac{G_k}{\gamma_k^2} \left( t_1 e^{-\frac{2t_1}{\gamma_k}} - t_0 e^{-\frac{2t_0}{\gamma_k}} \right) + \dots \\ &\dots + \frac{1}{\gamma_k^2} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\tau_i R_i}{(\gamma_k + \tau_i)^2} \cdot \left[ \langle (\gamma_k + \tau_i) t_1 - \gamma_k^2 \rangle e^{-\frac{\gamma_k + \tau_i t_1}{\gamma_k \tau_i}} - \langle (\gamma_k + \tau_i) t_0 - \gamma_k^2 \rangle e^{-\frac{\gamma_k + \tau_i t_0}{\gamma_k \tau_i}} \right] \right\} - \dots \\ &\dots - \frac{1}{\gamma_k^2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \left\{ \frac{\gamma_j G_j}{(\gamma_k + \gamma_j)^2} \cdot \left[ \langle (\gamma_k + \gamma_j) t_1 - \gamma_k^2 \rangle e^{-\frac{\gamma_k + \gamma_j t_1}{\gamma_k \gamma_j}} - \langle (\gamma_k + \gamma_j) t_0 - \gamma_k^2 \rangle e^{-\frac{\gamma_k + \gamma_j t_0}{\gamma_k \gamma_j}} \right] \right\} - \dots \end{aligned} \quad (91)$$

mit  $K_{jk}$  aus Gl. (12).

Die Symmetrie der Gln. (87) und (88) ist hier aus ähnlichen Gründen wie in Abschnitt 3.3 nicht mehr gegeben.

## 4.2.3 Reduktion und Lösung des Gleichungssystems

Die Reduktion und Lösung des Gleichungssystems erfolgt völlig analog nach der in den Abschnitten 3.2.1 und 3.2.3.2 beschriebenen Vorgehensweise. Ein sukzessives Verfahren muß hier nicht angewandt werden. Eine geeignete Näherungslösung ist mit Hilfe des diskreten Verfahrens nach Abschnitt 3 zu erhalten, indem Funktionswerte von Gl. (66) an bestimmten, mit Hilfe von Gl. (5) berechneten Zeitpunkten ermittelt und mit diesen nach Abschnitt 3 vorgegangen wird.

### 4.3 Fehlerbewertung

Während bei der diskreten Approximation eine Fehlerbewertung des erzielten Ergebnisses relativ einfach durchzuführen ist (alle Fehler werden an den diskreten Punkten nachgerechnet), ist dies bei der kontinuierlichen Approximation aufwendiger, weil die Abweichungen erst berechnet werden müssen.

#### 4.3.1 Stationäre Abweichung

Am einfachsten zu berechnen ist die stationäre Differenz. Hier gilt

$$\Delta R = \sum_{j=1}^m G_j - \sum_{i=1}^n R_i. \tag{92}$$

#### 4.3.2 Mittlere quadratische Abweichung

Für die mittlere quadratische Abweichung ergibt sich

$$\Delta^2 R = \frac{\int_{t_0^*}^{t_1^*} [f(e^{t^*}) - \varphi(e^{t^*})]^2 dt^*}{\ln(t_1 / t_0)} \tag{93}$$

#### 4.3.3 Maximale absolute Abweichung

Die Differenz zwischen der Funktion  $f(t)$  und ihrer Approximation  $\varphi(t)$

$$\Delta(t) = \sum_{j=1}^m G_j (1 - e^{-t/\gamma_j}) - \sum_{i=1}^n R_i (1 - e^{-t/\tau_i}) \tag{94}$$

weist, wenn die Approximation nach Gl. (68) richtig berechnet worden ist und  $n > m$  ist,  $2m$  Nullstellen und auch  $2m$  Extremwerte auf (Beispiel in **Bild 6**).

Zur Ermittlung dieser Extremwerte leiten wir  $\Delta(t)$  zweimal nach  $t$  ab und erhalten

$$\frac{d\Delta(t)}{dt} = \sum_{j=1}^m \frac{G_j}{\gamma_j} e^{-t/\gamma_j} - \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{\tau_i} e^{-t/\tau_i} \tag{95}$$

$$\frac{d^2\Delta(t)}{dt^2} = \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{\tau_i^2} e^{-t/\tau_i} - \sum_{j=1}^m \frac{G_j}{\gamma_j^2} e^{-t/\gamma_j}. \tag{96}$$

Berechnen wir die Nullstellen der Gl. (95) mit dem Newton-Verfahren, so können wir Gl. (96) zur Überprüfung dafür verwenden, ob ein Extremwert vorliegt.

#### 4.3.4 Maximale relative Abweichung

Für die relative Abweichung zwischen  $f(t)$  und  $\varphi(t)$  gilt

$$\delta(t) = \frac{\sum_{j=1}^m G_j (1 - e^{-t/\gamma_j})}{\sum_{i=1}^n R_i (1 - e^{-t/\tau_i})} - 1. \tag{97}$$

**Bild 7** zeigt die graphische Darstellung für das schon in Abschnitt 4.3.3 verwendete Beispiel. Im Unterschied zu  $\Delta(t)$  gibt es hier nur  $2m - 1$  Extremwerte. Interessant ist, daß die relative Abweichung für  $t \rightarrow 0$  gegen einen endlichen Wert strebt. Hierfür gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \delta(t) = \frac{\sum_{j=1}^m \frac{G_j}{\gamma_j}}{\sum_{i=1}^n \frac{R_i}{\tau_i}} - 1 = \frac{\sum_{j=1}^m \frac{1}{C_{pj}}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{C_{pgi}}} - 1 \quad (98)$$

mit  $C_{pj}$  und  $C_{pgi}$ , den thermischen Kapazitäten der Ersatzschaltbilder in Partialbruchsaltung. Im Beispiel nach **Tabelle 5** und **Tabelle 6** erhalten wir

$$\lim_{t \rightarrow 0} \delta(t) = \frac{0,13759 \frac{\text{K}}{\text{J}}}{0,15351 \frac{\text{K}}{\text{J}}} - 1 = -0,10370.$$

Nebenbei bemerkt stellt der Kehrwert der Summe  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{C_{pgi}}$  genau die Eingangskapazität  $0,5 \cdot C_{Si}$  des thermischen Ersatzschaltbildes dar, welches der Rechnung zu Grunde liegt [11]. Entsprechend ist der Kehrwert von  $\sum_{j=1}^m \frac{1}{C_{pj}}$  die erste Kapazität (Eingangskapazität) des Ersatzschaltbildes der Approximationsfunktion in Kettenbruchsaltung.

Leiten wir jetzt  $\delta(t)$  nach  $t$  ab, dann erhalten wir

$$\frac{d\delta(t)}{dt} = \frac{\left[ \sum_{j=1}^m \frac{G_j}{\gamma_j} e^{-t/\gamma_j} \right] \cdot f(t) - \varphi(t) \cdot \left[ \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{\tau_i} e^{-t/\tau_i} \right]}{f^2(t)} \quad (99)$$

Da wir von dieser Funktion nur die Nullstelle ermitteln wollen, können wir als zu lösende Gleichung mit  $f^2(t) > 0$  aufschreiben<sup>3</sup>

$$k(t) = \left[ \sum_{j=1}^m \frac{G_j}{\gamma_j} e^{-t/\gamma_j} \right] \cdot f(t) - \varphi(t) \cdot \left[ \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{\tau_i} e^{-t/\tau_i} \right] = 0. \quad (100)$$

Für die Ableitung von  $k(t)$  gilt

$$\frac{d}{dt} k(t) = \varphi(t) \cdot \left[ \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{\tau_i^2} e^{-t/\tau_i} \right] - f(t) \cdot \left[ \sum_{j=1}^m \frac{G_j}{\gamma_j^2} e^{-t/\gamma_j} \right]. \quad (101)$$

#### 4.4 Beispiel

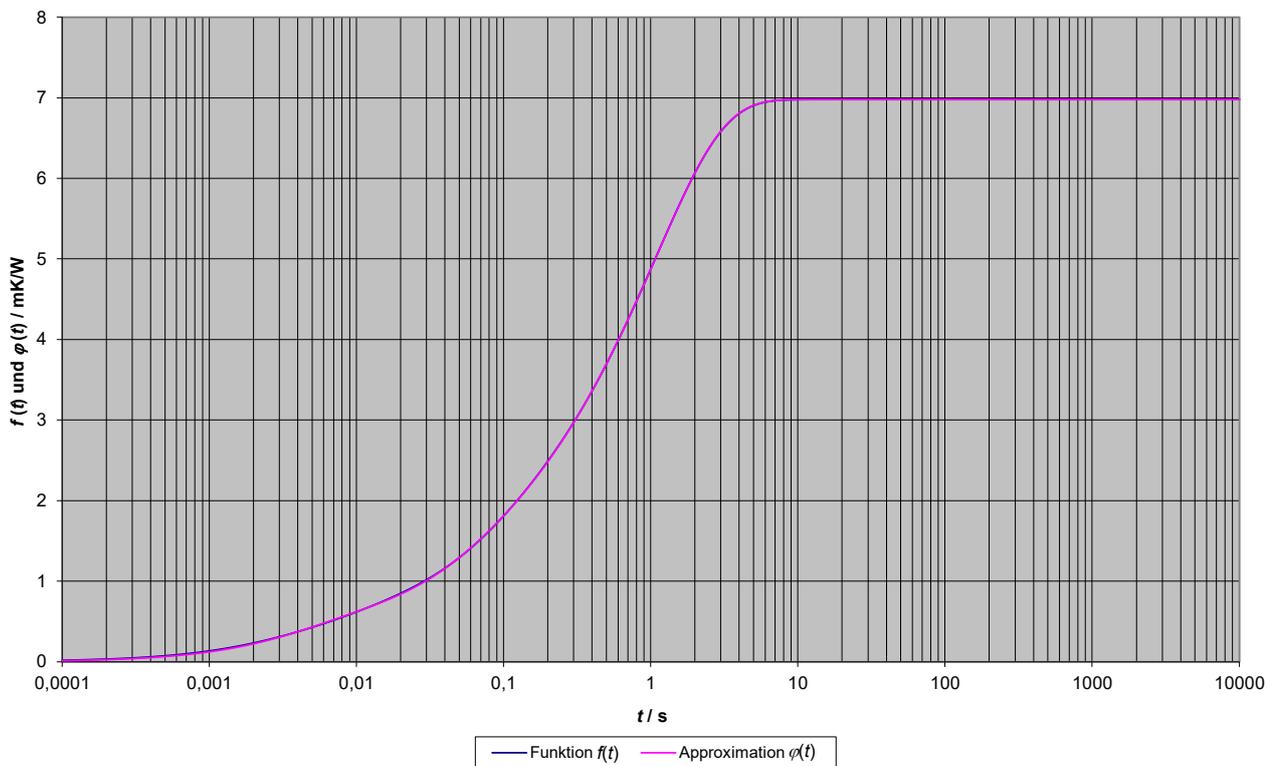
**Tabelle 5** zeigt eine Modellrechnung (aus [11]) für ein Hochleistungshalbleiterbauelement. Die dort berechneten Parameter sind für Datenblattangaben zu umfangreich, spiegeln zudem noch Genauigkeiten wieder, die in Wirklichkeit nicht vorhanden sind.

**Bild 5** zeigt den Verlauf des transienten Wärmewiderstandes und den Verlauf einer Approximationsfunktion mit  $m = 4$ , die sich praktisch überlagern. Genauer kann man die Differenzen bei **Bild 6** und **Bild 7** erkennen. Die Approximationsfunktion mit  $m = 4$  genügt den Anforderungen für ein thermisches Modell im Rahmen der im interessanten Zeitbereich von 1 ms bis unendlich erzielbaren Genauigkeit in jeder Hinsicht.

<sup>3</sup> Dies gilt natürlich nicht, wenn  $f(t)$  Nullstellen hat. Wenn alle  $R_i$  positiv sind, können Nullstellen nicht auftreten. In anderen Fällen muß das genauer untersucht werden. Hat  $f(t)$  eine Nullstelle, dann hat  $\delta(t)$  an dieser Stelle einen Pol, sofern dort nicht  $\varphi(t)$  eine Nullstelle hat.

$i$	$R_{pg\ i}$	$\tau_{pg\ i}$	$C_{pg\ i}$
1	127,7 $\mu\text{K/W}$	1,7581 ms	13,8 J/K
2	1,163 $\mu\text{K/W}$	2,6191 ms	2252 J/K
3	2,781 nK/W	5,6543 ms	2032 kJ/K
4	330,9 $\mu\text{K/W}$	5,9442 ms	18,0 J/K
5	11,73 $\mu\text{K/W}$	6,6768 ms	569,3 J/K
6	24,68 $\mu\text{K/W}$	9,5756 ms	387,9 J/K
7	3,812 $\mu\text{K/W}$	17,517 ms	4595,9 J/K
8	29,35 $\mu\text{K/W}$	35,114 ms	1196,3 J/K
9	70,78 $\mu\text{K/W}$	48,926 ms	691,2 J/K
10	403,0 $\mu\text{K/W}$	60,846 ms	151,0 J/K
11	364,6 $\mu\text{K/W}$	88,322 ms	242,3 J/K
12	6,673 $\mu\text{K/W}$	137,37 ms	20,58 kJ/K
13	754,7 $\mu\text{K/W}$	249,58 ms	330,7 J/K
14	93,66 $\mu\text{K/W}$	540,26 ms	5768,2 J/K
15	4,758 mK/W	1205,4 ms	253,3 J/K

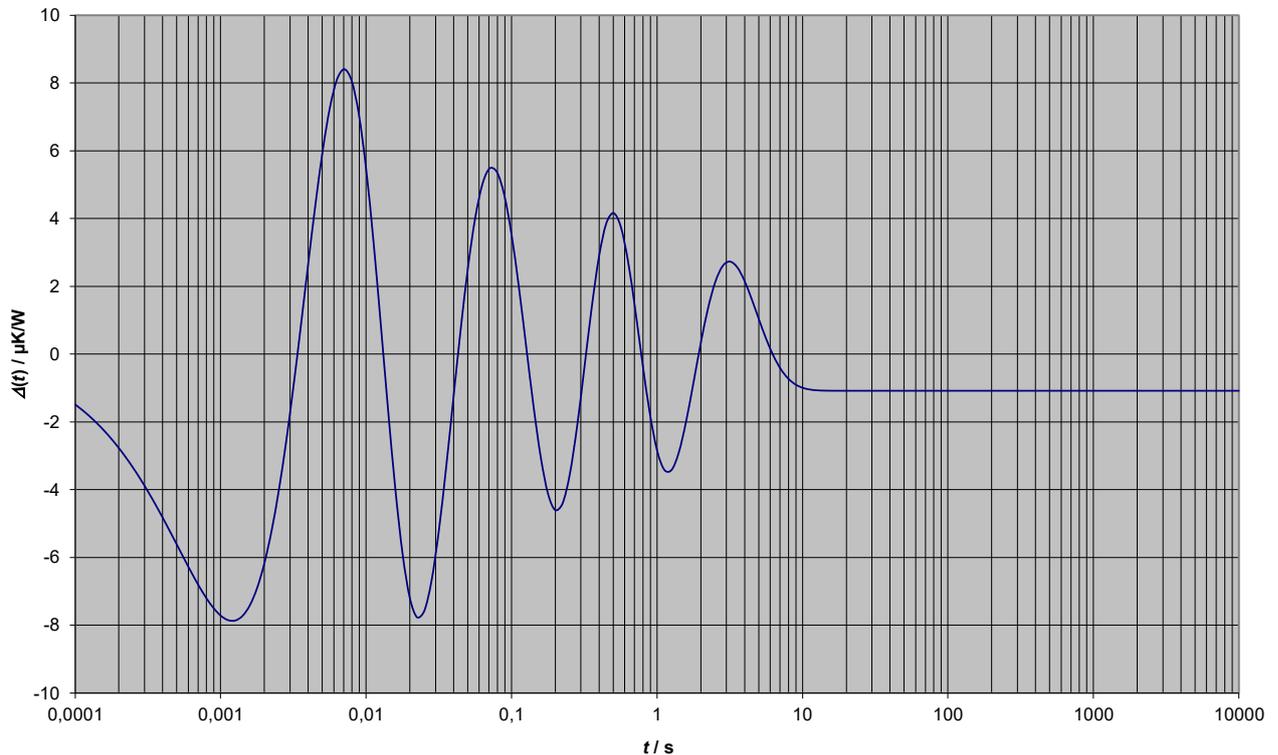
**Tabelle 5:** Daten der Modellbildung des Thyristors T 2200 N 4200 (eupec) [Summe  $R_{pg} = 6,981 \text{ mK/W}$ ]



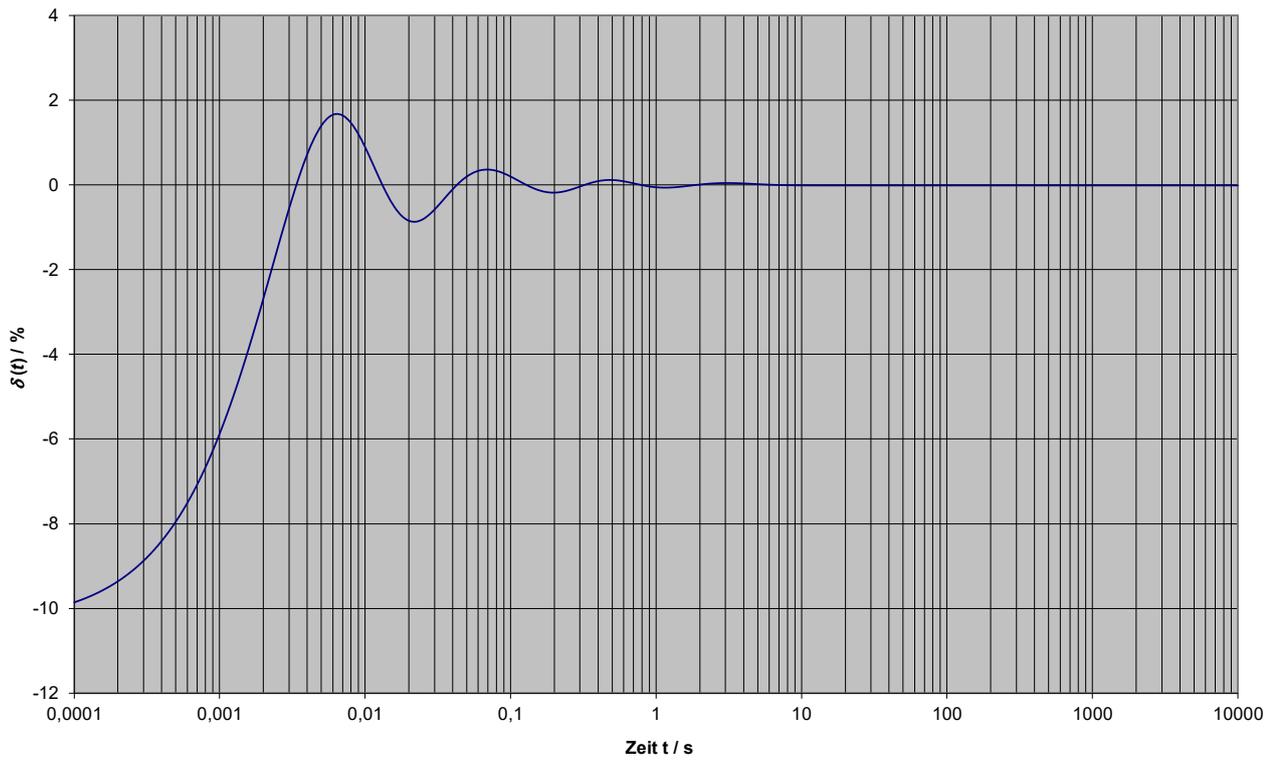
**Bild 5:** Transienter Wärmewiderstand des Thyristors T 2200 N 4200 (eupec)

Approximationsfunktion mit	$m = 4$		
$j$	$G_{pj}$	$\tau_{pj}$	$C_{pj}$
1	438,2 $\mu\text{K/W}$	3,824 ms	8,7 J/K
2	669,5 $\mu\text{K/W}$	48,08 ms	71,8 J/K
3	1,012 mK/W	201,1 ms	198,6 J/K
4	4,859 mK/W	1,191 s	245,1 J/K
Summe von $G_p$	6,980 mK/W		
stationäre Differenz $\Delta R$	- 1,08 nK/W		
Integrations- und Auswertebereich	$t_0 = 1\text{ms}$		
	$t_1 = 20\text{ s}$		
mittlere quadratische Abweichung $\Delta^2 R$	$17,5 (\mu\text{K/W})^2$		
maximale Abweichung	8,40 nK/W		
maximale relative Abweichung	- 5,87 %		

**Tabelle 6:** Ergebnisse der Berechnung der Approximationsfunktion des Wärmewiderstandes des Thyristors



**Bild 6:** Absolute Abweichung zwischen Funktion und ihrer Approximation



**Bild 7:** Relative Abweichung zwischen Funktion und ihrer Approximation

## **5 ZUSAMMENFASSUNG**

Es werden Rechenverfahren beschrieben, die es gestattet, aus punktweise gegebenen Funktionsverläufen Ausgleichskurven aus einer Summe von  $R$ - $\tau$ -Wertepärchen zu errechnen. Dabei können mehrdimensionale Variable behandelt werden. Auch ist die Berücksichtigung von Nebenbedingungen für die Ableitungen bei  $t = 0$  möglich.

Weiter wird ein Verfahren für die Bildung einer Approximationsfunktion mit wenigen Zeitkonstanten aus einer Originalfunktion mit vielen Zeitkonstanten abgeleitet.



## 6 LITERATUR

- [1] Abramowitz, M.; Stegun, I. A.: Handbook of Mathematical Functions. Applied Mathematics Series. National Bureau of Standards: Washington 1965.
- [2] Beuken, C. L.: Wärmeverluste bei periodisch betriebenen elektrischen Öfen. Dissertation Sächsische Bergakademie Freiberg 1936.
- [3] Bronstein, I. N.; Semendjadew, K. A.: Taschenbuch der Mathematik. BSB B. G. Teubner und Verlag Nauka: Leipzig, Moskau 1981.
- [4] Cauer, W.: Die Verwirklichung von Wechselstromwiderständen vorgeschriebener Frequenzabhängigkeit. Archiv für Elektrotechnik Bd. 17 (1926) H. 4, S. 355 – 388.
- [5] Clenshaw, C. W.: Chebyshev series for mathematical functions. Math. Tab. Nat. Phys. Lab. Mathematical Tables Vol. 5. H. M. Stationery Office: London 1962.
- [6] Clenshaw, C. W.; Miller, G. F.; Woodger, M.: Algorithmus for Special Functions I. Numerische Mathematik, Bd. 4 (1963), S. 403 – 419.
- [7] Engeln-Müllges, G.; Reutter, F.: Formelsammlung zur Numerischen Mathematik mit BASIC-Programmen. Bibliographisches Institut: Mannheim, Wien, Zürich 1983.
- [8] Lappe, R.; Fischer, F.: Leistungselektronik – Meßtechnik. Verlag Technik Berlin 1993.
- [9] Mangoldt, H. v.; Knopp, K.: Einführung in die höhere Mathematik, Bd. 2. S. Hirzel Verlag: Leipzig 1964.
- [10] Nootbaar, U.: Anwendung genauer Arithmetik bei der Berechnung zweiseitig gekühlter Halbleiterbauelemente mittels Laplace-Transformation. Diplomarbeit Universität Karlsruhe 1988.
- [11] Schwarz, J.: Ein Beitrag zur thermischen Auslegung von Stromrichterventilen mit zweiseitig gekühlten Halbleiterbauelementen. Dissertation Technische Universität Berlin 1986.
- [12] Schwarz, J.: Thermische Ersatzschaltbilder. Elektronik Journal Bd. 20 (1985) H. 7, S. 72 – 82.
- [13] Tölke, F.: Praktische Funktionenlehre, Bd. 1: Elementare und elementare transzendente Funktionen. Springer-Verlag: Berlin, Göttingen, Heidelberg 1950.
- [14] Wolff v. Gudenberg, J.: Einsatz genauer Nullstellenverfahren bei der Berechnung zweiseitig gekühlter Halbleiterbauelemente. ZAMM Bd. 70 (1990), S. T549 – T551.

