Einfache, nicht-abelsche Gruppen von Automorphismen von kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht mindestens zwei in Fixität maximal vier

Dissertation

zur Erlangung des
Doktorgrades der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

der Naturwissenschaftlichen Fakultät II
Chemie, Physik und Mathematik

der Martin-Luther-Universität
Halle-Wittenberg,

vorgelegt

von Herrn Patrick Salfeld

geb. am 15.09.1990 in Blankenburg (Harz)

Gutachterinnen:
Prof. Dr. Rebecca Waldecker
PD Dr. Barbara Baumeister

Tag der Verteidigung:
20.01.2021

Danksagung

Keine Schuld ist dringender, als die, Dank zu sagen.

Mit diesem Zitat des römischen Philosophen und Schriftstellers Marcus Tullius Cicero möchte ich die Personen wertschätzen, die diese Dissertation ermöglicht, sie gelesen und mich auf meinem Weg unterstützt haben. Ein großer Dank gilt meiner Mentorin Rebecca Waldecker, die mich stets ermutigt hat und ohne die diese Arbeit nicht entstanden wäre. Ich bedanke mich bei Barabara Baumeister, die nach dem Tod des Initiators dieses Projekts als Zweitgutachterin einsprang. Ein Dankeswort gebührt Kay Magaard, der dieses interessante und spannende Thema in mein Leben brachte.

Einen besonderen Dank verdienen meine Kolleg*innen und Freunde Mathias Grimm, Paula Hähndel, Mara Jakob, Dustin Löbert, Christian Pröseler und Imke Toborg, die mich nicht nur beim Lesen und Korrigieren dieser Arbeit unterstützt haben, sondern mit denen ich stets Gedanken und Argumente diskutieren sowie Freude und Frust teilen konnte. Der größte Dank gebührt meiner Familie und meinem Partner für ihre andauernde emotionale und motivierende Unterstützung während meines Studiums und Dissertationsvorhabens.

Abstract

Die vorliegende Dissertation klassifiziert einfache, nicht-abelsche und transitive Permutationsgruppen G von Fixität 4, in denen es eine Involution mit genau vier Fixpukten gibt. Die Fixität einer Gruppe G bei der Wirkung auf einer Menge Ω ist dabei die Maximalanzahl der Fixpunkte von nichttrivialen Elementen von G in Ω. Des Weiteren werden Wirkungen von einfachen und nicht-abelschen Gruppen auf kompakten Riemannschen Flächen $\mathfrak{X}$ vom Geschlecht mindestens 2 in Fixität maximal 4 unter einer Vermutung über transitive Permutationsgruppen klassifiziert, für die jedes nichttriviale Gruppenelement höchstens vier Punkte festlässt und für die die Punktstabilisatoren zyklisch sind. Dabei werden allgemeine gruppen- und charaktertheoretische Methoden sowie die lokale Struktur der Gruppen durch Zentralisatoren von Involutionen, Normalisatoren von Untergruppen und maximale Untergruppen verwendet. Diese Arbeit gliedert sich in ein Projekt von Barabara Baumeister, Kay Magaard und Rebecca Waldecker ein und untersucht dabei zwei unterschiedliche Teilaspekte des Projekts.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Riemannsche Flächen — benannt nach Bernhard Riemann — sind mathematische Objekte, die in einer Vielzahl von mathematischen Gebieten auftauchen. Das Konzept einer Riemannschen Fläche entstand im 19. Jahrhundert durch das Studium algebraischer Kurven. Aber Riemannsche Flächen sind nicht nur algebraische Kurven sondern auch Mannigfaltigkeiten mit einer komplexen Struktur. Seit ihrer Entdeckung wurden Riemannsche Flächen analytisch, topologisch, geometrisch und algebraisch weiter ergründet, unter anderem durch Untersuchungen von Weierstraßpunkten und Automorphismen einer Fläche.

Ein Weierstraßpunkt einer kompakten Riemannschen Fläche $\mathfrak{X}$ vom Geschlecht $\mathfrak{g} \geq 2$ ist ein Punkt so, dass eine meromorphe Funktion von $\mathfrak{X}$ existiert, die an diesem Punkt einen Pol der Ordnung höchstens $\mathfrak{g}$ hat und an allen anderen Punkten holomorph ist. Weierstraßpunkte sind jedoch nicht nur analytisch interessant. Ihr Einfluss auf die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{X})$ einer kompakten Riemannschen Fläche $\mathfrak{X}$ vom Geschlecht mindestens 2 wurde durch Hermann A. Schwarz deutlich, der die Operation von $\mathrm{Aut}(\mathfrak{X})$ auf der Menge $\mathfrak{W}(\mathfrak{X})$ der Weierstraßpunkte untersuchte und damit die Endlichkeit der Automorphismengruppe nachwies (vgl. V.1.2 in [FaKr]). Adolf Hurwitz zeigte in [Hur], dass die Ordnung der Automorphismengruppe einer kompakten Riemannschen Fläche $\mathfrak{X}$ vom Geschlecht $\mathfrak{g} \geq 2$ sogar durch $84 \cdot (\mathfrak{g} - 1)$ beschränkt ist. Dadurch entstanden verschiedene Forschungszweige, die die endliche Gruppentheorie mit der Theorie kompakter Riemannscher Flächen vom Geschlecht mindestens zwei verbanden. Unter anderem wurden Hurwitz-Gruppen, symmetrische Geschlechte von Gruppen sowie Gruppenoperationen auf Flächen von kleinem Geschlecht untersucht, um nur einige Zweige zu nennen.

Hurwitz-Gruppen sind Automorphismengruppen von kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht $\mathfrak{g} \geq 2$, die die Ordnung $84(\mathfrak{g}-1)$ haben. Beispiele dafür sind die projektiven speziellen linearen Gruppen $\mathrm{PSL}_2(7)$ und $\mathrm{PSL}_2(8)$, welche isomorph zur Automorphismengruppe der Kleinschen Kurve bzw. der MacBeath-Kurve sind (vgl. [Mac1, Mac2]). In [Con1, Con2] fasst Marston Conder die bis dato bekannten Hurwitz-Gruppen zusammen und solche, die keine Hurwitz-Gruppen sind. Beispielsweise sind zwölf der 26 sporadischen Gruppen Hurwitz-Gruppen, die anderen 14 nicht. Die Alternierenden Gruppen $\mathcal{A}_n$ sind für alle $n \geq 168$ und für gewisse n im Bereich $3 \leq n \leq 167$ Hurwitz-Gruppen. Viele weitere Gruppen wurden auf diese Eigenschaft untersucht.

Das symmetrische Geschlecht $\mathfrak{g}$ einer Gruppe G ist die kleinste natürliche Zahl größer oder gleich 2 so, dass es eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $\mathfrak{g}$ gibt, auf der G als Gruppe von Automorphismen wirkt. Den Begriff definierte Thomas Tucker in [Tuc] und er zeigte, dass die symmetrischen Geschlechte der Symmetrischen und Alternierenden Gruppen $\mathcal{S}_n$ und $\mathcal{A}_n$, wobei $n \geq 168$ gilt, $\frac{n!}{168}+1$ sind. Marston Conder, Robert Wilson und Andrew Woldar fassten in [CWW] die bis dato bekannten symmetrischen Geschlechte der sporadischen Gruppen zusammen. Nach [Con1] wurden auch die symmetrischen Geschlechte von Diedergruppen, abelschen Gruppen und p-Gruppen untersucht.

In [Bro] klassifizierte Allen Broughton Gruppenoperationen auf kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht 2 und 3, bis auf topologische Äquivalenz. Des Weiteren gibt er einen Überblick über weitere Forschungszweige im Zusammenhang mit Gruppenwirkungen auf Riemannschen Flächen.

Einen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Fixpunkte eines Automorphismus einer kompakten Riemannschen Fläche $\mathfrak{X}$ vom Geschlecht mindestens zwei und den Weierstraßpunkten der Fläche entdeckte Bruno Schoeneberg in [Sch]. Er zeigte, dass die Fixpunkte eines Automorphismus $h \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{X})$ in $\mathfrak{X}$ Weierstraßpunkte sind, wenn h mindestens fünf Punkte in $\mathfrak{X}$ fixiert, wobei $h \neq 1_{\mathrm{Aut}(\mathfrak{X})}$ gilt. Kay Magaard und Helmut Völklein nutzten diese Eigenschaft und zeigten in [MaVö], dass die einzigen Hurwitz-Gruppen, die transitiv auf der Menge der Weierstraßpunkte operieren, die Automorphismengruppen der Kleinschen Kurve und MacBeath-Kurve sind ($\mathrm{PSL}_2(7)$ bzw. $\mathrm{PSL}_2(8)$) und eventuell die Automorphismengruppe der Hurwitz-Kurven vom Geschlecht 14 ($\mathrm{PSL}_2(13)$). Sie unterschieden bei der Klassifizierung der kompakten Riemannschen Flächen $\mathfrak{X}$ mit transitiver Gruppenoperation auf der Menge $\mathfrak{W}(\mathfrak{X})$ der Weierstraßpunkte zwei Fälle; nicht-reguläre und reguläre Gruppenoperationen. Der Fall der regulären Gruppenoperationen auf $\mathfrak{W}(\mathfrak{X})$ motiviert die Klassifizierung der Paare $(\mathfrak{X}, \mathrm{Aut}(\mathfrak{X}))$ von kompakten Riemannschen Flächen $\mathfrak{X}$ vom Geschlecht mindestens zwei und deren Automorphismengruppen, für die die Menge $\mathsf{F}(\mathfrak{X})$ aller Fixpunkte von nichttrivialen Automorphismen von $\mathfrak{X}$ keine Teilmenge von $\mathfrak{W}(\mathfrak{X})$ ist.

Die Klassifizierung dieser Paare ist das Ziel des Projekts von Barabara Baumeister, Kay Magaard und Rebecca Waldecker (nachfolgend „BMW-Projekt“ genannt), zu dem auch die vorliegende Dissertationsschrift gehört. Sie nutzten das eben beschriebene Resultat von Bruno Schoeneberg, um den Fokus auf solche Gruppen von Automorphismen einer kompakten Riemannschen Fläche zu legen, in denen es Automorphismen gibt, die höchstens vier Punkte der Fläche festlassen, und wählten zunächst einen rein gruppentheoretischen Ansatz. Da eine Riemannschen Fläche $\mathfrak{X}$ unter der Operation einer Gruppe G in Bahnen zerfällt und jeder Automorphismus $h \in G$, $h \neq 1_G$, der höchstens vier Fixpunkte in $\mathfrak{X}$ hat, auch nur höchstens vier Fixpunkte auf allen G-Bahnen von $\mathfrak{X}$ besitzt, konzentrierte sich das BMW-Projekt bisher auf die Klassifizierung transitiver Permutationsgruppen von Fixität 4. Dabei ist die Fixität einer Gruppe bei der Wirkung auf einer Menge wie folgt definiert:

Definition 1.1 (Fixität)
*Seien G eine Gruppe, die auf einer Menge Ω operiert, sowie $k \in \mathbb{N}_0$. Wir sagen, dass **G mit Fixität k auf Ω operiert** bzw. dass **G Fixität k auf Ω hat** genau dann, wenn jedes nichttriviale Element in G höchstens k Punkte in Ω fest lässt und es ein Element $g \in G^{\#}$ gibt, das genau k Punkte in Ω fixiert.*

Der Start des BMW-Projekts im Sommer 2012 mündete 2015 in [MaW1, MaW2] in Klassifikationen von einfachen und fast-einfachen, nicht-regulären und transitiven Permutationsgruppen sowie Strukturaussagen für allgemeine, nicht-reguläre und transitive Permutationsgruppen von Fixität 2 oder 3. Im Jahr 2019 veröffentlichten Baumeister, Magaard und Waldecker in [BMW] erste Strukturaussagen für Fixität 4. Eine Klassifizierung der einfachen und transitiven Permutationsgruppen, in denen jedes nichttriviale Gruppenelement höchstens vier Punkte der zugehörigen Bahn fixiert, ist noch in Arbeit.

Neben den Riemannschen Flächen und ihren Automorphismen, die die Hauptquelle der Motivation des BMW-Projekts ausmachen, ist die Untersuchung von transitiven Permutationsgruppen mit einer Maximalanzahl an Fixpunkten auch aus gruppentheoretischer Perspektive ein interessantes Forschungsgebiet, wie zahlreiche Veröffentlichungen in den 1960er und 1970er Jahren zeigen. Nagayoshi Iwahori untersuchte 1964 in [Iwa] sogenannte $(0,2)$-Gruppen. Eine $(0,k)$-Gruppe ist eine transitive Permutationsgruppe auf einer Menge Ω, in der jedes nichttriviale Element genau 0 oder $k \in \mathbb{N}$ Fixpunkte in Ω hat. Beispielsweise sind Frobeniusgruppen genau die $(0,1)$-Gruppen.

In [PrS1] klassifizierten Oliver Pretzel und Adolf Schleiermacher 1975 einfache $(0,2)$-Gruppen mit Punktstabilisatoren von gerader Ordnung und gaben Strukturbeschreibungen für allgemeine $(0,2)$-Gruppen. Für Primzahlen $p > 2$ bewiesen sie unter gewissen Voraussetzungen zudem weitere Strukturresultate von $(0,p)$-Gruppen. In [PrS2] beschäftigten Pretzel und Schleiermacher sich 1975 genauer mit $(0,3)$-Gruppen und konnten zeigen, dass in solchen Gruppen G entweder die Punktstabilisatoren sogenannte „t.i." Untergruppen (von „trivial intersection") sind oder G einen regulären Normalteiler von Ordnung 9 oder 27 hat. Eine t.i. Untergruppe H einer Gruppe G ist eine Gruppe, die mit ihren von H verschiedenen G-Konjugierten nur trivialen Schnitt hat. Unter Verwendung der Resultate von Iwahori in [Iwa] konnten Pretzel und Schleiermacher die Gruppen vollständig beschreiben, die den letzten Fall erfüllen. Mit [PrS2] ergänzten Oliver Pretzel und Adolf Schleiermacher 1977 die Klassifikation von $(0,2)$-Gruppen im Fall von Punktstabilisatoren von ungerader Ordnung. Im Zusammenhang mit t.i. Untergruppen untersuchte Mark Hale Jr. 1971 in [Hal], wann in $(0,b)$-Gruppen für $b \geq 1$ die Punktstabilisatoren t.i. sind.

Eine weitere und für die Gruppentheorie sehr bedeutsame Arbeit im Zusammenhang mit Fixpunktanzahlen veröffentlichte Helmut Bender 1971, in der er transitive Gruppen untersuchte, in denen Involutionen genau einen Punkt der zugehörigen Bahn fixieren (siehe [Be2]). Seine Resultate trugen zur Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen bei. Francis Buekenhout und Peter Rowlinson untersuchten zwischen 1974 und 1976 in [Ro1, BuR1, BuR2] transitive Permutationsgruppen, bei denen 4 das Maximum der Fixpunktanzahl von Involutionen ist und sie klassifizieren unter anderem einfache, nicht-abelsche und transitive Permutationsgruppen mit dieser Eigenschaft. Mit transitiven Permutationsgruppen, in denen Involutionen eine vorgegebene Maximalanzahl an Punkten fixieren, befassten sich Mathematiker*innen wie Helmut Bender ([Be1, Be2]) 1968 und 1971, Francis Buekenhout ([Bu1, Bu2]) 1972, Christoph Hering ([Her]) 1968, Yutaka Hiramine ([Hir]) 1978 und Peter Rowlinson ([Ro2, Ro3, Ro4]) zwischen 1972 und 1976. Christian Ronse untersuchte 1982 in [Ron] transitive Permutationsgruppen, in denen 15 die Maximalanzahl von Fixpunkten von Involutionen ist, und fasste einige Ergebnisse von Bender, Buekenhout, Hering, Hiramine und Rowlinson zusammen.

Dieses Forschungsgebiet ist nicht nur durch den Zusammenhang mit Riemannschen Flächen heute wieder aktuell. Auch nach 2010 befassten sich Mathematiker*innen mit Teilaspekten dieses Forschungsfeldes. Martin Liebeck und Aner Shalev zeigten 2015 in [LiSh], dass viele primitive Permutationsgruppen vom Grad n Involutionen besitzten, die mindestens $n^{1/6}$ Punkte in der zugehörigen Bahn festlassen. Timothy Burness und Adam Thomas konnten 2018 diese Zahl für fast-einfache exzeptionelle Gruppen, die keine Suzuki-Gruppen sind, in [BuT] auf $n^{1/3}$ erhöhen.

Durch neue Erkenntnisse in der Gruppentheorie seit 1970 und durch die Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen (siehe z.B. [KuSt, S. 328f] oder [Wil, S. 3]) können schärfere und weitergehende Resultate in dem Forschungsgebiet der transitiven Permutationsgruppen mit einer Maximalanzahl an Fixpunkten generiert werden. Viele der eben vorgestellten Arbeiten und deren Resultate sowie die Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen sind Grundlage für das BMW-Projekt. Die vorliegende Dissertationsschrift gliedert sich in jenes ein und nutzt deren bisherige Ergebnisse. Diese Arbeit befindet sich an der Schnittstelle zwischen endlicher Gruppentheorie und der Theorie kompakter Riemannscher Flächen und sie untersucht verschiedene Teilaspekte des BMW-Projekts, die wie folgt formuliert werden können:

Frage 1: *Welche sind die einfachen, nicht-abelschen und transitiven Permutationsgruppen von Fixität 4, die eine Involution in einem Vierpunktstabilisator enthalten?*

Frage 2: *Welche einfachen und nicht-abelschen Gruppen G wirken mit Fixität maximal 4 auf kompakten Riemannschen Flächen $\mathfrak{X}$ vom Geschlecht mindestens 2 als Gruppen von Automorphismen und wie viele Fixpunkte besitzen nichttriviale Elemente von G auf $\mathfrak{X}$?*

Mit der ersten Fragestellung führt diese Arbeit die bisherige Strategie des BMW-Projekts fort, um transitive Permutationsgruppen zu klassifizieren, bei denen jedes nichttriviale Element höchstens vier Punkte der zugehörigen Bahn festlässt. In einer transitiven und treuen Fixität-4-Operation einer Gruppe können Involutionen, also Gruppenelemente der Ordnung 2, welche nach dem Odd-Order-Theorem (siehe [FeTh]) in einfachen und nicht-abelschen Gruppen stets vorhanden sind, insgesamt bis zu vier Punkte der zugehörigen Bahn festlassen. Aufgrund des Umfangs des BMW-Projekts fokussiert diese Arbeit dabei den Spezialfall, dass eine Involution genau vier Fixpunkte hat. Dadurch weist die zugehörige einfache und nicht-abelsche Gruppe spezielle Struktureigenschaften auf, die ausgenutzt werden, um mit einem bedeutsamen Klassifikationsresultat von Daniel Gorenstein und Koichiro Harada in [GoHa] den Untersuchungsradius einzugrenzen.

Mit den bereits erwähnten Arbeiten [Ro1, BuR1, BuR2] von Francis Buekenhout und Peter Rowlinson kann der Untersuchungsradius für die Frage 1 dieser Dissertationsschrift noch stärker eingegrenzt werden, als durch [GoHa]. In diesen Veröffentlichungen zitieren Buekenhout und Rowlinson ebenfalls [GoHa] und einige weitere Arbeiten; darunter ist eine zu der Zeit des Erscheinens von [Ro1, BuR1, BuR2] nicht publizierte Arbeit von Paul Fong, die nach meiner Recherche auch bisher nicht veröffentlicht wurde. Des Weiteren stellen sie ihre Berechnungen zur Klassifizierung der einfachen, nicht-abelschen und transitiven Permutationsgruppen, bei denen 4 das Maximum der Fixpunktanzahl von Involutionen ist, nicht dar. Außerdem fehlt in der Klassifikation von Buekenhout und Rowlinson das Beispiel $\mathrm{PSL}_2(9)$ mit Punktstabilisatoren isomorph zu $\mathcal{S}_3$, das ein Beispiel für eine transitive Gruppenoperation von Fixität 4 ist, bei der eine Involution genau vier Fixpunkte in der zugehörigen Menge hat (vgl. Satz 2.41 (*ii.5*)). Aus diesen Gründen habe ich mich gegen die Verwendung jener Klassifizierung in dieser Arbeit entschieden. Diese Dissertation bietet eine andere Herangehensweise als Buekenhout und Rowlinson in [Ro1, BuR1, BuR2], verwendet dabei ebenfalls die Ergebnisse von [GoHa] und führt die Rechnungen aus.

Nach der Eingrenzung des Untersuchungsradius durch das Main Theorem in [GoHa] wird die lokale Struktur der jeweiligen einfachen Gruppe studiert, um die Existenz oder Nichtexistenz einer transitiven und treuen Fixität-4-Operation mit einer Involution mit vier Fixpunkten nachzuweisen. Dabei benutzen wir Zentralisatoren von Involutionen, Normalisatoren von Untergruppen der Ordnung 3, maximale Untergruppen und viele weitere Informationen über die lokale Struktur der jeweiligen einfachen Gruppe und Zählargumente für Fixpunkte gewisser Elemente, um die Punktstabilisatoren in der jeweiligen Operation zu bestimmen. Diese Dissertation zeigt, dass die einzigen einfachen und nicht-abelschen Gruppen, die die Frage 1 positiv beantworten, die Mathieu-Gruppen M_{11} und M_{12}, die unitäre Gruppe $\mathrm{PSU}_3(3)$ sowie lineare Gruppen $\mathrm{PSL}_2(q)$ für gewisse Primzahlpotenzen $q \geq 7$ sind. Diese Antwort auf Frage 1 ist im Satz 2.41 auf Seite 63 formuliert.

Mit der zweiten Frage untersucht diese Dissertation konkrete Gruppenwirkungen auf kompakten Riemannschen Flächen und erweitert damit das bisherige Vorgehen des BMW-Projekts. Sie konzentriert sich dabei weiterhin auf einfache und nicht-abelsche Gruppen von Automorphismen und verwendet rein gruppen- und charaktertheoretische Methoden. Dennoch wird auch eine Familie von fast-einfachen Gruppen und ihre Wirkung auf Riemannsche Flächen untersucht. Im Zusammenhang mit der zweiten Fragestellung dieser Arbeit wurden von Rebecca Waldecker und mir bereits erste Ergebnisse in [SaWa] veröffentlicht. Die Dissertation umfasst jene Inhalte und enthält zahlreiche weitere Ergebnisse.

Unter einer treuen Operation einer Gruppe G auf einer kompakten Riemannschen Fläche $\mathfrak{X}$ zerfällt $\mathfrak{X}$ in G-Bahnen, deren Punktstabilisatoren zyklische Untergruppen von G sind (vgl. Proposition 3.1 in [Mir]). Wenn G auf $\mathfrak{X}$ mit Fixität höchstens 4 operiert, so wirkt G auch nur mit Fixität höchstens 4 auf den G-Bahnen von $\mathfrak{X}$, wodurch die bisherigen Ergebnisse des BMW-Projekts angewendet werden können. Weil die einfachen, nicht-abelschen und transitiven Permutationsgruppen von Fixität 4 bisher nicht klassifiziert sind, erarbeitet diese Dissertation eine Vielzahl an

Beispielen mit zyklischen Punktstabilisatoren und stellt eine Vermutung über deren Vollständigkeit auf.

Um den Fokus auf die Wirkung einer Gruppe auf einer kompakten Riemannschen Fläche zu legen, modelliert diese Arbeit zunächst Mengen, die aus der Sicht von Gruppenoperationen dieselben Eigenschaften wie kompakte Riemannsche Flächen aufweisen. Anschließend werden die Ergebnisse des BMW-Projekts und die aufgestellte Vermutung über einfache und transitive Permutationsgruppen von Fixität 4 verwendet, um Operationen auf den modellierten Mengen mit Bahnenfixität höchstens 4 und gewisse Einschränkungen an die Anzahl der Bahnen zu klassifizieren. Diese werden mit gruppen- und charaktertheoretischen Methoden auf unterschiedliche Eigenschaften untersucht, die in der Interpretation der modellierten Mengen als kompakte Riemannsche Flächen zur Existenz dieser Flächen und zur Klassifikation von Fixität-4-Operationen auf diesen führt.

Diese Dissertation wird aufzeigen, dass nur die Alternierenden Gruppen vom Grad $n \in \{5,6,7,8\}$, die sporadischen Gruppen M_{11}, M_{22} und J_1 sowie die Lie-Typ-Gruppen $\mathrm{PSp}_4(q)$, $\mathrm{P}\Omega_8^-(q)$, $\mathrm{Sz}(q)$, ${}^2G_2(q)$, ${}^3D_4(q)$, $\mathrm{PSL}_n(q)$ und $\mathrm{PSU}_n(q)$ für $n \in \{2,3,4\}$ und gewisse Primzahlpotenzen q mit Fixität maximal 4 auf kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht mindestens 2 treu operieren. Diese Antwort auf die zweite Frage ist in den Sätzen 7.5 und 7.6 ab Seite 177 formuliert. Die Ergebnisse und weitere Details sind tabellarisch auf den Seiten 175 und 176 dargestellt.

Dieses Kapitel endet mit der Vorstellung der Notation dieser Arbeit und einigen grundlegenden Resultaten zu Gruppenwirkungen. Im zweiten Kapitel steht die Beantwortung von Frage 1 im Fokus unserer Untersuchungen. Dazu analysieren wir zu Beginn die mathematische Situation und legen mit dem Main Theorem in [GoHa] den Untersuchungsradius fest. Anschließend werden die Gruppen aus diesem Resultat auf die Existenz einer transitiven und treuen Fixität-4-Operation überprüft, in der es eine Involution mit genau vier Fixpunkten auf der zugehörigen Bahn gibt. Das Kapitel endet mit dem Satz 2.41, der die Ergebnisse dieses Teils zusammenfasst und die Frage 1 beantwortet.

Mit Beginn von Kapitel 3 fokussiert sich diese Arbeit auf die Beantwortung der zweiten Frage. Aufgrund der Eigenschaften von Gruppenoperationen auf kompakten Riemannschen Flächen werden zur Vorbereitung für die nachfolgenden Kapitel zunächst transitive, treue, einfache und nicht-abelsche Permutationsgruppen von Fixität höchstens 4 mit zyklischen Punktstabilisatoren untersucht, einige wichtige Eigenschaften dieser bewiesen und eine Vermutung aufgestellt.

Das Kapitel 4 beginnt mit einer detaillierten Beschreibung von allgemeinen Gruppenoperationen auf kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht mindestens 2 und motiviert das weitere Vorgehen dieser Dissertation, zuerst Gruppenoperationen und später die Existenz einer zugehörigen Fläche zu untersuchen. Anschließend werden RF-Mengen definiert, die aus der Sicht der Gruppenwirkungen ähnliche Eigenschaften wie kompakte Riemannsche Flächen vom Geschlecht mindestens 2 haben. Das Studium von Gruppenwirkungen auf RF-Mengen steht im Vordergrund des vierten Kapitels. Dieses endet mit einer Klassifikation von Operationen einfacher und nicht-abelscher Gruppen auf RF-Mengen mit Bahnenfixität höchstens 4 und weiteren Eigenschaften, die die Anzahl der Bahnen beschränkt, wobei die Vermutung und einige andere Resultate aus dem Kapitel 3 eingehen.

Im Kapitel 5 steht die Untersuchung der zuvor klassifizierten Wirkungen auf gewisse Eigenschaften der wirkenden Gruppe im Fokus. Diese Eigenschaften, welche vom Riemannschen Existenzsatz abgeleitet sind, sichern die Existenz einer zu der Wirkung gehörigen kompakten Riemannschen Fläche vom Geschlecht mindestens 2, was zu Beginn des Kapitels formuliert wird. Anschließend werden reguläre Operationen untersucht und verschiedene Werkzeuge vorgestellt, die für den Nachweis der Eigenschaften nützlich sind. In vier Abschnitten werden dann die im Kapitel 4 klassifizierten Wirkungen, nach der wirkenden Gruppe sortiert, auf diese Eigenschaften überprüft. Das fünfte Kapitel endet mit einer Zusammenfassung der Ergebnisse, die mit der Klassifikation aus dem vierten Kapitel kombiniert werden.

Das sechste Kapitel untersucht die Gesamtfixität der zum Ende von Kapitel 5 zusammengefassten Wirkungen. Dazu definieren und motivieren wir zunächst zwei Begriffe und geben Beispiele an. Anschließend beweisen wir ein Kriterium, welches auf einen Großteil der zusammengefassten Wirkungen aus dem vorigen Kapitel anwendbar ist und eine Gesamtfixität von höchstens 4 liefert. Für die verbleibenden Wirkungen weisen wir eine Gesamtfixität von mindestens 5 nach und fassen schlussendlich die Ergebnisse von Kapitel 6 zusammen.

In Kapitel 7 vereinen wir die Ergebnisse der Kapitel 3 bis 6 mit Gruppenwirkungen auf kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht mindestens 2 und erreichen mit den zwei Sätzen 7.5 und 7.6 eine Antwort auf Frage 2 dieser Arbeit unter der Vermutung von Kapitel 3. Dabei fassen wir die Details zu den klassifizierten Fixität-4-Operationen auf kompakten Riemannschen Flächen in der Tabelle 7.1 zusammen und geben anschließend eine Leseanleitung der Tabelle sowie Anwendungsbeispiele der Sätze an. Diese Dissertation endet mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick.

1.1 Notation

Die vorliegende Dissertationsschrift befindet sich an einer Schnittstelle aus Gruppentheorie, Topologie und komplexer Analysis, wobei der Fokus dieser Arbeit auf endlichen Gruppen liegt. Diese Ausführungen gründen auf Grundkonzepten der Gruppen- und Permutationsgruppentheorie (Kapitel 1 bis 5 in [KuSt] sowie Kapitel I.1 bis I.3, I.5 bis I.7 und III.1 bis III.3 in [Hup1]). Wir arbeiten mit Symmetrischen Gruppen, Matrixgruppen sowie einfachen Gruppen (siehe Kapitel 4.3 und Anhang in [KuSt] sowie Kapitel II.5 und II.6 in [Hup1]). Die Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen werden wir nicht direkt zitieren. Einige Resultate, die wir verwenden, benutzen jedoch die Klassifikation. Des Weiteren sind kompakte Riemannsche Flächen ein Teil dieser Arbeit. Daher empfehlen wir Grundkenntnisse über solche Flächen (siehe Kapitel I.1 in [Mir], Kapitel I.1 und I.2 in [FaKr]). Wir verwenden zu großen

Teilen die Notation und Bezeichnungen in [KuSt]. Nachfolgend werden wir eigene Notation vorstellen, die nicht oder anders in [KuSt] vorkommt.

Im Bereich der Gruppentheorie bezeichnen wir Gruppen, Untergruppen und Normalteiler mit Großbuchstaben (beispielsweise G, U und N) sowie Elemente von Gruppen mit Kleinbuchstaben (beispielsweise g, h, x und y). Die Verknüpfung einer Gruppe ist die Multiplikation „$\cdot$“, das neutrale Element der Gruppe G bezeichnen wir mit 1_G, die triviale Gruppe $\{1_G\}$ ist 1. Allgemein schreiben wir für das Nullelement einer mathematischen Struktur M das Symbol 0_M und für das Einselement 1_M, falls vorhanden. Das zu $x \in G$ inverse Element in einer Gruppe G bezeichnen wir mit x^{-1}. Konjugation von $x \in G$ mit $y \in G$ in einer Gruppe G notieren wir als $x^y = y^{-1}xy$. Ferner bezeichnen wir den Kommutator von $x \in G$ und $y \in G$ mit $[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy$ und $G^\#$ sei die Menge aller Elemente von G, die verschieden von 1_G sind.

Die Automorphismengruppe einer mathematischen Struktur M bezeichnen wir mit $\mathrm{Aut}(M)$. Die Elemente von $\mathrm{Aut}(M)$ schreiben wir in Kleinbuchstaben. Operiert eine Gruppe G auf einer Menge, so notieren wir diese Menge mit einem großen griechischen Buchstaben sowie deren Elemente mit griechischen Kleinbuchstaben. Riemannsche Flächen werden mit Großbuchstaben im Frakturstil ($\mathfrak{X}$) sowie Elemente und das Geschlecht einer (kompakten) Riemannschen Fläche werden mit Kleinbuchstaben im Frakturstil ($\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{g}$) geschrieben. Ist Ω eine Menge, auf der eine Gruppe G operiert, so bezeichnen wir für alle $\alpha \in \Omega$ mit G_α den Punktstabilisator von α in G, mit α^G die G-Bahn von α und mit $\mathrm{fix}_\Omega(x)$ für alle $x \in G$ die Menge der Fixpunkte von x in Ω unter der Wirkung von G.

Seien G eine endliche Gruppe und U eine Untergruppe von G. Wir schreiben dann $U \leqslant G$ und setzen $G/U := \{U \cdot g \mid g \in G\}$ als die Menge der Nebenklassen von U in G. Gilt $U \neq G$, so schreiben wir auch $U \lneqq G$. Sind G und H isomorphe Gruppen, so schreiben wir $G \cong H$. Ist H eine Gruppe und gibt es eine Untergruppe V von H so, dass $U \cong V$ gilt, so schreiben wir $U \lesssim H$ bzw. U ist isomorph zu einer Untergruppe von H. Ist N ein Normalteiler von G, so schreiben wir $N \trianglelefteq G$ und bezeichnen mit G/N die Faktorgruppe G modulo N. Genauso schreiben wir $N \ntrianglelefteq G$, falls N ein echter Normalteiler von G ist.

Die Notation für Isomorphietypen einfacher, nicht-abelscher Gruppen sowie für Produkte von Gruppen ist an [Wil] angelehnt. Mit C_n, D_n, Q_n und SD_n bezeichnen wir die Isomorphietyp von zyklischen Gruppen, Diedergruppen, Quaterniongruppen und Semidiedergruppen der Ordnung $n \in \mathbb{N}$. Sind p eine Primzahl und $k \in \mathbb{N}$, so schreiben wir den Isomorphietyp einer elementarabelschen p-Gruppe der Ordnung $q := p^k$ als E_q oder C_p^k. Wir bezeichnen mit id_n das neutrale Element von $\mathcal{S}_n$. Ist M eine Menge, so scheiben wir $\mathrm{id}_M \colon M \to M$ für diejenige Abbildung, die jedes Element aus M fest lässt.

Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen beginnt bei 1 und wir setzen $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Das Symbol $\mathbb{F}$ verwenden wir für einen allgemeinen Körper und $\mathbb{F}^\#$ bezeichne die Menge $\mathbb{F} \setminus \{0_F\}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und jeden Körper $\mathbb{F}$ schreiben wir I_n für die Einheitsmatrix der Größe $n \times n$ mit Einträgen aus $\mathbb{F}$. Desweiteren bezeichnet $*$ die Matrixmultiplikation sowie die Hintereinanderausführung von Abbildungen.

Falls nicht anders behauptet, seien ab sofort alle Gruppen endlich. In der gesamten Arbeit werden wir Charaktertafeln und Elementkonjugiertenklassen von Gruppen sowie Potenzabbildungen bzw. p-power maps nutzen (siehe u.a. [Atl]). Vor allem bei der Verwendung von p-power maps von Konjugiertenklassen endlicher, einfacher Gruppen im Kapitel 2 dieser Arbeit wird die Wahl der Konjugiertenklasse wichtig sein, weswegen wir die Notation der Elementkonjugiertenklassen von [Atl] in jenem Kapitel übernehmen. So bezeichnet beispielsweise die Konjugiertenklasse 3A in $G = \mathcal{A}_5$ die Menge $\big((123)\big)^G$. Später in dieser Arbeit wird das Rechnen mit Charakteren und Konjugiertenklassen im Vordergrund stehen. Dafür werden wir Elementkonjugiertenklassen einer Gruppe G für beliebige $x \in G$ als Mengen $K = x^G$ schreiben sowie mit K^{-1} die Menge $(x^{-1})^G$ bezeichnen.

1.2 Grundlagen

In dieser Arbeit untersuchen wir Gruppenwirkungen von endlichen Gruppen G auf einer Menge Ω, in der jedes nichttriviale Element $g \in G^\#$ höchstens vier Punkte in Ω fixiert. Dazu sammeln wir zunächst einige grundlegende Resultate zu Gruppenwirkungen. Wir halten fest, dass die transitive Operation einer Gruppe H auf einer Menge $\Delta \neq \varnothing$ mit 4.1.1 in [KuSt] äquivalent zur Operation von H auf der Menge der Rechtsnebenklassen von H_α für alle $\alpha \in \Delta$ ist. $\square$

Lemma 1.2
Seien G eine Gruppe und $U \leqslant G$ eine nichttriviale Untergruppe von G. G operiere auf $\Omega := G/U$ und es sei $x \in G^\#$. Gilt $x^G \cap U = \varnothing$, so ist $|\mathrm{fix}_\Omega(x)| = 0$.

Andernfalls sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x \in U$. Dann gilt

$$|\mathrm{fix}_\Omega(x)| = \sum_{i=1}^{n} |N_G(\langle x_i \rangle) : N_U(\langle x_i \rangle)|,$$

wobei $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in x^G$ und $g_1, \ldots, g_n \in G$ derart sind, dass $x_1 = x$, $g_1 = 1_G$ und $x_i^{g_i} = x$ für alle $i \in \{2, \ldots, n\}$ sowie $\langle x \rangle^G \cap U = \langle x_1 \rangle^U \,\dot\cup\, \ldots \,\dot\cup\, \langle x_n \rangle^U$ gilt.

Beweis
Gilt $x^G \cap U = \varnothing$, dann gibt es kein $\alpha \in \Omega$ so, dass $x \in G_\alpha$ ist. Demnach folgt $|\mathrm{fix}_\Omega(x)| = 0$. Sei also $x^G \cap U \neq \varnothing$. Dann können wir o.B.d.A. $x \in U$ wählen, da die Operation von G auf der Menge der Rechtsnebenklassen von U äquivalent ist zur Operation von G auf der Menge der Rechtsnebenklassen von U^g für alle $g \in G$.

Der Beweis unterteilt sich in zwei Schritte. Im ersten Schritt zeigen wir, dass x mindestens $\sum_{i=1}^n |N_G(\langle x_i \rangle) \colon N_U(\langle x_i \rangle)|$ Punkte in Ω fixiert. Im zweiten Schritt beweisen wir, dass x maximal $\sum_{i=1}^n |N_G(\langle x_i \rangle) \colon N_U(\langle x_i \rangle)|$ viele Punkte in Ω fest lässt. Wir formulieren zunächst einige nötige Teilaussagen.

Wie in der Voraussetzung seien $n \in \mathbb{N}$, $x = x_1$ und $x_2, \ldots, x_n \in x^G$ sowie $g_1 = 1_G$ und $g_2, \ldots, g_n \in G$ derart, dass $\langle x \rangle^G \cap U = \langle x_1 \rangle^U \dot\cup \ldots \dot\cup \langle x_n \rangle^U$ sowie $x_i^{g_i} = x$ für alle $i \in \{2, \ldots, n\}$ gilt. Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$ beliebig.

(*i*) *Sei* $g \in N_G(\langle x_i \rangle)$. *Dann ist* $Ug \in \mathrm{fix}_\Omega(x_i)$:

Da $g \in N_G(\langle x_i \rangle)$ beliebig ist, gilt ${x_i}^{g^{-1}} \in \langle x_i \rangle$ und insbesondere ${x_i}^{g^{-1}} \in U$. Dann folgt $U = U{x_i}^{g_i^{-1}} = Ugx_ig^{-1}$ bzw. $Ug = Ugx_i$. □

(*ii*) *Sei* $g \in N_G(\langle x_i \rangle)$. *Für alle* $j \in \{1,\dots,n\} \setminus \{i\}$ *ist dann* $Ugg_ig_j^{-1} \in \mathrm{fix}_\Omega(x_j)$:

Wegen (*i*) gilt $Ugx_i = Ug$. Ferner ist $x_i = x^{g_i^{-1}} = ({x_j}^{g_j})^{g_i^{-1}}$. Nun folgt $Ug = Ugx_i = Ugg_ig_j^{-1}x_jg_jg_i^{-1}$ und damit auch $Ugg_ig_j^{-1} = Ugg_ig_j^{-1}x_j$. □

(*iii*) *Seien* $j \in \{1,\dots,n\}$ *beliebig und* $g,h \in N_G(\langle x_i \rangle)$. *Dann ist* $Ugg_ig_j^{-1} = Uhg_ig_j^{-1}$ *genau dann, wenn* $N_U(\langle x_i \rangle)g = N_U(\langle x_i \rangle)h$ *gilt:*

Sei zuerst $N_U(\langle x_i \rangle)g = N_U(\langle x_i \rangle)h$. Dann ist $g \in N_U(\langle x_i \rangle)h$ und es existiert ein $u \in N_U(\langle x_i \rangle) \leqslant U$ so, dass $g = u \cdot h$ gilt. Nun folgt

$$Ugg_ig_j^{-1} = Uuhg_ig_j^{-1} = Uhg_ig_j^{-1},$$

da $u \in N_U(\langle x_i \rangle) \leqslant U$ war.

Sei umgekehrt $Ugg_ig_j^{-1} = Uhg_ig_j^{-1}$. Dann gibt es ein $u \in U$ derart, dass $ugg_ig_j^{-1} = hg_ig_j^{-1}$ gilt. Nun ist $ug = h$ und genauer $u = hg^{-1} \in N_G(\langle x_i \rangle) \cap U$. Damit folgt $N_U(\langle x_i \rangle)g = N_U(\langle x_i \rangle)h$. □

(*iv*) *Seien* $j \in \{1,\dots,n\}$ *und* $j \neq i$ *sowie* $g \in N_G(\langle x_i \rangle)$ *und* $h \in N_G(\langle x_j \rangle)$. *Dann gilt* $Ugg_ig_j^{-1} \neq Uh$:

Angenommen das ist falsch. Dann gilt $g \cdot g_i \cdot g_j^{-1} \cdot h^{-1} \in U$ und ferner auch

$$\begin{aligned}
\langle x_i \rangle^{g \cdot g_i \cdot g_j^{-1} \cdot h^{-1}} &= \langle x_i \rangle^{g_i \cdot g_j^{-1} \cdot h^{-1}}, && \text{da } g \in N_G(\langle x_i \rangle), \\
&= \langle x_j \rangle^{h^{-1}}, && \text{da } ({x_i}^{g_i})^{g_j^{-1}} = x^{g_j^{-1}} = x_j, \\
&= \langle x_j \rangle, && \text{da } h \in N_G(\langle x_j \rangle).
\end{aligned}$$

Damit sind $\langle x_i \rangle$ und $\langle x_j \rangle$ durch $gg_ig_j^{-1}h^{-1} \in U$ konjugiert in U. Nun folgt insgesamt $\langle x_i \rangle^U = \langle x_j \rangle^U$, im Widerspruch zur Wahl von $i \neq j$ und zur Voraussetzung. □

<u>Schritt 1:</u> *Aufzählung der Elemente in* $\mathrm{fix}_\Omega(x)$:

Mit (*i*) ist für alle $i \in \{1,\dots,n\}$ und $g \in N_G(\langle x_i \rangle)$ schon $Ug \in \mathrm{fix}_\Omega(x_i)$. Wegen (*iii*) (für $i = j$) gilt für beliebige $i \in \{1,\dots,n\}$ und verschiedene $h_1,h_2 \in N_G(\langle x_i \rangle)$ genau $Uh_1 = Uh_2$, wenn $N_U(\langle x_i \rangle)h_1 = N_U(\langle x_i \rangle)h_2$ ist.

Sind also $m \in \mathbb{N}$ und $h_1,\dots,h_m \in G$ so, dass $|N_G(\langle x \rangle) : N_U(\langle x \rangle)| = m$ und $N_G(\langle x \rangle)/N_U(\langle x \rangle) = \{N_U(\langle x \rangle)h_1,\dots,N_U(\langle x \rangle)h_m\}$ gilt, so sind $Uh_1,\dots,Uh_m$ paarweise verschiedene Elemente von $\mathrm{fix}_\Omega(x)$. Das ist analog für $x_2,\dots,x_n$ anstelle von x.

Gilt $N_U(\langle x_i \rangle) \cdot h \in N_G(\langle x_i \rangle)/N_U(\langle x_i \rangle)$ für beliebiges $i \in \{2,\dots,n\}$ so ist Uhg_i mit (*ii*) ein Fixpunkt von x in Ω und mit (*iii*) verschieden von Ugg_i, wenn $N_U(\langle x_i \rangle) \cdot g \in N_G(\langle x_i \rangle)/N_U(\langle x_i \rangle)$ und $N_U(\langle x_i \rangle) \cdot g \neq N_U(\langle x_i \rangle) \cdot h$ gilt.

Dabei sichert (*iv*), dass alle diese aufgezählten Fixpunkte Ug und Uhg_i von x mit $N_U(\langle x\rangle)g \in N_G(\langle x\rangle)/N_U(\langle x\rangle)$ und $N_U(\langle x_i\rangle)\cdot h \in N_G(\langle x_i\rangle)/N_U(\langle x_i\rangle)$ für beliebiges $i \in \{2,\dots,n\}$ paarweise verschieden sind. Somit gilt nun

$$\sum_{i=1}^{n} |N_G(\langle x_i\rangle)\colon N_U(\langle x_i\rangle)| \geq |\mathrm{fix}_\Omega(x)|\,.$$

□

<u>Schritt 2:</u> *Das Element x fixiert höchstens $\sum_{i=1}^{n} |N_G(\langle x_i\rangle)\colon N_U(\langle x_i\rangle)|$ viele Punkte in Ω:*

Seien $Ug \in \mathrm{fix}_\Omega(x)$ beliebig und $y := x^{g^{-1}}$. Dann gilt $Ugx = Ug$ und damit auch $y \in U$. Nun können wir wegen $\langle x\rangle^G \cap U = \langle x_1\rangle^U \,\dot\cup \ldots \dot\cup\, \langle x_n\rangle^U$ genau drei Fälle unterscheiden:

Fall 1: Es gilt $y \in \langle x\rangle$.
Dann ist $g, g^{-1} \in N_G(\langle x\rangle)$ und $N_U(\langle x\rangle)g \in N_G(\langle x\rangle)/N_U(\langle x\rangle)$. Ferner gilt für alle $h \in N_U(\langle x\rangle)g$ mit (*iii*) schon $Uh = Ug$.

Fall 2: Es ist $y \notin \langle x\rangle$ und $\langle y\rangle^U = \langle x\rangle^U$.
Dann gibt es ein $u \in U$ so, dass $\langle x\rangle^u = \langle y\rangle$ gilt. Sei weiter $k \in \mathbb{N}$ so, dass $x^u = y^k$ ist. Zunächst sind x und y in G konjugiert, weil $y = x^{g^{-1}}$ war. Wegen $x^u = y^k$ sind auch y und y^k in G zueinander konjugiert. Sei also $h \in N_G(\langle y\rangle)$ so, dass $y^h = y^k$ ist. Nun gilt $x^{ug} = (y^k)^g = (y^g)^k = x^k$ und damit folgt $ug \in N_G(\langle x\rangle)$. Da $u \in U$ gilt, ist $Uug = Ug \in \mathrm{fix}_\Omega(x)$ ein Fixpunkt.

Fall 3: Es gilt $y \notin \langle x\rangle$ und $\langle y\rangle^U \neq \langle x\rangle^U$.
Dann gibt es wegen der Definition von M_x ein $i \in \{2,\dots,n\}$ so, dass $\langle y\rangle^U = \langle x_i\rangle^U$ ist. Ferner existieren ein $u \in U$ und ein $k \in \mathbb{N}$ so, dass $y^u = {x_i}^k$ gilt. Da x_i, x und y in G sowie y und ${x_i}^k$ in U zueinander konjugiert sind, gibt es ein $h \in N_G(\langle x_i\rangle)$ so, dass $x_i^h = x_i^k$ ist.

Nun folgt $x^{g^{-1}uh^{-1}} = y^{uh^{-1}} = ({x_i}^k)^{h^{-1}} = x_i$. Da $x^{g_i^{-1}} = x_i$ war, können wir $g_i^{-1} = g^{-1}uh^{-1}$ wählen. Mit (*ii*) folgt $Uh^{-1}g_i \in \mathrm{fix}_\Omega(x)$. Da $u \in U$ war, gilt nun

$$Uh^{-1}g_i = Uh^{-1}(g^{-1}uh^{-1})^{-1} = Uh^{-1}hu^{-1}g = Ug.$$

Mit diesen drei Fällen haben wir folgendes gezeigt:

Gilt $Ug \in \mathrm{fix}_\Omega(x)$, so gibt es ein $i \in \{1,\dots n\}$ derart, dass $N_U(\langle x_i\rangle)\cdot gg_i^{-1}$ in $N_G(\langle x_i\rangle)/N_U(\langle x_i\rangle)$ enthalten ist (mit $g_1 = 1_G$). Damit folgt, dass Ug einer der in Schritt 1 aufgezählten Fixpunkte ist. Deswegen gilt

$$\sum_{i=1}^{n} |N_G(\langle x_i\rangle)\colon N_U(\langle x_i\rangle)| \leq |\mathrm{fix}_\Omega(x)|\,,$$

wodurch die Behauptung bewiesen ist. ■

Lemma 1.3
Seien G eine transitive Permutationsgruppe auf einer Menge Ω und $\alpha \in \Omega$ beliebig. Ferner wirke G mit Fixität 4 auf Ω. Dann gilt:

(i) *Ist $p \geq 5$ eine Primzahl, die $|G_\alpha|$ teilt, dann enthält G_α eine Sylow p-Untergruppe von G.*

(ii) *Sei $H \leqslant G_\alpha$ ein nichttrivialer Vierpunktstabilisator. Für alle $g \in G$ gilt dann $H^g \cap H \in \{1, H\}$ (H ist t.i.). Falls $|H|$ von 3 geteilt wird, so enthält H eine Sylow 3-Untergruppe von G oder $N_G(H)$ besitzt eine Untergruppe, die $\mathcal{A}_4$ auf $\mathrm{fix}_\Omega(H)$ induziert.*

Falls $N_G(H)$ nicht transitiv auf $\mathrm{fix}_\Omega(H)$ operiert, dann ist $N_G(H)/H$ eine elementarabelsche Gruppe der Ordnung 4 und $|N_{G_\alpha}(H)/H| = 2$.

(iii) *Sei $1 \neq X \leqslant G_\alpha$. Falls X genau einen oder zwei Punkte in Ω fixiert, dann ist $|N_G(X) : N_{G_\alpha}(X)| \in \{1, 2\}$. Falls X genau vier Punkte in Ω fest lässt, dann gilt $N_G(X) \leqslant N_G(H)$ und $|N_G(H) : N_{G_\alpha}(H)| \in \{2, 4\}$, wobei H wie in (ii) ist. Falls in diesem Fall $|N_G(X)|$ von 3 geteilt wird, dann auch $|G_\alpha|$. Wenn X genau drei Punkte in Ω fixiert, so ist $|N_G(X) : N_{G_\alpha}(X)| \leq 3$.*

Beweis
Teil (*i*) ist die Aussage von Lemma 4 in [BMW]. Teil (*ii*) und alle bis auf die letzte Aussage in (*iii*) wurden in Lemma 6 in [BMW] bewiesen.

Für die verbliebene Aussage sei $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \Delta \subseteq \Omega$ so, dass $\Delta = \mathrm{fix}_\Omega(X)$ gilt. Ist $N_G(X)/X = 1$, so sind wir fertig. Sei also $N_G(X)/X$ nichttrivial. Die Elemente von $N_G(X)/X$ bewirken Symmetrien der Menge Δ. Das bedeutet, dass $N_G(X)/X$ eine Untergruppe isomorph zu einer Untergruppe von $\mathcal{S}_3$ und gegebenenfalls weitere Elemente enthält, die Δ punktweise fixieren. Die Untergruppe $N_{G_\alpha}(X)/X$ von $N_G(X)/X$ besitzt alle Elemente von $N_G(X)/X$, die Δ punktweise fixieren oder eine Transposition auf $\{\beta, \gamma\}$ bewirken. Damit folgt die Behauptung. ■

Der Begriff der Markentafel einer Gruppe, wurde von William Burnside in [Bur, S. 236f] eingeführt. Die Markentafel einer Gruppe G ist eine quadratische Matrix M, wobei die Größe von M genau die Anzahl $m \in \mathbb{N}$ der G-Konjugiertenklassen von Untergruppen $K_1, \ldots, K_m$ ist. Die Zeilen und Spalten dieser Matrix sind mit jenen Konjugiertenklassen beschriftet. Sind $A, B \leqslant G$ und $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ so, dass $A \in K_i$ und $B \in K_j$ gilt, so ist der Eintrag in Zeile i und Spalte j der Matrix M die Anzahl der Fixpunkte von B in der transitiven Operation von G auf G/A.

Weil mit 4.1.1 in [KuSt] jede transitive Operation einer Gruppe G auf einer Menge Ω äquivalent zur Operation von G auf G/G_α für ein $\alpha \in \Omega$ ist, können wir mit Hilfe der Markentafel von G überprüfen, ob G transitive Fixität-4-Operationen aufweist und welche das sind. Im Computer-Algebra-System GAP (siehe [GAP]) kann die Markentafel einer Gruppe berechnet werden. Das GAP-Paket [TOM] ist eine Bibliothek mit Markentafeln von einigen einfachen Gruppen und ihren Erweiterungen. Wir werden nachfolgend zwei GAP-Algorithmen vorstellen, die diese Markentafeln und das Paket [TOM] verwenden. Der erste Algorithmus berechnet die Anzahl der Fixpunkte von nichttrivialen Elementen von G in einer transitiven Operation auf einer Menge. Der zweite Algorithmus überprüft mit Hilfe der Markentafel einer Gruppe G, ob G eine Fixität-4-Operation aufweist. Beide Algorithmen finden ihre Anwendung in dieser Arbeit.

Bemerkung 1.4
Seien G eine Gruppe und $U \leqslant G$. Weiter seien Ω eine Menge, auf der G transitiv operiert, und $\alpha \in \Omega$ so, dass $G_\alpha = U$ gilt. Die nachfolgende GAP-Funktion [GAP] berechnet die Anzahl der Fixpunkte $|\mathrm{fix}_\Omega(g)|$ von beliebigen $g \in G^\#$ in Ω mittels der Markentafel von G.

Input: Die Markentafel `tom` von G und eine natürliche Zahl `num` so, dass die von `RepresentativeTom( tom, num )` in GAP ausgegebene Gruppe isomorph zu U ist.

Output: Eine Liste, deren Elemente selbst Listen sind. Diese Teillisten haben die Länge 3 und sind in der Form [$o(g)$, $|C_G(g)|$, $|\mathrm{fix}_\Omega(g)|$].

```
FixedPointsTom:=function(tom, num)
    local G, indC, mat, CN, l;
    if not IsTableOfMarks(tom) then
    ErrorNoReturn("the first given parameter is not a table of
        marks!");
    fi;
    if not num in [1..Length(MarksTom(tom))] then
        ErrorNoReturn("the second given parameter is not a number
            between 1 and Length(MarksTom(tom))!");
    fi;

    G := UnderlyingGroup(tom);;
    indC := Filtered ( [2..Length(MarksTom(tom))], i -> IsCyclic(
    RepresentativeTom( tom, i ) ) );;
    mat := MatTom(tom)[num];;
    CN := OrdersTom(tom);;
    l := List( indC, i -> [ CN[i], Order( Centraliser( G,
        RepresentativeTom( tom, i ) ) ), mat[i] ] );;
    return l;
end;
```

Bemerkung 1.5
Sei G eine Gruppe. Die nachfolgende GAP-Funktion [GAP] ermittelt transitive Fixität-4-Operationen von G und gibt nur solche aus, in denen ein nichttriviales Element von G genau vier Fixpunkte aufweist. Gibt es eine transitive Fixität-4-Operation von G auf einer Menge Ω und ist $\alpha \in G$, so wird die Struktur von G_α, die Mächtigkeit von Ω und die Zeilennummer von $(G_\alpha)^G$ in der Markentafel `tom` ausgegeben.

Input: Die Markentafel `tom` einer Gruppe G.

Output: Eine Liste, deren Elemente selbst Listen sind. Diese Teillisten haben die Länge 3 und sind in der Form [Zeilennummer in `tom`, Struktur des Punktstabilisators, Länge der Bahn].

```
TestTomF4:=function(tom)
    local marks, g, fin;
    marks := MarksTom(tom);;
    fin := [ ];;
    for g in [1..Length(marks)] do
        if Set( [ 2 .. Length( marks[g] ) ], i -> marks[g][i] < 5 )
            = [ true ] and ( 4 in marks[g] )
        then Add( fin, [ g, StructureDescription( RepresentativeTom(
            tom, g) ), marks[g][1]] );
        fi;
    od;
    return fin;
end;
```

2 Transitive Fixität-4-Operationen und Involutionen mit vier Fixpunkten

In diesem Kapitel untersuchen wir transitive und treue Fixität-4-Operationen von einfachen und nicht-abelschen Gruppen, in denen es eine Involution mit genau vier Fixpunkten gibt, und werden Frage 1 beantworten. Die Existenz einer Involution mit vier Fixpunkten in einer transitiven Fixität-4-Operation einer Permutationsgruppe G auf einer Menge Ω hat große Auswirkungen auf G und Ω. Wir fassen wichtige Eigenschaften im folgenden Lemma zusammen:

Lemma 2.1
Seien G eine transitive Permutationsgruppe auf einer Menge Ω von Fixität 4 sowie $\alpha \in \Omega$ und $t \in G_\alpha$ eine Involution mit vier Fixpunkten in Ω.

Dann ist $|\Omega|$ gerade, G_α enthält keine Sylow 2-Untergruppe von G und jedes 2-Element von $G_\alpha^\#$ hat 2 oder 4 Fixpunkte in Ω. Gibt es ferner eine Sylow 2-Untergruppe S von G, die t in ihrem Zentrum enthält, so ist $|C_G(t) : C_{G_\alpha}(t)| \in \{2,4\}$.

Beweis
Da $t \in G_\alpha$ eine Involution ist, ist $X := \langle t \rangle$ eine Gruppe der Ordnung 2 und es gilt $N_G(X) = C_G(t)$ und $N_{G_\alpha}(X) = C_{G_\alpha}(t)$. Weil die X-Bahnen von Ω Länge 1 oder 2 haben, die Fixpunkte von t in Ω genau in den Bahnen der Länge 1 sind und t nach Voraussetzung genau vier Punkte in Ω fixiert, ist $|\Omega|$ gerade.

Da G transitiv auf Ω operiert, gilt $|G| = |\Omega| \cdot |G_\alpha|$. Weil $|\Omega|$ sowie $|G_\alpha|$ gerade sind, kann G_α keine Sylow 2-Untergruppe von G enthalten. Mit Lemma 8 (a) in [BMW] folgt damit die Aussage über die Anzahl der Fixpunkte von 2-Elementen aus G_α in Ω.

Mit Lemma 1.3 (*iii*) ist $k := |C_G(t) : C_{G_\alpha}(t)| \leq 4$. Angenommen, es sei $k = 3$. Sei weiter $H \leqslant G_\alpha$ ein bzgl. Inklusion maximaler Vierpunktstabilisator und so, dass $\mathrm{fix}_\Omega(t) = \mathrm{fix}_\Omega(H)$ gilt. Aufgrund der Annahme gibt es ein Element $y \in C_G(t) \setminus C_{G_\alpha}(t)$ derart, dass $y^3 \in C_{G_\alpha}(t)$ ist. Insbesondere ist $o(y)$ durch 3 teilbar. Weil $t \in H$ ist, gilt nach Lemma 1.3 (*iii*) jetzt $C_G(t) \leqslant N_G(H)$. Daher ist $y \in N_G(H)$. Ferner gilt mit selbem Lemma auch $|N_G(H) : N_{G_\alpha}(H)| \in \{2,4\}$, wodurch $y \in G_\alpha$ folgt. Das widerspricht $k = 3$.

Sei zum Schluss $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$ derart, dass $t \in Z(S)$ gilt. Dann ist $S \leqslant C_G(t)$ und weil $|\Omega|$ gerade ist, folgt nun mit letztem Absatz $k \in \{2,4\}$. ■

Wir arbeiten unter folgender

Voraussetzung 2.2
Seien Ω eine Menge und G eine einfache und nicht-abelsche Gruppe, die transitiv, treu und mit Fixität 4 auf Ω operiert. Ferner seien $\alpha \in \Omega$ und $t \in G_\alpha$ so, dass $o(t) = 2$ und $|\mathrm{fix}_\Omega(t)| = 4$ gilt, sowie $C := C_G(t)$ und $C_\alpha := C \cap G_\alpha$.

Seien G und Ω wie in Voraussetzung 2.2. Da eine Involution von G genau vier Punkte von Ω fixiert, ist G mit Theorem 14 in [BMW] vom sektionalen 2-Rang höchstens 4 oder G besitzt eine stark eingebettete Untergruppe.[1] Dann ist G mit dem Main Theorem in [GoHa, S. 1f] und Theorem 14 (b) in [BMW] isomorph zu einer der folgenden Gruppen:

(Lie-1) $\mathrm{PSL}_2(q)$, $\mathrm{PSL}_3(q)$, $\mathrm{PSU}_3(q)$, $\mathrm{PSp}_4(q)$, $G_2(q)$, ${}^2G_2(q)$, ${}^3D_4(q)$, $\mathrm{PSL}_4(q)$ mit $q \not\equiv 1$ modulo 8, $\mathrm{PSU}_4(q)$ mit $q \not\equiv 7$ modulo 8, $\mathrm{PSL}_5(q)$ mit $q \equiv -1$ modulo 4 oder $\mathrm{PSU}_5(q)$ mit $q \equiv 1$ modulo 4, wobei in allen Fällen $q \geq 3$ eine ungerade Primzahlpotenz ist, (*der Lie-Typ-Fall in ungerader Charakteristik*)

(Lie-2) $\mathrm{PSL}_3(4)$, oder $\mathrm{PSL}_2(q)$, $\mathrm{PSU}_3(q)$ oder $\mathrm{Sz}(q)$, wobei in allen Fällen $q \geq 4$ eine gerade Primzahlpotenz ist, (*der Lie-Typ-Fall in gerader Charakteristik*)

(Alt) $\mathcal{A}_7$, $\mathcal{A}_8$, $\mathcal{A}_9$, $\mathcal{A}_{10}$ oder $\mathcal{A}_{11}$, (*der alternierende Fall*)

(Spo) M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, J_1, J_2, J_3, McL oder Ly. (*der sporadische Fall*)

Wir bemerken, dass sich die Notation dieser Arbeit von der in [GoHa] unterscheidet, und verweisen auf die Bemerkung nach dem Main Theorem in [GoHa, S. 2].

Wir beginnen nun mit der Untersuchung der Gruppen und unendlichen Serien in (Lie-1), (Lie-2), (Alt) und (Spo). Wir werden dabei in einzelnen Lemmata jede dieser Gruppen bzw. unendlichen Serien von Gruppen auf die Einhaltung der Voraussetzung 2.2 überprüfen, um am Ende des Kapitels eine Klassifikation unter dieser Voraussetzung beweisen zu können und damit Frage 1 zu beantworten.

Wurde eine Operation im Sinne von Voraussetzung 2.2 nachgewiesen, so geben wir die Anzahl der Fixpunkte eines Elements der Gruppe in einer nachfolgenden Bemerkung an. Diese Informationen können mit Lemma 1.2 oder mit dem in Bemerkung 1.4 vorgestellten Algorithmus ermittelt werden. Die Darstellung werden wir tabellarisch halten und dabei die Anzahl der Fixpunkte eines Elements der Gruppe mit seiner Konjugiertenklasse in der Notation von [Atl] identifizieren. Das ist möglich, da Punktstabilisatoren in einer transitiven Operation zueinander konjugiert sind. Dabei werden wir zu einer Elementordnung nur diejenigen Elementkonjugiertenklassen aufführen, die zu konjugierten zyklischen Untergruppen der Gruppe führen. (Beispielsweise werden für die Gruppe $\mathcal{A}_5$ die Konjugiertenklassen 5A und

[1] Sektionaler 2-Rang höchstens 4 bedeutet, dass jede Sektion H/N von G mit $H \leqslant G$ und $N \trianglelefteq H$ eine elementarabelsche 2-Untergruppe von Ordnung maximal $2^4 = 16$ besitzt. Eine stark eingebettete Untergruppe H von G hat die Eigenschaft, dass $|H|$ gerade und $|H \cap H^g|$ für alle $g \in G \setminus H$ ungerade ist.

5B* zur Klasse 5A zusammengeführt.) Die tabellarisch aufgeführten Elementkonjugiertenklassen und deren Nummer sind mit den Konjugiertenklassen der jeweiligen Gruppe in [Atl] identifiziert.

Bis zum Ende des Kapitels werden wir Informationen über Konjugiertenklassen, Charaktere, Struktur, Ordnung und Index maximaler Untergruppen, Ordnungen von Zentralisatoren von Elementen, p-power maps und vieles mehr für die jeweilige einfache Gruppe aus [Atl] nutzen.

2.1 Alternierende Gruppen

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Gruppen aus dem alternierenden Fall des Main Theorems in [GoHa]. Das sind die Gruppen $\mathcal{A}_7$, $\mathcal{A}_8$, $\mathcal{A}_9$, $\mathcal{A}_{10}$ und $\mathcal{A}_{11}$. Wir beginnen mit derjenigen alternierenden Gruppe vom kleinsten Permutationsgrad:

Lemma 2.3
Es gelte Voraussetzung 2.2. Dann ist G nicht isomorph zu $\mathcal{A}_7$.

Beweis
Angenommen, das sei nicht so. Mit der Charaktertafel von G in [Atl] gibt es genau eine G-Konjugiertenklasse von Involutionen und es gilt $|C| = 24 = 2^3 \cdot 3$. Mit Lemma 2.1 wird $|G_\alpha|$ von 6 geteilt und sei $x \in C_\alpha \cap 3\text{A}$ mit der p-power-map von G in [Atl]. Wir setzen $X := \langle x \rangle$, $N := N_G(X)$ und $N_\alpha := N \cap G_\alpha$. Mit [Atl] ist N eine maximale Untergruppe von G, hat Ordnung 72 und ist isomorph zu $(\mathcal{A}_4 \times C_3) : C_2$. Mit den Lemmata 1.3 (*iii*) und 2.1 folgt schon $|N : N_\alpha| \in \{2,4\}$.

Ferner gilt $|C_G(x)| = 36$ mit [Atl]. Da $C_G(x) \leqslant N$ gilt und $\mathcal{A}_4$ keine Untergruppen vom Index 2 besitzt, folgt $C_G(x) \cong \mathcal{A}_4 \times C_3$. Damit wirken die Elemente in $N \setminus C_G(x)$ per Konjugation auf x als invertierende Involutionen.

Aus $|N : N_\alpha| = 4$ folgt $N_\alpha \cong (C_3 \times C_3) : C_2$, da $\mathcal{A}_4$ keine Untergruppe vom Index 2 besitzt. Jedoch ist dann gleichzeitig $t \in C_G(x)$ und $t \in N \setminus C_G(x)$. Das ist unmöglich. Nun ist also $|N : N_\alpha| = 2$ und $N_\alpha = C_G(x)$.

Angenommen, es gilt $G_\alpha = N_\alpha$. Da G_α ein direktes Produkt aus X und einer Untergruppe isomorph zu $\mathcal{A}_4$ ist, sei $K \leqslant G_\alpha$ ein Komplement von X in G_α so, dass $t \in K$ ist. Dann ist $t^G \cap K = t^K$ und $t^G \cap G_\alpha = t^{G_\alpha}$, weil $|G_\alpha : K| = 3$ gilt. Ferner ist $|C_K(t)| = 4$ und $|C_X(t)| = 3$. Dann folgt $|C_\alpha| = 12$ und Lemma 1.2 liefert $|\text{fix}_\Omega(t)| = 2$, ein Widerspruch zur Voraussetzung 2.2.

Nun ist also $N_\alpha \lneqq G_\alpha$ und insbesondere gilt dann $G_\alpha \nleqslant N$. Sei $M \leqslant G$ eine maximale Untergruppe von G so, dass $G_\alpha \leqslant M$ gilt. Dann besitzt M schon eine Untergruppe isomorh zu $\mathcal{A}_4 \times C_3$. Insbesondere wird $|M|$ von 36 geteilt. Mit der Liste der G-Konjugiertenklassen von maximalen Untergruppen von G in [Atl] folgt nun $M \cong \mathcal{A}_6$ und $|M : G_\alpha|$ ist ein echter Teiler von 10. Da $N_\alpha \cong \mathcal{A}_4 \times C_3$ nicht zu $E_9 : C_4$ isomorph ist, folgt mit der Liste der maximalen Untergruppen von M in [Atl] schon $G_\alpha = M$. Dann ist $|\Omega| = 7$, ein Widerspruch zu Lemma 2.1. ■

Lemma 2.4
Es gelte Voraussetzung 2.2. Dann ist $G \not\cong \mathcal{A}_8$.

Beweis
Angenommen, das sei nicht so. Mit der Charaktertafel von G in [Atl] gibt es zwei Klassen von Involutionen. Wir zeigen zunächst eine Zwischenbehauptung:

<u>Schritt 1:</u> *Es gilt $2B \cap G_\alpha = \varnothing$:*

Angenommen, das sei falsch. Weiter sei $y \in G_\alpha \cap 2\text{B}$. Dann gilt mit der Charaktertafel von G in [Atl] schon $|C_G(y)| = 96 = 2^5 \cdot 3$. Mit den Lemmata 1.3 (*iii*) und 2.1 wird dann $|G_\alpha|$ von $2^3 \cdot 3$ geteilt. Wir betrachten $x \in C_{G_\alpha}(y) \cap 3\text{A}$, $N := N_G(\langle x \rangle)$ und $N_\alpha := N \cap G_\alpha$ mit Lemma 1.3 (*iii*).

Mit [Atl] gilt $|C_G(x)| = 180$. Ferner ist N eine maximale Untergruppe von G von Ordnung 360 und N ist isomorph zu $(\mathcal{A}_5 \times C_3) : C_2$. Da $C_G(x) \leqslant N$ gilt und $\mathcal{A}_5$ keine Untergruppe vom Index 2 besitzt, folgt $C_G(x) \cong \mathcal{A}_5 \times C_3$ und die Elemente aus $N \backslash C_G(x)$ wirken per Konjugation auf x als invertierende Involutionen. Ferner besitzt N eine Untergruppe isomorph zu $\mathcal{S}_5$ mit [Atl] und weiter folgt $|N : N_\alpha| \in \{1, 2\}$ mit Lemma 1.3 (*iii*), da $\mathcal{A}_5$ keine Untergruppen vom Index 2, 3 oder 4 besitzt und $\langle x \rangle = Z(C_G(x)) \leqslant N_\alpha$ ist.

Angenommen, es gilt $|N : N_\alpha| = 1$. Da N eine maximale Untergruppe von G ist mit [Atl], folgt $G_\alpha = N$. Da N eine Untergruppe isomorph zu $\mathcal{S}_5$ enthält, gibt es mindestens zwei Konjugiertenklassen von Involutionen t_1 und t_2 in G_α, wobei t_1 eine Doppeltransposition und t_2 eine Transposition in der natürlichen Wirkung von $\mathcal{S}_5$ seien. Mit der Charaktertafel von $\mathcal{S}_5$ und wegen $C_G(x) \cong \mathcal{A}_5 \times C_3$ gilt nun $|C_{G_\alpha}(t_1)| = 24$ und $|C_{G_\alpha}(t_2)| = 12$.

Falls $t_2 \in y^G$ ist, so gilt $|\text{fix}_\Omega(y)| \geq \frac{96}{12} = 8$ mit Lemma 1.2. Das ist unmöglich. Nun ist also $t_2 \notin y^G = 2\text{B}$ und mit der Charaktertafel von G in [Atl] folgt $t_2 \in 2\text{A}$. Dann gilt jedoch $|\text{fix}_\Omega(t_2)| \geq \frac{192}{12} = 16$ mit Lemma 1.2. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung 2.2.

Nun gilt also $|N : N_\alpha| = 2$ und damit $N_\alpha = C_G(x) \cong \mathcal{A}_5 \times C_3$. Falls $G_\alpha = N_\alpha$ ist, so folgt mit der Charaktertafel von $\mathcal{A}_5$ in [Atl] und wegen $\frac{|G_\alpha|}{|\mathcal{A}_5|} = 3$ schon $y^G \cap G_\alpha = y^{G_\alpha}$ und $|C_{G_\alpha}(y)| = 12$. Zusammen mit Lemma 1.2 liefert das insgesamt $|\text{fix}_\Omega(y)| = 8$. Das ist unmöglich.

Daher gilt $N_\alpha \lneqq G_\alpha$ und es sei $M \leqslant G$ eine maximale Untergruppe von G mit $G_\alpha \leqslant M$. Nun folgt $M \not\cong N$, da sonst $M = N = G_\alpha$ ist. Ferner wird $|M|$ von 180 geteilt und M enthält eine Untergruppe isomorph zu $\mathcal{A}_5 \times C_3$. Da mit der Liste der Konjugiertenklassen von maximalen Untergruppen von $\mathcal{A}_7$ und $\mathcal{S}_6$ in [Atl] keine dieser beiden Gruppen eine Untergruppe isomorph zu $N_\alpha \cong \mathcal{A}_5 \times C_3$ enthält, erfolgt ein Widerspruch mit der Liste der G-Konjugiertenklassen von maximalen Untergruppen von G in [Atl]. $\square$

Mit Schritt 1 gilt nun $2\text{B} \cap G_\alpha = \varnothing$. Daher ist $t \in 2\text{A}$ und $|C| = 2^6 \cdot 3$ mit [Atl]. Wegen Lemma 2.1 wird nun $|G_\alpha|$ von $2^4 \cdot 3$ geteilt. Sei jetzt $X \leqslant G_\alpha$ eine elementarabelsche 2-Gruppe von maximaler Ordnung.

Schritt 2: *Es gilt* $|X| \geq 8$*:*

Da C im Normalisator W einer elementarabelschen Gruppe Y der Ordnung 8 enthalten ist, wobei $Y \cap 2\mathrm{A} = Y^{\#}$ gilt, hat W Ordnung 1344 mit [Atl]. Weil $|C| = 192$ mit [Atl] gilt, folgt $|W : C| = 7$. Da $W \cong {C_2}^3 : \mathrm{PSL}_2(7)$ nach [Atl] ist, folgt mit der Liste der $\mathrm{PSL}_2(7)$-Konjugiertenklassen von maximalen Untergruppen in $\mathrm{PSL}_2(7)$ schon $C \cong {C_2}^3 : \mathcal{S}_4$. Sei $V \leqslant C$ ein Komplement von Y in C so, dass $V \cap C_\alpha$ maximal ist. Da $|C : C_\alpha| \in \{2, 4\}$ mit Lemma 2.1 gilt, können wir nun mehrere Möglichkeiten unterscheiden.

Zuerst sei $|C : C_\alpha| = 2$. Dann gilt entweder $Y \leqslant C_\alpha$ und $|V : V \cap C_\alpha| = 2$ oder $V \leqslant C_\alpha$ und $|Y \cap C_\alpha| = 4$. Im ersten Fall besitzt C_α eine elementarabelsche Untergruppe der Ordnung 8. Für den zweiten Fall betrachten wir erneut $W \cong Y : \mathrm{PSL}_2(7)$. In der natürlichen Wirkung von $\mathrm{SL}_3(2) \cong \mathrm{PSL}_2(7)$ auf Y, einem dreidimensionalem GF(2)-Vektorraum, hat jedes Element von Ordnung 3 in $\mathrm{SL}_3(2)$ die Gestalt einer Monomialmatrix (vgl. Satz 7.2 in [Hup1]). Eine Monomialmatrix in $\mathrm{SL}_3(2)$ ist eine Permutationsmatrix, die die Basisvektoren permutiert. Da es in $V \cap C_\alpha$ ein Element h der Ordnung 3 gibt, können wir h als eine solche Matrix auffassen. Das Element h operiert auf den eindimensionalen Teilräumen von Y, indem h den Teilraum $\langle t \rangle$ fixiert und die übrigen sechs eindimensionalen Teilräume sich auf $\langle h \rangle$-Bahnen der Länge 3 verteilen. Da jedoch $|Y \cap C_\alpha| = 4$ und $|(Y \cap C_\alpha) \setminus \langle t \rangle| = 2$ gilt, erhalten wir einen Widerspruch zu dieser Operation von h auf Y. Damit kann der oben genannte zweite Fall nicht eintreten.

Sei nun $|C : C_\alpha| = 4$. Dann gilt entweder $Y \leqslant C_\alpha$ und $|V : V \cap C_\alpha| = 4$, $V \leqslant C_\alpha$ und $Y \cap C_\alpha = \langle t \rangle$ oder $|V : V \cap C_\alpha| = 2$ und $|Y \cap C_\alpha| = 4$. Der letzte Fall kann wegen der eben betrachteten natürlichen Operation von $\mathrm{SL}_3(2)$ auf Y nicht eintreten, da $V \cap C_\alpha$ ein Element der Ordnung 3 enthält. Im ersten Fall ist $Y \leqslant C_\alpha$ eine elementarabelsche Untergruppe der Ordnung 8. Falls zuletzt $V \leqslant C_\alpha$ und $Y \cap C_\alpha = \langle t \rangle$ gilt, so enthält V eine Kleinsche Vierergruppe K und es ist $\langle t \rangle \cdot K \leqslant C_\alpha$ elementarabelsch der Ordnung 8. □

Da mit Schritt 2 jetzt $|X| \geq 8$ gilt, sei $Y \leqslant X \leqslant G_\alpha$ so, dass $|Y| = 8$ ist. Mit Schritt 1 besteht $Y^{\#}$ nur aus Involutionen aus der G-Konjugiertenklasse 2A. Wir betrachten jetzt $N := N_G(Y)$ und $N_\alpha := N \cap G_\alpha$. Mit [Atl] ist N eine maximale Untergruppe von G und isomorph zu $E_8 : \mathrm{PSL}_3(2)$. Mit Lemma 1.3 (*iii*) gilt $|N : N_\alpha| \leq 4$. Da $\mathrm{PSL}_3(2)$ mit [Atl] keine Untergruppen vom Index 2, 3 oder 4 besitzt und $Y \leqslant G_\alpha$ gilt, muss schon $|N : N_\alpha| = 1$ sein. Dann ist $G_\alpha = N$, da N eine maximale Untergruppe von G ist. Nun folgt $|\Omega| = 15$, ein Widerspruch zu Lemma 2.1. Damit ist alles gezeigt. ■

Lemma 2.5
Es gelte Voraussetzung 2.2. Dann ist G nicht isomorph zu eine der Gruppen $\mathcal{A}_9$, $\mathcal{A}_{10}$ oder $\mathcal{A}_{11}$.

Beweis
Angenommen, das sei falsch. Seien $n \in \{9, 10, 11\}$ und G isomorph zu $\mathcal{A}_n$. Mit der Charaktertafel von G in [Atl] besitzt G zwei Konjugiertenklassen 2A und 2B von Involutionen.

Schritt 1: *G_α enthält kein Element aus der Elementkonjugiertenklasse 3A:*

Angenommen, das sei doch so und sei $x \in G_\alpha \cap 3\mathrm{A}$. Dann gilt $|C_G(x)| = 3 \cdot |\mathcal{A}_{n-3}|$ mit [Atl] und $N := N_G(\langle x \rangle) \cong (\mathcal{A}_{n-3} \times C_3) : C_2$ ist eine maximale Untergruppe von G. Sei $N_\alpha := N \cap G_\alpha$. Da $x \in G_\alpha$ nun 1, 2, 3 oder 4 Punkte in Ω fixiert, gilt $|N : N_\alpha| \leq 4$ mit Lemma 1.3 (*iii*). Der Fall Index 3 kann nicht eintreten, da $\mathcal{A}_{n-3}$ keine Untergruppe vom Index 3 besitzt und damit $x \notin N_\alpha$ folgen würde. Der Fall Index 4 kann ebenfalls nicht eintreten, da $\mathcal{A}_{n-3}$ keine Untergruppe vom Index 2 oder 4 besitzt. Somit ist $C_G(x) \cong \mathcal{A}_{n-3} \times C_3$ in G_α enthalten und wir finden ein Element $y \in N_\alpha \cap 2\mathrm{A}$ mit der p-power map von G in [Atl]. Da $G_\alpha \neq G$ gilt, sei $M \leqslant G$ eine maximale Untergruppe von G so, dass $G_\alpha \leqslant M$ ist.

Sei zuerst $n \neq 9$. Dann ist $|N|_5 = 5$ und $|G|_5 = 25$. Ferner enthält N eine Untergruppe isomorph zu $\mathcal{A}_7$. Mit Lemma 1.3 (*i*) besitzt G_α dann eine Sylow 5-Untergruppe von G und eine Sylow 7-Untergruppe von G. Das bedeutet nun, dass $|G_\alpha|$ von $5 \cdot 3 \cdot |\mathcal{A}_{n-3}|$ geteilt wird. Für $n = 10$ folgt aus Ordnungsgründen automatisch $G = G_\alpha$, da $\mathcal{A}_{10}$ mit [Atl] keine maximale Untergruppe besitzt, deren Ordnung durch $5 \cdot 3 \cdot |\mathcal{A}_7| = 37800$ teilbar ist. Für $n = 11$ gilt wegen der Ordnung von G_α sofort $M \cong \mathcal{A}_{10}$. Da hier $|G_\alpha|$ von $15 \cdot |\mathcal{A}_8| = 302400$ geteilt wird, $\frac{|\mathcal{A}_{10}|}{15 \cdot |\mathcal{A}_8|} = 6$ gilt und M keine Untergruppen vom Index 2, 3 oder 6 besitzt, folgt $G_\alpha = M$. Dann ist $|\Omega| = 11$ und für $n > 9$ erhalten wir einen Widerspruch mit Lemma 2.1.

Somit gilt $n = 9$. Dann ist aus Ordnungsgründen und mit der Liste der G-Konjugiertenklassen von maximalen Untergruppen von G in [Atl] nur $M = N$ möglich. Da G_α höchstens Index 2 in N hat (siehe oben), folgt

$$C_3 \times \mathcal{A}_6 \cong C_G(x) \leqslant G_\alpha \leqslant N \cong (C_3 \times \mathcal{A}_6) : C_2.$$

Weil $y \in C_G(x)$ und $o(y) = 2$ gilt, ist y in einer Untergruppe isomorph zu $\mathcal{A}_6$ von $C_G(x)$ enthalten. Da es mit [Atl] in $\mathcal{A}_6$ nur genau eine Konjugiertenklasse von Involutionen gibt, gilt $\left|C_{C_G(x)}(y)\right| = 3 \cdot 8 = 24$ und $|C_N(y)| = 2 \cdot 3 \cdot 8 = 48$. Das Gleiche gilt für Involutionen $z \in N \setminus C_G(x)$. Weiter ist $|C_G(y)| = 480$ nach [Atl], da $y \in 2\mathrm{A}$ war. Lemma 1.2 liefert nun $\mathrm{fix}_\Omega(y) \geq \frac{480}{48} = 10 > 4$, falls $G_\alpha = C_G(x)$ oder $G_\alpha = N$ gilt. Das widerspricht der Voraussetzung 2.2 und es folgt die Behauptung von Schritt 1.

$\square$

Nach Schritt 1 ist $G_\alpha \cap 3\mathrm{A} = \varnothing$. Damit enthält G_α keine Sylow 3-Untergruppe von G und mit Lemma 8 (b) in [BMW] hat nun jedes Element von Ordnung 3 in G_α genau drei Fixpunkte in Ω. Gilt $t \in 2\mathrm{A}$, so ist mit Lemma 1.3 (*iii*) und mit der p-power map von G in [Atl] wieder $G_\alpha \cap 3\mathrm{A} \neq \varnothing$, ein Widerspruch zu Schritt 1.

Somit gilt $t \in 2\mathrm{B}$. Nach [Atl] ist 3 ein Teiler von $|C|$ und damit auch von $|G_\alpha|$ mit Lemma 2.1. Gilt $n = 11$, so gibt es mit der p-power map von G in [Atl] ein Element $x \in C \cap 6\mathrm{A}$ so, dass $x^3 = t$ und $x^2 \in 3\mathrm{A}$ ist. Da $|C : C_\alpha| \in \{2, 4\}$ mit Lemma 2.1 gilt, folgt $x^2 \in G_\alpha$ im Fall $n = 11$. Das widerspricht Schritt 1. Wir müssen also nur noch $n \in \{9, 10\}$ betrachten.

Schritt 2: *Es gilt* $|\Omega| = 84$*:*

Ist $n = 9$, so sei mit der p-power map in [Atl] $x \in$ 3C $\cap$ $C \neq \varnothing$. Es gilt $|N_G(\langle x\rangle)| = 2^2 \cdot 3^3$ und mit Lemma 1.3 (*iii*) enthält G_α eine 3-Untergruppe von Ordnung 9. Weiter ist $|C| = 2^6 \cdot 3$ und mit Lemma 2.1 wird $|G_\alpha|$ von $2^4 \cdot 3^2$ geteilt.

Für $n = 10$ sei $x \in$ 3B $\cap$ $C \neq \varnothing$ mit der p-power map in [Atl]. Es gilt $|N_G(\langle x\rangle)| = 2^4 \cdot 3^3$ und wieder mit Lemma 1.3 (*iii*) enthält G_α eine 3-Untergruppe von Ordnung 9. Es ist $|C| = 2^7 \cdot 3$ und mit Lemma 2.1 wird $|G_\alpha|$ von $2^5 \cdot 3^2$ geteilt.

Seien $S_\alpha \in \mathrm{Syl}_3(G_\alpha)$ und $S \in \mathrm{Syl}_3(G)$ so, dass $S_\alpha \leqslant S$ gilt. Es ist $|S| = 81$ und wir wissen, dass $|S_\alpha| \geq 9$ sowie $S_\alpha \neq S$ gilt. Da insbesondere $|S_\alpha| \neq 3$ ist, kann nur der Fall (d) von Lemma 10 in [BMW] eintreten und es folgt, dass es in Ω genau eine S-Bahn $\Delta \subseteq \Omega$ der Länge 3 gibt und die anderen Bahnen von S in $\Omega \setminus \Delta$ regulär sind. Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}_0$ so, dass $|\Omega| = k \cdot 81 + 3$ gilt. Ferner ist $|\Omega| \cdot |G_\alpha| = |G|$. Da G keine Untergruppe vom Index 3 besitzt, können wir $k > 0$ annehmen. Da $|G_\alpha| \geq 2^4 \cdot 3^2$ für $n = 9$ bzw. $|G_\alpha| \geq 2^5 \cdot 3^2$ für $n = 10$ ist, erhalten wir durch Umstellen, dass für $k \geq 16$ im Fall $n = 9$ bzw. $k \geq 78$ im Fall $n = 10$ schon $81k + 3 = |\Omega| > \frac{|G|}{|G_\alpha|}$ gilt.

Durch Berechnung von $\frac{|G|}{|\Omega|}$ für $1 \leq k \leq 15$, falls $n = 9$ gilt, bzw. $1 \leq k \leq 77$, falls $n = 10$ gilt, erhalten wir, dass nur für $k = 1$ die Zahl $|\Omega| = 81k + 3$ ein Teiler von $|G|$ ist. Also folgt $k = 1$ und $|\Omega| = 84$. □

Im Fall $n = 10$ gilt mit Schritt 2 nun $|G_\alpha| = 21600$. Mit der Liste der G-Konjugiertenklassen von maximalen Untergruppen von $G \cong \mathcal{A}_{10}$ in [Atl] besitzt G jedoch keine Untergruppe, deren Ordnung durch 21600 teilbar ist. Im Fall $n = 9$ gilt wegen Schritt 2 schon $|G_\alpha| = 2160$. Mit [Atl] ist dann G_α der Normalisator einer zyklischen Untergruppe X der Ordnung 3, wobei das erzeugende 3-Element von X nach [Atl] in der Konjugiertenklasse 3A enthalten ist. Das ist ein Widerspruch zu Schritt 1 und insgesamt folgt die Behauptung. ■

Wir haben die alternierenden Gruppen aus dem Main Theorem von [GoHa] überprüft und konnten zeigen, dass keine Gruppe aus dem Fall **(Alt)** auf einer Menge Ω transitiv und mit Fixität 4 operiert so, dass eine Involution genau vier Fixpunkte in Ω hat. Mit dem Algorithmus in Bemerkung 1.5 können wir feststellen, dass die Gruppe $\mathcal{A}_7$ zwei nicht-äquivalente, transitive Fixität-4-Operationen besitzt, in denen Involutionen weniger als vier Punkte auf der jeweiligen Bahn festlassen. In der einen Operation hat $\mathcal{A}_7$ zyklische Punktstabilisatoren der Ordnung 5. Diese werden wir in Lemma 3.7 genauer betrachten. Die andere Fixität-4-Operationen vermerken wir an dieser Stelle:

Bemerkung 2.6
Sei $G \cong \mathcal{A}_7$. Der in Bemerkung 1.5 vorgestellten Algorithmus liefert, dass G in der natürlichen Operation auf $\Omega := \{1, \ldots, 7\}$ mit Fixität 4 wirkt. Mit dem Algorithmus aus Bemerkung 1.4 ermitteln wir die Fixpunktanzahl von nichttrivialen Elementen von G in dieser Operation:

$x \in$	2A	3A	3B	4A	5A	6A	7A
$\lvert \mathrm{fix}_\Omega(x) \rvert$	3	4	1	1	2	0	0

Tabelle 2.1: Anzahl der Fixpunkte der Elemente $x \in \mathcal{A}_7^\#$ in der natürlichen Operation.

2.2 Sporadische Gruppen

In diesem Abschnitt werden wir die sporadischen Gruppen aus dem Main Theorem von [GoHa] untersuchen. Das sind die Gruppen M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, J_1, J_2, J_3, McL und Ly.

Im ersten Lemma dieses Abschnittes untersuchen wir Fixität-4-Operationen der Mathieu-Gruppe M_{11} unter Voraussetzung 2.2. Dafür müssen wir die Struktur einer gewissen Untergruppe des Normalisators einer Sylow 3-Untergruppe von M_{11} sowie die Untergruppenstruktur von $\mathrm{GL}_2(3)$ verstehen. Wir sammeln zunächst die nötigen Informationen in einer

Bemerkung 2.7

(i) Mit einer kurzen Rechnung in [GAP] bestimmen wir die Isomorphietypen der Untergruppen von $\mathrm{GL}_2(3)$ vom Index 2 und 4:

```
gap> G:=GL(2,3);;
gap> cs:=Filtered( ConjugacyClassesSubgroups( G ), i -> Index(
       G, Representative(i) ) in [ 2, 4 ]);;
gap> List( cs, i -> StructureDescription( Representative(i) ) );
> [ "D12", "SL(2,3)" ]
```

Das heißt, dass die Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(3)$ vom Index 2 nur $\mathrm{SL}_2(3)$ ist und dass die Untergruppen von $\mathrm{GL}_2(3)$ vom Index 4 Diedergruppen der Ordnung 12 sind.

(ii) Seien V ein zweidimensionaler Vektorraum über dem Körper GF(3) und $K \in \mathrm{Syl}_2(\mathrm{GL}(V))$. Seien $\hat{B} = (v_1, v_2)$ eine geordnete Basis von V sowie H eine Untergruppe von $V \cdot K$, wobei $|H| = 2^2 \cdot 3^2$ und $U := H \cap K$ elementarabelsch der Ordnung 4 seien. Für Lemma 2.8 wollen wir $|C_H(x)|$ für alle Involutionen $x \in H$ bestimmen.

Wir fassen K als Matrixgruppe auf und wegen der Übersichtlichkeit seien $0, 1, -1$ die Elemente $0_{\mathrm{GF}(3)}, 1_{\mathrm{GF}(3)}, -1_{\mathrm{GF}(3)}$. Wir finden

$$a := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } b := \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

so, dass $K = \langle a, b \rangle$ gilt. Es ist $o(a) = 8$, $o(b) = 2$ und $a^b = a^3$. Mit Satz I.14.9 (4) in [Hup1] ist K eine Semidiedergruppe. Seien $C := \langle a \rangle$, $D := \langle a^2, b \rangle$ und $Q := \langle a^2, ab \rangle$ die zyklische, diedrische und Quaternionenuntergruppe von K

vom Index 2. Es gilt $C \cap D = \langle a^2 \rangle = C \cap Q = D \cap Q$ und $C \cup D \cup Q = K$. Die Involutionen in K sind a^4, b, $a^2 b$, $a^4 b$ und $a^6 b$, wobei a^4 die zentrale Involution von K und in ihrer eigenen K-Konjugiertenklasse ist. Die Involutionen b, $a^2 b$, $a^4 b$ und $a^6 b$ sind über C konjugiert in K.

Die C-Bahn von $V^\#$ ist genau $V^\#$. Die $\langle a^2 \rangle$-Bahnen von $V^\#$ sind $\{v_1, v_1+v_2, -v_1, -v_1-v_2\}$ und $\{v_2, v_1-v_2, -v_2, v_2-v_1\}$. Die $\langle ab \rangle$-Bahnen von $V^\#$ sind $\{v_1, v_2, -v_1, -v_2\}$ und $\{v_1+v_2, v_1-v_2, v_2-v_1, -v_1-v_2\}$. Die $\langle a^4 \rangle$-Bahnen von $V^\#$ haben alle Mächtigkeit 2 und sind $\{v_1, -v_1\}$, $\{v_1+v_2, -v_1-v_2\}$, $\{v_2, -v_2\}$ und $\{v_1-v_2, v_2-v_1\}$. Damit ist $|C_V(a^4)| = 1$.

Die $\langle b \rangle$-Bahnen von $V^\#$ sind $\{v_1, -v_1-v_2\}$, $\{-v_1, v_1+v_2\}$, $\{v_1-v_2, v_2-v_1\}$, $\{v_2\}$ und $\{-v_2\}$. Wir sehen, dass $\langle b \rangle$ damit einen eindimensionalen Teilraum von V elementweise fixiert. Da C auf $V^\#$ transitiv wirkt und b zu $a^2 b$, $a^4 b$ und $a^6 b$ über C konjugiert ist, fixieren somit auch $\langle a^2 b \rangle$, $\langle a^4 b \rangle$ und $\langle a^6 b \rangle$ jeweils einen eindimensionalen Teilraum von V elementweise. Damit folgt für alle $x \in b^K$ schon $|C_V(x)| = 3$.

Nach Voraussetzung ist $U = H \cap K$ elementarabelsch der Ordnung 4. Daher folgt für alle $x \in U^\#$ schon $|C_U(x)| = 4$. Da C und Q keine elementarabelschen Untergruppen der Ordnung 4 besitzen und $C \cup D \cup Q = K$ gilt, ist $U \leqslant D$. Ferner ist $a^4 \in U$ und $\left| b^K \cap U \right| = 2$. Da $H = VU$ gilt, folgt $|C_H(a^4)| = 4$ und $|C_H(x)| = 12$ für alle $x \in b^K \cap U$.

Lemma 2.8
Es gelte Voraussetzung 2.2 und es sei $G \cong M_{11}$. Dann gilt $|\Omega| = 12$ und die Punktstabilisatoren sind isomorph zu $\mathrm{PSL}_2(11)$.

Beweis
Mit der Charaktertafel von G in [Atl] gibt es nur eine G-Konjugiertenklasse von Involutionen und es gilt $|C| = 2^4 \cdot 3$. Mit Abschnitt 5.3.8 in [Wil, S. 202 f] ist ferner C eine maxiale Untergruppe von G und isomorph zu $\mathrm{GL}_2(3)$. Daher ist $t \in G_\alpha$ die zentrale Involution in C. Mit Lemma 2.1 folgt $|C : C_\alpha| \in \{2, 4\}$.

Schritt 1: *Es ist $|C : C_\alpha| = 4$:*

Angenommen, das gilt nicht. Nun folgt $|C_\alpha| = 24$, C_α ist ein Normalteiler von $C \cong \mathrm{GL}_2(3)$ und es gilt $C_\alpha \cong \mathrm{SL}_2(3)$ (vgl. Bemerkung 2.7 (i)). Seien $S_\alpha \in \mathrm{Syl}_2(C_\alpha)$. Dann ist S_α eine Quaternionengruppe der Ordnung 8 und es folgt $S_\alpha \in \mathrm{Syl}_2(G_\alpha)$ mit Lemma 2.1, weil $|G|_2 = 16$ ist. Insbesondere besitzt S_α nur genau eine Involution und mit dem Satz von Sylow gilt dann $t^G \cap G_\alpha = t^{G_\alpha}$. Nun folgt mit Lemma 1.2 schon $|\mathrm{fix}_\Omega(t)| = \frac{|C_G(t)|}{|C_{G_\alpha}(t)|} = \frac{48}{24} = 2 \neq 4$, ein Widerspruch zur Voraussetzung 2.2. □

Mit Schritt 1 ist $|C : C_\alpha| = 4$ und damit $|C_\alpha| = 12$. Ferner ist C_α eine Diedergruppe der Ordnung 12 (vgl. Bemerkung 2.7 (i)).

<u>Schritt 2:</u> *Es gilt $G_\alpha \neq C_\alpha$:*

Angenommen, es sei $G_\alpha = C_\alpha$. Dann zerfällt $t^G \cap G_\alpha$ in mindestens zwei G_α-Konjugiertenklassen, nämlich $t^{G_\alpha} = \{t\}$, bestehend aus der zentralen Involution, und eine Klasse $t_2^{G_\alpha}$ mit $t_2 \in G_\alpha$ von invertierenden Involutionen. Es gilt $|C_{G_\alpha}(t_2)| = 4$ und $|C_G(t_2)| = 48$, da t und t_2 in G konjugiert sind. Mit Lemma 1.2 folgt nun $|\mathrm{fix}_\Omega(t)| \geq \frac{|C|}{|C_\alpha|} + \frac{|C_G(t_2)|}{|C_{G_\alpha}(t_2)|} = \frac{48}{12} + \frac{48}{4} = 4 + 12 = 16 > 4$, ein Widerspruch zur erlaubten Fixpunktanzahl von t in Ω. $\square$

Mit Schritt 2 ist C_α eine echte Untergruppe von G_α. Weiter gilt mit [Atl] $|G| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$. Ferner wissen wir mit Schritt 1, dass $|G_\alpha|_2 = 4$ gilt, weil es mit [Atl] nur eine Konjugiertenklasse von Involutionen gibt und die Sylow 2-Untergruppen von G Semidiedergruppen der Ordnung 16 sind. Mit den Schritten 1 und 2 gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ so, dass $|G_\alpha| = 2^2 \cdot 3 \cdot k$ gilt und $k \neq 1$ ein Teiler von $3 \cdot 5 \cdot 11$ ist. Sei jetzt $M \leqslant G$ eine maximale Untergruppe von G so, dass $G_\alpha \leqslant M$ gilt. Mit der Liste der G-Konjugiertenklassen von maximalen Untergruppen von G in [Atl] können wir nun mehrere Fälle unterscheiden. Da k ungerade ist, gilt schon $M \ncong C$.

<u>Schritt 3:</u> *M ist keine Symmetrische Gruppe vom Grad 5:*

Angenommen, es gilt $M \cong \mathcal{S}_5$. Nach [Atl] ist dann C_α eine maximale Untergruppe von M. Mit Schritt 2 folgt $G_\alpha = M$. In der natürlichen Operation von M seien $t_1 \in M$ eine Doppeltransposition und $t_2 \in M$ eine Transposition. Mit [Atl] ist $t^G \cap M = t_1^M \dot\cup t_2^M$ und $|C_{G_\alpha}(t_1)| = 8$, $|C_{G_\alpha}(t_2)| = 12$. Lemma 1.2 liefert $|\mathrm{fix}_\Omega(t)| = \frac{48}{8} + \frac{48}{12} = 10$, ein Widerspruch zur erlaubten Fixpunktanzahl von t in Ω. $\square$

<u>Schritt 4:</u> *M ist nicht isomorph zu M_{10}:*

Angenommen, es gilt $M \cong M_{10}$. Mit [Atl] folgt $t^G \cap M = t^M$ und $|C_M(t)| = 16$. Da G_α eine Untergruppe von M ist, gilt $C_\alpha \leqslant C_M(t)$. Das bedeutet, dass $|C_\alpha| = 12$ ein Teiler von $|C_M(t)| = 16$ ist, ein Widerspruch. $\square$

<u>Schritt 5:</u> *M ist nicht der Normalisator einer Sylow 3-Untergruppe:*

Angenommen, das gilt doch. Mit Schritt 2 und [Atl] ist nun $|G_\alpha| = 2^2 \cdot 3^2$. Ferner sind die Sylow 2-Untergruppen von G_α elementarabelsch der Ordnung 4. Mit Bemerkung 2.7 (*ii*) und Lemma 1.2 folgt nun $|\mathrm{fix}_\Omega(t)| \geq \frac{48}{4} + \frac{48}{12} = 16$, da es mit [Atl] nur eine G-Konjugiertenklasse von Involutionen gibt. Das widerspricht der erlaubten Fixpunktanzahl von t in Ω. $\square$

Mit der Liste der G-Konjugiertenklassen von maximalen Untergruppen von G in [Atl] und mit den Schritten 3 bis 5 folgt nun $M \cong \mathrm{PSL}_2(11)$. Da $C_\alpha \leqslant M$ mit [Atl] eine maximale Untergruppe von M ist und $C_\alpha \lneqq G_\alpha$ nach Schritt 2 gilt, folgt $G_\alpha = M$. $\blacksquare$

Bemerkung 2.9
Seien G und Ω wie in Lemma 2.8. Wir stellen die Anzahl der Fixpunkte der jeweiligen Gruppenelemente in Ω in einer Tabelle dar. Diese wurden unter Verwendung des Algorithmus in Bemerkung 1.4 ermittelt.

$x \in$	2A	3A	4A	5A	6A	8A	11A
$\lvert\mathrm{fix}_\Omega(x)\rvert$	4	3	0	2	1	0	1

Tabelle 2.2: Fixpunktanzahl der Elemente $x \in M_{11}^{\#}$ in der Operation aus Lemma 2.8.

Lemma 2.10
Es gelte Voraussetzung 2.2 und es sei $G \cong M_{12}$. Dann ist $|\Omega| = 12$ und die Punktstabilisatoren sind isomorph zu M_{11}.

Beweis
Nach [Atl] besitzt G zwei Konjugiertenklassen von Involutionen.

Schritt 1: *G_α besitzt keine Involution aus der G-Konjugiertenklasse 2A aus [Atl]:*

Angenommen, das gilt doch. Sei $a \in G_\alpha$ eine Involution aus der Klasse 2A. Da G mit Fixität 4 auf Ω operiert, hat a zwei oder vier Fixpunkte in Ω mit Lemma 2.1. Nun ist $|C_G(a) : C_{G_\alpha}(a)| \in \{1,2,4\}$ mit Lemmata 1.3 (*iii*) und 2.1 und wir setzen $\hat{C} := C_G(a)$ und $\hat{C}_\alpha := C_{G_\alpha}(a)$. Nach [Atl] ist $\hat{C}$ eine maximale Untergruppe von G der Ordnung 240 und isomorph zu $C_2 \times \mathcal{S}_5$. Dann gilt schon $\left|\hat{C} : \hat{C}_\alpha\right| \in \{1,2\}$, da $\hat{C}$ keine Untergruppe vom Index 4 besitzt, die a enthält. Da $a \in G_\alpha$ die zentrale Involution in $\hat{C}$ ist, gibt es nur die Möglichkeiten $\hat{C}_\alpha \cong C_2 \times \mathcal{A}_5$ oder $\hat{C}_\alpha = \hat{C} \cong C_2 \times \mathcal{S}_5$.

Angenommen, es gilt $\hat{C}_\alpha = \hat{C}$. Dann ist $\hat{C} \leqslant G_\alpha \neq G$, also $G_\alpha = \hat{C}$, da $\hat{C}$ eine maximale Untergruppe von G ist. Sei $N \leqslant \hat{C}$ ein Komplement von $Z(\hat{C}) = \langle a \rangle$ in $\hat{C}$. Dann ist $N \cong \mathcal{S}_5$ und $G_\alpha = \langle a \rangle \times N$. In der natürlichen Wirkung von N sei $z \in N$ eine Doppeltransposition. Da a die zentrale Involution in $\hat{C}$ ist, gilt $a^{\hat{C}} \neq z^{\hat{C}}$. Mit [Atl] gilt $|C_{G_\alpha}(a)| = 240$ und $|C_{G_\alpha}(z)| = 2 \cdot 8$. Ist z zu a in G konjugiert, so gilt mit Lemma 1.2 $\mathrm{fix}_\Omega(z) \geq \frac{240}{16} = 15 > 4$. Ist z nicht zu a in G konjugiert, so gilt mit [Atl] $|C_G(z)| = 192$ und Lemma 1.2 liefert $\mathrm{fix}_\Omega(z) \geq \frac{192}{16} = 12 > 4$. Beides führt zu einem Widerspruch zur erlaubten Fixpunktanzahl von a bzw. z in Ω. Damit folgt $\left|\hat{C} : \hat{C}_\alpha\right| = 2$.

Sei jetzt $M \leqslant G$ eine maximale Untergruppe von G so, dass $G_\alpha \leqslant M$ gilt. Dann ist auch $C_2 \times \mathcal{A}_5 \cong \hat{C}_\alpha \leqslant M$. Mit der Liste der G-Konjugiertenklassen von maximalen Untergruppen von G sowie der Ordnung der Repräsentanten dieser in [Atl], ist M aus Ordnungsgründen isomorph zu M_{11}, $M_{10} : C_2$ oder es gilt $M = \hat{C}$. Die Fälle $M \cong M_{11}$ und $M \cong M_{10} : C_2$ können wir mit Hilfe von [Atl] direkt ausschließen, da keine dieser zwei Gruppen eine Untergruppe isomorph zu $\hat{C}_\alpha \cong C_2 \times A_5$ besitzt. Daher ist $M = \hat{C}$ und $G_\alpha = \hat{C}_\alpha$.

Da $\hat{C}_\alpha$ eine zerfallende Erweiterung ist, seien $N \leqslant \hat{C}_\alpha$ und $N \cong \mathcal{A}_5$. In der natürlichen Operation von N sei ferner $z \in N$ eine Doppeltransposition. Nun sind z^{G_α} und a^{G_α} verschieden, da $a \in Z(C_\alpha)$ ist. Ferner gilt $|C_{G_\alpha}(z)| = 8$ und $|C_G(z)| \in \{240, 192\}$, je nachdem ob z zu a konjugiert ist in G oder nicht. Ist z zu a in G konjugiert, so gilt $\mathrm{fix}_\Omega(z) \geq \frac{240}{8} = 30 > 4$ mit Lemma 1.2. Andernfalls ist $\mathrm{fix}_\Omega(z) \geq \frac{192}{8} = 24 > 4$. Beides liefert einen Widerspruch zur Voraussetzung 2.2. $\square$

Mit Schritt 1 gilt $t \in 2\mathrm{B}$ und nach [Atl] ist $|C|$ durch 3 teilbar. Mit Lemma 1.3 (*iii*) enthält $G_\alpha \cap C$ ein Element x der Ordnung 3. Mit der p-power map in [Atl] ist $x \in 3\mathrm{A}$. Seien $N := N_G(\langle x \rangle)$ und $N_\alpha := N \cap G_\alpha$.

Gibt es ein $y \in N_\alpha \cap 3\mathrm{B}$, so enthält G_α wegen $2\mathrm{A} \cap N_G(\langle y \rangle) \neq \varnothing$ und Lemma 1.3 (*iii*) auch ein Element der Konjugiertenklasse 2A (siehe [Atl]). Das widerspricht Schritt 1. Daher gilt $|N : N_\alpha| = 3$ mit Lemma 1.3 (*iii*) und N_α enthält eine elementarabelsche Untergruppe Y der Ordnung 9. Da C_α mit Lemma 2.1 Index 2 oder 4 in C hat und 3^2 ein Teiler von $|G_\alpha|$ ist, wird $|G_\alpha|$ von $2^4 \cdot 3^2$ geteilt. Sei $M \leqslant G$ eine maximale Untergruppe von G so, dass $G_\alpha \leqslant M$ ist. Nun wird auch $|M|$ von $2^4 \cdot 3^2 = 144$ geteilt. Dann folgt mit [Atl] aus Ordnungsgründen $|M| \in \{7920, 1440, 432\}$. Sei $K := N_{G_\alpha}(Y) \cong {C_3}^2 : SD_{16}$.

<u>Schritt 2:</u> *Es gilt* $M \cong M_{11}$*:*

Angenommen, es ist $|M| = 432$. Dann gilt $M = N_G(Y)$ und $M \cong {C_3}^2 : \mathrm{GL}_2(3)$ mit [Atl]. Insbesondere ist $|M : G_\alpha| = 3$, da $|G_\alpha|$ nicht von 27, jedoch von 144 geteilt wird. Damit ist $G_\alpha = K$. In M zerfällt t^G in zwei Konjugiertenklassen, eine zentrale Involution in $\mathrm{GL}_2(3)$ und die nicht-zentralen Involutionen in $\mathrm{GL}_2(3)$. Damit zerfällt t^G in G_α auch in mindestens zwei Klassen. Durch Berechnungen der Zentralisatorordnungen dieser Involutionen in G_α erhalten wir $|\mathrm{fix}_\Omega(t)| \geq \frac{192}{16} + \frac{192}{12} = 28$ mit Lemma 1.2, ein Widerspruch zur erlaubten Fixpunktanzahl von t. Damit ist $|M| \neq 432$.

Angenommen, es gilt $|M| = 1440$. Dann ist $M \cong M_{10} : C_2 \cong \mathcal{A}_6 : ({C_2}^2)$ mit [Atl]. Da $|G_\alpha|$ von $2^4 \cdot 3^2$ geteilt wird, hat G_α höchstens Index 10 in M. Ist $|M : G_\alpha| = 10$, so folgt $G_\alpha = K$ wie im Fall zuvor. Dann ist wieder $|\mathrm{fix}_\Omega(t)| > 4$, ein Widerspruch. Da M keine Untergruppen vom Index 5 besitzt, muss also G_α höchstens Index 2 in M haben. Die Untergruppen vom Index 2 von M sind isomorph zu $\mathcal{S}_6$, $\mathrm{PGL}_2(9)$ und M_{10} mit [Atl]. Ferner enthält keine von diesen eine Untergruppe isomorph zu ${C_3}^2 : SD_{16} \cong K$. Damit ist $M = G_\alpha$. Nun enthält G_α mit [Atl] ein Element der Ordnung 10. In G gibt es nur eine Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 10. Potenzieren wir ein Element dieser Klasse mit 5, so erhalten wir mit der p-power map von G in [Atl] eine Involution aus der Klasse 2A. Schritt 1 liefert einen Widerspruch. Damit ist jetzt $|M| = 7920$ und $M \cong M_{11}$ mit [Atl]. $\square$

Mit Schritt 2 ist $K \leqslant G_\alpha \leqslant M \cong M_{11}$. Gilt $K = G_\alpha$, so folgt $|\mathrm{fix}_\Omega(t)| \geq 28$ analog zu Schritt 2. Also ist $G_\alpha \neq K$ und es gilt $G_\alpha = M$, da K nach [Atl] eine maximale Untergruppe von M ist. $\blacksquare$

Bemerkung 2.11
Da es in der Gruppe $G \cong M_{12}$ mit [Atl] zwei verschiedene Konjugiertenklassen von Untergruppen isomorph zu M_{11} gibt, finden wir damit zwei verschiedene Operationen von G auf einer Menge Ω mit 12 Elementen. Das drückt sich auch darin aus, welche Elemente von G wie viele Punkte von Ω fixieren. Wir stellen daher die Anzahl der Fixpunkte von den jeweiligen Gruppenelementen in einer Tabelle dar. Diese wurden unter Verwendung des Algorithmus in Bemerkung 1.4 ermittelt.

Seien dazu Ω_1, Ω_2 zwei Mengen der Mächtigkeit 12 so, dass G wie in Lemma 2.10 auf Ω_1 und Ω_2 operiert und so, dass für jedes $\alpha \in \Omega_1$ und jedes $\hat{\alpha} \in \Omega_2$ gilt, dass G_α und $G_{\hat{\alpha}}$ nicht konjugiert sind in G.

$x \in$	2A	2B	3A	3B	4A	4B	5A	6A	6B	8A	8B	10A	11A
$\lvert\mathrm{fix}_{\Omega_1}(x)\rvert$	0	4	3	0	4	0	2	0	1	2	0	0	1
$\lvert\mathrm{fix}_{\Omega_2}(x)\rvert$	0	4	3	0	0	4	2	0	1	0	2	0	1

Tabelle 2.3: Fixpunktanzahl der Elemente $x \in M_{12}^{\#}$ in der Operation aus Lemma 2.10.

Wir möchten an dieser Stelle auf ein Problem aufmerksam machen, das die Arbeit mit der Markentafel einer Gruppe in [GAP] und der Charaktertafel dieser Gruppe in [Atl] betrifft. In dem in Bemerkung 1.4 notierten Algorithmus hätten wir gern den Befehl `CN := OrdersTom(tom);;` durch `CN := ClassNamesTom(tom);;` ausgetauscht. Letzterer gibt jeder Konjugiertenklasse von Untergruppen der Gruppe eine Bezeichnung, die an die Notation der Elementkonjugiertenklassen in [Atl] angelehnt ist. Diese Vertauschung ist jedoch nicht möglich, da die Bezeichnungen in [GAP] im Allgemeinen nicht mit den Bezeichnungen der Elementkonjugiertenklassen in der Charaktertafel der Gruppe in beispielsweise [Atl] übereinstimmen. Im Beispiel M_{12} sind in der Markentafel `TableOfMarks("M12")` u.A. die Konjugiertenklassen 3A und 3B gegenüber der Konjugiertenklassen von M_{12} in [Atl] vertauscht.

Durch die zusätzliche Ausgabe der Zentralisatorordnung der Elemente in dem Algorithmus in Bemerkung 1.4 ist eine Zuordnung der jeweiligen Konjugiertenklasse zwischen [GAP] und [Atl] einfacher.

Lemma 2.12
Es gelte Voraussetzung 2.2. Dann ist $G \not\cong M_{22}$.

Beweis
Angenommen, es sei $G \cong M_{22}$. Mit [Atl] ist $t \in 2\mathrm{A}$. Weiter gilt $|C| = 384 = 2^7 \cdot 3$ und mit Lemma 1.3 (*iii*) sowie der p-power map von G in [Atl] ist $C_\alpha \cap 3\mathrm{A} \neq \varnothing$. Ferner gilt $|C : C_\alpha| \in \{2,4\}$ mit Lemma 2.1. Daher wird $|G_\alpha|$ von $2^5 \cdot 3$ geteilt. Sei M eine maximale Untergruppe von G so, dass $G_\alpha \leqslant M$ ist. Dann wird auch $|M|$ von $2^5 \cdot 3$ geteilt und mit [Atl] gilt $|M| \in \{20160, 5760, 1920, 1344\}$.

Angenommen, es sei $|M| = 20160$. Dann gilt $M \cong \mathrm{PSL}_3(4)$ und $|M : G_\alpha| \leq 210$. Mit [Atl] ist $|C_M(t)|$ nicht durch 3 teilbar, ein Widerspruch zu $3 \in \pi(C_\alpha)$.

Nun ist $|M| \in \{5760, 1920, 1344\}$ und M ist nach [Atl] isomorph zu einer der Gruppen $E_{16} : \mathcal{A}_6$, $E_{16} : \mathcal{S}_5$ oder $E_8 : \mathrm{PSL}_3(2)$. Ferner ist M eine zerfallende Erweiterung mit nichttrivialem $N := O_2(M)$. Sei $K \leqslant M$ ein Komplement von N in M so, dass $|K \cap G_\alpha|$ maximal ist. Ferner ist $|N| \in \{2^3, 2^4\}$ und $|K|_2 = 2^3$ mit [Atl]. Da $|G_\alpha|_2 \geq 2^5$ gilt und $M = NK$ eine zerfallende Erweiterung ist, existieren $x \in t^G \cap G_\alpha \cap N$ und $y \in t^G \cap G_\alpha \cap K$. Dann ist $x^{G_\alpha} \dot\cup y^{G_\alpha} \subseteq t^G \cap G_\alpha$.

Da K isomorph zu einer der Gruppe $\mathcal{A}_6$, $\mathcal{S}_5$ oder $\mathrm{PSL}_3(2)$ ist, gilt mit [Atl] nun $|C_K(y)| = 8$ oder es ist $|M| = 1920$, $K \cong \mathcal{S}_5$, y ist eine Transposition in der natürlichen Wirkung von $\mathcal{S}_5$ und es gilt $|C_K(y)| = 12$. Ferner ist $|C_N(y)|$ ein echter Teiler von $|N|$, da K im semidirekten Produkt $M = NK$ treu auf N operiert.

Angenommen, es ist $|C_K(y)| = 8$. Da $|N| \in \{2^4, 2^3\}$ gilt, ist $|C_M(y)|$ ein Teiler von 2^6 und insbesondere nicht durch 3 teilbar. Damit werden $|C_G(y) : C_M(y)|$ und $|C_G(y) : C_{G_\alpha}(y)|$ von 6 geteilt, weil $|C| = 2^7 \cdot 3$ und $G_\alpha \leqslant M$ gilt. Nun folgt

$$|\mathrm{fix}_\Omega(t)| \geq |C_G(x) : C_{G_\alpha}(x)| + |C_G(y) : C_{G_\alpha}(y)| > 0 + 6 = 6$$

mit Lemma 1.2. Das widerspricht der erlaubten Fixpunktanzahl von t in Ω.

Somit folgt $|M| = 1920$, $K \cong \mathcal{S}_5$, und alle Involutionen in $G_\alpha \cap K$ sind Transpositionen in der natürlichen Wirkung von $\mathcal{S}_5$. Insbesondere ist also $|C_K(y)| = 12$. Da $|G_\alpha|$ von $2^5 \cdot 3$ geteilt wird, muss $N = O_2(M) \leqslant G_\alpha$ und $G_\alpha/N \cong \mathcal{S}_3$ gelten. Dann ist jedoch $|C_{G_\alpha}(y)|$ ein Teiler von 2^4 und insbesondere nicht durch 3 teilbar. Nun ist $|C_G(y) : C_{G_\alpha}(y)|$ ein Vielfaches von $2^2 \cdot 3$ und Lemma 1.2 liefert erneut

$$|\mathrm{fix}_\Omega(t)| \geq |C_G(x) : C_{G_\alpha}(x)| + |C_G(y) : C_{G_\alpha}(y)| > 0 + 2^2 \cdot 3.$$

Das widerspricht der erlaubten Fixpunktanzahl von t in Ω. ■

Lemma 2.13
Es gelte Voraussetzung 2.2. Dann ist $G \not\cong M_{23}$.

Beweis
Angenommen, das gelte doch. Da G mit [Atl] nur genau eine Konjugiertenklasse 2A von Involutionen besitzt, ist $t \in$ 2A. Ferner gilt $|C| = 2688 = 2^7 \cdot 3 \cdot 7$ und mit Lemma 2.1 wird $|G_\alpha|$ von $2^5 \cdot 3 \cdot 7$ geteilt. Mit der p-power map von G in [Atl] sei $x \in G_\alpha \cap C \cap$ 3A. Da $|C_G(x)|$ von 5 geteilt wird, ist 5 auch ein Teiler von $|G_\alpha|$ mit Lemma 1.3 (*iii*). Insgesamt wird $|G_\alpha|$ jetzt von $2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ geteilt. Sei $M \leqslant G$ eine maximale Untergruppe mit $G_\alpha \leqslant M$. Aus Ordnungsgründen ist mit der Liste der G-Konjugiertenklassen von maximalen Untergruppen von G in [Atl] dann $|M| \in \{443520, 40320, 20160\}$. Wir erinnern daran, dass $|C_\alpha|$ durch 7 teilbar ist.

Angenommen, es gilt $|M| \neq 40320$. Dann ist M isomorph zu M_{22} oder zu $\mathcal{A}_8$ mit [Atl]. In beiden Fällen ist $|C_M(t)|$ nicht durch 7 teilbar mit [Atl], $|C_\alpha|$ jedoch schon. Wegen $G_\alpha \leqslant M$ erhalten wir einen Widerspruch.

Angenommen, es gilt $M \cong \mathrm{P\Sigma L}_3(4)$. Dann ist $G \cong \mathrm{PSL}_3(4) : 2_2$ in Atlas-Notation und $|M : G_\alpha|$ teilt 12. Sei $N := O^2(M)$. In M zerfällt t^G in mindestens zwei Klassen $t_1^M \subseteq N$ und $t_2^M \subseteq (M \setminus N)$. Mit [Atl] ist $|C_M(t_1)| = 128 = 2^7$. Da $N \cong \mathrm{PSL}_3(4)$ keine Untergruppen vom Index maximal 6 enthält, ist $N \leqslant G_\alpha$. Da nun $|M : G_\alpha| \leq 2$ gilt, folgt $|\mathrm{fix}_\Omega(t)| \geq |C_G(t_1) : C_{G_\alpha}(t_1)| \geq |C_G(t_1) : C_M(t_1)| \geq 21$ mit Lemma 1.2, ein Widerspruch zur Voraussetzung 2.2.

Mit der Liste der G-Konjugiertenklassen von maximalen Untergruppen von G in [Atl] ist nun $M \cong {C_2}^4 : \mathcal{A}_7$ und es gilt $|M : G_\alpha|$ teilt 12. Seien $N := O_2(M)$ und K ein Komplement von N in M. Da $|N| = 2^4$ ist und $|G_\alpha|$ von 2^5 geteilt wird, gibt es ein $g \in G$ so, dass $K^g \cap G_\alpha \neq 1$ gilt. Seien o.B.d.A. K so gewählt, dass $g = 1_G$ gilt, und $t_2 \in K \cap G_\alpha$ eine Involution. Dann ist $t_2^G = t^G$, da es nur eine Klasse von Involutionen in G gibt, und $t_2^M \cap N = \varnothing$. Mit [Atl] folgt $|C_K(t_2)| = 2^3 \cdot 3$ und $|C_N(t_2)|$

teilt 2^3, da K im semidirekten Produkt $M = N : K$ treu auf N operiert. Daher gilt insgesamt $|C_M(t_2)| \leq 2^6 \cdot 3$ und insbesondere ist $|C_M(t_2)|$ nicht durch 7 teilbar. Somit folgt $|\mathrm{fix}_\Omega(t)| \geq 7$, der finale Widerspruch zur erlaubten Fixpunktanzahl von t. ■

Lemma 2.14
Es gelte Voraussetzung 2.2. Dann ist $G \not\cong J_1$.

Beweis
Angenommen, das gelte doch. G besitzt nach [Atl] nur eine Klasse von Involutionen. Damit ist $t \in 2\mathrm{A}$ und ferner gilt $|C| = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ sowie $C \cong C_2 \times \mathcal{A}_5$. Da $\mathcal{A}_5$ keine Untergruppen vom Index 2 oder 4 besitzt und $\langle t \rangle = Z(C) \leqslant G_\alpha$ gilt, folgt $C \leqslant G_\alpha$ mit Lemma 1.3 (*iii*). Das widerspricht Lemma 2.1. ■

Lemma 2.15
Es gelte Voraussetzung 2.2. Dann ist $G \not\cong J_2$.

Beweis
Angenommen, das gelte doch. Mit [Atl] besitzt G zwei Konjugiertenklassen von Elementen der Ordnung 2.

Schritt 1: *Es ist* $G_\alpha \cap 2A \neq \varnothing$*:*

Ist schon $t \in 2\mathrm{A}$, so sind wir fertig. Sei also $t \in 2\mathrm{B}$. Nach [Atl] ist $|C| = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ und mit Lemma 2.1 wird nun $|G_\alpha|$ von $2^2 \cdot 3 \cdot 5$ geteilt. Mit Lemma 1.3 (i) enthält G_α eine Sylow 5-Untergruppe S von G von Ordnung 25 und ferner besitzt $S \leqslant G_\alpha$ ein Element x aus der G-Konjugiertenklasse 5A.

Wir betrachten $N := N_G(\langle x \rangle)$. Es gilt $N \cong \mathcal{A}_5 \times D_{10}$ mit [Atl] und N ist eine maximale Untergruppe von G. Ferner enthält N eine zyklische Untergruppe Y der Ordnung 15 mit $x \in Y$. Da $\mathcal{A}_5$ keine Untergruppe vom Index 3 hat, besitzt auch N keine Untergruppe vom Index 3 und G_α enthält Y mit Lemma 1.3 (*iii*).

Sei $z \in Y$ ein Element der Ordnung 3. Mit der p-power map in [Atl] ist $z \in 3\mathrm{A}$ und $C_G(z) \cong C_3.\mathcal{A}_6$ enthält eine Involution $\widetilde{t}$ aus der G-Konjugiertenklasse 2A. Da $\mathcal{A}_6$ keine Untergruppen vom Index 2, 3 oder 4 besitzt und $\langle z \rangle = Z(C_G(z)) \leqslant G_\alpha$ gilt, ist auch $\widetilde{t} \in G_\alpha$, wie behauptet. □

Schritt 2: $|G_\alpha|$ *wird von* $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ *geteilt:*

Mit Schritt 1 sei $x \in G_\alpha \cap 2\mathrm{A}$. Mit Lemma 2.1 gilt $|\mathrm{fix}_\Omega(x)| \in \{1,2,4\}$. Mit der Charaktertafel von G in [Atl] ist $|C_G(x)| = 1920 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5$ und mit Lemma 1.3 (i) und Lemma 2.1 wird nun $|G_\alpha|$ von $2^5 \cdot 3 \cdot 5^2$ geteilt.

Sei also $y \in G_\alpha \cap C_G(x)$ ein Element der Ordnung 3. Dann ist mit der p-power map in [Atl] schon $y \in 3\mathrm{A}$. Da $|C_G(y)|$ von 3^3 geteilt wird, ist 3^2 mit Lemma 1.3 (*iii*) ein Teiler von $|G_\alpha|$. Das ist Schritt 2. □

Da $|G_\alpha|$ mit Schritt 2 von $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 7200$ geteilt wird und mit [Atl] die Ordnung der ordnungsgrößten maximalen Untergruppe von G kleiner als 7200 ist, folgt nun $G_\alpha = G$. Das widerspricht der Voraussetzung. ■

Lemma 2.16
Es gelte Voraussetzung 2.2. Dann ist $G \ncong J_3$.

Beweis
Angenommen, das gelte doch. Mit [Atl] ist $|C| = 2^7 \cdot 3 \cdot 5$ und mit Lemma 2.1 ist $|G_\alpha|$ durch $2^5 \cdot 3 \cdot 5$ teilbar. Wir können $x \in C_\alpha \cap 3\mathrm{A}$ mit [Atl] wählen. Aus [Atl] folgt wiederum $|C_G(x)| = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$. Mit Lemma 1.3 (*iii*) wird $|G_\alpha|$ nun auch von 3^2 geteilt.

Sei $M \leqslant G$ eine maximale Untergruppe so, dass $G_\alpha \leqslant M$ ist. Da insgesamt $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$ ein Teiler von $|G_\alpha|$ ist, folgt $|M| = 2880$ und $M \cong {C_2}^4 \colon (C_3 \times \mathcal{A}_5)$ mit [Atl]. Seien $N := O_2(M)$ und K ein Komplement von N in M.

Da $|G_\alpha|$ von 2^5 geteilt wird und $|N| = 2^4$ gilt, können wir K als Komplement von N in M so wählen, dass $|G_\alpha \cap K| > 1$ gilt und maximal ist. Sei $t_2 \in K \cap G_\alpha$ eine Involution. Da es in G mit [Atl] nur eine Klasse von Involutionen gibt, ist $t_2^G = t^G$. Ferner gilt $|C_K(t_2)| = 2^2 \cdot 3$ und $|C_N(t_2)|$ ist ein Teiler von 2^4. Insbesondere ist dann $|C_M(t_2)|$ nicht durch 5 teilbar. Mit Lemma 1.2 folgt nun $|\mathrm{fix}_\Omega(t)| \geq 5$, ein Widerspruch zur erlaubten Fixpunktanzahl von t. ■

Lemma 2.17
Es gelte Voraussetzung 2.2. Dann ist G weder zu McL *noch zu* Ly *isomorph.*

Beweis
Angenommen, das gelte doch. Mit der Charaktertafel von G in [Atl] gibt es nur eine G-Konjugiertenklasse von Involutionen und $|C|$ ist durch 35 teilbar. Mit Lemma 2.1 enthält G_α eine Untergruppe von C vom Index 2 oder 4. Insbesondere enthält G_α eine Sylow 5-Untergruppe und eine Sylow 7-Untergruppe von G mit Lemma 1.3 (*i*).

Gilt $G \cong \mathrm{Ly}$, so ist $|G_\alpha|$ wegen $|C : C_\alpha| \in \{2,4\}$ insgesamt durch $2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11$ teilbar. Ist $G \cong \mathrm{McL}$, so enthält C_α mit der p-power map von G in [Atl] Elemente der Ordnung 3 aus den G-Konjugiertenklassen 3A und 3B. Sei $x \in C_\alpha \cap 3\mathrm{A}$. Da 3^6 ein Teiler von $|C_G(x)|$ ist, wird $|C_{G_\alpha}(x)|$ mit Lemma 1.3 (*iii*) von 3^5 geteilt. Insgesamt ist $2^5 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7$ ein Teiler von $|G_\alpha|$, falls $G \cong \mathrm{McL}$ ist.

In beiden Fällen ist mit [Atl] schon $|G_\alpha|$ echt größer als die Ordnung der ordnungsgrößten maximalen Untergruppe von G. Damit folgt $G_\alpha = G$, ein Widerspruch zur Voraussetzung. ■

Wir haben die sporadischen Gruppen aus dem Main Theorem von [GoHa] auf transitive und treue Fixität-4-Operationen mit Involutionen in einem Vierpunktstabilisator überprüft. Mit dem Algorithmus in Bemerkung 1.5 können wir feststellen, dass die Gruppen M_{11}, M_{22} und J_1 weitere transitive Fixität-4-Operationen besitzen, in denen Involutionen weniger als vier Punkte auf der zugehörigen Bahn festlassen. Dabei werden wir in Lemma 3.7 diejenigen Operationen mit zyklischen Punktstabilisatoren genauer betrachten. An dieser Stelle vermerken wir nur solche ohne zyklische Punktstabilisatoren.

Bemerkung 2.18

- Seien $G = M_{11}$ und $U \leqslant G$ so, dass U der Normalisator einer Sylow 11-Untergruppe von G ist. Der in Bemerkung 1.5 vorgestellten Algorithmus liefert, dass G auf $\Omega := G/U$ mit Fixität 4 operiert. Mit dem Algorithmus aus Bemerkung 1.4 ermitteln wir die Fixpunktanzahl von nichttrivialen Elementen von G in dieser Operation:

$x \in$	2A	3A	4A	5A	6A	8A	11A
$\lvert \mathrm{fix}_\Omega(x) \rvert$	0	0	0	4	0	0	1

Tabelle 2.4: Fixpunktanzahl der Elemente $x \in M_{11}^{\#}$ in einer Fixität-4-Operation.

- Seien $G = M_{22}$ und $U \leqslant G$ so, dass U eine Frobeniusgruppe der Ordnung 55 ist. Der in Bemerkung 1.5 vorgestellten Algorithmus liefert, dass G auf $\Omega := G/U$ mit Fixität 4 operiert. Mit dem Algorithmus aus Bemerkung 1.4 ermitteln wir die Fixpunktanzahl von nichttrivialen Elementen von G in dieser Operation:

$x \in$	2A	3A	4A	4B	5A	6A	7A	8A	11A
$\lvert \mathrm{fix}_\Omega(x) \rvert$	0	0	0	0	4	0	0	0	1

Tabelle 2.5: Fixpunktanzahl der Elemente $x \in M_{22}^{\#}$ in zwei Operationen von Fixität 4.

2.3 Gruppen vom Lie-Typ in gerader Charakteristik

Ab diesem Abschnitt wollen wir die unendlichen Familien von Gruppen vom Lie-Typ aus dem Main Theorem von [GoHa] und dem Theorem 14 (b) aus [BMW] auf Erfüllung der Voraussetzung 2.2 überprüfen. Dabei konzentrieren wir uns in den Beweisen auf generische Argumente. Kleine Spezialfälle, bei denen die generischen Argumente nicht greifen, können in ähnlicher Weise wie zuvor mit Hilfe des Atlas of Finite Groups [Atl] überprüft werden. Da sich die Argumente dabei nicht von den bisherigen Argumenten der letzten Abschnitte unterscheiden, nutzen wir ab sofort [GAP] und die in den Bemerkungen 1.4 und 1.4 vorgestellten Algorithmen für die Überprüfung von Spezialfällen.

Lemma 2.19
Es gelte Voraussetzung 2.2. Seien $q \geq 4$ eine 2-Potenz und $G = \mathrm{PSL}_2(q)$. Dann ist $q = 8$ und die Punktstabilisatoren sind zyklisch von Ordnung 2 oder Diedergruppen der Ordnung 6, 14 oder 18.

Beweis
Mit GAP [GAP] gilt die Aussage des Lemmas bereits für $q \in \{4, 8, 16\}$. Angenomen, es sei $q \geq 32$.

Sei $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$ so, dass $t \in S$ gilt. Da S nach Satz II.8.2 (a) in [Hup1] elementarabelsch ist, gilt $S \leqslant C$. Mit 3.(6) und Lemma 4.1 (*iv*) in [Be2] gilt $C = S$. Weiter gibt es mit 3.(3), 3.(5) und 3.(6) in [Be2] eine zyklische Untergruppe D von G von Ordnung $q-1$ so, dass $N_G(S) = S \cdot D$ gilt. Mit Lemma 2.1 werden $|C_\alpha|$ und $|G_\alpha|$ von $\frac{q}{4} \geq 8$ geteilt.

Angenommen, G_α sei eine 2-Gruppe. Dann gilt $G_\alpha = C_\alpha$. Da S und damit auch G_α elementarabelsch ist nach Lemma II.8.2 (a) in [Hup1], sind alle Involutionen in G_α paarweise nicht konjugiert in G_α. In G gibt es nach Lemma 4.1 (*i*) in [Be2] jedoch nur eine Konjugiertenklasse von Involutionen. Damit hat jede Involution nach Lemma 1.2 mindestens $\frac{q}{4} \geq 8$ Fixpunkte in Ω, ein Widerspruch zu Voraussetzung 2.2.

Sei also $x \in G_\alpha$ von ungerader Ordnung. Ist $o(x)$ ein Teiler von $q+1$, so folgt $G_\alpha = G$ mit dem Satz von Dickson (Hauptsatz II.8.27 in [Hup1]), da $q \geq 32$ gilt. Also ist $o(x)$ ein Teiler von $q-1$ mit Satz II.8.5 (a) in [Hup1] und wir können $x \in N_G(S)$ annehmen. Da $q-1$ ein Teiler von $|C_G(x)|$ und ungerade ist, wird $|G_\alpha|$ nach Lemma 1.3 (*iii*) von $\frac{q-1}{3}$ geteilt. Sei also D in G so gewählt, dass $D \cap G_\alpha$ maximal ist und x enthält. Sei weiter $Y := D \cap G_\alpha$. Nach Wahl wird $|Y|$ von $\frac{q-1}{3}$ geteilt.

Wir betrachten die Operation von Y auf C_α per Konjugation in $N_G(S)$. Es ist $\frac{q}{4}$ ein Teiler von $|C_\alpha|$ und $\frac{q-1}{3}$ ein Teiler von $|Y|$. Wegen der Operation von Y auf C_α per Konjugation in $N_G(S)$ hat nun C_α mindestens $\frac{1}{3}(q-1)+1$ Elemente. Diese Zahl ist jedoch echt größer als $\frac{q}{4}$. Daher muss schon $\frac{q}{2}$ ein Teiler von $|C_\alpha|$ sein. In der Operation von Y auf C_α per Konjugation in $N_G(S)$ zerfällt C_α in Bahnen: Die Bahn $\{1_G\}$ und eine Bahn der Länge $q-1$ oder $\{1_G\}$ und höchstens drei Bahnen der Länge $\frac{1}{3}(q-1)$. Im ersten Fall ist $|C_\alpha| = q$ und damit $|\Omega|$ ungerade, ein Widerspruch zu Lemma 2.1. Wir betrachten den zweiten Fall. Sei $k \in \{1, 2, 3\}$. Dann gilt folgende Äquivalenz:

$$\begin{aligned} & \tfrac{k}{3}(q-1) = \tfrac{q}{2} - 1 \\ \Leftrightarrow \quad & 2kq - 2k = 3q - 6 \\ \Leftrightarrow \quad & (3-2k)q = 2(3-k). \end{aligned}$$

Wenn wir $k \in \{1, 2, 3\}$ in die letzte Gleichung einsetzen, erhalten wir $q = 4$ für $k = 1$, $q = -2$ für $k = 2$ und $q = 0$ für $k = 3$. Da nach Annahme jedoch $q \geq 32$ gilt, erhalten wir einen Widerspruch und die Behauptung ist bewiesen. ■

Bemerkung 2.20
Sei $G = \mathrm{PSL}_2(8)$. Wir fassen die Ergebnisse aus Lemma 2.19 zusammen und geben die Anzahl der Fixpunkte eines jeden Elements in $G^{\#}$ in der jeweiligen Operation an. Seien dazu Ω_1 wie im Fall (*i*) des Lemmas. Seien $U_1, U_2, U_3 \leqslant G$ Diedergruppen der Ordnung 6, 14 oder 18. Weiter seien $\Omega_2 := G/U_1$, $\Omega_3 := G/U_3$ und $\Omega_4 := G/U_3$. Ist $x \in G^{\#}$ beliebig, so bestimmen wir mit dem in Bemerkung 1.4 vorgestellten Algorithmus die Fixpunktanzahl von x in Ω_1, Ω_2, Ω_3 und Ω_4 und halten diese in Tabelle 2.6 fest.

$x \in$	2A	3A	7A	9A
$\mathrm{fix}_{\Omega_1}(x)$	4	0	0	0
$\mathrm{fix}_{\Omega_2}(x)$	4	3	0	0
$\mathrm{fix}_{\Omega_3}(x)$	4	0	1	0
$\mathrm{fix}_{\Omega_4}(x)$	4	1	0	1

Tabelle 2.6: Fixpunktanzahl der Elemente $x \in \mathrm{PSL}_2(8)^{\#}$ in den vier Operationen von Lemma 2.19.

Lemma 2.21
Es gelte Voraussetzung 2.2. Dann ist $G \neq \mathrm{PSU}_3(q)$ *für eine beliebige 2-Potenz* $q \geq 4$.

Beweis
Für $q \in \{4,8\}$ folgt die Aussage bereits aus GAP [GAP]. Seien $n \in \mathbb{N}$, $q := 2^n \geq 16$ und angenommen, die Behauptung sei falsch. Seien $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$ und $N := N_G(S)$ so, dass $t \in S$ ist. Weiter sei $d := \mathrm{ggT}(3, q+1)$. Wir nutzen die Eigenschaften (1)-(9) im Abschnitt 3 von [Be2]:

Mit (1), (3), (5) und (6) finden wir eine zyklische Untergruppe D von G von Ordnung $\frac{q^2-1}{d}$ so, dass $N = S \cdot D$ und $S \cap D = 1$ gilt, sowie Untergruppen $X, K \leqslant D$ mit $|X| = \frac{q+1}{d}$, $|K| = q-1$, $K \cap X = 1$ und $D = K \cdot X$. Mit 3.(4), 3.(6) und Lemma 4.1 (*iv*) in [Be2] ist $C \cap N = S \cdot X$. Da nach Theorem 6.5.3 in [GLS3] die maximal parabolischen Untergruppen von G die einzigen maximalen Untergruppen sind, die eine Sylow 2-Untergruppe enthalten, und N eine maximal parabolische Untergruppe ist, folgt $C \leqslant N$ und daher $C = S \cdot X$.

Mit Lemma 2.1 gilt $|C : C_\alpha| \in \{1,2,4\}$. Weil $|X|$ ungerade ist, ist ein Konjugiertes von X in G_α enthalten. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass X selbst in G_α enthalten ist. Damit wird $|G_\alpha|$ nun von $\frac{1}{4} \cdot q^3 \cdot \frac{q+1}{d}$ geteilt. Sei jetzt M eine maximale Untergruppe von G so, dass $G_\alpha \leqslant M$ gilt. Da $\frac{q+1}{d} > 1$ ist, ist M mit Theorem 6.5.3 in [GLS3] eine maximal parabolische Untergruppe von G. Weil $C_\alpha \leqslant N \cap M$ und N eine stark eingebettete Untergruppe von G ist, folgt $M = N$.

Angenommen, $d \cdot |X|$ ist eine 3-Potenz. Dann gibt es $m \in \mathbb{N}$ derart, dass $3^m = d \cdot |X| = q+1 = 2^n + 1$ ist. Somit gilt $2^n = 3^m - 1$. Ist m ungerade, so gilt $2^n = 3^m - 1 = (3-1)(3^{m-1} + 3^{m-2} + \ldots + 3 + 1)$. Der letze Faktor ist eine Summe mit m vielen Summanden und gleichzeitig ein Teiler von 2^n. Da m ungerade ist, ist auch diese Summe stets ungerade. Also folgt $m = 1$ und $n = 1$. Das widerspricht $2^n \geq 16$.

Somit ist m gerade. Sei $l := \frac{m}{2}$. Nun folgt $2^n = 3^m - 1 = (3^l - 1)(3^l + 1)$. Ist l ungerade, so gilt $m = 2$ und $n = 3$, ein Widerspruch zu $q = 2^n \geq 16$. Somit muss l gerade sein. Dann ist $3^l + 1 \equiv (-1)^l + 1 \equiv 2$ modulo 4. Weil $3^l + 1$ ein Teiler von 2^n ist, folgt $3^l + 1 = 2$ und damit $l = 0$. Das widerspricht $l = \frac{m}{2}$ und $m \in \mathbb{N}$.

Nun ist $d \cdot |X|$ keine 3-Potenz, also insbesondere auch $|X|$ nicht. Weil $|X| > 1$ aber ungerade ist, finden wir einen Primteiler $p \geq 5$ von $\frac{q+1}{d}$. Mit Lemma 1.3 (*i*) ist dann eine Sylow p-Untergruppe P von G in G_α enthalten. Es ist $\frac{(q+1)^2}{d}$ ein Teiler von $|G|$. Ferner ist $\mathrm{ggT}(q+1, q-1) = 1$, da $q = 2^n$ gilt. Damit ist $P \leqslant G_\alpha$ nicht in N enthalten. Das widerspricht $G_\alpha \leqslant N$. ■

Lemma 2.22
Es gelte Voraussetzung 2.2. Dann ist G nicht isomorph zu $\mathrm{PSL}_3(4)$.

Beweis
Die Aussage des Lemmas folgt aus GAP [GAP]. ■

Lemma 2.23
Es gelte Voraussetzung 2.2. Dann ist $G \neq \mathrm{Sz}(q)$ für eine beliebige 2-Potenz $q \geq 4$.

Beweis
Für $q = 8$ liefert GAP [GAP] zwei mögliche Operationen mit zyklischen Punktstabilisatoren der Ordnung 5 oder 13. Beide sind ungerade, insbesondere ist Voraussetzung 2.2 nicht erfüllt. Also gilt die Behauptung bereits für $q = 8$. Sei also $q \geq 32$ und angenommen, die Behauptung sei falsch.

Seien $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$ und $N := N_G(S)$ so, dass $t \in S$ ist. Mit 3.(1), 3.(3), 3.(5) und 3.(6) in [Be2] finden wir eine zyklische Untergruppe Y von G von Ordnung $q-1$ so, dass $N = S \cdot Y$ und $S \cap Y = 1$ gilt. Mit 3.(4), 3.(6) und Lemma 4.1 (*iv*) in [Be2] ist $C \cap N = S$. Da nach Theorem 4.1 in [Wil, S. 117] die maximal parabolischen Untergruppen von G die einzigen maximalen Untergruppen sind, die eine Sylow 2-Untergruppe enthalten, und N eine maximal parabolische Untergruppe ist, folgt $C \leqslant N$ und daher $C = S$.

Angenommen, es sei G_α eine 2-Gruppe. Mit dem Satz von Sylow und wegen $C = S$ gilt $G_\alpha = C_\alpha$. Dann hat G_α mit Lemma 1.3 (*iii*) mindestens $\frac{1}{4} \cdot q \geq 8$ Involutionen. Weil mit 3.(4) in [Be2] die Involutionen in $Z(S)$ enthalten sind, sind sie paarweise nicht konjugiert in G_α. In G gibt es nach Lemma 4.1 (*i*) in [Be2] jedoch nur eine Konjugiertenklasse von Involutionen. Damit hat jede Involution nach Lemma 1.2 mindestens acht Fixpunkte in Ω, ein Widerspruch zu Voraussetzung 2.2. Also gibt es in G_α ein Element x von ungerader Ordnung. Da $\frac{1}{4}q^2$ ein Teiler von $|G_\alpha|$ ist, ist mit Theorem 4.1 in [Wil, S.117] $o(x)$ ein Teiler von $q-1$. Da $q-1$ ungerade und nicht durch 3 teilbar sowie Y eine zyklische Gruppe ist, enthält G_α mit Lemma 1.3(*i*) und (*iii*) ein G-Konjugiertes von Y. Da $G_\alpha \cap Z(S)$ mindestens eine Involution enthält und alle Konjugierten von Y transitiv per Konjugation auf $Z(S)$ operieren, gilt $Z(S) \leqslant G_\alpha$. Ferner operiert $YZ(S)/Z(S)$ transitiv auf $S/Z(S)$ per Konjugation, wodurch S zu einer Untergruppe von G_α wird. Nun folgt $N = G_\alpha$. Dann ist $|\Omega|$ ungerade, im Widerspruch zu Lemma 2.1. ■

Wir haben die Gruppen vom Lie-Typ in gerader Charakteristik aus dem Main Theorem von [GoHa] und aus Theorem 14 (b) aus [BMW] auf transitive Fixität-4-Operationen überprüft, in denen es eine Involution mit genau vier Fixpunkten gibt. Mit dem Algorithmus in Bemerkung 1.5 können wir feststellen, dass die Gruppe Sz(8) zwei nicht-äquivalente, transitive Fixität-4-Operationen besitzt, in denen Involutionen weniger als vier Punkte auf der jeweiligen Bahn festlassen. Wie wir später in Lemma 3.8 sehen werden, weist jede Gruppe aus der unendlichen Familie der Suzuki-Gruppen $\mathrm{Sz}(q)$ zwei transitive Fixität-4-Operationen mit zyklischen Punktstabilisatoren von ungerader Ordnung auf.

2.4 Gruppen vom Lie-Typ in ungerader Charakteristik

Wir behandeln die Familien $\mathrm{PSL}_2(q)$ und ${}^2G_2(q)$ separiert von den anderen Familien von Gruppen vom Lie-Typ in ungerader Charakteristik, da sich beide wegen ihrer besonderen Strukturen von den anderen unterscheidet. Zunächst beleuchten wir ${}^2G_2(q)$:

Lemma 2.24
Es gelte Voraussetzung 2.2 und seien $n \in \mathbb{N}$ und $q := 3^{2n+1}$. Dann ist G nicht isomorph zu ${}^2G_2(q)$.

Beweis
Angenommen, die Behauptung sei falsch. Es ist $t \in G_\alpha$ eine Involution und mit Abschnitt 4.5.3 in [Wil, S. 137] gilt $C \cong \langle t\rangle \times \mathrm{PSL}_2(q)$. Weiter ist mit Lemma 2.1 bereits $|C : C_\alpha| \in \{2,4\}$. Weil $q \geq 27$ ist, enthält jedoch $\mathrm{PSL}_2(q)$ keine Untergruppe der Ordnung 2 oder 4. Ferner ist t in C_α enthalten. Daher gilt $C = C_\alpha$. Wegen $|C| = q \cdot (q^2 - 1)$ und $\frac{|G|}{|C|} = q^2(q^2 + q + 1)$ folgt nun, dass $|\Omega|$ ungerade ist. Das widerspricht Lemma 2.1. ■

Weil wir mit dem Satz von Dickson (siehe Satz II.8.27 in [Hup1]) die Untergruppenstruktur von $\mathrm{PSL}_2(q)$ für eine ungerade Primzahlpotenz $q \geq 5$ sehr gut kennen, werden wir anders als bisher oder später in diesem Abschnitt vorgehen. Wir werden für diese Gruppen zuerst alle transitiven, treuen und nicht-regulären Fixität-4-Operationen klassifizieren und anschließend diejenigen Wirkungen herausarbeiten, in denen es eine Involution mit genau vier Fixpunkten gibt. Dabei werden wir Abschnitt II.8 in [Hup1] verwenden.

Voraussetzung 2.25
Seien p eine ungerade Primzahl, $n \in \mathbb{N}$ und $q := p^n$ so, dass $q \geq 5$ gilt. Ferner seien $G \cong \mathrm{PSL}_2(q)$ und Ω eine Menge so, dass G transitiv, treu und nicht-regulär auf Ω operiert, sowie $\alpha \in \Omega$.

Lemma 2.26
Es gelte Voraussetzung 2.25 und ferner gelte einer der folgenden Fälle:

(i) Es gilt $q \equiv 1$ modulo 4, $|\Omega| = 2(q+1)$ und G_α hat Index 2 im Normalisator einer Sylow p-Untergruppe von G.

(ii) Es gibt ein $\varepsilon \in \{1, -1\}$ so ist, dass $q \equiv \varepsilon$ modulo 4 ist, $|\Omega| = 2 \cdot q \cdot (q+\varepsilon)$ gilt und G_α zyklisch von Ordnung $\frac{q-\varepsilon}{4}$ ist.

Dann operiert G mit Fixität 4 auf Ω.

Beweis
Seien $x \in G_\alpha^\#$, $X := \langle x \rangle$, $N := N_G(X)$ und $N_\alpha := N \cap G_\alpha$. Zuerst seien Ω und G_α wie in (ii). Dann ist einerseits X^{G_α} die einzige G_α-Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen der Ordnung $o(x)$ in G_α, da G_α zyklisch ist. Andererseits gilt $N \cong D_{q-\varepsilon}$ und ferner ist N_α zyklisch von Ordnung $\frac{q-\varepsilon}{4}$ mit den Sätzen II.8.3 und II.8.4 in [Hup1]. Da es nach Satz II.8.5 (a) in [Hup1] nur eine G-Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen der Ordnung $o(x)$ gibt, gilt $|\mathrm{fix}_\Omega(x)| = |N : N_\alpha| = 4$ mit Lemma 1.2.

Seien jetzt Ω und G_α wie in (i) sowie $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$ so, dass $S \leqslant G_\alpha$ gilt. Da $N_G(S)$ eine Frobeniusgruppe mit Frobeniuskern S nach Beispiel V.8.6, Definition III.16.1 und Satz II.8.2 in [Hup1] ist, sei $K \leqslant N_G(S)$ ein Frobeniuskomplement. Nach Voraussetzung in (i) hat $K \cap G_\alpha$ Index 2 in K. Ferner ist K zyklisch von Ordnung $\frac{q-1}{2}$ mit den Sätzen II.8.2 und II.8.3 in [Hup1].

Ist $x \in S$, so haben wir zwei Möglichkeiten, die eintreten könnten. Es ist $|N : N_\alpha| = 2$ und die Anzahl der G-Konjugiertenklassen und der G_α-Konjugiertenklassen von zyklischen Untergruppen der Ordnung p stimmt überein, oder es gilt $|N : N_\alpha| = 1$ und X^G zerfällt in G_α in zwei Konjugiertenklassen. In beiden Fällen liefert Lemma 1.2 dann $|\mathrm{fix}_\Omega(x)| = 2$. Gilt $x \notin S$, so ist $o(x)$ ein Teiler von $\frac{q-1}{2}$ und es ist $o(x) \leq \frac{q-1}{4}$. Dann erhalten wir wie im Fall (ii) für $\varepsilon = 1$ mit Lemma 1.2 schon $|\mathrm{fix}_\Omega(x)| = 4$. ■

Lemma 2.27
Es gelte Voraussetzung 2.25 und sei $q \geq 17$. Dann gilt die Umkehrung von Lemma 2.26. Genauer hat G_α Index 2 im Normalisator einer Sylow p-Untergruppe von G oder es gibt ein $\varepsilon \in \{1, -1\}$ so, dass $q \equiv \varepsilon$ modulo 4 gilt und G_α zyklisch von Ordnung $\frac{q-\varepsilon}{4}$ ist.

Beweis
Es sei $\varepsilon \in \{1, -1\}$ so, dass $q \equiv \varepsilon$ modulo 4 gilt. Angenommen, G_α sei weder zyklisch von Ordnung $\frac{q-\varepsilon}{4}$ noch habe G_α Index 2 im Normalisator einer Sylow p-Untergruppe von G. Nach Voraussetzung operiert G mit Fixität 4 auf Ω und wir wählen $x \in G_\alpha^\#$ so, dass $|\mathrm{fix}_\Omega(x)| = 4$ ist. Seien $X := \langle x \rangle$, $N := N_G(X)$ und $N_\alpha := N \cap G_\alpha$. Mit Lemma 1.3 (iii) folgt aus $|\mathrm{fix}_\Omega(x)| = 4$ schon $|N : N_\alpha| \in \{2, 4\}$.

Schritt 1: *Es ist x kein p-Element:*

Angenommen doch. Da p ungerade ist, enthält G_α mit Lemma 1.3 (i) automatisch eine Sylow p-Untergruppe S von G, falls $p \geq 5$ gilt. Für $p = 3$ enthält N eine Sylow 3-Untergruppe, da diese mit Satz II.8.2 in [Hup1] elementarabelsch ist. Weil $|N : N_\alpha| \in \{2, 4\}$ ist, enthält auch N_α eine Sylow 3-Untergruppe für $p = 3$.

Seien wieder p ungerade und beliebig, $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$ so, dass $S \leqslant G_\alpha$ gilt, sowie $M := N_G(S)$. Es ist M eine Frobeniusgruppe mit Frobeniuskern S und zyklischem Frobeniuskomplement der Ordnung $\frac{q-1}{2}$ nach Beispiel V.8.6, Definition III.16.1 und Satz II.8.2 in [Hup1]. Da $q \geq 17$ gilt, ist auch $q - 1 \geq 16$. Nach Lemma 1.3 (iii) sei dann $K \leqslant M$ ein Frobeniuskomplement so, dass $1 \neq Y := K \cap G_\alpha$ gilt. Es ist $|Y| \geq \frac{q-1}{8}$ nach diesem Lemma.

Weiter folgt $N_G(Y) \cong D_{q-1}$ mit Satz II.8.3 (a) in [Hup1]. Da $N_G(Y) \cap M = K$ ist, gilt $|Y| \geq \frac{q-1}{4}$ mit Lemma 1.3 (*iii*). Damit hat $G_\alpha \cap M$ Index maximal 2 in M.

Gilt $G_\alpha \cap M \lneqq G_\alpha$, so ist mit dem Satz von Dickson (Hauptsatz II.8.27 in [Hup1]) und wegen $q \geq 17$ schon $G_\alpha = G$, ein Widerspruch. Daher gilt $G_\alpha \leqslant M$. Da G_α nach Annahme nicht Index 2 in M hat, folgt schon $G_\alpha = M$. Mit Lemma 3.11 in [MaW1] operiert dann G nur mit Fixität 2 auf Ω, ein Widerspruch. $\square$

Da x nach Schritt 1 kein p-Element ist, folgt mit Satz II.8.5 (a) in [Hup1], dass $\frac{q-1}{2}$ oder $\frac{q+1}{2}$ von $o(x)$ geteilt wird. Mit den Sätzen II.8.3 und II.8.4 in [Hup1] ist N eine Diedergruppe von Ordnung $q-1$ bzw. $q+1$.

<u>Schritt 2:</u> *Es ist N_α keine Diedergruppe:*

Angenommen, N_α sei eine Diedergruppe. Weiter sei $t \in N_\alpha$ eine Involution. Mit dem Satz II.8.5 (a) in [Hup1] gibt es genau eine G-Konjugiertenklasse von Involutionen, da nur eine der beiden Zahlen $\frac{q-1}{2}$ und $\frac{q+1}{2}$ gerade ist. Ferner folgt mit dem Satz von Dickson $G_\alpha = N_\alpha$, da $q \geq 17$ gilt.

Gilt $|N_\alpha| \equiv 0$ modulo 4, so zerfällt t^G in N_α in drei Konjugiertenklassen, wobei dann $|C_{G_\alpha}(t)| \in \{|N_\alpha|, 4\}$ gilt, je nachdem ob t die zentrale Involution oder eine der invertierenden Involutionen in der Diedergruppe N_α ist. Jedoch gilt $|C_G(t)| \in \{q-1, q+1\}$. Insgesamt liefert Lemma 1.2 dann $|\mathrm{fix}_\Omega(t)| > 4$, da $q \geq 17$ gilt. Das widerspricht der erlaubten Fixpunktanzahl von t.

Ist $|N_\alpha| \equiv 2$ modulo 4, so gilt $t^G \cap N_\alpha = t^{N_\alpha}$. Ferner folgt $|C_G(t)| \in \{q-1, q+1\}$ und $|C_{G_\alpha}(t)| = 2$, da t in der Diedergruppe N_α eine invertierende Involution ist. Lemma 1.2 liefert erneut den Widerspruch $|\mathrm{fix}_\Omega(t)| > 4$, da $q \geq 17$ gilt. $\square$

<u>Schritt 3:</u> *Es gilt $|N : N_\alpha| = 4$:*

Nach Schritt 2 ist also N_α keine diedrische Untergruppe von G_α. Da N eine Diedergruppe ist, muss dann N_α zyklisch sein. Angenommen es sei $|N : N_\alpha| = 2$.

Ist $G_\alpha = N_\alpha$, so ist $|N_\alpha| \in \left\{\frac{q+1}{2}, \frac{q-1}{2}\right\}$ und Lemma 3.11 in [MaW1] liefert, dass x nur maximal 2 Fixpunkte in Ω hat. Also gilt $N_\alpha \lneqq G_\alpha$.

Mit dem Satz von Dickson, wegen Schritt 2 und da $q \geq 17$ gilt, enthält G_α dann ein Element der Ordnung p und es ist $|N_\alpha| = \frac{q-1}{2}$. Lemma 1.3 (*iii*) liefert, dass G_α eine Untergruppe einer Sylow p-Untergruppe S von G vom Index maximal 3 enthält. Da $N_\alpha \leqslant G_\alpha$ gilt, besitzt G_α nun eine Untergruppe U, die Index maximal 3 in $N_G(S)$ hat. Weil $N_G(S)$ eine Frobeniusgruppe und N_α ein Frobeniuskomplement von $N_G(S)$ ist, gilt sogar $S \leqslant U$ und damit $N_G(S) = U$. Mit dem Satz von Dickson und wegen $q \geq 17$ folgt dann $N_G(S) = G_\alpha$ und Lemma 3.11 in [MaW1] liefert einen Widerspruch zur Voraussetzung $|\mathrm{fix}_\Omega(x)| = 4$. $\square$

Nach Schritt 3 hat N_α Index 4 in N und ist zyklisch mit Schritt 2. Nach Annahme war $N_\alpha \lneqq G_\alpha$. Mit dem Satz von Dickson und wegen $q \geq 17$ wird nun $\frac{q-1}{2}$ von $o(x)$ geteilt, G_α ist im Normalisator einer Sylow p-Untergruppe enthalten und besitzt selbst ein Element der Ordnung p. Sei $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$ so, dass $|S \cap G_\alpha|$ maximal ist. Lemma 1.3 (*iii*) liefert, dass $S_\alpha := S \cap G_\alpha$ Index maximal 3 in S hat. Ferner kann Index 3 nur dann auftreten, wenn $p = 3$ gilt. Insgesamt folgt $|N_G(S) : G_\alpha| \in \{2, 6\}$, da $N_\alpha \leqslant G_\alpha$ ist. Der Fall „Index 6“ liefert zusammen mit Lemma 1.2, dass ein p-Element mehr als vier Punkte in Ω fixiert. Der Fall Index 2 tritt nach Annahme nicht ein. Insgesamt erfolgt der Widerspruch zur Annahme, dass G_α weder zyklisch von Ordnung $\frac{q-\varepsilon}{4}$ ist noch G_α Index 2 im Normalisator einer Sylow p-Untergruppe von G hat. ■

Lemma 2.28
Es gelte Voraussetzung 2.25 und es sei $q \leq 13$. Ferner operiere G mit Fixität 4 auf Ω. Dann ist $q \geq 7$ und G_α sowie Ω sind wie in (i) oder (ii) von Lemma 2.26 oder es gilt einer der folgenden Fälle:

- *q ist 7 oder 9, $G_\alpha \cong \mathcal{S}_3$ und $|\Omega|$ ist 28 oder 60,*
- *$q = 9$, G_α ist elementarabelsch der Ordnung 9 und $|\Omega| = 40$,*
- *$q = 9$, G_α ist eine Diedergruppe der Ordnung 10 und $|\Omega| = 36$ oder*
- *q ist 11 oder 13, $G_\alpha \cong \mathcal{A}_4$ und $|\Omega|$ ist 55 oder 91.*

Beweis
Das liefern Berechnungen in [GAP]. Siehe dazu Bemerkung 2.29 ■

Bemerkung 2.29
Nach erfolgreichem Laden der Funktion `TestTomF4` aus Bemerkung 1.5 und des Pakets `TomLib` in GAP erhalten wir durch die Eingabe der nachfolgenden Befehle alle transitiven und treuen Operationen mit Fixität 4 für die Gruppen $\mathrm{PSL}_2(q)$ für alle ungeraden $q \leq 13$. Das sind genau die im Lemma 2.28 angegebenen Möglichkeiten.

```
> TestTomF4( TableOfMarks( "A5" ) );
[  ]
> TestTomF4( TableOfMarks( "L2(7)" ) );
[ [ "C2", 84 ], [ "S3", 28 ] ]
> TestTomF4( TableOfMarks( "L2(9)" ) );
[ [ "C2", 180 ], [ "S3", 60 ], [ "S3", 60 ], [ "C3 x C3", 40 ],
  [ "D10", 36 ], [ "(C3 x C3) : C2", 20 ] ]
> TestTomF4( TableOfMarks( "L2(11)" ) );
[ [ "C3", 220 ], [ "A4", 55 ] ]
> TestTomF4( TableOfMarks( "L2(13)" ) );
[ [ "C3", 364 ], [ "A4", 91 ], [ "C13 : C3", 28 ] ]
```

Lemma 2.30
Es gelten die Voraussetzungen 2.2 und 2.25. Dann gilt einer der folgenden Fälle:

(i) Es ist $q-1$ durch 8 teilbar, es gilt $|\Omega| = 2q(q+1)$ und G_α ist zyklisch von Ordnung $\frac{q-1}{4}$ oder es gilt $|\Omega| = 2(q+1)$ und G_α hat Index 2 im Normalisator einer Sylow p-Untergruppe.

(ii) Es ist $q+1$ durch 8 teilbar, es gilt $|\Omega| = 2q(q-1)$ und G_α ist zyklisch von Ordnung $\frac{q+1}{4}$.

(iii) *Es gilt $q = 7$, $|\Omega| = 28$ und G_α ist isomorph zu $\mathcal{S}_3$.*

(iv) *Es gilt $q = 9$ und es ist $|\Omega| = 60$ sowie $G_\alpha \cong \mathcal{S}_3$ oder es gilt $|\Omega| = 36$ und G_α ist eine Diedergruppe von Ordnung 10.*

Beweis
Die Aussagen in (*i*) und (*ii*) folgen aus Lemmata 2.26, 2.27 und 2.28 zusammen mit der Untersuchung, wann eine Involution im Punktstabilisator liegt:

Ist nämlich $\varepsilon \in \{1, -1\}$ so, dass $q \equiv \varepsilon$ modulo 4 gilt, so muss $\frac{q-\varepsilon}{4}$ noch durch 2 teilbar sein, damit die Punktstabilisatoren in den Aussagen (*i*) und (*ii*) von Lemma 2.26 von gerader Ordnung sind. Das liefert die Einschränkung, dass $q - \varepsilon$ durch 8 teilbar sein muss.

Für die Aussagen in (*iii*) und (*iv*) untersuchen wir die übrigen Fälle aus Lemma 2.28, die nicht schon in den Aussagen (*i*) und (*ii*) stehen. Wir verwenden dabei die Charaktertafeln und Listen von G-Konjugiertenklassen von maximalen Untergruppen von G in [Atl] für die Gruppen $G \cong \mathrm{PSL}_2(q)$ für $q \in \{7, 9, 11, 13\}$.

Zuerst seien $q \in \{7, 9\}$ und G_α isomorph zu $\mathcal{S}_3$ oder $q = 9$ und G_α eine Diedergruppe der Ordnung 10. Dann enthält G_α Elemente der Ordnung 2. Ferner gibt es in G nur eine Konjugiertenklasse von Involutionen, die in G_α nicht zerfällt, da G_α eine Diedergruppe ist und $|G_\alpha|_2 = 2$ gilt. Sei $x \in G_\alpha^\#$ eine Involution. Dann ist $|C_G(x)| = 8$ und $|C_{G_\alpha}(x)| = 2$ mit [Atl]. Lemma 1.2 liefert nun $|\mathrm{fix}_\Omega(x)| = 4$. Das sind (*iii*) und (*iv*).

Falls $q = 9$ und G_α elementarabelsch der Ordnung 9 ist, so hat keine Involution einen Fixpunkt in Ω. Falls $q \in \{11, 13\}$ und $G_\alpha \cong \mathcal{A}_4$ ist, so gilt $|G|_2 = 4 = |G_\alpha|_2$ und $|\Omega|$ ist ungerade. Damit ist alles gezeigt. ■

Damit sind die Untersuchungen zu $\mathrm{PSL}_2(q)$ und ${}^2G_2(q)$ abgeschlossen. Wir beschäftigen uns nun mit den übrigen unendlichen Familien aus (Lie-1) (siehe Seite 24). Dafür werden wir die Sprache aus der Theorie der linear algebraischen Gruppen verwenden und mit parabolischen Untergruppen arbeiten (siehe [Car] oder [GLS3]).

Voraussetzung 2.31
Seien p eine ungerade Primzahl, $n \in \mathbb{N}$, $q := p^n \geq 3$ und $\varepsilon \in \{1, -1\}$. Weiter sei G eine der Gruppen $\mathrm{PSL}_3^\varepsilon(q)$, $\mathrm{PSL}_4^\varepsilon(q)$ mit $q \not\equiv \varepsilon$ modulo 8, $\mathrm{PSL}_5^\varepsilon(q)$ mit $q \equiv -\varepsilon$ modulo 4, $\mathrm{PSp}_4(q)$, $G_2(q)$ oder ${}^3D_4(q)$.

Lemma 2.32
Es gelte Voraussetzung 2.2 und seien $n \in \mathbb{N}$, $q := 3^n \geq 9$ und $G \cong \mathrm{PSU}_3(q)$. Dann ist $|\Omega|$ nicht kongruent zu 3 modulo 9.

Beweis
Angenommen, die Behauptung sei falsch. Seien $S_\alpha \in \mathrm{Syl}_3(G_\alpha)$ und $S \in \mathrm{Syl}_3(G)$ so, dass $S_\alpha \leqslant S$ ist. Weil q eine 3-Potenz ist, gilt $Z(\mathrm{SU}_3(q)) = 1$ und deshalb $\mathrm{SU}_3(q) = \mathrm{PSU}_3(q)$. Mit Table 4.5.1 in [GLS3] gibt es nur eine G-Konjugiertenklasse von Involutionen. Ferner ist nach Abschnitt 3.6.2 in [Wil, S. 68] der Stabilisator eines nicht-singulären Teilraums von Dimension 1 in $\mathrm{SU}_3(q)$ isomorph zu $\mathrm{GU}_2(q)$.

Es ist $|Z(\mathrm{GU}_2(q))| = q+1$ gerade. Daher enthält C eine Untergruppe isomorph zu $\mathrm{GU}_2(q)$. Jedoch ist der Stabilisator eines nicht-singulären eindimensionalen Teilraums in $\mathrm{SU}_3(q)$ nach Theorem 3.9 in [Wil, S. 93] eine maximale Untergruppe von G.

Nun gilt also $|C| = q(q+1)(q^2-1)$. Ferner ist mit Lemma 2.1 $|C : C_\alpha| \in \{2,4\}$. Nach Annahme gilt weiter $|S\colon S_\alpha| = 3$. Daher wird $|G_\alpha|$ nun von $\frac{1}{3}q^3$ und von $\frac{1}{4}(q+1)(q^2-1)$ geteilt. Da $q > 9$ ist, folgt mit Theorem 6.5.3 in [GLS3] dann schon $G_\alpha = G$. ∎

Voraussetzung 2.33
Es gelte Voraussetzung 2.31. Seien q eine 3-Potenz und Σ ein ungetwistetes Wurzelsytem zu G mit Fundamentalsystem Π. Seien $\widetilde{\Sigma}$ das getwistete Wurzelsystem zu Σ und $\widetilde{\Pi}$ das getwistete Fundamentalsystem zu Π sowie $\hat{\Sigma}$ und $\hat{\Pi}$ die Reduktion von $\widetilde{\Sigma}$ bzw. $\widetilde{\Pi}$ modulo der in Definition 2.3.1 in [GLS3] definierten Äquivalenzrelation. Weiter habe G (un-)getwisteten Rang mindestens 2 (vgl. Remark 2.3.3 in [GLS3]). Mit $\hat{\Sigma}^+$, $\widetilde{\Sigma}^+$ bzw. Σ^+ bezeichnen wir die Teilmenge der positiven Wurzeln von $\hat{\Sigma}$, $\widetilde{\Sigma}$ bzw. Σ.

Sei $S \in \mathrm{Syl}_3(G)$. Für alle $\hat{\alpha} \in \hat{\Sigma}^+$ bezeichne $X_{\hat{\alpha}} \leqslant S$ die Wurzeluntergruppe von $\hat{\alpha}$ in S. Sei ferner $P \leqslant S$ so, dass $|S : P| = 3$ gilt.

Zunächst bemerken wir, dass $\Sigma = \widetilde{\Sigma} = \hat{\Sigma}$ für die ungetwisteten Gruppen, $\Sigma \neq \widetilde{\Sigma} = \hat{\Sigma}$ für die Steinberg-Gruppen außer $\mathrm{PSU}_{2n+1}(q)$ und $\Sigma \neq \widetilde{\Sigma} \neq \hat{\Sigma}$ für $\mathrm{PSU}_{2n+1}(q)$ und die Suzuki-Ree-Gruppen gilt (vgl. Gleichung (2.3.2) in [GLS3, S. 42]).

Die Voraussetzung, dass G (un-)getwisteten Rang mindestens 2 hat, bedeutet $\left|\widetilde{\Pi}\right| \geq 2$. Die noch zu untersuchenden unendlichen Familien von Gruppen vom Lie-Typ $\mathrm{PSL}_3(q)$, $\mathrm{PSL}_4(q)$, $\mathrm{PSL}_5(q)$, $\mathrm{PSU}_4(q)$, $\mathrm{PSU}_5(q)$, $\mathrm{PSp}_4(q)$, $G_2(q)$ und ${}^3D_4(q)$ in ungerader Charakteristik $q \geq 3$ besitzen die Eigenschaft (un-)getwisteten Rang mindestens 2. Diese Eigenschaft benutzen wir um nachfolgend zu zeigen, dass nur $\mathrm{PSU}_3(3)$ die Voraussetzung 2.2 erfüllt.

Lemma 2.34
Es gelte Voraussetzung 2.33. Sei $\hat{\alpha} \in \hat{\Sigma}^+$ so, dass $X_{\hat{\alpha}} \nleqslant P$ ist. Dann ist $\hat{\alpha} \in \hat{\Pi}$.

Beweis
Angenommen, es sei $\hat{\alpha} \notin \hat{\Pi}$. Es ist $S = \prod_{\hat{\alpha} \in \hat{\Sigma}^+} X_{\hat{\alpha}}$ nach Theorem 2.3.7 in [GLS3]. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\widetilde{\Pi} := \{\widetilde{\beta}_1, \ldots, \widetilde{\beta}_m\}$. Da $|S : P| = 3$ ist, gilt somit $X_{\hat{\beta}} \leqslant P$ für alle $\hat{\beta} \in \hat{\Sigma} \setminus \{\hat{\alpha}\}$. Da $\hat{\alpha} \notin \hat{\Pi}$ nach Annahme ist, gilt auch $\widetilde{\alpha} \notin \widetilde{\Pi}$. Insbesondere ist $X_{\hat{\beta}_1}, \ldots, X_{\hat{\beta}_m} \leqslant P$. Weiter gibt es $i_1, \ldots, i_m \in \mathbb{N}_0$ so, dass $\widetilde{\alpha} = \sum_{j=1}^m i_j \cdot \widetilde{\beta}_j$ gilt. Dann ist $\hat{\alpha} = \widehat{i_1\widetilde{b}_1 + \ldots + i_m\widetilde{b}_m}$.

Für die ungetwisteten Gruppen $\mathrm{PSL}_3(q)$, $\mathrm{PSL}_4(q)$, $\mathrm{PSL}_5(q)$ und $\mathrm{PSp}_4(q)$ folgt aus Theorem 2.3.4 (d) und den Chevalley Kommutator Formeln in Theorem 1.12.1(b) in [GLS3] bereits $X_{\hat{\alpha}} \leqslant [X_{\hat{\beta}_1}, \ldots, X_{\hat{\beta}_m}] \leqslant \langle X_{\hat{\beta}_1}, \ldots, X_{\hat{\beta}_m} \rangle \leqslant P$, ein Widerspruch zur Annahme.

Sei nun $G \cong G_2(q)$. Dann ist $\hat{\Pi} = \widetilde{\Pi} = \Pi = \{\beta, \gamma\}$ und

$$\hat{\Sigma} = \widetilde{\Sigma} = \Sigma = \{\pm\beta, \pm\gamma, \pm(\beta+\gamma), \pm(\beta+2\gamma), \pm(\beta+3\gamma), \pm(2\beta+3\gamma)\}$$

mit Remark 1.8.8 in [GLS3], wobei β eine lange und γ eine kurze Wurzel ist. Nun ist $\hat{\alpha} = \alpha \in \{\beta+\gamma, \beta+2\gamma, \beta+3\gamma, 2\beta+3\gamma\}$. Weiter ist $X_\alpha \leqslant [X_\beta, X_\gamma] \leqslant \langle X_\beta, X_\gamma \rangle \leqslant P$ mit Theorems 2.4.5(a) und 1.12.1(b)4 in [GLS3], ein Widerspruch zur Annahme.

Sei $G \cong {}^3D_4(q)$. Dann ist $\hat{\Pi} = \widetilde{\Pi} = \{\beta, \gamma\}$ und

$$\hat{\Sigma} = \widetilde{\Sigma} = \{\pm\beta, \pm\gamma, \pm(\beta+\gamma), \pm(\beta+2\gamma), \pm(\beta+3\gamma), \pm(2\beta+3\gamma)\}$$

mit Remark 1.8.8 und Abschnitt 2.3 in [GLS3], wobei wie oben β eine lange und γ eine kurze Wurzel ist. Wie zuvor ist nach Annahme $\hat{\alpha} = \widetilde{\alpha} \in \{\beta+\gamma, \beta+2\gamma, \beta+3\gamma, 2\beta+3\gamma\}$. Nun folgt $X_{\widetilde{\alpha}} \leqslant [X_\beta, X_\gamma] \leqslant P$ mit Theorem 2.4.5(b)5 in [GLS3], ein Widerspruch zur Annahme.

Sei jetzt $G \cong \mathrm{PSU}_4(q)$. Dann ist $\hat{\Pi} = \widetilde{\Pi} = \{\beta, \gamma\}$ und

$$\hat{\Sigma} = \widetilde{\Sigma} = \{\pm\beta, \pm\gamma, \pm(\beta+\gamma), \pm(2\beta+\gamma)\}$$

mit Remark 1.8.8 und Abschnitt 2.3 in [GLS3], wobei β eine kurze und γ eine lange Wurzel ist. Insbesondere gilt $\hat{\alpha} = \widetilde{\alpha} \in \{\beta+\gamma, 2\beta+\gamma\}$ nach Annahme. Mit Theorem 2.4.5(b)3 in [GLS3] folgt nun $X_{\hat{\alpha}} \leqslant [X_\beta, X_\gamma] \leqslant P$, ein Widerspruch.

Also muss $G \cong \mathrm{PSU}_5(q)$ sein. Dann ist $\widetilde{\Pi} = \{\beta, \gamma\}$ und

$$\widetilde{\Sigma} = \{\pm\beta, \pm\gamma, \pm(\beta+\gamma), \pm(\beta+2\gamma), \pm 2\gamma, \pm 2(\beta+\gamma)\}$$

mit Remark 1.8.8 und Abschnitt 2.3 in [GLS3], wobei β eine lange und γ eine kurze Wurzel ist. Ferner ist $\hat{\Pi} = \{\hat{\beta}, \hat{\gamma}\}$ und $\hat{\Sigma} = \{\pm\hat{\beta}, \pm\hat{\gamma}, \pm\widehat{(\beta+\gamma)}, \pm\widehat{(\beta+2\gamma)}\}$. Nach Table 2.4 und Theorem 2.4.1 in [GLS3] ist $\hat{\beta}$ vom Typ II und $\hat{\gamma}$ vom Typ IV. Es gilt $\hat{\alpha} \in \{\widehat{(\beta+\gamma)}, \widehat{(\beta+2\gamma)}\}$. Jedoch ist mit Theorem 2.4.5(c)2 dann bereits $X_{\hat{\alpha}} \leqslant [X_{\hat{\beta}}, X_{\hat{\gamma}}] \leqslant P$, der finale Widerspruch zur Annahme. ■

Lemma 2.35
Es gelte Voraussetzung 2.33. Dann gibt es eine maximal parabolische Untergruppe R von G so, dass $O_3(R) \leqslant P$ gilt.

Beweis
Nach Lemma 2.34 gibt es ein $\hat{\alpha} \in \hat{\Pi}$ so, dass $X_{\hat{\alpha}} \not\in P$ ist. Da $|S:P| = 3$ ist, gilt für alle $\hat{\beta} \in \hat{\Sigma}^+ \setminus \{\hat{\alpha}\}$ bereits $X_{\hat{\beta}} \in P$. Da G (un-)getwisteten Rang mindestens 2 hat, ist insbesondere $\hat{\Pi} \setminus \{\hat{\alpha}\} \neq \varnothing$. Mit den Bezeichnungen wie in Definition 2.6.4 in [GLS3] betrachte nun die parabolische Untergruppe $R = P_{\{\hat{\alpha}\}}$ von G. Diese ist maximal parabolisch mit Definition 2.6.6 in [GLS3] und ferner ist $U_{\{\hat{\alpha}\}} = O_3(P_{\{\hat{\alpha}\}})$ und $P_{\{\hat{\alpha}\}} = U_{\{\hat{\alpha}\}} : L_{\{\hat{\alpha}\}}$, wobei $X_{\hat{\alpha}} \leqslant L_{\{\hat{\alpha}\}}$ und $L_{\{\hat{\alpha}\}}$ ein Levi-Komplement von R ist. Insbesondere ist $X_{\hat{\alpha}} \not\leqslant U_{\{\hat{\alpha}\}}$ und aus $|S:P| = 3$ folgt dann $U_{\{\hat{\alpha}\}} \leqslant P$, wie behauptet. ■

Für die noch zu untersuchenden Gruppen aus (Lie-1) benötigen wir im Lemma 2.40 gewisse Informationen über diese Gruppen. Das sind die Ordnung einer Sylow p-Untergruppe, wobei p die definierende Charakteristik der Gruppe vom Lie-Typ ist, deren Nilpotenzklasse, Abschnitte von Zentralisatoren von Involutionen und die Struktur der Levi-Untergruppen von maximal parabolischen Untergruppen. Da diese Informationen nur teilweise und nicht immer explizit zitierbar sind, sammeln wir alle oben genannten Informationen in nachfolgender Bemerkung.

Bemerkung 2.36
Es gelte Voraussetzung 2.31. Wir benutzen die Standardnotation (a,b) für den größten gemeinsamen Teiler $\mathrm{ggT}(a,b)$ zweier natürlicher Zahlen a und b.

Nach Theorem 2.6.5 in [GLS3] gibt es in jeder Gruppe vom Lie-Typ parabolische Untergruppen. Diese werden mit Hilfe von Wurzeln und Wurzeluntergruppen definiert (vgl. Definition 2.6.4 in [GLS3]). Man nennt eine parabolische Untergruppe P einer Gruppe G vom Lie-Typ maximal parabolisch, wenn sie aus allen Fundamentalwurzeln bis auf eine konstruiert wurde (vgl. Definition 2.6.6 in [GLS3]). Mit Theorem 2.6.5 in [GLS3] kann jede parabolische Untergruppe P von einer Gruppe G vom Lie-Typ geschrieben werden als $P = U \cdot L$, wobei $U = O_p(P)$ das unipotente Radikal für die definierende Charakteristik p der Gruppe G vom Lie-Typ und L eine sogenannte Levi-Untergruppe von P ist. Ferner gilt $U \cap L = 1$ und damit $P = U : L$.

Ist $t \in G$ eine Involution, so können wir mit Table 4.5.1 in [GLS3] die Konjugiertenklasse von t in G und Sektionen L^* von $C_G(t)$ bestimmen, da q ungerade ist. Wir werden am Beispiel $\mathrm{PSL}_3(q)$ diese Untersuchung detailliert ausführen. Alle nachfolgenden Gruppen können auf gleiche Art ebenfalls detailliert untersucht werden, wir notieren jedoch nur die wichtigsten Informationen:

Wir schreiben für alle möglichen Konjugierten von t in Table 4.5.1 in [GLS3] nur diejenigen Konjugierten heraus, für die in der Spalte *coset mod* $Inn(K)$ eine „1“ steht (andere Angaben als „1“ führen zu Konjugiertenklassen von äußeren Automorphismen von G von Ordnung 2) und wir notieren die zugehörige Sektion $L^* = O^{p'}(C_G(t))$ in der jeweiligen Version (Spalten 6 und 7 der Table 4.5.1 in [GLS3]). Wir verwenden die Notation für die verschiedenen Typen von Involutionen sowie L^* aus Table 4.5.1 in [GLS3]. Für die Gruppen $G_2(q)$, ${}^2G_2(q)$ und ${}^3D_4(q)$ können wir die Struktur von $C_G(t)$ mit [Wil] vollständig angeben.

Mit den Theoremen 3.2.2 und 3.3.1 sowie Remark 1.8.8 in [GLS3] können wir für alle oben genannten Gruppen vom Lie-Typ bis auf $G_2(q)$ die Nilpotenzklasse von S bestimmen, indem wir die Höhe $h(\alpha)$ der höchsten Wurzel α des Wurzelsystems $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$ von G bestimmen (wir nutzen die Notation aus [GLS3]). Wir können jede Wurzel des Wurzelsystems Σ von G als $\mathbb{R}$-Linearkombination von Wurzeln aus dem Fundamentalsystem $\Pi \subseteq \Sigma$ darstellen, wobei Π eine linear unabhängige Menge von Wurzeln ist. Genauer ist Π sogar eine $\mathbb{R}$-Basis des $\mathbb{R}$-Erzeugnis von Σ. Die Summe der Koeffizienten einer solchen $\mathbb{R}$-Linearkombination wird dabei als Höhe bezeichnet (vgl. Abschnitt 1.8 in [GLS3, S. 8 ff]). Neben dem Wurzelsystem und dem Fundamentalsystem von G ist auch das Negative der höchsten Wurzel von G in Remark 1.8.8 in [GLS3] angegeben (für ungetwistete G; für getwistete G verweisen wir auf Abschnitt 13.3 in Kombination mit Abschnitt 3.6 in [Car]).

Die Nilpotenzklasse der Sylow p-Untergruppe von G benötigen wir im Lemma 2.40 nur für die Primzahl $p = 3$. Wir werden nachfolgend jedoch für alle oben genannten Gruppen G und alle Primzahlen $p \geq 3$ die Nilpotenzklasse der Sylow p-Untergruppe S von G herausarbeiten, wobei $q = p^n$ gilt.

$\underline{G = \mathrm{PSL}_3(q)}$:

Nach Abschnitt 3.3.1 in [Wil, S. 44, Z. 28] gilt $|G| = \frac{1}{(3,q-1)} \cdot q^3 \cdot (q^2-1) \cdot (q^3-1)$ und damit $|S| = q^3$. Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ gibt es nach Abschnitt 3.3.3 in [Wil, S. 47, Z. 3ff] ein $k \in \mathbb{N}$ so, dass $1 \leq k < n$ ist und die Levi-Untergruppen von $\mathrm{GL}_n(q)$ zu $\mathrm{GL}_k(q) \times \mathrm{GL}_{n-k}(q)$ isomorph sind. Mit dieser Levi-Struktur in $\mathrm{GL}_n(q)$ und dem Wissen, dass

$$\mathrm{SL}_n(q) = \left\{ A \in \mathrm{GL}_n(q) \;\middle|\; \det A = 1_{\mathrm{GF}(q)} \right\}$$

und

$$\mathrm{PSL}_n(q) = \mathrm{SL}_n(q) / (Z(\mathrm{GL}_n(q)) \cap \mathrm{SL}_n(q))$$

gilt, können wir nun für $\mathrm{PSL}_3(q)$, $\mathrm{PSL}_4(q)$ und $\mathrm{PSL}_5(q)$ die Struktur der Levi-Untergruppen bestimmen.

Sei dazu $P \leqslant \mathrm{GL}_3(q)$ eine maximal parabolische Untergruppe von G und $L \leqslant P$ eine Levi-Untergruppe. In $\mathrm{GL}_3(q)$ ist $L \cong \mathrm{GL}_1(q) \times \mathrm{GL}_2(q) \cong C_{q-1} \times \mathrm{GL}_2(q)$. Weiter gilt $L \cap \mathrm{SL}_3(q) \cong \mathrm{GL}_2(q)$ und in $\mathrm{PSL}_3(q)$ ist

$$(L \cap \mathrm{SL}_3(q)) \cdot Z(\mathrm{SL}_3(q)) / Z(\mathrm{SL}_3(q)) \cong \mathrm{GL}_2(q) / C_{(q-1,3)}.$$

Nachfolgend (für $n \in \{4,5\}$) bezeichnen wir mit L_{GL} den Isomorphietyp der Levi-Untergruppe in $\mathrm{GL}_n(q)$, L_{SL} den Isomorphietyp der Levi-Untergruppe in $\mathrm{SL}_n(q)$ und L_{PSL} den Isomorphietyp der Levi-Untergruppe in $\mathrm{PSL}_n(q)$. Analog bezeichnen wir mit L_{SU} bzw. L_{PSU} den Isomorphietyp der Levi-Untergruppe in $\mathrm{SU}_n(q)$ bzw. $\mathrm{PSU}_n(q)$ für $n \in \{3,4,5\}$.

Sei $t \in G$ eine Involution. Wir benutzen Table 4.5.1 in [GLS3, S. 172 f], um die Struktur einer Sektion L^* von $C_G(t)$ zu bestimmen. Im Fall von $G = \mathrm{PSL}_3(q)$ betrachten wir in der Tabelle den Block für $K = A_m^{\varepsilon}(q)$, wobei $m \geq 2$, $\varepsilon \in \{1,-1\}$ und $n = m+1$ gilt. Da $G = \mathrm{PSL}_3(q)$ ist, folgt $m = 2$, $n = 3$ und $\varepsilon = 1$. Mit dieser Tabelle sowie Theorem 4.5.1 in [GLS3] gibt es nun acht mögliche generische Konjugierte von t. Das sind der Reihenfolge nach t_1, t_i für $2 \leq i \leq \frac{m}{2}$, $t_{(m+1)/2}$ für ungerades m, $t'_{(m+1)/2}$ für ungerades m, γ_1 für ungerades m, γ_1 für gerades m, γ_2 für ungerades m oder γ_2' für ungerades m.

Wie zu Beginn der Bemerkung bereits erwähnt, interessieren wir uns nur für die Konjugierten von t, für die in der Spalte *coset mod* $Inn(K)$ eine 1 steht. Dadurch fallen die Konjugierten γ_1, γ_2 und γ_2' aus unserer Untersuchung heraus, weil für diese g oder g' in der Spalte *coset mod* $Inn(K)$ steht und solche Einträge zu involutorischen Graphautomorphismen von G führen. Die dritte und vierte Zeile des Blocks $K = A_m^{\varepsilon}(q)$ in Table 4.5.1 in [GLS3] müssen wir auch nicht weiter betrachten, da $m = 2$ nicht ungerade ist. (Das sind $t_{(m+1)/2}$ und $t'_{(m+1)/2}$.) Weil $m = 2$ und damit $\frac{m}{2} = 1$ gilt, ist $2 \leq i \leq \frac{m}{2} = 1$ für kein $i \in \mathbb{N}$ erfüllt. Daher gibt es kein t_i für $G = \mathrm{PSL}_3(q)$ wie in der zweiten Zeile im Block $K = A_m^{\varepsilon}(q)$ von Table 4.5.1 in [GLS3]. Nun bleibt also nur der Fall t_1 übrig.

Zunächst sind $n = 3$ ungerade und $q-1$ gerade. Daher ist der 2-Anteil von $q-1$ größer als der 2-Anteil von $n = 3$. Mit der fünften Spalte *coset mod* $Inn(K)$ von Table 4.5.1 in [GLS3] ist nun t_1 ein inner Automorphismus von G und t ist zu t_1 in G konjugiert. Mit der sechsten und siebenten Spalte von Table 4.5.1 in [GLS3] folgt $L^* \cong A^{\varepsilon}_{m-1}(q)$ und L^* ist in der sogenannten „universal" Version. Das bedeutet $L^* \cong \mathrm{SL}_2(q)$ ist eine Sektion von $C_G(t)$.

Das Fundamentalsystem $\Pi = \{a_1 - a_2, a_2 - a_3\}$ zum Wurzelsystem von A_2 (zu $\mathrm{PSL}_3(q)$ gehörend) erhalten wir mit Remark 1.8.8 in [GLS3]. Ferner ist die höchste Wurzel $\alpha = a_1 - a_3 = \mathbf{1} \cdot (a_1 - a_2) + \mathbf{1} \cdot (a_2 - a_3)$. Damit gilt für die Höhe $h(\alpha)$ der höchsten Wurzel α genau $h(\alpha) = 1 + 1 = 2$. Mit Theorem 3.3.1 in [GLS3] ist $h(\alpha)$ genau die Nilpotenzklasse der Sylow p-Untergruppe S von $G \cong \mathrm{PSL}_3(p^f)$.

$G = \mathrm{PSL}_4(q)$ und $q \not\equiv 1$ modulo 8:

Nach Abschnitt 3.3.1 in [Wil, S. 44, Z. 28] gilt

$$|G| = \frac{1}{(4, q-1)} \cdot q^6 \cdot (q^2 - 1) \cdot (q^3 - 1) \cdot (q^4 - 1)$$

und damit $|S| = q^6$. Die Levi-Untergruppen L_{GL} sind mit Abschnitt 3.3.3 in [Wil, S. 47, Z. 3ff] isomorph zu $\mathrm{GL}_1(q) \times \mathrm{GL}_3(q) \cong C_{q-1} \times \mathrm{GL}_3(q)$ bzw. $\mathrm{GL}_2(q) \times \mathrm{GL}_2(q)$. Dann ist L_{SL} isomorph zu $\mathrm{GL}_3(q)$ bzw. $\mathrm{GL}_2(q) \times \mathrm{SL}_2(q)$ und L_{PSL} ist isomorph zu $\mathrm{GL}_3(q)/C_{(4,q-1)}$ bzw. $(\mathrm{GL}_2(q) \times \mathrm{SL}_2(q))/C_{(4,q-1)}$.

Sei $t \in G$ eine Involution. Da nach Voraussetzung $q-1$ nicht von 8 geteilt wird, ist t nicht konjugiert zu t_1 in G mit Table 4.5.1 in [GLS3]. Weil $m = 3 \equiv -1$ modulo 4 gilt, ist t mit Table 4.5.1 in [GLS3] konjugiert zu $t_{\frac{m+1}{2}} = t_2$ in G und es gilt $L^* \cong \mathrm{SL}_2(q) \circ \mathrm{SL}_2(q)$ oder es sind $q \equiv 3$ modulo 4, t konjugiert zu $t'_{\frac{m+1}{2}} = t'_2$ sowie $L^* \cong \mathrm{PSL}_2(q^2)$. Das waren nach Table 4.5.1 in [GLS3] alle Möglichkeiten für t und L^*, da $q \not\equiv 1$ modulo 8 gilt.

Weiter sind $\Pi = \{a_1 - a_2, a_2 - a_3, a_3 - a_4\}$ ein Fundamentalsystem zum Wurzelsystem von A_3 (zu $\mathrm{PSL}_4(q)$ gehörend) und

$$\alpha = a_1 - a_4 = \mathbf{1} \cdot (a_1 - a_2) + \mathbf{1} \cdot (a_2 - a_3) + \mathbf{1} \cdot (a_3 - a_4)$$

die höchste Wurzel im Wurzelsystem. Damit ist $h(\alpha) = 3$ die Nilpotenzklasse von S.

$G = \mathrm{PSL}_5(q)$ und $q \equiv -1$ modulo 4:

Mit Abschnitt 3.3.1 in [Wil, S. 44, Z. 28] gilt

$$|G| = \frac{1}{(5, q-1)} \cdot q^{10} \cdot (q^2 - 1) \cdot (q^3 - 1) \cdot (q^4 - 1) \cdot (q^5 - 1)$$

und damit $|S| = q^{10}$. Die Levi-Untergruppen L_{GL} sind nach Abschnitt 3.3.3 in [Wil, S. 47, Z. 3ff] isomorph zu $\mathrm{GL}_1(q) \times \mathrm{GL}_4(q) \cong C_{q-1} \times \mathrm{GL}_4(q)$ bzw. $\mathrm{GL}_2(q) \times \mathrm{GL}_3(q)$. Dann ist L_{SL} isomorph zu $\mathrm{GL}_4(q)$ bzw. $\mathrm{GL}_3(q) \times \mathrm{SL}_2(q)$ sowie

$$L_{\mathrm{PSL}} \cong \mathrm{GL}_4(q)/C_{(5,q-1)} \quad \text{bzw.} \quad L_{\mathrm{PSL}} \cong (\mathrm{GL}_3(q) \times \mathrm{SL}_2(q))/C_{(5,q-1)}.$$

Sei $t \in G$ eine Involution. Da q ungerade, $q-1$ gerade sowie der 2-Anteil von 5 genau 1 ist, sind mit Table 4.5.1 in [GLS3] t konjugiert zu t_1 in G und $L^* \cong \mathrm{SL}_4(q)$ oder t ist konjugiert zu t_2 in G und $L^* \cong \mathrm{SL}_2(q) \times \mathrm{SL}_3(q)$. Das waren nach Table 4.5.1 in [GLS3] alle Möglichkeiten für t und L^*, da $q \equiv -1$ modulo 4 gilt.

Ferner sind $\Pi = \{a_1 - a_2, a_2 - a_3, a_3 - a_4, a_4 - a_5\}$ ein Fundamentalsystem zum Wurzelsystem von A_4 (zu $\mathrm{PSL}_5(q)$ gehörend) und

$$\alpha = a_1 - a_5 = \mathbf{1} \cdot (a_1 - a_2) + \mathbf{1} \cdot (a_2 - a_3) + \mathbf{1} \cdot (a_3 - a_4) + \mathbf{1} \cdot (a_4 - a_5)$$

die höchste Wurzel im Wurzelsystem. Damit ist $h(\alpha) = 4$ die Nilpotenzklasse von S.

<u>$G \cong \mathrm{PSU}_3(q)$:</u>

Mit Abschnitt 3.6 in [Wil, S. 66, Z. 3ff] gilt $|G| = \frac{1}{(3,q+1)} \cdot q^3 \cdot (q^2-1) \cdot (q^3+1)$ und damit $|S| = q^3$. Die Levi-Untergruppen L_{SU} in $\mathrm{SU}_3(q)$ sind nach Abschnitt 3.6.2 in [Wil, S. 67, Z. 36ff] isomorph zu $\mathrm{GL}_1(q^2) \times \mathrm{SU}_1(q) \cong C_{q^2-1}$. Dann ist L_{PSU} isomorph zu $C_{(q^2-1)/(3,q+1)}$.

Sei $t \in G$ eine Involution. Da $q+1$ von 2 geteilt wird und 3 ungerade ist, ist t mit Table 4.5.1 in [GLS3] konjugiert zu t_1 in G und es gilt $L^* \cong \mathrm{SU}_2(q) \cong \mathrm{SL}_2(q)$.

Es sind $\Pi = \{a_1 - a_2, a_2 - a_3\}$ ein Fundamentalsystem zum Wurzelsystem von A_2 (zu $\mathrm{PSL}_3(q)$ gehörend) und $\alpha = a_1 - a_3 = \mathbf{1} \cdot (a_1 - a_2) + \mathbf{1} \cdot (a_2 - a_3)$ die höchste Wurzel im Wurzelsystem. Das Wurzelsystem von ${}^2A_2$ (zu $\mathrm{PSU}_3(q)$ gehörend) entsteht aus dem von A_2 sowie einem Graphautomorphismus, der auf der Menge der Wurzeln operiert und die Wurzel $p_1 = a_1 - a_2$ mit der Wurzel $p_2 = a_2 - a_3$ vertauscht. Da alle Wurzeln eines Wurzelsystems Linearkombinationen der Fundamentalwurzeln sind, können wir diesen Graphautomorphismus linear fortsetzen. Das entstandene Fundamentalsystem ist $\hat{\Pi} = \left\{\frac{1}{2}(p_1 + p_2)\right\}$ (vgl. Abschnitt 13.3 in [Car]) und es gilt $\hat{\alpha} = a_1 - a_3 = \mathbf{2} \cdot \left(\frac{1}{2}(p_1 + p_2)\right)$. Damit ist $h(\hat{\alpha}) = 2$ die Nilpotenzklasse von S.

<u>$G \cong \mathrm{PSU}_4(q)$ und $q \not\equiv -1$ modulo 8:</u>

Nach Abschnitt 3.6 in [Wil, S. 66, Z. 3ff] gilt

$$|G| = \frac{1}{(4,q+1)} \cdot q^6 \cdot (q^2-1) \cdot (q^3+1) \cdot (q^4-1)$$

und damit $|S| = q^6$. Die Levi-Untergruppen L_{SU} sind isomorph zu

$$\mathrm{GL}_2(q^2) \qquad \text{bzw.} \qquad \mathrm{GL}_1(q^2) \times \mathrm{SU}_2(q) \cong C_{q^2-1} \times \mathrm{SL}_2(q)$$

nach Abschnitt 3.6.2 in [Wil, S. 67, Z. 36ff]. Dann gilt $L_{\mathrm{PSU}} \cong \mathrm{GL}_2(q^2)/C_{(4,q+1)}$ bzw. $L_{\mathrm{PSU}} \cong (C_{(q^2-1)} \times \mathrm{SL}_2(q))/C_{(4,q+1)}$.

Sei $t \in G$ eine Involution. Da nach Voraussetzung $q+1$ nicht von 8 geteilt wird, ist t nicht zu t_1 konjugiert in G mit Table 4.5.1 in [GLS3]. Weil $m = 3 \equiv -1$ modulo 4 gilt, ist t mit Table 4.5.1 in [GLS3] konjugiert zu $t_{\frac{m+1}{2}} = t_2$ in G und es gilt $L^* \cong \mathrm{SL}_2(q) \circ \mathrm{SL}_2(q)$ oder es sind $q \equiv 1$ modulo 4, t zu $t'_{\frac{m+1}{2}} = t'_2$ konjugiert in G und $L^* \cong \mathrm{PSL}_2(q^2)$. Das waren nach Table 4.5.1 in [GLS3] alle Möglichkeiten für t und L^*, da $q \not\equiv -1$ modulo 8 gilt.

Ferner sind $\Pi = \{a_1 - a_2, a_2 - a_3, a_3 - a_4\}$ ein Fundamentalsystem zum Wurzelsystem von A_3 (zu $\mathrm{PSL}_4(q)$ gehörend) und

$$\alpha = a_1 - a_4 = \mathbf{1} \cdot (a_1 - a_2) + \mathbf{1} \cdot (a_2 - a_3) + \mathbf{1} \cdot (a_3 - a_4)$$

die höchste Wurzel im Wurzelsystem. Das Wurzelsystem von ${}^2A_3$ (zu $\mathrm{PSU}_4(q)$ gehörend) entsteht aus dem von A_3 sowie einem Graphautomorphismus, der auf der Menge der Wurzeln operiert und die Wurzel $p_1 = a_1 - a_2$ mit der Wurzel $p_3 = a_3 - a_4$ vertauscht sowie $p_2 = a_2 - a_3$ fest lässt. Das entstandene Fundamentalsystem ist $\hat{\Pi} = \left\{\frac{1}{2}(p_1 + p_3), p_2\right\}$ (vgl. Abschnitt 13.3 in [Car]) und es gilt

$$\hat{\alpha} = a_1 - a_4 = \mathbf{2} \cdot \left(\tfrac{1}{2}(p_1 + p_3)\right) + \mathbf{1} \cdot p_2.$$

Damit ist $h(\hat{\alpha}) = 3$ die Nilpotenzklasse von S.

$G \cong \mathrm{PSU}_5(q)$ und $q \equiv 1$ modulo 4:

Mit Abschnitt 3.6 in [Wil, S. 66, Z. 3ff] gilt

$$|G| = \frac{q^{10}}{(5, q+1)} \cdot (q^2 - 1) \cdot (q^3 + 1) \cdot (q^4 - 1) \cdot (q^5 + 1)$$

und damit $|S| = q^{10}$. Die Levi-Untergruppen L_{SU} sind nach Abschnitt 3.6.2 in [Wil, S. 67, Z. 36ff] isomorph zu $\mathrm{GL}_1(q^2) \times \mathrm{SU}_3(q) \cong C_{q^2-1} \times \mathrm{SU}_3(q)$ bzw. $\mathrm{GL}_2(q^2)$. Dann ist L_{PSU} isomorph zu $(C_{(q^2-1)} \times \mathrm{SU}_3(q))/C_{(5,q+1)}$ bzw. $\mathrm{GL}_2(q^2)/C_{(5,q+1)}$.

Sei $t \in G$ eine Involution. Da $q+1$ von 2 geteilt wird und 5 ungerade ist, ist t mit Table 4.5.1 in [GLS3] konjugiert zu t_1 in G und es gilt $L^* \cong \mathrm{SU}_4(q)$ oder es ist t konjugiert zu t_2 in G und $L^* \cong \mathrm{SU}_2(q) \times \mathrm{SU}_3(q)$. Das waren nach Table 4.5.1 in [GLS3] alle Möglichkeiten für t und L^*, da $q \equiv 1$ modulo 4 gilt.

Weiter sind $\Pi = \{a_1 - a_2, a_2 - a_3, a_3 - a_4, a_4 - a_5\}$ ein Fundamentalsystem zum Wurzelsystem von A_4 (zu $\mathrm{PSL}_5(q)$ gehörend) und

$$\alpha = a_1 - a_5 = \mathbf{1} \cdot (a_1 - a_2) + \mathbf{1} \cdot (a_2 - a_3) + \mathbf{1} \cdot (a_3 - a_4) + \mathbf{1} \cdot (a_4 - a_5)$$

die höchste Wurzel im Wurzelsystem. Das Wurzelsystem von ${}^2A_4$ (zu $\mathrm{PSU}_5(q)$ gehörend) entsteht aus dem von A_4 sowie einem Graphautomorphismus, der auf der Menge der Wurzeln operiert und die Wurzel $p_1 = a_1 - a_2$ mit der Wurzel $p_4 = a_4 - a_5$ vertauscht sowie $p_2 = a_2 - a_3$ mit $p_3 = a_3 - a_4$ vertauscht. Das entstandene Fundamentalsystem ist $\hat{\Pi} = \left\{\frac{1}{2}(p_1 + p_4), \frac{1}{2}(p_2 + p_3)\right\}$ (vgl. Abschnitt 13.3 in [Car]) und es gilt $\hat{\alpha} = a_1 - a_5 = \mathbf{2} \cdot \left(\frac{1}{2}(p_1 + p_4)\right) + \mathbf{2} \cdot \left(\frac{1}{2}(p_2 + p_3)\right)$. Damit ist $h(\hat{\alpha}) = 4$ die Nilpotenzklasse von S.

$G \cong \mathrm{PSp}_4(q)$:

Mit Abschnitt 3.5 in [Wil, S. 60f] gilt $|G| = \frac{1}{2} \cdot q^4 \cdot (q^2 - 1) \cdot (q^4 - 1)$ und damit auch $|S| = q^4$. Die Levi-Untergruppen L von G sind nach Theorem 3.8 in [Wil, S. 93] isomorph zu $\mathrm{GL}_1(q) \circ \mathrm{SL}_2(q)$ bzw. $\mathrm{GL}_2(q)/C_2$.

Sei $t \in G$ eine Involution. Dann ist t mit Table 4.5.1 in [GLS3] konjugiert zu $t_{\frac{2}{2}} = t_1$ in G und es gilt $L^* \cong \mathrm{SL}_2(q) \circ \mathrm{SL}_2(q)$ oder es sind t konjugiert zu t_2 (im Fall $q \equiv 1$ modulo 4) bzw. t_2' (im Fall $q \equiv 3$ modulo 4) in G und $L^* \cong \mathrm{PSL}_2(q)$.

Weiter sind $\Pi = \{a_1 - a_2, 2a_2\}$ ein Fundamentalsystem zum Wurzelsystem von C_2 (zu $\mathrm{PSp}_4(q)$ gehörend) und $\alpha = 2a_1 = \mathbf{2} \cdot (a_1 - a_2) + \mathbf{1} \cdot (2a_2)$ die höchste Wurzel im Wurzelsystem. Damit ist $h(\alpha) = 2 + 1 = 3$ die Nilpotenzklasse von S.

$\underline{G \cong {}^3D_4(q)}$:

Mit Abschnitt 4.6.2 und Gleichung (4.67) in [Wil, S. 142] gilt

$$|G| = q^{12}(q^8 + q^4 + 1)(q^6 - 1)(q^2 - 1)$$

und damit $|S| = q^{12}$. Die Levi-Untergruppen L von G sind nach Theorem 4.3 in [Wil, S. 144] isomorph zu $\mathrm{SL}_2(q^3).C_{q-1}$ bzw. $\mathrm{SL}_2(q).C_{q^3-1}$.

Sei $t \in G$ eine Involution. Dann ist t mit Table 4.5.1 in [GLS3] konjugiert zu t_2 in G und es gilt $C_G(t) \cong C_2{}^{\boldsymbol{\cdot}}(\mathrm{PSL}_2(q^3) \times \mathrm{PSL}_2(q)).C_2$ nach Abschnitt 4.6.5 in [Wil, S. 144, Z. 9f].

Ferner sind $\Pi = \{a_1 - a_2, a_2 - a_3, a_3 - a_4, a_3 + a_4\}$ ein Fundamentalsystem zum Wurzelsystem von D_4 (zu $\mathrm{P}\Omega_8^+(q)$ gehörend) und

$$\alpha = a_1 + a_2 = \mathbf{1} \cdot (a_1 - a_2) + \mathbf{2} \cdot (a_2 - a_3) + \mathbf{1} \cdot (a_3 - a_4) + \mathbf{1} \cdot (a_3 + a_4)$$

die höchste Wurzel im Wurzelsystem. Das Wurzelsystem von ${}^3D_4$ (zu ${}^3D_4(q)$ gehörend) entsteht aus dem von D_4 sowie einem Graphautomorphismus der Ordnung 3, der auf der Menge $\{p_1, p_3, p_4\}$ der Wurzeln $p_1 = a_1 - a_2$, $p_3 = a_3 - a_4$ und $p_4 = a_3 + a_4$ operiert und die Wurzel $p_2 = a_2 - a_3$ fest lässt. Das entstandene Fundamentalsystem ist $\hat{\Pi} = \left\{\frac{1}{3}(p_1 + p_3 + p_4), p_2\right\}$ (vgl. Abschnitt 13.3 in [Car]) und es gilt

$$\hat{\alpha} = a_1 + a_2 = \mathbf{2} \cdot p_2 + \mathbf{3} \cdot \left(\tfrac{1}{3}(p_1 + p_3 + p_4)\right).$$

Damit ist $h(\hat{\alpha}) = 2 + 3 = 5$ die Nilpotenzklasse von S.

Für die verbliebene Gruppe $G_2(q)$ ist Theorem 3.3.1 in [GLS3] nicht immer anwendbar, da $G_2(3^f)$ für $f \in \mathbb{N}$ einen Sonderfall von Theorem 3.3.1 in [GLS3] darstellt. Genauer ist dabei nur die Identifizierung der Höhe der höchsten Wurzel mit der Nilpotenzklasse einer Sylow 3-Untergruppe nicht möglich. Wir werden daher eine andere Strategie verwenden, die Nilpotenzklasse einer Sylow 3-Untergruppe zu berechnen.

$\underline{G \cong G_2(q)}$:

Mit Abschnitt 4.3.3 und Gleichung (4.25) in [Wil, S. 122] gilt

$$|G| = q^6(q^6 - 1)(q^2 - 1)$$

und damit $|S| = q^6$. Die Levi-Untergruppen L von G sind nach Abschnitt 4.3.5 bzw. Table 4.1 in [Wil, S. 125, 127] isomorph zu $\mathrm{GL}_2(q)$.

Sei $t \in G$ eine Involution. Dann ist t mit Table 4.5.1 in [GLS3] konjugiert zu t_1 in G und es gilt $C_G(t) \cong C_2{}^{\boldsymbol{\cdot}}(\mathrm{PSL}_2(q) \times \mathrm{PSL}_2(q)).C_2$ nach Abschnitt 4.3.6 in [Wil, S. 125, Z. 34f].

Für die Nilpotenzklasse einer Sylow p-Untergruppe von G sei zunächst $p \geq 5$. Mit den Theoremen 3.2.2 und 3.3.1 in [GLS3] ist dann die Nilpotenzklasse einer Sylow

p-Untergruppe von G durch die Höhe der höchsten Wurzel im Fundamentalsystem berechenbar. Sei also $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ ein Fundamentalsystem zum Wurzelsystem von G_2. Da $\alpha = \mathbf{2}\alpha_1 + \mathbf{3}\alpha_2$ nach Remark 1.8.8 in [GLS3] die höchste Wurzel im Wurzelsystem ist und $h(\alpha) = 5$ gilt, hat jede Sylow p-Untergruppe von G Nilpotenzklasse 5.

Nun wollen wir die Nilpotenzklasse für Sylow p-Untergruppen von G im Fall $p = 3$ erarbeiten. Zunächst sei noch p beliebig. Wir verwenden die Notation in [GLS3, S. 65] für die Konstruktion von unipotenten Radikalen und parabolischen Untergruppen, um eine Zentralreihe einer Sylow 3-Untergruppe zu ermitteln. Wir konstruieren zunächst eine Zentralreihe für das unipotente Radikal $U_{\{\alpha_2\}}$ einer maximal parabolischen Untergruppe $P_{\{\alpha_2\}}$ in G. Es gilt nach Definition 2.6.4 und Remark 1.8.8 in [GLS3]

$$\begin{aligned} U_{\{\alpha_2\}} = U^1_{\{\alpha_2\}} &= \langle X_{\alpha_1}, X_{\alpha_1+\alpha_2}, X_{\alpha_1+2\alpha_2}, X_{\alpha_1+3\alpha_2}, X_{2\alpha_1+3\alpha_2}\rangle, \\ U^2_{\{\alpha_2\}} &= \langle X_{2\alpha_1+3\alpha_2}\rangle = U^5_{\varnothing} \leqslant Z(U_{\varnothing}), \\ U^3_{\{\alpha_2\}} &= 1. \end{aligned}$$

Mit Theorem 3.2.2 in [GLS3] ist $1 = U^3_{\{\alpha_2\}} \lneqq U^2_{\{\alpha_2\}} \lneqq U^1_{\{\alpha_2\}}$ eine Zentralreihe von $U_{\{\alpha_2\}}$ mit elementarabelschen Faktoren. Diese Konstruktion war unabhängig von p. Ferner erhalten wir aus dieser Zentralreihe, dass $[U_{\{\alpha_2\}}, U_{\{\alpha_2\}}] \leqslant U^2_{\{\alpha_2\}} = \langle X_{2\alpha_1+3\alpha_2}\rangle$ gilt. Das bedeutet, dass für alle Wurzeln

$$\beta \in \{\alpha_1, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_1+2\alpha_2, \alpha_1+3\alpha_2, 2\alpha_1+3\alpha_2\} =: \Sigma_1$$

schon $[X_{\alpha_1}, X_\beta] \leqslant X_{2\alpha_1+3\alpha_2} = U^2_{\{\alpha_2\}}$ folgt.

Sei jetzt $p = 3$ und vergleiche [GLS3, S. 99]. Es gilt $P_{\{\alpha_2\}} \cong P_{\{\alpha_1\}}$ und damit auch $U_{\{\alpha_2\}} \cong U_{\{\alpha_1\}}$ (Die zwei Konjugiertenklassen von maximal parabolischen Untergruppen sind isomorph; vergleiche auch die Abschnitte 4.3.5 bis 4.3.7 in [Wil, S. 123ff]). Ferner gibt es einen involutorischen Graphautomorphismus γ, für den $\alpha_1^\gamma = \alpha_2$ sowie $\alpha_2^\gamma = \alpha_1$ gilt. Graphautomorphismen lassen das Wurzelsystem invariant. Ferner werden positive Wurzeln auf positive Wurzeln und Wurzeluntergruppen auf Wurzeluntergruppen abgebildet. Es ist $U_\varnothing$ eine Sylow p-Untergruppe von G und nach Definition 2.6.4 in [GLS3] gilt

$$\begin{aligned} U_\varnothing = U^1_\varnothing &= \langle X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, X_{\alpha_1+\alpha_2}, X_{\alpha_1+2\alpha_2}, X_{\alpha_1+3\alpha_2}, X_{2\alpha_1+3\alpha_2}\rangle, \\ U^2_\varnothing &= \langle X_{\alpha_1+\alpha_2}, X_{\alpha_1+2\alpha_2}, X_{\alpha_1+3\alpha_2}, X_{2\alpha_1+3\alpha_2}\rangle. \end{aligned}$$

Ferner ist der Faktor $U_\varnothing / U^2_\varnothing$ nach Theorem 3.2.2 in [GLS3] elementarabelsch und es gilt $[U_\varnothing, U_\varnothing] \leqslant U^2_\varnothing$. Wir wissen schon, dass $[X_{\alpha_1}, X_\beta] \leqslant X_{2\alpha_1+3\alpha_2}$ für alle $\beta \in \Sigma_1$ gilt. Für die Konstruktion von $[U_\varnothing, U_\varnothing, U_\varnothing] \leqslant [U_\varnothing, U^2_\varnothing]$ müssen wir also noch wissen, was $[X_{\alpha_2}, X_\beta]$ für alle $\beta \in \Sigma_1 \setminus \{\alpha_1\}$ ist. Aufgrund des involutorischen Graphautomorphismus γ von G_2 gilt nun

$$\begin{aligned} [X_{\alpha_2}, U^2_\varnothing] &= ([X_{\alpha_2}, U^2_\varnothing]^\gamma)^\gamma = \left[{X_{\alpha_2}}^\gamma, (U^2_\varnothing)^\gamma\right]^\gamma \\ &= [X_{\alpha_1}, U^2_\varnothing]^\gamma \leqslant (U^2_{\{\alpha_2\}})^\gamma \leqslant Z(U_\varnothing)^\gamma = Z(U_\varnothing), \end{aligned}$$

da γ Wurzeln auf Wurzeln sowie Wurzeluntergruppen auf Wurzeluntergruppen abbildet und charakteristische Untergrupen invariant lässt. Daher folgt

$$[U_\varnothing, U_\varnothing, U_\varnothing] \leqslant [U_\varnothing, U_\varnothing^2] \leqslant Z(U_\varnothing)$$

und

$$[U_\varnothing, U_\varnothing, U_\varnothing, U_\varnothing] \leqslant [U_\varnothing, Z(U_\varnothing)] = 1.$$

Nun ist die Nilpotenzklasse von $U_\varnothing$ höchstens 3, da wir eine absteigende Zentralreihe der Länge 4 gefunden haben. Ferner ist die Nilpotenzlasse von $U_\varnothing$ mindestens 3, da $U_\varnothing$ isomorph zu einer Untergruppe von $P_{\{\alpha_2\}}$ ist, $U_{\{\alpha_2\}}$ Nilpotenzklasse 2 hat, der p-Anteil von $\left|P_{\{\alpha_2\}}/U_{\{\alpha_2\}}\right|$ genau q ist und eine Sylow p-Untergruppe der Levi-Untergruppe $L_{\{\alpha_2\}} \leqslant P_{\{\alpha_2\}}$ nichttrivial auf $U_{\{\alpha_2\}}$ operiert.

Damit sind alle für Lemma 2.40 benötigten Informationen gesammelt und wir fassen diese in den Tabellen 2.7 und 2.8 zusammen.

G	t^G	Sektion L^* in $C_G(t)$	$\lvert S\rvert$	Klasse von S
$\mathrm{PSL}_3(q)$	t_1	$\mathrm{SL}_2(q)$	q^3	2
$\mathrm{PSL}_4(q)$	t_2 t_2'	$\mathrm{SL}_2(q) \circ \mathrm{SL}_2(q)$ $\mathrm{PSL}_2(q^2)$	q^6	3
$\mathrm{PSL}_5(q)$	t_1 t_2	$\mathrm{SL}_4(q)$ $\mathrm{SL}_2(q) \times \mathrm{SL}_3(q)$	q^{10}	4
$\mathrm{PSU}_3(q)$	t_1	$\mathrm{SL}_2(q)$	q^3	2
$\mathrm{PSU}_4(q)$	t_2 t_2'	$\mathrm{SL}_2(q) \circ \mathrm{SL}_2(q)$ $\mathrm{PSL}_2(q^2)$	q^6	3
$\mathrm{PSU}_5(q)$	t_1 t_2	$\mathrm{SU}_4(q)$ $\mathrm{SU}_2(q) \times \mathrm{SU}_3(q)$	q^{10}	4
$\mathrm{PSp}_4(q)$	t_1 t_2, t_2'	$\mathrm{SL}_2(q) \circ \mathrm{SL}_2(q)$ $\mathrm{PSL}_2(q)$	q^4	3
$G_2(q)$	t_1	$C_2{}^{\cdot}(\mathrm{PSL}_2(q) \circ \mathrm{PSL}_2(q)).C_2$	q^6	3 (für $p = 3$) 5 (für $p > 3$)
${}^3D_4(q)$	t_2	$C_2{}^{\cdot}(\mathrm{PSL}_2(q^3) \circ \mathrm{PSL}_2(q)).C_2$	q^{12}	5

Tabelle 2.7: Konjugiertenklassen von t in G, Abschnitte L^* in $C_G(t)$ aus Table 4.5.1 in [GLS3], Ordnung von $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$ aus [Wil] und deren Nilpotenzklasse für einfache Gruppen G vom Lie-Typ vom sektionalen 2-Rang maximal 4 in ungerader Charakteristik p.

G	Levi-Untergruppe L	Bemerkung
$\mathrm{PSL}_3(q)$	$\mathrm{GL}_2(q)/C_{(q-1,3)}$	Zwei Kk von mpU (vgl. Abschnitt 3.3.3, letzter Absatz in [Wil, S. 47f])
$\mathrm{PSL}_4(q)$	$\mathrm{GL}_3(q)/C_{(q-1,4)}$ $(\mathrm{GL}_2(q) \times \mathrm{SL}_2(q))/C_{(4,q-1)}$	
$\mathrm{PSL}_5(q)$	$\mathrm{GL}_4(q)/C_{(q-1,5)}$ $(\mathrm{SL}_2(q) \times \mathrm{GL}_3(q))/C_{(5,q-1)}$	
$\mathrm{PSU}_3(q)$	$C_{q^2-1}/C_{(q+1,3)}$	Eine Kk von mpU (vgl. in [KlLi, S. 71]: Table 3.5.B, Block C_1, $j = 20$, Spalte V; für die Notation von P_m siehe S. 58, Zeile 30ff; für eine Erklärung zu Spalte V von Table 3.5.B siehe Abschnitt 3.2, S. 61ff.)
$\mathrm{PSU}_4(q)$	$\mathrm{GL}_2(q^2)/C_{(q+1,4)}$ $(C_{(q^2-1)} \times \mathrm{SU}_2(q))/C_{(4,q+1)}$	
$\mathrm{PSU}_5(q)$	$\mathrm{GL}_2(q^2)/C_{(q+1,5)}$ $(C_{(q^2-1)} \times \mathrm{SU}_3(q))/C_{(5,q+1)}$	
$\mathrm{PSp}_4(q)$	$\mathrm{SL}_2(q^3).C_{q-1}$ $\mathrm{SL}_2(q).C_{q^3-1}$	
${}^3D_4(q)$	$\mathrm{GL}_1(q) \circ \mathrm{SL}_2(q)$ $\mathrm{GL}_2(q)/C_2$	
$G_2(q)$	$\mathrm{GL}_2(q)$	Zwei Kk von mpU (vgl. Abschnit 4.3.5. und Table 4.1 in [Wil, S. 123ff, 127])

Tabelle 2.8: Isomorphietypen von Levi-Untergruppen L von einfachen Gruppen G vom Lie-Typ vom sektionalen 2-Rang maximal 4 in ungerader Charakteristik.

Abkürzungen: „Kk“ Konjugiertenklasse(n), „mpU“ maximal parabolische(n) Untergruppe(n), $(a,b) := \mathrm{ggT}(a,b)$

Lemma 2.37
Es gelten die Voraussetzungen 2.2 und 2.31. Gilt $q = 3$, so ist $G = \mathrm{PSU}_3(3)$ und G_α ist isomorph zum semidirekten Produkt einer Sylow 3-Untergruppe von G mit einer zyklischen Gruppe der Ordnung 8.

Beweis
Unter Verwendung der Table Of Marks Bibliothek [TOM] in [GAP] erhalten wir folgende Fixität-4-Operationen:
Die Gruppen $\mathrm{PSL}_3(3)$, $\mathrm{PSL}_4(3)$ und $G_2(3)$ weisen keine Fixität-4-Operationen auf. Die Gruppen $\mathrm{PSU}_4(3)$ und $\mathrm{PSp}_4(3)$ weisen jeweils eine Fixität-4-Operation mit zyklischen Punktstbailisatoren der Ordnung 5 auf. Da diese Ordnung jedoch ungerade ist, widerspricht das der Voraussetzung. Die Gruppe $\mathrm{PSU}_3(3)$ weist die in der Behauptung angegebene Operation auf.

Da nach Voraussetzung 2.31 $q \equiv 1$ modulo 4 für $\mathrm{PSU}_5(q)$ gilt, muss der Fall $G = \mathrm{PSU}_5(3)$ nicht untersucht werden. Es bleibt also noch zu zeigen, dass G weder

$\mathrm{PSL}_5(3)$ noch ${}^3D_4(3)$ ist.

Angenommen, es sei $G = {}^3D_4(3)$. Nach Table 4.5.1 in [GLS3] besitzt G genau eine Konjugiertenklasse von Involutionen. Nach Abschnitt 4.6.5 in [Wil, S. 144, Z. 9f] gilt $C \cong C_2{}^{\cdot}(\mathrm{PSL}_2(q^3) \times \mathrm{PSL}_2(q)).C_2$. Mit Lemma 2.1 wird dann $|G_\alpha|$ von $|\mathrm{PSL}_2(27) \times \mathrm{PSL}_2(3)| = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 13$ geteilt. Da $|G| = 2^6 \cdot 3^{12} \cdot 7^2 \cdot 13^2 \cdot 73$ ist, wird $|G_\alpha|$ mit Lemma 1.3 (*i*) sogar von $2^4 \cdot 3^4 \cdot 7^2 \cdot 13^2$ geteilt. Nach Theorem 4.3 in [Wil, S. 144] wird jedoch die Ordnung keiner maximalen Untergruppe von G durch $7^2 \cdot 13^2$ geteilt. Damit folgt $G_\alpha = G$, ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Angenommen, es sei $G = \mathrm{PSL}_5(3)$. Mit Table 4.5.1 in [GLS3] besitzt G genau zwei Konjugiertenklassen von Involutionen. Mit [GAP] ermitteln wir $|C| \in \{2^8 \cdot 3^4 \cdot 13,\ 2^9 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 13\}$. Ferner ist $|G| = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5 \cdot 11^2 \cdot 13$. Seien $S_\alpha \in \mathrm{Syl}_2(G_\alpha)$ und $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$ so, dass $t \in S_\alpha \leqslant S$ gilt. Es ist $C_\alpha \leqslant S_\alpha$ und mit Lemma 2.1 wird $|S_\alpha|$ von 2^6 geteilt. Nun gilt (d) oder (e) von Lemma 9 aus [BMW] und $|S_\alpha|$ wird deshalb von 2^7 geteilt. Da $S_\alpha \neq 1$ ist, gilt $Z(S) \cap S_\alpha \neq 1$. Insbesondere enthält S_α eine Involution $\hat{t}$ aus $Z(S)$. Es ist $S \leqslant C_G(\hat{t})$. Also ist mit oben $\left|C_G(\hat{t})\right| = 2^9 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 13$, wodurch $|G_\alpha|$ nun nach Lemma 1.3 (*iii*) auch von 5 geteilt wird.

Seien $T_\alpha \in \mathrm{Syl}_3(G_\alpha)$ und $T \in \mathrm{Syl}_3(G)$ so, dass $T_\alpha \leqslant T$ ist. Nach Lemma 2.1 ist 3^4 ein Teiler von $|T_\alpha|$. Ferner hat T Nilpotenzklasse 4 (siehe Bemerkung 2.36). Da $|T| = 3^{10}$ gilt, ist T insbesondere nicht von maximaler Klasse. Daher gilt Fall (d) oder (e) von Lemma 10 aus [BMW] und $|T_\alpha|$ wird nun von 3^9 geteilt. Insgesamt ist also $2^7 \cdot 3^9 \cdot 5 \cdot 13$ ein Teiler von $|G_\alpha|$ und T_α hat Index höchstens 3 in T.

Gilt $|T : T_\alpha| = 3$, so liefert uns Lemma 2.35 eine maximal parabolische Untergruppe M von G so, dass $O_3(M) \leqslant T_\alpha \leqslant G_\alpha$ ist. Die möglichen maximal parabolischen Untergruppen sind nach Bemerkung 2.36 und Abschnitt 3.3.3 in [Wil, S. 47, Z. 9f] isomorph zu ${C_3}^4 : \mathrm{GL}_4(3)$ (vom Index 11^2 in G) oder ${C_3}^6 : (\mathrm{SL}_2(3) \times \mathrm{GL}_2(3))$ (vom Index $10 \cdot 11^2$ in G). Die Ordnung letzterer Gruppe wird nicht von 5 geteilt, $|G_\alpha|$ jedoch schon. Dadurch ist $M \cong {C_3}^4 : \mathrm{GL}(4,3)$. Da $O_3(M) \leqslant G_\alpha$ ist, enthält G_α nach Lemma 1.3 (*iii*) eine Untergruppe von M vom Index höchstens 4 in M. Index 1 oder 3 können wir direkt ausschließen, da sonst $|\Omega| \in \{121, 3 \cdot 121\}$ und $|\Omega|$ ungerade ist, im Widerspruch zu Lemma 1.3. Also ist $T \leqslant G_\alpha$. Insgesamt gibt es mit Theorem 2.6.5 (c) in [GLS3] und mit dem Satz von Sylow vier G-Konjugiertenklassen von maximal parabolischen Untergruppen. Weil $T \leqslant G_\alpha$ ist, enthält G_α nun mit Theorem 2.6.5 (d) in [GLS3] und Lemma 1.3 (*iii*) Untergruppen vom Index höchstens 4 von jeder der vier nicht-konjugierten maximal parabolischer Untergruppen von G, die T enthalten. Dann ist $|G_\alpha|$ größer als die Ordnung der ordnungsgrößten maximal parabolischen Untergruppe von G. Da maximal parabolische Untergruppen mit Theorem 2.6.7 in [GLS3] maximale Untergruppen sind, folgt $G_\alpha = G$, ein Widerspruch. ∎

Bemerkung 2.38

Seien $G \cong \mathrm{PSU}_3(3)$ und $|\Omega| = 28$ wie in Lemma 2.37. Mit dem in Bemerkung 1.4 vorgestellten Algorithmus berechnen wir die Fixpunktanzahl von nichttrivialen Elementen von G auf Ω und notieren diese in der nachfolgenden Tabelle:

$x \in$	2A	3A	3B	4A	4C	6A	7A	8A	12A
$\lvert\mathrm{fix}_\Omega(x)\rvert$	4	1	1	4	0	1	0	2	1

Tabelle 2.9: Fixpunktanzahl der Elemente $x \in \mathrm{PSU}_3(3)^\#$ in der Operation von Lemma 2.40.

Lemma 2.39
Seien $q \geq 9$ eine 3-Potenz, $n \in \{2,3,4\}$, $\varepsilon \in \{1,-1\}$ und $K = \mathrm{SL}_n^\varepsilon(q)$. Dann besitzt K keine Untergruppe vom Index 3. Insbesondere gilt:
Gilt Voraussetzung 2.31, ist $q \geq 9$ eine 3-Potenz und ist $M \leqslant G$ eine maximal parabolische Untergruppe von G und $L \leqslant M$ eine Levi-Untergruppe, so besitzt L keine Untergruppe vom Index 3.

Beweis
Angenommen, die erste Behauptung sei falsch. Dann sei $U \lneqq K$ eine Untergruppe vom Index 3 in K. Mit dem Hauptsatz I.6.2 in [Hup1] gibt es einen Normalteiler $N \leqslant U \lneqq K$ von K derart, dass K/N isomorph zu einer Untergruppe von S_3 ist. Jedoch ist K eine quasi-einfache Gruppe und damit folgt $N \leqslant Z(K)$. Ferner ist $K/Z(K)$ einfach und nicht-abelsch, ein Widerspruch zu $K/N \cong \mathcal{S}_3$ und $N \leqslant Z(K)$. Daher gilt der erste Teil des Lemmas.

Nun zum zweiten Teil: Es gelte Voraussetzung 2.31. Seien $q \geq 9$ eine 3-Potenz, $M \leqslant G$ eine maximal parabolische Untergruppe von G und $L \leqslant M$ eine Levi-Untergruppe. Angenommen, es sei $X \leqslant L$ eine Untergruppe vom Index 3.

Seien $n \in \{3,4,5\}$ und $G = \mathrm{PSL}_n(q)$. Wir betrachten das Urbild $\widetilde{L}$ von L unter dem natürlichen Homomorphismus $\mathrm{SL}_n(q) \to G$. Dann ist $\widetilde{L} \cong \mathrm{GL}_{n-1}(q)$ oder es ist $n \in \{4,5\}$ und $\widetilde{L} = \mathrm{GL}_{n-2}(q) \times \mathrm{SL}_2(q)$ (siehe Tabelle 2.8). Seien $L_1, L_2 \leqslant \widetilde{L}$ die disjunkten Faktoren des Produkts (im ersten Fall ist $\widetilde{L} = L_1$). Da X Index 3 in L hat, hat $X \cap L_1$ Index höchstens 3 in L_1 und $X \cap L_2$ höchstens Index 3 in L_2. L_1 und L_2 sind lineare Gruppen von Dimension mindestens 2 oder trivial. Insbesondere finden wir quasi-einfache Untergruppen K_1 von L_1 und K_2 von L_2. Weil $\lvert\mathrm{GL}_n(q)/\mathrm{SL}_n(q)\rvert = q-1$ ist, hat $K_1 \cap X$ bzw. $K_2 \cap X$ Index höchsten 3 in K_1 bzw. K_2. Mit dem ersten Teil des Lemmas erhalten wir dann einen Widerspruch. Insbesondere hat dann L auch keine Untergruppe vom Index 3.

Ist $G = \mathrm{PSU}_3(q)$, so ist L zyklisch von Ordnung $q^2 - 1$ und wir sehen, dass L keine Untergruppe vom Index 3 besitzt, da q eine 3-Potenz ist. Seien $n \in \{4,5\}$ und $G = \mathrm{PSU}_n(q)$. Wir betrachten das Urbild $\widetilde{L}$ von L unter dem natürlichen Homomorphismus $\mathrm{SU}_n(q) \to G$. Dann ist $\widetilde{L} \cong \mathrm{GL}_2(q^2)$ oder $\widetilde{L} = \mathrm{SU}_{n-2}(q) \times C_{q^2-1}$ (siehe Tabelle 2.8). Seien $L_1, L_2 \leqslant \widetilde{L}$ die disjunkten Faktoren des Produkts (im ersten Fall ist $\widetilde{L} = L_1$). Wir sehen, dass $\mathrm{ggT}(3, \lvert L_2\rvert) = 1$ ist. Da X Index 3 in L hat, hat $X \cap L_1$ Index 3 in L_1. Das widerspricht jedoch dem ersten Teil des Lemmas, da L_1 quasi-einfach ist oder eine quasi-einfach Untergruppe vom Index q^2+1 enthält. Mit dem ersten Teil des Lemmas erhalten wir dann einen Widerspruch. Insbesondere hat dann L auch keine Untergruppe vom Index 3.

Die Fälle $G = \mathrm{PSp}_4(q)$ und $G = G_2(q)$ können mit ähnlichen Argumenten wie zuvor behandelt werden. Dabei wird der obige Übergang von L zu $\widetilde{L}$ obsolet. Die anderen Argumente bleiben gleich. Wir müssen noch $G = {}^3D_4(q)$ überprüfen. Sei zuerst $L \cong \mathrm{GL}_2(q)/C_2$. Da $|\mathrm{GL}_2(q)/\mathrm{SL}_2(q)| = q-1$ und $q \geq 9$ ist, hat L eine Untergruppe K isomorph zu $\mathrm{SL}_2(q)$. Nach Wahl muss $X \cap K$ Index 3 in K haben. Jedoch ist K quasi-einfach und wir erhalten einen Widerspruch mit dem ersten Teil des Lemmas. Also ist $L \cong \mathrm{GL}_1(q) \circ \mathrm{SL}_2(q) \cong C_{q-1} \circ \mathrm{SL}_2(q)$. Wir sehen, dass L wieder eine Untergruppe $K \cong \mathrm{SL}_2(q)$ enthält. Da $q-1$ und 3 teilerfremd sind, muss also $X \cap K$ Index 3 in K haben, ein erneuter Widerspruch mit Teil 1 des Lemmas. Damit ist alles bewiesen. ■

Lemma 2.40
Es gelten die Voraussetzungen 2.2 und 2.31. Dann gilt $q \leq 3$.

Beweis
Angenommen, die Behauptung sei falsch. Sei also $p^n = q > 3$.

Schritt 1: $|G_\alpha|$ *wird von p geteilt:*

Da $t \in G_\alpha$ nach Voraussetzung 2.2 vier Punkte in Ω fixiert, ist mit Lemma 2.1 schon $|C : C_\alpha| \in \{1,2,4\}$. Nach Table 4.5.1 in [GLS3] enthält C einen Abschnitt K isomorph zu einer endlichen Gruppe vom Lie-Typ oder einem Produkt mehrerer Lie-Typ-Gruppen über q und in Dimension mindestens 2 (siehe Tabelle 2.7 bzw. Bemerkung 2.36 für Details). Insbesondere ist dann p ein Teiler von $|C|$ und wegen Lemma 1.3 (*iii*) auch ein Teiler von $|G_\alpha|$, da p ungerade ist. □

Schritt 2: *Gilt $p \geq 5$, so enthält G_α eine Sylow p-Untergruppe von G und eine Untergruppe einer maximal parabolischen Untergruppe von G vom Index höchstens 4:*

Mit Schritt 1 und mit Lemma 1.3 (*i*) enthält G_α eine Sylow p-Untergruppe S von G. Ferner besitzt $S \leqslant G_\alpha$ eine Untergruppe U, deren Normalisator $N_G(U)$ eine maximal parabolische Untergruppe von G ist (siehe Theorem 2.6.5 (d) in [GLS3]). Mit Lemma 1.3 (*iii*) gilt $|N_G(U) : N_{G_\alpha}(U)| \leq 4$, wie behauptet. □

Schritt 3: *Gilt $p = 3$, so enthält G_α eine Sylow p-Untergruppe von G und eine Untergruppe einer maximal parabolischen Untergruppe von G vom Index höchstens 4 und verschieden von $p = 3$:*

Seien jetzt $p = 3$ und $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$ so, dass $|G_\alpha \cap S|$ maximal ist. Wir betrachten Lemma 10 in [BMW]. Mit Schritt 1 ist G_α keine $3'$-Gruppe, also gilt nicht (a) von Lemma 10 in [BMW]. Aufgrund der Ordnung von G ist $|S| \geq q^3 \geq 729 > 9$ mit [Wil] (siehe Tabelle 2.7 bzw. Bemerkung 2.36). Somit gilt auch Lemma 10 (b) in [BMW] nicht. Daher ist nun einer der übrigen Fälle (c), (d) oder (e) von Lemma 10 in [BMW] erfüllt. Mit Tabelle 2.7 bzw. Bemerkung 2.36 ist S nicht von maximaler Nilpotenzklasse, da $3^n = q > 3$ und somit $q \geq 9$ nach Voraussetzung gilt. Damit kann auch Lemma 10 (c) von [BMW] nicht eintreten und es gilt einer der Fälle (d) oder (e) aus dem Lemma.

Angenommen, es gilt Lemma 10 (d) von [BMW]. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ so, dass $|\Omega| = k \cdot |S| + 3 = 3 \cdot \left(k\frac{|S|}{3} + 1\right)$ gilt. Es ist $|S| \geq 729$ nach Tabelle 2.7. Da $k \cdot \frac{|S|}{3}$ ein

Vielfaches von 3 ist, wird $k \cdot \frac{|S|}{3} + 1$ nicht von 3 geteilt. Dann ist $|\Omega| = 3 \cdot \left(k\frac{|S|}{3} + 1\right)$ durch 3 und nicht durch 9 teilbar. Wegen $|\Omega| = \frac{|G|}{|G_\alpha|}$ enthält G_α nun eine Index 3 Untergruppe einer Sylow 3-Untergruppe von G. Nach Wahl von S gilt $|S : G_\alpha \cap S| = 3$. Mit Lemma 2.32 ist dann bereits G nicht isomorph zu $\mathrm{PSU}_3(q)$. Lemma 2.35 liefert uns eine maximal parabolische Untergruppe R von G so, dass $U := O_3(R) \leqslant S \cap G_\alpha$ gilt. Nun ist $|N_G(U) : N_{G_\alpha}(U)| = 3$ mit Lemma 1.3 (*iii*) und wegen $|S : G_\alpha \cap S| = 3$.

Sei jetzt $L \leqslant N_G(U)$ eine Levi-Untergruppe von $N_G(U)$ so, dass $|L \cap G_\alpha|$ maximal ist. Dann gilt $N_G(U) = U \cdot L$ und $U \cap L = 1$ nach Theorem 2.6.5 (g) in [GLS3]. Da $U \leqslant G_\alpha$ gilt, ist nach Wahl $L \cap G_\alpha$ eine Untergruppe vom Index 3 in L. Mit Lemma 2.39 erhalten wir einen Widerspruch. Daher gilt Lemma 10 (e) von [BMW]. Dann ist $S \leqslant G_\alpha$ und es existiert eine Untergruppe U von $S \leqslant G_\alpha$ so, dass $N_G(U)$ eine maximale parabolische Untergruppe ist (siehe Theorem 2.6.5 (d) in [GLS3]). Mit Lemma 1.3 (*iii*) und wegen $S \leqslant G_\alpha$ folgt $|N_G(U) : N_{G_\alpha}(U)| \in \{1, 2, 4\}$. □

Mit den Schritten 2 und 3 gibt es eine maximal parabolische Untergruppe R von G so, dass $R \cap G_\alpha$ Index höchstens 4 in R hat. Insbesondere enthält G_α eine Sylow p-Untergruppe S von G.

Seien $G \cong \mathrm{PSU}_3(q)$ und $M \leqslant G$ eine maximale Untergruppe von G so, dass $G_\alpha \leqslant M$ gilt. Nach den Schritten 2 und 3 gilt $R \cap G_\alpha \leqslant M$. Mit den Tabellen 2.7 und 2.8 und den Schritten 2 und 3 wird $|R \cap G_\alpha|$ von $\frac{q^3 \cdot (q^2-1)}{\mathrm{ggT}(4, q^2-1) \cdot \mathrm{ggT}(q+1, 3)}$ geteilt. Mit Theorem 6.5.3 in [GLS3] und Tabelle 2.8 gilt dann $R = M$ und G_α ist in R enthalten. Mit Table 4.5.1 in [GLS3] ist

$$|C| = |\mathrm{SL}_2(q)| \cdot \frac{q+1}{\mathrm{ggT}(3, q+1)} = \frac{q(q^2-1)(q+1)}{\mathrm{ggT}(3, q+1)}.$$

Nach Abschnitt 3.6.2 in [Wil, S. 67, Z. 36ff] folgt

$$R/O_p(R) \cong (\mathrm{GL}_1(q^2) \times \mathrm{SU}_1(q))/C_{\mathrm{ggT}(3,q+1)}.$$

Es sind $\mathrm{GL}_1(q^2)$ zyklisch von Ordnung $q^2 - 1$ und $\mathrm{SU}_1(q)$ trivial. Daher ist $R/O_p(R)$ zyklisch und hat die Ordnung $\frac{q^2-1}{\mathrm{ggT}(q+1,3)}$. Da $R/O_p(R)$ zyklisch und q ungerade ist, enthält R genau eine Klasse von Involutionen und es gilt $|C_R(t)| \leq q \cdot \frac{q^2-1}{\mathrm{ggT}(q+1,3)}$. Lemma 1.2 liefert $|\mathrm{fix}_\Omega(t)| \geq q + 1 > 4$, da $q > 3$ gilt. Das liefert einen Widerspruch zur erlaubten Fixpunktanzahl von t in Ω.

Dann ist G also einer der übrigen Gruppen aus Voraussetzung 2.31. Anhand der Tabelle 2.8 wissen wir, dass G mindestens zwei nicht-konjugierte maximal parabolische Untergruppen besitzt. Mit den Schritten 2 und 3 enthält G_α eine Sylow p-Untergruppe von G und mit dem Satz von Sylow gibt es dann Untergruppen $U, \widetilde{U} \leqslant S \leqslant G_\alpha$ so, dass $N_G(\widetilde{U})$ und $N_G(U)$ nicht-konjugierte maximal parabolische Untergruppen von G sind. Mit Lemma 1.3 (*iii*) gilt also

$$\left|N_G(\widetilde{U}) : N_{G_\alpha}(\widetilde{U})\right| \leq 4 \quad \text{und} \quad |N_G(U) : N_{G_\alpha}(U)| \leq 4.$$

Da ferner maximal parabolische Untergruppen mit Theorem 2.6.7 in [GLS3] maximale Untergruppen von G sind, folgt $G = G_\alpha$. Das liefert den finalen Widerspruch. ■

2.5 Beantwortung von Frage 1

Nun wurden alle Gruppen aus dem Main Theorem von [GoHa] überprüft. Die Ergebnisse der Lemmata aus diesem Kapitel fassen wir im nachfolgenden Satz zusammen. Jener liefert damit eine Antwort auf Frage 1 dieser Arbeit.

Satz 2.41
Seien G eine einfache und nicht-abelsche Gruppe sowie Ω eine Menge, auf der G transitiv, treu und mit Fixität 4 operiere. Weiter existiere eine Involution in G, die vier Punkte von Ω fixiere, und es sei $\alpha \in \Omega$. Dann gilt einer der folgenden Fälle:

(i) G *ist isomorph zu* $\mathrm{PSL}_2(8)$ *und*

(i.1) $|\Omega| = 254$ *und* G_α *ist zyklisch von Ordnung 2,*

(i.2) $|\Omega| = 84$ *und* $G_\alpha \cong \mathcal{S}_3$*,*

(i.3) $|\Omega| = 36$ *und* G_α *ist eine Diedergruppe der Ordnung 14 oder*

(i.4) $|\Omega| = 28$ *und* G_α *ist eine Diedergruppe der Ordnung 18.*

(ii) Es gibt eine ungerade Primzahlpotenz $q = p^f \geq 7$*,* G *ist isomorph zu* $\mathrm{PSL}_2(q)$ *sowie*

(ii.1) $q \equiv 1$ *modulo* 8*,* $|\Omega| = 2(q+1)$ *und* G_α *hat Index 2 im Normalisator einer Sylow* p*-Untergruppe von* G*,*

(ii.2) $q \equiv 1$ *modulo* 8*,* $|\Omega| = 2q(q+1)$ *und* G_α *ist zyklisch von Ordnung* $\frac{q-1}{4}$*,*

(ii.3) $q \equiv -1$ *modulo* 8*,* $|\Omega| = 2q(q-1)$ *und* G_α *ist zyklisch von Ordnung* $\frac{q+1}{4}$*,*

(ii.4) $q = 7$*,* $|\Omega| = 28$ *und* $G_\alpha \cong \mathcal{S}_3$*,*

(ii.5) $q = 9$*,* $|\Omega| = 60$ *und* $G_\alpha \cong \mathcal{S}_3$ *oder*

(ii.6) $q = 9$*,* $|\Omega| = 36$ *und* G_α *ist eine Diedergruppe von Ordnung 10.*

(iii) $G \cong \mathrm{PSU}_3(3)$*,* $|\Omega| = 28$ *und* G_α *ist der Normalisator einer Sylow* 3*-Untergruppe von* G *und hat Ordnung* $27 \cdot 8$*.*

(iv) $G \cong M_{11}$*,* $|\Omega| = 11$ *und* $G_\alpha \cong \mathrm{PSL}_2(11)$*.*

(v) $G \cong M_{12}$*,* $|\Omega| = 12$ *und* G_α *ist isomorph zu* M_{11}*.*

Beweis
Wegen Theorem 14 (b) und (d) in [BMW] hat G sektionalen 2-Rang maximal 4 oder G besitzt eine stark eingebettete Untergruppe. Mit dem Main Theorem in [GoHa] und Theorem 14 (b) in [BMW] ist dann G isomorph zu einer der Gruppen in (Lie-1), (Lie-2), (Alt) oder (Spo). (siehe Seite 24).

Die Lemmata 2.24, 2.30, 2.37 und 2.40 untersuchen die Gruppen aus dem Fall (Lie-1) und liefern die Aussagen in (*ii*) und (*iii*) des Satzes. Die Gruppen des Falls (Lie-2) werden in den Lemmata 2.19 und 2.21 bis 2.23 behandelt. Aus diesen Lemmata folgt Aussage (*i*) des Satzes. Die Alternierenden Gruppen aus dem Fall (Alt) treten wegen der Lemmata 2.3, 2.4 und 2.5 nicht auf. Die Sporadischen Gruppen des Falls (Spo) werden in den Lemmata 2.8, 2.10 und 2.12 bis 2.17 untersucht. Deren Ergebnisse stehen in den Aussagen (*iv*) und (*v*). ■

3 Transitive Operationen von Fixität höchstens 4 mit zyklischen Punktstabilisatoren

Mit der Beantwortung von Frage 1 dieser Arbeit wenden wir uns nun der Frage 2 zu. Für diese wollen wir treue Gruppenoperationen von Fixität höchstens 4 auf kompakten Riemannschen Flächen untersuchen. Wie bereits im ersten Kapitel dieser Arbeit beschrieben, zerfällt eine kompakte Riemannsche Fläche $\mathfrak{X}$ unter der treuen Wirkung einer Gruppe G in Bahnen. Wirkt G mit Fixität höchstens 4 auf $\mathfrak{X}$, so auch auf den G-Bahnen von $\mathfrak{X}$. Da wir mit Proposition III.3.1 in [Mir] wissen, dass für alle $\mathfrak{x} \in \mathfrak{X}$ der Punktstabilisator $G_{\mathfrak{x}}$ in G zyklisch ist, erarbeiten wir in diesem Kapitel transitive Operationen von einfachen und nicht-abelschen Permutationsgruppen in Fixität höchstens 4 und mit zyklischen Punktstabilisatoren. Für Fixität 2 und 3 können wir die Publikationen [MaW1, MaW2] des Projekts verwenden. Für Fixität 4 werden wir einige Operationen nachweisen und eine Vermutung aufstellen. Wir beobachten zunächst:

Lemma 3.1
Sei G eine einfache und nicht-abelsche Gruppe. Dann gibt es keine Menge Ω so, dass G auf einer nicht-regulären G-Bahn von Ω mit Fixität 1 operiert.

Beweis
Angenommen, das wäre falsch. Sei $\Delta \subseteq \Omega$ eine nicht-reguläre G-Bahn so, dass G mit Fixität 1 auf Δ operiert. Dann ist G nach Satz V.8.2 (a) in [Hup1] eine Frobeniusgruppe zu Δ. Das widerspricht der Einfachheit von G. ■

Voraussetzung 3.2
Sei G eine einfache, nicht-abelsche, transitive und nicht-reguläre Permutationsgruppe von einer Menge Δ. Für alle $\alpha \in \Delta$ sei der Punktstabilisator G_α zyklisch.

Lemma 3.3
Es gelte Voraussetzung 3.2. Ferner operiere G mit Fixität höchstens 3 auf Δ und sei $\alpha \in \Delta$ beliebig. Dann sind G, $|\Delta|$ und $|G_\alpha|$ wie in Tabelle 3.1.

G	$\lvert\Delta\rvert$	$\lvert G_\alpha\rvert$	*Fixität*	*Bemerkungen*
$\mathrm{PSL}_3(4)$	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 7$	5	2	
$\mathrm{PSL}_2(q)$	$q(q-1)$	$(q+1)/d$	2	$q \geq 4,\ d := \mathrm{ggT}(2, q-1)$
$\mathrm{PSL}_2(q)$	$q(q+1)$	$(q-1)/d$	2	$q \geq 4,\ d := \mathrm{ggT}(2, q-1)$
$\mathrm{Sz}(q)$	$q^2(q^2+1)$	$q-1$	2	$n \in \mathbb{N},\ q = 2^{2n+1}$

G	$\lvert\Delta\rvert$	$\lvert G_\alpha\rvert$	*Fixität*	*Bemerkungen*
$\mathcal{A}_7$	$2^3\cdot 3^2\cdot 5$	*7*	*3*	
$\mathcal{A}_8$	$2^6\cdot 3^2\cdot 5$	*7*	*3*	
M_{22}	$2^7\cdot 3^2\cdot 5\cdot 11$	*7*	*3*	
$\mathrm{PSL}_4(3)$	$2^7\cdot 3^6\cdot 5$	*13*	*3*	
$\mathrm{PSL}_4(5)$	$2^7\cdot 3^2\cdot 5^6\cdot 13$	*31*	*3*	
$\mathrm{PSU}_4(3)$	$2^7\cdot 3^6\cdot 5$	*7*	*3*	
$\mathrm{PSL}_3(q)$	$q^3(q-1)(q^2-1)$	$(q^2+q+1)/d$	*3*	$q\geq 2,\ d:=\mathrm{ggT}(3,q-1)$
$\mathrm{PSU}_3(q)$	$q^3(q+1)(q^2-1)$	$(q^2-q+1)/d$	*3*	$q\geq 3,\ d:=\mathrm{ggT}(3,q+1)$

Tabelle 3.1: Transitive, nicht-abelsche und einfache Permutationsgruppen G auf einer Menge Δ mit Fixität 2 oder 3 sowie zugehörige Punktstabilisatorordnungen $\lvert G_\alpha\rvert$ für ein $\alpha\in\Delta$.

Beweis
Da G nach Vorausetzung 3.2 nicht-regulär auf Δ operiert, ist die Fixität der Operation von G auf Δ mit Lemma 3.1 mindestens 2. Da G_α nach Voraussetzung 3.2 zyklisch ist, liefern die Theoreme 1.2 in [MaW1] und 1.1 (*ii*) in [MaW2] den Inhalt der Tabelle 3.1. ■

Bevor wir uns mit Fixität-4-Operationen beschäftigen, werden wir noch zwei Aussagen über einfache, nicht-abelsche, transitive und nicht-reguläre Permutationsgruppen von Fixität höchstens 3 beweisen, die wir in späteren Kapiteln benötigen werden. Für das nachfolgende Lemma über die Gruppen $\mathrm{PSL}_3(q)$ und $\mathrm{PSU}_3(q)$ für beliebige Primzahlpotenzen q verwenden wir die in [GLS3, S. 68f] benutzte Notation $\mathrm{PSL}_3^+(q)=\mathrm{PSL}_3(q)$ und $\mathrm{PSL}_3^-(q)=\mathrm{PSU}_3(q)$.

Lemma 3.4
Seien $q\geq 2$ eine Primzahlpotenz, $\varepsilon\in\{1,-1\}$, $G=\mathrm{PSL}_3^\varepsilon(q)$ sowie $d:=\mathrm{ggT}(q-\varepsilon,3)$. Ist U eine Untergruppe von G der Ordnung $d^{-1}(q^2+\varepsilon q+1)$, so sind $\lvert U\rvert$ und $\lvert G\rvert/\lvert U\rvert$ teilerfremd.

Beweis
Zunächst ist $\lvert G:U\rvert=q^3(q^2-1)(q-\varepsilon)$ und $\lvert U\rvert=d^{-1}(q^2+\varepsilon q+1)$ mit [Tay, S. 118]. Ferner gilt $\mathrm{ggT}(q,q^2+\varepsilon q+1)=1$. Da $q-\varepsilon$ ein Teiler von q^2-1 ist, genügt es

$$\mathrm{ggT}(q^2-1,d^{-1}(q^2+\varepsilon q+1))=1$$

zu zeigen. Wegen $q^2+\varepsilon q+1\equiv\varepsilon q+2$ modulo q^2-1 folgt

$$\mathrm{ggT}(q^2-1,q^2+\varepsilon q+1)=\mathrm{ggT}(q^2-1,\varepsilon q+2).$$

Da $(\varepsilon q-2)(\varepsilon q+2)+3=q^2-4+3=q^2-1$ und damit auch $q^2-1\equiv 3$ modulo $\varepsilon q+2$ gilt, folgt

$$\mathrm{ggT}(q^2-1,q^2+\varepsilon q+1)=\mathrm{ggT}(\varepsilon q+2,3)=\mathrm{ggT}(q-\varepsilon,3)=d\in\{1,3\}.$$

Falls nun $q-\varepsilon$ durch 9 teilbar ist, so gilt $d=3$ und $q^2+\varepsilon q+1 \equiv \varepsilon^2+\varepsilon^2+1 \equiv 3$ modulo 9. Ist $q-\varepsilon$ durch 3 und nicht durch 9 teilbar, so folgt $q \equiv 3+\varepsilon$ modulo 9. Insbesondere ist dann für jede Wahl von $\varepsilon \in \{1,-1\}$ schon $q^2+\varepsilon q+1 \equiv 3$ modulo 9. Somit gilt $\mathrm{ggT}(d^{-1}(q^2+\varepsilon q+1),3)=1$ für jede Wahl von q. Damit ist auch

$$\mathrm{ggT}\left(q^2-1,\tfrac{q^2+\varepsilon q+1}{d}\right)=1$$

für jede Wahl von q. Daraus folgt die Teilerfremdheit von $|U|$ und $|G:U|$. ∎

Lemma 3.5
Es gelte Voraussetzung 3.2. Ferner operiere G mit Fixität $k \leq 3$ auf Δ und es seien $\alpha \in \Delta$ und $U := G_\alpha$. Dann ist U^G die einzige G-Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen der Ordnung $|U|$. Ist $h \in G^\#$ so, dass $o(h)$ ein Teiler von $|U|$ ist, so ist $\langle h\rangle$ konjugiert zu einer Untergruppe von U und es gilt $|\mathrm{fix}_\Delta(h)|=k$.

Beweis
Mit Lemma 3.3 sind G, $|\Delta|$ und $|U|$ in Tabelle 3.1. Sei $h \in G^\#$ so, dass $o(h)$ ein Teiler von $|U|$ ist.

Falls G eine der Gruppen $\mathrm{PSL}_3(4)$, $\mathcal{A}_7$, $\mathcal{A}_8$, M_{22}, $\mathrm{PSL}_4(3)$, $\mathrm{PSL}_4(5)$ oder $\mathrm{PSU}_4(3)$ ist, sehen wir mit Tabelle 3.1, dass $|U|$ eine Primzahl und teilerfremd zu $|G:U|$ ist. Daher ist U eine Sylow-Untergruppe von G. Die Aussagen über die Anzahl der G-Konjugiertenklassen von zyklischen Untergruppen der Ordnung $|U|$ sowie, dass $\langle h\rangle$ zu einer Untergruppe von U konjugiert ist, folgt nun aus dem Satz von Sylow.

Für $\mathrm{PSL}_2(q)$ bzw. $\mathrm{Sz}(q)$ folgt die Aussage über die Anzahl der G-Konjugiertenklassen von zyklischen Untergruppen der Ordnung $|U|$ aus Satz II.8.5 (a) in [Hup1] bzw. Satz XI.3.10 (c) in [HuB3] und ebenso, dass $\langle h\rangle$ konjugiert zu einer Untergruppe von U ist. Wir müssen also diese Aussagen noch für $\mathrm{PSU}_3(q)$ und $\mathrm{PSL}_3(q)$ nachweisen.

Mit der Notation von $\mathrm{PSL}_3(q)=\mathrm{PSL}_3^+(q)$ und $\mathrm{PSU}_3(q)=\mathrm{PSL}_3^-(q)$ in [GLS3, S. 68f] seien $\varepsilon \in \{1,-1\}$, $G \cong \mathrm{PSL}_3^\varepsilon(q)$ sowie $d := \mathrm{ggT}(q-\varepsilon,3)$. Mit Lemma 3.4 sind $|U|$ und $|G|\,/\,|U|$ teilerfremd. Damit ist U eine Hall $\pi(U)$-Untergruppe von G und mit den Sätzen III.5.8 und III.5.6 in [Hup1] ist dann U^G die einzige G-Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen der Ordnung $|U|$. Weiter ist damit auch $\langle h\rangle$ konjugiert zu einer Untergruppe von U.

Für die Bestimmung der Fixpunktanzahl von nichttrivialen Elementen sei wieder G beliebig. Weiter sei $x \in U$ so, dass $U=\langle x\rangle$ gilt. Wir zeigen noch, dass $|\mathrm{fix}_\Delta(x)|=k$ gilt. Da U zyklisch ist, ist U damit keine Frobeniusgruppe. Falls $k=3$ gilt, sehen wir mit Tabelle 3.1, dass $|U|$ ungerade ist. Nun liefern Lemmata 2.5 in [MaW2] für $k=3$ und 2.15 in [MaW1] für $k=2$, dass U ein k-Punktstabilisator ist. Das bedeutet $|\mathrm{fix}_\Delta(x)|=k$. Insbesondere ist auch für alle nichttrivialen Potenzen $x^j \neq 1_G$ von x mit $j \in \mathbb{N}$ schon $\left|\mathrm{fix}_\Delta(x^j)\right|=k$. ∎

Mit Lemma 3.5 ist alles gezeigt, was wir in späteren Kapiteln für Transitive Operationen von Fixität höchstens 3 und mit zyklischen Punktstabilisatoren benötigen. Nun konzentrieren wir uns auf Gruppenwirkungen von Fixität 4 und werden zeigen, dass die Tripel $(G, |\Delta|, |G_\alpha|)$ in Tabelle 3.2 Beispiele für transitive und treue Fixität-4-Operationen von nicht-abelschen und einfachen Gruppen G auf einer Menge Δ und mit zyklischen Punktstabilisatoren sind.

Nr.	G	$\|\Delta\|$	$\|G_\alpha\|$	Bemerkungen
1	$\mathrm{PSL}_2(8)$	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$	2	
2	$\mathrm{PSU}_4(3)$	$2^7 \cdot 3^6 \cdot 7$	5	
3	$\mathcal{A}_7$	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$	5	
4	M_{11}	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 11$	5	
5	M_{22}	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$	5	
6	J_1	$2^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$	15	
7	$\mathrm{PSL}_2(q)$	$2q(q+1)$	$(q-1)/4$	$q \geq 7$, $q \equiv 1 \mod 4$
8	$\mathrm{PSL}_2(q)$	$2q(q-1)$	$(q+1)/4$	$q \geq 7$, $q \equiv -1 \mod 4$
9	$\mathrm{PSp}_4(q)$	$q^4(q^2-1)^2$	$(q^2+1)/d$	$q \geq 3$, $d = \mathrm{ggT}(q^2-1, 2)$
10	$\mathrm{P}\Omega_8^-(q)$	$q^{12}(q^2-1)(q^4-1)(q^6-1)$	$(q^4+1)/d$	$q \geq 2$, $d = \mathrm{ggT}(q^4+1, 2)$
11	$\mathrm{Sz}(q)$	$q^2(q-1)(q-2r+1)$	$q+2r+1$	$n \in \mathbb{N}$, $r = 2^n$, $q = 2r^2$
12	$\mathrm{Sz}(q)$	$q^2(q-1)(q+2r+1)$	$q-2r+1$	$n \in \mathbb{N}$, $r = 2^n$, $q = 2r^2$
13	${}^2G_2(q)$	$2q^3(q^3+1)$	$(q-1)/2$	$n \in \mathbb{N}$, $q = 3^{2n+1}$
14	${}^3D_4(q)$	$q^{12}(q^6-1)(q^4+q^2+1)(q^2-1)$	q^4-q^2+1	$q \geq 2$

Tabelle 3.2: Transitive, nicht-abelsche und einfache Permutationsgruppen G auf einer Menge Δ mit Fixität 4 sowie zugehörige Punktstabilisatorordnungen $|G_\alpha|$ für ein $\alpha \in \Delta$.

Um zu zeigen, dass die Tripel $(G, |\Delta|, |G_\alpha|)$ in Tabelle 3.2 Beispiele für transitive Fixität-4-Operationen von G auf einer Menge Δ sind, müssen wir die Fixpunktanzahl von Gruppenelementen auf Δ bestimmen. Wir erinnern daher an Lemma 1.2 und beweisen nachfolgend zunächst einen Spezialfall von jenem Lemma mit zyklischen Punktstabilisatoren. Ein ähnliches Resultat kann in Remark 3.2 in [MaVö] nachgelesen werden.

Korollar 3.6
Seien $U \leqslant G$ zyklisch und $g \in G^\#$. Gibt es ein $h \in G$ so, dass $g \in U^h$ ist, dann gilt $N_G(U^h) \leqslant N_G(\langle g \rangle)$ und $\left|\mathrm{fix}_{G/U}(g)\right| = \left|N_G(\langle g \rangle) : U^h\right|$. Andernfalls ist $\left|\mathrm{fix}_{G/U}(g)\right| = 0$.

Beweis
Falls es kein $h \in G$ gibt so, dass $g \in U^h$ gilt, so folgt automatisch $\left|\mathrm{fix}_{G/U}(g)\right| = 0$ mit Lemma 1.2. Seien also $X := \langle g \rangle$ und $h \in G$ so, dass $g \in U^h$ ist. Da U^h zyklisch und $g \in U^h$ ist, ist X charakteristisch in U^h und es gilt $U^h \leqslant C_G(g) \leqslant N_G(X)$, $N_G(U^h) \leqslant N_G(X)$ sowie $X^G \cap U^h = X^{(U^h)}$. Da für alle $y \in G$ die Operation von G

auf G/U äquivalent zur Operation von G auf G/U^y ist, folgt mit Lemma 1.2 schon $\left|\mathrm{fix}_{G/U}(g)\right| = |N_G(X) : N_{U^h}(X)| = \left|N_G(X) : U^h\right|$. ■

Lemma 3.7
Sei G eine transitive, einfache und nicht-abelsche Permutationsgruppe auf einer Menge Δ. Seien $\alpha \in \Delta$ sowie G_α zyklisch und ferner gelte einer der folgenden Fälle:

(i) $G \cong \mathrm{PSL}_2(8)$ *und* $|G_\alpha| = 2$,

(ii) G *ist isomorph zu einer der Gruppen* $\mathrm{PSU}_4(3)$, $\mathcal{A}_7$, M_{11} *oder* M_{22} *und* $|G_\alpha| = 5$,

(iii) $G \cong J_1$ *und* $|G_\alpha| = 15$ *oder*

(iv) *es gibt ein* $\varepsilon \in \{1, -1\}$ *und eine ungerade Primzahlpotenz* $q \geq 7$ *so, dass* $q \equiv \varepsilon$ *modulo 4,* $G \cong \mathrm{PSL}_2(q)$ *und* $|G_\alpha| = \frac{q-\varepsilon}{4}$ *gilt.*

Dann operiert G mit Fixität 4 auf Δ und G besitzt nur genau eine Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen der Ordnung $|G_\alpha|$.

Ist $h \in G^\#$ so, dass $o(h)$ ein Teiler von $|G_\alpha|$ ist, dann ist h konjugiert zu einer Untergruppe von G_α. Insbesondere hat jedes nichttriviale Element von G genau null oder vier Fixpunkte in Δ.

Beweis
Die Aussage über die Anzahl der G-Konjugiertenklassen der zyklischen Untergruppen von Ordnung $|G_\alpha|$ folgt für die nicht-generischen Fälle $\mathrm{PSL}_2(8)$, $\mathrm{PSU}_4(3)$, $\mathcal{A}_7$, M_{11}, M_{22} und J_1 mittels Charaktertafel der jeweiligen Gruppe in [Atl]. Für den generischen Fall $\mathrm{PSL}_2(q)$ für eine ungerade Primzahlpotenz $q \geq 7$ liefert das Satz II.8.5 in [Hup1].

Wir müssen noch zeigen, dass G mit Fixität 4 auf Δ operiert, wenn G und G_α wie in einem der Fälle (i) bis (iv) des Lemmas sind, und dass jedes Element $h \in G^\#$, für das $o(h)$ ein Teiler von $|G_\alpha|$ ist, in einem G-Konjugierten von G_α enthalten ist. Wegen der Anzahl der G-Konjugiertenklassen von zyklischen Untergruppen der Ordnung G_α gibt es bis auf äquivalente Operationen immer nur eine Wirkung von G auf Δ, die zu untersuchen ist.

Seien $G \cong \mathrm{PSL}_2(8)$ und G_α zyklisch von Ordnung 2 wie im Fall (i) des Lemmas. Mit Lemma 2.19 operiert dann G mit Fixität 4 auf Δ. Da G_α zyklisch von Ordnung 2 ist, hat mit der Charaktertafel von G in [Atl] nun jede Involution von G genau vier Fixpunkte in Δ und alle anderen nichttrivialen Elemente von G fixieren keine Punkte von Δ.

Sind G und G_α wie im Fall (iv) des Lemmas, so haben wir im Lemma 2.26 gezeigt, dass G mit Fixität 4 auf Δ operiert und dass jedes Element $x \in G_\alpha^\#$ genau vier Punkte in Δ fixiert. Sind die Bezeichnungen wie im Fall (iv) des Lemmas und ist $h \in G^\#$ so, dass $o(h)$ ein Teiler von $|G_\alpha| = \frac{q-\varepsilon}{4}$ ist, so ist $o(h)$ teilerfremd zu q und $\frac{q+\varepsilon}{2}$. Mit Satz II.8.5 in [Hup1] ist jetzt $\langle h \rangle$ zu einer Untergruppe von G_α konjugiert.

Seien jetzt G und G_α wie im Fall (*ii*) oder (*iii*) des Lemmas. Mit 4.1.1 in [KuSt] ist die Operation von G auf Δ äquivalent zur Operation von G auf der Menge der Rechtsnebenklassen von G_α. Da wir Korollar 3.6 anwenden wollen, nutzen wir diese Äquivalenz aus und schreiben direkt $|\mathrm{fix}_\Delta(g)|$ anstelle von $\left|\mathrm{fix}_{G/G_\alpha}(g)\right|$ für alle $g \in G^\#$. Wir werden zunächst den Index $|N_G(G_\alpha) : N_{G_\alpha}(G_\alpha)| = |N_G(G_\alpha) : G_\alpha|$ bestimmen und im Anschluss die Fixpunkte von nichttrivialen Elementen von G zählen. Ist $g \in G^\#$ so, dass $o(g)$ ein Teiler von $|G_\alpha|$ ist, so gibt es kein $h \in G$ derart, dass $g \in G_\alpha^h$ gilt. Mit Korollar 3.6 folgt dann $|\mathrm{fix}_\Delta(g)| = 0$. Für die Anzahl der Fixpunkte von nichttrivialen Elementen von G in Δ werden wir also nur diejenigen Elemente $g \in G^\#$ untersuchen, für die $o(g)$ ein Teiler von $|G_\alpha|$ ist.

Seien zuerst $G \cong J_1$ und $|G_\alpha| = 15$ wie im Fall (*iii*) des Lemmas. Nach [Atl] ist $N_G(G_\alpha)$ eine maximale Untergruppe von G und hat Ordnung 60. Daher gilt schon $|N_G(G_\alpha) : G_\alpha| = 4$.

Sei jetzt $g \in G^\#$ so, dass $o(g)$ ein Teiler von $|G_\alpha|$ ist. Dann hat g Ordnung 3, 5 oder 15 und mit der Charaktertafel von G in [Atl] gibt es nur jeweils eine Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen der Ordnung 3, 5 und 15 von G. Wieder mit [Atl] gilt $|N_G(\langle g\rangle)| = 60$. Korollar 3.6 liefert dann $N_G(\langle g\rangle) = N_G(G_\alpha)$ und $|\mathrm{fix}_\Delta(g)| = 4$.

Seien jetzt G und $|G_\alpha| = 5$ wie im Fall (*ii*) des Lemmas. Zunächst gilt

$$|C_G(G_\alpha)| = |G_\alpha| = 5$$

mit den Charaktertafeln von $\mathrm{PSU}_4(3)$, $\mathcal{A}_7$, M_{11} und M_{22} in [Atl]. Daher folgt $C_G(G_\alpha) = G_\alpha$. Ferner ist $N_G(G_\alpha)/C_G(G_\alpha)$ isomorph zu einer Untergruppe von $\mathrm{Aut}(G_\alpha)$. Da $G_\alpha = C_G(G_\alpha)$ gilt und G_α zyklisch von Ordnung 5 ist, folgt

$$|N_G(G_\alpha) : G_\alpha| \in \{1, 2, 4\}.$$

Wir erinnern daran, dass G nur eine Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen der Ordnung $|G_\alpha| = 5$ besitzt.

Sei $G \cong \mathcal{A}_7$ oder $G \cong M_{11}$. Dann gibt es mit der Liste der Konjugiertenklassen von maximalen Untergruppen von G in [Atl] eine Untergruppe $M \leqslant G$ so, dass $G_\alpha \leqslant M$ und $M \cong \mathcal{S}_5$ gilt. Mit der Liste der M-Konjugiertenklassen der maximalen Untergruppen von M in [Atl] ist $N_M(G_\alpha)$ eine maximale Untergruppe von M und hat Ordnung 20. Daher folgt $|N_M(G_\alpha) : G_\alpha| = 4$. Da $N_M(G_\alpha) \leqslant N_G(G_\alpha)$ sowie $|N_M(G_\alpha) : G_\alpha| = 4$ und $|N_G(G_\alpha) : G_\alpha| \leq 4$ gilt, folgt $N_M(G_\alpha) = N_G(G_\alpha)$. Das liefert $|N_G(G_\alpha) : G_\alpha| = 4$.

Sei nun $G \cong M_{22}$ oder $G \cong \mathrm{PSU}_4(3)$. Mit der Liste der G-Konjugiertenklassen von maximalen Untergruppen von G in [Atl] gibt es eine Untergruppe $M \leqslant G$ so, dass $G_\alpha \leqslant M$ und $M \cong \mathcal{A}_7$ gilt. Da $C_G(G_\alpha) = G_\alpha$, $|N_M(G_\alpha)| = 20$ sowie $|N_G(G_\alpha) : G_\alpha| \in \{1, 2, 4\}$ bereits gezeigt wurde, folgt wie zuvor die Gleichheit von $N_G(G_\alpha)$ und $N_M(G_\alpha)$ sowie $|N_G(G_\alpha) : G_\alpha| = 4$.

Seien wieder G isomorph zu $\mathcal{A}_7$, M_{11}, M_{22} oder $\mathrm{PSU}_4(3)$ und $g \in G^\#$ so, dass $o(g)$ ein Teiler von $|G_\alpha|$ ist. Da G_α Ordnung 5 hat, folgt $o(g) = 5$ und g ist konjugiert zu einem Erzeuger von G_α mit [Atl]. Korollar 3.6 liefert dann $N_G(\langle g\rangle) = N_G(G_\alpha)$ und $|\mathrm{fix}_\Delta(g)| = 4$. ∎

Lemma 3.8
Seien $n \in \mathbb{N}$, $r := 2^n$, $q := 2r^2$ und $G \cong \mathrm{Sz}(q)$. Weiter seien $\alpha := q - 2r + 1$, $\beta := q + 2r + 1$ und $\gamma \in \{\alpha, \beta\}$. Dann besitzt G eine zyklische Untergruppe U_γ der Ordnung γ und genau eine Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen der Ordnung γ. Ferner operiert G auf der Menge der Nebenklassen von U_γ mit Fixität 4.

Ist $h \in G^{\#}$ so, dass $o(h)$ ein Teiler von γ ist, dann ist $\langle h \rangle$ konjugiert zu einer Untergruppe von U_γ in G und h hat vier Fixpunkte in G/U_γ.

Beweis
Wir verwenden Theorem XI.3.10 in [HuB3]. Die Existenz von U_γ folgt aus Teil (a) des Theorems. Mit Teil (b) ist $|N_G(U_\gamma) : U_\gamma| = 4$ und wegen Teil (c) gibt es nur eine G-Konjugiertenklasse von Untergruppen isomorph zu U_γ. Wir müssen noch Fixpunkte der nichttrivialen Elementen von G zählen. Dazu zeigen wir zunächst:

Schritt 1: *Es ist U_γ eine Hall $\pi(U_\gamma)$-Untergruppe von G:*

Wir müssen zeigen, dass $|U_\gamma|$ und $\frac{|G|}{|U_\gamma|}$ teilerfremd sind. Mit der Ordnungsformel für G in [Wil, S. 116] gilt zunächst $|G| = q^2(q^2+1)(q-1)$. Ferner ist

$$\gamma \in \{\alpha, \beta\} = \{q^2 - 2r + 1, q^2 + 2r + 1\}$$

nach Voraussetzung und es gilt $\alpha \cdot \beta = (q^2 - 2r + 1)(q^2 + 2r + 1) = q^2 + 1$. Weiterhin ist $\mathrm{ggT}(q^2+1, q) = 1$ und damit auch $\mathrm{ggT}(\gamma, q) = 1$. Ferner gilt

$$q^2 + 1 \equiv q^2 - 1 + 2 \equiv (q+1)(q-1) + 2 \equiv 2 \mod q - 1.$$

Da q gerade ist, folgt $\mathrm{ggT}(q^2+1, q-1) = \mathrm{ggT}(q-1, 2) = 1$. Weiterhin gilt auch

$$q^2 + 2r + 1 \equiv q^2 - 2r + 1 + 4r \equiv 4r \equiv 2^{n+2} \mod q^2 - 2r + 1.$$

Aus $\mathrm{ggT}(\gamma, 2) = 1$ folgt also $\mathrm{ggT}(\alpha, \beta) = 1$. Nun haben wir $\mathrm{ggT}(\gamma, |G|/\gamma) = 1$ gezeigt. Damit ist U_γ eine Hall $\pi(U_\gamma)$-Untergruppe von G. □

Schritt 2: *Die nichttrivialen Elemente von G fixieren genau null oder vier Punkte in G/U_γ:*

Sei $g \in G^{\#}$ beliebig. Sind $o(g)$ und γ teilerfremd, so gibt es mit Schritt 1 kein $h \in G$ so, dass $g \in U_\gamma^h$ ist. Dann folgt mit Korollar 3.6 schon $\left|\mathrm{fix}_{G/U_\gamma}(g)\right| = 0$. Sei also $\mathrm{ggT}(o(g), \gamma) \neq 1$. Da γ und $\frac{|G|}{\gamma}$ teilerfremd sind mit Schritt 1, wird γ von $o(g)$ geteilt. Mit Theorem XI.3.10 in [HuB3] gibt es dann ein $h \in G$ so, dass $g \in U_\gamma^h$ gilt. Mit Korollar 3.6 gilt nun $N_G(U_\gamma^h) \leqslant N_G(\langle g \rangle)$ und $\left|\mathrm{fix}_{G/U_\gamma}(g)\right| = \left|N_G(\langle g \rangle) : U_\gamma^h\right|$. Weil $N_G(U_\gamma)$ mit Theorem 4.1 in [Wil, S. 117] (für $q > 8$) und [Atl, S. 28] (für $q = 8$) eine maximale Untergruppe von G ist, folgt $N_G(U_\gamma^h) = N_G(\langle g \rangle)$. Damit gilt dann $\left|\mathrm{fix}_{G/U_\gamma}(g)\right| = 4$. ■

Lemma 3.9
Seien $n \in \mathbb{N}$, $q := 3^{2n+1}$, $G \cong {}^2G_2(q)$ und $\alpha := \frac{q-1}{2}$. Dann besitzt G eine zyklische Untergruppe U der Ordnung α. Ferner operiert G auf der Menge der Nebenklassen von U mit Fixität 4 und U^G ist die einzige G-Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen der Ordnung α. Ist $h \in G^{\#}$ so, dass $o(h)$ ein Teiler von $|U|$ ist, dann ist $\langle h \rangle$ konjugiert zu einer Untergruppe von U in G und h hat vier Fixpunkte in G/U.

Beweis
Mit Theorem 4.2.(ii) in [Wil, S. 138] seien M eine maximale Untergruppe von G so, dass M isomorph zu $C_2 \times \mathrm{PSL}_2(q)$ ist, sowie $M_0 \leqslant M$ mit $M_0 \cong \mathrm{PSL}_2(q)$. Da q gerade ist, gibt es mit Satz II.8.3 in [Hup1] Elemente der Ordnung $\alpha = \frac{q-1}{2}$ in M_0 und damit auch in G. Daher sei $U \leqslant G$ zyklisch von Ordnung α und so, dass $U \leqslant M_0$ gilt.

<u>Schritt 1:</u> *U ist eine Hall $\pi(U)$-Untergruppe von G:*

Es ist $\alpha = \frac{q-1}{2}$ ungerade, da $q = 3^{2n+1} = 3^{2n} \cdot 3 \equiv 1 \cdot (-1)$ modulo 4 und damit $q-1 \equiv -2 \equiv 2$ modulo 4 gilt. Ferner ist $\frac{|G|}{|\alpha|} = 2q^3(q^3+1)$ mit [Wil, S. 137] und es gilt $\mathrm{ggT}(q, q-1) = 1$. Weiterhin folgt

$$\begin{aligned} q^3+1 &\equiv q^2(q-1)+q^2+1 \equiv q^2+1 \mod q-1 \\ &\equiv q(q-1)+q+1 \equiv q+1 \equiv 2 \mod q-1. \end{aligned}$$

Damit gilt $\mathrm{ggT}\left(q^3+1, \frac{q-1}{2}\right) = \mathrm{ggT}\left(\frac{q-1}{2}, 2\right) = 1$, da $\frac{q-1}{2}$ ungerade ist. Jetzt sind α und $|G|/\alpha$ teilerfremd und U ist eine Hall $\pi(U)$-Untergruppe von G. □

Da U zyklisch von Ordnung α und mit Schritt 1 eine Hall-Untergruppe von G ist, folgt mit den Sätzen III.5.8 und III.5.6 in [Hup1] dann, dass alle zyklischen Untergruppen von G von Ordnung α in G konjugiert sind.

<u>Schritt 2:</u> *G operiert mit Fixität 4 auf G/U per Rechtsmultiplikation:*

Sei $x \in U^{\#}$ ein Erzeuger von U. Nach Theorem 1.2 in [MaW1] operiert M_0 mit Fixität 2 auf der Menge der M_0-Nebenklassen von U. Ferner gilt $|N_{M_0}(U) : U| = 2$ und $N_{M_0}(U)$ ist eine Diedergruppe. Da M ein direktes Produkt von M_0 mit einer zyklischen Untergruppe der Ordnung 2 ist, folgt $|N_M(U) : U| = 4$.

Angenommen, es gilt $N_G(U) \neq N_M(U)$. Da G einfach und nicht-abelsch ist, gibt es dann eine andere maximale Untergruppe $M_2 \leqslant G$ so, dass $N_G(U) \leqslant M_2$ ist. Ferner folgt $U, N_M(U) \leqslant M_2$ und damit wird $|M_2|$ von $4\alpha = 2(q-1)$ geteilt. Aus Ordnungsgründen kann M_2 nicht isomorph zu einer der Gruppen aus den Fällen (i) und (iii) bis (vi) aus Theorem 4.2 in [Wil, S. 138] sein, da keine dieser Gruppen eine durch 4α teilbare Ordnung besitzt. Daher ist nur $M_2 \cong C_2 \times \mathrm{PSL}_2(q)$ wie im Fall (ii) dieses Theorems möglich und dort ist $N_{M_2}(U) = N_G(U) = N_M(U) \cong D_{4\alpha}$. Daher gilt $|N_G(U) : U| = 4$.

Sei jetzt $g \in G^{\#}$ beliebig. Ist $o(g)$ kein Teiler von $|U|$, so ist g in keinem G-Konjugierten von U enthalten und es folgt $\left|\mathrm{fix}_{G/U}(g)\right| = 0$ mit Korollar 3.6. Sei also $o(g)$

ein Teiler von U. Da U nach Schritt 1 eine Hall $\pi(U)$-Untergruppe von G ist, gibt es ein $h \in G$ so, dass $g \in U^h$ gilt. Wieder mit Korollar 3.6 ist dann $N_G(U^h) \leqslant N_G(\langle g \rangle)$ und $\left|\mathrm{fix}_{G/U}(g)\right| = \left|N_G(\langle g \rangle) : U^h\right|$. Wir zeigen noch, dass $N_G(U^h) = N_G(\langle g \rangle)$ gilt:

Da G einfach ist, sei $M_3 \leqslant G$ eine maximale Untergruppe so, dass $N_G(\langle g \rangle) \leqslant M_3$ gilt. Ferner ist $N_G(U^h) \leqslant M_3$. Wie bereits zuvor gezeigt wurde, ist dann M_3 isomorph zu M und insbesondere gilt $N_{M_3}(U^h) = N_G(U^h)$. Das bedeutet $N_G(\langle g \rangle) = N_{M_3}(\langle g \rangle)$.

Es ist $o(g)$ ein Teiler von $\alpha = \frac{q-1}{2}$. Mit den Sätzen II.8.3, II.8.5 und II.8.27 in [Hup1] gilt nun $|N_{M_3}(\langle g \rangle)| = 2 \cdot |D_{2\alpha}| = 4\alpha = \left|N_G(U^h)\right|$, da $q \geq 27$ und α stets ungerade ist. Damit folgt $N_G(\langle g \rangle) = N_G(U^h)$ und insbesondere

$$\left|\mathrm{fix}_{G/U}(g)\right| = \left|N_G(U^h) : U^h\right| = 4.$$

Damit operiert G mit Fixität 4 auf G/U. ■

Lemma 3.10
Seien $q \geq 2$ eine Primzahlpotenz, $G \cong {}^3D_4(q)$ und $\alpha := q^4 - q^2 + 1$. Dann besitzt G eine zyklische Untergruppe U der Ordnung α und G hat nur eine Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen der Ordnung α. Ferner operiert G auf G/U mit Fixität 4. Ist $h \in G^\#$ so, dass $o(h)$ ein Teiler von $|U|$ ist, dann ist $\langle h \rangle$ konjugiert zu einer Untergruppe von U in G und h hat vier Fixpunkte in G/U.

Beweis
Nach Table I und II in [Kle, S. 184f] besitzt G Elemente der Ordnung α. Sei also U wie in der Voraussetzung. Mit dem Hauptsatz in [Kle, S. 182] hat $N_G(U)$ Ordnung 4α und ist eine maximale Untergruppe in G. Ferner gilt $|N_G(U) : U| = 4$ und der Hauptsatz in [Kle] liefert die Aussage über die Anzahl der G-Konjugiertenklassen von zyklischen Untergruppen der Ordnung α. Wir zeigen als nächstes, dass G mit Fixität 4 auf der Menge der Rechtsnebenklassen von U operiert.

Seien $g \in G^\#$ und $h \in G$ so, dass $g \in U^h$ gilt. Weil $N_G(U^h)$ mit dem Hauptresultat in [Kle] eine maximale Untergruppe von G ist, folgt $N_G(U^h) = N_G(\langle g \rangle)$ und $\left|\mathrm{fix}_{G/U}(g)\right| = 4$ mit Korollar 3.6. Damit operiert G mit Fixität 4 auf der Menge der Rechtsnebenklassen von U.

Sei $g \in G^\#$ so, dass $o(g)$ ein Teiler von $|U| = q^4 - q^2 + 1$ ist. Mit [Wil, S. 142] sehen wir, dass $|U|$ und $|G : U| = q^{12}(q^6-1)(q^4+q^2+1)(q^2-1)$ teilerfremd sind und damit U eine Hall $\pi(U)$-Untergruppe von G ist. Insbesondere ist dann $\langle g \rangle$ konjugiert zu einer Untergruppe von U. ■

Bis auf Gruppen aus den unendlichen Serien $\mathrm{PSp}_4(q)$ und $\mathrm{P}\Omega_8^-(q)$ haben wir schon die in Tabelle 3.2 angegebenen Beispiele auf Fixität 4 überprüfen können. Für diese Gruppen aus den unendlichen Familien der symplektischen und orthogonalen Gruppen müssen wir uns zunächst mit Operationen einer anderen unendlichen Serie beschäftigen.

Lemma 3.11
Seien p eine Primzahl, $n \in \mathbb{N}$, $q := p^n \geq 4$ und $d := \mathrm{ggT}(q-1, 2)$. Falls $p = 2$ gilt, sei zusätzlich n gerade. Weiter sei $G \cong \mathrm{PSL}_2(q).C_2$. Dann gibt es eine zyklische Untergruppe U von G der Ordnung $\alpha := \frac{q+1}{d}$. Ferner operiert G mit Fixität 4 auf G/U und G hat nur eine Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen der Ordnung α.

Beweis
Sei $M := G'$. Da $q \geq 4$ gilt, ist G fast einfach und damit $M \cong \mathrm{PSL}_2(q)$. Die Faktorgruppe G/M besteht aus Diagonal-, Körper- oder Diagonalkörperautomorphismen (vgl. Abschnitt 3.3.4 und Theorem 3.2 in [Wil, S. 48ff]). Falls $p = 2$ ist, so besteht G/M nur aus Körperautomorphismen (siehe Theorem 3.2 in [Wil, S. 50]).[1]

Mit Satz II.8.4 in [Hup1] gibt es Elemente der Ordnung α in M. Daher sei U wie in der Voraussetzung. Mit demselbem Satz ist $N_M(U)$ eine Diedergruppe von Ordnung 2α und je zwei verschiedene M-Konjugierte von U haben einen trivialen Schnitt. Mit Satz II.8.5 in [Hup1] gibt es nur genau eine M-Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen der Ordnung α.

Sei jetzt $\Delta := U^G$. Dann operiert G per Konjugation schon transitiv und nichtregulär auf Δ. Ferner sind alle Elemente von Δ in M enthalten, da M ein Normalteiler von G ist und $U \leqslant M$ gilt. Daher operiert auch M auf Δ transitiv mit Satz II.8.5 in [Hup1]. Ist $V \in \Delta$, so ist $N_G(V)$ der zugehörige Punktstabilisator in der Operation von G auf Δ. Nun gilt mit dem Frattini-Argument (siehe z.B. 3.1.4 in [KuSt]) $G = M \cdot N_G(U)$. Ferner ist

$$N_G(U)/N_M(U) \cong (M \cdot N_G(U))/M = G/M.$$

Daher gilt $|N_G(U) : U| = 4$. Seien nun $g \in G^\#$ und $h \in G$ so, dass $g \in U^h$ ist. Es gilt $U^h \in M$ und damit auch $g \in M$. Mit den Lemmata 3.1 und 3.11 in [MaW1] operiert M auf M/U mit Fixität 2. Ausgehend von dieser Operation von M, folgt $\left|\mathrm{fix}_{M/U}(g)\right| = \left|N_M(\langle g \rangle) : U^h\right| \in \{1, 2\}$ und $N_M(U^h) \leqslant N_M(\langle g \rangle)$ mit Korollar 3.6. Es ist $\left|N_M(U^h) : U^h\right| = 2$. Daraus folgt $N_M(\langle g \rangle) = N_M(U^h)$ und analog zu oben auch $N_G(U^h) = N_G(\langle g \rangle)$. Korollar 3.6 liefert nun $\left|\mathrm{fix}_{G/U}(g)\right| = 4$. Damit operiert G mit Fixität 4 auf G/U. ■

Lemma 3.12
Seien $q > 2$ eine Primzahlpotenz, $G \cong \mathrm{PSp}_4(q)$ und $\alpha := \frac{q^2+1}{\mathrm{ggT}(q^2-1, 2)}$. Dann besitzt G eine zyklische Untergruppe U der Ordnung α und G operiert auf G/U mit Fixität 4. Ferner besitzt G nur genau eine Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen der Ordnung α und U ist eine Hall $\pi(U)$-Untergruppe von G.

Sei $M \leqslant G$ eine maximale Untergruppe von G so, dass $U \leqslant M$ ist. Dann ist $M \cong \mathrm{PSL}_2(q^2).C_2$ oder es gilt $q = 3$ und $M \cong E_{16} : \mathcal{A}_5$. Ist $q \geq 4$, so ist ferner $N_G(U) \leqslant M$. Ist $h \in G^\#$ so, dass $o(h)$ ein Teiler von $|U|$ ist, dann ist $\langle h \rangle$ konjugiert zu einer Untergruppe von U in G und h hat vier Fixpunkte in G/U.

[1] Im Fall $p = 2$ gilt schon $1_{\mathrm{GF}(2^n)} + 1_{\mathrm{GF}(2^n)} = 0_{\mathrm{GF}(2^n)}$ in $\mathrm{GF}(2^n)$ und M besitzt keine Diagonalautomorphismen. Die Voraussetzung $n \equiv 0$ modulo 2 im Fall $p = 2$ im Lemma ist für die Existenz eines involutorischen Körperautomorphismus von M also notwendig.

Beweis

Schritt 1: *Existenz einer zyklischen Untergruppe von Ordnung α in G:*

Nach Theorem 3.7 (*iv*) (für q gerade) und Theorem 3.8 (*vi*) (für q ungerade) in [Wil, S. 92f] hat G eine maximale Untergruppe $\widetilde{M}$ isomorph zu $\mathrm{PSp}_2(q^2).C_2$ bzw. $\mathrm{PSL}_2(q^2).C_2$. Lemma 3.11 liefert die Existenz von zyklischen Untergruppen der Ordnung α in $\widetilde{M}$ und damit auch in G. □

Mit Lemma 3.11 operiert die Untergruppe $\widetilde{M} \cong \mathrm{PSL}_2(q^2).C_2$ von G mit Fixität 4 auf der Menge der $\widetilde{M}$-Nebenklassen einer zyklischen Untergruppe von $\widetilde{M}$ der Ordnung α. Seien also U wie in der Behauptung und M eine maximale Untergruppe von G mit $U \leqslant M$.

Schritt 2: *Es gilt $M \cong \mathrm{PSL}_2(q^2).C_2$ oder $q = 3$ und $M \cong E_{16} : \mathcal{A}_5$:*

Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: Es sei q eine 2-Potenz.

Da $|U| = \alpha = q^2 + 1$ gilt, ist $M \cong \mathrm{Sp}_2(q^2).C_2 \cong \mathrm{PSL}_2(q^2).C_2$ mit Theorem 3.7 (*iv*) in [Wil, S. 92] oder es gilt $M \cong \mathrm{GO}_4^-(q) \cong \mathrm{PSL}_2(q^2).C_2$ wie im Fall (*vii*) des Theorems. Die Fälle (*iv*) und (*vii*) von Theorem 3.7 in [Wil] führen somit zu isomorphen maximalen Untergruppen, die jedoch im Allgemeinen nicht konjugiert sind in G. (Vergleiche dazu auch den Block C_3 mit $j = 10$ und den Block C_8 in Table 3.5.C in [KlLi, S. 72] bzw. beispielhaft die Liste der Konjugiertenklassen von maximalen Untergruppen von $\mathrm{PSp}_4(4)$ in [Atl, S. 44].)

In den anderen Fällen des Theorems 3.7 in [Wil, S. 92] (bis auf (*ix*)) ist die Ordnung der jeweiligen Gruppe nicht durch $\alpha = q^2 + 1$ teilbar. Im Fall (*ix*) des Theorems gilt $M \cong \mathrm{Sz}(q)$, falls q eine ungerade 2-Potenz ist. Jedoch enthält M mit Theorem XI.3.10 und Lemma XI.3.1 in [HuB3] keine zyklische Untergruppe der Ordnung α. Daher ist auch dieser Fall unmöglich und es folgt $M \cong \mathrm{PSL}_2(q^2).C_2$.

Fall 2: Es sei q ungerade.

Da $|U| = \alpha = \frac{1}{2}(q^2 + 1)$ gilt, ist $M \cong \mathrm{PSp}_2(q^2).C_2 \cong \mathrm{PSL}_2(q^2).C_2$ mit Theorem 3.8 (*vi*) in [Wil, S. 93] oder es gilt $q = 3$, $\alpha = 5$ und $M \cong {C_2}^4.\Omega_4^-(2)$ wie im Fall (*xi*) des Theorems. Dabei ist $\Omega_4^-(2) \cong \mathcal{A}_5$ nach [Atl]. Die Fälle (*i*) bis (*v*) und (*vii*) bis (*x*) von Theorem 3.8 in [Wil] können nicht eintreten, da die Ordnung der Gruppe jeweils nicht durch $\alpha = \frac{1}{2}(q^2 + 1)$ teilbar ist.

Wie bereits erwähnt, gilt $\Omega_4^-(2) \cong \mathrm{PSL}_2(2^2) \cong \mathcal{A}_5$. Nach [Atl, S. 2] ist ferner $\mathrm{GO}_4^-(2) \cong \mathcal{S}_5 \cong \mathrm{PGL}_2(5)$. Für $q \geq 5$ gilt $\alpha \geq 12$. Jedoch besitzen weder $\mathcal{A}_5$ noch $\mathcal{S}_5$ Elemente der Ordnung 12 oder höher. Daher ist nur der Fall $q = 3$ möglich und damit scheidet der Fall (*xii*) von Theorem 3.8 in [Wil, S. 93] aus.

□

Schritt 3: *Operation mit Fixität 4 auf G/U:*

Für $q = 3$ und damit $\alpha = 5$ liefern Berechnungen in [GAP] genau $|N_G(U) : U| = 4$ sowie $\left|\mathrm{fix}_{G/U}(g)\right| \in \{0, 4\}$ für alle $g \in G^\#$ mit dem Algorithmus in Bemerkung 1.4. Ferner gibt es nur eine Konjugiertenklasse von zylischen Untergruppen der Ordnung α mit der Charaktertafel von $\mathrm{PSp}_4(3)$ in [Atl]. Seien also $q \geq 4$ und $M \leqslant G$ eine maximale Untergruppe mit $U \leqslant M$.

Mit Schritt 2 wissen wir, dass $M \cong \mathrm{PSL}_2(q^2).C_2$ gilt. Lemma 3.11 liefert dann $|N_M(U) : U| = 4$. Da $U \leqslant N_G(U)$ und $q \neq 3$ gilt, ist $N_G(U)$ mit Schritt 2 isomorph zu einer Untergruppe von M. Nun ist jedoch $N_M(U)$ die bzgl. Inklusion größte Untergruppe von M, die U normalisiert. Daher gilt $N_M(U) = N_G(U)$ und ferner auch $|N_G(U) : U| = 4$. Des Weiteren gibt es wegen Lemma 3.11 nur eine M-Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen der Ordnung α.

Seien jetzt $g \in G^\#$, $X := \langle g \rangle$ und $h \in G$ so, dass $g \in U^h$ gilt. Korollar 3.6 liefert $N_G(U^h) \leqslant N_G(X)$ und $\left|\mathrm{fix}_{G/U}(g)\right| = \left|N_G(X) : U^h\right|$. Nun gilt $N_G(X) \leqslant M^h$, also insbesondere $N_{M^h}(X) = N_G(X)$, da M^h eine maximale Untergruppe von G war, die $N_G(U^h)$ enthalten hat, und mit Schritt 2 alle maximalen Untergruppen von G, die U^h enthalten, isomorph zu M^h sind. Dann folgt $|N_{M^h}(X) : N_{U^h}(X)| = 4$ mit Lemma 3.11 und weiter $\left|\mathrm{fix}_{G/U}(g)\right| = 4$ mit Korollar 3.6. □

Schritt 4: *Anzahl der G-Konjugiertenklassen von zyklischen Untergruppen der Ordnung α:*

Seien $d := \mathrm{ggT}(q^2 - 1, 2)$ und $U \leqslant G$ eine zyklische Untergruppe der Ordnung α. Es gilt $|G| = \frac{q^4(q^2-1)^2(q^2+1)}{d}$ und $|G : U| = q^4(q^2 - 1)^2$.

Wir zeigen, dass $|U| = d^{-1}(q^2 + 1)$ und $|G : U|$ keine gemeinsamen Teiler haben. Es gilt $\mathrm{ggT}(q, q^2 + 1) = 1$ und $\mathrm{ggT}(q^2 - 1, q^2 + 1) \in \{1, 2\}$, da q eine Primzahlpotenz ist.

Ist q eine 2-Potenz, so folgt $\mathrm{ggT}(q^2 - 1, q^2 + 1) = 1$, weil $q^2 - 1$ und $q^2 + 1$ ungerade sind. Ist q ungerade, so gilt $|U| = \alpha = \frac{q^2+1}{2}$. Ferner folgt für q kongruent zu 1 oder 3 modulo 4 schon $q^2 + 1 \equiv 1 + 1 \equiv 2$ modulo 4. Daher ist α ungerade und es gilt $\mathrm{ggT}(q^2 - 1, \alpha) = 1$.

Somit ist U eine Hall $\pi(U)$-Untergruppe von G. Da U zyklisch ist, liefern nun die Sätze III.5.8 und III.5.6 in [Hup1], dass U^G die einzige G-Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen der Ordnung $|U|$ ist. □

Sei jetzt $g \in G$ so, dass $o(g)$ ein Teiler von $|U|$ ist. Da U eine Hall $\pi(U)$-Untergruppe von G ist, gibt es ein $h \in G$ so, dass $g \in U^h$ ist. Dann kennen wir nach Schritt 3 schon die Fixpunktanzahl von g in G. ■

Lemma 3.13
Seien $q \geq 2$ eine Primzahlpotenz, $G \cong \mathrm{P\Omega}_8^-(q)$ und $\alpha := \frac{q^4+1}{\mathrm{ggT}(q^4+1,2)}$. Dann besitzt G eine zyklische Untergruppe U der Ordnung α und G operiert auf der Menge der Nebenklassen von U mit Fixität 4. Ferner besitzt G nur genau eine Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen der Ordnung α.

Sei $M \leqslant G$ eine maximale Untergruppe von G so, dass $U \leqslant M$ ist. Dann gilt $M \cong \mathrm{PSL}_2(q^4).C_2$ und ferner ist $N_G(U) \leqslant M$.

Ist $h \in G^\#$ so, dass $o(h)$ ein Teiler von $|U|$ ist, dann ist $\langle h \rangle$ konjugiert zu einer Untergruppe von U in G und h hat vier Fixpunkte in G/U.

Beweis

Schritt 1: *Existenz einer zyklischen Untergruppe von Ordnung α in G:*

Nach Theorem 3.11 (*ix*) in [Wil, S. 94f] besitzt G eine Untergruppe $\widetilde{M}$, welche isomorph zu $\mathrm{P\Omega}_4^-(q^2).C_2$ bzw. $\mathrm{PSL}_2(q^4).C_2$ ist. Mit Lemma 3.11 existiert dann eine zyklische Untergruppe von $\widetilde{M}$ der Ordnung α und $\widetilde{M}$ operiert mit Fixität 4 auf der Menge der $\widetilde{M}$-Nebenklassen dieser Untergruppe. $\square$

Seien also U wie in der Voraussetzung und $M \leqslant G$ eine maximale Untergruppe so, dass $U \leqslant M$ ist.

Schritt 2: *Es gilt $M \cong \mathrm{PSL}_2(q^4).C_2$:*

Sei $d := \mathrm{ggT}(q^4+1, 2)$. Es ist G eine Unter- bzw. Faktorgruppe von $\mathrm{GO}_8^-(q)$. Wir nutzen daher die Liste der maximalen Untergruppen von $\mathrm{GO}_8^-(q)$ in Theorem 3.11 in [Wil, S. 94f], um zu entscheiden, in welchen maximalen Untergruppen U als Sektion liegen könnte. Sei also $\hat{M}$ eine maximale Untergruppe von $\mathrm{GO}_8^-(q)$ so, dass U eine Sektion von $\hat{M}$ ist. Dann ist $\left|\hat{M}\right|$ durch $|U| = \alpha = d^{-1}(q^4+1)$ teilbar.

Aufgrund der Restriktionen an n aus dem Theorem 3.11 in [Wil] für die Existenz gewisser maximaler Untergruppen von $\mathrm{GO}_{2n}^-(q)$ können wir die Fälle (*v*) bis (*vii*) und (*x*) und (*xi*) des Theorems ausschließen. In diesen Fällen muss n ungerade sein. In unserer Situation gilt jedoch $n = 4$. Die Fälle (*i*) bis (*iv*) und (*vii*) können ebenfalls nicht eintreten, da in diesen Fällen $\left|\hat{M}\right|$ nicht durch α teilbar ist. Daher bleibt nur der Fall (*viii*) von Theorem 3.11 in [Wil, S. 94f] übrig und es gilt $\hat{M} \cong \mathrm{GO}_4^-(q^2).C_2$ bzw. $M \cong \mathrm{P\Omega}_4^-(q^2).C_2 \cong \mathrm{PSL}_2(q^4).C_2$. Insbesondere folgt analog $N_G(U) \leqslant M$ und damit $N_G(U) = N_M(U)$. $\square$

Schritt 3: *G operiert mit Fixität 4 auf G/U:*

Mit Schritt 2 ist M isomorph zu $\mathrm{PSL}_2(q^4).C_2$ und es gilt $N_G(U) = N_M(U)$. Mit Lemma 3.11 gibt es nur eine M-Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen der Ordnung α. Seien $g \in G^\#$, $X := \langle g \rangle$ und $h \in G$ so, dass $g \in U^h$ gilt. Mit Korollar 3.6 folgt $N_G(U^h) \leqslant N_G(X)$ und $\left|\mathrm{fix}_{G/U}(g)\right| = \left|N_G(X) : U^h\right|$. Weil $N_{M^h}(U^h) = N_G(U^h)$ und $N_{M^h}(\langle g \rangle) = N_{M^h}(U^h)$ mit Lemma 3.11 gilt, ist mit Schritt 2 auch $N_G(X) \leqslant M^h$. Dann folgt $N_G(U^h) = N_{M^h}(X) = N_G(X)$ und insbesondere $\left|\mathrm{fix}_{G/U}(g)\right| = 4$. $\square$

Schritt 4: *Anzahl der G-Konjugiertenklassen von zyklischen Untergruppen der Ordnung α:*

Nach Schritt 2 ist M isomorph zu $\mathrm{PSL}_2(q^4).C_2$. Table 3.5.F (im Block C_3 mit $j=16$ und Spalte V) in [KlLi, S. 74] liefert, dass M^G die einzige Konjugiertenklasse von Untergruppen von G isomorph zu M ist (für eine Erklärung zu Spalte V der Table 3.5.F vgl. Abschnitt 3.2 in [KlLi, S. 61ff]). Da es mit Lemma 3.11 nur eine M-Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen der Ordnung α gibt, gibt es folglich auch nur eine G-Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen der Ordnung $\alpha = \frac{q^4+1}{\mathrm{ggT}(q^4-1,2)}$. Mit [Wil, S. 70ff, 77] sehen wir, dass $|U|$ und $|G:U| = q^{12}(q^2-1)(q^4-1)(q^6-1)$ teilerfremd sind. Insbesondere ist dann U eine Hall $\pi(U)$-Untergruppe von G. Ist jetzt $g \in G^{\#}$ so, dass $o(g)$ ein Teiler von α ist, dann ist $\langle g \rangle$ zu einer Untergruppe von U in G konjugiert. Mit Schritt 3 folgt $\left|\mathrm{fix}_{G/U}(g)\right| = 4$. ∎

Wir haben gezeigt, dass jeder Eintrag in Tabelle 3.2 ein Beispiel für transitive, treue und nicht-reguläre Operation in Fixität 4 einer endlichen, einfachen und nicht-abelschen Gruppe liefert. Wir fassen diese Beispiele zusammen:

Voraussetzung 3.14
Seien G eine transitive Permutationsgruppe auf einer Menge Δ, $\alpha \in \Delta$, G_α zyklisch und $q \geq 2$ eine Primzahlpotenz. Weiter sei das Tripel $(G, |\Delta|, |G_\alpha|)$ eines der Tripel aus Tabelle 3.2 auf Seite 68.

Lemma 3.15
Es gelte Voraussetzung 3.14 und sei $\alpha \in \Omega$ beliebig. Dann operiert G mit Fixität 4 auf Ω. Insbesondere gibt es nur eine G-Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen der Ordnung $|G_\alpha|$. Jedes nichttriviale Element von G besitzt genau null oder vier Fixpunkte in Ω. Ist $h \in G^{\#}$ so, dass $o(h)$ ein Teiler von $|G_\alpha|$ ist, so ist $\langle h \rangle$ konjugiert zu einer Untergruppe von G_α.

Beweis
Das folgt aus den Lemmata 3.7 bis 3.13. ∎

Da bisher keine Klassifikation der transitiven, einfachen, und nicht-abelschen Permutationsgruppen in Fixität 4 publiziert ist, können wir zu diesem Zeitpunkt nicht mit Gewissheit sagen, dass die in Voraussetzung 3.14 aufgeführten Beispiele die einzigen mit zyklischen Punktstabilisatoren sind. Wir vermuten aber aufgrund bisheriger Ergebnisse:

Vermutung 3.16
Sei G eine einfache, nicht-abelsche und transitive Permutationsgruppe auf einer Menge Δ. Die Operation habe Fixität 4 und für alle $\alpha \in \Delta$ sei G_α zyklisch. Dann ist das Tripel $(G, |\Delta|, |G_\alpha|)$ wie in der Tabelle 3.2 auf Seite 68.

4 Riemannsche Flächen und RF-Mengen – I

Für die Beantwortung von Frage 2 dieser Arbeit müssen wir treue Fixität-4-Operationen von Gruppen auf kompakten Riemannschen Flächen untersuchen. Dazu beginnen wir in diesem Kapitel mit dem Studium von allgemeinen Gruppenwirkungen auf kompakten Riemannschen Flächen.

Eine Riemannsche Fläche $\mathfrak{X}$ ist nach I.1.1 in [FaKr] eine zweidimensionale, reelle und zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit einem Atlas $\mathfrak{A} := \{(U_\alpha, z_\alpha)\}_{\alpha \in I}$, wobei I eine Indexmenge, $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = \mathfrak{X}$ eine offene Überdeckung von $\mathfrak{X}$ und $z_\alpha \colon U_\alpha \to \mathbb{C}$ ein Homöomorphismus mit offenem Bild $z_\alpha(U_\alpha)$ ist. Ferner muss der Kartenwechsel von $(U_1, z_1) \in \mathfrak{A}$ auf $(U_2, z_2) \in \mathfrak{A}$ mit $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, gegeben durch

$$z^{-1} * z_2 \colon z_1(U_1 \cap U_2) \to z_2(U_1 \cap U_2),$$

holomorph sein. Da eine Riemannsche Fläche eine Mannigfaltigkeit ist, ist sie insbesondere ein topologischer Raum. Daher nennen wir eine Riemannsche Fläche kompakt, wenn sie als topologischer Raum kompakt ist.

Nach Proposition I.1.23 in [Mir] ist jede kompakte Riemannsche Fläche diffeomorph zu einem $\mathfrak{g}$-löchrigen Torus ($\mathfrak{g} \in \mathbb{N}_0$, $\mathfrak{g} \geq 1$) oder zur Sphäre ($\mathfrak{g} = 0$). Man definiert das Geschlecht einer kompakten Riemannschen Fläche als diese nicht-negative ganze Zahl $\mathfrak{g}$.

Biholomorphismen einer kompakten Riemannschen Fläche $\mathfrak{X}$ auf sich selbst werden als Automorphismen von $\mathfrak{X}$ bezeichnet (vgl. Definition II.3.6 in [Mir]). Die Menge aller Biholomorphismen bildet bzgl. der Hintereinanderausführung von Abbildungen eine Gruppe, die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{X})$ von $\mathfrak{X}$. Nach dem Satz von Schwarz ist die Automorphismengruppe einer kompakten Riemannschen Fläche vom Geschlecht mindestens 2 endlich (siehe V.1.2 Corollary 2 in [FaKr] oder Theorem VII.4.18 in [Mir]).

Seien $\mathfrak{X}$ eine kompakte Riemannsche Fläche von Geschlecht $\mathfrak{g} \geq 2$ und G eine nichttriviale Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\mathfrak{X})$. Nach Theorem VII.4.18 in [Mir] ist $\mathrm{Aut}(\mathfrak{X})$ endlich und damit insbesondere auch G. In der Operation von G auf $\mathfrak{X}$, zerfällt $\mathfrak{X}$ in G-Bahnen. Die Menge $\mathfrak{X}/G := \left\{ \mathfrak{x}^G \,\middle|\, \mathfrak{x} \in \mathfrak{X} \right\}$ aller G-Bahnen von $\mathfrak{X}$ ist der Bahnenraum. Dieser ist nach Theorem II.3.4 in [Mir] ebenfalls eine kompakte Riemannsche Fläche und besitzt ein Geschlecht $\mathfrak{g}_0 \geq 0$.

Sei $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{X}/G$ die Menge der nicht-regulären G-Bahnen von $\mathfrak{X}$. Weil $\mathfrak{X}$ kompakt ist, ist $|\mathfrak{B}|$ mit Proposition III.3.2 in [Mir] höchstens abzählbar und mit Corollary

II.1.34 und Theorem II.1.33 in [Mir] sogar endlich. Sind $\Delta \in \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{x} \in \Delta$, so ist $G_{\mathfrak{x}}$ nach Proposition III.3.1 in [Mir] zyklisch.

Nach (1.1) in [Bro, S. 234] können wir zu $\mathfrak{X}$ und der Wirkung von G auf $\mathfrak{X}$ ein Verzweigungsdatum $(\mathfrak{g}_0 \colon k_1, \ldots, k_t)$ definieren, wobei t die Anzahl der Verzweigungspunkte der holomorphen Abbildung $\rho \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}/G$ ist, die jedem Element $\mathfrak{x} \in \mathfrak{X}$ seine Bahn $\mathfrak{x}^G \in \mathfrak{X}/G$ zuordnet, und $k_1, \ldots, k_t$ die Vielfachheiten dieser Verzweigungspunkte sind (vgl. Definition II.4.2 in [Mir]). Die Verzweigungspunkte der Abbildung ρ sind genau die Bahnen $\Delta \in \mathfrak{X}/G$, für die $|\Delta| < |G|$ gilt (vgl. Lemma III.3.6 in [Mir]). Also ist t genau die Anzahl $|\mathfrak{B}|$ der nicht-regulären Bahnen in $\mathfrak{X}/G$ und $k_1, \ldots, k_t$ sind die Quotienten aus $|G|$ und der Bahnlänge der Elemente von $\mathfrak{B}$ (vgl. Beweis von V.1.3 Theorem (Hurwitz) in [FaKr, S. 258f] und Lemma III.3.6 in [Mir]).

Sei jetzt G eine Gruppe. Der Riemannsche Existenzsatz (siehe beispielsweise Proposition 1 in [Bro, S. 239]) besagt, dass es genau dann eine kompakte Riemannsche Fläche $\mathfrak{X}$ vom Geschlecht mindestens 2 so gibt, dass $G \leqslant \mathrm{Aut}(\mathfrak{X})$ ist und G mit einem bestimmten Verzweigungsdatum auf $\mathfrak{X}$ operiert, wenn es gewisse Elemente in G gibt, die bestimmte Eigenschaften erfüllen. Aufgrund dieses Satzes, den wir im Kapitel 5 genauer betrachten werden, ist es möglich, den Fokus zunächst auf die Gruppenoperationen zu lenken und später die Existenz einer zugehörigen kompakten Riemannschen Fläche zu nachzuweisen.

Mit den gesammelten Informationen können wir Mengen modellieren, die aus der Sicht der Gruppenwirkungen dieselben Eigenschaften wie kompakte Riemannsche Flächen haben. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden wir diese Mengen definieren und allgemeine Gruppenwirkungen auf solchen studieren. Im zweiten Abschnitt fokussieren wir Operationen von endlichen und einfachen Gruppen auf diesen Mengen, welche eine Bahnenfixität von höchstens 4 sichern.

4.1 RF-Mengen und Hurwitzdaten

Definition 4.1 (RF-Paar, RF-Menge)
Genau dann nennen wir (G,Ω) *ein* ***RF-Paar****, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:*

(i) G *ist eine endliche Gruppe.*

(ii) Ω *ist eine Menge, auf der* G *operiert.*

(iii) Die Anzahl der nicht-regulären Bahnen von G *auf* Ω *ist endlich.*

(iv) Ist $\alpha \in \Omega$*, so ist* G_α *zyklisch.*

Wir nennen Ω *dann eine* ***RF-Menge****.*

Wir erinnern daran, dass G stets eine endliche Gruppe sei, wodurch Eigenschaft (i) der Definition 4.1 immer erfüllt sein wird.

Beispiel 4.2

(i) Sei $\mathfrak{X}$ *die Kleinsche Kurve (engl. Klein's quartic curve). Dann ist* $(\mathrm{PSL}_2(7),\mathfrak{X})$ *ein RF-Paar, da* $\mathrm{PSL}_2(7)$ *nur insgesamt drei nicht-reguläre Bahnen auf* $\mathfrak{X}$ *hat (Längen 84, 56 und 24) und die zugehörigen Punktstabilisatoren zyklisch sind (Ordnung 2, 3 und 7), siehe [Mac2].*

(ii) Sei $\mathfrak{X}$ *die MacBeath-Kurve. Dann ist* $(\mathrm{PSL}_2(8),\mathfrak{X})$ *ein RF-Paar, da* $\mathrm{PSL}_2(8)$ *nur insgesamt drei nicht-reguläre Bahnen auf* $\mathfrak{X}$ *hat (Längen 252, 168, 72) und die zugehörigen Punktstabilisatoren zyklisch sind (Ordnung 2, 3 und 7), siehe [Mac1].*

(iii) Riemannsche Flächen sind nicht die einzigen Beispiele für RF-Mengen. Seien $G := \mathcal{S}_4$ *in der natürlichen Wirkung und* $\Delta_1 := G/\langle(12)\rangle$*. Betrachte die Wirkung von* G *auf* Δ_1 *per Rechtsmultiplikation. Dann ist die Wirkung treu, transitiv und für alle* $\alpha \in \Delta_1$ *ist* G_α *zyklisch der Ordnung 2 und konjugiert zu* $\langle(12)\rangle$ *in* G*. Seien* $\Delta_2 := G/\langle(12)(34)\rangle$ *sowie* $\Delta_3 := G/\langle(123)\rangle$ *und betrachte die Wirkung von* G *auf* Δ_2 *bzw.* Δ_3 *per Rechtsmultiplikation. Es sind* Δ_1*,* Δ_2 *und* Δ_3 *paarweise disjunkt. Sei nun* $\Omega := \bigcup_{i=1}^{3} \Delta_i$*. Dann ist* Ω *eine RF-Menge und* (G,Ω) *ein RF-Paar.*

Wir wollen (i) und (ii) von Beispiel 4.2 verallgemeinern:

Lemma 4.3
Sei $\mathfrak{X}$ *eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht mindestens 2. Dann ist für alle* $1 \neq G \leqslant \mathrm{Aut}(\mathfrak{X})$ *das Paar* $(G,\mathfrak{X})$ *ein RF-Paar.*

Beweis
Wir prüfen Definition 4.1.

Nach Theorem VII.4.18 in [Mir] ist $\mathrm{Aut}(\mathfrak{X})$ endlich, also auch jede Untergruppe. Das ist (*i*). Sei $G \leqslant \mathrm{Aut}(\mathfrak{X})$ beliebig. Da $\mathfrak{X}$ kompakt ist, ist mit Theoremen II.1.33 und II.1.34 sowie Proposition III.3.2 in [Mir] die Anzahl der nicht-regulären Bahnen von $\mathfrak{X}$ unter der Wirkung von G endlich. Das sind (*ii*) und (*iii*). Mit Proposition III.3.1 in [Mir] gilt (*iv*) der Definition 4.1. ∎

Mit Lemma 4.3 haben wir eine Verbindung zwischen kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht mindestens 2 und RF-Mengen hergestellt. Wir wollen jetzt Gruppenoperationen auf RF-Mengen studieren. Dazu verallgemeinern wir zunächst die Konstruktion einer RF-Menge wie im Beispiel 4.2 (*iii*):

Lemma 4.4
Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $x_1,\dots,x_n \in G$ nichttrivial. Dann gibt es eine RF-Menge Ω so, dass gilt:

(i) Es gibt genau n nicht-reguläre G-Bahnen in der Wirkung von G auf Ω.

(ii) Ist $\Delta \subseteq \Omega$ eine nicht-reguläre G-Bahn, so gibt es ein $i \in \{1,\dots,n\}$ und ein $\alpha \in \Delta$ so, dass $G_\alpha = \langle x_i \rangle$ gilt.

(iii) Ist umgekehrt $i \in \{1,\dots,n\}$ beliebig, so gibt es eine nicht-reguläre G-Bahn $\Delta \subseteq \Omega$ und ein $\alpha \in \Delta$ so, dass $G_\alpha = \langle x_i \rangle$ gilt.

Beweis
Für $n = 0$ ist alles klar, wenn wir $\Omega := G/1$ setzen und die Operation von G auf Ω per Rechtsmultiplikation betrachten. Sei also $n \geq 1$. Wir konstruieren zunächst Ω.

Für alle $i \in \{1,\dots,n\}$ seien $U_i := \langle x_i \rangle$ und $\Delta_i := G/\langle x_i \rangle$. Dann wirkt G per Rechtsmultiplikation auf Δ_i. Diese Operation ist transitiv nach 4.1.1 in [KuSt] und nicht-regulär, da $x_1,\dots,x_n$ nichttriviale Elemente von G sind.

Gibt es $i,j \in \{1,\dots,n\}$ verschieden und so, dass $\langle x_i \rangle$ und $\langle x_j \rangle$ in G konjugiert sind, so ist $\Delta_i = \Delta_j$. In diesem Fall sei M eine Menge so, dass G auf M transitiv operiert, diese Operation äquivalent zu der von G auf Δ_j ist sowie $|M| = |\Delta_j|$ und $M \cap \Delta_j = \varnothing$ gilt. Wir ersetzen nun Δ_j durch M in der Sequenz $\Delta_1,\dots,\Delta_n$ sowie die Wirkung von G auf Δ_j durch die auf M. Dadurch gilt $\Delta_i \cap \Delta_j = \varnothing$, jedoch sind die Wirkungen von G auf Δ_i und Δ_j äquivalent. Dies wiederholen wir für alle Paare $(i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\}$ mit den Eigenschaften $i \neq j$ und $\Delta_i \cap \Delta_j \neq \varnothing$ so lange, bis $\Delta_1,\dots,\Delta_n$ paarweise disjunkt sind. Sei nun

$$\Omega := \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i.$$

Wir überprüfen nun, ob (G,Ω) ein RF-Paar ist und (*i*) bis (*iii*) des Lemmas gelten. Die Wirkung von G auf $\Delta_1,\dots,\Delta_n$ induziert eine Wirkung von G auf der Menge Ω. Unter dieser induzierten Wirkung folgt, dass es in Ω genau n nicht-reguläre Bahnen gibt, nämlich $\Delta_1,\dots,\Delta_n$, und dass (G,Ω) ein RF-Paar ist. Nach Konstruktion von $\Delta_1,\dots,\Delta_n$ folgen (*ii*) und (*iii*) des Lemmas. ∎

Lemma 4.5
Seien (G,Ω) ein RF-Paar und $\mathfrak{B}$ die Menge der nicht-regulären Bahnen von Ω unter der Wirkung von G. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$ und nichttriviale Elemente $x_1,\ldots,x_n \in G$ so, dass gilt:

(i) $|\mathfrak{B}| = n$.

(ii) Für alle $\Delta \in \mathfrak{B}$ gibt es ein $i \in \{1,\ldots,n\}$ und ein $\alpha \in \Delta$ so, dass $G_\alpha = \langle x_i \rangle$ ist.

(iii) Umgekehrt gibt es für alle $i \in \{1,\ldots,n\}$ ein $\Delta \in \mathfrak{B}$ und ein $\alpha \in \Delta$ so, dass $G_\alpha = \langle x_i \rangle$ gilt.

Beweis
Zu (*i*): Da (G,Ω) ein RF-Paar ist, ist nach Definition 4.1 (*iii*) schon $\mathfrak{B}$ endlich. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ so, dass $|\mathfrak{B}| = n$ gilt. Ist $n = 0$, so sind wir fertig. Seien also $n \geq 1$ und $\Delta_1,\ldots,\Delta_n \subseteq \Omega$ so, dass $\mathfrak{B} =: \{\Delta_1,\ldots,\Delta_n\}$ gilt.

Für alle $i \in \{1,\ldots,n\}$ sei $\alpha_i \in \Delta_i$ beliebig. Mit Definition 4.1 gibt es dann ein $x_i \in G$ so, dass $G_{\alpha_i} = \langle x_i \rangle$ gilt. Nun erfüllen die α_i zusammen mit den x_i die Punkte (*ii*) und (*iii*) des Lemmas. ■

Definition 4.6 (Induzierte RF-Menge, RF-Elemente, Äquivalenz)
Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $x_1,\ldots,x_n \in G^\#$.

*Ist Ω wie in Lemma 4.4, so nennen wir Ω **die von $x_1,\ldots,x_n$ induzierte RF-Menge** und (G,Ω) **das von $x_1,\ldots,x_n$ induzierte RF-Paar**.*

*Ist nun (G,Ω) ein RF-Paar und sind $n \in \mathbb{N}_0$ und $x_1,\ldots,x_n$ wie in Lemma 4.5, so nennen wir $x_1,\ldots,x_n$ **RF-Elemente** von (G,Ω).*

*Seien (G,Ω) und (G,Δ) zwei RF-Paare, $n,m \in \mathbb{N}_0$ sowie $x_1,\ldots,x_n \in G$ RF-Elemente von (G,Ω) und $y_1,\ldots,y_m \in G$ RF-Elemente von (G,Δ). Genau dann nennen wir Ω und Δ **äquivalent**, wenn $n = m$ ist und Folgendes gilt:*

Es gibt ein $\varphi \in \mathcal{S}_n$ so, dass für alle $i \in \{1,\ldots,n\}$ schon $\langle x_i \rangle$ zu $\langle y_{i^\varphi} \rangle$ konjugiert ist in G.

Lemma 4.7
Seien (G,Ω) ein RF-Paar, $n \in \mathbb{N}_0$ und $x_1,\ldots,x_n \in G$ RF-Elemente zu (G,Ω). Sei weiter Δ die von $x_1,\ldots,x_n$ induzierte RF-Menge. Dann sind (G,Ω) und (G,Δ) äquivalent.

Beweis
Die gesuchte Bijektion ist id_n und das jeweils konjugierende Element in G ist 1_G. ■

Wir stellen nun eine Möglichkeit vor, Informationen über die Wirkung einer Gruppe auf einer RF-Menge festzuhalten. Dabei ist nur Eigenschaft (i) der nachfolgenden Definition für RF-Mengen nötig. Mit der zweiten Eigenschaft der Definition öffnen wir den Pfad zu Verzweigungsdaten von kompakten Riemannschen Flächen. Diesen werden wir anschließend verdeutlichen.

Definition 4.8 (Hurwitzdatum, HD)
Seien (G,Ω) *eine RF-Menge,* $\mathfrak{B}$ *die Menge der nicht-regulären Bahnen von* Ω *unter der Wirkung von* G *und* $\mathfrak{M} := \{|\Delta| \mid \Delta \in \mathfrak{B}\}$ *die Menge der Bahnlängen von Elementen aus* $\mathfrak{B}$*. Weiter seien* $r := |\mathfrak{M}|$ *sowie* $k_1,\dots,k_r \in \mathbb{N}$ *so, dass* $k_1 > \dots > k_r$ *und* $\mathfrak{M} = \{k_1,\dots,k_r\}$ *ist.*[1] *Genau dann heißt die Liste* $[G,\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0 \,|\, [m_1,n_1],\dots,[m_r,n_r]]$ ***Hurwitzdatum*** *(kurz HD) zu* Ω*, wenn gilt:*

(i) Für alle $i \in \{1,\dots,r\}$ *gilt* $m_i = \frac{|G|}{k_i}$ *und* n_i *ist die Anzahl der Bahnen in* $\mathfrak{B}$ *mit Mächtigkeit* k_i*.*

(ii) Es ist $\mathfrak{g}_0 \in \mathbb{N}_0$ *so, dass*

$$\mathfrak{g} := 1 + \frac{|G|}{2}\left(2(\mathfrak{g}_0 - 1) + \sum_{j=1}^{r} n_j \left(1 - \frac{1}{m_j}\right)\right) \geq 2 \tag{4.1}$$

und $\mathfrak{g}$ *eine natürliche Zahl ist.*

Wir nennen die Zahlen $m_1,\dots,m_r$ ***Verzweigungszahlen*** *und die Zahlen* $n_1,\dots,n_r$ ***Vielfachheiten****. Wir bezeichnen* $\mathfrak{g}$ *als* ***Geschlecht*** *und* $\mathfrak{g}_0$ *als* ***Cogeschlecht****. Die Gleichung* (4.1) *nennen wir* ***Hurwitzformel****.*

Die Hurwitzformel in Definition 4.8 (*ii*) ist eine Formel aus der Theorie der kompakten Riemannschen Flächen (vgl. Theorem II.4.16 und Corollary III.3.7 in [Mir]). Jede kompakte Riemannsche Fläche, auf der eine endliche Gruppe von Automorphismen operiert, erfüllt diese Hurwitzformel. Dadurch ist sie für uns ein notwendiges Kriterium für die Verbindung von Riemannsche Flächen und RF-Mengen.

Bemerkung 4.9 (Hurwitzdaten und Verzweigungsdaten)
Nach (1.1) in [Bro] können wir zu der treuen Wirkung einer Gruppe G auf einer kompakten Riemannschen Fläche $\mathfrak{X}$ ein Verzweigungsdatum $(\mathfrak{g}_0\colon k_1,\dots,k_t)$ definieren, wobei t die Anzahl der Verzweigungspunkte der Projektion $\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}/G$ ist, also die Anzahl $|\mathfrak{B}|$ der nicht-regulären Bahnen in $\mathfrak{X}/G$, sowie $k_1,\dots,k_t$ die Quotienten aus $|G|$ und Bahnlänge der Elemente von $\mathfrak{B}$ sind und $\mathfrak{g}_0$ das Geschlecht von $\mathfrak{X}/G$ ist.

Hurwitzdaten (siehe Definition 4.8) sind eine Abwandlung dieser Verzweigungsdaten. Im Folgenden beschreiben wir, wie aus einem Hurwitzdatum ein Verzweigungsdatum (kurz VD) wird und umgekehrt. Sei dazu $\mathfrak{X}$ eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $\mathfrak{g} \geq 2$ so, dass $G \leqslant \mathrm{Aut}(\mathfrak{X})$ ist und $\mathfrak{X}/G$ das Geschlecht $\mathfrak{g}_0 \geq 0$ hat.

Ist $l := [G,\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0 \mid [m_1,n_1],\dots,[m_r,n_r]]$ ein HD zu $\mathfrak{X}$ und G, so ist das zugehörige VD

$$(\mathfrak{g}_0\colon \underbrace{m_1,\dots,m_1}_{n_1\text{-mal}},\dots,\underbrace{m_r,\dots,m_r}_{n_r\text{-mal}}).$$

[1] Da $\mathfrak{M}$ eine Menge ist, enthält sie keine Zahlen doppelt. Daher können wir eine strikte Ordnung von $k_1,\dots,k_r$ voraussetzen.

Sei umgekehrt $(\mathfrak{g}_0\colon k_1,\ldots,k_t)$ ein VD zu $\mathfrak{X}$ und G, wobei $k_1 \leq \ldots \leq k_t$ gelte. Da $k_1,\ldots,k_t$ nicht notwendigerweise paarweise verschieden sind, seien $M := \{k_1,\ldots,k_t\}$, $r := |M|$ und $M = \{m_1,\ldots,m_r\}$ mit $m_1 < \ldots < m_r$. Für alle $i \in \{1,\ldots,r\}$ sei n_i die Anzahl, wie oft m_i in $k_1,\ldots,k_t$ vorkommt. Dann ist

$$[G,\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0 \mid [m_1,n_1],\ldots,[m_r,n_r]]$$

das zum VD $(\mathfrak{g}_0\colon k_1,\ldots,k_t)$ gehörige HD.

Beispiel 4.10

(i) *Sei wieder* $\mathfrak{X}$ *die Kleinsche Kurve. Dann ist* $[\mathrm{PSL}_2(7),3,0 \mid [2,1],[3,1],[7,1]]$ *ein Hurwitzdatum zu* $\mathfrak{X}$*, siehe [Mac2] und Beispiel 4.2 (i).*

(ii) *Ist* $\mathfrak{X}$ *die MacBeath Kurve, so ist* $[\mathrm{PSL}_2(8),7,0 \mid [2,1],[3,1],[7,1]]$ *ein HD zu* $\mathfrak{X}$*, siehe [Mac1] und Beispiel 4.2 (ii).*

(iii) *Seien* $G = \mathcal{S}_4$ *und* Ω *die RF-Menge aus Beispiel 4.2 (iii). Dann ist* $[G,21,1 \mid [2,2],[3,1]]$ *ein HD zu* Ω*:*

G hat mit Beispiel 4.2 (iii) drei nicht-reguläre Bahnen Δ_1, Δ_2 *und* Δ_3 *in* Ω*. Dabei sind* $|\Delta_1| = |\Delta_2| = 12$ *und* $|\Delta_3| = 8$*. Daher gilt* $m_1 = 2$ *und* $n_1 = 2$ *sowie* $m_2 = 3$ *und* $n_2 = 1$ *nach Definition 4.8 (i). Ferner gilt Eigenschaft (ii) der Definition für* $\mathfrak{g}_0 = 1$*, da*

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} &= 1 + \frac{|G|}{2}\left(2(\mathfrak{g}_0 - 1) + \sum_{j=1}^{r} n_j \left(1 - \frac{1}{m_j}\right)\right)\\ &= 1 + 12\left(2\cdot 0 + 2\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\right) + 1\cdot\left(1 - \frac{1}{3}\right)\right)\\ &= 1 + 12\left(1 + \frac{2}{3}\right) = 1 + 12\cdot\frac{5}{3} = 21 \geq 2\end{aligned}$$

und $\mathfrak{g}$ *eine natürliche Zahl ist.*

Bemerkung 4.11
Seien (G,Ω) ein RF-Paar und $l := [G,\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0 \mid [m_1,n_1],\ldots,[m_r,n_r]]$ ein HD zu Ω. Seien $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{M}$ und $k_1,\ldots,k_r$, $m_1,\ldots,m_r$, $n_1,\ldots,n_r$ wie in Definition 4.8.

(i) Wegen Definition 4.8 (i) sind $m_1 < \ldots < m_r$ und $n_1,\ldots,n_r > 0$.

(ii) Ist $r = 0$, also $\mathfrak{B} = \mathfrak{M} = \varnothing$, so schreiben wir $[G,\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0 \mid 0]$ statt $[G,\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0 \mid\,]$.

(iii) Seien $\Delta \in \mathfrak{B}$ und $i \in \{1,\ldots,r\}$ so, dass $|\Delta| = k_i$ ist. Dann ist für alle $\alpha \in \Delta$ schon $|G_\alpha| = m_i$, da Δ eine G-Bahn ist und $|G_\alpha| = \frac{|G|}{|\Delta|} = \frac{|G|}{k_i} = m_i$ nach Definition 4.8 gilt.

(iv) In dieser Arbeit werden wir folgende Schreibweise verwenden:

„$l = [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [2, n_1], [3, n_2]]$ für bzw. mit $\mathfrak{g}_0 > 0$ und $n_1, n_2 \in \{0, 1, 2\}$“.

Das ist eine Kurzform dafür, dass l für alle $\mathfrak{g}_0 \in \mathbb{N}$ folgende Ausdrücke annehmen kann:

- $l = [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid 0]$ (hier $n_1 = 0$ und $n_2 = 0$)
- $l = [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [2, 1]]$ (hier $n_1 = 1$ und $n_2 = 0$)
- $l = [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [3, 1]]$ (hier $n_1 = 0$ und $n_2 = 1$)
- $l = [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [2, 1], [3, 1]]$ (hier $n_1 = 1$ und $n_2 = 1$)
- $l = [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [2, 1], [3, 2]]$ (hier $n_1 = 1$ und $n_2 = 2$)
- $l = [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [2, 2], [3, 1]]$ (hier $n_1 = 2$ und $n_2 = 1$)
- $l = [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [2, 2], [3, 2]]$ (hier $n_1 = 2$ und $n_2 = 2$)

Mit dem Fall $l = [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid 0]$ (hier $n_1 = 0$ und $n_2 = 0$) werden wir uns jedoch separat beschäftigen, wodurch wir in den meisten Fällen $n_1 + \ldots + n_r \geq 1$ für HD $[G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1, n_1], \ldots, [m_r, n_r]]$ fordern werden.

(v) Hurwitz-Daten geben uns einerseits Informationen über die Operation von G auf Ω durch die Ordnung der Punktstabilisatoren und der Anzahl an, wie viele nicht-reguläre Bahnen es zu jeder Stabilisatorordnung gibt. Andererseits halten wir die Zahlen $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}_0$ fest, die später in der Anwendung von RF-Mengen und Hurwitzdaten auf Riemannsche Flächen eine Interpretation als Geschlecht bekommen.

Nachfolgend zeigen wir, dass die Existenz eines Hurwitzdatums zu einem RF-Paar (G, Ω) an eine zusätzliche Voraussetzung geknüpft ist.

Lemma 4.12
Sei (G, Ω) ein RF-Paar. Falls $|G|$ gerade ist, sei zusätzlich die Anzahl der nicht-regulären G-Bahnen von Ω mit ungerader Länge gerade.

Dann gibt es $r, m_1, \ldots, m_r, n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}_0$ sowie $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $\mathfrak{g} \geq 2$ so, dass $l := [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1, n_1], \ldots, [m_r, n_r]]$ ein HD zu Ω ist.

Beweis
Mit Definition 4.1 seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $\mathfrak{B} := \{\Delta_1, \ldots, \Delta_n\}$ die Menge der nicht-regulären Bahnen von G in der Operation auf Ω.

Schritt 1: *Der Fall $n = 0$:*

Ist $n = 0$, also $\mathfrak{B} = \varnothing$, so seien $\mathfrak{g}_0 \geq 2$ beliebig und

$$\mathfrak{g} := 1 + \frac{|G|}{2}(2\mathfrak{g}_0 - 2) = 1 + |G|\,(\mathfrak{g}_0 - 1) \geq 1 + |G| \geq 2.$$

Dann ist $l = [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid 0]$ ein HD zu Ω mit Definition 4.8. $\square$

Schritt 2: *Konstruktion von $r, m_1, \ldots, m_r, n_1, \ldots, n_r$:*

Wegen Schritt 1 sei $n > 0$. Mit Lemma 4.5 gibt es Elemente $x_1, \ldots, x_n \in G^\#$ so, dass für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ ein $\alpha_i \in \Delta_i$ derart existiert, dass $G_{\alpha_i} = x_i$ gilt. Seien $\mathfrak{M} := \{o(x_i) \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$ und $r := |\mathfrak{M}|$. Da $n > 0$ ist, folgt $r > 0$.

Seien $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$ so, dass $m_1 < m_2 < \ldots < m_r$ und $\mathfrak{M} = \{m_1, \ldots, m_r\}$ ist. Für alle $\Delta \in \mathfrak{B}$ gibt es dann ein $i \in \{1, \ldots, r\}$ so, dass $|\Delta| = \frac{|G|}{m_i}$ gilt, da G endlich ist. Für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei n_i die Anzahl der Bahnen in $\mathfrak{B}$ mit Mächtigkeit $\frac{|G|}{m_i}$. $\square$

Seien jetzt $R := \sum_{i=1}^{r} n_i \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) = \sum_{i=1}^{r} n_i \frac{m_i - 1}{m_i}$ und $T := \frac{|G| \cdot R}{2}$.

Schritt 3: *T ist eine natürliche Zahl:*

Zunächst ist $\frac{|G|}{m_i} \in \mathbb{N}$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit dem Satz von Lagrange. Sei zuerst $|G|$ ungerade. Dann gilt für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$, dass m_i ungerade und $m_i - 1$ gerade ist. Daher folgt

$$T = \frac{|G| \cdot R}{2} = \underbrace{\frac{|G|}{m_1}}_{\in \mathbb{N}} \cdot \underbrace{n_1}_{\in \mathbb{N}} \cdot \underbrace{\frac{m_1 - 1}{2}}_{\in \mathbb{N}} + \ldots + \underbrace{\frac{|G|}{m_r}}_{\in \mathbb{N}} \cdot \underbrace{n_r}_{\in \mathbb{N}} \cdot \underbrace{\frac{m_r - 1}{2}}_{\in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}.$$

Sei nun $|G|$ gerade. Wir sortieren zunächst $m_1, \ldots, m_r$. Seien $k \in \{1, \ldots, r\}$ fest und $\hat{m}_1, \ldots, \hat{m}_r$ so, dass $\{\hat{m}_1, \ldots, \hat{m}_r\} = \{m_1, \ldots, m_r\}$ gilt, und so, dass für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ und alle $j \in \{k+1, \ldots, r\}$ gilt, dass $\frac{|G|}{\hat{m}_i}$ ungerade und $\frac{|G|}{\hat{m}_j}$ gerade ist.

Sei $i \in \{1, \ldots, r\}$ beliebig. Ist $j \in \{1, \ldots, r\}$ so, dass $\hat{m}_i = m_j$ gilt, dann definiere $\hat{n}_i := n_j$. Seien weiter $T_- := \frac{|G|}{2} \cdot \sum_{i=1}^{k} \hat{n}_i \left(1 - \frac{1}{\hat{m}_i}\right)$ und $T_+ := \frac{|G|}{2} \cdot \sum_{i=k+1}^{r} \hat{n}_i \left(1 - \frac{1}{\hat{m}_i}\right)$. Dann gilt $T = T_+ + T_-$.

Zunächst zu T_+: Nach Wahl ist $\frac{|G|}{\hat{m}_i}$ gerade für alle $i \in \{k+1, \ldots, r\}$. Daher gilt wieder mit dem Satz von Lagrange

$$T_+ = \underbrace{\frac{|G|}{2\hat{m}_{k+1}}}_{\in \mathbb{N}} \cdot \underbrace{\hat{n}_{k+1}}_{\in \mathbb{N}} \cdot \underbrace{(\hat{m}_{k+1} - 1)}_{\in \mathbb{N}} + \ldots + \underbrace{\frac{|G|}{2\hat{m}_r}}_{\in \mathbb{N}} \cdot \underbrace{\hat{n}_r}_{\in \mathbb{N}} \cdot \underbrace{(\hat{m}_r - 1)}_{\in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}_0.$$

Ferner ist genau dann $T_+ = 0$, wenn $r - k = 0$ gilt.

Nun zu T_-: Für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ ist $K_i := \frac{|G|}{\hat{m}_i} \cdot \hat{n}_i \cdot (\hat{m}_i - 1) = \sum_{j=1}^{\hat{n}_i} \frac{|G|}{\hat{m}_i} \cdot (\hat{m}_i - 1)$ eine Summe mit $\hat{n}_i$ gleichen und ungeraden Summanden. Daher ist $2T_- = \sum_{i=1}^{k} K_i$ eine Summe von $\hat{n}_1 + \ldots + \hat{n}_k$ Summanden, die ungerade sind. Nach Voraussetzung ist $\hat{n}_1 + \ldots + \hat{n}_k$ gerade, also $2T_-$ eine gerade natürliche Zahl oder 0 und nur genau dann 0, wenn $k = 0$ gilt. Also ist $T_- = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} K_i$ eine natürliche Zahl oder 0 und nur genau dann 0, wenn $k = 0$ gilt.

Nun ist $T = T_- + T_+$ eine natürliche Zahl oder 0 und nur genau dann 0, wenn T_+ und T_- beide 0 sind. Das ist genau dann der Fall, wenn $k = 0$ und $r - k = 0$

gleichzeitig gilt. Da jedoch $n > 0$ nach Voraussetzung ist, folgt $r > 0$. Also ist $T \neq 0$. $\square$

Schritt 4: *Konstruktion von $\mathfrak{g}_0$ und $\mathfrak{g}$:*

Da T nach Schritt 3 eine natürliche Zahl und echt größer als 0 ist, können wir nun $\mathfrak{g}_0$ anhand von einem Kriterium wählen:

Falls $1 \leq T \leq |G|$ gilt, so sei $\mathfrak{g}_0 \geq 1$ beliebig. Andernfalls sei $\mathfrak{g}_0 \geq 0$ beliebig. Wir setzten $\mathfrak{g} := 1 + |G|\,(\mathfrak{g}_0 - 1) + T$. $\square$

Schritt 5: *Nachweis, dass $l := [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1, n_1], \ldots, [m_r, n_r]]$ ein HD zu Ω ist:*

Schritt 2 liefert genau die Eigenschaften der Definition 4.8 (*i*) eines HD. Wir überprüfen noch Eigenschaft (*ii*) der Definition 4.8. Es gilt

$$\begin{aligned}
&1 + \tfrac{|G|}{2}\left(2(\mathfrak{g}_0 - 1) + \sum_{i=1}^{r} n_i \left(1 - \tfrac{1}{m_i}\right)\right) \\
&= 1 + \tfrac{|G|}{2} 2(\mathfrak{g}_0 - 1) + \tfrac{|G|}{2} \sum_{i=1}^{r} n_i \left(1 - \tfrac{1}{m_i}\right) \\
&= 1 + |G|\,(\mathfrak{g}_0 - 1) + T = \mathfrak{g}
\end{aligned}$$

nach Schritten 2 und 4. Da $T \in \mathbb{N}$ nach Schritt 3 gilt und $|G|\,(\mathfrak{g}_0 - 1) \in \mathbb{Z}$ ist, folgt $\mathfrak{g} \in \mathbb{Z}$. Falls $\mathfrak{g}_0 = 0$ gilt, so ist $T \geq |G| + 1$ nach Schritt 4. Dann gilt

$$\mathfrak{g} = 1 + |G|\,(\mathfrak{g}_0 - 1) + T \geq 1 - |G| + |G| + 1 \geq 2.$$

Ist $\mathfrak{g}_0 = 1$, so folgt $T \geq 1$ und dann gilt $\mathfrak{g} \geq 1 + 0 + 1 \geq 2$. Falls $\mathfrak{g}_0 \geq 2$ ist, gilt $\mathfrak{g} \geq 1 + |G| + 1 \geq 2$. In allen Fällen ist also $\mathfrak{g}$ eine ganze Zahl und größer oder gleich 2. Damit ist l ein HD für Ω. $\blacksquare$

In Lemma 4.12 haben wir gezeigt, dass die Existenz eines Hurwitzdatums zu einem RF-Paar (G, Ω) an die Existenz von einer geraden Anzahl an nicht-regulären G-Bahnen von Ω von ungerader Länge gebunden ist. Die zusätzliche Voraussetzung im Lemma für Gruppen G von gerader Ordnung ist notwendig, um Eigenschaft (*ii*) der Definition 4.8 nachweisen zu können.

Wir werden jedoch mit einfachen, nicht-abelschen Gruppen G arbeiten. Da G einfach und nicht-abelsch ist, ist einerseits $|G|$ stets durch 2 teilbar (siehe das Odd-Order-Theorem [FeTh]). Andererseits ist G keine 2-Gruppe, weil 2-Gruppen nilpotent sind (siehe 5.1.3 in [KuSt]). Ferner besitzt G nicht-zyklische Sylow 2-Untergruppen von Ordnung mindestens 4, da andernfalls G mit 7.2.2 in [KuSt] ein nichttriviales 2-Komplement von ungerader Ordnung besitzt. Jedoch ist G einfach und besitzt damit keine nichttrivialen Normalteiler.

Ist also Ω eine RF-Menge von G und $\alpha \in \Omega$, so ist G_α die triviale Gruppe oder zyklisch mit Definition 4.1 (*iv*). Dadurch kann mit obiger Betrachtung kein Punktstabilisator in der Operation von G auf Ω eine Sylow 2-Untergruppe von G enthalten, wodurch alle G-Bahnen von Ω eine gerade Länge haben.

Wir werden nun zeigen, dass wir zu jedem Hurwitzdatum eine RF-Menge konstruieren können:

Lemma 4.13
Seien $T := \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \exists g \in G^{\#} : o(g) = n \right\}$ *und* $l := [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1, n_1], \dots, [m_r, n_r]]$ *eine Liste mit folgenden Eigenschaften:*

(i) Es ist $0 \leq r \leq |T|$*, ferner sind* $m_1, \dots, m_r \in T$ *paarweise verschieden und* $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$.

(ii) Es gibt ein $\mathfrak{g}_0 \in \mathbb{N}_0$ *so, dass*

$$\mathfrak{g} := 1 + \frac{|G|}{2} \left(2(\mathfrak{g}_0 - 1) + \sum_{j=1}^{r} n_j \left(1 - \frac{1}{m_j} \right) \right)$$

eine natürliche Zahl und $\mathfrak{g} \geq 2$ *ist.*

Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}_0$*, Elemente* $x_1, \dots, x_m \in G^{\#}$ *so, dass* l *ein Hurwitzdatum zu der von* $x_1, \dots, x_m$ *induzierten RF-Menge ist.*

Beweis
Seien $l := [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1, n_1], \dots, [m_r, n_r]]$ und $m := n_1 + \ldots + n_r$. Wegen (i) besitzt G Elemente der Ordnung $m_1, \dots, m_r$. Seien weiter $x_1, \dots, x_{n_1} \in G$ von Ordnung m_1, $x_{n_1+1}, \dots, x_{n_1+n_2} \in G$ von Ordnung m_2, etc. $x_{n_1+\ldots+n_{r-1}+1}, \dots, x_{n_1+\ldots+n_r} \in G$ von Ordnung m_r. Insbesondere sind $m_1, \dots, m_r$ verschieden von 1 nach der Definition von T. Daher sind auch $x_1, \dots, x_m$ nichttrivial. Sei Ω die von $x_1, \dots, x_m$ induzierte RF-Menge. Dann ist l wegen (ii) des Lemmas und nach Definition 4.8 ein HD zu Ω.

■

Hurwitzdaten sind an Verzweigungsdaten von Riemannschen Flächen angelehnt. In der Literatur (z.B. [Bre] und [Bro]) ist es üblich, dass zu jedem Verzweigungsdatum die Existenz einer Riemannschen Fläche vorausgesetzt wird. Wir wollen jedoch gewisse Verzweigungen und damit Wirkungen von Gruppen auf Riemannschen Flächen untersuchen, *ohne* zuerst die Existenz einer zugehörigen Fläche nachweisen zu müssen. Dazu wurden RF-Mengen und Hurwitzdaten eingeführt. Durch Lemma 4.13 genügt es, Hurwitzdaten anzugeben, ohne die Existenz einer RF-Menge zuvor zu fordern. Das halten wir fest:

Definition 4.14
Seien $T := \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, \exists g \in G^{\#} : o(g) = n \right\}$ *und* $l := [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1, n_1], \dots, [m_r, n_r]]$ *eine Liste. Wir nennen* l *genau dann* ***Hurwitzdatum****, wenn* l *die Eigenschaften (i) und (ii) von Lemma 4.13 erfüllt. Ferner nennen wir die nach Lemma 4.13 zu* l *gehörigen Elemente* $x_1, \dots, x_m$ *dann* ***zugehörige RF-Elemente****.*

Lemma 4.15
Sei $l := [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1, n_1], \dots, [m_r, n_r]]$ *eine Liste, die Teil (i) der Definition 4.8 bzw. des Lemmas 4.13 erfüllt. Seien* $k := n_1 + \ldots + n_r \geq 1$ *und* $R := \sum_{i=1}^{r} n_i \cdot \left(1 - \frac{1}{m_i} \right)$*. Dann gilt:*

(i) $R < 2$ *genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen gilt:*

- *Es gilt* $k \leq 2$ *und für alle* $i \in \{1, \ldots, r\}$ *ist* m_i *beliebig,*
- *es sind* $k = 3$ *und* $l = [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [2,2], [m_2, 1]]$*, wobei* m_2 *beliebig ist, oder*
- *es gilt* $k = 3$ *und* $l \in \{[G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [2,1], [3,2]],\ [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [2,1], [3,1], [4,1]],\ [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [2,1], [3,1], [5,1]]\}$.

(ii) $R = 2$ *genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen gilt:*

- *Es gilt* $k = 3$ *und* $l \in \{[G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [2,1], [3,1], [6,1]],\ [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [2,1], [4,2]],\ [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [3,3]]\}$ *oder*
- *es gilt* $k = 4$ *und* $l = [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [2,4]]$.

(iii) Wenn $R > 2$ *ist, dann gilt* $R > 2 + \frac{1}{42}$.

Ist ferner l *ein HD und gilt* $R \leq 2$*, so ist* $\mathfrak{g}_0 \geq 1$.

Beweis
Die Aussagen in (i) bis (iii) stehen in Lemma 3.8 in [Mir]. Seien also l ein HD und $R \leq 2$. Angenommen, es gilt $\mathfrak{g}_0 = 0$. Dann folgt mit der Hurwitz-Formel (4.1):

$$\begin{aligned} 2 \leq 2(\mathfrak{g} - 1) &= |G| \cdot (2(\mathfrak{g}_0 - 1) + R) \\ &\leq |G| \cdot (2 \cdot (0 - 1) + 2) \\ &= |G| \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

ein Widerspruch zur Voraussetzung $\mathfrak{g} \geq 2$ für Hurwitzdaten. ∎

4.2 Ausnahme-Hurwitzdaten und einfache Gruppen

Wir erinnern nochmal an den Begriff *Fixität* aus Definition 1.1. Eine Gruppe G operiert genau dann auf einer Menge Ω *mit Fixität* $k \in \mathbb{N}_0$, wenn es ein Element $g \in G^{\#}$ gibt so, dass $|\mathrm{fix}_{\Omega}(g)| = k$ gilt, und kein nichttriviales Element von G mehr als k Punkte in Ω fest lässt. Wenn wir dabei die Menge Ω oder die Ordnung $m \in \mathbb{N}$ eines Punktstabilisators in einer transitiven Operation von G auf einer Menge Ω aus dieser Definition spezifizieren wollen, so schreiben wir auch ***G* hat Fixität *k* bzgl. Ω** bzw. ***G* hat Fixität *k* bzgl. *m***.

In diesem Teilabschnitt wollen wir nun die Grundlage für das Studium von Gruppenoperationen auf RF-Mengen mit Fixität höchstens 4 legen. Dazu beweisen wir zunächst ein Resultat, mit dem man Fixpunkte einer solchen Operation zählen kann, bevor wir eine weitere Klasse von speziellen Hurwitzdaten motivieren und definieren.

Das nachfolgende Lemma ist angelehnt an ein Lemma (vgl. Lemma 10.4 in [Bre] oder Gleichung (2.17) in [Bro, S. 244]) über die Anzahl der Fixpunkte von Automorphismen von kompakten Riemannschen Flächen. Da wir dieses Resultat für

Gruppenoperationen auf RF-Mengen benötigen, beweisen wir es erneut. Wir haben in diesem Lemma und dem Beweis bewusst X, X^+ und X^- als Listen und nicht als Mengen geschrieben, da die RF-Elemente $x_{1,1}, \dots, x_{1,n_1}, \dots, x_{r,1}, \dots, x_{r,n_r}$ nicht notwendig paarweise verschieden sind, wir jedoch alle diese Elemente mit der Anzahl, wie oft sie jeweils in $x_{1,1}, \dots, x_{r,n_r}$ vorkommen, für die korrekte Anzahl an Fixpunkten benötigen.

Lemma 4.16 (Fixpunkte in RF-Mengen)
Seien $l := [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1, n_1], \dots, [m_r, n_r]]$ ein HD sowie $x_{1,1}, \dots, x_{1,n_1}, \dots, x_{r,1}, \dots, x_{r,n_r} \in G^\#$ zugehörige RF-Elemente, Ω die induzierte RF-Menge und $X := [x_{1,1}, \dots, x_{1,n_1}, \dots, x_{r,1}, \dots, x_{r,n_r}]$. Für alle $g, h \in G^\#$ sei

$$\alpha_g(h) := \begin{cases} 1, & \textit{falls } h \textit{ zu einer Potenz von } g \textit{ konjugiert ist,} \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist für alle $g \in G^\#$ durch $|N_G(\langle g \rangle)| \cdot \sum\limits_{x \in X} \frac{\alpha_x(g)}{o(x)}$ die Anzahl der Fixpunkte von g in Ω gegeben.

Beweis
Sei $g \in G^\#$ beliebig.

<u>Schritt 1:</u> *Anzahl der Fixpunkte von g in einer G-Bahn von Ω:*

Sei $\Delta \subseteq \Omega$ eine G-Bahn. Ist die Operation von G auf Δ regulär, so folgt sofort $|\mathrm{fix}_\Delta(g)| = 0$, da nach Wahl $g \neq 1_G$ gilt. G operiere also nicht-regulär auf Δ. Da Ω eine von $x_{1,1}, \dots, x_{1,n_1}, \dots, x_{r,1}, \dots, x_{r,n_r}$ induzierte RF-Menge ist, gibt es nach Lemma 4.4 ein $x \in X$ und ein $\alpha \in \Delta$ derart, dass $G_\alpha = \langle x \rangle$ gilt.

Fall 1: Sei g zu einer Potenz von x in G konjugiert. Seien $h, y \in G$ so, dass $x^y = h$ und $g \in \langle h \rangle$ gilt. Dann folgt $g \in \langle x \rangle^y = G_{\alpha^y}$. Da $G_{\alpha^y} = (G_\alpha)^y$ zyklisch ist, gilt $\langle g \rangle^G \cap G_{\alpha^y} = \langle g \rangle^{G_{\alpha^y}}$. Mit Lemma 1.2 und wegen $G_{\alpha^y} = \langle h \rangle$ folgt nun

$$|\mathrm{fix}_\Delta(g)| = \frac{|N_G(\langle g \rangle)|}{|N_{G_{\alpha^y}}(\langle g \rangle)|} = \frac{|N_G(\langle g \rangle)|}{|G_{\alpha^y}|} = \frac{|N_G(\langle g \rangle)|}{o(x)}.$$

Fall 2: Sei g nicht zu einer Potenz von x in G konjugiert. Dann folgt für alle $\beta \in \Delta$ schon $g \notin G_\beta$. Also gilt

$$|\mathrm{fix}_\Delta(g)| = 0 = 0 \cdot \frac{|N_G(\langle g \rangle)|}{o(x)}.$$

□

<u>Schritt 2:</u> *Anzahl der Fixpunkte von g in ganz Ω:*

Da Ω eine von $x_{1,1}, \dots, x_{1,n_1}, \dots, x_{r,1}, \dots, x_{r,n_r}$ induzierte RF-Menge ist, ist $n_1 + \dots + n_r$ mit Lemma 4.4 die Anzahl der nicht-regulären G-Bahnen von Ω. Ferner liefert selbiges Lemma, dass es zu jedem $x \in [x_{1,1}, \dots, x_{1,n_1}, \dots, x_{r,1}, \dots, x_{r,n_r}] = X$

eine nicht-reguläre G-Bahn $\Delta \subseteq \Omega$ so gibt, dass $\langle x\rangle$ ein Punktstabilisator in der Operation von G auf Δ ist und umgekehrt.

Seien also $X^+ := [y \in X \mid g \text{ ist in } G \text{ zu einer Potenz von } y \text{ konjugiert}]$ und $X^- := [y \in X \mid g \text{ ist nicht zu einer Potenz von } y \text{ in } G \text{ konjugiert}]$. Dann ist mit Schritt 1 und nach Wahl von X^+ schon

$$\begin{aligned}|\mathrm{fix}_\Omega(g)| &= \sum_{x\in X^+} \frac{|N_G(\langle g\rangle)|}{o(x)}\\ &= \sum_{x\in X^+} 1\cdot\frac{|N_G(\langle g\rangle)|}{o(x)} + \sum_{y\in X^-} 0\cdot\frac{|N_G(\langle g\rangle)|}{o(y)}\\ &= |N_G(\langle g\rangle)|\cdot\sum_{x\in X}\frac{\alpha_x(g)}{o(x)}.\end{aligned}$$

■

Wie der Frage 2 dieser Arbeit zu entnehmen ist, wollen wir Gruppenwirkungen von Fixität maximal 4 auf kompakten Riemannschen Flächen untersuchen. Mit Lemma 4.3 ist es uns möglich diese Frage auf RF-Mengen zu erweitern.

Wir untersuchen nun die Wirkung einer Gruppe G auf einer RF-Menge Ω unter der Voraussetzung, dass G mit Fixität maximal 4 auf Ω operiert. Unter dieser Voraussetzung können wir mit Lemma 4.16 festhalten, dass G dann auch Fixität maximal 4 auf den jeweiligen G-Bahnen von Ω hat. An diesem Punkt können wir die Resultate des Projekts und damit die Inhalte von Kapitel 3 verwenden, da die Stabilisatoren von Punkten von Ω in G nach Definition 4.1 (*iv*) zyklisch sind.

Bevor wir eine weitere Unterklasse von Hurwitzdaten definieren, die uns dem Ziel einer Klassifikation der Wirkungen von einfachen, nicht-abelschen Gruppen auf RF-Mengen mit Fixität höchstens 4 näher bringt, stellen wir folgendes Beispiel vor:

Beispiel 4.17

G wirkt auf $\Delta := G/1 \cong G$ per Rechtsmultiplikation als transitive und reguläre Permutationsgruppe, G operiert also mit Fixität 0 bzgl. Δ. Im Bezug auf RF-Mengen gehört hierzu das HD $[G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid 0]$. Ist G eine transitive Permutationsgruppe von Fixität 1, so ist G eine Frobeniusgruppe mit Satz V.8.2 (a) aus [Hup1].

Sei $G \cong \mathcal{S}_4$ in der natürlichen Wirkung. Dann hat G Fixität 2 bzgl. 2 und gleichzeitig Fixität 4 bzgl. 2. Das liegt daran, dass G zwei Konjugiertenklassen von zyklischen Untergruppen der Ordnung 2 hat, nämlich $\langle(12)\rangle^G$ und $\langle(12)(34)\rangle^G$.

In der Operation von G auf $\Delta_1 := G/\langle(12)\rangle$ per Rechtsmultiplikation sind die Punktstabilisatoren konjugiert zu $U := \langle(12)\rangle$. Diese haben Index 2 in ihren Normalisatoren in G, denn es gilt $N_G(U) = \langle(12),(34)\rangle$. Nach Lemma 1.2 haben die Transposition (12) und alle zu (12) konjugierten Transpositionen jeweils genau zwei Fixpunkte in Δ_1.

In der Wirkung von G auf $\Delta_2 := G/\langle(12)(34)\rangle$ per Rechtsmultiplikation sind die Punktstabilisatoren konjugiert zu $\langle(12)(34)\rangle$. Diese haben Index 4 in ihren Normalisatoren, denn $N_G(\langle(12)(34)\rangle) = \langle(1324),(34)\rangle$ ist eine Sylow 2-Untergruppe von G. Mit Lemma 1.2 hat jede Doppeltransposition vier Fixpunkte in Δ_2.

Definition 4.18 (Ausnahme-Hurwitzdatum, AHD)
Seien G eine Gruppe und $l := [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1, n_1], \ldots, [m_r, n_r]]$ ein HD mit $r \geq 1$. Für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$ gelte Folgendes:

Sei M die Menge aller G-Konjugiertenklassen von zyklischen Untergruppen der Ordnung m_i. Für alle $a \in \{1,2,3,4\}$ sei ferner $t_a \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der Konjugiertenklassen $C \in M$, für die gilt, dass G für alle $U \in C$ mit Fixität a auf G/U per Rechtsmultiplikation wirkt.

*Genau dann heißt l **Ausnahme-Hurwitzdatum** (kurz **AHD**), wenn*

$$n_i \leq 4t_1 + 2t_2 + t_3 + t_4$$

für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$ gilt.

Beispiel 4.19
Es ist $l := [\mathcal{S}_4, 9, 0 \mid [2,1], [3,1], [4,2]]$ ein AHD:

Zunächst ist l ein HD, denn $G := \mathcal{S}_4$ hat Elemente der Ordnung 2, 3 und 4 und für $\mathfrak{g}_0 = 0$ und $\mathfrak{g} = 9$ gilt

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{|G|}{2}\left(2(\mathfrak{g}_0 - 1) + \sum_{j=1}^{r} n_j \left(1 - \frac{1}{m_j}\right)\right) \\
&= 1 + 12\left(-2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{2}\right)\right) \\
&= 1 + 12\left(\frac{2}{3}\right) = 1 + 8 = 9 = \mathfrak{g} \geq 2
\end{aligned}$$

Wir überprüfen Definition 4.18 für alle Verzweigungszahlen. Seien zuerst $m = 2$ und M die Menge aller G-Konjugiertenklassen von zyklischen Untergruppen der Ordnung m. Dann ist $M = \{\langle(12)\rangle^G, \langle(12)(34)\rangle^G\}$. Bzgl. $G/\langle(12)\rangle$ hat G Fixität 2 und bzgl. $G/\langle(12)(34)\rangle$ operiert G mit Fixität 4 (siehe Beispiel 4.17). Es gilt also $t_2 = 1 = t_4$ und $t_1 = t_3 = 0$. Nun ist $4t_1 + 2t_2 + t_3 + t_4 = 3 \geq 1 = n_1$ erfüllt.

Seien $m = 3$ und M die Menge aller G-Konjugiertenklassen von zyklischen Untergruppen der Ordnung m. Dann ist $M = \{\langle(123)\rangle^G\}$. Sei $U := \langle(123)\rangle$. Dann ist $N_G(U) = \langle(123), (12)\rangle$ isomorph zu $\mathcal{S}_3$. Insbesondere hat U Index 2 in seinem Normalisator, also operiert G mit Fixität 2 auf G/U per Rechtsmultiplikation. Da $|M| = 1$ ist, gilt $t_2 = 1$ und $t_1 = t_3 = t_4 = 0$. Es ist $4t_1 + 2t_2 + t_3 + t_4 = 2 \geq 1 = n_2$ erfüllt.

Zuletzt sei $m = 4$ und M die Menge aller G-Konjugiertenklassen von zyklischen Untergruppen der Ordnung m. Dann ist $M = \{\langle(1234)\rangle^G\}$. Sei $U := \langle(1234)\rangle$. Dann ist $N_G(U) = \langle(1234), (24)\rangle$ eine Sylow 2-Untergruppe. Insbesondere hat U Index 2 in seinem Normalisator und G operiert mit Fixität 2 auf G/U per Rechtsmultiplikation. Da $|M| = 1$ ist, gilt $t_2 = 1$ und $t_1 = t_3 = t_4 = 0$. Weiter ist

$$4t_1 + 2t_2 + t_3 + t_4 = 2 \geq 2 = n_3$$

erfüllt. Nun ist l ein AHD.

Lemma 4.20
Sei (G,Ω) ein RF-Paar mit HD $l := [G,\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0 \mid [m_1,n_1],\ldots,[m_r,n_r]]$ und G operiere mit Fixität höchstens 4 auf Ω. Dann ist l ein AHD oder G operiert regulär.

Beweis
Sei die Operation von G auf l nicht-regulär. Dann gilt $l \neq [G,\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0 \mid 0]$ und $r \geq 1$. Da l ein HD ist, gibt es mit den Lemmata 4.13 und 4.7 RF-Elemente $x_{1,1},\ldots,x_{1,n_1},\ldots,$ $x_{r,1},\ldots,x_{r,n_r} \in G$ so, dass $o(x_{i,j}) = m_i$ für alle $i \in \{1,\ldots,r\}$ und $j \in \{1,\ldots,n_i\}$ gilt und Ω äquivalent zu der von $x_{1,1},\ldots,x_{r,n_r}$ induzierten RF-Menge ist.

Sei $i \in \{1,\ldots,r\}$ beliebig. Da G mit Fixität $k \in \mathbb{N}$, $k \leq 4$ auf Ω operiert, gilt $|\mathrm{fix}_\Omega(x_{i,j})| \leq 4$ für alle $j \in \{1,\ldots,n_i\}$. Sei M die Menge aller G-Konjugiertenklassen von zyklischen Untergruppen der Ordnung m_i und für alle $a \in \{1,2,3,4\}$ sei $t_a \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der Klassen $C \in M$ für die gilt, dass G mit Fixität a auf der Menge der Rechtsnebenklassen von $U \in C$ operiert. Sei $N := \left\{\langle x_{i,j}\rangle^G \,\middle|\, j \in \{1,\ldots,n_i\}\right\}$. Dann ist $N \subseteq M$ nach Voraussetzung.

Seien jetzt $j \in \{1,\ldots,n_i\}$ beliebig, $U := \langle x_{i,j}\rangle$ und $C := U^G$. Seien ferner $m \in \mathbb{N}$, $m \leq n_i$, die Anzahl der zyklischen Gruppen von $\langle x_{i,1}\rangle,\ldots,\langle x_{i,n_i}\rangle$, die in C enthalten sind, sowie $b \in \{1,2,3,4\}$ so, dass G mit Fixität b auf G/U per Rechtsmultiplikation operiert. Mit Lemma 4.16 hat $x_{i,j}$ genau $m \cdot b$ viele Fixpunkte in Ω. Nach Voraussetzung ist $1 \leq m \cdot b \leq k \leq 4$. Damit gilt nun

$$m \leq \begin{cases} 1, & \text{falls } b \in \{3,4\}, \\ 2, & \text{falls } b = 2, \\ 4, & \text{falls } b = 1. \end{cases}$$

Da $t_1+t_2+t_3+t_4$ die Gesamtheit aller Klassen $D \in M$ ist, für die G auf der Menge der Rechtsnebenklassen von $V \in D$ mit Fixität 1, 2, 3 oder 4 operiert und $N \subseteq M$ gilt, folgt somit $n_i \leq 4t_1 + 2t_2 + t_3 + t_4$. Damit ist l ein AHD. ■

Unter der Vermutung 3.16 auf Seite 78 sind wir nun bereit, die AHD für endliche, einfache und nicht-abelsche Gruppen zu klassifizieren. Wir schreiben explizit hin, wann die Vermutung 3.16 eingeht. Dazu formulieren wir zunächst eine Voraussetzung und erinnern an die in Bemerkung 4.11 (*iv*) auf Seite 85 vorgestellte Notation für Hurwitzdaten.

Voraussetzung 4.21
Seien G einfach, nicht-abelsch und p eine Primzahl, $n \in \mathbb{N}$ sowie $q := p^n$. Weiter sei $l := [G,\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0 \mid [m_1,n_1],\ldots,[m_r,n_r]]$ ein HD aus Tabelle 4.1 auf Seite 95 und so, dass $r \geq 1$ und $n_1+\ldots+n_r \geq 1$ sowie $n_i \geq 0$ für alle $i \in \{1,\ldots,r\}$ gilt.

Ferner sei $\mathfrak{g}_0 \geq 1$, falls $n_1+\ldots+n_r \leq 2$ gelte. Andernfalls sei $\mathfrak{g}_0 \geq 0$ oder es gelte eine der Spezifikationen in der vierten Spalte der Tabelle 4.1 für $\mathfrak{g}_0$.

Satz 4.22
Seien G einfach und nicht-abelsch sowie $l := [G,\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0 \mid [m_1,n_1],\ldots,[m_r,n_r]]$ ein HD. Gilt Voraussetzung 4.21, so ist l ein AHD. Ist umgekehrt l ein AHD und gilt Vermutung 3.16, so gilt Voraussetzung 4.21.

Nr.	$l = \left[G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1,n_1],\dots,[m_r,n_r]\right]$	$n_1,\dots,n_r$	$\mathfrak{g}_0$	Bemerkungen
1	$[\mathcal{A}_5, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [2,n_1],[3,n_2],[5,n_3]]$	$\forall i \in \{1,2,3\}\colon n_i \leq 2$	$\mathfrak{g}_0 \geq 1$ falls $(n_1,n_2,n_3) \in \{(2,1,0),(2,0,1),(1,2,0),(1,1,1)\}$	
2	$[\mathcal{A}_7, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [5,n_1],[7,n_2]]$	$\forall i \in \{1,2\}\colon n_i \leq 1$		
3	$[\mathcal{A}_8, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [7,1]]$			
4	$[M_{11}, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [5,1]]$			
5	$[M_{22}, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [5,n_1],[7,n_2]]$	$\forall i \in \{1,2\}\colon n_i \leq 1$		
6	$[J_1, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [15,1]]$			
7	$[\mathrm{PSL}_2(7), \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [2,n_1],[3,n_2],[4,n_3],[7,n_4]]$	$\forall i \in \{1,4\}\colon n_i \leq 1$, $\forall j \in \{2,3\}\colon n_j \leq 2$	$\mathfrak{g}_0 \geq 1$ falls $(n_1,n_2,n_3) \in \{(1,2,0),(1,1,1),(1,0,2)\}$ und $n_4 = 0$	
8	$[\mathrm{PSL}_2(8), \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [2,n_1],[7,n_2],[9,n_3]]$	$\forall i \in \{2,3\}\colon n_i \leq 2$, $n_1 \leq 1$		
9	$[\mathrm{PSL}_3(4), \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [5,n_1],[7,n_2]]$	$n_1 \leq 2$, $n_2 \leq 1$		
10	$[\mathrm{PSL}_4(3), \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [13,1]]$			
11	$[\mathrm{PSL}_4(5), \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [31,1]]$			
12	$[\mathrm{PSU}_4(3), \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [5,n_1],[7,n_2]]$	$\forall i \in \{1,2\}\colon n_i \leq 1$		
13	$\left[\mathrm{PSL}_2(q), \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \,\middle|\, \left[\frac{q-\varepsilon}{4},n_1\right],\left[\frac{q-\varepsilon}{2},n_2\right],\left[\frac{q+\varepsilon}{2},n_3\right]\right]$	$\forall i \in \{2,3\}\colon n_i \leq 2$, $n_1 \leq 1$	$\mathfrak{g}_0 \geq 1$ falls $q = 9$ und $(n_1,n_2,n_3) = (1,2,0)$	$q \geq 9$ ungerade, $\varepsilon \in \{1,-1\}$ so, dass $q \equiv \varepsilon$ modulo 4
14	$[\mathrm{SL}_2(q), \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [q-1,n_1],[q+1,n_2]]$	$\forall i \in \{1,2\}\colon n_i \leq 2$		$q \geq 16$ gerade
15	$\left[\mathrm{PSL}_3(q), \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \,\middle|\, \left[\frac{q^2+q+1}{(3,q-1)},1\right]\right]$			$q \geq 3$, $q \neq 4$
16	$\left[\mathrm{PSU}_3(q), \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \,\middle|\, \left[\frac{q^2-q+1}{(3,q+1)},1\right]\right]$			$q \geq 3$
17	$\left[\mathrm{PSp}_4(q), \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \,\middle|\, \left[\frac{q^2+1}{(2,q^2-1)},1\right]\right]$			$q \geq 3$
18	$\left[\mathrm{P\Omega}_8^-(q), \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \,\middle|\, \left[\frac{q^4+1}{(2,q^4-1)},1\right]\right]$			
19	$[\mathrm{Sz}(q), \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [\alpha,n_1],[\beta,n_2],[\gamma,n_3]]$	$\forall i \in \{1,3\}\colon n_i \leq 1$, $n_2 \leq 2$		$k \in \mathbb{N}$, $s = 2^k$, $q = 2s^2$, $\alpha = q-2s+1$, $\beta = q-1$, $\gamma = q+2s+1$
20	$\left[{}^2G_2(q), \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \,\middle|\, \left[\frac{q-1}{2},1\right]\right]$			$q \geq 27$ ist ungerade 3-Potenz
21	$\left[{}^3D_4(q), \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \,\middle|\, \left[q^4-q^2+1,1\right]\right]$			

Tabelle 4.1: Hurwitzdaten mit Spezifikationen für Voraussetzung 4.21.

Beweis
Es gelte zuerst Voraussetzung 4.21. Da l schon ein HD ist, genügt es, die Eigenschaften in Definition 4.18 für l nachzuweisen.

Da l eines der HD aus den Zeilen 1 bis 21 der Tabelle 4.1 von Voraussetzung 4.21 ist, finden wir G in mindestens einer der Tabellen 3.1 und 3.2 wieder. Sei $i \in \{1, \ldots, r\}$ beliebig. Wir betrachten die Verzweigungszahl m_i von l. Dann finden wir m_i ebenfalls in der Spalte zu $|G_\alpha|$ in den Tabellen 3.1 und 3.2. Mit Lemmata 3.5 und 3.15 gibt es ferner nur eine G-Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen von Ordnung m_i. Sei also $X \leqslant G$ zyklisch von Ordnung m_i.

Operiert G auf G/X mit Fixität 2 (siehe Tabelle 3.1, Zeilen 1 bis 4), so ist nach den Zeilen 1 bis 21 der Tabelle 4.1 von Voraussetzung 4.21 schon $n_i \leq 2$. Hat die Operation von G auf G/X jedoch Fixität 3 oder 4 (siehe Tabelle 3.1, Zeilen 5 bis 12 und Tabelle 3.2) so ist nach den Zeilen 1 bis 21 der Tabelle 4.1 von Voraussetzung schon $n_i \leq 1$. Daher folgt mit Definition 4.18, dass l ein AHD ist.

Umgekehrt sei l ein AHD und es gelte Vermutung 3.16. Mit Lemma 4.13 seien $m := n_1 + \ldots + n_r$, sowie $x_1, \ldots, x_m \in G^\#$ RF-Elemente und Ω eine RF-Menge so, dass l ein Hurwitzdatum zu Ω ist. Ferner sei $\mathfrak{B}$ die Menge aller nicht-regulären Bahnen von Ω unter der Operation von G. Da l ein AHD ist, gilt $r \geq 1$. Ferner ist die Operation von G auf den Elementen von $\mathfrak{B}$ äquivalent zur Operation auf der Menge der Nebenklassen von $\langle x_1 \rangle, \ldots, \langle x_m \rangle$.

Sei nun $i \in \{1, \ldots, r\}$ beliebig. Da $n_i \neq 0$ ist, gibt es nach Definition 4.18 eine G-Konjugiertenklasse C von zyklischen Untergruppen von Ordnung m_i derart, dass für alle $U \in C$ schon G auf G/U mit Fixität maximal 4 operiert. Da G nach Voraussetzung einfach und nicht-abelsch ist, operiert G nicht mit Fixität 1 auf den Elementen von $\mathfrak{B}$ mit Lemma 3.1. Daher finden wir den Isomorphietyp von G und $|U| = m_i$ mit Vermutung 3.16 in einer der Tabellen 3.1 oder 3.2. Genauer gesagt sind G und m_i die Gruppen und Punktstabilisatorordnungen aus den Tabellen 3.1 oder 3.2. Somit sind bereits G und m_i wie in der Tabelle 4.1 von Voraussetzung 4.21.

Wir müssen noch zeigen, dass n_i und $\mathfrak{g}_0$ wie in der Tabelle 4.1 sind. Zuerst zu n_i:

Sei dazu M die Menge aller G-Konjugiertenklassen von zyklischen Untergruppen der Ordnung m_i. Unter Vermutung 3.16 ist dann $|M| = 1$ mit den Lemmata 3.5 und 3.15. Nach Definition 4.18 gilt nun $n_i \leq 2$, falls G mit Fixität 2 auf G/U für ein beliebiges $U \in C \in M$ operiert, bzw. $n_i \leq 1$ für Fixität 3 oder 4. Daher sind G, m_i und n_i für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$ wie in Tabelle 4.1 von Voraussetzung 4.21.

Für $\mathfrak{g}_0$ sei jetzt $R := \sum\limits_{i=1}^{r} n_i \left(1 - \frac{1}{m_i}\right)$. Dann erhalten wir

$$R = \frac{1}{\prod_{i=1}^{r} m_i} \cdot \left(\sum_{i=1}^{r} n_i \cdot (m_i - 1) \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} m_j \right).$$

Gilt $G \not\cong \mathrm{PSL}_2(q)$ für jede ungerade Primzahlpotenz $q \geq 7$, so ist $S := \frac{|G|}{2 \cdot \prod_{i=1}^{r} m_i} \in \mathbb{N}$

mit der Wahl an $m_1, \ldots, m_r$ für die jeweilige Gruppe G. Da insbesondere

$$T := \sum_{i=1}^{r} n_i \cdot (m_i - 1) \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} m_j \in \mathbb{N}$$

gilt, ist auch $\frac{|G|}{2} \cdot R$ eine natürliche Zahl.

Seien jetzt $q \geq 7$ eine ungerade Primzahlpotenz, $\varepsilon \in \{1, -1\}$ so, dass $q \equiv \varepsilon$ modulo 4 gilt, sowie $G \cong \mathrm{PSL}_2(q)$. Gibt es $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ so, dass $m_i = \frac{q-\varepsilon}{4}$, $m_j = \frac{q-\varepsilon}{2}$, $n_i \geq 1$ und $n_j \geq 1$ gilt, nur dann ist $S = \frac{|G|}{2 \cdot \prod_{i=1}^{r} m_i}$ keine natürliche Zahl, sondern ein Bruch mit Nenner m_i. Jedoch ist m_i ein Teiler von m_j und damit auch von

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{r} m_j$$

für alle $k \in \{1, \ldots, r\}$. Nun wird jeder Summand in T von m_i geteilt. Daher ist auch hier $\frac{|G|}{2} \cdot R = S \cdot T$ eine natürliche Zahl.

Da $m_1 \geq 2$ ist, gilt $R \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Weil G einfach und nicht-abelsch ist, folgt $|G| \equiv 0$ modulo 4 mit dem Odd-Order-Theorem [FeTh] und 7.2.2 in [KuSt]. Damit ist also stets $1 + \frac{|G|}{2} R \geq 1 + \frac{|G|}{4}$ eine natürliche Zahl. Da $\frac{|G|}{2} \cdot 2(\mathfrak{g}_0 - 1)$ für alle $\mathfrak{g}_0 \geq 0$ eine ganze Zahl ist, folgt $\mathfrak{g} = 1 + \frac{|G|}{2} R + \frac{|G|}{2} \cdot 2(\mathfrak{g}_0 - 1) \in \mathbb{Z}$. Ferner ist nur dann $\mathfrak{g} \leq 1$, wenn $R \leq 2$ und $\mathfrak{g}_0 = 0$ gilt. Nach Definition 4.8 muss jedoch $\mathfrak{g} \geq 2$ sein. Lemma 4.15 liefert nun die möglichen Werte für $\mathfrak{g}_0$ in Voraussetzung 4.21 sowie den Zeilen 1 bis 21 von Tabelle 4.1 so, dass $\mathfrak{g} \geq 2$ ist. ∎

5 Realisierbarkeit von Hurwitzdaten

Zu Beginn des letzten Kapitels haben wir mit dem Riemannschen Existenzsatz begründet, warum wir Gruppenoperationen auf kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht mindestens 2 untersuchen können, bevor wir die Existenz einer solchen Fläche zu der jeweiligen Operation nachweisen müssen. Daraus ist das Konzept der RF-Mengen und Hurwitzdaten entstanden. Der Fokus dieses Kapitels wird auf dem Riemannschen Existenzsatz liegen (siehe Proposition 2.1 in [Bro] oder Theoreme 3.2 und 3.9 in [Bre]). Dazu sei hier dieser Satz erwähnt:

Satz 5.1 (Riemannscher Existenzsatz)
Sei G eine Gruppe. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) *Es gibt eine kompakte Riemannsche Fläche $\mathfrak{X}$ vom Geschlecht $\mathfrak{g} \geq 2$ so, dass $G \leqslant \mathrm{Aut}(\mathfrak{X})$ gilt und G mit dem Verzweigungsdatum $[G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1, n_1], \ldots, [m_r, n_r]]$ auf $\mathfrak{X}$ operiert, wobei $\mathfrak{g}_0$ das Geschlecht von $\mathfrak{X}/G$ ist.*

(ii) *Es gibt Elemente $a_1, \ldots, a_{\mathfrak{g}_0}, b_1, \ldots, b_{\mathfrak{g}_0}, c_{1,1}, \ldots, c_{1,n_1}, \ldots, c_{r,1}, \ldots, c_{r,n_r} \in G$ so, dass gilt:*

- *Für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$ und $j \in \{1, \ldots, n_i\}$ ist $o(c_{i,j}) = m_i$,*
- *es ist $\prod_{k=1}^{\mathfrak{g}_0} [a_k, b_k] \cdot \prod_{i=1}^{r} \left(\prod_{j=1}^{n_i} c_{i,j} \right) = 1_G$ und*
- *$\langle a_1, \ldots, a_{\mathfrak{g}_0}, b_1, \ldots, b_{\mathfrak{g}_0}, c_{1,1}, \ldots, c_{r,n_r} \rangle = G$.*

Da wir in Lemma 4.3 gezeigt haben, dass jede kompakte Riemannsche Fläche eine RF-Menge ist, werden wir in diesem Kapitel RF-Paare (G, Ω) mit Hurwitzdaten auf die Eigenschaften in Satz 5.1 *(ii)* untersuchen. Wir definieren daher

Definition 5.2 (realisierbares Hurwitzdatum, RHD)
Sei $l := [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1, n_1], \ldots, [m_r, n_r]]$ ein HD. Wir nennen l genau dann ***realisierbares Hurwitzdatum*** *(kurz* ***RHD****), wenn es $a_1, \ldots, a_{\mathfrak{g}_0} \in G$, $b_1, \ldots, b_{\mathfrak{g}_0} \in G$ und $c_{1,1}, \ldots, c_{1,n_1}, \ldots, c_{r,1}, \ldots, c_{r,n_r} \in G$ derart gibt, dass folgendes gilt:*

(RHD1) *Die Elemente $c_{1,1}, \ldots, c_{r,n_r}$ sind RF-Elemente zu l.*

(RHD2) *Es ist $\prod_{k=1}^{\mathfrak{g}_0} [a_k, b_k] \cdot \prod_{i=1}^{r} \left(\prod_{j=1}^{n_i} c_{i,j} \right) = 1_G$.*

(RHD3) *Es gilt $\langle a_1, \ldots, a_{\mathfrak{g}_0}, b_1, \ldots, b_{\mathfrak{g}_0}, c_{1,1}, \ldots, c_{r,n_r} \rangle = G$.*

Beispiel 5.3

- *Es ist* $l := [\mathcal{S}_4, 9, 0 \mid [2,1], [3,1], [4,2]]$ *ein RHD:*

  Wir wissen bereits mit Beispiel 4.19, dass l *ein AHD ist. Wir zeigen die Realisierbarkeit von* l*:*

  Da $\mathfrak{g}_0 = 0$ *ist, genügt es für die Realisierbarkeit von* l *Elemente* $c_{i,j}$ *zu konstruieren, die (RHD1), (RHD2) und (RHD3) erfüllen. Wir betrachten dabei* G *in der natürlichen Operation auf* $\Delta = \{1,2,3,4\}$*. Seien* $c_{1,1} := (12)(34)$, $c_{2,1} = (134)$, $c_{3,1} = (1234)$ *und* $c_{3,2} = (1423)$*. Dann induzieren* $c_{1,1}$, $c_{2,1}$, $c_{3,1}$ *und* $c_{3,2}$ *zusammen eine RF-Menge* Ω *nach Lemma 4.4 und sind demnach RF-Elemente. Das ist (RHD1). Für (RHD2) gilt:*

  $$c_{1,1}c_{2,1}c_{3,1}c_{3,2} = (12)(34) * (134) * (1234) * (1423) = (123) * (132) = \mathrm{id}_4,$$

  wobei $*$ *die Hintereinanderausführung von Abbildungen ist. Für (RHD3) sei* $T := \langle c_{1,1}, c_{2,1}, c_{3,1}, c_{3,2} \rangle$*. Da* $c_{2,1}, c_{3,1} \in T$ *sind, wird* $|T|$ *von* 3 *und* 4 *geteilt. Das bedeutet* $12 \leq |T| \leq 24 = |G|$*. Da* $\mathcal{A}_4$ *die einzige Untergruppe von* G *vom Index 2 ist und* T *die ungeraden Permutationen* $c_{3,1} = (1234)$ *und* $c_{3,2} = (1423)$ *enthält, folgt* $T = G$*.*

- *Es ist* $l := [\mathcal{A}_4, 2, 0 \mid [2,1], [3,2]]$ *kein RHD. Da* $\mathfrak{g}_0 = 0$ *und* $\mathfrak{g} = 2$ *gilt, folgt:*

  $$\begin{aligned} 2 = \mathfrak{g} &= 1 + \frac{|\mathcal{A}_4|}{2}\left(2(\mathfrak{g}_0 - 1) + \sum_{j=1}^{r} n_j \left(1 - \frac{1}{m_j}\right)\right) \\ &= 1 + 6\left(-2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3}\right)\right) \\ &= 1 + 6\left(-\frac{1}{6}\right) = 0 \not\geq 2 \end{aligned}$$

  Damit ist l *kein HD.*

Bemerkung 5.4
Seien $l := [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1, n_1], \ldots, [m_r, n_r]]$ ein realisierbares HD und $a_1, \ldots, a_{\mathfrak{g}_0} \in G$, $b_1, \ldots, b_{\mathfrak{g}_0} \in G$ und $c_{1,1}, \ldots, c_{1,n_1}, \ldots, c_{r,1}, \ldots, c_{r,n_r} \in G$ so, dass (RHD1) bis (RHD3) gilt. Aus (RHD1) folgt $o(c_{i,j}) = m_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$ und alle $j \in \{1, \ldots, n_i\}$. Wir werden häufig diese Eigenschaft nachweisen anstatt der ursprünglichen Eigenschaft, dass $c_{i,j}$ für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$ und $j \in \{1, \ldots, n_i\}$ RF-Elemente sind. Dies ist mit Lemma 4.13 möglich.

Definition 5.5 (Realisierung)
Seien $l := [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1, n_1], \ldots, [m_r, n_r]]$ *ein RHD und*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_l := \Big\{ \big((a_1, \ldots, a_{\mathfrak{g}_0}), (b_1, \ldots, b_{\mathfrak{g}_0}), (c_{1,1}, \ldots, c_{1,n_1}, \ldots, c_{r,1}, \ldots, c_{r,n_r}) \big) \;\Big|\; \\ a_1, \ldots, a_{\mathfrak{g}_0}, b_1, \ldots, b_{\mathfrak{g}_0}, c_{1,1}, \ldots, c_{1,n_1}, \ldots, c_{r,1}, \ldots, c_{r,n_r} \in G, \\ \textit{die (RHD1), (RHD2) und (RHD3) für } l \textit{ erfüllen} \Big\}. \end{aligned}$$

Ein Element von $\mathcal{R}_l$ heißt ***eine Realisierung für l****, die Menge $\mathcal{R}_l$ heißt* ***die Menge aller Realisierungen von l****. Wenn im Kontext $\mathfrak{g}_0$, r und $n_1,\ldots,n_r$ klar sind, schreiben wir auch kurz $((a_k),(b_k),(c_{i,j}))$ (mit genau diesen Indizes i,j,k) für die Realisierung $((a_1,\ldots,a_{\mathfrak{g}_0}),(b_1,\ldots,b_{\mathfrak{g}_0}),(c_{1,1},\ldots,c_{1,n_1},\ldots,c_{r,1},\ldots,c_{r,n_r}))\in\mathcal{R}_l$.*

Wir betrachten einige Spezialfälle der Definitionen 5.2 und 5.5:

Bemerkung 5.6
Seien $l:=[G,\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0\mid[m_1,n_1],\ldots,[m_r,n_r]]$ ein RHD und $((a_k),(b_k),(c_{i,j}))$ eine Realisierung von l.

- Im Fall $\mathfrak{g}_0=0$ gilt $1\leq k\leq\mathfrak{g}_0=0$ für den Index k von a_k und b_k. Daher verschwinden a_k und b_k aus der Realisierung von l und diese vereinfacht sich zu $((),(),(c_{i,j}))$. Des Weiteren verändern sich die Eigenschaften (RHD2) und (RHD3) zu

  (RHD2) $\prod_{i=1}^{r}\left(\prod_{j=1}^{n_i}c_{i,j}\right)=1_G$ und

  (RHD3) $\langle c_{1,1},\ldots,c_{r,n_r}\rangle=G$.

- Falls G in seiner Wirkung via l nur regulären Bahnen besitzt, gilt $r=0$. Dann vereinfacht sich die Realisierung von l zu $((a_k),(b_k),())$. Die Eigenschaften (RHD2) und (RHD3) verhalten sich ähnlich zum oberen Fall:

  (RHD2) $\prod_{k=1}^{\mathfrak{g}_0}[a_k,b_k]=1_G$ und

  (RHD3) $\langle a_1,\ldots,a_{\mathfrak{g}_0},b_1,\ldots,b_{\mathfrak{g}_0}\rangle=G$.

  Die Eigenschaft (RHD1) ist aufgrund der Nichtexistenz von $c_{i,j}$ eine Aussage über die leere Menge und daher wahr.

Folgendes Lemma ist von zentraler Bedeutung für diese Arbeit:

Lemma 5.7
Sei (G,Ω) ein RF-Paar mit RHD $l:=[G,\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0\mid[m_1,n_1],\ldots,[m_r,n_r]]$. Dann gibt es eine kompakte Riemannsche Fläche $\mathfrak{X}$ vom Geschlecht $\mathfrak{g}$ mit Bahnenraum $\mathfrak{X}/G$ vom Geschlecht $\mathfrak{g}_0$ so, dass $G\leqslant Aut(\mathfrak{X})$ gilt und dass Ω und $\mathfrak{X}$ als RF-Mengen äquivalent sind.

Insbesondere gilt:

Sind $((a_k),(b_k),(c_{i,j}))$ eine Realisierung zu l und $g\in G^{\#}$, so hat g genau dann einen Fixpunkt in $\mathfrak{X}$, wenn $i\in\{1,\ldots,r\}$ und $j\in\{1,\ldots,n_i\}$ existieren so, dass g zu einer Potenz von $c_{i,j}$ konjugiert ist in G.

Beweis
Da l ein realisierbares Hurwitzdatum ist, wählen wir $((a_k),(b_k),(c_{i,j}))$ als eine Realisierung von l. Ferner gilt für l die Hurwitz-Formel (siehe z.B. Corollary III.3.7 in

[Mir] oder Definition 4.8 (ii)), weil l ein HD ist. Insbesondere ist $\mathfrak{g} \geq 2$ nach Definition 4.8. Mit Theorem 5.1 gibt es dann eine kompakte Riemannsche Fläche $\mathfrak{X}$ vom Geschlecht $\mathfrak{g}$ mit Bahnenraum $\mathfrak{X}/G$ vom Geschlecht $\mathfrak{g}_0$ und mit der Eigenschaft $G \leqslant \mathrm{Aut}(\mathfrak{X})$ so, dass G mit dem Verzweigungsdatum l auf $\mathfrak{X}$ operiert.

Mit [Bro, S. 244] hat ein Element $g \in G^{\#}$ einen Fixpunkt in $\mathfrak{X}$ genau dann, wenn es ein $i \in \{1, \ldots, r\}$ und ein $j \in \{1, \ldots, n_i\}$ gibt so, dass g zu einer Potenz von $c_{i,j}$ in G konjugiert ist. Das heißt, dass die Wirkung von G auf jeder nicht-regulären G-Bahn $\Delta \in \mathfrak{X}/G$ von $\mathfrak{X}$ äquivalent zur Wirkung von G auf $G/\langle c_{i,j}\rangle$ per Rechtsmultiplikation für geeignete $i \in \{1, \ldots, r\}$ und $j \in \{1, \ldots, n_i\}$ ist. Das bedeutet:

Wenn wir $\mathfrak{X}$ nach Lemma 4.3 als eine RF-Menge auffassen, sind die zugehörigen RF-Elemente genau $c_{1,1}, \ldots, c_{r,n_r}$. Damit sind $\mathfrak{X}$ und Ω als RF-Mengen äquivalent. ■

Mit Lemma 4.20 wissen wir, dass wir zwei Fälle von Gruppenoperationen auf RF-Mengen mit Hurwitzdaten auf Realisierbarkeit untersuchen müssen, einerseits reguläre Operationen und andererseits Operationen, bei denen das zugehörige HD ein AHD ist. Wir untersuchen zuerst den regulären Fall. Anschließend stellen wir Werkzeuge vor, die für die Überprüfung der Realisierbarkeit von (Ausnahme-) Hurwitzdaten nützlich sind.

5.1 RF-Paare und Fixität 0

Voraussetzung 5.8
Sei (G,Ω) *ein RF-Paar so, dass* G *regulär auf* Ω *operiert. Sei weiter* G *einfach und nicht-abelsch.*

Die erste Folgerung, die wir aus Voraussetzung 5.8 ziehen können, ist, dass Ω als RF-Menge äquivalent zu $G/1$ ist, d.h. wir untersuchen Hurwitzdaten der Form $[G,\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0 \mid 0]$. Ferner wissen wir mit Theorem B in [AsGu], dass G als einfache und nicht-abelsche Gruppe 2-erzeugt ist. Daraus können wir folgern:

Lemma 5.9
Es gelte Voraussetzung 5.8 und es sei $l := [G,\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0 \mid 0]$ *ein HD zu* Ω *mit* $\mathfrak{g}_0 \geq 2$. *Dann ist* l *realisierbar.*

Beweis
Wir konstruieren $a_1,\dots a_{\mathfrak{g}_0},b_1,\dots,b_{\mathfrak{g}_0} \in G$ und zeigen anschließend, dass das Tripel $((a_1,\dots a_{\mathfrak{g}_0}),(b_1,\dots,b_{\mathfrak{g}_0}),())$ eine Realisierung für l ist.

Da G nach Voraussetzung einfach und nicht-abelsch ist, gibt es mit Theorem B in [AsGu] Elemente $x,y \in G$ so, dass $G = \langle x,y\rangle$ gilt. Es ist automatisch $y \notin \langle x\rangle$ und umgekehrt, da G nicht-abelsch ist. Weil $\mathfrak{g}_0 \geq 2$ nach Voraussetzung gilt, seien $a_1 = x = b_2$ und $a_2 = y = b_1$. Für alle $k \in \{3,\dots,\mathfrak{g}_0\}$ sei $a_k = b_k = 1_G$.

(RHD1) ist sofort erfüllt für l und das Tripel $((a_1,\dots a_{\mathfrak{g}_0}),(b_1,\dots,b_{\mathfrak{g}_0}),())$, da es eine Aussage über die leere Menge ist. Es gilt (RHD2) für l und das Tripel $((a_1,\dots a_{\mathfrak{g}_0}),(b_1,\dots,b_{\mathfrak{g}_0}),())$ wegen

$$[a_1,b_1][a_2,b_2]\cdots[a_{\mathfrak{g}_0},b_{\mathfrak{g}_0}] = [x,y][x,y]^{-1}\cdot 1_G = 1_G.$$

Ferner folgt (RHD3) für l aus $G = \langle x,y\rangle$. Damit ist eine Realisierung für l gefunden.

■

Lemma 5.10
Sei $l := [G,\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0 \mid 0]$ *eine Liste, die Teil (i) der Definition 4.8 erfüllt. Gilt* $\mathfrak{g}_0 \leq 1$, *so ist* l *kein Hurwitzdatum.*

Beweis
Es genügt, zu zeigen, dass $\mathfrak{g} \leq 1$ mit der Hurwitzformel gilt (vgl. Teil (*ii*) der Definition 4.8):

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} &= 1 + \tfrac{|G|}{2}\cdot\left(2(\mathfrak{g}_0-1)+\sum_{i=1}^{r} n_i\cdot\left(1-\tfrac{1}{m_i}\right)\right)\\ &= 1+\tfrac{|G|}{2}\cdot(2(\mathfrak{g}_0-1)+0) = 1+|G|\cdot(\mathfrak{g}_0-1)\\ &\leq 1+|G|\cdot 0 = 1.\end{aligned}$$

■

5.2 Werkzeuge zur Realisierbarkeit von Hurwitzdaten

Definition 5.11 (RAHD)
Sei $l := [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1, n_1], \ldots, [m_r, n_r]]$ *ein AHD. Wir nennen* l *genau dann ein* ***realisierbares Ausnahme-Hurwitzdatum*** *(kurz RAHD), wenn* l *als HD realisierbar ist.*

Beispiel 5.12
Nach Beispiel 4.19 ist $[\mathcal{S}_4, 9, 0 \mid [2,1], [3,1], [4,2]]$ *ein AHD und mit Beispiel 5.3 ist es realisierbar.*

Das erste nütliche Werkzeug zur Überprüfung der Realisierbarkeit von Hurwitzdaten kommt aus der Darstellungstheorie. Vergleiche dazu [HupC].

Lemma 5.13
Seien K *ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0 und* KG *die Gruppenalgebra. Seien* $n \in \mathbb{N}$ *die Anzahl der paarweise verschiedenen Konjugiertenklassen von Elementen von* G *sowie* $K_1, \ldots, K_n$ *diese Klassen. Für alle* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *bilden wir in* KG *die Klassensumme* $k_i := \sum_{g \in K_i} g$*. Für alle* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ *und alle* $l \in \{1, \ldots, n\}$ *existieren dann nicht-negative ganze Zahlen* d_{ijl} *derart, dass*

$$k_i \cdot k_j = \sum_{l=1}^{n} d_{ijl} \cdot k_l$$

gilt. Sei $g_l \in K_l$ *beliebig. Dann ist*

$$d_{ijl} = |\{(g_i, g_j) \in K_i \times K_j \mid g_i g_j = g_l\}|. \tag{5.1}$$

Beweis
Dieses Lemma wird in Lemma 3.8 (b) in [HupC] bewiesen. ■

Lemma 5.14
Seien K_1*,* K_2 *und* K_3 *drei* G*-Konjugiertenklassen von Elementen sowie* $g_1 \in K_1$*,* $g_2 \in K_2$ *und* $g_3 \in K_3$ *beliebig. Dann gilt*

$$d_{123} = \frac{|K_1||K_2|}{|G|} \cdot \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(g_1)\chi(g_2)\frac{\chi(g_3^{-1})}{\chi(1_G)}. \tag{5.2}$$

Weiter sei $x \in K_3$ *fest gewählt. Es gilt* $d_{123} \neq 0$ *genau dann, wenn* $(y, z) \in K_1 \times K_2$ *derart existiert, dass* $y \cdot z = x$ *ist.*

Beweis
Gleichung (5.2) wird in Theorem 4.6 in [HupC] bewiesen. Der Rest folgt aus der Definition von d_{123} in Lemma 5.13. ■

Beispiel 5.15
Wir betrachten $G = \mathcal{S}_4$ *in der natürlichen Wirkung und setzen* $g := (12)$*. Wir wollen ermitteln, wie viele Paare* $(a, b) \in G \times G$ *es gibt so, dass* a *Ordnung 3,* b *Ordnung 4*

hat und $ab = g$ gilt. Dazu verweisen wir auf die Charaktertafel von G (siehe z.B. Example 11.7 (a) in [HupC]).

G hat jeweils genau eine Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 3 bzw. 4. Seien also $K_1 = (123)^G$ die Klasse der Elemente der Ordnung 3 von G, $K_2 = (1234)^G$ die Klasse der Elemente von Ordnung 4 von G und $K_3 = (12)^G$ die Klasse der Transpositionen von G. Es ist $|K_1| = \frac{|G|}{|C_G(x)|} = \frac{24}{3} = 8$ für alle $x \in K_1$ und $|K_2| = 6$. Weiter gilt mit Gleichung (5.2) bzw. Lemma 5.14 und der Charaktertafel von G in Example 11.7 (a) in [HupC]

$$\begin{aligned}
d_{123} &= \frac{|K_1| \cdot |K_2|}{|G|} \cdot \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(g)} \frac{\chi((123)) \cdot \chi((1234)) \cdot \chi((12)^{-1})}{\chi(1_G)} \\
&= \frac{8 \cdot 6}{24} \cdot \Big(\frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{1} + \frac{1 \cdot (-1) \cdot (-1)}{1} + \frac{(-1) \cdot 0 \cdot 0}{2} \\
&\qquad + \frac{0 \cdot (-1) \cdot 1}{3} + \frac{0 \cdot 1 \cdot (-1)}{3} \Big) \\
&= 2 \cdot (1+1) = 4 \neq 0.
\end{aligned}$$

Ferner ist $(12) = (234) * (1243) = (243) * (1234) = (134) * (1432) = (143) * (1342)$. Wir haben jetzt also genau vier Paare $(a,b) \in K_1 \times K_2$ gefunden so, dass $ab = (12)$ gilt. Wegen $d_{123} = 4$ sind das alle Möglichkeiten in G.

Ist jetzt $h \in G$ eine beliebige Transposition in G, so ist h zu $(12) = g$ konjugiert. Daher gibt es ein $x \in G$ so, dass $h = (12)^x$ ist. Sind dann $(a,b) \in K_1 \times K_2$ so, dass $ab = (12)$ gilt, dann ist auch $h = (12)^x = (ab)^x = (a^x)(b^x)$.

Lemma 5.16
Seien K_1 und K_2 zwei nichttriviale G-Konjugiertenklassen von Elementen sowie $K_3 := {K_1}^{-1}$ die Konjugiertenklasse der Inversen der Elemente von K_1. Seien $a \in K_1$, $z \in K_2$ und $M := \{(x,y) \in K_1 \times G \mid [x,y] = z\}$. Dann ist $|M| = d_{312} \cdot \big|C_G(a^{-1})\big|$.

Beweis
Sei $N := \{(x,y) \in K_3 \times K_1 \mid xy = z\}$. Dann ist $|N| = d_{312}$ mit Lemma 5.13.

Seien zuerst $(a,b) \in N$ beliebig und $x := a^{-1}$. Dann gilt $ab = z$ sowie $x \in K_1$ und x ist zu b in G konjugiert. Sei $y \in G$ so, dass $b = x^y$ gilt. Dann ist

$$z = ab = x^{-1}x^y = [x,y],$$

also $(x,y) \in M$. Sei $g \in C_G(x)$ beliebig. Dann folgt

$$[x,gy] = x^{-1}x^{gy} = x^{-1}x^y = [x,y] = z.$$

Damit ist $|M| \geq d_{312}\,|C_G(x)|$.

Sei umgekehrt $(x,y) \in M$. Es gilt also $x \in K_1$, $y \in G$ und $[x,y] = z$. Wegen $z = [x,y] = x^{-1}x^y$ sowie $x^{-1} \in K_3$ und $x^y \in K_1$ folgt $(x^{-1}, x^y) \in N$. Sind nun $(x,y_1),(x,y_2) \in M$, so gilt $x^{y_1} = x^{y_2}$ wegen $x^{-1}x^{y_1} = [x,y_1] = z = [x,y_2] = x^{-1}x^{y_2}$. Dann folgt $y_1y_2^{-1} \in C_G(x)$. Für alle $g \in C_G(x)$ ist daher auch $(x^{-1}, x^{gy_1}) \in N$. Damit gilt $|M| \leq d_{312}\,|C_G(x)|$. ■

Lemma 5.17
Seien G eine Gruppe, $N \leqslant G$ und $x \in N^{\#}$ beliebig. Dann gibt es genau $(|G:N| - 1) \cdot |N|$ Paare $(a,b) \in (G \setminus N)^2$ so, dass $ab = x$ gilt.

Beweis
Sei $g \in G \setminus N$ beliebig. Dann ist $(xg^{-1})g = x$ und es gilt $xg^{-1} \notin N$, da sonst $g \in N$ wäre. Weiter gilt $|G \setminus N| = |G| - |N| = |N| \cdot |G:N| - |N| = |N| \cdot (|G:N| - 1)$.

Wir haben gezeigt, dass es mindestens $|N| \cdot (|G:N| - 1)$ Paare $(h,g) \in (G \setminus N)^2$ gibt so, dass $hg = x$ gilt, und zwar in der Form $h = xg^{-1}$. Da für jedes Paar $(h,g) \in (G \setminus N)^2$ mit $hg = x$ durch Umstellen direkt $h = hgg^{-1} = xg^{-1}$ folgt, haben wir auch gezeigt, dass es höchstens $|N| \cdot (|G:N| - 1)$ Paare $(h,g) \in (G \setminus N)^2$ gibt so, dass $hg = x$ gilt. ■

Da wir die Koeffizienten d_{ijl} auch für Untergruppen einer Gruppe ausrechnen und miteinander vergleichen wollen, definieren wir Folgendes:

Definition 5.18
Sei $U \leqslant G$. Weiter seien K_1, K_2, K_3 und $x \in K_3$ so, dass $K_i \cap U \neq \varnothing$ für alle $i \in \{1,2,3\}$ und $x \in U$ gilt. Für alle $i \in \{1,2,3\}$ sei ferner $\hat{K}_i \subseteq K_i$ eine U-Konjugiertenklasse von Elementen aus K_i. Dann setzen wir

$$d_{\hat{1}\hat{2}\hat{3}}^{(U)} := \left| \left\{ (u_1, u_2) \in \hat{K}_1 \times \hat{K}_2 \;\middle|\; u_1 \cdot u_2 = x \right\} \right|.$$

Lemma 5.19
Seien $M \leqslant G$ eine nichttriviale Untergruppe von G und K_1, K_2 und K_3 drei Konjugiertenklassen von Elementen von G so, dass für alle $i \in \{1,2,3\}$ schon $K_i \cap M \neq \varnothing$ gilt. Seien $x \in M \cap K_1$ fest, $K_\alpha \subseteq M \cap K_1$ eine M-Konjugiertenklasse mit $x \in K_\alpha$ und $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Untergruppen $U \in M^G$ mit $x \in U$.

Seien weiter $j,k \in \mathbb{N}$ und $K_{\beta_1}, \ldots, K_{\beta_j} \subseteq K_2 \cap M$ paarweise verschiedene M-Konjugiertenklassen von Elementen aus $K_2 \cap M$ und $K_{\gamma_1}, \ldots, K_{\gamma_k} \subseteq K_3 \cap M$ paarweise verschiedene M-Konjugiertenklassen von Elementen aus $K_3 \cap M$ so, dass $K_2 \cap M = K_{\beta_1} \dot\cup \ldots \dot\cup K_{\beta_j}$ und $K_3 \cap M = K_{\gamma_1} \dot\cup \ldots \dot\cup K_{\gamma_k}$ gilt. Seien $X := \{\beta_1, \ldots, \beta_j\}$ und $Y := \{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\}$.

Gilt dann

$$n \cdot \sum_{\substack{\beta \in X \\ \gamma \in Y}} d_{\beta\gamma\alpha}^{(M)} < d_{231},$$

so gibt es $(y,z) \in K_2 \times K_3$ derart, dass $yz = x$ gilt und $\langle x,y,z \rangle$ in keinem G-Konjugierten von M liegt.

Beweis
Angenommen, die Behauptung sei falsch und sei $N := \{(y,z) \in K_2 \times K_3 \mid yz = x\}$.

Mit Lemma 5.13 ist $d_{231} = |N|$. Nach Voraussetzung seien $U_1, \ldots, U_n \in M^G$ paarweise verschieden und so, dass $x \in U_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ sowie $x \notin U$ für alle $U \in M^G \setminus \{U_1, \ldots, U_n\}$ gilt. Ferner gibt es für alle $(\widetilde{y}, \widetilde{z}) \in N$ nach Annahme ein $U \in M^G$ so, dass $\langle x, \widetilde{y}, \widetilde{z} \rangle \leqslant U$ gilt. Da $x \in U$ ist, folgt $U \in \{U_1, \ldots, U_n\}$. Insbesondere folgt $M \in \{U_1, \ldots, U_n\}$ mit der Voraussetzung.

Nach Annahme sei also $(y,z) \in N$ so, dass $\langle x,y,z\rangle \leqslant M$ gilt. Ferner sei $L := N \cap (M \times M) = \{(\widetilde{y},\widetilde{z}) \in (K_2 \cap M) \times (K_3 \cap M) \mid \widetilde{y}\widetilde{z} = x\}$. Dann gibt es ein $\beta \in X$ und ein $\gamma \in Y$ so, dass $(y,z) \in K_\beta \times K_\gamma$ folgt. Da nach Voraussetzung $K_2 \cap M = K_{\beta_1} \dot\cup \ldots \dot\cup K_{\beta_j}$ und $K_3 \cap M = K_{\gamma_1} \dot\cup \ldots \dot\cup K_{\gamma_k}$ gilt, ist $|L| = \sum\limits_{\substack{\beta\in X\\ \gamma\in Y}} d^{(M)}_{\beta\gamma\alpha}$.

Weil x in genau n vielen G-Konjugierten von M liegt, gilt also

$$d_{231} = |N| = n \cdot |L| = n \cdot \sum_{\substack{\beta\in X\\ \gamma\in Y}} d^{(M)}_{\beta\gamma\alpha} < d_{231},$$

ein Widerspruch zur Voraussetzung. Daher gibt es ein $(y,z) \in N$ so, dass $\langle x,y,z\rangle$ in keinem G-Konjugierten von M enthalten ist. ∎

Lemma 5.20 (Induktion über Cogeschlecht)
Seien $\widetilde{\mathfrak{g}} \in \mathbb{N}$, $\widetilde{\mathfrak{g}} \geq 2$, $\widetilde{l} := [G, \widetilde{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1,n_1], \ldots, [m_r,n_r]]$ ein RHD und $n, \mathfrak{g} \in \mathbb{N}$ so, dass $l := [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 + n \mid [m_1,n_1], \ldots, [m_r,n_r]]$ ein HD ist. Dann ist l realisierbar.

Beweis
Sei $((\widetilde{a}_k),(\widetilde{b}_k),(\widetilde{c}_{i,j}))$ eine Realisierung für $\widetilde{l}$. Wir konstruieren ausgehend von $\widetilde{a}_k$, $\widetilde{b}_k$, $\widetilde{c}_{i,j}$ eine Realisierung für l:

Setze $c_{i,j} := \widetilde{c}_{i,j}$ für alle $i \in \{1,\ldots,r\}$ und $j \in \{1,\ldots,n_i\}$ sowie $a_{n+k} := \widetilde{a}_k$ und $b_{n+k} := \widetilde{b}_k$ für alle $k \in \{1,\ldots,\mathfrak{g}_0\}$ und $a_m = b_m := 1_G$ für alle $m \in \{1,\ldots,n\}$. Sei jetzt $m \in \{1,\ldots,n+\mathfrak{g}_0\}$ beliebig. Wir überprüfen (RHD1), (RHD2) und (RHD3):

(RHD1) folgt automatisch für l und $((a_m),(b_m),(c_{i,j}))$, da (RHD1) für $\widetilde{l}$ und $((\widetilde{a}_k),(\widetilde{b}_k),(\widetilde{c}_{i,j}))$ gilt und da $\widetilde{c}_{i,j} = c_{i,j}$ für alle $i \in \{1,\ldots,r\}$ und $j \in \{1,\ldots,n_i\}$ ist. Ferner gilt wegen (RHD2) und (RHD3) für $\widetilde{l}$ und $((\widetilde{a}_k),(\widetilde{b}_k),(\widetilde{c}_{i,j}))$ auch

$$\begin{aligned}
1_G &= \prod_{k=1}^{g_0} [\widetilde{a}_k, \widetilde{b}_k] \cdot \prod_{i=1}^{r} \left(\prod_{j=1}^{n_i} \widetilde{c}_{i,j} \right) \\
&= \prod_{m=1}^{n} [1_G, 1_G] \cdot \prod_{k=1}^{g_0} [\widetilde{a}_k, \widetilde{b}_k] \cdot \prod_{i=1}^{r} \left(\prod_{j=1}^{n_i} \widetilde{c}_{i,j} \right) \\
&= \prod_{m=1}^{g_0+n} [a_m, b_m] \cdot \prod_{i=1}^{r} \left(\prod_{j=1}^{n_i} c_{i,j} \right) \qquad \text{sowie}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &= \left\langle \widetilde{a}_k, \widetilde{b}_k, \widetilde{c}_{i,j} \;\middle|\; k \in \{1,\ldots,\mathfrak{g}_0\}, i \in \{1,\ldots,r\}, j \in \{1,\ldots,n_i\} \right\rangle \\
&= \langle \underbrace{1_G, \ldots, 1_G}_{2n\text{-mal}}, \widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_{\mathfrak{g}_0}, \widetilde{b}_1, \ldots, \widetilde{b}_{\mathfrak{g}_0}, \widetilde{c}_{1,1}, \ldots, \widetilde{c}_{r,n_r} \rangle \\
&= \langle a_m, b_m, c_{i,j} \mid m \in \{1,\ldots,n+\mathfrak{g}_0\}, i \in \{1,\ldots,r\}, j \in \{1,\ldots,n_i\} \rangle \leqslant G.
\end{aligned}$$

Damit sind (RHD2) und (RHD3) für l und das Tripel $((a_m),(b_m),(c_{i,j}))$ erfüllt. ∎

Lemma 5.21 (Induktion über ungerade Verzweigungszahlen)
Seien $\tilde{\mathfrak{g}} \in \mathbb{N}$, $\tilde{\mathfrak{g}} \geq 2$, $\tilde{l} := [G, \tilde{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1, n_1], \ldots, [m_r, n_r]]$ *ein RHD und* $p \in \{1, \ldots, r\}$ *so, dass die Verzweigungszahl* m_p *ungerade ist. Seien weiter* $\mathfrak{g} \in \mathbb{N}$ *und* $\mathfrak{g} \geq 2$ *so, dass* $l := [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1, n_1], \ldots, [m_p, n_p + 1], \ldots, [m_r, n_r]]$ *ein HD ist. Dann ist* l *realisierbar.*

Beweis
Sei eine Realisierung $((\tilde{a}_k), (\tilde{b}_k), (\tilde{c}_{i,j}))$ für $\tilde{l}$ gegeben. Für alle $k \in \{1, \ldots, g_0\}$ seien $a_k := \tilde{a}_k$ und $b_k := \tilde{b}_k$. Die Elemente $\tilde{c}_{p,1}, \ldots, \tilde{c}_{p,n_p}$ haben die Ordnung m_p nach (RHD1). Da m_p nach Voraussetzung ungerade ist, ist $m_p + 1$ gerade. Wir setzen $c_{p,n_p} = c_{p,n_p+1} := (\tilde{c}_{p,n_p})^{\frac{m_p+1}{2}}$ und für alle

$$(i, j) \in \{(m, n) \mid m \in \{1, \ldots, r\}, n \in \{1, \ldots, n_m\}\} \setminus \{(p, n_p)\}$$

sei $c_{i,j} := \tilde{c}_{i,j}$. Wir zeigen (RHD1) bis (RHD3) für l und $((a_k), (b_k), (c_{i,m}))$:

(RHD1): Es gilt

$$c_{p,n_p} \cdot c_{p,n_p+1} = {c_{p,n_p}}^2 = {c_{p,n_p+1}}^2 = (\tilde{c}_{p,n_p})^{m_p+1} = \tilde{c}_{p,n_p},$$

da $o(\tilde{c}_{p,n_p}) = m_p$ ist. Ferner haben c_{p,n_p} und c_{p,n_p+1} Ordnung m_p, da m_p ungerade ist. Daher und wegen (RHD1) für $\tilde{l}$ und $((\tilde{a}_k), (\tilde{b}_k), (\tilde{c}_{i,j}))$ ist (RHD1) für l und das Tripel $((a_k), (b_k), (c_{i,m}))$ erfüllt.

Weiter folgt aus (RHD2) für $\tilde{l}$ und $((\tilde{a}_k), (\tilde{b}_k), (\tilde{c}_{i,j}))$:

$$1_G = \prod_{k}^{\mathfrak{g}_0} [\tilde{a}_k, \tilde{b}_k] \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{n_i} \tilde{c}_{i,j} = \prod_{k=1}^{\mathfrak{g}_0} [a_k, b_k] \prod_{j=1}^{n_1} c_{1,j} \cdots \prod_{j=1}^{n_p+1} c_{p,j} \cdots \prod_{j=1}^{n_r} c_{r,j},$$

wegen $c_{p,n_p} \cdot c_{p,n_p+1} = \tilde{c}_{p,n_p}$. Damit ist (RHD2) für l und $((a_k), (b_k), (c_{i,m}))$ erfüllt. Ferner folgt (RHD3) für l aus (RHD3) für $\tilde{l}$ und folgender Überlegung:

$$\begin{aligned} G &= \left\langle \tilde{a}_k, \tilde{b}_k, \tilde{c}_{i,j} \;\middle|\; k \in \{1, \ldots, \mathfrak{g}_0\}, i \in \{1, \ldots, r\}, j \in \{1, \ldots, n_i\} \right\rangle \\ &\leqslant \langle a_k, b_k, c_{i,j}, c_{p,n_p+1} \mid k \in \{1, \ldots, \mathfrak{g}_0\}, i \in \{1, \ldots, r\}, j \in \{1, \ldots, n_i\} \rangle \\ &\leqslant G \end{aligned}$$

■

Durch Lemma 5.20 ist es uns möglich, die Untersuchung der Realisierbarkeit von Hurwitzdaten auf die kleinstmöglichen Cogeschlechte zu beschränken. Lemma 5.21 ist ein starkes Hilfsmittel, welches vor allem bei Fixität 2 auf den nicht-regulären Bahnen einer RF-Menge seinen Einsatz findet. Dort kann die Vielfachheit einer Verzweigungszahl auch 2 betragen.

Lemma 5.22
Es seien $n_1, n_2 \in \{0,1\}$*,* $1 \leq n_1 + n_2 \leq 2$ *und* $l := [G, \mathfrak{g}, 1 \mid [m_1, n_1], [m_2, n_2]]$ *ein HD. Weiter seien* $\widetilde{n}_1, \widetilde{n}_2 \in \{1,2\}$*,* $\widetilde{n}_1 + \widetilde{n}_2 = 3$ *und* $\widetilde{l} := [G, \widetilde{\mathfrak{g}}, 0 \mid [m_1, \widetilde{n}_1], [m_2, \widetilde{n}_2]]$ *ein HD. Für alle* $i \in \{1,2\}$ *seien* K_i *eine* G*-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung* m_i *und seien* $d_{212} \neq 0$ *und* $d_{121} \neq 0$*. Dann sind (RHD1) und (RHD2) für* l *und* $\widetilde{l}$ *erfüllt. Insbesondere gilt:*

Gibt es keine maximale Untergruppe M *von* G *so, dass* $K_1 \cap M \neq \varnothing$ *und* $K_2 \cap M \neq \varnothing$ *gilt bzw.* $|M|$ *durch* $\mathrm{kgV}(m_1, m_2)$ *teilbar ist, dann sind* l *und* $\widetilde{l}$ *realisierbar.*

Beweis

Schritt 1: *(RHD1) und (RHD2) für* $\widetilde{l}$ *und für* l *im Fall* $n_1 + n_2 = 1$*:*

Seien $i \in \{1,2\}$ und $j := 3 - i$. Wegen $d_{121} \neq 0$, $d_{212} \neq 0$ und Lemma 5.14 gibt es Elemente $a \in K_i$, $c \in K_j$ und $b \in G$ derart, dass $a^b \cdot c = a$ gilt. Dann folgt

$$1_G = a^{-1} \cdot a^b \cdot c = [a,b] \cdot c = c^{-1}(a^b)^{-1} a.$$

Damit gilt schon (RHD1) und (RHD2) für das Tripel $((a),(b),(c))$ für die HD $[G, \mathfrak{g}_1, 1 \mid [m_1, 1]]$ (im Fall $i = 2$) und $[G, \mathfrak{g}_2, 1 \mid [m_2, 1]]$ (im Fall $i = 1$).

Ferner sind (RHD1) und (RHD2) für das Tripel $((),(),(a^{-1}, a^b, c))$ für das HD $[G, \widetilde{\mathfrak{g}}_1, 0 \mid [m_1, 2], [m_2, 1]]$ (im Fall $i = 1$) und für das Tripel $((),(),(c^{-1}, (a^b)^{-1}, a))$ für das HD $[G, \widetilde{\mathfrak{g}}_2, 0 \mid [m_1, 1], [m_2, 2]]$ (im Fall $i = 2$) erfüllt. □

Schritt 2: *(RHD1) und (RHD2) für* l *im Fall* $n_1 + n_2 = 2$*:*

Wegen $d_{121} \neq 0$ gibt es mit Lemma 5.14 Elemente $a, c_1 \in K_1$ und $c_2 \in K_2$ so, dass $c_1 c_2 = a$ gilt. Wegen $d_{212} \neq 0$ existieren ferner $x \in K_2$ und $g \in G$ so, dass $x^g a = x$ bzw. $x^{-1} x^g = a^{-1}$ ist. Nun folgt

$$1_G = a^{-1} c_1 c_2 = x^{-1} x^g c_1 c_2 = [x,g] c_1 c_2.$$

Damit erfüllt das Tupel $((x),(g),(c_1,c_2))$ die Eigenschaften (RHD1) und (RHD2) für das HD $[G, \mathfrak{g}_3, 1 \mid [m_1, 1], [m_2, 1]]$. □

Schritt 3: *Nachweis von (RHD3):*

Für alle maximalen Untergruppe M von G sei zuerst $K_1 \cap M = \varnothing$ oder $K_2 \cap M = \varnothing$. Im Fall $n_1 + n_2 = 1$ sei $U := \langle a, b, c \rangle$ mit Schritt 1, im Fall $n_1 + n_2 = 2$ sei $U := \langle x, g, c_1, c_2 \rangle$ mit Schritt 2. Für $\widetilde{l}$ sei $U := \langle a^{-1}, a^b, c \rangle = \langle c^{-1}, (a^b)^{-1}, a \rangle$ mit Schritt 1. In jedem Fall enthält U ein Element der Ordnung m_1 aus der G-Konjugiertenklasse K_1 und eines von Ordnung m_2 aus der G-Konjugiertenklasse K_2.

Dann ist $K_1 \cap U \neq \varnothing \neq K_2 \cap U$. Da es nach Voraussetzung keine maximale Untergruppe M von G gibt, für die $K_1 \cap M \neq \varnothing \neq K_2 \cap M$ gilt, folgt $U = G$.

Nun sei die Ordnung aller maximalen Untergruppen von G nicht durch $\mathrm{kgV}(m_1, m_2)$ teilbar. Dann gibt es auch keine maximale Untergruppe M von G, für die $K_1 \cap M \neq \varnothing$ und $K_2 \cap M \neq \varnothing$ gleichzeitig gilt. Nun folgt die Realisierbarkeit von l und $\widetilde{l}$ aus obiger Betrachtung. ■

Wir beginnen nun mit der Untersuchung der Realisierbarkeit der Hurwitzdaten aus Voraussetzung 4.21 und teilen diese in vier Abschnitte auf. Zum Ende dieses Kapitels fassen wir die Ergebnisse zusammen.

5.3 Alternierende Gruppen

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass alle AHD $[G,\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0 \mid [m_1,n_1],\ldots,[m_r,n_r]]$ aus den Zeilen 1 bis 3 von Tabelle 4.1 in Voraussetzung 4.21 für alternierende Gruppen G bis auf $[\mathcal{A}_5,\mathfrak{g},1 \mid [2,1]]$ realisierbar sind. Wir wissen, dass $\mathcal{A}_6 \cong \mathrm{PSL}_2(9)$ gilt und erinnern daran, dass $\mathrm{PSL}_2(9)$ ein generisches Verhalten (siehe Zeile 13 in der Tabelle 4.1 von Voraussetzung 4.21) aufweist. Daher betrachten wir $\mathcal{A}_6$ erst in einem späteren Abschnitt.

Lemma 5.23
Das HD $l := [\mathcal{A}_8,\mathfrak{g},1 \mid [7,1]]$ *ist realisierbar.*

Beweis
Sei $G = \mathcal{A}_8$. Für diesen Beweis nutzen wir die Charaktertafel von G in [Atl] und Lemma 5.14. Seien K_1 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 7 und K_2 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 15. Weiter seien $x \in K_2$ und $y \in K_1$ beliebig. Es gilt $|G| = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ sowie $|K_2| = \frac{|G|}{|C_G(x)|} = \frac{|G|}{15} = 2^6 \cdot 3 \cdot 7$ und $|K_1| = \frac{|G|}{|C_G(y)|} = \frac{|G|}{7} = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5$. Mittels Lemma 5.14 unter Verwendung der Charaktertafel von G in [Atl] folgt

$$\begin{aligned} d_{212} &= \tfrac{|K_1||K_2|}{|G|} \cdot \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \frac{\chi(y)\chi(x)\chi(x^{-1})}{\chi(1_G)} \\ &= 2^6 \cdot 3 \cdot \left(1 + \tfrac{1\cdot(-1)^2}{64}\right) = 2^6 \cdot 3 \cdot \tfrac{5\cdot 13}{2^6} = 195 \neq 0. \end{aligned}$$

Sei jetzt $z \in K_2$. Nach Lemma 5.14 gibt es nun genau 195 Paare $(y,x) \in K_2 \times K_1$ so, dass $yx = z$ gilt. Seien also $(y,x) \in K_2 \times K_1$ so, dass $yx = z$ ist. Nun sind $y,z \in K_2$. Daher gibt es ein $g \in G$ so, dass $y = z^g$ gilt. Dann folgt

$$1_G = z^{-1}yx = z^{-1}z^g x = [z,g]x$$

und damit erfüllt das Tripel $((z),(g),(x))$ bereits (RHD1) und (RHD2) für l, weil $x \in K_1$ und damit $o(x) = 7$ gilt.

Wir zeigen noch (RHD3). Angenommen, es gilt $U := \langle z,g,x\rangle \lneqq G$. Dann gibt es eine maximale Untergruppe $M \leqslant G$ so, dass $U \leqslant M$ ist. Da $z,x \in U \leqslant M$ ist, werden $|U|$ und $|M|$ von $o(z) = 15$ und $o(x) = 7$ geteilt. Mit der Liste der G-Konjugiertenklasse von maximalen Untergruppen von G, ist dann $M \cong \mathcal{A}_7$, da keine andere maximale Untergruppe von G eine durch $\mathrm{kgV}(15,7) = 105$ teilbare Ordnung besitzt. Aber $\mathcal{A}_7$ hat kein Element der Ordnung 15. Damit erfolgt ein Widerspruch zu $U \neq G$ und das Tripel $((z),(g),(x))$ erfüllt nun auch (RHD3) für l. ■

Lemma 5.24
Seien $n_1, n_2 \in \{0,1\}$ *so, dass* $1 \leq n_1 + n_2 \leq 2$ *gilt, und sei* $l := [\mathcal{A}_7, \mathfrak{g}, 1 \mid [5, n_1], [7, n_2]]$ *ein HD. Dann ist* l *realisierbar.*

Beweis
Sei $G = \mathcal{A}_7$. Mit der Charaktertafel von G in [Atl] seien K_1 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 5 und K_2 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 7. Lemma 5.14 unter der Verwendung der Charaktertafel von G in [Atl] liefert $d_{121} = 60$ und $d_{212} = 84$. Beide sind verschieden von 0. Mittels der Liste der G-Konjugiertenklassen von maximalen Untergrupen von G in [Atl] gibt es keine maximale Untergruppe von G, deren Ordnung von 5 und 7 gleichzeitig geteilt wird. Lemma 5.22 liefert nun die Behauptung. ■

Lemma 5.25
Das HD $l := [\mathcal{A}_5, \mathfrak{g}, 1 \mid [2, 1]]$ *ist nicht realisierbar.*

Beweis
Angenommen, l wäre doch realisierbar. Seien $G = \mathcal{A}_5$ sowie $t, a, b \in G^{\#}$ so, dass $o(t) = 2$, $[a, b] = t$ und $\langle a, b, t \rangle = G$ gilt. Wegen $t = [a, b] \in \langle a, b \rangle$ folgt $\langle a, b \rangle = G$. Damit kann der Fall $o(a) = 2 = o(b)$ nicht eintreten, da G sonst eine Diedergruppe wäre. Seien $K_1 = t^G$ und $K_2 = a^G$.

<u>Schritt 1:</u> *Weder* a *noch* b *ist ein Element der Ordnung 5:*

Angenommen, das gilt doch. Wegen $[a, b] = t = t^{-1} = [b, a]$ können wir annehmen, dass $o(a) = 5$ gilt. Dann ist $t = [a, b] = a^{-1} a^b$. Da mit der Charaktertafel von G in [Atl] schon a^{-1} und a in G konjugiert sind, folgt $a^{-1}, a^b \in K_2$. Damit ist eine Involution in $G \cong \mathcal{A}_5$ das Produkt von zwei konjugierten Elementen der Ordnung 5. Unter Verwendung der Charaktertafel von G in [Atl] und Lemma 5.14 ermitteln wir jedoch

$$
\begin{aligned}
d_{221} &= \tfrac{|K_2|^2}{|G|} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \frac{\chi(a)^2 \chi(t^{-1})}{\chi(1_G)} \\
&= \tfrac{|K_2|^2}{|G|} \Big(1 + \tfrac{(-1)}{3} \cdot \tfrac{(-1)^2}{4} \cdot (-1 + \sqrt{5})^2 + \tfrac{(-1)}{3} \cdot \tfrac{(-1)^2}{4} \cdot (-1 - \sqrt{5})^2\Big) \\
&= \tfrac{|K_2|^2}{|G|} \Big(1 + \tfrac{(-2)}{12} \cdot 6 + \tfrac{(-1)}{12} \cdot (2\sqrt{5} - 2\sqrt{5})\Big) \\
&= \tfrac{|K_2|^2}{|G|} (1 - 1) = 0.
\end{aligned}
$$

Daher gibt es keine zwei Elemente $c, d \in K_2$ so, dass $c \cdot d \in K_1$ ist, ein Widerspruch zur Annahme, dass $o(a) = 5$ gilt. □

Da a und b nicht gleichzeitig Involutionen sein können, ist nun a oder b mit Schritt 1 und der Charaktertafel von G in [Atl] ein Element der Ordnung 3 in G. Wegen $[a, b] = t = t^{-1} = [b, a]$ können wir o.B.d.A. annehmen, dass $o(a) = 3$ gilt. Sei $M := \{(x, y) \in G^2 \mid [x, y] = t \text{ und } o(x) = 3\}$. Dann ist $(a, b) \in M$. Seien weiterhin $K_1 = t^G$ und $K_2 = a^G$.

<u>Schritt 2:</u> *Es gilt* $|M| = 24$*:*

Da $t = [a,b] = a^{-1}a^b$ und $a, a^{-1}, a^b \in K_2$ mit [Atl] gilt, ermitteln wir $d_{221} = 8$ mittels Lemma 5.14. Ferner gilt $|C_G(a)| = 3$. Da K_2 die einzige G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 3 ist (siehe [Atl, S. 2]), gilt nun insbesondere $|M| = d_{221} \cdot |C_G(a)| = 24$ mit Lemma 5.16. □

Seien $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$, wobei $t \in S$ gilt, $N := N_G(S)$ und

$$M_N := \{(x,y) \in N^2 \mid [x,y] = t \text{ und } o(x) = 3\}.$$

<u>Schritt 3:</u> *Es gilt* $M_N = M$*:*

Es ist $N \cong \mathcal{A}_4$ nach [Atl] und wir betrachten die Charaktertafel von N (siehe beispielsweise Example 7.9 in [HupC, S. 88] für eine Charaktertafel der $\mathcal{A}_4$). Sei $x \in N$ mit $o(x) = 3$. Dann ist $K_2 = x^G$ mit [Atl] und wir sehen, dass $K_1 \cap N = t^N$ gilt und dass $K_2 \cap N$ in zwei N-Konjugiertenklassen zerfällt, genauer $K_2 \cap N = x^N \cup (x^{-1})^N$. Seien $K_\beta := x^N$, $K_\gamma := (x^{-1})^N$ und $K_\alpha := t^N$.

Es gilt $|K_\beta| = \frac{|N|}{|C_N(x)|} = 4 = \frac{|N|}{|C_N(x^{-1})|} = |K_\gamma|$. Wegen $t = [a,b] = a^{-1}a^b$ und wegen $x^N \cap (x^{-1})^N = \varnothing$ müssen wir $d^{(N)}_{\beta\gamma\alpha}$ und $d^{(N)}_{\gamma\beta\alpha}$ ermitteln, um $|M_N|$ zu bestimmen. Wir berechnen mit der Charaktertafel von N und Lemma 5.14:

$$\begin{aligned} d^{(N)}_{\beta\gamma\alpha} = d^{(N)}_{\gamma\beta\alpha} &= \tfrac{|K_\beta||K_\gamma|}{|N|} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(N)} \frac{\chi(x)\chi(x^{-1})\chi(t^{-1})}{\chi(1_G)} \\ &= \tfrac{16}{12}\left(1 + \tfrac{2}{4} \cdot (-1 + i\sqrt{3})(-1 - i\sqrt{3})\right) \\ &= \tfrac{4}{3}\left(1 + \tfrac{1}{2} \cdot (1+3)\right) \\ &= \tfrac{4}{3} \cdot 3 = 4. \end{aligned}$$

Nun ist mit Lemma 5.16

$$|M_N| = d^{(N)}_{\beta\gamma\alpha} \cdot |C_N(x)| + d^{(N)}_{\gamma\beta\alpha} \cdot \left|C_N(x^{-1})\right| = 2 \cdot d^{(N)}_{\beta\gamma\alpha} |C_N(x)| = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 24.$$

Da offenbar $M_N \subseteq M$ ist und $|M_N| = 24 = |M|$ gilt, folgt $M_N = M$. Das bedeutet, dass für alle $(x,y) \in M$ schon $\langle x,y \rangle \leqslant N \lneqq G$ gilt, insbesondere gilt dies für $(a,b) \in M$. Dieser Widerspruch zur Annahme, dass l realisierbar ist, liefert die Behauptung des Lemmas. ■

Lemma 5.26
Seien $n_1, n_2 \in \{0,1\}$, $1 \leq n_1 + n_2 \leq 2$ *und* $l := [\mathcal{A}_5, \mathfrak{g}, 1 \mid [3,n_1], [5,n_2]]$ *ein HD. Seien weiter* $\widetilde{n}_1, \widetilde{n}_2 \in \{1,2\}$, $\widetilde{n}_1 + \widetilde{n}_2 = 3$ *und* $\widetilde{l} := [\mathcal{A}_5, \widetilde{\mathfrak{g}}, 0 \mid [3,\widetilde{n}_1], [5,\widetilde{n}_2]]$ *ein HD. Dann sind* l *und* $\widetilde{l}$ *realisierbar.*

Beweis
Seien $G = \mathcal{A}_5$, K_1 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 3 und K_2 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 5. Unter Verwendung der Charaktertafel in [Atl] liefert Lemma 5.14 die Werte $d_{121} = 3 \neq 0$ und $d_{212} = 5 \neq 0$.

Mit der Liste der G-Konjugiertenklassen von maximalen Untergruppen von G in [Atl] sehen wir, dass G keine maximale Untergruppe hat, deren Ordnung durch $\mathrm{kgV}(3,5) = 15$ teilbar ist. Lemma 5.22 liefert nun die Behauptung. ■

Lemma 5.27
Sei $G \cong \mathcal{A}_5$. Dann sind folgende Hurwitzdaten realisierbar:

(i) Cogeschlecht 0:
$[G,4,0 \mid [2,1],[5,2]]$, $[G,11,0 \mid [2,2],[3,2]]$, $[G,15,0 \mid [2,2],[3,1],[5,1]]$, $[G,19,0 \mid [2,2],[5,2]]$, $[G,20,0 \mid [2,1],[3,2],[5,1]]$, $[G,24,0 \mid [2,1],[3,1],[5,2]]$, $[G,29,0 \mid [3,2],[5,2]]$, $[G,35,0 \mid [2,2],[3,2],[5,1]]$, $[G,39,0 \mid [2,2],[3,1],[5,2]]$, $[G,44,0 \mid [2,1],[3,2],[5,2]]$, $[G,59,0 \mid [2,2],[3,2],[5,2]]$,

(ii) Cogeschlecht 1:
$[G,31,1 \mid [2,2]]$, $[G,36,1 \mid [2,1],[3,1]]$, $[G,40,1 \mid [2,1],[5,1]]$, $[G,41,1 \mid [3,2]]$, $[G,49,1 \mid [5,2]]$, $[G,51,1 \mid [2,2],[3,1]]$, $[G,55,1 \mid [2,2],[5,1]]$, $[G,56,1 \mid [2,1],[3,2]]$, $[G,60,1 \mid [2,1],[3,1],[5,1]]$,

(iii) Cogeschlecht 2:
$[G,76,2 \mid [2,1]]$.

Beweis
In diesem Beweis nutzen wir die Notation der G-Konjugiertenklassen von Elementen sowie die Charaktertafel von G in [Atl].

<u>Schritt 1:</u> *Die HD mit Cogeschlecht 1 sind realisierbar:*

Mit Lemma 5.26 sind die HD $[G,21,1 \mid [3,1]]$ und $[G,25,1 \mid [5,1]]$ realisierbar. Lemma 5.21 auf diese RHD angewandt liefert die Realisierbarkeit von $[G,41,1 \mid [3,2]]$ und $[G,49,1 \mid [5,2]]$.

Sei jetzt $((a),(b),(c))$ eine Realisierung für das HD $[G,21,1 \mid [3,1]]$. Dann gilt $o(c) = 3$, $1_G = [a,b]c$ und $G = \langle a,b,c\rangle$ nach (RHD1) bis (RHD3). Mit Lemma 5.14 ermitteln wir $d_{2A2A3A} = 3$ und $d_{2A3A3A} = 6$. Daher gibt es Elemente $x_1, x_2, y_1 \in 2A$ sowie $y_2 \in 3A$ so, dass $y_1y_2 = c = x_1x_2$ gilt. Ferner ist $o(y_1) = 2 = o(x_1) = o(x_2)$ sowie $o(y_2) = 3$.

Aus $1_G = [a,b]c$ folgt $[a,b]x_1x_2 = [a,b]c = 1_G = [a,b]c = [a,b]y_1y_2$. Weiter gilt $c \in \langle x_1,x_2\rangle$ und $c \in \langle y_1,y_2\rangle$. Dann folgt $G = \langle a,b,c\rangle \leqslant \langle a,b,x_1,x_2\rangle \leqslant G$ und dasselbe für $\langle a,b,y_1,y_2\rangle$. Insgesamt sind also (RHD1) bis (RHD3) für das HD $[G,31,1 \mid [2,2]]$ mit dem Tripel $((a),(b),(x_1,x_2))$ erfüllt und ferner ist $((a),(b),(y_1,y_2))$ eine Realisierung für $[G,36,1 \mid [2,1],[3,1]]$.

Lemma 5.14 liefert weiterhin $d_{2A3A2A} = d_{2A5A2A} = d_{2A5B2A} = 4$, $d_{3A5A3A} = d_{3A5B3A} = 3$ und $d_{2A5A5B} = d_{2A5B5A} = 5$. Damit erhalten wir mit derselben Argumentation wie zuvor Realisierungen für $[G,51,1 \mid [2,2],[3,1]]$ und $[G,55,1 \mid [2,2],[5,1]]$ aus $[G,31,1 \mid [2,2]]$, für $[G,60,1 \mid [2,1],[3,1],[5,1]]$ aus $[G,36,1 \mid [2,1],[3,1]]$ und für $[G,40,1 \mid [2,1],[5,1]]$ aus $[G,25,1 \mid [5,1]]$.

Lemma 5.21 angewandt auf $[G, 36, 1 \mid [2,1], [3,1]]$ liefert eine Realisierung für das HD $[G, 56, 1 \mid [2,1], [3,2]]$. Das waren alle Hurwitzdaten vom Cogeschlecht 1 aus der Behauptung. $\square$

<u>Schritt 2:</u> *Das HD mit Cogeschlecht 2 ist realisierbar:*

Mit Schritt 1 sei $((a), (b), (c_1, c_2))$ eine Realisierung für das HD $[G, 31, 1 \mid [2,2]]$. Lemma 5.14 liefert $d_{3A2A3A} = 6 \neq 0$. Daher gibt es Elemente $x \in 3A$ und $y \in G$ so, dass $x^y c_1 = x$ bzw. $x^{-1} x^y = c_1^{-1} = c_1$ gilt. Nun gilt

$$1_G = [a,b]c_1c_2 = [a,b]x^{-1}x^y c_2 = [a,b][x,y]c_2.$$

Da nach (RHD3) für $[G, 31, 1 \mid [2,2]]$ schon $\langle a, b, c_1, c_2 \rangle = G$ gilt und ferner $\langle a, b, c_1, c_2 \rangle$ eine Untergruppe von $\langle a, b, x, y, c_2 \rangle$ ist, erhalten wir mit $((a,x), (b,y), (c_2))$ eine Realisierung für $[G, 76, 2 \mid [2,1]]$. $\square$

<u>Schritt 3:</u> *Die HD mit Cogeschlecht 0 sind realisierbar:*

Für das HD $[G, 11, 0 \mid [2,2], [3,2]]$ betrachten wir G in der natürlichen Operation auf $\{1,2,3,4,5\}$ und wählen $c_{1,1} = c_{1,2} = (23)(45)$, $c_{2,1} = (124)$ und $c_{2,2} = (142)$. Dann erfüllt $((), (), (c_{1,1}, c_{1,2}, c_{2,1}, c_{2,2}))$ die Eigenschaften (RHD1) und (RHD2). Für (RHD3) bemerken wir, dass $c_{1,2} \cdot c_{2,1} = (12345)$ und somit $\langle c_{1,1}, c_{1,2}, c_{2,1}, c_{2,2} \rangle = G$ gilt, weil G keine echte Untergruppe besitzt, deren Ordnung durch $15 = \mathrm{kgV}(3,5)$ teilbar ist.

Wegen $d_{5A5B2A} = d_{5B5A2A} = 4$ gibt es Elemente $c_{2,1}, c_{2,2} \in G$ von Ordnung 5 und $c_{1,1} \in G$ von Ordnung 2 so, dass $c_{2,1}c_{2,2} = c_{1,1}$ gilt. Dann folgt $1_G = c_{1,1}c_{2,1}c_{2,2}$ und wir betrachten daher $U := \langle c_{1,1}, c_{2,1}, c_{2,2} \rangle$. Die Ordnung von U wird von $\mathrm{kgV}(2,5) = 10$ geteilt. Somit folgt $U = G$, da ansonsten U wegen der Untergruppenstruktur von G selbst eine Diedergruppe der Ordnung 10 wäre, dort jedoch das Produkt von zwei Elementen der Ordnung 5 keine Involution ergibt wie in unserem Fall. Daher ist $((), (), (c_{1,1}, c_{2,1}, c_{2,2}))$ eine Realisierung für $[G, 4, 0 \mid [2,1], [5,2]]$.

Wegen Lemma 5.26 sind die HD $[G, 5, 0 \mid [3,2], [5,1]]$ und $[G, 9, 1 \mid [3,1], [5,2]]$ realisierbar. Mit Lemma 5.14 folgt $d_{2A2A3A} = 3$, $d_{2A3A3A} = 6$, $d_{2A2A2A} = 2$ und $d_{2A3A2A} = 4$. Diese angewandt auf die Hurwitzdaten $[G, 5, 0 \mid [3,2], [5,1]]$ und $[G, 4, 0 \mid [2,1], [5,2]]$ liefern Realisierungen für die HD $[G, 15, 0 \mid [2,2], [3,1], [5,1]]$, $[G, 20, 0 \mid [2,1], [3,2], [5,1]]$, $[G, 19, 0 \mid [2,2], [5,2]]$ und $[G, 24, 0 \mid [2,1], [3,1], [5,2]]$.

Mehrmaliges Anwenden von Lemma 5.21 auf die RHD $[G, 15, 0 \mid [2,2], [3,1], [5,1]]$, $[G, 20, 0 \mid [2,1], [3,2], [5,1]]$ und $[G, 9, 1 \mid [3,1], [5,2]]$ liefert Realisierungen für $[G, 35, 0 \mid [2,2], [3,2], [5,1]]$, $[G, 39, 0 \mid [2,2], [3,1], [5,2]]$, $[G, 44, 0 \mid [2,1], [3,2], [5,2]]$ und $[G, 29, 0 \mid [3,2], [5,2]]$. Erneutes Anwenden von Lemma 5.21 auf $[G, 35, 0 \mid [2,2], [3,2], [5,1]]$ oder $[G, 39, 0 \mid [2,2], [3,1], [5,2]]$ liefert eine Realisierung für $[G, 59, 0 \mid [2,2], [3,2], [5,2]]$. Das waren alle zu untersuchenden Hurwitzdaten aus der Behauptung. Insgesamt folgt die Aussage des Lemmas. $\blacksquare$

Lemma 5.28
Es sei $l := [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1, n_1], \ldots, [m_r, n_r]]$ *ein HD aus einer der Zeilen 1, 2 oder 3 von Tabelle 4.1 in Voraussetzung 4.21. Gilt* $l \neq [\mathcal{A}_5, \mathfrak{g}, 1 \mid [2,1]]$*, so ist* l *realisierbar.*

Beweis
Sei l zuerst wie in Zeile 1 von Tabelle 4.1 in Voraussetzung 4.21. Dann ist $G = \mathcal{A}_5$. Mit Lemma 5.25 ist $[\mathcal{A}_5, \mathfrak{g}, 1 \mid [2,1]]$ nicht realisierbar. Die Lemmata 5.26 und 5.27 liefern eine Realisierung für l mit kleinstmöglichem Cogeschlecht $\mathfrak{g}_0$ sowie für das Hurwitzdatum $[\mathcal{A}_5, 76, 2 \mid [2,1]]$. Mit dem Induktionsargument aus Lemma 5.20 folgt nun die Behauptung.

Sei jetzt l wie in den Zeilen 2 oder 3 von Tabelle 4.1 in Voraussetzung 4.21. Dann ist G eine der Gruppen $\mathcal{A}_7$ oder $\mathcal{A}_8$ und l erfüllt die Voraussetzung in Lemma 5.24 bzw. 5.23. Diese liefern die Behauptung für den Fall $\mathfrak{g}_0 = 1$. Mit Lemma 5.20 folgt der Rest. ■

5.4 Sporadische Gruppen

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass alle AHD aus Voraussetzung 4.21, in denen G eine sporadische Gruppe ist, realisierbar sind.

Lemma 5.29
Sei G *isomorph zu* M_{11} *oder* M_{22}*. Dann ist das HD* $l := [G, \mathfrak{g}, 1 \mid [5,1]]$ *realisierbar.*

Beweis
Mit der Charaktertafel von G in [Atl] seien K_1 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 5 und K_2 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 11. Unter Verwendung der Charaktertafel von G in [Atl] liefert Lemma 5.14 die Werte $d_{121} = 198$ und $d_{212} = 135$, falls $G \cong M_{11}$ gilt, bzw. $d_{121} = 7680$ und $d_{212} = 8448$, falls $G \cong M_{22}$ ist. Mit Lemma 5.22 folgen dann die Eigenschaften (RHD1) und (RHD2) für l. Seien also $a \in K_2$, $c \in K_1$ und $b \in G$ so, dass das Tripel $((a),(b),(c))$ (RHD1) und (RHD2) für l erfüllt. Ferner sei $U := \langle a, a^b, c \rangle \leqslant \langle a, b, c \rangle$. Wegen (RHD2) gilt $a = a^b c$.

Wir zeigen noch, dass (RHD3) für l erfüllt ist. Gilt $U = G$, so sind wir fertig. Seien also $U \neq G$ und $M \leqslant G$ eine maximale Untergruppe von G mit $U \leqslant M$. Da $a, c \in U \leqslant M$ gilt, werden $|U|$ und $|M|$ von $\mathrm{kgV}(o(a), o(c)) = \mathrm{kgV}(11, 5) = 55$ geteilt. Mit der Liste der G-Konjugiertenklassen von maximalen Untergruppen in [Atl] folgt $M \cong \mathrm{PSL}_2(11)$ (sowohl für $G \cong M_{11}$ als auch für $G \cong M_{22}$). Wir wollen Lemma 5.19 anwenden.

<u>Schritt 1:</u> *Es gilt* $|\{(y,z) \in (K_2 \cap M) \times (K_1 \cap M) \mid yz = a\}| = 22$*:*

Mit den Charaktertafeln von G und M in [Atl] ist $K_2 \cap M = a^M$ und es gibt ein $y \in K_1 \cap M$ so, dass $K_1 \cap M = c^M \dot{\cup} y^M$ gilt. Seien $K_\beta := K_2 \cap M$, $K_{\alpha_1} := c^M$

und $K_{\alpha_2} := y^M$. Unter Verwendung der Charaktertafel von M in [Atl] ermitteln wir $d^{(M)}_{\beta\alpha_1\beta} = 11 = d^{(M)}_{\beta\alpha_2\beta}$ mit dem Lemma 5.14. Daher gilt

$$|\{(y,z) \in (K_2 \cap M) \times (K_1 \cap M) \mid yz = a\}| = d^{(M)}_{\beta\alpha_1\beta} + d^{(M)}_{\beta\alpha_2\beta} = 22.$$

□

Schritt 2: *Die Anzahl der Gruppen $V \in M^G$ mit $a \in V$ ist eins:*

Sei zuerst $G \cong M_{11}$. In G gibt es $\frac{|G|}{|N_G(M)|} = 12$ G-Konjugierte von M. Es gilt $|K_2| = \frac{|G|}{|C_G(a)|} = \frac{7920}{11} = 720$ und $|K_2 \cap M| = \frac{|M|}{|C_M(a)|} = \frac{660}{11} = 60$. Ferner ist a nur in M und in keinem anderen G-Konjugierten von M enthalten, da

$$|K_2 \cap M| \cdot \left|M^G\right| = 720 = |K_2|$$

gilt. Sei nun $G \cong M_{22}$.

Es ist $\left|M^G\right| = \frac{|G|}{|N_G(M)|} = 672$ und es gilt $|K_2| = \frac{|G|}{|C_G(a)|} = \frac{443520}{11} = 40320$ sowie $|K_2 \cap M| = \frac{|M|}{|C_M(a)|} = \frac{660}{11} = 60$. Da $|K_2 \cap M| \cdot \left|M^G\right| = 40320 = |K_2|$ gilt, ist a nur in M und in keinem anderen G-Konjugierten von M enthalten. □

Sei wieder G isomorph zu M_{11} oder M_{22}. Mit Schritt 1 ist $d_{212} \in \{135, 8448\}$. Ferner gilt $d^{(M)}_{\beta\alpha_1\beta} + d^{(M)}_{\beta\alpha_2\beta} = 22 < d_{212}$. Mit den Lemmata 5.22 und 5.19 sowie Schritt 2 können wir dann $a \in K_2$, $c \in K_1$ und $b \in G$ so wählen, dass $a = a^b c$ und $U = \langle a, a^b, c\rangle \not\leqslant M$ gilt. Da M die einzige Untergruppe in M^G ist, die a enthält, und M^G mit [Atl] die einzige G-Konjugiertenklasse von maximalen Untergruppen von G ist, bei der die Ordnung der Elemente von M^G von $\mathrm{kgV}(5,11) = 55$ geteilt wird, folgt $U = G$. Weil $U = \langle a, a^b, c\rangle \leqslant \langle a, b, c\rangle \leqslant G$ ist, folgt die Realisierbarkeit von l mit dem Tripel $((a),(b),(c))$. ■

Lemma 5.30
Sei $n_1 \in \{0,1\}$. Dann ist das HD $l := [M_{22}, \mathfrak{g}, 1 \mid [5, n_1], [7,1]]$ realisierbar.

Beweis
Seien $G = M_{22}$, K_1 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 5, K_2 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 7 und K_3 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 11. Mit dem Lemma 5.14 und der Charaktertafel von G in [Atl] ermitteln wir $d_{323} = 5632$, $d_{232} = 6272$ und $d_{123} = 12672$. Sei $U \leqslant G$ so, dass $|U|$ von $\mathrm{kgV}(7,11) = 77$ geteilt wird. Dann ist $U = G$, da G keine maximale Untergruppe besitzt, deren Ordnung durch 77 teilbar ist (siehe [Atl]). Lemma 5.22 liefert nun die Realisierbarkeit von l im Fall $n_1 = 0$.

Sei nun $n_1 = 1$. Wegen $d_{123} = 12672$ gibt es Elemente $c_1 \in K_1$, $c_2 \in K_2$ und $x \in K_3$ so, dass $x = c_1 c_2$ gilt. Ferner erhalten wir mit der Charaktertafel von G in [Atl] und Lemma 5.14 den Wert $d_{113} = 16896$. Daher gibt es Elemente $g, h \in K_1$ so, dass $gh = x$ gilt. Sei $b := g^{-1}$. Da K_1 die einzige G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 5 ist (siehe [Atl]), gilt $b \in K_1$. Dann gibt es ein $a \in G$ so, dass $b^a = h$ ist. Nun gilt $[b,a] = b^{-1}b^a = gh = x$ und weiter

$$1_G = x^{-1}c_1c_2 = [b,a]^{-1}c_1c_2 = [a,b]c_1c_2.$$

Da $[a,b], c_2 \in \langle a,b,c_1,c_2\rangle$ Elemente der Ordnung 7 und 11 sind, folgt $\langle a,b,c_1,c_2\rangle = G$. Damit ist das Tripel $((a),(b),(c_1,c_2))$ eine Realisierung für l im Fall $n_1 = 1$. ■

Lemma 5.31
Das HD $l := [J_1, \mathfrak{g}, 1 \mid [15,1]]$ *ist realisierbar.*

Beweis
Seien $G = J_1$ sowie K_1 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 15 und K_2 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 19. Mit Lemma 5.14 und mit der Charaktertafel von G in [Atl] ermitteln wir $d_{212} = 589$ und $d_{121} = 615$. Da G mit [Atl] keine maximale Untergruppe besitzt, deren Ordnung durch $\mathrm{kgV}(19,15) = 285$ teilbar ist, folgt mit Lemma 5.22 die Behauptung. ■

Lemma 5.32
Es sei $l := [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1,n_1], \ldots, [m_r,n_r]]$ *ein HD aus aus einer der Zeilen 4, 5 oder 6 von Tabelle 4.1 in Voraussetzung 4.21. Dann ist* l *realisierbar.*

Beweis
Das folgt aus den Lemmata 5.29, 5.30, 5.31 und 5.20. ■

5.5 Gruppen vom Lie-Typ – generische Fälle

In diesem Abschnitt werden wir die Hurwitzdaten der generischen Fälle aus der Tabelle 4.1, Zeilen 13 bis 21 in Voraussetzung 4.21 auf Realisierbarkeit überprüfen. Für diejenigen Serien von Gruppen, für die generische Charaktertafeln existieren, werden wir diese von Chevie [CHE] nutzen, um die bisherige Strategie mit Lemma 5.14 fortzuführen. Für die anderen Serien von Gruppen werden wir neue Strategien entwickeln. In Bemerkung 5.35 gehen wir auf die Verwendung von und die Informationsgewinnung aus Chevie [CHE] am Beispiel der Serie $\mathrm{PSL}_2(q)$ ein.

Zunächst werden wir die Hurwitzdaten $l = [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1,n_1], \ldots, [m_r,n_r]]$ aus der Tabelle 4.1, Zeilen 13 und 14, auf Realisierbarkeit überprüfen. Dabei beweisen wir zuerst die Realisierbarkeit von Hurwitzdaten der Form

$$\left[\mathrm{PSL}_2(q), \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \;\middle|\; \left[\tfrac{q-1}{\mathrm{ggT}(q-1,2)}, n_1\right], \left[\tfrac{q+1}{\mathrm{ggT}(q-1,2)}, n_2\right]\right]$$

für beliebige Primzahlpotenzen $q \geq 7$ sowie $n_1, n_2 \in \{0,1,2\}$, $1 \leq n_1 + n_2 \leq 4$ und $\mathfrak{g}_0 \geq 0$ so klein wie möglich. Das liefert uns dann die Realisierbarkeit aller Hurwitzdaten aus Tabelle 4.1, Zeile 14 sowie die Realisierbarkeit eines Teils der Hurwitzdaten aus Tabelle 4.1, Zeilen 7, 8 und 13.

Lemma 5.33
Seien $q \in \mathbb{N}$ eine Primzahlpotenz, $q \geq 7$ und $G = \mathrm{PSL}_2(q)$. Seien $d := \mathrm{ggT}(q-1,2)$ sowie $x,y \in G$ mit $o(x) = \frac{q-1}{d} =: \beta$ und $o(y) = \frac{q+1}{d} =: \gamma$. Gilt $U := \langle x,y \rangle \neq G$, so ist $q = 7$ und $U \cong \mathcal{S}_4$.

Beweis
Es sei $U \neq G$. Dann gibt es eine maximale Untergruppe $M \leqslant G$ so, dass $U \leqslant M$ gilt. Wir bestimmen M und U unter Zuhilfenahme des Satzes von Dickson (siehe Hauptsatz II.8.27 in [Hup1]). Seien dazu $p,n \in \mathbb{N}$ so, dass $q = p^n$ gilt. Da $x,y \in U \leqslant M$ gilt, werden $|U|$ und $|M|$ von $o(x) = \beta$ und $o(y) = \gamma$ geteilt.

Wir sehen sofort, dass M und U weder elementarabelsche p-Gruppen noch zyklisch sind, da $|U|$ und $|M|$ von β *und* γ gleichzeitig geteilt werden.

Angenommen, M sei eine Diedergruppe der Ordnung $2z$, wobei z ein Teiler von β oder γ ist. Da $|M|$ von $\mathrm{kgV}(\beta,\gamma)$ geteilt wird und $\beta < \gamma$ gilt, folgt, dass $\beta = 2$ und γ durch z teilbar ist. Dann ist q ungerade und es gilt $q = 5$, da für gerades q stets $\beta = q-1$ und $\gamma = q+1$ ungerade sind. Dies liefert einen Widerspruch zur Voraussetzung $q \geq 7$.

Die Gruppe U ist ferner nicht im Normalisator einer Sylow p-Untergruppe von G enthalten, da die Ordnung eines solchen Normalisators nicht von γ geteilt wird (das ist der Fall (7) im Hauptsatz II.8.27 in [Hup1]).

Seien $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$ so, dass $q = p^n$ gilt. Angenommen, es gebe einen echten Teiler $f \in \mathbb{N}$ von n so, dass $q_0 = p^f$ und $M \cong \mathrm{PSL}_2(q_0)$ ist. Dann folgt $|M| = d^{-1} q_0(q_0-1)(q_0+1)$. Ferner gilt $\mathrm{ggT}(p,\beta) = 1 = \mathrm{ggT}(p,\gamma)$ und es folgt

$$d^{-2}(p^{2n}-1) = d^{-2}(q-1)(q+1) = \beta \cdot \gamma = \mathrm{ggT}(\beta,\gamma).$$

Diese Zahl teilt $d^{-2}(q_0-1)(q_0+1) = d^{-2}(p^{2f}-1)$. Also ist p^{2n} ein Teiler von p^{2f} und es erfolgt ein Widerspruch zur Annahme $M \cong \mathrm{PSL}_2(q_0)$, da $n > f$ gilt. Analog können wir das für $M \cong \mathrm{PGL}_2(q_0)$ für einen echten Teiler q_0 von q zeigen.

Angenommen, es sei $M \cong \mathcal{A}_5$. Dann ist q^2-1 nach Voraussetzung im Hauptsatz II.8.27 (6) in [Hup1] durch 5 teilbar. Da $7^2-1 = 48$ nicht durch 5 teilbar ist, gilt $q \geq 8$. Für $q = 8$ ist $\beta = 7$ und $\gamma = 9$. Für $q \geq 9$ gilt $\beta \geq 4$ und $\gamma \geq 5$. Mit der Charaktertafel von $\mathcal{A}_5$ in [Atl] sehen wir, dass M dann keine Elemente der Ordnung β oder γ enthält.

Es ist $M \ncong \mathcal{A}_4$, da sonst M nur Elemente der Ordnung 1, 2 oder 3 hat und wegen $\mathrm{kgV}(\beta,\gamma) \,\big|\, |M|$ erneut $q = 5$ folgen würde. Daher ist nur $M \cong \mathcal{S}_4$ mit Hauptsatz II.8.27 (5) in [Hup1] möglich. Nach Voraussetzung im selbigen Hauptsatz wird q^2-1 von 16 geteilt. Falls q gerade ist, so ist q^2-1 ungerade und somit niemals durch 16 teilbar. Daher sind wir fertig, falls q gerade ist.

Sei also q ungerade. Es gilt $7^2-1 = 48 = 3 \cdot 16$. Falls $q \geq 9$ ist, sind wir ebenso fertig, da $\gamma \geq 5$ gilt und $\mathcal{S}_4$ keine Elemente von Ordnung größer oder gleich 5 besitzt. Damit folgt $q = 7$, $\beta = 3$ und $\gamma = 4$. Da U Elemente der Ordnung β und γ besitzt und $\mathcal{S}_4$ keine maximalen Untergruppen hat, in denen es Elemente der Ordnung 3 und 4 gleichzeitig gibt, folgt schon $U \cong \mathcal{S}_4$. ∎

Lemma 5.34
Seien $q \in \mathbb{N}$ eine Primzahlpotenz, $q \geq 7$ und $G = \mathrm{PSL}_2(q)$. Seien $d := \mathrm{ggT}(q-1,2)$, $\beta := \frac{q-1}{d}$, $\gamma := \frac{q+1}{d}$ und $(\mathfrak{g}_0, n_1, n_2) \in \{(1,1,0),(1,0,1),(1,1,1),(0,2,1),(0,1,2)\}$ so, dass $l := [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [\beta, n_1], [\gamma, n_2]]$ ein HD ist. Dann ist l realisierbar.

Beweis
Mit den Sätzen II.8.3 und II.8.4 in [Hup1] seien K_1 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung β und K_2 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung γ. Unter Verwendung der generischen Charaktertafel von G in [CHE] gilt $d_{121} = d \cdot (q-1)$ und $d_{212} = d \cdot (q+1)$ mittels Lemma 5.14 (siehe Bemerkung 5.35).

Falls $q \geq 8$ gilt, folgt die Behauptung mit den Lemmata 5.22 und 5.33 aus den zu Beginn berechneten Werten $d_{121} = d \cdot (q-1)$ und $d_{212} = d \cdot (q+1)$. Für $q = 7$ folgen (RHD1) und (RHD2) für l aus $d_{121} = 12$ und $d_{212} = 16$ und Lemma 5.22. Um (RHD3) für l im Fall $q = 7$ zu zeigen, unterscheiden wir mehrere Fälle:

Fall 1: Es sei $(\mathfrak{g}_0, n_1, n_2) = (0,2,1)$. Dann gibt es nach Lemma 5.22 Elemente $c_1, c_2 \in K_1$ und $e \in K_2$ so, dass das Tripel $((),(),(c_1,c_2,e))$ (RHD1) und (RHD2) für l erfüllt. Da $o(c_1) = o(c_2) = \beta = 3$ gilt, ist $c_1 \cdot c_2 = e^{-1}$ ein Element der Ordnung 4. Falls also $U := \langle c_1, c_2, e \rangle \neq G$ gilt, so ist $U \cong \mathcal{S}_4$ nach Lemma 5.33. Ferner sind c_1 und c_2 in einer echten Untergruppe V von U enthalten, wobei $V \cong \mathcal{A}_4$ gilt. Damit ist $e^{-1} = c_1 c_2 \in V$ ein Element der Ordnung 4, ein Widerspruch. Daher gilt $U = G$ und es folgt die Realisierbarkeit von l für $(\mathfrak{g}_0, n_1, n_2) = (0,2,1)$.

Fall 2: Es sei $(\mathfrak{g}_0, n_1, n_2) \in \{(1,0,1),(1,1,1)\}$. Mit Lemma 5.22 gibt es Elemente $a, c_1 \in K_1$, $c, c_2 \in K_2$ und $b, x, y \in G$ so, dass das Tripel $((a),(b),(c))$ (RHD1) und (RHD2) für das HD $[G, 64, 1 \mid [4,1]]$ und das Tripel $((x),(y),(c_1,c_2))$ (RHD1) und (RHD2) für das HD $[G, 120, 1 \mid [3,1],[4,1]]$ erfüllt. Ferner können wir wegen $d_{121} = 2(7-1) = 12$ die Elemente $x, y \in G$ so wählen, dass $o([x,y]) = \beta = 3$ gilt. Nun ist $a^{-1}a^b = c^{-1}$ und $[x,y]c_1 = {c_2}^{-1}$ mit (RHD2) jeweils wieder ein Produkt von zwei Elementen der Ordnung 3, welches ein Element der Ordnung 4 ergibt. Wie im Fall 1 folgt dann schon die Realisierbarkeit für l in diesem Fall.

Fall 3: Seien $H := \langle (375)(486), (126)(348) \rangle$, $a := (1372)(4568)$, $b := (182)(465)$ und $c := (126)(348)$. Eine kurze Rechnung in [GAP] zeigt, dass H isomorph zu G ist, ferner $a, b, c \in H$ gilt sowie $((a),(b),(c))$ eine Realisierung für das HD $[H, 57, 1 \mid [3,1]]$ und $((),(),(c, a^{-1}, a^b))$ eine Realisierung für das HD $[H, 15, 0 \mid [3,1],[4,2]]$ ist. Damit ist l auch für $(\mathfrak{g}_0, n_1, n_2) \in \{(1,1,0),(0,1,2)\}$ realisierbar und es folgt die Behauptung.

■

Bemerkung 5.35
In dieser Bemerkung erläutern wir die Informationsgewinnung aus CHEVIE [CHE] am Beispiel $\mathrm{PSL}_2(q)$ näher. Zunächst einmal bemerken wir, dass wir die maple-Version von CHEVIE benutzen und verweisen auf die Webpage von CHEVIE `http://www.math.rwth-aachen.de/~CHEVIE/chevie-maple.html` sowie das dort zugängliche Benutzerhandbuch.

Durch Eingabe des Befehls `GenCharTab();` werden alle Serien von endlichen Gruppen ausgegeben, für die eine generische Charaktertafel in [CHE] vorhanden ist. Für den Fall $\mathrm{PSL}_2(q)$ sehen wir die drei Möglichkeiten `PSL2.0`, `PSL2.1` und `PSL2.3`. Durch Eingabe von beispielsweise `GenCharTab("PSL2.1");` wird die generische Charaktertafel von $\mathrm{PSL}_2(q)$ für den Fall $q \equiv 1$ modulo 4 geladen. Diese ist anschließend mittels `g` zugänglich. `PSL2.0` liefert eine generische Charaktertafel für gerades q und `PSL2.3` für $q \equiv 3$ modulo 4.

Anschließend müssen wir herausfinden, in welchen generischen Konjugiertenklassen beispielsweise Elemente der Ordnung $\beta := \frac{q-1}{\mathrm{ggT}(q-1,2)}$ und $\gamma := \frac{q+1}{\mathrm{ggT}(q-1,2)}$ zu finden sind. Durch Kenntnis der Zentralisatorordnung eines gewünschten Elements von G können wir mit dem Befehl `CentOrd();` einschränken, welche generische Konjugiertenklasse in Frage kommt. Das Beispiel `GenCharTab("PSL2.1");` liefert bei der Eingabe von `CentOrd(g)` die Tabelle:

```
> CentOrd(g);

clt   Order of centralizer(s)

=======================================================
1   1/2*q*(q-1)*(q+1)
2   q
3   q
4   1/2*q-1/2
5   1/2*q+1/2
6   q-1
```

Dabei ist die Spalte `clt` eine laufende Nummer. In der rechten Spalte sind die Zentralisatorordnungen von Gruppenelementen von G notiert. Zu bemerken ist, dass zu zwei verschiedenen Zeilen der ausgegebenen Tabelle genau zwei verschiedene generische Konjugiertenklassen gehören.

In unserem Beispiel interessieren wir uns für die generischen Konjugiertenklassen Nummer 4 (für β) und 5 (für γ). Der Aufruf von `ClassMult(g,4,5,4);` liefert uns den Wert für d_{121}, wobei K_1 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung β und K_2 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung γ sei. Dieser Wert ist:

```
> ClassMult(g,4,5,4);
                                  [2 q - 2, {}]
```

Im ersten Eintrag der ausgegebenen Liste steht der Wert d_{121}. Im zweiten Eintrag steht ein Kriterium, wann sich der Wert d_{121} ändert (eine sogenannte „Ausnahme“).

Jedoch werden keine Informationen über den veränderten Wert bereit gestellt, wenn der zweite Eintrag nicht leer ist. In unserem Beispiel gibt es kein Kriterium für eine Änderung des Wertes d_{121}. Das bedeutet in diesem Fall, dass für alle G-Konjugiertenklassen K_e von Elementen der Ordnung e, wobei $e \neq 1$ ein Teiler von β ist (und auch $e \neq 2$, da die Klasse der Involutionen in der generischen Konjugiertenklasse Nummer 6 implementiert sind), und alle G-Konjugiertenklassen K_f von Elementen der Ordnung f, wobei $f \neq 1$ ein Teiler von γ ist, stets $d_{efe} = 2q-2$ gilt.

Mehr über diese Ausnahmen ist im Benutzerhandbuch von CHEVIE im Punkt „Exceptions“ zu finden. In den Beweisen verwenden wir meistens nur solche Werte, bei denen es keine Ausnahmen gibt und kommentieren das dann nicht weiter. Falls das an einigen Stellen nicht möglich ist, werden wir auf die Ausnahmen eingehen.

Lemma 5.36
Seien $q \in \mathbb{N}$ eine Primzahlpotenz, $q \geq 7$ und $G \cong \mathrm{PSL}_2(q)$. Seien $d := \mathrm{ggT}(q-1,2)$, $\beta := \frac{q-1}{d}$, $\gamma := \frac{q+1}{d}$ und $l := [G,\mathfrak{g},0 \mid [\beta,2],[\gamma,2]]$ ein HD. Dann ist l realisierbar.

Beweis
Seien $\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2 \in \mathbb{N}$ beide größer als 1 und so, dass $l_1 = [G,\mathfrak{g}_1,0 \mid [\beta,2],[\gamma,1]]$ und $l_2 = [G,\mathfrak{g}_2,0 \mid [\beta,1],[\gamma,2]]$ Hurwitzdaten sind. Mit Lemma 5.34 sind l_1 und l_2 realisierbar. Insbesondere ist β oder γ ungerade. Ist β ungerade, so liefert Lemma 5.21, angewandt auf l_2, die Behauptung. Ansonsten ist γ ungerade und mit Lemma 5.21, angewandt auf l_1, folgt die Behauptung. ■

Mit Lemmata 5.34 und 5.36 haben wir bereits die Realisierbarkeit der Hurwitzdaten aus der Zeile 14 in Tabelle 4.1 von Voraussetzung 4.21 erarbeitet. Nun überprüfen wir die Realisierbarkeit von Hurwitzdaten aus Zeile 13 der Tabelle und arbeiten unter folgender

Voraussetzung 5.37
Seien $f \in \mathbb{N}$, p eine ungerade Primzahl, $q := p^f \geq 9$ und $G \cong \mathrm{PSL}_2(q)$. Seien $\varepsilon \in \{1,-1\}$ so, dass $q \equiv \varepsilon$ modulo 4 gilt, sowie $\alpha := \frac{q-\varepsilon}{4}$, $\beta := \frac{q-\varepsilon}{2}$ und $\gamma := \frac{q+\varepsilon}{2}$.

Zur Übersicht geben wir nachfolgend eine Tabelle an, die darstellt, welches Hurwitzdatum aus Zeile 13 von Tabelle 4.1 in Voraussetzung 4.21 in welchem Lemma auf Realisierbarkeit überprüft wird. Es gelte dazu Voraussetzung 5.37.

Hurwitzdatum	Lemma	Bemerkung
$[G,\mathfrak{g},1 \mid [\alpha,1]]$	5.39	$q \notin \{9,11,19\}$
	5.40	$q = 9$
	5.42	$q = 11$
	5.43	$q = 19$
$[G,\mathfrak{g},1 \mid [\beta,1]]$	5.34	
$[G,\mathfrak{g},1 \mid [\gamma,1]]$	5.34	
$[G,\mathfrak{g},1 \mid [\alpha,1],[\beta,1]]$	5.44	

Hurwitzdatum	Lemma	Bemerkung
$[G,\mathfrak{g},1 \mid [\alpha,1],[\gamma,1]]$	5.40 5.45	$q=9$ $q>9$
$[G,\mathfrak{g},1 \mid [\beta,2]]$	5.34	
$[G,\mathfrak{g},1 \mid [\beta,1],[\gamma,1]]$	5.34	
$[G,\mathfrak{g},1 \mid [\gamma,2]]$	5.34	
$[G,\mathfrak{g},1 \mid [\alpha,1],[\beta,2]]$	5.54	$q=9$
$[G,\mathfrak{g},0 \mid [\alpha,1],[\beta,2]]$	5.53	$q>9$
$[G,\mathfrak{g},0 \mid [\alpha,1],[\beta,1],[\gamma,1]]$	5.46	
$[G,\mathfrak{g},0 \mid [\alpha,1],[\gamma,2]]$	5.40 5.45	$q=9$ $q>9$
$[G,\mathfrak{g},0 \mid [\beta,2],[\gamma,1]]$	5.34	
$[G,\mathfrak{g},0 \mid [\beta,1],[\gamma,2]]$	5.34	
$[G,\mathfrak{g},0 \mid [\alpha,1],[\beta,2],[\gamma,1]]$	5.46	
$[G,\mathfrak{g},0 \mid [\alpha,1],[\beta,1],[\gamma,2]]$	5.46	
$[G,\mathfrak{g},0 \mid [\beta,2],[\gamma,2]]$	5.36	
$[G,\mathfrak{g},0 \mid [\alpha,1],[\beta,2],[\gamma,2]]$	5.46	

Tabelle 5.1: Übersicht zur Realisierbarkeit von Ausnahme-Hurwitzdaten aus Zeile 13 der Tabelle 4.1 in Voraussetzung 4.21, wobei $G \cong \mathrm{PSL}_2(q)$ für eine ungerade Primzahlpotenz $q \geq 9$ gilt.

Bevor wir mit der Untersuchung der Hurwitzdaten aus Tabelle 5.1 auf Realisierbarkeit beginnen, sammeln wir zunächst einige Informationen über $\mathrm{PSL}_2(q)$ in

Bemerkung 5.38
Es gelte Voraussetzung 5.37 und es seien $x, y \in G$ mit $o(x) \in \{\alpha,\beta\}$ und $o(y) = \gamma$.

(i) Es gibt nur jeweils eine G-Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen der Ordnung β bzw. γ (Satz II.8.5(a) in [Hup1]) und damit auch von Ordnung $\alpha = \beta/2$. Weiterhin gibt es damit nur eine Konjugiertenklasse von Involutionen in G, da γ und q ungerade sind und β durch 2 teilbar ist.

(ii) Je zwei zyklische Untergruppen der Ordnung β bzw. γ schneiden sich trivial und es ist $N_G(\langle x\rangle)$ eine Diedergruppe der Ordnung $q-\varepsilon = 2\beta = 4\alpha$ mit einer zentralen Involution und $N_G(\langle x\rangle)$ ist eine Diedergruppe der Ordnung $q+\varepsilon = 2\gamma$ ohne eine zentrale Involution (vgl. Sätze II.8.3 und II.8.4 in [Hup1]). Involutionenzentralisatoren in G sind damit ebenfalls Diedergruppen der Ordnung $q-\varepsilon = 2\beta$.

(iii) x ist in der generischen Konjugiertenklasse Nummer 4 von [CHE], wenn $\varepsilon = 1$ gilt, bzw. Nummer 5, wenn $\varepsilon = -1$ gilt. Zu dieser generischen Klasse gehört ein Parameter $i \in \{1,\ldots,\beta\}$, wobei i nicht von α geteilt werden darf (erreichbar über den Befehl `PrintClassParam` in [CHE]). Ist $o(x) = \beta$, so können wir für die G-Konjugiertenklasse von x den Parameter $i = 1$ der generischen Konjugiertenklasse wählen, für x^2 den Parameter $i = 2$ u.s.w.

Die einzigen Werte für $i \in \{1,\ldots,\beta\}$, für die i von α geteilt wird, sind $i = \alpha$ oder $i = \beta$. Der Wert $i = \alpha$ führt zur Involution x^α (diese generische Klasse der Involutionen ist Klasse Nummer 6 in [CHE]). Der Wert $i = \beta$ führt zum neutralen Element x^β (die generische Klasse von 1_G ist Klasse Nummer 1 in [CHE]).

(*iv*) y ist in der generischen Konjugiertenklasse Nummer 5 von [CHE], wenn $\varepsilon = 1$ gilt, bzw. Nummer 4, wenn $\varepsilon = -1$ gilt. Zu dieser generischen Klasse gehört ein Parameter $i \in \{1,\ldots,\gamma\}$, wobei i nicht von γ geteilt werden darf. Analog zu (*iii*) können wir den Parameter $i = 1$ für x^G wählen, $i = 2$ für $(x^2)^G$, u.s.w.

Lemma 5.39
Es gelte Voraussetzung 5.37. Sei $q \notin \{9, 11, 19\}$. Dann ist das HD $l := [G, \mathfrak{g}, 1 \mid [\alpha, 1]]$ realisierbar.

Beweis
Seien $c_{1,1} \in G$ ein Element der Ordnung α und $I \leqslant G$ von Ordnung β so, dass $c_{1,1} \in I$ ist. Weiter sei $t \in N_G(\langle c_{1,1} \rangle) = N_G(I)$ die zentrale Involution. Es ist $N_G(I) = C_G(t)$ (siehe Bemerkung 5.38). Wir zeigen zunächst (RHD1) und (RHD2) für l.

Da N eine Diedergruppe ist, gibt es Involutionen $y, z \in N$ so, dass $\langle y, z \rangle = N$ gilt. Dann ist schon $o(yz) = 2\alpha$, sonst wäre $\langle y, z \rangle$ nicht von Ordnung 4α. Ferner gilt $[y, z] = yzyz = (yz)^2$ und $o([y, z]) = \alpha$. Seien also $y, z \in N$ Involutionen und so, dass $N = \langle y, z \rangle$ und $[y, z] = {c_{1,1}}^{-1}$ gilt. Insbesondere sind weder y noch z zentral in N. Daher ist $C_G(y) \setminus N \neq \varnothing$. Sei $x \in C_G(y) \setminus N$ und seien $a_1 := y$ und $b_1 := xz$. Dann gilt sofort ${c_{1,1}}^{-1} = [y, z] = [y, xz] = [a_1, b_1]$. Da $c_{1,1}$ von Ordnung α ist, erfüllt das Tripel $((a_1), (b_1), (c_{1,1}))$ nun (RHD1) und (RHD2) für l.

Sei $T := \langle a_1, b_1, c_{1,1} \rangle$. Wir zeigen, dass (RHD3) für l gilt. Angenommen, es sei $T \neq G$. Dann gibt es eine maximale Untergruppe $M \leqslant G$ so, dass $T \leqslant M$ ist. Mit dem Satz von Dickson (siehe Hauptsatz II.8.27 in [Hup1]) bestimmen wir nun T, M und q:

Die Gruppe T ist weder eine elementarabelsche p-Gruppe, da $\mathrm{ggT}(p, \alpha) = 1$ gilt, noch ist T zyklisch, da $\langle a_1, c_{1,1} \rangle$ eine diedrische Untergruppe von T ist. Weiter ist T auch kein semidirektes Produkt einer elementarabelschen p-Gruppe und einer zyklischen Gruppe, da in diesem Fall T' eine p-Gruppe wäre, die $c_{1,1} = [b_1, a_1] \in T'$ enthält ($o(c_{1,1}) = \alpha$ und p sind teilerfremd).

Angenommen, T sei selbst eine Diedergruppe. Wegen $\langle a_1, c_{1,1} \rangle, \langle b_1 \rangle \leqslant T$ und $\langle b_1 \rangle \not\leqslant \langle a_1, c_{1,1} \rangle$ muss $T = N$ sein. Damit ist jedoch $z \in T$ und daher auch $b_1 z^{-1} = x \in T = N$. Das widerspricht der Wahl $x \notin N$.

Angenommen, T sei isomorph zu einer Untergruppe von $\mathcal{A}_4$. Da $(\mathcal{A}_4)'$ eine Kleinsche Vierergruppe ist und offenbar $c_{1,1} \in T'$ gilt, muss schon $\alpha = 2$ sein. Dann ist $q \in \{7, 9\}$, ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Angenommen, T sei isomorph zu einer Untergruppe von $\mathcal{S}_4$. Da $q > 9$ und $q \notin \{11, 19\}$ nach Voraussetzung gilt, folgt $\alpha \in \{3, 4\}$ aus den möglichen Elementordnungen in $\mathcal{S}_4$. Ist $\alpha = 3$, so gilt $q \in \{11, 13\}$. Jedoch ist weder 11^2 noch 13^2 kongruent zu 1 modulo 16, wodurch $\mathrm{PSL}_2(11)$ und $\mathrm{PSL}_2(13)$ keine Untergruppen isomorph zu $\mathcal{S}_4$ haben (siehe Satz II.8.27 in [Hup1]). Daher ist $\alpha = 4$. Jedoch hat die Kommutatorgruppe von $\mathcal{S}_4$ kein Element der Ordnung 4, ein Widerspruch.

Angenommen, T sei isomorph zu einer Untergruppe von $\mathcal{A}_5$. Aufgrund der Elementordnungen von $\mathcal{A}_5$ und wegen $q > 9$ folgt $\alpha \in \{3, 5\}$. Ist $\alpha = 3$, so gilt $q \in \{11, 13\}$. Nach Voraussetzung ist $q \neq 11$. Da $13^2 \not\equiv 1$ modulo 5 gilt, enthält $\mathrm{PSL}_2(13)$ nach Satz II.8.27 in [Hup1] keine Untergruppe, welche isomorph zu $\mathcal{A}_5$ ist. Daher gilt $\alpha = 5$ und somit $q = 19$. Das widerspricht der Voraussetzung $q \neq 19$. Dieser Fall ist unabhängig von der Eigenschaft, dass q^2 kongruent ist zu 1 modulo 5 oder q eine 5-Potenz ist, wie im Satz 8.27.(6) in [Hup1] verlangt.

Sei m ein echter Teiler von f. Angenommen, T sei isomorph zu einer Untergruppe von $\mathrm{PSL}_2(p^m)$. Genauer seien $k, m \in \mathbb{N}$ so, dass $f = km$ gilt. Da α und p teilerfremd sind, gilt $\alpha \leq \frac{(p^m-1)(p^m+1)}{2}$ und α teilt $\frac{p^m-1}{2}$ oder $\frac{p^m+1}{2}$ aufgrund von Satz II.8.5 (a) in [Hup1] angewandt auf $\mathrm{PSL}_2(p^m)$. Das ergibt $\alpha \leq \frac{p^m+1}{2}$ und wir untersuchen diese Ungleichung:

$$\begin{aligned} & \alpha = \tfrac{p^f-\varepsilon}{4} \leq \tfrac{p^m+1}{2} \\ \Longleftrightarrow \quad & p^f - \varepsilon \leq 2p^m + 2 \\ \Longleftrightarrow \quad & p^f \leq 2p^m + 2 + \varepsilon \leq 2p^m + p^m = 3p^m \leq p^{m+1} \leq p^f \end{aligned}$$

Gleichheit folgt nur, wenn $p = 3$, $m = 1$ und $f = 2$ gilt. Dann ist jedoch $q = 9$, ein Widerspruch zur Voraussetzung $q \neq 9$.

Daher gibt es $k, m \in \mathbb{N}$ so, dass $f = 2km$ gilt und T isomorph zu einer Untergruppe von $\mathrm{PGL}_2(p^m)$ ist. In ähnlicher Weise wie zuvor erhalten wir $\alpha \leq p^m + 1$. Eine Analyse dieser Ungleichung führt zu $q \in \{9, 25\}$. Da nach Voraussetzung $q \neq 9$ ist, gilt also $q = 25$ und T ist isomorph zu einer Untergruppe von $\mathrm{PGL}_2(5) \cong \mathcal{S}_5$. Nun ist $\alpha = 6$. Nach Konstruktion enthält T dann eine Diedergruppe der Ordnung 24 und insbesondere besitzt T (und damit auch $\mathcal{S}_5$) ein Element der Ordnung 12, ein Widerspruch. Nun folgt $T = G$ und l ist realisierbar. ■

Lemma 5.40
Es gelte Voraussetzung 5.37. Seien $q = 9$ und $(\mathfrak{g}_0, n) \in \{(1,0), (1,1), (0,2)\}$. Dann ist das HD $l := [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [\alpha, 1], [\gamma, n]]$ realisierbar.

Beweis
Da $q = 9$ gilt, ist $\varepsilon = 1$, $\alpha = \frac{q-\varepsilon}{4} = \frac{8}{4} = 2$ und $\gamma = \frac{q+\varepsilon}{2} = 5$. Seien K_1 eine G-Konjugiertenklasse von Involutionen und K_2 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 5. Unter Verwendung der Charaktertafel von G in [Atl] ermitteln wir mit Lemma 5.14 die Werte $d_{121} = 8$ und $d_{212} = 10$. Mit Lemma 5.22 existieren $a_1, x_2, x_3, y_3 \in K_2$, $a_2, b_1, b_2 \in G$ und $c_1, c_2, c_3 \in K_1$ wie folgt:

Das Tripel $((a_1), (b_1), (c_1))$ erfüllt die Eigenschaften (RHD1) und (RHD2) für l im

Fall $(\mathfrak{g}_0, n) = (1,0)$.
Das Tripel $((a_2),(b_2),(c_2,x_2))$ erfüllt (RHD1) und (RHD2) im Fall $(\mathfrak{g}_0, n) = (1,1)$ für l. Hier gilt $o([a_2,b_2]) = \gamma = 5$.
Das Tripel $((),(),(c_3,x_3,y_3))$ erfüllt (RHD1) und (RHD2) im Fall $(\mathfrak{g}_0, n) = (0,2)$ für l.

Nach (RHD2) gibt es also Elemente $x,y,z \in G$ so, dass $xyz = 1_G$, $o(x) = 2$, $o(y) = 5$, $o(z) = 5$ und $z \in y^G$ gilt. Genauer seien $x := c_1$, $y := a_1^{-1}$ und $z := {a_1}^{b_1}$, falls $(\mathfrak{g}_0, n) = (1,0)$ gilt. Seien $x := c_2$, $y := x_2$ und $z := [a_2,b_2]$, falls $(\mathfrak{g}_0, n) = (1,1)$ ist. Seien $x := c_3$, $y := x_3$ und $z := y_3$, falls $(\mathfrak{g}_0, n) = (0,2)$ gilt.

Angenommen, es sei $U := \langle x,y,z \rangle \neq G$. Dann gibt es eine maximale Untergruppe $M \leqslant G$ so, dass $U \leqslant M$ ist. Nun ist $\mathrm{kgV}(o(x),o(y),o(z)) = 10$ ein Teiler von $|U|$ und $|M|$. Mit der Liste der G-Konjugiertenklassen von maximalen Untergruppen von G in [Atl] gilt $M \cong \mathcal{A}_5$. Ferner sind nach Wahl y und z in derselben G-Konjugiertenklasse K_2 und es gilt $y^G \cap M = y^M$ mit den Charaktertafeln von G und M in [Atl].

Seien K_1 wie im Schritt 1, $K_2 := y^G$, $K_a := K_1 \cap M$ und $K_b := K_2 \cap M$. Dann ist $d_{bba}^{(M)} = 0$ mit Lemma 5.14 unter der Verwendung der Charaktertafel von M in [Atl]. Da $d_{221} = 16 > 0$ gilt, folgt mit Lemma 5.19, dass U in keinem G-Konjugierten von M liegt. Obwohl G insgesamt zwei Konjugiertenklassen von maximalen Untergruppen isomorph zu $\mathcal{A}_5$ besitzt, ist $U = G$, da das Argument zuvor auch für die zweite Konjugiertenklasse gilt. Somit erfüllt l die Eigenschaft (RHD3) und ist insgesamt realisierbar. ■

Bemerkung 5.41
Im Lemma 5.27 haben wir gezeigt, dass das HD $[\mathcal{A}_5, \mathfrak{g}, 0 \mid [2,1],[5,2]]$ realisierbar ist. Seien $G = \mathcal{A}_5$ und $((),(),(c_1,c_2,c_3))$ eine Realisierung für dieses HD. Dann gilt $o(c_1) = 2$, $o(c_2) = 5 = o(c_3)$, $c_1c_2c_3 = 1_G$ und $\langle c_1,c_2,c_3 \rangle = G$.

Seien weiter K_1 eine G-Konjugiertenklasse von Involutionen sowie K_2 und K_3 die zwei verschiedenen G-Konjugiertenklassen von Elementen der Ordnung 5 (siehe [Atl]). Unter Verwendung der Charaktertafel von G in [Atl] liefert Lemma 5.14 die Werte $d_{221} = d_{331} = 0$ und $d_{231} = d_{321} = 4$. Das heißt:

Sind $g \in G$ von Ordnung 5 und $h \in G$ zu g konjugiert in G, so gilt $o(gh) \neq 2$. Insbesondere sind also c_2 und c_3 nicht konjugiert in G. Wie wir in Lemma 5.40 gesehen haben, gibt es in $\mathrm{PSL}_2(9) \cong \mathcal{A}_6$ jedoch konjugierte Elemente g und h von Ordnung 5 so, dass $o(gh) = 2$ ist.

Lemma 5.42
Es gelte Voraussetzung 5.37 und seien $q = 11$ und $l := [G, \mathfrak{g}, 1 \mid [\alpha, 1]]$ ein HD. Dann ist l realisierbar.

Beweis
Sei K_1 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung $\alpha = 3$. Mit [Atl] sei K_2 die einzige G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 6. Daher gilt für alle $x \in K_2$ auch $x^{-1} \in K_2$. Lemma 5.14 liefert unter Verwendung der Charaktertafel von G in [Atl] den Wert $d_{221} = 13$.

Sei $c^{-1} \in K_1$. Wegen $d_{221} = 13 \neq 0$ gibt es also Elemente $x, y \in K_2$ so, dass $xy = c^{-1}$ gilt. Da $d_{221} > 1$ ist, können wir $c \notin \langle x \rangle$ wählen. Weil y und x^{-1} in G konjugiert sind, gibt es $a, b \in G$ so, dass $a := x^{-1}$ und $y = a^b$ gilt. Nun folgt

$$1_G = xyc = a^{-1}a^b c = [a,b]c,$$

wodurch (RHD1) und (RHD2) für l vom Tripel $((a),(b),(c))$ erfüllt sind.

Angenommen, es sei $U := \langle a,b,c \rangle \neq G$. Dann liegt U in einer maximalen Untergruppe M von G. Ferner enthalten U und M das Element a von Ordnung 6. Mit der Liste der G-Konjugiertenklassen von maximalen Untergruppen von G und deren Ordnung folgt schon $M \cong D_{12}$, da $\mathcal{A}_5$ keine Elemente der Ordnung 6 enthält. Dann ist jedoch $\langle a \rangle$ ein Normalteiler in M vom Index 2 und es gilt $c \in \langle a \rangle$, ein Widerspruch zur Wahl von c im Schritt 1. Daher folgen $U = G$ sowie die Realisierbarkeit von l. ■

Lemma 5.43
Es gelte Voraussetzung 5.37 und seien $q = 19$ und $l := [G, \mathfrak{g}, 1 \mid [\alpha, 1]]$ ein HD. Dann ist l realisierbar.

Beweis
Seien K_1 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung $\alpha = 5$ und K_2 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 9. Lemma 5.14 liefert unter Verwendung der Charaktertafel von G in [Atl] die Werte $d_{212} = 36$ und $d_{121} = 40$. Ist U eine Untergruppe von G, deren Ordnung von $\mathrm{kgV}(5,9) = 45$ geteilt wird, so folgt mit der Liste der G-Konjugiertenklassen von maximalen Untergruppen von G in [Atl] schon $U = G$. Nun liefert Lemma 5.22 die Behauptung. ■

Lemma 5.44
Es gelte Voraussetzung 5.37. Dann ist das HD $l := [G, \mathfrak{g}, 1 \mid [\alpha, 1], [\beta, 1]]$ realisierbar.

Beweis
Mit Lemma 5.34 sei $((a),(b),(c))$ eine Realisierung für das HD $\widetilde{l} := [G, \widetilde{\mathfrak{g}}, 1 \mid [\beta, 1]]$. Dann gilt $o(c) = \beta$ nach (RHD1) und ferner ist c^2 ein Element von Ordnung α. Nun gilt $c = c^{2-1} = c^2 c^{-1}$. Somit ist $((a),(b),(c^2, c^{-1}))$ eine Realisierung für l. ■

Lemma 5.45
Es gelte Voraussetzung 5.37. Seien $q > 9$, $n \in \mathbb{N}$ und $(\mathfrak{g}_0, n) \in \{(1,1),(0,2)\}$ so, dass $l := [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [\alpha, 1], [\gamma, n]]$ ein HD ist. Dann ist l realisierbar.

Beweis
<u>Schritt 1:</u> *Realisierbarkeit für den Fall $(\mathfrak{g}_0, n) = (0,2)$:*

Seien zuerst $\mathfrak{g}_0 = 0$ und $n = 2$. Seien weiter K_1 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung α und K_2 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung γ. Unter Verwendung der generischen Charaktertafel von $\mathrm{PSL}_2(q)$ für ungerades q in [CHE] liefert Lemma 5.14 den Wert $d_{212} = 2q + 2\varepsilon$, wobei $\varepsilon \in \{1, -1\}$ und $q \equiv \varepsilon$ modulo 4 wie in der Voraussetzung 5.37 sind (vgl. (*iii*) und (*iv*) von Bemerkung 5.38). Daher gibt es $x \in K_1$ und $y, z \in K_2$ so, dass $yx = z$ gilt. Nun ist $1_G = yxz^{-1} = xz^{-1}y$ und wir sehen, dass das Tripel $((),(),(x,z^{-1},y))$ die Eigenschaften (RHD1) und (RHD2) für l erfüllt.

Für (RHD3) sei $U := \langle x,y,z\rangle$. Ist $U = G$, so sind wir fertig. Sei also $U \neq G$. Da $q > 9$ gilt, gibt es Elemente der Ordnung $\alpha \geq 3$ und $\gamma \geq 5$ in U. Ferner wird $|U|$ von $\mathrm{kgV}(\alpha,\gamma) = \frac{q^2-1}{8}$ geteilt. Mit dem Satz von Dickson (Hauptsatz II.8.27 in [Hup1]) gilt dann $q = 11$ und U ist isomorph zu einer Untergruppe von $\mathcal{A}_5$. Ferner muss schon $U \cong \mathcal{A}_5$ sein, da $\mathrm{kgV}(\alpha,\gamma) = 15$ gilt und $\mathcal{A}_5$ keine Untergruppe von Index 2 oder 4 besitzt (siehe [Atl]). Dieser Fall ist unabhängig von der Eigenschaft, dass q^2 kongruent ist zu 1 modulo 5 oder q eine 5-Potenz ist, wie im Satz 8.27.(6) in [Hup1] verlangt.

Es ist $K_1 \cap U \neq \varnothing \neq K_2 \cap U$. Ferner zerfällt weder $K_1 \cap U$ noch $K_2 \cap U$ in mehrere U-Konjugiertenklassen, wie man den Charaktertafeln von $G \cong \mathrm{PSL}_2(11)$ und $U \cong \mathcal{A}_5$ in [Atl] entnehmen kann. Seien daher $K_a := K_1 \cap U$ und $K_b := K_2 \cap U$. Es gibt $\frac{|G|}{|U|} = 11$ Konjugierte von U in G und ferner gilt

$$|K_2| = \frac{|G|}{|C_G(z)|} = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \qquad \text{und} \qquad |K_b| = \frac{|U|}{|C_U(z)|} = 2^2 \cdot 3.$$

Wegen $|K_2| = |K_b| \cdot \frac{|G|}{|U|}$ ist z in genau einem G-Konjugierten von U enthalten. Lemma 5.14 liefert $d^{(U)}_{bab} = 5 < 20 = d_{212}$. Mit Lemma 5.19 können wir $(x,y) \in K_2 \times K_1$ so wählen, dass $xy = z$ gilt und $\langle x,y,z\rangle$ in keinem G-Konjugierten von U liegt. Da G noch eine zweite Konjugiertenklasse von Untergruppen isomorph zu U besitzt (siehe [Atl]) und die Argumente zuvor dasselbe liefern, gibt es von den $d_{212} = 20$ Paaren in $M := \{(a,b) \in K_2 \times K_1 \mid ab = z\}$ genau zehn Paare mit der Eigenschaft, dass das Erzeugnis der Elemente eines dieser Paare ganz G ist. Wir können also $(x,y) \in M$ so wählen, dass $\langle x,y,z\rangle = G$ gilt. Das ist (RHD3) und es folgt die Realisierbarkeit von l für den Fall $(\mathfrak{g}_0,n) = (0,2)$. □

<u>Schritt 2:</u> *Realisierbarkeit für den Fall* $(\mathfrak{g}_0,n) = (1,1)$*:*

Seien nun $\mathfrak{g}_0 = 1$ und $n = 1$ sowie $\widetilde{\mathfrak{g}} \in \mathbb{N}$ und $\widetilde{\mathfrak{g}} > 1$ so, dass $\widetilde{l} := [G,\widetilde{\mathfrak{g}},0 \mid [\alpha,1],[\gamma,2]]$ ein HD ist. Mit Schritt 1 sei $((),(),(x,y,z))$ eine Realisierung von $\widetilde{l}$. Nach Definition 5.2 und Bemerkung 5.4 gilt dann $o(x) = \alpha$, $o(y) = \gamma = o(z)$, $1_G = xyz$ und $\langle x,y,z\rangle = G$. Nun ist $xy = z^{-1}$ und $1_G = zxy$.

Seien K_2 wie im Schritt 1 und K_1 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung β. Wieder mit [CHE] gilt $d_{121} = 2q - 2\varepsilon$. Daher gibt es $a,b \in K_1$ und $c \in K_2$ so, dass $bc = a$ ist. Da c und z in G konjugiert sind, können wir o.B.d.A. $c = z$ setzen und $a,b \in K_1$ so wählen, dass $bz = a$ gilt. Ferner sind auch a und b in G konjugiert. Sei also $g \in G$ so, dass $b = a^g$ ist. Nun gilt $1_G = a^{-1}a^g z = [a,g]z$. Insgesamt folgt $1_G = zxy = [g,a]xy$ und $G = \langle x,y,z\rangle = \langle x,y,a,g\rangle$ wegen $z \in \langle a,g\rangle$. Damit ist $((g),(a),(x,y))$ eine Realisierung für l im Fall $(\mathfrak{g}_0,n) = (1,1)$. ■

Lemma 5.46
Es gelte Voraussetzung 5.37 und seien $n,m,\mathfrak{g} \in \mathbb{N}$ *und* $(n,m) \in \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$ *so, dass* $l := [G,\mathfrak{g},0 \mid [\alpha,1],[\beta,n],[\gamma,m]]$ *ein HD ist. Dann ist* l *realisierbar.*

Beweis
<u>Schritt 1:</u> *Realisierbarkeit für den Fall* $n = 1 = m$*:*

Seien zuerst $n = m = 1$, K_1 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung α, K_2 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung β und K_3 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung γ. Unter Verwendung der generischen Charaktertafel von G in [CHE] folgt $d_{123} = 2q + 2\varepsilon$ mit Lemma 5.14 (vgl. Bemerkung 5.38 (*iii*) und (*iv*)). Daher gibt es Elemente $x \in K_1$, $y \in K_2$ und $z \in K_3$ so, dass $xy = z$ gilt. Dann ist $1_G = xyz^{-1}$ und das Tripel $((),(),(x,y,z^{-1}))$ erfüllt (RHD1) und (RHD2) für l im Fall $n = m = 1$.

Sei $U := \langle x,y,z \rangle$. Da U Elemente von Ordnung β und γ besitzt und $q \geq 9$ gilt, folgt mit Lemma 5.33 schon $U = G$. Somit erfüllt $((),(),(x,y,z^{-1}))$ auch (RHD3) für l im Fall $n = m = 1$. Daher ist l realisierbar. □

<u>Schritt 2:</u> *Realisierbarkeit für den Fall* $n = 2$ *und* $m = 1$*:*

Seien $\widetilde{\mathfrak{g}} \in \mathbb{N}$ und $\widetilde{\mathfrak{g}} > 1$ so, dass $\widetilde{l} := [G,\widetilde{\mathfrak{g}},0 \mid [\alpha,1],[\beta,1],[\gamma,1]]$ ein HD ist. Mit Schritt 1 ist $\widetilde{l}$ realisierbar. Seien weiter K_2 und K_3 wie im Schritt 1 und das Tripel $((),(),(x,y,z))$ eine Realisierung für $\widetilde{l}$ so, dass $z \in K_3$ gilt. Mit Lemma 5.14 und mit der generischen Charaktertafel von G in [CHE] folgt $d_{233} = 2q + 2\varepsilon$. Daher gibt es $a \in K_2$ und $b \in K_3$ so, dass $ab = z$ gilt. Nun ist $1_G = xyz = xyab$ mit (RHD2) für die Realisierung $((),(),(x,y,z))$ von $\widetilde{l}$. Ferner gilt $z \in \langle a,b \rangle$. Damit und wegen (RHD3) für die Realisierung $((),(),(x,y,z))$ von $\widetilde{l}$ ist nun $((),(),(x,y,a,b))$ eine Realisierung für l im Fall $n = 1$ und $m = 2$. □

<u>Schritt 3:</u> *Realisierbarkeit für die verbliebenen Fälle:*

Nach den Schritten 1 und 2 ist l für die Fälle $(n,m) = (1,1)$ und $(n,m) = (2,1)$ realisierbar. Es ist γ ungerade und daher folgt die Realisierbarkeit von l für $(n,m) = (1,2)$ bzw. $(n,m) = (2,2)$ aus Lemma 5.21. ■

Wenn wir die Zeile 13 von Tabelle 4.1 in Voraussetzung 4.21 bzw. Tabelle 5.1 genauer betrachten, erkennen wir, dass bisher fast alle HD dieses Falls auf Realisierbarkeit überprüft wurden. Die übrigen Fälle aus Zeile 13 der Voraussetzung sind das HD $[\mathrm{PSL}_2(q),\mathfrak{g},0 \mid [\alpha,1],[\beta,2]]$ für eine ungerade Primzahlpotenz $q \geq 11$ und das HD $[\mathrm{PSL}_2(9),\mathfrak{g},1 \mid [\alpha,1],[\beta,2]]$.

Wir erinnern daran, dass die Liste $[\mathrm{PSL}_2(9),\mathfrak{g},0 \mid [\alpha,1],[\beta,2]]$ kein HD ist, da Definition 4.8 (*ii*), die Hurwitzformel, für alle $\mathfrak{g} \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{g} \geq 2$ nicht erfüllt ist. (Siehe auch Lemma 4.15. Für $q = 9$ gilt $\alpha = 2$ und $\beta = 4$. Das ist Fall (*ii*) von Lemma 4.15.)

Für die Überprüfung der Realisierbarkeit der verbliebenen HD werden wir erneut die generischen Charaktertafeln in [CHE] benutzen. Dieses Mal liefert die Funktion `ClassMult()` jedoch Ausnahmen, die wir umgehen wollen. Daher müssen wir zuerst einige Hilfsresultate beweisen.

Bemerkung 5.47
Mit den Rechenregeln der Eulerschen φ-Funktion folgt elementar, dass gilt:
Ist $n \in \mathbb{N}$ gerade und gilt $\varphi(n) < 6$, so folgt $n \leq 12$.

Lemma 5.48
Es seien p eine Primzahl, $n \in \mathbb{N}$, $q := p^n \geq 4$, $d := \mathrm{ggT}(q-1,2)$ und $G \cong \mathrm{PSL}_2(q)$. Weiter seien F eine Sylow p-Untergruppe von G und $M := N_G(F)$. Dann besteht die Nebenklasse $Fx \in M/F$ für alle $x \in M \setminus F$ aus allen M-Konjugierten von x.

Beweis
Es ist M eine Frobeniusgruppe mit Frobeniuskern F der Ordnung q und zyklischen Frobeniuskomplementen der Ordnung $\frac{1}{d}(q-1)$ nach Beispiel V.8.6, Definition III.16.1 und Satz II.8.2 in [Hup1]. Damit gilt $M' = F$. Sei $g \in M \setminus F$ beliebig.

Schritt 1: *Es gilt $[F,g] = F$:*

Zunächst ist $[F,g] \subseteq M' = F$. Wir zeigen, dass $|[F,g]| = |F|$ gilt. Dafür seien $f_1, f_2 \in F$ so, dass $[f_1,g] = [f_2,g]$ ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} & & [f_1,g] = [f_2,g] \\ &\Longleftrightarrow & (g^{-1})^{f_1} \cdot g = (g^{-1})^{f_2} \cdot g \\ &\Longleftrightarrow & (g^{-1})^{f_1 f_2^{-1}} = (g^{-1}) \\ &\Longleftrightarrow & f_1 f_2^{-1} \in C_M(g) \cap F = C_F(g). \end{aligned}$$

Da M eine Frobeniusgruppe und $g \in M \setminus F$ ist, gilt $C_F(g) = 1$. Daher folgt $f_1 = f_2$. Die Abbildung $\rho \colon F \to [F,g]$, die jedes $h \in F$ auf $h^\rho := [h,g]$, ist also injektiv. Weil $[F,g]$ eine Teilmenge von $M' = F$ ist, ist ρ damit auch surjektiv. □

Schritt 2: *Für alle $x \in M \setminus F$ besteht Fx aus den M-Konjugierten von x:*

Seien $x \in M \setminus F$ und $z \in Fx$. Da $x \notin F$ gilt, sind $Fx \neq F$ und $z \notin F$. Dann existiert ein $f \in F$ so, dass $z = fx$ gilt. Mit Schritt 1 existiert ein $g \in F$ so, dass $f = [g,x^{-1}] \in [F,x^{-1}] = F$ ist. Nun gilt $z = fx = [g,x^{-1}]x = x^g x^{-1} x = x^g$ und ferner ist

$$|F| = |Fx| = q = \frac{q \cdot \left(\frac{q-1}{d}\right)}{\left(\frac{q-1}{d}\right)} = \frac{|M|}{|C_M(x)|} = \left|x^M\right|,$$

da die Frobeniuskomplemente von M zyklisch der Ordnung $(q-1)/d$ sind. Damit folgt die Aussage des Lemmas. ■

Lemma 5.49
Seien $n \in \mathbb{N}$ gerade, $n \geq 12$, H eine zyklische Gruppe der Ordnung n und $x \in H$ ein Element der Ordnung n. Seien weiter $k \in \{4,\ldots,\frac{n}{2}-1\}$, $y \in \{x^k, x^{-k}\}$ und $z \in \{x, x^{-1}\}$. Dann ist $y \cdot z \notin \{x^2, x^{-2}\}$.

Beweis
Angenommen, die Behauptung sei falsch und sei $w \in \{x^2, x^{-2}\}$ so, dass $w = yz$ gilt. Da $3 < k < \frac{n}{2}$ sowie $n \geq 12$ sind, gilt $4 < k+1 \leq \frac{n}{2} < n-2$ und $2 < k-1 < \frac{n}{2} < n-2$. Beide Ungleichungen liefern einen Widerspruch zu

$$w = yz = x^k x = x^{k+1} \qquad \text{bzw.} \qquad w = yz = x^k x^{-1} = x^{k-1}.$$

Die Fälle $w = yz = x^{-k}x = (x^{k-1})^{-1}$ und $w = yz = x^{-k}x^{-1} = (x^{k+1})^{-1}$ können auf die vorherigen zwei zurückgeführt werden und liefern ebenfalls einen Widerspruch. ■

Lemma 5.50
Es gelte Voraussetzung 5.37. Weiter seien $q \geq 23$ sowie $x \in G$ von Ordnung β. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ so, dass $3 < k < \alpha$ gilt und x^k ein Element der Ordnung β ist, das weder zu x noch zu x^3 in G konjugiert ist.

Sei weiter $M := \left\{(y,z) \in (x^k)^G \times x^G \,\middle|\, yz = x^2\right\}$. Dann ist $|M| = 2q - 2\varepsilon$ und für alle $(y,z) \in M$ gilt $\langle x^{-2}, y, z\rangle = G$.

Beweis
Schritt 1: *Es gibt genau $\frac{\varphi(b)}{2}$ Konjugiertenklassen von Elementen der Ordnung β in G:*

Es gibt nur eine G-Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen der Ordnung β in G. Weiter haben zyklische Untergruppen der Ordnung β eine Diedergruppe der Ordnung 2β als Normalisator. (Siehe Bemerkung 5.38 (*i*) und (*ii*).) Daher ist für alle $g \in G$ mit $o(g) = \beta$ schon $g^G = (g^{-1})^G$.

Da es in einer zyklischen Untergruppe der Ordnung β nur $\varphi(\beta)$ viele Elemente der Ordnung β gibt und je zwei davon in einer gemeinsamen G-Konjugiertenklasse liegen, folgt die Behauptung. □

Schritt 2: *Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ so, dass $3 < k < \alpha$ gilt und x^k ein Element der Ordnung β ist, das weder zu x noch zu x^3 in G konjugiert ist:*

Da $q \geq 23$ ist, gilt $\beta \geq 12$. Es ist genau dann $\beta = 12$, wenn $q \in \{23, 25\}$ gilt. Sei zuerst $\beta > 12$. Mit Schritt 1 und Bemerkung 5.47 gibt es dann $\frac{\varphi(\beta)}{2} \geq \frac{6}{2} = 3$ Konjugiertenklassen von Elementen der Ordnung β in G. Ist $g \in G$ mit $o(g) = \beta$, so folgt $o(g^\alpha) = 2$ und insbesondere finden wir dann ein $k \in \mathbb{N}$ wie in der Behauptung von Schritt 2.

Sei also $\beta = 12$ und damit $q \in \{23, 25\}$. Es ist $\varphi(12) = 4$ und mit Schritt 1 gibt es nun zwei G-Konjugiertenklassen von Elementen der Ordnung β. Sei $g \in G$ von Ordnung $\beta = 12$ und $k := 5$. Dann ist $o(g^3) = 4$ sowie $o(g^\alpha) = 2$ und $o(g^k) = 12$, d.h. g^k ist aus Ordnungsgründen nicht zu g^3 konjugiert in G. Wären g und g^k konjugiert in G, so gäbe es ein $h \in N_G(\langle g\rangle)$ so, dass $g^h = g^k$ gilt. Jedoch ist $N_G(\langle g\rangle)$ eine Diedergruppe von Ordnung $2\beta = 24$ und $\mathrm{ggT}(5, 24) = 1$ (siehe Bemerkung 5.38 (*ii*)). Das zeigt Schritt 2. □

Schritt 3: *Es gilt $|M| = 2q - 2\varepsilon$:*

Seien x und mit Schritt 2 auch k wie in der Behauptung. Wir benutzen [CHE]. Es ist $C_G(x) = C_G(x^2) = C_G(x^k)$ und $C_G(x)$ hat Ordnung β. Daher liegen $K_2 := x^G$, $K_3 := (x^2)^G$ und $K_1 := (x^k)^G$ in derselben generischen Konjugiertenklasse von G in [CHE] mit dem Parameter $i \in \{1, \ldots, \beta\}$, wobei i nicht von α geteilt werden darf (vgl. Bemerkung 5.38 (*iii*)). Mit Schritt 2 wählen wir für $K_1 = (x^k)^G$ den Parameter $i_1 = k$, für $K_2 = x^G$ den Parameter $i_2 = 1$ und für $K_3 = (x^2)^G$ den

Parameter $i_3 = 2$. Unter Verwendung der generischen Charaktertafel von G in [CHE] ergibt sich nun $d_{123} = 2q-2\varepsilon$ mit Lemma 5.14, außer in folgenden Ausnahmefälle:

Einer der Werte $i_1+i_2+i_3$, $i_1-i_2-i_3$, $i_1-i_2+i_3$ oder $i_1+i_2-i_3$ wird von β geteilt.

Da $k \geq 4$, $\beta \geq 12$ und somit $\alpha+2<\beta$ ist, gilt nun:

$$\begin{aligned}
0 &< i_1+i_2+i_3 = k+1+2 = k+3 \leq \alpha+2 < \beta, \\
0 &< i_1-i_2-i_3 = k-1-2 = k-3 < \alpha < \beta, \\
0 &< i_1-i_2+i_3 = k-1+2 = k+1 \leq \alpha < \beta, \\
0 &< i_1+i_2-i_3 = k+1-2 = k-1 < \alpha < \beta.
\end{aligned}$$

Damit sind $i_1+i_2+i_3$, $i_1-i_2-i_3$, $i_1-i_2+i_3$ und $i_1+i_2-i_3$ alle nicht durch β teilbar, da sie echt zwischen 0 und β liegen. Somit ist $d_{123} = |M| = 2q-2\varepsilon$ nach [CHE]. $\square$

<u>Schritt 4:</u> *Seien $(y,z) \in M$ und $T := \langle x^{-2}, y, z\rangle$. Dann ist $T = G$:*

Angenommen, das gelte nicht. Sei $w := x^2$. Dann ist T eine echte Untergruppe von G und $|T|$ wird von β geteilt. Aus der Definition von M folgt $w = yz$. Ist $\langle y\rangle = \langle z\rangle$, so gilt $w \in \langle y\rangle$ und $\langle y\rangle = \langle x\rangle$, ein Widerspruch zu Lemma 5.49. Damit sind $\langle y\rangle$ und $\langle z\rangle$ zwei verschiedene Untergruppen von T, die sich nur trivial schneiden (vgl. Bemerkung 5.38 (*ii*)). Da T eine echte Untergruppe von G ist, nutzen wir den Satz von Dickson (siehe Hauptsatz II.8.27 in [Hup1]), um T zu identifizieren.

Es ist T nicht isomorph zu $\mathcal{A}_4$, $\mathcal{S}_4$ oder $\mathcal{A}_5$, da alle drei Gruppen keine Elemente der Ordnung $\beta \geq 12$ enthalten. Ferner ist T weder eine elementarabelsche p-Gruppe noch zyklisch oder eine Diedergruppe. Die Gruppe T ist auch nicht isomorph zu $\mathrm{PSL}_2(p^m)$ oder $\mathrm{PGL}_2(p^m)$ für einen echten Teiler m von f (nach Voraussetzung 5.37 ist $q = p^f$), da $q \geq 23$ gilt, $y,z \in T$ Elemente der Ordnung β sind und somit $|T|$ und $|\mathrm{PSL}_2(p^m)|$ bzw. $|\mathrm{PGL}_2(p^m)|$ nicht vereinbar sind.

Mit dem Satz von Dickson ist dann T ein semidirektes Produkt aus einer elementarabelschen p-Gruppe und einer zyklischen Gruppe der Ordnung $\frac{q-1}{2}$. Jetzt gilt $\varepsilon = 1$ und $\beta = \frac{q-1}{2}$ und wir können T als Normalisator einer Sylow p-Untergruppe S von G wählen, also als eine Frobeniusgruppe mit Frobeniuskern $S = T'$ und Frobeniuskomplement $\langle x\rangle$. Es sind $w,x,y,z \in T\setminus S$ und $T/S = \langle Sx\rangle$ ist zyklisch. Mit Lemma 5.48 und der Definition von M gilt außerdem $Sw \in \{Sx^2, Sx^{-2}\}$, $Sy \in \{Sx^k, Sx^{-k}\}$ und $Sz \in \{Sx, Sx^{-1}\}$. Nach Definition von M ist $w = yz$ und ferner $Sw = Sy \cdot Sz$. Lemma 5.49, angewandt auf T/S, liefert nun den finalen Widerspruch. Daher ist $T = G$. ■

Bemerkung 5.51
Seien H eine zyklische Gruppe von gerader Ordnung $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6$ und $w \in H$ ein Erzeuger von H. Für alle $y,z \in \{w, w^{-1}\}$ mit der Eigenschaft $yz = w^{-2}$ folgt $y = z = w^{-1}$ aus einer elementaren Berechnung.

Lemma 5.52
Es gelte Voraussetzung 5.37. Weiter seien $q \in \{11,13,17,19\}$, $x \in G$ von Ordnung β und $M := \left\{(y,z) \in x^G \times x^G \,\middle|\, yz = x^2\right\}$. Dann gibt es Paare $(y,z) \in M$ so, dass $\langle x^{-2},y,z\rangle = G$ gilt.

Beweis
<u>Schritt 1:</u> *Es gilt $|M| \neq 0$:*

Seien $K_1 := x^G$ und $K_2 := (x^2)^G$. Nach Lemma 5.13 ist $|M| = d_{112}$. Unter Verwendung der Charaktertafel von G in [Atl] ermitteln wir mit Lemma 5.14:

$$d_{112} = \begin{cases} 13, & \text{falls } q = 11, \\ 37, & \text{falls } q = 13, \\ 49, & \text{falls } q = 17, \\ 21, & \text{falls } q = 19 \end{cases} \qquad \text{bzw.} \qquad d_{112} = \begin{cases} q+2, & \text{falls } \varepsilon = -1, \\ 3q-2, & \text{falls } \varepsilon = 1. \end{cases}.$$

Insgesamt ist $|M| \neq 0$. $\square$

<u>Schritt 2:</u> *Es gibt mindestens ein Paar $(y,z) \in M$ so, dass $\langle x^{-2},y,z\rangle = G$ gilt:*

Angenommen, das sei falsch. Seien $(y,z) \in M$ beliebig und $T := \langle x^{-2},y,z\rangle$. Wegen der Definition von M gilt $yz = x^2$. Aufgrund der Annahme ist T eine echte Untergruppe von G. Dann gibt es eine maximale Untergruppe U von G so, dass $T \leqslant U$ ist. Da $q \in \{11,13,17,19\}$ gilt, benutzen wir die Liste der G-Konjugiertenklassen von maximalen Untergruppen von G in [Atl]. Weil T und U nach Konstruktion Elemente der Ordnung β besitzen, folgt mit der Liste der G-Konjugiertenklassen von maximalen Untergruppen von G, dass U eine Diedergruppe der Ordnung 2β oder der Normalisator einer Sylow p-Untergruppe von G ist.

Fall 1: U sei eine Diedergruppe der Ordnung 2β. Da U einen zyklischen Normalteiler I vom Index 2 und von Ordnung β hat, $U \setminus I$ nur aus Involutionen besteht und $\alpha \geq 3$ gilt, ist $T = I$. Mit den Sätzen II.8.3 und II.8.4 in [Hup1] gilt $y,z \in \{x,x^{-1}\}$. Da x^2 fest gewählt ist und $o(x) = \beta \geq 6$ gilt, ist mit Bemerkung 5.51 $y = w = x$. Insbesondere gibt es nur genau ein Paar (y,z) in M so, dass $\langle y,z,x^{-2}\rangle$ zyklisch der Ordnung β ist.

Fall 2: Sei U der Normalisator einer Sylow p-Untergruppe S von G. Dann gilt schon $\varepsilon = 1$, da $\frac{q+1}{2}$ kein Teiler von $|U|$ ist. Wir wollen $|M \cap (U \times U)|$ bestimmen. Sei $K_2 := (x^2)^G$ wie im Schritt 1. Zunächst ist

$$|K_2| = \frac{|G|}{|C_G(x^2)|} = \frac{|G|}{\beta} = q \cdot (q+1)$$

und $K_2 \cap U$ zerfällt in zwei U-Konjugiertenklassen, da $N_U(\langle x^2\rangle) = \langle x\rangle$ gilt, genauer $K_2 \cap U = (x^2)^U \dot\cup (x^{-2})^U$. Es ist $\left|(x^2)^U\right| = \frac{|U|}{|C_U(x^2)|} = \frac{|U|}{\beta} = q+1$ und damit gilt $|K_2 \cap U| = 2(q+1)$. Jedoch gibt es nur $|G:U| = q+1$ Konjugierte von U in G. Daher gibt es insgesamt zwei Elemente in U^G, die x^2 enthalten.

Da U der Normalisator einer Sylow p-Untergruppe von G ist, liegen alle zu U isomorphen Untergruppen von G in U^G.

Wir betrachten die zyklische Gruppe U/S. Weil $y, z \in x^G$ gilt, ist $Sy, Sz \in \{Sx, Sx^{-1}\}$ mit Satz II.8.4 in [Hup1] und Lemma 5.48. Aus der Definition von M folgt $Sx^2 = Sy \cdot Sz = S(yz)$. Da $U/S = \langle Sx \rangle$ Ordnung $\beta \geq 6$ hat, liefert Bemerkung 5.51 nun $Sy = Sz = Sx$. Weil mit Lemma 5.48 für alle $w \in Sx$ schon w zu x in U (also auch in G) konjugiert ist, folgt nun, dass es $|S| = q$ Paare (y, z) in $M \cap (U \times U)$ gibt. Das Paar (x, x) ist eines davon.

Da es nur zwei Elemente in U^G gibt, die x^2 enthalten und alle zu U isomorphen Untergruppen von G in U^G liegen, gibt es nun insgesamt maximal $2|S| - 1$ Paare (y, z) in M so, dass $\langle x^{-2}, y, z \rangle$ isomorph zu einer Untergruppe von $U = N_G(S)$ ist.

Ist $\varepsilon = -1$, also $\beta = \frac{q+1}{2}$, so tritt Fall 2 von Schritt 2 nicht ein. Wegen Fall 1 und mit Schritt 1 gibt es dann $q + 1$ Paare (y, z) in M so, dass $\langle x^{-2}, y, z \rangle = G$ gilt. Ist $\varepsilon = 1$, so ist $\beta = \frac{q-1}{2}$. Mit Fall 1 und Fall 2 gibt es nun maximal $2q - 1$ Paare (y, z) in M so, dass $\langle x^{-2}, y, z \rangle \neq G$ gilt. Da mit Schritt 1 außerdem $|M| = 3q - 2$ gilt, gibt es also mindestens $q - 1$ Paare in M, deren Elemente zusammen mit x^{-2} ganz G erzeugen. Das widerspricht der Annahme von Schritt 2 und es folgt die Behauptung des Lemmas. ■

Lemma 5.53
Es gelte Voraussetzung 5.37. Weiter seien $q > 9$ und $l := [G, \mathfrak{g}, 0 \mid [\alpha, 1], [\beta, 2]]$ ein HD. Dann ist l realisierbar.

Beweis
Mit den Lemmata 5.50 und 5.52 gibt es Elemente $x, y, z \in G$ so, dass $o(x) = \alpha$, $o(y) = o(z) = \beta$, $x \cdot y \cdot z = 1_G$ und $\langle x, y, z \rangle = G$ gilt. Damit sind (RHD1), (RHD2) und (RHD3) für l und das Tripel $((), (), (x, y, z))$ erfüllt. Somit ist l realisierbar. ■

Lemma 5.54
Es gelte Voraussetzung 5.37. Weiter seien $q = 9$ und $l := [G, \mathfrak{g}, 1 \mid [\alpha, 1], [\beta, 2]]$ ein HD. Dann ist l realisierbar.

Beweis
Seien $\widetilde{\mathfrak{g}_0} \in \mathbb{N}$ und $\widetilde{\mathfrak{g}_0} > 1$ so, dass $\widetilde{l} := [G, \widetilde{\mathfrak{g}}, 1 \mid [\alpha, 1], [\beta, 1]]$ ein HD ist. Mit Lemma 5.44 ist $\widetilde{l}$ realisierbar. Seien daher $((a), (b), (c, g))$ eine Realisierung für $\widetilde{l}$ und $K_1 := g^G$. Nach (RHD1) für $\widetilde{l}$ gilt $o(c) = \alpha = 2$ und $o(g) = \beta = 4$.

Unter Verwendung der Charaktertafel von G in [Atl] liefert Lemma 5.14 den Wert $d_{111} = 16$. Damit gibt es $x, y \in K_1$ so, dass $xy = g$ gilt. Wegen der Eigenschaft (RHD2) der Realisierung $((a), (b), (c, g))$ von $\widetilde{l}$ folgt nun

$$1_G = [a, b]cg = [a, b]cxy.$$

Da $g \in \langle x, y \rangle$ gilt, ist $G = \langle a, b, c, g \rangle = \langle a, b, c, x, y \rangle$ wegen (RHD3) für $\widetilde{l}$. Damit ist $((a), (b), (c, x, y))$ eine Realisierung für l. ■

Nun haben wir alle Hurwitzdaten aus den Zeilen 13 und 14 der Tabelle 4.1 in Voraussetzung 4.21 auf Realisierbarkeit überprüft. Wir fassen die Ergebnisse zusammen:

Lemma 5.55
Es sei $l := [G,\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0 \mid [m_1,n_1],\ldots,[m_r,n_r]]$ *ein HD aus einer der Zeilen 13 oder 14 von Tabelle 4.1 in Voraussetzung 4.21. Dann ist* l *realisierbar.*

Beweis
Seien q eine Primzahlpotenz und $\widetilde{l} := [G,\widetilde{\mathfrak{g}},\widetilde{\mathfrak{g}_0} \mid [m_1,n_1],\ldots,[m_r,n_r]]$ ein HD mit kleinstmöglichem Cogeschlecht $\widetilde{\mathfrak{g}_0}$, das sich von l nur durch die Geschlechte $\widetilde{\mathfrak{g}}$ und $\widetilde{\mathfrak{g}_0}$ unterscheidet. Da l wie in den Zeilen 13 oder 14 der Tabelle 4.1 von Voraussetzung 4.21 ist, gilt das auch für $\widetilde{l}$. Ferner ist $G \cong \mathrm{PSL}_2(q)$ und $q \geq 9$ und es gilt $\mathfrak{g} \geq 2$ und $\widetilde{\mathfrak{g}} \geq 2$, da l und $\widetilde{l}$ Hurwitzdaten sind.

Nun sind die Voraussetzungen der Lemmata 5.34, 5.36, 5.39, 5.40, 5.42 bis 5.46, 5.53 und 5.54 für $\widetilde{l}$ erfüllt und diese liefern die Eigenschaft RHD für $\widetilde{l}$. Ferner gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$ derart, dass $\mathfrak{g}_0 = \widetilde{\mathfrak{g}_0} + n$ gilt. Lemma 5.20 liefert dann die Behauptung. ■

Im nachfolgenden Lemma verwenden wir die Notation für PSL und PSU aus [GLS3]: Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ und Primzahlpotenzen $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$ bezeichne $\mathrm{PSL}_n^+(q)$ die Gruppe $\mathrm{PSL}_n(q)$ und $\mathrm{PSL}_n^-(q)$ die Gruppe $\mathrm{PSU}_n(q)$.

Lemma 5.56
Seien $\varepsilon \in \{1,-1\}$, $p \in \mathbb{N}$ *eine Primzahl und* $f \in \mathbb{N}$ *so, dass* $q := p^f \geq 3$ *gilt. Weiter seien* $G = \mathrm{PSL}_3^{\varepsilon}(q)$, $d := \mathrm{ggT}(3, q-\varepsilon)$, $\alpha := \frac{q^2+\varepsilon q+1}{d}$ *und* $l := [G,\mathfrak{g},1 \mid [\alpha,1]]$ *ein HD. Dann ist* l *realisierbar.*

Beweis
Seien K_1 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung α und mit Table 2 in [SiFr] sei K_2 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung $\beta := \frac{(q^2-1)}{d}$ (siehe vorletzte Zeile in Table 2 in [SiFr]; die Elemente aus dieser Konjugiertenklasse haben Zentralisatorordnung β). Seien weiter $x \in K_1$, $y \in K_2$ und $U := \langle x,y \rangle$. Da $x,y \in U$ ist, wird $|U|$ von α, β und damit auch von $\mathrm{kgV}(\alpha,\beta)$ geteilt. Mit Lemma 3.4 sind α und $\frac{|G|}{\alpha} = q^3(q^2-1)(q-\varepsilon)$ teilerfremd. Daher gilt schon $\mathrm{ggT}(\alpha,\beta) = 1$ und somit $\mathrm{kgV}(\alpha,\beta) = \alpha\beta$.

<u>Schritt 1:</u> *Es ist* $U = G$*:*

Angenommen, das gelte nicht. Sei dann M eine maximale Untergruppe von G so, dass $U \leqslant M$ ist. Da $x,y \in U$ gilt, werden $|U|$ und $|M|$ von $\mathrm{kgV}(\alpha,\beta) = \alpha \cdot \beta$ geteilt. Wir bestimmen den Isomorphietyp von M mittels Theorem 6.5.3 in [GLS3].

Aus Ordnungsgründen ist M nicht isomorph zu $\mathrm{PSL}_3(q_0)$, $\mathrm{PSU}_3(q_0)$, $\mathrm{PGL}_3(q_0)$ oder $\mathrm{PGU}_3(q_0)$ für echte Teiler q_0 von q. Ferner werden $|\mathrm{PSL}_2(q)|$, $d^{-1}3(q-\varepsilon)^2$ und 3α nicht von $\alpha\beta$ geteilt, da $q \geq 3$ gilt. Daher ist M nicht wie in den Fällen (b), (c) und (e) bis (g) von Theorem 6.5.3 in [GLS3].

Da α eine ungerade und nicht durch 3 teilbare Zahl ist, ist M weder isomorph zu $\mathrm{PSU}_3(2)$ noch zu $\mathrm{PGU}_3(2)$, da die Ordnung dieser nur ein Produkt aus Potenzen von 2 und 3 ist.

Gilt $M \cong \mathrm{PSL}_3(2)$, so ist wegen der Ordnung von M in [Atl] nur $\alpha = 7$ möglich. Dann folgt $q(q+\varepsilon) = 6$. Da $q \geq 3$ gilt, folgt daraus $q = 3$ und $\varepsilon = -1$. Dann hat $y \in M$ jedoch Ordnung $\beta = 8$ und nach der Charaktertafel von $\mathrm{PSL}_3(2)$ in [Atl] enthält $\mathrm{PSL}_3(2)$ kein Element der Ordnung 8, ein Widerspruch zu $M \cong \mathrm{PSL}_3(2)$.

Falls M isomorph zu $\mathcal{A}_6$ oder M_{10} ist, so muss wegen $|M|$ und $\mathrm{ggT}(\alpha, 6) = 1$ schon $\alpha = 5$ sein. Dann ist jedoch $q \cdot (q+\varepsilon) = 4$, ein Widerspruch zu $q \geq 3$. Falls M isomorph zu $\mathcal{A}_7$ ist, so muss aus Ordnungsgründen wieder $\alpha \in \{5, 7, 5 \cdot 7\}$ sein. Wie zuvor kann der Fall $\alpha = 5$ nicht eintreten. Der Fall $\alpha = 7$ führt zu $q = 3$, $\varepsilon = -1$ und $\beta = 8$, jedoch besitzt $\mathcal{A}_7$ keine Elemente der Ordnung 8. Der letzte Fall $\alpha = 35$ kann nicht eintreten, da $\mathcal{A}_7$ keine Elemente der Ordnung 35 besitzt. Somit können die Fälle (d) und (h) bis (k) von Theorem 6.5.3 in [GLS3] nicht eintreten.

Dann ist nur noch der Fall (a) von Theorem 6.5.3 in [GLS3] möglich. Nun ist M eine maximal parabolische Untergruppe von G oder das Bild eines Stabilisators eines echten, nicht ausgearteten Teilraumes von $\mathrm{GF}(q)^3$ unter dem natürlichen Gruppenhomomorphismus von $\mathrm{SU}_3(q)$ in $\mathrm{PSU}_3(q)$. Wir bestimmen die Ordnung von $|M|$ und nutzen dafür die Abschnitte 3.3.3 und 3.6.2 in [Wil, S. 47, 67] sowie die Ordnungsformeln für lineare und unitäre Gruppen in [Tay, S. 19, 118]. Ist M eine maximal parabolische Untergruppe, so gilt

$$|M| = \begin{cases} d^{-1}q^3(q-1)(q^2-1), & \text{falls } \varepsilon = 1, \\ d^{-1}q^3(q^2-1), & \text{falls } \varepsilon = -1, \end{cases}$$

und wir sehen, dass weder für $\varepsilon = 1$ noch für $\varepsilon = -1$ die Ordnung von M durch α teilbar ist. Daher ist M das Bild eines Stabilisators eines echten, nicht ausgearteten Teilraumes von $\mathrm{GF}(q)^3$ unter dem natürlichen Gruppenhomomorphismus von $\mathrm{SU}_3(q)$ in $\mathrm{PSU}_3(q)$. Dann ist M mit Abschnitt 3.6.2 in [Wil, S. 68, Z. 1f] isomorph zu $\mathrm{GU}_2(q)/C_d$ und hat Ordnung $d^{-1}q(q+1)(q^2-1)$. Diese Zahl wird ebenfalls nicht von α geteilt. Da M nun auch nicht wie im Fall (a) von Theorem 6.5.3 in [GLS3] ist, erfolgt ein Widerspruch zur Annahme $U \neq G$. $\square$

<u>Schritt 2:</u> *Realisierbarkeit von l:*

Unter Verwendung der generischen Charaktertafel von G in [CHE] erhalten wir $d_{212} = d(q^4 - \varepsilon q^3 + \varepsilon q - 1)$ und $d_{121} = d(q^4 - \varepsilon q^3 - \varepsilon q + 1)$ mit Lemma 5.14 (in [CHE] gehört K_1 zur generischen Klasse Nummer 8 und K_2 zur generischen Klasse Nummer 7, wenn $d = 1$ gilt; andernfalls gehört K_1 zur generischen Klasse Nummer 11 und K_2 zur generischen Klasse Nummer 10 in [CHE]). Mit Schritt 1 liefert Lemma 5.22 nun die Behauptung. $\blacksquare$

Bevor wir uns mit der Realisierbarkeit der Hurwitzdaten aus den Zeilen 17 und 18 der Tabelle 4.1 in Voraussetzung 4.21 für symplektische und orthogonale Gruppen beschäftigen, werden wir zunächst zwei Hilfslemmata über Gruppen isomorph zu $\mathrm{PSL}_2(q).C_2$ beweisen, welche wir für die symplektischen und orthogonalen Gruppen benötigen. Für Schritt 2 des ersten Lemmas, vermerken wir vorher

Bemerkung 5.57
GAP-Berechnung zum Schritt 2 vom Beweis von Lemma 5.58:

```
gap> q:=5;; # oder 4 oder 7 oder 9
gap> G:=PSL(2,q);; d:=Gcd(2,q-1);; alpha:=(q+1) / d;;
gap> lalpha:=Filtered(G, x -> Order(x)=alpha);;
gap> z:=Random(lalpha);;
gap> l2:=Elements(ConjugacyClass(G,First(G,i->Order(i)=2)));;
gap> l:=[];;
gap> for x in l2 do for y in G do
   > if Comm(x,y)=z^(-1) then Add(l,[x,y]);
   > fi;od;od;
gap> Number(l,i->Group(Union(i,[z]))=G);
6     # im Fall q=5
      # 32 im Fall q=7
      # 10 in den Fällen q=9 und q=4
```

Lemma 5.58
Seien p eine Primzahl, $f \in \mathbb{N}$, $q := p^f \geq 4$, $d := \operatorname{ggT}(q-1,2)$ und $\alpha := \frac{q+1}{d}$. Falls $p = 2$ gilt, sei ferner f gerade. Sei weiter $H \cong \mathrm{PSL}_2(q)$. Dann gibt es Elemente $x, y, z \in H$ so, dass $o(x) = 2$, $o(z) = \alpha$, $[x,y] = z$ und $\langle x,y,z \rangle = H$ gilt.

Beweis
Mit Satz II.8.4 in [Hup1] sei $z \in H$ ein Element der Ordnung α. Mit demselbem Satz ist $N_H(\langle z \rangle)$ eine Diedergruppe der Ordnung 2α. Seien K_1 eine H-Konjugiertenklasse von Involutionen, $K_2 = z^H$ und $M := \{(a,b) \in K_1 \times H \mid [a,b] = z^{-1}\}$.

Schritt 1: *Berechnung von $|M|$:*

Wir benutzen [CHE], um d_{112} zu berechnen. Ist $t \in H$ eine Involution, so gilt mit den Sätzen II.8.2 bis II.8.5 in [Hup1]

$$|C_H(t)| = \begin{cases} q, & \text{falls } q \equiv 0 \mod 2, \\ q-1, & \text{falls } q \equiv 1 \mod 4, \\ q+1, & \text{falls } q \equiv 3 \mod 4. \end{cases} \tag{5.3}$$

Ferner gibt es mit diesen Sätzen und dem Satz von Sylow nur genau eine H-Konjugiertenklasse von Involutionen. Ist $q \equiv 0$ modulo 2, so gehört K_2 zur generischen Konjugiertenklasse Nummer 4 und K_1 zur generischen Konjugiertenklasse Nummer 2 in [CHE]. Ist $q \equiv 1$ modulo 2, so gehört K_2 zur generischen Konjugiertenklasse Nummer 5 und K_1 zur generischen Konjugiertenklasse Nummer 6 in [CHE]. In beiden Fällen gehört zu der generischen Konjugiertenklasse zu K_2 ein Parameter $i \in \{1, \ldots, \alpha\}$ mit der Eigenschaft:

- Gilt $q \equiv -1$ modulo 4, so ist i nicht durch $\frac{\alpha}{2}$ teilbar.
- Gilt $q \equiv 1$ modulo 4 oder $q \equiv 0$ modulo 2, so ist i nicht durch α teilbar.

Mit Bemerkung 5.38 können wir daher für K_2 den Parameter $i = 1$ wählen. Dann ist i nicht durch α bzw. $\frac{\alpha}{2}$ teilbar (im Fall $q \equiv -1$ modulo 4). Nun liefert Lemma 5.14 unter Verwendung der generischen Charaktertafel von H in [CHE] den Wert $d_{112} = \alpha$. Nach Wahl von i gilt somit $d_{112} = \alpha$ und aus Lemma 5.16 folgt $|M| = \alpha \cdot |C_H(t)| \neq 0$. □

<u>Schritt 2:</u> *Es gibt Paare $(t,b) \in M$ so, dass $\langle t,b,z\rangle = H$ gilt:*

Mit einer kleinen Berechnung in [GAP] folgt die Aussage von Schritt 2 für die Fälle $q \in \{4,5,7,9\}$ (siehe Bemerkung 5.57). Sei daher $q \notin \{4,5,7,9\}$. Angenommen, die Aussage von Schritt 2 gelte nicht. Seien $(t,b) \in M$ beliebig sowie $U := \langle t,b,z\rangle$. Dann ist $U \neq H$ nach Annahme. Da $q \notin \{4,5,7,9\}$ gilt, ist $\alpha > 5$ und deshalb $U = N_H(\langle z\rangle)$ eine Diedergruppe der Ordnung 2α mit Hauptsatz II.8.27 in [Hup1] und gleichzeitig eine maximale Untergruppe von H. Es ist t nicht die zentrale Involution in der Diedergruppe $N_H(\langle z\rangle)$, da diese mit allen Elementen und insbesondere mit $b \in N_H(\langle z\rangle)$ vertauschbar wäre, d.h. $[t,b] = 1_H \neq z$. Damit gilt $t,b \in N_H(\langle z\rangle) = \langle t,z\rangle$ und t invertiert z. Insbesondere ist $|C_H(t) \cap N_H(\langle z\rangle)| \in \{2,4\}$. Weil $q \notin \{4,5,7,9\}$ gilt, folgt $|C_H(t)| \geq 8$ mit der Gleichung (5.3). Daher sei $g \in C_H(t) \setminus N_H(\langle z\rangle)$ beliebig. Dann ist auch $(t, g\cdot b) \in M$.

Wir betrachten $V := \langle t, g\cdot b, z\rangle$. Dann ist aus Ordnungsgründen $N_H(\langle z\rangle) = \langle z,t\rangle$ und eine Untergruppe von V. Da $b \in \langle z,t\rangle \leqslant V$ gilt, folgt $g = (gb)b^{-1} \in V$. Weil $\langle t,z\rangle$ eine maximale Untergruppe von G ist, die g nicht enthält, gilt $V = G$. Das widerspricht der Annahme für den Fall $q \notin \{4,5,7,9\}$. Damit ist alles gezeigt. ■

Lemma 5.59
Seien p eine Primzahl, $f \in \mathbb{N}$, $q := p^f \geq 4$, $d := \mathrm{ggT}(q-1,2)$ und $\alpha := \frac{q+1}{d}$. Im Fall $p = 2$ sei f gerade. Sei weiter $G \cong \mathrm{PSL}_2(q).C_2$. Dann gibt es Elemente $x,y,z \in G$ so, dass $o(x) = 2$, $o(z) = \alpha$, $[x,y] = z$ und $\langle x,y,z\rangle = G$ gilt. Ferner ist:

$$|C_G(x)| = \begin{cases} 2q, & \textit{falls } p = 2, \\ 2(q-1), & \textit{falls } q \equiv 1 \mod 4, \\ 2(q+1), & \textit{falls } q \equiv -1 \mod 4. \end{cases}$$

Beweis
Sei $H \leqslant G$ so, dass $H \cong \mathrm{PSL}_2(q)$ gilt. Mit Lemma 5.58 gibt es dann Elemente $x,y,z \in H$ so, dass $o(x) = 2$, $o(z) = \alpha$, $[x,y] = z$ und $\langle x,y,z\rangle = H$ gilt. Wir zeigen zunächst, dass $|C_G(x) : C_H(x)| = 2$ gilt. Daraus und mit der Gleichung (5.3) auf Seite 136 folgt die Aussage über $|C_G(x)|$.

Sei zuerst $p \neq 2$. Dann wird entweder $\frac{q+1}{2} = \alpha$ oder $\frac{q-1}{2}$ von 2 geteilt. Damit ist $C_H(x)$ entweder eine Diedergruppe von Ordnung $q+1$ oder $q-1$ mit den Sätzen II.8.3 und II.8.4 in [Hup1] (vgl. auch Bemerkung 5.38). Sei $g \in C_H(x)$ ein Element der Ordnung α bzw. $\frac{q-1}{2}$. Dann gilt $N_H(\langle g\rangle) = C_H(x)$.

Seien $U := \langle g\rangle$ und $\Delta := U^G$. Dann operiert G transitiv und nicht-regulär auf Δ per Konjugation. Ferner sind alle Elemente von Δ Untergruppen von H, da $H \trianglelefteq G$ gilt. Nun operiert auch H auf Δ transitiv mit Satz II.8.5 (a) in [Hup1]. Gilt $V \in \Delta$, so ist $N_G(V)$ der zugehörige Punktstabilisator und es folgt $G = H \cdot N_G(U)$ mit dem Frattini-Argument (siehe z.B. 3.1.4 in [KuSt]). Ferner ist

$$N_G(U)/N_H(U) \cong (H \cdot N_G(U))/H = G/H.$$

Daher gilt $|C_G(x) : U| = |N_G(U) : U| = 4$ und $C_H(x)$ hat Index 2 in $C_G(x)$.

Sei jetzt $p = 2$. Dann ist $C_H(x)$ eine Sylow 2-Untergruppe und elementarabelsch der Ordnung q mit Satz II.8.2 in [Hup1] und Gleichung (5.3) auf Seite 136. $C_H(x)$ kann also als ein Vektorraum V der Dimension f über GF(2) aufgefasst werden. Wir wissen mit Hilfssatz II.8.1 in [Hup1], dass H transitiv auf der Menge der eindimensionalen Teilräume von V wirkt, also transitiv auf der Menge aller Untergruppen von V der Ordnung 2. Da $H \trianglelefteq G$ gilt, ist für alle $g \in G$ schon $\langle x \rangle^g \leqslant H$ und damit $x^g \in H$. Wieder mit dem Frattini-Argument folgt dann $G = H \cdot N_G(\langle x \rangle) = H \cdot C_G(x)$, also hat $C_H(x)$ Index 2 in $C_G(x)$.

Sei p beliebig. Wegen $|C_G(x) : C_H(x)| = 2$ sei $g \in C_G(x) \setminus H$ beliebig und wir setzen $w := gy$. Dann gilt $1_G = [x,y]z = [x,w]z$, da $g \in C_G(x)$ ist. Wir betrachten nun $U := \langle x,w,z \rangle$ und nehmen an, dass $U \neq G$ sei.

Dann ist auch $U \neq H$, da $w \notin H$ ist. Ferner ist $U \neq \langle x,z \rangle$, da $\langle x,z \rangle \leqslant H$ gilt. Sei $a \in U \setminus H$. Dann ist $a \cdot w = agy \in U \cap H$, weil $G/H = \{H, Ha\}$ gilt. Wir können annehmen, dass $agy \notin \langle x,z \rangle$ ist, da $y \notin \langle x,z \rangle$ gilt. Nach Lemma 5.58 können wir a derart wählen, dass $H = \langle x,z,agy \rangle \leqslant U$ gilt. Dann sind $y \in \langle x,z,agy \rangle = H$ und $y \in U$. Nun ist $g \in U$ und insgesamt folgt $U = G$, ein Widerspruch zur Annahme $U \neq G$. ■

Bevor wir die Realisierbarkeit der Hurwitzdaten aus Voraussetzung 4.21 für symplektische und orthogonale Gruppen überprüfen, untersuchen wir zunächst den Zentralisator einer speziellen Involution in $\mathrm{PSp}_4(q)$ für gerade Primzahlpotenzen $q \geq 4$. Nachfolgend verwenden wir [AsSe] und verweisen auf die Notation der Quelle im vierten, siebenten und achten Abschnitt auf den Seiten 8 bis 10 und 14 bis 24.

Bemerkung 5.60
Seien $f \in \mathbb{N}$, $f \geq 2$, $q = 2^f$, $n = 4$, V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{F} := \mathrm{GF}(q)$, $G := \mathrm{Sp}(V) \cong \mathrm{PSp}(V)$ sowie $t \in G$ eine Involution. Wir bestimmen $C_G(t)$ für t im Fall (7.11) in [AsSe]. Wir werden nachfolgend mit Matritzen arbeiten. Daher erinnern wir an die im Abschnitt 1.1 dieser Arbeit eingeführte Bezeichnung I_m für die Einheitsmatrix der Größe $m \times m$ über einem beliebigen Körper sowie an den Operator $*$ für Matrixmultiplikation. Zur besseren Übersicht lassen wir Blöcke mit Nullmatritzen leer.

Nach den Voraussetzungen in (4.2) und (7.6) von [AsSe] ist $1 \leq l \leq \frac{n}{2} = 2$ gerade, also gilt $l = 2$. Seien $C_l := C_{\mathrm{SL}(V)}(t)$ und $C := C_l \cap \mathrm{Sp}(V) = C_G(t)$. Nach (4.2) in [AsSe, S. 9] können wir t als

$$t = j_l = \begin{pmatrix} I_l & & \\ & I_{n-2l} & \\ I_l & & I_l \end{pmatrix}$$

wählen. Sei $g \in C_l$. Dann ist nach (4.3) in [AsSe]

$$g = \begin{pmatrix} X(g) & & \\ P(g) & Y(g) & \\ Q(g) & R(g) & X(g) \end{pmatrix}$$

wobei $X(g)$ und $Q(g)$ von Größe $l \times l$, $Y(g)$ von Größe $(n-2l) \times (n-2l)$, $P(g)$ von Größe $(n-2l) \times l$ und $R(g)$ von Größe $l \times (n-2l)$ ist sowie $\det(X)^2 \det(Y) = 1_{\mathbb{F}}$ gilt. Da $l = 2$ ist, verschwinden $Y(g), P(g)$ und $R(g)$ für alle $g \in C$ (diese Matrizen haben Größe $0 \times m$ bzw. $m \times 0$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$, weil $n - 2l = 4 - 2 \cdot 2 = 0$ gilt).

Sei $g \in C$ beliebig. Nach (7.11) in [AsSe] gilt nun (in der Notation von [AsSe])

$$F = \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{F}} & 1_{\mathbb{F}} \\ 1_{\mathbb{F}} & 1_{\mathbb{F}} \end{pmatrix}, X(g) = \begin{pmatrix} 1_{\mathbb{F}} & 0_{\mathbb{F}} \\ x & 1_{\mathbb{F}} \end{pmatrix}, Q(g) = \begin{pmatrix} r & z \\ y & s \end{pmatrix} \text{ und } g = \begin{pmatrix} X(g) & \\ Q(g) & X(g) \end{pmatrix},$$

wobei $x, y, z, r, s \in \mathbb{F}$ sind. Ferner muss

$$\begin{pmatrix} 0_{\mathbb{F}} & 0_{\mathbb{F}} \\ 0_{\mathbb{F}} & 0_{\mathbb{F}} \end{pmatrix} = X(g) * F * Q(g)^T + Q(G) * F * X(g)^T$$

nach (7.11) gelten, wobei M^T die Transponierte der Matrix M sei. Durch Multiplikation erhalten wir

$$M_1 := X(g) * F * Q(g)^T = \begin{pmatrix} z & s \\ r + z(x + 1_{\mathbb{F}}) & y + s(x + 1_{\mathbb{F}}) \end{pmatrix}$$

und

$$M_2 := Q(g) * F * X(g)^T = \begin{pmatrix} z & z(x + 1_{\mathbb{F}}) + r \\ s & s(x + 1_{\mathbb{F}}) + y \end{pmatrix}.$$

Da $\operatorname{char}(\mathbb{F}) = 2$ ist, gilt nun nach (7.11) in [AsSe]

$$\begin{pmatrix} 0_{\mathbb{F}} & 0_{\mathbb{F}} \\ 0_{\mathbb{F}} & 0_{\mathbb{F}} \end{pmatrix} = M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{F}} & s + z(x + 1_{\mathbb{F}}) + r \\ s + z(x + 1_{\mathbb{F}}) + r & 0_{\mathbb{F}} \end{pmatrix},$$

d.h. wir müssen $s = -r - z(x + 1_{\mathbb{F}}) = r + z(x + 1_{\mathbb{F}})$ setzen und können $y, r, z, x \in F$ beliebig wählen. Damit ist

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1_{\mathbb{F}} & 0_{\mathbb{F}} & 0_{\mathbb{F}} & 0_{\mathbb{F}} \\ x & 1_{\mathbb{F}} & 0_{\mathbb{F}} & 0_{\mathbb{F}} \\ r & z & 1_{\mathbb{F}} & 0_{\mathbb{F}} \\ y & r + z(x + 1_{\mathbb{F}}) & x & 1_{\mathbb{F}} \end{pmatrix} \middle| \; x, y, z, r \in \mathbb{F} \right\}.$$

Mit Satz II.7.1 in [Hup1] ist dann C eine Untergruppe einer Sylow 2-Untergruppe S von $\operatorname{SL}(V)$, die aus den unteren Dreiecksmatritzen mit $1_{\mathbb{F}}$ auf der Diagonalen besteht. Es ist $|S| = q^6$ und die Einträge der Matritzen aus S unterhalb der Diagonalen sind nach selbem Satz beliebig. Da die Matritzen aus C gegenüber denen aus S zwei Freiheitsgrade verloren haben (doppeltes Vorkommen von „x“ in Zeile 2, Spalte 1 und Zeile 4, Spalte 3, sowie die Abhängigkeit $r+z(x+1_{\mathbb{F}})$ in Zeile 4 Spalte 2 der Matritzen aus C), hat C somit Ordnung $\frac{|S|}{q^2}=q^4$. Ein Vergleich mit $|G|$ zeigt (siehe z.B. Gleichung (3.22) in [Wil, S. 60]), dass dann C eine Sylow 2-Untergruppe von G ist.

Lemma 5.61
Seien $q\geq 3$ eine Primzahlpotenz, $d:=\mathrm{ggT}(q^2-1,2)$, $\alpha:=\frac{q^2+1}{d}$ und $G\cong \mathrm{PSp}_4(q)$. Dann ist das HD $l:=[G,\mathfrak{g},1\mid[\alpha,1]]$ realisierbar.

Beweis
Mit den Theoremen 3.7 und 3.8 in [Wil, S. 92f] besitzt G eine maximale Untergruppe M isomorph zu $\mathrm{PSp}_2(q^2).C_2\cong \mathrm{PSL}_2(q^2).C_2$. Mit Lemma 5.59 gibt es $x,y,z\in M$ so, dass $o(x)=2$, $o(z)=\alpha$, $[x,y]z=1_G$ und $\langle x,y,z\rangle=M$ gilt.

Ist q gerade, so gilt $|C_M(x)|=2q^2$ mit Lemma 5.59. Ist q ungerade, so folgt $q^2\equiv 1$ modulo 4. Ferner gilt $|C_M(x)|=2(q^2-1)$ mit Lemma 5.59.

Ist q ungerade, so enthält $C_G(x)$ eine Sektion isomorph zu $\mathrm{SL}_2(q)\circ\mathrm{SL}_2(q)$ oder zu $\mathrm{PSL}_2(q)$ nach Table 4.5.1 in [GLS3]. Ist q gerade, so enthält $C_G(x)$ eine Sektion isomorph zu $\mathrm{PSL}_2(q)$ nach (7.9) und (7.10) in [AsSe] oder $C_G(x)$ ist eine 2-Gruppe mit (7.11) in [AsSe]. Gilt (7.11) aus [AsSe] für x, so ist $C_G(x)$ eine Sylow 2-Untergruppe von G und hat daher Ordnung q^4 (siehe Details in Bemerkung 5.60). Falls (7.9) oder (7.10) von [AsSe] für x gilt, folgt $|C_G(x)|\geq q^2(q^2+1)>q^4$, da $C_M(x)\leqslant C_G(x)$ und $|C_M(x)|=2q^2$ ist. Insgesamt ist $|C_M(x)|<|C_G(x)|$ für beliebige Primzahlpotenzen $q\geq 3$.

Schritt 1: *Das HD l erfüllt (RHD1) und (RHD2):*

Da $|C_M(x)|<|C_G(x)|$ für beliebige Primzahlpotenzen $q\geq 3$ ist, finden wir ein Element $g\in C_G(x)\setminus M$ und es gilt $[x,g\cdot y]z=[x,y]z=1_G$. Nun erfüllt das Tripel $((x),(g\cdot y),(z))$ die Eigenschaften (RHD1) und (RHD2) für l. □

Sei $T:=\langle x,g\cdot y,z\rangle$. Gilt $T=G$, so erfüllt das Tripel $((x),(gy),(z))$ auch (RHD3) für l und wir sind fertig. Seien also $T\neq G$ und $U\leqslant G$ eine maximale Untergruppe von G so, dass $T\leqslant U$ gilt. Nach Wahl ist $\langle x,z\rangle\leqslant M$. Da auch $y\in M$ und insbesondere $g\notin M$ ist, folgt $T\nleqslant M$.

Schritt 2: *Ist q ungerade, so erfüllt l auch (RHD3):*

Sei q ungerade. Dann ist $\alpha=\frac{q^2+1}{2}$ und $|T|$ und $|U|$ werden von $\mathrm{kgV}(2,\alpha)=2\alpha$ geteilt. Gilt $q\geq 5$, so ist $\alpha\geq 13$. Mit Theorem 3.8 und den Ordnungsformeln für klassische Gruppen in [Wil] folgt $U\cong M\cong \mathrm{PSL}_2(q^2).C_2$ oder es gilt $q=3$, $\alpha=5$ und $U\cong {C_2}^4.\Omega_4^-(2)\cong {C_2}^4.\mathcal{A}_5$, da die Ordnungen der maximalen Untergruppen von G aus den anderen Fällen im Theorem 3.8 in [Wil, S. 93] nicht durch α teilbar sind.

Sei $q=3$. Mit der Charaktertafel von $G\cong\mathrm{PSp}_4(3)$ in [Atl] seien K_1 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung $\alpha=5$ und K_2 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 9. Lemma 5.14 liefert $d_{121}=585$ und $d_{212}=567$. Anhand der G-Konjugiertenklassen von maximalen Untergruppen von G in [Atl] sehen wir, dass G keine Untergruppe enthält, die sowohl Elemente aus K_1 als auch Elemente aus K_2 besitzt. Zusammen mit Lemma 5.22 liefert das die Behauptung für l im Fall $q = 3$.

Sei nun $q > 3$. Dann ist $U \cong M$ (siehe oben). Mit Table 3.5.C in [KlLi, S. 72] (Block C_3 mit $j = 10$, Spalte V) ist M^G die einzige G-Konjugiertenklasse von maximalen Untergruppen isomorph zu M (für eine Erklärung zu Spalte V von Table 3.5.C vgl. Abschnitt 3.2 in [KlLi, S. 61ff]). Daher gibt es ein $h \in G$ so, dass $U^h = M$ gilt. Mit Lemma 3.12 ist $\langle z \rangle$ eine Hall $\pi(\langle z \rangle)$-Untergruppe von G und es gilt $N_G(\langle z \rangle) \leqslant M$. Mit den Sätzen III.5.8 und III.5.6 in [Hup1] können wir $h \in G$ so wählen, dass $\langle z \rangle^h = \langle z \rangle$ ist. Dann folgt $h \in N_G(\langle z \rangle) \leqslant M$ und deswegen $U = M$, ein Widerspruch zur Annahme $T \neq G$.

<u>Schritt 3:</u> *Ist q gerade, so erfüllt l auch (RHD3):*

Sei q gerade. Dann ist $\alpha = q^2 + 1$ und $|T|$ und $|U|$ werden von $\mathrm{kgV}(2, \alpha) = 2\alpha$ geteilt. Da $q \geq 4$ gilt, ist $\alpha \geq 17$. Mit Theorem 3.7 und den Ordnungsformeln für klassische und exzeptionelle Gruppen in [Wil] ist U isomorph zu $M \cong \mathrm{SL}_2(q^2).C_2$ oder $\mathrm{GO}_4^-(q) \cong \mathrm{SL}_2(q^2).C_2$ oder f ist ungerade und es gilt $U \cong \mathrm{Sz}(q)$, da die Ordnungen der maximalen Untergruppen von G aus den anderen Fällen im Theorem 3.7 in [Wil, S. 92] nicht durch α teilbar sind.

Mit Kapitel XI.3 in [HuB3] können wir den Fall $U \cong \mathrm{Sz}(q)$ ausschließen, da es in $\mathrm{Sz}(q)$ keine Elemente der Ordnung $\alpha = q^2+1$ gibt. Damit gilt also $U \cong \mathrm{SL}_2(q^2).C_2$ und wegen Table 3.5.C in [KlLi, S. 72] ist U entweder zu M konjugiert in G oder U liegt in der zweiten, von M^G verschiedenen G-Konjugiertenklasse von maximalen Untergruppen isomorph zu M (siehe Block C_3 mit $j = 10$ und Block C_8 von Table 3.5.C in [KlLi, S. 72]). Wie auch im Schritt 2 liefert der Fall $U \in M^G$ einen Widerspruch. Daher ist $U^G \neq M^G$.

Es gilt $U \cdot M \subseteq G$ und

$$|U| \cdot |M| = |U|^2 = 4q^4(q^2-1)^2(q^2+1)^2 > q^4(q^2-1)^2(q^2+1) = |G|.$$

Damit ist $|U \cap M| = \frac{|U|\cdot|M|}{|U \cdot M|} \geq 4(q^2+1) = 4\alpha$ und gleichzeitig ist $|U \cap M|$ ein Vielfaches von $4(q^2+1)$, da $U \cap M$ eine Untergruppe von U und M ist. Mit dem Hauptsatz II.8.27 in [Hup1] und, da $q \geq 4$ gilt, gibt es keine Untergruppe in $\mathrm{SL}_2(q^2)$, deren Ordnung ein echtes Vielfaches von $2(q^2+1)$ ist. Damit folgt $|U \cap M| = 4\alpha$ und nach Wahl $U \cap M = N_G(\langle z \rangle)$.

Weiter ist $|C_U(x)| = 2q^2 = |C_M(x)|$ und $|C_{U \cap M}(x)| \leq 4$, da x eine Involution und α ungerade ist (nach Konstruktion können wir annehmen, dass $x \in N_{[M,M]}(\langle z \rangle)$ gilt). Da wir zu Beginn $|C_G(x)| \geq q^4$ gezeigt hatten, folgt $|C_G(x) \setminus (U \cup M)| \geq 4$. Damit können wir g wie im Schritt 2 derart wählen, dass $g \in C_G(x) \setminus M$ und $g \cdot y \notin U \cup M$ gilt. Dann folgt $T = G$. ■

Lemma 5.62
Seien $q \geq 2$ eine Primzahlpotenz, $d := \mathrm{ggT}(q^4-1, 2)$, $\alpha := \frac{q^4+1}{d}$, $G \cong \mathrm{P}\Omega_8^-(q)$ und $l := [G, \mathfrak{g}, 1 \mid [\alpha, 1]]$ ein HD. Dann ist l realisierbar.

Beweis
Nach Theorem 3.11 in [Wil, S. 94f] besitzt G eine maximale Untergruppe M isomorph zu $\mathrm{P}\Omega_4^-(q^2).C_2 \cong \mathrm{PSL}_2(q^4).C_2$. Mit Lemma 5.59 gibt es $x,y,z \in M$ so, dass $o(x)=2$, $o(z)=\alpha$, $[x,y]z=1_G$ und $\langle x,y,z\rangle = M$ gilt.

Ist q gerade, so gilt $|C_M(x)| = 2q^4$ mit Lemma 5.59. Ist q ungerade, so ist $q^4 \equiv 1$ modulo 4 und es gilt $|C_M(x)| = 2(q^4-1)$ mit selbigem Lemma. Ist q ungerade, so enthält $C_G(x)$ einen Abschnitt isomorph zu $\Omega_6^-(q)$, $\Omega_6^+(q)$ oder zu $\Omega_4^-(q)\times\Omega_4^+(q)$ nach Table 4.5.1 in [GLS3]. Insbesondere ist die Ordnung jedes dieser Abschnitte durch q teilbar. Ist q gerade, so enthält $C_G(x)$ einen Abschnitt isomorph zu $\mathrm{Sp}_2(q) \times \mathrm{P}\Omega_4^-(q)$, $\mathrm{Sp}_4(q)$ oder $\mathrm{Sp}_2(q) \cong \mathrm{SL}_2(q)$ nach (8.6), (8.8), (8.10) und (7.6) in [AsSe]. Insbesondere ist die Ordnung jedes dieser Abschnitte durch q^2-1 teilbar. Da $|C_G(x)| > |C_M(x)|$ gilt, gibt es ein $g \in C_G(x) \setminus M$. Dann folgt $[x, g\cdot y]z = [x,y]z = 1_G$. Nun erfüllt das Tripel $((x),(g\cdot y),(z))$ die Eigenschaften (RHD1) und (RHD2) für l.

Sei $T := \langle x, g\cdot y, z\rangle$. Gilt $T=G$, so erfüllt das Tripel $((x),(gy),(z))$ auch (RHD3) für l und wir sind fertig. Seien also $T \neq G$ und $U \leqslant G$ eine maximale Untergruppe von G so, dass $T \leqslant U$ gilt. Nach Wahl ist $\langle x,z\rangle \leqslant M$. Da auch $y \in M$ und insbesondere $g \notin M$ ist, folgt $T \nleqslant M$.

G ist eine Unter- bzw. Faktorgruppe von $\mathrm{GO}_8^-(q)$. Wir nutzen daher die Liste der maximalen Untergruppen von $\mathrm{GO}_8^-(q)$ in Theorem 3.11 in [Wil, S. 94f], um zu entscheiden, in welchen maximalen Untergruppen U und T als Abschnitte liegen können. Sei also $\hat{M}$ eine maximale Untergruppe von $\mathrm{GO}_8^-(q)$ so, dass U eine Sektion von $\hat{M}$ ist. Da $T \leqslant U$ gilt, ist $\left|\hat{M}\right|$ durch $|T| = \alpha = d^{-1}(q^4+1)$ teilbar. Aufgrund der Restriktionen für die Existenz gewisser maximaler Untergruppen von $\mathrm{GO}_8^-(q)$ im Theorem 3.11 in [Wil, S. 94f] können wir die Fälle (v) bis (vii) und (x) und (xi) des Theorems ausschließen. Die Fälle (i) bis (iv) und $(viii)$ können ebenfalls nicht eintreten, da in diesen Fällen $\left|\hat{M}\right|$ nicht durch α teilbar ist. Daher bleibt nur der Fall $(viii)$ von Theorem 3.11 in [Wil, S. 94f] übrig. Dort gilt $\hat{M} \cong \mathrm{GO}_4^-(q^2).C_2$ bzw. $U \cong \mathrm{P}\Omega_4^-(q^2).C_2 \cong \mathrm{PSL}_2(q^4).C_2 \cong M$.

Mit Table 3.5.F in [KlLi, S. 74] (Block C_3 mit $j=16$, Spalte V) ist M^G die einzige Konjugiertenklasse von Untergruppen von G isomorph zu M (siehe Abschnitt 3.2 in [KlLi, S. 61f] für eine Erklärung zu Spalte V). Daher gibt es ein $h \in G$ so, dass $U = M^h$ gilt. Mit Lemma 3.13 gibt es nur eine G-Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen der Ordnung α und es gilt $N_G(\langle z\rangle) \leqslant M$. Ferner ist T eine Hall-Untergruppe von G, da $\alpha = \frac{q^4+1}{d}$ teilerfremd zu q, q^4-1, q^6-1 und damit auch zu $\frac{|G|}{\alpha}$ ist. Mit den Sätzen III.5.8 und III.5.6 in [Hup1] können wir $h \in G$ so wählen, dass $\langle z\rangle^h = \langle z\rangle$ gilt. Dann ist $h \in N_G(\langle z\rangle) \leqslant M$ und damit $U = M$, ein Widerspruch zur Annahme $T \neq G$. ■

Mit der Tabelle 4.1 in Voraussetzung 4.21 müssen wir nun noch die Realisierbarkeit von Hurwitzdaten $\left[G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1,n_1],\ldots,[m_r,n_r]\right]$ überprüfen, für die G zu einer der Familien $\mathrm{Sz}(q)$, ${}^2G_2(q)$ oder ${}^3D_4(q)$ von exzeptionellen Gruppen gehört.

Lemma 5.63
Seien $f \in \mathbb{N}$, $s := 2^f$, $q := 2s^2 \geq 8$ und $G \cong \mathrm{Sz}(q)$ sowie $\alpha := q-2s+1$, $\beta := q-1$ und $\gamma := q+2s+1$. Dann sind α, β und γ paarweise teilerfremd.

Weiter seien $n_1, n_3 \in \{0,1\}$ und $n_2 \in \{0,1,2\}$ so, dass $1 \leq n_1+n_2+n_3 \leq 4$ gilt und $l := [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [\alpha, n_1], [\beta, n_2], [\gamma, n_3]]$ ein HD ist. Gilt $n_1+n_2+n_3 \geq 3$, so sei $\mathfrak{g}_0 = 0$. Andernfalls sei $\mathfrak{g}_0 = 1$.
Dann ist l realisierbar.

Beweis
Seien K_1, K_2 bzw. K_3 jeweils G-Konjugiertenklassen von Elementen der Ordnung α, β bzw. γ. Es ist $\alpha \cdot \gamma = q^2+1$. Da $\beta = q-1$ und q^2+1 teilerfremd sind, ist auch $\mathrm{ggT}(\alpha,\beta) = 1 = \mathrm{ggT}(\beta,\gamma)$. Ferner gilt $\mathrm{ggT}(\alpha,\gamma) = 1$ und $\alpha \geq 5$, $\beta \geq 7$ und $\gamma \geq 13$ sind stets ungerade Zahlen, da q eine 2-Potenz ist. Damit sind α, β und γ auch paarweise teilerfremd zu q. Für den Beweis nutzen wir [CHE]. Dann gehört K_1 zur generischen Konjugiertenklasse Nummer 7 in [CHE], K_2 zur generischen Konjugiertenklasse Nummer 5 und K_3 zur generischen Konjugiertenklasse Nummer 6.

Schritt 1: *Seien $i,j \in \{1,2,3\}$ beliebig und verschieden sowie $U \leqslant G$ so, dass U sowohl mit K_i als auch mit K_j nichttrivialen Schnitt hat. Dann ist $U = G$:*

Angenommen, das gelte nicht. Dann sei M eine maximale Untergruppe von G so, dass $U \leqslant M$ gilt. Wegen $K_i \cap U \neq \varnothing \neq K_j \cap U$ sind nun $|U|$ und $|M|$ durch $\alpha \cdot \beta = (q-1)(q-2s+1)$, $\alpha \cdot \gamma = q^2+1$ oder $\beta \cdot \gamma = (q-1)(q+2s+1)$ teilbar.

Mit Theorem 4.1 in [Wil, S. 117] (für $q > 8$) und [Atl, S. 28] (für $q = 8$), erfolgt dann bereits ein Widerspruch, da es keine maximale Untergruppe von G gibt, deren Ordnung durch $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ oder $\beta\gamma$ teilbar ist. □

Schritt 2: *Realisierbarkeit im Fall $n_1 = 1 = n_3$ und $n_2 \in \{1,2\}$:*

Mit Lemma 5.14 und der generischen Charaktetafel von G in [CHE] gilt:

$$d_{123} = q^3 + q^2(2s+1) + q + 2s + 1 > 0.$$

Damit gibt es Elemente $x \in K_1$, $y \in K_2$ und $z \in K_3$ so, dass $xy = z$ gilt. Nun erfüllt das Tripel $((),(),(x,y,z^{-1}))$ die Eigenschaften (RHD1) und (RHD2) für l im Fall $(n_1,n_2,n_3) = (1,1,1)$ und mit Schritt 1 auch (RHD3). Damit ist l im Fall $(n_1,n_2,n_3) = (1,1,1)$ realisierbar. Da $\beta = q-1$ ungerade ist, folgt mit Lemma 5.21 angewendet auf die eben gezeigte Realisierbarkeit vom HD $[G, \mathfrak{g}, 0 \mid [\alpha,1], [\beta,1], [\gamma,1]]$ ebenso die Realisierbarkeit vom HD $[G, \widetilde{\mathfrak{g}}, 0 \mid [\alpha,1], [\beta,2], [\gamma,1]]$ (Fall $(n_1,n_2,n_3) = (1,2,1)$ für l). □

Schritt 3: *Realisierbarkeit für die verbliebenen Fälle:*

Mit Lemma 5.14 und der generischen Charaktertafel von G in [CHE] folgt:

$$d_{121} = q^3 + (1+2s)q^2 + q + (1+2s), \qquad d_{212} = q^3 + (1+2s)q^2 - q - (1+2s),$$
$$d_{232} = q^3 + (1-2s)q^2 - q - (1-2s), \qquad d_{323} = q^3 + (1-2s)q^2 + q + (1-2s),$$
$$d_{131} = q^3 - q^2 + (4s-1)q + 1 \text{ und} \qquad d_{313} = q^3 - q^2 - (4s+1)q + 1.$$

Ferner gilt $d_{iji} > 0$ für alle $i,j \in \{1,2,3\}$ mit $i \neq j$, da $s > 1$ und damit $q \geq 8$ gilt. Wir wollen nun Lemma 5.22 zusammen mit diesen Koeffizienten und Schritt 1 anwenden. Für jedes Tripel $(n_1,n_2,n_3) \in \{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0),(1,2,0)\}$ liefert Lemma 5.22 mit den Koeffizienten d_{121} und d_{212} und Schritt 1 die Realisierung von l im Fall (n_1,n_2,n_3). Für das Tripel $(n_1,n_2,n_3) \in \{(0,0,1),(0,1,1),(0,2,1)\}$ nutzen wir die Koeffizienten d_{232} und d_{323} und für $(n_1,n_2,n_3) = (1,0,1)$ verwenden wir die Koeffizienten d_{131} und d_{313}, um die Realisierbarkeit für l im Fall (n_1,n_2,n_3) aus Lemma 5.22 zusammen mit Schritt 1 zu erhalten. Die Realisierbarkeit des verblieben Falles $(n_1,n_2,n_3) = (0,2,0)$ für l erhalten wir mit Lemma 5.21 aus der eben gezeigten Realisierbarkeit des HD $[G,\mathfrak{g},1 \mid [\beta,1]]$, da $\beta = q-1$ eine ungerade Zahl ist. Damit folgt die Behauptung. ∎

Lemma 5.64
Seien $f \in \mathbb{N}$, $s := 3^f$, $q := 3s^2$, $\alpha := \frac{q-1}{2}$ sowie $G \cong {}^2G_2(q)$. Dann ist das HD $l := [G,\mathfrak{g},1 \mid [\alpha,1]]$ realisierbar.

Beweis
Sei K_1 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung α und mit Theorem 4.2 (*iv*) in [Wil, S. 138] seien $\beta := q+3s+1$ sowie K_2 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung β.

<u>Schritt 1:</u> *Sei $U \leqslant G$ eine Untergruppe, die Elemente der Ordnung α und β enthält. Dann ist $U = G$:*

Angenommen, das sei falsch. Sei dann M eine maximale Untergruppe von G so, dass $U \leqslant M$ gilt. Mit Theorem 4.2 in [Wil, S. 138] ist jede maximale Untergruppe, die ein Element der Ordnung β besitzt, isomorph zu $C_\beta : C_6$, da β weder ein Teiler von $|\mathrm{PSL}_2(q)|$ noch von $|{}^2G_2(q_0)|$ ist, wobei q_0 ein echter Teiler von q sei. Da $q \geq 27 > 6$ gilt und M ein Element der Ordnung $\alpha \geq 13$ besitzt, erfolgt ein Widerspruch zur Annahme. □

<u>Schritt 2:</u> *Realisierbarkeit von l:*

Unter Verwendung der generischen Charaktertafel von G in [CHE] (K_1 gehört zur generischen Konjugiertenklasse Nummer 11 und K_2 zur generischen Konjugiertenklasse Nummer 14) ergibt sich mittels Lemma 5.14:

$$d_{121} = q^5 + (2-3s)q^4 + (1-3s)q^3 + q^2 + (2-3s)q + (1-3s) \qquad \text{und}$$
$$d_{212} = q^5 + (2-3s)q^4 + (1-3s)q^3 - q^2 - (2-3s)q - (1-3s).$$

Für alle $s \geq 1$ sind d_{121} und d_{212} echt größer als 0, sodass Lemma 5.22 und Schritt 1 nun die Behauptung liefern. ∎

Lemma 5.65
Seien $q \geq 2$ eine Primzahlpotenz, $\alpha := q^4 - q^2 + 1$ und $G \cong {}^3D_4(q)$. Dann ist das HD $l := [G,\mathfrak{g},1 \mid [\alpha,1]]$ realisierbar.

Beweis
Sei K_1 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung α. Mit Teil (xi) von Theorem 4.3 in [Wil, S. 144] seien $\beta := q^2 + q + 1$ und $x \in G$ ein Element der Ordnung β so, dass $|C_G(x)|$ von β^2 geteilt wird und $C_G(x)$ in einer maximalen Untergruppe isomorph zu $(C_\beta \times C_\beta) : \mathrm{SL}_2(3)$ enthalten ist. Sei weiter $K_2 := x^G$.

<u>Schritt 1:</u> *Sei $U \leqslant G$ eine Untergruppe, die Elemente der Ordnung α und β enthält. Dann ist $U = G$:*

Angenommen, es gelte $U \neq G$. Dann sei M eine maximale Untergruppe von G so, dass $U \leqslant M$ ist. Nun wird $|M|$ von $\alpha = q^4 - q^2 + 1 \geq 2^4 - 2^2 + 1 = 13$ geteilt. Mit den Ordnungsformeln in [Tay] und [Wil] ist α kein Teiler von $|\mathrm{SL}_2(q^3)|$, $|\mathrm{SL}_2(q)|$, $|G_2(q)|$, $\left|\mathrm{PGL}_3^{\pm}(q)\right|$, $|\mathrm{PSL}_2(q^3)|$, $|\mathrm{PSL}_2(q)|$, $\left|\mathrm{SL}_3^{\pm}(q)\right|$, $|C_\beta|$, $\left|C_{q^2-q+1}\right|$, und $|\mathrm{SL}_2(3)| = 8 \cdot 3$. Aus Theorem 4.3 in [Wil, S. 144] folgt dann $M \cong C_\alpha : C_4$.

Da jedoch $\beta = q^2 + q + 1 \geq 2^2 + 2 + 1 = 7$ auch ein Teiler von $|M|$ ist, erfolgt ein Widerspruch, weil Gruppen isomorph zu $C_\alpha : C_4$ keine durch β teilbare Ordnung besitzen. $\square$

<u>Schritt 2:</u> *Realisierbarkeit von l:*

Wir verwenden die generischen Charaktertafeln von G in [CHE]. K_1 gehört zur generischen Konjugiertenklasse Nummer 28, falls $q \equiv 0$ modulo 2 gilt, bzw. zur Nummer 32, falls $q \equiv 1$ modulo 2 gilt. K_2 gehört zur generischen Konjugiertenklasse Nummer 26, falls $q \equiv 0$ modulo 2 gilt, bzw. zur Nummer 30, falls $q \equiv 1$ modulo 2 gilt. Mit Lemma 5.14 ergibt sich dann

$$\begin{aligned} d_{121} &= q^{20} - 2q^{19} + q^{18} + 2q^{17} - 4q^{16} + 2q^{15} + q^{14} - 2q^{13} + q^{12} + 4q^{11} - 8q^{10} \\ &\quad + 4q^9 + q^8 - 2q^7 + q^6 + 2q^5 - 4q^4 + 2q^3 + q^2 - 2q + 1 \qquad \text{und} \\ d_{212} &= q^{20} - 2q^{19} + q^{18} + 2q^{17} - 4q^{16} + 2q^{15} + q^{14} - 2q^{13} + q^{12} - 8q^{11} + 16q^{10} \\ &\quad - 8q^9 + q^8 - 2q^7 + q^6 + 2q^5 - 4q^4 + 2q^3 + q^2 - 2q + 1. \end{aligned}$$

Für alle $q > 1$ sind d_{121} und d_{212} echt größer als 0, wodurch die Behauptung nun aus Lemma 5.22 und Schritt 1 folgt. $\blacksquare$

Lemma 5.66
Es sei $l := [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1, n_1], \ldots, [m_r, n_r]]$ ein HD aus einer der Zeilen 13 bis 21 in Tabelle 4.1 von Voraussetzung 4.21. Dann ist l realisierbar.

Beweis
Sei q eine Primzahlpotenz. Sind $G \cong \mathrm{PSL}_2(q)$, $q \geq 9$ und l wie in den Zeilen 13 oder 14 der Tabelle 4.1 von Voraussetzung 4.21, so folgt mit Lemma 5.55 die Behauptung.

Die Lemmata 5.56 und 5.20 liefern die Behauptung in den Fällen $G \cong \mathrm{PSL}_3(q)$ oder $G \cong \mathrm{PSU}_3(q)$, bzw. l wie in den Zeilen 15 oder 16 der Tabelle 4.1 in Voraussetzung 4.21.

Ist G eine symplektische oder orthogonale Gruppe und l wie in den Zeilen 17 oder 18 der Tabelle 4.1 in Voraussetzung 4.21, so ist l mit den Lemmata 5.61, 5.62 und 5.20 realisierbar.

Ist l wie in den Zeilen 19, 20 oder 21 der Tabelle 4.1 von Voraussetzung 4.21 und ist G isomorph zu $\mathrm{Sz}(q)$, ${}^2G_2(q)$ oder ${}^3D_4(q)$, dann folgt mit den Lemmata 5.63, 5.64, 5.65 und 5.20 die Realisierbarkeit von l. ■

5.6 Gruppen vom Lie-Typ – nicht-generische Fälle

Wie auch im Abschnitt zu $\mathrm{PSL}_2(q)$ für Primzahlpotenzen $q \geq 9$ geben wir zunächst eine Tabelle zur Übersicht an, welches Hurwitzdatum aus der Zeile 7 von Tabelle 4.1 der Voraussetzung 4.21 in welchem der nachfolgenden Lemmata auf Realisierbarkeit überprüft wird.

Hurwitzdatum	Lemma	Hurwitzdatum	Lemma
$[G, \mathfrak{g}, 1 \mid [2,1]]$	5.75	$[G, \mathfrak{g}, 0 \mid [3,2], [4,1]]$	5.68
$[G, \mathfrak{g}, 2 \mid [2,1]]$	5.75	$[G, \mathfrak{g}, 0 \mid [3,2], [7,1]]$	5.69
$[G, \mathfrak{g}, 1 \mid [3,1]]$	5.68	$[G, \mathfrak{g}, 0 \mid [3,1], [4,2]]$	5.68
$[G, \mathfrak{g}, 1 \mid [4,1]]$	5.68	$[G, \mathfrak{g}, 0 \mid [3,1], [4,1], [7,1]]$	5.72
$[G, \mathfrak{g}, 1 \mid [7,1]]$	5.71	$[G, \mathfrak{g}, 0 \mid [4,2], [7,1]]$	5.71
$[G, \mathfrak{g}, 1 \mid [2,1], [3,1]]$	5.73	$[G, \mathfrak{g}, 0 \mid [2,1], [3,2], [4,1]]$	5.77
$[G, \mathfrak{g}, 1 \mid [2,1], [4,1]]$	5.73	$[G, \mathfrak{g}, 0 \mid [2,1], [3,2], [7,1]]$	5.80
$[G, \mathfrak{g}, 1 \mid [2,1], [7,1]]$	5.70	$[G, \mathfrak{g}, 0 \mid [2,1], [3,1], [4,2]]$	5.77
$[G, \mathfrak{g}, 1 \mid [3,2]]$	5.68	$[G, \mathfrak{g}, 0 \mid [2,1], [3,1], [4,1], [7,1]]$	5.78
$[G, \mathfrak{g}, 1 \mid [3,1], [4,1]]$	5.68	$[G, \mathfrak{g}, 0 \mid [2,1], [4,2], [7,1]]$	5.79
$[G, \mathfrak{g}, 1 \mid [3,1], [7,1]]$	5.69	$[G, \mathfrak{g}, 0 \mid [3,2], [4,2]]$	5.68
$[G, \mathfrak{g}, 1 \mid [4,2]]$	5.68	$[G, \mathfrak{g}, 0 \mid [3,2], [4,1], [7,1]]$	5.80
$[G, \mathfrak{g}, 1 \mid [4,1], [7,1]]$	5.71	$[G, \mathfrak{g}, 0 \mid [3,1], [4,2], [7,1]]$	5.79
$[G, \mathfrak{g}, 1 \mid [2,1], [3,2]]$	5.77	$[G, \mathfrak{g}, 0 \mid [2,1], [3,2], [4,2]]$	5.77
$[G, \mathfrak{g}, 1 \mid [2,1], [3,1], [4,1]]$	5.77	$[G, \mathfrak{g}, 0 \mid [2,1], [3,2], [4,1], [7,1]]$	5.80
$[G, \mathfrak{g}, 0 \mid [2,1], [3,1], [7,1]]$	5.72	$[G, \mathfrak{g}, 0 \mid [2,1], [3,1], [4,2], [7,1]]$	5.79
$[G, \mathfrak{g}, 1 \mid [2,1], [4,2]]$	5.76	$[G, \mathfrak{g}, 0 \mid [3,2], [4,2], [7,1]]$	5.80
$[G, \mathfrak{g}, 0 \mid [2,1], [4,1], [7,1]]$	5.72	$[G, \mathfrak{g}, 0 \mid [2,1], [3,2], [4,2], [7,1]]$	5.80

Tabelle 5.2: Übersicht zur Realisierbarkeit von Ausnahme-Hurwitzdaten aus Tabelle 4.1, Zeile 7, von Voraussetzung 4.21, wobei $G \cong \mathrm{PSL}_2(7)$ gilt.

Des Weiteren sammeln wir wichtige Informationen über $\mathrm{PSL}_2(7)$ aus [Atl] in

Bemerkung 5.67
Sei $G = \mathrm{PSL}_2(7)$.

(i) Es ist $|G| = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$. G hat Elemente der Ordnung 1, 2, 3, 4 und 7, wobei sich nur die Elemente der Ordnung 7 in zwei G-Konjugiertenklassen aufteilen. Ist $g \in G^{\#}$ mit $o(g) = 7$, so sind g^G und $(g^{-1})^G$ zwei verschiedene G-Konjugiertenklassen. Insgesamt besitzt G nur jeweils eine Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen der Ordnung 2, 3, 4 und 7.

(ii) G besitzt drei Konjugiertenklassen von maximalen Untergruppen. Zwei der drei Klassen bestehen aus Untergruppen isomorph zu $\mathcal{S}_4$, welche Index 7 in G haben. Diese sind Normalisatoren von elementarabelschen Gruppen der Ordnung 4.
Die andere Konjugiertenklasse besteht aus Frobeniusgruppen der Ordnung 21 mit zyklischem Frobeniuskern der Ordnung 7. Diese sind Normalisatoren von Sylow 7-Untergruppen von G und haben Index 8 in G.

(iii) Die Sylow 2-Untergruppen von G sind Diedergruppen der Ordnung 8 (siehe z.B. Satz II.8.10 (b) in [Hup1]). Die Involutionenzentralisatoren sind genau die Sylow 2-Untergruppen von G.

(iv) G besitzt keine echte Untergruppe, deren Ordnung durch 14 teilbar ist. Ansonsten gebe es eine maximale Untergruppe, die diese Eigenschaft erfüllt.

Lemma 5.68
Seien $G = \mathrm{PSL}_2(7)$ und $n_1, n_2 \in \{0,1,2\}$. Gilt dann $n_1 + n_2 \leq 2$, so ist das HD $[G, \mathfrak{g}, 1 \mid [3, n_1], [4, n_2]]$ realisierbar. Andernfalls ist das HD $[G, \mathfrak{g}, 0 \mid [3, n_1], [4, n_2]]$ realisierbar.

Beweis
Die Lemmata 5.34 und 5.36 liefern die Behauptung. ■

Lemma 5.69
Seien $G = \mathrm{PSL}_2(7)$ und $l \in \{[G, \mathfrak{g}, 1 \mid [3,1], [7,1]], [G, \mathfrak{g}, 0 \mid [3,2], [7,1]]\}$ ein HD. Dann ist l realisierbar.

Beweis
Seien K_1 bzw. K_2 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 3 bzw. 7.

Schritt 1: *Realisierbarkeit für $l = [G, \mathfrak{g}, 0 \mid [3,2], [7,1]]$:*

Unter Verwendung der Charaktertafel von G in [Atl] liefert Lemma 5.14 den Wert $d_{112} = 21$. Seien also $a, b \in K_1$ und $c \in K_2$ so, dass $ab = c$ gilt, sowie $S := \langle c \rangle$ und $N := N_G(S)$. Dann ist N eine maximale Untergruppe und eine Frobeniusgruppe (siehe Bemerkung 5.67). Wir wissen, dass c in genau einer Sylow 7-Untergruppe enthalten ist, da die Sylow 7-Untergruppen von G zyklisch von Primzahlordnung sind. Insbesondere gilt $\langle c \rangle = S$.

Da K_1 die einzige G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 3 ist, gilt $K_1 \cap N \neq \varnothing$. Genauer gilt $|K_1 \cap N| = 21 - 7 = 14$, da N eine Frobeniusgruppe mit Frobeniuskern S ist (siehe Bemerkung 5.67). Sei $M := \{(x,y) \in (K_1 \cap N)^2 \mid xy = c\}$. Weil $|K_1 \cap N| = 14$ ist und $(x,y_1),(x,y_2) \in M$ zu $y_1 = y_2$ führt (und analog für die erste Komponente), gilt $|M| \leq 14$. Jetzt ist also $d_{112} = 21 > 14 \geq |M|$ und mit Lemma 5.19 finden wir $a,b \in K_1$ so, dass $ab = c$ und $a \notin N_G(\langle c \rangle) = N$ gilt. Wir beachten, dass der im Lemma 5.19 verlangte Wert

$$\sum_{\alpha,\beta} d^{(N)}_{\alpha,\beta,2}$$

sicherlich höchstens so groß wie $|M|$ ist. Ist nämlich $(x_1,y),(x_2,y) \in M$, so gilt $x_1y = c = x_2y$ bzw. $x_1 = x_2$. Das führt dazu, dass es höchstens $|N \setminus \langle c \rangle| = 21 - 7 = 14$ Paare in M geben kann.

Da $a \notin N$ ist, folgt auch $b \notin N$. Andernfalls würde $a = b^{-1}c \in N$ gelten. Nun erfüllt das Tripel $((),(),(a,b,c^{-1}))$ die Eigenschaften (RHD1) und (RHD2) für den Fall $l = [G,\mathfrak{g},0 \mid [3,2],[7,1]]$. Nach Konstruktion ist die Ordnung von $T := \langle a,b,c^{-1} \rangle$ durch 21 teilbar und es gilt $T \nleqslant N$. Dann folgt $T = G$, da N die einzige maximale Untergruppe von G in N^G ist, die c enthält (vgl. Bemerkung 5.67). $\square$

Schritt 2: *Realisierbarkeit für* $l = [G,\mathfrak{g},1 \mid [3,1],[7,1]]$*:*

Sei $\widetilde{\mathfrak{g}} \in \mathbb{N}$ so, dass $\widetilde{l} := [G,\widetilde{\mathfrak{g}},0 \mid [3,2],[7,1]]$ ein HD ist. Mit Schritt 1 sei $((),(),(x,y,z))$ eine Realisierung für $\widetilde{l}$. Nach Konstruktion in Schritt 1 ist $z^{-1} \in K_2$ und $x \in K_1$. Sei $K_3 := z^G$. Unter Verwendung der Charaktertafel von G in [Atl] ermitteln wir $d_{231} = 3$ mit Lemma 5.14. Dann gibt es $b \in K_3$ und $g \in K_2$ so, dass $gb = x$ gilt.

Da $K_2 = (b^{-1})^G = g^G$ ist, gibt es ein $a \in G$ so, dass $g = (b^{-1})^a$ gilt. Nun ist das Tripel $((a),(b),(y,z))$ wegen

$$1_G = xyz = gbyz = (b^{-1})^a byz = [a,b]yz$$

und $G = \langle x,y,z \rangle \leqslant \langle a,b,y,z \rangle$ eine Realisierung für l, da $((),(),(x,y,z))$ eine Realisierung für $\widetilde{l}$ ist. ■

Lemma 5.70
Sei $G = \mathrm{PSL}_2(7)$*. Dann ist das HD* $l := [G,\mathfrak{g},1 \mid [2,1],[7,1]]$ *realisierbar.*

Beweis
Seien K_1 bzw. K_2 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 2 bzw. 7 und K_3 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 3. Lemma 5.14 liefert $d_{123} = 3 = d_{113}$ unter Verwendung der Charaktertafel von G in [Atl]. Dann gibt es $x,a,g \in K_1$, $y \in K_2$ und $z \in K_3$ so, dass $xy = z = ag$ gilt. Da $a,g \in K_1$ und Involutionen sind, gibt es ein $b \in G$ so, dass $g = a^b$ gilt. Nun ist

$$1_G = z^{-1}xy = [a,b]^{-1}xy = [b,a]xy$$

und mit Bemerkung 5.67 (*iv*) folgt, dass das Tripel $((b),(a),(x,y))$ eine Realisierung für l ist. ■

Lemma 5.71
Seien $G = \mathrm{PSL}_2(7)$ *und* $(\mathfrak{g}_0, n) \in \{(0,2),(1,1),(1,0)\}$ *so, dass* $l = [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \,|\, [4,n], [7,1]]$ *ein HD ist. Dann ist* l *realisierbar.*

Beweis
Seien K_1 bzw. K_2 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 4 bzw. 7. Unter Verwendung der Charaktertafel von G in [Atl] liefert Lemma 5.14 die Werte $d_{121} = 4$ und $d_{212} = 14$. Mit Bemerkung 5.67 (*iv*) und Lemma 5.22 folgt nun die Behauptung. ■

Lemma 5.72
Seien $G = \mathrm{PSL}_2(7)$ *und* $n, m \in \{2,3,4\}$ *verschieden und so, dass* $n < m$ *und* $l = [G, \mathfrak{g}, 0 \mid [n,1], [m,1], [7,1]]$ *ein HD ist. Dann ist* l *realisierbar.*

Beweis
Seien K_n bzw. K_m eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung n bzw. m und K_1 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 7. Dann liefert Lemma 5.14 den Wert

$$d_{m1n} = \begin{cases} 8, & \text{falls } n = 2, \\ 14, & \text{sonst} \end{cases}$$

unter Verwendung der Charaktertafel von G in [Atl]. Damit gibt es Elemente $a \in K_n$, $b \in K_m$ und $c \in K_1$ so, dass $bc = a$ gilt. Weil $o(c) = 7$ gilt und $n, m \in \{2,3,4\}$ verschieden sind, ist $|\langle a^{-1}, b, c\rangle|$ durch $\mathrm{kgV}(2,7) = 14$ teilbar. Mit Teil (*iv*) von Bemerkung 5.67 folgt $\langle a^{-1}, b, c\rangle = G$ und es gilt $1_G = a^{-1}bc$ nach Konstruktion. Nun ist das Tripel $((), (), (a^{-1}, b, c))$ eine Realisierung für l. ■

Lemma 5.73
Seien $G = \mathrm{PSL}_2(7)$ *und* $n \in \{3,4\}$ *so, dass* $l = [G, \mathfrak{g}, 1 \mid [2,1], [n,1]]$ *ein HD ist. Dann ist* l *realisierbar.*

Beweis
Seien $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2 \in \mathbb{N}$ so, dass $l_1 := [G, \mathfrak{g}_1, 0 \mid [2,1], [3,1], [7,1]]$ und $l_2 := [G, \mathfrak{g}_2, 0 \mid [2,1], [4,1], [7,1]]$ HD sind. Mit Lemma 5.72 seien $((), (), (x_1, y_1, z_1))$ eine Realisierung für l_1 sowie $((), (), (x_2, y_2, z_2))$ eine Realisierung für l_2. Nun gilt

$$x_1 y_1 z_1 = z_1 x_1 y_1 = 1_G = z_2 x_2 y_2 = x_2 y_2 z_2 \quad \text{und} \quad \langle x_1, y_1, z_1\rangle = \langle x_2, y_2, z_2\rangle = G.$$

Ferner ist $o(x_1) = 2 = o(x_2)$ sowie $o(y_1) = 3$ und $o(y_2) = 4$. Wir konstruieren je einen Kommutator für z_1 und z_2. Seien K_1 bzw. K_2 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 4 bzw. 7. Lemma 5.14 liefert $d_{112} = 7$ unter Verwendung der Charaktertafel von G in [Atl]. Damit gibt es $a_1, a_2, g_1, g_2 \in K_1$ so, dass $a_1 g_1 = z_1$ und $a_2 g_2 = z_2$ gilt. Da K_1 mit Bemerkung 5.67 (*i*) die einzige G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 4 ist, folgt ${g_1}^{-1}, {g_2}^{-1} \in K_1$. Dann gibt es $h_1, h_2 \in G$ so, dass $a_1 = ({g_1}^{-1})^{h_1}$ und $a_2 = ({g_2}^{-1})^{h_2}$ gilt.

Sei $i \in \{1,2\}$. Nun ist $[h_i, g_i] x_i y_i = a_i g_i x_i y_i = z_i x_i y_i = 1_G$ und die Realisierbarkeit von l_i liefert die Eigenschaften (RHD1) bis (RHD3) für das Tripel $((h_i), (g_i), (x_i, y_i))$ für l im Fall $n = i + 2$. ■

Lemma 5.74
Seien $G = \mathrm{PSL}_2(7)$ *und* $t \in G$ *eine Involution. Weiter seien* $x,y \in G$ *so, dass* $o(x) = o(y) = 4$ *und* $xy = t$ *gilt. Dann ist* $x = y$ *und* $x,y \in C_G(t)$.

Beweis
Mit Bemerkung 5.67 (i) sei K_1 bzw. $K_2 = t^G$ die G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 4 bzw. 2. Weiter sei $M := \{(x,y) \in K_1 \times K_1 \mid x \cdot y = t\}$. Dann ist $|M| = d_{112}$ nach Lemma 5.13.

Es ist $C := C_G(t)$ eine Sylow 2-Untergruppe von G von Ordnung 8 und eine Diedergruppe (siehe Bemerkung 5.67 (iii)). Ist $\widetilde{t}$ ein Erzeuger des zyklischen Normalteilers von C vom Index 2, so ist $o(\widetilde{t}) = 4$. Da nach Voraussetzung $xy = t$ gilt und t eine Involution in G ist, gibt es nun die zwei Möglichkeiten $x = y = \widetilde{t}$ und $x = y = \widetilde{t}^{-1}$. Andere Möglichkeiten können in C nicht eintreten, da $\widetilde{t}$ und $\widetilde{t}^{-1}$ die einzigen Elemente der Ordnung 4 in C sind und $\widetilde{t} \cdot \widetilde{t}^{-1} = 1_G = \widetilde{t}^{-1} \cdot \widetilde{t}$ gilt. Das heißt, dass $(\widetilde{t},\widetilde{t}),(\widetilde{t}^{-1},\widetilde{t}^{-1}) \in M$ sind und damit $|M| = d_{112} \geq 2$ gilt.

Mit der Charaktertafel von G in [Atl] liefert Lemma 5.14 jedoch den Wert $d_{112} = 2$. Das bedeutet $M = \{(\widetilde{t},\widetilde{t}),(\widetilde{t}^{-1},\widetilde{t}^{-1})\}$ und die Behauptung folgt. ■

Lemma 5.75
Seien $G = \mathrm{PSL}_2(7)$, $\mathfrak{g}_0 \in \{1,2\}$ *und* $l = [G,\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0 \mid [2,1]]$ *ein HD. Genau dann ist* l *realisierbar, wenn* $\mathfrak{g}_0 \neq 1$ *gilt.*

Beweis
Seien zuerst $\mathfrak{g}_0 = 2$ und $\widetilde{\mathfrak{g}} \in \mathbb{N}$ so, dass $\widetilde{l} := [G,\widetilde{\mathfrak{g}},1 \mid [2,1],[3,1]]$ ein HD ist. Mit Lemma 5.73 ist $\widetilde{l}$ realisierbar und wir wählen eine Realisierung $((a_2),(b_2),(x,y))$ für $\widetilde{l}$. Dann gilt $o(x) = 2$, $o(y) = 3$, $1_G = [a_2,b_2]xy$ und $\langle a_2,b_2,x,y\rangle = G$ nach Definition 5.2. Seien $K_1 := y^G$, $z \in G$ ein Element der Ordnung 7 sowie $K_2 := z^G$ und $K_3 = (z^{-1})^G$.

Mit Lemma 5.14 und unter der Verwendung der Charaktertafel von G in [Atl] erhalten wir $d_{321} = 3$. Dann gibt es $a_1,g \in K_2$ so, dass ${a_1}^{-1}g = y$ gilt. Da a_1 und g in G konjugiert sind, gibt es ein $b_1 \in G$ so, dass $g = {a_1}^{b_1}$ gilt.

Nun folgt $1_G = [a_2,b_2]xy = y[a_2,b_2]x = {a_1}^{-1}{a_1}^{b_1}[a_2,b_2]x = [a_1,b_1][a_2,b_2]x$. Weil auch $y \in \langle a_1,b_1\rangle$ gilt, ist $((a_1,a_2),(b_1,b_2),(x))$ eine Realisierung für l im Fall $\mathfrak{g}_0 = 2$.

Sei nun $\mathfrak{g}_0 = 1$. Angenommen, l sei realisierbar und $((x),(y),(c))$ sei eine Realisierung für l. Dann gilt $o(c) = 2$, $1_G = [x,y]c$ und $\langle x,y,c\rangle = G$. Sei $C := C_G(c)$. Mit der Charaktertafel von $G = \mathrm{PSL}_2(7)$ in [Atl] seien K_1 die Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 2 in G sowie K_4 und K_5 die verschiedenen G-Konjugiertenklasse der Elemente der Ordnung 7. Da $c \in \langle x,y\rangle$ gilt, ist auch $\langle x,y\rangle = \langle x,y,c\rangle = G$.

Aufgrund der möglichen Elementordnungen in G ist $o(x),o(y) \in \{2,3,4,7\}$. Da c eine Involution ist, gilt insbesondere $[x,y] = [y,x]$. Daher können wir nachfolgend die Rollen von x und y vertauschen. Es ist $x \neq 1_G \neq y$, denn sonst wäre $c = 1_G$ im Widerspruch zu $o(c) = 2$. Weiterhin können x und y nicht gleichzeitig von Ordnung 2 sein, da G keine Diedergruppe ist.

Schritt 1: *Weder x noch y hat Ordnung 7:*

Angenommen es gilt $o(x) = 7$ (oder $o(y) = 7$). Dann sind auch x^{-1} und x^y Elemente der Ordnung 7 in G. Da x und x^{-1} in G nicht konjugiert sind, sind es auch x^y und x^{-1} nicht. Nach Voraussetzung gilt $c = x^{-1}x^y$ und mit Lemma 5.13 folgt daher $d_{451} \neq 0 \neq d_{541}$. Unter Verwendung der Charaktertafel von G in [Atl] ist mit Lemma 5.14 jedoch

$$d_{451} = d_{541} = \frac{24 \cdot 24}{168} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 7\right) + \frac{1}{3}\right) = 0,$$

ein Widerspruch. □

Schritt 2: *Weder x noch y hat Ordnung 4:*

Angenommen, das sei falsch. Dann ist die Involution $c = [x,y] = x^{-1}x^y$ das Produkt von zwei Elementen der Ordnung 4. Mit Lemma 5.74 schlussfolgern wir $x^y = x^{-1}$ sowie $x \in C$ und $y \in N_G(\langle x \rangle)$. Da $G = \mathrm{PSL}_2(7)$ gilt, ist $C = N_G(\langle x \rangle)$ eine Diedergruppe der Ordnung 8 und $y \in C$ ist eine Involution. Weil $G = \langle x, y \rangle$ nach Annahme ist, erhalten wir $c \in Z(G) = 1$ und damit einen Widerspruch. □

Mit den Schritten 1 und 2, den Vorbetrachtungen sowie den möglichen Elementordnung von x und y in $G = \mathrm{PSL}_2(7)$ folgt nun $o(x), o(y) \in \{2,3\}$ und x und y haben nicht gleichzeitig Ordnung 2. Sei daher o.B.d.A. $o(y) = 3$. Mit den Rechenregeln für Kommutatoren erhalten wir zunächst

$$[x,y^{-1}] \cdot c^{y^{-1}} = [x,y^{-1}] \cdot [x,y]^{y^{-1}} = [x,yy^{-1}] = [x,1_G] = 1_G \quad \text{sowie} \tag{5.4}$$

$$o(c^{y^{-1}}) = 2 \quad \text{und} \quad [y^{-1},x] = c^{y^{-1}} = [x,y^{-1}]. \tag{5.5}$$

Damit schlussfolgern wir

$$\begin{aligned} c \cdot c^y &= [x,y] \cdot [x,y]^y = [x,y^2] = [x,y^{-1}] \overset{(5.4)}{=} c^{y^{-1}} \overset{(5.5)}{=} [y^{-1},x] \\ &= [y^2,x] = [y,x]^y \cdot [y,x] = c^y \cdot c. \end{aligned}$$

Jetzt ist $V := \langle c, c^y \rangle \lneqq G$ eine Kleinsche Vierergruppe und ferner gilt

$$[c,c^y] = [c,c^{y^{-1}}] = [c^y,c^{y^{-1}}] = 1_G. \tag{5.6}$$

Weil $c^{y^{-1}} = c \cdot c^y$ ist, folgt $y \in N_G(V)$.

Schritt 3: *Es ist $o(x) \neq 2$:*

Angenommen, es gilt $o(x) = 2$. Wir zeigen, dass $x \in N_G(V)$ ist.
Wegen $1_G = [1_G,y] = [x^2,y] = c^x \cdot c$ erhalten wir

$$c^x = c \quad \text{bzw.} \quad x \in C. \tag{5.7}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}(c^y)^x &= c^{xy[y,x]} = c^{xyc} \overset{(5.7)}{=} (c^y)^c \overset{(5.6)}{=} c^y && \text{und}\\ (c^{y^{-1}})^x &= c^{y^2x} = c^{xy[y,x]y[y,x]} = c^{xycyc} \overset{(5.7)}{=} (c^y)^{cyc}\\ &= c^{-1}y^{-1}(c^{-1}c^yc)yc \overset{(5.6)}{=} c^{-1}c^{y^2}c \overset{(5.6)}{=} c^{y^2} = c^{y^{-1}}.\end{aligned}$$

Also ist $x \in N_G(V)$. Nun gilt $1 \neq V \trianglelefteq G$, weil bereits $y \in N_G(V)$ gezeigt wurde. Da G eine einfache Gruppe und V eine Kleinsche Vierergruppe ist, erhalten wir einen Widerspruch. □

Mit Schritt 3 ist nun $o(x) = 3$. Aus den Gleichungen (5.4) und (5.5) mit x anstelle von y erhalten wir analog

$$\begin{aligned}cc^x &= [y,x^2] = [y,x^{-1}] = c^{x^{-1}} = [x^{-1},y] = [x^2,y] = c^xc && \text{und}\\ [c,c^x] &= 1_G = [c^{x^{-1}},c] = [c^x,c^{x^2}].\end{aligned}$$

Weiter ist mit (5.5) schon

$$c^{y^{-1}x^{-1}} = (c^{y^{-1}})^{x^{-1}} = ([x,y^{-1}])^{x^{-1}} = [x\cdot x^{-1},y^{-1}][x^{-1},y^{-1}]^{-1} = [x^{-1},y^{-1}]^{-1}$$

eine Involution und damit gilt $[x^{-1},y^{-1}]^{-1} = c^{y^{-1}x^{-1}} = [x^{-1},y^{-1}]$. Wir betrachten nun $D = [\langle x\rangle,\langle y\rangle]$. Mit 1.5.5 in [KuSt] ist D ein Normalteiler von $G = \langle x,y\rangle$. Weil $c \in D$ gilt und G einfach ist, folgt bereits $D = G$. Da $o(x) = o(y) = 3$ ist, erhalten wir aus den bisherigen Betrachtungen

$$\begin{aligned}D &= \left\langle [x^k,y^j] \,\middle|\, k,j \in \{0,1,2\}\right\rangle\\ &= \langle [x,y],[x^{-1},y],[x,y^{-1}],[x^{-1},y^{-1}]\rangle\\ &= \langle c,c^{x^{-1}},c^{y^{-1}},c^{y^{-1}x^{-1}}\rangle.\end{aligned}$$

Sei $U := \langle c^{x^{-1}},c^{y^{-1}}\rangle$. Wegen $[c,c^{x^{-1}}] = 1_G = [c,c^{y^{-1}}]$ zuvor gilt $U \leqslant C$, also auch $c \in N_G(U)$. Ferner ist schon $c^{y^{-1}x^{-1}} = c^{x^{-1}y^{-1}}$, weil $y^{-1}x^{-1} = [y,x]x^{-1}y^{-1}$ und $[y,x] = c$ gilt. Weiter erhalten wir

$$\begin{aligned}1_G &= [c^{y^{-1}},c] = [c^{y^{-1}},c]^{x^{-1}} = [c^{y^{-1}x^{-1}},c^{x^{-1}}] && \text{und}\\ 1_G &= [c^{x^{-1}},c] = [c^{x^{-1}},c]^{y^{-1}} = [c^{x^{-1}y^{-1}},c^{y^{-1}}] = [c^{y^{-1}x^{-1}},c^{y^{-1}}].\end{aligned}$$

Damit folgt $c^{y^{-1}x^{-1}} \in C_G(c^{x^{-1}}) \cap C_G(c^{y^{-1}}) \leqslant N_G(U)$. Nun ist $D \leqslant N_G(U)$ und wir folgern $1 \neq U = \langle c^{x^{-1}},c^{y^{-1}}\rangle \trianglelefteq D = G$. Aus der Einfachheit von G folgt $U = G$. Jedoch ist U durch zwei Involutionen erzeugt und damit eine Diedergruppe, ein Widerspruch. Daher ist l im Fall $\mathfrak{g}_0 = 1$ nicht realisierbar. ■

Lemma 5.76
Seien $G = \mathrm{PSL}_2(7)$ und $l = [G,\mathfrak{g},1 \mid [2,1],[4,2]]$ ein HD. Dann ist l realisierbar.

Beweis
Sei $\widetilde{\mathfrak{g}} \in \mathbb{N}$ so, dass $\widetilde{l} := [G,\widetilde{\mathfrak{g}},1 \mid [4,2]]$ ein HD ist. Mit Lemma 5.68 ist $\widetilde{l}$ realisierbar und wir wählen eine Realisierung $((a),(b),(x,y))$ für $\widetilde{l}$. Mit Definition 5.2 folgt $o(x) = 4$, $o(y) = 4$, $1_G = [a,b]xy$ und $\langle a,b,x,y\rangle = G$. Ferner ist x^2 eine Involution, $o(x^{-1}) = 4$ und es gilt $x = x^2 \cdot x^{-1}$. Nun ist $((a),(b),(x^2,x^{-1},y))$ eine Realisierung für l. ■

Lemma 5.77
Seien $G = \mathrm{PSL}_2(7)$ sowie $\mathfrak{g}_0 \in \mathbb{N}_0$, $n \in \{1,2\}$ und $m \in \{0,1,2\}$ so, dass $n+m \in \{2,3,4\}$ und $l = [G,\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0 \mid [2,1],[3,n],[4,m]]$ ein HD ist. Sei $\mathfrak{g}_0 = 1$, falls $n+m = 2$ gilt. Andernfalls sei $\mathfrak{g}_0 = 0$. Dann ist l realisierbar.

Beweis
Sei $\widetilde{\mathfrak{g}} \in \mathbb{N}$ so, dass $\widetilde{l} := [G,\widetilde{\mathfrak{g}},\mathfrak{g}_0 \mid [3,n],[4,m]]$ ein HD ist. Mit Lemma 5.68 ist $\widetilde{l}$ realisierbar und wir wählen $((a_1,\dots,a_{\mathfrak{g}_0}),(b_1,\dots,b_{\mathfrak{g}_0}),(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m))$ als eine Realisierung für $\widetilde{l}$. Mit Definition 5.2 ist für alle $i \in \{1,\dots,n\}$ und alle $j \in \{1,\dots,m\}$ dann $o(x_i) = 3$, $o(y_j) = 4$, $1_G = [a_1,b_1]\cdots[a_{\mathfrak{g}_0},b_{\mathfrak{g}_0}]x_1x_2\cdots x_ny_1y_2\cdots y_m$ und

$$\langle a_1,\dots,a_{\mathfrak{g}_0},b_1,\dots,b_{\mathfrak{g}_0},x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m\rangle = G.$$

Da nach Voraussetzung $n \neq 0$ ist, seien $K_1 := (x_1)^G$ und K_2 eine G-Konjugiertenklasse von Involutionen. Unter Verwendung der Charaktertafel von G in [Atl] ermitteln wir $d_{211} = 12$ mit Lemma 5.14. Damit gibt es Elemente $u \in K_2$ und $v \in K_1$ so, dass $x = uv$ gilt. Nun folgt $o(u) = 2$, $o(v) = 3$ und $x_1 \in \langle u,v\rangle$. Da $((a_1,\dots,a_{\mathfrak{g}_0}),(b_1,\dots,b_{\mathfrak{g}_0}),(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m))$ eine Realisierung für $\widetilde{l}$ ist, ist nun $((a_1,\dots,a_{\mathfrak{g}_0}),(b_1,\dots,b_{\mathfrak{g}_0}),(u,v,x_2,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m))$ eine Realisierung für l. ■

Lemma 5.78
Seien $G = \mathrm{PSL}_2(7)$ und $l = [G,\mathfrak{g},0 \mid [2,1],[3,1],[4,1],[7,1]]$ ein HD. Dann ist l realisierbar.

Beweis
Sei $\widetilde{\mathfrak{g}} \in \mathbb{N}$ so, dass $\widetilde{l} := [G,\widetilde{\mathfrak{g}},0 \mid [2,1],[4,1],[7,1]]$ ein HD ist. Mit Lemma 5.72 ist $\widetilde{l}$ realisierbar und wir wählen eine Realisierung $((),(),(x,y,z))$ für $\widetilde{l}$. Dann gilt $o(x) = 2$, $o(y) = 4$, $o(z) = 7$, $1_G = xyz$ und $\langle x,y,z\rangle = G$ mit Definition 5.2.

Seien $K_1 = y^G$ und K_2 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 3. Unter Verwendung der Charaktertafel von G in [Atl] erhalten wir $d_{211} = 16$ mit Lemma 5.14. Dann gibt es $a \in K_2$ und $b \in K_1$ so, dass $y = ab$ gilt. Nun ist $((),(),(x,a,b,z))$ eine Realisierung für l. ■

Lemma 5.79
Seien $G = \mathrm{PSL}_2(7)$ und $n,m \in \{0,1\}$ so, dass $l = [G,\mathfrak{g},0 \mid [2,n],[3,m],[4,2],[7,1]]$ ein HD ist und $n+m \geq 1$ gilt. Dann ist l realisierbar.

Beweis
Sei $\tilde{\mathfrak{g}} \in \mathbb{N}$ so, dass $\tilde{l} := [G, \mathfrak{g}, 0 \mid [2,n], [3,m], [4,1], [7,1]]$ ein HD ist. Ist $n+m=1$, so ist $\tilde{l}$ mit Lemma 5.72 realisierbar, andernfalls mit Lemma 5.78. Wegen der Realisierbarkeit von $\tilde{l}$ seien $a,b,c,d \in G$ so, dass $o(c) = 4$, $o(d) = 7$, $1_G = abcd$ und $\langle a,b,c,d \rangle = G$ gilt. Ist $n = 1$, so sei $o(a) = 2$ und andernfalls $a = 1_G$. Ist $m = 1$, so sei $o(b) = 3$ und andernfalls $b = 1_G$. Dann ist $((),(),(a,b,c,d))$ eine Realisierung für $\tilde{l}$ (wir lassen a oder b in dem Tripel $((),(),(a,b,c,d))$ weg, falls einer dieser beiden 1_G ist).

Sei $K_1 = c^G$. Mit der Charaktertafel von G in [Atl] und Lemma 5.14 erhalten wir $d_{111} = 16$. Dann gibt es $x,y \in K_2$ so, dass $xy = c$ gilt. Nun ist das Tripel $((),(),(a,b,x,y,d))$ eine Realisierung für l, da $((),(),(a,b,c,d))$ eine Realisierung für $\tilde{l}$ ist. ■

Lemma 5.80
Seien $G = \mathrm{PSL}_2(7)$ sowie $n \in \{0,1\}$ und $m \in \{0,1,2\}$ so, dass $n+m \geq 1$ gilt und $l = [G, \mathfrak{g}, 0 \mid [2,n], [3,2], [4,m], [7,1]]$ ein HD ist. Dann ist l realisierbar.

Beweis
Sei $\tilde{\mathfrak{g}} \in \mathbb{N}$ so, dass $\tilde{l} := [G, \mathfrak{g}, 0 \mid [2,n], [3,1], [4,m], [7,1]]$ ein HD ist. Ist $n+m=1$, so ist $\tilde{l}$ mit Lemma 5.72 realisierbar. Ist $(n,m) = (1,1)$, so ist $\tilde{l}$ mit Lemma 5.78 realisierbar. In den verbliebenen zwei Fällen ist l mit Lemma 5.79 realisierbar. Die Behauptung folgt nun aus Lemma 5.21 auf das RHD $\tilde{l}$ angewendet, da 3 ungerade ist. ■

Lemma 5.81
Es sei $l := [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1,n_1], \ldots, [m_r,n_r]]$ ein HD aus Zeile 7 der Tabelle 4.1 in Voraussetzung 4.21. Ist $l \neq [G, \mathfrak{g}, 1 \mid [2,1]]$, so ist l realisierbar.

Beweis
Da l ein Hurwitzdatum aus der Zeile 7 der Tabelle 4.1 von Voraussetzung 4.21 ist, gilt $G \cong \mathrm{PSL}_2(7)$.

Sei $l \neq [G, \mathfrak{g}, 1 \mid [2,1]]$ und so, dass $\mathfrak{g}_0 \geq 0$ minimal ist. Aus der Minimalität von $\mathfrak{g}_0$ folgt mit den Lemmata 5.68 bis 5.73 und 5.75 bis 5.80 die Realisierbarkeit von l. Die Behauptung erhalten wir durch Anwendung von Lemma 5.20. ■

Mit Lemma 5.81 haben wir die Untersuchung der Realisierbarkeit der Hurwitzdaten aus der Zeile 7 von Tabelle 4.1 abgeschlossen. Wir gehen jetzt zu den Hurwitzdaten aus der Zeile 8 von Tabelle 4.1 in Voraussetzung 4.21 über. Wie auch im Abschnitt zuvor zu $\mathrm{PSL}_2(q)$ für Primzahlpotenzen $q \geq 9$ oder zu $\mathrm{PSL}_2(7)$ geben wir zunächst eine Tabelle zur Übersicht an, welches dieser Hurwitzdaten in welchem der nachfolgenden Lemmata auf Realisierbarkeit überprüft wird, sowie eine Bemerkung mit den wichtigsten Informationen zu $\mathrm{PSL}_2(8)$.

Hurwitzdatum	Lemma	Hurwitzdatum	Lemma
$[G, \mathfrak{g}, 1 \mid [2,1]]$	5.84	$[G, \mathfrak{g}, 0 \mid [2,1], [7,2]]$	5.85
$[G, \mathfrak{g}, 2 \mid [2,1]]$	5.88	$[G, \mathfrak{g}, 0 \mid [2,1], [7,1], [9,1]]$	5.86
$[G, \mathfrak{g}, 1 \mid [7,1]]$	5.83	$[G, \mathfrak{g}, 0 \mid [2,1], [9,2]]$	5.85
$[G, \mathfrak{g}, 1 \mid [9,1]]$	5.83	$[G, \mathfrak{g}, 0 \mid [7,2], [9,1]]$	5.83
$[G, \mathfrak{g}, 1 \mid [2,1], [7,1]]$	5.87	$[G, \mathfrak{g}, 0 \mid [7,1], [9,2]]$	5.83
$[G, \mathfrak{g}, 1 \mid [2,1], [9,1]]$	5.87	$[G, \mathfrak{g}, 0 \mid [2,1], [7,2], [9,1]]$	5.87
$[G, \mathfrak{g}, 1 \mid [7,2]]$	5.83	$[G, \mathfrak{g}, 0 \mid [2,1], [7,1], [9,2]]$	5.87
$[G, \mathfrak{g}, 1 \mid [7,1], [9,1]]$	5.83	$[G, \mathfrak{g}, 0 \mid [7,2], [9,2]]$	5.83
$[G, \mathfrak{g}, 1 \mid [9,2]]$	5.83	$[G, \mathfrak{g}, 0 \mid [2,1], [7,2], [9,2]]$	5.87

Tabelle 5.3: Übersicht zur Realisierbarkeit von Ausnahme-Hurwitzdaten aus Zeile 8 von Tabelle 4.1 in Voraussetzung 4.21, wobei $G \cong \mathrm{PSL}_2(8)$ gilt.

Bemerkung 5.82
Sei $G = \mathrm{PSL}_2(8)$. Mit [Atl] können wir folgendes festhalten:

(i) G hat Ordnung $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ und die Elemente von G haben Ordnung 1, 2, 3, 7 oder 9. Es gibt nur jeweils eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 2 und 3. Es gibt jeweils genau drei G-Konjugiertenklassen von Elementen der Ordnung 7 und 9.
Ist $x \in G$ von Ordnung 7 oder 9, so sind x^G, $(x^2)^G$ und $(x^4)^G$ die paarweise verschiedenen Konjugiertenklassen von Elementen der Ordnung $o(x)$. Ferner sind x und x^{-1} konjugiert in G.
G besitzt jeweils genau eine Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen der Ordnung 2, 3, 7 und 9.

(ii) Es gibt drei G-Konjugiertenklassen von maximalen Untergruppen. Eine davon besteht aus Frobeniusgruppen der Ordnung 56 mit jeweils einem Frobeniuskern der Ordnung 8. Diese sind die Normalisatoren von Sylow 2-Untergruppen von G.
Die anderen zwei Konjugiertenklassen bestehen aus Diedergruppen der Ordnung 14 oder 18, welche die Normalisatoren der Sylow 7-Untergruppen bzw. der Sylow 3-Untergruppen von G sind.

(iii) Die Sylow 2-Untergrupen von G sind elementarabelsch von Ordnung 8 und sind gleichzeitig die Involutionenzentralisatoren. Die Sylow 3-Untergruppen und Sylow 7-Untergruppen sind zyklisch von Ordnung 9 bzw. 7. Für alle $p \in \{2,3,7\}$ gilt, dass sich je zwei Sylow p-Untergruppen nur trivial schneiden (siehe die Sätze II.8.2 bis II.8.4 in [Hup1]).

(iv) G besitzt keine Untergruppe, deren Ordnung durch $7 \cdot 3$ teilbar ist. Andernfalls hätte G eine maximale Untergruppe, die dies erfüllen würde.

Lemma 5.83
Seien $G \cong \mathrm{PSL}_2(8)$ *und* $l := [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [7, n_1], [9, n_2]]$ *ein HD. Für alle* $i \in \{1,2\}$ *sei* $n_i \in \{0,1,2\}$ *und es gelte* $1 \leq n_1 + n_2 \leq 4$. *Gilt* $n_1 + n_2 \geq 3$, *so sei* $\mathfrak{g}_0 = 0$. *Andernfalls sei* $\mathfrak{g}_0 = 1$. *Dann ist* l *realisierbar.*

Beweis
Die Lemmata 5.34 und 5.36 liefern die Behauptung. ■

Lemma 5.84
Das HD $l := [\mathrm{PSL}_2(8), \mathfrak{g}, 1 \mid [2,1]]$ *ist nicht realisierbar.*

Beweis
Angenommen, es sei l realisierbar. Seien $G = \mathrm{PSL}_2(8)$ und $((a),(b),(c))$ eine Realisierung für l. Dann gilt $o(c) = 2$, $1_G = [a,b]c$ und $\langle a,b,c \rangle = G$ nach Definition 5.2. Da c eine Involution ist, folgt $[b,a] = c = c^{-1} = [a,b]$. Ferner ist $c \in \langle a,b \rangle$ und damit $\langle a,b \rangle = G$.

Seien $K_1 = a^G$, $K_2 = (a^{-1})^G$ und $K_3 = c^G$. Wir untersuchen, welche Elementordnungen a und b annehmen können. Da $[a,b] = [b,a]$ gilt, können wir die Rollen von a und b vertauschen und wegen $[a,b] = a^{-1}a^b$ genügt eine Untersuchung der möglichen Ordnung von a. Wir können festhalten, dass $o(a) \neq 1$ ist, da sonst $c = [a,b] = 1_G$ wäre, im Widerspruch zu $o(c) = 2$. Ferner sind a und b nicht gleichzeitig von Ordnung 2, da G sonst eine Diedergruppe wäre.

Angenommen, a habe Ordnung 3 oder 9. Mit der Charaktertafel von G in [Atl] gilt dann $K_1 = K_2$ und Lemma 5.14 liefert $d_{213} = 0$. Aus $1_G = [a,b]c = a^{-1}a^bc$ sowie $a^{-1} \in K_2$, $a^b \in K_1$ und $K_1 = K_2$ erhalten wir jedoch $d_{213} \neq 0$ mit Lemma 5.13, ein Widerspruch zur Annahme $o(a) \in \{3,9\}$.

Somit hat a oder b Ordnung 7 nach Bemerkung 5.82 (*i*). Da $[a,b] = [b,a]$ gilt, können wir o.B.d.A. $o(a) = 7$ annehmen. Mit [Atl] ist $K_1 = K_2$. Weil $c \in G$ eine Involution ist, seien $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$ und $N := N_G(S)$ so, dass $c \in S$ gilt. Mit Bemerkung 5.82 (*iii*) ist S die einzige Sylow 2-Untergruppe von G, die c enthält. Weiter ist N eine maximale Untergruppe von G und eine Frobeniusgruppe isomorph zu $(C_2)^3 : C_7$ mit Frobeniuskern S.

Sei $M := \{(y,z) \in (K_1 \cap N)^2 \mid yz = c\}$. Wir zeigen zunächst, dass $|M| = 16$ ist. Gilt $y \in K_1 \cap N$, so ist $y^{-1} \in K_1 \cap N$ und es ist $K_1 \cap N = y^N \dot\cup (y^{-1})^N$. Mit Lemma 5.48 folgt $y^N = Sy \in N/S$ und $(y^{-1})^N = Sy^{-1} \in N/S$. Damit erhalten wir

$$\left|y^N\right| = \left|(y^{-1})^N\right| = |Sy| = |S| = 8.$$

Nun ist $|K_1 \cap N| = 16$. Ist $z \in K_1 \cap N$ beliebig, so folgt $cz^{-1} \in Sz^{-1}$, $o(cz^{-1}) = 7$ und cz^{-1} ist konjugiert zu z^{-1} mit Lemma 5.48. Ferner gilt $cz^{-1}z = c$ und somit auch $(cz^{-1}, z) \in M$. Da $z \in K_1 \cap N$ beliebig ist, folgt nun $|M| \geq 16$. Gilt $(y_1, \widetilde{z}), (y_2, \widetilde{z}) \in M$, so erhalten wir $y_1 = y_2$ und damit $|M| = 16$.

Unter Verwendung der Charaktertafel von G in [Atl] liefert Lemma 5.14 den Wert $d_{213} = 16$. Dann gibt es $y, z \in K_1 = K_2$ so, dass $yz = c$ gilt. Aus der Definition von M und wegen $|M| = 16$ folgt nun $y, z \in N$. Weil $c = [a,b] = a^{-1}a^b$ mit (RHD2) für l gilt, ist insbesondere $(a^{-1}, a^b) \in M$ und $a, a^b \in N$.

Seien $K := \{(x,y) \in K_1 \times G \mid [x,y] = c\}$ und $K_N := K \cap (K_1 \times N)$. Mit Lemma 5.16 ist $|K| = 16 \cdot 7$. Ferner gilt auch $|K_N| = 16 \cdot 7$ mit demselben Lemma, da $K_1 \cap N$ in zwei N-Konjugiertenklassen zerfällt und die Zentralisatorordnung eines Elements der Ordnung 7 in G und in N jeweils 7 ist. Somit ist $K = K_N$ und es folgt $(a,b) \in K = K_N$. Nun ist also $b \in N$ nach Wahl von K_N. Ferner ist $a \in N$ wegen $|M| = d_{213}$ und $(a^{-1}, a^b) \in M$. Daher folgt $G = \langle a,b \rangle = N$, ein Widerspruch zur Annahme. ■

Lemma 5.85
Seien $G = \mathrm{PSL}_2(8)$ *und* $n \in \{7,9\}$ *so, dass* $l := [G, \mathfrak{g}, 0 \mid [2,1], [n,2]]$ *ein HD ist. Dann ist* l *realisierbar.*

Beweis
Mit der Charaktertafel von G in [Atl] seien K_1 eine G-Konjugiertenklasse von Involutionen sowie K_2 und K_3 zwei verschiedene G-Konjugiertenklassen von Elementen der Ordnung n. Lemma 5.14 liefert $d_{123} = n$ unter Verwendung der Charaktertafel von G in [Atl]. Dann gibt es $x \in K_1$, $y \in K_2$ und $z \in K_3$ so, dass $xy = z$ gilt. Nun ist $1_G = xyz^{-1}$ und das Tripel $((), (), (x, y, z^{-1}))$ erfüllt (RHD1) und (RHD2) für l. Sei $T := \langle x, y, z^{-1} \rangle$. Gilt $T = G$, so ist auch (RHD3) für l und das Tripel $((), (), (x, y, z^{-1}))$ erfüllt.

Angenommen, es gelte $T \neq G$. Dann gibt es eine maximale Untergruppe U von G so, dass $T \leqslant U$ ist. Ferner werden $|T|$ und $|U|$ von $\mathrm{kgV}(o(x), o(y)) = 2n$ geteilt. Mit Bemerkung 5.82 (*ii*) ist U eine Diedergruppe der Ordnung $2n$ oder U ist der Normalisator einer Sylow 2-Untergruppe und es gilt $n = 7$.

Angenommen, es sei U eine Diedergruppe der Ordnung $2n$. Dann folgt $U = T$ aus Ordnungsgründen und U hat einen zyklischen Normalteiler I vom Index 2 und von ungerader Ordnung n. Weiter gilt $y, z \in I$ und somit auch $x^{-1} = yz^{-1} \in I$, ein Widerspruch zu $o(x) = 2$.

Also ist U der Normalisator einer Sylow 2-Untergruppe von G und es gilt $n = 7$. Sei $C := C_G(x)$. Dann ist $C \in \mathrm{Syl}_2(G)$ und es gilt $U = N_G(C)$ mit den Teilen (*ii*) und (*iii*) der Bemerkung 5.82. Wir betrachten U/C. Es ist $Cy \neq Cz$ mit Lemma 5.48, da nach Wahl y^G und z^G verschieden sind. Jedoch ist $x = yz^{-1}$, also

$$C = Cx = Cyz^{-1} = Cy \cdot Cz^{-1}.$$

Damit gilt $Cy = Cz$, der finale Widerspruch. ■

Lemma 5.86
Sei $G = \mathrm{PSL}_2(8)$. *Dann ist das HD* $l := [G, \mathfrak{g}, 0 \mid [2,1], [7,1], [9,1]]$ *realisierbar.*

Beweis
Mit der Charaktertafel von G in [Atl] seien K_1 eine G-Konjgiertenklasse von Involutionen und K_2 bzw. K_3 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 7 bzw. 9. Mit Lemma 5.14 ist $d_{123} = 9$ unter Verwendung der Charaktertafel von G

in [Atl]. Damit gibt es $x \in K_1$, $y \in K_2$ und $z \in K_3$ so, dass $xy = z$ gilt. Nun ist $1_G = xyz^{-1}$ und $\mathrm{kgV}(2,7,9)$ ist ein Teiler von $\langle x,y,z^{-1}\rangle$. Mit Bemerkung 5.82 (*iv*) ist das Tripel $((),(),(x,y,z^{-1}))$ eine Realisierung für l. ■

Lemma 5.87
Seien $G = \mathrm{PSL}_2(8)$, $\mathfrak{g}_0 \in \{0,1\}$ und $n,m \in \{0,1,2\}$ so, dass $n+m \in \{1,3,4\}$ und $l := [G,\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0 \mid [2,1],[7,n],[9,m]]$ ein HD ist. Sei weiter $g_0 = 0$, falls $n+m \geq 3$ gilt. Andernfalls sei $\mathfrak{g}_0 = 1$. Dann ist l realisierbar.

Beweis
Sei $\widetilde{\mathfrak{g}}$ so, dass $\widetilde{l} := [G,\widetilde{\mathfrak{g}},\mathfrak{g}_0 \mid [7,n],[9,m]]$ ein HD ist. Mit Lemma 5.83 ist $\widetilde{l}$ realisierbar und wir wählen $a_1,\dots,a_{\mathfrak{g}_0},b_1,\dots,b_{\mathfrak{g}_0} \in G$ sowie $x_1,\dots,x_n \in G$ von Ordnung 7 und $y_1,\dots,y_m \in G$ von Ordnung 9 so, dass

$$((a_1,\dots,a_{\mathfrak{g}_0}),(b_1,\dots,b_{\mathfrak{g}_0}),(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m))$$

eine Realisierung für $\widetilde{l}$ ist. Nach Definition 5.2 gilt dann

$$1_G = \prod_{i=1}^{\mathfrak{g}_0}[a_i,b_i]\cdot x_1\cdots x_n\cdot y_1\cdots y_m$$

und $G = \langle a_1,\dots,a_{\mathfrak{g}_0},b_1,\dots,b_{\mathfrak{g}_0},x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m\rangle$.

Sei K_1 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 2. Ist $n \geq 1$, so seien $K_2 := {x_1}^G$ und $K_3 := ({x_1}^2)^G$. Andernfalls seien $K_2 := {y_1}^G$ und $K_3 := ({y_1}^2)^G$, da nach Voraussetzung dann $m \geq 1$ gilt. Mit Bemerkung 5.82 (*i*) sind K_2 und K_3 verschieden und sie enthalten Elemente derselben Ordnung. Mit Lemma 5.14 ist $d_{132} = 7$, falls $n \geq 1$ gilt, bzw. $d_{132} = 9$, falls $n = 0$ gilt. Dann gibt es $t \in K_1$ und $v \in K_3$ so, dass $tv = x_1$ im Fall $n \geq 1$ bzw. $tv = y_1$ im Fall $n = 0$ gilt. Nun ist das Tripel $((a_1,\dots,a_{\mathfrak{g}_0}),(b_1,\dots,b_{\mathfrak{g}_0}),(t,v,x_2,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m))$ eine Realisierung für l, falls $n \geq 1$ gilt, bzw. das Tripel $((a_1,\dots,a_{\mathfrak{g}_0}),(b_1,\dots,b_{\mathfrak{g}_0}),(t,v,y_2,\dots,y_m))$ ist eine Realisierung für l, falls $n = 0$ gilt. ■

Lemma 5.88
Sei $G = \mathrm{PSL}_2(8)$. Dann ist das HD $l := [G,\mathfrak{g},2 \mid [2,1]]$ realisierbar.

Beweis
Sei $\widetilde{\mathfrak{g}}$ so, dass $\widetilde{l} := [G,\widetilde{\mathfrak{g}},1 \mid [2,1],[7,1]]$ ein HD ist. Mit Lemma 5.87 ist $\widetilde{l}$ realisierbar und wir wählen eine Realisierung $((a),(b),(x,y))$ für $\widetilde{l}$. Dann gilt nach Definition 5.2 $o(x) = 2$, $o(y) = 7$, $1_G = [a,b]xy$ und $\langle a,b,x,y\rangle = G$.

Seien $K_1 := x^G$ und $K_2 := y^G$. Da x eine Involution ist, gilt $K_1 = (x^{-1})^G$. Unter Verwendung der Charaktertafel von G in [Atl] erhalten wir $d_{112} = 7$ mit Lemma 5.14. Dann gibt es $t,g \in K_1$ so, dass $tg = y$ gilt. Da $g = g^{-1}$ ist, gibt es ein $h \in G$ so, dass $t = g^h$ gilt. Nun ist $y = tg = g^h g = [h,g]$. Weil $((a),(b),(x,y))$ eine Realisierung für $\widetilde{l}$ ist sowie $y \in \langle g,h\rangle$ und $1_G = [a,b]xy = y[a,b]x = [h,g][a,b]x$ gilt, ist nun $((h,a),(g,b),(x))$ eine Realisierung für l. ■

Lemma 5.89
Es sei $l := [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1, n_1], \ldots, [m_r, n_r]]$ *ein HD in der Zeile 8 von Tabelle 4.1 in Voraussetzung 4.21. Ist* $l \neq [G, \mathfrak{g}, 1 \mid [2,1]]$*, so ist* l *realisierbar.*

Beweis
Da l ein Hurwitzdatum aus der Zeile 8 von Tabelle 4.1 in Voraussetzung 4.21 ist, gilt $G = \mathrm{PSL}_2(8)$. Nun liefern die Lemmata 5.83 bis 5.88 in Kombination mit Lemma 5.20 die Behauptung. ■

Damit haben wir die Untersuchung der HD $l := [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1, n_1], \ldots, [m_r, n_r]]$ aus Voraussetzung 4.21 abgeschlossen, in denen G eine lineare Gruppe von Dimension 2 ist. Wir müssen nun noch solche Hurwitzdaten l untersuchen, in denen G eine der Gruppen $\mathrm{PSL}_3(4)$, $\mathrm{PSL}_4(3)$, $\mathrm{PSL}_4(5)$ oder $\mathrm{PSU}_4(3)$ ist.

Lemma 5.90
Seien $G = \mathrm{PSL}_3(4)$ *sowie* $n \in \{0,1,2\}$, $m \in \{0,1\}$ *und* $l := [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [5,n], [7,m]]$ *ein HD. Weiter sei* $\mathfrak{g}_0 = 0$*, falls* $n + m \geq 3$ *gilt. Andernfalls sei* $\mathfrak{g}_0 = 1$*. Dann ist* l *realisierbar.*

Beweis
Seien K_1 bzw. K_2 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 5 bzw. 7. Unter Verwendung der Charaktertafel von G in [Atl] ergeben sich $d_{121} = 585$ und $d_{212} = 567$ mit Lemma 5.14.

Mit der Liste der G-Konjugiertenklassen von maximalen Untergruppen von G in [Atl] sehen wir, dass es keine maximale Untergruppe in G gibt, deren Ordnung durch $\mathrm{kgV}(5,7) = 35$ teilbar ist. Lemma 5.22 liefert nun die Behauptung. ■

Für das nächste Lemma benötigen wir zuerst folgende

Bemerkung 5.91
Seien $\mathbb{F} := \mathrm{GF}(3^2)$, V ein zweidimensionaler $\mathbb{F}$-Vektorraum und $H := \mathrm{PSL}_2(V)$ in der natürlichen Operation auf V. Wir zeigen, dass $C_H(v)$ für alle $v \in V^\#$ kein Element der Ordnung 4 enthält. Seien dazu $\hat{H} := \mathrm{SL}_2(9)$ und $\gamma_1 \in \mathbb{F}^\#$ ein Erzeuger von $\mathbb{F}^\#$. Weiter seien $\gamma_2 := \gamma_1^{-1}$, sowie $\hat{B} = (b_1, b_2)$ eine $\mathbb{F}$-Basis von V und

$$A := \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0_\mathbb{F} \\ 0_\mathbb{F} & \gamma_2 \end{pmatrix}$$

in der Basis $\hat{B}$. Dann gilt $A \in \hat{H}$ und $o(A) = 8$. Unter dem natürlichen Homomorphismus $\varphi\colon \hat{H} \to H$ mit $\mathrm{Kern}(\varphi) = Z(\hat{H})$ hat $a := A^\varphi \in H$ Ordnung 4 und es gilt

$$A^4 = \begin{pmatrix} -1_\mathbb{F} & 0_\mathbb{F} \\ 0_\mathbb{F} & -1_\mathbb{F} \end{pmatrix}.$$

Seien $\{0_{\mathbb{F}^2}\} \neq U \leqslant V$ ein eindimensionaler Teilraum und $v \in V^\#$ so, dass $U = \langle v \rangle$ gilt. Sei zuerst v ein skalares Vielfaches von b_1 oder b_2. Dann gilt für alle $\lambda \in \mathbb{F}$

schon $\lambda vA = \lambda\mu v \in U$ für

$$\mu = \begin{cases} \gamma_1, & \text{falls } v \in \langle b_1 \rangle, \\ \gamma_2, & \text{falls } v \in \langle b_2 \rangle. \end{cases}$$

Damit folgt $a \notin C_H(U)$, da weder γ_1 noch γ_2 genau $1_{\mathbb{F}}$ oder $-1_{\mathbb{F}}$ sind.

Sei nun v kein skalares Vielfaches von b_1 oder b_2. Dann existieren $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}^{\#}$ so, dass $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$ gilt. Dann folgt für alle $\lambda \in \mathbb{F}$ schon

$$\lambda vA = \lambda(\alpha_1 b_1 A + \alpha_2 b_2 A) = \lambda(\alpha_1\gamma_1 b_1 + \alpha_2\gamma_2 b_2).$$

Gilt für alle $\lambda \in \mathbb{F}$ bereits $\lambda vA \in U$, so ist $\lambda\alpha_1\gamma_1 b_1 + \lambda\alpha_2\gamma_2 b_2$ ein skalares Vielfaches von $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$. Dann muss $\gamma_1 = \gamma_2$ und damit $\gamma_1 = \gamma_1^{-1}$ gelten. Nun ist $o(\gamma_1) = 2$, ein Widerspruch zu $\langle\gamma_1\rangle = \mathbb{F}^{\#}$ und $\left|\mathbb{F}^{\#}\right| = 8$.

Daher ist $a \notin C_H(U)$. Da in $H \cong \mathrm{PSL}_2(9)$ mit [Atl] alle Elemente der Ordnung 4 zueinander konjugiert sind, gibt es damit für keinen eindimensionalen Teilraum U von V ein Element der Ordnung 4 in $C_H(U)$.

Lemma 5.92
Seien $G = \mathrm{PSU}_4(3)$ und $x, y \in G$ so, dass $o(x) = 5$ und $o(y) = 12$ gilt. Sei $M \leqslant G$ eine maximale Untergruppe von G und so, dass $x, y \in M$ ist. Dann ist M isomorph zur unitären Gruppe $\mathrm{PSU}_4(2)$.

Beweis
Da $x, y \in M$ gilt, wird $|M|$ von $\mathrm{kgV}(5, 12) = 60$ geteilt. Insbesondere besitzt M nach Voraussetzung ein Element der Ordnung 12. Mit der Liste der G-Konjugiertenklassen von maximalen Untergruppen von G in [Atl] und aus Ordnungsgründen ist M isomorph zu $E_{81} : \mathcal{A}_6$, $\mathrm{PSU}_4(2)$, $\mathrm{PSL}_3(4)$, $E_{16} : \mathcal{A}_6$, $\mathcal{A}_7$ oder M_{10}. Wir werden zeigen, dass von diesen Gruppen nur solche, die isomorph zu $\mathrm{PSU}_4(2)$ sind, Elemente der Ordnung 12 besitzen.

Mit den Charaktertafeln von $\mathrm{PSL}_3(4)$, $\mathcal{A}_7$ und M_{10} in [Atl] gibt es in diesen Gruppen keine Elemente der Ordnung 12. Damit kann M nicht isomorph zu einer dieser drei Gruppen sein.

<u>Schritt 1:</u> *M ist nicht isomorph zu $E_{16} : \mathcal{A}_6$:*

Angenommen, das gelte doch. Dies ist eine zerfallende Erweiterung. Seien $H \leqslant M$ isomorph zu $\mathcal{A}_6$ und $O := O_2(M) \cong E_{16}$. Dann ist $M = OH$ und $|O|_3 = 1$. Also gibt es ein $g \in M$ so, dass $|\langle y\rangle \cap H^g|$ von 3 geteilt wird. Wir können daher H als Komplement von O in M so wählen, dass $g = 1_G$ gilt.

Mit der Charaktertafel von H in [Atl] besitzt H keine Elemente der Ordnung 6 und 12. Daher ist $|\langle y\rangle \cap H| = 3$ und somit gilt $|O \cap \langle y\rangle| = 4$. Da jedoch O elementarabelsch und $O \cap \langle y\rangle$ zyklisch der Ordnung 4 ist, erfolgt ein Widerspruch. □

<u>Schritt 2:</u> *M ist nicht isomorph zu $E_{81} : \mathcal{A}_6$:*

Angenommen, das sei falsch. Wie auch zuvor ist M eine zerfallende Erweiterung. Seien $H \leqslant M$ isomorph zu $\mathcal{A}_6$ und $O := O_3(M)$. Auch hier ist $M = OH$. Mit der

Charaktertafel von H in [Atl] besitzt H keine Elemente der Ordnung 12. Damit ist $\langle y\rangle \cap O \neq 1$ und aus Ordnungsgründen folgt $|\langle y\rangle \cap O| = 3$. Sei also $z \in \langle y\rangle \cap O$ von Ordnung 3. Ferner gilt $y \in C_M(z)$, weil $\langle y\rangle$ zyklisch ist, und $C_M(z)$ enthält das Element y^3 der Ordnung 4. Wegen $|O|_2 = 1$ und $M = OH$ muss y^3 dann in einem M-Konjugierten von H liegen. Das ist mit Bemerkung 5.91 jedoch unmöglich. □

Somit ist nun $M \cong \mathrm{PSU}_4(2)$ und mit der Charaktertafel von G in [Atl] enthält M Elemente der Ordnung 5 und 12. ■

Lemma 5.93
Sei $G = \mathrm{PSU}_4(3)$. *Dann ist das HD* $l := [G, \mathfrak{g}, 1 \mid [5,1]]$ *realisierbar.*

Beweis
Seien K_1 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 5 und K_2 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 12. Unter Verwendung der Charaktertafel von G in [Atl] erhalten wir $d_{221} = 26880$ mit Lemma 5.14. Damit gibt es Elemente $c \in K_1$ und $b, g \in K_2$ so, dass $gb = c$ gilt. Mit der Charaktertafel von G in [Atl] ist $b^{-1} \in K_2$. Dann gibt es ein $a \in G$ so, dass $g = (b^{-1})^a$ gilt. Nun folgt $o(c^{-1}) = 5$ und $1_G = gbc^{-1} = (b^{-1})^a bc^{-1} = [a,b]c^{-1}$, also erfüllt das Tripel $((a),(b),(c^{-1}))$ die Eigenschaften (RHD1) und (RHD2) für l.

Sei $T := \langle a, b, c^{-1}\rangle$. Ist $T = G$ so sind wir fertig. Seien daher $T \neq G$ und M eine maximale Untergruppe von G so, dass $T \leqslant M$ gilt. Wegen $b, c \in T \leqslant M$, enthält M nun Elemente der Ordnung 5 und 12. Mit Lemma 5.92 folgt $M \cong \mathrm{PSU}_4(2)$. Wir wollen Lemma 5.19 anwenden.

Zunächst gibt es mit der Liste der G-Konjugiertenklassen von maximalen Untergruppen von G in [Atl] genau zwei Konjugiertenklassen von maximalen Untergruppen isomorph zu M. Sei daher $U \leqslant G$ so, dass $U \cong M$, $U \notin M^G$ und $c \in U$ gilt. Mit den Charaktertafeln von G und M sowie der Liste der G-Konjugiertenklassen von maximalen Untergruppen von G in [Atl] gilt $|K_1| = \frac{|G|}{|C_G(c)|} = 2^7 \cdot 3^6 \cdot 7$, $\left|c^M\right| = \frac{|M|}{|C_M(c)|} = 2^6 \cdot 3^4$ und $\left|M^G\right| = 126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$. Da nun $\left|M^G\right| \cdot \left|c^M\right| = |K_1|$ gilt und $K_1 \cap M$ nicht in zwei oder mehr M-Konjugiertenklassen zerfällt, liegt c in genau einem G-Konjugierten von M, nämlich in M selbst. Weiter zerfällt $K_2 \cap M$ mit den Charaktertafeln von G und M in [Atl] in zwei M-Konjugiertenklassen, genauer gilt $K_2 \cap M = b^M \dot\cup (b^{-1})^M$.

Seien nun $K_\alpha := K_1 \cap M = c^M$ sowie $K_\beta := b^M$ und $K_\gamma := (b^{-1})^M$. Wir ermitteln

$$d^{(M)}_{\beta\beta\alpha} = d^{(M)}_{\beta\gamma\alpha} = d^{(M)}_{\gamma\beta\alpha} = d^{(M)}_{\gamma\gamma\alpha} = 210$$

mit Hilfe der Charaktertafel von M in [Atl] und Lemma 5.14. Nun folgt

$$4 \cdot d^{(M)}_{\beta\gamma\alpha} = 4 \cdot 210 = 840 < 26880 = d_{221}.$$

Lemma 5.19 liefert, dass wir $(b^{-1})^a$ und b in K_2 so wählen können, dass die Gruppe $\langle (b^{-1})^a, b, c\rangle \leqslant T$ in keinem G-Konjugierten von M liegt.

Da auch $2 \cdot 840 < 26880 = d_{221}$ gilt, können wir dasselbe Resultat für U verwenden und finden $(b^{-1})^a$ und b in K_2 derart, dass $\langle (b^{-1})^a, b, c\rangle \leqslant T$ in keinem G-Konjugierten von M oder U liegt. Mit Lemma 5.92 und der Liste der G-Konjugiertenklassen von maximalen Untergruppen von G sind wir dann fertig. ∎

Lemma 5.94
Seien $G = \mathrm{PSU}_4(3)$ *und* $n \in \{0,1\}$ *so, dass* $l := [G, \mathfrak{g}, 1 \mid [5,n], [7,1]]$ *ein HD ist. Dann ist* l *realisierbar.*

Beweis
Schritt 1: *Sei* $T \leqslant G$ *eine Untergruppe, die Elemente der Ordnung 7 und 9 besitzt. Dann ist* $T = G$*:*

Angenommen, es sei $T \neq G$. Dann gibt es eine maximale Untergruppe $M \leqslant G$ so, dass $T \leqslant M$ gilt. Seien $a, c \in T$ so, dass $o(a) = 9$ und $o(c) = 7$ ist. Da $a, c \in T \leqslant M$ ist, werden $|T|$ und $|M|$ von $\mathrm{kgV}(o(a), o(c)) = \mathrm{kgV}(9,7) = 63$ geteilt. Mit der Liste der G-Konjugiertenklassen von maximalen Untergruppen von G und aus Ordnungsgründen ist M isomorph zu $\mathcal{A}_7$, $\mathrm{PSU}_3(3)$ oder $\mathrm{PSL}_3(4)$. Nun ist $a \in M$ ein Element der Ordnung 9. Mit den Charaktertafeln von $\mathcal{A}_7$, $\mathrm{PSU}_3(3)$ und $\mathrm{PSL}_3(4)$ in [Atl] gibt es in M jedoch kein Element der Ordnung 9, ein Widerspruch. Damit folgt $T = G$. □

Schritt 2: *Realisierbarkeit von* l*:*

Seien K_1 bzw. K_2 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 7 bzw. 9 und K_3 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 5. Unter Verwendung der Charaktertafel von G in [Atl] erhalten wir mit Lemma 5.14 die Werte $d_{121} = 17388$ und $d_{212} = 17253$. Mit Lemma 5.22 und Schritt 1 ist nun l für den Fall $n = 0$ realisierbar.

Für $n = 1$ erhalten wir $d_{312} = 93312$ mit Lemma 5.14 und mit der Charaktertafel von G in [Atl]. Dann gibt es $x \in K_3$, $y \in K_1$ und $g \in K_2$ so, dass $xy = g$ gilt. Sei $K_4 := (y^{-1})^G$. Erneut ergeben sich mit Lemma 5.14 die Werte $d_{412} = 67068$ und $d_{142} = 67068$. Damit gibt es $b, h \in K_1$ so, dass $g = b^{-1}h$ gilt. Ferner existiert ein $a \in G$ so, dass $h = b^a$ ist, da $b, h \in K_1$ gilt.

Nun folgt $1_G = g^{-1}xy = (b^{-1}b^a)^{-1}xy = [b,a]^{-1}xy = [a,b]xy$ sowie $o(x) = 5$ und $o(y) = 7$. Damit erfüllt das Tripel $((a),(b),(x,y))$ (RHD1) und (RHD2) für l im Fall $n = 1$. Betrachte $T := \langle a, b, x, y\rangle$. Da $y \in T$ ein Element der Ordnung 7 und $[a,b] \in T$ ein Element der Ordnung 9 ist, liefert Schritt 1 die Eigenschaft (RHD3) für das Tripel $((a),(b),(x,y))$ für l im Fall $n = 1$. Damit folgt die Behauptung. ∎

Lemma 5.95
Sei $G = \mathrm{PSL}_4(3)$*. Dann ist das HD* $l := [G, \mathfrak{g}, 1 \mid [13,1]]$ *realisierbar.*

Beweis
Wir verwenden die Charaktertafel von G und die Liste der G-Konjugiertenklassen von maximalen Untergruppen von G in [Atl]. Seien K_1 bzw. K_2 eine G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 5 bzw. 13. Mit Lemma 5.14 ist $d_{121} = 23360$ und $d_{212} = 23296$. Die Gruppe G besitzt nach [Atl] keine maximalen Untergruppen, deren

Ordnung durch $\mathrm{kgV}(5,13) = 5 \cdot 13 = 65$ teilbar ist und daher liefert Lemma 5.22 die Behauptung. ■

Für das nächste Lemma sammeln wir ein paar Berechnungen in [GAP] in

Bemerkung 5.96
Berechnung der Werte d_{121} und d_{212} in [GAP], wobei $G = \mathrm{PSL}_4(5)$ und K_1 bzw. K_2 Konjugiertenklassen von Elementen der Ordnung 13 bzw. 31 in G sind:

Falls nötig, muss vor folgendem GAP-Code das Paket `ctbllib` geladen werden.

```
gap> tbl:=CharacterTable("L4(5)");;
gap> ord:=OrdersClassRepresentatives(tbl);;
gap> Positions(ord,13);
> [ 24, 25, 26 ]
gap> i:=Random(last);;
gap> Positions(ord,31);
> [ 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43 ]
gap> j:=Random(last);
gap> ClassMultiplicationCoefficient( tbl, i, j, i); # für d_121
> 6000384
gap> ClassMultiplicationCoefficient( tbl, j, i, j); # für d_212
> 5999616
```

Das liefert $d_{121} = 6000384$ und $d_{212} = 5999616$.

Ermittlung der maximalen Untergruppen von $\mathrm{PSL}_4(5)$ in [GAP], deren Ordnungen durch $13 \cdot 31$ teilbar sind:

```
gap> G := PSL(4,5);;
gap> cm := ConjugacyClassesMaximalSubgroups(G);;
gap> # Ordnungen der maximalen Untergruppen
gap> cmo := List( cm, i -> Order( Representative( i ) ) );
> [ 46500000, 9000000, 46500000, 28800, 46800, 5760, 5760,
  4680000, 4680000, 14400, 14400, 15600, 15600 ]
gap> # Liste derjenigen Ordnungen, die durch 13*31 teilbar sind
gap> Filtered( cmo, i-> IsInt(i / (13*31)) );
> [ ]
```

Das heißt, dass $\mathrm{PSL}_4(5)$ keine maximale Untergruppe besitzt, deren Ordnung durch $13 \cdot 31$ teilbar ist.

Lemma 5.97
Sei $G = \mathrm{PSL}_4(5)$. Dann ist das HD $l := [G, \mathfrak{g}, 1 \mid [31, 1]]$ realisierbar.

Beweis
Es ist $|G| = \frac{5^6 \cdot (25-1) \cdot (125-1) \cdot (625-1)}{4} = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^6 \cdot 13 \cdot 31$. Nun sind alle zyklischen Untergruppen der Ordnung 13 bzw. 31 in G konjugiert. Seien K_1 bzw. K_2 eine

G-Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung 13 bzw. 31. Unter Verwendung der Charaktertafel von G, die mit [GAP] erreichbar ist (siehe Bemerkung 5.96), liefert Lemma 5.14 die Werte $d_{121} = 6000384$ und $d_{212} = 5999616$. Mit weiteren Berechnungen in [GAP] (siehe Bemerkung 5.96) hat G keine maximale Untergruppe, deren Ordnung durch $\mathrm{kgV}(13,31) = 13 \cdot 31 = 403$ teilbar ist. Lemma 5.22 liefert nun die Behauptung. ■

Lemma 5.98
Es sei $l := [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1, n_1], \ldots, [m_r, n_r]]$ *ein HD aus den Zeilen 7 bis 12 der Tabelle 4.1 von Voraussetzung 4.21. Falls nicht* $l = [\mathrm{PSL}_2(k), \mathfrak{g}, 1 \mid [2,1]]$ *und* $k \in \{7,8\}$ *gilt, dann ist* l *realisierbar.*

Beweis
Die Behauptung folgt aus den Lemmata 5.81, 5.89, 5.90, 5.93 bis 5.97 und 5.20. ■

5.7 Zusammenfassung

Wir fassen die Ergebnisse dieses Kapitels mit Satz 4.22 zusammen:

Satz 5.99
Seien G *einfach und nicht-abelsch sowie* $l := [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1, n_1], \ldots, [m_r, n_r]]$ *ein HD. Dann gilt:*

(i) Falls Voraussetzung 4.21 gilt und nicht gleichzeitig $l = [G, \mathfrak{g}, 1 \mid [2,1]]$ *und* G *eine der Gruppen* $\mathcal{A}_5$, $\mathrm{PSL}_2(7)$ *oder* $\mathrm{PSL}_2(8)$ *ist, dann ist* l *ein realisierbares AHD.*

(ii) Falls l *ein realisierbares AHD ist, dann ist* l *unter Vermutung 3.16 wie in Voraussetzung 4.21 und für alle* $k \in \{5,7,8\}$ *gilt* $l \neq [\mathrm{PSL}_2(k), \mathfrak{g}, 1 \mid [2,1]]$.

Beweis
Zuerst gelte Voraussetzung 4.21. Nach Satz 4.22 ist dann l ein AHD und mit Lemmata 5.28, 5.32, 5.66 und 5.98 folgt die Behauptung (i) des Satzes.

Sei umgekehrt l ein RAHD. Dann ist l insbesondere ein AHD und realisierbar. Unter Vermutung 3.16 liefert Satz 4.22 zusammen mit den Lemmata 5.28, 5.32, 5.66 und 5.98 die Behauptung (ii) des Satzes. ■

6 Sicherheit von Ausnahme-Hurwitzdaten

Im letzten Abschnitt haben wir die Realisierbarkeit der Ausnahme-Hurwitzdaten aus Voraussetzung 4.21 untersucht und konnten zeigen, dass bis auf ein paar Sonderfälle ein solches HD aus dieser Voraussetzung realisierbar ist. In diesem Abschnitt wollen wir erneut auf die Fixität von Gruppen auf RF-Mengen eingehen. Genauer wollen wir die realisierbaren AHD aus Voraussetzung 4.21 (siehe dazu Satz 5.99) und die zugehörigen RF-Mengen auf globale Fixität 4 überprüfen. Warum das nötig ist, wird am folgenden Beispiel deutlich.

Beispiel 6.1
Seien $G \cong \mathrm{PSL}_2(7)$ *und* $\mathfrak{g}_0 \in \mathbb{N}$ *derart, dass* $l := [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [2,1], [4,1]]$ *ein HD ist. Dann ist* l *wie in Zeile 7 der Tabelle 4.1 in Voraussetzung 4.21 und Satz 5.99 liefert für* l *die Eigenschaft RAHD. Sei also* $((a_1, \ldots, a_{\mathfrak{g}_0}), (b_1, \ldots, b_{\mathfrak{g}_0}), (x, y))$ *eine Realisierung von* l*.*

Dann gilt $o(x) = 2$*,* $o(y) = 4$ *und* $1_G = [a_1, b_1] \cdots [a_{\mathfrak{g}_0}, b_{\mathfrak{g}_0}]xy$ *sowie* $\langle a_1, \ldots, a_{\mathfrak{g}_0}, b_1, \ldots, b_{\mathfrak{g}_0}, x, y\rangle = G$*. Mit Lemma 4.4 und Definition 4.6 sei* Ω *die von* x *und* y *induzierte RF-Menge. Unter Verwendung von Lemma 4.16 berechnen wir nun die Anzahl der Fixpunkte von Elementen der Ordnung 4 und von Involutionen von* G *in* Ω*.*

<u>Schritt 1:</u> *Elemente der Ordnung 4 fixieren zwei Punkte in* Ω*:*

Sei $g \in G$ *mit* $o(g) = 4$*. Mit der Charaktertafel von* G *in [Atl] gilt* $g \in y^G$ *und* $g \notin x^G$*. Mit Satz II.8.4 in [Hup1] ist* $N_G(\langle g\rangle)$ *eine Diedergruppe der Ordnung 8. Nun folgt mit Lemma 4.16*

$$|\mathrm{fix}_\Omega(g)| = |N_G(\langle g\rangle)| \cdot \left(\tfrac{\alpha_x(g)}{o(x)} + \tfrac{\alpha_y(g)}{o(y)}\right) = 8 \cdot \left(\tfrac{0}{2} + \tfrac{1}{4}\right) = 2.$$

□

<u>Schritt 2:</u> *Involutionen fixieren sechs Punkte in* Ω*:*

Sei $t \in G$ *mit* $o(t) = 2$*. Mit der Charaktertafel von* G *in [Atl] gilt* $t \in x^G$ *und* t *ist zu einer Potenz von* y *in* G *konjugiert. Mit Satz II.8.4 in [Hup1] ist* $N_G(\langle t\rangle)$ *eine Diedergruppe der Ordnung 8. Nun folgt mit Lemma 4.16*

$$|\mathrm{fix}_\Omega(t)| = |N_G(\langle t\rangle)| \cdot \left(\tfrac{\alpha_x(t)}{o(x)} + \tfrac{\alpha_y(t)}{o(y)}\right) = 8 \cdot \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\right) = 6.$$

□

Wir sehen also, dass G *nicht mit Fixität 4 auf* Ω *operiert, da jede Involution sechs Punkte in* Ω *fixiert.*

Der Umstand, dass ein RAHD nicht direkt zu einer Fixität-4-Operation auf einer zugehörigen RF-Menge führt, ist der Definition von AHD in 4.18 geschuldet. In dieser Definition liegt der Fokus auf lokaler Fixität, also der Fixität in der transitiven Operation von G auf den Bahnen einer RF-Menge. Wir müssen nun den Sprung von lokaler Fixität zu globaler Fixität (Anzahl der Fixpunkte auf der gesamten RF-Menge) vollziehen. Das ist Gegenstand der folgenden

Definition 6.2
Seien G eine endliche Gruppe und $l := [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1, n_1], \ldots, [m_r, n_r]]$ ein realisierbares AHD. Wir nennen l ***fast sicher*** *(****fast sicheres AHD*** *oder kurz* ***FAHD****), wenn es eine Realisierung $((a_1, \ldots, a_{\mathfrak{g}_0}), (b_1, \ldots, b_{\mathfrak{g}_0}), (c_{1,1}, \ldots, c_{1,n_1}, \ldots, c_{r,1}, \ldots, c_{r,n_r}))$ von l so gibt, dass G auf der von $c_{1,1}, \ldots, c_{1,n_1}, \ldots, c_{r,1}, \ldots, c_{r,n_r}$ induzierten RF-Menge mit Fixität höchstens 4 operiert.*

Wir nennen l ***sicher*** *(****sicheres AHD*** *oder kurz* ***SAHD****), wenn für alle Realisierungen $((a_1, \ldots, a_{\mathfrak{g}_0}), (b_1, \ldots, b_{\mathfrak{g}_0}), (c_{1,1}, \ldots, c_{1,n_1}, \ldots, c_{r,1}, \ldots, c_{r,n_r}))$ von l gilt, dass G auf der von $c_{1,1}, \ldots, c_{1,n_1}, \ldots, c_{r,1}, \ldots, c_{r,n_r}$ induzierten RF-Menge mit Fixität höchstens 4 operiert.*

Warum wir zwischen „fast sicheren" und „sicheren" AHD und damit zwischen „es gibt eine Realisierung" und „für alle Realisierungen" in Definition 6.2 unterscheiden, wird an folgendem Beispiel deutlich.

Beispiel 6.3
Sei $G := \langle (12345678), (28)(37)(46) \rangle \leqslant \mathcal{S}_8$. Dann ist G eine Diedergruppe von Ordnung 16. Sei $\mathfrak{g} \in \mathbb{N}$ so, dass $l := [G, \mathfrak{g}, 2 \mid [2, 2]]$ ein HD ist. Wir zeigen zunächst, dass l ein AHD ist.

Sei M die Menge aller G-Konjugiertenklassen von zyklischen Untergruppen der Ordnung 2. Dann gilt $|M| = 3$ und $M = \{(\langle(28)(37)(46)\rangle)^G, (\langle(12)(38)(47)(56)\rangle)^G, (\langle(15)(26)(37)(48)\rangle)^G\}$. Ist $x \in ((28)(37)(46))^G \cup ((12)(38)(47)(56))^G$, so ist x eine Spiegelung, wenn wir G als Symmetriegruppe eines regelmäßigen Achtecks auffassen. In diesem Fall gilt $|N_G(\langle x \rangle) : \langle x \rangle| = 2$ und G operiert mit Fixität 2 auf der Menge der Rechtsnebenklassen von $\langle x \rangle$ in G.

Ist $x \in ((15)(26)(37)(48))^G = \{(15)(26)(37)(48)\}$, so ist x die zentrale Involution und die Operation von G auf $G/\langle x \rangle$ per Rechtsmultiplikation ist nicht treu. Genauer fixiert x in diesem Fall alle acht Punkte in $G/\langle x \rangle$.

Wie in Definition 4.18 sei für alle $a \in \{1, 2, 3, 4\}$ die Zahl $t_a \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der Klassen $C \in M$, für die gilt, dass G für alle $U \in C$ mit Fixität a auf der Menge der Rechtsnebenklassen von U operiert. Dann ist $t_1 = 0 = t_3 = t_4$ und $t_2 = 2$. Da die Vielfachheit n der Verzweigung 2 in l genau 2 ist und nach Definition 4.18 nun $n = 2 \leq 4 = 4t_1 + 2t_2 + t_3 + t_4$ gilt, ist l ein AHD.

Wir geben zwei verschiedene Realisierungen für l an. Seien $a_1 = 1_G = a_2$, $b_1 = (12345678)$, $b_2 = (28)(37)(46)$, $t = (15)(26)(37)(48)$ und $x = (12)(38)(47)(56)$. Dann ist t die zentrale Involution und x ist eine nicht-zentrale Involution von G. Durch Nachrechnen der Eigenschaften (RHD1), (RHD2) und (RHD3) sehen wir, dass die Tripel $((a_1, a_2), (b_1, b_2), (t, t))$ und $((a_1, a_2), (b_1, b_2), (x, x))$ Realisierungen *für l sind. Seien jetzt Ω_1 die von t und t induzierte RF-Menge und Ω_2 die von x und x induzierte RF-Menge. Wir ermitteln die Fixität der Operation von G auf Ω_1, und Ω_2.*

Sei $\alpha \in \Omega_1$ so, dass $G_\alpha \neq 1$ gilt. Dann ist nach Konstruktion und Lemma 4.4 $G_\alpha = \langle t \rangle$. Ist hingegen $\beta \in \Omega_2$ so, dass $G_\beta \neq 1$ gilt, so ist G_β konjugiert zu $\langle x \rangle$. Es ist $|N_G(\langle t \rangle) : \langle t \rangle| = 8$ und $|N_G(\langle g \rangle) : \langle g \rangle| = 2$ für alle $g \in x^G$. Mit Lemma 4.16 gilt daher für alle $g \in G^\#$

$$|\mathrm{fix}_{\Omega_1}(g)| = \begin{cases} 0, & g \neq t, \\ 16, & g = t, \end{cases}$$

und

$$|\mathrm{fix}_{\Omega_2}(g)| = \begin{cases} 0, & g \notin x^G, \\ 4, & g \in x^G. \end{cases}$$

Auf Ω_2 operiert G also mit Fixität 4 und auf Ω_1 nicht. Damit ist l kein sicheres AHD, jedoch fast sicher.

Wir werden nun ein Kriterium beweisen, welches in dem Kontext dieser Arbeit eine Schlüsselrolle einnimmt. Mit diesem können wir entscheiden, welche der realisierbaren AHD aus Voraussetzung 4.21 sicher sind.

Lemma 6.4
Sei $l := [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1, n_1], \ldots, [m_r, n_r]]$ ein RAHD. Für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$ besitze G nur genau eine Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen der Ordnung m_i. Sind $m_1, \ldots, m_r$ paarweise teilerfremd, so ist l ein sicheres AHD.

Beweis
Nach Voraussetzung ist l ein RAHD. Seien also

$$((a_1, \ldots, a_{\mathfrak{g}_0}), (b_1, \ldots, b_{\mathfrak{g}_0}), (c_{1,1}, \ldots, c_{1,n_1}, \ldots, c_{r,1}, \ldots, c_{r,n_r}))$$

eine beliebige Realisierung für l und Ω die von $c_{1,1}, \ldots, c_{1,n_1}, \ldots, c_{r,1}, \ldots, c_{r,n_r}$ induzierte RF-Menge. Da l ein AHD ist, operiert G insbesondere nicht-regulär auf Ω. Daher seien $g \in G^\#$ und $\alpha \in \mathrm{fix}_\Omega(g)$. Wir zeigen, dass $|\mathrm{fix}_\Omega(g)| \leq 4$ gilt.

Weil Ω die von $c_{1,1}, \ldots, c_{r,n_r}$ induzierte RF-Menge ist, existieren $\delta \in \alpha^G$ sowie $i \in \{1, \ldots, r\}$ und $j \in \{1, \ldots, n_i\}$ mit Lemma 4.4 so, dass $G_\delta = \langle c_{i,j} \rangle$ gilt. Ferner sind G_α und G_δ in G konjugiert und wir erhalten, dass g zu einer Potenz von $c_{i,j}$ in G konjugiert ist. Seien $M := \{c_{1,1}, \ldots, c_{r,1}\}$ und

$$M(g) := \{c_{i,1} \in M \mid \text{Es gibt ein } j \in \{1, \ldots, n_i\} \text{ so, dass } g \text{ zu einer Potenz von } c_{i,j} \text{ konjugiert ist in } G\}.$$

Nun ist $|M(g)| \geq 1$. Ferner ist $|M| = r$, da $c_{1,1}, c_{2,1}, \ldots, c_{r,1}$ paarweise verschiedene Ordnungen haben und somit auch paarweise verschiedene Grupppenelemente sind.

Angenommen, es gelte $|M(g)| \geq 2$. Nun seien $c_{i,1}, c_{k,1} \in M(g)$ derart, dass $o(c_{i,1}) \neq o(c_{k,1})$ und g in G zu einer Potenz von $c_{i,1}$ und $c_{k,1}$ konjugiert ist. Das ist möglich, da nach Voraussetzung $\langle c_{j,1}\rangle^G = \ldots = \langle c_{j,n_j}\rangle^G$ für alle $j \in \{1,\ldots,r\}$ gilt. Dann werden $o(c_{i,1}) = m_i$ und $o(c_{k,1}) = m_k$ von $o(g) \neq 1$ geteilt, im Widerspruch zur paarweisen Teilerfremdheit von $m_1,\ldots,m_r$.

Damit ist $|M(g)| = 1$. Seien $c \in G$ und $i \in \{1,\ldots,r\}$ so, dass $M(g) = \{c\}$ sowie $m_i = o(c)$ die zugehörige Verzweigungszahl und n_i die Vielfachheit ist. Da l ein AHD ist, sei weiter $a \in \{1,2,3,4\}$ so, dass G mit Fixität a auf $G/\langle c\rangle$ per Rechtsmultiplikation operiert. Weil G nur eine Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen der Ordnung m_i hat, gilt nach Definition 4.18

$$n_i \in \begin{cases} \{1,2,3,4\}, & \text{falls } a = 1, \\ \{1,2\}, & \text{falls } a = 2, \\ \{1\}, & \text{falls } a \in \{3,4\}. \end{cases}$$

Mit Lemma 4.16 haben dann c, alle nichttrivialen Potenzen von c und deren G-Konjugierte nur $a \cdot n_i \leq 4$ Fixpunkte in Ω, somit auch g. ■

Lemma 6.5
Seien G einfach, nicht-abelsch und $l := [G,\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0 \mid [m_1,n_1],\ldots,[m_r,n_r]]$ ein HD aus den Zeilen 1 bis 6, den Zeilen 8 bis 12 oder den Zeilen 14 bis 21 der Tabelle 4.1 von Voraussetzung 4.21. Falls G eine der Gruppen $\mathcal{A}_5$ oder $\mathrm{PSL}_2(8)$ ist, so sei $l \neq [G,\mathfrak{g},1 \mid [2,1]]$. Dann ist l ein sicheres AHD.

Beweis
Wir wollen Lemma 6.4 verwenden und müssen die Voraussetzungen prüfen. Falls $r = 1$ gilt, genügt es zu zeigen, dass G nur eine Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen der Ordnung m_1 besitzt.

Wir überprüfen zunächst die nicht-generischen Fälle aus Voraussetzung 4.21. Seien zuerst G und l wie in Zeile 1 von Tabelle 4.1 in Voraussetzung 4.21. Dann gilt $G \cong \mathcal{A}_5$, $1 \leq r \leq 3$, $m_1,\ldots,m_r \in \{2,3,5\}$ sind paarweise verschieden und nach Voraussetzung ist $l \neq [G,\mathfrak{g},1 \mid [2,1]]$. Mit Satz 5.99 ist l ein RAHD. Es sind 2, 3 und 5 paarweise teilerfremd und mit Lemma 3.5 gibt es jeweils nur eine G-Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen der Ordnung 2, 3 und 5. Nun liefert Lemma 6.4, dass l sicher ist.

Seien G und l wie in Zeile 8 von Tabelle 4.1 in Voraussetzung 4.21. Dann gilt $G \cong \mathrm{PSL}_2(8)$, $1 \leq r \leq 3$, $m_1,\ldots,m_r \in \{2,7,9\}$ sind paarweise verschieden und nach Voraussetzung ist $l \neq [G,\mathfrak{g},1 \mid [2,1]]$. Mit Satz 5.99 folgt die Eigenschaft RAHD für l. Die Verzweigungszahlen 2, 7 und 9 sind paarweise teilerfremd und mit den Lemmata 3.5 und 3.15 gibt es jeweils nur eine G-Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen der Ordnung 2, 7 und 9. Lemma 6.4 liefert die Sicherheit von l.

Analog verfahren wir in den Zeilen 2 bis 6 und 9 bis 12 der Tabelle 4.1 von Voraussetzung 4.21. In diesen Fällen ist entweder $r = 1$ und die Aussage zur Teilerfremdheit wird nicht benötigt oder es ist $r > 1$ und wegen der Möglichkeiten für

$m_1,\dots,m_r$ in den jeweiligen Fällen folgt auch die Teilerfremdheit dieser. Alle Hurwitzdaten aus diesen Zeilen sind mit Satz 5.99 RAHD. Mit den Lemmata 3.5 und 3.15 gibt es in G nur jeweils genau eine Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen der Ordnung $m_1,\dots,m_r$. Lemma 6.4 liefert dann, dass l in allen Fällen ein sicheres AHD ist. Damit sind die nicht-generischen Fälle von Voraussetzung 4.21 geprüft.

Seien G und l wie in Zeile 14 der Tabelle 4.1 von Voraussetzung 4.21. Dann ist $q \geq 16$ eine Potenz von 2, $G \cong \mathrm{SL}_2(q)$, $1 \leq r \leq 2$ und $m_1,\dots,m_r \in \{q-1, q+1\}$ sind paarweise verschieden. Mit Satz 5.99 ist l ein RAHD.

Wir sehen, dass $\mathrm{ggT}(q-1, q+1) = 1$ gilt, da q gerade ist und $q-1$ und $q+1$ ungerade sind. Mit Lemma 3.5 gibt es nur jeweils eine G-Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen der Ordnung $q-1$ und $q+1$. Lemma 6.4 liefert nun, dass l sicher ist.

Seien G und l wie in den Zeilen 15 oder 16 der Tabelle 4.1 von Voraussetzung 4.21. Dann ist $q \geq 3$ eine Primzahlpotenz, $\varepsilon \in \{1, -1\}$, $G \cong \mathrm{PSL}_3^{\varepsilon}(q)$, $r = 1$ und $m_1 = \frac{q^2+\varepsilon q+1}{\mathrm{ggT}(3, q-\varepsilon)}$. Mit Satz 5.99 ist l ein RAHD und mit Lemma 3.15 gibt es nur genau eine G-Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen der Ordnung m_1. Lemma 6.4 liefert nun, dass l ein sicheres AHD ist.

Seien G und l wie in Zeile 19 der Tabelle 4.1 von Voraussetzung 4.21. Dann gibt es $k \in \mathbb{N}$ so, dass $s := 2^k \geq 2$, $q = 2s^2 \geq 8$ und $G \cong \mathrm{Sz}(q)$ gilt. Ferner ist $1 \leq r \leq 3$ und $m_1,\dots,m_r \in \{q-2s+1, q-1, q+2s+1\}$ sind paarweise verschieden. Mit den Lemmata 3.5 und 3.15 besitzt G nur jeweils genau eine Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen der Ordnung $q-2s+1$, $q-1$ und $q+2s+1$. Mit Lemma 5.63 sind $q-2s+1$, $q-1$ und $q+2s+1$ paarweise teilerfremd und mit Satz 5.99 und Lemma 6.4 ist l nun ein SAHD.

Zuletzt seien G und l wie in den Zeilen 17, 18, 20 oder 21 der Tabelle 4.1 von Voraussetzung 4.21. Dann gibt es eine Primzahlpotenz q so, dass G isomorph ist zu $\mathrm{PSp}_4(q)$, $\mathrm{P}\Omega_8^-(q)$, ${}^2G_2(q)$ oder ${}^3D_4(q)$. Ferner ist $r = 1$ und es gilt

$$m_1 = \begin{cases} \frac{q^2+1}{\mathrm{ggT}(q^2-1,2)}, & \text{falls } G \cong \mathrm{PSp}_4(q), \\ \frac{q^4+1}{\mathrm{ggT}(q^4-1,2)}, & \text{falls } G \cong \mathrm{P}\Omega_8^-(q), \\ \frac{q-1}{2}, & \text{falls } G \cong {}^2G_2(q), \\ q^4-q^2+1, & \text{falls } G \cong {}^2D_4(q). \end{cases}$$

Mit Lemma 3.15 gibt es nur genau eine G-Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen der Ordnung m_1. Da l mit Satz 5.99 ein RAHD ist, ist l mit Lemma 6.4 ein SAHD. Insgesamt folgt nun die Behauptung. ■

Lemma 6.6
Seien $q \geq 7$ eine ungerade Primzahlpotenz, $G \cong \mathrm{PSL}_2(q)$ und $l := [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \,|\, [m_1, n_1], \ldots, [m_r, n_r]]$ ein HD wie in den Zeilen 7 oder 13 der Tabelle 4.1 von Voraussetzung 4.21. Sei $\varepsilon \in \{1, -1\}$ so, dass $q \equiv \varepsilon$ modulo 4 ist. Weiter sei $l \neq [\mathrm{PSL}_2(7), \mathfrak{g}, 1 \mid [2,1]]$. Dann ist l ein RAHD.

Gibt es $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ so, dass $i \neq j$, $m_i = \frac{q-\varepsilon}{4}$, $m_j = \frac{q-\varepsilon}{2}$, $n_i \geq 1$ und $n_j \geq 1$ gilt, dann operiert G nicht mit Fixität maximal 4 auf der zugehörigen induzierten RF-Menge. Andernfalls ist l sicher.

Beweis
Da l wie in den Zeilen 7 oder 13 der Tabelle 4.1 von Voraussetzung 4.21 ist und $l \neq [\mathrm{PSL}_2(7), \mathfrak{g}, 1 \mid [2,1]]$ gilt, ist l mit Satz 5.99 ein RAHD.

Sei zuerst l so, dass es $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ gibt wie folgt:

$$i \neq j,\ m_i = \tfrac{q-\varepsilon}{4},\ m_j = \tfrac{q-\varepsilon}{2},\ n_i \geq 1 \text{ und } n_j \geq 1.$$

Wir zeigen, dass G nicht mit Fixität höchstens 4 auf der zugehörigen induzierten RF-Menge wirkt. Zunächst gilt $m_i \geq 2$ und $m_j \geq 4$. Da l realisierbar ist, seien $((a_1, \ldots, a_{\mathfrak{g}_0}), (b_1, \ldots, b_{\mathfrak{g}_0}), (c_{1,1}, \ldots, c_{r,n_r}))$ eine beliebige Realisierung für l und Ω die von $c_{1,1}, \ldots, c_{r,n_r}$ induzierte RF-Menge. Da n_i und n_j beide größer oder gleich 1 sind, seien $g := c_{i,1}$ und $h := c_{j,1}$. Es gilt $o(g) = o(h^2)$.

Mit den Sätzen II.8.3 bis II.8.5 in [Hup1] gibt es jeweils eine G-Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen der Ordnung $m_i = \frac{q-\varepsilon}{4}$ und $m_j = \frac{q-\varepsilon}{2}$. Damit ist $\langle g \rangle$ zu $\langle h^2 \rangle$ konjugiert in G und deswegen ist g zu einer Potenz von h konjugiert in G.

Mit Lemma 4.4 seien jetzt $\Delta_1, \Delta_2 \subseteq \Omega$ zwei disjunkte G-Bahnen sowie $\alpha_1 \in \Delta_1$ und $\alpha_2 \in \Delta_2$ so, dass $G_{\alpha_1} = \langle g \rangle$ und $G_{\alpha_2} = \langle h \rangle$ gilt. Mit den Lemmata 3.3 und 3.15 operiert G mit Fixität 4 auf Δ_1 und mit Fixität 2 auf Δ_2. Ferner haben g, alle nichttrivialen Potenzen von g und deren G-Konjugierte jeweils vier Fixpunkte in Δ_1. Weiter haben h, alle nichttrivialen Potenzen von h und deren G-Konjugierte genau zwei Fixpunkte in Δ_2. Da g zu einer nichttrivialen Potenz von h konjugiert ist in G, hat g nun vier Fixpunkte in Δ_1 und zwei Fixpunkte in Δ_2. Somit besitzt g insgesamt sechs Fixpunkte in $\Delta_1 \dot{\cup} \Delta_2 \subseteq \Omega$. Da die Realisierung von l beliebig gewählt war, ist alles gezeigt.

Sei nun l so, dass für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$ gilt:

> *Falls $m_i = \frac{q-\varepsilon}{4}$ und $n_i \geq 1$ gilt, dann gibt es kein $j \in \{1, \ldots, r\}$ so, dass $m_j = \frac{q-\varepsilon}{2}$ und $n_j \geq 1$ gilt. Falls hingegen $m_i = \frac{q-\varepsilon}{2}$ und $n_i \geq 1$ gilt, dann gibt es kein $j \in \{1, \ldots, r\}$ so, dass $m_j = \frac{q-\varepsilon}{4}$ und $n_j \geq 1$ gilt.*

Wir zeigen, dass l sicher ist, und verwenden dabei Lemma 6.4. Wenn $q \geq 9$ ist, gilt nun $l = \left[G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \,\middle|\, \left[\frac{q-\varepsilon}{4}, n_1\right], \left[\frac{q+\varepsilon}{2}, n_2\right]\right]$ oder $l = \left[G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \,\middle|\, \left[\frac{q-\varepsilon}{2}, n_3\right], \left[\frac{q+\varepsilon}{2}, n_2\right]\right]$ mit $n_1 \in \{0,1\}$ und $n_2, n_3 \in \{0,1,2\}$ aufgrund der Voraussetzung.

Im Fall $q = 7$ ist $l = [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [2, n_1], [3, n_2], [7, n_3]]$ oder $l = [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [3, n_2], [4, n_4], [7, n_3]]$ mit $n_1, n_3 \in \{0,1\}$ und $n_2, n_4 \in \{0,1,2\}$.

In allen Fällen ist $r \geq 1$ und $n_1 + \ldots + n_r \geq 1$, da l nach Voraussetzung ein AHD ist. Für $q = 7$ sehen wir, dass $m_1, \ldots, m_r$ jetzt paarweise teilerfremd sind und mit der Charaktertafel von G in [Atl] folgt, dass G nur jeweils genau eine Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen der Ordnung 2, 3, 4 und 7 besitzt. Da $l \neq [\mathrm{PSL}_2(7), \mathfrak{g}, 1 \mid [2,1]]$ ein RAHD ist, ist l für $q = 7$ ein SAHD mit Lemma 6.4.

Sei $q \geq 9$. Mit den Lemmata 3.5 und 3.15 gibt es nur jeweils genau eine G-Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen der Ordnung $\frac{q-\varepsilon}{4}, \frac{q-\varepsilon}{2}$ und $\frac{q+\varepsilon}{2}$. Ferner gilt $\mathrm{ggT}(q-1, q+1) = 2$, da q ungerade ist. Somit ist $\mathrm{ggT}\left(\frac{q-1}{2}, \frac{q+1}{2}\right) = 1$ und daraus und aus der Wahl von $m_1, \ldots, m_r$ folgt, dass nun $m_1, \ldots, m_r$ paarweise teilerfremd sind. Da l ein RAHD ist, ist l ein SAHD mit Lemma 6.4. Insgesamt folgt die Behauptung. ■

Wir fassen diese Ergebnisse zusammen:

Voraussetzung 6.7
Sei $l := [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1, n_1], \ldots, [m_r, n_r]]$ *ein HD und es gelte Voraussetzung 4.21. Für alle* $k \in \{5, 7, 8\}$ *sei weiter* $l \neq [\mathrm{PSL}_2(k), \mathfrak{g}, 1 \mid [2,1]]$. *Gibt es ein* $\varepsilon \in \{1, -1\}$ *und eine ungerade Primzahlpotenz* $q \geq 7$ *so, dass* $q \equiv \varepsilon$ *modulo* 4 *und* $G = \mathrm{PSL}_2(q)$ *gilt, so gelte für alle* $i \in \{1, \ldots, r\}$ *schon:*

Falls $m_i = \frac{q-\varepsilon}{4}$ *und* $n_i \geq 1$ *gilt, dann gibt es kein* $j \in \{1, \ldots, r\}$ *so, dass* $m_j = \frac{q-\varepsilon}{2}$ *und* $n_j \geq 1$ *gilt. Falls hingegen* $m_i = \frac{q-\varepsilon}{2}$ *und* $n_i \geq 1$ *gilt, dann gibt es kein* $j \in \{1, \ldots, r\}$ *so, dass* $m_j = \frac{q-\varepsilon}{4}$ *und* $n_j \geq 1$ *gilt.*

Satz 6.8
Seien G *einfach und nicht-abelsch sowie* $l := [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1, n_1], \ldots, [m_r, n_r]]$ *ein HD. Dann gilt:*

(i) Unter Voraussetzung 6.7 ist l *ein SAHD.*

(ii) Ist l *ein SAHD, so ist* l *unter Vermutung 3.16 wie in Voraussetzung 6.7.*

Beweis
Zuerst gelte Voraussetzung 6.7. Dann ist l wie in Voraussetzung 4.21 und mit Satz 4.22 ist l ein AHD. Weiter folgt die Realisierbarkeit von l mit Satz 5.99, da nach Voraussetzung $l \neq [G, \mathfrak{g}, 1 \mid [2,1]]$ für G isomorph zu $\mathcal{A}_5$, $\mathrm{PSL}_2(7)$ oder $\mathrm{PSL}_2(8)$ gilt.

Sei $G \not\cong \mathrm{PSL}_2(q)$ für eine ungerade Primzahlpotenz $q \geq 7$. Dann folgt mit Lemma 6.5, dass l sicher ist. Seien also $q \geq 7$ eine ungerade Primzahlpotenz und $G \cong \mathrm{PSL}_2(q)$. Weiter sei $\varepsilon \in \{1, -1\}$ so, dass $q \equiv \varepsilon$ modulo 4 gilt. Nach Voraussetzung 6.7 gibt es kein $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ so, dass $i \neq j$, $m_i = \frac{q-\varepsilon}{4}$ und $m_j = \frac{q-\varepsilon}{2}$ sowie $n_i \geq 1$ und $n_j \geq 1$ gilt. Nach Lemma 6.6 ist dann l sicher.

Umgekehrt sei l ein SAHD. Dann ist l insbesondere ein realisierbares AHD. Unter Vermutung 3.16 ist nun l mit Satz 5.99 wie in Voraussetzung 4.21 und es gilt $l \neq [G, \mathfrak{g}, 1 \mid [2,1]]$, falls G isomorph zu $\mathcal{A}_5$, $\mathrm{PSL}_2(7)$ oder $\mathrm{PSL}_2(8)$ ist. Lemmata 6.5 und 6.6 liefern die Behauptung, da l ein SAHD ist. ■

7 Riemannsche Flächen und RF-Mengen – II

In diesem Abschnitt möchten wir die Inhalte der vorigen Kapitel zusammenführen und die Frage 2 dieser Arbeit beantworten. Zunächst erinnern wir an Lemma 4.3, dass jede kompakte Riemannsche Fläche $\mathfrak{X}$ vom Geschlecht mindestens 2 eine RF-Menge zu einer Gruppe $G \leqslant \mathrm{Aut}(\mathfrak{X})$ ist. In Lemma 5.7 haben wir gezeigt, dass es zu jedem RF-Paar (G, Ω) mit realisierbarem Hurwitzdatum eine kompakte Riemannsche Fläche $\mathfrak{X}$ gibt, die als RF-Menge zu Ω äquivalent ist, und dass die Gruppenelemente mit Fixpunkten in Ω und diejenigen mit Fixpunkten in $\mathfrak{X}$ miteinander identifizierbar sind. Damit sind alle Ergebnisse zu realisierbaren und sicheren AHD mit Riemannschen Flächen vereinbar.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels beantworten wir Frage 2 dieser Arbeit unter der Vermutung 3.16. Wir fassen dabei die Details von möglichen treuen Gruppenoperationen mit Fixität höchstens 4 von einfachen und nicht-abelschen Gruppen auf kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht mindestens 2 tabellarisch zusammen. Der zweite Abschnitt behandelt eine Leseanleitung der Tabelle und beispielhafte Anwendungen dieser.

7.1 Beantwortung von Frage 2

Lemma 7.1
Seien G einfach und nicht-abelsch, $l := [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1, n_1], \ldots, [m_r, n_r]]$ ein HD und es gelte Voraussetzung 6.7. Dann gibt es eine kompakte Riemannsche Fläche $\mathfrak{X}$ vom Geschlecht $\mathfrak{g}$ und Bahnenraum $\mathfrak{X}/G$ vom Geschlecht $\mathfrak{g}_0$ so, dass $G \leqslant \mathrm{Aut}(\mathfrak{X})$ gilt und G mit l als Verzweigungsdatum auf $\mathfrak{X}$ operiert. Ferner hat jedes $g \in G^{\#}$ höchstens vier Fixpunkte in $\mathfrak{X}$.

Beweis
Da Voraussetzung 6.7 gilt, ist l mit Satz 6.8 ein SAHD und insbesondere ein realisierbares HD. Sei daher $((a_1, \ldots, a_{\mathfrak{g}_0}), (b_1, \ldots, b_{\mathfrak{g}_0}), (c_{1,1}, \ldots, c_{r,n_r}))$ eine Realisierung für l, und mit Lemma 4.4 und Definition 4.6 sei Ω die von $c_{1,1}, \ldots, c_{r,n_r}$ induzierte RF-Menge.

Mit Lemma 5.7 gibt es dann eine kompakte Riemannsche Fläche $\mathfrak{X}$ vom Geschlecht $\mathfrak{g}$ mit Bahnenraum $\mathfrak{X}/G$ vom Geschlecht $\mathfrak{g}_0$ so, dass $G \leqslant \mathrm{Aut}(\mathfrak{X})$ gilt und Ω und $\mathfrak{X}$ als RF-Mengen äquivalent sind. Da l ein SAHD ist, hat jedes nichttriviale Element aus G höchstens vier Fixpunkte in Ω und damit auch in $\mathfrak{X}$ nach Lemma 5.7. ■

Voraussetzung 7.2
Seien $\mathfrak{X}$ eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $\mathfrak{g} \geq 2$ so, dass $1 \neq G \leqslant \mathrm{Aut}(\mathfrak{X})$ gilt, G nicht-regulär und mit Fixität 4 auf $\mathfrak{X}$ operiert und $l := [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1, n_1], \ldots, [m_r, n_r]]$ ein Verzweigungsdatum zu $\mathfrak{X}$ und G ist. Seien $q \geq 2$ eine Primzahlpotenz und für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$ sei $h_i \in G^{\#}$ so, dass $1 \neq o(h_i)$ ein Teiler von m_i ist.

Notation 7.3
Es gelte Voraussetzung 7.2 und es sei $T := \max\{n_1, \ldots, n_r\}$. In Spalte III der Tabelle 7.1 auf den Seiten 175 und folgende sind Tabellen abgedruckt, zu denen folgender Tabellenrahmen gehört:

$\lvert\mathrm{fix}_{\mathfrak{X}}(h_i)\rvert$	$i=1$	$i=2$	$\cdots$	$i=r$
$n_i = 1$				
$n_i = 2$				
$\vdots$				
$n_i = T$				

Für alle $j \in \{1, \ldots, r\}$ und $k \in \{1, \ldots, T\}$ gilt:

Der Wert der Zelle in Spalte $i = j$ und Zeile $n_i = k$ einer Tabelle ist die Fixpunktanzahl von h_j in $\mathfrak{X}$, wenn in $n_j = k$ für das Hurwitzdatum l gilt. Ferner ist der Eintrag genau dann leer, wenn $n_j < k$ für das Hurwitzdatum l gilt.

Beispiel 7.4
Wir betrachten die Zeile 9 der Tabelle 4.1 von Voraussetzung 4.21. Dann ist $G = \mathrm{PSL}_3(4)$ und $l = [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [5, n_1], [7, n_2]]$ sowie $n_1 \in \{0,1,2\}$ und $n_2 \in \{0,1\}$. Sei $\mathfrak{g} \in \mathbb{N}$ so, dass l ein HD ist, und weiter seien $h_1, h_2 \in G^{\#}$ derart, dass $o(h_1) = 5$ und $o(h_2) = 7$ gilt. Dann sind $\langle h_1 \rangle^G$ und $\langle h_2 \rangle^G$ mit den Lemmata 3.5 und 3.15 die einzigen G-Konjugiertenklassen von zyklischen Untergruppen der Ordnung 5 bzw. 7.

Mit Satz 6.8 wissen wir, dass l ein SAHD ist und mit Lemma 7.1 sei $\mathfrak{X}$ eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $\mathfrak{g}$ so, dass $G \leqslant \mathrm{Aut}(\mathfrak{X})$ ist und G mit l als Verzweigungsdatum auf $\mathfrak{X}$ operiert.

Nach Voraussetzung darf n_2 nicht den Wert 2 annehmen. Falls $n_1 = 1$ gilt, sei $\alpha_1 := \lvert\mathrm{fix}_{\mathfrak{X}}(h_1)\rvert$. Wenn $n_1 = 2$ ist, so sei $\alpha_2 := \lvert\mathrm{fix}_{\mathfrak{X}}(h_1)\rvert$. Falls $n_2 = 1$ gilt, sei $\alpha_3 := \lvert\mathrm{fix}_{\mathfrak{X}}(h_2)\rvert$. Dann erhalten wir folgende Tabelle im Sinne der Notation 7.3 (mit Rahmen):

	$i=1$	$i=2$
$n_i = 1$	α_1	α_3
$n_i = 2$	α_2	

I	II	III	Bemerkungen
$[\mathcal{A}_5, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [2,n_1], [3,n_2], [5,n_3]]$	$\mathfrak{g}_0 \geq 1$, falls $(n_1,n_2,n_3) \in \{(2,1,0),(2,0,1),$ $(1,2,0),(1,1,1)\}$; $\mathfrak{g}_0 \geq 2$, falls $(n_1,n_2,n_3) = (1,0,0)$	$\boxed{\begin{matrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{matrix}}$	
$[\mathcal{A}_7, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [5,n_1], [7,n_2]]$		$\boxed{\begin{matrix} 4 & 3 \end{matrix}}$	
$[\mathcal{A}_8, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [7,1]]$		$\boxed{3}$	
$[M_{11}, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [5,1]]$		$\boxed{4}$	
$[M_{22}, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [5,n_1], [7,n_2]]$		$\boxed{\begin{matrix} 4 & 3 \end{matrix}}$	
$[J_1, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [15,1]]$		$\boxed{4}$	
$[\mathrm{PSL}_2(7), \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [2,n_1], [3,n_2], [7,n_3]]$	$\mathfrak{g}_0 \geq 1$, falls $(n_1,n_2,n_3) = (1,2,0)$; $\mathfrak{g}_0 \geq 2$, falls $(n_1,n_2,n_3) = (1,0,0)$	$\boxed{\begin{matrix} 4 & 2 & 3 \\ & 4 & \end{matrix}}$	
$[\mathrm{PSL}_2(7), \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [3,n_1], [4,n_2], [7,n_3]]$		$\boxed{\begin{matrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & \end{matrix}}$	
$[\mathrm{PSL}_2(8), \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [2,n_1], [7,n_2], [9,n_3]]$	$\mathfrak{g}_0 \geq 2$, falls $(n_1,n_2,n_3) = (1,0,0)$	$\boxed{\begin{matrix} 4 & 2 & 2 \\ & 4 & 4 \end{matrix}}$	
$[\mathrm{PSL}_3(4), \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [5,n_1], [7,n_2]]$		$\boxed{\begin{matrix} 2 & 3 \\ 4 & \end{matrix}}$	
$[\mathrm{PSL}_4(3), \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [13,1]]$		$\boxed{3}$	
$[\mathrm{PSL}_4(5), \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [31,1]]$		$\boxed{3}$	
$[\mathrm{PSU}_4(3), \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [5,n_1], [7,n_2]]$		$\boxed{\begin{matrix} 4 & 3 \end{matrix}}$	
$\left[\mathrm{PSL}_2(q), \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \,\middle|\, \left[\frac{q-\varepsilon}{4}, n_1\right], \left[\frac{q+\varepsilon}{2}, n_2\right]\right]$		$\boxed{\begin{matrix} 4 & 2 \\ & 4 \end{matrix}}$	$q \geq 9$ ungerade und $\varepsilon \in \{1,-1\}$ so, dass $q \equiv \varepsilon$ modulo 4
$\left[\mathrm{PSL}_2(q), \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \,\middle|\, \left[\frac{q-1}{d}, n_1\right], \left[\frac{q+1}{d}, n_2\right]\right]$		$\boxed{\begin{matrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{matrix}}$	$q \geq 9$ und $d = \mathrm{ggT}(2, q-1)$

I	II	III	Bemerkungen
$\left[\mathrm{PSL}_3(q),\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0 \,\middle|\, \left[\frac{q^2+q+1}{\mathrm{ggT}(3,q-1)},1\right]\right]$		$\boxed{3}$	$q \geq 3$, $q \neq 4$
$\left[\mathrm{PSU}_3(q),\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0 \,\middle|\, \left[\frac{q^2-q+1}{\mathrm{ggT}(3,q+1)},1\right]\right]$		$\boxed{3}$	$q \geq 3$
$\left[\mathrm{PSp}_4(q),\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0 \,\middle|\, \left[\frac{q^2+1}{\mathrm{ggT}(2,q^2-1)},1\right]\right]$		$\boxed{4}$	$q \geq 3$
$\left[\mathrm{P}\Omega_8^-(q),\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0 \,\middle|\, \left[\frac{q^4+1}{\mathrm{ggT}(2,q^4-1)},1\right]\right]$		$\boxed{4}$	
$[\mathrm{Sz}(q),\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0 \mid [\alpha,n_1],[\beta,n_2],[\gamma,n_3]]$		$\boxed{\begin{matrix} 4 & 2 & 4 \\ & 4 & \end{matrix}}$	$k \in \mathbb{N}$, $s = 2^k$, $q = 2s^2$, $\alpha = q-2s+1$, $\beta = q-1$, $\gamma = q+2s+1$
$\left[{}^2G_2(q),\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0 \,\middle|\, \left[\frac{q-1}{2},1\right]\right]$		$\boxed{4}$	$q \geq 27$ ist ungerade Potenz von 3
$\left[{}^3D_4(q),\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0 \,\middle|\, \left[q^4-q^2+1,1\right]\right]$		$\boxed{4}$	

Tabelle 7.1: Verzweigungsdaten $\left[G,\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0 \,\middle|\, [m_1,n_1],\ldots,[m_r,n_r]\right]$ von kompakten Riemannschen Flächen $\mathfrak{X}$ vom Geschlecht $\mathfrak{g} \geq 2$, wobei G eine einfache und nicht-abelsche Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\mathfrak{X})$ ist und G nicht-regulär und mit Fixität höchstens 4 auf $\mathfrak{X}$ operiert. Angabe der Fixpunktanzahl von gewissen nicht-trivialen Elementen von G. Siehe zusätzlich Voraussetzung 7.2, Satz 7.5 und Notation 7.3. Eine Leseanleitung sowie Anwendungen sind im Abschnitt 7.2 zu finden.

Satz 7.5
Es gelte Voraussetzung 7.2. Unter der Vermutung 3.16 gilt dann:

(i) *l ist in Spalte I der Tabelle 7.1.*

(ii) *Es gilt $n_1 + \ldots + n_r \geq 1$ und für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$ gilt $n_i \geq 0$. Ferner sind mit Notation 7.3 für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$ die Spezifikationen für n_i sowie die Fixpunktanzahl von h_i in $\mathfrak{X}$ in der Spalte III der Tabelle 7.1 gegeben.*

(iii) *Es gelten die Spezifikationen für $\mathfrak{g}_0$ in Spalte II der Tabelle 7.1 und es ist $\mathfrak{g}_0 \geq 0$, falls $n_1 + \ldots + n_r \geq 3$ gilt, oder es ist $\mathfrak{g}_0 \geq 1$.*

Gibt es ferner ein $h \in G^\#$ so, dass für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$ schon $o(h)$ kein Teiler von m_i ist, dann gilt $|\mathrm{fix}_{\mathfrak{X}}(h)| = 0$.

Beweis
Zunächst ist $(G, \mathfrak{X})$ mit Lemma 4.3 ein RF-Paar. Da l ein Verzweigungsdatum zu $\mathfrak{X}$ und der Wirkung von G auf $\mathfrak{X}$ ist, erfüllt l nach [Bro] die Eigenschaften von Definition 4.8 und ist mit Satz 5.1 realisierbar. Da nach Voraussetzung jedes nichttriviale Element von G höchstens vier Punkte in $\mathfrak{X}$ fixiert und G nicht-regulär operiert, gilt $l \neq [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid 0]$ und damit $r \geq 1$. Somit ist l ein AHD mit Lemma 4.20 und fast sicher nach Definition 6.2. Unter Vermutung 3.16 ist l mit Satz 6.8 wie in Voraussetzung 6.7. Wenn wir nun die Tabelle 4.1 und Voraussetzungen 4.21 und 6.7 mit der Tabelle 7.1 und den Aussagen von Satz 7.5 vergleichen, sehen wir, dass wir nur noch die Fixpunktanzahl der nichttrivialen Elemente von G bestimmen müssen.

Seien $h \in G^\#$ und $l = [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1, n_1], \ldots, [m_r, n_r]]$ das zugehörige Verzweigungsdatum. Da l als Verzweigungsdatum realisierbar ist, wählen wir eine Realisierung $((a_k), (b_k), (c_{i,j}))$ von l. Gibt es kein $i \in \{1, \ldots, r\}$ so, dass $o(h)$ ein Teiler von m_i ist, dann gibt es keine G-Bahn Δ von $\mathfrak{X}$ so, dass h in einem Punktstabilisator in der Operation von G auf Δ enthalten ist. Seien also $h \in G^\#$ und $i \in \{1, \ldots, r\}$ so, dass m_i von $o(h)$ geteilt wird. Mit der Auswahl von $m_1, \ldots, m_r$ für l in Tabelle 7.1 sind $m_1, \ldots, m_r$ paarweise teilerfremd. Daher gibt es kein $j \in \{1, \ldots, r\}$ so, dass $j \neq i$ und $o(h)$ ein Teiler von m_j ist. Mit den Lemmata 3.5 und 3.15 ist $\langle c_{i,1} \rangle^G$ die einzige G-Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen von G der Ordnung m_i und es folgt $\langle c_{i,1} \rangle^G = \ldots = \langle c_{i,n_i} \rangle^G$.

Seien $C := \langle c_{i,1} \rangle$, $\mathfrak{x} \in \mathfrak{X}$ und $\Delta := \mathfrak{x}^G$ so, dass $C = G_{\mathfrak{x}}$ ist. Da C nichttrivial ist, operiert G mit Fixität $a \in \{2, 3, 4\}$ auf Δ mit Lemma 3.1 und nach Voraussetzung. Wieder mit den Lemmata 3.5 und 3.15 ist h zu einer Untergruppe von C konjugiert und es gilt $|\mathrm{fix}_\Delta(h)| = a \in \{2, 3, 4\}$. Dann folgt

$$|\mathrm{fix}_{\mathfrak{X}}(h)| = \begin{cases} 2, & \text{falls } a = 2 \text{ und } n_i = 1, \\ 3, & \text{falls } a = 3 \text{ oder} \\ 4, & \text{falls } a = 2 \text{ und } n_i = 2 \text{ oder } a = 4 \end{cases}$$

und damit erhalten wir unter Beachtung der Notation 7.3 die Einträge in Spalte III der Tabelle 7.1. ∎

Satz 7.6
Sei $l := [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1, n_1], \ldots, [m_r, n_r]]$ *ein HD. Gelten dann die Eigenschaften (i) und (iii) von Satz 7.5 sowie die Spezifikationen für* $n_1, \ldots, n_r$ *aus (ii) des Satzes, so ist* l *ein SAHD.*

Insbesondere gibt es eine kompakte Riemannsche Fläche $\mathfrak{X}$ *vom Geschlecht* $\mathfrak{g}$ *so, dass* $G \leqslant \mathrm{Aut}(\mathfrak{X})$ *gilt und* G *mit* l *als Verzweigungsdatum mit Fixität 4 auf* $\mathfrak{X}$ *operiert.*

Beweis
Die Eigenschaften für G, $\mathfrak{g}_0$, $m_1, \ldots, m_r$ und $n_1, \ldots, n_r$ aus Tabelle 7.1 liefern, dass l die Voraussetzung 4.21 erfüllt und $l \neq [\mathrm{PSL}_2(k), \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [2,1]]$ für alle $k \in \{5,7,8\}$ gilt. Ferner erfüllt l die Voraussetzung 6.7. Mit Satz 6.8 ist l dann ein SAHD. Der Rest folgt aus Lemma 7.1. ■

Mit den Sätzen 7.5 und 7.6 ist die Frage 2 dieser Arbeit nun unter der Vermutung 3.16 beantwortet.

7.2 Leseanleitung zur Tabelle 7.1 und Anwendung der Sätze 7.5 und 7.6

Bemerkung 7.7 (Leseanleitung zur Tabelle 7.1)
Unter Verwendung der Tabelle 7.1 wollen wir ein Verzweigungsdatum l zu einer kompakten Riemannschen Fläche $\mathfrak{X}$ vom Geschlecht $\mathfrak{g} \geq 2$ konstruieren so, dass $G \leqslant \mathrm{Aut}(\mathfrak{X})$ einfach und nicht-abelsch ist sowie $\mathfrak{X}/G$ vom Gechlecht $\mathfrak{g}_0$ ist und G mit Fixität maximal 4 auf $\mathfrak{X}$ operiert.

Zunächst ist der Isomorphietyp von G stets der erste Eintrag in den Listen der Spalte I von Tabelle 7.1. Falls G zu einer unendlichen Familie von Gruppen gehört und mit einem Parameter q definiert ist, so ist $q \geq 2$ eine Primzahlpotenz und q ist ggf. in der vierten Spalte der Tabelle 7.1 spezifiziert.

Seien daher $\bar{l} := [G, \bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}_0 \mid [\overline{m}_1, \overline{n}_1], \ldots, [\overline{m}_{r_{\max}}, \overline{n}_{r_{\max}}]]$ die zu G gehörige Liste in Spalte I von Tabelle 7.1 und $l := [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1, n_1], \ldots, [m_r, n_r]]$ das Verzweigungsdatum.

(i) *Aus Spalte I sind der Maximalwert von* r*, und die Werte der Verzweigungszahlen* $m_1, \ldots, m_r$ *ablesbar:*

Der Maximalewert $r_{\max}$ von r ist der höchste Index i von $\overline{n}_i$ in der Liste $\bar{l}$. Es gilt stets $r \leq r_{\max}$ und $r \geq 1$ nach Definition 4.18.
Die Menge $\{m_1, \ldots, m_r\}$ ist stets eine Teilmenge von $\{\overline{m}_1, \ldots, \overline{m}_{r_{\max}}\}$. Beachte, dass $m_1, \ldots, m_r$ mit Definition 4.8 und Bemerkung 4.11 (ii) paarweise verschieden sind.

Beispiel:

Sei $G = \mathrm{PSL}_2(8)$*. Dann betrachten wir Zeile 9 der Tabelle 7.1. Nun ist* $\bar{l} = [\mathrm{PSL}_2(8), \overline{\mathfrak{g}}, \overline{\mathfrak{g}}_0 \mid [2, \overline{n}_1], [7, \overline{n}_2], [9, \overline{n}_3]]$ *nach Spalte I der Tabelle. Es ist* $r_{\max} = 3$ *und* $\{\overline{m}_1, \ldots, \overline{m}_{r_{\max}}\} = \{2, 7, 9\}$*. Dann kann* l *die folgende Gestalt annehmen:*

- $(r = 1)$ $[G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [2, n_1]]$, $[G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [7, n_2]]$, $[G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [9, n_3]]$,
- $(r = 2)$ $[G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [2, n_1], [7, n_2]]$, $[G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [2, n_1], [9, n_3]]$, $[G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [7, n_2], [9, n_3]]$,
- $(r = 3)$ $[G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [2, n_1], [7, n_2], [9, n_3]]$.

(*ii*) *Aus Spalte III sind Informationen über die Vielfachheiten* $n_1, \ldots, n_r$ *ablesbar:*

Beachte auch Notation 7.3 und Beispiel 7.4 auf der Seite 174 und folgend. In Spalte III der Tabelle 7.1 sind kleinere Tabellen mir $r_{\max}$ Spalten und $T := \max\{\overline{n}_1, \ldots, \overline{n}_{r_{\max}}\}$ Zeilen abgedruckt. Eine Zelle in Zeile $i \in \{1, \ldots, T\}$ und Spalte $j \in \{1, \ldots, r_{\max}\}$ ist genau dann leer, wenn $\overline{n}_j < i$ gilt.

Sind $i \in \{1, \ldots, r\}$ und $j \in \{1, \ldots, r_{\max}\}$ so, dass $m_i = \overline{m}_j$ ist, so sei $n_i \le \overline{n}_j$. Wir beachten, dass nach Definition 4.18 stets $n_1 + \ldots + n_r \ge 1$ ist.

Beispiel (Fortsetzung):

Sei $G = \mathrm{PSL}_2(8)$*,* l *habe die Gestalt* $[G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [2, n_1], [7, n_2]]$ *und es ist* $\bar{l} = [\mathrm{PSL}_2(8), \overline{\mathfrak{g}}, \overline{\mathfrak{g}}_0 \mid [2, \overline{n}_1], [7, \overline{n}_2], [9, \overline{n}_3]]$*. Aus Spalte III der Tabelle 7.1 erhalten wir die kleine Tabelle:*

4	2	2
	4	4

Wir lesen $n_1 \le \overline{n}_1 \le 1$ *und* $n_2 \le \overline{n}_2 \le 2$ *ab. Dann kann* l *noch die folgende Gestalt annehmen:*

- $[G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [2, 1]]$ *(hier ist* $n_1 = 1$ *und* $n_2 = 0$*),*
- $[G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [7, 1]]$ *(hier ist* $n_1 = 0$ *und* $n_2 = 1$*),*
- $[G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [7, 2]]$ *(hier ist* $n_1 = 0$ *und* $n_2 = 2$*),*
- $[G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [2, 1], [7, 1]]$ *(hier ist* $n_1 = 1$ *und* $n_2 = 1$*) oder*
- $[G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [2, 1], [7, 2]]$ *(hier ist* $n_1 = 1$ *und* $n_2 = 2$*).*

(*iii*) *Informationen über das Geschlecht* $\mathfrak{g}_0$ *von* $\mathfrak{X}/G$ *und über das Geschlecht* $\mathfrak{g}$ *von* $\mathfrak{X}$ *sind aus Tabelle 7.1 ermittelbar:*

Üblicherweise gilt $\mathfrak{g}_0 \ge 0$, wenn $n_1 + \ldots + n_r \ge 3$ ist, und $\mathfrak{g}_0 \ge 1$ andernfalls. Mit Lemma 4.15 auf der Seite 89 gibt es jedoch Ausnahmefälle, die auftreten können. Sollte es also Tupel $(n_1, \ldots, n_{r_{\max}})$, die mit Spalte I und III der Tabelle vereinbar sind, und Werte $\mathfrak{g}_0$ geben, die einen solchen Ausnahmefall darstellen, so stehen genauere Spezifikationen für $\mathfrak{g}_0$ und $(n_1, \ldots, n_{r_{\max}})$ in der Spalte II von Tabelle 7.1. Der Wert für $\mathfrak{g}$ kann anschließend über die Hurwitzformel (siehe Definition 4.8 (*ii*) auf Seite 84) ermittelt werden.

Beispiel (Fortsetzung):

Sei $G = \mathrm{PSL}_2(8)$. Wir betrachten weiterhin die neunte Zeile von Tabelle 7.1. Es habe l die Gestalt $[G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [2,1], [7,2]]$. Nun ist

$$n_1 + \ldots + n_r = n_1 + n_2 = 1 + 2 = 3.$$

Üblicherweise gilt also $\mathfrak{g}_0 \geq 0$. Da es für diesen Fall keine Spezifikationen in Spalte II der Tabelle 7.1 gibt, kann $\mathfrak{g}_0$ jeden beliebigen Wert in $\mathbb{N}_0$ annehmen. Ist beispielsweise $\mathfrak{g}_0 = 0$, so erhalten wir mit der Hurwitzformel

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g} &= 1 + \frac{|G|}{2} \cdot \left(2(\mathfrak{g}_0 - 1) + \sum_{j=1}^{r} n_j \cdot \left(1 - \frac{1}{m_j}\right)\right) \\
&= 1 + \frac{504}{2} \cdot \left(-2 + 3 - \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{7}\right)\right) \\
&= 1 + 252 \cdot \left(1 - \tfrac{11}{14}\right) \\
&= 55.
\end{aligned}$$

Nun habe l die Gestalt $[G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [2,1]]$. Es ist $n_1 + \ldots + n_r = n_1 = 1 \leq 2$. Damit gilt üblicherweise $\mathfrak{g}_0 \geq 1$. Jedoch gibt es für diesen Fall eine Spezifikation in Spalte II der neunten Zeile der Tabelle 7.1, nämlich $\mathfrak{g}_0 \geq 2$. Jetzt kann $\mathfrak{g}_0$ jeden Wert in $\mathbb{N}$ annehmen, der echt größer als 1 ist.

(*iv*) *Die Anzahl der Fixpunkte von Elementen von G auf $\mathfrak{X}$ kann mit der Spalte III der Tabelle 7.1 bestimmt werden.*

Dafür ist nötig, dass l nach dieser Leseanleitung vollständig spezifiziert wurde. Dann erfüllt l nämlich die Voraussetzungen von Satz 7.6. Dieser Satz liefert, dass die Voraussetzungen von Satz 7.5 erfüllt sind, mit welchem wir die Fixpunktanzahl von Elementen von G in $\mathfrak{X}$ bestimmen können.

Seien $h \in G$ und $h \neq 1_G$. Gibt es ein $j \in \{1, \ldots, r\}$ so, dass $o(h)$ ein Teiler von $m_j = \overline{m}_j$ ist, so ist die Fixpunktanzahl von h in $\mathfrak{X}$ der Wert der Zelle in Spalte j und Zeile n_j der kleinen Tabelle in Spalte III von Tabelle 7.1 (für $n_j = 0$ ist die Fixpunktanzahl 0). Gibt es kein solches j, so ist die Fixpunktanzahl von h in $\mathfrak{X}$ genau 0.

Beispiel (Fortsetzung):

Sei $l = [\mathrm{PSL}_2(8), \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [2,1], [7,1], [9,2]]$. Wir schauen in die neunte Zeile der Tabelle 7.1. Es ist $m_1 = 2$, $m_2 = 7$, $m_3 = 9$, $n_1 = 1 = n_2$ und $n_3 = 2$. Mit der Spalte III der Tabelle 7.1 haben nun Elemente der Ordnung 2, 3 und 9 von G genau vier Fixpunkte in $\mathfrak{X}$. Elemente der Ordnung 7 von G haben genau zwei Fixpunkte in $\mathfrak{X}$. Mit der Charaktertafel von G in [Atl] gibt es keine weiteren nichttrivialen Elemente von G.

Nachfolgend stellen wir drei Beispiele zur Verwendung der Sätze 7.5, 7.6 und Tabelle 7.1 vor.

Beispiel 7.8 (Die Kleinsche Kurve)
Sei $\mathfrak{X}$ *die Kleinsche Kurve. Dann ist* $l := [G,3,0 \mid [2,1],[3,1],[7,1]]$ *das Verzweigungsdatum zu* $\mathfrak{X}$ *und* $G := \mathrm{Aut}(\mathfrak{X}) \cong \mathrm{PSL}_2(7)$ *(siehe Beispiele 4.2 (i) und 4.10 (i)). Weiter hat* l *die Form wie in Zeile 7 und Spalte I der Tabelle 7.1. Mit den Sätzen 7.6 und 7.5 können wir nun die Fixpunktanzahl von Elementen von* G *auf* $\mathfrak{X}$ *bestimmen.*

Mit der Spalte III der Tabelle 7.1 haben Elemente der Ordnung 2 von G genau vier Fixpunkte in $\mathfrak{X}$*. Elemente der Ordnung 3 von G haben genau zwei Fixpunkte in* $\mathfrak{X}$ *und Elemente der Ordnung 7 haben genau drei Fixpunkte in* $\mathfrak{X}$*. Nach [Atl] hat* $\mathrm{PSL}_2(7)$ *noch Elemente der Ordnung 4. Diese haben keine Fixpunkte in* $\mathfrak{X}$*.*

Beispiel 7.9 (Die MacBeath-Kurve)
Sei $\mathfrak{X}$ *die MacBeath-Kurve. Dann ist* $l := [G,7,0 \mid [2,1],[3,1],[7,1]]$ *das Verzweigungsdatum von* $\mathfrak{X}$ *und* $G := \mathrm{Aut}(\mathfrak{X}) \cong \mathrm{PSL}_2(8)$ *(siehe Beispiele 4.2 (ii) und 4.10 (ii)).*

Es ist l *nicht in der Form wie in Zeile 9 und Spalte I der Tabelle 7.1. Mit Satz 7.5 operiert* G *nicht mit Fixität* 4 *auf* $\mathfrak{X}$*. Jedoch können wir die Fixpunktanzahl von gewissen Elementen von* G *in* $\mathfrak{X}$ *bestimmen.*

Weil 3 *zu* 2 *und zu* 7 *teilerfremd ist, haben Elemente der Ordnung 2 und 7 von G dieselbe Fixpunktanzahl auf* $\mathfrak{X}$ *wie auf einer kompakten Riemannschen Fläche* $\overline{\mathfrak{X}}$ *mit dem Verzweigungsdatum* $\overline{l} = [G,\overline{\mathfrak{g}},\overline{\mathfrak{g}_0} \mid [2,1],[7,1]]$*. Von dieser Operation können wir die Fixpunktanzahl der Elemente von G mit Ordnung 2 und 7 auf* $\overline{\mathfrak{X}}$ *mit den Sätzen 7.6 und 7.5 bestimmen, da* $\overline{l}$ *ein Verzweigungdatum aus Zeile 9 (zu* $G = \mathrm{PSL}_2(8)$*) und Spalte I der Tabelle 7.1 ist.*

Ist $x \in G$ *von Ordnung 2 und* $y \in G$ *von Ordnung 7, so hat* x *mit Spalte III der Tabelle 7.1 genau vier Fixpunkte in* $\overline{\mathfrak{X}}$ *und* $\mathfrak{X}$ *und* y *fixiert genau zwei Punkte von* $\overline{\mathfrak{X}}$ *und* $\mathfrak{X}$*. Elemente der Ordnung 9 von G haben keine Fixpunkte in* $\mathfrak{X}$ *und* $\overline{\mathfrak{X}}$*. Nun hat G nach [Atl] nur noch nichttriviale Elemente der Ordnung 3. Mit Satz 7.5 hat dann jedes Element der Ordnung 3 von G mindestens fünf Fixpunkte in* $\mathfrak{X}$*.*

Wir bestimmen die genaue Anzahl von Fixpunkten von Elementen der Ordnung 3 von G in $\mathfrak{X}$*. Dazu nutzen wir Lemma 4.16 auf Seite 91. Das ist möglich, weil* $(G,\mathfrak{X})$ *nach Lemma 4.3 ein RF-Paar ist. Sei* $g \in G$ *mit* $o(g) = 3$*. Nach [Atl] ist* $|N_G(\langle g \rangle)| = 18$*. Mit Lemma 4.16 gilt nun*

$$|\mathrm{fix}_{\mathfrak{X}}(g)| = |N_G(\langle g \rangle)| \cdot \left(1 \cdot \tfrac{0}{2} + 1 \cdot \tfrac{1}{3} + 1 \cdot \tfrac{0}{7}\right) = \tfrac{18}{3} = 6.$$

Weil es in G nur eine Konjugiertenklasse von zyklischen Untergruppen der Ordnung 3 gibt (siehe [Atl]), hat nun jedes Element der Ordnung 3 von G genau sechs Fixpunkte in $\mathfrak{X}$*.*

Beispiel 7.10 (Ein etwas anderes Beispiel)
Sei $\mathfrak{X}$ eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht 114049. *Weiter sei bekannt, dass* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{X})$ *eine Untergruppe G isomorph zur Mathieugruppe M_{22} besitze und $\mathfrak{X}/G$ Geschlecht* 0 *habe. Zusätzlich sei bekannt, dass $\mathfrak{X}/G$ drei Verzweigungspunkte besitze.*

Wenn wir in Tabelle 7.1 schauen, so kann G nicht mit Fixität 4 auf $\mathfrak{X}$ operieren, weil alle Verzweigungsdaten mit $G = M_{22}$ höchstens zwei Verzweigungen $(n_1 + \ldots + n_r)$ haben und ein Cogeschlecht $(\mathfrak{g}_0)$ von mindestens 1. Dennoch können wir gegebenenfalls ein paar Informationen mit Tabelle 7.1 über die Fixpunktanzahl erhalten. Wir bestimmen zunächst die Verzweigungszahlen m_1, m_2 und m_3.

Es ist $|G| = 443520$ und mit der Hurwitzformel in Definition 4.8 (ii) ergibt sich

$$\begin{aligned} 114049 &= 1 + \tfrac{443520}{2} \cdot \left(2 \cdot (0-1) + \left(1 - \tfrac{1}{m_1}\right) + \left(1 - \tfrac{1}{m_2}\right) + \left(1 - \tfrac{1}{m_3}\right)\right) \\ &= 1 + 221760 \cdot \left(1 - \left(\tfrac{1}{m_1} + \tfrac{1}{m_2} + \tfrac{1}{m_3}\right)\right). \end{aligned}$$

Also gilt

$$\tfrac{1}{m_1} + \tfrac{1}{m_2} + \tfrac{1}{m_3} = 1 - \tfrac{114049-1}{221760} = \tfrac{17}{35}.$$

G besitzt nichttriviale Elemente der Ordnung 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 11 mit der Charaktertafel von G in [Atl]. Durch Ausprobieren erhalten wir $m_1 = 5$ und $m_2 = 7 = m_3$.

Das heißt, dass $l = [G, 114049, 0 \mid [5,1], [7,2]]$ ein mögliches Verzweigungsdatum zu $\mathfrak{X}$ und G ist. Nun hat l zwar die Form $\bar{l} = [M_{22}, \bar{\mathfrak{g}}, \overline{\mathfrak{g}_0} \mid [5, \overline{n}_1], [7, \overline{n}_2]]$ der Liste aus Spalte I der fünften Zeile in Tabelle 7.1, mit Spalte III gilt jedoch $\overline{n}_1 \leq 1$ und $\overline{n}_2 \leq 1$. In l ist die Vielfachheit der Verzweigungszahl $m_2 = 7$ aber 2 und nicht höchstens 1 wie in $\bar{l}$. Dennoch können wir die Anzahl der Fixpunkte von Elementen von G in $\mathfrak{X}$ ähnlich wie im letzten Beispiel bestimmen.

Seien $h \in G$ und $h \neq 1_G$. Sei zuerst $o(h) = 5$. Da die Vielfachheit zur Verzweigungszahl 5 in l mit $\overline{n}_1$ in $\bar{l}$ vereinbar sind, können wir $|\mathrm{fix}_{\mathfrak{X}}(h)| = 4$ in Spalte III der Tabelle 7.1 ablesen.

Sei $o(h) = 7$. Hier ist die Vielfachheit 2 zur Verzweigungszahl 7 in l nicht mit $\overline{n}_2 \leq 1$ in $\bar{l}$ vereinbar. Seien jetzt $\bar{l} = [G, \bar{\mathfrak{g}}, \overline{\mathfrak{g}_0} \mid [5,1], [7,1]]$ und $\overline{\mathfrak{X}}$ eine kompakte Riemannsche Fläche mit Verzweigungsdatum $\bar{l}$. Dann erfüllt $\bar{l}$ die Eigenschaften von Tabelle 7.1 und es folgt $\left|\mathrm{fix}_{\overline{\mathfrak{X}}}(h)\right| = 3$ mit Spalte III der Tabelle sowie mit den Sätzen 7.6 und 7.5. Da sich $\bar{l}$ und l bei den Verzweigungen nur um die Vielfachheit zur Verzweigungszahl 7 unterscheiden, nutzen wir Lemma 4.16 auf Seite 91 und erhalten

$$|\mathrm{fix}_{\mathfrak{X}}(h)| = 2 \cdot \left|\mathrm{fix}_{\overline{\mathfrak{X}}}(h)\right| = 6.$$

Also hat h genau sechs Fixpunkte in $\mathfrak{X}$.

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden treue Gruppenoperationen von einfachen und nicht-abelschen Gruppen mit Fixität höchstens 4 untersucht. Die Forschungsfragen dieser Dissertation waren folgende:

Frage 1: *Welche sind die einfachen, nicht-abelschen und transitiven Permutationsgruppen von Fixität 4, die eine Involution in einem Vierpunktstabilisator enthalten?*

Frage 2: *Welche einfachen und nicht-abelschen Gruppen G wirken mit Fixität maximal 4 auf kompakten Riemannschen Flächen $\mathfrak{X}$ vom Geschlecht mindestens 2 als Gruppen von Automorphismen und wie viele Fixpunkte besitzen nichttriviale Elemente von G auf $\mathfrak{X}$?*

Wir zeigten im Kapitel 2, dass die Gruppen M_{11}, M_{12}, $\mathrm{PSU}_3(3)$ und $\mathrm{PSL}_2(q)$ für gewisse Primzahlpotenzen $q \geq 7$ die einzigen transitiven, einfachen und nicht-abelschen Permutationsgruppen von Fixität 4 sind, in denen es eine Involution mit genau vier Fixpunkten auf der zugehörigen Bahn gibt, und fassten diese Informationen im Satz 2.41 auf der Seite 63 zusammen. Damit beantworteten wir die erste Frage dieser Arbeit.

Mit Beginn des dritten Kapitels arbeiteten wir auf eine Antwort auf Frage 2 hin und untersuchten zunächst transitive, einfache und nicht-abelsche Permutationsgruppen von Fixität höchstens 4 und mit zyklischen Punktstabilisatoren. Anschließend nutzten wir die Eigenschaften von Gruppenoperationen auf kompakten Riemannschen Flächen, um RF-Mengen und Hurwitzdaten zu definieren, und klassifizierten unter der Vermutung 3.16 von Seite 78 Gruppenoperationen von einfachen und nicht-abelschen Gruppen auf RF-Mengen mit Bahnenfixität maximal 4 und einer Beschränkung der Maximalanzahl von nicht-regulären Bahnen der Operation. In den Kapiteln 5 und 6 wurden diese auf gewisse Eigenschaften überprüft, die im siebenten Kapitel zu einer Klassifikation der treuen Gruppenoperationen von einfachen und nicht-abelschen Gruppen auf kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht mindestens 2 unter der Vermutung führte.

Diese Klassifikation ist das Resultat der Sätze 7.5 und 7.6 auf den Seiten 177 und 178. Sie zeigen auf, dass nur die Alternierenden Gruppen vom Grad $n \in \{5,6,7,8\}$, die sporadischen Gruppen M_{11}, M_{22} und J_1 sowie die Lie-Typ-Gruppen $\mathrm{PSp}_4(q)$, $\mathrm{P}\Omega_8^-(q)$, $\mathrm{Sz}(q)$, ${}^2G_2(q)$, ${}^3D_4(q)$, $\mathrm{PSL}_n(q)$ und $\mathrm{PSU}_n(q)$ für $n \in \{2,3,4\}$ und gewisse Primzahlpotenzen q mit Fixität maximal 4 auf kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht mindestens 2 treu operieren. Details über die Anzahl und Größe der nicht-regulären Bahnen und die Anzahl der Fixpunkte von nichttrivialen Gruppenelementen wurden ermittelt und sind in Tabelle 7.1 auf Seite 175 und folgende dargestellt. Sobald die Vermutung 3.16 bestätigt ist, ist die Frage 2 dieser Arbeit vollständig beantwortet.

Das Ziel des BMW-Projekts, in welches sich diese Dissertation eingliedert, ist die Klassifizierung der Paare $(\mathfrak{X}, \mathrm{Aut}(\mathfrak{X}))$ von kompakten Riemannschen Flächen $\mathfrak{X}$ vom Geschlecht mindestens 2 und ihren Automorphismengruppen $\mathrm{Aut}(\mathfrak{X})$, für die nicht jeder Punkt von $\mathfrak{X}$, der von einem nichttrivialen Automorphismus $h \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{X})$ fixiert wird, ein Weierstraßpunkt ist. Mit dem Satz von Schoeneberg (vgl. V.1.7 Theorem in [FaKr]) liegt der Fokus des Projekts auf der Klassifizierung der Flächen $\mathfrak{X}$ und ihren Automorphismengruppen, für die es einen nichttrivialen Automorphismus gibt, der höchstens vier Fixpunkte auf der Fläche festlässt. Da sich das BMW-Projekt bisher auf die Bahnenfixität solcher Operationen konzentrierte und transitive Permutationsgruppen von Fixität 2, 3 und 4 untersuchte, trägt diese Arbeit mit den Ergebnissen von Frage 1 zur ausstehenden Klassifikation von transitiven, einfachen und nicht-abelschen Permutationsgruppen von Fixität 4 bei. Die Frage 2 dieser Arbeit befasste sich mit der Klassifizierung solcher Paare $(\mathfrak{X}, G)$ von kompakten Riemannschen Flächen $\mathfrak{X}$ vom Geschlecht mindestens 2 und einfachen und nicht-abelschen Gruppen $1 \neq G \leqslant \mathrm{Aut}(\mathfrak{X})$, in der jeder nichttriviale Automorphismus von $\mathfrak{X}$ in G höchstens vier Punkte in $\mathfrak{X}$ fest lässt. Dieser Zwischenschritt war und ist für das Erreichen des Projektziels notwendig. Einerseits ist die Voraussetzung, dass alle nichttrivialen Automorphismen höchstens vier Punkte auf der Fläche fixieren, ein Spezialfall. Andererseits legt diese Arbeit mit der Voraussetzung $1 \neq G \leqslant \mathrm{Aut}(\mathfrak{X})$ eine Basis für die Bestimmung von $\mathrm{Aut}(\mathfrak{X})$, falls $G \neq \mathrm{Aut}(\mathfrak{X})$ ist. Durch sogenannte *relative Projektionen* (vgl. [Bro, S. 242]) kann unter gewissen Umständen aus der Verzweigung von $\mathfrak{X}/G$ auf die Verzweigung von $\mathfrak{X}/\mathrm{Aut}(\mathfrak{X})$ geschlossen werden. (Für einen Überblick dazu siehe den Gliederungspunkt (1.4) auf Seite 235, den Abschnitt „Relative Projections“ auf den Seiten 242 bis 244 sowie Example 3.5 und Example 3.6 auf den Seiten 250 bis 253 in [Bro].)

Damit liefert diese Dissertation einen wichtigen Beitrag zum Erreichen des Projektziels, der Klassifizierung der Paare $(\mathfrak{X}, \mathrm{Aut}(\mathfrak{X}))$ von kompakten Riemannschen Flächen $\mathfrak{X}$ vom Geschlecht 2 und ihren Automorphismengruppen, für die nicht jeder Fixpunkt eines nichttrivialen Automorphismus von $\mathfrak{X}$ ein Weierstraßpunkt von $\mathfrak{X}$ ist. Jedoch ist das Projektziel noch nicht erreicht. Deshalb möchten wir in diesem Kapitel einen Ausblick geben, welche Probleme noch gelöst werden müssen. Darüber hinaus möchten wir anmerken, welche zusätzlichen Erkenntnisse und Hilfsmittel wünschenswert sind, um mit den Ergebnissen zu arbeiten. Dabei konzentrieren wir uns auf drei Teilaspekte des BMW-Projekts; Transitive Gruppenoperationen von Fixität höchstens 4, Gruppenoperationen auf Riemannschen Flächen sowie Riemannsche Flächen und Weierstraßpunkte.

Transitive Gruppenoperationen von Fixität höchstens 4

Ist G eine endliche, transitive und nicht-reguläre Permutationsgruppe von Fixität 1, 2 oder 3 auf einer Menge Ω, so verstehen wir die Struktur von G und der Punktstabilisatoren in dieser Operation durch Abschnitt V.8 in [Hup1] (für Fixität 1) und durch [MaW1] und [MaW2] (für Fixität 2 und 3) gut. Transitive Gruppenoperationen von Fixität 4 sind jedoch bisher wenig erforscht. Es gibt erste Erkenntnisse in der Sylow-Struktur solcher Gruppen, die in [BMW] erarbeitet wurden. Eine vollständige Strukturbeschreibung sowie Klassifikationen von einfachen, fast-einfachen und quasi-einfachen Gruppen in transitiver Permutationswikung von Fixität 4 ist noch in Arbeit. Mit der Beantwortung der ersten Frage dieser Dissertation konnten wir einen Beitrag zur Klassifikation der einfachen und nicht-abelschen Permutationsgruppen von Fixität 4 in transitiver Wirkung leisten. Für eine vollständige Klassifizierung dieser fehlen noch die vier Fälle, in denen die Maximalanzahl der Fixpunkte von Involutionen zwischen 0 und 3 ist.

Bei [MaW1] und [MaW2] sowie bei Satz 2.41 und der Voraussetzung 3.14 bzw. Lemma 3.15 fällt auf, dass einfache Gruppen vom Lie-Typ sowohl in Fixität 2 und 3, als auch in Fixität 4 eine generische Rolle einnehmen. Es fällt auch auf, dass die Dimension des zugrundeliegenden Vektorraums der Gruppe vom Lie-Typ und der Lie-Rang wachsen, je höher die zugelassene Fixität ist. Interessant könnte also sein, welche Restriktionen wir an die Dimension des Vektorraums und den Lie-Rang einer einfachen Gruppen vom Lie-Typ stellen müssen, damit diese transitiv, nicht-regulär, treu und mit einer vorgegebenen Fixität auf einer Menge operieren kann. Dieselbe Frage können wir auch für Alternierende und Sporadische Gruppen stellen:

Ist G eine alternierende oder sporadische Gruppe, die mit Fixität höchstens $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ als transitive und nicht-reguläre Permutationsgruppe auf einer Menge operiert, wie groß ist dann der Grad der alternierenden Gruppe G bzw. welche sporadische Gruppe ist G?

Wünschenswert wäre eine Bereitstellung der Ergebnisse zu transitiven Gruppenoperationen von Fixität 2, 3 und 4 in einem Computeralgebrasystem wie [GAP], soweit wie die Gruppen von GAP noch handhabbar sind. Das kann beispielsweise durch eine Bibliothek von transitiven Gruppenoperationen für einfache, fast-einfache und quasi-einfache Gruppen sowie Beispielen von Gruppen aus den Struktursätzen von [MaW1] und [MaW2], in der die Gruppen als Permutationsgruppen und deren Fixität in der gegebenen Permutationsdarstellung aufgeführt sind, realisiert werden. Funktionen, die die Anzahl der Fixpunkte eines Elements einer Permutationsgruppe oder gar die Fixität der Gruppe in der Permutationsdarstellung schnell berechnen, ohne dabei auf die Markentafel der Gruppe zurückgreifen zu müssen, könnten ebenfalls nützlich sein.

Gruppenoperationen auf Riemannschen Flächen

Diese Arbeit ist nach [SaWa] die zweite in dem BMW-Projekt, die sich mit der Anwendung der bisherigen Ergebnisse des Projekts auf kompakte Riemannschen Flächen vom Geschlecht mindestens 2 befasst, um diejenigen Flächen zu klassifizieren, in denen jeder nichttriviale Automorphismus der Fläche höchstens vier Punkte der Fläche fixiert. Dabei haben wir uns auf einfache Gruppen von Automorphismen dieser Flächen beschränkt.

Einer der nächsten natürlichen Schritte könnte die Untersuchung der Gruppenoperationen auf Flächen für fast-einfache und quasi-einfache Gruppen sein. Zu fast-einfachen Gruppen liefern [MaW1] und [MaW2] ebenfalls eine Klassifikation für Fixität 2 und 3. Quasi-einfache und nicht-einfache Gruppen weisen mit Theorem 5.1 in [MaW1] keine transitive Operation mit Fixität 2 auf. Für Fixität 3 gibt es bisher kein solches Resultat. Für Operationen mit Fixität 4 gibt es Beispiele von quasi-einfachen Gruppen. Beispielsweise operiert $\mathrm{SL}_2(5)$ mit Fixität 4 auf der Menge der Rechtsnebenklassen einer zyklischen Untergruppe der Ordnung 3.

Für die Untersuchung von Gruppenoperationen auf kompakten Riemannschen Flächen für fast-einfache und quasi-einfache Gruppen wird es jedoch nötig sein, andere als die in dieser Arbeit verwendete Methoden zu entwickeln. Dazu stellen wir eine kurze Überlegung auf:

Seien $l := \big[G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1,n_1],\ldots,[m_r,n_r]\big]$ ein HD und G fast-einfach, aber nicht einfach. Weiter seien $T \leqslant G$ einfach und $T \trianglelefteq G \lneqq \mathrm{Aut}(T)$. Dann ist $T \leqslant G'$. Wir nehmen an, dass l realisierbar ist. Sei also $((a_1,\ldots,a_{\mathfrak{g}_0}),(b_1,\ldots,b_{\mathfrak{g}_0}),(c_{1,1},\ldots,c_{r,n_r}))$ eine Realisierung für l. Dann gilt nach (RHD2)

$$1_G = [a_1,b_1]\cdots[a_{\mathfrak{g}_0},b_{\mathfrak{g}_0}]\cdot c_{1,1}\cdots c_{r,n_r}.$$

Nun folgt $c_{1,1}\cdots c_{r,n_r} = [b_{\mathfrak{g}_0},a_{\mathfrak{g}_0}]\cdots[b_1,a_1] \in G'$. Da G fast-einfach und nicht einfach ist, gilt $T \leqslant G' \lneqq G$. Um daher mit $a_1,\ldots,a_{\mathfrak{g}_0},b_1,\ldots,b_{\mathfrak{g}_0},c_{1,1},\ldots,c_{r,n_r}$ für (RHD3) ganz G erzeugen zu können, muss mindestens ein Element von $a_1,\ldots,a_{\mathfrak{g}_0},b_1,\ldots,b_{\mathfrak{g}_0}$ aus $G \setminus G'$ kommen. Möglicherweise müssen dann andere Konstruktionen als die in dieser Arbeit verwendeten zur Bestimmung von Realisierungen erarbeitet werden. Einen Einblick in diese Situation liefern die Lemmata 5.58 und 5.59 ab Seite 136 zu fast-einfachen linearen Gruppen $\mathrm{PSL}_2(q).C_2$.

Neben Gruppenwirkungen von einfachen, fast-einfachen oder quasi-einfachen Gruppen auf kompakten Riemannschen Flächen ist auch die Untersuchung von Operationen von allgemeinen Gruppen auf solche Flächen für eine vollständige Bearbeitung der Projektziels nötig. Die Struktursätze in [MaW1] und [MaW2] für Fixität 2 und 3 liefern dazu Struktureinschränkungen der wirkenden Gruppe auf den nichtregulären Bahnen der kompakten Riemannschen Fläche, vor allem wenn die wirkende Gruppe eine $\{2,3\}$-Gruppe ist. Ausgehend von diesen Struktureinschränkungen könnten Verzweigungsdaten $\big[G,\mathfrak{g},\mathfrak{g}_0 \mid [m_1,n_1],\ldots,[m_r,n_r]\big]$ von kompakten Riemannschen Flächen untersucht werden, wobei G eine $\{2,3\}$-Gruppe ist. Beispiel 6.1 zeigt, dass dabei interessante Eigenschaften zu sehen sein werden.

Ein weiterer nächster natürlicher Untersuchungsschritt hängt damit zusammen, was die vorliegende Arbeit nicht leistet. Im zweiten Kapitel dieser Arbeit haben wir uns primär mit einfachen und nicht-abelschen Gruppen von Automorphismen von kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht mindestens 2 beschäftigt, in denen jeder nichttriviale Automorphismus maximal vier Punkte der Fläche fixiert. Verglichen mit dem Ziel des BMW-Projekts sehen wir, dass die vorliegende Dissertationsschrift nur eine Teilantwort für einfache und nicht-abelsche Gruppen erarbeitet. Einerseits müssen von den Verzweigungsdaten $l := [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1, n_1], \ldots, [m_r, n_r]]$ aus Voraussetzung 7.2 bzw. Tabelle 7.1 auf Seite 175 diejenigen heraus gearbeitet werden, von denen G die volle Automorphismengruppe der zu l gehörigen kompakten Riemannschen Fläche vom Geschlecht mindestens 2 ist. Andererseits müssen Riemannsche Flächen und Gruppenoperationen auf diesen ergründet werden, in denen es zwei Klassen von nichttrivialen Automorphismen gibt:

Jene, die höchstens vier Punkte der zugehörigen Fläche festlassen, und gleichzeitig solche, die mindestens fünf Punkte der Fläche fixieren.

Die Erforschung solcher Operationen ist das eigentliche Projektziel von Baumeister, Magaard und Waldecker, da diese mit dem Satz von Schoeneberg zu zwei Klassen von Fixpunkten führen. Jene, die Weierstraßpunkte sind, und solche, die es im Allgemeinen nicht sind. Jedoch sind die eben beschriebenen Gruppenoperationen nicht in der Art und Weise handhabbar, wie wir Gruppenoperationen von höchstens Fixität 4 auf kompakten Riemannschen Flächen untersucht und klassifiziert haben. Die Realisierbarkeit von allen solchen Gruppenoperationen im Sinne von Definition 5.2 zu überprüfen, scheint eine unlösbare Aufgabe zu sein.

Wünschenswert wäre auch hier eine Bereitstellung der Ergebnisse zu Gruppenoperationen auf kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht mindestens 2 in einem Computeralgebrasystem wie [GAP]. Die Ergebnisse könnten in Form einer Datenbank mit Gruppen und Realisierungen bereitgestellt werden, sowie in Form einer Konstruktionsanweisung von Realisierungen mit Hilfe einer Funktion für Gruppen vom Lie-Typ Lie(q) mit wachsendem q. Auch Prüffunktionen, die beantworten, ob eine Liste $l = [G, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0 \mid [m_1, n_1], \ldots, [m_r, n_r]]$ ein Hurwitzdatum ist und ob ein HD ein AHD ist, wären wünschenswert.

Das GAP-Paket MapClass [Map] ist ein Schritt in diese Richtung. Das Paket enthält u.a. die Funktion `GeneratingMCOrbits`, welche für eine gegebene Gruppe, ein gegebenes Cogeschlecht und ein gegebenes Verzweigungsdatum Realisierungen berechnet.

Riemannsche Flächen und Weierstraßpunkte

Auch die Vereinigung der Ergebnisse aus den vorigen zwei Teilaspekten des BMW-Projekts mit der Struktur der Riemannschen Fläche und der Lage der Weierstraßpunkte ist erstrebenswert. In dem Projekt wurde noch nicht explizit in diese Richtung geforscht.

Wir wissen, dass jede kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $\mathfrak{g} \geq 2$ mindestens $2\mathfrak{g}+2$ und maximal $\mathfrak{g}(\mathfrak{g}^2-1)$ Weierstraßpunkte besitzt (vgl. III.5.11 Corollary in [FaKr]). Es ist auch bekannt, dass die Menge der Weierstraßpunkte von Automorphismen der Fläche invariant gelassen wird (vgl. V.1.2 Proposition in [FaKr]). Andere Resultate im Zusammenhang mit Fixpunkten von Automorphismen und Weierstraßpunkten finden sich u.a. in den Abschnitten V.2.10 bis V.2.14 in [FaKr].

Ein erstes Ziel in diesem Teilprojekt könnte sein, die Lage der Weierstraßpunkte für die Ergebnisse aus dem Teilprojekt Gruppenoperationen auf Riemannschen Flächen zu erarbeiten, d.h. in welchen Bahnen der Fläche unter der Gruppenoperation die Weierstraßpunkte sind. Daran schließen sich folgende Fragen an:

Ist die Menge $\mathfrak{W}(\mathfrak{X})$ der Weierstraßpunkte einer kompakten Riemannschen Fläche $\mathfrak{X}$ eine Teilmenge der Fixpunktmenge $\mathsf{F}(\mathfrak{X}) = \left\{ \mathfrak{x} \in \mathfrak{X} \,\middle|\, \exists h \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{X})^{\#} : \mathfrak{x}^h = \mathfrak{x} \right\}$? Gibt es Weierstraßpunkte, die nicht fixiert werden? Von welchen Automorphismen werden sie in dem jeweiligen Beispiel fixiert? Welche Auswirkungen hat das auf die Fläche? Können wir eine konkrete Fläche noch in einer anderen Art als durch ein Verzweigungsdatum beschreiben? Mit folgendem Beispiel wollen wir auf einige dieser Fragen eingehen.

Beispiel

Sei $\mathfrak{X}$ die Kleinsche Kurve (vgl. Beispiel 4.2.(i) und [Mac2]). Dann ist $\mathfrak{X}$ eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht 3 *und mit Automorphismengruppe isomorph zu* $\mathrm{PSL}_2(7)$*. Die Kleinsche Kurve können wir als algebraische Kurve mit der Gleichung $x^3y + y^3z + z^3x = 0$ in homogenen Koordinaten x, y, z beschreiben. Das zugehörige Verzweigungsdatum von $\mathfrak{X}$ und der Operation von $G := \mathrm{Aut}(\mathfrak{X})$ auf $\mathfrak{X}$ ist $[G, 3, 0 \mid [2,1], [3,1], [7,1]]$. Dieses Verzweigungsdatum ist mit Satz 6.8 ein SAHD. Die Menge der Weierstraßpunkte ist genau die Menge der Fixpunkte von den Elementen der Ordnung 7 aus G (siehe Example 4.2 in [MaVö]).*

Sei jetzt $\mathfrak{X}$ die MacBeath Kurve (vgl. Beispiel 4.2.(ii) und [Mac1]). Dann ist $\mathfrak{X}$ eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $\mathfrak{g} = 7$ und mit Automorphismengruppe isomorph zu $\mathrm{PSL}_2(8)$*. MacBeath zeigte in [Mac1], dass man diese Riemannsche Fläche auch als algebraische Kurve mit einer Gleichung schreiben kann. Das zugehörige Verzweigungsdatum von $\mathfrak{X}$ und der Operation von $G := \mathrm{Aut}(\mathfrak{X})$ auf $\mathfrak{X}$ ist $[G, 7, 0 \mid [2,1], [3,1], [7,1]]$.*

Dieses Verzweigungsdatum ist kein Hurwitzdatum aus Voraussetzung 6.7. Ferner operiert G auf der Menge der Nebenklassen einer zyklischen Untergruppe der Ordnung 3 mit Fixität 6. In dieser Operation hat jedes Element der Ordnung 3 genau sechs Fixpunkte. Ist also $x \in G$ ein Element der Ordnung 3, so ist mit V.1.7 Theorem in [FaKr] jeder Punkt in $\mathrm{fix}_{\mathfrak{X}}(x)$ ein Weierstraßpunkt. Nun hat $\mathfrak{X}$ mindestens $\frac{|G|}{3} = 168$ Weierstraßpunkte und insgesamt kann $\mathfrak{X}$ bis zu $\mathfrak{g}(\mathfrak{g}^2-1) = 336 = 2 \cdot 168$ Wei-

erstraßpunkte haben nach III.5.11 Corollary in [FaKr]. Mit Example 4.2 in [MaVö] hat $\mathfrak{X}$ genau 168 Weierstraßpunkte und das sind die Fixpunkte von Elementen von G von Ordnung 3.

Auch hier wäre eine Bereitstellung der Ergebnisse dieses Teilaspekts des BMW-Projekts in einem Computeralgebrasystem wünschenswert. Dabei sollten sowohl die Flächen $\mathfrak{X}$, die Operation von $\mathrm{Aut}(\mathfrak{X})$ auf $\mathfrak{X}$ als auch die Lage der Weierstraßpunkte von $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{X}/\mathrm{Aut}(\mathfrak{X})$ zugänglich sein.

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit bestätige ich, Patrick Salfeld, dass ich diese Dissertationsschrift mit dem Titel

Einfache, nicht-abelsche Gruppen von Automorphismen
von kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht mindestens zwei
in Fixität maximal vier

selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt und die von den Werken wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Halle, den 17.04.2021 ________________________

Literaturverzeichnis

[AsGu] M. Aschbacher & R. Guralnick. Some applications of the first cohomology group. In *Journal of Algebra* 90 (1984), no. 2, 446-460.

[AsSe] M. Aschbacher & G. Seitz. Involutions in Chevalley groups over fields of even order. In *Nagoya Math. J.* 63 (1976), 1-91.

[BMW] B. Baumeister, K. Magaard & R. Waldecker. The Sylow structure of transitive permutation groups acting with fixity 4. In *Albanian J. Math.* 12 (2018), no. 1, 137-145.

[Be1] H. Bender. Endliche zweifach transitive Permutationsgruppen, deren Involutionen keine Fixpunkte haben. In *Math. Z.* 104 (1968), 175-204.

[Be2] H. Bender. Transitive Gruppen gerader Ordnung, in denen jede Involution genau einen Punkt festläßt. In *J. Algebra* 17 (1971), 527-554.

[Bre] T. Breuer. *Characters and Automorphism Groups of Compact Riemann Surfaces.* London Mathematical Society Lecture Note Series, 280. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[Bro] S. A. Broughton. Classifying finite group actions on surfaces of low genus. In *Journal of Pure and Applied Algebra* 69 (1991), no. 3, 233-270.

[Bu1] F. Buekenhout. Transitive groups in which involutions fix one or three points. In *J. Algebra* 23 (1972), 438-451.

[Bu2] F. Buekenhout. Doubly transitive groups in which the maximum number of fixed points of involutions is four. In *Arch. Math. (Basel)* 23 (1972), 362-369.

[BuR1] F. Buekenhout & P. Rowlinson. On $(1,4)$-groups. II. In *J. London Math. Soc. (2)* 8 (1974), 507-513.

[BuR2] F. Buekenhout & P. Rowlinson. On $(1,4)$-groups. III. In *J. London Math. Soc. (2)* 14 (1976), no. 3, 487-495.

[BuT] T. C. Burness & A. R. Thomas. On the involution fixity of exceptional groups of Lie type. In *Internat. J. Algebra Comput.* 28 (2018), no. 3, 411-466.

[Bur] W. Burnside. *Theory of groups of finite order.* 2d ed., Dover Publications, Inc., New York, 1955.

[Car] R. W. Carter. *Simple Groups of Lie type.* Reprint of the 1972 original. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.

[Con1] M. D. E. Conder. An update on Hurwitz groups. In *Groups Complex. Cryptol.* 2 (2010), no. 1, 35-49.

[Con2] M. D. E. Conder. Hurwitz groups: a brief survey. In *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 23 (1990), no. 2, 359-370.

[CWW] M. D. E. Conder, R. A. Wilson & A. J. Woldar. The symmetric genus of sporadic groups. In *Proc. Amer. Math. Soc.* 116 (1992), no. 3, 653-663.

[Atl] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker & R. A. Wilson. *Atlas of finite groups.* Oxford University Press, Eynsham, 1985.

[FaKr] H. M. Farkas & I. Kra. *Riemann Surfaces.* Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 71. Springer-Verlag, New York, 1992.

[FeTh] W. Feit & J. G. Thompson. Solvability of groups of odd order. In *Pacific Journal of Mathematics* 13 (1963), 775-1029.

[GAP] The GAP Group. *GAP – Groups, Algorithms, and Programming.* Version 4.11.0; 2020. (`http://www.gap-system.org/`)

[CHE] M. Geck, G. Hiss, F. Lübeck, G. Malle, and G. Pfeiffer. CHEVIE – A system for computing and processing generic character tables for finite groups of Lie type, Weyl groups and Hecke algebras. In Appl. *Algebra Engrg. Comm. Comput.*, 7 (1996), 175-210.

[GoHa] D. Gorenstein & K. Harada (1974). *Finite groups whose 2-subgroups are generated by at most 4 elements.* Memoirs of the AMS, no 147. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1974.

[GLS3] D. Gorenstein, R. Lyons & R. Solomon. *The classification of the finite simple groups. Number 3. Part I. Chapter A.* Almost simple K-groups. Mathematical Surveys and Monographs, 40.3. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[Hal] M. P. Hale Jr. On the existence of trivial intersection subgroups. In *Trans. Amer. Math. Soc.* 157 (1971), 487-493.

[Her] C. Hering. Zweifach transitive Permutationsgruppen, in denen 2 die maximale Anzahl von Fixpunkten von Involutionen ist. In *Math. Z.* 104 (1968), 150-174.

[Hir] Y. Hiramine. On transitive groups in which the maximal number of fixed points of involutions is five. In *J. Math. Soc. Japan* 30 (1978), no. 2, 215-235.

[HupC] B. Huppert. *Character theory of finite groups.* DeGruyter Expositions in Mathematics, 25. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1998.

[Hup1] B. Huppert. *Endliche Gruppen. I.* Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 134. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967.

[HuB2] B. Huppert & N. Blackburn. *Finite groups. II.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 242. AMD, 44. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982.

[HuB3] B. Huppert & N. Blackburn. *Finite groups. III.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 243. Berlin: Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982.

[Hur] A. Hurwitz. Ueber algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich. In *Mathematische Annalen* 41 (1892), 403-442.

[Iwa] N. Iwahori. On a property of a finite group. In *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I* 11 (1964), 47-64.

[Map] A. James, K. Magaard, S. Shpectorov & H. Völklein. *MapClass. A Package For Mapping Class Orbit Computation.* Version 1.4.4 (2018), Refereed GAP package, `https://gap-packages.github.io/MapClass`.

[Kle] P. B. Kleidman. The maximal subgroups of the Steinberg triality groups ${}^3D_4(q)$ and of their automorphism group. In *Journal of Algebra* 115 (1988), no. 1, 182-199.

[KlLi] P. Kleidman & M. Liebeck. *The subgroup structure of finite classical groups.* London Mathematical Society Lecture Note Series 129. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[KuSt] H. Kurzweil & B. Stellmacher. *Theorie der endlichen Gruppen.* Eine Einführung. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[LiSh] M. W. Liebeck & A. Shalev. On fixed points of elements in primitive permutation groups. In *J. Algebra* 421 (2015), 438-459.

[Mac1] A. M. MacBeath. On a curve of genus 7. In *Proceedings of the London Mathematical Society* 15 (1965), 527-542.

[Mac2] A. M. MacBeath. Hurwitz groups and surfaces. In *The eightfold way*, 103-113. Math. Sci. Res. Inst. Publ., 35, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

[MaVö] K. Magaard & H. Völklein. On Weierstrass points of Hurwitz curves. In *Journal of Algebra* 300 (2006), no. 2, 647-654.

[MaW1] K. Magaard & R. Waldecker. Transitive permutation groups where nontrivial elements have at most two fixed points. In *Journal of Pure and Applied Algebra* 219 (2015), no. 4, 729-759.

[MaW2] K. Magaard & R. Waldecker. Transitive permutation groups with trivial four point stabilizers. In *Journal of Group Theory* 18 (2015), no. 5, 687-740.

[TOM] T. Merkwitz, L. Naughton & G. Pfeiffer. *TomLib, The GAP Library of Tables of Marks*, Version 1.2.9 (2019). GAP package, `https://gap-packages.github.io/tomlib`.

[Mir] R. Miranda. *Algebraic Curves and Riemann surfaces.*Graduate Studies in Mathematics, 5. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.

[PrS1] O. Pretzel & A. Schleiermacher. On permutation groups in which non-trivial elements have p fixed points or none. In *Proc. London Math. Soc. (3)* 30 (1975), no. 4, 471-495.

[PrS2] O. Pretzel & A. Schleiermacher. On permutation groups whose non-trivial elements have at most three fixed points. In *Proc. London Math. Soc. (3)* 31 (1975), no. 1, 1-20.

[PrS2] O. Pretzel & A. Schleiermacher. On permutation groups in which nontrivial elements fix two points or none. In *J. Algebra* 44 (1977), no. 1, 283-289.

[Ron] C. Ronse. On finite permutation groups in which involutions fix at most 15 points. In *Arch. Math. (Basel)* 39 (1982), no. 2, 109-112.

[Ro1] P. Rowlinson. On (1,4)-groups. I. In *J. London Math. Soc. (2)* 8 (1974), 493-498.

[Ro2] P. Rowlinson. On (1,6)-groups. In *J. London Math. Soc. (2)* 14 (1976), no. 3, 481-486.

[Ro3] P. Rowlinson. Simple permutation groups in which an involution fixes a small number of points. I. In *J. London Math. Soc. (2)* 4 (1972), 655-661.

[Ro4] P. Rowlinson. Simple permutation groups in which an involution fixes a small number of points. II. In *Proc. London Math. Soc. (3)* 26 (1973), 463-484.

[SaWa] P. Salfeld & R. Waldecker. The occurence of finite simple permutation groups of fixity 2 as automorphism groups of Riemann surfaces. In *Journal of Algebra* 561 (2020), 402-420.

[Sch] B. Schoeneberg. Über die Weierstrass-Punkte in den Körpern der elliptischen Modulfunktionen. In *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* 17 (1951), 104-111.

[SiFr] W. A. Simpson & J. S. Frame. The character tables for $\mathrm{SL}(3,q)$, $\mathrm{SU}(3,q^2)$, $\mathrm{PSL}(3,q)$, $\mathrm{PSU}(3,q^2)$. In *Canadian Journal of Mathematics* 25 (1973), 486-494.

[Tay] D. E. Taylor. *The Geometry of the Classical Groups*. Sigma Series in Pure Mathematics, 9. Heldermann Verlag, Berlin, 1992.

[Tuc] T. W. Tucker. Finite groups acting on surfaces and the genus of a group. In *J. Combin. Theory Ser. B* 34 (1983), no. 1, 82-98.

[Wil] R. A. Wilson. *The finite simple groups*. Graduate Texts in Mathematics, 251. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2009.

Tabellenverzeichnis

Curriculum Vitae

Persönliche Daten

Name:	Patrick Salfeld
Geburtsdatum:	15.09.1990
Geburtsort:	Blankenburg (Harz)
Nationalität:	Deutsch

Ausbildung

seit Oktober 2016	**Promotionsstudium** an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
10/2010 - 09/2016	**Lehramtsstudium** für das Lehramt an Gymnasien mit den Fächern Mathematik und Informatik an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
08/2003 - 06/2010	**Abitur** am Gymnasium „Am Thie“ in Blankenburg (Harz)

Publikationen

1. P. Salfeld & R. Waldecker. The occurence of finite simple permutation groups of fixity 2 as automorphism groups of Riemann surfaces. In *Journal of Algebra* 561 (2020), 402-420.

2. P. Salfeld. *Permutationsgruppen und Riemannsche Flächen*. Wissenschaftliche Hausarbeit für das Erste Staatsexamen. 2016. 84 Seiten.

Halle, den 17. April 2021