

**Computernumerische Simulation der
Elektrodynamik mithilfe der
Gitter-Boltzmann-Methode und Anwendung auf
die Stimulation durch ein Cochlea-Implantat**

Dissertation

zur Erlangung des Grades

doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

genehmigt durch die Fakultät für Naturwissenschaften der
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

von: Dipl.-Phys. Andreas Hauser

geb. am: 10.08.1986 in Haldensleben

Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil. Jesko L. Verhey

Associate Professor Dr. rer. nat. Bastian Epp

eingereicht am: 14.12.2020

verteidigt am: 31.05.2021

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Gliederung der Arbeit	2
2	Anwendung der Gitter-Boltzmann-Methode auf die Maxwell-Gleichungen	5
2.1	Gitter-Boltzmann-Methode	7
2.1.1	Chapman-Enskog-Entwicklung	8
2.2	Maxwell-Gleichungen	11
2.3	Makroskopische Gleichungen für die Ausbreitung	12
2.3.1	Methode integrierter Medien	13
2.3.2	Methode separierter Medien	14
2.3.3	Erweiterung für leitende Medien und Ströme	16
2.4	Simulationsergebnisse	18
2.4.1	Fehlerskalierung	18
2.4.2	Numerische Stabilität	21
2.4.3	Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle	25
2.4.4	Skin-Effekt	29
2.4.5	Statischer Grenzfall	34
2.5	Zusammenfassung: Kapitel 2	37
3	Optimierung des Verfahrens und dispersive Medien	39
3.1	Gitter-Boltzmann-Methode	40
3.1.1	GBM-Beschreibung	40
3.2	Simulationsergebnisse	45
3.2.1	Fehlerskalierung	45
3.2.2	Stromquellen	47
3.2.3	Gitterimpedanz	50
3.2.4	Fehlerskalierung und Energieerhaltung	52
3.3	Dispersion	60
3.4	Simulation der Deby-Relaxation	63
3.4.1	Elektrostatistischer Grenzfall	63
3.4.2	EM-Welle	63

3.5	Zusammenfassung: Kapitel 3	67
4	Simulation der Cochlea-Implantat-Stimulation	69
4.1	Cochlea-Modell	75
4.2	Simulationen	81
4.3	Beziehung zum Perzept	89
4.4	Zusammenfassung: Kapitel 4	98
5	Gesamtzusammenfassung und Ausblick	99
	Literaturverzeichnis	101

Abkürzungsverzeichnis

Abb. Abbildung

BKG Bhatnagar-Gross-Krook

BP Biphasischer Puls

CFD numerische Strömungsmechanik (Computational Fluid Dynamics)

CI Cochlea-Implantat

EM elektromagnetisch

FDTD Finite-Differenzen-Methode im Zeitbereich (Finite Difference Time Domain)

GB Gitter-Boltzmann

GBKG Gitter-Bhatnagar-Gross-Krook

GBM Gitter-Boltzmann Methode

IPG Puls erhöhter Interphasenlücke (Inter Phase Gap)

PD Puls erhöhter Phasendauer (Phase Duration)

TP Triphasischer Puls

Kapitel

Einleitung

Ertaubten Menschen, deren Hörnerv unabhängig von der Ursache ihrer Ertaubung, noch intakt ist, können mit einem sogenannten „Cochlea“ (Hörschnecke)-Implantat (CI) versorgt werden. Bei einem CI handelt es sich um eine sogenannte Neuroprothese [1, 2, 3]. Gegenwärtig gibt es keine andere Art dieser Prothesen mit vergleichbarem Erfolg. Bereits im frühen 19. Jahrhundert entdeckte Alessandro Volta zufällig, dass ein auditorisches Perzept mithilfe von elektrischem Strom zu erzielen war [4]. Dazu steckte er sich zwei Kugelelektroden in jedes Ohr und verband diese über eine Batterie. Nach Betätigen eines Kippschalters, so der Beschreibung nach, vernahm Volta ein „Knistern“ und „Brodeln“. Historisch ist nach wie vor recht unklar, wann die ersten Elektroden implantiert wurden, da in den Anfängen kaum jemand diese ersten Schritte schriftlich festgehalten hat [4]. Nach gegenwärtigem Kenntnisstand wurde die erste Implantation einer Kugelelektrode von William House und John Doyle im Jahr 1961 in Los Angeles durchgeführt. Die Idee dahinter wird durch die Tatsache motiviert, dass der vom zentralen Nervensystem kommende Hörnerv sich in der Cochlea verästelt und von dort aus elektrisch stimuliert werden kann. In Abhängigkeit vom jeweiligen Ort der Innervation in der Cochlea werden unterschiedliche Frequenzen oder Tonhöhen bei einer Stimulation wahrgenommen. In der Spitze der Cochlea (Apex) werden niederfrequente und am Fuß der Cochlea (Basis) die hochfrequenten Töne abgebildet. Eine einzelne Elektrode kann jedoch Nervenfasern nur in einem räumlich begrenzten Bereich in der Cochlea stimulieren. Die Implantation der ersten Mehrkanalelektrode, bestehend aus sechs Elektroden, wurde 1964 von Blair Simmons und Robert White in Stanford durchgeführt [5]. Mitte der 1970er Jahre wurden diese sogenannte Mehrkanalelektroden von unterschiedlichen Entwicklern erarbeitet. Mit der Kommerzialisierung von CIs Anfang der 1980er Jahre hat sich bis zum heutigen Zeitpunkt wenig an der Technologie dieser Implantate geändert. Warum CIs derart erfolgreich bei der Wiederherstellung der Hörwahrnehmung und vor allem des Sprachverstehens sind, ist noch nicht vollständig geklärt. Im Allgemeinen geht man davon aus, dass ein elektrisches Feld am Ort der Nervenfasern in ausreichender Stärke vorliegen muss, damit es zu einer

Wahrnehmung (Perzept) bzw. einem Höreindruck kommt. Computernumerische Simulationen werden unter Berücksichtigung der Anatomie und der jeweiligen elektrischen Gewebeeigenschaften durchgeführt, um den Verlauf des elektrischen Potentials mit denen am Tiermodell zu vergleichen. Es wird angenommen, dass eine rein elektrostatische Betrachtung der elektrischen Stimulation durch das CI ausreichend ist, um den Zusammenhang zwischen der Stimulation und dem Perzept zu herauszuarbeiten [6, 7]. Diese Annahme kann jedoch nicht erklären, warum sich auf Ebene der Zeitskala des Strompulses Abhängigkeiten einstellen, wenn die auf dieser Skala ablaufenden Prozesse bereits als statisch anzusehen sind [8, 9, 10, 11, 12]. Es ist jedoch bekannt, dass biologisches Gewebe stark dispersive optoelektrische Eigenschaften besitzt, wovon besonders das Nervengewebe betroffen ist [13, 14, 15]. In Anbetracht dessen erscheint es gerade zu zwingend, die elektrodynamischen Prozesse zu erfassen, da diese nicht über den statischen Grenzfall zu beschreiben sind. Aufgrund der vergleichsweise großen Komplexität der geometrischen Struktur und Feinheiten der Cochlea sowie dem Elektrodensträger, ist eine Simulation mit einer minimalen räumlichen Auflösung notwendig. Damit ist eine große Anzahl an Iterationsschritten verbunden, um in einem praxisnahen Zeitfenster Simulationsdaten zu gewinnen. Gegenwärtige computernumerische Verfahren kommen dabei schnell an ihre Grenzen. Grund dafür sind nicht allein die anfallenden Rechenzeiten oder die benötigte Menge an Arbeitsspeicher, sondern viel mehr die intrinsischen Eigenschaften von Methoden, die im Allgemeinen auf das Verfahren der „finiten Elementen“ zurückgehen. Zu diesen gehören der Einfluss der Gitterimpedanz oder etwa die Verletzung von Erhaltungsgrößen, so z. B. von Energie- oder Impulserhaltung [16, 17]. Die Hürde bei der Simulation der vollständigen Elektrodynamik der Stimulation über ein CI ist demnach limitiert. Aus diesem Grund soll in der vorliegenden Arbeit ein Verfahren – basierend auf dem Gitter-Boltzmann-Modell – erarbeitet werden, das frei von den genannten Einschränkungen ist.

1.1 Gliederung der Arbeit

Die vorliegende Arbeit ist in drei große Themenkomplexe gegliedert. Zunächst wird in Kapitel 2 die Gitter-Boltzmann-Methode basierend auf die von L. Yanhong und Y. Guangwu vorgeschlagene Gitter-Boltzmann-Methode (GBM) [18] vorgestellt. Diese Methode wird hinsichtlich auf die von den Autoren vorgeschlagenen Ansatz zur Implementierung von Medien untersucht und für Langzeitsimulationen durch einen alternativen Ansatz erweitert. Das erlaubt eine stabile Implementierung von

konstanter Permittivität und Permeabilität, also dielektrische und magnetische Medien. Dieser Ansatz wird in Kapitel 2.4 anhand von Simulationen hinsichtlich der numerischen Stabilität, Fehlerskalierung und Genauigkeit untersucht.

Da dieses Modell einen vergleichsweise großen Satz an sogenannten Verteilungsgrößen benötigt, ist die Menge an benötigtem Arbeitsspeicher sowie der anfallenden Rechenzeit noch ungeeignet für Langzeitsimulationen. Um dem zu entgegen, wird in Kapitel 3 ein alternatives Gitter-Boltzmann-Modell vorgestellt, welches auf dem von M. Mendoza und J. D. Muñoz [19] vorgeschlagenen Ansatz basiert. Dieser Ansatz wird hier hinsichtlich der Erhöhung der räumlichen Auflösung und der Verringerung der Anzahl verwendeter Verteilungsgrößen sowie um das in Kapitel 2 vorgestellte Verfahren für Medien weiterentwickelt. Im nachfolgenden Kapitel 3.3 wird eine Erweiterung der Implementierung von Medieneigenschaften vorgestellt, welche dem Debyschen-Relaxationsmodell folgt und für multiple Komposite geeignet ist. Eine Untersuchung der Stabilität und Genauigkeit sowie Vergleiche von Simulationsergebnissen, die aus dem Gitter-Boltzmann-Modell und der sogenannten Yee-Methode gewonnen wurden, findet in Kapitel 3.2 statt.

In Kapitel 4 wird die Simulation eines Cochlea-Implantats in einer typischen Umgebung nach Elektrodenträger-Insertion vorgestellt. Dazu werden zunächst die wichtigsten anatomischen Strukturen, ein typisches Implantatsystem und die neuroanatomische Struktur der Nervenfasern dargestellt sowie die Formen der Pulse, die für die elektrische Stimulation verwendet wurden. Auf Grundlage der Simulationsdaten wird in Kapitel 4.3 eine Relation zwischen dem mittleren Betrag der Polarisation des Nervengewebes mit der psychoakustischen Größe Lautstärke hergestellt. Die getroffenen Zusammenhänge werden auf Grundlage klinisch gesammelter Erfahrung miteinander quantitativ in Bezug gesetzt.

Jeder Themenkomplex ist von einer eigenen Zusammenfassung abgeschlossen, da diese teilweise bereits veröffentlicht worden sind. In Kapitel 5 wird die gesamte Arbeit im Kontext aller Kapitel nochmals zusammengefasst.

Anwendung der Gitter-Boltzmann-Methode auf die Maxwell-Gleichungen

Die Gitter-Boltzmann (GB) -Gleichung wurde ursprünglich für Fluidsimulationen entwickelt [20] und aus den Gittergasautomaten [21] abgeleitet. Sie stellt damit eine Diskretisierung der Boltzmann-Gleichung [22] dar. Diese Methode, im Folgenden als GBM bezeichnet, wird typischerweise zur Beschreibung der statistischen Mechanik eines mikroskopischen Vielteilchensystems verwendet. Zu solchen Vielteilchensystemen gehören z. B. inkompressible Flüssigkeiten. Eine solche Flüssigkeit wird üblicherweise über makroskopische Differentialgleichungen der messbaren Observablen beschrieben. Eine analytische Betrachtung der GBM erlaubt es, aus solchen Systemen die Navier-Stokes-Gleichung im Rahmen einer Näherung zu entwickeln [23, 24], die eine klassische Beschreibung inkompressibler Flüssigkeiten darstellt. Im Gegensatz zu anderen häufig verwendeten computernumerischen Verfahren, die eine endliche räumliche und zeitliche Diskretisierung dieser makroskopischen Gleichungen verwenden, diskretisiert die GBM die zugrunde liegenden mikroskopischen Gleichungen durch Einführung eines Satzes von Verteilungsgrößen. Die messbaren Observablen werden dann über eine spezifische Summenregel dieser mikroskopischen Verteilungsgrößen gewonnen.

Die ersten Anwendungen für Fluidsimulationen [25] zeigten, dass diese GBM ein effizientes alternatives Verfahren darstellt. Dies schließt die Kontinuitätsgleichung ein, von der in der Physik häufig dann Gebrauch gemacht wird, wenn Erhaltungsgrößen betrachtet werden. Seit den späten 1980er Jahren wird die GBM für eine Vielzahl anderer physikalischer Probleme verwendet, so z. B. für die Simulation von Mehrkomponentenfluiden [26, 27] und hydro-chemischen Phänomenen [28], Wärmeübertragung [29, 30], Transport in porösen [31] und elastischen [32] Medien, Strömungen unter bestimmten Randbedingungen [33, 34], Phasenübergängen [35, 36], Elektrokinetik [37, 38, 39, 40] und für die Maxwell'schen Gleichungen [41, 19, 18],

akustischen Fragestellungen [42, 43], Nicht-Newton-Flüssigkeiten [44], verschiedenen Wechselwirkungen an Grenzschichten [45, 46, 47, 48, 49] wie Reflexion oder Druck, Konvektion [50], Euler- [51] oder Wellengleichung [52] und nichtlineare und komplexe Gleichungen [53] wie die nicht-relativistische Schrödinger-Gleichung [54] oder die eindimensionale relativistische Dirac-Gleichung [55] in der Quantenmechanik [56, 57]. Dies ist möglich, da die GBM für Simulationen eines speziellen Typs gewöhnlicher Differentialgleichungen geeignet ist. Obwohl es sich um eine einfach zu implementierende Methode handelt, ist es schwierig, sie zu modifizieren und somit auf artverwandte Fragestellungen zu übertragen ohne die numerische Stabilität zu gefährden. Einschränkungen erfährt diese Methode beispielsweise durch eine fest vorgegebene Geometrie der Gitterzelle. Diese Einschränkung wirkt sich auf die Freiheit der Wahl von Grenzflächen aus [58], die somit nur bedingt gekrümmt sein können. Durch die Verwendung von Approximationen [59] und dem Hinzufügen zusätzlicher Terme zu den makroskopischen Gleichungen, die beispielsweise Quellen oder Kräften [60] entsprechen, wird die Genauigkeit und unter Umständen auch die Stabilität stark beeinflusst. Trotz der im Allgemeinen hohen Genauigkeit können prinzipiell stets Instabilitäten unter bestimmten Bedingungen auftreten [61]. Zur besseren Kontrolle dieser Instabilitäten wurden Erweiterungen wie z. B. ein implizites Schema [62], ein Schema höherer Ordnung [63] oder mehrerer Relaxationszeiten [64] verwendet. Jede dieser Erweiterungen erhöht die erforderliche Rechenzeit und den benötigten Arbeitsspeicher der Simulationen erheblich.

Im Rahmen dieser Arbeit soll der Fokus auf die Möglichkeit zur Simulation der Elektrodynamik mit Hilfe einer GBM gelenkt werden. Historisch gesehen war es Delar [39], der zu erst die Kinematik von Ferrofluiden über ein Gitter-Boltzmann (GB)-Modell beschrieben hat und dieses Modell in nachfolgenden Studien auf Simulationen der Magnetohydrodynamik [65] hin erweiterte. Spätere Studien berücksichtigten andere Systeme mit Eigenschaften, die durch die Maxwell-Gleichungen [66, 19, 18] beschrieben wurden. Zum Beispiel zeigten Liu und Yan [18] eine GBM, um die Genauigkeit der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen einschließlich der Wechselwirkung mit Medien zu verbessern. Sie zeigten jedoch nur Simulationen im reinen Vakuum und gaben einen Ausblick darauf, wie der Einfluss von Medien prinzipiell realisiert werden kann, ohne dieses zu prüfen.

Mendoza und Muñoz [19] verwendeten einen anderen Ansatz für ihre GBM, um die Ausbreitung elektromagnetischer (EM) Wellen in homogenen Medien zu simulieren. Sie erwähnten Instabilitäten in ihren Simulationen, die nach Ansicht der Autoren durch die Verwendung geglätteter oder unscharfer Übergänge zwischen

den Materialeigenschaften vermieden werden könnten.

Für die Propagation von EM-Wellen in inhomogenen Medien schlugen Hanasoge et al. [40] einen Ansatz über die GB-Gleichung vor. Die Autoren erwähnten auch hier ebenfalls Schwierigkeiten bei der numerischen Stabilität bei Vorhandensein scharfer Grenzflächen. Sie argumentieren, dass diese Instabilitäten das Ergebnis von Termen höherer Ordnung in der sogenannten Chapman-Enskog-Entwicklung sind, die in solchen Fällen mit hohen Gradienten in den Medienparametern möglicherweise nicht mehr vernachlässigbar sind. Aus anderen Modellen ist bekannt, dass solche Instabilitäten durch das sogenannte „Steifheits-Problem“ verursacht werden, das sich aus unterschiedlichen Größen von Eigenschaften in den Zeitentwicklungsschemata ergibt, wie es typischerweise am Beipfeil der Mehrphasenfluide [67, 68] auftritt. In diesem Kapitel wird eine GBM basierend auf [18] für die Maxwell-Gleichungen verwendet. Es wird eine Erweiterung vorgeschlagen, die stabile Simulationen von EM-Wellen ermöglicht, die sich in einer Zusammensetzung homogener Medien ausbreiten können. Es werden zudem Simulationen bezüglich der Stabilität bei verschiedenen Übergangsbedingungen der Medienparameter, welche die Grenzflächen definieren, modelliert und untersucht. Teile dieses Kapitels sind in [41] veröffentlicht worden.

2.1 Gitter-Boltzmann-Methode

Mit der GBM als Näherung der Boltzmann-Gleichung [69] durch die Diskretisierung des Simulationsgebietes in Gitterzellen, kann diese diskretisierte Boltzmann-Gleichung als

$$f_i(\mathbf{r} + \mathbf{v}_i \delta t, t + \delta t) = f_i(\mathbf{r}, t) + \sum_j \Omega_{ij}(\mathbf{r}, t), \quad (2.1)$$

geschrieben werden, wobei f_i einer Teilchendichte zum Zeitpunkt t entspricht und sich in der Zelle befindet, die durch den Vektor \mathbf{r} bezeichnet wird. Diese Teilchendichte bewegt sich in Richtung \mathbf{v}_i zu ihrer Nachbarzelle und nimmt eine durch die Kollisionsmatrix Ω_{ij} definierte Menge an Teilchendichte mit sich. Normalerweise sind diese Zellen in einem Raster angeordnet, das einem Gitter entspricht. Es wird hier ein Gitter, das als „D3Q7“ [70] bekannt ist, verwendet. Das „D“ steht für die Dimension und ist gefolgt von der Zahl der Dimensionalität. Dieser folgt „Q“, welches sich auf die Anzahl der Gittervektoren bezieht und dem wiederum deren Anzahl folgt. Dieses „D3Q7“-Gitter ist in Abb. 2.1 dargestellt.

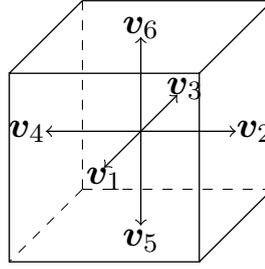


Abbildung 2.1: Ein D3Q7-Gitter und die Richtungen der Gitterströmungsvektoren \mathbf{v}_i , die zu ihrem f_i innerhalb einer Zelle gehören.

Ein einfacher und häufig verwendeter Fall für Ω_{ij} ist der sogenannte „Bhatnagar-Gross-Krook“ (BGK) Kollisionsoperator mit

$$\Omega_{ij}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\tau}(f_i^{eq}(\mathbf{r}, t) - f_i(\mathbf{r}, t)), \quad (2.2)$$

wobei τ einer Relaxationszeit in Richtung eines Gleichgewichts f_i^{eq} entspricht. Die „Chapman-Enskog“-Erweiterung ermöglicht die Vorhersage der Kontinuumsgleichung für $\tau = \frac{1}{2}$ [71], so dass (2.1) als

$$f_i(\mathbf{r} + \mathbf{v}_i \delta t, t + \delta t) = 2f_i^{eq}(\mathbf{r}, t) - f_i(\mathbf{r}, t) \quad (2.3)$$

geschrieben werden kann. Ein solches Modell wie in (2.3) dargestellt, wird als Gitter-BGK (GBGK)-Modell bezeichnet. Da τ im Allgemeinen ein fester Wert zugewiesen wird, gehört dieses Modell nicht zum Typ des Relaxations-GB-Modells, in dem τ Eigenschaften makroskopischer Transportmechanismen darstellt, wie z. B. die Viskosität in der Fluidodynamik. Daher arbeitet dieses GBM in einem „Stream-and-Compute“-Verfahren für lokale Gleichgewichte. Eine Entwicklung von (2.3) mit $\tau = \frac{1}{2}$ bis zur zweiten Ordnung in δt im Rahmen der Chapman-Enskog-Entwicklung ergibt näherungsweise

$$\sum_i \left(\partial_t f_i^{eq} + \sum_\alpha v_{\alpha i} \partial_\alpha f_i^{eq} \right) = 0, \quad (2.4)$$

mit $v_{\alpha i}$ für die α -Komponente von \mathbf{v}_i , wie im nächsten Kapitel gezeigt wird.

2.1.1 Chapman-Enskog-Entwicklung

Die Chapman-Enskog-Entwicklung ist eine Methode zur Ableitung der Differentialgleichung, die die Entwicklung einer Größe f beschreibt, die durch die Boltzmann-

Gleichung beschrieben wird. Für die GB-Gleichung (2.1) wird das BGK-Modell (2.2) gewählt, womit man

$$f_i(\mathbf{r} + \mathbf{v}_i \delta t, t + \delta t) = f_i(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\tau} (f_i^{eq}(\mathbf{r}, t) - f_i(\mathbf{r}, t)) \quad (2.5)$$

erhält. Eine Taylor-Reihenerweiterung wird jetzt auf den linken Term von (2.5) angewendet, womit sich

$$f_i(\mathbf{r} + \mathbf{v}_i \delta t, t + \delta t) = f_i(\mathbf{r}, t) + \delta t D_i f_i(\mathbf{r}, t) + \frac{\delta t^2}{2} D_i^2 f_i(\mathbf{r}, t) + \mathcal{O}(\delta t^3) \quad (2.6)$$

mit dem zeitlichen Schritt δt und dem vollständigen zeitlichen Differential D_i , ergibt. Der Index i im Differential bezieht sich allein auf die Richtung des dazugehörigen Richtungsvektors \mathbf{v}_i , welcher

$$D_i := \partial_t + \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} v_{\alpha, i} \partial_\alpha \quad (2.7)$$

lautet. Die Chapman-Enskog-Entwicklung macht nun den Ansatz, dass f_i und D_i jeweils als Potenzreihen von δt ausgedrückt werden, die lesen

$$f_i := \sum_{n=0} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \delta t^n f_i^{(n)}, \quad (2.8a)$$

$$D_i := \sum_{n=0} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \delta t^n D_i^{(n)}. \quad (2.8b)$$

Die Gleichungen (2.8) und (2.6) werden jetzt in (2.5) eingefügt. Unter der Annahme $D_i \approx D_i^{(0)}$ werden Terme nach gleicher Potenz von δt zusammengefasst, womit sich bis zur zweiten Ordnung

$$\delta_t^0 : \quad f_i^{(0)} = f_i^{eq}, \quad (2.9a)$$

$$\delta_t^1 : \quad f_i^{(1)} = -\tau D_i^{(0)} f_i^{(0)}, \quad (2.9b)$$

$$\begin{aligned} \delta_t^2 : \quad f_i^{(2)} &= -\tau \left(D_i^{(0)} f_i^{(1)} + \frac{1}{2} D_i^{(0)2} f_i^{(0)} + D_i^{(1)} f_i^{(0)} \right) \\ &= \left(\tau^2 - \frac{\tau}{2} \right) D_i^{(0)2} f_i^{(0)} - \tau D_i^{(1)} f_i^{(0)} \end{aligned} \quad (2.9c)$$

ergibt. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass in der Chapman-Enskog-Entwicklung der Operator D_i ebenfalls als Reihe von Potenzen in δt angenommen wird. Die

Gleichung (2.7) beschreibt hier lediglich den Term nullter Ordnung. Im Rahmen der Simulation hydrodynamischer Fragestellungen ist dieser Schritt zwingend erforderlich, wenn z. B. das Phänomen der Viskosität erzeugt werden soll. Wenn diese Terme hier ebenfalls als von null verschieden angesehen werden sollen, erhielte man bereits in der ersten Ordnung von δt in (2.9) zusätzliche Terme. Diese zusätzlichen Terme würden dann wiederum – ähnlich zur Viskosität – Dissipationen mit sich bringen. Die Maxwell-Gleichungen würden somit nicht akkurat simulierbar sein und die Simulationsergebnisse stünden dann im Widerspruch zur theoretischen Vorhersage. Wie später anhand diverser Beispiele gezeigt wird, ist dies hier nicht der Fall. Mit diesem Ausdruck für $f_i^{(n)}$ erhält man für (2.8a)

$$f_i = f_i^{eq} - \tau D_i f_i^{eq} \delta t + \left(\tau^2 - \frac{\tau}{2} \right) D_i^2 f_i^{eq} \delta t^2 + \mathcal{O}(\delta t^3). \quad (2.10)$$

Unter der Annahme, dass $\sum_i f_i = \sum_i f_i^{eq}$ gilt, erhält man mit (2.10)

$$\sum_i f_i^{eq} = \sum_i \left(f_i^{eq} - \tau D_i f_i^{eq} \delta t + \left(\tau^2 - \frac{\tau}{2} \right) D_i^2 f_i^{eq} \delta t^2 + \mathcal{O}(\delta t^3) \right). \quad (2.11)$$

Die Terme $\sum_i f_i^{eq}$ auf beiden Seiten in (2.11) heben sich auf. Die Terme höherer Ordnung $\mathcal{O}(\delta t^3)$ werden vernachlässigt und man erhält nach Kürzen des τ im Zähler

$$D_i \sum_i f_i^{eq} \approx \delta t \left(\tau - \frac{1}{2} \right) D_i^2 \sum_i f_i^{eq}. \quad (2.12)$$

Setzt man dann $\tau = \frac{1}{2}$ und (2.7) für D_i in (2.12), so ergibt sich

$$\sum_i \left(\partial_t f_i^{eq} + \sum_\alpha v_{\alpha i} \partial_\alpha f_i^{eq} \right) \approx 0. \quad (2.13)$$

Mit dieser Approximation lässt sich eine Näherung der Kontinuitätsgleichung für die Größe $\sum_i f_i^{eq}$ gewinnen, die eine Genauigkeit zweiter Ordnung besitzt. Mit dieser Kontinuitätsgleichung erhält man die Möglichkeit, die Elektrodynamik über die Maxwell-Gleichungen zu simulieren.

2.2 Maxwell-Gleichungen

Bei den Maxwell-Gleichungen handelt es sich um einen Satz von zwei linearen homogenen und zwei inhomogenen Differentialgleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}, \quad (2.14a,b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{j}, \quad (2.14c,d)$$

mit der magnetischen Induktion \mathbf{B} , dem elektrischen Feld \mathbf{E} , dem Verschiebungsfeld \mathbf{D} , der Ladungsdichte ρ , dem Magnetfeld \mathbf{H} und dem Stromdichte \mathbf{j} . Hierbei steht der Nabla-Operator ∇ vor einem Vektor für die räumliche Ableitung und der Punkt auf einem Vektor für die zeitliche Ableitung des entsprechenden Vektors. Die Materialgleichungen sind definiert über

$$\mathbf{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E} := \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (2.15a)$$

$$\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} := \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad (2.15b)$$

mit dem Polarisationsvektor \mathbf{P} und der Magnetisierung \mathbf{M} und der Vakuumpermittivität ε_0 (Permeabilität μ_0) und der relativen Permittivität ε_r (Permeabilität μ_r), die als konstant angenommen werden. Zur Vereinfachung der Numerik soll das Heaviside-Lorentz-Einheitensystem mit $\varepsilon_0 := 1$ und $\mu_0 := 1$ gewählt werden, wodurch die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum mit $c_0 = 1$ in dimensionslosen Einheiten festgelegt wird. Aus der Erhaltung der Ladungsdichte $D_t \rho = 0$ und der beiden Maxwell-Gleichungen $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ und $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \dot{\mathbf{D}}$ durch zusätzliche Anwendung von ∇ , erhält man

$$\partial_t \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.16a)$$

$$\partial_t (\nabla \cdot \mathbf{D} - \rho) = 0. \quad (2.16b)$$

Sobald die zeitlichen Ableitungen dieser beiden Gleichungen zu einem beliebigen Zeitpunkt null sind, werden sie für alle Zeitpunkte ebenfalls null sein womit dann alle Gleichungen in (2.14) erfüllt sind.

Die Kontinuitätsgleichung für die Energiedichte

$$w = \frac{1}{2} (\varepsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2) \quad (2.17)$$

ist in Form des Satzes von Poynting mit

$$\partial_t w + \nabla \mathbf{S} + \mathbf{E} \mathbf{j} = 0 \quad (2.18)$$

gegeben. Dieser Satz führt die Energieflussdichte ein, die als Poynting-Vektor bekannt ist

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (2.19)$$

Dieser Vektor \mathbf{S} zeigt in die Richtung des Wellenvektors der sich ausbreitenden Felder [72].

2.3 Makroskopische Gleichungen für die Ausbreitung

Gemäß [18] wird (2.13) für jede Vektorkomponente von \mathbf{E} und \mathbf{H} in den Maxwell-Gleichungen (2.14) verwendet. Es werden die Verteilungsgrößen $e_{\alpha,i}(\mathbf{r}, t)$, $h_{\alpha,i}(\mathbf{r}, t)$ eingeführt, aus denen die makroskopischen Größen – die Feldkomponenten – gemäß

$$\varepsilon_r E_\alpha(\mathbf{r}, t) = \sum_i e_{\alpha,i}(\mathbf{r}, t), \quad (2.20a)$$

$$\mu_r H_\alpha(\mathbf{r}, t) = \sum_i h_{\alpha,i}(\mathbf{r}, t) \quad (2.20b)$$

berechnet werden. Unter Verwendung von (2.3) für die zeitliche Entwicklung dieser Verteilungen erhalten wir

$$e_{\alpha,i}(\mathbf{r} + \mathbf{v}_i \delta t, t + \delta t) = 2e_{\alpha,i}^{eq}(\mathbf{r}, t) - e_{\alpha,i}(\mathbf{r}, t), \quad (2.21a)$$

$$h_{\alpha,i}(\mathbf{r} + \mathbf{v}_i \delta t, t + \delta t) = 2h_{\alpha,i}^{eq}(\mathbf{r}, t) - h_{\alpha,i}(\mathbf{r}, t) \quad (2.21b)$$

mit ihren Gleichgewichten

$$e_{\alpha,i}^{eq} = \frac{1}{6} \left(\varepsilon_r E_\alpha - \sum_{\beta,\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} v_{\beta,i} H_\gamma \right), \quad (2.22a)$$

$$h_{\alpha,i}^{eq} = \frac{1}{6} \left(\mu_r H_\alpha + \sum_{\beta,\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} v_{\beta,i} E_\gamma \right). \quad (2.22b)$$

Diese GBM wird im Folgenden als „integriertes“ Modell bezeichnet, da ε_r und μ_r Teil des Strömungs-Schritts (2.1) in (2.22) sind.

2.3.1 Methode integrierter Medien

Die makroskopischen Feldkomponenten von \mathbf{E} und \mathbf{H} werden mit (2.20) und ihren Boltzmann-Gleichungen (2.21) bestimmt, wobei hierfür die vorgeschlagenen Gleichgewichte (2.22) aus [18] verwendet werden. Um die Maxwell-Gleichungen über (2.13) zu erhalten, wird der Satz an Strömungs-Vektoren \mathbf{v}_i , wie in Abb. 2.1 gezeigt, verwendet, welche die erforderlichen Beziehungen in der Form

$$\sum_{i=1}^6 v_{\alpha,i} = 0, \quad (2.23a)$$

$$\sum_{i=1}^6 v_{\alpha,i} v_{\beta,i} = 6\delta_{\alpha\beta} \quad (2.23b)$$

erfüllen. In Analogie zum Vorgehen, wie in Kapitel 2.1.1 beschrieben, wird f_i durch $e_{\alpha,i}$ für E_α , bzw. $h_{\alpha,i}$ für H_α , und f_i^{eq} durch (2.22) ersetzt und man erhält unter Berücksichtigung von (2.23a)

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^6 \frac{1}{6} (\partial_t + \sum_{\eta} v_{\eta,i} \partial_{\eta}) \left(\varepsilon_r E_\alpha - \sum_{\beta,\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} v_{\beta,i} H_\gamma \right) \\ &= \sum_{i=1}^6 \frac{1}{6} \left[\varepsilon_r \partial_t E_\alpha - \sum_{\beta,\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} v_{\beta,i} \partial_t H_\gamma + \right. \\ &\quad \left. \sum_{\eta} \left(\varepsilon_r v_{\eta,i} \partial_{\eta} E_\alpha - \sum_{\beta,\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} v_{\beta,i} v_{\eta,i} \partial_{\eta} H_\gamma \right) \right] \\ &\equiv \sum_{i=1}^6 \frac{1}{6} \left(\varepsilon_r \partial_t E_\alpha - \sum_{\beta,\gamma,\eta} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} v_{\beta,i}^2 \delta_{\beta\eta} \partial_{\eta} H_\gamma \right). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Wenn man (2.23b) für (2.24) verwendet und über alle i summiert, ergibt sich

$$0 = \varepsilon_r \partial_t E_\alpha - \sum_{\beta,\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_{\beta} H_\gamma. \quad (2.25)$$

Analog zum Vorgehen von (2.24) für (2.25) erhält man für H_α durch das Ersetzen von f_i durch $h_{\alpha,i}$ und f_i^{eq} durch (2.22b)

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{i=1}^6 \frac{1}{6} (\partial_t + \sum_{\eta} v_{\eta,i} \partial_{\eta}) \left(\mu_r H_\alpha + \sum_{\beta,\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} v_{\beta,i} E_\gamma \right) \\
 &= \sum_{i=1}^6 \frac{1}{6} \left[\mu_r \partial_t H_\alpha + \sum_{\beta,\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} v_{\beta,i} \partial_t E_\gamma + \right. \\
 &\quad \left. \sum_{\eta} \left(\mu_r v_{\eta,i} \partial_{\eta} H_\alpha + \sum_{\beta,\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} v_{\beta,i} v_{\eta,i} \partial_{\eta} E_\gamma \right) \right] \\
 &= \mu_r \partial_t H_\alpha + \sum_{\beta,\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_{\beta} E_\gamma.
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Unter Verwendung der Gleichgewichte (2.22) für die GB-Gleichungen (2.21) erhält man nun die beiden Maxwell-Gleichungen

$$\partial_t (\epsilon_r E_\alpha(\mathbf{r}, t)) = \sum_{\beta,\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_{\beta} H_\gamma(\mathbf{r}, t), \tag{2.27a}$$

$$\partial_t (\mu_r \partial_t H_\alpha(\mathbf{r}, t)) = - \sum_{\beta,\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_{\beta} E_\gamma(\mathbf{r}, t). \tag{2.27b}$$

Die Stabilität der Simulation einer z. B. sich ausbreitenden EM-Welle bleibt in homogenen Medien ohne Übergänge – d. h. Änderungen in den Materialparametern – stabil, da es sich bei dem bis hier hin vorgestellten Modell um einen Grenzfall dessen handelt, wie er in [18] beschrieben wurde. Mit der Erkenntnis, dass der Grenzfall des reinen Vakuums durch $\epsilon_r = 1$ und $\mu_r = 1$ für (2.22) stabil ist, ist anzunehmen, dass durch zusätzliche Verteilungen, z. B. $e_{\alpha,0}^{eq}$ und $h_{\alpha,0}^{eq}$, der Einfluss von Medien eingetragen werden kann. Es stellt sich als günstig heraus, dass ein Modell mit zusätzlichen Nullvektoren, welche die Interaktion mit Medien beschreiben können, realisierbar ist und im Folgenden als „separiert“ bezeichnet wird.

2.3.2 Methode separierter Medien

Die Separierung ist eine Erweiterung des in Kapitel 2.3.1 abgeleiteten integrierten Modells im Grenzbereich des Vakuums. Hier wurden alle in Fig. 2.1 gezeigten Vektoren \mathbf{v}_i mit einem von Null verschiedenem Betrag verwendet. Diese Erweiterung verwendet jetzt Nullvektoren, die den zusätzlichen Verteilungen $e_{\alpha,0}$ und $h_{\alpha,0}$

2.3 Makroskopische Gleichungen für die Ausbreitung

zugewiesen sind. Diese Größen sind in der Lage, den Einfluss der Polarisation

$$P_\alpha := (\varepsilon_r - 1)E_\alpha \equiv e_{\alpha,0}^{eq} \quad (2.28)$$

und Magnetisierung

$$M_\alpha := (\mu_r - 1)H_\alpha \equiv h_{\alpha,0}^{eq} \quad (2.29)$$

als Interaktion von EM-Feldern mit Medien zu beschreiben. Die zusätzlichen GB-Gleichungen lauten somit

$$\begin{aligned} e_{\alpha,0}(\mathbf{r}, t + \delta t) &= 2e_{\alpha,0}^{eq}(\mathbf{r}, t) - e_{\alpha,0}(\mathbf{r}, t), \\ h_{\alpha,0}(\mathbf{r}, t + \delta t) &= 2h_{\alpha,0}^{eq}(\mathbf{r}, t) - h_{\alpha,0}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (2.30)$$

und gehorchen gemäß den Ableitungen analog zu jenen in Kapitel 2.1.1

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^6 (\partial_t + \sum_{\eta} v_{\eta,i} \partial_{\eta}) [(\varepsilon_r - 1) E_\alpha] = (\varepsilon_r - 1) \partial_t E_\alpha, \\ 0 &= \sum_{i=1}^6 (\partial_t + \sum_{\eta} v_{\eta,i} \partial_{\eta}) [(\mu_r - 1) H_\alpha] = (\mu_r - 1) \partial_t H_\alpha. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Unter Einbezug des in Kapitel 2.3.1 getroffenen Vakuumgrenzfalls ($\varepsilon_r := 1$ und $\mu_r := 1$ für $i \in [1,6]$) wird zu (2.20a) der Ausdruck (2.28) hinzugefügt und man erhält damit

$$\varepsilon_r E_\alpha = \left[\sum_{i=1}^6 e_{\alpha,i} \right] + e_{\alpha,0}. \quad (2.32)$$

Es wird somit (2.24) um einen zusätzlich Term erweitert, womit man

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\partial_t E_\alpha - \sum_{\beta,\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta H_\gamma \right] + (\varepsilon_r - 1) \partial_t E_\alpha \\ &= \varepsilon_r \partial_t E_\alpha - \sum_{\beta,\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta H_\gamma \end{aligned} \quad (2.33)$$

erhält. Analog zu H_α addiert man (2.29) zu (2.20a) und erhält

$$\mu_r H_\alpha = \left[\sum_{i=1}^6 h_{\alpha,i} \right] + h_{\alpha,0}, \quad (2.34)$$

was dazu führt, dass man für (2.26)

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\partial_t H_\alpha + \sum_{\beta,\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\eta E_\gamma \right] + (\mu_r - 1) \partial_t H_\alpha \\ &= \mu_r \partial_t H_\alpha + \sum_{\beta,\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta E_\gamma \end{aligned} \quad (2.35)$$

erhält. Beide Gleichungen (2.33) und (2.35) entsprechen somit ebenfalls den Maxwell-Gleichungen mit Medienparametern in (2.27). Zusammenfassend erhält man für die Equilibria des Modells separierter Medien

$$e_{\alpha,i}^{eq} = \begin{cases} \frac{1}{6} \left(E_\alpha - \sum_{\beta,\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} v_{\beta,i} H_\gamma \right) & \text{wenn } i \neq 0 \\ (\epsilon_r - 1) E_\alpha & \text{wenn } i = 0, \end{cases} \quad (2.36a)$$

$$h_{\alpha,i}^{eq} = \begin{cases} \frac{1}{6} \left(H_\alpha + \sum_{\beta,\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} v_{\beta,i} E_\gamma \right) & \text{wenn } i \neq 0 \\ (\mu_r - 1) H_\alpha & \text{wenn } i = 0. \end{cases} \quad (2.36b)$$

Beide Modelle, das der integrierten und das der separierten Medien, haben die gleichen Skalierungseigenschaften. Dies betrifft z. B. die Eigenschaft der Iterationszeitschritte $\delta t = \frac{1}{6}$ und die der Lichtgeschwindigkeit in Gittereinheiten $\tilde{c}_0 := \Delta N_{cell} / \Delta N_{it} = \frac{1}{3}$, wobei mit N_{cell} die Anzahl der Gitterzellen und mit N_{it} die der Iterationsschritte gemeint ist.

2.3.3 Erweiterung für leitende Medien und Ströme

Das Hinzufügen der Stromdichte \mathbf{j} als Quelle zum Modell erfolgt unter Verwendung des Maxwell-Ampère-Gesetzes $\epsilon_r \mathbf{E} + \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{H}$. Hier wird das häufig verwendete Schema der Korrektur erster Ordnung [18, 60] durch einen zusätzlichen additiven Term verwendet, wonach sich

$$E_\alpha \rightarrow E_\alpha + \delta t j_\alpha \quad (2.37)$$

nach jedem Iterationsschritt ergibt. Dieser Ansatz eignet sich für externe Quellen, die selbst nicht von den Feldern abhängig sind. Die Leitfähigkeit von Medien führt so z. B. zu einer feldabhängigen Stromdichte definiert über

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.38)$$

2.3 Makroskopische Gleichungen für die Ausbreitung

mit σ als skalare Leitfähigkeit. Für den Fall, dass $\sigma \rightarrow 0$ geht, kann (2.38) ebenfalls wie (2.37) behandelt werden ohne die numerische Stabilität zu gefährden. Simulationen mit $\sigma \gg 0$ sind dagegen nicht nur weniger genau, sie neigen auch dazu vergleichsweise sehr schnell instabil zu werden. Um diese Instabilität zu vermeiden, wird die sequentielle Strang-Aufteilung [73] gemäß

$$\varepsilon_r \partial_t \nabla \cdot \mathbf{E} = -\sigma \nabla \cdot \mathbf{E} \quad (2.39)$$

mit der Lösung

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(t + \delta t) = \nabla \cdot \mathbf{E}(t) e^{-\sigma/\varepsilon_r \delta t} \quad (2.40)$$

verwendet werden. Unter der Annahme, dass neben den Quellen und Senken von \mathbf{E} auch dessen Wirbel von dieser Schwächung betroffen sind, soll allgemein der Ansatz

$$\mathbf{E}(t + \delta t) = \mathbf{E}(t) e^{-\sigma/\varepsilon_r \delta t} \quad (2.41)$$

gelten, dessen zeitliches Differential über δt hinweg betrachtet wird. Man erhält damit die Näherung

$$\dot{\mathbf{E}}(t + \delta t) \approx \dot{\mathbf{E}}(t) e^{-\sigma/\varepsilon_r \delta t} - \frac{\sigma}{\varepsilon_r} \mathbf{E}(t) e^{-\sigma/\varepsilon_r \delta t} \quad (2.42)$$

und weiter unter Verwendung von (2.41)

$$\varepsilon_r \dot{\mathbf{E}}(t + \delta t) + \sigma \mathbf{E}(t + \delta t) \approx \varepsilon_r \dot{\mathbf{E}}(t) e^{-\sigma/\varepsilon_r \delta t}. \quad (2.43)$$

Nach jeder Iteration wird \mathbf{E} durch $\mathbf{E} e^{-\sigma/\varepsilon_r \delta t}$ ersetzt und das neue Feld in Kombination mit $\varepsilon_r \dot{\mathbf{E}} = \nabla \times \mathbf{H}$ für den nächsten Iterationsschritt verwendet. Da ein zeitlicher Versatz zwischen \mathbf{H} und \mathbf{E} keine stabilen Voraussetzungen schafft, wird angenommen, dass die Näherung

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}(t) &= \varepsilon_r \dot{\mathbf{E}}(t) e^{-\sigma/\varepsilon_r \delta t} \\ &\approx \varepsilon_r \dot{\mathbf{E}}(t) + \sigma \mathbf{E}(t) \end{aligned} \quad (2.44)$$

für den Fall kleiner Werte für σ sich (2.44) als geeigneter Kompromiss zur Beschreibung des Einflusses von leitfähigen Medien eignet, der weder zu groß zu Lasten der Genauigkeit noch zu Lasten der Stabilität führen wird.

2.4 Simulationsergebnisse

In diesem Abschnitt werden Eigenschaften des vorgestellten Algorithmus näher untersucht. Dazu werden Fragestellungen der klassischen Elektrodynamik herangezogen, deren analytisch gewonnenen Lösungen exakt bekannt sind. Diese werden dann mit den Ergebnissen der Simulationen verglichen, um Aussagen zu den Eigenschaften der GBM zu treffen. Die folgenden Simulationen werden auf einem Computer mit 64 GB an RAM sowie Swap¹ und einem Intel *i7*-Prozessor mit 3,3 GHz durchgeführt. Es wird keine Parallelisierung verwendet und für alle Float-Variablen wird die doppelte Genauigkeit angenommen. Alle Größen werden mit dimensionslosen Gittereinheiten angenommen.

2.4.1 Fehlerskalierung

In diesem Abschnitt soll die Eigenschaft der Fehlerskalierung der vorgestellten GBM untersucht werden. Es wird dazu die Propagation einer EM-Welle in einem eindimensionalen System mit periodischen Randbedingungen simuliert. Die Ausgangsbedingung für die EM-Felder ist mit

$$E_y(x, N_{it} = 0) \equiv H_z(x, N_{it} = 0) := e^{-250\left(\frac{x}{N_x} - \frac{1}{4}\right)^2} \quad (2.45)$$

und mit Null für alle anderen Komponenten angenommen. Das Gitter, in dem sich diese EM-Welle ausbreitet, hat eine Größe von N_x Zellen angenommen. Die Medienparameter des Systems werden mit $\sigma(x) = 0$, $\mu_r(x) = 1$ und

$$\varepsilon_r(x) = \begin{cases} 1 & , \text{wenn } x < \frac{N_x}{2} \\ 10 & , \text{wenn } x \geq \frac{N_x}{2} \end{cases} \quad (2.46)$$

für $x \in [0, N_x]$ definiert. Um die durch (2.22) beschriebene Methode integrierter Medien mit der durch (2.36) beschriebenen Methode separierter Medien zu vergleichen, soll die Gesamtenergie

$$W := \frac{1}{2} \sum_{x=0}^{N_x} (\varepsilon_r(x) \mathbf{E}^2(x) + \mu_r(x) \mathbf{H}^2(x)) \quad (2.47)$$

¹ In diesem Falle auf die Festplatte ausgelagerter Areitsspeicher.

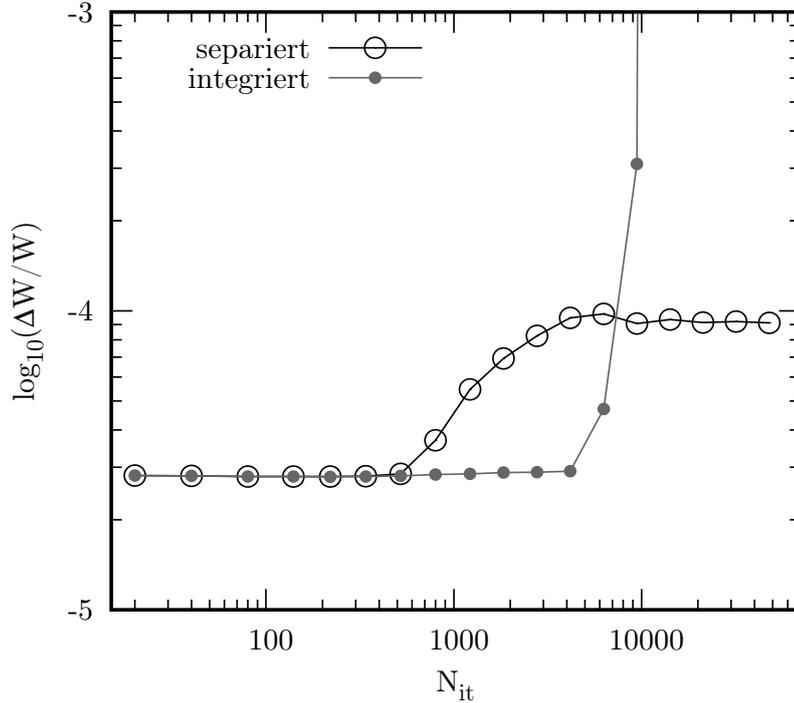


Abbildung 2.2: Fehler der Gesamtenergie ΔW zu jedem Iterationsschritt N_{it} der aus [18] abgeleiteten Methode integrierter Medien und der hier vorstellten Methode separierter Medien anhand der Beschreibung einer EM-Welle. Diese Welle propagiert zwischen zwei Dielektrika mit abruptem Grenzflächenübergang. Beide Simulationen wurden über (3.20), (3.21) und $N_x = 100$ definiert.

für beide Methoden untersucht werden. Der theoretische Wert dieser Gesamtenergie W_{th} wird dann mit denen der Simulationsergebnisse verglichen, woraus sich ein Fehler für die Vorhersage beider Verfahren mithilfe von

$$\Delta W(N_{it}) := | W(N_{it}) - W_{th} | \quad (2.48)$$

zu jedem Iterationsschritt errechnen lässt. Abb. 2.2 zeigt die zeitliche Entwicklung von ΔW der Methode separierter und integrierter Medien. Die Größe des Systems wurde durch (3.21) mit $N_x = 100$ gewählt. Beide Simulationen begannen mit gleichen Fehlern, da das mit (3.20) definierte Wellenpaket sich noch bis zum Iterationsschritt $N_{it} = 400$ im Vakuum befand. Ab $N_{it} = 400$ drang der Hauptanteil des initialisierten Wellenpakets in das Dielektrikum ein. Der Fehler der Methode integrierter Medien bleibt bei den ersten Iterationsschritten von $N_{it} = 4000$ nahezu unverändert, tendiert dann jedoch vergleichsweise schnell ab etwa $N_{it} = 5000$ zu einem divergenzähnlichen Verhalten. Im Gegensatz dazu steigt der Fehler der Methode separierter Medien bereits beim Iterationsschritt $N_{it} = 400$ an, bleibt dann

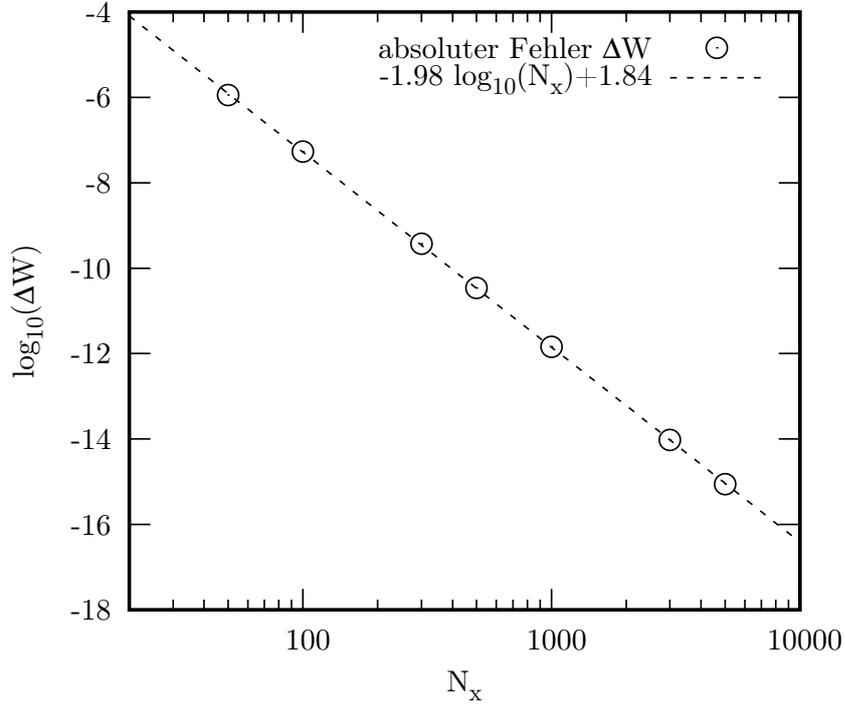


Abbildung 2.3: Mittlerer absoluter Fehler ΔW bei verschiedenen Gittergrößen, definiert durch N_{it} und seine Regressionsgeraden für die Methode separierter Medien. Die Simulationen liefen jeweils über 10^4 Iterationsschritte. Der Fehler ΔW wurde für jede Gittergröße gemittelt.

jedoch bei einem relativ kleinen Fehler von etwa 10^{-4} . Dass der Fehler bei Verwendung der Methode separierter Medien noch einmal steigt, liegt an der Rückkopplung durch den Einfluss der für die Medien verwendeten Verteilungsgrößen. Unabhängig davon bleibt der Fehler dieser Methode jedoch über einen vergleichsweise großen Zeitraum konstant. Der Fehler der Methode integrierter Medien hingegen scheint ab einem bestimmten Iterationsschritt vergleichsweise schlagartig anzusteigen. Die Ursache für dieses Verhalten ist in dem instabilen Verhalten dieser Methode zu finden. Unabhängig davon, was diesen Punkt beginnender Instabilität mitbestimmt, ist eine Methode mit diesen Eigenschaften im Allgemeinen bereits für Langzeitsimulationen ungeeignet. Aus diesem Grund lässt sich die in der Literatur beschriebene Methode nicht für die angestrebte Simulation der CI-Stimulation verwenden.

Da die definierte lineare Differentialgleichung (2.13) verwendet wurde, ist zu erwarten, dass die Genauigkeit der vorgestellten GBM von zweiter Ordnung ist. Darunter versteht man, dass der Fehler

$$\Delta W \propto (\delta x)^2 \quad (2.49)$$

ist, wobei hier δx der räumlichen relativen Schrittweite entspricht. Die Größe von δx ist durch die Gesamtzahl der Gitterpunkte N_x bestimmt und kann verringert werden, indem man die Anzahl der Gitterzellen erhöht. Die durch (3.20) definierte Anfangsbedingung erlaubt die Beziehung $N_x \propto \delta x^{-1}$. Abb. 2.3 zeigt die Beziehung $\Delta W \propto \delta x^{1.98}$, welche die erwartete Relation des Fehlers zur räumlichen Auflösung zweiter Ordnung nach (2.49) bestätigt. Die hier durchgeführten Simulationen sind vollkommen analog zu der bisher wie in Abb. 2.2 gezeigten durchgeführt, für die lediglich unterschiedliche N_x verwendet wurden. Die zu jedem Iterationsschritt begangenen Fehler wurden dann über ein Iterationsfenster von $N_{it} = 0,10^4$ gemittelt.

2.4.2 Numerische Stabilität

Die Untersuchung der numerischen Stabilität der vorgestellten GBM soll anhand des Prinzips der Erhaltung der Feldenergie erfolgen. Dazu soll ein zweidimensionales 200×200 -Gitter mit periodischen Randbedingungen in jeder räumlichen Richtung gewählt werden. Die dritte Dimension entspricht damit einer unendlichen Ausdehnung dieser zweidimensionalen Ebene, in der die EM-Felder durch die Stromdichte

$$j_z = \sin\left(N_{it} \frac{\pi}{50}\right) \quad (2.50)$$

über die ersten 50 Iterationen erzeugt werden. Abb. 2.4 zeigt den Aufbau der Anordnung, wobei die Medien mit $\varepsilon_r = 10$ als grauer Bereich gekennzeichnet sind. Der übrige (weiße) Bereich stellt das Vakuum mit $\varepsilon_r = 1$ dar. Global gilt für $\mu_r = 1$ und für $\sigma = 0$. Die Stromdichte in der Mitte des Systems wird durch den kleinen eingekreisten schwarzen Punkt dargestellt. Nach den ersten 50 Iterationsschritten wird erwartet, dass die analog zu (3.26) berechnete Gesamtenergie zu jedem Iterationsschritt konstant bleibt. Es ist bekannt, dass die GBGK-Methode im Allgemeinen dazu neigt, in bestimmten Grenzfällen zu Instabilitäten zu führen. Die am häufigsten verwendeten Ansätze zur Stabilisierung von GBMs sind die der sogenannten halb- oder vollständig impliziten Näherungen für die Boltzmann-Gleichung [74]. Implizite Näherungen benötigen eine Bedingung für beide Zustände, die sich als Lösung einer Gleichung oder eines Gleichungssystems ergeben. Die vorgestellte GBM dagegen gehört zu den expliziten Verfahren, da der Zustand des Systems zum nächsten Iterationsschritt sich aus dem des aktuellen allein errechnet. Ergänzende implizite Verfahren erfordern zusätzliche Berechnungen [75] in Form von Korrekturen die Verteilungsgrößen f_i betreffend. Ein solches Verfahren für die Propagation von EM-Feldern wurde von Dellar [39] für vakuumähnliche elektrische

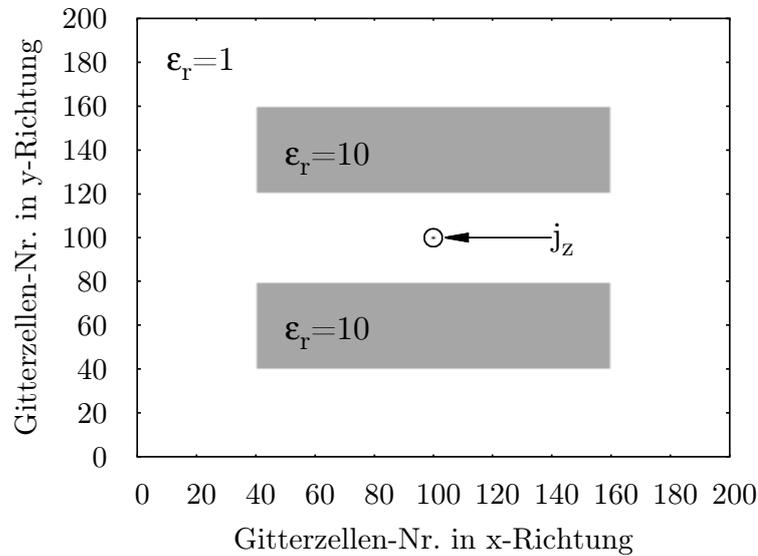


Abbildung 2.4: 200×200 -Gitter mit dielektrischen Medien $\epsilon_r = 10$ (grauer Bereich) im Vakuum. Elektromagnetische Felder werden durch eine Stromdichte j_z erzeugt, die durch den eingekreisten schwarzen Punkt in der Mitte des Systems dargestellt ist (100.100).

Leiter verwendet. Die von ihm vorgestellte Methode setzt dabei die Relaxationszeit τ mit der Leitfähigkeit in Beziehung. Diese Eigenschaft schränkt das Spektrum an Anwendungsfeldern entschieden ein, da diese Methode somit z. B. nicht für Isolatoren geeignet ist. Im Falle solcher Isolatoren tendiert die Relaxationszeit, weil sie hier umgekehrt mit der Leitfähigkeit in Zusammenhang steht, gegen unendlich. Dies hat zur Folge, dass der Beitrag des Kollisionsterms im Strömungs-Schritt verschwindet, wodurch jeder Iterationsschritt zum selben Ergebnis führt und damit keine Beschreibung von Dynamik mehr möglich ist. Selbst wenn implizite Verfahren den Einfluss dissipativ wirkender Terme höherer Ordnung reduzieren können, ist es fraglich, ob diese Korrektur ausreicht, um die genannten Instabilitäten zu Punkten höherer Iterationsschritte vermeiden können – in diesem Falle beschrieben durch die Medien in (2.22). Eine andere Möglichkeit zur Stabilisierung von Simulationen mit Medienübergängen besteht darin, die Grenzflächen zwischen verschiedenen Medien aufzuweichen [19, 40]. Eine solche Unschärfe von räumlichen Strukturen ist wenig praktisch, da dadurch die Gittergröße erhöht werden muss, um eine ausreichende Auflösung darzustellender Struktur sicherzustellen. Desweiteren erhöht sich mit wachsender Zahl an Gitterpunkten die erforderliche Rechenzeit und der benötigte Arbeitsspeicher. Andere Autoren schlagen eine Möglichkeit zur Stabilisierung vor, die erfolgreich in der Simulation der Hydrodynamik zum Einsatz

kam und einer Form des Boltzmannschen H-Theorems [76] entspricht. Für den H-Ansatz muss jedoch eine nicht triviale und reelle Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems gefunden werden. Solche Lösungen (im Falle der Hydrodynamik oftmals komplex) sind nicht immer garantiert. Darüber hinaus erhöht das Auffinden dieser Lösung auch die Berechnungszeit erheblich, was ihre Verwendung in praktischen Aspekten einschränkt. Eine andere vielversprechende Methode ist das „Entropie-Trimmen“ [77, 78, 79, 80] oder auch Filtern genannt. Hier wird die Nichtgleichgewichtsentropie über eine variable Relaxationszeit an Gitterpunkten reduziert, bei denen die Nichtgleichgewichtsentropie einen vordefinierten kritischen Wert überschreitet. Der Nachteil ist, dass dies (2.13) verletzt, womit die Wirkung durch die Beiträge zweiter Ordnung dann einer physikalischen Größe entspricht, ähnlich dem viskosen Spannungstensor in der Hydrodynamik. Da die vorliegende GBM diese Beiträge höherer Ordnung jedoch vermeiden muss, werden Simulationen zwangsläufig nicht von Genauigkeit zweiter Ordnung sein. Man könnte auch ein auf Multi-Relaxation-Zeiten basierendes Modell für jedes Feld \mathbf{E} und \mathbf{H} in Betracht ziehen. Da es sich bei den Teilen der Maxwell-Gleichungen, welche die Propagation von EM-Feldern in Medien beschreiben, um einen Satz linearer Differentialgleichungen handelt, wäre für die Verwendung eines für die nichtlineare Konvektionsdiffusion geeigneten Modells [81], ein vergleichsweise komplexerer Kollisionsoperator als der des LBGK-Modells notwendig. Auch die Entwicklung eines solchen Modells wird zusätzliche Ressourcen kosten und ist daher nicht das Ziel der vorliegenden Arbeit.

In Abb. 2.5 sind die Ergebnisse von drei zur Stabilisierung geeigneten Ansätzen dargestellt. Der erste (rote Wabe) stellt die Gesamtenergie W der Methode separierter Medien, der zweite (schwarzes Quadrat) die Gesamtenergie der Methode integrierter Medien bei harten Grenzflächen dar. Für diesen zweiten Fall steigt W ab etwa $N_{it} = 600$ rasch an, wohingegen der erste Fall entsprechend den Erwartungen, konstant und stabil bleibt. Die andere Methode zeigt W bei weichen Grenzflächen für Medien, wie in [19, 40] vorgeschlagen. Es wurde dabei ein linearer Anstieg der Materialeigenschaften über drei (Quadrat) bzw. zehn (Dreieck) Zellen hinweg verwendet, um die zuvor scharfe Grenzfläche zwischen Vakuum und Medium darzustellen. Die Simulationsergebnisse W dieser Methode zeigen im Vergleich zu jener der integrierter Medien eine deutliche Verbesserung der Stabilität auf. Der Verlauf von W für den Fall der Grenzflächenaufweichung über zehn Zellen hinweg ist dabei bedeutend länger konstant als die Aufweichung über drei Zellen. Das Problem der Instabilitäten verlagert sich dabei jedoch nur zu größeren Iterationsschritten

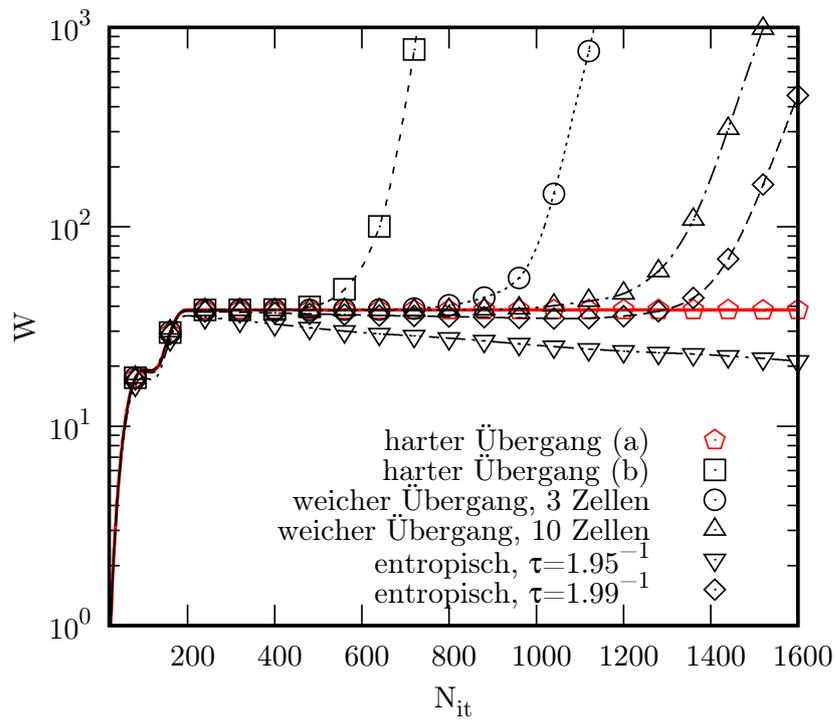


Abbildung 2.5: Vergleich verschiedener Techniken zur Stabilisierung der Gesamtenergie W einer EM-Welle, die durch einen elektrischen Strom $j_z = \sin(\pi N_{it}/50)$ erzeugt wird, welcher in der Mitte des Systems die ersten 50 Iterationen lang fließt. Das System wird mit periodischen Randbedingungen, wie in Abb. 2.4 dargestellt, definiert. Dargestellt sind Simulationsergebnisse für die Methode integrierter und separierter Medien bei harten und geglätteten Medienübergängen sowie zwei entropischer Filter definiert über $\tau = 1,99$ und $\tau = 1,95$.

hin, was angesichts der eingebüßten Auflösung keine prinzipielle Verbesserung zur Behandlung des Problems der Instabilitäten darstellt. Die dritte Methode ist die der entropischen Filterung, wie in [79, 80] beschrieben. Hierzu wurden zwei verschiedene Werte für die Relaxationszeit τ verwendet. Die Dämpfung durch den Entropiefilter mit $\tau = 1.95^{-1}$ (umgedrehte Dreiecke) ist zu stark bemessen, da die Gesamtenergie mit der Zeit stetig abnimmt. Für $\tau = 1.99^{-1}$ (Diamant) nimmt die Energie ebenfalls zunächst ab, wenngleich nur leicht bis zu etwa $N_{it} = 400$. Sie steigt danach jedoch an und weist zu späteren Iterationsschritten ebenfalls ein überexponentielles Wachstum auf.

Abb. 2.6 zeigt die Ausbreitung der Feldenergiedichte, simuliert mithilfe der Methode integrierter (linke Spalte) und separierter Medien (rechte Spalte) zu verschiedenen Iterationsschritten. Wie in Abb. 2.5 gezeigt, steigt die Energie der Methode integrierter Medien (schwarz Quadrate) bei etwa $N_{it} = 500$ signifikant an. Dieser Anstieg hat seine Ursache in einem Rauschen, wie es in Abb. 2.6 an den Rändern der Dielektrika und im Raum zwischen ihnen in der linken Spalte bei $N_{it} = 300$ (Zahl oben rechts im Bild) zu sehen ist. Es nimmt zwischen diesen Medien weiter zu (siehe $N_{it} = 400$) und breitet sich über das gesamte Simulationsgebiet weiter aus, wie bei $N_{it} = 500$ sehen ist. Im Gegensatz dazu bleibt die Feldenergiedichte bei Verwendung der Methode separierter Medien stabil.

2.4.3 Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle

Ein bekannter Einfluss von Medien auf die Ausbreitung von EM-Wellen ist die Wirkung auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit in Form einer verringerten Geschwindigkeit. Zunächst werden die Simulationsergebnisse der Methode separierter Medien mit denen integrierter (abgeleitet von [18]) verglichen. Die gestrichelten Kurven im oberen rechten Teil der Abb. 2.7 zeigen die Anfangsbedingung für E_z und H_y eines EM Pulses in Gauß-Form im Vakuum (weiße Fläche) an. Dieser Puls bewegt sich dann in einem eindimensionalen System mit periodischen Randbedingungen auf ein Dielektrikum mit $\varepsilon' = 9$ (blaue Fläche) zu. Die Amplituden von H_y and E_z sind jeweils mit eins angenommen. Auf einer kurzen Zeitskala von etwa 100 Iterationsschritten wurden keine signifikanten Unterschiede zwischen den beiden Methoden beobachtet. Somit werden nur die Simulationen des Modells separierter Medien gezeigt (oberes rechtes Feld von Abb. 2.7). Innerhalb dieser kleinen Spanne an Iterationsschritten wurde das zunächst gemittelte Maximum des transmittierten Pulses mit einer Amplitude von 0,4992 und das reflektierte Maximum mit 0,5001

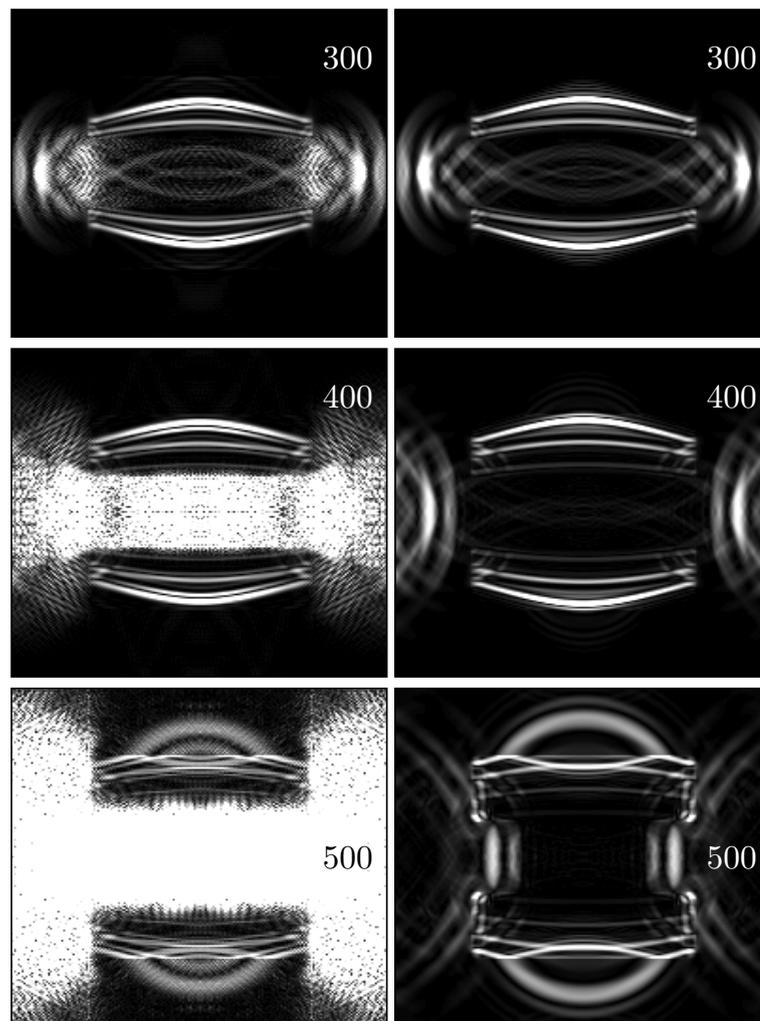


Abbildung 2.6: Aufnahmen der Feldenergiedichte einer EM-Welle simuliert mit der Methode integrierter (linke Spalte) und separierter (rechte Spalte) Medien zu unterschiedlichen Iterationsschritten N_{it} . Die Felder wurden durch einen Strom erzeugt, der parallel zu den beiden dielektrischen Medien in der Mitte des 200×200 -Gitters lag (hier nicht sichtbar, siehe Abb. 2.4).

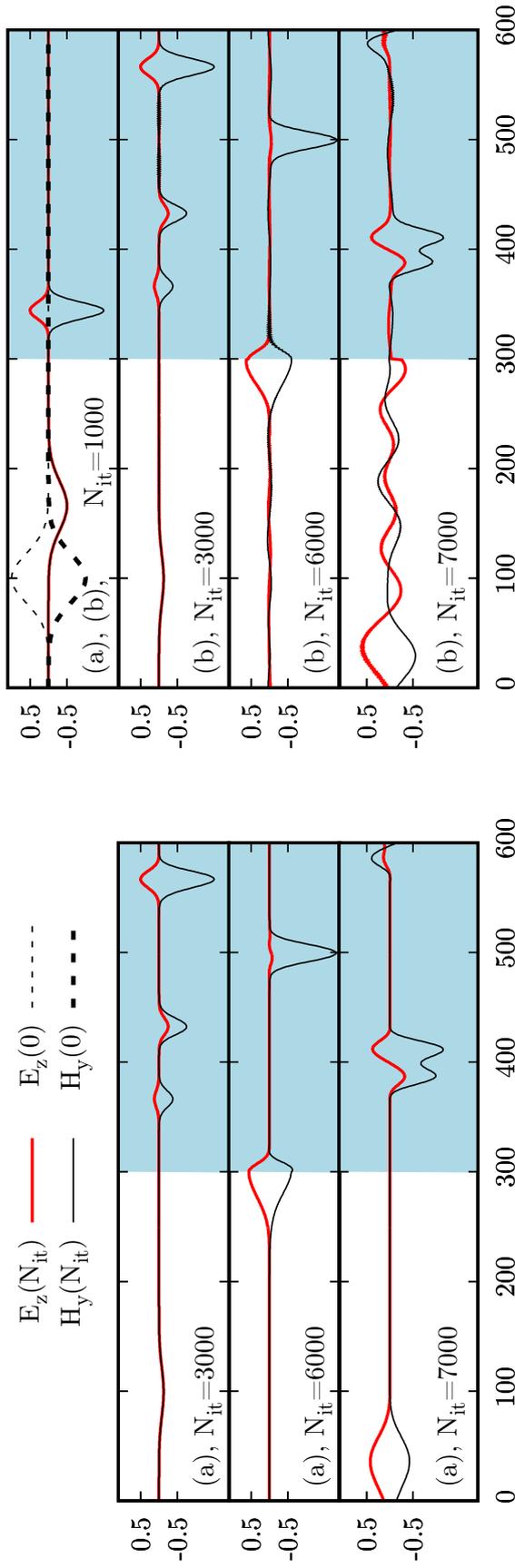


Abbildung 2.7: Vergleich der Simulationen auf Basis von (2.36) (Abbildung (a), linke Spalte) mit denen, auf Basis von (2.22) (Abbildung (b), rechte Spalte). Ein eindimensionaler Gauß-förmiger EM-Puls propagiert durch ein Gitter bestehend aus 600 Punkten und periodischen Randbedingungen. Das Wellenpaket ist im Vakuum ($\epsilon = 1$, weißer Bereich) initialisiert und bewegt sich auf ein Dielektrikum ($\epsilon' = 9$, blauer Bereich) zu. Die Grenzfläche zwischen beiden Medien liegt bei der Zellennummer 300. Simulationen bei $N_{it} = 0$ und bei $N_{it} = 100$ sind zwischen diesen beiden Ansätzen nahezu identisch und daher oben rechts in der Abbildung dargestellt. Bei $N_{it} = 3000$ ist die Auswirkung von Instabilität in (b) in Form von Ungenauigkeiten im Bereich der Zellennummern 200 bis 300 (außerhalb des Dielektrikums) und innerhalb des Dielektrikums bei etwa der Zellennummer 500 anhand leichten Rauschens zu erkennen. Dieses unphysikalische Verhalten nimmt mit den Iterationsschritten an Stärke zu, wie man bei $N_{it} = 6000$ und deutlich bei $N_{it} = 7000$ sehen kann, da Instabilitäten mit den Iterationsschritten exponentiell zunehmen.

festgestellt. Durch die analytische Lösung für den transmittierten Anteil des elektrischen Feldes $E_{z,T}$ und den reflektierten Anteil $E_{z,R}$, sind die Amplitude dieser Felder nach [82] durch

$$\frac{E_{z,T}}{E_{z,0}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{\epsilon'}{\epsilon} + 1}}, \quad (2.51a)$$

$$\frac{E_{z,R}}{E_{z,0}} = 1 - \frac{E_{z,T}}{E_{z,0}} \quad (2.51b)$$

gegeben. Daraus lässt sich eine Amplitude für den transmittierten und den reflektierten Anteil des elektrischen Feldes jeweils zu 0,5 ermitteln. D. h., dass die Simulationsdaten von den theoretischen Vorhersagen um weniger als 1 % abweichen. Die anderen Teilabbildungen oben rechts in Abb. 2.7 zeigen Aufnahmen verschiedener Iterationsschritte für die Methode separierter (links) und integrierter (rechts) Medien. Die Teilbilder in der rechten Spalte zeigen eine mit zunehmender Anzahl an Iterationsschritten wachsende Tendenz zur Instabilität in Form von unerwarteten zusätzlichen Schwingungen, insbesondere im Vakuum (am besten rechts unten $N_{it} = 7000$ zu sehen). Es hat den Anschein, als würde von der Grenzfläche des Dielektrikums aus eine EM-Welle in das Vakuum abgestrahlt, was angesichts der Voraussetzungen für diese Simulation unphysikalisch ist. Ähnlich wie in Abb. 2.6 wachsen diese zusätzlichen EM-Felder im Vakuum in der Nähe des Dielektrikums schnell an, im Medium jedoch nicht. Im Inneren des Dielektrikums bleiben die Verhältnisse nahezu stabil. Auf einer längeren Zeitskala treten diese künstlichen EM-Felder jedoch auch dort auf (nicht gezeigt). Es soll nun die Geschwindigkeit des EM-Pulses bestimmt werden, der sich vom Beginn der Simulation aus dem Vakuum heraus bis zur Grenzfläche des Dielektrikums bewegt und in dieses eindringt. Abb. 2.8 zeigt die Position der Maxima der elektrischen Felder als Funktion der Iterationsschritte für die Methode separierter Medien. Bis zum Iterationsschritt $N_{it} = 600$ breitet sich der Puls nur im Vakuum aus. Aus der Beziehung zwischen räumlicher Position und Zeit kann die Geschwindigkeit in Gittereinheiten des Pulses im Vakuum durch lineare Regression als $\tilde{c}_0 = 0,3333 \pm 0,08\%$ erhalten werden (Tilde kennzeichnet Gittereinheiten). Für den reflektierten Anteil ab $N_{it} > 600$ wird auf analoge Weise $\tilde{c}_r = 0,3303 \pm 0,25\%$ bestimmt. Diese Vorhersagen stimmen gut mit den theoretischen Werten für die Lichtgeschwindigkeit in Gittereinheiten von $\tilde{c}_0 \equiv \tilde{c}_r = 0,3$ überein. Innerhalb des Dielektrikums wurde die Geschwindigkeit der transmittierten Welle zu $\tilde{c}_t = 0,1114 \pm 0,18\%$ bestimmt. Auch dieser Wert stimmt gut mit der theoretischen Vorhersage von $\tilde{c}_t = 0,1$ überein. Der Einfluss

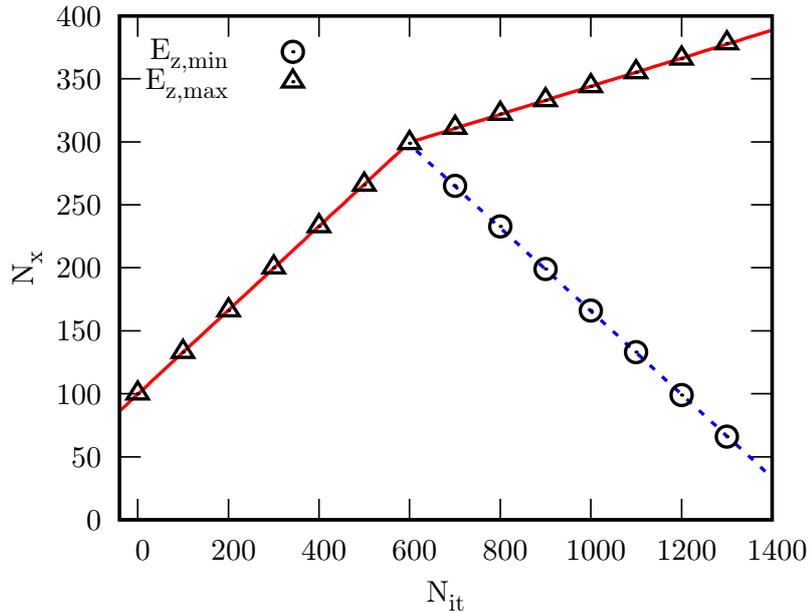


Abbildung 2.8: Gemäß Fall (a) von Fig. 2.7 wird die Position des Maximums und Minimums von E_z in der Zeit gezeigt. Für den Fall $N_{it} < 600$ entspricht $E_{z,min}$ dem auf die Grenzfläche zulaufenden Puls. Für den Fall $N_{it} \geq 600$ entspricht $E_{z,min}$ dem reflektierten Anteil des Pulses und $E_{z,max}$ dem transmittierten.

der Dielektrizität auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit von EM-Wellen wurde hier nur mit der Permittivität $\varepsilon_r > 1$ gezeigt. Unter Verwendung einer Permeabilität von $\mu_r > 1$ sind die Simulationen jedoch von vergleichbarer Genauigkeit (hier nicht gezeigt).

2.4.4 Skin-Effekt

Beim Skin-Effekt handelt es sich um die elektrodynamische Beschreibung der Ausbreitung von EM-Wechselfelder in elektrischen Leitern. Bei Gleichströmen, d. h. bei konstanten elektrischen Feldern, durchsetzt das anliegende elektrische Feld den gesamten Leiter. Handelt es sich beim dem elektrischen Feld um ein Wechselfeld, so wirkt dieses hauptsächlich nahe der Oberfläche des Leiters. Für eine EM-Welle innerhalb eines Leiters lassen sich exakte Vorhersagen treffen, weshalb eine Simulation des Skin-Effekts mit diesen Vorhersagen in diesem Kapitel verglichen wird. Dazu werden die Felder außerhalb des Leiters mit

$$\mathbf{E} = E_0 \sin(\omega t) \mathbf{e}_y, \quad (2.52a)$$

$$\mathbf{H} = H_0 \sin(\omega t) \mathbf{e}_z, \quad (2.52b)$$

definiert, wobei für $t = \frac{1}{3}N_{it}$ gelte und die EM-Welle sich in x -Richtung ausbreite. Mit dem typischen Ansatz $\exp[i(\omega t - kx)]$ als Lösung für die Abhängigkeit von E_y und H_z von t und x erhält man die komplexe Lösung für den Wellenvektor

$$k = \frac{\omega}{c} \left(1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2 \right)^{1/4} \exp \left(-\frac{i}{2} \arctan \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \right) \right). \quad (2.53)$$

Dieser führt zu einer Phasenverschiebung und einem Faktor zur Beschreibung eines exponentiellen Abklingens der Amplituden mit der Eindringtiefe x der EM-Welle in den elektrischen Leiter, aus denen man

$$E_y(x) = E_0 \exp(-\Im(k)x) \sin(\omega t - \Re(k)x), \quad (2.54a)$$

$$H_z(x) = H_0 \exp(-\Im(k)x) \sin(\omega t - \Re(k)x + \Delta\phi), \quad (2.54b)$$

$$\Delta\phi = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \right) = \Re(k)\Delta\lambda \quad (2.54c)$$

erhält. Hierbei wird der Term $\Im(k) := d$ als „Hauttiefe“ bezeichnet, $\Delta\phi$ beschreibt dabei die Phasenverschiebung zwischen E_y und H_z und $\Delta\lambda$ entsprechend die Verschiebung der Wellenlänge zwischen beiden Feldern. Eine weitere Größe, die in der Elektrotechnik von großer Relevanz ist, ist die Impedanz, welche der Beziehung

$$|Z| =: \frac{E_0}{H_0} = c\mu \left(1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2 \right)^{-1/4} \quad (2.55)$$

gehört. Aus dem Realteil von (2.53) lässt sich ableiten, dass sich bei Erhöhung von σ eine Verringerung der Wellenlänge gemäß

$$\lambda = \frac{2\pi}{\Re(k)} \quad (2.56)$$

erzielen lässt. Damit folgt zwangsläufig eine verringerte Ausbreitungsgeschwindigkeit c_σ innerhalb des Leiters gemäß

$$c_\sigma = \frac{\left(1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2 \right)^{-1/4}}{\cos \left(\frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \right) \right)} c_0, \quad (2.57)$$

wobei c_0 die Lichtgeschwindigkeit der EM-Welle im Vakuum entspricht. In Abb. 2.9 sind die theoretischen Vorhersagen verschiedener Größen gemeinsam mit Simulationsdaten und den aus ihnen gewonnenen Extrema (Minimum und Maximum über Fehlerbalken gekennzeichnet) in Abhängigkeit von der Leitfähigkeit in einem eindimensionalen System bestehend aus 1000 Zellen dargestellt. Es wurde

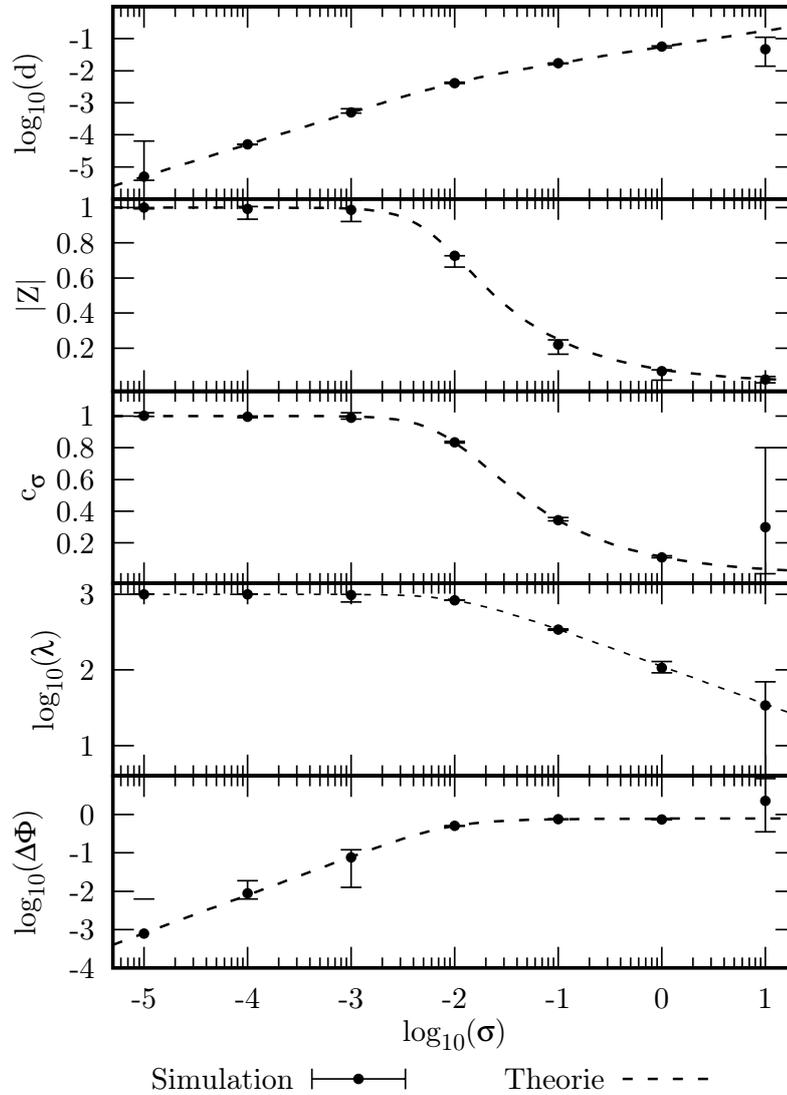


Abbildung 2.9: Eine EM-Welle mit $\omega = \frac{2\pi}{1000}$, die einen elektrischen Leiter der Leitfähigkeit σ durchdringt. Die theoretische Vorhersage der Hauttiefe d , der Impedanz $|Z|$, der Ausbreitungsgeschwindigkeit c_σ , der Wellenlänge λ und der Phasenverschiebung $\Delta\phi$ sind in Abhängigkeit von σ gemeinsam mit den Simulationsergebnissen dargestellt. Die angezeigten Fehlerbalken beziehen sich auf das Minimum und Maximum der Simulationsdaten, die während der gesamten Simulationszeit erhalten wurden.

$\omega = 2\pi/1000$ gewählt, wobei die Anfangsamplitude (2.52) gleich eins (außerhalb des Leiters) und $\sigma = 10^n$ mit $n \in [-5, 1]$ gewählt wurde. Der Grund für die Wahl dieses relativ großen Wertebereichs für σ ist der, ein breites Spektrum von Leitfähigkeiten abzudecken, welcher die Grenzfälle schlechter $\sigma \ll \omega\varepsilon$ und guter $\sigma \gg \omega\varepsilon$ elektrischer Leiter abdeckt (siehe $n \approx 3$ als Übergangspunkt). Wenn $c_{\sigma=10}$ auf 3,54% von c_0 reduziert ist, benötigen die Wellen ungefähr 10^4 Iterationen, um sich durch das System zu bewegen. Es wurden daher nur Daten nach $N_{it} = 10^6$ Iterationsschritten – also etwa 100 Perioden der Welle, die sich durch das System bewegen – berücksichtigt, um die Voraussetzungen für die Gültigkeit von (2.54) zu erfüllen. Diese Voraussetzungen bestehen darin, unendlich ausgedehnte Wellen im Leiter vorliegen zu haben, was theoretisch nur dann möglich ist, wenn jede Simulation unendlich viele Iterationsschritte andauert, was praktisch unmöglich ist. Es wird daher angenommen, dass 10^6 Iterationsschritte ausreichend für Simulationsdaten hoher Güte sind. Bei der Aufnahme der Maxima und Nullen von E_y und H_z über die Zeit wurden die größten Werte über alle Gitterpunkte gewählt. Die in Abb. 2.9 dargestellten Größen wurden auf unterschiedliche Weise aus den Simulationsdaten bestimmt. Aus den Daten des Logarithmus der Amplituden des elektrischen Feldes über die Eindringtiefe wurde der Wert für die Hauttiefe d bestimmt. Die Impedanz $|Z|$ wurde aus dem Verhältniss der Amplituden des elektrischen zum magnetischen Feld in der Gittermitte bestimmt. Die Lichtgeschwindigkeit c_σ wurde aus der Bewegung eines Wellenmaximums über die Zeit bestimmt. λ wurde aus Differenzen von Nullstellen in E_y und $\Delta\phi$ über die Differenzen von Nullstellen zwischen H_z und E_y bestimmt. Die Abhängigkeit all dieser Größen von σ passen gut zur theoretischen Vorhersage mit Ausnahme des Falls $\sigma = 10$. Besonders stark sind die Abweichungen c_σ und $\Delta\phi$ ausgeprägt. So sollten hier z. B. die Daten für $\lambda/2$ theoretisch 17,7 Zellen breit sein. Je kleiner die Wellenlänge wird, desto ungenauer fallen die zu bestimmenden Daten aus, da nur nach jenen Zellen mit E_y gesucht wird, die am nächsten bei Null liegen. Eine Interpolation der Datenpunkte wurde nicht vorgenommen. Ähnlich zu diesen Ungenauigkeiten wird der vergleichsweise große Fehlerbalken von $\Delta\phi$ für $\sigma = 10^{-5}$ durch den endlichen Fehler von $\Delta\lambda = 1$ verursacht. Werte kleiner als eins wurden für $\Delta\lambda$ ebenfalls aus den selben Gründen wie für die Bestimmung von λ selbst ausgeschlossen. Bezüglich der Erweiterung dieser Methode hin zur Beschreibung der Magnetohydrodynamik, wäre die von P. Dellar vorgeschlagene Methode [39], welche das Ohm'sche Gesetz mit einschließt, eine geeignete Erweiterung zur Beschreibung homogener Medien, welche zu genaueren Ergebnissen führen könnte. Das Verhalten der EM-Welle in guten Leitern, wie am Beispiel in Abb. 2.10 dargestellt, stimmt gut mit der theoretischen Vorhersage (2.54) überein. Hier wird

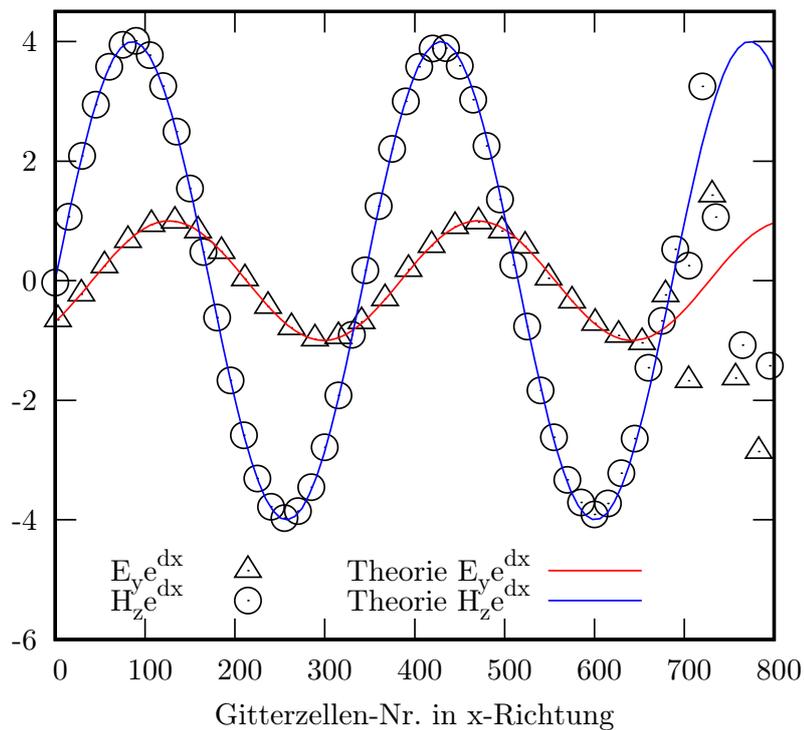


Abbildung 2.10: Amplituden einer EM-Welle, initialisiert mit $\omega = 2\pi/1000$, $E_y = 1$, $H_z = 1$), die sich in einem guten Leiter mit $\sigma = 0,1$ in x -Richtung ausbreitet. Die Amplituden E_y und H_z wurden durch $\exp(dx)$ mit $d = 0,017176716$, dem Realteil von (2.53), reskaliert. Das damit ebenfalls verstärkte numerische Rauschen ist bei $x = 650$ sichtbar und dominiert den weiteren Kurvenverlauf, der von den theoretischen Werten (blau und rot) deutlich abweicht.

eine Momentaufnahme der Simulation gezeigt, die bereits im Zusammenhang mit Abb. 2.9 für $\sigma = 0,1$ diskutiert wurde. Da die starke Schwächung zu einem raschen Abfall der Amplituden mit der Eindringtiefe führt, wurden die Daten mit dem theoretisch bestimmten Wert $\exp(0,017176716 \cdot x)$ multipliziert, um diesen exponentiellen Abfall zu kompensieren. Die Phasenverschiebung zwischen E_y und H_z ist bis zu einer Eindringtiefe von etwa $x = 650$ sowie deren Wellenlängen und ihren unterschiedlichen Amplituden, die durch die Impedanz bestimmt werden, sichtbar. In dieser Tiefe sind die theoretisch bestimmten Amplituden ungefähr um den Faktor 10^{-5} kleiner im Vergleich zur Anfangsamplitude von Eins und liegen damit im sogenannten numerischen Rauschen. Dieses Rauschen scheint an jedem Punkt im Gitter während der Simulation von konstanter Stärke zu sein, worauf hier nicht näher eingegangen wird. Wie bereits erwähnt, kann die Übereinstimmung zwischen theoretischer Vorhersage und Simulation bei hohen Leitfähigkeiten weniger genau werden, doch bleiben Simulationen auch unter unphysikalisch hohen σ stabil. Dieses Phänomen entspricht der Wirkung eines idealen Spiegels, welcher es dem elektrischen Anteil einer EM-Welle nicht erlaubt, in den elektrischen Leiter einzudringen, woraufhin die gesamte Welle reflektiert wird.

2.4.5 Statischer Grenzfall

Da die vorliegende Methode explizit die Ableitung der Maxwell-Gleichungen erlaubt, die nur die Ausbreitung von EM-Wellen (2.27) beschreiben, soll nun geprüft werden, ob und wie gut es implizit auch den statischen Grenzfall in Form von (2.16) enthält. Für dieses Beispiel wird ein zweidimensionales System, definiert über 600×600 Zellen, mit offenen Randbedingungen in der x - y -Ebene betrachtet. Abb. 2.11 zeigt den Kurvenverlauf der Feldkomponenten H_y und E_x in x -Richtung.

Für den magnetostatischen Grenzfall floss ein Strom in z -Richtung senkrecht zur Gitterebene mit periodischen Randbedingungen in z -Richtung. Unter Verwendung eines finiten Stokes-Integrals zur näherungsweise Berechnung der Stromdichte aus \mathbf{H} und unter Verwendung von 60 unterschiedlichen Umfängen, wurde $j_z = 0,999969 \pm 0,00113\%$ bestimmt, gemäß

$$\oint_{\partial O} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_O \mathbf{j} d\mathbf{A} = \int_O j_z dA_z \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = j_z \quad (2.58)$$

mit O als Fläche – hier ein Quadrat – und ∂O als Rand dieser Fläche. Mit j_z definiert in einem einzelnen Gitterpunkt, dessen Betrag Eins entspricht, erhält man

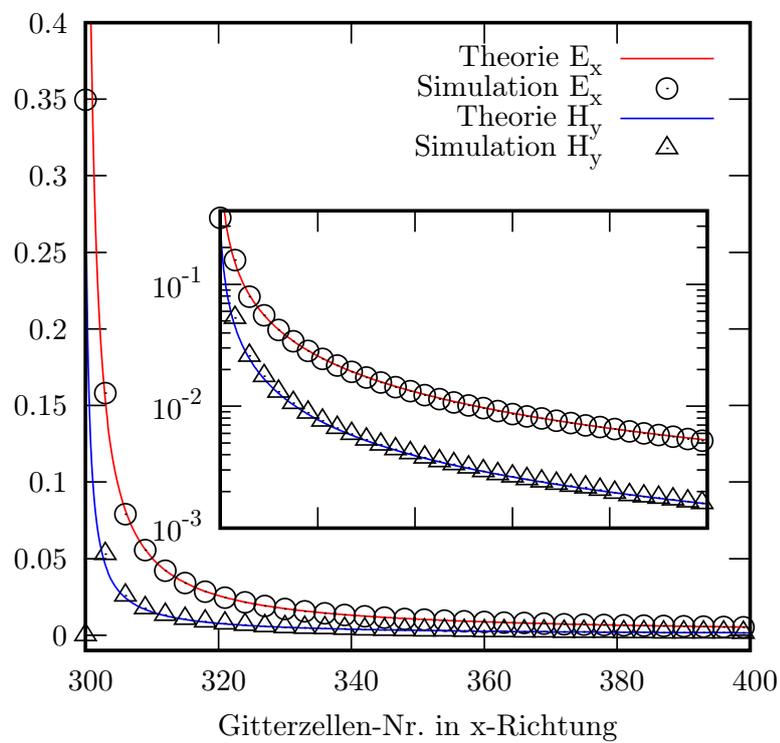


Abbildung 2.11: Darstellung der Simulation der elektrostatischen Feldkomponente E_x einer Punktladung und der magnetostatischen Feldkomponente H_y erzeugt über einen elektrischen Strom im Vergleich mit der theoretischen Vorhersage.

somit direkt die definierte Stromdichte.

Der elektrostatische Grenzfall wurde über einen Strom j_x , welcher von der Mitte bis zum Rand des Gitters in x -Richtung verlief, konsturiert. Diese Stromdichte wird für die ersten 100-Iterationsschritte mit dem Wert 0,1 angenommen, danach wird er zu $j_x = 0$ gesetzt. Mit den offenen Randbedingungen in der x - y -Ebene, ist der divergente Anteil der Stromdichte in der Mitte des Gitters relevant. Der Strom akkumuliert dort eine Ladung mit einem theoretischen Wert von $q = j_x \Delta T = j_x \frac{1}{3} \Delta N_{it} = \frac{10}{3}$. Unter Verwendung des finiten Gauß-Integrals über 60 verschiedene Oberflächen erhält man $q = 3,33438 \pm 0,1221 \%$ gemäß

$$\oint_{\partial V} \mathbf{E} d\mathbf{A} = \int_V \rho dV = q. \quad (2.59)$$

Beide Grenzfälle stimmen vergleichsweise gut mit den theoretisch bestimmten Werten überein, die aus (2.16) abgeleitet wurden.

2.5 Zusammenfassung: Kapitel 2

In diesem Kapitel wurde eine einfache Erweiterung eines speziellen Grenzfalles – dem Vakuum – durch zusätzliche und angepasste GB-Gleichungen gezeigt. Dieser Ansatz ist in der Lage, die Wirkung von Medieneigenschaften in Form von Polarisierung und Magnetisierung zu beschreiben. Die vorgestellte Methode separierter Medien führt zu stabilen Simulationsergebnissen unter beliebigen Medienübergängen. Es wurden dazu neue Gleichgewichte von zusätzlichen Verteilungen herangezogen, deren partielle zeitliche Änderung von Null verschieden ist; ihr räumliches Differential verschwindet gemäß der Chapman-Enskog-Entwicklung. Simulationen der ursprünglichen Methode integrierter Medien werden vergleichsweise schnell instabil, wohingegen die vorgeschlagene Modifikation stabil bleibt. Im Gegensatz zur Methode integrierter Medien lässt sich beim Ansatz der Separierung dieser Medien kein Hinweis darauf finden, dass es bei Simulationen zu Instabilitäten kommt. Gemäß der Chapman-Enskog-Entwicklung, über welche die Maxwell-Gleichungen aus der vorgestellten Methode abgeleitet werden, müssten streng genommen auch hier Terme von zweiter und höherer Ordnung auftreten, die zwangsläufig zu Dissipationen führen müssten. Diese Dissipationen müssten sich in der Verletzung der Energieerhaltung niederschlagen. Davon ist jedoch im Rahmen von Langzeitsimulationen nichts zu erkennen. Die Beschreibung der Leitfähigkeit von Medien in dieser Arbeit erfolgt über eine Erweiterung, die einer Manipulation am elektrischen Feld entspricht. Das hier verwendete Verfahren entspricht einer sequentiellen Strang-Aufteilung erster Ordnung. Der größte Vorteil dieser effektiven Schwächung besteht darin, die numerische Stabilität durch Dissipation zu gewährleisten. Die angewandten Simulationen für den Skin-Effekt haben sich über einen weiten Bereich von Leitfähigkeiten als akkurat erwiesen. Allein der Grenzfall guter Leiter leidet an Genauigkeit, was jedoch auf die fehlende räumliche Auflösung der Simulationsdaten zurückzuführen ist. Schwankungen der Simulationsdaten befinden sich jedoch innerhalb der theoretisch erwarteten Werte.

Kapitel

Optimierung des Verfahrens und dispersive Medien

Ein vergleichsweise altes und gut untersuchtes Verfahren zur Simulation der Elektrodynamik ist die FDTD (Finite-Difference-Time-Domain) [83]. Sie hat sich als effektive und akkurate Methode zur Simulation einer Vielzahl von Fragestellungen auf diesem Gebiet bewährt. Sie gehört zu den computernumerischen Iterationsverfahren und ihre Aufgabe besteht im Kern darin, die Maxwell-Gleichungen räumlich und zeitlich zu diskretisieren. Das FDTD-Verfahren leitet die elektromagnetischen Felder des aktuellen Zeitschritts aus dem Zustand des vorherigen Schritts ab, womit diese Methode zu den expliziten Verfahren gehört. Obwohl sie auf eine Vielzahl von elektromagnetischen Wechselwirkungsproblemen angewendet wurde, ist sie nur bedingt stabil [84, 85]. Es ist bekannt, dass die Stabilität stark von der räumlichen Auflösung abhängt, welche durch die Anzahl der Punkte, aus denen das Gitter oder Netz besteht, bestimmt ist. Der Grund dafür liegt in den vernachlässigenden Termen höherer Ordnung, welche durch die Diskretisierung verursacht werden. Um die sich daraus ergebenden Schwierigkeiten zu vermeiden, wurden verschiedene Ansätze zur Behandlung dieser Probleme vorgeschlagen, wie z. B. Root-Matching [86], Chebyshev [87], eine bedingungslos stabile FDTD [85] oder deren Korrektur höherer Ordnung [84], um einige aufzulisten. Diese Methoden zur Behandlung von Schwächen im Verfahren der FDTD sind zum einen fallspezifisch und benötigen zum anderen einen zusätzlichen, zeitintensiven Rechenaufwand. Aus diesem Grund soll in diesem Kapitel eine GBM entwickelt werden, die im Gegensatz zur FDTD sowohl universell anwendbar als auch zeiteffizient ist. Daher werden Simulationen mithilfe dieser Methode mit denen der FDTD – basierend auf der Yee-Methode [83, 88] – verglichen.

Eine interessante GBM wurde von Mendoza und Muñoz [19] vorgeschlagen. In ihrer Version der GBM wurden 50 Verteilungsgrößen für den Strömungs-Prozess verwendet, welche ebenfalls aus den elektrischen und magnetischen Feldkomponenten gebildet werden. Diese Feldkomponenten werden dann über eine bestimmte Sum-

menregel dieser Verteilungsgrößen gewonnen. Die Autoren zeigten, dass ihre GBM eine Vielzahl unterschiedlicher Anwendungen simulieren kann. Ein entscheidender Nachteil dieser GBM ist, dass die Strömungsrichtung innerhalb jeder Zelle über die Zellecken (gitterdiagonal) führt und nicht über die Kanten. Diese Methode ist also identisch mit einer Überlagerung von zwei unabhängigen Simulationen, deren Gitter räumlich um eine Gitterzelle zueinander verschoben sind. Für eine bessere oder einfachere Modellierung einer zu behandelnden Fragestellung, ist es möglich, dass eine entsprechende Drehung der Strömungsvektoren oder des Vektorsystems dieses Problem löst. Diesem Aspekt wird in dieser Arbeit jedoch nicht nachgegangen und anstelle dessen nach einem Ansatz gesucht, welcher den erforderlichen Bedarf an Rechenressourcen weiter minimiert. Dazu wird eine Methode vorgestellt, welche den Satz von 50 Verteilungsgrößen auf 12 reduziert. Teile dieses Kapitels sind in [89] veröffentlicht worden.

3.1 Gitter-Boltzmann-Methode

3.1.1 GBM-Beschreibung

In Analogie zur Ableitung des kinetischen Flusses in der Fluiddynamik und zu dem vorangegangenen Kapitel 2, werden die Komponenten des elektrischen und des magnetischen Feldes aus einer Summe bestimmter Verteilungsgrößen f_n erhalten, wie in [19] vorgeschlagen. Die Summenregel für jedes Feld \mathbf{E} und \mathbf{H} lautet somit

$$\mathbf{E} = \sum_n f_n \mathbf{e}_n, \quad (3.1a)$$

$$\mathbf{H} = \sum_n f_n \mathbf{h}_n \quad (3.1b)$$

wobei es sich mit den Vektoren \mathbf{e}_n und \mathbf{h}_n um einen geeigneten Satz an Vektoren handelt, deren Eigenschaften bestimmten Regeln gehorchen müssen. Ähnlich wie bei [19] gehört dieser Satz von Vektoren zu einer Komponente n im Modell. Beide Vektoren, \mathbf{e}_n und \mathbf{h}_n , stehen senkrecht zueinander und bilden eine Ebene, welche durch den Normalenvektor \mathbf{v}_n beschrieben wird. Dieses \mathbf{v}_n zeigt in die Strömungsrichtung des „Fluids“ und trägt dabei eine entsprechende Menge f_n , von der später noch zu sehen ist, dass diese mit der Feldenergiedichte in Zusammenhang steht. Für das vorgeschlagene Modell wird ebenfalls wieder das D3Q7-Gitter verwendet (siehe Abb. 2.1). Prinzipiell ließen sich auch mehr Strömungsvektoren

realisieren, wie z. B. D3Q15. Nach Huang et al. [22] kann ein solches GBM jedoch instabil werden. Zur Vermeidung unnötig hoher Komplexität soll darauf an dieser Arbeit nicht weiter eingegangen werden. Der Satz von Vektoren für die Strömungsrichtung mit ihren Komponenten $v_{\alpha,n}$ und jenen für die Konstruktion der Feldkomponenten $e_{\alpha,n}$ und $h_{\alpha,n}$ mit $\alpha \in \{x, y, z\}$ und $n \in [1,6]$ müssen zwingend den Relationen

$$\sum_n v_{\alpha,n} = \sum_n h_{\alpha,n} = \sum_n e_{\alpha,n} = 0, \quad (3.2a)$$

$$\sum_n h_{\alpha,n} h_{\beta,n} = \sum_n e_{\alpha,n} e_{\beta,n} = 4\delta_{\alpha\beta}, \quad (3.2b)$$

$$\sum_n e_{\alpha,n} h_{\beta,n} = 0, \quad (3.2c)$$

$$\sum_n v_{\alpha,n} e_{\beta,n} h_{\gamma,n} = 2\epsilon_{\alpha\beta\gamma}, \quad (3.2d)$$

$$\sum_n v_{\alpha,n} e_{\beta,n} e_{\gamma,n} = \sum_n v_{\alpha,n} h_{\beta,n} h_{\gamma,n} = 0 \quad (3.2e)$$

gehörchen. Für diese Relationen wurde folgender Ansatz für deren Werte angenommen:

$$v_{x,1} = 1, \quad h_{z,1} = -1, \quad e_{y,1} = -1, \quad (3.3a)$$

$$v_{y,2} = -1, \quad h_{x,2} = 1, \quad e_{z,2} = -1, \quad (3.3b)$$

$$v_{z,3} = -1, \quad h_{y,3} = 1, \quad e_{x,3} = -1, \quad (3.3c)$$

$$v_{x,4} = -1, \quad h_{y,4} = -1, \quad e_{z,4} = -1, \quad (3.3d)$$

$$v_{y,5} = 1, \quad h_{z,5} = -1, \quad e_{x,5} = 1, \quad (3.3e)$$

$$v_{z,6} = 1, \quad h_{x,6} = -1, \quad e_{y,6} = 1 \quad (3.3f)$$

sowie für die restlichen sechs

$$v_{\alpha,n+6} = -v_{\alpha,n}, \quad (3.4a)$$

$$h_{\alpha,n+6} = -h_{\alpha,n}, \quad (3.4b)$$

$$e_{\alpha,n+6} = e_{\alpha,n}. \quad (3.4c)$$

Für die Equilibria von f_n wird

$$f_n^{eq} = \frac{1}{4} \sum_{\alpha} (E_{\alpha} e_{\alpha,n} + H_{\alpha} h_{\alpha,n}) \quad (3.5)$$

3 Optimierung des Verfahrens und dispersive Medien

gewählt, wobei $\alpha \in \{x, y, z\}$. Unter Verwendung der Summenregeln (3.1) erhält man die Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{H}, \quad (3.6a)$$

$$\dot{\mathbf{H}} = -\frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{E} \quad (3.6b)$$

wobei alle Ableitungen in Gittereinheiten erfolgen. Der Faktor von $1/2$ vor jeder Gleichung auf der rechten Seite von (3.6) ist das Ergebnis des Verhältnisses des Faktors vor (3.2d) zu jenem vor (3.2b). Dieses Verhältnis entspricht der Lichtgeschwindigkeit in Gittereinheiten und bedeutet, dass sich ein EM-Wellenpaket innerhalb von zwei Iterationsschritten von einer Zelle zur nächsten bewegt. Um die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum auf $c_0 = 1$ zu normieren, wird die zeitliche Schrittgröße pro Iteration auf $\Delta t := 1/2$ und die räumliche auf $\Delta\alpha = 1$ gesetzt.

Im Folgenden werden die Summenregeln (3.2) und die Definition (3.5) zur Ableitung der Teile der Maxwell-Gleichungen verwendet, welche die Feldausbreitung beschreiben. Da das Vorgehen für diese GBM analog zu jenem aus Kapitel 2 ist, kann erneut (2.13) für (3.1a) verwendet werden, womit sich

$$\partial_t \sum_n f_n^{eq} e_{\alpha,n} = - \sum_{\gamma,n} v_{\gamma,n} \partial_\gamma f_n^{eq} e_{\alpha,n} \quad (3.7)$$

ergibt. Die linke Seite von (3.7) reduziert sich auf

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \partial_t \sum_\beta \left(E_\beta \underbrace{\sum_n e_{\beta,n} e_{\alpha,n}}_{4\delta_{\alpha\beta}} + H_\beta \underbrace{\sum_n h_{\beta,n} e_{\alpha,n}}_{=0} \right) \\ & = \partial_t E_\alpha \end{aligned} \quad (3.8)$$

und die rechte Seite auf

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \sum_{\beta,\gamma} \partial_\gamma \left(E_\beta \underbrace{\sum_n v_{\gamma,n} e_{\beta,n} e_{\alpha,n}}_{=0} + H_\beta \underbrace{\sum_n v_{\gamma,n} e_{\alpha,n} h_{\beta,n}}_{=2\epsilon_{\gamma\alpha\beta}} \right) \\ & = \frac{1}{2} \sum_{\beta,\gamma} \epsilon_{\gamma\alpha\beta} \partial_\gamma H_\beta = -\frac{1}{2} \sum_{\beta,\gamma} \epsilon_{\alpha\gamma\beta} \partial_\gamma H_\beta. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Die Gleichung (3.7) lautet somit

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{H} \quad (3.10)$$

Das Vorgehen für (3.7) wird analog auf (3.1b) angewendet womit sich

$$\partial_t \sum_n f_n^{eq} h_{\alpha,n} = - \sum_{\gamma,n} v_{\gamma,n} \partial_\gamma f_n^{eq} h_{\alpha,n} \quad (3.11)$$

ergibt. Die linke Seite von (3.11) folgt der Prozedur von (3.8) und es ergibt sich $\partial_t H_\alpha$. Für die rechte Seite erhält man

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \sum_{\beta,\gamma} \partial_\gamma \left(E_\beta \underbrace{\sum_n v_{\gamma,n} e_{\beta,n} h_{\alpha,n}}_{=2\epsilon_{\gamma\beta\alpha}} + H_\beta \underbrace{\sum_n v_{\gamma,n} h_{\alpha,n} h_{\beta,n}}_{=0} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\beta,\gamma} \epsilon_{\gamma\beta\alpha} \partial_\gamma E_\beta = \frac{1}{2} \sum_{\beta,\gamma} \epsilon_{\alpha\gamma\beta} \partial_\gamma E_\beta \end{aligned} \quad (3.12)$$

womit (3.11) dann

$$\dot{\mathbf{H}} = -\frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{E} \quad (3.13)$$

lautet. Hier wurden das Kronecker-Delta $\delta_{\alpha\beta}$ und der Levi-Civita-Tensor $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ in ihrer üblichen Definition verwendet.

Die Interpretation der Größen f_n im Rahmen der Fluidodynamik ist gut verstanden und mit Boltzmanns H-Theorem [90, 91] verbunden, aus dem man die Entropie des Systems ableiten kann. Dieser Satz erlaubt es daher, die Stabilität in Bezug auf f_n als positiv-definite Größe zu beschreiben, was wahr ist, vorausgesetzt, f_n ist äquivalent zu einer Teilchendichte. Im Gegensatz zu f_n in der Fluidodynamik sind die in (3.5) definierten Größen f_n unklar, bzw. haben kein äquivalent. f_n kann in diesem Modell nicht allgemein als positiv-definit angenommen werden. Eine andere Möglichkeit, die Stabilität zu beschreiben, besteht darin, aus dem f_n für diese GBM eine geeignete Lyapunov-Funktion abzuleiten, die ebenfalls ein dynamisches System beschreiben kann. Eine solche Funktion lässt sich über die Größe der Feldenergiedichte w mit Hilfe die Relation

$$\sum_n f_n^2 \propto w \quad (3.14)$$

definieren. Diese Größe ist immer halbpositiv bestimmt und führt direkt zum

3 Optimierung des Verfahrens und dispersive Medien

Poynting-Theorem. Dieses Theorem leitet sich aus der klassischen Mechanik ab, an der die Lorentzkraft beteiligt wird. Es entspricht der Kontinuität oder Erhaltung der Energie des elektromagnetischen Feldes [72]. Das Poynting-Theorem beschreibt den Energietransport durch EM-Wellen. Der Einfachheit halber wird angenommen, dass keine Ströme und Medien beteiligt sind, sodass sich der Poynting-Satz auf

$$\partial_t (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) + 2\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = 0 \quad (3.15)$$

reduziert. Unter Verwendung der Summenregeln (3.2) und der Definition des Gleichgewichts (3.5) ergibt sich für die Erhaltung von $\sum_n f_n^2$ die Gleichung

$$\partial_t \sum_n (f_n^{eq})^2 = - \sum_{\alpha,n} v_{\alpha,n} \partial_\alpha (f_n^{eq})^2. \quad (3.16)$$

Für die linke Seite dieser Gleichung ergibt sich unter Verwendung von (3.5)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{16} \partial_t \sum_{\alpha,\beta} \left(E_\alpha E_\beta \underbrace{\sum_n e_{\alpha,n} e_{\beta,n}}_{=4\delta_{\alpha\beta}} + H_\alpha H_\beta \underbrace{\sum_n h_{\alpha,n} h_{\beta,n}}_{=4\delta_{\alpha\beta}} \right) \\ & + \frac{1}{8} \partial_t \sum_{\alpha,\beta} \left(E_\alpha H_\beta \underbrace{\sum_n e_{\alpha,n} h_{\beta,n}}_{=0} \right) = \frac{1}{4} \partial_t (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) \end{aligned} \quad (3.17)$$

und für die rechte Seite

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{16} \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \partial_\gamma \left(E_\alpha E_\beta \underbrace{\sum_n e_{\alpha,n} e_{\beta,n} v_{\gamma,n}}_{=0} + H_\alpha H_\beta \underbrace{\sum_n h_{\alpha,n} h_{\beta,n} v_{\gamma,n}}_{=0} \right) \\ & - \frac{1}{16} \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \partial_\gamma \left(E_\alpha H_\beta \underbrace{\sum_n e_{\alpha,n} h_{\beta,n} v_{\gamma,n}}_{=2\epsilon_{\gamma\alpha\beta}} + E_\beta H_\alpha \underbrace{\sum_n e_{\beta,n} h_{\alpha,n} v_{\gamma,n}}_{=2\epsilon_{\gamma\beta\alpha}} \right) \\ & = - \frac{1}{8} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Mit der Definition der Energiedichte $w = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2)$ und des Poynting-Vektors

$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, ergibt sich somit

$$\partial_t w = -\frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{S}. \quad (3.19)$$

Mit \mathbf{S} als Größe des Energiedichtetransfers, dessen Betrag proportional zu $c_0 w$ ist, steht der Vorfaktor $\frac{1}{2}$ auf der rechten Seite in (3.19) für die Lichtgeschwindigkeit c_0 in Gittereinheiten, womit (3.15) bestätigt werden kann.

Die Interaktion der Felder mit Medien folgt der in Kapitel 2 vorgestellten Methode separierter Medien für die Implementierung von Polarisation \mathbf{P} , Magnetisierung \mathbf{M} und der Leitfähigkeiten σ , (siehe auch [41]). Diese Implementierung von Medien kann direkt auf die in diesem Kapitel vorgestellte GBM angewendet werden, welche bisher nur für das Vakuum gilt. Es wird davon ausgegangen, dass Simulationen dieser Erweiterung ebenfalls stabil bleiben. Daher soll auf die Stabilität der Simulationen unter Gegenwart von Medien nicht näher eingegangen werden.

3.2 Simulationsergebnisse

Die folgenden Simulationen wurden unter den selben Bedingungen wie in Kapitel 2 mit 64 GB RAM, Swap und einem Intel *i7*-Prozessor mit einer Taktfrequenz von 3,3 GHz durchgeführt. Es wird keine Parallelisierung verwendet und für alle Float-Variablen wird die doppelte Genauigkeit angenommen. Alle Größen werden mit dimensionslosen Gittereinheiten angenommen.

3.2.1 Fehlerskalierung

Wie bei vielen numerischen Methoden hängt die Genauigkeit der Simulationen der GBM von der räumlichen Auflösung ab. Um die Genauigkeit der in dieser Studie verwendeten GBM zu quantifizieren, wird die Ausbreitung einer EM-Welle in einem eindimensionalen System mit periodischen Randbedingungen simuliert. Die Anfangsbedingung bei $t = 0$ für diese Welle wird mit

$$E_y(x) = H_z(x) := \sin\left(x \frac{2\pi}{N}\right) \quad (3.20)$$

3 Optimierung des Verfahrens und dispersive Medien

angenommen wobei mit N die Anzahl der Gitterpunkte in x -Richtung mit $x \in [0, N]$ ist. Zusätzlich wird eine relative elektrische Permittivität mit

$$\varepsilon_r(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x < \frac{N}{2} \\ 2 & \text{if } x \geq \frac{N}{2} \end{cases}, \quad (3.21)$$

angenommen sowie eine elektrische Leitfähigkeit von $\sigma(x) = 0$ und eine relative magnetische Permeabilität $\mu_r(x) = 1$. Daher wird nach [41] die y -Komponente der Polarisation P_y mit dem Gleichgewicht

$$P_y^{eq} = (\varepsilon_r - 1) E_y \quad (3.22)$$

eingeführt. Der Strömungs-Prozess lautet dann

$$P_y(x, t + \Delta t) = 2P_y^{eq}(x, t) - P_y(x, t). \quad (3.23)$$

Für die Summenregel des elektrischen Feldes (3.1a) ergibt sich dann

$$E_y = \frac{1}{\varepsilon_r} \left(\sum_n f_n e_{y,n} + P_y \right). \quad (3.24)$$

Aus dem analytischen Ausdruck der Gesamtenergie erhält man dann für dieses Beispiel

$$W_{th} := \frac{1}{2N} \int_0^N (\varepsilon_r E_y^2 + H_z^2) dx = \frac{5}{4}. \quad (3.25)$$

Um die aus den Simulationsdaten erhaltene Gesamtenergie zu bestimmen, wird eine Näherung von (3.25) in Form der Summe

$$W(t) := \frac{1}{2N} \sum_{x=0}^N (\varepsilon_r E_y^2 + H_z^2) \quad (3.26)$$

verwendet. Der Vergleich dieser Gesamtenergie $W(t)$ mit der theoretisch vorhergesagten W_{th} erfolgt durch Berechnung des mittleren absoluten Fehlers

$$\langle \Delta W \rangle := \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T |W(t) - W_{th}| \quad (3.27)$$

zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, T = 10^4]$.

Abb. 3.1 zeigt die Abhängigkeit von $\langle \Delta W \rangle$ von der Gesamtzahl der Gitterpunkte

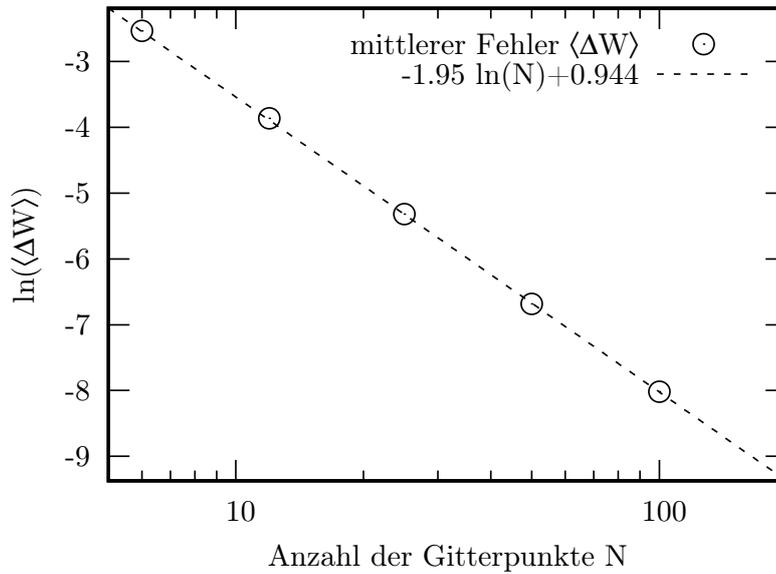


Abbildung 3.1: Absoluter Fehler der mittleren Gesamtenergie $\langle \Delta W \rangle$ einer mit GBM simulierten eindimensionalen EM-Welle. Die Randbedingungen sind periodisch und die Anzahl der Gitterpunkte N wird variiert. Die Simulationen zeigen, dass GBM eine Methode der Genauigkeit zweiter Ordnung ist.

N . Es folgt ungefähr $\langle \Delta W \rangle \propto N^{-2}$. Da die Wellenlänge der EM-Welle in (3.20) mit N Punkten abgebildet wird, ist eine räumliche Schrittgröße Δx proportional zu N^{-1} . Aus dieser Beziehung erhält man $\langle \Delta W \rangle \propto \Delta x^2$, was bedeutet, dass diese GBM von einer Genauigkeit zweiter Ordnung ist.

3.2.2 Stromquellen

Besonderer Aufmerksamkeit ist der Implementierung der Stromdichte \mathbf{j} geboten. Die Topologie des vorliegenden Modells mit seinem Basisvektorsystem (3.3a) erlaubt keine Addition von \mathbf{j} , wie dies in [19] erfolgt. Im Sinne der finiten Elemente kann man erneut zu jedem Iterationsschritt eine Korrektur für das elektrische Feld gemäß

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E} + \Delta t \mathbf{j} \quad (3.28)$$

vornehmen. Anhand des in diesem Abschnitt gezeigten Beispiels soll gezeigt werden, dass die Gleichung (3.28) den Grenzfall von $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ innerhalb einer Gitterzelle nicht erfüllen kann. Dazu wird ein 150×150 Punkte großes Gitter mit offenen Randbedingungen angenommen, in dem über Ströme eine Ladung im Zentrum des Gebiets via (3.28) erzeugt wird. Die Idee für diese Simulation geht darauf zurück,

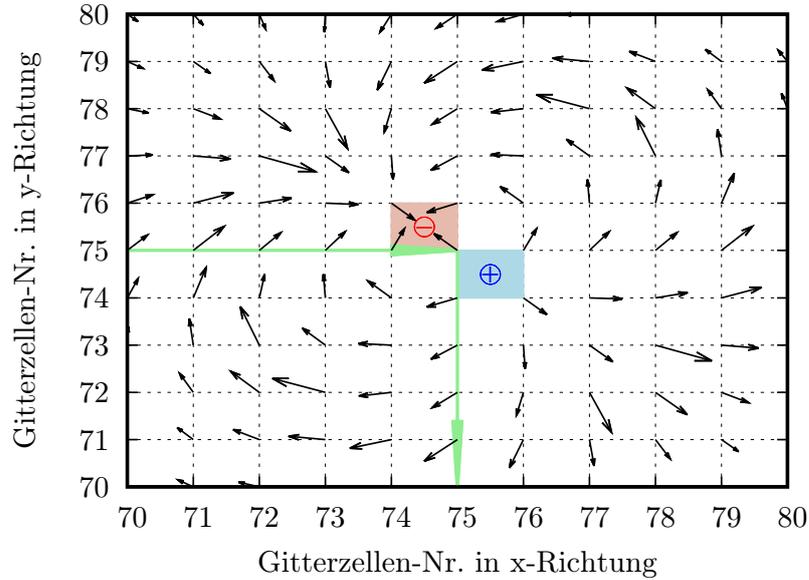


Abbildung 3.2: Elektrisches Feld einer Simulation unter Verwendung eines aktuellen \mathbf{j} , wie durch (3.28) definiert, das theoretisch $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ überall erfüllen sollte. Die grünen Pfeile zeigen den Pfad für \mathbf{j} , der mit (3.29) definiert ist, die kleineren schwarzen Stärke und Richtung des elektrischen Feldes. Die Simulationen zeigen im Gegensatz zur Theorie einen verbleibenden Dipol. Die farbigen Flächen im Zentrum des Gitters zeigen den Bereich, in dem das elektrische Feld divergiert, was zur Folge hat, dass dort elektrische Ladungen vorliegen. Diese sind über die Symbole \oplus und \ominus gekennzeichnet.

dass eine Ladung in einem bestimmten Punkt des Gitters über Divergenzen der Stromdichte in diesem Punkt erzeugt wird. Dabei soll zunächst ein Strom vom Rand horizontal bis zum Zentrum des Gitters fließen und dort eine Ladung ansammeln. Im Anschluss soll ein Strom vertikal von der Gittermitte bis zum Rand diese Ladung wieder abtransportieren. Die für diesen Zweck definierten Stromdichten lauten

$$\mathbf{j} = \frac{1}{100} \begin{cases} +\mathbf{e}_x, & \text{wenn } x \leq 75, y = 75 \\ -\mathbf{e}_y, & \text{wenn } y \leq 75, x = 75 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.29)$$

wobei die Einheitsvektoren \mathbf{e}_x und \mathbf{e}_y in Richtung der tiefgestellten Vektorkomponenten zeigen. Zunächst erzeugt der Strom in x -Richtung, definiert für $t \in [0,99]$, eine Ladung in der Mitte des Gitters im Punkt $(75,75)$. Dann baut der Strom in y -Richtung, definiert für $t \in [300,499]$, diese Ladung wieder ab. Es dürfte am Ende somit nirgends mehr eine Ladung im Gitter zu finden sein. Wie in Abb. 3.2 zu sehen ist, ist dies nicht der Fall, da am Ende eine Art elektrischer Dipol zurückzubleiben scheint, der Diagonal zu den eingeführten Strompfaden liegt. Die

Stromdichten (3.29) sind in Abb. 3.2 dabei als grüne Pfeile dargestellt. Hier werden die Gitterzellen über Gitterpunkte dargestellt. Die kleinen schwarzen Pfeile zeigen Stärke und Richtung des elektrischen Feldes in jeder Zelle an. Jede Gitterzelle repräsentiert daher die Zellecke des für die Simulationen verwendeten Gitters. Diese Darstellung ermöglicht eine bessere Sicht auf die Quellen des elektrischen Feldes in Bezug auf ihre Position. Die farblich untermalten Kästchen in der Gittermitte zeigen Bereiche der Divergenz an, in denen die elektrischen Feldlinien entweder alle in die Zelle hinein (rot bzw. \ominus) oder aus der Zelle heraus (blau bzw. \oplus) zeigen. Dies bedeutet, dass sich um das Zentrum herum entgegengesetzte Ladungen befinden, die einen elektrischen Dipol bilden, der in Richtung der Diagonale führt und nach der Theorie nicht existieren sollte.

Eine Videoaufzeichnung dieser Simulation ist im „Supplemental Material“ von [89] mit dem Dateinamen „CurrentPath_{_}WrongPrediction.mp4“ enthalten. Diese Videoaufnahme zeigt das elektrische Feld, das durch weiß gefärbte kopflose Pfeile dargestellt wird, bei denen die Farbsättigung mit der Stärke des elektrischen Feldes zunimmt. Die Divergenz des elektrischen Feldes wird erhalten, indem endliche Differenzen verwendet werden, um den Ort der Ladungsdichten zu approximieren. Sie sind blau gefärbt, um positive Ladungsdichten zu bezeichnen, und rot, um negative Ladungsdichten zu bezeichnen.

Dieser Befund spricht dafür, dass die Ladung im Zentrum durch die zweite Stromdichte nur zum Teil abgebaut wurde. Heuristisch stellt sich heraus, dass anstelle von (3.28)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{j}(\mathbf{r}), \quad (3.30a)$$

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{|\mathbf{j}(\mathbf{r})|}\right) \rightarrow \mathbf{E}\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{|\mathbf{j}(\mathbf{r})|}\right) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{j}(\mathbf{r}), \quad (3.30b)$$

mit dem lokalen Vektor \mathbf{r} für $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, in der Lage ist, die Ladung vollständig abzubauen. Diese Simulation wird in der Videoaufzeichnung im „Supplemental Material“ von [89] mit dem Dateinamen „CurrentPath_{_}RightPrediction.mp4“ gezeigt. Die Darstellung des elektrischen Feldes ist hier dieselbe wie bei der zuvor erwähnten Videoaufzeichnung.

3.2.3 Gitterimpedanz

Die Gitterimpedanz oder numerische Dispersion ist ein bekanntes Merkmal der FDTD [83]. Die Dispersionsrelation für eine EM-Welle beschrieben über die Methode der FDTD im eindimensionalen Fall lautet

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\omega\Delta t\right)}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \frac{\sin\left(\frac{1}{2}k\Delta x\right)}{\Delta x} \quad (3.31)$$

und enthält im Grenzfall der Dispersionsrelation für das Kontinuum mit

$$\omega^2 = k^2 c^2. \quad (3.32)$$

Hier wurde $\Delta t = \Delta x/c$ verwendet, was als Courant-Kriterium bekannt ist. Diese Beziehung (3.32) kann für den speziellen eindimensionalen Grenzfall exakt erfüllt werden. Für Systeme höherer räumlicher Dimensionen ist diese Dispersionsrelation jedoch nur entlang der Gitterdiagonale erfüllt. Diese Einschränkung hat zur Folge, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer EM-Welle mit zunehmender Frequenz abnimmt. In diesem Abschnitt wird die Auswirkung dieses als numerische Impedanz bezeichneten Phänomens der FDTD anhand von Simulationsdaten mit denen der GBM verglichen. Dazu wird ein zweidimensionales Gitter betrachtet, das aus $N_x = 1000$ und $N_y = 500$ Gitterpunkten besteht. Die Anfangsbedingung für das elektrische Feld ist durch

$$E_y(x, y) = 2e^{-0,05[(x-N_x/10)^2 + (y-N_y/2)^2]} \quad (3.33)$$

definiert. Alle anderen Feldkomponenten (einschließlich der von \mathbf{H}) werden auf Null gesetzt. Dies bewirkt, dass sich ein EM-Puls durch das Gitter ausbreitet. Für die FDTD wird $\Delta t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ gewählt, um das Courant-Stabilitätskriterium zu erfüllen, während für die GBM $\Delta t = \frac{1}{2}$ gewählt wird. Ein direkter Vergleich beider Methoden zu genau gleichen Zeitpunkten ist daher nicht möglich. Da zwischen Datenpunkten nicht interpoliert werden soll, werden nur Iterationspunkte gewählt, deren Zeitpunkte sich weniger als 0,05 voneinander unterscheiden. Im linken Teil der Abb. 3.3 wird die E_y -Komponente des mit der FDTD simulierten EM-pulses (graue Kreise), welcher sich in die x -Richtung ausbreitet, und der GBM (schwarze Dreiecke) zum Zeitpunkt $t = 99$ gezeigt. Zu erkennen ist, dass Maximum und Minimum beider Kurven voneinander abweichen. Die Ursache liegt vermutlich darin, dass die Eigenschaften zur räumlichen Auflösung beider Methoden sich ebenfalls voneinander

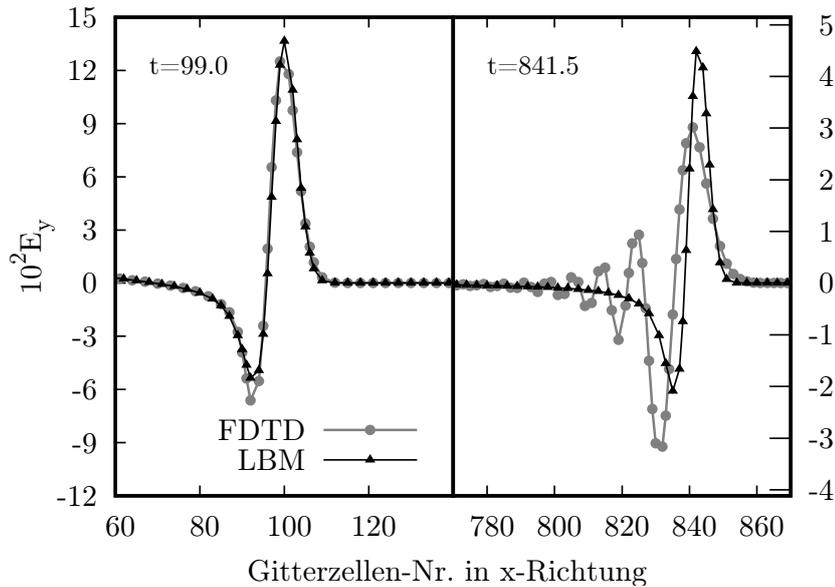


Abbildung 3.3: Vergleich eines EM-Pulses, der mit der FDTD und GBM zum Zeitpunkt $t = 99,0$ (links) und $t = 841,5$ (rechts) simuliert wurde, um den Einfluss der numerischen Impedanz beider Methoden miteinander zu vergleichen.

unterscheiden. Unabhängig davon ergibt sich für beide Methoden ein vergleichbarer Kurvenverlauf. Im rechten Teil der Abb. 3.3 sind beide EM-Pulse zu einem späteren Zeitpunkt ($t = 841,5$) dargestellt. Hier ist die inhärente Eigenschaft der FDTD, der Effekt der numerischen Impedanz, anhand des Kurvenverlaufs deutlich sichtbar. Zu erwarten ist, dass die Amplitude des EM-Pulses mit seiner Ausbreitung und damit in der Zeit abfällt, jedoch seine Form beibehält. Am Beispiel des Kurvenverlaufs des EM-Pulses der FDTD ist zu sehen, dass weitere Wellen hinter dem ersten Maximum am Gitterpunkt um $x = 840$ mit immer kleiner werdenden Wellenlängen (zunehmenden Frequenzen) hinterherlaufen. Dies bedeutet, dass die hochfrequenten Anteile des EM-Pulses eine geringe Propagationsgeschwindigkeit besitzen. Der mit der GBM simulierte EM-Puls zeigt sich dagegen unbeeinflusst von diesem Effekt. Abb. 3.4 zeigt den Vergleich der EM-Pulse zu verschiedenen Zeitpunkten (GBM im oberen Teil, FDTD im unteren Teil). Der EM-Puls beider Methoden zur Zeit $t = 841,5$ wird entlang in x -Richtung rückwärts verschoben, um der theoretischen Position des EM-Pulses bei $t = 198$ zu entsprechen. Zum besseren Vergleich wird die Amplitude des EM-Pulses zum späteren Zeitpunkt durch den theoretisch vorhergesagten Abfall reskaliert. Der Wert für diese Vorhersage wird aus der Amplitude der Energiedichte w abgeleitet, die mit der Entfernung von ihrer Quelle r über $w \propto r^{-1}$ abfällt, wie es im zweidimensionalen Fall gemäß dem Poynting-Theorem zu erwarten ist. Mit $w \propto \mathbf{E}^2$ ergibt sich für $E_y \propto \frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{ct}}$ und

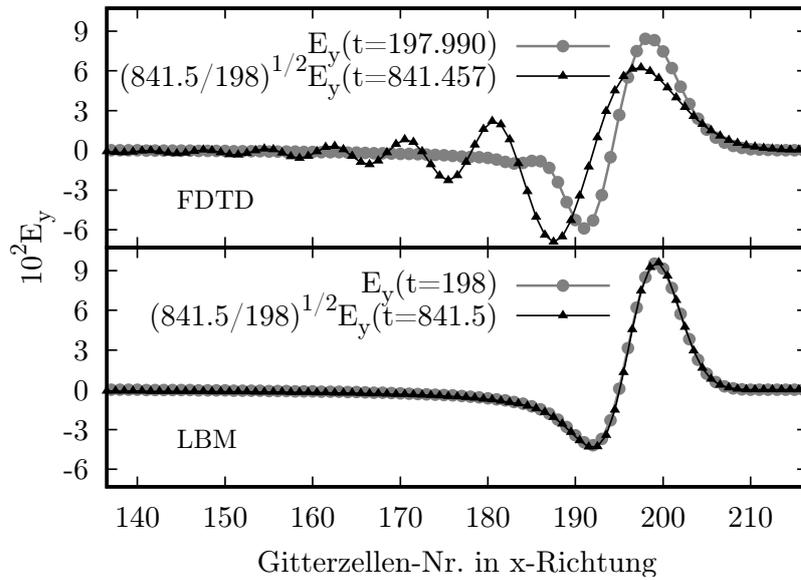


Abbildung 3.4: Vergleich eines EM-Pulses, der mit der FDTD und GBM zu verschiedenen Zeitpunkten simuliert wurde. Die Amplitude des EM-Pulses zu einem späteren Zeitpunkt wird räumlich verschoben, um der Position des vorangegangenen Pulses zu entsprechen und zusätzlich um die theoretische Vorhersage für den Abfall der Amplitude für die FDTD (oben) und GBM (unten) reskaliert.

somit

$$E_y \left(t_2, x + \frac{t_2 - t_1}{c} \right) = E_y(t_1, x) \sqrt{\frac{t_1}{t_2}}. \quad (3.34)$$

Im oberen Teil der Abb. 3.4 ist der EM-Puls unter Verwendung der FDTD bei $t = 198$ und $t = 841,5$ dargestellt. Der Effekt der numerischen Impedanz ist bereits bei $t = 198$ erkennbar und wird bei $t = 841,5$ deutlich sichtbar. Im Gegensatz dazu befolgen die im unteren Bereich angezeigten Simulationsdaten der GBM den mit (3.34) gegebenen theoretischen Verlauf sehr gut. Die Simulation legt nahe, dass die GBM in keiner Weise von dem Phänomen der numerischen Impedanz beeinflusst wird. In Bezug auf die Annahme, dass der Fehler höherer Ordnung der GBM reine Rundungsfehler sind, ist zu erwarten, dass auch die Dispersionsrelation (3.32) vollständig erfüllt sein muss.

3.2.4 Fehlerskalierung und Energieerhaltung

Ein weiteres bekanntes und gut untersuchtes Anwendungsbeispiel zur Simulation der Elektrodynamik ist das Strahlungsmuster des Hertzischen Dipols im dreidimensionalen Raum. Von zentralem Interesse ist hier die Strahlungszone, ein Grenzfall mit bekannter Näherung in Form eines analytischen Ausdrucks für das elektrische

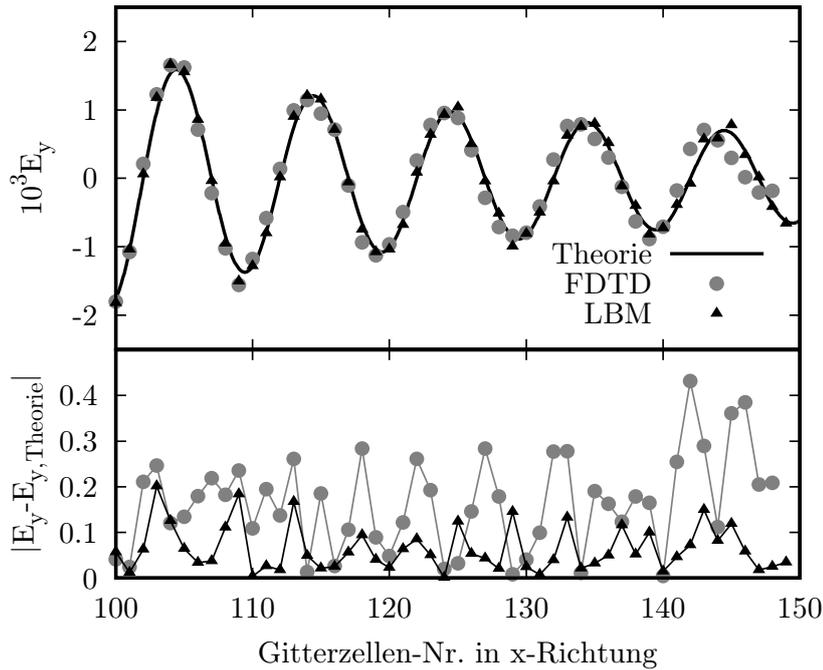


Abbildung 3.5: Vergleich der Daten für das elektrische Feld in y -Richtung $E_y(x)$ eines Hertzschen Dipols das mit der FDTD und der GBM simuliert wurde und wie es theoretisch für das Fernfeld (oben) verläuft. Die Abweichung beider Methoden von der Vorhersage wird im unteren Bereich angezeigt. Die Quelle des Dipols wird an der Gitterpunktnummer 75 definiert.

und magnetische Feld hinreichend weit von der Strahlungsquelle entfernt. Für die Simulation wird ein Gitter mit $150 \times 150 \times 150$ Punkten gewählt. Der Strahler wird über eine Stromdichte in y -Richtung, definiert durch

$$j_y(\mathbf{r}_0) = j_0 \sin(t\omega) \quad (3.35)$$

mit der Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und der Periodendauer T in der Mitte des Würfels bei $\mathbf{r}_0 := (75, 75, 75)^\top$ und einer Stärke von $j_0 = 1$. Die Periodendauer wird mit $T = 10$ angenommen, was einer Wellenlänge von $\lambda = 10$ entspricht. Die Wahl dieses Wertes wird durch die Tatsache motiviert, dass die FDTD immer noch in der Lage ist, eine Welle mit etwa 10 Gitterpunkten in vergleichsweise guter Näherung aufzulösen [83], also ein Daten- pro Gitterpunkt. Zunächst soll der Kurvenverlauf der y -Komponente des elektrischen Feldes in x -Richtung gemeinsam mit der theoretischen Vorhersage für diesen Grenzfall $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \gg \lambda = cT$ dargestellt werden. Dazu wird die Lösung für das elektrische Feld dieses Dipols verwendet, welcher nach [72] mit

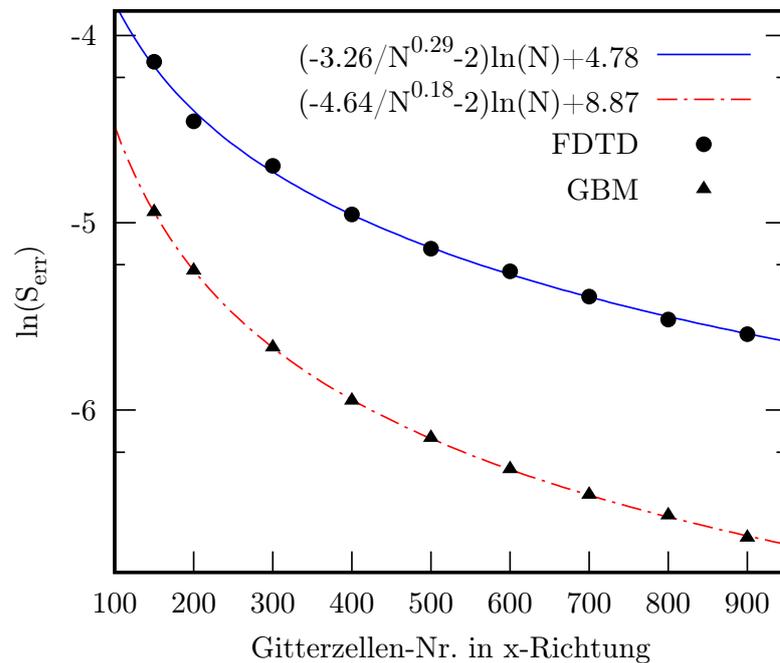


Abbildung 3.6: Abweichung der Simulationen von der theoretischen Vorhersage (ausgedrückt durch den Logarithmus des Standardfehlers $\ln(S_{err})$, bestimmt durch (3.40)) für den Hertzchen Dipol unter verschiedenen räumlichen Auflösungen, wie durch die Zahl der Gitterpunkte N pro Dimension definiert. Fehler für die FDTD und die GBM für die Anzahl von Gitterpunkten werden in grauen bzw. schwarzen Symbolen angezeigt.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{e^{i[\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)-\omega t]}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} [\mathbf{p}_0 - \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{p}_0)] \quad (3.36)$$

gegeben ist. Dabei werden der radialen Einheitsvektor

$$\mathbf{n} := \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (3.37)$$

und die Amplitude des Dipols

$$\mathbf{p}_0 = \frac{\dot{\mathbf{j}}_0}{\omega} \quad (3.38)$$

verwendet. Wenn man E_y entlang der x -Richtung betrachtet, erhält man $\mathbf{n}\mathbf{p}_0 = 0$ und (3.36) vereinfacht sich zu

$$E_y(x) = \frac{5}{100} \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{10} (|x-75| - t)\right)}{|x-75|}. \quad (3.39)$$

Dies gilt unter der Annahme, dass $x \gg x_0$, $c = 1$ und $j_0 = 1$ ist. Im oberen Teil der Abb. 3.5 sind die Kurve der theoretischen Vorhersage für $E_y(x)$ sowie die Ergebnisse der Simulationen der FDTD und der GBM bei $t \approx 75$ dargestellt. Der untere Teil zeigt die Fehler beider Methoden, die gegenüber den theoretischen Vorhersagen begangen wurden. Beide Methoden scheinen vergleichbare Fehler zu erzeugen. Bei größeren Entfernungen von der Quelle wächst der Simulationsfehler der FDTD, während der Fehler der GBM auf einem durchschnittlichen Niveau bleibt. Um den Fehler S_{err} jeder Simulation unter variierenden Gitterauflösungen zu quantifizieren, wird die Anzahl der Gitterpunkte pro Dimension N variiert. Der erwartete Kurvenverlauf für E_y wird analog zu (3.39) bestimmt. Diese theoretische Vorhersage geht von einer Punktquelle des Dipols ohne räumliche Ausdehnung aus, die mit keiner der hier betrachteten Methoden realisierbar ist. Wenn diese Vorhersage jedoch unter Verwendung des nichtlinearen Marquardt-Levenberg-Algorithmus der kleinsten Quadrate an die erhaltenen Simulationsdaten angepasst wird, lässt sich der relative Standardfehler bestimmen, indem der Wert für t in (3.39) angepasst wird. Dieser Fehler wird dann durch die Anzahl der Gitterpunkte pro Dimension und die Anzahl der Iterationsschritte geteilt, die die erzeugte Sinuswelle benötigt, um den Rand des Gitters zu erreichen. Abb. 3.6 zeigt diese Standardfehler für die GBM (Dreiecke) und die FDTD (Kreise). Im Gegensatz zu den in Abschnitt 3.2.1 gezeigten eindimensionalen Simulationen haben die dreidimensionalen Simulationen mehr Freiheitsgrade und sind daher fehleranfälliger. Für beide Methoden ist zu erwarten, dass ihre Simulationsfehler proportional zu N^{-2} sind. Der numerische

3 Optimierung des Verfahrens und dispersive Medien

Fehler, der unter einer endlichen Zahl an Gitterpunkten N begangen wird, ist mit

$$\ln(S_{err}) := b - \left(2 + \frac{a}{N^r}\right) \ln(N) \quad (3.40)$$

angenommen. Hier entspricht b einem konstanten Vorfaktor für den Fehler S_{err} . Die Konstanten a und r entsprechen Größen, welche die Abhängigkeit des Fehlers von Termen höherer Ordnung als 2 in N^{-1} approximieren. Diese Fehlerkurven der beiden Methoden unterscheiden sich erheblich, wie in Abb. 3.6 zu sehen ist. Die Werte für die Parameter in (3.40) der in Abb. 3.6 gezeigten Funktionen werden ebenfalls durch den nichtlinearen Marquardt-Levenberg-Algorithmus der kleinsten Quadrate erhalten. Die blaue Kurve beschreibt den Logarithmus des Fehlers der FDTD und die rote den der GBM. Deutlich zu sehen ist, dass die GBM erheblich geringere Fehler für alle N verursacht. Für kleine N ist dieser Fehler abhängig von Termen höherer Ordnung, die durch a und r modelliert werden. Das Verhältnis des Ausdrucks $[\ln(S_{err}) / \ln(N) + 2]$ für die FDTD und die GBM beträgt ungefähr zwei. D.h., die GBM konvergiert zweimal langsamer gegen die erwartete Genauigkeit zweiter Ordnung in Form von $S_{err} \propto N^{-2}$ als die FDTD. Beim Vergleich beider Fehlerfunktionen zeigt jene für die FDTD eine flachere Steigung als die für die GBM. Dies spiegelt sich in einem größeren Wert für r in (3.40) für die Daten der FDTD wieder. Somit steigt der Nenner mit der Anzahl der Gitterpunkte N schneller an und konvergiert daher auch schneller gegen die Beziehung $S_{err} \propto N^{-2}$. Es ist demnach schwierig, einen festen Wert für das Konvergenzverhältnis zwischen beiden Methoden anzugeben, da dieses nicht unabhängig von N sein kann. Wenn Terme höherer Ordnung in N vernachlässigt werden, steigt der logarithmische Fehler der FDTD gemäß $N \rightarrow \infty$ etwa doppelt so schnell wie jener der GBM an. Trotzdem bleibt dieser Fehler der GBM bei gleichem N signifikant kleiner als der für die FDTD. Die GBM ist demnach in der Lage, mit einer geringeren Gitterauflösung Simulationsdaten in vergleichbarer Güte zur FDTD zu erzeugen. In diesem Beispiel benötigt die GBM etwa dreimal weniger Gitterpunkte als die FDTD für einen vergleichbaren Fehler.

In Anbetracht der Berechnungsressourcen, wie in Tabelle 3.1 gezeigt, verwendet die GBM etwa dreimal mehr Arbeitsspeicher als die FDTD und benötigt etwa sechsmal mehr Rechenzeit bei gleicher räumlicher Auflösung. Der dreimal höhere Arbeitsspeicher ist nachvollziehbar, da beide Methoden sechs Gleitkommavariablen für die Komponenten von \vec{E} und \vec{H} verwenden, GBM jedoch noch zusätzliche zwölf Komponenten für die Verteilungsgrößen f_i besitzt. Der Unterschied in der erforderlichen Rechenzeit für die Simulationen zwischen den beiden Methoden ist

Tabelle 3.1: Vergleich der von FDTD und GBM verwendeten Berechnungsressourcen für die Simulation der Feldkomponente E_y entlang der x -Richtung des Hertzschen Dipols bei verschiedenen Gitterauflösungen. N bezeichnet die Anzahl der Gitterpunkte entlang der x -Richtung, „mem“ den in GigaBytes verwendeten Arbeitsspeicher und „time“ die Simulationszeit in Sekunden, die durch die Anzahl der CPU-Takte verwendet wird. Das Sternsymbol (*) kennzeichnet die zusätzliche Verwendung von Swap-Speicher.

N	FDTD		GBM	
	mem (GB)	time (sec)	mem (GB)	time (sec)
900	55.7	17468	160.4*	98084
800	39.1	10892	117.0*	62072
700	26.2	6460	78.5*	35720
600	16.6	3352	49.4	19304
500	9.6	1548	28.7	9304
400	5.0	632	14.7	3860
300	2.2	201	6.3	1228
200	0.8	40	1.9	252
150	0.4	14	0.9	76

nicht so leicht nachzuvollziehen, da sich diese erheblich unterscheiden. Es ist an dieser Stelle wichtig zu bemerken, dass für Simulationsdaten vergleichbarer Fehler S_{err} die GBM bedeutend effizienter mit den Rechenressourcen umgeht als die FDTD. Aus Abb. 3.6 ist beispielsweise zu ersehen, dass der Fehler von der FDTD bei $N = 900$ noch immer größer als der für die GBM bei $N = 300$ ist. Aus der Tabelle 3.1 geht damit hervor, dass die GBM bei vergleichbarer Genauigkeit neun mal weniger Arbeitsspeicher benötigt und damit etwa 14 mal schneller ist. Zu diesem Nachteil der FDTD gegenüber der GBM kommt noch hinzu, dass der Einfluss von Termen höherer Ordnungen bei zunehmender Anzahl an Iterationsschritten dazu führt, dass die FDTD die Erhaltung der Gesamtenergie verletzt, wie in Abb. 3.7 zu sehen ist. Die Gesamtenergie pro Periode der EM-Welle, bestimmt über die FDTD, nimmt im Laufe der Zeit deutlich zu. Im Gegensatz dazu stimmen die Simulationsdaten der GBM mit der Erwartung, einen konstanten Wert beizubehalten, überein. Diesem Unterschied soll noch etwas genauer nachgegangen werden. Dazu wird im Folgenden die Gesamtenergie in Abhängigkeit von T betrachtet, wie sie von einem Hertzschen Dipol in den Raum abgestrahlt wird. Zu diesem Zweck wird die Gleichung für die durchschnittliche Leistung [72] verwendet, welche

$$\dot{W} = \frac{|\mathbf{p}_0|^2 \omega^4}{12\pi\epsilon c^3} = \frac{|\mathbf{j}_0|^2 \omega^2}{12\pi\epsilon c^3} \quad (3.41)$$

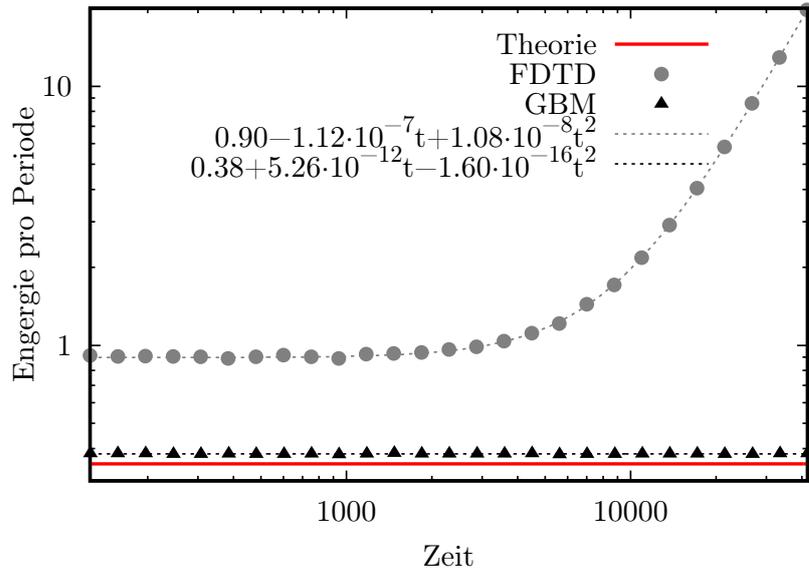


Abbildung 3.7: Zeitliche Entwicklung der Gesamtenergie eines Hertzschen Dipols, der über einen bestimmten Zeitraum in einem dreidimensionalen Raum abstrahlte. Es werden periodische Randbedingungen verwendet, um die bestimmte Gesamtenergie als konstant anzunehmen. Simulationen mit der FDTD und der GBM werden mit der theoretischen Vorhersage verglichen.

lautet und aus denen die Energie pro Periode nach

$$\langle W \rangle := \frac{|\mathbf{j}_0|^2 \pi}{3\epsilon c^3 T} \quad (3.42)$$

gewonnen wird. Diese Energie wird vom Dipol in den Raum abgestrahlt. Sie gilt zwar nur für die Fernfeldstrahlung, behält jedoch für die hier durchgeführten Simulationen Gültigkeit, da das Simulationsgebiet periodische Randbedingungen besitzt und somit die gesamte abgestrahlte Energie während der Simulation dem Fernfeld entspricht. Die Gesamtenergie wird nach (3.26) berechnet. Die Simulationen umfassen dabei ein Iterationsfenster von $4 \cdot 10^4$. Desweiteren soll ein Grenzfall untersucht werden, der über die Periodendauer von $T = 3$ definiert wird, da dieser Fall von beiden Methoden kaum auflösbar ist. Die Motivation für einen solchen Extremfall besteht darin, die Fähigkeit beider Methoden unter diesen Bedingungen miteinander zu vergleichen, da ihre Eigenschaft der räumlichen Auflösung sich ebenfalls voneinander unterscheidet. Abb. 3.7 zeigt die zeitliche Entwicklung der Gesamtenergie pro Periode, berechnet aus den Simulationsdaten, gewonnen mit der FDTD (graue Kreise) und der GBM (schwarze Dreiecke) für den Fall von $T = 3$. Der vorhergesagte Wert wird durch die horizontale durchgezogene schwarze Linie am unteren Rand der Abbildung gezeigt. Die Terme zweiter Ordnung der

FDTD verletzen das Prinzip der Energieerhaltung, wie am Anstieg der Kurve zu sehen ist. Daher wird für jede Methode eine Regressionsanpassung an ein Polynom durchgeführt, wie in der Legende der Abbildung gezeigt. Da die Gesamtenergie über die Zeit konstant sein muss, benötigt man den Term nullter Ordnung, um den Wert der Energie pro Periode zu identifizieren. Da die Simulationen mit Fließkommazahlen doppelter Genauigkeit durchgeführt wurden, ist eine Genauigkeit von 16 ± 1 signifikanten Stellen zu erwarten. Bei Verwendung von ungefähr 10^5 Iterationen und unter der Annahme, dass Rundungsfehler aufgetreten sind, würde sich ein maximaler absoluter Fehler von ungefähr 10^{-11} ergeben. Interessant an dieser Stelle ist, dass der aus den Daten der GBM erhaltene Koeffizient erster Ordnung $5,26 \cdot 10^{-12}$ ist. Diese Größenordnung weist darauf hin, dass das Runden der Fließkommazahlen ein entscheidender Grund für Simulationsfehler sein kann. Der Wert des Terms zweiter Ordnung dieser Polynom-Regressionskoeffizienten beträgt 10^{-16} , was angesichts der numerischen Genauigkeit vernachlässigbar ist. Es zeichnet sich hier ab, dass die GBM scheinbar die Eigenschaft der Energieerhaltung über eine beliebig hohe Anzahl an Iterationsschritten hinweg besitzt. Der Grund für diese Erhaltung der Gesamtenergie ist ähnlich der Massenerhaltung der GBM in der Fluidynamik. Dort ist es die Gleichung für die Stoffmengenerhaltung, hier ist es das Poynting-Theorem. Die polynomielle Regression der Daten der FDTD zeigt jedoch mit dem zeitabhängigen Anteil von $-1,12 \cdot 10^{-7}t + 1,08 \cdot 10^{-8}t^2$ Koeffizienten, die ungefähr fünf Größenordnungen größer als die zu erwartenden numerischen Rundungsfehler sind. Für die weitere Betrachtung soll dieses Problem der FDTD ausgeschlossen werden und mit dem Wissen um den Einfluss dieser Terme höherer Ordnung sollen die Simulationen die Grenzzeit von $T_c = 2000$ nicht überschreiten. Die aus diesen Simulationen bestimmten Energien pro Periode sind im oberen Teilbild der Abb. 3.8 über T für FDTD, GBM und der theoretischen Vorhersage mit $|j_0| = 1$, $c = 1$, $\varepsilon = 1$ für (3.42), dargestellt. Der Theorie nach gilt für den hier betrachteten Fall für die Energie pro Periode

$$\langle W \rangle = \frac{\pi}{3T}. \quad (3.43)$$

Die Simulationen beider Methoden stimmen bis zu einer Periodendauer von $T = 10$ gut mit den theoretischen Vorhersagen überein. Für kürzere Zeiträume beginnen die Abweichungen von der Theorie für die FDTD zuzunehmen. Im unteren Teil der Abb. 3.8 wird für jede Methode der mittlere Fehler als Abweichung des Mittelwertes der Gesamtenergie von der theoretischen Vorhersage zusammen mit den Standardabweichungen dargestellt. Insgesamt weist die GBM die kleineren Fehler

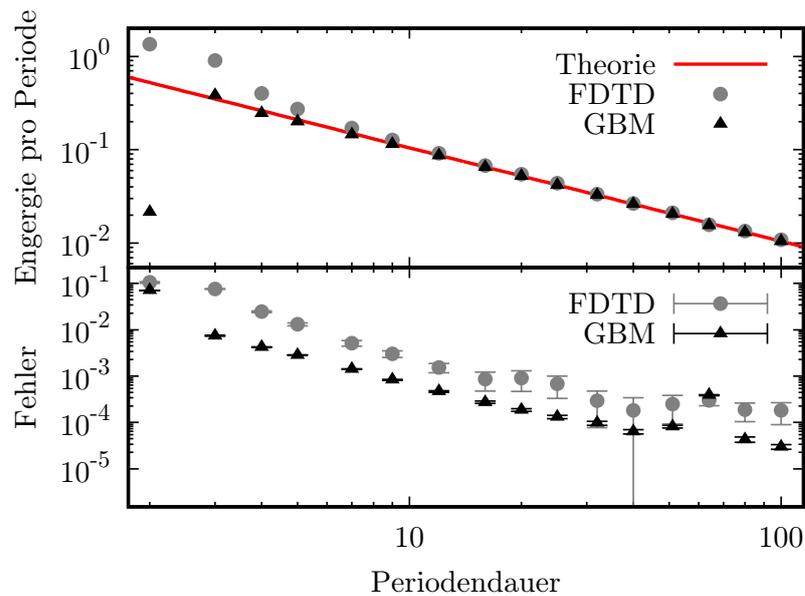


Abbildung 3.8: Gesamtenergie pro Periode, die von einem Hertzschen Dipol mit unterschiedlichen Frequenzen abgestrahlt wird. Daten, die mit der FDTD und der GBM erhalten wurden, werden mit der theoretischen Vorhersage (oberer Teil der Abbildung in rot) und ihrer Abweichung von der Vorhersage (unterer Teil der Abbildung) samt ihrer Standardabweichung verglichen.

auf und liefert vergleichsweise gute Vorhersagen bis zu $T = 3$. Selbst für nur 3 bis 4 Punkte pro Wellenlänge stimmen die Daten der GBM-Simulationen mit den theoretischen Vorhersagen überein. Dies zeigt, dass die GBM eine ungefähr doppelt so hohe räumliche Auflösung im Vergleich zur FDTD besitzt, da Letztere in etwa 9 Gitterpunkte pro Wellenlänge für akzeptable Simulationsergebnisse benötigt. Aus Simulationen der Strömungsmechanik (CFD) mithilfe der GBM ist bereits bekannt, dass die GBM ein deutlich besseres Auflösungsvermögen besitzt. In [92] z. B. wird gezeigt, dass die GBM sogar nur ein Viertel der Gitterpunkte pro Dimension im Vergleich zur CFD benötigt.

3.3 Dispersion

Die in Abschnitt 3.1.1 vorgestellte Implementierung von Medieneigenschaften, beschrieben mit ε_r , μ_r und σ , wurden als konstant angenommen. Das dort vorgestellte Verfahren erlaubt es jedoch, dass sich die Werte dieser Größen sowohl räumlich als auch zeitlich ändern dürfen, ohne die Stabilität der Simulation zu gefährden. Dies ermöglicht realistischere Simulationen, da die meisten in der Natur vorkommenden Materialien, die mit EM-Feldern in Wechselwirkung treten, in ihren optoelektri-

schen Eigenschaften nicht konstant sind. Von besonderem Interesse ist dieser Fall dann, wenn es sich um Wechselfelder handelt, die sich rasch ändern. Grund dafür ist, dass Ladungsträger und magnetische Momente auf mikroskopischer Ebene die Eigenschaften der Materie mitbestimmen. Gemäß der Lorentz-Kraft üben externe Felder Kräfte auf diese elektrischen Ladungen und magnetischen Momente aus und verrichten damit mechanische Arbeit an diesen mikroskopischen Strukturen. Diese Arbeit wird entsprechend der Energie der wirkenden Felder entnommen. Für die Simulationen im folgenden Kapitel 4 der vorliegenden Arbeit werden rein dielektrische Phänomene von Bedeutung sein, da biologische Gewebe nahezu vollständig transparent für magnetische Felder sind. Das Verschiebungsfeld \mathbf{D} folgt der Beziehung

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} := \mathbf{P} + \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (3.44)$$

mit der elektrischen Permittivität ε , die die Polarisation \mathbf{P} mit \mathbf{D} in Beziehung setzt. Um die Polarisation von biologischem Gewebe effektiv zu beschreiben, wird mehr als eine Komponente benötigt, wie später gezeigt wird. Es soll an dieser Stelle davon ausgegangen werden, dass die Gesamtpolarisation aus mehreren Komponenten gemäß

$$\mathbf{P} := \sum_n \mathbf{P}_n \quad (3.45)$$

besteht. Die Dispersionsrelation in dieser Arbeit wird mit dem Debye-Relaxationsmodell [93] modelliert. Typischerweise wird für die Modellierung der Dispersionseigenschaften biologischen Gewebes das sogenannte Cole-Cole-Modell [94] verwendet. Hierbei handelt es sich um eine Erweiterung des Debyeschen Relaxationsmodells um einen Parameter. Da die Umsetzung dieses Cole-Cole-Modells im Rahmen der hier verwendeten GBM komplizierter ausfällt und damit die Gefahr von Instabilitäten mit sich bringt, soll das Debyesche Relaxationsmodell nach [95] verwendet werden. Dazu wird dieses Relaxationsmodell auf eine Reihe von Komponenten der Polarisation \mathbf{P}_n angewendet, die

$$\varepsilon_n \mathbf{E} := \mathbf{P}_n + \omega_n^{-1} \dot{\mathbf{P}}_n \quad (3.46)$$

gehorschen, wobei mit ε_n die dielektrische Sättigung und ω_n^{-1} die charakteristische Relaxationszeit gemeint sind. Für die Simulation von (2.14) in Kombination mit (3.46) wird eine Näherung verwendet, die nur für kleine Zeitschritte δt pro Iteration gilt. Diese wird über

$$\delta \mathbf{P}_n \approx \delta t \omega_n (\varepsilon_n \mathbf{E} - \mathbf{P}_n) \quad (3.47)$$

3 Optimierung des Verfahrens und dispersive Medien

beschrieben. Eine Erweiterung von (3.47) bezüglich des Grenzfalls $\delta t\omega_n \rightarrow \infty$ erfolgt über

$$\mathbf{P}_n \rightarrow \mathbf{P}_n + \frac{\delta t\omega_n}{1 + \delta t\omega_n} (\varepsilon_n \mathbf{E} - \mathbf{P}_n) \quad (3.48)$$

$$= \begin{cases} \mathbf{P}_n + \delta t\omega_n (\varepsilon_n \mathbf{E} - \mathbf{P}_n) & , \delta t\omega_n \rightarrow 0 \\ \varepsilon_n \mathbf{E} & , \delta t\omega_n \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (3.49)$$

was dann zum bereits bekannten Fall $\mathbf{P}_n = \varepsilon_n \mathbf{E}$ führt. Dieses Ersetzen von \mathbf{P}_n , beschrieben durch (3.48), erfolgt nach jedem Iterationsschritt, gefolgt von der Korrektur von \mathbf{E} via

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E} - \frac{\delta t\omega_n}{1 + \delta t\omega_n (\varepsilon_0 + \varepsilon_n)} (\varepsilon_n \mathbf{E} - \mathbf{P}_n) \quad (3.50)$$

$$= \begin{cases} (1 - \delta t\omega_n \varepsilon_n) \mathbf{E} + \delta t\omega_n \mathbf{P}_n & , \delta t\omega_n \rightarrow 0 \\ \frac{\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_n}{\varepsilon_0 + \varepsilon_n} = \mathbf{E} & , \delta t\omega_n \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (3.51)$$

Damit sind die erwarteten Grenzfälle für das elektrische Feld ebenfalls sichergestellt und es ist davon auszugehen, dass die GBM damit weiterhin stabil bleibt [41]. Im Folgenden wird anstelle von \mathbf{E} direkt \mathbf{D} für (3.46) betrachtet, sodass sich

$$\dot{\mathbf{P}}_n = \omega_n^{-1} [\varepsilon_n \mathbf{D} - (1 + \varepsilon_n) \mathbf{P}_n] \quad (3.52)$$

ergibt. Zu jedem Iterationsschritt wird die Näherung $\mathbf{D} = (1 + \varepsilon_n) \mathbf{E}$ verwendet, welche in die obige Gleichung (3.52) eingesetzt wird. Damit ergibt sich für (3.48)

$$\mathbf{P}_n \rightarrow \mathbf{P}_n + \underbrace{\delta t\omega_n \frac{(\varepsilon_n \mathbf{E} - \mathbf{P}_n)}{(1 + \delta t\omega_n)(1 + \varepsilon_n)}}_{:=\Delta \mathbf{P}_n}. \quad (3.53)$$

Dieser Term $\Delta \mathbf{P}_n$ wird dann dazu verwendet, \mathbf{E} um den Einfluss des Mediums additiv zu ergänzen, indem dieser Einfluss als eine Art wirkende Stromdichte aufgefasst wird. Dazu wird (3.30) verwendet und man erhält schließlich den Schritt

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E} - \frac{1}{2} \sum_n \Delta \mathbf{P}_n. \quad (3.54)$$

3.4 Simulation der Deby-Relaxation

In diesem Kapitel soll das im vorangegangene Kapitel vorgestellte Vorgehen für das Deby'sche Relaxationsmodell anhand von Simulationen ausgewählter Grenzfälle untersucht werden.

3.4.1 Elektrostatischer Grenzfall

Ein trivialer Grenzfall ist der unter der Bedingung eines homogenen und konstanten elektrischen Feldes. Dazu wird ein eindimensionales System, bestehend aus 10 Gitterpunkten mit periodischen Randbedingungen betrachtet. Zur Zeit $T = 0$ ist das elektrische Feld überall im Gebiet mit $E_0 = 2$ in x -Richtung angenommen. Damit wird sicher gestellt, dass keine Komponente in irgendeiner Richtung des Raumes einen Gradienten aufweist und somit auch jede räumliche Ableitung verschwindet. Damit gilt $\dot{\mathbf{D}} = \mathbf{0}$, was zusammen mit (3.46) und der Anfangsbedingung auf die Lösungen

$$P_x = \frac{E_0}{1 + \varepsilon} (1 - e^{-\omega_0 t}), \quad (3.55a)$$

$$E_x = \frac{\varepsilon E_0}{1 + \varepsilon} (1 + \varepsilon e^{-\omega_0 t}), \quad (3.55b)$$

$$D_x = E_0 \quad (3.55c)$$

führt. Im Folgenden sollen zwei Grenzfälle untersucht werden. Der erste Fall (a) nimmt das Dielektrikum mit $\varepsilon = 10^3$ und $\omega_0 = 10^{-4}$ und der zweite Fall (b) nimmt es mit $\varepsilon = 1$ und $\omega_0 = 10^{-2}$ an. In Abb. 3.9 sind die Simulationsdaten für E_x (Dreiecke) und P_x (Kreise) dieser beiden Fälle zusammen mit den jeweiligen theoretischen Vorhersagen (rot für E_x und blau für P_x) über die Zeit in Iterationsschritten N_{it} dargestellt. Die gute Übereinstimmung der Simulationsdaten mit der Theorie ist deutlich zu erkennen und gibt – besonders für den Fall (a) aufgrund der höheren Iterationszahl – auch einen Hinweis darauf, dass die Simulationen stabil bleiben.

3.4.2 EM-Welle

Um zu zeigen, dass der im vorangegangenen Abschnitt getroffene Ansatz auch für Wechselfelder geeignet ist, soll nun eine EM-Welle in einem eindimensionalen System simuliert werden. Desweiteren soll nun ein Zweikomponentenmedium verwendet

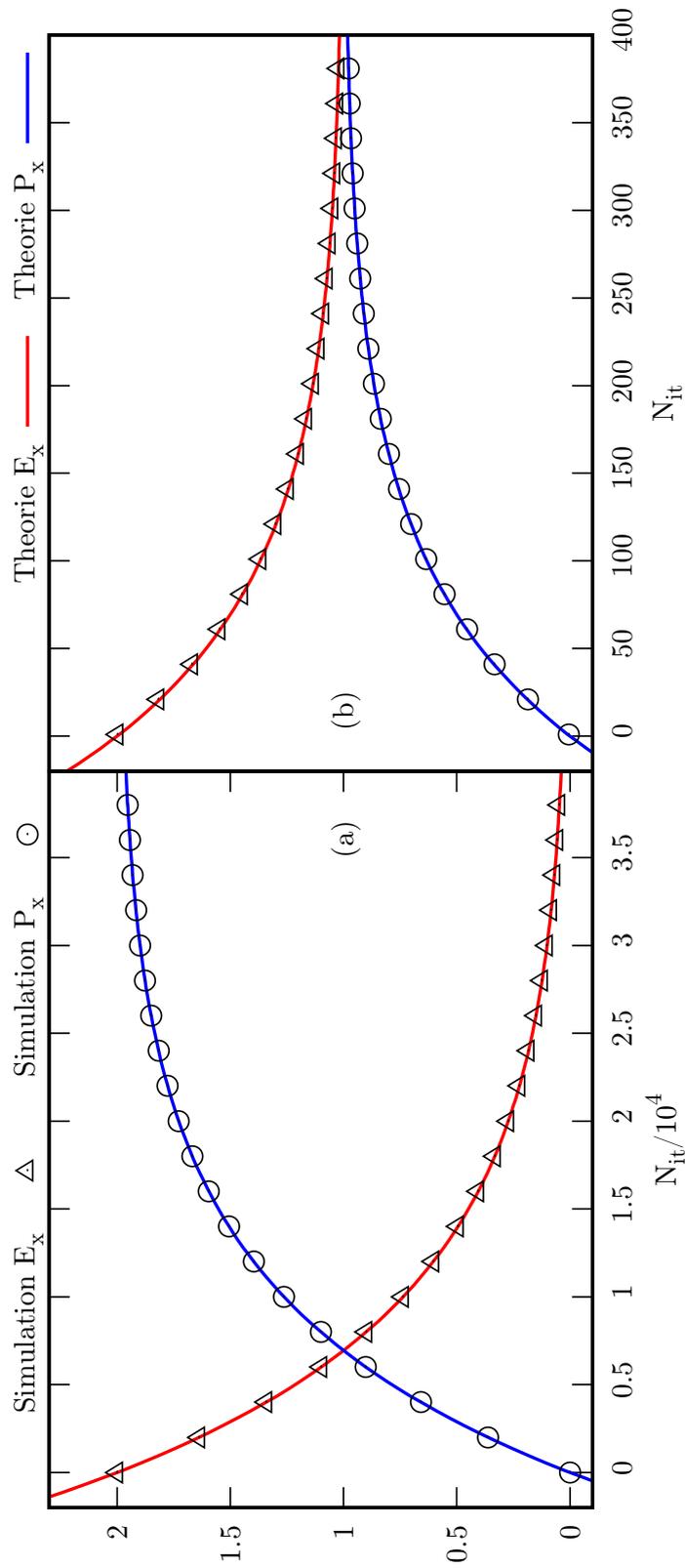


Abbildung 3.9: Darstellung der theoretischen Vorhersagen und der Simulationsdaten für das elektrische Feld E_x und die Polarisation P_x im Debyeschen Relaxationsmodell über die Zeit in Iterationsschritte N_{it} für zwei Fälle. Für den Fall (a) links im Bild ist das Dielektrikum mit $\omega_0 = 10^{-4}$ und $\varepsilon = 10^3$ und für den Fall (b) rechts mit $\omega_0 = 10^{-2}$ und $\varepsilon = 1$ angenommen.

werden, das über die zuvor gezeigte Dispersionsrelation beschrieben wird. Eine sich ausbreitende EM-Welle mit der Frequenz ω wird hier definiert durch

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_0 \exp(i\omega t - ikx). \quad (3.56)$$

Diese auf (3.46) angewendet ergibt

$$\varepsilon_n \mathbf{E} = \mathbf{P}_n \left(1 + i \frac{\omega}{\omega_n} \right), \quad (3.57)$$

was zu der komplexen Permittivität führt, die durch

$$\tilde{\varepsilon}_n := \frac{\varepsilon_n}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \left(1 - i \frac{\omega}{\omega_n} \right) \quad (3.58)$$

definiert ist. Das Aufsummieren der Komponenten führt zur effektiven Permittivität

$$\tilde{\varepsilon} := \sum_n \left(\frac{\varepsilon_n}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \left(1 - i \frac{\omega}{\omega_n} \right) \right) + \varepsilon_0. \quad (3.59)$$

Diese wird jetzt anstelle von ε in (3.44) verwendet. Der als Leitfähigkeit σ eintretende Effekt ergibt sich nun, indem $\sigma \mathbf{E}$ zu \mathbf{j} in den Maxwells-Gleichungen (2.14) hinzu addiert wird, die zusammen mit (3.56) zu

$$\varepsilon \dot{\mathbf{E}} + \sigma \mathbf{E} \rightarrow (\varepsilon - i\omega\sigma) \dot{\mathbf{E}} := \tilde{\varepsilon} \dot{\mathbf{E}} \quad (3.60)$$

führt. Aus (3.59) folgen dann die bekannteren Ausdrücke für die Leitfähigkeit und Permittivität mit

$$\sigma := \sum_n \frac{\varepsilon_n}{\omega_n} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}, \quad (3.61)$$

$$\varepsilon := \varepsilon_0 + \sum_n \frac{\varepsilon_n}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}. \quad (3.62)$$

Die Dispersionsrelation für (3.56) ergibt sich somit zu

$$\mathbf{k}^2 = \omega^2 \tilde{\varepsilon}, \quad (3.63)$$

3 Optimierung des Verfahrens und dispersive Medien

womit man den Wellenvektor

$$k = \omega \sqrt{|\tilde{\varepsilon}|} \exp\left(\frac{i}{2} \arctan\left(\frac{\Im(\tilde{\varepsilon})}{\Re(\tilde{\varepsilon})}\right)\right) \quad (3.64)$$

mit

$$\Re(\tilde{\varepsilon}) = \varepsilon_0 + \sum_n \frac{\varepsilon_n}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}, \quad (3.65)$$

$$\Im(\tilde{\varepsilon}) = - \sum_n \frac{\omega}{\omega_n} \frac{\varepsilon_n}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (3.66)$$

und

$$|\tilde{\varepsilon}| = \sqrt{\Re(\tilde{\varepsilon})^2 + \Im(\tilde{\varepsilon})^2} \quad (3.67)$$

erhält. Das elektrische Feld im Medium lautet dann

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_0(t) \exp(i\Re(k)x) \exp(-|\Im(k)|x) \quad (3.68)$$

mit

$$\Re(k) = |\tilde{\varepsilon}| \cos\left(\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\Im(\tilde{\varepsilon})}{\Re(\tilde{\varepsilon})}\right)\right), \quad (3.69)$$

$$\Im(k) = |\tilde{\varepsilon}| \sin\left(\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\Im(\tilde{\varepsilon})}{\Re(\tilde{\varepsilon})}\right)\right). \quad (3.70)$$

Ein eindimensionales System mit $N_x = 10^4$ Gitterpunkten und einem Startwert am ersten Gitterpunkt von $E_y(x=0, t) = \sin(\omega t)$ zum Test der Genauigkeit dieses Ansatzes wird verwendet. Zu beachten sind die dimensionslosen Gittereinheiten (mit z. B. $\Delta N_x = 1$ und $\Delta t = 1/2$) analog zu den vorangegangenen Abschnitten. Es werden für die zwei Komponenten $\varepsilon_1 = 100$, $\varepsilon_2 = 20$ und $\omega_1 = 10^{-3}$, $\omega_2 = 2 \cdot 10^{-2}$ angenommen. Abb. 3.10 zeigt die Simulationsdaten im Vergleich zur theoretischen Vorhersage von (3.69) und (3.70). Simulationen und Vorhersage nach (3.68) stimmen gut miteinander überein. Diese Übereinstimmung reicht sogar bis zu $\omega = 1$, was ungefähr einer Wellenperiode entspricht, welche hier nur durch vier Gitterpunkte definiert ist. Auch hier zeigt sich die vergleichsweise gute räumliche Auflösung der GBM.

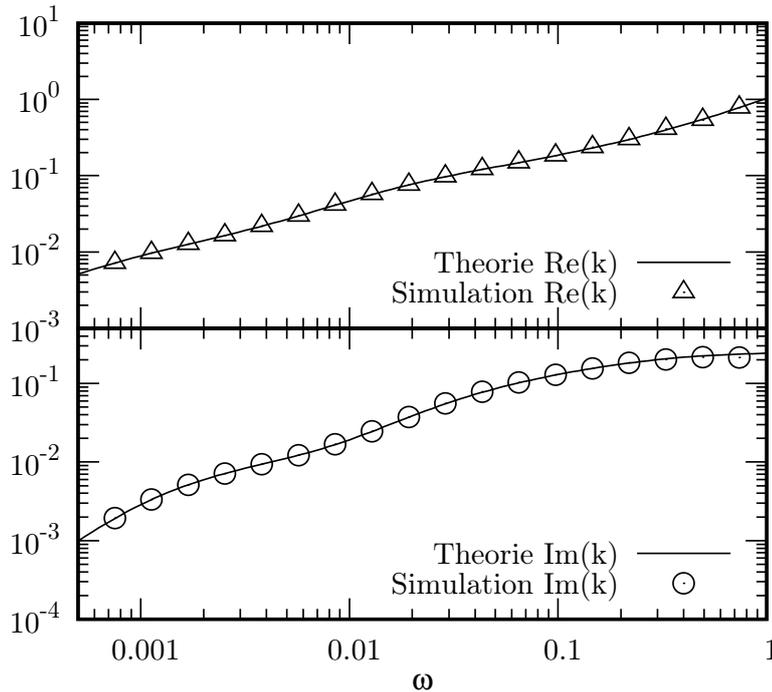


Abbildung 3.10: Analytische Vorhersagen und Ergebnisse von Simulationen des Real- und Imaginärteils eines Wellenvektors k in dispersivem Zweikomponentenmedium mit $\varepsilon_1 = 100$, $\varepsilon_2 = 20$, $\omega_1 = 10^{-3}$ und $\omega_2 = 0.02$.

3.5 Zusammenfassung: Kapitel 3

Es wurde eine GBM zur Simulation der Elektrodynamik vorgestellt, welche die Maxwell-Gleichungen erfüllt. Der Einfluss von Stromdichten und dispersiver Medien gemäß dem Debye'schen Relaxationsmodell für Multikomposite wurden implementiert. Für alle gezeigten Anwendungsbeispiele verhielt sich die GBM stabil. In jedem Vergleich mit der FDTD erwies sich die GBM bei gleicher Anzahl an Gitterpunkten als langsamer, jedoch auch als deutlich genauer. Bemerkenswert ist, dass die vorgestellte GBM im Gegensatz zur FDTD in der Lage ist, die Gesamtenergie des EM-Feldes einer EM-Welle entsprechend den theoretischen Erwartungen konstant zu halten. Ihr gelingt dies durch die Erfüllung des Poynting-Theorems. Damit verbunden ist die Eigenschaft der GBM, im Gegensatz zur FDTD unbeeinflusst von der sogenannten numerischen Impedanz zu sein. Im Gegensatz zu [19] sind die Stromdichte und Medieneigenschaften (hier in Form von Leitfähigkeit, Polarisation und Magnetisierung) nicht Teil der Gleichgewichtsfunktionen. Dies ermöglicht eine Reduzierung der Anzahl erforderlicher Verteilungsgrößen und der damit verbundenen Notwendigkeit zusätzlicher Summenregeln.

Kapitel

Simulation der Cochlea-Implantat-Stimulation

Ein Cochlea-Implantat (CI) ist eine sensorische Prothese, welche bei Menschen mit schwerem bis vollständigem Hörverlust die Hörwahrnehmung [3] und in vielen Fällen sogar die Spracherkennung [1, 2] wiederherstellen kann. Voraussetzung für diese Hörwahrnehmung über ein CI ist, dass sowohl die intracochleären Fasern des Hörnervens selbst noch elektrisch stimulierbar sind und die Information an das Gehirn übertragen werden kann. Aktuelle CIs verwenden eine Aneinanderreihung von Elektroden, die unabhängig voneinander angesteuert werden können. Diese Konstruktion wird als Elektrodenträger bezeichnet. Dieser wird in die Cochlea eingeführt. In Abb. 4.1 ist ein solches CI dargestellt, wobei es sich in diesem Fall um das Modell „Synchrony 2“ der Firma Med-El handelt. Da das gesamte CI vollständig unter dem Hautlappen implantiert und häufig in einem gefrästen Knochenbett eingesetzt ist, wird es über ein von außen aufgelegtes Zusatzgerät – dem sogenannten Sprachprozessor – mit elektrischer Energie per Induktion versorgt. Dieser Sprachprozessor haftet auf der Kopfhaut über einen magnetischen Anpressdruck. Dazu sind sowohl der Sprachprozessor als auch das Implantat mit einem Magneten ausgestattet (siehe (S) in Abb. 4.1). Dieser Magnet ist von einer Induktionsspule umgeben, welche den Prozessor (P) des Implantats mit Strom und Signalinformation versorgt. Am Beispiel des in der Abbildung gezeigten Prozessors ist die Referenzelektrode im Gehäuse des Prozessors integriert. Andere Hersteller, wie z. B. die Firma Cochlear, verwenden zusätzlich noch eine weitere Masseelektrode, die unter den Hautlappen geschoben wird. Der Prozessor bereitet die ihm zugewiesenen Informationen auf und koordiniert die Ansteuerung und Spannungsversorgung der sich im Elektrodenträger befindlichen Elektroden (E). Diese Elektroden sind entlang des Elektrodenträgers in bestimmten Abständen positioniert und von einander galvanisch getrennt. Das CI ahmt damit die Frequenz-Orts-Transformation einer funktionell unversehrten Cochlea nach. Darunter versteht man, dass ein bestimmter Ort in der Cochlea mit einer bestimmten Frequenz eines

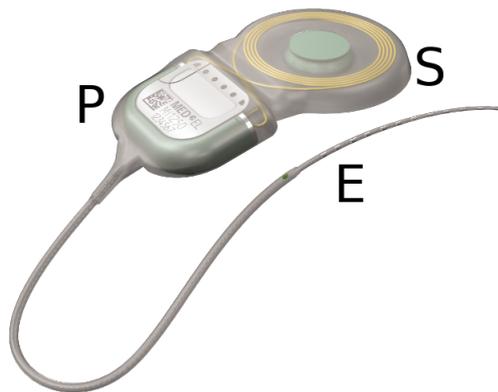


Abbildung 4.1: Cochlea-Implantat des Modells „Synchrony 2“ der Firma Med-El. Zu sehen ist der Magnet und die ihn umgebende Induktionsspule (S), die signalverarbeitende Prozessoreinheit (P) sowie der in die Cochlea zu inserierende Elektrodenträger (E). Das Bild ist [96] entnommen.

dargebotenen Tons assoziiert ist [97]. Abb. 4.2 zeigt schematisch den Querschnitt eines CI-versorgten Ohres samt seiner wesentlichen Anatomie. Zu dieser zählt das Außenohr, einschließlich des Gehörgangs bis zum Trommelfell, das Mittelohr oder auch Paukenhöhle genannt, in der die Gehörknöchelchenkette sitzt, und das Innenohr, welches die Cochlea und die sich in ihr befindenden Strukturen umfasst. Der Elektrodenträger folgt den Windungen dieser Cochlea und ist in Folge dessen als Spirale rechts in der Abbildung zu erkennen. Die hellen Punkte entlang dieses Elektrodenträgers entsprechen den Elektroden auf dem Elektrodenträger. Die von der Cochlea nach rechts weiterführenden Äste entsprechen den Nerven, die hier den Hör-, Gleichgewichts- und Gesichtsnerv umfassen. Eine detailliertere Darstellung der Strukturen des Innenohres ist in Abb. 4.3 zu sehen. Das Nervengewebe ist hier in Blau, Knochen und andere Gewebetypen sind in Rot dargestellt. In Teilbild (B) dieser Abbildung ist die Verästelung der Nervenfasern des Hörnervs in der Cochlea (Nervus cochlearis) gut zu erkennen. Der im oberen Teil dieser Abbildung verlaufende Ast bildet den Gesichtsnerv (Nervus facialis). Dieser verläuft bei fast allen Menschen stets nahe der Cochlea, kann sich jedoch aufgrund anatomischer Besonderheiten auch in mehrere Äste aufteilen. Für gewöhnlich ist sein Verlauf jedoch von einem Abknicken auf Höhe der dritten Windung der Cochlea geprägt, wie es im Teilbild (A) zu sehen ist.

Trotz der Erfolgsgeschichte des CI sind die zugrundeliegenden Mechanismen der auditorischen Wahrnehmung durch dieses Implantat immer noch nicht vollständig verstanden. In diesem Kapitel soll die Auswirkung der Form des elektrischen Pulses einer CI-Stimulation auf die Qualität des Perzepts im Fokus stehen.

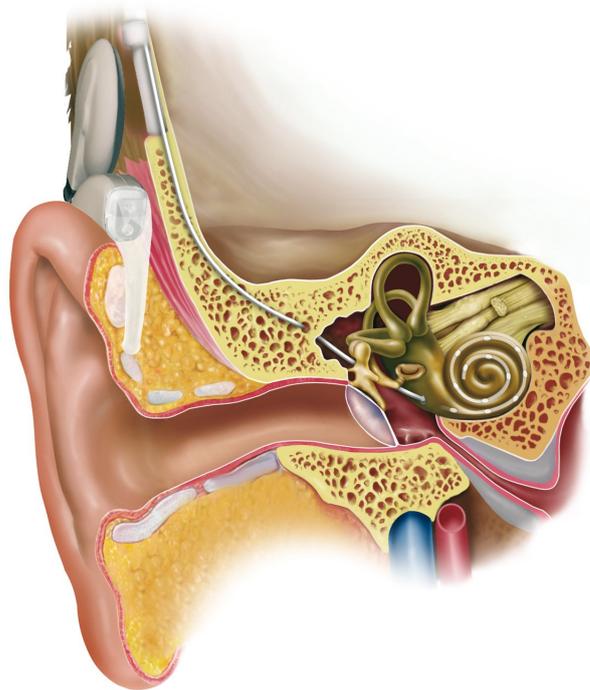


Abbildung 4.2: Querschnitt der schematischen Darstellung eines CI-versorgten Ohrs. Zu sehen sind der über dem Ohr getragene Sprachprozessor, das unter dem Hautlappen liegende Implantat und der von diesem abgehende Elektroden-Träger, welcher durch die Paukenhöhle führt und spiralförmig in der Cochlea eingelagert ist. Das Bild ist [98] entnommen.

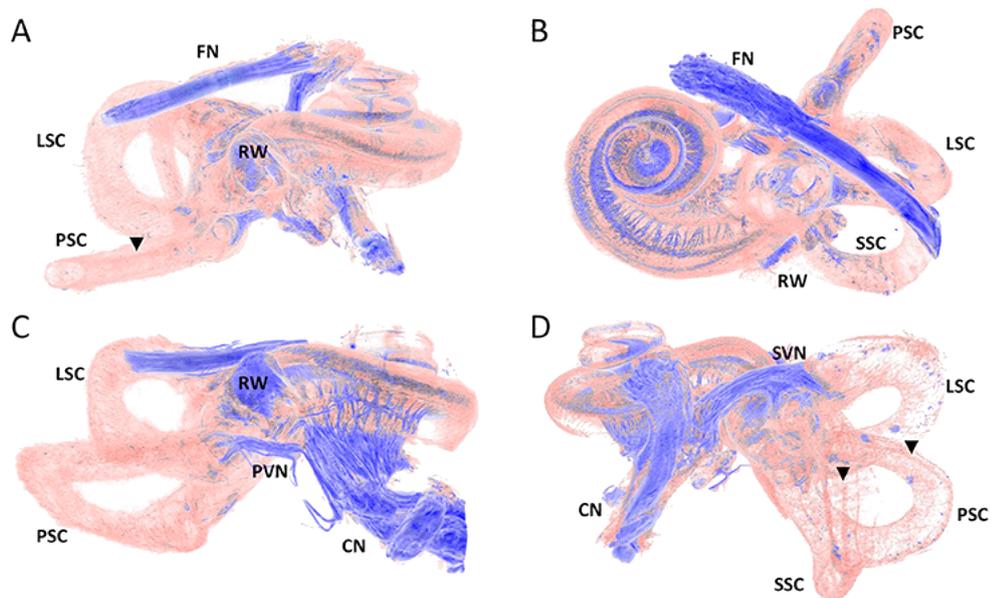


Abbildung 4.3: Neuro-anatomische Struktur der Verzweigung von Nervenfasern in der Cochlea und des gesamten Gleichgewichtsorgans (Labyrinth) in verschiedenen Perspektiven. Die Farbwiedergabe dient der Unterscheidung von Nervengewebe (blau), Knochen- und Membranstrukturen (rot). Dargestellt ist der Nervus cochlearis (CN) mit seinen spiralförmigen und radialen Ausläufer innerhalb der Cochlea, der Nervus facialis (FN), der Ast des Nervus vestibularis (PVN), die Cupula des hinteren halbkreisförmigen Kanals (PSC), der obere Ast des Nervus vestibularis (SVN), welcher die Cupula des lateralen und oberen halbkreisförmigen Kanals (LSC und SSC) mit dem CN verbindet, das Rundfenster (RW) sowie das ovale Fenster (OW). Das Bild wurde [99] entnommen und nachbearbeitet.

Die Konstruktion des elektrischen Pulses für ein CI weist einige Einschränkungen auf. Die wichtigste Einschränkung besteht darin, dass die Nettoladung jedes Pulses null sein muss, um Schäden an umgebenden Strukturen durch Degeneration oder chemische Reaktion in der Nähe der neuronalen Strukturen zu verhindern [100, 101]. Techniken, um dieses Ziel zu erreichen, werden als „ladungsausgeglichen“ bezeichnet, was bedeutet, dass das Zeitintegral des Stroms über die gesamte Pulsdauer null sein muss. Die häufigste Pulsform ist somit auch heute noch ein biphasischer Puls, bei dem auf die erste Phase eine zweite Phase mit entgegengesetzter Polarität folgt. Im Allgemeinen wird angenommen, dass die Ladung pro Phase grob mit der Wahrnehmung der Hörintensität, d. h. der Lautstärke, korreliert [102]. Diese Annahme kann jedoch nicht alle Auswirkungen der Pulsform auf die Lautstärke [8] erklären. Beispielsweise führt eine Zunahme der zeitlichen Abstands zwischen den beiden Phasen – der sogenannten Interphasenlücke – eines biphasischen Pulses zu einer Zunahme der Lautstärke [9, 10, 11, 12]. Ein anderes Beispiel für diese unverstandenen Pulsformenabhängigkeiten ist die Verringerung der Gesamtlautstärke bei Erhöhung der Phasendauer eines biphasischen Pulses bei unveränderter Nettoladung [103, 104].

Von besonderem Interesse (und ebenfalls nicht mit dem Konzept der Gesamtladung zu verstehen), ist die Auswirkung der Pulsform auf eine spezielle nicht-auditorische Missempfindung, die als Gesichtsmittstimulation bekannt ist. Eine unerwünschte Missempfindung dieser Art ist mit 14,9 % vergleichsweise häufig zu beobachten [105], doch in den seltensten Fällen kommt es zu ausgeprägten und für den Patienten unerträglichen Verkrampfungen oder Schmerzen bei einer Stimulation. Ein üblicher Ansatz zur signifikanten Reduzierung dieser Gesichtsmittstimulation ist die Verwendung sogenannter triphasischer Pulse anstelle biphasischer Pulse [106, 105]. Der Nachteil bei diesem Wechsel der Pulsform besteht darin, dass die Stimulation normalerweise höhere Stromamplituden erfordert, um einen vergleichbar „angenehmen Lautstärkeseindruck“ (most comfortable level – MCL) zu erreichen, als es für den biphasischen Puls erforderlich ist. Es ist noch wenig darüber bekannt, warum die triphasische Pulsform zu einer Verringerung dieser Gesichtsmittstimulation neigen und auch warum eine höhere Stromamplitude erforderlich ist.

Für jedes der oben genannten Beispiele gilt, dass sich die zeitliche Form der Pulse voneinander unterscheidet. Diese Unterschiede führen zu einer Änderung des spektralen Inhalts der Pulse. In diesem Zusammenhang soll die Dispersion von Medien in den Fokus rücken, da deren Reaktion abhängig vom Spektrum des elektrischen Feldes ist. Biologisches Gewebe ist in seinen elektrischen Eigenschaften hochdispersiv [13]. Es besteht aus einer Vielzahl unterschiedlich gearteter Strukturen bzw.

Komponenten, welche Proteine und andere Makromoleküle umfassen. Jede dieser räumlich ausgedehnten Komponenten kann im Allgemeinen als elektrischer Dipol interpretiert werden, welcher sich in einem elektrischen Felde antiparallel zu diesem ausrichtet. Darüber hinaus unterscheiden sich im Allgemeinen die Zeitskalen, auf welchen diese Ausrichtungen der Dipole ablaufen sowie die Sättigungspermittivitäten der einzelnen Komponenten untereinander. Die Energie für die Bewegung dieser Ausrichtung wird dem EM-Feld entnommen, wodurch allem voran das elektrische Feld an Stärke verliert. Dieser Effekt ist als dielektrischer Verlust bekannt und trägt dominant zum Phänomen der elektrischen Leitfähigkeit in biologischem Gewebe bei.

Insgesamt bedeutet dies, dass je mehr Dipole sich im Gewebe entgegen dem elektrischen Feld ausrichten, desto stärker wird die Polarisierung und desto mehr Energie wurde vom elektrischen Feld in das Gewebe übertragen. Es wird hier angenommen, dass die Bedingungen für eine Hörwahrnehmung mit diesem Energieeintrag in Verbindung steht. Daher liegt der Fokus in diesem Kapitel auf der Polarisierung der einzelnen Gewebetypen, wie sie durch die einzelnen Pulsformen der CI-Stimulation entstehen. Der wohl größte Unterschied zu den bisher in der Literatur ausgewiesenen CI-Simulationen besteht darin, dass durch die Wahl reiner elektrischer Widerstands-Modelle ausschließlich rein statische Betrachtungen angenommen wurden [107, 108]. In solchen Fällen werden Materialeigenschaften bei einer bestimmten Frequenz betrachtet, die dem größten Beitrag eines CI-Pulses entsprechen (typischerweise in der Größenordnung von 10 bis 15 kHz) [6, 7, 109]. Andere Modelle versuchen darüber hinaus, unter Verwendung der sogenannten „Kabelgleichung“ [110], Aktionspotenziale zu simulieren [111]. Diese Ansätze ignorieren jedoch die Dispersion als physikalische Eigenschaft des Gewebes, welche die Elektrode des CIs umgibt. Im statischen Grenzfall mögen diese dielektrischen Eigenschaften keine Rolle spielen. Die Realität jedoch zeigt auf, dass Variationen von Pulsformen einen großen Einfluss auf die Qualität des Perzepts ausüben. Es ist daher anzunehmen, dass durch diese statischen Ansätze die Zusammenhänge zwischen Pulsform und Perzept nicht beschreibbar sind. Zwar existieren Modelle, die sich mit der Übertragung zeitlich variierteter Stimulationsformen beschäftigen, wie am Beispiel der Abhängigkeit der Lautstärkewahrnehmung von der Stimulationsrate [112, 113], doch spielen sich diese auf Zeitskalen der Aktions- und Refraktärzeiten von Neuronen ab. Diese charakteristischen Zeiten liegen in der Größenordnung von 10^{-3} s [114]. Zeitskalen typischer Pulsdauern liegen jedoch in der Größenordnung von 10^{-6} s und damit drei Größenordnungen unterhalb der Zeitskalen neurophysiologischer Prozesse. Da Variationen auf Ebene der Pulsformen einen nachweislich großen Einfluss haben,

muss ein dynamischer Prozess in Betracht gezogen werden, welcher sich bereits im Zeitbereich von μs abspielt. Darum soll die Dispersion in Form der Gewebepolarisation bei der CI-Stimulation direkt am Hörnerv betrachtet werden. Es soll hierbei angenommen werden, dass ein vergleichsweise einfaches Modell der Anatomie der Cochlea ausreichend sein soll, um wesentliche Phänomene zu verstehen.

4.1 Cochlea-Modell

Für die CI-Simulation wird ein dreidimensionales Modell der Cochlea und der sie umgebenden Strukturen konstruiert. Es werden nur die räumlich dominanten Strukturen im Rahmen einer Näherung berücksichtigt. Alle relevanten Strukturen sind in Abb. 4.4 dargestellt. Diese umfassen das sie umgebende (I) kortikale Knochengewebe, welches im Folgenden nur noch als Knochengewebe bezeichnet wird, den (II) Gesichts- und Hörnerv, die (III) Scala tympani sowie die Scala vestibuli. Der Elektrodenträger befindet sich im Inneren der Scala tympani und besteht aus sieben Elektroden, einer Drahtzuleitung aus Platin und den sie umfassenden isolierenden Silikonschlauch. Jede Elektrode ist von der Drahtzuleitung getrennt, mit Ausnahme der als aktiv gekennzeichneten Elektrode (eingekreiste Elektrode in Abb. 4.4). Diese Elektrode wurde gewählt, da sie dem Gesichtsnerv räumlich am nächsten liegt und daher für die Gesichtsmittstimulation durch den Gesichtsnerv von besonderem Interesse ist. In der Realität hat jede Elektrode eine eigene Drahtzuleitung. Die Zuleitungen der einzelnen Elektroden sind voneinander galvanisch getrennt. Die für die Simulationen gewählte räumliche Auflösung reicht jedoch nicht aus, um jede Drahtzuleitung jeder einzelnen Elektrode aufzulösen, weshalb nur eine Drahtzuleitung modelliert wird. Es wird angenommen, dass es ausreichend für die Simulation einer Einzelkanalstimulation ist, wenn jede inaktive Elektrode von dieser einen Drahtzuleitung getrennt ist. Auf diese Weise sind alle anderen Elektroden ebenfalls galvanisch voneinander getrennt. Das Gitter, mit welchem das Modell beschrieben wird, besteht aus $250 \times 250 \times 250$ Gitterpunkten. Der Einfachheit halber wird angenommen, dass diese Länge ca. 2,5 cm entspricht. Der Grunddurchmesser der Cochlea beträgt somit ca. 2 cm, was eine bereits relativ große Cochlea darstellt. Bei einer Lichtgeschwindigkeit in metrischen Einheiten von ungefähr $3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ beträgt die zeitliche Schrittgröße für dieses Gitter und der angenommenen Größe etwa $\delta t = \frac{1}{3} \cdot 10^{-12} \text{ s}$.

Im Allgemeinen ist biologisches Gewebe neben seiner ausgeprägten dispersiven

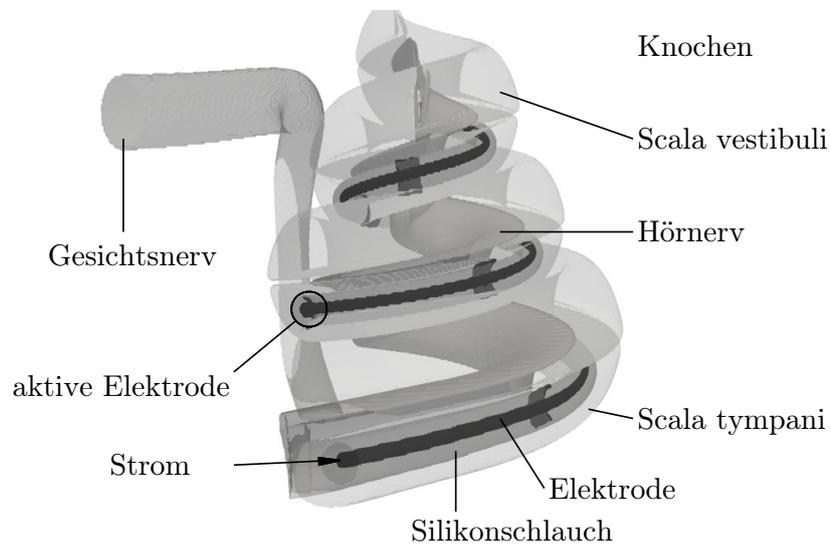


Abbildung 4.4: Modell der Cochlea und der für die CI-Stimulation verwendeten Strukturen. Die sichtbaren Strukturen sind von Knochengewebe umgeben und daher nicht explizit dargestellt. Der mit „Strom“ gekennzeichnete Pfeil zeigt die Richtung und den Ort, an dem die Stromdichte definiert wird, die durch den Elektrodenträger fließt. Die eingekreiste Elektrode ist die aktive bzw. stimulierende Elektrode für die Simulation eines einzelnen Pulses.

Tabelle 4.1: Parameter für das Nerven- und Knochengewebe, beschrieben über (3.61) und (3.62). Die Leitfähigkeit der freien Ladungen für das Nervengewebe beträgt $\sigma_0 = 6 \cdot 10^{-3} S/m$ und für das kortikale Knochengewebe $\sigma_0 = 2 \cdot 10^{-2} S/m$.

n	Nerv		Knochen	
	ε_n	$\frac{\omega_n}{2\pi} [s^{-1}]$	ε_n	$\frac{\omega_n}{2\pi} [s^{-1}]$
1	$4 \cdot 10^7$	10.0003	95085.6	9.9603
2	327.806	51.651	4993.37	10.8375
3	982.511	234.174	174.825	72.163
4	2738.29	846.38	7.88141	$1.684 \cdot 10^{10}$
5	8941.81	2673.98	3.64972	$8.159 \cdot 10^8$
6	24989.5	7159.05	526.034	231.49
7	24.6227	$2.05 \cdot 10^{10}$	13.9293	$2.455 \cdot 10^7$
8	21820.7	16824.6	68.4483	$3.9815 \cdot 10^6$
9	9.86756	$5.484 \cdot 10^8$	1447.8	605.912
10	6783.29	47621.7	84.3949	$1.203 \cdot 10^6$
11	2181.92	152012	40.2252	214781
12	849.709	531132	83.6162	38855.5
13	559.344	$1.786 \cdot 10^6$	1714.68	1328.14
14	162,46	$7,078 \cdot 10^6$	236,935	10001
15	42.6637	$4.2863 \cdot 10^7$	702.056	3277.61
16	4.73796	$\rightarrow \infty$	2.74603	$\rightarrow \infty$

Eigenschaften auch stark anisotrop [13, 15]. Der Literatur sind derzeit nur wenig Daten zu entnehmen, welche die Frequenz- und Richtungsabhängigkeit der Dielektrizität und Leitfähigkeit der hier relevanten Strukturen wiedergeben. Es stehen jedoch die optoelektrischen Frequenzabhängigkeiten im räumlichen Mittel einzelner Gewebetypen zur Verfügung. Diese als isotrop angenommenen Werte sollen im Rahmen einer weiteren Näherung des vorgestellten Modells verwendet werden. Die Modellparameter für diese dispersiven Gewebetypen wurden unter Verwendung des Marquardt-Levenberg-Algorithmus an 15 Komponenten – beschrieben über (3.61) – an den Daten aus [14, 13, 109, 115] angepasst. Diese Parameter wurden dann für (3.62) verwendet, um die zusätzliche nichtdispersive – bzw. konstante – Leitfähigkeit σ_0 zu erhalten, deren Ursprung sich in den vorliegenden freien Ionen vermuten lässt. Die Implementierung dieses σ_0 erfolgt gemäß (2.41).

Die Werte für die nach dem Marquardt-Levenberg-Algorithmus bestimmten Parameter ε_n und ω_n der 15 Komponenten von Nerven- und Knochengewebe sind in Tab.

Tabelle 4.2: Parameter für Lymphflüssigkeit, beschrieben über (3.61) und (3.62). Die durch freie Ladungen verursachte Korrektur der Leitfähigkeit beträgt $\sigma_0 = 1,5S/m$.

n	Lymph	
	ε_n	$\frac{\omega_n}{2\pi} [s^{-1}]$
1	29.456	980873
2	65.3163	$2.177 \cdot 10^{10}$
3	4.03982	$\rightarrow \infty$

4.1 angegeben, diejenigen für die Perilymphe sind in Tab. 4.2 angeben. Da die Scala vestibuli und tympani in der Spitze der Cochlea über das Helicotrema ineinander übergehen, soll angenommen werden, dass sie die selben optoelektrischen Eigenschaften besitzen, weshalb sie durch ihre Eigenschaften im Folgenden als Perilymphe bezeichnet werden. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass es noch eine Scala media gibt, die im Rahmen des hier dargestellten Modells mit der Scala vestibuli zusammenfällt. Diese Scala media befindet sich zwischen der Scala tympani und Scala vestibuli. Sie ist räumlich durch die Reissner-Membran gegenüber der Scala vestibuli und dem Corti'schen Organ gegenüber der Scala tympani abgegrenzt. Die sich in ihr befindende Flüssigkeit wird als Endolymph bezeichnet und weicht bzgl. ihrer optoelektrischen Eigenschaften nur unwesentlich von jenen der Perilymphe ab. Bei der Reissner-Membran handelt es sich um eine vergleichsweise sehr dünne Membran, deren elektrodynamischer Einfluss auf die Verteilung der EM-Felder als vernachlässigbar angenommen wird. Räumlich ausgedehnter hingegen ist das Corti'sche Organ deutlich ausgeprägt, in welchem sich die Sinnes- bzw. Haarzellen befinden und von denen die Fasern des Hörnervens abgehen. Dieser Raum, den das Corti'sche Organ im Modell einnimmt, wird durch die Eigenschaften des Nervengewebes modelliert. Abb. 4.5 visualisiert die Güte der Dispersionskurven, beschrieben über den zuvor bestimmten Satz an Parametern für das Knochengewebe. Für die Parameter der relativen Permittivität und Leitfähigkeit ist die Übereinstimmung zwischen der angepassten Kurve und den Daten gut genug für eine effektive frequenzabhängige optoelektrische Beschreibung. Abb. 4.6 zeigt die Daten und die daran angepasste Kurve für das Nervengewebe. Analog dazu zeigt Abb. 4.7 Daten und angepasste Kurve für die Lymphflüssigkeit. Für die Lymphflüssigkeit reichen zwei Komponenten aus, um ihre Dispersion zu beschreiben. Gerade für diese Flüssigkeiten ist es besonders schwer, in der Literatur entsprechende Daten zu finden. Die ausgefüllten Datenpunkte in Abb. 4.7 beziehen sich hierbei auf [116] und entsprechen den intracochleären Lymphflüssigkeiten. Die anderen Da-

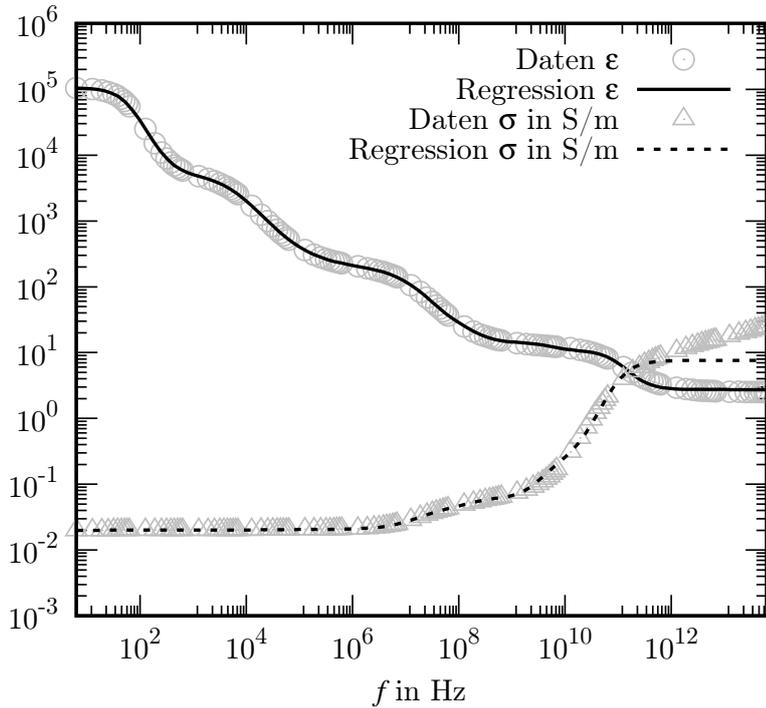


Abbildung 4.5: Daten (Symbole) und angepasste Kurve (Linie) für die relative Permittivität und Leitfähigkeit von kortikalem Knochengewebe beschrieben über ein 15-komponentiges Debye-Relaxationsmodell. Siehe Tab. 4.1 für entsprechende Daten.

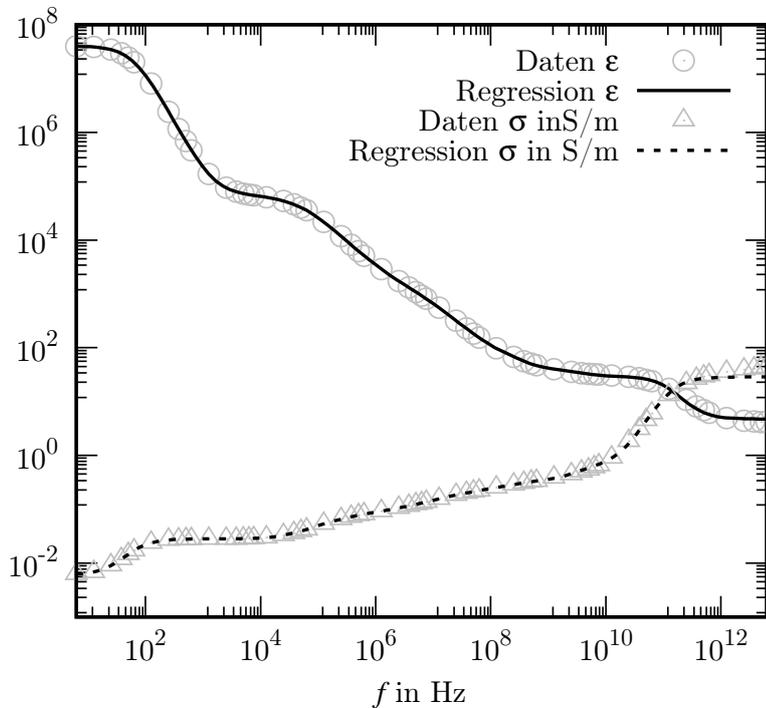


Abbildung 4.6: Daten (Symbole) und angepasste Kurve (Linie) für die relative Permittivität und Leitfähigkeit von Nervengewebe beschrieben über ein 15-komponentiges Debye-Relaxationsmodell. Siehe Tab. 4.1 für Details.

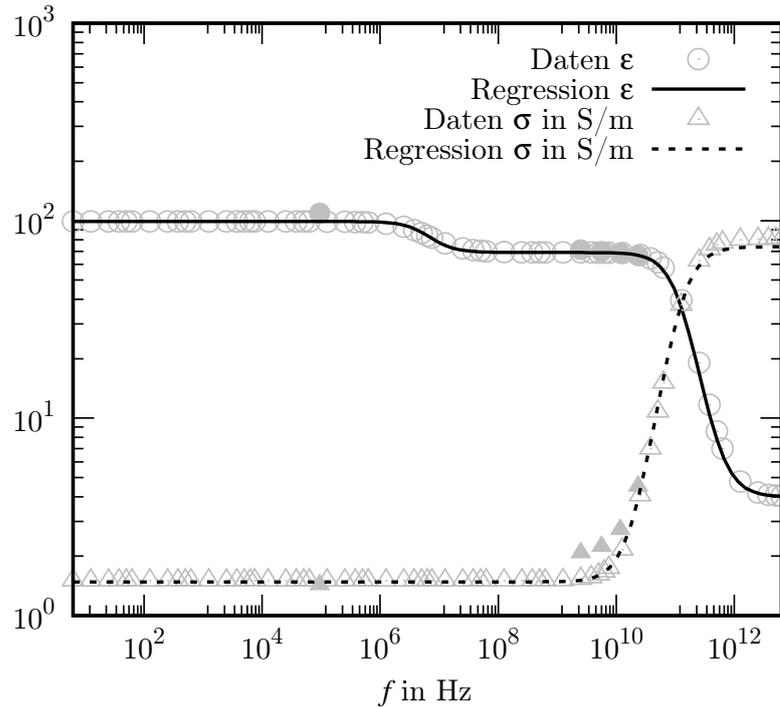


Abbildung 4.7: Daten (Symbole) und angepasste Kurve (Linie) für die relative Permittivität und Leitfähigkeit von Lymphflüssigkeit im zweikomponentigen Debye-Relaxationsmodell. Siehe Tab. 4.2 für Details.

tenpunkte hingegen entsprechen dabei der Flüssigkeit im Inneren des menschlichen Auges [117, 115]. Da beide Datensätze relativ gute Übereinstimmungen aufweisen, soll angenommen werden, dass es sich bei der Flüssigkeit im Inneren des menschlichen Auges um eine vergleichsweise gute Näherung der realen Eigenschaften der intracochleären Lymphflüssigkeiten handelt. Im Vergleich zum Knochen- und Nervengewebe ist der Effekt der Dispersion auf die Permittivität und Leitfähigkeit hier jedoch eher gering. Die elektrische Leitfähigkeit scheint von freien Ionen dominiert zu sein, da die Leitfähigkeit mit $\sigma_0 = 1,55 \text{ S/m}$ über ein breites Frequenzspektrum hinweg vergleichsweise konstant bleibt. Die zu niedrigen Frequenzen hin verlaufende asymptotische Leitfähigkeit des Knochengewebes von $\sigma_0 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ S/m}$ fällt dagegen bedeutend kleiner aus als die der Lymphflüssigkeit. Eine etwas geringere Leitfähigkeit wird für das Nervengewebe mit $\sigma_0 = 6 \cdot 10^{-3} \text{ S/m}$ erhalten. Der größte Beitrag zur Leitfähigkeit wird über den dielektrischen Verlust beschrieben. Medien ohne Dispersionsbeziehung sind hier der isolierende Silikonschlauch, die Elektroden sowie deren Drahtzuleitung. Die Leitfähigkeit des Silikons wird mit Null und einer Permittivität von eins angenommen, d. h. dass die Eigenschaft dieses Isolators identisch zum Vakuum ist [109]. Da Platin ein gängiges Element zur Fertigung der elektrisch leitenden Strukturen der Elektrode ist, wird diese mit den Werten

$\sigma_0 = 10^6 \text{ S/m}$ und einer Permittivität von eins angenommen [109].

4.2 Simulationen

Die Simulationen wurden auf einer AMD Radeon RX 5800 XT-Grafikkarte unter Verwendung der API OpenCL der Version 2.0 durchgeführt. Da die Rechenzeiten vergleichsweise groß waren und sich jeweils über mehrere Wochen erstreckten, bot sich die Näherung an, die Simulationszeiten durch eine Manipulation zu reduzieren. Dazu wird ein Reskalierungsparameter η definiert, womit $t \rightarrow \eta t$ ersetzt wird. Dies überführt die Maxwell-Gleichungen zu

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\eta \partial t} + \sum_n \omega_n (\varepsilon_n \mathbf{E} - \mathbf{P}_n) + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}, \\ -i\eta \mathbf{k} \times \mathbf{H} &= \\ i\omega \mathbf{E} + \sum_n \eta \omega_n (\varepsilon_n \mathbf{E} - \mathbf{P}_n) + \eta \sigma \mathbf{E} + \eta \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Wenn $\eta \mathbf{k}$ vernachlässigbar klein wird, kann die Zeitschrittgröße δt erhöht werden, indem sie durch $\eta \delta t$ ersetzt wird. Das hat zur Folge, dass auch $(\omega_n, \sigma, \mathbf{j}) \rightarrow (\eta \omega_n, \eta \sigma, \eta \mathbf{j})$ möglich ist. Für die folgenden Simulationen wird $\eta = 100$ angenommen, was die Simulation von $50 \mu\text{s}$ innerhalb von fünf Tagen ermöglicht.

Der Betrag der Polarisation $|\mathbf{P}|$ dieses Pulses am Hör- und Gesichtsnerv in der Umgebung der aktiven Elektrode wird über die Zeit beobachtet. Der maximale Polarisationsbetrag $|\mathbf{P}|$ am Hör- und Gesichtsnerv wird für mehrere unterschiedliche Pulsformen aufgezeichnet, welche typisch für klinisch häufig verwendete Pulsformen von CI-Trägern sind. Solange das elektrische Feld während der Simulation quasistatisch in den Lymphflüssigkeiten ist, soll angenommen werden, dass das Maximum der Polarisationsdichte für verschiedene Pulse über die simulierte Zeit von Interesse ist. Magnetische Felder werden, solange der Strom während einer Phase fließt, zwar ebenfalls entstehen, doch sind diese nicht weiter für die Betrachtungen relevant, da biologisches Gewebe auf diese kaum reagiert und somit ein Zusammenhang zwischen Magnetfeldern und Hörwahrnehmung unwahrscheinlich ist.

Eine Einschränkung der vorliegenden Simulationen ist diese Reskalierung der Zeit durch die Reskalierung der Materialparameter. Der Vergleich einer vollständigen Simulation bis zu $1 \mu\text{s}$ mit der reskalierten Simulation zeigt, dass die Verhältnisse der Polarisierungen zwischen diesen an Hör- und Gesichtsnerv ausgewerteten Si-

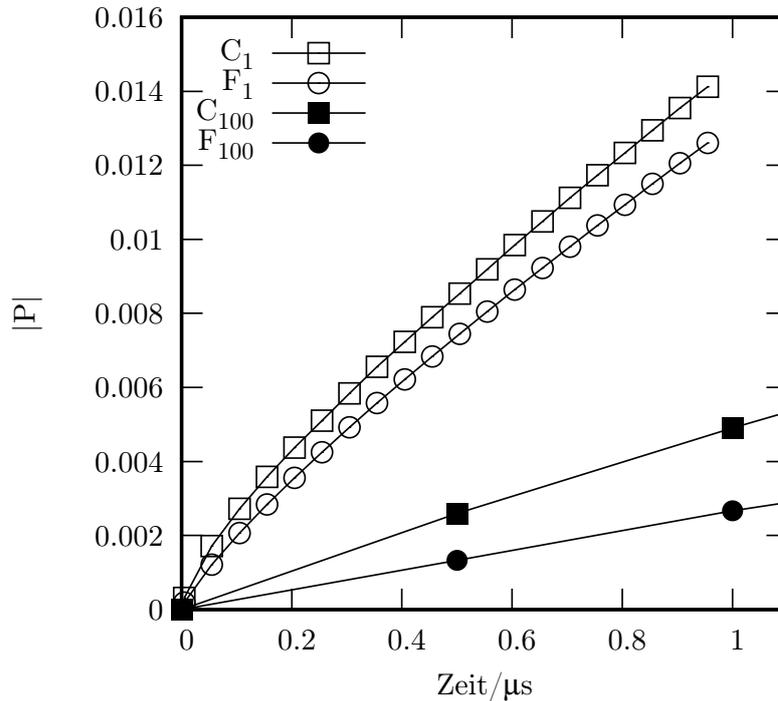


Abbildung 4.8: Polarisationsbetrag $|P|$ am Hör- (Quadrate) und Gesichtsnerv (Kreise) für $\eta = 1$ (offene Symbole) und $\eta = 100$ (gefüllte Symbole) dargestellt über die simulierte Zeit t .

mulationen ähnlich, jedoch nicht exakt gleich sind. Dies wird durch die Abb. 4.8 verdeutlicht. Dort sind die Beträge der Polarisation $|P|$ am Hör- (offene Quadrate) und Gesichtsnerv (offene Kreise) über die Zeit in μs ohne die Verwendung der Reskalierung via $\eta = 1$ dargestellt. Für den Fall $\eta = 100$ verlaufen die Kurven (gefüllte Symbole) deutlich flacher. Zu erwarten gewesen wäre, wenn das zu betrachtende System tatsächlich in der Betrachtung dem statischen Grenzfall genügen sollte, dass die Kurven der jeweiligen Nervenstrukturen zu unterschiedlichen η zumindest einander sehr nahe sein sollten. Das ist hier nicht der Fall, was bedeutet, dass der Wellenvektor nicht zu vernachlässigen ist. Eine vollständige Betrachtung der Dynamik ist damit grundsätzlich notwendig, wenn quantitative Aussagen getroffen werden sollen. Da es jedoch genügt, für das grundsätzliche Verständnis qualitative Zusammenhänge aufzuzeigen, ist anzunehmen, dass diese durch die Reskalierung unverletzt bleiben. Man erkennt dies daran, dass der relative Verlauf der Kurven gleicher Nervenstrukturen bei unterschiedlichem η ähnlich ist.

Nimmt man beispielsweise eine Pulsdauer von typischerweise etwa 10^{-5} s an, dann ergibt sich etwa eine Wellenlänge mit größtem spektralem Gewicht im Nervengewebe von ungefähr 10 m. Dies entspricht einer Wellenlänge, welche bedeutend größer als

der Durchmesser einer typischen Cochlea von etwa $10^{-2} m$ ist. Durch Anwendung der Reskalierung mit $\eta = 100$ beträgt die Wellenlänge dann nur etwa $10^{-1} m$. Der entsprechend größere Wellenvektor beeinflusst die Zeitskala der Simulationen somit deutlich. Es ist jedoch anzunehmen, dass die Beziehung der simulierten Ergebnisse unter dieser Reskalierung näherungsweise erhalten bleibt, da diese neu geschaffene Skala der Wellenlänge immer noch mindestens eine Größenordnung oberhalb der der cochleären Strukturen liegt.

Es gibt jedoch Beispiele, die bereits ohne Reskalierung nützliche Informationen bieten. So zeigt die Simulation ohne Verwendung einer Reskalierung von bis zu $1 \mu s$, dass ein minimales Zeitfenster (hier von ungefähr $200 ns$) existiert, ab dem erst die Polarisation des Nervengewebes um die aktive Elektrode herum sich deutlich von der Polarisation auf der gesamten intracochleären Hörnervenstruktur unterscheidet. Bis zu diesem Zeitpunkt von etwa $200 ns$ ist die Cochlea von dem sich ausbreitendem elektrischen Feld durchsetzt. Der lokale Energieeintrag in das Gewebe über die aktive Elektrode beginnt erst später an Stärke zu zunehmen. Dieser als kritisch zu bezeichnende Zeitraum hängt von mehreren Faktoren ab, wie Form und Größe des Kontakts der Elektrode mit der Lymphflüssigkeit, der Position der Elektrode innerhalb der Scala tympani, der Leitfähigkeit der Lymphflüssigkeit sowie dem Vorhandensein von Ossifikation, um nur einige zu nennen. Diese Aspekte sind nicht Gegenstand der Untersuchung, der sich diese Arbeit widmet.

Zu beachten ist, dass eine Berechnung dieses Zeitraums bei identischen Systemvoraussetzungen für die FDTD deutlich mehr an Rechenressourcen erfordern würde. Laut 3.1 würden ohne Reskalierung mehr als zwei Jahre Berechnungszeit und mehr als das Zehnfache des Speichers für vergleichbare Simulationsergebnisse benötigt. Wobei die Zahl der Iterationsschritte in vergleichbaren Größenordnungen wie die der GBM liegen wird und somit die FDTD fehlerhaft oder instabil werden könnte.

Abb. 4.9 zeigt den zeitlichen Verlauf des biphasischen Pulses (BP), der als Referenz für alle anderen Pulsformen dient. Jede Phase von BP dauert $15 \mu s$. Diese Phasen sind durch eine Interphasenlücke (Stimulationspause zwischen zwei Phasen) von $2 \mu s$ voneinander getrennt. Die Dauer der ersten und letzten Phase des triphasischen Pulses (TP) ist auf $7,5 \mu s$ gesetzt, die mittlere Phase auf $15 \mu s$ und die Interphasenlücken auf $1 \mu s$. Der zweite biphasische Puls PDa hat im Vergleich zum BP eine 1,5-mal längere Phasendauer und eine Stromamplitude, die um den Faktor 1,5 (PDa) reduziert ist. Für diesen Puls wurde eine reduzierte Amplitude gewählt, um die gleiche Ladungsmenge pro Phase zu erhalten, gemäß dem Produkt Stromstärke mal Phasendauer. Dies ist wichtig für die Vergleichbarkeit von

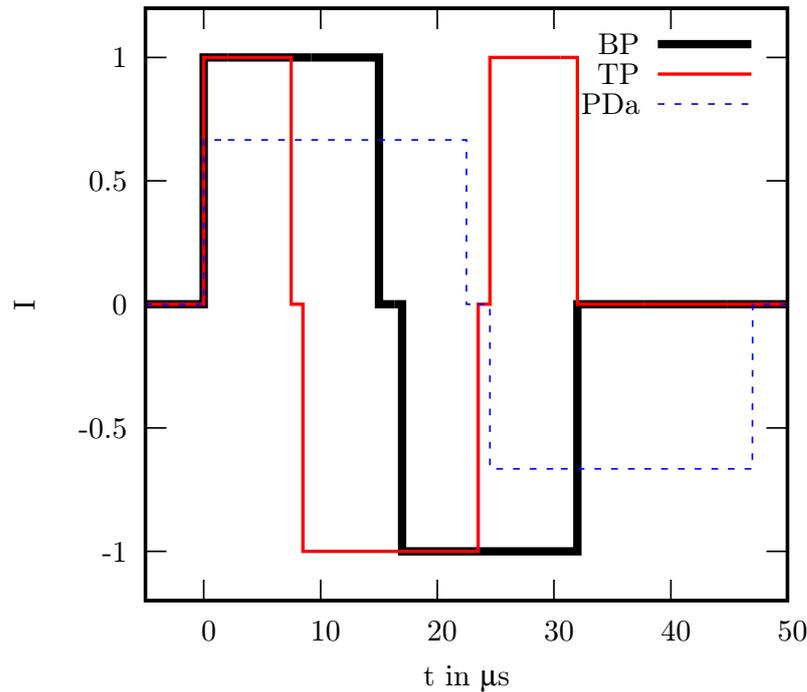


Abbildung 4.9: Zeitlicher Verlauf des biphasischen (BP), triphasischen (TP) und biphasischen Pulses mit erhöhter Phasendauer (PDa).

Pulsformen unter der typischerweise getroffenen Annahme, dass die Ladungsmenge in bestimmter Weise mit der Lautstärke korreliert. Um einen Trend der Entwicklung der Simulationsdaten bezüglich des Wechsels von BP zu PDa besser ausfindig machen zu können, soll ein dritter biphasischer Puls mit noch höherer Phasendauer als PDa, der als PDb bezeichnet wird und in Abb. 4.9 nicht dargestellt ist, betrachtet werden. Die Phasendauer dieses PDb ist zweimal größer als die von BP und die Amplitude ist entsprechend um einen Faktor von 2,0 reduziert. Schließlich wird ein biphasischer Puls mit einer längeren Interphasenlücke von $5 \mu s$ anstelle von $2 \mu s$ verwendet. Dieser Puls wird im Folgenden als IPG bezeichnet. Der zeitliche Verlauf von $|\mathbf{P}|$ ist in Abb. 4.10 für BP (Kreise), TP (Dreiecke) und IPG (Diamanten) an der Stelle des Hörnervs um die stimulierende Elektrode herum dargestellt. Für jede Phase der einzelnen Pulse ist die Steigung von $|\mathbf{P}|$ zu Beginn steil und nimmt mit der Zeit ab. Dies ist eine Folge des exponentiellen Abfalls der Polarisation (3.46). Die Rate der Änderung von $|\mathbf{P}|$ wird kleiner, je näher $|\mathbf{P}|$ seiner Sättigungspolarisation kommt. Die erste Phase eines Pulses beginnt das Gewebe näherungsweise linear in der Zeit zu polarisieren. Die folgende Phase baut diese Polarisation dann wieder ab. Diese Phase ist jedoch nicht in der Lage $|\mathbf{P}|$ exakt auf Null zurück zusetzen (siehe z. B. die Restpolarisation von BP nach $32 \mu s$ in Fig. 4.10). Der Rest von

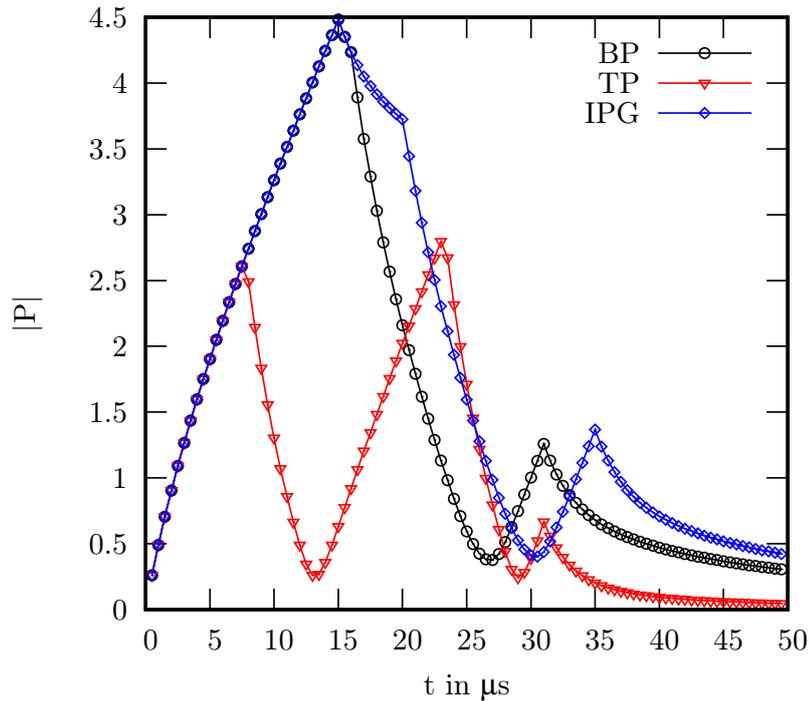


Abbildung 4.10: Zeitlicher Verlauf des Betrags der Polarisation $|\mathbf{P}|$ des biphasischen (BP), triphasischen (TP) und biphasischen Pulses mit erhöhter Interphasenlücke (IPG) am Hörnerv um die stimulierende Elektrode herum.

$|\mathbf{P}|$ nach Ende des definierten Pulses fällt dann exponentiell gegen Null ab. Dieser Prozess benötigt weit mehr Zeit als die gesamte Pulsdauer.

Die Rate der Änderung von $\dot{\mathbf{P}}$ hängt von der Differenz zwischen dem aktuellen \mathbf{P} und seinem Sättigungswert $\varepsilon \mathbf{E}$ ab. Dieser Unterschied ist besonders stark im Bereich des Phasenwechsels bei biphasischen Pulsen ausgeprägt. Da \mathbf{P} zu Beginn der zweiten Phase größer ist, als zu Beginn der ersten Phase, ist auch die Differenz zur Sättigung $\varepsilon \mathbf{E}$ größer, die nun negativ ist, womit sich daher \mathbf{P} zu Beginn der zweiten Phase schneller als in der ersten Phase ändert. Somit überkompensiert der durch die zweite Phase erzeugte Gesamtbetrag von $|\mathbf{P}|$ den Beitrag der ersten Phase, welcher zur Überdepolarisation am Ende der zweiten Phase führt, sichtbar als kleines lokales Maximum am Ende der Pulsdauer.

Im Gegensatz zum BP zeigt die Polarisation des TP während der Zeit der Pulsdauer zwei Maxima. Das erste Maximum wird am Ende der ersten, kürzeren Phase erreicht. Mit der entgegengesetzten Stromrichtung für die Konstruktion der längeren, mittleren Phase ändert $|\mathbf{P}|$ die Richtung der Polarisation sowie sein Vorzeichen und steigt dann am Ende dieser Phase ungefähr wieder auf das Niveau des ersten Maximums von $|\mathbf{P}|$, welches am Ende der ersten Phase erreicht wurde. Ein Punkt, an dem $|\mathbf{P}|$ null ist, kann während der Pulsdauer (auf der Zeitskala im μs -Bereich)

nicht im Bereich um die aktive Elektrode gefunden werden, da es immer einen Punkt in der Umgebung dieser gibt, an dem $|\mathbf{P}|$ von Null verschieden ist. Wenn die mittlere Phase von TP endet, reduziert die zweite kürzere Phase $|\mathbf{P}|$ erneut. Der Rest von $|\mathbf{P}|$ am Ende des Pulses ist weniger stark ausgeprägt als in anderen Fällen der betrachteten Pulsformen. Die Hauptursache für diesen Unterschied ist, dass das Maximum von $\dot{\mathbf{P}}$ in jeder Vorzeichenrichtung kleiner ausfällt und somit $\dot{\mathbf{P}}$ insgesamt kleiner ausfällt. Die verbleibende Nettopolarisation wird somit durch Abfolge wechselnder Stromrichtungen über die Pulsdauer hinweg flacher gehalten. Durch Aufteilen einer Phase in zwei gleiche Teile, wie im Fall des TP, sind spektral niederfrequente Anteile von $|\mathbf{P}|$ weniger stark ausgeprägt und $|\mathbf{P}|$ klingt somit im Vergleich zu den anderen Pulsformen im Gewebe schneller ab.

Die Polarisation der ersten Phase des IPG ist identisch der des BP. Durch die längere Interphase des IPG kommt es zu einem exponentiell stärker ausgeprägten Abfall von $|\mathbf{P}|$ während der Interphasenlücke, bis die zweite Phase ab $20 \mu\text{s}$ beginnt. Was den BP betrifft, ist die Änderung von $|\mathbf{P}|$ während der zweiten Phase des Pulses größer als die Änderung während der ersten Phase. Aufgrund des Abfalls innerhalb der Interphasenlücke ist der verbleibende Anteil von $|\mathbf{P}|$ zu Beginn der zweiten Phase jedoch kleiner im Vergleich zu BP. Abb. 4.11 zeigt die Polarisation des Gesichtsnervs. Im Allgemeinen ähnelt der Verlauf von $|\mathbf{P}|$ jenem, der am Hörnerv zu sehen ist. Der ausgeprägte exponentielle Abfall von $|\mathbf{P}|$ während der Interphasenlücke ist hier bei IPG jedoch nicht sichtbar. Erheblich schneller erfolgt hier jedoch der Abfall von $|\mathbf{P}|$ bei TP nach Abschluss der letzten Phase im Vergleich zu den anderen beiden Pulsformen. Der Vergleich ladungsgleicher Phasen von Pulsen mit unterschiedlichen Phasendauern ist in Abb. 4.12 dargestellt. Um den Vergleich dieser Pulsformen zu verdeutlichen, werden die Kurven der Pulse mit höheren Phasendauern zeitlich reskaliert, um sie an den zeitlichen Verlauf von BP anzupassen. Das Erhöhen der Phasendauer um den Faktor 1,5 (PDa, Dreiecke) führt zu einem verringerten Maximum von $|\mathbf{P}|$ am Hörnerv im Vergleich zum BP (Kreise). Durch Erhöhen der Phasendauer um den Faktor 2,0 (PDb, Diamanten) wird dieses Maximum von $|\mathbf{P}|$ weiter reduziert. Eine ähnliche Entwicklung für $|\mathbf{P}|$ ist am Gesichtsnerv zu beobachten (Symbole, welche die Phasendauer angeben, sind die gleichen wie für den Hörnerv), jedoch mit größeren Unterschieden zwischen den Kurven für die verschiedenen Pulsformen in der zweiten Phase. Die wichtigste Erkenntnis hier für beide Fälle – am Hör- und am Gesichtsnerv – ist, dass die Amplitude von $|\mathbf{P}|$ mit zunehmender Phasendauer abnimmt.

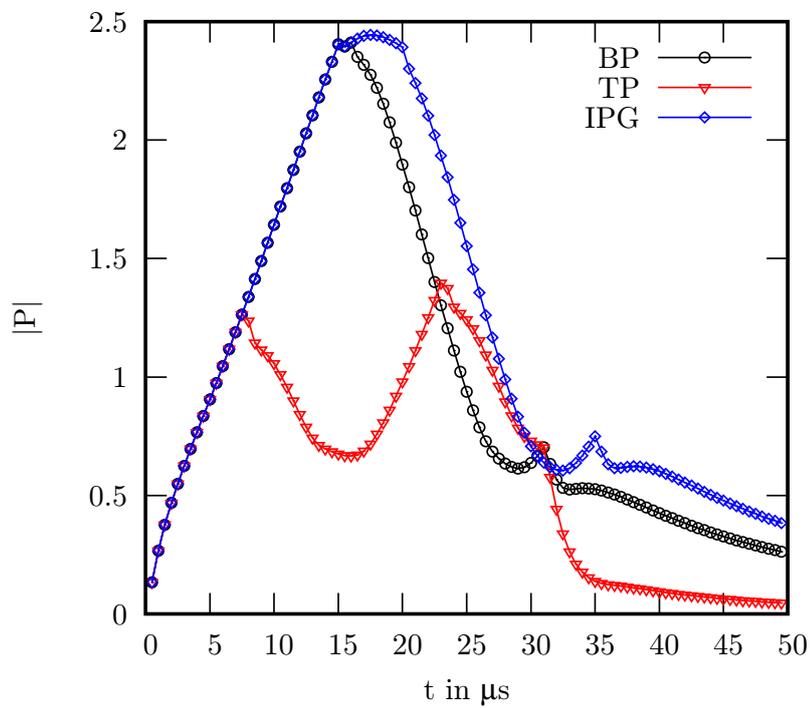


Abbildung 4.11: Zeitlicher Verlauf des Betrags der Polarisierung $|\mathbf{P}|$ des biphasischen Pulses (BP), des triphasischen Pulses (TP) und des biphasischen Pulses mit erhöhter Interphasenlücke (IPG) am Gesichtsnerv nahe der aktiven Elektrode.

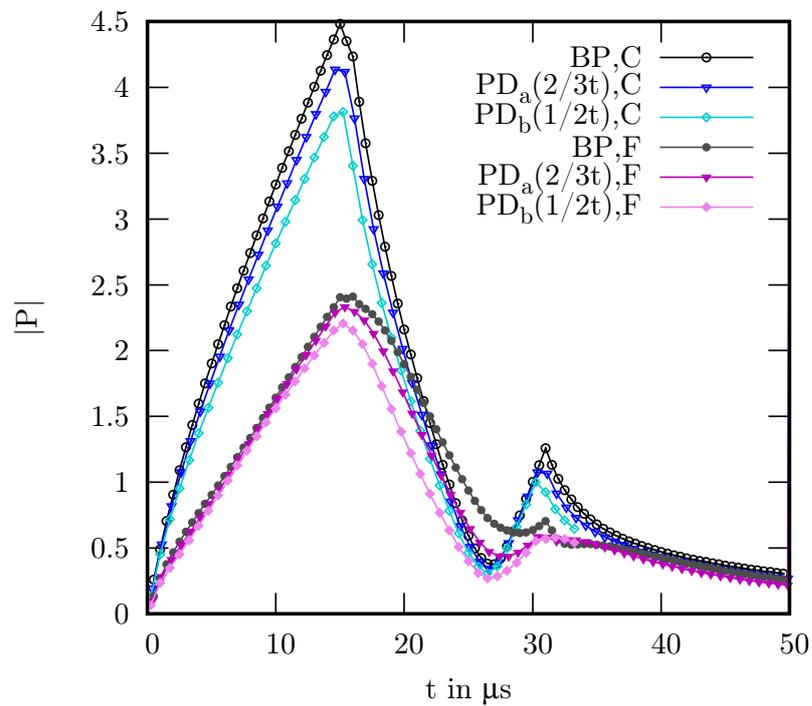


Abbildung 4.12: Zeitlicher Verlauf des Betrags der Polarisation $|P|$ vom biphasischen (BP) und biphasischen Puls mit erhöhter Phasendauer um den Faktor 1,5 (PDa) und 2.0 (PDb) an am Hörnerv (C) und Gesichtsnerv (F) in der Nähe der aktiven Elektrode. Die Zeitskala der Pulse mit unterschiedlichen Phasendauern ist reskaliert, um ihre Vergleichbarkeit über die Zeit zu verbessern (siehe Legende).

4.3 Beziehung zum Perzept

In diesem Kapitel soll eine Relation zwischen dem getroffenen Ansatz für den Betrag der Polarisation und der Qualität des wahrgenommenen Perzepts (Lautstärke) getroffen werden. Üblicherweise bildet die sogenannte „Kabelgleichung“ [110] die Basis zur Beschreibung der Ausbreitung von Aktionspotenzialen. Es handelt sich bei dieser Gleichung um eine Modellierung des Axons, wobei die Membran des Axons in Segmente unterteilt wird. Jedes Segment wird durch ein RC-Glied (ein mit einem elektrischen Widerstand parallel geschalteter Kondensator) modelliert und zu seinen benachbarten Segmenten über einen weiteren elektrischen Widerstand verbunden. Steht der Kondensator z. B. in einem RC-Glied unter Spannung, so entspricht dies einem Dipol zwischen seinen Kondensatorplatten. Über den angeschlossenen elektrischen Widerstand wird die Spannung um den Kondensator durch einen exponentiellen Abfall in der Zeit abgebaut. Aufgrund dieser Beziehung zwischen Polarisation und Aktionspotenzial, soll in diesem Abschnitt im Rahmen einer Näherung die Polarisation des Nervengewebes bei CI-Stimulation betrachtet werden. Dass die Polarisation mit Aktionspotenzialen von Nervenzellen in Verbindung steht, wird bereits in der Echtzeitbildgebung dieser angewendet [118]. Gegenstand dieser Arbeit ist es nicht, die Ausbreitung von Aktionspotenzialen in Relation zu einem Perzept zu setzen. Die getroffene Relation zwischen Perzept und den über die Polarisation beschriebenen Feldenergieeintrag ist ein informationstheoretischer Ansatz.

Zur Illustration der zeitlichen Entwicklung der Polarisation soll zunächst ein einfaches Beispiel unter Verwendung des Debyeschen Relaxationsmodells (3.46) für das Nervengewebe betrachtet werden. Zur Vereinfachung wird dabei angenommen, dass \mathbf{E} konstant ist. Man erhält für die Polarisation die Lösung

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 (1 - e^{-\omega_0 t}) \quad (4.2)$$

mit $\mathbf{P}_0 = \epsilon \mathbf{E}$. Der Einfachheit halber wird ferner angenommen, dass es sich bei diesem Beispiel um ein eindimensionales handelt. In diesem Fall wird \mathbf{P} zu einem Skalar und weiter als positiv-definitiv angenommen. Da E linear mit der Stromstärke I in Zusammenhang steht, kann

$$P \propto I (1 - e^{-\omega_0 t}) \quad (4.3)$$

geschrieben werden. Mit dem typischen Zeitverlauf von $\langle |\mathbf{P}| \rangle$ für CIs, der in z. B.

Abb. 4.10 zu sehen ist, lässt sich annehmen, dass $\omega_0 t$ in (4.3) nahe bei Null liegt, da die Beziehung zwischen P und der Zeit t für kleine Zeitspannen näherungsweise linear verläuft. Für P über die Dauer T lautet der zeitliche Mittelwert

$$\langle P \rangle := \frac{I}{T} \int_0^T (1 - e^{-\omega_0 t}) dt. \quad (4.4)$$

Mit der als $Q := IT$ definierten elektrischen Ladung und der Vernachlässigung von Termen $\mathcal{O}([\omega_0 T]^3)$ lautet die Entwicklung von (4.4)

$$\langle P \rangle \approx Q \frac{\omega_0}{2} \left(1 - \frac{\omega_0 T}{3} \right). \quad (4.5)$$

Der führende Term nullter Ordnung gibt an, dass der größte Beitrag zum Perzept von Q bestimmt wird. Dieser Term entspricht der üblichen Annahme, dass die Ladung das Perzept bestimmt. Der Korrekturterm erster Ordnung hängt neben Q zusätzlich von T ab. Dies bedeutet, dass $\langle P \rangle$ mit zunehmendem T abnimmt. Um die gleiche Lautstärke zu erhalten, muss Q über eine Erhöhung von I vergrößert werden. Die Wahrnehmungsschwelle ist der Punkt, an dem $\langle P \rangle$ einen kritischen Wert überschreitet. Dieser wird daher nicht nur durch Q , sondern auch durch T bestimmt. Der Dynamikbereich, definiert durch die Ladungsdifferenz ΔQ , lässt sich damit neu definieren. Dazu soll die Spanne zwischen der mittleren Polarisation für eine „angenehme Lautstärke“ (MCL) $\langle P \rangle_M$ und dem Schwellenwert (THR) $\langle P \rangle_T$ verwendet werden, womit sich dann

$$\Delta Q = \frac{\Delta \langle P \rangle}{1 - \frac{\omega_0 T}{3}} \approx \Delta \langle P \rangle \left(1 + \frac{\omega_0 T}{3} \right) \quad (4.6)$$

ergibt. Aus der obigen Gleichung (4.6) lässt sich ersehen, dass durch Erhöhen von T der durch ΔQ definierte Dynamikbereich ebenfalls erhöht wird.

Um (4.4) für den dreidimensionalen Fall von (4.2) zu verwenden, wird der Betrag der Polarisation $|\mathbf{P}|$ gemäß

$$\langle |\mathbf{P}| \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{I}{I_0} |\mathbf{P}| - P_0 \right) \Theta \left(\frac{I}{I_0} |\mathbf{P}| - P_0 \right) dt \quad (4.7)$$

verwendet. Dabei entspricht P_0 aus dem eindimensionalen Beispiel dem Wert des THRs $\langle P \rangle_T$. Weiterhin wird angenommen, dass $|\mathbf{P}|$ diesen Schwellenwert P_0 überschreiten muss, damit es zu einem Perzept kommen kann. Da negative Werte im Kontext der Intensitätswahrnehmung in ihrer Qualität als invariant angenom-

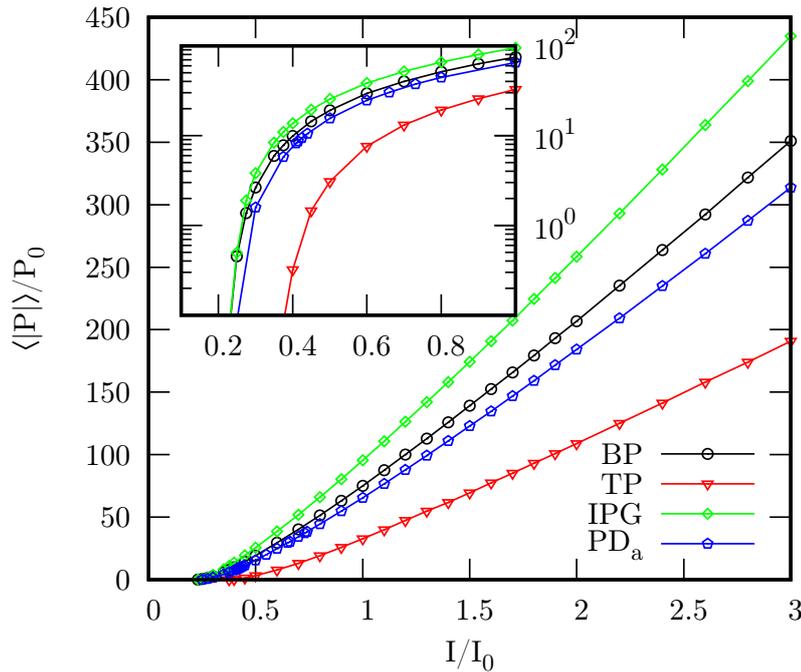


Abbildung 4.13: I/I_0 -abhängiger mittlerer Betrag der Polarisation $\langle |\mathbf{P}| \rangle / P_0$ des biphasischen (BP), triphasischen (TP), biphasischen mit erhöhter Interphasenlücke (IPG) und biphasischen Pulses mit erhöhter Phasendauer (PD_a) am Gesichtsnerv. Der Bildeinschub zeigt die selben Daten um den Schwellenwert (THR) in logarithmischer Skalierung für $\langle |\mathbf{P}| \rangle / P_0$.

men werden, wird die Heaviside-Funktion $\Theta(x)$ in ihrer Standarddefinition in die Gleichung aufgenommen. Dies ist eine Näherung, da davon ausgegangen werden muss, dass Strukturen des Nervengewebes, wie Axone z. B., sehr wohl sensitiv für die Polarität elektrischer Felder sind [119, 120]. Es ist jedoch wahrscheinlich, dass es eine Korrelation zwischen der wahrgenommenen Lautstärke und $|\mathbf{P}|$ gibt, wie beispielsweise psychophysikalische Messungen mit CI-Trägern zeigten. So ist z. B. vergleichsweise lange bekannt, dass eine erhöhte Phasendauer zu einer Verringerung der empfundenen Lautstärke führt [103, 104]. Dies scheint der in Abb. 4.12 gezeigten Abflachung der Kurven mit erhöhter Phasendauer zu entsprechen. Die Stärke von I_0 stellt einen Skalierungsfaktor dar, der nur zu Zwecken der Normalisierung verwendet wird. Durch die Einführung von I ist es möglich, den Effekt verschiedener Pulsformen in Bezug zum THR zu bewerten. Der Einfachheit halber werden im Folgenden P_0 und I_0 auf Eins gesetzt. Wenngleich es nicht zwingend einen direkten Zusammenhang zwischen der subjektiven Größe Lautstärke und $\langle |\mathbf{P}| \rangle / P_0$ geben muss, so ist jedoch eine Korrelation erkennbar. Abb. 4.13 zeigt das I -abhängige Wachstum von $\langle |\mathbf{P}| \rangle$ für BP (Kreise), TP (Dreiecke), IPG (Diamanten) und PD_a

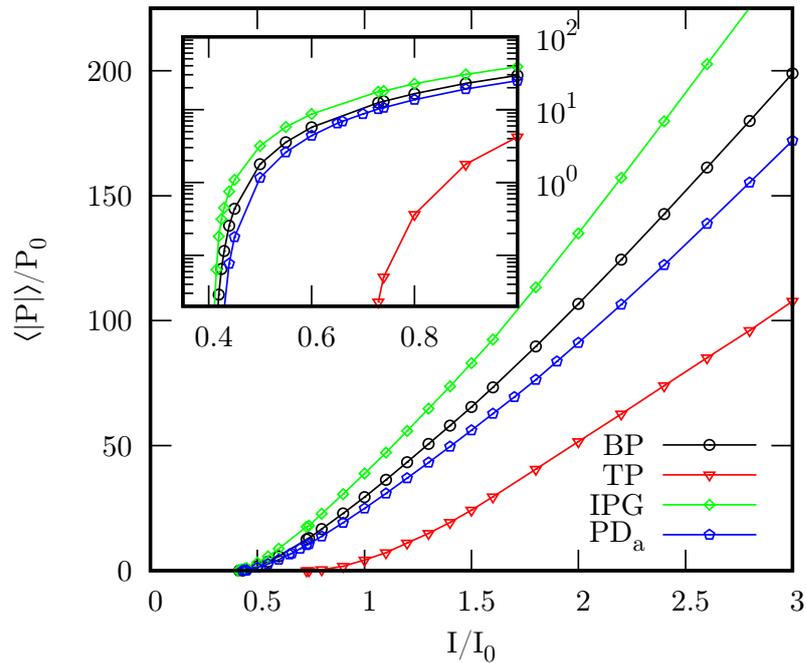


Abbildung 4.14: I/I_0 -abhängiger mittlerer Betrag der Polarisation $\langle |\mathbf{P}| \rangle / P_0$ des biphasischen (BP), triphasischen (TP), biphasischen mit erhöhter Interphasenlücke (IPG) und biphasischen Pulses mit erhöhter Phasendauer (PD_a) am Hörnerv. Der Bildeinschub zeigt die selben Daten für $\langle |\mathbf{P}| \rangle / P_0$ in logarithmischer Skalierung in einem kleinen Bereich der dem THR entspricht.

(Fünfecke). Der Bildeinschub zeigt die selben Daten, ist jedoch auf kleine Werte von $\langle |\mathbf{P}| \rangle$ in logarithmischer Skalierung beschränkt. Der Punkt, an dem $\langle |\mathbf{P}| \rangle$ größer als P_0 wird, wird als THR definiert. Aus Abb. 4.13 lässt sich deutlich erkennen, dass der IPG für alle Werte von I die größten Werte von $\langle |\mathbf{P}| \rangle$ aller hier betrachteten Pulsformen erreicht. Unter der Annahme, dass $\langle |\mathbf{P}| \rangle$ der Qualität des Perzepts entspricht, bedeutet dies, dass der IPG für alle I am lautesten erscheinen muss. In Bezug auf die Lautstärke ist der TP der am leistungsten wahrzunehmende Puls. Der kleine Bildeinschub im linken oberen Teil der Abb. 4.13 zeigt, dass alle biphasischen Pulse für kleine I/I_0 ein recht ähnliches Verhalten besitzen. Im Gegensatz dazu weicht der triphasische Puls erheblich von den Ergebnissen für die biphasischen Pulse ab. Mit Ausnahme eines kleinen Bereichs um den THR verläuft die Kurve von $\langle |\mathbf{P}| \rangle$ für jeden Puls in Abhängigkeit von I ungefähr linear. Für sehr kleine I (nahe dem THR) folgt die Kurve einem Potenzgesetz in I .

Die Zunahme von $\langle |\mathbf{P}| \rangle$ mit I am Hörnerv (siehe Abb. 4.13) ist ähnlich der am Gesichtsnerv (siehe Abb. 4.14). Der größte Unterschied zwischen beiden ist das I/I_0 , an dem $\langle |\mathbf{P}| \rangle / P_0$ ungleich null wird (THR am Hörnerv). Abb. 4.15 zeigt das

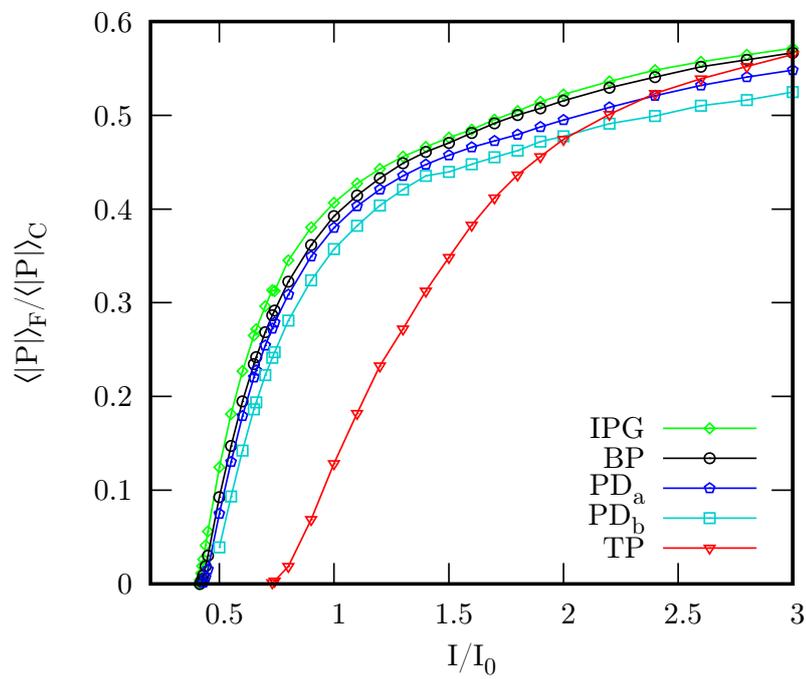


Abbildung 4.15: I/I_0 -abhängiges mittleres Polarisationsverhältnis von Gesichts- zu Hörnerv $\langle |\mathbf{P}| \rangle_F / \langle |\mathbf{P}| \rangle_C$ von biphasischen (BP), triphasischen (TP), biphasischen mit erhöhter Interphasenlücke (IPG) und biphasischen Pulsen mit höherer Phasendauer (PD_a).

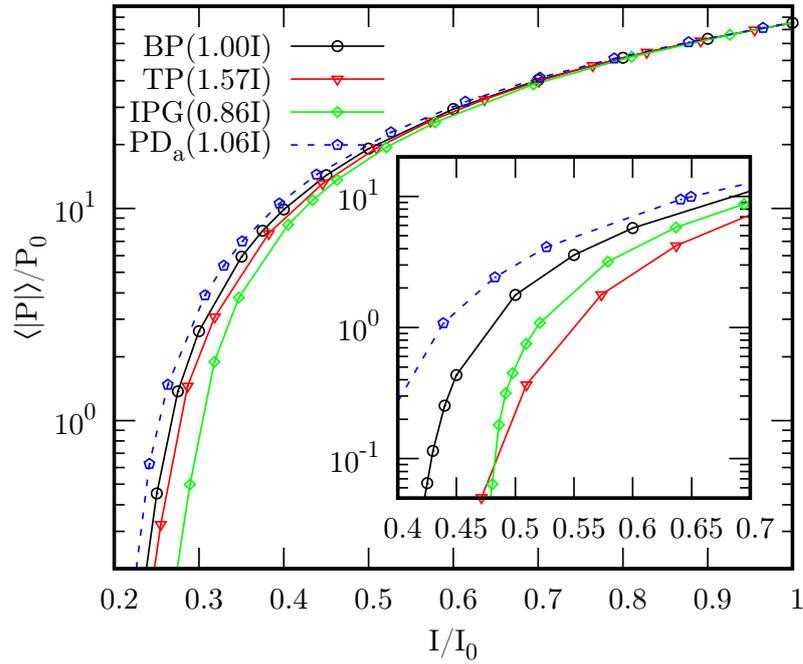


Abbildung 4.16: I/I_0 -abhängiger mittlerer Betrag der Polarisation $\langle |\mathbf{P}| \rangle / P_0$ von biphasischen (BP), triphasischen (TP) und biphasischen Pulsen mit erhöhter Interphasenlücke (IPG). Eine Reskalierung der Stromstärken wurde vorgenommen, damit $\langle |\mathbf{P}| \rangle / P_0$ für alle Pulsformen bei $I = I_0$ am Hörnerv den gleichen Wert haben. Der Bildeinschub in der unteren rechten Ecke der Abbildung zeigt die Ergebnisse für den Gesichtsnerv.

Verhältnis von $\langle |\mathbf{P}| \rangle_F / \langle |\mathbf{P}| \rangle_C$. Anhand experimenteller Messungen von CI-Trägern konnte gezeigt werden, dass die Stärke der Stimulation unter Verwendung von TP unter denen aller anderer Pulsformen liegt. Die Simulationen der vorliegenden Arbeit zeigen, dass dies für bis zu $I/I_0 < 2$ der Fall ist. Bei größeren Werten von $\langle |\mathbf{P}| \rangle$ steigt die Kurve schneller und steiler als bei allen anderen Pulsformen an und kreuzt die Kurven der anderen Pulsformen bei etwa $I = 3I_0$. Es ist an dieser Stelle vollkommen unklar, welcher genaue Wert von $\langle |\mathbf{P}| \rangle$ dem MCL zu zuordnen ist. Unter der Annahme, dass gleiche Werte für $\langle |\mathbf{P}| \rangle$ zur gleichen Qualität der Wahrnehmung führen, wird $\langle |\mathbf{P}| \rangle$ über einen Faktor für I reskaliert, um an einem bestimmten Punkt für $\langle |\mathbf{P}| \rangle$ der jeweiligen Pulsformen gleiche Werte zu erhalten. Die reskalierten Kurvenverläufe der Beträge der Polarisation verschiedener Pulsformen sind in Abb. 4.16 dargestellt. Hier wird I für jede Kurve durch den Faktor, der in der Legende in Klammern gezeigt wird, reskaliert. Kreise, Dreiecke, Diamanten und Pentagone geben $\langle |\mathbf{P}| \rangle / P_0$ am Hörnerv für BP, TP, IPG bzw. PDa an. BP wurde nicht geändert, da es als Referenz dient. Auf der Ebene des Hörnervs wird für den TP die engste Übereinstimmung mit den Ergebnissen für den BP

über den hier betrachteten Bereich des elektrischen Stroms I beobachtet. Diese Ähnlichkeit wird erreicht, indem für den TP 57 % mehr Strom verwendet wird als für BP. Um die Ergebnisse von IPG mit denen des BP abzugleichen, ist 14 % weniger Strom erforderlich. Der THR für IPG ist der größte unter allen betrachteten Pulsformen. Dies führt zu einer Verringerung des Dynamikbereichs, d. h. dass die Differenz zwischen der für die MCL benötigten und der für die THR benötigten Ladungsmenge sich verringert. Dieses Ergebnis der Simulationen stimmt qualitativ mit experimentellen Beobachtungen bei CI-Trägern [11] überein.

Die Ergebnisse für die PDa sind bereits in Bezug auf die längere Pulsdauer korrigiert. Für einen vergleichbaren MCL sind ungefähr 6 % mehr Strom erforderlich. Dies wird auch bei experimentellen Studien mit CI-Trägern beobachtet [121]. Der THR der reskalierten Ergebnisse für PDa liegt unter denen von BP, d. h. dass der Dynamikbereich größer ist als der für BP. Auch dies stimmt mit experimentellen Befunden überein [122, 123].

Der Einschub in der unteren rechten Ecke von Abb. 4.16 zeigt den schwellemnormierten Betrag der Polarisation unterschiedlicher Pulsformen am Gesichtsnerv. Hier ist $\langle |\mathbf{P}| \rangle / P_0$ des TPs im Vergleich zu allen anderen Pulsformen am kleinsten. Am Punkt $I \approx 0,475I_0$ ist jedoch $\langle |\mathbf{P}| \rangle / P_0$ für das IPG kleiner als für das TP. Bei höheren I steigt die Kurve für das IPG jedoch schneller an und liegt dann nahe bei $\langle |\mathbf{P}| \rangle / P_0$ des BP.

Es sind an dieser Stelle keine genauen Werte für die MCL und die THR zu nennen, bzw. für den Betrag an Stromstärke oder Ladung, die für eine Empfindung erforderlich sind. Es ist jedoch entscheidend zu erwähnen, dass sich die Geometrie der Cochlea sowie die Position der Elektrode in der Cochlea zwischen den CI-Trägern stark unterscheiden. Die relative Änderung der Stimulation, wie z. B. der Wechsel von einem biphasischen Standardpuls durch eine höhere Phasendauer, Interphasenlücke oder Anzahl der Phasen (triphasisch statt biphasisch) können reproduziert und im Sinne der Polarisation verstanden werden. Eine größere Interphasenlücke führt zu einer höheren mittleren Polarisation, die innerhalb des Modells der Qualität einer höheren Lautstärke entspricht. Diese Vorhersage stimmt gut mit experimentellen Befunden überein [9, 12, 10]. Wenn die MCL ausgeglichen werden, zeigt ein biphasischer Puls mit einer Interphasenlücke von $5 \mu s$ einen höheren THR als ein biphasischer Puls mit einer Interphasenlücke von $2 \mu s$, wie in Abb. 4.16 gezeigt. Somit führt eine vergrößerte Interphasenlücke zu einem kleineren Dynamikbereich innerhalb der vorliegenden Simulationen. Diese Vorhersage stimmt ebenfalls mit experimentellen Befunden überein [11]. Ein ladungsausgeglichener Puls mit erhöhter Phasendauer führt zu einem geringeren mittleren Polarisationsbetrag.

Entsprechend dem Modell ergibt ein ladungsausgeglichener Puls mit einer längeren Phasendauer eine geringere Perzeptstärke als der Standard-Biphasenpuls. In Betracht des mittleren Polarisationsanstiegs liegt der Grund für diese Verringerung darin, dass sich mit der Zeit alle Komponenten, aus denen die Nettopolarisation besteht, ihrem Sättigungswert annähern. Dies bedeutet, dass die Steigung der Polarisation exponentiell abnimmt und somit das entscheidende $\langle |\mathbf{P}| \rangle / P_0$ kleiner ist als bei einem Puls mit einer kürzeren Phasendauer. Bei gleichem MCL nimmt der Dynamikbereich mit der Phasendauer zu. Dies stimmt mit den experimentellen Ergebnissen überein [121, 122, 123]. Zu beachten ist, dass durch Erhöhung der Stromstärke entsprechend mit dem MCL auch die Polarisation des Gesichtsnervs zunimmt. Bei immer höheren Stromstärken wird diese Gewebepolarisation sogar größer ausfallen als im Falle des Standard-Biphasenpulses. Die Simulationen zeigen, dass eine erhöhte Pulsdauer einen unerwünschten Effekt auf die Aktivierung des Gesichtsnervs haben kann, insofern die MCLs mit der des Standardpulses übereinstimmt.

Im Falle einer möglichen Gesichtsmittstimulation werden in der klinischen Routine bereits triphasische Pulse verwendet, um diese unerwünschte Nebenwirkung zu verringern [106, 105], was jedoch ein rein empirischer Fund ist. Die Simulationen zeigen, dass eine direkte Änderung (d. h. ohne Anpassung des MCLs) von biphasischen zu triphasischen Pulsen zu einem noch schwächeren Perzept führt, als es unter der Verwendung biphasischer Pulse mit höherer Phasendauer der Fall ist. Das Verhältnis zwischen der Stimulation des Hörnervs und der Stimulation des Gesichtsnervs um die aktive Elektrode herum ist jedoch noch kleiner als bei jeder anderen Pulsform, wie in Abb. 4.15 zu sehen ist. Die Reskalierung der Ströme, um sie an den MCL für den biphasischen Puls anzupassen (wie in Abb. 4.16 gezeigt ist), führt zu einem Dynamikbereich für den triphasischen Puls, der nur geringfügig kleiner als der des biphasischen Standardpulses ist. Der Gesichtsnerv bleibt im Vergleich zu einem biphasischen Standardpuls immer noch weit weniger stark polarisiert. Es ist anzumerken, dass oberhalb des MCLs die simulierte Polarisation des Gesichtsnervengewebes für den triphasischen Puls schneller zunimmt, als unter Verwendung biphasischer Pulse. Schließlich wird der Gesichtsnerv mit dem triphasischen Puls noch stärker polarisiert als mit dem biphasischen Puls. Fälle einer stärkeren Gesichtsnervstimulation durch einen triphasischen Puls wurden in der klinischen Routine noch nicht berichtet. Dies liegt vermutlich daran, dass die erforderlichen Stromstärken auf derart hohe Werte eingestellt werden müssten, wie es klinisch nie erfolgt. Es ist zu beachten, dass unterhalb der MCL die stromabhängige Steigung des mittleren Betrags der Polarisation der von biphasischen und triphasi-

schen Pulsen einander sehr ähnlich ist, was darauf hindeutet, dass die Änderung der Empfindung mit dem Strom für die beiden Pulsformen ebenfalls ähnlich ist.

Weitere Untersuchungen unter Verwendung des vorgestellten Modells könnten sich auf den Einfluss der Elektrodenposition [124], den Effekt der Ausbreitung der Anregung [125], die Abweichung der Knocheneigenschaften [126] und den Einfluss der Pulsfrequenz konzentrieren [127] oder auch Verknöcherungen der Scalen (Ossifikation der Cochlea). Mit fortschreitender Rechenleistung sind Simulationen mit anatomischen Details und ohne Verwendung einer Reskalierung denkbar.

4.4 Zusammenfassung: Kapitel 4

Es wurden Simulationen der Elektrodynamik in der Cochlea bei Stimulation mit einem CI gezeigt. Der verwendete Algorithmus zur Simulation der Elektrodynamik basiert auf den im vorangegangenen Kapitel vorgestellten GBM. Diese Methode wurde um das Debyesche Relaxationsmodell für Multikomposite erweitert, um die dispersiven Eigenschaften biologischen Gewebes zu modellieren. Als zentrale Größe zur Bewertung der Qualität des Perzepts, als Folge der elektrischen Stimulation, wird der Betrag der Polarisierung des Nervengewebes verwendet. Zu den verwendeten Pulsen der elektrischen Stimulation wurden triphasische und biphasische Pulsformen betrachtet.

Es wurde gezeigt, dass triphasische Pulse den Gesichtsnerv deutlich weniger stark stimulieren als biphasische Pulse. Dies ist auch dann noch der Fall, wenn die erforderliche Stromamplitude für triphasische Pulse so angehoben wurde, dass diese die gleiche Lautstärke im Vergleich zu biphasischen Pulsen erzielen. Der die Lautstärke reduzierende Effekt höherer Phasendauern von biphasischen Pulsen bei konstanter Ladung pro Phase wurde am Bsp. von drei verschiedenen Pulsdauern reproduziert. Zudem konnte gezeigt werden, dass bei Erhöhung dieser Phasendauer, der Dynamikbereich biphasischer Pulse zunimmt. Im Vergleich dazu ist der Dynamikbereich von triphasischen Pulsen leicht vermindert. Deutlicher stärker ist diese Verminderung des Dynamikbereichs bei biphasischen Pulsen mit erhöhter Interphasenlücke ausgeprägt. Dabei ist zu beobachten, dass die Lautstärke bei biphasischen Pulsen mit größerer Interphasenlücke deutlich erhöht ist.

Kapitel

Gesamtzusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit stellt computernumerische Simulationen der CI-Stimulation vor. Diese Simulationen wurden im Zeitbereich durchgeführt, um die Wirkung zeitlich veränderlicher elektrischer Stimulationen auf das biologische Gewebe zu untersuchen. Um den Schwierigkeiten bei Simulationen unter Verwendung der FDTD (Verletzung der Energieerhaltung bzw. des Poynting-Theorems, Vermeidung der artifiziellen Gitterimpedanz) zu entgegnen, wurde eine alternative Methode für die Langzeitsimulationen der Elektrodynamik entwickelt. Diese Methode basiert auf dem GB-Modell und unterscheidet sich wesentlich von jenen Methoden, die auf finiten Differenzen oder Integralen basieren. Mit ihr werden die Maxwell-Gleichungen für den Grenzfall des Vakuums simuliert. Die Wechselwirkung der elektromagnetischen Felder mit Medien wurde durch eine Erweiterung der Methode realisiert. Es stellt sich dabei heraus, dass, unter der Bedingung vergleichbarer Simulationengenauigkeit, die GBM deutlich schneller und effizienter in Bezug auf die Rechenressourcen arbeitet als die FDTD. Dabei erfüllt die GBM die Energieerhaltung und ist von der Gitterimpedanz unbeeinflusst.

Mit dieser Methode wurde die Simulation der CI-Stimulation auf Grafikkarten durchgeführt. Daten für die Medienparameter wurden der Literatur entnommen und an ein mehrkomponentiges Debyesches Relaxationsmodell angepasst. Das Cochlea-Modell für die Simulation ist aus den räumlich dominanten Strukturen gebildet. Strukturen ähnlicher Eigenschaften wurden zusammengefasst. Bei der Suche nach der Größe zur Beschreibung der Qualität des Perzepts, wurde der Betrag der Gewebepolarisation gewählt. Mithilfe dieses Betrags der Polarisation des Nervengewebes ist die Abhängigkeit der Qualität des Perzepts von der Dauer der Phase oder der Interphasenlücke zu verstehen. Von besonderem Interesse für diese Arbeit ist die unterschiedliche Qualität des Perzepts bei Verwendung von triphasischen und biphasischen Pulsen. Es konnte gezeigt werden, dass für ein vergleichbares Perzept, triphasische Pulse nicht nur höhere Stromamplituden als biphasische benötigen,

sondern auch in der Lage sind, die unerwünschte Gesichtsmittstimulation zu mindern, da der Gesichtsnerv bedeutend weniger stark mitstimuliert wird. Die Ursache dafür liegt in der frequenzabhängigen schirmenden Wirkung des Knochengewebes, welches den Gesichtsnerv vom Bereich der Cochlea trennt.

Die Simulationsergebnisse legen nahe, dass der triphasische Puls nützlich sein könnte, wenn diese verbleibende Polarisation nach jedem biphasischen Puls z. B. negative Auswirkungen auf das Sprachverständnis haben sollte. Nicht erklärbar durch das verwendete Modell ist die Abhängigkeit der Stimulationsschwelle und Feuerlatenz neuronaler Strukturen von der Polarität (anodisch oder kathodisch) der führenden Phase [119]. Das vorgestellte Modell reagiert nicht auf diese anfängliche Polarität, da der Einfachheit halber angenommen wurde, dass das Gewebe zu Beginn der Simulation vollständig unpolarisiert und isotrop ist. Beides ist in der Realität nicht der Fall. Physiologische Studien zeigten, dass die Polarität der zweiten Phase eines biphasischen Pulses keinen großen Einfluss auf z. B. Feuerrate und Latenz hat [119]. Obwohl es wahrscheinlich ist, dass dies eine reine neurophysiologische Eigenschaft ist, die auf verschiedene Arten effektiv modelliert werden kann [120], ist es denkbar, eine vorzeichenabhängige Schwelle P_0 sowie anisotrope Medieneigenschaften anzunehmen, um auch diese Feinheiten des Perzepts modellieren zu können.

Literaturverzeichnis

- [1] EDDINGTON, Donald K.: Speech discrimination in deaf subjects with cochlear implants. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 68 (1980), S. 885. <http://dx.doi.org/10.1121/1.384827>. – DOI 10.1121/1.384827
- [2] WILSON, B. ; FINLEY, C. ; LAWSON, D. ; AL. et: Better speech recognition with cochlear implants. In: *nature* 352 (1991), S. 236–238. <http://dx.doi.org/10.1038/352236a0>. – DOI 10.1038/352236a0
- [3] SHANNON, Robert V.: Advances in Auditory Prostheses. In: *Curr Opin Neurol* 25 (2012), Nr. 1, S. 61 – 66. <http://dx.doi.org/10.1097/WCO.0b013e32834ef878>. – DOI 10.1097/WCO.0b013e32834ef878
- [4] ESHRAGHI, Adrien A. ; NAZARIAN, Ronen ; TELISCHI, Fred F. ; RAJGURU, Suhrud M. ; TRUY, Eric ; GUPTA, Chhavi: The cochlear implant: historical aspects and future prospects. In: *Anat Rec (Hoboken)* 295 (2012), Nr. 11, S. 1967–1980. <http://dx.doi.org/10.1002/ar.22580>. – DOI 10.1002/ar.22580
- [5] MUDRY, Albert ; MILLS, Mara: The Early History of the Cochlear Implant: A Retrospective. In: *JAMA Otolaryngology-Head & Neck Surgery* 139 (2013), 05, Nr. 5, 446-453. <http://dx.doi.org/10.1001/jamaoto.2013.293>. – DOI 10.1001/jamaoto.2013.293. – ISSN 2168–6181
- [6] RATTAY, F. ; R. N. LEAO, H. F.: A model of the electrically excited human cochlear neuron. II. Influence of the three-dimensional cochlear structure on neural excitability. In: *Hear Res* 153 (2001), S. 64–79. [http://dx.doi.org/10.1016/s0378-5955\(00\)00257-4](http://dx.doi.org/10.1016/s0378-5955(00)00257-4). – DOI 10.1016/s0378-5955(00)00257-4
- [7] BRIAIRE, J. J. ; FRIJNS, J. H.: Field patterns in a 3D tapered spiral model of the electrically stimulated cochlea. In: *Hear Res* 148 (2000), S. 18–30. [http://dx.doi.org/10.1016/s0378-5955\(00\)00104-0](http://dx.doi.org/10.1016/s0378-5955(00)00104-0). – DOI 10.1016/s0378-5955(00)00104-0
- [8] ZENG, F ; GALVIN, J. ; ZHANG, Chaoying: Encoding loudness by electric stimulation of the auditory nerve. In: *Neuroreport* 9 (1998), 07, S. 1845–8. <http://dx.doi.org/10.1097/00001756-199806010-00033>. – DOI

10.1097/00001756-199806010-00033

- [9] PRADO-GUITIERREZ, Pavel ; FEWSTER, Leonie M. ; HEASMAN, John M. ; MCKAY, Colette M. ; SHEPHERD, Robert K.: Effect of interphase gap and pulse duration on electrically evoked potentials is correlated with auditory nerve survival. In: *Hear Res* 215 (2006), S. 47–55. <http://dx.doi.org/10.1016/j.heares.2006.03.006>. – DOI 10.1016/j.heares.2006.03.006
- [10] RAMEKERS, Dyan ; VERSNEL, Huib ; STRAHL, Stefan B. ; SMEETS, Emma M. ; KLIS, Sjaak F. ; GROLMAN, Wilko: Auditory-Nerve Responses to Varied Inter-Phase Gap and Phase Duration of the Electric Pulse Stimulus as Predictors for Neuronal Degeneration. In: *Journal of the Association for Research in Otolaryngology* 15 (2014), Apr, Nr. 2, S. 187–202. <http://dx.doi.org/10.1007/s10162-013-0440-x>. – DOI 10.1007/s10162-013-0440-x. – ISSN 1438-7573
- [11] PIEPER, S. H. ; BRILL, S. ; BAHMER, A.: Loudness Perception and Dynamic Range Depending on Interphase Gaps of Biphasic Pulses in Cochlear Implants. In: *Ear Hear* (2020). <http://dx.doi.org/10.1097/AUD.0000000000000843>. – DOI 10.1097/AUD.0000000000000843
- [12] MCKAY, Colette M. ; HENSHALL, Katherine R.: The perceptual effects of interphase gap duration in cochlear implant stimulation. In: *Hear Res* 181 (2003), Nr. 1, 94 - 99. [http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/S0378-5955\(03\)00177-1](http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/S0378-5955(03)00177-1). – DOI [https://doi.org/10.1016/S0378-5955\(03\)00177-1](https://doi.org/10.1016/S0378-5955(03)00177-1). – ISSN 0378-5955
- [13] GABRIEL, C ; GABRIEL, S ; CORTHOUT, E: The dielectric properties of biological tissues: I. Literature survey. In: *Physics in Medicine and Biology* 41 (1996), nov, Nr. 11, 2231–2249. <http://dx.doi.org/10.1088/0031-9155/41/11/001>. – DOI 10.1088/0031-9155/41/11/001
- [14] C., Gabriel ; A., Peyman ; H., Grant E.: Electrical conductivity of tissue at frequencies below 1 MHz. In: *Physics in Medicine and Biology* 54 (2009), S. 4863
- [15] MITCHELL, Geoffrey R. ; TOJEIRA, Ana: Role of Anisotropy in Tissue Engineering. In: *Procedia Engineering* 59 (2013), 117 - 125. <http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/j.proeng.2013.05.100>. – DOI <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2013.05.100>. – ISSN 1877-7058. – 3rd International Conference on Tissue Engineering, ICTE2013

- [16] GEDNEY, Stephen D.: *Introduction to the Finite-Difference Time-Domain (FDTD) Method for Electromagnetics*. Morgan & Claypool Publishers, 2011
- [17] KUNZ, Karl S. ; LUEBBERS, Raymond J.: *The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics*. CRC Press, 1993
- [18] LIU, Yanhong ; YAN, Guangwu: A lattice Boltzmann model for Maxwell's equations. In: *Applied Mathematical Modelling* 38 (2014), Nr. 5–6, 1710 - 1728. <http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2013.09.009>. – DOI <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2013.09.009>. – ISSN 0307–904X
- [19] MENDOZA, M. ; MUÑOZ, J. D.: Three-dimensional lattice Boltzmann model for electrodynamics. In: *Phys. Rev. E* 82 (2010), November, Nr. 5, S. 056708. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.82.056708>. – DOI 10.1103/PhysRevE.82.056708
- [20] HE, Xiaoyi ; LUO, Li-Shi: Theory of the lattice Boltzmann method: From the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation. In: *Phys. Rev. E* 56 (1997), Dec, 6811–6817. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.56.6811>. – DOI 10.1103/PhysRevE.56.6811
- [21] FRISCH, U. ; HASSLACHER, B. ; POMEAU, Y.: Lattice-Gas Automata for the Navier-Stokes Equation. In: *Phys. Rev. Lett.* 56 (1986), Apr, 1505–1508. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.56.1505>. – DOI 10.1103/PhysRevLett.56.1505
- [22] HE, Xiaoyi ; LUO, Li-Shi: Theory of the lattice Boltzmann method: From the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation. In: *Phys. Rev. E* 56 (1997), Dec, 6811–6817. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.56.6811>. – DOI 10.1103/PhysRevE.56.6811
- [23] CHEN, Hudong ; CHEN, Shiyi ; MATTHAEUS, William H.: Recovery of the Navier-Stokes equations using a lattice-gas Boltzmann method. In: *Phys. Rev. A* 45 (1992), Apr, R5339–R5342. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.45.R5339>. – DOI 10.1103/PhysRevA.45.R5339
- [24] QIAN, Y. H. ; D'HUMIÈRES, D. ; LALLEMAND, P.: Lattice BGK Models for Navier-Stokes Equation. In: *EPL (Europhysics Letters)* 17 (1992), Nr. 6, 479. <http://stacks.iop.org/0295-5075/17/i=6/a=001>
- [25] CHEN, Shiyi ; DOOLEN, Gary D.: LATTICE BOLTZMANN METHOD FOR FLUID FLOWS. In: *Annual Review of Fluid Mechanics* 30 (1998), Nr. 1, S. 329–364. <http://dx.doi.org/10.1146/annurev.fluid.30.1.329>. – DOI

10.1146/annurev.fluid.30.1.329

- [26] SHAN, Xiaowen ; CHEN, Hudong: Lattice Boltzmann model for simulating flows with multiple phases and components. In: *Phys. Rev. E* 47 (1993), Mar, 1815–1819. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.47.1815>. – DOI 10.1103/PhysRevE.47.1815
- [27] BAO, Jie ; SCHAEFER, Laura: Lattice Boltzmann equation model for multi-component multi-phase flow with high density ratios. In: *Applied Mathematical Modelling* 37 (2013), Nr. 4, 1860 - 1871. <http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2012.04.048>. – DOI <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2012.04.048>. – ISSN 0307–904X
- [28] SUCCI, S. ; SMITH, G. ; KAXIRAS, E.: Lattice Boltzmann Simulation of Reactive Microflows over Catalytic Surfaces. In: *Journal of Statistical Physics* 107 (2002), Apr, Nr. 1, 343–366. <http://dx.doi.org/10.1023/A:1014531209244>. – DOI 10.1023/A:1014531209244. – ISSN 1572–9613
- [29] SUCCI, S. ; D’ORAZIO, A. ; C., Arrighetti: Lattice Boltzmann simulation of open flows with heat transfer. In: *Physics of Fluids* 15 (2003), June, Nr. 9, S. 2778–2781. <http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1063/1.1597681>. – DOI <https://doi.org/10.1063/1.1597681>
- [30] ZHOU, W.N. ; YAN, Y.Y. ; XU, J.L.: A lattice Boltzmann simulation of enhanced heat transfer of nanofluids. In: *International Communications in Heat and Mass Transfer* 55 (2014), 113 - 120. <http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2014.04.010>. – DOI <http://dx.doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2014.04.010>. – ISSN 0735–1933
- [31] KANG, Qinjun ; ZHANG, Dongxiao ; CHEN, Shiyi: Unified lattice Boltzmann method for flow in multiscale porous media. In: *Phys. Rev. E* 66 (2002), Nov, 056307. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.66.056307>. – DOI 10.1103/PhysRevE.66.056307
- [32] FRANTZISKONIS, George N.: Lattice Boltzmann method for multimode wave propagation in viscoelastic media and in elastic solids. In: *Phys. Rev. E* 83 (2011), Jun, 066703. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.83.066703>. – DOI 10.1103/PhysRevE.83.066703
- [33] SHAN, Xiaowen: Simulation of Rayleigh-Bénard convection using a lattice Boltzmann method. In: *Phys. Rev. E* 55 (1997), Mar, 2780–2788. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.55.2780>

- doi.org/10.1103/PhysRevE.55.2780. – DOI 10.1103/PhysRevE.55.2780
- [34] LI, Huabing ; LU, Xiaoyan ; FANG, Haiping ; QIAN, Yuehong: Force evaluations in lattice Boltzmann simulations with moving boundaries in two dimensions. In: *Phys. Rev. E* 70 (2004), Aug, 026701. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.70.026701>. – DOI 10.1103/PhysRevE.70.026701
- [35] SHAN, Xiaowen ; CHEN, Hudong: Simulation of nonideal gases and liquid-gas phase transitions by the lattice Boltzmann equation. In: *Phys. Rev. E* 49 (1994), Apr, 2941–2948. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.49.2941>. – DOI 10.1103/PhysRevE.49.2941
- [36] NOURGALIEV, R.R. ; DINH, T.N. ; SEHGAL, B.R.: On lattice Boltzmann modeling of phase transition in an isothermal non-ideal fluid. In: *Nuclear Engineering and Design* 211 (2002), Nr. 2–3, 153 - 171. [http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/S0029-5493\(01\)00435-6](http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/S0029-5493(01)00435-6). – DOI [http://dx.doi.org/10.1016/S0029-5493\(01\)00435-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0029-5493(01)00435-6). – ISSN 0029–5493
- [37] WANG, Moran ; CHEN, Shiyi: Electroosmosis in homogeneously charged micro- and nanoscale random porous media. In: *Journal of Colloid and Interface Science* 314 (2007), Nr. 1, 264 - 273. <http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jcis.2007.05.043>. – DOI <https://doi.org/10.1016/j.jcis.2007.05.043>. – ISSN 0021–9797
- [38] WANG, Moran ; KANG, Qinjun: Modeling electrokinetic flows in microchannels using coupled lattice Boltzmann methods. In: *Journal of Computational Physics* 229 (2010), Nr. 3, 728 - 744. <http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.10.006>. – DOI <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.10.006>. – ISSN 0021–9991
- [39] DELLAR, P. J.: Electromagnetic waves in lattice Boltzmann magnetohydrodynamics. In: *EPL (Europhysics Letters)* 90 (2010), Nr. 5, 50002. <http://stacks.iop.org/0295-5075/90/i=5/a=50002>
- [40] HANASOGE, S. M. ; SUCCI, S. ; ORSZAG, S. A.: Lattice Boltzmann method for electromagnetic wave propagation. In: *EPL (Europhysics Letters)* 96 (2011), Nr. 1, 14002. <http://stacks.iop.org/0295-5075/96/i=1/a=14002>
- [41] HAUSER, A. ; VERHEY, J. L.: Stable lattice Boltzmann model for Maxwell equations in media. In: *Phys. Rev. E* 96 (2017), Dec, 063306. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.96.063306>. – DOI 10.1103/PhysRevE.96.063306
- [42] SALOMONS, Erik M. ; LOHMAN, Walter J. A. ; ZHOU, Han: Simulation of

- Sound Waves Using the Lattice Boltzmann Method for Fluid Flow: Benchmark Cases for Outdoor Sound Propagation. In: *PLOS ONE* 11 (2016), 01, Nr. 1, 1-19. <http://dx.doi.org/10.1371/journal.pone.0147206>. – DOI 10.1371/journal.pone.0147206
- [43] DHURI, Dattaraj B. ; HANASOGE, Shravan M. ; PERLEKAR, Prasad ; ROBERTSSON, Johan O. A.: Numerical analysis of the lattice Boltzmann method for simulation of linear acoustic waves. In: *Phys. Rev. E* 95 (2017), Apr, 043306. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.95.043306>. – DOI 10.1103/PhysRevE.95.043306
- [44] CONRAD, Daniel ; SCHNEIDER, Andreas ; BÖHLE, Martin: Accuracy of non-Newtonian Lattice Boltzmann simulations. In: *Journal of Computational Physics* 301 (2015), 218 - 229. <http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2015.07.066>. – DOI <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2015.07.066>. – ISSN 0021–9991
- [45] YAGUB, A. ; FARHAT, H. ; KONDARAJU, S. ; SINGH, T.: A lattice Boltzmann model for substrates with regularly structured surface roughness. In: *Journal of Computational Physics* 301 (2015), 402 - 414. <http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2015.08.040>. – DOI <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2015.08.040>. – ISSN 0021–9991
- [46] CAIAZZO, Alfonso ; JUNK, Michael: Boundary forces in lattice Boltzmann: Analysis of Momentum Exchange algorithm. In: *Computers & Mathematics with Applications* 55 (2008), Nr. 7, 1415 - 1423. <http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2007.08.004>. – DOI <http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2007.08.004>. – ISSN 0898–1221
- [47] ANDERL, Daniela ; BOGNER, Simon ; RAUH, Cornelia ; RÜDE, Ulrich ; DELGADO, Antonio: Free Surface Lattice Boltzmann with Enhanced Bubble Model. In: *Comput. Math. Appl.* 67 (2014), Februar, Nr. 2, 331–339. <http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2013.06.007>. – DOI 10.1016/j.camwa.2013.06.007. – ISSN 0898–1221
- [48] GALINDO-TORRES, S.A. ; SCHEUERMANN, A. ; LI, L. ; PEDROSO, D.M. ; WILLIAMS, D.J.: A Lattice Boltzmann model for studying transient effects during imbibition–drainage cycles in unsaturated soils. In: *Computer Physics Communications* 184 (2013), Nr. 4, 1086 - 1093. <http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/j.cpc.2012.11.015>. – DOI <http://dx.doi.org/10.1016/j.cpc.2012.11.015>. – ISSN 0010–4655

- [49] MADADI, Mahyar ; SAHIMI, Muhammad: Lattice Boltzmann simulation of fluid flow in fracture networks with rough, self-affine surfaces. In: *Phys. Rev. E* 67 (2003), Feb, 026309. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.67.026309>. – DOI 10.1103/PhysRevE.67.026309
- [50] LI, Zheng ; YANG, Mo ; ZHANG, Yuwen: A coupled lattice Boltzmann and finite volume method for natural convection simulation. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 70 (2014), S. 864 – 874. – ISSN 0017–9310
- [51] GUANGWU, Yan: A lagrangian lattice boltzmann method for euler equations. In: *Acta Mechanica Sinica* 14 (1998), Nr. 2, 186–192. <http://dx.doi.org/10.1007/BF02487753>. – DOI 10.1007/BF02487753
- [52] GUANGWU, Yan: A Lattice Boltzmann Equation for Waves. In: *Journal of Computational Physics* 161 (2000), Nr. 1, 61 - 69. <http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1006/jcph.2000.6486>. – DOI <http://dx.doi.org/10.1006/jcph.2000.6486>. – ISSN 0021–9991
- [53] SHI, Baochang ; GUO, Zhaoli: Lattice Boltzmann simulation of some nonlinear convection–diffusion equations. In: *Computers & Mathematics with Applications* 61 (2011), Nr. 12, 3443 - 3452. <http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2011.01.041>. – DOI <http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2011.01.041>. – ISSN 0898–1221
- [54] SUCCI, S. ; BENZI, R.: Lattice Boltzmann equation for quantum mechanics. In: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 69 (1993), Nr. 3, 327 - 332. [http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/0167-2789\(93\)90096-J](http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/0167-2789(93)90096-J). – DOI [http://dx.doi.org/10.1016/0167-2789\(93\)90096-J](http://dx.doi.org/10.1016/0167-2789(93)90096-J). – ISSN 0167–2789
- [55] LAPITSKI, Denis ; DELLAR, Paul J.: Convergence of a three-dimensional quantum lattice Boltzmann scheme towards solutions of the Dirac equation. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 369 (2011), Nr. 1944, 2155–2163. <http://dx.doi.org/10.1098/rsta.2011.0017>. – DOI 10.1098/rsta.2011.0017. – ISSN 1364–503X
- [56] SUCCI, Sauro: Numerical solution of the Schrödinger equation using discrete kinetic theory. In: *Phys. Rev. E* 53 (1996), Feb, 1969–1975. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.53.1969>. – DOI 10.1103/PhysRevE.53.1969
- [57] SUCCI, S. ; BENZI, R.: Lattice Boltzmann equation for quantum mechanics.

- In: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 69 (1993), Nr. 3, 327 - 332. [http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/0167-2789\(93\)90096-J](http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/0167-2789(93)90096-J). – DOI [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(93\)90096-J](https://doi.org/10.1016/0167-2789(93)90096-J). – ISSN 0167-2789
- [58] VERSCHAEVE, Joris C. ; MÜLLER, Bernhard: A curved no-slip boundary condition for the lattice Boltzmann method. In: *Journal of Computational Physics* 229 (2010), Nr. 19, 6781 - 6803. <http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.05.022>. – DOI <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.05.022>. – ISSN 0021-9991
- [59] MEI, Renwei ; LUO, Li-Shi ; SHYY, Wei: An Accurate Curved Boundary Treatment in the Lattice Boltzmann Method. In: *Journal of Computational Physics* 155 (1999), Nr. 2, 307 - 330. <http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1006/jcph.1999.6334>. – DOI <https://doi.org/10.1006/jcph.1999.6334>. – ISSN 0021-9991
- [60] MOHAMAD, A. A. ; KUZMIN, A.: A critical evaluation of force term in lattice Boltzmann method, natural convection problem. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 53 (2010), Nr. 5, 990 - 996. <http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2009.11.014>. – DOI <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2009.11.014>. – ISSN 0017-9310
- [61] BROWNLEE, R. A. ; GORBAN, A. N. ; LEVESLEY, J.: Stability and stabilization of the lattice Boltzmann method. In: *Phys. Rev. E* 75 (2007), Mar, 036711. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.75.036711>. – DOI 10.1103/PhysRevE.75.036711
- [62] Implicit velocity correction-based immersed boundary-lattice Boltzmann method and its applications. In: *Journal of Computational Physics* 228 (2009), Nr. 6, 1963 - 1979. <http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jcp.2008.11.019>. – DOI <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2008.11.019>. – ISSN 0021-9991
- [63] STRAND, Kyle T. ; FEICKERT, Aaron J. ; WAGNER, Alexander J.: Fourth-order analysis of a diffusive lattice Boltzmann method for barrier coatings. In: *Phys. Rev. E* 95 (2017), Jun, 063311. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.95.063311>. – DOI 10.1103/PhysRevE.95.063311
- [64] DU, Rui ; SHI, Baochang ; CHEN, Xingwang: Multi-relaxation-time lattice Boltzmann model for incompressible flow. In: *Physics Letters A* 359 (2006), Nr.

- 6, 564 - 572. <http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/j.physleta.2006.07.074>. – DOI <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2006.07.074>. – ISSN 0375–9601
- [65] DELLAR, Paul J.: Lattice Kinetic Formulation for Ferrofluids. In: *Journal of Statistical Physics* 121 (2005), Nr. 1, 105–118. <http://dx.doi.org/10.1007/s10955-005-8056-0>. – DOI 10.1007/s10955-005-8056-0. – ISSN 1572–9613
- [66] GALINDO-TORRES, S. A. ; SCHEUERMANN, A.: A Lattice Boltzmann solver for Maxwell equations in dielectric media. In: *Journal of Geophysics and Engineering (submitted)* (2015)
- [67] NOURGALIEV, R.R. ; DINH, T.N. ; THEOFANOUS, T.G. ; JOSEPH, D.: The lattice Boltzmann equation method: theoretical interpretation, numerics and implications. In: *International Journal of Multiphase Flow* 29 (2003), Nr. 1, 117 - 169. [http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/S0301-9322\(02\)00108-8](http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/S0301-9322(02)00108-8). – DOI [https://doi.org/10.1016/S0301-9322\(02\)00108-8](https://doi.org/10.1016/S0301-9322(02)00108-8). – ISSN 0301–9322
- [68] LEE, Taehun ; LIN, Ching-Long: A Stable Discretization of the Lattice Boltzmann Equation for Simulation of Incompressible Two-phase Flows at High Density Ratio. In: *J. Comput. Phys.* 206 (2005), Juni, Nr. 1, 16–47. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2004.12.001>. – DOI 10.1016/j.jcp.2004.12.001. – ISSN 0021–9991
- [69] MCNAMARA, Guy R. ; ZANETTI, Gianluigi: Use of the Boltzmann Equation to Simulate Lattice-Gas Automata. In: *Phys. Rev. Lett.* 61 (1988), Nov, 2332–2335. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.61.2332>. – DOI 10.1103/PhysRevLett.61.2332
- [70] MOHAMAD, A. A.: *Lattice Boltzmann Method*. London : Springer, 2011
- [71] MENG, Jianping ; ZHANG, Yonghao: Accuracy analysis of high-order lattice Boltzmann models for rarefied gas flows. In: *Journal of Computational Physics* 230 (2011), Nr. 3, 835 - 849. <http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2010.10.023>. – DOI <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2010.10.023>. – ISSN 0021–9991
- [72] NOLTING, Wolfgang: *Grundkurs Theoretische Physik 3*. Bd. 8. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
- [73] STRANG, Gilbert: On the construction and comparison of difference schemes. In: *SIAM J. Num. Anal* 5 (1968), September, Nr. 3, S. 506–

517. <http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1137/0705041>. – DOI <https://doi.org/10.1137/0705041>
- [74] GUO, Zhaoli ; ZHENG, Chuguang ; ZHAO, T. S.: A Lattice BGK Scheme with General Propagation. In: *Journal of Scientific Computing* 16 (2001), Dec, Nr. 4, 569–585. <http://dx.doi.org/10.1023/A:1013280900427>. – DOI 10.1023/A:1013280900427. – ISSN 1573–7691
- [75] SANKARANARAYANAN, K. ; G. KEVREKIDIS, I ; SUNDARESAN, Sankaran: Analysis of Drag and Virtual Mass Forces in Bubbly Suspensions Using an Implicit Formulation of the Lattice Boltzmann Method. In: *Journal of Fluid Mechanics* 452 (2002), 02, S. 61 – 96
- [76] STERLING, James D. ; CHEN, Shiyi: Stability Analysis of Lattice Boltzmann Methods. In: *Journal of Computational Physics* 123 (1996), Nr. 1, 196 - 206. <http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1006/jcph.1996.0016>. – DOI <http://dx.doi.org/10.1006/jcph.1996.0016>. – ISSN 0021–9991
- [77] BROWNLEE, R. A. ; GORBAN, A. N. ; LEVESLEY, J.: Stabilization of the lattice Boltzmann method using the Ehrenfests' coarse-graining idea. In: *Phys. Rev. E* 74 (2006), S. 037703
- [78] BROWNLEE, R. A. ; GORBAN, A. N. ; LEVESLEY, J.: Stability and stabilization of the lattice Boltzmann method. In: *Phys. Rev. E* 75 (2007), S. 036711
- [79] SERVAN-CAMAS, Borja ; TSAI, Frank T.-C.: Lattice Boltzmann method with two relaxation times for advection–diffusion equation: Third order analysis and stability analysis. In: *Advances in Water Resources* 31 (2008), Nr. 8, 1113 - 1126. <http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/j.advwatres.2008.05.001>. – DOI <http://dx.doi.org/10.1016/j.advwatres.2008.05.001>. – ISSN 0309–1708
- [80] GORBAN, Alexander N. ; PACKWOOD, David J.: ENHANCEMENT OF THE STABILITY OF LATTICE BOLTZMANN METHODS BY DISSIPATION CONTROL. In: *Physica A* 414 (2014), S. 285 – 299
- [81] SHI, Baochang ; GUO, Zhaoli: Lattice Boltzmann model for nonlinear convection-diffusion equations. In: *Phys. Rev. E* 79 (2009), Jan, 016701. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.79.016701>. – DOI 10.1103/PhysRevE.79.016701
- [82] HAYT, William: *Engineering Electromagnetics*. 4. McGraw Hill, 1981

- [83] COSTEN, Furnie ; BÉRENGER, Jean Pierre ; BROWN, Anthony K.: Comparison of FDTD hard source with FDTD soft source and accuracy assessment in debye media. In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 57 (2009), Nr. 7, S. 2014–2022. <http://dx.doi.org/10.1109/TAP.2009.2021882>. – DOI 10.1109/TAP.2009.2021882. – ISSN 0018–926X
- [84] KOLE, J. S. ; FIGGE, M. T. ; DE RAEDT, H.: Higher-order unconditionally stable algorithms to solve the time-dependent Maxwell equations. In: *Phys. Rev. E* 65 (2002), Jun, 066705. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.65.066705>. – DOI 10.1103/PhysRevE.65.066705
- [85] KOLE, J. S. ; FIGGE, M. T. ; DE RAEDT, H.: Unconditionally stable algorithms to solve the time-dependent Maxwell equations. In: *Phys. Rev. E* 64 (2001), Nov, 066705. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.64.066705>. – DOI 10.1103/PhysRevE.64.066705
- [86] WATSON, Neville ; D IRWIN, Garth: Accurate and stable electromagnetic transient simulation using root-matching techniques. In: *International Journal of Electrical Power & Energy Systems* 21 (1999), 03, S. 225–234. [http://dx.doi.org/10.1016/S0142-0615\(98\)00038-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0142-0615(98)00038-6). – DOI 10.1016/S0142-0615(98)00038-6
- [87] RAEDT, H. D. ; MICHELSEN, K. ; KOLE, J. S. ; FIGGE, M. T.: Solving the Maxwell equations by the Chebyshev method: a one-step finite-difference time-domain algorithm. In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 51 (2003), Nov, Nr. 11, S. 3155–3160. <http://dx.doi.org/d>. – DOI d. – ISSN 0018–926X
- [88] S. YEE, Kane: Numerical Solution of Initial Boundary Value Problem Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media. In: *IEEE Trans. Antennas and Propagation* AP-14 (1966), 06, S. 302–307. <http://dx.doi.org/10.1109/TAP.1966.1138693>. – DOI 10.1109/TAP.1966.1138693
- [89] HAUSER, A. ; VERHEY, J. L.: Comparison of the lattice-Boltzmann model with the finite-difference time-domain method for electrodynamics. In: *Phys. Rev. E* 99 (2019), Mar, 033301. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.99.033301>. – DOI 10.1103/PhysRevE.99.033301
- [90] KARLIN, Iliya V. ; SUCCI, S.: Equilibria for discrete kinetic equations. In: *Phys. Rev. E* 58 (1998), Oct, R4053–R4056. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.58.R4053>. – DOI 10.1103/PhysRevE.58.R4053

- [91] ATIF, Mohammad ; KOLLURU, Praveen K. ; THANTANAPALLY, Chakradhar ; ANSUMALI, Santosh: Essentially Entropic Lattice Boltzmann Model. In: *Phys. Rev. Lett.* 119 (2017), Dec, 240602. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.240602>. – DOI 10.1103/PhysRevLett.119.240602
- [92] WANG, Jinku ; WANG, Moran ; LI, Zhixin: A lattice Boltzmann algorithm for fluid–solid conjugate heat transfer. In: *International Journal of Thermal Sciences* 46 (2007), Nr. 3, 228 - 234. <http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2006.04.012>. – DOI <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2006.04.012>. – ISSN 1290–0729
- [93] HILL, R M. ; DISSADO, L A.: Debye and non-Debye relaxation. In: *Journal of Physics C: Solid State Physics* 18 (1985), jul, Nr. 19, 3829–3836. <http://dx.doi.org/10.1088/0022-3719/18/19/021>. – DOI 10.1088/0022-3719/18/19/021
- [94] COLE, Kenneth S. ; COLE, Robert H.: Dispersion and Absorption in Dielectrics I. Alternating Current Characteristics. In: *J. Chem. Phys.* 9 (1941), S. 341. <http://dx.doi.org/10.1063/1.1750906>. – DOI 10.1063/1.1750906
- [95] KREWER, F. ; MORGAN, F. ; O’HALLORAN, M.: Development of Accurate Multi-Pole Debye Functions for Electromagnetic Tissue Modelling Using a Genetic Algorithm. In: *Progress In Electromagnetics Research Letters* 43 (2013), S. 137–147. <http://dx.doi.org/10.2528/PIERL13091107>. – DOI 10.2528/PIERL13091107
- [96] *SYNCHRONY 2 Cochlear Implant.* <https://www.medel.com/hearing-solutions/cochlear-implants/synchrony2>. Version: 2020
- [97] GREENWOOD, Donald D.: A cochlear frequency-position function for several species—29 years later. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 87 (1990), Nr. 2592. <http://dx.doi.org/10.1121/1.399052>. – DOI 10.1121/1.399052
- [98] *Cochlea Implants for the Deaf and Severely Hard of Hearing.* <https://www.leica-microsystems.com/science-lab/cochlea-implants-for-the-deaf-and-severely-hard-of-hearing>. Version: 2009
- [99] BOOGERT, Thomas van d. ; HOOF, Marc van ; HANDSCHUH, Stephan ; GLUECKERT, Rudolf ; GUINAND, Nils ; GUYOT, Jean-Philippe ; KINGMA, Herman ; PEREZ-FORNOS, Angelica ; SEPPEN, Bart ; JOHNSON CHACKO,

- Lejo ; SCHROTT-FISCHER, Anneliese ; BERG, Raymond van d.: Optimization of 3D-Visualization of Micro-Anatomical Structures of the Human Inner Ear in Osmium Tetroxide Contrast Enhanced Micro-CT Scans. In: *Frontiers in Neuroanatomy* 12 (2018), 41. <http://dx.doi.org/10.3389/fnana.2018.00041>. – DOI 10.3389/fnana.2018.00041. – ISSN 1662–5129
- [100] BRUMMER, S. B. ; TURNER, M. J.: Electrochemical considerations for safe electrical stimulation of the nervous system with platinum electrodes. In: *IEEE Trans Biomed Eng* 24 (1977), S. 59–63
- [101] MILLER, A. L. ; SMITH, D. W. ; PFINGST, B. E.: Across-species comparisons of psychophysical detection thresholds for electrical stimulation of the cochlea: II. Strength-duration functions for single, biphasic pulses. In: *Hear Res* 135 (1999), S. 47–55
- [102] ZHOU, Ning ; DONG, Lixue ; GALVIN, John J.: A behavioral method to estimate charge integration efficiency in cochlear implant users. In: *Journal of Neuroscience Methods* 342 (2020), 108802. <http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jneumeth.2020.108802>. – DOI <https://doi.org/10.1016/j.jneumeth.2020.108802>. – ISSN 0165–0270
- [103] HARTMANN, R. ; TOPP, G. ; KLINKE, R.: Discharge patterns of cat primary auditory fibers with electrical stimulation of the cochlea. In: *Hear Res* 13 (1984), S. 47–62. [http://dx.doi.org/10.1016/0378-5955\(84\)90094-7](http://dx.doi.org/10.1016/0378-5955(84)90094-7). – DOI 10.1016/0378–5955(84)90094–7
- [104] JAVEL, R. K. Shepherdand E.: Electrical stimulation of the auditory nerve: II. Effect of stimulus waveshape on single fibre response properties. In: *Hear Res* 130 (1999). [http://dx.doi.org/10.1016/s0378-5955\(99\)00011-8](http://dx.doi.org/10.1016/s0378-5955(99)00011-8). – DOI 10.1016/s0378–5955(99)00011–8
- [105] BRAUN, Katharina ; WALKER, Kevin ; SÜRTH, Werner ; LÖWENHEIM, Hubert ; TROPITZSCH, Anke: Triphasic Pulses in Cochlear Implant Patients With Facial Nerve Stimulation. In: *Otology & Neurotology* 40 (2019), S. 1268–1277
- [106] KRUSCHINSKI, Carsten ; WEBER, Benno P. ; PABST, Reinhard: Clinical Relevance of the Distance Between the Cochlea and the Facial Nerve in Cochlear Implantation. In: *Otology & Neurotology* 24 (2003), S. 823–827
- [107] NOGUEIRA, W. ; SCHURZIG, D. ; BÜCHNER, A. ; PENNINGER, R. T. ; WÜRFEL, W.: Validation of a Cochlear Implant Patient-Specific Model of the Voltage Distribution in a Clinical Setting. In: *Front Bioeng Biotechnol*

- 4 (2016), S. 84. <http://dx.doi.org/10.3389/fbioe.2016.00084>. – DOI 10.3389/fbioe.2016.00084
- [108] FRIJNS, J. H. ; SNOO, S. L. ; SCHOONHOVEN, R.: Potential distributions and neural excitation patterns in a rotationally symmetric model of the electrically stimulated cochlea. In: *Hear Res* 87 (1995). [http://dx.doi.org/10.1016/0378-5955\(95\)00090-q](http://dx.doi.org/10.1016/0378-5955(95)00090-q). – DOI 10.1016/0378-5955(95)00090-q
- [109] INGUVA, C. ; WONG, P. ; SUE, A. ; MCEWAN, A. ; CARTER, P.: Frequency-dependent simulation of volume conduction in a linear model of the implanted cochlea. In: *2015 7th International IEEE/EMBS Conference on Neural Engineering (NER)*, 2015. – ISSN 1948-3554, S. 426-429
- [110] RATTAY, Frank: Ways to approximate current-distance relations for electrically stimulated fibers. In: *Journal of Theoretical Biology* 125 (1987), Nr. 3, 339 - 349. [http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/S0022-5193\(87\)80066-8](http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/S0022-5193(87)80066-8). – DOI [https://doi.org/10.1016/S0022-5193\(87\)80066-8](https://doi.org/10.1016/S0022-5193(87)80066-8). – ISSN 0022-5193
- [111] FRIJNS, Johan H. ; BRIAIRE, Jeroen J. ; SCHOONHOVEN, Ruurd: Integrated use of volume conduction and neural models to simulate the response to cochlear implants. In: *Simulation Practice and Theory* 8 (2000), Nr. 1, S. 75 - 97. [http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/S0928-4869\(00\)00008-2](http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/S0928-4869(00)00008-2). – DOI [https://doi.org/10.1016/S0928-4869\(00\)00008-2](https://doi.org/10.1016/S0928-4869(00)00008-2). – ISSN 0928-4869
- [112] VAN GENDT, M.J. ; BRIAIRE, J.J. ; KALKMAN, R.K. ; FRIJNS, J.H.M.: A fast, stochastic, and adaptive model of auditory nerve responses to cochlear implant stimulation. In: *Hearing Research* 341 (2016), 130 - 143. <http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/j.heares.2016.08.011>. – DOI <https://doi.org/10.1016/j.heares.2016.08.011>. – ISSN 0378-5955
- [113] Current focussing in cochlear implants: An analysis of neural recruitment in a computational model. In: *Hearing Research* 322 (2015), 89 - 98. <http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/j.heares.2014.12.004>. – DOI <https://doi.org/10.1016/j.heares.2014.12.004>. – ISSN 0378-5955. – Lasker Award
- [114] BEAN, Bruce P.: The action potential in mammalian central neurons. In: *Nat Rev Neurosci* 8 (2007), S. 451-465. <http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1038/nrn2148>. – DOI <https://doi.org/10.1038/nrn2148>

- [115] FOUNDATION, IT'IS: *Tissue Properties Database V3.1*. <http://dx.doi.org/10.13099/VIP21000-03-1>. Version: 2018
- [116] AL., Gernot S.: High-resolution numerical model of the middle and inner ear for a detailed analysis of radio frequency absorption. In: *Phys. Med. Biol.* 52 (2007), S. 1771. <http://dx.doi.org/10.1088/0031-9155/52/7/001>. – DOI 10.1088/0031-9155/52/7/001
- [117] BAUMANN, S. B. ; WOZNY, D. R. ; KELLY, S. K. ; MENO, F. M.: The electrical conductivity of human cerebrospinal fluid at body temperature. In: *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* 44 (1997), March, Nr. 3, S. 220–223. <http://dx.doi.org/10.1109/10.554770>. – DOI 10.1109/10.554770. – ISSN 1558–2531
- [118] BADREDDINE, Ali H. ; JORDAN, Tomas ; BIGIO, Irving J.: Real-time imaging of action potentials in nerves using changes in birefringence. In: *Biomed. Opt. Express* 7 (2016), May, Nr. 5, S. 1966–1973. <http://dx.doi.org/10.1364/BOE.7.001966>. – DOI 10.1364/BOE.7.001966
- [119] MILLER, Charles A. ; ABBAS, Paul J. ; ROBINSON, Barbara K. ; RUBINSTEIN, Jay T. ; MATSUOKA, Akihiro J.: Electrically evoked single-fiber action potentials from cat: responses to monopolar, monophasic stimulation. In: *Hear Res* 130 (1999), Nr. 1, 197 - 218. [http://dx.doi.org/10.1016/S0378-5955\(99\)00012-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0378-5955(99)00012-X). – DOI 10.1016/S0378-5955(99)00012-X. – ISSN 0378–5955
- [120] JOSHI, Suyash N. ; DAU, Torsten ; EPP, Bastian: A Model of Electrically Stimulated Auditory Nerve Fiber Responses with Peripheral and Central Sites of Spike Generation. In: *Journal of the Association for Research in Otolaryngology* 18 (2017), Apr, Nr. 2, 323–342. <http://dx.doi.org/10.1007/s10162-016-0608-2>. – DOI 10.1007/s10162-016-0608-2. – ISSN 1438–7573
- [121] PFINGST, B. E. ; DEHAAN, D. R. ; HOLLOWAY, L. A.: Stimulus features affecting psychophysical detection thresholds for electrical stimulation of the cochlea. I: Phase duration and stimulus duration. In: *J Acoust Soc Am* 90 (1991). <http://dx.doi.org/10.1121/1.401665>. – DOI 10.1121/1.401665
- [122] SHANNON, R. V.: Threshold and loudness functions for pulsatile stimulation of cochlear implants. In: *Hear Res* 18 (1985). [http://dx.doi.org/10.1016/0378-5955\(85\)90005-x](http://dx.doi.org/10.1016/0378-5955(85)90005-x). – DOI 10.1016/0378-5955(85)90005-x
- [123] ZENG, F. G. ; GALVIN, J. J. ; ZHANG, C.: Encoding loudness by electric

- stimulation of the auditory nerve. In: *Neuroreport* 9 (1998). <http://dx.doi.org/10.1097/00001756-199806010-00033>. – DOI 10.1097/00001756-199806010-00033
- [124] DiNINO, Mishaela ; O'BRIEN, Gabrielle ; BIERER, Steven M. ; JAHN, Kelly N. ; ARENBERG, Julie G.: The Estimated Electrode-Neuron Interface in Cochlear Implant Listeners Is Different for Early-Implanted Children and Late-Implanted Adults. In: *Journal of the Association for Research in Otolaryngology* 20 (2019), Jun, Nr. 3, S. 291–303. <http://dx.doi.org/10.1007/s10162-019-00716-4>. – DOI 10.1007/s10162-019-00716-4. – ISSN 1438-7573
- [125] BINGABR, Mohamed ; ESPINOZA-VARAS, Blas ; LOIZOU, Philipos C.: Simulating the effect of spread of excitation in cochlear implants. In: *Hear Res* 241 (2008), Nr. 1, 73 - 79. <http://dx.doi.org/10.1016/j.heares.2008.04.012>. – DOI 10.1016/j.heares.2008.04.012. – ISSN 0378-5955
- [126] FRIJNS, Johan ; KALKMAN, Randy ; BRIAIRE, Jeroen: Stimulation of the Facial Nerve by Intracochlear Electrodes in Otosclerosis: A Computer Modeling Study. In: *Otology & Neurotology* 30 (2009), S. 1168–1174. <http://dx.doi.org/10.1097/MAO.0b013e3181b12115>. – DOI 10.1097/MAO.0b013e3181b12115
- [127] SHANNON, Robert V.: Threshold and loudness functions for pulsatile stimulation of cochlear implants. In: *Hear Res* 18 (1985), Nr. 2, 135 - 143. [http://dx.doi.org/10.1016/0378-5955\(85\)90005-X](http://dx.doi.org/10.1016/0378-5955(85)90005-X). – DOI 10.1016/0378-5955(85)90005-X. – ISSN 0378-5955

Ehrenerklärung

Ich versichere hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe; verwendete fremde und eigene Quellen sind als solche kenntlich gemacht.

Ich habe insbesondere nicht wissentlich:

- Ergebnisse erfunden oder widersprüchliche Ergebnisse verschwiegen,
- statistische Verfahren absichtlich missbraucht, um Daten in ungerechtfertigter Weise zu interpretieren,
- fremde Ergebnisse oder Veröffentlichungen plagiiert,
- fremde Forschungsergebnisse verzerrt wiedergegeben.

Mir ist bekannt, dass Verstöße gegen das Urheberrecht Unterlassungs- und Schadensersatzansprüche des Urhebers sowie eine strafrechtliche Ahndung durch die Strafverfolgungsbehörden begründen kann.

Ich erkläre mich damit einverstanden, dass die Arbeit ggf. mit Mitteln der elektronischen Datenverarbeitung auf Plagiate überprüft werden kann.

Die Arbeit wurde bisher weder im Inland noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form als Dissertation eingereicht und ist als Ganzes auch noch nicht veröffentlicht.

Magdeburg, 1. Juni 2021