MATHESIS THEOREMATICA PROBLEMATICA ET DEFINITIVA

SECVNDVM

ELEMENTA MATHESEOS ILLVSTRIS VVOLFII

CONSCRIPTA

A

IOHANNE FRIDERICO RÜBELIO
PHIL. ET MED. CAND.

VITEMBERGAE
Sumtibus JOANNIS JOACHIMI AHLFELDII.
MDCCXXXV.

M

15.

GENEROSISSIMO

ATQVE

EXCELLENTISSIMO DOMINO

DOMINO

ALEXANDRO

DE SCHMIDBERG

DOMINO DE RASDORFF

ET

GABLENTZ etc.

MAXIMO LITERARVM LITERATORVMQVE

MEACENATI

ATQVE

DOMINO MEO PERINDVLGENTI.

GENEROSISSIME
ATQVE
EXCELLENTISSIME DOMINE
AC
MAECENAS SVBMISSE
VENERANDE,

Quam in TE ſuſpicit optimus quisque et admiratur clementiam, eam uero, ſi quis alius, ego certe uberrime multisque modis ſum expertus. Ex quo enim Generoſos TVOS ampliſſimaeque ſpei Filios in Matheſi inſtruere, TEque ſimul coram, praeſtita clientis obſequentia, ſalutare mihi contigit, dubitaui ſemper, magis ne *Tuam* exquiſitam in Mathematicis ſcientiam, eruditionemnemque raram uenerarer, an illam, qua omnes literarum maxime cultores, foues et amplecteris munificentiam exosculärer. Id certe omni asseueratione affirmare, me nondum quempiam, illustri generosoque loco natum, inuenisse, qui TIBI uel eruditione, uel pietate, non dicam anteferri, sed aequiparari saltem, ullo modo queat. Praesens ipse enim et coram uidi, nec uidi modo, sed admiratus quoque sum in pietatis studio feruorem, admirabilemque rerum et diuinarum et humanarum, Mathematum cumprimis, peritiam suspexi. Quod quidem, non inficior, me nunc induxisse ut hanc Mathesin Theorematicam Problematicam et Definitiuam Generoso TVO Nomini inscriberem, certissima spe fretus, fore, ut quicquid huius tandem scriptionis est, perclementer accipias. Non aliter hunc meum conatum has pagellas dedicant TIBI, accipi uolo, ac singulare mei erga TE grati deuinctissimique animi documentum. Ita enim me iam tot tantisque beneficiis TIBI reddidisti obligatum, ut tantum me TIBI debere intelligam, quantum uix, ac ne nix quidem, a me praestari potest. Publice itaque meum TIBI obsequium pietatemque comprobo, id ab TE submississime obtestatus, uelis in posterum quoque summo TVO patrocinio me dignari, TVAque clementia me et mea, si quae sunt, studia fouere. Caeterum, non postremum uotorum meorum est, ut TV, DOMINE EXCELLENTISSIME, cum GENEROSISSIMA TVA DOMO, ab omni tem-

temporum iniuria tutus atque incolumis ſemper maneas, ita nunquam religioſi partes clientis deſeram, et praepotentem omnis proſperitatis ſtatorem continuis ſollicitabo precibus, ut Generoſiſſima TVA FAMILIA in TE, tanquam optimo innixa fulcro ſarta tectaque perſiſtat!

GENEROSISSIMI

ATQVE

EXCELLENTISSIMI

NOMINIS TVI

Vittembergae,
Die X Februarii,
M.D.CCXXXV.

deuotiſſimus Cultor
IOHANNES FRIDERICVS RÜBELIVS.

PRAEFATIO.

Cum ſcientiarum quaelibet ſua gaudet utilitate plurimumque ſui cultoribus uel iucunditatis, uel emolumenti pollicetur, tum uero negari non poteſt, diſciplinas mathematicas utilitate ſua facile praeſtare ceteris omnino omnibus, uberrimasque generi humano atque ampliſſimos conciliare fructus: Quod quidem quamuis ſciam negari et pernegari ab iis, qui mathematum nauiter imperiti, omnemque peroſi ſoliditatem, probant nihil, nihilque admirantur, niſi quod incultis ipſorum moribus ſuaeque ſtupiditati eſt conſentaneum, nihilominus ſuum matheſi pretium ſtatuetur a prudentioribus, qui, perſpecta eiusdem praeſtantia, amandam illam percolendamque arbitrantur. Non attinet nunc pluribus commemorare laudes, quibus Mathematicorum antiquiſſimi quique

que et praeſtantiſſimi ſtudium Mathematicum condecorarunt, nec mea hic, nec fortaſſe etiam tua, Lector Benevole, multum refert, operoſius hic uel Euclidis, uel Platonis, uel aliorum honorifica de Matheſi iudicia adduci et conquiri. Quod ſi auctoritate hic ſtandum foret, uereor, ut ſpiſſum volumen aliorum ſententias, quas de Mathematum utilitatibus prodiderunt, complecteretur. Id itaque unum ſatis habeo dixiſſe, tanti referre, diſciplinas mathematicas tractari diligenter et excoli, quanti intereſt, intellectum noſtrum, diuinitus nobis indultum, non obſoleſcere et incultum iacere, ſed acui, ſed perfici et a denſis ignorantiae tenebris liberari. Nemo, opinor, neſcit, vires ingenii noſtri nobis ideo eſſe a Deo conceſſas, ut veritates, alte abſconditas, expiſcaremur, easdemque, in lucem protractas, et noſtrae et aliorum utilitati accommodaremus. Quod quidem ſi uerum eſt, ut omnino eſt, facile intelligis, noſtrarum eſſe partium, eo conniti, ut facultatem a uero falſum, et res cognitas a ſe inuicem internoſcendi nobis comparemus. Qui enim, dic, quaeſo, veritates erues, niſi noueris, a uero falſum diſtinguere? Quum uero ad res a ſe inuicem diſtinguendas uel imprimis requiratur acumen, id quod in philoſophia uberius edocemur, palam eſt, ad ueritates uel inueniendas uel diiudicandas acumine eſſe peropus, neque adeo eo ueritatis ſtudioſum poſſe indigere. Iam uero quum matheſis, nemine, niſi uel omnium rerum ignaro, uel periniquo, diſſentiente, ad acquirendum intellectus acumen cumprimis faciat, conficitur inde, matheſin eſſe illi, qui ueritates abſtruſas indagare cupit, idem, quod lux eſt iis, qui, in ſecturas aerarias deſcendentes, theſauros, alte defoſſos et reconditos, perſcrutantur. Quisquis itaque et cuias fueris, ultro mihi largieris, neque Theologum, neque ICtum, neque Medicum, neque Philoſophum deni-

denique ſine matheſeos ſtudio in ueritatibus perquirendis inoffenſo pede poſſe progredi. Si nimium hoc dictum Tibi, Lector Beneuole uidetur, id unicum adhuc Tibi relinquo expendendum. Nonne uerum eſt, neminem poſſe eruditum eſſe, niſi, quas nouit, ueritates accurate nouerit demonſtrare? Bene, inquies. Sed quid tum poſtea? Si itaque eruditus ſua aſſerta demonſtrare, et ex fundamentis ſuis nexu concatenato deducere debet, facillimo negotio pateſcit, eruditum non poſſe eſſe, niſi qui modum demonſtrandi probe calleat. Neque ſic male, inquies. Sed quid inde? Atqui uero cum Mathematici ſummum demonſtrandi rigorem obſeruent, iique demum arti demonſtrandi aſſuefiant, qui diligentius matheſi operantur, dubitari non poteſt, eruditum, qui demum cunque fuerit, citius quacunque alia re carere poſſe, quam Matheſi. Generatim nunc et uniuerſe cum probatum ſit, quid quantumve proſit eruditis Matheſis, nunc uel maxime commonſtrari poterat, quantae ſit utilitatis Matheſis in phyſicis, quantumque rerum naturalium indagatori proſit exquiſita cognitio Mathematica. Cum uero, hoc quidem argumentum accurate ſatis perque eleganter diſputatum a celeberrimo Frobeſio, meminerim, hic non ero longior. Si uero de ſororio phyſices et Matheſeos nexu dubitaueris adhuc, pone Tibi, quaeſo ob oculos, *uel Neutonios*, *uel Keulios*, *uel Wolfios*, *uel Hambergeros*, at quantos Phyſicos, at quantos Mathematicos! Quoties cogito, Cel. et Excellentiſſimum Hambergerum, incomparabile illud eruditi orbis decus, et Praeceptorem meum nunquam ſatis deuenerandum, quoties cogito exquiſitam ipſius et incredibilem in phyſicis ſcientiam, toties, quid valeat Matheſis in phyſicis, demum peruideo. Nunquam credo, uirum Cel. ad tam exquiſitam, quam Exteri aeque ac Domeſtici obſtupeſcunt, in phyſicis ſcien-

 tiam

tiam peruenturum fuiſſe, niſi ante Mathematum praeceptis ſubactus probe et praecultus fuiſſet. Lege, ſi placet et expende Elementa ipſius phyſices, admiraberis Viri acumen, uidebis, et iam penetraſſe Virum Perſpicaciſſimum quo alios fruſtra aſpiraſſe, accepimus, idque ope cum chymiae, tum Matheſeos inprimis. Conſtat enim, leges adhaeſionis, quas mirae eſſe utilitatis, prudentiores norunr, ab IPSO eſſe inuentas, atque ita propoſitas, ut uel uix, uel ne uix quidem, Medicum ſine ſolida earundem cognitione uel Secretionem, uel Solutionem, uel Evaporationem, uel Sublimationem etc. diſtincte explicare poſſe, credam. Ac dic, Quaeſo qui inueniri poterat utiliſſima illa doctrina de Cohaeſione, ſine exquiſita Mathematum Cognitione? Tota porro doctrina de Coloribus, demonſtrationesque ommnes, in VIRI Celeb. phyſica a §o 446. usque ad §. 469. occurrentes, nec concinnari ſine Mathematica cognitione potuerunt, nec intelliguntur quoque ab eo, qui hoſpes in Matheſi, atque ignarus eſt. Hinc miror, eo procedere potuiſſe audaciae Perlicium quendam, ut calamum ſtringeret contra leges adhaeſionis, a Perſpicaciſſimo HAMBERGERO adinuentas. Sed ſit ita, quo quiſque rei alicuius eſt imperitior, hoc eandem audacius impudentiusque impugnat. Diſce, Diſce, Mi Perlici Matheſin et chymiam, tunc uidebis, quam ſolido fundamento nitantur Leges Adhaeſionis, perſpiesque inſimul earundem momentum et utilitatem, maxime in Medicis; imo experieris diſcrimen inter ueritates Mathematicas et Phyſicas. Vellem, ueritas aut nullos aut peritos certe intelligentesque experietur impugnatores. Ita uero nunc agitur cum dilucidiſſimis quibusque utiliſſimisque ueritatibus, ut imperitiſſimos quosque et iuiquiſſimos aduerſarios nanciſcantur. Id quod mihi lubenter concedent illi, quibus fata Phloſophiae Wolffianae

intro-

introſpexiſſe datum eſt. Cum enim in illa philoſophia ſolide omnia et eleganter demonſtrentur, aduerſarii autem ipſius, Mathematum expertes, nec demonſtrare ipſi ſciant, nec aliorum demonſtrationes capere queant, mirum non eſt, ipſos praeconceptis opinionibus faſcinatos, tanto liuidius et uehementius placita Wolfii, Mathematice et ſolide demonſtrata, inſectari et criminari, quanto minus eadem capiunt, quantoque demonſtrationum mathematicarum ſunt inſuetiores. Sed quorſum haec omnia? Ut intelligas ſcilicet, Lector Beneuole, neque in inueniendis, neque in diiudicandis ueritatibus, neque in defendendis indigere nos poſſe Matheſi, eosque ſe ſatis dare turpiter, qui ſine Matheſi, in phyſicis maxime, tentare quid conſueuerunt. Rideo perſaepe, et non nego, bilem mihi identidem moueri, cum homines uideo ſibi perſuadere, in phyſicis primas deberi, cum tamen Matheſeos ignari; neque ſua aſſerta, Methodo demonſtratiua, ſolide connectant, neque rationibus ſua placita et argumentis communiant.

Praeclari uero homines et digni profecto, qui ex philoſophorum circulis proſcribantur! Sed ſuas ſibi res habere iubebimus hoc hominum genus, ſatis habentes, ſi a prudentioribus concedatur nobis, nihil poſſe eſſe praeſtantius, iucundius nihil, nihil denique felicitati generis humani accommodatius matheſi. Atque haec quidem ſunt, cur ego ſtudium Mathematicum uel inprimis et doceri in Academiis et a ſtudioſis feruidiſſime pertrectari debere, credam. Proinde cum uitae meae rationes nunc ita ferant, ut ſtudioſis Mathematum maxime inſeruire poſſe uidear, nihil intentatum putaui relinquendum, quod ad hoc ſtudium ipſis facillimum reddendum facere quodammodo poterat. Memoriae itaque

et

et captui diſcentium ut conſuleretur, enucleaui definitiones et problemata potiora ex Elementis Wolfianis, idque ita, ut a Wolfio in nonnullis ſeceſſionem fecerim. Quod quidem non ita accipi uolo a quoquam, ac ſi emendare Wolfium, ipſiusque placita meliora reddere inſtituerim; ſed quia ab unius uiri auctoritate pendere non conſueui, hic, quid meum erat punctum, fideliſſime indicaui. Matheſin demonſtratiuam, ſi Deus voluerit, his, quas nunc edo, Definitionibus, Theorematibus et Problematibus propediem ſubiungam.

Caeterum id unicum uoueo, ut, ſicut hoc qualecumque ſcriptum, ita et cetera eruditorum conamina ad Dei gloriam ueritatisque incrementa dirigantur. Vale hiſce, Lector Beneuole, mihique et meis conatibus faue.

Dabam Wittembergae d. Februarii 1735.

CAP. I.

CAP. I.

De
Methodo Mathematica.

§. 1.

Similitudo variorum in conſecutione *ſeriem* conſtituit.

§. 2. Series, ubi ratio ſufficiens obtinet, ſeu uariorum ſimilitudo, quorum alterum rationem ſufficientem alterius continet, *ordo* appellatur.

§. 3. Ordo cogitandi *methodus* vocatur.

§. 4. Ordini ubi a principiis ad principiata continuis ratiociniis progredimur, nomen *Methodi mathematicae* imponitur.

§. 5. *Principium* eſt, quod in ſe continet rationem alterius.

§. 6. *Principiatum* eſt, quod habet rationem ſui in altero.

Conſectarium. 1.

Qualia igitur ſunt principia, talia etiam ſunt principiata.

Conſectar. 2.

Principium ergo continet rationem principiati, adeoque nihil in hoc eſſe poteſt, quod non ſit in illo.

§. 7. *Notio* eſt rei in mente repraeſentatio.

Scholion.

Notio eſt uel clara, uel obſcura, uel diſtincta, uel confuſa, uel adaequata, uel inadaequata.

§. 8. *Clara* dicitur idea, quae ad rem oblatam recognoſcendam ſufficit.

§. 9. *Obſcura* dicitur, quae ad rem oblatam recognoſcendam non ſufficit.

§. 10. *Diſtincta* habetur, ſi notas recenſere valeamus, ex quibus rem oblatam recognoſcis.

§. 11. *Confuſa* eſt notio, ſi notas, ex quibus rem oblatam recognoſcis, recenſere minime ualeas.

§. 12. *Adaequata* dicitur, ſi et notarum, ex quibus componitur, notiones habueris diſtinctas.

§. 13. *Inadaequata* eſt notio, ſi notarum, quae diſtinctam ingrediuntur, non niſi confuſas notiones habueris.

§. 14. *Deſinitio* eſt notio completa et diſtincta, termino cuidam reſpondens, ipſe autem terminus aut res eodem indigitata *Definitum* appellatur.

§. 15. *Definitio realis* eſt notio diſtincta, rei geneſin, hoc eſt, modum quo fieri poteſt exponens.

§. 16. *Axioma* eſt propoſitio theoretica ex unica definitione conceptibilis.

§. 17. *Theorema* denotat propoſitionem theoreticam ex pluribus definitionibus ſumtum.

§. 18. *Problema* eſt propoſitio practica ex pluribus definitionibus deducta.

§. 19. *Poſtulatuu* eſt propoſitio practica ex unica definitione conceptibilis.

§. 20. *Corollarium* eſt propoſitio ex aliis eruta, abſque multa ratiociniorum ambage.

§. 21. *Scholion* eſt propoſitio eam illuſtrans, cui adiicitur.

§. 22. *Hypotheſis* eſt propoſitio, quam tanquam probabilem aſſumimus, ut alia inde concipiantur.

§. 23. *Scientia* eſt habitus aſſerta demonſtarandi, hoc eſt ex principiis çertis et immotis per legitimam conſequentiam inferendi.

§. 24. *Matheſis* eſt ſcientia de quantis.

CAP. II.

De Principiis Arithmeticis.

§. 1.

Arithmetica eſt ſcientia, ex quibusdam numeris datis inueniendi alios, quorum ad cognitos relatio datur.

§. 2. *Vnum* eſt, quod ita eſt aliquid, ut aliud eſſe idem praeterea nequeat.

§. 3. *Vnitas* eſt abſtractum, per quod dicimus unum.

§. 4. *Vnitates eaedem* ſunt, quae per eandem notionem agnoſcuntur, *diuerſae* ſunt, quae agnoſcuntur per diuerſas.

§. 5. *Multitudo* eſt abſtractum, per quod dicuntur plura.

§. 6. *Numerus* dicitur, quicquid refertur ad unitatem. Siue eſt plurium unitatum complexus.

§. 7. *Numerus determinatus* eſt, qui in iam cognitis unitatibus conſtat.

§. 8. *Numerus indeterminatus* eſt, cuius unitates adhuc incognitae ſunt, quantum earum ſint.

§. 9. *Aequalia* ſunt, quorum unum alteri ſalua quantitate ſubſtitui poteſt. *In aequalia* ſunt, ſi pars unius alteri toti ſubſtitui poteſt.

Hypotheſis.

Signum aequale eſt =. nonnulli cum Carteſio adhibent ſignum ſequens ∝.

§. 10. *Maius* eſt, cuius pars alteri toti=lis eſt, *minus* uero quod parti alterius=le. Siue, Maius eſt, ſi partes quantitatis alicuius non omnes, alteri toti quantitati=les ſunt.

Hypotheſis.

Signum Maioritatis eſt >; et Minoritatis < .

§. 11. *Similia* ſunt, quae nullo modo a ſe inuicem poſſuut diſcerni, niſi per praeſentiam duorum uel plurium ſimilium, Diſſimilia ſunt, quae etiam abſente duorum uel plurium ſimilium a ſe inuicem non poſſunt diſcerni.

§. 12. Pars *aliquota* eſt, quae aliquoties repetita integro fit aequalis. Pars uero *aliquanta* eſt, quae repetita aliquoties ſemper uel maior, uel minor eſt, toto.

§. 13. Quantitates *homogeneae* ſunt, quarum una aliquoties ſumta alteram ſuperare poteſt.

§. 14. Quantitates *hetero geneae* ſunt, quarum una aliquoties ſumta alteram ſuperare nequit.

§. 15. Integer eſt numerus, qui refertur ad unitatem tanquam totum ad partem.

§. 16. Numerus fractus eſt, qui refertur ad unitatem, tanquam pars ad totum, dicitur is etiam fractio.

Hypotheſis.

Notae numericae conſtituantur nouem, ut uero non ſolum unitates ſimplices, ſed et decades, centenarios, millenarios etc. indigitare poſſimus, ualor ipſis tribuatur localis.

Scholion.

Scholion.

Vocibus Millionum, Billionum, Trillionum, Quadrillio etc. utimur, ad confusionem euitandam.

Corollarium.

Numerorum partes hoc ordine se excipiunt.

Unitates Decades Centenarii	Simplices
Unitates Decades Centenarii	Millenariorum
Unitates Decades Centenarii	Millionum
Unitates Decades Centenarii	Millenar. Millionum
Unitates Decades Centenarii	Billionum
Unitates Decades Centenarii	Millenarior. billionum
Unitates Decades Centenarii	Trillionum
Unitates Decades Centenarii	Millenar. Trill.
Unitates Decades Centenarii	Quadrillionum etc.

Hypothesis

Quantitates aut numeros indeterminatos litteris Alphabeti minoris, a, b, b etc. uel etiam maioribus A, B, C etc. indigitamus.

Hypothesis.

Fractiones per duos numeros exprimuntur, quorum alter alteri interiecta lineola subscribitur.

§. 17. *Additio* est inuentio alicuius numeri ex duobus uel pluribus homogeneis datis, qui datis iunctim sumtis aequalis est.

Hypothesis.

Signum additionis est +, quod per plus efferri solet.

§. 18. *Subtractio* est inuentio alicuius numeri ex duobus homogeneis datis, qui cum inferiori datorum alteri superiori scil. aequalis est.

Hypothesis.

Signum subtractionis est —, quod per minus efferi solet.

§. 19. *Multiplicatio* est inuentio alicuius numeri ex duobus datis, in quo superior datorum toties continetur, quoties unitas in inferiori.

Hypothesis.

Signum multiplicationis est |·| punctum, quod per multiplicatum effertur.

§. 20. *Diuisio* est inuentio alicuius numeri ex duobus datis, in quo toties continetur unitas, quoties datorum in altero.

Hypothesis.

Signum diuisionis sunt duo puncta |:| quae per diuisum efferri solent.

§. 21. Numerus *par* est, qui bifariam siue per 2. diuidi potest, ut 4. 12. etc.

§. 22. Numerus *impar* est qui a pari unitate differt, ut 3. differt unitate a 2. item a 4.

§. 23. *Mensura numeri* est numerus, qui ipsum metitur, ita 2 et 4. sunt mensurae numeri. Mensura maxima numeri est numerus maximus qui ipsum metitur, ita 4 est mensura maxima numeri 8.

§. 24. *Mensura communis* duorum uel plurium numerorum est numerus, qui singulos sigillatim metitur, ita 3 est communis mensura numerorum 12 et 24. Maxima dicitur, si fuerit numerus maximus, qui omnes metitur, ita 12. est communis mensura maxima numerorum 12 et 24. 3 uero, numerorum 9 et 12.

Axioma. I.

Idem est sibi metipsi aequale.

Theorema. I.

Quantitates homogeneae aut aequales, aut in aequales sunt.

Eheorema II.

Totum est maius, qualibet sua parte.

Theorema. III.

Totum est aequale omnibus suis partibus simul sumtis.

Theorema. IV.

Quae aequalia sunt eidem tertio, ea sunt aequalia inter se.

Theorema. V.

Si aequalibus aequalia addas, aggregata sunt aequalia.

Theorema. VI.

Quod uno aequalium maius est uel minus, illud etiam altero aequalium maius uel minus est.

Theorema. VII.

Si maiori uel minori idem uel aequalia addas, eggregatum prius maius estl posterius uero minus. Quod si maiori, maius et minori minus addas, aggregatum prius maius est, posterius minus.

Theorema. VIII.

Si aequalia ab aequalibus subtrahas quae relinquuntur sunt aequalia.

Theore-

Theorema. IX.

Si a maiore et minore idem, uel aqualia ſubtrahas, reſidium prius maius eſt; poſterius minus.

Theorema. X.

Si aequalia per aequalia multiplices, facta aequalia ſunt.

Theorema. XI.

Si aequalia per aequalia diuidas, quoti aequales ſunt.

Problema. I.

Numerum ſcriptum enunciare, hoc eſt cuilibet characteri ualorem competentem aſſignare.

Reſolutio.

1.) Numerus propoſitus per commata diuidatur in claſſes, tres notas unicuique affigando, initio a dextris facto.

2.) Nota dextima claſſis tertiae notetur lineola transuerſa apici adſcribenda dextima claſſis, quintae duabas; dextima ſeptimae tribus.

3.) Comma ſolitarium per millenarios, lineola transuerſa una per milliones, duae per billiones, tres per trilliones etc. nota uero ſiniſtima claſſis unius cuiusquae per centenarios, media per decades, dextima per unitates enuncietur.

e. gr. $\overset{\prime\prime\prime}{2}$, 125, $47\overset{\prime\prime}{3}$, 613, $57\overset{\prime}{8}$, $43\dot{2}$, 597.

Problema. II.

Numeros quotcunque datos addere.

Reſolutio.

1.) Numeri homogenei ſub homogeneis, hoc eſt, ita ſcribantur, ut unitates, unitatibus, decades decadibus, centenarii centenariis etc. reſpondeant.

2.) Snb iis ducatur linea recta, ne aggregatum cum aggregandis confundatur.

3.) Sigil-

3.) Sigillatim addantur unitates, et ſumma earum ipſis ſubſcribatur.

4.) Quod ſi in ea decades reperiantur, eas decadibus numerorum datorum addi oportet: decadum uero ſumma ſub decadibus collocanda.

5.) Hac operatione, per reliquas numerorum datorum ſeries continuata, habebitur ſumma quaeſita. e. gr.

$$\begin{array}{r} 3578 \\ 524 \\ 63 \\ \hline 4165 \end{array}$$

Problema III.

Examinare additionem, uterum numerus inuentus ſit aequalis omnibus datis ſimul ſumtis, nec ne.

Reſolutio.

1.) Notentur a latere numeri, qui inter addendum ex ſerie qualibet dexteriore in proxime ſiniſteriorem reiiciuntur, et operatione abſoluta addantur, ut numerus nouenariorum inter ſummandum omiſſorum innoteſcat.

2.) Abiiciatur praeterea ex ſumma inuenta nouenarius, quoties fieri poteſt, abiectorumque nouenariorum numerus addatur numero inter ſummandum omiſſorum; quae ſumma una cum numero reſiduo, ſi quis fuerit, probe notetur.

3.) Tandem ex numeris ſummandis, qui omnes tanquam unitates ſpectantur, nouenarius abiiciatur, quoties fieri poteſt, et numerus nouenariorum abiectorum, una cum numero reſiduo, ſi quis fuerit, denuo notetur.

Problema IV.

Numerum minorem e maiore ſubtrahere.

Resolutio.

1.) Numerus minor ea lege maiori subscribatur, ut homogenei homogeneis respondeant, quemadmodum in additione.

2.) Sub numeris hisce ducatur linea recta, ob confusionem euitandam.

3.) Subtrahantur sigillatim unitates ab unitatibus, decades a decadibus, etc. et residua singula loco conueniente infra lineam scribantur, nempe residuum unitatum sub unitatibus, etc.

4.) Quod si nota maior e minore ueniat subtrahenda, ex sinisteriore loco in dexteriorem transferatur unitas, quae hic 10. ualebit, ut subtractio fieri queat. Numerus uero unitate mulctatus puncto notetur, ne ipsum mulctatum, esse obliuiscamur.

5.) Si in loco sinisteriore |0| reperiri contingat, unitas a numero proxime sequente mutuetur, puncto propterea notando, ut ipsum unitate minutum esse constet. Unitas uero illa in locum dexteriorem translata decadis ualorem tuebitur. Quamobrem plures |0| sese insequuntur, omnes hac ratione in nouenarios mutentur, et numerus minor, a quo subtractio fieri debet, decade augeatur, e. gr.

	9800403459
	4743865263
differentia	5056538196
	9800403459

Problema V.

Numerum quendam datum per alium datum multiplicare.

Resolutio.

1.) Multiplicator scribatur sub multiplicando, ut in additione.

2.) Duca-

2.) Ducatur ſub iis linea recta.

3.) Infra hanc ex abaco Pythagorico ſcribantur ſingula producta ex ſingulis multiplicandi notis in unitates multiplicatoris, ſimiliter ex illis in reliquas huius notas, ea quidem lege, ut decades cuiuslibet producti annumerentur producto proxime ſiniſteriori, et productum ex multiplicando in decades multiplicatoris in loco decadum, productum ex multiplicando in centenarios multiplicatoris in loco centenariorum, etc. ſcribere incipiamus; e. gr. 38476

$$\begin{array}{r} 38476 \\ 35 \\ \hline 192380 \\ 115428 \\ \hline 1346660 \end{array}$$

Problema VI.

Lamellas Neperianas parare, quarum ope multiplicationem ac diuiſionem facilius abſoluere licet, quam per abacum Pythagoricum.

Reſolutio.

1.) Ex orichalco, ligno aut charta compacta parentur lamellae oblongae in nouem quadratula diuiſae, quae per diagonales denuo in duo triangula ſingula reſoluantur.

2.) In illis quadratulis ea lege ſcribatur tabula pythagorica, ut notae ſolitariae aut dextrae triangulum dextrum, notae autem ſiniſtrae ſiniſtrum cedat.

Problema VII.

Multiplicare numerum datum per datum alium lamellarum Neperianarum ope.

Resolutio.

1.) Lamellas ita dispone, ut in fronte exhibeant multiplicandum.

2.) Eis ad sinistram iunge lamellam unitatum.

3.) In hac quaere dextimam multiplicatoris notam, et

4.) Ipsi respondentes numeros in quadratulis reliquarum lamellarum ita exscribe, ut in unam summam colligantur numeri in eodem rhombo obuii.

5.) Eodem Modo exscribe numeros reliquis multiplicatoris notis respondentes, et decenter infra factores scribe.

6) Tandem facta haec partialia in unam summam collige: e. gr.

```
   5978
    937
 -------
  41846
 17934
53802
 -------
5601386
```

Problema VIII.

Numerum quemlibet per alium quemcunque, sine abaci Pythagorici subsidio, multiplicare.

Resolutio.

Omne artificium huc redit, ut ex simplo, duplo et decuplo per additionem, subtractionem et mediationem, singula multipla inueniantur. Nimirum numerus quilibet sibimetipsi additus producit sui duplum; addatur huic simplum, summa est numeri dati triplum. Duplum addatur sibimetipsi, aggregatum est numeri dati quadruplum. Medietur decuplum, hoc est, ipse numerus datus [o] auctus prodibit quintuplum. Quintuplo addatur simplum uel duplum, habebitur sextuplum uel septuplum.

Ex

Ex decuplo ſubtrahatur duplum uel ſimplum, reſiduum erit octuplum uel noncuplum. e. gr.

42	342	1plum
	684	2plum
	1368	4plum
	14364	

Problema IX.

Numerum datum per alium minorem diuidere.

Reſolutio.

Caſus I. Si diuiſor unica fuerit nota.

1.) Scribatur is ſub nota diuidendi ſiniſtima, aut, ſi ea minor fuerit, ſub proxime ſequente, ac ope Abaci Pythagorici inueſtigetur, quoties in nota uel notis ſupra ſcriptis contineatur. Numerus, qui hoc indicat, ponatur dextram uerſus poſt lunulam loco quoti.

2.) Quotus ducatur in diuiſorem et productum ex nota uel notis ſupra ſcriptis diuidendi ſubtrahatur, et his deletis, ſi quod fuerit reſiduum, ſupra ſcribatur.

3.) Diuiſor ad notam ſubſequentem uerſus dextram promoueatur, et ope Abaci Pythagorici denuo inueſtigetur, quoties is in notis ſupra ſcriptis contineatur. Reliqua peragantur ut ante.

4) Quod ſi haec operatio per ſingulas diuidendi notas continuetur, quotus inuenietur.

Caſus II. Si diuiſor ex notis pluribus conſtat.

1.) Siniſtima eius nota ſcribatur ſub nota ſiniſtima diuidendi, et reliquae dexteriores ſub proxime ſequentibus uerſus dextram.

2.) Ope abaci Pythagorici inueſtigetur, quoties prima diuiſoris nota in prima diuidendi contineatur.

 3.) Nu-

3) Numerus inuentus ducatur in diuiſorem integrum, et diſpiciatur, utrum factum ex numeris ſupraſcriptis ſubtrahi poſſit, nec ne.

4.) Si ſubtractio fieri queat, ſcribatur is loco quoti poſt lunulam, et ſubtractio actu peragatur. Numeri, ex quibus ſubtractio fit, lineola transuerſa deleantur, et qui reſidui fuerint, ſupraſcribantur. Quod ſi uero ſubtractio non ſuccedat, loco quoti ſumatur numerus unitate uel aliquot unitatibus minor, donec factum ex eo in diuiſorem ad notas diuidendi quam proxime accedat et ex iis auferri queat.

5.) Diuiſor loco uno uerſus dextram promoueatur, et reliqua, ut ante peragantur.

6.) Haec operatio continuetur, donec diuiſor ulterius promoueri nequeat. e. gr.

$$
\begin{array}{r|l}
\cancel{1} & \\
\cancel{2}(1 & \\
\cancel{1}\cancel{4}\cancel{7} & \\
\cancel{7}8\cancel{5}(6 & 245\,\frac{16}{32} \\
\cancel{3}\cancel{2}\cancel{2}\cancel{2} & \\
\cancel{3}\cancel{3} &
\end{array}
$$

Problema X.

Sine Abaci Pythagorici ſubſidio numerum datum diuidere per alium datum.

Reſolutio.

1.) Diuidendo ad dextram more conſueto iungatur lunula, et infra locum quoti ducatur linea recta ſiue horizontalis.

2.) Infra hanc lineam ſcribatur diuiſor, et habes ſimplum, ex ſimplo fac duplum, 3plum, et 4plum, etc. et annota a dextris 1plum, 2plum, etc.

3.) Tot

3.) Tot diuidendi notae, quot diuisor habuerit, comparentur cum illius multiplis modo inuentis; ita enim quotus innotescet.

4.) Is more solito post lunulam scribatur, ipsi uero respondens multiplum diuisoris sub notis diuidendi, quas modo diximus, atque ex his subducatur.

5.) Residuo adiungatur nota diuidendi proxime sequens: reliqua, ut ante peragantur. e. g.

```
385724615 | 2204140
350       |
---       |
 357        175 | 1pl.
 350        350 | 2pl.
 ---        700 | 4pl.
   724
   700
   ---
    246
    175
    ---
     711
     700
     ---
     115
```

Proble m a XI.

Examinare multiplicationem.

Resolutio.

Diuidatur factum per multiplicandum, quotus erit multiplicans; aut factum diuidatur per multiplicantem, quotus erit multiplicandus, si multiplicatio rite fuerit per acta.

Problema XII.

Examinare diuisionem.

Resolu-

Resolutio.

1.) Quotus ducatur in diuisiorem, aut diuisor in quotum.

2.) Facto addatur, si quod a diuisione fuerit residuum.

CAP. III.

De Ratione et Proportione Quantitatum.

§. 37.

Ratio est ea homogeneorum relatio, quae quantitatem unius determinat ex quantitate alterius, sine tertio homogeneo assumto. Homogenea, quae comparantur, dicuntur termini Rationis, et in specie antecedens uocatur, qui ad alterum refertur; consequens uero, ad quem alter refertur.

§. 38. Ratio *maioris inaequalitatis* est, quam habet maius ad minus, e. gr. 6. ad 3. Ratio uero *minoris inaequalitatis* est, quam habet minus ad maius, e. g. 3. ad 6.

§. 39. *Ratio rationalis* dicitur, quae est ut unitas uel numerus rationalis ad numerum rationalem. e. g. ut 3. ad 3. Irrationalis uocatur, quae numeris rationalibus exprimi nequit.

§. 40. *Exponentem rationis* dico quotum, qui ex diuisione antecedentis per consequentem emergit, e. g. rationis 3. ad 2. exponens est $1\frac{1}{2}$ sed rationis 2 ad 3 est $\frac{2}{3}$. Vocatur is etiam *Denominator* s. nomen rationis.

§. 41. Si terminus minor est pars aliquota maioris, Ratio maioris inaequalitatis uocatur *multiplex*, ratio uero minoris inaequalitatis *submultiplex*. Speciatim in casu primo dupla, si exponens 2, tripla, si 3. etc. in altero subdupla, si exponens $\frac{1}{2}$; subtripla, si $\frac{1}{3}$ etc. E. g. 6. ad 2. habet rationem triplam, conti-

continet enim ſenarius binarium ter, contra 2. ad 6. eſt in ratione ſubtripla, continet enim binarius tertiam ſenarii partem.

§. 42. Si terminus maior minorem ſemel continet, ac inſuper partem ipſius aliquotam; ratio maioris inaequalitatis dicitur *ſuper particularis*, ratio minoris inaequalitatis *ſubſuperparticularis*. Speciatim in caſu primo uocatur ſeſquialtera, ſi exponens $1\frac{1}{2}$, ſeſqui tertia, ſi $1\frac{1}{3}$ etc. in altero ſubſesqui altera ſi exponens $\frac{2}{3}$, ſubſesqui tertia ſi $\frac{3}{4}$ etc. e. gr. 3. ad 2. eſt in ratione ſesquialtera, 2. ad 3. in ſubſesquialtera.

§. 43. Si terminus maior minorem ſemel continet ac inſuper partes ipſius aliquot aliquotas, ratio maioris inaequalitatis uocatur *ſuperpartiens*; ratio minoris in aequalitatis *ſubſuperpartiens*. Speciatim in caſu priore dicitur ſuperbipartiens tertias, ſi exponens $1\frac{2}{3}$; ſupertripartiens quartas, ſi $1\frac{3}{4}$; ſuperquadripartiens ſeptimas, ſi $\frac{4}{7}$ etc. in poſteriore ſubſuperbipartiens tertias, ſi exponens $\frac{3}{5}$, ſubſupertripartiens quartas, $\frac{4}{7}$ ſubſuperquadripartiens ſeptimas, ſi $\frac{7}{11}$ etc. E. gr. 5. ad 3. eſt ratio ſuperbipartiens tertias; ſed 3. ad 5. ratio ſubſuperbipartiens tertias.

§. 44. Si terminus maior minorem aliquoties continet, et inſuper partem ipſius inaequalitatis uocatur *multiplex ſuperparticularis*, ratio minoris inaequalitatis *ſubmultiplex ſubſuperparticularis*. Speciatim in caſu primo dicitur duplaſeſquialtera, ſi exponens $2\frac{1}{2}$. triplaſeſquiquarta, ſi $3\frac{1}{4}$ etc. in altero ſubdupla ſubſesquialtera, ſi exponens $\frac{2}{5}$; ſubtripla ſubſesquiquarta, ſi $\frac{4}{13}$ etc. E. gr. 16 ad 5. habet rationem triplam ſesquiquintam; 4. ad 9. rationem ſubduplam ſubſesquiquartam.

§. 45. Denique ſi terminus maior minorem aliquoties continet, ac inſuper aliquot partes ipſius aliquotas; ratio maioris

C inae-

inaequalitatis dicitur *multiplex superpartiens*; ratio minoris inaequalitatis *submultiplex subsuperpartiens*. Speciatim in casu primo uocatur dupla superbipartiens tertias, si exponens; $3\frac{2}{3}$; tripla superquadripartiens septimas, si, $3\frac{4}{7}$ etc. in altero subdupla subsuperbipartiens tertias; si exponens $\frac{3}{8}$ subtripla subsuperquatripartiens septimas, si $\frac{7}{25}$ etc. e. gr. Ratio 25. ad 7. est tripla superquadripartiens septimas; 3. ad 8. subdupla subsuperbipartiens tertias.

§. 46. *Rationes eaedem sunt*, quarum antecedentes ad suos consequentes eodem modo referuntur, hoc est, quarum antecedentes per suos consequentes diuisi dant exponentes aequales.

§. 47. Rationum duarum identitas uel similitudo dicitur proportio.

§. 48. *Proportio continua* est, si consequens primae rationis idem cum antecedente secundae, ut si $3:6=6:12$. *Proportio discreta* uero si consequens primae diuersus ab antecedente secundae, ut si $3:6=4:8$. In proportione continua terminus, qui consequentis primae et antecedentis secundae uicem tuetur, *medius proportionalis* appellatur. Ita terminus 6. est medius proportionalis inter 3. et 12.

Theorema I.

Rationes A : B. et F : G similes eidem tertiae C : D. sunt etiam similes inter se, et similibus similes sunt inter se similes.

Theorema II.

Idem c ad aequalia A et B, et aequalia A et B ad idem C uel etiam aequalia C et D, eandem rationem habent.

Theo-

Theorema III.

Si fuerit A : B = C : D, erit etiam inuertendo B : A = D : C.

Theorema IV.

Partes similes P. et p. eandem rationem habent, ad tota T et t: si tota ad partes eandem rationem habent. partes sunt similes: et tota ad partes similes eandem rationem habent.

Theorema V.

Si quantitates quascunque A et B per eandem tertiam C multiplices; facta D et E sunt inter se ut A et B.

Theorema VI.

Si quantitates quascunque A et B. per eandem tertiam C diuidas; quoti T. et G. sunt, ut A et B inter se.

Theorema VII.

Maius A ad idem C maiorem rationem habet, quam minus B.

Theorema VIII.

Quod ad idem maiorem habet rationem quam alterum, id altero maius est.

Theorema IX.

Idem C ad maius A minorem habet rationem quam ad minus B.

Theorema X.

Ad quod idem maiorem rationem habet quam ad alterum, id altero minus est.

Theorema XI.

Duae quantitates se mutuo multiplicantes, idem factum gignunt.

Theorema XII.

Rationes compositae ex rationibus, quarum singulae singulis aequales sunt, inter se aequales sunt.

CAP. IV.

De Speciebus Arithmeticae in numeris Fractis.

Theorema I.

Si numerator est aequalis denominatori, fractio $\frac{4}{4}$ aequiualet integro; si minor, fractio $\frac{3}{4}$ minor est integro, seu unitate maior est.

Theorema II.

Fractiones homogeneae aequales sunt, quarum numeratores ad suos denominatores eandem rationem habent.

Theorema III.

Fractio maior est, cuius numerator habet rationem maiorem ad denominatorem. Minor uero, cuius numerator habet minorem.

Problema I.

Integros numeros reducere ad fractionem denominatoris dati.

Resolutio.

1.) Multiplicetur numerus integer per denominatorem datum.

2.) Factum scribatur loco numeratoris, ita reperies $3 = \frac{24}{8}$, $5 = \frac{30}{6}$, $4 = \frac{28}{7}$,

Problema II.

Inuenire communem mensuram maximam duorum numerorum.

Resolutio.

1.) Diuidatur numerus maior per minorem.

2.) Diuisor primae diuisionis denuo diuidatur per residuum primae diuisionis.

3.) Simi-

3.) Similiter diuiſor ſecundae diuiſionis diuidatur per reſiduum ſecundae, et ita porro, donec nihil remaneat. Dico ultimum diuiſorem eſſe communem menſuram maximam numerorum datorum. E. gr.. Sint numeri dati 168 et 240, reperietur eorum communis menſura maxima hunc in modum.

240	1)	168	2	72	3
168		72		24	
72		144		3	
		24		72	
				0	

Problema III.

Fractionem datam ad minores terminos reducere, h. e. inuenire fractionem datae aequiualentem, ſed minoribus numeris expreſſam.

Reſolutio.

Diuidatur tam numerator 20, quam denominator 48, per eundem numerum 4, qui utrumque metitur: quoti 5 et 12 componunt fractionem quaeſitam.

Problema IV.

Duas uel plures fractiones datas ad eandem denominationem reducere.

Reſolutio.

Caſus I. Si fractiones duae dentur, quaelibet integra multiplicetur per denominatorem alterius. E. gr. $5)\ \frac{2}{3}\ 3)\ \frac{4}{5}$

$$= \frac{10}{15}\ \frac{12}{15}.$$

Casus II. Si plures dentur, tam numerator, quam denominator unius cuiusque ducatur in factum ex denominatoribus reliquarum. e. gr. $24)\frac{2}{3}\ 12)\frac{1}{6}\ 18)\frac{3}{54} = \frac{48}{72}\ \frac{12}{72}\ \frac{54}{72}$

Problema V.

Fractiones addere.

Resolutio.

1.) Si fractiones datae diuersos denominatores habuerint, reducantur ad eandem.

2.) Addantur numeratores et summae subscribatur denominator communis: e. gr. $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15} = \frac{22}{15} = 1\frac{7}{15}$ $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{3}{4} = \frac{48}{72} + \frac{12}{12} + \frac{54}{72} = \frac{114}{72}\ 1\frac{42}{72} = 1\frac{7}{12}$

Problema VI.

Fractionem datam ex alia data subtrahere.

Resolutio.

Si fractiones datae diuersos habent denominatores, reducantur ad eandem denominationem. Tunc solum numerator unius ex numeratore alterius subducatur; e. gr. $\frac{2}{5} - \frac{3}{7} = \frac{14}{21} - \frac{9}{21} = \frac{5}{21}$.

Problema VII.

Fractionem per fractionem multiplicare.

Resolutio.

Ducatur numerator unius fractionis in numeratorem et denominator unius in denominatorem alterius; facta constituunt fractionem quaesitam. E. gr. $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $\frac{4}{5}\ \frac{3}{7} = \frac{12}{35}$

Problema

Problema VIII.

Fractionem per aliam fractionem diuidere.

Resolutio.

1.) Diuisor inuertatur, e. gr. loco $\frac{2}{3}$ scribe $\frac{3}{2}$

2.) Diuisor inuersus ducatur in diuidendum: quod prodit $\frac{12}{10}$ seu $1\frac{1}{5}$ est quotus quaesitus.

CAP. V.

De Potentiis Numerorum Genesi praesertim ac Analysi Numerorum Quadratorum et Cubicorum.

§. 49.

Si numerus quicunque 2 in se ipsum ducatur, factum 4 *Numerus quadratus*; ipse autem *Radix quadrata appellatur.*

§. 50. Si numerus quadratus 4, per radicem 2 multiplicetur, factum 8 dicitur *Numerus cubicus*, seu *Cubus*, et radix 2, *Radix cubica.*

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Radix
1	4	9	16	25	36	49	64	81	Quadratum
1	8	27	64	125	216	343	512	729	Cubus

§. 51. Radix tam quadrata, quam cubica, dicitur *binomia*, si ex duabus: *trinomia*, si ex tribus; *multinomia* s. *polynomia*, si ex pluribus, quam duabus partibus constat.

Theo-

Theorema I.

Numerus quadratus radicis binomiae componitur ex quadrato partis primae ex facto dupli primae in alteram et ex quadrato partis alterius.

Problema I.

Ex numero quocunque dato radicem quadratam extrahere.

Resolutio.

1.) Numerus propositus distinguatur in classes, binas notas classi unicuique assignando, initio a dexra facto: tot enim erunt partes radicis, quot classes habentur.

2.) Iam cum in classe sinistima reperiatur quadratum notae sinistimae radicis. In tabula radicum, quaeratur numerus quadratus ei, qui classem sinistimam occupat, uel aequalis uel eodem proxime minor, et ex ipso subtrahitur; radix quadrati uero post lunulam scribatur.

3.) Duplicatur quotus, ut ponatur sub nota sinistima classis subsequentis, et inde porro sinistrorsum, si ex notis pluribus constiterit. Inuestigetur nouus quotus per abacum Pythagor. inuentusque scribatur post lunulam: est enim pars secunda radicis.

4.) Idem quotus ponatur sub nota dextima illius classis, et cum illo fiat multiplicatio, et productum ex numero subscripto integro subducatur, ut in diuisione moris est.

5.) Iteretur duplicatio quoti et quidem totius, et operatio iuxta regulam tertiam et quartam in reliquis classibus; prodibit radix quaesita.

5	76	24
4		
1	76	
	44	
	4	
	176	
	0	

Theorema

Theorema II.

Numerus Cubicus radicis binomiae componitur ex numeris cubicis duarum partium, ex facto tripli quadrati partis primae in secundam, et ex facto tripli quadrati partis secundae in primam.

Problema II.

Ex numero dato radicem cubicam extrahere.

Resolutio.

1.) Numerus datus distinguatur in classes, tres notas unicuique assignando, initio a dextris facto. Etenim ex tot notis radix componitur, quot classes emergunt.

2.) In tabula radicum quaeratur numerus cubicus eo proxime minor numero, qui in classe sinistima continetur, nisi ipse in eadem inueniatur, atque ab hoc subtrahatur; eius uero radix post lunulam scribatur: est enim pars prima radicis.

3.) Quoti inuenti quadratum triplum scribatur sub nota sinistima classis sub sequentis, et inde porro sinistrorum, si ex pluribus notis constiterit; quo facto quaeratur quotus, qui erit pars secunda radicis.

4.) Diuisor ducatur in nouum quotum, et productum sub eo deleto scribatur, sub nota uero media classis eiusdem terminetur factum ex triplo quadrato noui quoti in praecedentem; sub dextima denique cubus noui quoti. Haec tria facta in unam summam collecta ex notis numeri cubici suprascriptis subtrahantur.

5.) Quod si operatio per reliquas classes iuxta regulam tertiam et quartam continuetur; prodibit radix quaesita.

E. gr. 23

23 Radices

9 quadr. part. II.

60
60) prod. part. I. in II.

400 quadr. part. I.

529 quadr. tum totius.

27 Cubus part. II.

180
180) prod. ex quadr. I. in II.

1200 prod. ex quadr. I. in II.

180 prod. ex quadr. I. in II.

1200
1200) prod. ex quadr. I. in II.

8000 Cubus part. I.

12167 Cubus totius

12 | 167 | 23

8

Tripl. 6) —

4 | 167

12

3

36

54

27

4167

0

Problema III.

Examinare extractionem radicis quadratae ac cubicae.

Resolutio.

1.) Radix quadrata inuenta ducatur in se ipsam, et facto residuum, si quod fuerit, addatur. Quod si numerus prodeat, ex quo radix extracta, erit numerus inuentus radix quadrata dati uel exacta, uel prope uera.

2.) Radix cubica inuenta ducatur in se ipsam, et factum denuo in eandem. Producto posteriori addatur, si quod fuerit residuum. Quod si numerus prodeat, ex quo extractio facta, operatio rite peracta.

CAP. VI.

De Regulis Proportionum.

Theorema I.

Si fuerint quatuor quantitates proportionales; factum extremarum aequatur facto mediarum. E. gr.

$$\begin{array}{c} 2 : 8 = 4 : 16 \\ 16 \quad\quad 8 \\ \hline 32 = 32 \end{array}$$

Problema I.

Inter duos numeros medium proportionalem inuenire.

Resolutio.

1.) Datorum unus 72 multiplicetur per alterum 8.

2.) Ex facto 576 extrahatur radix quadrata 24; quae erit numerus quaesitus.

```
E. gr.   8.   72
               8
         ─────────
         5|76|24
         4|  |
        ──|  |
         1|76
          44
           4
         ─────
         176
         ─────
           0
```

Problema II.

Datis tribus numeris 3, 12, 5 quartum: aut duobus; tertium proportionalem inuenire.

Resolutio.

1.) Secundus 12 ducatur in tertium 5, aut in altero casu secundus in se ipsum.

2.) Factum 60 diuidatur per primum 3. Quotus 20 est quartus, in altero casu tertius quaesitus. e. gr.

```
3.   12.   5.   20
      5
   ─────────
     60 |20
     33 |
```

Problema III.

Si proportio continua inter quatuor terminos reperitur, ubi secundus terminus simul tertii loco est, productum duorum

rum ertremorum est =, quodrato medii, si nempe in se ipsum ducatur: e. gr.

$$\div\ 322 : 644 : 1288$$
$$\frac{\begin{array}{rcr} 1288 & & 322 \end{array}}{\begin{array}{rcr} 414736 & = & 414736 \end{array}}$$

CAP. VII.

De Quantitatibus Aequidifferentibus.

§. 52.

Si in serie trium quantitatum eadem fuerit differentia primae et secundae, quae secundae ac tertiae; eas *continue aequidifferentes* uoco. Si uero in serie quatuor eadem fuerit differentia primae et secundae, quae tertiae ac quartae, *discretim aequidifferentes* appello. Ita 3, 6, 7 et 10, sunt numeri discretim aequidifferentes. 3.6.9 numeri continue aequidifferentes.

Theorema III.

Si fuerint tres quantitates continue aequidifferentes, summa primi et tertii est medii dupla, e. gr.

$$\div\ 3.\ 7.\ 11$$
$$\frac{11}{14 = 14}$$

Problema I.

Inter duos numeros 9 et 13 medium aequidifferentem inuenire.

Resolutio.

1.) Addantur numeri dati 9. et 13.

2.) Sum-

2.) Summa 22 diuidatur bifariam siue per 2. Quotus 11. erit numerus quaesitus.

Problema II.

Datis tribus numeris 8, 5, 9, quartum aequidifferentem inuenire.

Resolutio.

1.) Numerus secundus 5. addatur tertio 9.

2.) A summa 13 subtrahatur primus 8. Residuus 6 est quartus quaesitus.

CAP. VIII.

De Logarithmis.

§. 53.

Series quantitatum iuxta eandem rationem crescentium uel decrescentium uocatur *Progressio Geometrica.* E. gr.

1, 2, 4, 8, 16 etc. uel 729, 243, 81, 27, 9, 3, 1.

§. 54. Series quantitatum secundum eandem differentiam crescentium uel decrescentium dicitur *Progressio Arithmecica.* E. gr.

3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30.

§. 55. Si numeris in ratione Geometrica progredientibus subscribantur totidem alii aequidifferentes; dicuntur hi illorum Logarithmi. E. gr. sint duae progressiones:

Geometr:	1,	2,	4.	8,	16,	32,	64,	128,	256,	512	etc.
Arith:	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8	9	etc.

erit 0 logarithmus termini primi 1; Logarithmus sexti 32; 7 Logarithmus octaui 128. etc.

Theorema

Theorema I.

Si Logarithmus unitatis sit o; erit logarithmus facti aequalis aggregato ex logairthmis, efficientium.

Theorema II.

Si logarithmus unitatis est o, erit logarithmus quoti aequalis differentiae logarithmorum diuisoris et diuidendi.

Problema I.

Numeri cuiuscunque logarithmum inuenire ac, Canonem Logarithmorum pro numeris naturalibus construere.

Resolutio.

1.) Quoniam 1, 10, 100, 1000, 10000 etc. Progressionem geometricam constituunt; eorum logarithmi arbitrario assumi possunt, modo sint numeri in progressione arithmetica progredientes. Ut igitur intermediorum logarithmos per fractiones decimales exprimere liceat; assumantur 0. 00000000, 1. 00000000, 2. 00000000, 3. 00000000, 4. 00000000 etc.

2.) Equidem manifestum est, numerorum, qui in scala progressionis geometricae non continentur, Logarithmos accuratos haberi non posse; adeo tamen ueris propinquos reperire licet, ut, si usum spectes, accuratis aequipolleant. Quod ut appareat, ponamus inueniendum esse logarithmum nouenarii seu 9. inter 1. 0000000 et 10. 0000000, quaeratur medius proportionalis C, et inter eorum logarithmos 0. 0000000 atque 1. 00000000 medius aequidifferens qui erit logarithmus ipsius C. hoc est numeri ternarium superantis $1\frac{22777}{100000000}$ adeoque a nouenario multum distantis. Quaeratur inter B et C alius medius proportionalis D, qui ad nouenarium propius accedit, et inter B et D adhuc alius E et ita porro alii inter numeros nouenario proxime maiores, et minores donec tandem reperiatur 9.0000000, hoc est, $9\frac{0000000}{100000000}$; qui cum a nouenario ne

unica

unica quidem particula millionesima differat; eius logarithmus citra errandi periculum pro logarithmo nouenarii habetur. Error enim semper minor esse debet unica millionesima. Quaerantur itaque in quolibet casu logarithmi mediorum proportionalium, et ita habebitur tandem logarithmus nouenarii prope uerus, 0,95424251.

3.) Si eodem modo inter A et C numeros medios proportionales quaeras et conuenientes logarithmos singulis assignes, inuenietur tandem logarithmus numeri 2 et ita porro. *Vide Tab. I.*

Problema II.

Inuenire Logarithmum pro numeris maioribus, quam in Canone continentur, minoribus tamen 10000000.

Resolutio.

1.) Resecentur 4 notae ad sinistram numeri dati et earum ex canone excerpatur Logarithmus.

2.) Characteristicae tot addantur unitates, quot notae ad dextram residuae.

3.) Logarithmus inuentus subtrahatur a proxime sequente in canone.

4.) Inferatur: ut differentia numerorum in canone euolutorum ut differentiam tabularem logarithmorum ipsis respondentium; ita notae residuae numeri dati ad differentiam Logarithmicam inueniendam: quae si

5.) Addatur logarithmo per n. 1. et 2. inuento; summa erit logarithmus quaesitus.

Problema III.

Inuenire numerum logarithmo respondentem, qui in tabulis accuratus non occurrit.

Resolutio.

TAB. I.

ad Pag. 32

	Numerus medii proportionalis.	Logarithmi.		Numeri medii proportionales.	Logarithmi.
A	1.0000000	0.0000000	O	9. 0021388	0. 95434570
C	3. 1622777	0. 5000000	Q	9. 0008737	0. 95428467
B	10.0000000	1. 0000000	P	8. 9996088	0. 95422363
B	10. 0000000	1. 0000000	Q	9. 0008737	0. 95428467
D	5. 6234132	0. 7500000	R	9. 0002412	0. 95425415
C	3. 1622777	1. 5000000	P	8. 9996088	0. 95422363
B	10.0000000	1. 0000000	R	9. 0002412	0. 95425415

TAB. I.

ad Pag. 32

	Numerus medii proportionalis.	Logarithmi.		Numeri medii proportionales.	Logarithmi.
A	1.0000000	0.0000000	O	9. 0021388	0. 95434570
C	3. 1622777	0. 5000000	Q	9. 0008737	0. 95428467
B	10.0000000	1.0000000	P	8. 9996088	0. 95422363
B	10. 0000000	1. 0000000	Q	9. 0008737	0. 95428467
D	5. 6234132	0. 7500000	R	9. 0002412	0. 95425415
C	3. 1622777	1. 5000000	P	8. 9996088	0. 95422363
B	10 0000000	1. 0000000	R	9. 0002412	0. 95425415
E	7. 4989421	0.87500000	S	8. 9999250	0. 95421889
D	5. 6234132	0.75000000	P	8. 9996088	0. 95422363
B	10.0000000	1.00000000	R	9. 0002412	0. 95425415
F	8. 6596432	0.93750000	T	9. 0000831	0. 95424652
E	7. 4989421	0. 87500000	S	8. 9999250	0. 95423889
B	10.0000000	1.00000000	T	9. 0000831	0. 95424652
G	9. 3057204	0. 96875000	U	9. 0000041	0. 95424271
F	8. 6596432	0. 93750000	S	8. 9999250	0. 95423889
G	9. 3057204	0. 96875000	V	9. 0000041	0.95424271
H	8. 9768713	0. 95312500	X	8. 9999650	0. 95424080
F	8. 6596432	0. 93750000	S	8. 9999240	0. 95423889
G	9. 3057204	0. 96875000	V	9. 0000041	0.95424271
I	9. 1398170	0. 96093750	Y	8. 9999845	0. 95424217
H	8. 9768713	0. 95312500	X	8. 9999650	0. 95424080
I	9. 1398170	0. 96093750	V	9. 0000041	0. 95424271
K	9. 0579777	0. 95703125	Z	8. 9999943	0. 95424223
H	8. 9768713	0. 95312500	Y	8. 9999845	0. 95424217
K	9.0579777	0. 95703125	V	9. 0000041	0. 95424271
L	9.0173333	0.95507812	a	8. 9999992	0.95424247
H	8.9768713	0. 95312500	Z	8. 9999943	0. 95424223
L	9. 0173333	0. 95507812	V	9. 0000041	0. 95424271
M	8. 9970796	0. 95410156	b	9. 0000016	0. 95424259
H	8. 9768713	0. 95312500	a	8. 9999992	0. 95424247
L	9. 0173333	0. 95507812	b	9. 0000016	0. 95424259
N	9. 0072008	0. 95458984	c	9. 0000004	0. 95424253
M	8. 9970796	0. 95410156	a	8. 9999992	0. 95424247
N	9. 0072008	0. 95458984	c	9. 0000004	0. 95424253
O	9. 0021388	0. 95434570	d	8. 9999998	0. 95424250
M	8. 9970796	0. 95410156	a	8. 9999992	0. 95424247
O	9. 0021388	0. 95434570	c	9. 0000004	0. 95424253
P	8. 9996088	0. 95422363	e	9. 0000000	0. 95424251
M	8. 9970796	0. 95410156	d	8. 9999998	0. 95424250

Resolutio.

I. Si numerus, cui conuenit logarithmus, inter 1000 et 10000 cadit, hoc est, si characteristica fuerit 3.

1.) Logarithmus proxime minor dato subtrahatur a proxime maiore, itidemque a logarithmo dato.

2.) Inferatur, ut differentia prior ad 100, ita secunda ad partes centesimas inueniendas et numero, qui logarithmo proxime minori in tabulis respondet, addendas, ut habeatur numerus prope uerus, cui logarithmus datus conuenit.

II. Si numerus, cui conuenit logarithmus datus, inter 1 et 1000 locum reperiat, hoc est, si characteristica fuerit 0, 1 uel 2, characteristica mutatur in 3 et logarithmus quaeritur inter 1000 et 10000: qui enim ibi idem respondet numerus, tot fractiones decimales adiunctas habet, quot characteristicae unitates accessere.

Problema IV.

Inuenire numerum conuenientem logarithmo maiori iis, qui in tabulis continentur.

Resolutio.

1.) A logarithmo dato subtrahatur logarithmus numeri 10, uel 100, uel 1000, uel 10000, donec relinquatur lagarithmus ultimo tabulae minor.

2.) Quaeratur numerus ei respondens.

3.) Multipliceturque per 10, uel 100, uel 1000, uel 10000.

Factum est numerus quaesitus.

Problema V.

Datis tribus numeris inuenire quartum proportionalem.

Resolutio.

1.) Logarithmus secundi addatur logarithmo tertii.

2.) Ab aggregato subtrahatur logarithmus primus. Residuus est logarithmus quarti quaesiti.

CAP. IX.

De Fractionibus Decimalibus.

§. 56.

Fractio decimalis est, cuius denominator est articulus quidam primarius 10, 100, 1000, 10000 etc.

57. Fractio decimalis exacta est, quae ueram exhibet rationem partis, quam designat, ad totum. E. gr.

$$0.8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

Problema I.

Fractiones decimales addere, uel a se inuicem subtrahere.

Resolutio.

Quoniam fractiones decimales perinde ac numeri integri constant ex notis, quarum unitates in ratione decupla progrediuntur notis eiusdem ordinis sub se inuicem scriptis additio et subtractio eodem modo peragitur, ac in numeris vulgaribus. E. gr.

Exemp. Add.	Exemp. Subtr.
7,563	2.4,78
5,325	7,34
12,888	1,744

Problema

Problema II.

Fractiones decimales per ſe inuicem multiplicare.

Reſolutio.

Si fractiones decimales ad formam numerorum integrorum reducantur, multiplicatio peragitur ut in integris, hoc unice notato, quod quoniam apices ſunt Logarithmi denominatorum, apex facti notarum in ſe inuicem ductarum inueniatur, ſi earum apices addantur, e. gr.

$$\begin{array}{r} 3,2 \\ 2,4 \\ \hline 128 \\ 64 \\ \hline 7,68 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 0,42857 \\ 0.0047 \\ \hline 299999 \\ 171428 \\ \hline 0.002014279 \end{array}$$

Problema III.

Fractionem decimalem per decimalem diuidere.

Reſolutio.

Si fractiones decimales ad formam numerorum integrorum reducantur, diuiſio peragitur, ut in numeris integris

E. gr.

$$\begin{array}{r|l} 11,52 & 4,8 \\ 24 & \\ 4 & \\ \hline 96 & \\ \hline 192 & \\ 24 & \\ 8 & \\ \hline 192 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

CAP. I.

De Arithmetica Rationalium.

§. 1.

Analysis Mathematica est methodus resoluendi problemata mathematica.

§. 2. *Arithmetica speciosa* est, quae computum quantitatum seu numerorum indeterminatorum docet.

Hypothesis.

Quantitatum datarum signa sint literae Alphabeti priores, a, b, c, d etc. quaesitarum postremae z, y, x etc.

§. 3. Quantitas signo + affecta dicitur *positiua*, item *affirmatiua*, atque *nihilo maior*: quae uero signo — afficitur, *priuatiua*, item *negatiua* atque *nihilo minor*, a nonnullis *absurda*.

Theorema I.

Quantitas quaelibet pro unitate assumi potest.

Problema I.

Quantitates tam eodem, quam diuersis signis affectas addere.

Resolutio.

1.) Si quantitates eadem litera notatae eodem signo afficiuntur: numeri iis praefixi adduntur, ut in Arithmetica communi.

2.) Si signis diuersis afficiuntur, additio mutatur in subtractionem et residuo praefigitur signum maioris.

3.) Quan-

3.) Quantitates diuersis literis notatae iunguntur mediante signo +

$$\begin{array}{l} 4a + 2b - 2c - 5d - g \\ 5a - 2b + 6c + 2d - 3g \\ \hline 9a + 4c - 3d - 4g \end{array} \qquad \begin{array}{r} a - b \\ c \\ \hline a - b + c \end{array}$$

Theorema II.

In subtractione quantitatum compositarum signa subtrahendae mutantur in contraria, nempe + in — et — in +

Problema II.

Quantitates tam eodem, quam diuersis signis affectas a se inuicem subtrahere.

Resolutio.

1.) Si quantitates eadem litera notatae signa eadem habent et minor e maiore subtrahenda, subtractio ut in Arithmetica communi absoluitur.

2.) Si uero maior e minori subducenda contraria ratione minor e maiore subtrahitur et residuo praefigatur signum —, si quantitates signo + afficiuntur; signum uero + si signo — gaudent.

3.) Si quantitates diuersa signa habent; in additionem mutuatur subtractio et aggregato praefigitur signum eius quantitatis, ex qua subtractio facta est.

4.) Si quantitates diuersis literis notatae, signa subtrahendae tantum in contraria mutantur.

8 a	— 5 c	+ 9 d	= 8 th:	— 5 gr.	+ 9 num.		
6 a	— 8 c	— 7 d	= 6	— 8	— 7		
2 a	+ 3 c	+ 16 d	= 2 th:	+ 3 gr.	+ 16 num.		
	9 b	+ 15 c	— 7 d	+ 8 e	— f		
	6 b	+ 20 c	— 9 d	— 9 e	+ 7 f		
	3 b	— 5 c	+ 2 d	+ 17 e	— 8 f		

a + b — c	a + d
d — e + f	c — c — g
a + b — c — d + e — f	a + d — c + e + g

Theorema III.

Si quantitas positiua per positiuam multiplicetur aut diuidatur, in utroque casu quantitas prodit positiua.

Theorema IV.

Si quantitas negatiua per positiuam multiplicetur, aut diuidatur, in utroque casu quantitas prodit negatiua.

Theorema V.

Si quantitas negatiua per negatiuam multiplicetur aut diuidatur, quantitas positiua prodit.

Theorema VI.

Si quantitas positiua per negatiuam multiplicatur aut diuiditur, quantitas priuatiua prodit.

Problema III.

Quantitates tam eodem, quam, diuersis signis affectas in se inuicem ducere.

Resolutio.

Omnia hic fiunt, ut in Arithmetica communi, nisi quod notetur regula; eadem signa faciunt +; diuersa —.

a + c

$$\begin{array}{rrr} a & + & c \\ b & + & d \\ \hline +\,ad & + & cd \\ ab\ + & & bc \\ \hline ab+ad & + & bc+cd \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} a & + & b & - & d \\ a & - & b & - & d \\ \hline -ad & - & bd & + & dd \\ -ab & - & bb & + & bd \\ aa & + & ab & - & ad \\ \hline aa & - & bb & - & 2ad+dd \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrrr} & & 10 = 8 & + & 4 & - & 2 \\ & & 2 = 8 & - & 4 & - & 2 \\ \hline & & -16 & - & 8 & + & 4 \\ & -32 & -16 & + & 8 & & \\ 64 & +32 & -16 & & & & \\ \hline 20 & = 68 & -48 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrr} \text{item} & 8 = & 10 & -\ 2 \\ & 7 - & 10 & -\ 3 \\ \hline & = & 30 & +\ 6 \\ & 100 & -\ 20 & \\ \hline & 56 = & 100 & -\ 50 + 6 \\ & & -\ 50 & +\ 6 \end{array}$$

Problema IV.

Quantitates compositas diuidere.

Resolutio.

Diuisio instituitur ut in Arithmetica communi, notata tamen regula: Eadem signa faciunt +, diuersa — E. gr. diuidere iubemus

$$aa - bb - 2\,ad + dd \text{ per } a - b - d$$

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} & aa & - & bb & - & 2ad+dd & (& a+b-d \\ a-b-d) & aa & - & ab & - & ad & & \\ \hline & +\,ab & - & bb & - & ad+dd & & \\ & +\,ab & - & bb & - & bd & & \\ \hline & +\,bd & - & ad & + & dd & & \\ & -\,ad & + & bd & + & dd & & \\ \hline & & & 0 & & & & \end{array}$$

§. 4.

§. 4. Si radix quantitatis ſiue potentiae ex duabus partibus conſtat, dicitur *binomia*, e. gr. a + b, ſi ex tribus; *trinomia*, e. gr. a + b + c, ſi ex quatuor uel pluribus; *polymonia*.

Theorema VII.

Quadratum radicis binomiae componitur ex quadrato duarum partium ($a^2 + b^2$) ex facto (2 ab) dupli prima (2 a) in alteram (b).

Problema V.

Inuenire naturam quadrati ſiue dignitatis radicis binomiae.

Reſolutio.

Hic ſoliciti ſumus, quomodo quadratum radicis binomiae oriri poteſt.

1.) Multiplicatur inde radix binomia (a+b) cubice; productum indicabit, ex quibus partibus quadratum componitur, et quomodo hae partes quadrati ex radicis partibus oriuntur.

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline + ab + b^2 \\ a^2 + ab \quad\quad \\ \hline a^2 + 2\,ab + b^2 \end{array}$$

$a^2 + 2\,ab + b^2$ Quad. rad. binomiae.

Problema VI.

Inuenire theorema generale pro binomio ad dignitatem quamcunque euehendo.

Hoc patebit ex tabula, quam hic exhibemus.

Tab. II.

$1a$	$1b$			
$1a^2$	$2ab$			
$1a^3$	$3a^2 b$			
$1a^4$	$4a^3 b$			
$1a^5$	$5a^4 b$			
$1a^6$	$6a^5 b$			
$1a^7$	$7a^6 b$			
$1a^8$	$8a^7 b$	$1b^8$		
$1a^9$	$9a^8 b$	$9ab^8$	$1b^9$	
$1a^{10}$	$10a^9 b$	$45a^2 b^8$	$10ab^9$	$1b^{10}$

TAB. II.

$1a$	$1b$									
$1a^2$	$2ab$	$1b^2$								
$1a^3$	$3a^2b$	$3ab^2$	$1b^3$							
$1a^4$	$4a^3b$	$6a^2b^2$	$4ab^3$	$1b^4$						
$1a^5$	$5a^4b$	$10a'b^3$	$10a^2b^2$	$5ab^4$	$1b^5$					
$1a^6$	$6a^5b$	$15a^4b^2$	$20a^3b^3$	$15a^2b^4$	$6ab^5$	$1b^6$				
$1a^7$	$7a^6b$	$21a^5b^2$	$35a^4b^3$	$35a^3b^4$	$21a^2b^5$	$7ab^6$	$1b^7$			
$1a^8$	$8a^7b$	$28a^6b^2$	$56a^5 b2$	$70a^4b^4$	$56a^3b^5$	$28a^2b^6$	$8ab^7$	$1b^8$		
$1a^9$	$9a^8b$	$36a^7 6^2$	$84a^6b^3$	$126a^5b^4$	$126a^4b^5$	$84a^3b^6$	$36a^2b^7$	$9ab^8$	$1b^9$	
$1a^{10}$	$10a^9b$	$45a^8b^2$	$120a^7b^3$	$210a^6b^4$	$252a^5b^5$	$210a^4b^6$	$120a^3b^7$	$45a^2b^8$	$10ab^9$	$1b^{10}$

MATHESIS THEOREMATICA PROBLEMATICA ET DEFINITIVA

SECVNDVM

ELEMENTA MATHESEOS ILLVSTRIS VVOLFII

CONSCRIPTA

A

IOHANNE FRIDERICO RÜBELIO

PHIL. ET MED. CAND.

VITEMBERGAE

Sumtibus JOANNIS JOACHIMI AHLFELDII.

MDCCXXXV.