Entwurf
einiger vortrefflichen Lehren
aus der höheren
Naturkunde und Größenlehre,
worüber
die Herren
Johann und Thaddæus
des Heil. Röm. Reichs
Grafen von Thurn, Valsassina, und Taxis
in der Herzogl. Sav. Ritterakademie
den May 1764.
öffentlich werden geprüfet werden.

Dazu kömmt
ein Anhang
über
einen Satz aus der Polizeywissenschaft,
welcher unlängst auf hiesiger hohen Schule ist vertheidiget worden.

Wien in Oesterreich,
Gedrukt bey Leopold Johann Kaliwoda,
kaiserl. Reichshofbuchdruckern.

„ On traite volontiers d'inutile ce qu'on ne ſçait point, c'eſt une eſpèce de „ vengeance, & comme les Mathématiques & la Phyſique ſont aſſés gé- „ néralement inconnuës, elles paſſent aſſés généralement pour inutiles. „ La ſource de leur malheur eſt manifeſte, elles ſont épineuſes, ſauvages, „ & d'un accés difficile. „ *Hiſtoire del' Acad. Roy. des Sciences. Année.* M. DC. XCIX.

Vorrede.

Der Adel ist ein Stand der Vortrefflichkeit. Er theilet den Adelichen die Rechte des Vorzuges mit. Allen Vorzug aber hat die Natur bloß auf die Verdienste gegründet: weil sie uns alle aus gleichwerthem Stoffe gebildet hat. Sind wir nach den Einrichtungen der Staaten einer über den anderen erhoben: so sind die Staffeln unsrer Erhöhung so lange ohne Grundfeste, als wir ohne Verdienste sind. Kein Verdienst aber ist ohne Tugend möglich. Es fällt also alles Hohe darnieder, sobald es Tugend und Verdienste nicht unterstützen. Jedoch auch den Gemeinen hat die Natur die Pflicht der Tugend und der Verdienste aufgebürdet. Sie sind Glieder des Staats, wie es die Adelichen sind. Beyde genießen des allgemeinen Schutzes: und die Bemühungen der Einen sind wie die Bemühungen der Anderen, der allgemeinen Wohlfahrt geweihet. Sind also die Adelichen vortrefflicher als die Gemeinen, und haben sie ein Recht zu dieser Vortrefflichkeit: so haben sie es nur daher, weil sie sich durch Tugend und Verdienste über sie hinaus schwingen. Es ist also eine wahre Pflicht des Adelstandes, eine Pflicht, die ihm die Natur selbst gesetzet: daß er zu erhabneren Tugenden, zu vollkommeneren Verdiensten, zu Verrichtungen, zu welchen die Niederen zu kraftlos sind, gehalten ist. Mit geringeren Thaten ist ein Adelicher einem Gemeinen gleich, und mit schlechten Thaten ist er niedriger als der Geringste aus dem Pöbel. — Dieß, Meine Herren! ist das wahre innere Verhältniß, in welchem der Adel mit den übrigen Bürgern eines Staates stehet. — Die Tugenden aber, woraus die Vorzüglichkeit unsrer Verdienste entstehet, sind sehr verschieden: obgleich der Stamm zuerst sich nur in zween Aeste theilet. Die Wohlfahrt des Staates beruhet nur auf zweyerley Gütern, deren uns die Einen aus der sittlichen Welt, die Anderen aus der Körperwelt zufließen. Wir übergehen heute die Quelle der ersteren, und halten uns nur bey den zweyten auf. — Nahrung, Gesundheit, Unterhalt, Wohnung, Kleidung, alles Nöthige, und alles Bequemliche des ganzen Staats, und jeden einzelnen Bürgers, sind Geschenke der Körperwelt. Es ist zu erstaunen, Meine Herren! daß die Menschen, diese vortrefflichen, diese selbst angebothenen Geschenke so sehr vernachläßigen können. Die gutthätige Natur hat uns alles beschieden, dessen wir nur jemals bedürftig seyn, oder wornach wir nur jemals ein vernünftiges Verlangen tragen können: nur den Ort, wo sie diese Geschenke hingeleget, und die Art, wie sie zu unserm Beßten anzuwenden sind, hat sie unsrer eigenen Untersuchung überlassen. Allein auch in diesem hat sie uns nicht ganz hülflos gelassen. Ihre einfachsten Gesetze, nach denen sie beständig wirket, liegen uns täglich vor Augen: und wohin wir nur immer unsere Sinne wenden, da werden wir ein ununterbrochenes Ebenmaaß gewahr. Sollten wir denn also nicht schon lange auf ihren Wegen wandeln? Sollte nicht schon lange jeder Staat die Güter seines Erdstriches kennen? Und ihrer nach dem vollen Maaße seiner Glückseligkeit genießen? Es ist zu erstaunen, sage ich, daß wir dieß alles noch nicht gethan. — Hier, Adeliche Zuhörer! hier ist der Geist des Edelmuthes, hier sind Tugenden, die Tugenden der Vortrefflichkeit nöthig; hier ist die Bahne zu den erleuchtesten Verdiensten offen! Hier langen gemeine Kenntnisse, gemeine Kräfte, gemeiner Scharfsinn nicht weiter zu, die Staaten aus einer so alten Schlafsucht zu ermuntern, und ihnen aus der Düsternheit in das volle Licht zu helfen. Grosse Seelen sind es, die die Fehler der Menschlichkeit zernichten: und der Vornehmste aus den Adelichen ist es, der uns bey den einfachsten Wirkungen der Körperwelt die Fußtapfen des Schöpfers, welches Fußtapfen der Unendlichkeit sind, abmißt. — Allein wir, Meine Herren! wir, deren Jugend von den Jahren der Verdienste noch zu entfernet ist, deren Kräfte noch zu unreif sind, wir sind frohe, und sehr frohe sind wir, daß wir uns bis itzo nur das Maaß unsrer Pflichten mit so unläugbaren Gründen bestimmet haben. Ein nur im geringsten weiter abzielender Gedanke würde verwegen, würde thöricht seyn. Allein wir würden auch der Ehre unsrer Väter unwerth, und vor dem Richterstuhle der Natur unseres Ranges verlustig seyn, wenn wir nicht dabey Regungen empfänden, unseren Lauf einstens dahin zu leiten, wo unseren Vorzug die Krone tugendlicher Verrichtungen erwartet. — Eben in einer Absicht dieser Art, Meine Herren! haben wir sie heute auf diesen Hörsal gebethen. Bis itzo hat uns diese vortreffliche Ritterschule, dieser theure Pflanzgarten adelicher Verdienste in den Lehren der Weisheit und Gerechtigkeit unterrichtet. Wir haben Ihr sehr oft im Geheimen Rechenschaft unserer Bemühungen gegeben: und sind auch in öffentlichen Prüfungen nicht unsichtbar gewesen. Nun aber haben wir einige Schritte weiter in die fruchtbareren Gegenden der Naturkunde, und einige Blicke in die geheiligteren Höhen der Größenlehre gewaget. Ihre Einsicht, Meine Herren! wird uns zwar so gleich die Gränzen unseres Fortganges bestimmen: allein ihre Güte wird uns dennoch zugeben; daß man nicht anderst, als über sehr viele Stuffen niederer Lehren, zu diesen kleinen Anhöhen gelanget. Segnet uns ferner die Gnade des HErrn, und schenket Er uns Kräfte und Starkmuth: so wird es unserem Stande allzeit die rühmlichste Ehre seyn, die lezten aus denjenigen zu seyn, deren Schärfe des Geistes die Bande der Körperwelt trennet, und die Glückseligkeit über Reiche schüttet.

Inhalt.

I.

Aus der Dreyeckmeßkunst.

1)

Kaum hatten die Menschen den Schimmer des göttlichen Lichtes erblicket, welches ihnen aus der Meßkunst entgegen strahlte: dachten sie sogleich auf den Nutzen, den sie aus diesem Kenntnisse schöpfen könnten, und der ihnen der vortrefflichste zu seyn schien. Sie wagten sich im Kurzen von den Messungen ihrer kleinen Aecker, ihrer Felder und Wohnungen, an das Maaß der grossen Weltkörper, und der entferntsten Himmelsgegenden. Sie erhoben ihre Augen gegen die Sonne: und ihr Geist arbeitete gar bald an dem Baue unzähliger Sonnen, und ihre Hand wollte den Sternen die Bahne ihres Laufes beschreiben. Denn ihre Nothdurft und ihre Pflichten zwangen sie ohne Verzug zur Urquelle derjenigen Künste, welche ihnen zur Vertilgung jener, und Erfüllung dieser unentbehrlich waren. Allein sie fanden sich auch gar bald an den Gränzen ihrer Wissenschaft: und die Schwierigkeiten ihres Wunsches waren größer als die Fähigkeiten ihrer Kunst. Sie bemüheten sich zwar um die reinsten Begriffe von allem, was Maaß und Zahl hieß: allein sie fanden schon in dem Einfachsten Verwickelungen; und schon in dem Vorhofe der Meßkunst zeigten sich Abgründe. Sie sahen wohl, daß alle Abmessungen sowohl naher als entfernter Gegenstände durch Dreyecke geschehen müßten: allein mit der Auflösung der Dreyecke wollte es gar nicht fort. Jedoch dieß schrekte sie nicht ab. Geschlechter nach Geschlechtern opferten ihre Mühe dieser Erfindung auf: und die Nachkommen trieben immer die Kunst ihrer Vorfahren um etwas weiter. Vorzüglich aber erweiterten unsere Väter ganz gählings ihren Umfang: nachdem sie die Pforten der Unendlichkeit aufgebrochen. Unsere erleuchtesten Mitbürger, die nun bey den sichersten Leitungen in diesen Irrwegen herumwandern, dringen noch täglich tiefer hinein, und entreißen der Finsterniß noch täglich neue Schätze. — So einstimmig sind alle Zeiten und Weltalter über die Vorzüge der Meßkunst!

2) Jedoch wo liegt eigentlich der Mittelpunkt ihrer Vortrefflichkeit? Jedes Dreyeck bestehet aus Winkeln und Seiten. Wäre ein beständiges Verhältniß jedes Winkels zu jeder Seite, und wüßte man dieß Verhältniß: so wüßte man auch die Auflösung aller Dreyecke im vollkommensten Grade. Allein ob ein solches Verhältniß wirklich da sey; ist unmöglich zu erforschen, ohne die Winkel zu messen. Das Maaß der Winkel aber sind Kreisbögen. Es müßen also Kreisbögen gemessen, und mit geraden Linien verglichen werden. Allein, Kreisbögen gerade richten, ist der Strenge nach, von sehr vielen der scharfsinnigsten Leute bis itzo für eine unmögliche Aufgabe gehalten worden. Was man darinne noch hat thun können, ist eine blosse Annäherung zur wahren Länge einer Kreislinie. Jedoch diese Annäherung ist mit solcher Schärfe getrieben worden, daß sie in der Ausübung auf was immer für eine Art, niemal um etwas merkliches abweichen kann. Man ist durch verschiedene Wege zu diesem Endzwecke gelanget, deren immer einer mehr oder weniger beschwerlich ist. Wir haben uns folgenden gewählet.

Aufgabe.

3) Es sey der halbe Durchmesser des Kreises $= 1$; folglich die Gleichung für den Kreis, $y^2 = 2x - x^2$.

Man soll die Länge der Kreislinie in der schärfsten Annäherung geben.

Auflösung. Man differenzire die Gleichung, d. i., man suche ihr Unendlichkleines: und berufe das Unendlichkleine, oder das Differenzial auf die allgemeine Formel der **Geraderichtung** krummer Linien; integrire sie alsdann; so erhält man das Verlangte:

Verfahren.
$$2y\,dy = 2dx - 2x\,dx$$
$$y\,dy = (1-x)\,dx$$
$$\frac{y\,dy}{1-x} = dx$$

Weil

Weil ferner die Geraderichtungsformel $= \sqrt{dx^2 + dy^2}$;

so wird $\dfrac{y^2\,dy^2}{1 - 2x + x^2} = dx^2$

$$\frac{y^2\,dy^2}{1 - y^2} = dx^2$$

$$\frac{y^2\,dy^2}{1 - y^2} + dy^2 = dx^2 + dy^2$$

$$\frac{y^2\,dy^2 + dy^2 - y^2\,dy^2}{1 - y^2} = dx^2 + dy^2$$

$$\sqrt{\frac{dy^2}{1 - y^2}} = \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$dy\left(1 - y^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Könnte man nun dieß Differenzial, so wie es stehet, integriren; so hätte man das Verlangte nicht nur durch Annäherung, sondern nach aller Schärfe der Meßkunst; und man würde das so lange gesuchte Flächenmaaß des Kreises haben. Da nun aber dieß nicht ist: so muß man die Zuflucht zu den unendlichen Reihen nehmen, die uns zwar, niemal zur Wahrheit selbst, jedoch unendlich nahe zu ihr führen werden. Man löse also die Größe $\left(1 - y^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ nach dem newtonischen Lehrsatze in eine Reihe auf: so ist $1 = P$, $-\dfrac{y^2}{1}$ oder $-y^2 = Q$, $-\frac{1}{2} = \dfrac{m}{n}$ d. i. $-1 = m$, $2 = n$.

Es ist also $P^{\frac{m}{n}} + \dfrac{m}{n} A Q + \dfrac{m - n}{2n} B Q + \dfrac{m - 2n}{3n}$

$C Q + \dfrac{m - 3n}{4n} D Q$ u. s. f.

$= 1 + \dfrac{1}{2} y^2 + \dfrac{3}{8} y^4 + \dfrac{5}{16} y^6 + \dfrac{35}{128} y^8 +$ u. s. f.

--- folglich $dy\,(1-y^2)^{-\frac{1}{2}} = dy + \frac{1}{2}y^2dy + \frac{3}{8}y^4dy$
$+ \frac{5}{16}y^6dy + \frac{35}{128}y^8dy \cdots\cdots$

Diese Reihe nun läßt sich nach der gemeinen Regel integriren: und entstehet folgende daraus,

$$\int.dy\,(1-y^2)^{-\frac{1}{2}} = y + \frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{40}y^5 + \frac{5}{112}y^7 + \frac{35}{1152}y^9 \cdots \cdots\cdots$$

$$= y + \frac{1}{2.\,3}y^3 + \frac{1.\,3}{2.\,4.\,5}y^5 + \frac{1.\,3.\,5}{2.\,4.\,6.\,7}y^7 + \frac{1.\,3.\,5.\,7}{2.\,4.\,6.\,8.\,9}y^9 +$$

$$\frac{1.\,3.\,5.\,7.\,9}{2.\,4.\,6.\,8.\,10.\,11}y^{11} + \frac{1.\,3.\,5.\,7.\,9.\,11}{2.\,4.\,6.\,8.\,10.\,12.\,13.}y^{13}$$

$$+ \frac{1.\,3.\,5.\,7.\,9.\,11.\,13}{2.\,4.\,6.\,8.\,10.\,12.\,14.\,15}y^{15} \cdots\cdots$$

$=$ der Länge jeden Kreisbogens, durch antwortende halbe Sehnen ausgedrückt. W. z. e. w.

Anwendung.

4) Nimmt man nun aus allen Halbsehnen die größte, d. i. den halben Durchmesser des Kreises selbst für y an: so sollte zwar die Reihe so gleich die Länge des Viertheilkreises geben, welcher viermale genommen, die ganze Kreislinie darstellte. Jedoch weil in diesem Falle $y = 1$ wäre, und die steigenden Grade von y auch eine steigende Reihe hervorbrächten: so würde man sich dadurch von seinem Ziele beständig entfernen, statt daß man sich ihm nähern sollte. Es ist also noch eine zweyte Beobachtung nöthig: nämlich, daß y kleiner als 1 müße angenommen werden, um eine fallende Reihe zu erhalten. Denn nur die Brüche haben die Eigenschaft, daß sie immer kleiner werden, je höher sie in die Dignitäten steigen. Man setze also $y = \frac{1}{2} = 0,5$ d. i. man nehme y für die Halbsehne (Sinus) eines

eines Bogens von dreyßig Graden an. Man setze aber $\frac{1}{2} = \mathfrak{A}$, $\frac{1.3}{2.4} = \mathfrak{B}$, $\frac{1.3.5}{2.4.6} = \mathfrak{C}$, $\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} = \mathfrak{D}$, $\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10} = \mathfrak{E}$, u. s. f. so ist der Ausdruck der zuletzt gefundenen Reihe sehr zusammengezogen

$$y + \frac{\mathfrak{A}\,y^3}{3} + \frac{\mathfrak{B}\,y^5}{5} + \frac{\mathfrak{C}\,y^7}{7} + \frac{\mathfrak{D}\,y^9}{9} + \frac{\mathfrak{E}\,y^{11}}{11} + \frac{\mathfrak{F}\,y^{13}}{13} + \frac{\mathfrak{G}\,y^{15}}{15} + \frac{\mathfrak{H}\,y^{17}}{17} \text{ - - - - - - -}$$

und entwickelt sich auf eine sehr leichte Art

$$\left\{\begin{array}{l} 0,5 = \mathfrak{A} \\ \times \frac{3}{4} = \left\{\begin{array}{l} 0,375 = \mathfrak{B} \\ \times \frac{5}{6} = \left\{\begin{array}{l} 0,3125 = \mathfrak{C} \\ \times \frac{7}{8} = \left\{\begin{array}{l} 0,2734375 = \mathfrak{D} \\ \times \frac{9}{10} = \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 0,24609375 = \mathfrak{E} \\ \times \frac{11}{12} = \left\{\begin{array}{l} 0,2255859375 = \mathfrak{F} \\ \times \frac{13}{14} = \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$0,2094726562$ ---- $= \mathfrak{G}$, u. s. w.

Da nun auch $y = 0,5$; $y^3 = 0,125$; $y^5 = 0,03125$; $y^7 = 0,0078125$; $y^9 = 0,001953125$; $y^{11} = 0,00048828125$; $y^{13} = 0,0001220703125$; $y^{15} = 0,000030517578125$; u. s. f.

So wird

I	$= \frac{0{,}5}{1} = \text{-------}$	0,5	
II	$= \frac{(0{,}5)(0{,}125)}{3} = \text{----}$	0,020833	3333 ----
III	$= \frac{(0{,}375)(0{,}03125)}{5} = \text{----}$	0,002343	75
IV	$= \frac{(0{,}3125)(0{,}0078125)}{7} = \text{---}$	0,000348	7723 ---
V	$= \frac{(0{,}2734375)(0{,}001953125)}{9} = \text{---}$	0,000059	3397 ---
VI	$= \frac{(0{,}24609375)(0{,}00048828125)}{11} = \text{--}$	0,000010	9239 --
VII	$= \frac{(0{,}2255859375)(0{,}0001220703125)}{13} =$	0,000002	1182 --
VIII	$= \frac{(0{,}2094726562)(0{,}0000305175\text{----})}{15} =$	0,000000	4261 --
IX	$= \frac{(0{,}1963806139\text{--})(0{,}0000152587\text{--})}{17} =$	0,000000	0176 --
		0,523598	6811 =

Der Länge des Kreisebogens von 30°.

Weil also 30° × 6 = 180°; so wird 0, 52359868 ----- × 6 = 3, 141592 ------ = der halben Kreislinie.

Erste Anmerkung.

5) Aus dieser Entwickelung sieht man leicht, daß sich der Kreisbogen ohne sonderliche Mühe in noch mehreren zehntheiligen Ziffern, nach jeder verlangten Schärfe hätte geben lassen: wenn es einem nur beliebet hätte, mehr Glieder der Reihe in Zahlen zu setzen. Hr. Euler * führet ihn in folgenden Zahlen an:

3,

* Introduct. in Analysin Infinit. T. 1. p. 93.

3, 141592	653589	793238	462643
383279	502884	197169	399375
105820	974944	592307	816406
286208	998628	034825	342117
067982	148086	513272	306647
09384	46 + - - - -		

Welches eine erstaunenswürdige Annäherung ist.

Zweyte Anmerkung.

6) Unsere Vorfahrer mußten sich auf viel beschwerlicheren Umwegen daherschleppen, und kamen dennoch nicht einmal ein Drittheil so weit, als wir itzo sind. Grünberger drückte den Kreisbogen in zwoen Reihen von 35 zehntheiligen Ziffern aus, worinne nur die lezten Zahlen um 1 unterschieden waren, und deren ihn die eine um ein bißchen zu groß, die andere aber zu klein gab. Nichtsdestoweniger sah er seine Mühe für ein Werk der Unsterblichkeit an, und befahl vor seinem Tode, daß man ihm auf seinem Grabsteine zween Kreise stechen, und in den einem die eine, in dem andern die andere dieser Reihen Ziffer zeichnen sollte. Man sieht auch noch heute auf dem Grabmahle des bekannten Ludolph van Ceulen, in der Peterskirche zu Leyden, die 36 Zahlen gestochen, durch die er die Länge der Kreislinie ausgedrücket. *

Von der Erfindung der Halbsehnen.

7) Wenn man nun nach der vorhergehenden Lehre jeden Bogen eines Kreises, er bestehe aus Graden, Minuten, Sekunden, wie er wolle, nach jeder gegebenen geraden Linie zu berechnen weiß: so ist dieß Kenntniß dennoch nicht zulänglich, alle Dreyecke aufzulösen. Weil man dadurch noch zu keinem Verhältnisse der Winkel und Seiten gelanget ist. Allein wenn man dabey erwäget, daß sich die Seiten eines jeden Dreyeckes, wie die Halbsehnen der ihnen entgegen stehenden Winkel verhalten: so wendet sich die noch übrige Last der Schwierigkeit gänzlich auf folgende Aufgabe:

Aufgabe.

8) Wenn die Länge eines Kreisbogens nach der schärfsten Annäherung gegeben ist (*n.* 3. 4.): so soll man auch seine Halbsehne in der nämlichen Schärfe finden.

Auf-

* Diction. de Mathem. & de Phys. par Saverien. a. *Cercle*.

Auflösung. Es sey die gegebene Länge des Kreisbogens $= \mathfrak{A}$: so ist

$$(n. 3)\quad \mathfrak{A} = y + \frac{1}{6} y^3 + \frac{3}{40} y^5 + \frac{5}{112} y^7 + \frac{35}{1152} y^9 \text{------}$$

u. s. f. eine transcendentische Gleichung, in welcher das Unbekannte (y), welches die Halbsehne des gegebenen Bogens ausdrücket, auf unendliche Grade steiget. Will man sie also auflösen: so muß man eine Wurzel eines unendlichen Grades aus ihr ziehen. Da nun vermöge dem, was eine Gleichung transcendentisch machet, gewiß ist, daß $\mathfrak{A}$ und y gegeneinander unermeßlich sind: so ist auch gewiß, daß ebenfalls y durch $\mathfrak{A}$ nicht anderst, als durch eine unendliche Reihe könne gegeben werden. Die Sache wendet sich also auf die Auflösung einer andern Aufgabe: **Man soll den Werth eines Unbekannten, dessen Dignitäten mit bejahenden Dignitätenzahlen in einer unendlichen Reihe verwickelt sind, die einer gegebenen endlichen Größe gleich ist; durch eine andere unendliche Reihe von Dignitäten dieser nämlichen endlichen Größe ausdrücken.** Allein da diese Auflösung etwas zu weitläuftig ist, als daß sie hier könnte eingeschaltet werden: so haben wir sie zum Gebrauche dieses Entwurfs in einer besondern Tafel zurücke behalten. *

Wir setzen also dem, was wir dort erweisen, zufolge, daß $1 = a$; $\frac{1}{6} = c$; $\frac{3}{40} = e$; so erhält man

$$\mathfrak{A} = a\,y \;*\; + c\,\overset{3}{y} \;*\; + e\,\overset{5}{y} \text{ -----} \text{ u. s. f.}$$

Da nun in der dortigen allgemeinen Verkehrungsformel $x = \frac{1}{a} A - \frac{b}{a^3} A^2 + \left(\frac{2 b^2 - a c}{a^5}\right) A^3 + \left(\frac{5 a b c - 5 b^3 - a^2 d}{a^7}\right) A^4 \text{---}$ u. s. f.; b aber, und d, in Ansehung der hier gegebenen Reihen $= 0$ sind: so geschiehet die Verwandelung, mit Wegwerfung der unnützen Glieder auf folgende Art:

$$y = \frac{1}{a} \mathfrak{A} - \frac{a c}{a^5} \mathfrak{A}^3 + \frac{3 a^2 c^2 - a^3 e}{a^9} \mathfrak{A}^5 \text{ ----} \text{ u. s. f.}$$

d. i. $y = \mathfrak{A} - \frac{1}{6} \mathfrak{A}^3 + \frac{1}{120} \mathfrak{A}^5$ ----- u. s. f.

Su-

* Man sehe auch in des Freyherrn von Wolf. Element. Mathes. T. I. §. 102. 366. Edit. Genev. 1743.

Suchet man aber ferner, durch die Zergliederung der Coefficienten das Gesetze des Ganges der Reihe: so wird

$$y = \mathfrak{A} - \frac{1}{1.\,2.\,3.}\mathfrak{A}^3 + \frac{1}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}\mathfrak{A}^5 - \frac{1}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7}\mathfrak{A}^7$$

u. s. f. Daher ist $y = \mathfrak{A} - \frac{1}{6}\mathfrak{A}^3 + \frac{1}{120}\mathfrak{A}^5 - \frac{1}{5040}\mathfrak{A}^7 + \frac{1}{362880}\mathfrak{A}^9$ - - - - - u. s. w.

Und so ist jede Halbsehne durch jeden gegebenen Kreisbogen, nach jeder verlangten Schärfe ausgedrückt.

Anwendung.

9) Man verlange z. B. die Halbsehne von $27^\circ, 35', 50''$ in einer Annäherung von 10 zehntheiligen Ziffern zu finden.

Verfahren. Weil $180^\circ = 648000''$, und $27^\circ, 35', 50'' = 99350''$: so nehme man aus *n.* 5. für die Länge der halben Kreislinie 3, 1415926535 - - - - -: so wird 0, 48166239216 - - - - - $= \mathfrak{A} =$ der Länge des Bogens von $27^\circ, 35', 50''$. Nun suche man $\mathfrak{A}^3 =$ 0, 1117450 2948 - - - - - -, $\mathfrak{A}^5 =$ 0, 00259246970 - - - - - - $\mathfrak{A}^7 =$ 0, 00060144949 - - - -, $\mathfrak{A}^9 =$ 0, 00013954485 - - - - -: so wird

$$\begin{array}{rcl|l}
+\,\mathfrak{A} & = & +\,0,4816623921 & 6 \\
+\,\frac{1}{120}\mathfrak{A}^5 & = & +\,0,0002160391 & 4 \\
+\,\frac{1}{362880}\mathfrak{A}^9 & = & +\,0,0000000003 & 8 \\
\hline
 & & +\,0,4818784316 & 8 \\
 & & -\,0,0186242909 & 1 \\
\hline
\end{array}
\left\{
\begin{array}{rcl|l}
-\,\frac{1}{6}\mathfrak{A}^3 & = & -\,0,0186241715 & 8 \\
-\,\frac{1}{5040}\mathfrak{A}^7 & = & -\,0,0000001193 & 3 \\
\hline
 & & -\,0,0186242909 & 1
\end{array}
\right.$$

0,4632541407 - - - - - = der verlangten Halbsehne.

10) Nachdem man also zu jedem gegebenen Kreisebogen jede verlangte Halbsehne zu finden weiß: so ist man auch im Stande jedes gegebenes Dreyeck aufzulösen; und zwar nach jeder verlangten Schärfe, weil man nach jeder

verlangten Schärfe die Halbsehne finden kann (*n.* 8. 9.). Jedoch weil die Halbsehnen immerzu Zahlen von einer grossen Menge Ziffer sind; deren Vervielfältigung und Theilung nothwendig langwierig und verdrießlich ist: so ist man zwar zu seinem Zwecke gelanget; allein die Strasse ist noch immer unwegsam, voll Rauhigkeit und Wildniß; die man durchzubrechen und zu vertilgen hat, ehe man sagen kann, daß man die Beschäftigungen der Meßkunst so verrichte, daß sie vollkommen zur Glückseligkeit der Menschen dienen sollen. — Es ist bekannt, daß alles **Vervielfältigen** und **Theilen** der Zahlen, durch die Logarithmen in ein **Zusammensetzen**, und **Abziehen** verwandelt werde, welches ungleich hurtiger als jenes verrichtet wird. Könnte man also zu jeder gefandenen Halbsehne, den ihr nach jeder verlangten Schärfe zugehör'gen Logarithme finden: so würde man auch sogleich alles **Vervielfältigens** und **Theilens** der Halbsehnen überhoben seyn. Allein weil es nicht weniger bekannt ist, daß zu jeder gegebenen Zahl, unendlich viele Logarithmen möglich sind, deren immer einer nach einer andern Grundzahle (Modulus, forma, index — —) berechnet ist als der andere; und wir uns die sogenannten hyperbolischen zu berechnen gewählet haben: so müßen wir vorläufig erklären, was wir durch hyperbolische Logarithmen verstehen. Wir sagen also, daß **ein hyperbolischer Logarithme entstehe, wenn man die Dignitätenzahl** (exponentem potentiae) **jeden Gliedes der geometrischen Reihe, welches auf die gegebene Zahl passet, mit dem Ueberschusse der gemeinschaftlichen Verhältnißzahl** (per indicem rationis) **über die Einheit, vervielfältiget.** Z. B. Es sey e eine unendlich kleine Größe, und

$1, (1+e), (1+e)^2, (1+e)^3, (1+e)^4$ - - - - $(1+e)^n$ - - - - - - eine geometrische Reihe: so sagen wir, daß ne der hyperbolische Logarithme von was immer für einer natürlichen Zahl ist, die auf das Glied $(1+e)^n$ passet.

11) Nun aber zur Sache selbst zu kommen, wollen wir uns vorstellen, als wenn man schon lange vor uns für alle natürlichen Zahlen die dazu gehörigen hyperbolischen Logarithmen gefunden hätte: und daß uns jemand zwar die Logarithmen gäbe, die Zahlen selber aber verschwiege, und sie unsrer eigenen Erfindung überließe. Wir wollen uns also bemühen, zuerst die Zahlen aus den Logarithmen herzuleiten: und auf solche Weise das Gesetze, nach welchem sie mit den Logarithmen zusammenhenken, ausfindig machen. Dann wollen wir nur die Frage umkehren, und nach diesem Gesetze, aus den Zahlen die Logarithmen finden. Es sey also die

Auf-

Aufgabe.

12) Wenn der hyperbolische Logarithme $=$ L, von was immer für einer Zahl gegeben ist: die Zahl selber zu finden. *

Auflösung. Es sey $(1+e)^n$ dasjenige Glied aus der geometrischen Reihe,

$$1, (1+e), (1+e)^2, (1+e)^3, (1+e)^4 ----$$

$(1+e)^n$, welches der verlangten Zahl N gleich ist. Weil also

$$(1+e)^n = 1 + \frac{n}{1}e + \frac{n.\,n-1}{1.\,2.}e^2 + \frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\,2.\,3}e^3 ---$$

u. s. f. so wird auch $N = 1 + \frac{n}{1}e + \frac{n.\,n-1}{1.\,2.}e^2 + \frac{n.n-1.n.-2}{1.\,2.\,3.}e^3$ ---- u. s. f.

Jedoch weil e unendlich klein ist (n. 11); so muß im Falle, daß man eine aus den natürlichen Zahlen suche, n unendlich groß seyn: denn sonst würde kein einziges Glied in der Reihe größer als 1 seyn, oder eine endliche Zahl ausmachen können; welches wider den angenommenen Satz wäre. Ist nun n unendlich groß: so wird

$$\frac{n.\,n-1}{1.2}e^2 = \frac{n^2\,e^2 - n\,e^2}{1.\ 2.} = \frac{n^2\,e^2}{1.\ 2}; \text{ und } \frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\,2.\,3.}$$

$$= \frac{n^3\,e^3 - 3\,n^2\,e^3 + 2\,n\,e^3}{1.\ 2.\ 3.} = \frac{n^3\,e^3}{1.\ 2.\ 3}, \text{ u. s. w.}$$

Man hat also $N = 1 + \frac{n\,e}{1} + \frac{n^2\,e^2}{1.\,2} + \frac{n^3\,e^3}{1.\,2.\,3} + \frac{n^4\,e^4}{1.\,2.\,3.\,4}$

$+ \frac{n^5\,e^5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.}$ u. s. w.

Allein vermöge der Erklärung (n. 11) ist $n\,e = L$, dem hyperbolischen Logarithme von $(1+e)^n$ oder N.

* Trigonometry plane and spherical with the Construction and Application of Logarithms. By Thomas Simpson. F. R. S. London. 1748. p. 38.

Es ist also

$$N = 1 + L + \frac{L^2}{2} + \frac{L^3}{2.3} + \frac{L^4}{2.3.4} + \frac{L^5}{2.3.4.5} \text{ - - - - - u. s. f.}$$

Man hat also die Zahl N durch den gegebenen Logarithme L gefunden.

Aufgabe.

13) Man soll aus jeder gegebenen Zahl N ihren hyperbolischen Logarithme L finden.

Auflösung. Weil ($n.$ 12) $N = 1 + L + \frac{L^2}{2} + \frac{L^3}{2.3} + \frac{L^4}{2.3.4} + \frac{L^5}{2.3.4.5}$ - - - u. s. w.

so siehet man leichte, daß das ganze Geschäfte auf der Umkehrung der Reihe beruhet. Man könnte sie auch gerade ohne alle Vorbereitung ($n.$ 8) umkehren: allein man würde eine steigende Reihe erhalten, die einen, je weiter sie gienge, desto weiter vom Endzwecke abführte, statt daß sie einen immer näher hinzuführen sollte. Man setze also vor der Umkehrung $N = 1 + x$: so wird vermöge des vorhergehenden $x = L + \frac{L^2}{2} + \frac{L^3}{2.3} + \frac{L^4}{2.3.4} + \frac{L^5}{2.3.4.5}$ - - - - u. s. f. und $L = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6}$ - - - - - u. s. f.

Allein so einfach auch dieser Ausdruck des Logarithmes durch seine Zahl ist: so ist er doch ebenfalls untauglich: so bald man den Logarithme von Zahlen suchet, wo x größer als 1 ist. Denn auch da wird die Reihe allzeit steigend, und widerstehet der Annäherung. Man muß also der Zahl N einen solchen Ausdruck geben, daß die Reihe nicht nur in einigen Fällen, sondern beständig fallend werde. — Man setze also $N = \frac{1}{1-x}$: so ist man allzeit sicher, daß $\frac{N-1}{N} = x$, kleiner als 1, mithin ein Bruch seyn

wird.

wird. Weil nun $N = (1 + e)^n$ war: so ist auch $(1 + e)^n = \frac{1}{1 - x}$.

In dieser Gleichung ziehe man beyderseits die Wurzel n aus: so wird $1 + e = \left(\frac{1}{1 - x}\right)^{\frac{1}{n}} = (1 - x)^{-\frac{1}{n}}$;

oder wenn $-\frac{1}{n} = m$; $1 + e = (1 - x)^m = 1 - \frac{m}{1} x + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} x^2 - \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \text{- - - u. s. w.}$

Weil aber $n = \infty$; und $m = -\frac{1}{n}$; so wird $m = \frac{1}{\infty}$; d. i. m, wird unendlich klein. Es ist also

$\frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} = \frac{m \cdot 0 - 1}{1 \cdot 2} = -\frac{m}{2}$; und $\frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{m \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = -\frac{m}{3}$, u. s. w.

Es erhält also die Gleichung folgende Gestalt

$$1 + e = 1 - \frac{m}{1}x - \frac{m}{2}x^2 - \frac{m}{3}x^3 - \frac{m}{4}x^4 - \frac{m}{5}x^5 \text{ - - - u. s. f.}$$

d. i. $\frac{e}{-m} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \text{ - - - - - u. s. f.}$

Nun wegen $\frac{e}{-m} = -\frac{e}{m}$; und $m = \frac{-1}{n}$, ist auch $\frac{e}{-m} = \frac{-e}{\left(\frac{-1}{n}\right)} = n\,e = L.$

Es ist also

$$L = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \text{------ u. s. f.}$$

Welches eine allzeit fallende Reihe ist.

14) Bey diesem nun könnte man es bewenden lassen: wenn man nicht sogleich bey Gegeneinanderhaltung dieser und der vorhin gefundenen Reihe das behendste Mittel ersähe, eine neue Reihe darzustellen, deren Glieder noch weit schleuniger fielen, als es diese thun. Man schreibe nur die zwo Reihen unter einander,

$$\begin{cases} L\left(N = x + 1\right) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} \text{--- u. s. f.} \\ L\left(N = \dfrac{1}{1-x}\right) = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} \text{---- u. s. f.} \end{cases}$$

setze sie zusammen in eine, und erinnere sich, daß ihre Zahlen dadurch vervielfältiget werden: so wird

$$L\left(\left(x + 1\right) \times \left(\frac{1}{1-x}\right)\right) = 2\,x * + \frac{2\,x^3}{3} * + \frac{2\,x^5}{5} \text{--- u. s. f.}$$

$$= 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9\right) \text{---}$$

Da nun $\left(x + 1\right) \times \left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1+x}{1-x}$: so erhellet daraus, daß man N noch weit vortheilhafter durch $\frac{1+x}{1-x}$ ausdrücke, als es vorher (*n.* 12.) geschehen: und daß man zu dem gesuchten Logarithme aus zwoen Ursachen geschwinder gelange; 1) weil $\frac{N-1}{N+1}$ allzeit kleiner als $\frac{N-1}{N}$; und 2) weil die Dignitäten mit geraden Dignitätenzahlen hier $= o$ sind.

An-

Anwendung.

15) Man soll z. B. den hyperbolischen Logarithme von 2, in 10 zehntheiligen Ziffern finden.

Verfahren. Weil hier $N = 2$: so ist $x = \frac{N - 1}{N + 1} = \frac{2 - 1}{2 + 1} = \frac{1}{3}$;

und $x^2 = \frac{1}{9}$. Folglich ist auch

$x = (\frac{1}{3})$	$=$	0,33333333333 - -	$=$	0,3333333333	3 - -
$\frac{1}{3}x^3 = \frac{(\frac{1}{9}x)}{3}$	$=$	$\frac{0{,}03703703703}{3}$ - -	$=$	0,0123456790	1 - -
$\frac{1}{5}x^5 = \frac{(\frac{1}{9}x^3)}{5}$	$=$	$\frac{0{,}00411522633}{5}$ - -	$=$	0,0008230452	6 - -
$\frac{1}{7}x^7 = \frac{(\frac{1}{9}x^5)}{7}$	$=$	$\frac{0{,}00045724737}{7}$ - -	$=$	0,0000653210	5 - -
$\frac{1}{9}x^9 = \frac{(\frac{1}{9}x^7)}{9}$	$=$	$\frac{0{,}00005080526}{9}$ - -	$=$	0,0000056450	2 - -
$\frac{1}{11}x^{11} = \frac{(\frac{1}{9}x^9)}{11}$	$=$	$\frac{0{,}06000564502}{11}$ - -	$=$	0,0000005131	8 - -
$\frac{1}{13}x^{13} = \frac{(\frac{1}{9}x^{11})}{13}$	$=$	$\frac{0{,}00000062722}{13}$ - -	$=$	0,0000000482	4
$\frac{1}{15}x^{15} = \frac{(\frac{1}{9}x^{13})}{15}$	$=$	$\frac{0{,}00000006969}{15}$ - -	$=$	0,0000000046	4
$\frac{1}{17}x^{17} = \frac{(\frac{1}{9}x^{15})}{17}$	$=$	$\frac{0{,}00000000724}{17}$ - -	$=$	0,0000000004	5
$\frac{1}{19}x^{19} = \frac{(\frac{1}{9}x^{17})}{19}$	$=$	$\frac{0{,}00000000086}{19}$ - -	$=$	0,0000000000	4
				0,3465735902	2
				2	
				0,6931471804 - =	

dem hyperbolischen Logarithme von 2.

16) Eben

16) Eben auf diese Art verfährt man bey anderen Zahlen. Allein weil die Reihe immer sachter und sachter fällt, je höher die Zahlen steigen, deren Logarithmen gesuchet werden: so ist es im Falle, daß man Logarithmische Tafeln berechnen wollte, wieder viel diensamer, daß man sich zur Erfindung der Logarithme für die folgenden Zahlen immer der schon gefundenen Logarithmen der vorgehenden Zahlen gebrauche. Hr. Simpson behauptet, * daß er keine bessere Art als folgende dazu gefunden, zuvörderst, wenn man die Logarithmen in einen hohen Grade der Richtigkeit fordert.

Eine leichte Art zur Berechnung der logarithmischen Tafeln.

17) Es seyen a, b, c, drey Zahlen in einer arithmetischen Reihe, deren gemeinschaftlicher Unterschied $= 1$ ist: so wird $a = b - 1$, und $c = b + 1$; und $ac = b^2 - 1$ oder $ac + 1 = b^2$; folglich $\frac{ac+1}{ac} = \frac{b^2}{ac}$. Es ist also der Logarithme von $\frac{b^2}{ac} = \mathrm{L}\left(\frac{ac+1}{ac}\right)$ $= 2\,\mathrm{L}\,b - \mathrm{L}\,a - \mathrm{L}\,c$. Jedoch $\mathrm{L}\left(\frac{ac+1}{ac}\right)$ kann man auch ($n.$ 14.) durch eine Reihe darstellen. Es sey $\frac{ac+1}{ac} = \mathfrak{N}$. Weil $\frac{\mathfrak{N}-1}{\mathfrak{N}+1} = x$: so ist

$$\frac{\left(\frac{ac+1}{ac}\right)-1}{\left(\frac{ac+1}{ac}\right)+1} = \left(\frac{ac+1-ac}{ac}\right) : \left(\frac{ac+1+ac}{ac}\right) = \frac{1}{2ac+1} = x;$$

und $\mathrm{L}\left(\frac{ac+1}{ac}\right)$

$$= \mathrm{L}\,\mathfrak{N} = 2\left(x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9 \ldots\right)$$

Man setze diese ganze Reihe Kürze halber $= \mathfrak{L}$: so hat man

$$2\,\mathrm{L}\,b - \mathrm{L}\,a - \mathrm{L}\,c = \mathfrak{L}.$$ Folglich

$$\begin{cases} \mathrm{L}\,b = \tfrac{1}{2}\mathrm{L}\,a + \tfrac{1}{2}\mathrm{L}\,c + \tfrac{1}{2}\mathfrak{L}. \\ \mathrm{L}\,a = 2\,\mathrm{L}\,b - \mathrm{L}\,c - \mathfrak{L}. \\ \mathrm{L}\,c = 2\,\mathrm{L}\,b - \mathrm{L}\,a - \mathfrak{L}. \end{cases}$$ W. z. f. w.

Er-

* Trigonometry S. 43.

Erste Anwendung.

18) Man soll zu den hyperbolischen Logarithmen von 2 und 4, die man für bekannt setzet, den hyperbolischen Logarithme von 3 finden.

Verfahren. Weil der hyperbolische Logarithme von $2 = 0,693147 1804 \ldots$ (*n.* 15.) und folglich der von $4 = 1,386294 3608 \ldots$, und die Zahlen $2, 3, 4, = a, b, c,$ in einer gehörigen arithmetischen Reihe stehen (*n.* 17.): so ist der Logarithme von 3.

$$L\,3 = \tfrac{1}{2} L\,2 + \tfrac{1}{2} L\,4 + \tfrac{1}{2} L\left(\frac{ac+1}{ac}\right).$$

Es ist also weiter nichts als $\tfrac{1}{2} L\left(\frac{ac+1}{ac}\right) = \tfrac{1}{2} L\,\mathfrak{N} =$

$x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9 \ldots$ zu finden (*n.* 17.)

Weil aber $x = \dfrac{1}{2ac+1} = \tfrac{1}{17}$; und $x^2 = \dfrac{1}{289}$: so ist

$$\begin{array}{llllll|l}
x & = & (\tfrac{1}{17}) & = 0,05882352941 & - = & 0,0588235294 & 1 \\
\tfrac{1}{3}x^3 & = & \dfrac{(\tfrac{1}{289}x)}{3} & = \dfrac{0,00020354197}{3} & - = & 0,0000678473 & 2 \\
\tfrac{1}{5}x^5 & = & \dfrac{(\tfrac{1}{289}x^3)}{5} & = \dfrac{0,00000070429}{5} & - = & 0,0000001408 & 5 \\
\tfrac{1}{7}x^7 & = & \dfrac{(\tfrac{1}{289}x^5)}{7} & = \dfrac{0,00000000243}{7} & - = & 0,0000000003 & 4 \\
\hline
 & & & & & 0,0588915179 & 2
\end{array}$$

$= \tfrac{1}{2} L\,\mathfrak{N}$: und endlich

$$\left\{\begin{array}{ll}
\tfrac{1}{2} L\,2 = & 0,3465735902 \ldots \\
\tfrac{1}{2} L\,4 = & 0,693147 1804 \ldots \\
\tfrac{1}{2} L\left(\dfrac{ac+1}{ac}\right) = & 0,0588915179 \ldots \\
\hline
 & 1,0986122885 \ldots
\end{array}\right\}$$

$1,0986122885 \ldots =$ dem hyperbolischen Logarithme von 3.

Zweyte Anwendung.

19) Man soll den hyperbolischen Logarithme von 10 finden.

Verfahren. Weil wir die Logarithmen von 8 und 9, aus den Logarithmen von 2, und 3 schon wissen, und 8, 9, 10, = a, b, c, wieder in einer arithmetischen Reihe stehen; so ist (*n.* 17.)

$$\mathrm{L}\,c = 2\,\mathrm{L}\,b - \mathrm{L}\,a - \mathfrak{l}$$

$$\mathrm{L}\,10 = 2\,\mathrm{L}\,9 - \mathrm{L}\,8 - \mathrm{L}\left(\frac{a\,c + 1}{a\,c}\right)$$

Weil nun ferner $\mathrm{L}\left(\frac{a\,c+1}{a\,c}\right) = 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \ldots\right)$

und $x = \frac{1}{2\,a\,c + 1} = \frac{1}{161}$; $x^2 = \frac{1}{25921}$: so entstehet

$$\begin{array}{lll|l} x = \left(\frac{1}{161}\right) = 0{,}00621118012 \ldots & = & 0{,}0062111801 & 2 \ldots \\ \frac{1}{3}x^3 = \dfrac{\left(\frac{1}{25921}x\right)}{3} = \dfrac{0{,}00000023961 \ldots}{3} & = & 0{,}0000000798 & 7 \\ \hline & & 0{,}0062112599 & 9 \\ & & \quad 2 & \\ \hline & & 0{,}0124225199 \ldots = \mathfrak{l}. & \end{array}$$

Es ist also

$$\mathrm{L}\,10 = \left\{\begin{array}{l} 2\,\mathrm{L}\,9 = 4\,\mathrm{L}\,3 = 4{,}3944491540 \\ -\mathrm{L}\,8 = 3\,\mathrm{L}\,2 = 2{,}0794415412 \\ \hline \qquad\qquad\qquad\quad 2{,}3150076128 \\ -\mathfrak{l} = \text{- - - - - -}\ 0{,}0124225199 \\ \hline \qquad\qquad\qquad\quad 2{,}3025850929 \ldots \end{array}\right.$$

= dem hyperbolischen Logarithme von 10.

Folgerung.

20) Aus dem Logarithme von 10 nun biethet sich uns eine sehr kurze Art dar, alle hyperbolische Logarithmen in gemeine briggische, und die briggischen in die hyperbolischen zu verwandeln. Denn da der briggische von $10 = 1$, und der hyperbolische $= 2,302585 0929 - -$ ist: und sich ferner alle Logarithmen, nach einer Grundzahle berechnet, gegen einander verhalten, wie sich andere nach einer andern Grundzahle berechnet, unter sich verhalten: so ist der hyperbolische Logarithme von 10, zu was immer für einen andern hyperbolischen, wie der briggische von 10, zu was immer für einen andern briggischen. Es sey H was immer für ein hyperbolischer, und B was immer für ein briggischer: so ist

$$2,3025850929 - - - - : H = 1 : \left(B = \frac{1}{2,3025850929} \times H = 0,434294481 - - \times H.\right) \text{ d. i.}$$

Man vervielfältige jeden gegebenen hyperbolischen Logarithme mit 0,434294481 - - -: so erhält man den briggischen.

Z. B. der hyperbolische Logarithme von 3 ist (*n.* 18.) $= 1,0986122885; \times 0,434294481 - - - = 0,4771212534 - - -$ dem briggischen von 3.

Erste Anmerkung.

21) Allein da wir (*n.* 20.) ohne Beweis angenommen, daß sich **die Logarithmen nach einer Grundzahle berechnet gegen einander verhalten, wie sich andere, nach einer anderen Grundzahle berechnet, unter sich verhalten:** so wollen wir nun diesen Satz auch beweisen.

Es seyen zwo Zahlen M und N, deren Logarithmen nach der Grundzahle a berechnet, $= m$ und n sind: so wird $M = a^m$, und $N = a^n$. Man erhebe M zur Dignität n, und N zur Dignität m: so wird $M^n = a^{mn}$ und $N^m = a^{mn}$; folglich ist $M^n = N^m$, oder $M = N^{\frac{m}{n}}$. Da nun in dieser Gleichung die Grundzahle a nicht mehr zu finden ist: so ist klar, daß der Werth $\frac{m}{n}$, von a unabhängig ist. Nun seyen für die nämlichen Zahlen M und N die Logarithmen nach einer anderen Grundzahle b berechnet, $= \mu$ und ν: so erhält man, wie vor diesem $M = N^{\frac{\mu}{\nu}}$. Es ist also auch $N^{\frac{m}{n}} = N^{\frac{\mu}{\nu}}$: und folglich $\frac{m}{n} = \frac{\mu}{\nu}$, d. i. $m : n = \mu : \nu$. W. z. f. w. *

Zweyte Anmerkung.

22) Nun wollen wir nur noch auch den Grund angeben, warum man unsere Logarithmen hyperbolische nenne. Es sey die, zur apollonischen Hyperbel, zwischen ihren Annäherungslinien (Asymptotis) gehörige Gleichung $a^2 = b y + x y$: oder wenn man $a = b = 1$ setzet, welches einem allzeit frey stehet, $1 = y + x y$; so ist $\frac{1}{1 + x} = y$. Löset man $\frac{1}{1 + x}$ in eine unendliche Reihe auf: so wird $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5$ - - - u. s. f. $= y$; und $d x - x d x + x^2 d x - x^3 d x + x^4 d x - x^5 d x - - = y d x$ dem Elemente des hyperbolischen Raumes zwischen dem Aste der Hyperbel und der Annäherungslinie. Integriert man also: so ist $x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{6} x^6 - - = \int y d x$ dem hyperbolischen Raume selbst. Da nun diese Reihe die nämliche ist, welche wir oben *n.* 13. zuerst als den Logarithme der Zahl N gefunden haben: so ist klar, daß die Logarithme gar füglich durch hyperbolische Räume ausgedrückt, und billig hyperbolische Logarithme genennet werden.

Der vortreffliche schottländische Baron Nepair, welchem die Ehre der erfundenen Logarithmen ohnstreitig zugehöret, ist unter so unzähligen Arten sie zu berechnen, zuerst auf die hyperbolischen verfallen, wiewohl er vielleicht nicht an die Hyperbel gedacht hat. ** Nach ihn hat Mercator ein Deutscher zuerst die Logarithmen aus der Quadratur der Hyperbel gezogen. Wallis ein Engländer hat in einem Schreiben an den Lord Brounker Zusätze zu Mercators Erfindung gegeben, und nach seiner eigenen Art die Logarithmen aus Hufeschnitten (vngulis) hergeleitet. ***

Allein

* S. Euleri Introd. in Analysin Infinit. T. I. p. 77.

** S. Abhandlungen der K. Schwed. Akad. B. 14. S. 14.

*** S. Transact. n. 38.

Allein zu bequemeren Gebrauche hat noch Nepair selbst, Herrn Brigges aufgemuntert, die Logarithmen nach der Grundzahle 10 zu berechnen, deren wir uns noch täglich in den Tafeln gebrauchen, und die wir von ihrem Erfinder die briggischen nennen. Denn Nepair sah gar wohl, wie groß der Nutzen der logarithmischen Rechenkunst wäre: und sagte mit Grunde; daß man durch die Logarithmen in einer Stunde mehr rechnen könnte, als sonst in einem Tage. Es war auch bloß die Vortrefflichkeit dieser Rechnungsart, daß hernach so viele grosse Leute, Halley, Cotes, Bernoulli, Euler, u. d. ihre Scharfsinnigkeit daran geübet.

Dritte Anmerkung.

23) Allein es ist durch die logarithmische Rechenkunst nicht nur die Beschwerlichkeit im Rechnen gehoben: sondern man kann die Berechnungen auch nach Belieben zu was immer für einer Genauigkeit forttreiben. Denn es stehet uns frey, einen Logarithme in so viele, als man will, zehntheilige Ziffer zu entwickeln, und dieß alles ohne gar zu grosse Mühe und Weitläuftigkeit. Da nun zu allen Halbsehnen die ihnen zugehörigen Logarithmen können gefunden werden: so folget überdieß, daß das vornehmste Geschäfte der Meßkunst, die Auflösung der Dreyecke, dadurch unsäglich erleichtert und erweitert worden; und daß die Ausmessungen nach jeder verlangten Schärfe können verrichtet werden, wenn gleich die in den gemeinen Tafeln befindlichen Logarithmen zu einer solchen Genauigkeit nicht mehr hinreichten; oder daß man sich in einem Falle befände, den Beystand der Tafeln gänzlich zu vermissen.

Es ist also dadurch die ganze Dreyeckmeßkunst von dem Joche der Tafeln befreyet, wohin schon lange vor diesem der Wunsch und die Bemühung des grossen Leibnizes zielten, und welches nun ein vorzüglicher Trost für alle Seefahrer, Sternkundige, Erdmesser, Naturforscher, Mechaniker, u. s. f. ist.

II.

Aus der Baukunst.

I.

24) „Jedem Menschen scheinet es an nichts mehr als an der Bequemlichkeit und Sparsamkeit gelegen zu seyn. Das Erste giebt uns die Baukunst; das Andere aber hänget nur einiger Maaßen davon ab. Wer ein Gebäude aufführen läßt: der hat allezeit eine solche Absicht dabey. Wird dem Gebäude gleich Anfangs seine beßte Festigkeit gegeben: so wird es auch am allerlängsten dauren, und dann darf eine um so viel längere Zeit vergehen, bis wieder eine Ausbesserung nöthig ist. Wenn es aber gleich im Anfange damit versehen wird: so ist des Besserns kein Ende: und man muß daher den Geldsack immer offen halten, damit diejenigen Tagewerker ihren beständigen Unterhalt daraus ziehen können, für deren Namen man sich schon zu fürchten hat. Heutiges Tages begehet man noch immer den Fehler, und schätzet die Dauerhaftigkeit eines Gebäudes aus der Menge der Baumaterialien, die dabey verderbet worden sind. Aber viele haben es leider! mit grossem Schaden erfahren müßen, daß ein solches Werk ehe Noth zu leiden pfleget, als man es vermuthen sollte. Diese Folge ist aber allzeit gewiß zu erwarten, sowohl, wenn das Gebäude zu stark, als auch wenn es zu schwach wird. Der Grund eines Gebäudes kann zwar niemal zu stark gemacht werden, weil ihn die umliegende Erde, in die er gesetzet wird, unbeweglich erhält. Aber die Stärke der oberen Theile eines Gebäudes vermehret die Schwere, und es kann sodann leicht die unteren Theile aus einander treiben. Die höhere Mathematik bestimmet nicht allein die Art der Verbindungen aller Theile eines Gebäudes: sondern sie lehret auch einen jeden Theil insbesondere seine gehörige Figur, Stärke, und Lage zu geben, damit er allen auf ihn zudrückenden Kräften, den möglich größten Widerstand leisten könne, und damit die Wirkungen aller Theile zusammen genommen, dem ganzen Gebäude die größte Festigkeit, und die beständigste Dauer verschaffen. Wir wollen das, was erst von dem ganzen Gebäude überhaupt gemeldet worden ist, nur an einigen Stücken desselben begreiflich machen. Einem Gewölbe, von was für einer Art es auch immer seyn möge, darf man nicht, wie leider! allzeit geschieht, eine selbst beliebige Figur geben. Die Zirkelbögen, die gedrükten Ovalbögen, und unzählige andere, sind eben diejenigen, die am allerwenigsten taugen, und daher kömmt es, daß die

„ mehresten derselben, so leicht zerbersten, und zerbrechen, wenn nur eine „ etwas schwere Last auf ihnen lieget. Ist denn dieses nicht alsdenn ein „ solcher Schade, der manchesmal dem besten Hause seinen Untergang dro- „ het. Die Krümmung eines jeden Bogens, ja eines jeden Gewölbes, das „ den möglichst größten Widerstand gegen die darauf drückende Last auszu- „ üben vermögend ist: kommt der Krümmung einer Kette sehr nahe, wenn „ sie mit ihren Enden über die beyden Pfeiler, worauf der Bogen ruhen „ soll, dergestalt befestiget wird: daß sie so tief herunter henkt, als man den „ Bogen selbst erhöhen will. „ *

25) Allein mit blossen Worten ist es fast unmöglich hievon einen rechten Begriff zu geben. Wir wollen uns also etwas näher an den Beweis, und an die Versuche machen. Wir wollen die Natur derjenigen krummen Linie aufsuchen, die eine an ihren zwey Enden festhangende Kette bildet. Wir wollen uns an den Erfindungen des vortrefflichen Johann Bernoulli, ** und David Gregory *** halten, deren Bahne unseren Schritten Sicherheit darbiethet, und deren Deutlichkeit die Gränzen unserer Begriffe nicht übersteiget. Wir setzen also

26) I. zumvoraus, daß ein Faden, ein Strick, eine Kette, oder was immer sonst, wodurch die Kettenlinie soll gebildet werden, in allen, auch den allerkleinsten Theilen vollkommen biegsam, und unausdehnlich seyn.

II. Wenn an was immer für zweyen Punkten A und C (I. Tafel 1. Fig.) eine Kette A B C, hanget: so sind die Kräfte, die sie an den Punkten A und C feste erhalten, eben so groß, als sie seyn würden, wenn sie ein Gewichte D erhielten, welches so schwer als die Kette ist, und in dem Punkte der zusammenlaufenden Tangenten A D und C D hienge, die ohne Gewichte sind. Der Grund davon ist klar. Denn das Gewichte der Kette, wirket in die Punkte A und C, nach der Richtung der Tangenten A D und C D: und ein anderes der Kette gleich schweres Gewichte wircket nach eben denselben: so müßen nothwendig die Kräfte, die sie in A und C feste erhalten, die nämlichen seyn. Man wird also sogleich die Kraft haben, welche die Kette in dem untersten Punkte B erhält, wenn man die Kraft suchet, mit welcher das gleich schwere Gewichte in E, welches in den zwey Tangenten A E und B E hanget, in den Punkt B wirket.

III.

* G. M. Lowitz Rede über den wahren Nutzen, welchen das menschliche Geschlecht aus der höheren Mathematik ziehen kann. 1752.

** Joh. Bernoulli Opera T. I. p. 492. seqq.

*** Philosophical Transactions n. 231.

III. Wenn die Kette, die an den zweyen Punkten A und C befestiget ist, in was immer für einem anderen F befestiget wird: so wird der Ueberrest der krummen Linie F B C unverändert bleiben, d. i. alle Punkte werden in der nämlichen Lage, wie vorhin seyn. Dieß bedarf keines Beweises, und die Erfahrung zeiget es täglich.

IV. Wenn man nun ferner alles wie vorhin läßt; so wird in jedem Punkte der krummen Linie sowohl vor als nach der Befestigung einerley Kraft erfordert: d. i. jeder Punkt, der befestiget wird, wird mit der nämlichen Kraft gezogen, als er unbefestiget gezogen ward. Dieß ist eine blosse Folgerung aus dem Vorhergehenden. Es wird also, den untersten Punkt B, feste zu halten, niemal eine größere Kraft erfordert; die Kette möge verlängert, oder abgekürzet, oder was eben so viel ist, der Punkt F möge wo immer in der Kette angenommen werden.

V. Ein Gewichte P (2 Fig.) möge an was immer für zweyen Fäden A B und B C hangen: so wirket es in die Punkte A und C, so daß die Kraft es in A zu erhalten, zur Kraft in C, in einem Verhältnisse ist, wie umgekehrt die Halbsehne des Winkels C B G, oder seines Ergänzungswinkels C B G, zur Halbsehne des Winkels A B G, oder seines Ergänzungswinkels A B G, und das ganze Gewichte P ist zu einer aus ihnen, z. B. C, wie die Halbsehne des Winkels A B C, zur Halbsehne des Winkels A B G, oder A B G. Dieß beweiset man in jeder Wägekunst, und wir thun es mit einem Versuche dar.

Versuch.

27) **Vorrichtung.** Wir nehmen eine messingene, kreisrunde, gleichdicke Scheibe. Ihr Rand ist mit 360 gleichweitentfernten Löchlein durchbohret. Zur Dicke der Scheibe sind noch drey kleine zweyzackigte Gäbelchen gerichtet: und iede Zacke hat nebst einem Zeiger ein Löchlein, so groß, als die Löchlein der Scheibe sind. Diese drey Gäbelchen befestigen wir an die Scheibe durch drey kleine Axen; die durch was immer für drey Löchlein der Scheibe gehen; doch so, daß sie um die Axen sehr beweglich bleiben. Dann schlingen wir zwo zarte Saiten, von den Gäbelchen an, über zwo Rollen, und henken Wageschalen daran: und an die Saite des dritten Gäbelchens auch eine Wageschale, die mit dem Gewichte der Scheibe abwärts senkrecht ziehet.

Erscheinungen. Richten wir nun die Gewichte, die an den drey Gäbelchen ziehen, so ein; daß sie sich gegen einander wie die Halbsehnen der Winkel nach der 2 Figur (*n.* 26, V.) verhalten: so zeiget 1) jeder Zeiger

des

des Gäbelchens auf den Halbmesser des Grades, an welchem es befestiget ist; 2) wird aber was immer für eine Saite mehr oder weniger beschweret, als es dieß Verhältniß erfordert, so weichen die Zeiger sogleich von den Halbmessern ab; und wenn 3) der Unterschied der Beschwerung zu merklich ist: so wird auch die ganze Scheibe aus dem Gleichgewichte, nach der überwägenden Richtung hingerissen. 4) Alles dieß geschiehet, man möge die Rollen einander mehr oder weniger nähern.

Satz. Es ist also die fünfte Voraussetzung (*n.* 26.) in der Erfahrung gegründet.

Aufgabe.

28) Nun alles dieß vorausgesetzet: so solle man die Natur der Kettenlinie durch eine Gleichung ausdrücken.

Auflösung. Es sey B A a die gesuchte Linie. Der unterste Punkt sey B. Die lothrechte Linie B G sey die Axe. Die Tangente an dem untersten Punkte B, sey die wagrechte Linie E B, und die andere Tangente, was immer sonst für eines Punkts A sey A E. Man ziehe die Semiordinate A G, senkrecht auf die Axe, und E L senkrecht auf die Semiordinate: so ist $BG = EL = x$; $GA = y$; $Gg = dx$; $Ha = dy$. Das Gewichte der Kette, oder weil sie durchaus gleich dick seyn soll, ihre Länge sey $= s$. Weil aber im Punkte B immerzu die nämliche Kraft erfordert wird, es möge die Kette in A verlängert oder abgekürzet werden (*n.* 26. IV.): so wollen wir diese unveränderliche Größe durch eine beständige Linie $C = a$ ausdrücken. Man stelle sich nun vor, daß das ganze Gewichte der Kette in dem Gewichte E versammelt, und in dem Schneidungspunkte der Tangenten aufgehenket sey: so wird in dem Punkte B die nämliche Kraft erfordert, das Gewichte E feste zu halten, als vorhin erfordert wurde, die Kette B A zu erhalten (*n.* 26. II.). Da sich nun auch (*n.* 26. V.) das Gewichte E zur Kraft B verhält, wie die Halbsehne des Winkels A E B (oder seines Ergänzungswinkels zu zweyen rechten E A L) zu der Halbsehne des Winkels A E L, d. i. wie $EL : AL$, oder wie $AH : Ha$; so möge man den Befestigungspunkt A E wo immer an der krummen Linie nehmen: so ist beständig das Gewichte der Kette zur Kraft in B wie A H zu H a; das ist: $s : a = dx : dy$: oder auch weil a H A, und A G D ähnliche Dreyecke sind, $dx : dy = DG : GA$. W. z. e. w.

Aufgabe.

29) Man soll die Kettenlinie nach ihrer gefundenen Natur beschreiben.

Auflösung. Es sey nach Herrn Gregory Lehre, zur Axe B G (3. Figur) aus dem Scheitelpunkte B eine gleichseitige Hyperbel B K beschrieben, deren halbe Axe $BC = a$. Zur nämlichen Axe, aus dem nämlichen Scheitelpunkte, sey ferner die Parabel B P beschrieben, deren Seite (Parameter) viermal so groß als die Axe der Hyperbel ist. Man verlängere jede Semiordinate der Hyperbel hg, bis hf dem Bogen der Parabel Bp gleich ist: so sage ich, daß die krumme Linie F B A, wenn $FG = GA$, die Kettenlinie sey.

Beweis. Es sey $BG = x$, so ist $Gg = dx$. GK sey $= y$, und weil B K h eine gleichseitige Hyperbel ist, worinne die Queraxe, die Kreuzaxe, und der Parameter einander gleich sind, mithin, wo $2\,CB = 2a = p$, ist: so wird aus $y = \sqrt{px + x^2}$; $y = \sqrt{2ax + x^2}$: und wenn man diese Wurzelgröße differenziret, $dy = \frac{2adx + 2xdx}{2\sqrt{2ax + x^2}}$

$= \frac{adx + xdx}{\sqrt{2ax + x^2}} = mh$. Da nun ferner der Parameter der Parabel $= 8a$ ist: so wird $GP = \mathfrak{y} = \sqrt{px} = \sqrt{8ax}$, und np

$= d\mathfrak{y} = \frac{8adx}{2\sqrt{8ax}} = \frac{4adx}{2\sqrt{2ax}} = \frac{2adx}{\sqrt{2ax}}$. Es ist also das

Element des parabolischen Bogens $= Pp = \sqrt{np^2 + nP^2} =$ P^2

$\sqrt{\frac{4a^2dx^2}{2ax} + dx^2} = \sqrt{\frac{4a^2dx^2 + 2axdx^2}{2ax}} =$

$\sqrt{\frac{2adx^2 + xdx^2}{x}} = dx\sqrt{\frac{2a + x}{x}}$. Man verviel-

fältige nun sowohl den Nenner als Zähler mit $\sqrt{2a + x}$; so wird

dx

$$dx\left(\sqrt{\frac{2a+x}{x}}\right)\times\sqrt{2a+x}=\frac{2adx+xdx}{\sqrt{2ax+x^2}}.$$

Da aber K F allerdings $=$ B P: so wird auch das Element von K F $= mh + sf = \frac{2adx+xdx}{\sqrt{2ax+x^2}}$ seyn. Allein mh haben wir gefunden $= \frac{adx+xdx}{\sqrt{2ax+x^2}}$, mithin ist $sf = \frac{2adx+xdx-adx-xdx}{\sqrt{2ax+x^2}} =$

$\frac{adx}{\sqrt{2ax+x^2}} = dy$ aus der Kettenlinie. Es ist also fF das Element der Kettenlinie selbst $= \sqrt{sf^2 + Fs^2} = \sqrt{\frac{a^2dx^2+dx^2}{2ax+x^2}} =$

$$\sqrt{\frac{a^2dx^2+2axdx^2+x^2dx^2}{2ax+x^2}}=\sqrt{\frac{(adx+xdx)^2}{2ax+x^2}}=$$

$\frac{adx+xdx}{\sqrt{2ax+x^2}}$. Allein von diesem Differenziale haben wir oben gesehen, daß es aus $\sqrt{2ax+x^2}$ entstanden. Oder will man $\int\left(\frac{adx+xdx}{\sqrt{2ax+x^2}}\right)$ ordentlich integriren: so geschiehet es auf diese Art: $\int\left(\left(2ax+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\times\left(adx+xdx\right)\right)$

$=\left(2ax-x^2\right)^{-\frac{1}{2}+1}=\sqrt{2ax+x^2}$. Es ist also $\sqrt{2ax+x^2}=$ BF $=$ der Länge der Kette, und $\sqrt{2ax+x^2}$:

$a =$

$a = dx : \left(\frac{a\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}} \right) = sf$. Man kann also durch diese Beschreibung alle Punkte der Kettenlinie bestimmen.

Erste Folgerung.

/B

30) Aus der Beschreibung der Kettenlinie erhellet also, daß ihre Semiordinate G F dem Bogen der Parabel A P, weniger der antwortenden Semiordinate, der um den nämlichen Scheitelpunkt beschriebenen gleichseitigen Hyperbel, gleich ist. Mithin ist die Kettenlinie eine transcendentische Linie.

Zweyte Folgerung.

31) Es erhellet ferner aus dem Beweise der Auflösung, daß die Länge der Kettenlinie B F, der antwortenden Semiordinate in der Hyperbel G K gleich ist. Denn weil die Differenzialien beyderseits gleich sind, und die Linien selber zugleich mit einander entstehen, so müßen sie auch selber gleich seyn. Da man nun die Länge der Kette hat: so hat man auch B C oder a, welche die halbe Axe der gleichseitigen Hyperbel ist. Denn da wird

$s = \sqrt{2ax + x^2}$ und $s^2 = 2ax + x^2$ und $\frac{s^2 - x^2}{2x} = a$, oder $2x : s + x = s - x : a$.

Dritte Folgerung.

32) Alle Kettenlinien sind einander ähnlich: weil sie alle aus ähnlichen in einer ähnlichen Lage beschriebenen Figuren entstehen. Wenn nun zwo gerade Linien, eine ähnliche Lage gegen den Horizont haben, und durch die Scheitelpunkte der Ketten gezogen werden: so schneiden sie auch ähnliche Figuren ab, und die Länge der abgeschnittenen Kettenstücke werden mit den abschneidenden Linien in einem gleichen Verhältnisse seyn.

Vierte Folgerung.

33) Weil aber auch H a die Kraft vorstellet, nach welcher die Kette wagerecht gegen m gezogen wird, und H A die Kraft, nach welcher sie senk-

senkrecht herab wirket: so ist die wagerecht wirkende Kraft, zur senkrecht wirkenden, wie die halbe Axe der gleichseitigen, um den nämlichen Scheitelpunkt beschriebenen Hyperbel zur Länge der Kette. Wenn aber die nämliche Kette immerfort bald an näheren, bald entfernteren Punkten aufgehenket wird: d. i. wenn sich bloß C B verändert, und die Länge der Kette unverändert bleibet: so richtet sich die horizontalwirkende Kraft nach der Axe der Hyperbel.

Erste Anwendung.

34) Stellet man sich nun vor, daß die Kette eine Lage annehme, die der vorigen gerade entgegen stehe, d. i. daß sie sich mit ihrem Scheitelpunkte aufwärts, in der nämlichen lothrechten Fläche auf der wagrechten Linie F A darstelle: so ist klar, daß die kleinsten Theile ihrer Krümmung in ihrer vorigen Lage unverändert bleiben. Bleiben sie aber in ihrer Lage unverändert, so tragen sie izt einander eben so, wie sie vorhin einander durch ihr Anziehen vom Falle erhalten haben. Sie sind also ein wirkliches Gewölbe, das vom Falle gesichert ist, und zwar so, daß, wenn das Gewölbe eine blosse Reihe der kleinsten, harten und schlüpfrigen Kügelchen wäre, keines das andere mehr oder minder, ein- oder auswärts treiben könnte, sondern alle einander bloß wegen ihrer Lage unterstüzten; wofern nur die zwey Ende auf unbeweglichen Punkten ruheten. **Es sind also alle Gewölber, die nach der Kettenlinie gebauet werden,** und genugsam unterstüzet sind, von allem Einfallen gesichert.

Zweyte Anwendung.

35) Allein obgleich dieser Nutze groß genug wäre, wenn man auch weiter nichts daraus folgern könnte: so ist doch noch etwas sehr merkwürdiges, welches eben so klar aus den obigen fließet, dabey in Acht zu nehmen. Alle Glieder einer vollkommen biegsamen, und durchgehends gleich dicken Kette, die an ihren Punkten feste hanget, bilden sich so, daß sie einander wechselweis vom Falle erhalten; und in allen Gewölbern müßen ebenfalls alle Glieder gegeneinander so gebildet seyn, daß sie einander vom Falle erhalten: es sind also alle Gewölber Kettenlinien, oder was das nämliche ist, kein Gewölbe kann seyn, das nicht eine Kettenlinie ist. Es dienet auch Niemanden zu einem Vorwande, daß man Gewölber nach anderen Linien bauet, die nicht einstürzen: denn es stecket gewiß in ihrer Dicke allzeit eine Kettenlinie verborgen, wenn gleich ihr Aeußeres nach einer andern Linie gebildet ist, und sie würden sogleich einstürzen, wenn sie die äußerste Dünne hätten, und ihre Theile schlüpfrig genug wären.

Dritte Anwendung.

36) Es fließt ferner aus der vierten Folgerung eine sehr leichte Art, die Last zu berechnen, mit welcher eine Seitenwand, die ein Gewölbe trägt, von dem Gewölbe nach der wagrechten sowohl als lothrechten Richtung gedrücket werde. Denn der wagrechte Druck ist zu dem lothrechten Drucke, wie die halbe Axe der gleichseitigen Hyperbel, zur Länge der Kette, bis zum Scheitelpunkte. Weil man aber die halbe Axe der Hyperbel weiß, sobald man die Länge und Höhe des Gewölbes weiß: so kann auch das Verhältniß des wagrechten Druckes, zu dem lothrechten Drucke des Gewölbes nicht unbekannt seyn. Diese Stücke sind aus den wichtigsten der ganzen Baukunst. *

Vierte Anwendung.

37) Damit aber dergleichen vortreffliche Wahrheiten, deren deutliche Erkenntniß weit über die Fähigkeit der gemeinen Arbeiter ist, dennoch nach deren sinnlichen Begriffen am füglichsten mögen eingerichtet werden: so muß man sich erinnern, daß es Beschreibungen transcendentischer Linien von mancherley Arten gebe. Dergleichen, als wir oben (*n.* 29.) in der zweyten Aufgabe gebraucht, sind für gemeine Leute unnütze. Allein die, welche vermittelst eines Werkzeuges, durch einen einzigen Zug geschehen, sind in der Ausübung überaus bequem, und können meistentheils auch von den Unerfahrensten verrichtet werden. * *

Und auf diese Weise ist die Beschreibung der Kettenlinie außerordentlich leichte. Es seyen M und N zween Punkte an zwoen gegenüberstehenden Mauern, auf die ein Gewölbe soll gespannet werden; man wisse auch die Hö-

* Mém. de l'Acad, des Sciences, avant son renouvellement. T. IX. p. 315.

* * Jac. Bernoullius : „ Triplex præcipue modus habetur construendi curuas mechanicas, siue transcendentes. Primus, sed ad praxin parum „ idoneus, fit per quadraturam spatiorum curuilineorum. Melior est, qui „ instituitur per rectificationes curuarum algebraicarum; accuratius enim, „ & expeditius in praxi rectificari possunt curuæ ope fili, vel catenulæ „ ipsis circumplicatæ, quam quadrari spatia. Eodem loco habeo illas „ constructiones, quæ peraguntur absque vlla rectificatione, & quadratura, per solam descriptionem curuæ alicuius mechanicæ, cujus puncta „ licet non omnia, infinita tamen, & quantumuis proxima geometrice in„ ueniri possunt, qualis solet esse logarithmica; & si quæ sunt ejus gene„ ris aliæ. Optimus vero modus sicubi haberi possit, ille est, qui per„ agi-

Höhe des Gewölbes: so zeichne man auf einem senkrecht stehenden Brete, in einer wagerechten Linie die Punkte M und N, auf den Mittelpunkt senke man eine wagrechte Linie darnieder, gleich der Höhe des Gewölbes; dann spanne man eine Schnur, die mit Wasser, worinne Röthelstein aufgelöset, angefeuchtet worden, von M gegen N, und lasse sie bis an den äußersten Punkt der Höhe des Gewölbes hinabsinken. Dann befestige man sie, und hebe ihren Scheitelpunkt ein bißchen vom Brete, und lasse sie zurücke an das Bret schnellen: so wird sie die Kettenlinie mit einem rothen Zuge an dem Brete darstellen, woraus man hernach die Lehrbögen zum Gewölbe ausschneiden, oder aushauen kann. Auf diese Art hat Blondel die Zimmerleute bey dem königlichen Schiff- und Galeerenbaue eine Kettenlinie, ob er sie gleich noch nach der galiläischen Meinung für eine Parabel hielt, aufzeichnen gelehret. *

Fünfte Anwendung.

38) Ob nun dieses alles seine vollkommene Richtigkeit bey Gewölbern von gleicher Dicke hat, die folglich alle nach der Kettenlinie sollten gebauet werden: so muß man doch hierinfalls dem herrschenden Gebrauche, die Gewölber nach Kreisbögen zu bauen, so weit zu Hülfe kommen, daß man die Gewölber vom Einsturze erhalte, und sie so vorsichtig, als möglich ist, zurichte. Es sey (4. Fig.) das Gewölbe A B C * * ein Stück eines Kreises, dessen Mittelpunkt in F ist, wovon F D A auf den Horizont senkrecht; B D aber mit ihm gleichweit abstehend gezogen wird, so daß F D $= x$, und B D $= y$, und der halbe Durchmesser $= r$. Nach der Natur des Kreises also ist, $y^2 = r^2 - x^2$. Das Unendlichkleine dieser Gleichung ist $y\, d y = - x\, d x$; mithin $- d x : d y = y : x$; woraus erhellet, daß es gleichviel sey, man möge $d x$ bejahend, oder verneinend nehmen.

„ agitur ope alicujus curuæ, quam natura ipsa absque arte motu quodam „ celerrimo, & quasi instantaneo, ad nutum geometræ producit: cum „ præcedentes modi requirant curuas, quarum delineatio, siue per motum „ continuum, siue per plurium punctorum inuentionem ab artifice instituatur, communiter vel lenta, vel impedita nimis existit. Ita constructiones illas problematum, quæ hyperbolæ quadraturam, vel logarithmicæ descriptionem supponunt, cæteris paribus posthabendas censeo iis, „ quæ ope catenariæ peraguntur, seu curuæ, quam suspensa catena sponte sua citius induerit, quam reliquis ipse describendis primam manum „ admoueris. „ Acta Erudit. A. 1694. p. 336. 337.

* Mém. de l'Acad. des Sciences, depuis 1666, jusqu' à 1699. T. V. p. 383.

* * Abhandl. der k. Schwed. Akad. B. 5. S. 266.

men. Es ist also $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{x} = \frac{p}{a}$ (n. 28.) Man muß also die Linie H G E mit dem Horizonte gleichweit abstehend, in einer Entfernung F E, vom Mittelpunkte des Kreises ziehen, welche die Größe a vorstellet: so werden sich ihre Stücke E G, E H u. s. f. welche die Linien F G, und F H bestimmen, wie die Schweren verhalten, welche die Bögen des Gewölbes von A an, haben. Alle die verschiedenen Höhen, welche die Gewölbsteine haben müßen, zu finden, ist ebenfalls keine Schwierigkeit. Denn nachdem das Gewölbe in gleich grosse Theile, nach der Breite der Steine getheilet ist, werden die gehörigen Höhen auf der wagrechten Linie E G H, wie G H durch die geraden Linien F G und F H abgeschnitten. Hr. de la Hire hat ebenfalls eine solche Zeichnung für die Höhen der Gewölbesteine gefunden, ob er sie gleich aus anderen mechanischen Gründen hergeleitet hat. * Es ist also ein Gewölbe nach einem Kreisbogen gebauet, an seinem Grunde dicker, und am dünnsten an seinem Scheitelpunkte. Zuvörderst aber ist diese Art die Gewölber zu bauen, beym Brückenbaue in Acht zu nehmen, wobey das Gewölbe ohne dieß keine gleichförmige Dicke leidet.

Erste Anmerkung.

39) Von der Kettenlinie hat zwar Galiläi zuerst gedacht: allein seine Gedanken erreichten ihre Eigenschaften nicht. Er hielt sie für eine Parabel, die sie nicht ist. Joachim Jung ein vortrefflicher Philosoph, und Mathematiker des vorigen Jahrhundertes, welcher noch vor Herrn Des-Cartes viel schönes von der Verbesserung der Wissenschaften im Sinne hatte, stellte Berechnungen und Versuche darüber an: und fand, daß sie nichts minders als eine Parabel wäre. Jedoch was sie eigentlich für eine Linie wäre, sagte er auch nicht. Seit dieser Zeit wurde dieser Knotten zwar wieder von vielen berühret, allein von Niemanden aufgelöset, bis * * Herr Bernoulli den grossen Leibnitz öffentlich im Jahre 1690. dazu einlud. Leibnitz unterwand sich der Sache seinem Freunde zu gefallen, war glüklich, und der erste, welcher zur Auflösung dieser vortrefflichen Aufgabe gelangte. Allein er gab sie nicht sogleich an den Tag. Er legte die Frage neuerdings den Größenkundigen vor, mit dem Zusatze, daß sie ebenfalls ihre Kräfte versuchen, und zur bestimmten Zeit ihre Auflösungen offenbahren sollten, wo er dann auch die seine nicht verhelen würde. Die bestimmte Zeit war noch nicht aus: so lieferten schon Christian Hughens, und die zween Herren Brüder Bernoulli ihre Auf-

* Mém. de l'Acad. des Sciences depuis 1666 - - - T. IX. p. 315.
* * Acta Erudit. 1691. p. 217.

Auflösung ein. Man sah sogleich den Nutzen dieser Linie ein: und Leibnitz zeigte, daß man durch ihre Beschreibung, so viele mittlere Proportionallinien, als man nur wollte; die Logarithmen und die Quadratur der Hyperbel finden könnte. Dieß reizte viele andere scharfsinnige Leute, daß sie sich eben an diese Untersuchungen wagten, und einige kamen noch viel weiter. Man unterschied die Ketten in gleichdicke, und ungleichdicke, und daher ihre Linien in gemeine, und ungemeine Kettenlinien, * so wie man sie in den Werken des Joh. Bernoulli sieht, und beyde sind wieder auf die allgemeinste Art abgehandelt worden. * *

Zweyte Anmerkung.

40) Die gemeine Kettenlinie gab auch ferners Anlaß, daß man die Krümmung eines Segeltuches, worein der Wind bläset, untersuchte. Alle Erfindungen fielen dahin aus, daß die Segellinie, mit der gemeinen Kettenlinie einerley Linie sey, welches sich auch ohnschwer aus den vorhergehenden folgern läßt. Man kehre die hangende Kette nur in einen senkrechten Stand, und stelle sich vor, daß gleichwie vorhin die Kraft der Schwere, in jedes Glied der Kette gleichmäßig und senkrecht auf den Horizont gewirket, izt die Kraft des anstossenden Windes eben in jedes Fäserchen der Fäden des Segeltuches gleichmäßig, und in der nämlichen Richtung gegen die Axe der Krümmung wirke: so sieht man leicht, daß sie vollkommen eines sind.

II.

Von gebrochenen Dächern.

41) „Ich will nur mit wenigen Worten (saget Lowitz) des Mansar„dischen Daches gedenken. Die Regeln, nach welchen die beyden Dach„sparren bestimmet werden, und die wir von allen Schriftstellern wissen, „sind erbärmlich. Ein jeder bemühet sich vor dem andern um die Wette, „damit er sich am weitesten von der Richtigkeit entferne, und damit der „Bauherr in die größten Kosten gesetzet werde. Es wird ein jeder wissen, „daß ein solches gebrochenes Dach wegen der Pfette am Buge desselben sehr „kostbar wird. Denn dorthin, wo die zween Sparren an ihrem Buge zu„sammenstossen, muß ein so starker Balke untergeleget werden, der öfters „den gewöhnlichen Durchzügen eines Hauses nichts nachgeben darf. Da „nun dieser Balke vermöge seiner Schwere bemühet ist, die Mauerlatten

* Joh. Bernoulli opera T. III. p. 401.

* * Der Hr. Clairaut hat im VII. Bande der Miscell. Berol. S. 270. eine sehr leichte allgemeine Art für die Kettenlinien gegeben. Der Herren, Euler und D. Bernoulli, ihre sind in den Actis Petropol. T. III.

„ von ihrem Lager zu verrücken, so ist klar, daß deßwegen die übrigen Ver-
„ bindungen um so viel stärker seyn müßen, damit der Wirkung dieser Last
„ ein Widerstand geschehe. Wer siehet nun nicht deutlich ein, daß die
„ Schwere des Dachstuhles, bloß deßwegen vermehret wird, damit die
„ Pfette kann erhalten werden. Aber die höhere Mathematik giebt uns
„ eine vortreffliche Regel, wie man dieser kostbaren, und schweren Pfette
„ gar entbehren kann. Es kommt nur auf die rechte Länge der beyden Spar-
„ ren an, die das Mansardische Dach ausmachen. Denn dieses kann da-
„ her so gut gemachet werden, daß es sich in seiner Lage selbst erhalten kön-
„ ne, wenn auch gleich alle Zapfen ledig, und das Dach beynahe völlig
„ loß gemachet würde. Ist dieß nicht wieder ein Vortheil von großer Wich-
„ tigkeit? „ *

42) Herr Lowitz schlägt uns zu dieser Verbesserung des Herrn Couplet Abhandlung von den Dächern in den Schriften der Akademie der Wissenschaften vor. ** Allein wir geben des Herrn Pehr Elvius seiner in den Abhandlungen der k. Schwed. Akademie im Jahre 1743. *** den Vorzug.

43) Wir haben im vorgehenden Abschnitte angenommen, daß die Kette nicht nur vollkommen biegsam sey, sondern auch daß ihre Glieder ungemein klein, und an der Zahl unendlich sind. Sind aber diese Glieder von bestimmten Längen, und einer gewissen Anzahl, so kommt eine Art von Kettenlinien heraus, die aus geradelienigten Theilen bestehet, die sich gegeneinander nur nach gewissen Winkeln neigen. Die Untersuchung also dieser Neigung kann überaus nützlich seyn, denn gleichwie die Kettenlinie mit sehr kleinen Gliedern die beßten Gewölber giebt: so wird sonder Zweifel die Kettenlinie mit endlichen geraden Gliedern, die besten gebrochenen Dächer geben. Es sey also die

Aufgabe.

44) Man soll die Natur der Kettenlinie finden, die aus geradelinigten endlichen Theilen bestehet.

Auflösung. Es sey A B C D (Fig. 5.) die Hälfte einer solchen Kettenlinie. Ihre Gelenke, A B, B C, C D, seyen alle von gleicher Dicke, so daß ihr Mittelpunkt der Schwere G H, I, mitten auf jedes Glied falle. Aus der Lehre des Schwerungspunkts nun ist bekannt, daß jedes Glied die-
ser

* S. Herrn Lowizes Rede.
** Mém. 1731. p. 69.
*** S. 251.

ser Kette, nach seiner Verbindung mit den übrigen eine solche Lage annehmen müße, daß ihr gemeinschaftlicher Schwerungspunkt die möglichst größte Entfernung von der wagrechten Linie F E, an welcher die Kette hängt, erhalte. Um also diese Entfernung zu finden, ziehe man für jedes Glied, die wagerechten und lothrechten Linien durch die Gelenke A, B, C, die einander in den Punkten P, Q, R schneiden. Man vervielfältige also die Schwere des Gliedes A B, mit der Hälfte von AP, sammt der Summe der übrigen lothrechten Linien, und die Schwere von B C mit $\frac{1}{2}$ B Q, sammt der Summe der übrigen lothrechten Linien, u. s. f. Dann nehme man die Summe aller Produkte, und theile sie mit der Schwere der ganzen Kette, so hat man die Entfernung des Schwerungspunkts der Kette von der wagerechten Linie F E. Es seyen daher die Gewichte der Glieder, der Ordnung nach, vom Scheitelpunkte an, a, b, c, d, und die Längen der lothrechten Linien v, x, y, z: so ist die Summe der Produkten diese

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2} a v + a x + a y + a z \\ \quad + \frac{1}{2} b x + b y + b z \\ \qquad + \frac{1}{2} c y + c z \\ \qquad\quad + \frac{1}{2} d z \\ \hline \end{array}$$

$= f v + g x + h y + i z$, worinne $f = \frac{1}{2} a =$ der Schwere der Kette zwischen A und G; $g = a + \frac{1}{2} b =$ der Schwere der Kette zwischen A und H; $h = a + b + \frac{1}{2} c =$ der Schwere der Kette zwischen A und I. Folglich ist die Entfernung des Schwerungspunkts der Kette von F E $=$

$$\frac{f v + g x + h y + i z}{a + b + c + d}$$

Nun aber um v, x, y, z, welche veränderliche Größen sind, zu bestimmen: so lasset uns die Kette, nachdem sie sich in ihre natürliche Lage gerichtet hat, in C befestigen, und alsdann wollen wir sehen, was ihr unterster Theil A B C für eine Gestalt werde haben müßen. Allein sie sey, was sie immer für eine wolle, so ist es doch gewiß, daß sie von der, welche sie vor der Befestigung des Punkts C hatte, nicht unterschieden ist. $\frac{f v + g x}{a + b}$ drücket also die Entfernung des Schwerungspunktes des Stückes A B C, von der wagerechten Linie aus, die durch C gezogen wird.

 Weil

Weil jedoch diese Entfernung, vermöge dessen, was wir oben gesagt haben, ein Größtes ist: so ist

$$\frac{\left(f\,d\,v + g\,d\,x\right)\left(a + b\right)}{\left(a + b\right)^2} = o, \text{ und daher } f\,d\,v = -g\,d\,x.$$

Es sey ferner $PB = \varphi$, $QC = \xi$, $RD = \chi$, die gleichfalls veränderlich sind. Es bewege sich die Kette wirklich, jedoch so, daß der Punkt B in m (Fig. 6.) nur durch eine unendlich kleine Entfernung aus B in m komme, man ziehe $p\,m$, gleichweit entfernet von PB, und $m\,n\,o$ gleichweit entfernet von AP: so ist $B\,n = d\,P$; und $m\,n = d\,v$, und weil der Winkel $m\,B\,n = n\,o\,B = P\,A\,B$, und bey n, und P rechte sind; so ist ferner $AP : PB = nB : m\,n$

$$v : \varphi = d\,\varphi : \left(dv = \frac{\varphi\,d\,\varphi}{v}\right):$$

Auf gleiche Weise ist, wenn sich der Punkt C auf vorgenannte Art beweget, $s\,C = d\,\xi$, $r\,s = d\,x$, und $BQ : QC = s\,C : r\,s$

$$x : \xi = d\,\xi : \left(dx = \frac{\xi\,d\,\xi}{x}\right).$$

Man setze also in der Gleichung $f\,d\,v = -g\,d\,x$ an die Stelle des $d\,v$, und $d\,x$, ihre Werthe: so wird $\frac{f\,\varphi\,d\,\varphi}{v} = -\frac{g\,\xi\,d\,\xi}{x}$. Weil aber ferner $PB + QC$, die Entfernung des Punktes C von der Axe der Kettenlinie allzeit gegeben, und folglich eine beständige Größe ist; so ist auch $n\,B + s\,C = d\,\varphi + d\,\xi = o$, mithin $d\,\varphi = -d\,\xi$ und

$\frac{f\,\varphi}{v} = \frac{g\,\xi}{x}$ oder $\frac{f\,x}{\xi} = \frac{g\,v}{\varphi}$, welches uns die Lage der Glieder AB, und BC bestimmet. Wird nun aber die Kette in D feste gemacht: so ist $\frac{f\,v + g\,x + h\,y}{a + b + c}$ die Entfernung des Schwerungspunkts, des Stückes ABCD, von der wagrechten Linie, welche durch D gehet, und ist zugleich ein Größtes. Es ist also $f\,d\,v + g\,d\,x + h\,d\,y = o$ mithin $f\,d\,v + g\,d\,x = -h\,dy$, und

aus

aus obigen Gründen $v\,D = d\,\chi$, $u\,v = d\,y$, und
$R\,C : R\,D = v\,D : u\,v$
$y : \chi = d\,\chi : \left(d\,y = \frac{\chi\,d\,\chi}{y}\right)$. Setzet man also in der Gleichung $f\,d\,v + g\,d\,x = -\,h\,d\,y$, an die Stelle der $d\,v$, $d\,x$, $d\,y$, ihre Werthe: so hat man $\frac{f\,\varphi\,d\,\varphi}{v} + \frac{g\,\xi\,d\,\xi}{x} = -\,\frac{h\,\chi\,d\,\chi}{y}$ oder weil $\frac{f\,\varphi}{v} = \frac{g\,\xi}{x}$; $\frac{g\,\xi}{x}\left(d\,\varphi + d\,\xi\right) = -\,\frac{h\,\chi\,d\,\chi}{y}$. Allein weil auch hier $P\,B + Q\,C + R\,D$ eine beständige Linie ist, und folglich $d\,\varphi + d\,\xi + d\,\chi = o$, und
$d\,\varphi + d\,\xi = -\,d\,\chi$: so wird auch $\frac{g\,\xi}{x} = \frac{h\,\chi}{y}$ oder $\frac{g\,y}{\chi} = \frac{h\,x}{\xi}$, welches uns auch die Lage der Glieder B C, und C D giebt.

Diese Laze nun durch einen Lehrsatz zu bestimmen: so bemerke man, daß $\frac{v}{\varphi}$, $\frac{x}{\xi}$, $\frac{y}{\chi}$, die Tangenten der Winkel A B P, B C Q, C D R sind. Denn es ist

$P\,B : A\,P = S.\,t : \text{Tang. Ang. } A\,B\,P$

$\varphi : v = 1 : \frac{v}{\varphi}$ u. s. f. Es ist also nach der ersteren Gleichung $\frac{v}{\varphi} : \frac{x}{\xi} = f : g$. und nach der zweyten $\frac{x}{\xi} : \frac{y}{\chi} = g : h$; folglich gilt der

Lehrsatz.

Die Tangenten von den Winkeln, welche die Glieder mit den wagrechten Linien machen, verhalten sich untereinander, wie die Schwe=

Schweren der Kette, von jeden Gliedes Schwerungspunkte bis an den Scheitelpunkt der Kette. *

Erster Versuch.

45) **Vorrichtung.** Wir nehmen eine Kette, die aus sechs geraden Gliedern bestehet, und woran jedes Glied ein 9 Zolle langer, und ungefähr 1 Linie dicker, metallener Drath ist. Die Glieder sind ferner an ihren Enden ungefähr 2 Linien in die Länge, bis an den Mittelpunkt ihrer Dicke ausgefeilet, so daß zwey entgegenstehende Ende zweyer Glieder in einander vollkommen passen, und eine ergänzte Dicke darstellen. Im Mittelpunkte dieser ausgefeilten Ende gehet durch ein Löchlein jeden Endes eine kleine metallene Axe; die sie nur so viel zusammen schließt, daß sie alle Glieder der Kette in der Richtung einer einzigen senkrechten Fläche erhält, übrigens aber alles in der äußersten Beweglichkeit lasse. Diese Kette henken wir mit den Enden ihrer zwey lezten Glieder an eine wagrechte Linie auf;

Erscheinungen: Und sehen, 1), daß sie sich mit dem Punkte der Axe, die das dritte und vierte Glied bindet, d. i. mit ihrem Mittelpunkte am tiefsten senke; 2) daß die senkrechte Linie, die von daher auf die wagrechte Linie, die die Kette trägt, gezogen wird, diese Linie in zwey gleiche Theile schneidet; 3) daß ferner alle wagrechte Linien, die von den Axen der Glieder auf die vorgehende senkrechte gezogen werden, allzeit beyderseits gleich sind; und endlich 4), daß die Tangenten der Winkel, welche die Glieder mit den wagrechten Linien machen, sich wie die Schweren der Kette, vom tiefsten Punkte an, bis an den Schwerungspunkt der Glieder verhalten. Denn weil die Glieder metallene Drathe sind, die folglich durchgehends gleich dicke sind, so verhalten sich ihre Massen, wie ihre Längen: und weil die Schweren wie die Massen sind, so verhalten sich die Schweren auch wie die

Län-

---

* S. 256. B. V. der Schwedischen Abhandlungen ist in der Angabe dieses Lehrsatzes ein Irrthum des Ausdruckes. Es stehet: Die Tangenten von den Winkeln, welche die Glieder miteinander machen, statt: Die Tangenten von den Winkeln, welche die Glieder mit den wagrechten Linien machen. Denn wäre es so, so müßten die Schweren der Kette vom Scheitel, bis zu den Mittelpunkten der Schwere jeden Gliedes beständig abnehmen, weil die Winkel, die die Glieder miteinander machen, immer stumpfer, und folglich ihre Tangenten kleiner werden. Allein der Irrthum läßt sich auch ohne dieß durch die blosse Gegeneinanderhaltung des vorgehenden und nachfolgenden ohne Schwierigkeit entdecken.

Längen. Wenn nun die Länge vom tiefsten Punkte an, bis an den Schwerungspunkt des ersten Gliedes = 1 ist, so ist sie bis an den Schwerungspunkt des zweyten Gliedes = 3, und bis an den Schwerungspunkt des dritten Gliedes = 5. Es sind also die dahin antwortende Schweren = 1; 3; 5. Allein die Tangenten der vorhingenannten Winkel, sind auch in diesem Verhältnisse. Sie verhalten sich also wie die Schweren.

Satz. Es sind also alle Voraussetzungen (*n.* 25.) in der Erfahrung gegründet: und der Lehrsatz (*n.* 44.) ist auch durch die Erfahrung richtig.

46) Verlängert man aber (5. Fig.) ein Glied, z. B. A B, bis es die wagrechte Linie Q C, in L erreichet: so ist wegen Aehnlichkeit der Dreyecke P A B, und Q B L; $PA : PB = QB : \left(QL = \frac{PB \times QB}{PA} = \frac{\varphi x}{v}\right)$. Jedoch weil $\frac{f\varphi}{v} = \frac{g\xi}{x}$, so ist auch $\frac{\varphi}{v} = \frac{g\xi}{fx}$; mithin ist $QL = \frac{g\xi x}{fx} = \frac{g\xi}{f}$ und $\frac{QL}{\xi} = \frac{g}{f}$ d. i. $\frac{QL}{QC} = \frac{g}{f}$; oder

$$QL : QC = g : f$$
$$QL - QC : QC = g - f : f$$
$$CL : QC = g - f : f$$

d. i. Q C verhält sich zu C L, wie die Schwere der Kette vom Scheitelpunkt an, bis zum Schwerungspunkt des ersten Gliedes, zur Schwere der Kette vom Schwerungspunkt des ersten Gliedes, bis zum Schwerungspunkt des zweyten Gliedes; oder auch wie AB : AB + BC. W. z. f. w.

Zweyter Versuch.

47) **Vorrichtung.** Es sey alles wie im vorgehenden Versuche. Man verlängere nur die Richtungslinie des ersten Gliedes, und die wagrechte Linie, die durch die Axe des zweyten und dritten gehet:

Er-

Erscheinung. So findet man, daß sich Q C : C L verhält wie 1 : 2. Allein vermöge dessen was oben in *n.* 45. gesagt worden, verhalten sich die Schweren der Kette, wie ihre Längen; da nun die Längen von A bis G zur Länge von G bis H (5. Fig.) und auch so in der Kette, ebenfalls wie 1 : 2 ist: so

Satz. bekräftiget die Erfahrung auch diesen zweyten Lehrsatz.

Dritter Versuch.

48) Vorrichtung. Man henke die im ersten Versuche beschriebene Kette, an eine wagrechte Linie, die auf einen senkrecht stehenden Brette gezogen ist, auf: und lasse sie ihre natürliche Stellung, nach aller Geräumlichkeit nehmen. Wenn dieß geschehen, so befestige man die Ende der Kette, an denen sie henkt, so weit, daß sich die lezten Glieder bloß um ihre Axe drehen, nicht aber aufwärts oder abwärts weichen können. Nach diesem senke man das aufrechtstehende Brett ganz sachte rückwärts nieder, so, daß alle Punkte der Kette in ihrer vorigen Lage bleiben, bis das Brett vollkommen wagrecht da liege. Dann richte man es umgekehrt ganz sachte, und ohne die geringste Erschütterung oder Ungleichheit der Bewegung wieder auf: so daß das Unterste zu oberst komme, bis es wieder vollkommen die senkrechte Stellung hat.

Erscheinung. So werden die Glieder der Kette auch in ihrer umgekehrten Lage sich beyderseits das Gleichgewicht halten; die Kette wird aufrecht stehen, und alles in seiner unveränderten Lage bleiben.

Satz. Die Erfahrung zeiget also, daß die Schweren der Glieder gegeneinander einerley Wirkung haben, die Kette möge hangend, oder stehend angenommen werden.

Folgerung.

49) Es ist also auch mit dem, was wir oben (*n.* 34.) von den unendlich kleinen Gliedern einer Kette angenommen haben, gerade so richtig, als wenn wir es durch einen Versuch erwiesen hätten. Denn da das gegenseitige Wirken der Schwere der Glieder in dieser Kette sich eben so verhält, wie in der dasigen, und das Größere oder Kleinere der Glieder keinen wesentlichen Unterschied machet: so muß der vorgehende Satz auch mit dem Satze des *n.* 34. eines seyn.

Vierter Versuch.

50) **Vorrichtung.** Wir nehmen vier hölzerne, viereckigte, durchaus gleichdicke Stäbe, so, daß ihre Mittelpunkte der Länge die Mittelpunkte der Schwere sind. Ihre Enden sind nach den Winkeln Q C B, P B A, P A B (Fig. 5.) schief zugeschnitten. Diese vier Stäbe setzen wir auf einer wagrechten Fläche, ohne alle Verbinduung durch eine Axe, oder Zapfen, oder was immer sonst für einen Schluß, so übereinander, daß sich ihre Längen alle in einer senkrechten Fläche befinden; und

Erscheinung. Da bemerken wir, daß sich ihre Schweren einander wechselweis das Gleichgewicht halten, und den ganzen Bau vom Einsturze sicher halten; wo sonst jedes einzelne Glied, für sich selber sogleich darnieder fällt, oder auch alle zugleich, so bald sie aus der Stellung der Kette des *n.* 44. 45. und 46. tretten.

Satz. Es ist also einerley Ding, ob die Glieder einer stehenden Kette in ihren Axen beweglich zusammen hangen oder nicht, wenn sie nur so beschaffen sind, wie wir sie in der Vorrichtung angegeben haben.

Erste Folgerung.

51) Es ist also auch jene Folgerung aus der Erfahrung richtig, die wir oben *n.* 34. aus Herrn Gregory angeführet haben; daß, wenn man ein Gewölbe aus den allerkleinsten Kügelchen machen könnte, die einander in einem einzigen Punkte berührten, und bloß ohne allen übrigen Zusammenhang in einer Kettenlinie senkrecht übereinander stünden, dieß Gewölbe niemal einstürzen würde.

Zweyte Folgerung.

52) Da nun aber ferners unsere übereinander im Gleichgewichte stehende vier Stäbe, allerdings ein gebrochenes Dach vorstellen; so folget auch nothwendig, daß alle gebrochene Dächer, wenn sie am stärksten und dauerhaftesten, d. i. wenn sie durchgehends im Gleichgewichte seyn sollen, so gestaltet seyn müßen, als eine Kette (*n.* 43.) von vier Gliedern ist, die an den zweyen Enden aufgehenket, ihre natürlichste Gestalt angenommen hat.

Dritte Folgerung.

53) Es ist also kein einziges dergleichen gebrochenes Dach nach der vollkommensten Kunst gebauet, das nicht nach diesem Grundsatze gebauet ist:

und ob sich gleich auch Dächer, die anders gebauet sind, tragen: so tragen sie sich doch bloß deßwegen, weil sie mit sonst unnöthigen Verbindungen, von Holze und Eisen zusammengeschlossen werden. Daher stehet sehr oft ein ganzer Wald zum Schaden der Landeswirthschaft auf einem einzigen Gebäude, und die Früchte eines ganzen Landes gehen durch den Brand einer einzigen Stadt im Rauche auf: Alles aber bezahlet den Künstler für die Unwissenheit in seiner Kunst.

54) Um jedoch hierinne auch den Unerfahrensten eine begreiffliche Regel vorzulegen, so setzen wir voraus, daß 1), das obere und untere Dach, d. i. der obere und untere Theil des gebrochenen Daches von einer Breite seyn sollen; 2) daß sie durchgehends mit einerley Materie, mit Kupfer, Eisen, Blech, Bley, Schiefer, Dachziegeln, u. d. sollen gedecket werden; und 3), daß dem Künstler die Weite der Spannung, d. i. die Länge des Hauptbalkens, und die Höhe des Daches bekannt sind. Dann folge er dieser Vorschrift: Er ziehe zwey gerade Linien, von unbestimmter Länge, E *e* und D H, (7. Fig.) die eine senkrecht auf die andere. Auf der einen nehme er die Breite des Daches A *a*, auf der andern die Höhe D C, so daß die Höhe auf dem Mittelpunkte der Breite stehe. Dann nehme er mit dem Zirkel die ganze Breite, und setze die eine Spitze an dem einem Ende der Breite in A an, und durchschneide mit der andern die senkrechte Linie der Höhe in H, und so setze er auch die eine Spitze in dem obersten Punkte der Höhe C an, und durchschneide mit der andern beyderseits die Linie der Breite in E und *e*. Dann ziehe er die Linien H A, E C, und H *a*, *e* C: so bestimmen ihm die Punkte B und *b*, die Linien C B, B A und C *b*, *b a*, welche das Kettendach sind.

Beweis. Man lasse aus dem Punkte B die Linie B F senkrecht auf A D fallen. Man verlängere B C, bis in E, und erweise, daß A F zu A E sich verhalte wie 1 : 2, so hat man (*n.* 47.) erwiesen, daß B C und B A eine Kettenlinie sey. Wegen den ähnlichen Dreyecken A F B und A D H ist

$$AF : AB = AD : AH.$$

Da nun A D : A H, vermöge der Zeichnung wie 1 : 2 ist; so ist auch A F zu A B wie 1 : 2. Es ist also A F die Halbsehne von 30°; B A F $= 60°$, und E A B $= 120°$. Jedoch weil A B F $=$ A H D $=$ D E C; so ist auch A E B $= 30°$: und E A B + A E B $= 150°$; mithin E B A $= 30°$. Es ist also E A B ein gleichschenklichtes Dreyeck: und folglich F A : A E $= 1 : 2$. W. z. e. w.

55) Weil

55) Weil es aber fast bey allen Baumeistern zur Gewohnheit geworden ist, daß sie die gebrochenen Dächer in halben Kreisen verzeichnen: so müßen wir auch sehen, wie dieselben aussehen dörften, wenn sie nach guten Gründen der Hebekunst sollten gebauet seyn. Wir nehmen also das Verhältniß der Schweren des ganzen, und oberen Daches für bekannt an $= n : 1$. In welchem Verhältnisse auch E A zu A F (8. Fig.) stehen muß. Es sey nun A F $= x$, und E F $=$ E A $+$ A F $= nx + x = (n+1)x$. Es sey ferner der halbe Durchmesser des Kreises A D oder C D $= 1$. so ist E D $=$ E A $+$ A D $= nx + 1$. Weil aber auch

$$2 - x : BF = BF : x; \text{ so ist}$$

$$2x - x^2 = BF^2 \quad \text{und}$$

$$\sqrt{2x - x^2} = BF$$

Nun die Dreyecke E F B und E D C sind einander ähnlich. Es ist also

$$EF : BF = ED : CD$$

$$(n+1)x : \sqrt{2x - x^2} = nx + 1 : 1$$

$nx + x = (nx+1)\left(\sqrt{2x - x^2}\right)$; und wenn man das Wurzelzeichen durch Erhebung wegschaffet: so ist

$$n^2x^2 + 2nx^2 + x^2 = \left(n^2x^2 + 2nx + 1\right)\left(2x - x^2\right)$$

$$n^2x^2 + 2nx^2 + x^2 = \left.\begin{array}{r} -n^2x^4 - 2nx^3 \\ + 2n^2x^3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -x^2 \\ +4nx^2 \end{array}\right\} + 2x$$

$$\left.\begin{array}{l} n^2x^4 - 2n^2 \\ \quad + 2n \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x^3 + n^2 \\ \quad - 2n \\ \quad + 2 \end{array}\right\} x^2 - 2x = 0$$

Diese Gleichung des vierten Grades aufzulösen, nehme man alle Theiler des lezten Gliedes die 1, x, 2, und $2x$ sind. Daß x, auch ein Theiler der ganzen Gleichung sey, sieht man sogleich: weil alle Glieder, in x vervielfältiget sind. Es ist also $x \pm 0 = 0$, d. i. eine aus den vier Wurzeln der Gleichung ist $= 0$. Nach der Theilung stehet die Gleichung so:

$$\left.\begin{array}{r} n^2 x^3 - 2 n^2 \\ + 2 n \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x^2 + n^2 \\ - 2n \\ + 2 \end{array}\right\} x - 2 = 0$$

Hier sind nur 1, 2, Theiler des lezten Gliedes: und $x - 1$ ist in der That auch ein Theiler der Gleichung. Es ist also $x - 1 = 0$; oder $x = 1$, d. i. die zweyte aus den vier Wurzeln der Gleichung ist $= 1$. Nach der zweyten Theilung erhält die Gleichung folgende Gestalt:

$$n^2 x^2 + \left(- n^2 + 2 n\right) x + 2 = 0$$

$$x^2 + \left(\frac{- n^2 + 2 n}{n^2}\right) x = - \frac{2}{n^2}$$

$$x^2 + \left(\frac{- n + 2}{n}\right) x + \left(\frac{- n + 2}{2 n}\right)^2 = \frac{- 2}{n^2} + \left(\frac{- n + 2}{2 n}\right)^2$$

$$\pm x \pm \left(\frac{- n + 2}{2 n}\right) = \sqrt{\frac{- 2}{n^2} + \frac{n^2 - 4 n + 4}{4 n^2}}$$

$$x = - \left(\frac{- n + 2}{2 n}\right) \pm \sqrt{\frac{- 8 + n^2 - 4 n + 4}{4 n^2}}$$

$$x = \frac{\frac{1}{2} n - 1 \pm \sqrt{\frac{1}{4} n^2 - n - 1}}{n} \; {}^*$$

Welches die Ausdrücke der übrigen zwo Wurzeln sind.

Erste Folgerung.

56) Ist nun (8. Fig.) F A $= x = 0$, so wird das untere Dach in Ansehung des oberen unendlich klein, und seine Schwere ist auch $= \frac{1}{\infty}$. Da nun EA: AF ist, wie die Schwere des ganzen Daches, zur Schwere des

* In der Urschrift ist statt $\frac{1}{4} n^2$ ein $\frac{1}{2} n^2$.

des obern Daches: so ist $E A : A F = 1 + \frac{1}{\infty} : 1 = 1 : 1$, d. i. $E A$ muß $A F$ gleich seyn; wie sie es wirklich sind. Denn beyde fallen in den Punkt A, und sind $= \frac{1}{\infty}$.

Zweyte Folgerung.

57) Ist $F A = x = 1$: so wird das untere Dach im Ansehen des obern, unendlich groß, und seine Schwere $= \infty$. Da nun $E A$ zu $A F$, wie die Schwere des ganzen Daches, zur Schwere des obern Daches: so ist $E A : A F = \infty + 1 : 1 = \infty : 1$, wie sie es in der That sind, denn wenn F in den Punkt D fällt: so wird $C E$ die Tangente, mithin auch $A E$ unendlich groß.

Dritte Folgerung.

58) Aus diesen beyden Werthen von $F A$ also erhellet, daß sie keine in der That gebrochene, sondern nur einfache Dächer vorstellen: allein, daß auch nichts destoweniger einfache Dächer, dem von uns bestimmten mechanischen Gesetze unterworfen sind, so wie zwey Glieder auch eine Kette vorstellen können.

Vierte Folgerung.

59) Um nun wirklich gebrochene Dächer in einem halben Kreise zu beschreiben, muß man die zwey lezteren Formeln (n. 55.)

$$\frac{\frac{1}{2} n - 1 \pm \sqrt{\frac{1}{4} n^2 - n - 1}}{n}$$ verzeichnen können, so wie es die Meßkunst lehret.

Allein es sey das untere Dach zwey Male so schwer, als das obere; so wird $E A : A F = 3 : 1 = n : 1$ und die Formel $=$

$$= \frac{\frac{3}{2} - 1 \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 4}}{3} = \frac{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-7}}{3} = \frac{1}{6} \pm \frac{1}{6} \sqrt{-7}.$$

Welches anzeiget, daß kein solches Dach möglich ist in einem Kreise beschrieben zu werden.

Fünfte Folgerung.

60) Eben so zeiget es sich, wenn das untere Dach dem obern gleich schwer seyn soll: Denn da wird $EA : AF = 2 : 1 = n : 1$; mithin

$$x = \tfrac{2}{2} - 1 \pm \sqrt{\tfrac{4}{4} - 2 - 1} = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-2},$$

und folglich ist ein solches Dach auch unmöglich.

Sechste Folgerung.

61) Es sey $\sqrt{\tfrac{1}{4}n^2 - n - 1} = 0$; so ist

$$n^2 - 4n = 4$$

$$n^2 - 4n + 4 = 8$$

$$\pm n \mp 2 = 2\sqrt{2}$$

$$n = +2 \pm 2\sqrt{2}$$

welches anzeiget, daß in diesem Falle n zweyerley Bestimmungen annehme, und daß folglich $AF = x = \frac{\tfrac{1}{2}n - 1}{n} = \frac{n-2}{2n} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2} - 2}{2(2 \pm 2\sqrt{2})}$

$= \frac{\pm\sqrt{2}}{2 \pm 2\sqrt{2}}$. Da also $EA : AF = n : 1 = 2 + 2\sqrt{2} : 1$,

und folglich $1 : 2 + 2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2 + 2\sqrt{2}} : (\sqrt{2} = EA)$; so ist EA der Seite eines in dem Kreise verzeichneten regelmäßigen Viereckes gleich; es ist aber ferner $2 + 2\sqrt{2} : 1 = \sqrt{2} : 1 - \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ denn wenn man $\sqrt{2} : 1 - \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ mit $2 + \sqrt{2}$ vervielfältiget, so kommt $2 + 2\sqrt{2} : 1$. Da nun $1 - \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, oder welches eben so viel

ist

ist $1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} = AF$, wenn $ABCba$, die Hälfte eines regelmäßigen Achteckes ist: so ist es klar, daß im angenommenen Falle das Dach ein halbes regelmäßiges Achteck im Kreise seyn werde: allein es ist auch nicht minder klar, daß die Schwere des unteren Daches beynahe viermal größer seyn müße, als die Schwere des oberen Daches. Denn $2 + 2\sqrt{2} - 1$ ist der Unterschied der Schweren $= 1 + 2\sqrt{2} = 1 + 2,82 = 3,82$.

Erste Anmerkung.

62) Ob dieß nun gleich eine erwiesene Wahrheit ist: so siehet man sie doch nirgends von den Baumeistern, die ihre gebrochene Dächer in Kreisen verzeichnen, beobachtet. Sie machen insgesammt das obere und untere Dach gleich schwer, d. i. sie decken sie gleichmäßig mit einerley Materien: so wie sie sie gleich lang machen; welches sonder Zweifel ein grobes Versehen wider die Hebekunst ist.

Zweyte Anmerkung.

63) Herr Reuß königl. Hofzimmermeister * behauptet, daß durch diese Eintheilung eines Achteckes das obere Dach zu niedrig sey, und in Deutschland nicht so flach angelegt werden dürfe, wenn es der Witterung widerstehen soll; „ daher theile ich (spricht er) die Höhe des Unterdaches in drey „ gleiche Theile, und gebe davon 2 zum Oberdache. „ Allein da er weder zur Eintheilung in ein Achteck, noch zu dieser Erhöhung des Oberdaches einen Grund angiebt, noch Erfahrungen über die Dauer der Dächer bey verschiedener Schiefe vorbringt: so that er uns in diesem Stücke mit seinem neuen Buche eben so grosse Dienste, als so viele seiner Vorgänger: daß die Künstler durch sie niemal klüger wurden.

Aufgabe.

64) Man soll eine allgemeine Art angeben, jedes gebrochene Dach nach jeder gegebenen Schiefe des Oberdaches, so zu verzeichnen, daß es nach den obigen Lehrsatze (*n.* 44.) sich selbst das Gleichgewicht halte.

Auf-

* Reuß Anweisung zur Zimmermannskunst. Fol. Leipzig, 1764. S. 3.

Auflösung. Wenn die Schiefe des Oberdaches nach der Witterung, was immer für eines Landes gegeben ist: so weiß man den Winkel A B P (5. Fig. 1. Taf.) und da man hier das Verhältniß der Schweren der Dächer vom Gübel bis zum Mittelpunkte eines jeden auch als bekannt voraus setzet: so findet man (*n.* 44.) den Winkel B C Q sogleich. Bestimmet man nun entweder die Länge des untern Daches, oder seine Höhe, oder die Weite seiner Senkung auf den Hauptbalken: so findet man allzeit C Q; und aus C Q findet man auch P B und P A. W. z. f. w.

Anmerkung.

65) Bisher haben wir uns des Herrn Pehr Elvius Lehre bedienet. Nun wollen wir noch ein paar sehr nüzliche Sätze aus Herrn Couplet anführen. *

Aufgabe.

66) Man soll den wagrechten Druck seines jeden gebrochenen Daches gegen seine Grundlage bestimmen.

Auflösung. Es sey A B C (9. Fig.) das gebrochene Dach, dessen wagrechter Druck zu bestimmen ist. Man ziehe N O, durch die Schwerungspunkte des obern und untern Daches, und ziehe durch P in der Hälfte NO, die Linie M P L lothrecht auf DC: so sagen wir, daß die Schwere des ganzen Daches zum wagrechten Drucke gegen die Grundlage, wie A D zu L C ist.

Beweis. Aus der Verzeichnung der Figur ist klar, daß P der Schwerungspunkt des ganzen Daches A B C, und M L seine Richtungslinie ist. Ziehet man nun durch den Gübel des Daches A, die wagrechte Linie A M R, und zu M C durch L eine gleichweit entfernte Q L: so hat man ein längliches Viereck Q M C L, worinne M L (= A D) die Schwere des ganzen Daches vorstellet. Man zergliedere diese Schwere in M Q, und M C: so wird M Q als die wagrechte, von dem entgegenstehenden halben Dache durch den Gegendruck aufgehalten, und M C wird die Gewalt gegen die Grundlage, nach ihrer eigenen Richtung genommen, ausdrücken. Allein wenn man auch hier wieder das längliche Viereck M R C L beschreibet, so wird MC in M R und M L aufgelöset. Da nun MR = L C,

* Mém. de l'Acad. des Sciences 1731. p. 81. u. f. f.

LC, und ML = AD = der Schwere des Daches: so ist die Schwere des Daches zum wagrechten Drucke, wie die Höhe AD zu LC. W. z. f. w.

Anwendung.

67) Weil man bey jedem Dache seine Höhe messen, und seinen Schwerungspunkt, mithin auch LC bestimmen kann: so kann man auch bey jedem Dache sagen, mit wie viel Centner Kraft es wider die Mauern, auf denen es ruhet, wagrecht strebe, oder den Hauptbalken zu zerreißen suche.

Erste Folgerung.

68) Bey einfachen Dächern aber hat es gar keine Umstände vonnöthen: denn es erhellet sowohl aus *n.* 58. als hier von sich selbst: daß sich die Schwere des Daches zum wagrechten Drucke eben so, wie in den Zusammengesezten verhalte. Folglich läßt sich bey einfachen Dächern der wagrechte Druck eben so leichte berechnen.

Zweyte Folgerung.

69) Wenn man also durch Erfahrung bestimmet hat, mit wieviel Gewichte sich ein Balken von gegebener Dicke krümme; so kann man hierdurch auch die Dicke derer, die den Dachstuhl tragen, bestimmen.

Aufgabe.

70) Man soll bestimmen, ob die Last der Dachziegel, u. d. g., wovon die Sparren eines Daches gedrücket werden, mehr bey gedrukten, als steilen Dächern wirke.

Auflösung. Es seyen (10. Fig.) AB, CB zwey Dächer von gleicher Breite DB. Die Schwere der Dachziegel auf AB = p, auf CB = π. Die Wirkung der Last auf AB = f, auf CB = φ. Weil die Zahl der Dachziegel bey der nämlichen Breite der Dächer, sich wie ihre Längen AB und CB verhält: so ist auch $p : \pi = AB : CB$. Allein weil AB und CB schiefe Flächen sind, in denen sich die Last zu ihrer Wirkung, wie die Länge zur Grundlinie verhält: so ist wieder

$$f : p = BD : AB$$
$$\pi : \Phi = CB : BD.$$

 Man

Man setze aus diesen dreyen Ebenmaaßen ein einziges zusammen: so wird

$$\begin{cases} pf\pi : \pi\varphi p = AB \times BD \times CB : CB \times AB \times BD \\ f : \varphi = AB \times BD \times CB : CB \times AB \times BD. \end{cases}$$

Da nun die lezten Glieder einander gleich sind, so sind es auch die ersten, d. i. der Druck, welchen die Last der Dachziegel in beyde Dächer äußert, ist im gedrukten und steilen einerley. W. z. f. w.

Anmerkung.

71) Wir haben oben (*n.* 41.) gesagt, daß sich ein, nach der Kettenlinie gebauetes Dach, ohne alle Verbindung von sich selbst tragen müße, und haben unsern Satz zugleich durch einen Versuch erwiesen. (*n.* 50.) Allein dadurch schließen wir in der Ausübung nicht alle Verbindungen ganz und gar aus. Ein ungebundenes Dach, würde weder dem Regen, noch Schnee, vielweniger den Winden, Stürmen und Erderschütterungen widerstehen können. Wir haben nur die Unwissenheit der Zimmerleute getadelt, die ihre Dachstühle so bauen, daß sie das Holz unmäßig verschwenden, bloß um ihr Werk, ohne alle Rüksicht auf die Zufälle der Witterung, vom Einsturze zu erretten. Wir wollten ihnen also dadurch begreiflich machen, daß die Verbindung der Dächer, womit sie nur ihrem Irrthume widerstehen müßen, künftig alle wegbleiben könnten. Daß aber auch geringe Verbindungen eine beträchtliche zufällige Last des Daches übertragen können: beweisen wir mit folgendem Versuche.

Versuch.

72) **Vorrichtung.** Wir haben uns einen kleinen Dachstuhl nach den Regeln der Kettenlinie (*n.* 44.) verfertiget. Das obere und untere Dach sind einander gleichlang und gleichschwer. Die Spannung ist 2′, 7″. Die Höhe 1′, $3\frac{1}{2}$″. Die Dicke der Sparren ist $\frac{3}{4}$″; die Breite $\frac{1}{2}$″. Das ganze Dach mit dem Hauptbalken, auf welchem es ruhet, und dem Brettchen, womit es gedecket ist, wäget nur 27 Loth. Die Sparren sind ineinander, und in den Hauptbalken nur eingefalzet, jedoch alle Falzen sind nach den Winkeln der Glieder der Kettenlinie eingeschnitten: und mit zweyen hölzernen Nägelchen verbunden. Alles übrige, Kehlbalken, Gübelsäule, Stuhlsäule, Winkelbänder, u. d. sind weggelassen.

Erscheinung. Dieß Dach trägt nicht nur sich selber; sondern wenn wir auf eines der obern Dächer, bis zehnmal soviel Gewichte legen, als das ganze Dach schwer ist: so weichet das Senkloth, welches vom Gübel auf den Hauptbalken fällt, nicht um das geringste von dessen Mittelpunkte ab. Daher ist der **Schluß** von sich selbst klar.

III.

Aus der Hebekunst.

Von der Berechnung der größten Wirkung der Maschinen.

73) Alle Maschinen sind entweder einfache oder zusammengesezte Werkzeuge. Die Wirkungen aller einfachen Werkzeuge sind auf der Wirkung des Hebels gegründet: und weil alle zusammengesezten aus einfachen bestehen, so beruhen ihre Wirkungen ebenfalls auf der Natur des Hebels. Die Natur des Hebels aber bestehet in diesem, daß jede wirkende Kraft in ihrem Abstand vom Ruhepunkte vervielfältiget, das Maaß ihres Strebens, oder Druckes (momentum) hervorbringe. Ist nun dieß Vielfältige an beyden Aermen des Hebels gleich: so sind beyde Kräfte im Stande des Gleichgewichts, worauf die ganze Wägekunst gebauet ist. Ist das Vielfältige aber an dem einem Arme größer als an dem anderen: so wirkt das Größere über das Kleinere mit dem gemeinschaftlichen Unterschiede ihres Strebens. Alles dieß läßt sich auch sogleich von dem einfachen, auf die zusammengesezten Hebel ziehen: wenn man nur beobachtet, daß in den zusammengesezten Hebeln das Maaß des Druckes nicht anderst als aus der Kraft, in alle, ihr antwortende Abstände vom Ruhepunkte vervielfältiget, entstehe.

74) So leicht es nun ist, die Berechnungen aller Maschinen zu verrichten, die bloß im Stande des Gleichgewichts betrachtet werden; und so leicht es auch ist, wenn eine aus zweyen gegeneinander wirkenden Kräften, überwägend ist, zu sagen, um wieviel sie überwäge: so schwer will es doch fort, wenn man sagen soll, „ wie die Bewegung, im Falle der Ueberwucht, „ beschaffen seyn, und mit was für einer Geschwindigkeit die Last beweget „ werden müße, wovon man nicht ein Wort in den gemeinen Abhandlun„ gen der Maschinen findet. - - - Dieß ist die vornehmste Ursache, wa„ rum man sich fast auf keine auf dem Papiere entworfene Maschine ver„ lassen kann. - - - - Denn da man für einen jeden Fall - - - immer „ unendlich vielerley Maschinen erdenken kann, durch deren Hülfe die Last „ von der Kraft beweget wird: so bestehet die wichtigste Frage darinne, „ wie man unter allen diesen Maschinen diejenige ausfindig machen „ soll, vermittelst welcher die Last am geschwindesten beweget wer„ de.

„ de. Diese Frage aber kann ohne die höhere Mathematik unmöglich auf- „ gelöset werden. *

75) Um uns also aus dem Stande des Gleichgewichts zu den Gesetzen der Bewegung einen gesicherten Uebergang zu bereiten, wollen wir uns erinneren, daß, wenn ein Hebel von einer überwägenden Kraft um seinen Ruhepunkte in eine Kreisbewegung gesetzt würde: die Kreisbögen, die in gleichen Zeiten von den Kräften durchlaufen würden, sich wie ihre Abstände vom Ruhepunkte verhielten. Da es nun ein sicheres Gesetze der gleichförmigen Bewegung ist; daß sich die Räume, die von zwoen Kräften in gleichen Zeiten durchlaufen werden, wie die Geschwindigkeiten der Kräfte verhalten: so ist es auch sicher, daß das Maaß des Strebens einer Kraft an einem Hebel, aus der Kraft in ihre Geschwindigkeit vervielfältiget könne genommen werden.

76) Jedoch um ferner zu finden, wie die Maschine beschaffen seyn müße, damit die Last am geschwindesten beweget werde: siehet man leichte, daß alle Mühe verlohren seyn würde, wenn man so wohl die Kräfte, als ihre Geschwindigkeiten in einem beständigen unveränderlichen Verhältnisse annähme. Denn sie würden immer das nämliche wirken, weil sie immer mit dem nämlichen Maaße gegeneinander strebten: und man würde niemal sagen können, ob eine größere oder kleinere Wirkung der Maschine möglich wäre. Es muß also zum Mindesten eine Kraft oder eine Geschwindigkeit als veränderlich gesezt werden; um das Größte ihrer Wirkung zu erhalten.

77) Wir wollen die Aufgabe zuerst bey druckenden Kräften, wo sie angenehmer ist, versuchen: und sie sodann auf die stossenden lenken, wo sie beschwerlicher ist.

Aufgabe.

78) Es sey ein Balken, welcher mit seinen zweyen Enden auf zwoen unbeweglichen Stützen ruhet. Man beschwere ihn auf verschiedenen Punkten seiner Länge mit einem gegebenen Gewichte $= A$, und bestimme denjenigen, bey welchem er zum Buge oder Brechen am geneigtsten ist.

Auflösung. Es sey die Länge des Balkens $= a$; der Abstand des Punkts des größten Druckes von dem einen Ende $= x$; so ist der andere Ab-

* S. Robins neue Grundsätze der Artillerie - - - von Leonh. Euler übersezt und erläutert. 1745. in der Vorrede. Herrn Eulers Abhandl. von den Maschinen überhaupt III. B. der Nov. Comm. Acad. Petropol.

Abstand $= a - x$. Weil sich nun das Streben der Kraft, in diesem Falle, so wohl nach dem einen, als nach dem anderen Abstande von den unterstützten Enden des Balkens richtet: so ist sie in einem zusammengesezten Verhältnisse beyder Abstände. Es ist also das Maaß ihres Strebens $= A\, a\, x - A\, x^2$; und weil es das Größte seyn soll, $A\, a\, d\, x - 2\, A\, x\, d\, x = 0$; folglich $\frac{1}{2}\, a = x$; d. i. auf dem Mittelpunkte des Balkens drücket A am stärksten.

Versuch.

79) **Vorrichtung.** Wir haben an einem senkrechten Brette, in einer wagrechten Linie zwo Rollen befestiget, deren Flächen von der Fläche des Brettes gleichweit entfernt sind. Ueber diese zwo Rollen haben wir eine Saite gezogen, und an ihre beyde Ende Gewichte gehenkt. Zwischen den zwoen Rollen ist auf der Saite eine dritte sehr bewegliche, unter sich mit einem Hacken versehen, woran wir ein drittes Gewichte befestiget. Von einer Seitenrolle zur anderen, haben wir eine wagrechte Linie gezogen, und von dieser ihrem Mittelpunkte eine lothrechte abwärts.

Erscheinung. 1) Ziehen die Seitengewichte das mittlere Gewichte sachte in die Höhe, oder lassen es sachte herunter, ohne ihm einen Schwung zu geben: so steiget oder fällt es in keiner anderen Richtung, als in der lothrechten, die auf den Mittelpunkt der Entfernung der Seitenrollen gezogen ist. 2) Bekömmt das Mittelgewichte aber einen Schwung, so ruhet es in keiner anderen Richtung, als wieder in der nämlichen lothrechten: es mag wehrend dem Schwunge stehen, oder auf- oder abwärts gezogen werden.

Schluß. Die Natur sich selber überlassen, wirket allzeit das Größte, so mit den nämlichen Kräften kann gewirket werden. * Da nun das mittlere

* Daß die Natur mit gegebenen Kräften, allzeit die größte Wirkung, oder welches das nämliche ist, daß sie die gegebene Wirkung allzeit mit den kleinsten Kräften verrichte, wird heute von keinem erhabnerem Geiste mehr in Zweifel gezogen: nachdem es Hr. v. Maupertuis (Mém. del' Acad. des Sciences 1744. Mém. del' Acad. de Berlin 1746.) und Herr Euler (Methodus de Maxim. & Minim. Mém. del' Acad. de Berlin 1748.) so ausbündig erwiesen haben. Die Größenkundigen bedienen sich also dessen mit Rechte als eines Grundsatzes. Daher haben sie auch zwo Arten eingeführet, die Aufgaben der Hebekunst aufzulösen. Die eine bestimmet die Wirkungen durch die wirkenden Ursachen: die andere bestimmet sie durch die Ursachen der Absicht (per caussas finales). Beyde führen zu einerley Auflösung. So haben wir oben (n. 28.) die Natur der Kettenlinie von unendlich kleinen Gliedern nach der ersten, und die Natur der Kettenlinie von endlichen Gliedern nach der zweyten Art aufgelöset.

lere Gewichte, sich selbst überlassen, ungeachtet der Reitzungen, der ziehenden Seitenrollen, allzeit im Mittelpunkte der Abstände bleibet: (1. Erschein.) oder davon durch einen Schwung oder Stoß entfernet, sogleich wieder zu ihn zurücke kehret: (2. Erschein.)

Satz. So ist der Mittelpunkt der Abstände, auch in der Erfahrung, der Punkt des größten Druckes.

Von der Berechnung der größten Wirksamkeit allerley Maschinen, die durch einen anstossenden Strom beweget werden. *

80) Es sey x die Geschwindigkeit einer Schaufel in einem Wasserrade; t die Kraft des anstossenden Wassers; P die Last der Maschine; v die Geschwindigkeit der Last: so ist (n. 74.) $t\,x = P\,v$, im Falle, daß sich die Maschine immerfort gleichförmig bewegen solle.

Wenn man also die Geschwindigkeit eines Stromes weiß, die in Schuhen, welche er in einer bestimmten Zeit, z. B. in einer Sekunde durchläuft, gegeben ist; und die Fläche der Schaufeln, in die er senkrecht anstößt, auch bekannt ist: so findet man das Größte der Wirksamkeit der Maschine auf folgende Art.

Aufgabe.

81) Man soll die Geschwindigkeit finden, mit welcher die Schaufeln eines Wasserrades müßen beweget werden, um die Maschine in die allergrößte Wirksamkeit zu setzen.

Auflösung. Man theile mit Herrn de la Hire ** das Viereck der Geschwindigkeit des Stromes durch 56, welches eine beständige Zahl für alle Fälle ist: so erhält man die Höhe einer Wassersäule, deren Grundfläche die Schaufel, und deren Gewichte *** der Ausdruck der anstossenden Kraft ist.

* Mém. del' Acad. des Sciences 1725.

** Mém. del' Acad. des Sciences 1702. p. 267.

*** Wir setzen hier mit Herrn de la Hire und Pitot, den Körperschuhe Wasser = 72 ℔. Jedermann wird sich in besonderen Fällen sein eigen Verhältniß ohne Mühe bestimmen können. Insgemein nimmt man ihn zu 70 ℔ an. S. Belidors Wasserbaukunst. §. 339.

ist. Allein diese Geschwindigkeit entstehet nur im ersten Augenblicke des Stosses, vor welchem das Rad noch geruhet hat. Die künftigen Geschwindigkeiten, die ein schon bewegtes Rad erhält, sind aus dem Unterscheide der vorgehenden Geschwindigkeiten des Rades und des Stromes zu nehmen. Es sey die Geschwindigkeit des Stromes $= a$, die Geschwindigkeit einer Schaufel $= x$; so ist $a - x$ eine der nachfolgenden Geschwindigkeiten des anstossenden Stromes. Es ist also nach der hirischen Regel $\left(\frac{a - x}{56}\right)^2$ die Höhe der Wassersäule, deren Gewichte den Stoß ausdrücket, oder $\left(\frac{a - x}{56}\right)^2$ ist die Wassersäule selbst, wenn die Grundfläche der Schaufel $= 1$ ist. Vervielfältiget man nun $\left(\frac{a - x}{56}\right)^2$ mit 72: so ist $\frac{9}{7} \times \left(a^2 - 2ax + x^2\right)$ $=$ der anstossenden Kraft. Diese mit der Geschwindigkeit der Schaufel vervielfältiget, giebt $\frac{9}{7} \times \left(a^2 x - 2 a x^2 + x^3\right)$. Weil man aber die größte Wirksamkeit der Maschine suchet: so wird $\frac{9}{7} \times \left(a^2 dx - 4 a x dx + 3 x^2 dx\right) = 0$; und $a^2 - 4 a x + 3 x^2 = 0$: folglich $x^2 - \frac{4}{3} a x = - \frac{1}{3} a^2$, und $x = a$ oder $\frac{1}{3} a$. W. z. f. w.

Erste Folgerung.

82) Es sind also zwey Fälle möglich, in welchen die Maschine am wirksamsten ist: der eine, wenn das Wasserrad so geschwinde als der Strom selbst beweget wird; der andere, wenn es den dritten Theil seiner Geschwindigkeit hat. Allein so bald das Rad so geschwinde als der Strom selbst gehet; so widerstehet ihm die Last P nicht mehr: und weil beynebens kein Körper, der beweget werden soll, ohne Widerstand seyn kann; so muß P in diesem Falle $= o$ seyn; d. i. die Maschine leistet in diesem Falle der größten Wirksamkeit keine Dienste. Ihre Dienste sind also bloß auf dem zweyten Falle gegründet; wenn die Geschwindigkeit des Rades $= \frac{1}{3} a$ ist.

Zwey-

Zweyte Folgerung.

83) Ist also die größte Geschwindigkeit des Rades $= \frac{1}{3} a$; so wird $a - x = \frac{2}{3} a =$ der Geschwindigkeit des Anstosses. Die Vierecke der Geschwindigkeiten aber drucken die Kraft des Stosses aus. Es ist also $\frac{4}{9} a^2$ die Kraft des Stosses.

Dritte Folgerung.

84) Vervielfältiget man $\frac{4}{9} a^2$ in die Geschwindigkeit des Rades $= \frac{1}{3} a$; so ist $\frac{4}{27} a^3 = t\, x$. (*n.* 74.)

Vierte Folgerung.

85) Theilet man aber nach Herrn de la Hire das Viereck der Geschwindigkeit des Anstosses (*n.* 80.) durch 56 : so giebt $\frac{4}{504} a^2 = \frac{1}{126} a^2$ die Höhe der Wassersäule. Ist nun f^2 die Oberfläche der Schaufel : so wird $\frac{a^2 f^2}{126}$ der Wassersäule selber gleich, und $\frac{a^2 f^2}{126} \times 72 = \frac{4}{7} a^2 f^2 = t$;

und folglich $t\, x = \frac{4}{7} a^2 f^2 \times \frac{1}{3} a = \frac{4}{21} a^3 f^2 = P\, v$. Welches eine allgemeine Formel ist, wodurch man das Größte der Wirkung, von was immer für einer Maschine, die durch einen Strom getrieben wird, allzeit genaue erkennen kann; und dieß, ohne daß Einem das Innere der Maschine bekannt seyn müße.

Erste Anwendung.

86) Es sey die Geschwindigkeit eines Stromes diese, daß er in einer Sekunde 3 Schuhe weit fortfließe, d. i. $a = 3$. Es sey die Oberfläche einer Schaufel, $f^2 = 100$ Flächenschuhe. P die zubewegende Last $=$ 3000 ℔. Man will die Geschwindigkeit der Last wissen. — Es ist also $\frac{4 a^3 f^2}{21 P} = v$ d. i. $\frac{10800}{63000} = \frac{6}{35} = v$; d. i. die Last beweget sich in einer Sekunde $\frac{6}{35}$ Schuhe, und folglich in einer Stunde 617 $\frac{1}{7}$ Schuhe.

Zwey-

Zweyte Anwendung.

87) Es sey die Geschwindigkeit der Last, $v = 3$ Schuhe in einer Sekunde; die Geschwindigkeit des Stromes $a = 4$ Schuhe in einer Sekunde; die Oberfläche der Schaufel $s^2 = 100$ Flächenschuhe. Man verlanget die Größe der zubewegenden Last. — Es wird also $\frac{4\,a^3\,s^2}{21\,v} = P$; d. i. $\frac{25600}{63} = 406\frac{22}{63}$ ℔ $= P$.

Dritte Anwendung.

88) Es sey die Geschwindigkeit der Last $= 3$ Schuhe in einer Sekunde; die Last selber $P = 3000$ ℔; die Geschwindigkeit des Stromes $a = 3$ Schuhe in einer Sekunde. Man sage, wie viel Flächenschuhe die Schaufel haben müße. — Es wird also $s^2 = \frac{21\,P\,v}{4\,a^3}$; d. i. $\frac{21 \times 9000}{108}$ $= 1750$ Flächenschuhe $= s^2$.

Vierte Anwendung.

89) Es sey ferner die Geschwindigkeit der Last $v = 3$ Schuhe in einer Sekunde; die Last $P = 3000$ ℔; die Oberfläche der Schaufel $= 100$ Flächenschuhe: so findet man a die erforderliche Geschwindigkeit des Stromes $= \sqrt[3]{\frac{21\,P\,v}{4\,s^2}}$, d. i. $\sqrt[3]{472,5} = 7,7$ in einer Sekunde.

Erste Anmerkung.

90) Aus diesen Beyspielen siehet man also, wenn einem eine Maschine zu berechnen vorkömmt; wie sie zu prüfen ist, um uns zu versichern, ob sie in ihrer größten Wirksamkeit sey oder nicht: und was erforderlich seyn würde; um sie in den vollkommensten Stand zu setzen, wenn sie die Probe nicht aushielte. Allein um auch Leuten, die über die gemeine Rechen- und Wägekunst weiter nichts verstehen, eine begreifliche Regel an die Hand zu geben, so sollen sie beobachten; daß wenn sie eine, entweder schon wirkende oder nur entworfene Maschine, nach dem Stande des Gleichgewichts berech-

net haben, die Kraft niemal mehr oder weniger, als $\frac{4}{9}$ der Last zu überwältigen haben därfe. Sie müßen also die Last des Gleichgewichts entweder um $\frac{5}{9}$ verringern, oder die Hebel in einem solchen Verhältnisse untereinander verbinden, daß die Wirkung der Kraft um eben so viel erleichtert werde. — Der Grund dieser Regel lieget in der zweyten Folgerung (*n.* 82). Denn da wird erwiesen, daß bey der größten Wirksamkeit einer Maschine, die Kraft des Anstosses nur $\frac{4}{9}\ a^2$ ist. Da nun a^2 die volle Kraft ist; so setze man P für die volle Last des Gleichgewichts; p für die verringerte Last bey dem geringsten Widerstande. Man hat also das Ebenmaaß, $a^2 : \frac{4}{9}\ a^2 = P : p$; folglich $\frac{4}{9}\ P = p$. *

Zwey-

* Diese Regel hat Herr Parent, welcher der erste Untersucher der größten Wirksamkeit dergleichen Maschinen war; wiewohl auf eine etwas andere Art gegeben. S. Mém. del' Acad. des Sciences. 1704. p. 331. Allein, weil einem sehr oft auch, zuberechnende Maschinen vorkommen, bey denen es schon Anfangs so verfehlet worden; daß sie niemal zu ihrer größten Wirksamkeit gelangen können: so setze man wie vorhin $P v =$ dem Streben der Last; $a =$ der Geschwindigkeit des Stromes; $x =$ der Geschwindigkeit des Rades: so ist $a - x$ die Geschwindigkeit des Anstosses. Ist nun f^2 die Oberfläche der Schaufel: so ist nach der hirischen Regel $\frac{2}{7} f^2 (a - x)^2$ die Gewalt des Stosses; und $\frac{2}{7} f^2\, x\, (a - x)^2 = P\, v$; folglich ist $x^3 - 2\, a\, x^2 + a^2\, x - \frac{7\, P\, v}{9\, f^2} = o$. — Es sey nun in einem besonderen Falle, $a = 3$ Schuhe in einer Sekunde; $f^2 = 100$ Flächenschuhe; $P = 3000$ ℔ : $v = 3$ Schuhe in einer Sekunde : so wird $x^3 - 6\, x^2 + 9\, x - 70 = o$. Man setze $x = 6$; so bleibet $- 16 = o$; man setze es $= 7$; so kömmt $+ 42 = o$: welches ein Zeichen ist, daß eine aus den drey Wurzeln der Gleichung zwischen 6 und 7 falle. Sie sey $6 + d$: so ist

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & + 216 + 108\, d + 18\, d^2 + d^3 \\ - 6\, x^2 & = & - 216 - 72\, d - 6\, d^2 \\ + 9\, x & = & + 54 + 9\, d \\ - 70 & = & - 70 \\ \hline & & - 16 + 45\, d + 12\, d^2 + d^3 = o. \end{array}$$

Man nehme d^3 für einen so kleinen Bruchtheil an, dessen man sich ohne den geringsten merklichen Irrthum entschlagen könne : so ist

d^2

Zweyte Anmerkung.

91) Die tägliche Erfahrung jedoch lehret, daß die Kraft des Stosses in Strömen selten beträchtlich ist. Daher ist es eine alte Gewohnheit, daß man Maschinen, die vom Wasser sollen getrieben werden, als Schöpfmaschinen, Korn- Papier- und Pulvermühlen, Eisenhämmer, Pochwerke, u. d. immer so anleget, daß das Aufschlagewasser einen Fall bekomme, welcher ihr vielmehr Kraft mittheilet, als die fließenden Ströme gemeiniglich haben, deren Wasser sich in ihren Bettungen und an den Ufern, bey vielen Umwegen, beständig im Sande, Gruse, und Schlamme daher wälzend, seine Kräfte gar bald verarbeitet, und eine gleichförmige Bewegung annimmt. Es ist also eine höchst wichtige Sache, die Geschwindigkeiten des fallenden Wassers zu untersuchen, und ihre Kräfte zu bestimmen.

Versuch.

92) **Vorrichtung.** Wir nehmen eine, senkrecht auf ihrem Gestelle ruhende gläserne Röhre. Sie ist 40 Wienerzolle lang, und beynahe durchgehends 1″, 23 weit. Ihr unterstes Ende ist mit einem messingenen Boden verschlossen, welcher in der Mitte ein kreisrundes Löchlein hat, dessen Durchmesser 0, 11 Zolle ist, das man nach Belieben auf- und zuschließen kann.

Erscheinung. Diese Röhre füllen wir 1) ganz voll mit Wasser: und dann öffnen wir das Löchlein des Bodens nach dem Schlage einer Sekundenuhr: und bemerken, daß die Röhre in 53 Sekunden gänzlich ausgeleeret ist. Hernach 2) füllen wir die Röhre gerade auf die Hälfte, öffnen den Boden, wie vorher: und finden sie in 36 $\frac{1}{2}$ Sekunden leer. Dann fül-

---

$$d^2 + \frac{15}{4} d = \frac{4}{3}$$

$$d^2 + \frac{15}{4} d + \left(\frac{15}{8}\right)^2 = \frac{4}{3} + \frac{225}{64}$$

$$d = -\frac{15}{8} \pm \sqrt{4,84\ldots} = 0,33\ldots\ldots$$

Es ist also die Geschwindigkeit der Radeschaufel nicht gar 6, 33 - - Schuhe in einer Sekunde.

füllen wir sie 3) bis auf den vierten Theil an: und da leeret sie sich in 25 $\frac{1}{2}$ Sekunden. *

Schluß. Bey Körpern, die ihren Fall gleichförmig beschleunigen, sind die Höhen des Falles, wie die Vierecke der Zeiten; und die Zeiten wie die Geschwindigkeiten. Da sich nun die Zeiten des ausfließenden Wassers beständig aufs Nächste, wie die Wurzeln der Höhe verhalten (1. 2. 3. Erscheinung.)

Satz. So sind auch die Geschwindigkeiten des ausfließenden Wassers wie die Wurzeln der Höhe.

Erste Folgerung.

93) Weil sich die Semiordinaten in der apollonischen Parabel ebenfalls wie die Wurzeln der Abscissen verhalten: so kann man die Geschwindigkeiten des ausfließenden Wassers durch die Semiordinaten, und die Höhen durch die Abscissen der apollonischen Parabel ausdrücken; und folglich alle Geschwindigkeiten zusammen genommen, durch den parabolischen Raum, zwischen den Aesten

* Sonst verlangen die Hebekünstler, daß das Löchlein im Ansehen der Weite des Gefäßes unendlich klein seye: wenn der Versuch nach aller Schärfe von statten gehen soll. So saget Daniel Bernoulli in seiner Hydrodynamica S. 35. „ Si „ foramen sit valde paruum ratione amplitudinum vasis: - - tunc aqua ea „ constanter effluit velocitate, qua ad altitudinem supremae superficiei vs- „ que ascendere possit: quem solum casum geometrae hactenus recte sunt as- „ sequuti; valetque haec propositio pro omnibus vasis vtcumque formatis. „ At cum foramen non vt infinite paruum consideratur, nequaquam est ne- „ gligenda vasis figura. Notari tamen potest, quod, nisi foramen sit am- „ plissimum, *sine notabili admodum errore* idem vt infinite paruum considerari „ possit. „ Mit welchem Bedingnisse wir es auch jedermann frey stellen uns eine Höhe zu benennen, damit wir ihm die Zahl der Sekunden ziemlich genaue voraussagen, in welchen sich unsere Röhre leeren wird; oder aber die Sekunden zu bestimmen, damit wir ihm die Röhre auf die dazu gehörige Höhe anfüllen. Wir merken aber dabey noch dieß an; daß die kleine Wassersäule, die aus unsrer Röhre strömet, nachdem sie aus dem Löchlein des Bodens getretten, noch $\frac{3}{4}$ Zolle durch die Luft streiche, bis sie an eine Grundfläche schlägt. Denn bemerket man dieß nicht; und läßt sie durch eine größere Höhe die Luft durchstreichen, so kann man auch 60 und mehr Sekunden zählen, ehe die Röhre ganz ausgeleeret wird.

Aesten der Parabel, und der lezten Semiordinate. (11. Fig.) Es sind also alle Geschwindigkeiten zusammengenommen $= \frac{2}{3}\, x\, y$. *

Zweyte Folgerung.

94) Weil sich aber ferner die Kräfte fallender Körper wie die Vierecke ihrer Geschwindigkeiten verhalten: so verhalten sich die Kräfte des fallenden Wassers wie die Höhen. Sezt man also auf die lezte Semiordinate der Parabel ein Dreyeck A B C, worinne sich die Höhen wie die Grundlinien verhalten: so drücket die Fläche des Dreyeckes, alle Kräfte zusammengenommen, aus.

Dritte Folgerung.

95) Es ist also der Schwerepunkt des parabolischen Raumes zugleich der Mittelpunkt der Geschwindigkeiten $= \frac{3}{5}\, x$; und der Schwerepunkt des Dreyeckes zugleich der Mittelpunkt der Kräfte; $= \frac{2}{3}\, x$. **

Versuch.

96) **Vorrichtung.** Wir haben uns eine solche Maschine zubereitet, die oben ein Gefäße voll Wasser hat: und in dem Boden des Gefäßes haben wir eine gläserne Röhre befestiget, die lothrecht auf einen Wagebalken darniedersteiget, jedoch ohne ihn zu berühren. Ferner haben wir eine solche Zurüstung angebracht, daß in das Gefäße der Maschine beständig so viel Wasser fließt, als ihm durch die lothrechte Röhre entgehet: und die Sache so vorsichtig behandelt, daß das Einströmen in das Gefäße dem Ausströmen keine Hinderniß bringe.

---

* Das Flächenmaaß eines parabolischen Raumes findet man auf diese Art: $\sqrt{p\,x} = p^{\frac{1}{2}}\, x^{\frac{1}{2}} = y$; folglich $p^{\frac{1}{2}}\, x^{\frac{1}{2}}\, d\,x = y\, d\,x$ dem Elemente des Flächenmaaßes. Dieß integriret giebt $\frac{2}{3}\, p^{\frac{1}{2}}\, x^{\frac{3}{2}} = \int y\, d\,x$: und weil $p^{\frac{1}{2}} = \frac{y}{x^{\frac{1}{2}}}$; so ist $\frac{2}{3}\, x\, y$ der parabolische Raum.

** Es ist also der Mittelpunkt der Geschwindigkeiten sehr wohl von dem Mittelpunkte der Kräften zu unterscheiden; da sich nun der Druck nach den Geschwindigkeiten, der Stoß aber nach den Kräften richtet: so ist der Mittelpunkt des Druckes ebenfalls genaue vom Mittelpunkte des Stosses zu unterscheiden.

Erscheinung. Geben wir nun dem Wagebalken so viel Gegendruck, als die Schwere der ausströmenden Wassersäule beträgt: so bleibet er im Gleichgewichte. Mehr Gegendruck ziehet ihn in die Höhe: und bey wenigerem stößt ihn die Wassersäule darnieder.

Satz. Die Gewalt des ausfließenden Wassers ist also der Schwere der ganzen Wassersäule gleich, die im Flusse ist.

Folgerung.

97) Es ist also die Voraussetzung, welche wir oben (*n.* 80.) bey der hirischen Regel angenommen haben: durch die Erfahrung erwiesen. *

Von der Berechnung der Maschinen, die durch fallendes Wasser beweget werden.

98) Wir setzen hier, wieder mit Herrn de la Hire, daß das fallende Wasser in der ersten Sekunde des Falles 14 Schuhe durchstreiche. * * Es ist also seine einförmige Geschwindigkeit im lezten Augenblicke des Falles, 28 Schuhe in einer Sekunde; und wenn b die Höhe eines Wasserbehälters, v die Geschwindigkeit des Wassers, welche es zu Ende des Falles von der Höhe b erhält: so ist, $\sqrt{14} : \sqrt{b} = 28 : v$; folglich $v = \sqrt{56\,b}$.

99) Weil nun $\sqrt{56\,b}$ die Geschwindigkeit ist, welche das Wasser durch den Fall von der Höhe b erhält: so ist $56\,b$ das Viereck dieser Geschwindigkeit: folglich ist $\frac{56\,b}{56} = b =$ der Höhe des Falles, oder der Wassersäule, deren Gewichte, der Gewalt des Falles gleich ist. — Es hat also die so oft angewendete hirische Regel so weit ihre Richtigkeit, als es rich-

* Die Sätze n. 91. und 95. sind zween Hauptgründe, worauf die neuere Wasserhebekunst gebauet ist. Sie sind auch den Hebekünstlern aus allen übrigen zuerst bekannt geworden; dieser dem Gulielmini, jener dem Toricelli. S. D. Bernoulli Hydrodynamica. S. 2. 5.

** Vermöge der neueren Erfahrungen nimmt man sonst für die erste Sekunde eines fallenden Körpers 15′, 1 an.

richtig ist, daß das Wasser in einer Sekunde 14 Schuhe tief falle. Wollte man diesen Fall zu 15′, 1 annehmen: so müßte man das Viereck der Geschwindigkeit allzeit mit 60, 4 theilen, um die Höhe der gleichschweren Wassersäule zu erhalten.

100) Es ist also im Falle, daß die Maschine am wirksamsten seyn soll, $\frac{1}{3}\sqrt{56\,b}$ die Geschwindigkeit der Radeschaufel: und $\frac{2}{3}\sqrt{56\,b}$ die Geschwindigkeit des Anstosses (*n.* 80. 81. 82.). Folglich ist $\frac{4}{7}\,b$ die Höhe der gleichschweren Wassersäule (*n.* 98.). Ist nun f^2 die Oberfläche der Schaufel, und der Körperschuhe Wasser, 72 ℔: so ist $32\,f^2\,b$ die Gewalt des Stosses. Diese mit der Geschwindigkeit der Radeschaufel vervielfältiget, giebt $32\,f^2\,b \times \frac{1}{3}\sqrt{56\,b} = \frac{64}{3}\,f^2\,b\,\sqrt{14\,b}$ $=$ P *v*. W. z. s. w.

Erste Anwendung.

101) Es sey $b = 3$ Schuhe; $f^2 = 100$ Flächenschuhe; P $=$ 3000 ℔: so ist *v*, die Geschwindigkeit der Last $= 13, 82$ Schuhe in einer Sekunde.

Zweyte Anwendung.

102) Es sey $b = 4$ Schuhe; P $= 540$ ℔; $f^2 = \frac{10}{9}$ Flächenschuhe: so ist $v = \frac{23936}{18225}$ Schuhe in einer Sekunde, oder ungefähr 79 Schuhe in einer Minute. *

Drit-

* Diese Berechnung hat Herr Pitot über eine kleine Hammerschmiede gemacht. Er fand beynebens, daß ungefähr 6 Zolle Geschwindigkeit vonnöthen waren, den Hammer 15 bis 18 Zolle in die Höhe zu heben; woraus er folgerte, daß der Hammer jede Minute ungefähr 160 Schläge thun müßte, welches sich auch durch die Erfahrung zeigte.

Dritte Anwendung.

103) Es sey $v = \frac{17}{22}$ Schuhe in einer Sekunde; $b = \frac{1}{2}$ Schuhe; $f^2 = 135$ Flächenschuhe: so ist $P = 4938$ ℔. *

Vierte Anwendung.

104) Es sey $v = \frac{1}{2}$ Schuhe in einer Sekunde; $f^2 = 94$ Flächenschuhe; $P = 722$ ℔: so ist b die dazu nöthige Höhe des Wasserfalles $= 4$ Zolle.

Anmerkung.

105) So werden dann alle Maschinen, die von Strömen und Aufschlagewässern getrieben werden, nach ihrer größten Wirksamkeit berechnet: in so ferne man in den Voraussetzungen keine größere Genauigkeit fordert. So sehr wir nun wünschen, daß die gemeinen Hebekünstler doch einmal ihr altes Gerathewohl verlassen, und sich zum mindsten nach dieser Strenge, die in der Ausübung gewiß nicht viel Beschwerliches hat, bequemen möchten: so wenig können wir die Erfindungen der Neueren, die zu einer noch weit strengeren Schärfe getrieben sind, gänzlich vorbey lassen.

106) Daß im Falle der größten Wirksamkeit, die Geschwindigkeit der Schaufel, der dritte Theil der Geschwindigkeit des Wassers ist (*n.* 81.): scheinet sehr wohl mit den neueren Erfahrungen übereinzukommen. Herr Smeaton hat im Jahre 1752. 1753. mit einer kleinen Wassermaschine, die er sich zu dieser Absicht erfunden, verschiedene Versuche gemacht, die er im Jahre 1759. an die k. engländische Gesellschaft gebracht. Er verschob ihre Kundmachung bloß deßwegen so lange: damit er die Schlüße, die er aus dem Kleinen zog, auch im Grossen versuchen könnte. Er versicherte aber die Gesellschaft, daß sie wirklich übereintraffen. Seine kleine Maschine bestund aus einem Wasserbehälter, in welchem er das ausgeflossene Wasser immer wieder zurückepumpte: und aus einem geschaufelten Rade, an welches das ausfließende Wasser stieß; und welches er nach Belieben beladen oder entladen konnte. Die daher taugenden Erscheinungen seiner Versuche sind folgende: * *

* Dieß ist die Berechnung des Pumpwerkes auf Unsrerfrauenbrücke zu Paris, die eben Herr Pitot gemacht.

* * Philosophical Transactions. Vol. 51. P. I. p. 100. u. f. f.

Höhe des Wassers.	Wendungen des unbeladenen Rades.	Wendungen bey der größten Wirksamkeit.	Höhe des Wassers.	Wendungen des unbeladenen Rades.	Wendungen bey der größten Wirksamkeit.	Höhe des Wassers.	Wendungen des unbeladenen Rades.	Wendungen bey der größten Wirksamkeit.
33″	88	30	24	84	30, 75	6	48	23, 5
30	86	30	21	81	29,	12	68	27
27	82	28	18	72	26,	9	58	26, 25
24	78	27, 7	15	69	25,	6	48	24, 5
21	75	25, 9	12	63	25,	9	60	27, 3
18	70	23, 5	9	56	23,	6	50	24, 6
15	65	23, 4	6	46	21,	6	50	26
12	60	22	15	72	29,	-	-	-
9	52	19	12	66	26, 75	-	-	-
6	42	16	9	58	24, 5	-	-	-

Woraus ganz deutlich erhellet, daß der Satz *n*. 81. mit der Erfahrung zur Genüge übereinkömmt.

107) Wir haben aber auch in unsrer ganzen Berechnung vorausgesetzt, es geschehe der Anstoß des Wassers in die ganze Oberfläche der Schaufel mit einer allerdings einförmigen Gewalt. Allein da der eine Punkt der Breite der Schaufel immer näher beym Mittelpunkte des Rades ist als der andere, und folglich schwerer zu bewegen ist als ein anderer; und die Länge der Schaufel, Punkte für Punkte, immer von einer größeren, oder kleineren Geschwindigkeit des Wassers getrieben wird, weil die Geschwindigkeiten der Wasserschichten mit deren Tiefen zunehmen: so ist die Sache viel verwickelter, als wir sie uns vorgestellet haben, und die Berechnung einer viel größeren Genauigkeit fähig.

Genauere Berechnung

Der wagrecht liegenden Wasserräder. *

108) Es sey CT (12. Fig.) der halbe Durchmesser des Wasserrades $= r$; C der Mittelpunkt des Rades. $ST = s$, die Breite der Schaufel. AB sey das Wasserrecht des Stromes; und $AS = BT = V$, die Geschwindigkeit des Wassers. Es sey ferner die Geschwindigkeit der Schaufel bey $T = Tt = v$; so ist sie bey $S = Ss$ und bey $M = MN$. Nun der unbestimmte Theil TM der Breite von T gegen C, sey $= x$; und $Mm = dx$; so ist $CM = r - x$: und weil $CT : Tt = CM : MN$; so ist $\left(\frac{r-x}{r}\right) v = MN$. Es ist also nach den allgemeinen Gründen, $\left(Mm.\, CM\, (BT - MN)^2\right) =$ der Gewalt des Rades in der unendlich kleinen Breite Mm; und $\int.\left(Mm.\, CM\, (BT - MN)^2\right) =$ der Gewalt an der ganzen Breite $= E$. Es ist also auch

$$\int.\left(dx\,(r-x)\left(V - \left(\frac{r-x}{r}\right)v\right)^2\right) = E.$$

$$\int.\left(dx(r-x)\left(V^2 - 2Vv\left(\frac{r-x}{r}\right) + \left(\frac{r^2 - 2rx + x^2}{r^2}\right)v^2\right)\right) = E$$

$$\int.\left(r\,dx - x\,dx\right)\left(V^2 - 2Vv\left(\frac{r-x}{r}\right) + v^2\left(\frac{r^2 - 2rx + x^2}{r^2}\right)\right) = E$$

$$\int.\left(V^2 r\,dx - V^2 x\,dx - 2Vv\,(r\,dx - x\,dx) - \frac{2Vv}{r}\left(-rx\,dx + x^2 dx\right) + \frac{v^2}{r}\left(r^2 dx - 2rx\,dx + x^2 dx\right) + \frac{v^2}{r^2}\left(-r^2 x\,dx + 2rx^2 dx - x^3 dx\right)\right) = E;$$

und integriret man wirklich

V^2

* Auserlesene Abhandlungen, welche an die Akademie der Wissenschaften zu Paris von einigen Gelehrten eingesendet, in ihren Versammlungen abgelesen, und von ihr herausgegeben worden. Zweyter Theil. S. 258. u. s. f.

$$V^2 r x - \tfrac{1}{2} V^2 x^2 - 2 V v \left(r x - \tfrac{1}{2} x^2\right) - \frac{2 V v}{r}\left(-\tfrac{1}{2} r x^2 + \tfrac{1}{3} x^3\right)$$

$$+ \frac{v^2}{r}\left(r^2 x - r x^2 + \tfrac{1}{3} x^3\right) + \frac{v^2}{r^2}\left(-\tfrac{1}{2} r^2 x^2 + \tfrac{2}{3} r x^3 - \tfrac{1}{4} x^4\right)$$

$= E$; und alles zusammengezogen

$$V^2\left(r x - \frac{x^2}{2}\right) - 2 V v \left(r x - x^2 + \frac{x^3}{3 r}\right) + v^2 \left(r x - \tfrac{3}{2} x^2 + \frac{x^3}{r}{}^{*} - \frac{x^4}{4 r^2}\right) = E;$$

oder wenn $x = s =$ der ganzen Breite der Schaufel; $E = V^2 s\left(r - \frac{s}{2}\right) - 2 V v s \left(r - s + \frac{s^2}{3 r}\right) + v^2 s \left(r - \tfrac{3}{2} s + \frac{s^2}{r} - \frac{s^3}{4 r^2}\right)$.

109) Will man nun bestimmen, wie groß die Geschwindigkeit der Schaufel im Falle der größten Wirksamkeit seyn müße; so machet man aus E. v ein Größtes. Setzet man aber zuvor, um die Rechnung zu verkürzen, $a = \left(r - \frac{s}{2}\right)$; $b = \left(r - s + \frac{s^2}{3 r}\right)$; und $f = \left(r - \frac{3 s}{2} + \frac{s^2}{r} - \frac{s^3}{4 r^2}\right)$: so wird aus der vorgehenden Endegleichung diese

$$V^2 s a v - 2 V s b v^2 + s f v^3 = E v; \text{ und}$$

$$V^2 s a \, d v - 4 V s b v \, d v + 3 s f v^2 \, d v = E \, d v = 0$$

$$v^2 - \frac{4 V b}{3 f} v = - \frac{V^2 a}{3 f}.$$ Folglich

* In der Uebersetzung S. 258. stehet dieß Glied, $+ \frac{x^3}{3 r}$; und sogleich drauf auch $\frac{s^2}{3 r}$, welches unrecht ist.

$$v^2 - \frac{4Vb}{3f}v + \left(\frac{2Vb}{3f}\right)^2 = \left(\frac{2Vb}{3f}\right)^2 - \frac{V^2 a}{3f}$$

$$v = \frac{2Vb}{3f} \pm \sqrt{\left(\frac{2Vb}{3f}\right)^2 - \frac{V^2 a}{3f}} = \frac{2Vb \pm V\sqrt{4b^2 - 3af}}{3f}$$

110) Setzet man das Verhältniß der Breite der Schaufel zum halben Durchmesser des Rades $\frac{s}{r} = \frac{n}{m}$; und das Verhältniß der Geschwindigkeit der Schaufel zur Geschwindigkeit des Stromes $\frac{v}{V} = \frac{i}{k}$: so wird $s = \frac{rn}{m}$, und $v = \frac{Vi}{k}$: folglich ist (n. 108.)

$$V^2 s\left(r - \frac{s}{2}\right) = V^2 s\left(r - \frac{rn}{2m}\right) = V^2 rs\left(1 - \frac{n}{2m}\right); \text{----}$$

$$-2Vvs\left(r - s + \frac{s^2}{3r}\right) = -2V^2 s.\frac{i}{k}\left(r - \frac{rn}{m} + \frac{r^2 n^2}{3rm^2}\right) =$$

$$-V^2 rs\left(\frac{2i}{k}\left(1 - \frac{n}{m} + \frac{n^2}{3m^2}\right)\right); \text{---} \text{ endlich } v^2 s\left(r - \frac{3s}{2} + \frac{s^2}{r} - \frac{s^3}{4r^2}\right)$$

$$= V^2 s.\frac{i^2}{k^2}\left(r - \frac{3rn}{2m} + \frac{r^2 n^2}{rm^2} - \frac{r^3 n^3}{4r^2 m^3}\right) = V^2 rs\left(\frac{i^2}{k^2}\left(1 - \frac{3n}{2m} + \frac{n^2}{m^2} - \frac{n^3}{4m^3}\right)\right).$$

Es ist also $E = V^2 rs\left(1 - \frac{n}{2m} - \frac{2i}{k}\left(1 - \frac{n}{m} + \frac{n^2}{3m^2}\right) + \frac{i^2}{k^2}\left(1 - \frac{3n}{2m} + \frac{n^2}{m^2} - \frac{n^3}{4m^3}\right)\right)$.

111) Ist das Rad in der Ruhe, wenn der Strom anstößt, d. i. $v = 0$: so ist $E = V^2 rs\left(1 - \frac{n}{2m}\right)$; weil in diesem Falle auch $\frac{i}{k} = 0$ seyn muß, wodurch alles Uebrige $= 0$ gemacht wird.

112) Da

112) Da man aber für itzo S T nur als eine Linie betrachtet hat: die Radeschaufel hingegen, wenn es zum Werke selbst kömmt, von zwoen Ausmessungen ist: so sind noch andere Regeln nöthig. Denn weil die Geschwindigkeit auch in der zwoten Ausmessung veränderlich ist: so kann der Stoß nach der bis itzo gefundenen Regel nicht immer einerley seyn. Betrachtet man also die vorgehende Formel als eine Einleitung zur Künftigen, die beyde Ausmessungen der Radeschaufel in sich begreifen soll: so nenne man α die Höhe des Wasserbehältnisses, welche Ursache daran ist, daß der Punkt T die Geschwindigkeit V bekömmt; β nenne man die Höhe L T (13. Fig.); b die Höhe $(\alpha - \beta)$ des Wasserbehälters über der Schaufel. Der unbestimmte Theil T X der Länge, an welche das Wasser mit verschiedenen Geschwindigkeiten schlägt, sey $= y$. Die Geschwindigkeit des Stromes aber an jedem Punkte X $= z$. Dieß vorausgesetzt, hat man für die Gewalt des Wassers an der Breite X Q oder S T (*n.* 108.) $z^2 (a s -$ 13
$2 z v. b s + f s v^2)$. Da nun (*n.* 92.) $\sqrt{\alpha} : \sqrt{\alpha - y} = V :$ 13
$\left(z = V\sqrt{\frac{\alpha - y}{\alpha}}\right)$: so setze man zuerst diesen Werth in dem vorgehenden Ausdrucke der Gewalt an der Linie S T; und vervielfältige ihn hernach mit dem Unendlichkleinen der Länge $= dy$: so erhält man

$$\int.\left(\frac{V^2\,\alpha\, a s - V^2\, a s y}{\alpha} - 2 v b s.\, V\sqrt{\frac{\alpha - y}{\alpha}} + f s v^2\right) dy = \mathfrak{E}.$$

$$\int.\left(V^2 a s dy - \frac{V^2 a s y\, dy}{\alpha} - 2 v b s.\, V\sqrt{\frac{\alpha - y}{\alpha}}.dy + f s v^2 dy\right) = \mathfrak{E}.^*$$

$$V^2 a s y - \frac{V^2 a s y^2}{2\alpha} + \tfrac{4}{3} v b s.\, V\alpha \sqrt{\frac{\alpha - y}{\alpha}}^{\,3} - \tfrac{4}{3} v b s V \alpha + f s v^2 y = \mathfrak{E};$$

---

* In dieser Integration scheinet das Glied $- 2 v b s.\, V\sqrt{\frac{\alpha - y}{\alpha}}.\,dy$ ei-

oder wenn man $y = \beta =$ der ganzen Länge der Schaufel setzet:

$$V^2 a \int \beta - \frac{V^2 a \int \beta^2}{2\alpha} + \tfrac{2}{3}\left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha}\right). 2 v b \int. V \alpha \sqrt{\frac{\alpha - \beta}{\alpha}} - \tfrac{2}{3}\,\alpha.$$

$$2 v b \int V + f \int v^2 \beta = \left(\frac{2\alpha - \beta}{2\alpha}\right) \beta a \int V^2 + \tfrac{2}{3}\, b.\ 2 b \int v$$

$$V \sqrt{\frac{b}{\alpha}} - \tfrac{2}{3}\,\alpha.\ 2 v b \int V + f \int v^2 \beta.$$

113) Um aber auch hier den Fall des Größten zu bestimmen; so setze man das Unendlichkleine von $\mathfrak{E}\ v = o$; so wird aus der vorgehenden Endegleichung

$$\left(\frac{2\alpha - \beta}{2\alpha}\right) \beta a \int V^2 dv + \tfrac{2}{3}\, b.\ 2 b \int V \sqrt{\frac{b}{\alpha}}\, .\, 2 v dv - \tfrac{2}{3}\,\alpha.$$

$$2 b \int V.\ 2 v dv + 3 f \int \beta v^2 dv = o;$$ d. i.

(2 α

---

einige Schwierigkeit zu haben. Allein man schreibe nur $+ 2 v b \int V \sqrt{\frac{\alpha - y}{\alpha}}$ $. - dy$; und setze $\sqrt{\frac{\alpha - y}{\alpha}} = z$: so ist $\frac{\alpha - y}{\alpha} = z^2$; und $- dy = 2 \alpha z dz$. Nun setze man in dem Ausdrucke, z statt $\sqrt{\frac{\alpha - y}{\alpha}}$; und $2 \alpha z dz$ statt $- dy$: so bekömmt man $4 v b \int V. \alpha z^2 dz$. Dieß integriret, giebt $\frac{4}{3} v b \int V. \alpha z^3 = \frac{4}{3} v b \int V \alpha \sqrt{\frac{\alpha - y}{\alpha}}^{\,3}$. Jedoch weil nicht das ganze Glied $= o$ wird; wenn man $y = o$ setzt; sondern $\frac{4}{3} v b \int V \alpha$ übrig bleibet: so ist es ein Zeichen, daß das Integrale um diese Größe zu groß ist; und folglich $\frac{4}{3} v b \int V \alpha \sqrt{\frac{\alpha - y}{\alpha}}^{\,3} - \frac{4}{3} v b \int V \alpha$ das wahre Integrale ist.

$\left(\frac{2\alpha-\beta}{2\alpha}\right)\beta\alpha V^2 + \frac{2}{3}b.\ 2bV\sqrt{\frac{b}{\alpha}}.\ 2v. - \frac{2}{3}\alpha.\ 2bV.$
$2v + 3f\beta v^2 = o$: oder

$$v^2 + \frac{\left(\frac{2}{3}b.\ 2bV\sqrt{\frac{b}{\alpha}} - \frac{2}{3}\alpha.\ 2bV\right)2v}{3f\beta} = -\frac{\left(\frac{2\alpha-\beta}{2\alpha}\right)\beta\alpha V^2}{3f\beta}$$

Mithin ist auch

$$v^2 + \frac{\left(\frac{2}{3}b.2bV\sqrt{\frac{b}{\alpha}} - \frac{2}{3}\alpha.2bV\right)2v}{3f\beta} + \left(\frac{\frac{2}{3}b.2bV\sqrt{\frac{b}{\alpha}} - \frac{2}{3}\alpha.2bV}{3f\beta}\right)^2$$

$$= -\frac{\left(\frac{2\alpha-\beta}{2\alpha}\right)\beta\alpha V^2}{3f\beta} + \left(\frac{\frac{2}{3}b.\ 2bV\sqrt{\frac{b}{\alpha}} - \frac{2}{3}\alpha.2bV}{3f\beta}\right)^2;\ \text{und}$$

$$v = \frac{-V\left(\frac{2}{3}b.\ 2b\sqrt{\frac{b}{\alpha}} - \frac{2}{3}\alpha.\ 2b\right) \pm V\sqrt{\left(\left(\frac{2}{3}b.\ 2b\sqrt{\frac{b}{\alpha}} - \frac{2}{3}\alpha.\ 2b\right)^2 - \left(\frac{2\alpha-\beta}{2\alpha}\right)3\beta^2\alpha f\right)}}{3f\beta}.$$

114) Nimmt man aber wieder, wie vorhin das Verhältniß $\frac{f}{r} = \frac{n}{m}$; und $\frac{v}{V} = \frac{i}{k}$; so wird auch wie vorhin $f = \frac{rn}{m}$; $v = \frac{Vi}{k}$; und $r = \frac{fm}{n}$. Setzet man aber auch statt a, seinen Werth $\left(r - \frac{f}{2}\right)$; statt b den Werth $\left(r - f + \frac{f^2}{3r}\right)$; statt f den Ausdruck $\left(\frac{r - 3f}{2} + \frac{f^2}{3r} - \frac{f^3}{4r^2}\right)$;

so

so wird das erste Glied der Endgleichung (n. 112.) $\left(\frac{2\alpha-\beta}{2\alpha}\right)\beta\, a\, ſ V^2 =$

$V^2\, r\, ſ\left(\frac{2\,\alpha-\beta}{2\,\alpha}\right)\beta\left(1-\frac{n}{2m}\right)$; das zweyte Glied $\frac{2}{3}\, h.\ 2\, b$

$ſ\, v\, V\, \frac{\sqrt{b}}{a} = \frac{2}{3}\, b.\ 2\left(r - ſ + \frac{ſ^2}{3\,r}\right)\left(\frac{V\, i}{k}\right)\frac{\sqrt{b}}{a}.\ ſ V = \frac{2}{3}\, b.$

$\frac{2\, i}{k}\sqrt{\frac{b}{a}}\left(r - ſ + \frac{ſ n}{3m}\right) ſ V^2 = \frac{2}{3}\, b.\ \frac{2\, i\sqrt{b}}{k\ \ a}\left(1-\frac{n}{m}+\frac{n^2}{m^2}\right) V^2\, r\, ſ.$

Das dritte Glied, $\frac{2}{3}\,\alpha.\ 2\, v\, b\, ſ V = \frac{2}{3}\,\alpha.\ \frac{2\, i}{k}\left(1-\frac{n}{m}+\frac{n^2}{m^2}\right) V^2\, r\, ſ.$

Das vierte Glied $f\, ſ\, v^2\, \beta = \beta.\ \frac{i^2}{k^2}\left(1-\frac{3\, n}{2\, m}+\frac{n^2}{m^2}-\frac{n^3}{4\, m^3}\right).$

Es ist also $E = V^2\, r\, ſ\left(\left(\frac{2\alpha-\beta}{2\,\alpha}\right)\beta\left(1-\frac{n}{2m}\right)+\frac{2}{3}\, b.\ \frac{2\, i}{k}.\ \sqrt{\frac{b}{a}}\right.$

$\left.\left(1-\frac{n}{m}+\frac{n^2}{3\, m^2}\right)-\frac{2}{3}\,\alpha.\ \frac{2\, i}{k}.\left(1-\frac{n}{m}+\frac{n^2}{3\, m^2}\right)+\beta.\ \frac{i^2}{k^2}\left(1-\frac{3\, n}{2\, m}+\frac{n^2}{m^2}-\frac{n^3}{4\, m^3}\right)\right).$

115) Ist das Rad in der Ruhe, d. i. $v = 0$: so ist $\frac{i}{k}$ auch $= 0$; und $E = V^2\, r\, ſ\left(\frac{2\,\alpha-\beta}{a}\right)\beta\left(1-\frac{n}{2\, m}\right).$

Genauere Berechnung der senkrecht stehenden Wasserräder.

116) Es sey, nach Herrn du Petit Vandin, C T (14. Fig.) der halbe Durchmesser eines stehenden Rades: so ist der ganze Unterschied zwischen dem itzigen und dem vorgehenden Falle (n. 108.) in dem, daß sich

die Geschwindigkeit des Stromes an jedem zu S T gehörigem Punkte eben so verändern wird, wie die Wurzel der über demselben Punkte befindlichen Höhe des Wasserbehälters. Ist nun diese Höhe $= \alpha$; die ihr antwortende Geschwindigkeit $=$ V; die Höhe über dem Punkte S $= b$; T M $= x$; so ist die Höhe über M $= \alpha - x$; und folglich $\sqrt{\alpha} : \sqrt{\alpha - x} = V :$ $\left(V \sqrt{\frac{\alpha - x}{\alpha}} = \right.$ der Geschwindigkeit von der Höhe über M $\Big)$. Da nun die Geschwindigkeit der Schaufel an dem Punkte M $= \left(\frac{r - x}{r}\right) v$ (*n.* 108.): so ist $V \sqrt{\frac{\alpha - x}{\alpha}} - \left(\frac{r - x}{r}\right) v$ die Geschwindigkeit des Anstosses (*n.* 81.)

117) Es ist also die, im ersten Augenblicke an M $m = d\,x$, erzeugte Gewalt, $d\,x\,(r - x)\left(V\sqrt{\frac{\alpha - x}{\alpha}} - \left(\frac{r - x}{r}\right) v\right)^2$; und

$$ſ.\left(d\,x\,(r - x)\left(V\sqrt{\frac{\alpha - x}{\alpha}} - \left(\frac{r - x}{r}\right) v\right)^2\right) =$$

der Gewalt an M T; oder wenn $x = ſ =$ T S; der Gewalt an der ganzen Schaufel. Wenn man die Formel wieder ordentlich integriret: so ist das ganze Integrale

$$= V^2 ſ\left(r - \frac{r ſ}{2\alpha} - \frac{ſ}{2} + \frac{ſ^2}{3\alpha}\right) - 2\alpha v V\left(\frac{2}{3} r - \frac{8}{15}\alpha + \frac{16\alpha^2}{105 r}\right) + 2 b v V \sqrt{\frac{b}{\alpha}}\left(\frac{2}{3} r - \cancel{\frac{5}{18}}\alpha + \frac{16\alpha^2}{105 r} - \frac{4}{5}ſ + \frac{8\alpha ſ}{35 r} + \frac{2ſ^2}{7r}\right) \quad \frac{8}{15}$$

$$+ v^2 ſ\left(r - \frac{3ſ}{2} + \frac{ſ^2}{r} - \frac{ſ^3}{4r^2}\right).\ *$$

118) Setzet man aber auch hier

$$a = \left(r - \frac{rſ}{2\alpha} - \frac{ſ}{2} + \frac{ſ^2}{3\alpha}\right); \text{ und}$$

$$b = \left(\frac{2}{3} r - \frac{8}{15}\alpha + \frac{16\alpha^2}{105 r}\right); \text{ und}$$

K $c =$

* Einige Glieder dieser Integrationsgröße werden wieder auf die nämliche Art, die wir oben (n. 112.) in der Anmerkung angeführet, sehr füglich behandelt.

$c = \left(-\frac{4}{5}s + \frac{8\alpha s}{3.5r} + \frac{2s^2}{7r}\right)$; und endlich

$f = \left(r - \frac{3}{2}s + \frac{s^2}{r} - \frac{s^3}{4r^2}\right)$; so stellet sich das Integrale so dar:

$$V^2 s a - 2\alpha V b v + 2bV\sqrt{\frac{b}{\alpha}}(b+c)v + sf v^2 = E.$$

119) Wird dann aus E v, wie vorhin ein Größtes gemacht; so ist

$$V^2 s a\,dv - 4\alpha V b v\,dv + 4bV\sqrt{\frac{b}{\alpha}}(b+c)v\,dv + 3sfv^2\,dv = 0$$

$$v^2 + \frac{\left(4bV(b+c)\sqrt{\frac{b}{\alpha}} - 4\alpha V b\right)v}{3sf} = \frac{-V^2 s a}{3sf}$$

$$v = -V((2\alpha b - 2b(b+c)\sqrt{\tfrac{b}{\alpha}}) \pm \sqrt{(-3s^2fa + \left(2\alpha b - 2b(b+c)\sqrt{\tfrac{b}{\alpha}}\right)^2}\,)) : 3sf$$

120) Setzt man endlich das Verhältniß $\frac{s}{r} = \frac{n}{m}$; $\frac{\alpha}{r} = \frac{q}{m}$; und $\frac{v}{V} = \frac{i}{k}$; und vervielfältiget man mit $\beta = L\ T$; so kommet

$$E = V^2 r s\beta\left(1 - \frac{n^2}{2m} + \frac{n^2}{3mq} - \frac{n}{2q}\right) - \frac{2iq}{kn}\left(\frac{2}{3} - \frac{8q}{15m} + \frac{16q^2}{105m^2}\right) + \frac{2i}{k}\left(\sqrt{\frac{q-n}{q}}\right)$$
$$\left(\frac{q-n}{n}\right)\left(\frac{2}{3} - \frac{8q}{15m} + \frac{16q^2}{105m^2} - \frac{4n}{5m} + \frac{8nq}{35m^2} + \frac{2n^2}{7m^2}\right) + \frac{i^2}{k^2}\left(1 - \frac{3n}{2m} + \frac{n^2}{m^2} - \frac{n^3}{4m^3}\right)).$$

121) Ist $v = 0$: so hat man $E = V^2 r s\beta\left(1 - \frac{n}{2m} + \frac{n^2}{3mq} - \frac{n}{2q}\right)$.

Anmerkung.

122) Ueberdieß wäre nun noch die vortheilhaftste Zahl der Schaufeln an einem Rade; die vortheilhaftste Oeffnung des Schutzbrettes u. d. zubestimmen: allein da müßten wir die Gränzen dieses Entwurfes noch viel weiter überschreiten, als wir es bis itzo gethan haben. Aus allem aber sieht man ohne Mühe, daß aufgeheiterte Köpfe nöthig sind, das Maschinenwesen eines Landes auf einen vollkommenen Stand zu bringen.

An-

Anhang
Von den Vortheilen der Bevölkerung eines Landes aus der Einführung der Maschinen bey Gelegenheit eines Satzes aus der Polizeywissenschaft, welcher unlängst auf hiesiger hohen Schule ist vertheidiget worden.

von

Fulgenz Bauer,

a. d. F. S. auf der Herz. Sav. Ritterakad. der Größenlehre und versuchenden Naturkunde Lehrer, Mitgliede der k. k. gelehrten Gesellschaft zu Rovoredo.

1) Ein junger Kavalier, voll der erhabensten Empfindungen, auf der ächten Bahne der Verdienste, hat uns vor Kurzem mit einer Schrift, in welcher das Unerwartete, das Schöne, das Gründliche vereinet sind, erfreuet, und mit Sätzen unterrichtet, die ihm, seinem Lehrer, und unserm Vaterlande Ehre machen. Bey den aufrichtigsten Glückwünschungen also zu seinem Lobe, welches er sich bey allen rechtschaffenen Patrioten erworben hat, und bey den theuersten Versicherungen meiner Hochachtung bediene ich mich, nicht ohne Vergnügen dieser vorzüglichen Gelegenheit meine Gedanken über einen Satz zu eröffnen, der so nahe mit der Absicht des III. Theiles des vorgehenden Entwurfes verbunden ist, ob ich mir gleich, bis itzo vom Gegentheile dessen, was ihm geschienen hat, überzeuget zu seyn scheine.

2) Der Satz ist folgender (*n.* 35. *): **Hingegen ist seine Meynung (des Herrn Montesquieu) daß die Einführung der Maschinen der Bevölkerung schädlich sey, wenigstens in denen Staaten gegründet, deren auswärtige Handlung wenig bedeutet.** — Um von der Richtigkeit oder Unrichtigkeit dieses Satzes etwas Entscheidendes zu sagen; so kömmt es zuerst auf die Frage an: Was denn Herr Montesquieu eigentlich für Maschinen verstanden habe, deren Einführung der Bevölkerung schädlich seyn soll? Denn daß es alle Maschinen seyen; wäre offenbar ungereimt, und könnte weder dem erleuchten Montesquieu, noch seinen Beypflichtern zugemuthet werden. Es ist also nur die Einführung gewisser Maschinen der Bevölkerung schädlich. Ich weiß nicht, ob ich die Stelle des Herrn Montesquieu, welche in dem genannten Satze nicht angeführet ist, recht getroffen habe. Sie ist im zweyten Theile, im drey und zwanzigsten Buche, im fünfzehenten Hauptstücke. ** „ Ces Machines, dont l'objet est d'abréger „ l'Art, ne sont pas toujours utiles. Si un ouvrage est à un prix médiocre, „ & qui convienne également à celui, qui l'achette & à l'ouvrier qui l'a „ fait, les Machines, qui en simplifieroient la Manufacture, c'est-à-dire „ qui diminueroient le nombre des ouvriers, seroient pernicieuses; & si les „ Moulins à eau n'étoient pas par-tout établis, je ne les croirois pas aussi „ utiles, qu'on le dit, parcequ' ils ont fait reposer une infinité des bras, „ qu'ils ont privé bien des gens del' usage des eaux, & ont fait perdre la „ fécondité à beaucoup des terres. „ Allein auch in diesem Sinne scheinet mir die Einführung der Maschinen der Bevölkerung auf keine Weise schädlich seyn zu können; zum mindsten, nicht ohne gewaltsame Einschränkung des Satzes.

3) Ich will meine Gründe darüber in der größten Allgemeinheit, und in einer solchen Kürze vortragen; die eine Frage, deren Grundstoff bis itzo noch keiner mathematischen Strenge fähig ist, nur immer leiden mag. Zuvörderst aber muß ich einige Wahrheiten voraussetzen, die ich beyderseits für ausgemacht annehme.

I. Jeder Bürger ist verpflichtet, nach dem Verhältnisse seines Standes zur Aufrechthaltung des Staates, dessen Glied er ist, nach seinen Kräften beyzutragen. ***

II. Ei-

---

* Versuch über das Verhältniß der Stände - - - nebst angehängten Lehrsätzen. - - - 4to Wienn 1764.

** Esprit des Loix.

*** S. den oben angeführten Versuch. S. 1.

II. Eine bestimmte Menge Volk, kann ohne eine bestimmte ebenmäßige Menge Nahrungs- und Unterhaltungsmittel nicht bestehen. *

III. Sind die Nahrungswege schwer; so wird die Bevölkerung - - sehr eingeschränkt seyn; - - - sind sie aber leichte; so mißt sich die Bevölkerung ordentlicher Weise nach der Leichtigkeit ab, und richtet sich selbst in ihr gehöriges Ebenmaaß. * *

IV. Es ist unrichtig: daß in einem wohl eingerichteten Staate, der Unterthanen jemals zuviel seyen, und einer dem anderen, den Verdienst schmälere, und ihn folglich verhindere, den nothwendigen Unterhalt zu finden. - - - * * *

V. Diese vorgehenden Sätze sind insgemein für jeden Staat wahr, ohne alle besondere Rücksicht auf den auswärtigen oder inländischen Handel. * * * *

VI. Wohl eingerichtete Maschinen, verrichten nicht nur die Werke einzelner Menschen: sondern eine einzige Maschine kann die Werke vieler tausend Menschen verrichten. * * * * *

Erster Satz.

4) Je mehr Volk in einem wohl eingerichteten Staate ist: desto leichter werden die Nahrungswege.

Beweis. In einem wohl eingerichteten Staate erfüllet jeder Bürger seine Pflicht, nach dem Verhältnisse seines Standes zur Aufrechthaltung des Staates, dessen Glied er ist, nach seinen Kräften beyzutragen. (I. Vor-

* Dieser Satz ist von sich selbst klar, und der Versuch setzet ihn ebenfalls voraus; denn sonst würden die Folgerungen S. 8. aus der Weisheit des Schöpfers und seiner Vorsehung ohne zureichenden Grund seyn.

* * Versuch S. 10. 11.

* * * Eben daselbst S. 10.; und in den Lehrsätzen n. 40.

* * * * Dieß erhellet aus den ersten Gründen der Staatskunst, und zur Genüge aus den ersteren Blättern des Versuchs.

* * * * * Ist ein Satz, den alle Regeln der Meßkunst, und eine Erfahrung, die so alt ist, als die Staaten selber sind, bestättigen.

aussetzung: und vermöge dem Begriffe eines wohl eingerichteten Staates.) Je mehr also Bürger da sind: desto mehr wird zur Aufrechthaltung des Staates beygetragen. Da nun die Aufrechthaltung des Staates ohne ebenmäßige Menge Nahrungsmittel nicht bestehen kann. (II. Voraussetz.): so wird in einem wohl eingerichteten Staate zur Anschaffung der ebenmäßigen Nahrungsmittel immer desto mehr beygetragen, jemehr Bürger da sind; und folglich werden die Nahrungswege immer leichter. *

Zweyter Satz.

5) Wenn in einem wohl eingerichteten Staate viele wohl eingerichtete Maschinen sind: so werden dadurch dem Volke die Nahrungswege ungläublich sehr erleichtert.

Beweis. Je mehr Volk in einem wohl eingerichteten Staate da ist: desto leichter werden ihm die Nahrungswege (1. Satz.). Da nun eine einzige wohl eingerichtete Maschine die Werke nicht nur einzelner, sondern vieler tausend Menschen verrichten kann, (VI. Voraussetz.): so werden in einem wohl eingerichteten Staate durch viele wohl eingerichtete Maschinen dem Volke die Nahrungswege ungläublich sehr erleichtert.

Dritter Satz.

6) Wenn in einem wohl eingerichtetem Staate viele wohl eingerichtete Maschinen sind: so tragen sie zur Bevölkerung ungläublich vieles bey.

Beweis. Sind die Nahrungswege schwer; so ist auch die Bevölkerung sehr eingeschränkt: sind sie aber leichte, so richtet sich die Bevölkerung ordentlicher Weise nach der Leichtigkeit - - - (III. Voraussetz.). Da nun in einem wohl eingerichteten Staate, durch viele wohl eingerichtete Maschinen dem Volke die Nahrungswege ungläublich sehr erleichtert werden (2. Satz.): so tragen in einem wohl eingerichteten Staate viele wohl eingerichtete Maschinen auch zu seiner Bevölkerung ungläublich vieles bey.

Folgerung.

7) Weil aber die Voraussetzungen I. II. III. (*n.* 3.) von allen Staaten insgemein wahr sind, ohne alle besondere Rücksicht auf den auswärtigen, oder

* S. 11. des Versuchs: die Menge, indem sie zwar mehrere Bedürfnisse fodert, vermehret zugleich auch die Wege sie zu verschaffen.

oder inländischen Handel (V. Voraussetz.) so sind auch diese drey vorgehenden Sätze (4. 5. 6.) ohne alle Rücksicht auf den auswärtigen oder inländischen Handel, von allen wohl eingerichteten Staaten insgemein wahr. Eben so werden es auch der 4te und 5te Satz seyn.

Vierter Satz.

8) Keine wohl eingerichtete Maschine, kann jemals in einem wohl eingerichteten Staate, einem oder mehreren Bürgern den Verdienst schmälern, oder sie verhindern, den nöthigen Unterhalt zu finden.

Beweis. Weil es unrichtig ist, daß in einem wohl eingerichteten Staate der Unterthanen jemals zu viel seyn, oder einer dem anderen den Verdienst schmälern, oder ihn verhindern könne, den nöthigen Unterhalt zu finden, (IV. Voraussetz.): so ist es auch falsch, daß ein Ding, deren Wirksamkeit, die Wirksamkeit der Menschen vertritt, in einem wohl eingerichtetem Staate jemanden den Verdienst schmälern, oder ihn hindern könne, den nöthigen Unterhalt zu finden. Da nun aber die Wirksamkeit der Maschinen die Wirksamkeit der Menschen mit grossem Vorrechte vertritt, (VI. Voraussetz.): so kann keine wohl eingerichtete Maschine jemals in einem wohl eingerichteten Staate einem oder mehr Bürgern den Verdienst schmälern, oder sie verhindern, den nöthigen Unterhalt zu finden.

Folgerung.

9) Es ist also auch dieß alles unrichtig, was die oben (*n.* 2.) angeführte Stelle des Herrn Montesquieu von der Schädlichkeit einiger Maschinen, welche die Zahl der Künstler verringern sollen, behauptet; es wäre denn, daß sie sich nicht auf einen **wohl eingerichteten**, sondern **übel eingerichteten** Staat bezöge, welchem eine **übel bestellte** Polizey entweder nicht aufhelfen wollte oder könnte. Und in diesem Falle würde dennoch die Schädlichkeit nicht der Maschine, sondern der übel bestellten Polizey beyzumessen seyn; so wie der Grund der Folgerung daher rühret.

Fünfter Satz.

10) Gesetzt, daß jemals die Bevölkerung in einem wohl eingerichteten Staate aufs Höchste stiege: so würden wohl eingerichtete Maschinen dennoch nicht schädlich seyn.

Be-

Beweis. Wenn jemals die Bevölkerung in einem wohl eingerichteten Staate aufs Höchste stiege: so müßten auch die Nahrungswege erschöpfet seyn (II. und III. Voraussetz.). Es würden also wohl eingerichtete Maschinen die Nahrungswege zwar nicht mehr erweitern: allein sie würden dennoch sehr viele beschwerliche Arbeiten statt der Menschen verrichten; und ihnen also die Nahrungswege desto bequemer machen. Dieß aber wäre auch nicht schädlich.

Folgerung.

11) Man sieht also, daß wohl eingerichtete Maschinen in einem wohl eingerichteten Staate dem menschlichen Geschlechte einen zweyfachen Dienst erweisen können; den einen, indem sie die Zahl der Nahrungswege erweitern und vermehren helfen, (*n.* 5.) den anderen, daß sie die schon entdeckten Nahrungswege bequemer machen (*n.* 10.).

Erste Anmerkung.

12) Mit diesem nun könnte ich diese Zeilen beschließen: wenn ich nicht nöthig zu seyn glaubte, die Quelle, die mir (*n.* 9.) den grossen Montesquieu in diesen kleinen Irrthum verleitet zu haben schien, etwas umständlicher zu bemerken. — Man unterscheide nur zuerst den Zustand eines wohl eingerichteten Staates, von dem Zustande eines übel eingerichteten. Ich stelle mir einen übel eingerichteten Staat, als einen übel bestellten, kranken, siechen, Körper vor. Einem kranken Körper entziehet ein kluger Arzt vieles als schädlich, was er einem gesunden als heilsam empfiehlt. Ist nun ein Staat so übel zugerichtet, daß ihm die Menge seiner Bürger zur Last wird, daß einer den anderen von seiner Stelle dränget, und ihm die Nahrung raubet; und daß sie einander wie reißende Wölfe auffressen: so ist es unstreitig, daß auch einige Maschinen verderblich sind. Allein gleichwie nicht die Menge des Volks, der wahre und einzige Reichthum des Staats, Schuld daran ist, daß sie in einem so traurigen Verhältnisse gegeneinander stehen (IV. Voraussetz. *n.* 3.): so sind es auch die Maschinen nicht (4. Satz. *n.* 8.). Die Maschinen sind bloß deßwegen schädlich, weil sie der Bevölkerung nützlich sind: (*n.* 6 - 3. Satz.) und die Bevölkerung schadet, weil der Staat übel eingerichtet, und die Polizey übel bestellet ist. (*n.* 9.) *

Zwey-

* Dieß entwickelt sich alles sehr einstimmig nach dem allgemeinen wahrhaften Satze: Wo nichtswerthe Obrigkeiten sind, da ist alles nichtswerth.

Zweyte Anmerkung.

13) Je näher aber ein Kranker seiner Genesung ist: desto mehr eilet ein kluger Arzt mit ihm zu den Verrichtungen der Gesunden. Je mehr also eine wohl bestellte Polizey einen übel zugerichteten Staat zu heilen suchet: desto mehr ist sie bemühet dem Volke die Nahrungswege zu erleichtern; und desto mehr ist sie verpflichtet wohl eingerichte Maschinen in den Staat einzuführen. * Es sind also wohl eingerichtete Maschinen nicht nur in einem wohl eingerichteten, sondern auch in einem wohl einzurichtenden Staate der Bevölkerung nicht schädlich. (3. Voraussetz.)

Dritte Anmerkung.

14) Allein mir scheinet überdieß, daß in einem wohl eingerichteten Staate, ein wohl eingerichtetes Maschinenwesen noch einen ganz besonderen Vorzug habe, den ich bis itzo nicht berühret habe. — Wohl eingerichtete Maschinen vertretten in einem Staate die Stelle der Bürger, die immerfort Nahrungs- und Unterhaltungsmittel verdienen helfen, niemal aber deren einige verzehren. Man stelle sich zween gleichgut eingerichtete Staaten vor; in deren jedem die Zahl der Bürger $= a$ sey. Der erste sey ohne Maschinen; der zweyte habe wohl bestellte Maschinen, die so viel wirken, als eine Zahl Bürger $= m$. In jedem Staate sey der Beytrag jeden Bürgers zur allgemeinen Aufrechthaltung $= \frac{1}{n}$ seiner Verrichtungen: so findet man, daß die Macht des ersten zur Macht des anderen $= 1 : 1 + \frac{m\, n^2}{a}$ ist; welches kein geringer Vorzug dieses über jenen ist.

Vierte Anmerkung.

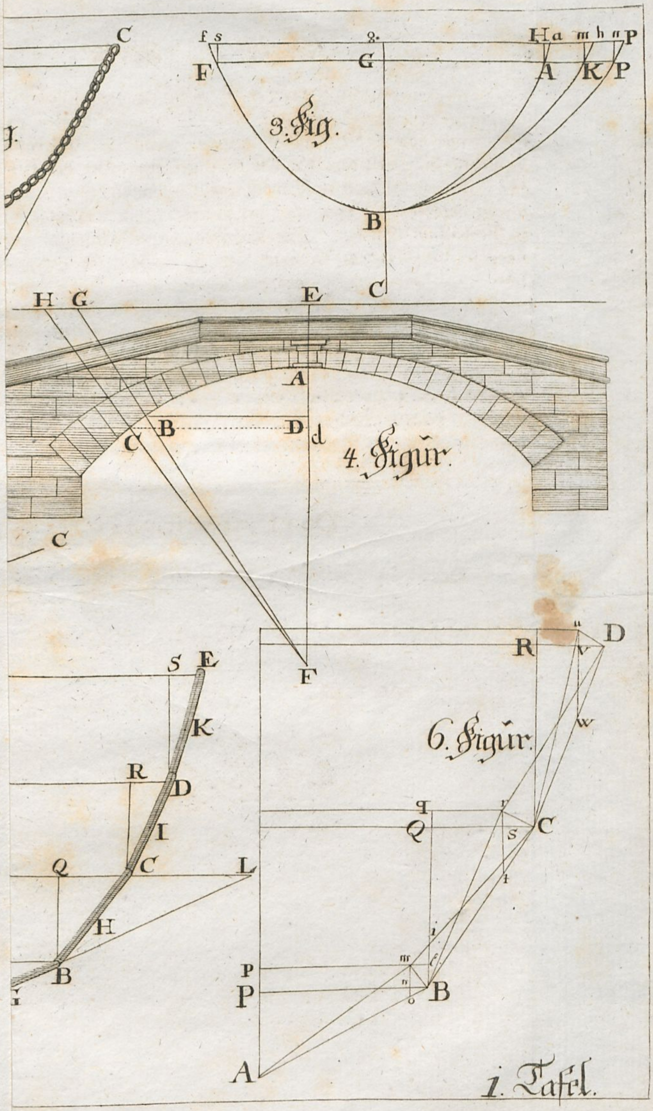
Jedoch damit ich endlich, selbst die Einwürfe des Herrn Montesquieu stracks zernichte: so stelle man sich in einem wohl eingerichteten Staate eine gewisse Menge Künstler vor, die eine gewisse Zahl Waaren, um einen gewissen

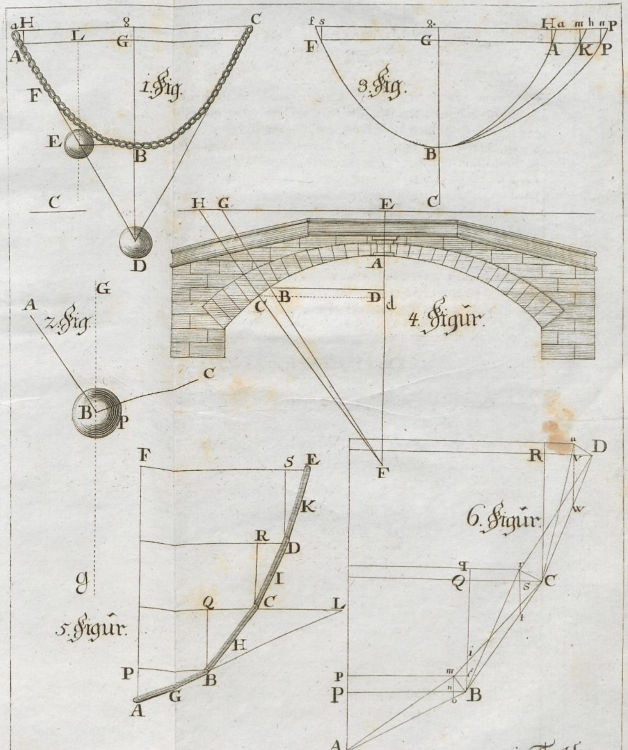
* Ich habe schon 1762. einen dergleichen allgemeinen Schluß, in der Rede, die ich bey Eröffnung des Schuljahrs, in der Sav. Ritterakademie gehalten habe, ausgeführet, und darinne erwiesen, von welcher grossen Wichtigkeit, dem Staate die Dienste der Naturforscher und Größenkundigen überhaupt, sind. Man sehe daselbst S. 12. 13. 14.

wissen Preis verfertigen, der den Verfertigern und Käufern ebenmäßig ist. Nun fange in einem Augenblicke eine Maschine zu wirken an; und verrichte alles, was vorhin die Künstler gethan. Weil der Unterhalt der Maschine gegen den Unterhalt der Künstler sehr geringe; oder gar keiner ist: so wird eine wohl bestellte Polizey sogleich das Ebenmaaß des Preises und der Waare so weit herabsetzen müßen, biß der Verfertiger und Käufer wieder in ihr altes Verhältniß kommen. Die Waaren werden um soviel wohlfeiler werden, jeweniger die Maschine Aufwand bedarf. Weil aber der Staat wohl eingerichtet, und die Polizey wohl bestellet ist; so daß die Bürger niemal zuviel seyn, oder einander die Beschäftigung rauben können: so wird man auch diesen erledigten Künstlern in dem nämlichen Augenblicke, eine andere ihrem Stande ebenmäßige Beschäftigung anweisen können. Es ist also in diesem Falle dem Staate gar nicht geschadet, ja es ist ihm wohl gar geholfen. Was Herr Montesquieu beynebens von den Wassermühlen anbringt, kann keinem Mechanicker, der zugleich ein Naturkundiger ist, als erheblich vorkommen.

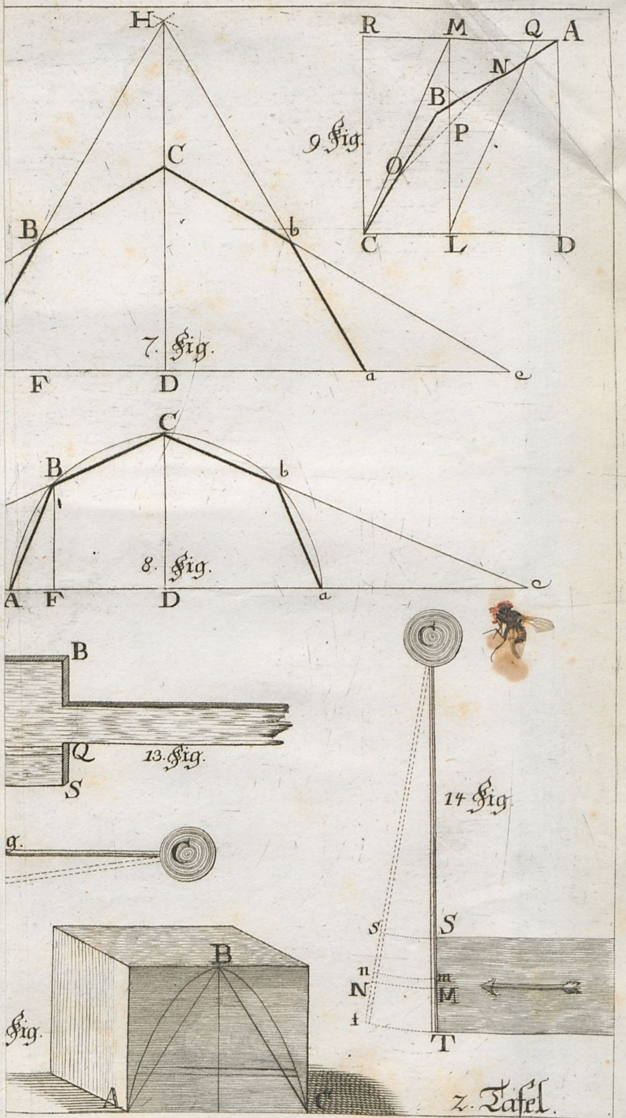
Verbesserungen.

Seite	64	Zeile	3	lies	4929	statt	4938.
---	64	---	7	--	0′, 13	--	4 Zolle.

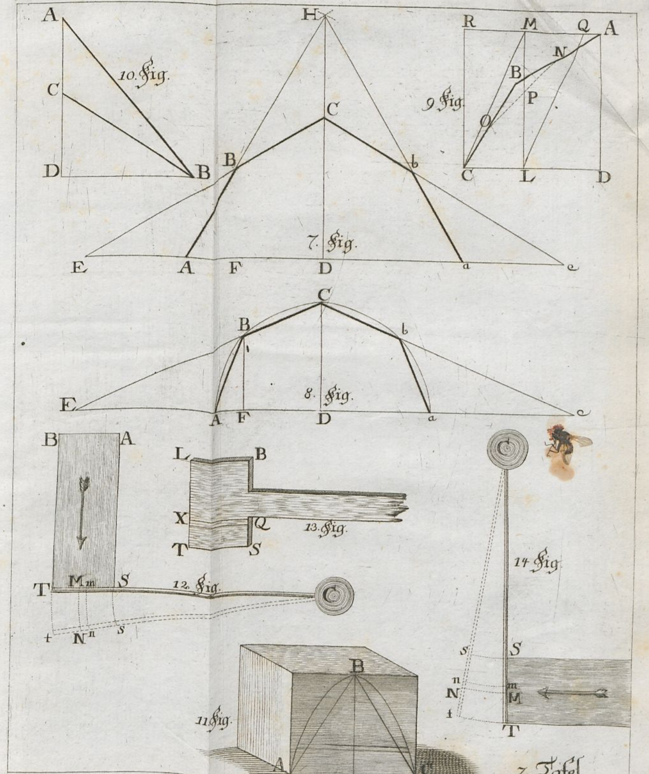

3. Fig.
4. Figur.
6. Figur.
1. Tafel.



1. Tafel.



2. Tafel



2. Tafel

Entwurf
einiger vortrefflichen Lehren
aus der höheren
Naturkunde und Größenlehre,
worüber
die Herren
Johann und Thaddæus
des Heil. Röm. Reichs
Grafen von Thurn, Valsassina, und Taxis
in der Herzogl. Sav. Ritterakademie
den May 1764.
öffentlich werden geprüfet werden.

Dazu kömmt
ein Anhang
über
einen Satz aus der Polizeywissenschaft,
welcher unlängst auf hiesiger hohen Schule ist
vertheidiget worden.

Wien in Oesterreich,
Gedrukt bey Leopold Johann Kaliwoda,
kaiserl. Reichshofbuchdruckern.