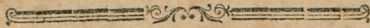






DE RATIONE  
QVAM INTER SE HABENT  
IN DEMONSTRATIONIBVS MATHEMATICIS  
METHODVS  
SYNTHETICA ET ANALYTICA

DISSERIT



ET

LECTIONES

QVIBVS

MVNVS MATHESIN PVBLICE PROFITENDI  
CLEMENTISSIME IN SE COLLATVM  
AVSPICATVRVS EST

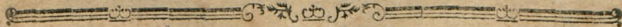
INDICIT

GEORGIVS SIMON KLÜGEL

MATHEMATVM IN ACADEMIA IVLIA CAROLINA

P' P' O'

SOCIETATIS REGIAE SCIENTIARVM GÖTTINGENSIS  
CORRESPONDENS, ET TEVTONICAE, QVAE GÖTTINGAE  
FLORET, MEMBRVM ORDINARIVM NEC NON INSTITVTI  
HISTORICI IBIDEM SODALIS EXTRAORDINARIVS.



HELMSTADII

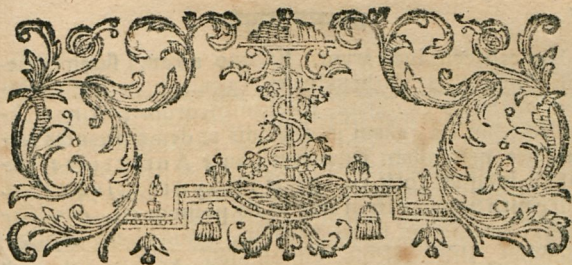
EX TYPOGRAPHEO VIDVAE SCHNORRIAE.  
CICIS CC LXVII.

1767, 4  
14

67







**M**athematici veteres, qui Geometriam non solum ob summam, quae inde in omnem vitam redundat, utilitatem, verum etiam ob nativam eius et interiorem pulchritudinem excolendam esse censebant, in condendis demonstrationibus usi sunt methodo, quae ordinandis magis quam inveniendis veritatibus apta, fontem inventionis regeret, totamque propositionum concatenationem tum elegantiore, tum difficiliore magisque mirandam redderet. Secuti illos sunt tum saeculi superioris Mathematici fere omnes, nostri etiam plures, praesertim Angli, quos inter eminent Newtonus et Maclaurinus, vel ut via, qua ad inventa sua pervenerant, lateret, ipsique ex difficultate demonstrationum maiorem ingenii claritatem adipiscerentur, vel etiam quia hanc solum methodum Geometria omnique Mathesi dignam, summiq[ue] rigoris  
A 2 solam.

solam capace[m] iudicarunt. Ex quo autem a summis faeculi nostri viris Mathesis novis calculi et demonstrationum methodis est ditata, Mathematicorum plurimi relicta Veterum via, aliam in eruedis et demonstrandis veritatibus methodum sequuntur, quae Analyticae nomine insigniri solet, cum prior illa Synthetica audiat. Discrimen autem earum non in eo positum est, quod diversis quantitatum signis utuntur, quod altera constructionibus, altera calculo rem absolvit, verum ex interiori veritatum, quas contemplantur, natura, et ratione, quam in eruedis illis et deducendis sequuntur, petendum erit.

Methodi Syntheticae ratio ea fere est, ut praemis-  
sis notionibus distinctis, et propositionibus vel identicis  
vel per se claris, omnes demonstrationes ad notiones  
hasce elementares seorsim revocet, comparando nempe  
quantitatum rationes inter se vel immediate, vel inferen-  
do alias pro termino comparationis fervientes, ubi au-  
tem in demonstrando subsistit, si in quantitatum rationes  
ex prioribus iam cognitae inciderit. Vnde quaelibet  
propositio per se fere subsistit, nec cum antecedenti et  
sequenti iungitur, nisi forsan in eodem subiecto plura se-  
orsim explicanda sint, et problema ad usum theorematis  
vel contra praemittatur. Ex eadem causa propositiones  
suo quaelibet titulo ornantur, et enunciatae sive demon-  
strandum aliquid sive efficiendum contineant, demonstra-  
tioni vel solutioni praemittuntur, simul definitiones ob  
simplicitatem obiecti paucis verbis inclusae adiciuntur,  
nec ad modum formationis attenditur, quod totum di-  
cendi genus in omnibus aliis praeter Geometrarum scri-  
ptis fastidimus, ob squalorem et tenebras, quibus res tra-  
ctandae involvuntur. Nec desunt, quibus eam ipsam ob  
causam Geometria horrida et sterilis videtur.

Quia

Quia tamen tum Veteres praesertim, tum Recen-  
tiores Geometriam hac methodo felicissimo successu tra-  
ctarunt, fuerunt etiam, qui evidentiam, qua gaudent ve-  
ritates mathematicae, methodo huic ipsi attribuerunt, e-  
andemque viam in aliis scientiis tentarunt, exitu minus  
felicior, cum vel nihil, quod dici meretur, proferrent,  
vel argumentum satis dignum minus commode nec pro  
vera geometricae methodi indole exponerent. In natura  
enim obiecti, quod Geometrae considerant, ratio posita  
est, tum quod veritates mathematicae singulari prae aliis  
evidentia gaudent, tum quod optimo successu ex notio-  
nibus veritatibusque simplicissimis eruuntur. Non enim  
contemplantur, nisi numeros, vel quantitates, quae nu-  
meris exprimi possunt. Cum autem numerus nihil aliud  
sit, nisi repetitio eiusdem ideae, accidit hinc, ut notio  
compositi non differat a notione partis, nisi respectu ma-  
gnitudinis, ceterum ipsi per omnia similis; unde cum  
numeri notio distinctissime nobis praesens sit, quantita-  
tum, quae numeris exprimi possunt, tum ipsarum, qua-  
tenus compositae sunt, tum modi compositionis notio-  
nes habemus non minori luce fulgentes. Nec enim in  
Geometria aliud agimus, nisi ut aequalitatem vel  
quantitatum ipsarum vel rationum inter inaequales per-  
spiciamus, in quibus dissecandis et componendis eadem  
semper luce collustramur, qua simplicem numeri ideam  
intuemur. Hinc etiam Euclides in def. 4. L. V. provide  
determinat quantitates, quae rationem inter se habere di-  
cuntur, illas nempe, quae multiplicatae se invicem supe-  
rare possunt; nec unquam inter Mathematicos de men-  
sura virarum dissidium ortum fuisset, nisi ex quo-  
tidiano loquendi usu quantitates, quae intendi possunt,  
cum illis, quae augmenti vel decrementi capaces sunt,  
confudissent. Pro conditione enim intellectus nostri Ma-  
thesis Intenforum condi nunquam poterit. Atque



etiam plures difficultates, quae in Mathesi applicata sublimiori Mathematicos hodie morantur, ea ex causa oriri puto, quod ad quantitates respiciendum est, quae mensurari non possunt.

Ex eodem fonte, unde evidentia veritatum mathematicarum derivatur, derivanda etiam est indoles methodi geometricae. In illis nempe scientiis, quarum obiectum sunt quantitates absolute spectatae, nulla habita ratione determinationum, quae in natura rerum accedunt, cum aequalitatem vel quantitatum vel rationum, (in *Analysi* quidem etiam earum convergentiam ad aequalitatem) eruamus; per propositiones et notiones simplicissimas in demonstrando progredimur, vocatis in auxilium iis, quas eodem modo iam elicuimus. Hanc veritates has elementares ceterasque simpliciores praemittere, interque se comparatas coniungere licet, ita ut veritates inventae, ope illarum elementarium semper semperque coniunctae, fontem inexhaustam novarum praebant, atque systema hinc condi possit, ubi materia compositionis eadem manente, compositio ipsa infinitis modis variatur.

Hac autem via in veritatibus vel inveniendis vel ulterius evolvendis procedere non poteris, nisi vel in primis et facilioribus propositionibus subsistas, vel maxima ingenii vi polleas, simulque usu demonstrationum sis exercitissimus. Quas enim inter tot Geometriae propositiones, et quomodo illas coniunges, ut veritas nova inde exsiliat? Nec ipsi syntheticarum demonstrationum conditores illis in inveniendis, sed potius in ordinandis veritatibus usi sunt, ut legenti eorum scripta, vel ipsi experienti facile patebit. Quippe hac methodo, cum a qualibet propositione ad elementares, quae in ipsa continen-



tinentur, regredi propositum est, transitus a praecedentibus ad sequentes saepe later, et vulgaris oculi aciem fugit; demonstrationes tanto saepe artificio sunt compositae, ut ad vestigia inventionis indaganda, retro resoluenda sint: substitutiones, quae inventori ultro se offerebant, analogiae, in quas inciderat, propositiones iam notae, quae in auxilium sponte venerant, veritates generales, quibus in evolvendis specialibus usus erat, haec omnia mutata forma novo iam ordine disponuntur, optimo illo quidem, quo autem ad perspiciendum totum systema nemo manuducitur.

Veritates enim hoc modo demonstratae omnes sunt propositiones singulares, quae singulae per se subsistunt, nec ad alias referuntur, nisi quarum ope demonstrantur, quae relatio incerta sane fit, quia eadem proposito pluribus modis demonstrari potest, ideoque nexus demonstrationis nexum rei non semper affert. Longissimum hinc etiam fit iter, quando a quolibet theoremate ad prima elementa regrediendum est, nec nisi in veritatibus affinibus transitus aliquantum facilius redditur. Vnde si alios breviori via ducere, vel ipsi in evolvendis et inveniendis veritatibus certior magis rationem sequi volumus, methodus analytica, quam recentiores excoluerunt, erit eligenda.

Huius indoles ut pateat, in naturam veritatum et propositionum, quibus utitur, sedulo erit inquirendum. Alias, ut saepe fit, cum externo omni analyticae methodi apparatu, synthetico tamen more omnia peragentur, veritatesque quae ex uno fonte derivandae erant, sparsae nec satis inter se cohaerentes tradentur.

Propo

Propositionum mathematicarum aliae tam generales sunt, ut, quid omissis omnibus determinationibus ex magnitudine quantitatum, et relatione earum ad se invicem mutuaque dependentia ortis, remaneat, ostendant; aliae formam nexus, qui inter eas obtinet, sive relationem earum mutuam, modumque, quo ex ceteris quaeque determinatur, declarant; aliae casum singularem huius relationis offerunt, ita tamen ut ex exemplo unico perspiciamus, eundem casum infinitis modis, mutata magnitudine quantitatum situque linearum et superficialium, recurrere posse; aliae denique, quid in natura rerum, determinatis omnibus quantitibus, obtineat, docent. Exempla iamiam adducenda rem illustrabunt.

Ad primum genus refero e. g. propositionem hanc: Rationem subtangentis ad ordinatam eandem esse cum illa, ad quam ratio inter incrementa abscissae et ordinatae sine fine accedit, quam vero nunquam attingit, sive ut solent dicere, subtangentem esse  $\frac{ydx}{dy}$ .

Tales sunt omnes illae formulae, quas summi inter recentiores viri de rectificatione et quadratura Curvarum dederunt; methodi universales radium osculi, evolutas &c. determinandi, prae omnibus autem methodi ultimas incrementorum rationes ex relatione quantitatum variabilium, sive hanc ex illis ultimis rationibus inveniendi. Huc refero, quod pro qualibet aequatione inter  $x$  et  $y$ ,

si  $x$  abeat in  $x + a$ ,  $y$  mutatur in  $y$

$$+ \frac{ady}{dx} + \frac{a^2 ddy}{2dx^2} + \frac{a^3 d^3 y}{2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \text{etc. item, quod si}$$

$$dV = Pdx + Qdy, \quad \text{fit} \quad \left( \frac{dP}{dy} \right) = \left( \frac{dQ}{dx} \right),$$

Carte.

Cartesius nominis sui immortalitatem potissimum debet invento huic enunciato: naturam omnium curvarum posse exprimi per aequationem inter abscissas et ordinatas. Pertinet huc formula, quae omnem Mechanicam motus complectitur: incrementum celeritatis secundum directionem vis acceleratricis esse ut factum ex vi acceleratrici in elementum temporis; illud etiam theorema non ita late patens, aream temporibus proportionalem esse, directione virium per centrum immotum transeunte. Conditio enim quae adiicitur, classem tantummodo veritatum, quarum illa suprema est, designare videtur, sine qua etiam temporis ad ceteras quantitates ratio omnino exprimi non posset, nisi per formulam illam indeterminatam, elementum temporis esse elementum spatii percursum divisum per celeritatem. Sunt porro veritates, quae certo respectu pro generalibus haberi possunt, quae vero ex generatioribus adiectis quibusdam determinationibus deducuntur, atque hinc minus recte in eodem cum prioribus ordine collocantur. quale est maximi Kepleri inventum, quadrata temporum periodicorum esse ut cubos axium maiorum, quod ratione inventoris erat enunciatum generale, nobis non ita, quia ad motum in ellipsi tantum pertinet.

Transio ad propositiones, quas formam nexus inter plures quantitates, quae considerantur, ostendere dixi, sive relationem earum mutuam, modumque quo ex ceteris quaeque determinatur. Huc refero praecipue aequationes inter plures quantitates, quarum vel una incognita est, reliquis notis, vel duo pluresve variables sunt, reliquis constantibus; formulas differentiandi et integrandi; omnesque Mathematicae applicatae formulas, quae, quomodo a certis vel determinatis vel determinandis quantitatibus alia quaedam pendeat, demonstrant.

B

Con-

Consultum autem erit, ut cavendum esse moneam, ne vox generalis duplici sensu accipiat, altero quem iam exposui, altero quo id, cui plures insunt determinationes, ratione eius quod pauciores habet, vel etiam determinatum ratione eius quod adhuc determinandum est, generale dicitur. Ita v. c. dicunt aequationem generalem pro sectionibus conicis, intelliguntque aequationem, ubi non solum sectio conica ipsa, verum etiam situs lineae abscissarum, cum angulo coordinatarum indeterminatus relinquitur. Haec quidem aequationes pro ordinatis ad diametrum vel axem sumtis continent, non autem ut speciem genus, quia in illa plus quam in his continentur. Determinationes definiendis sectionibus conicis necessarias omnes complectitur, et quid quaeque afferat, ostendit, quibus determinatis in quamcumque aequationem specialem abit: in enunciato autem generali omnes tum quantitatum tum relationis earum mutuae determinationes exfulantur, quod nec in speciale abit, nisi determinationes necessariae extrorsum inferantur. Simile exemplum praebent formulae, quae, coefficientibus exponentibusque indeterminatis, integrandae docentur, quod generatim spectatum utilissimum est, quia infinitus casuum numerus unico exemplo comprehenditur, et dependentia quantitatum variarum oculis quasi demonstratur. Nec tamen forma haec indeterminata generalior est dicenda, quam quaelibet determinata, quam continet. Si plures determinationes complectitur, magis extensam rite illam vocaveris, non autem generaliore. Nec tamen impedirem, quo minus formulae hae et propositiones generales vocentur, nisi ab illis, quas ante attuli, quibus generalium nomen melius convenire videtur, re vera differrent; nisi porro omnis analyticae methodi indoles et natura ex discrimine harum veritatum repetenda foret; nisi denique ex confusione earum vitia non

contemnenda in tradendis et eruendis veritatibus mathematicis nata viderem. Fit enim quandoque, ut plura enunciata ad unicum, quod illa omnia comprehendit, praeter necessitatem reducantur, quam formulam deinde generalem appellant. Si vero haec realem plurium formularum in uno consensum non doceat, nec eadem cum his simplicitate se commendet, frustra laboratum mihi videtur. Credunt ad veritatem generalem perventum esse, quando plura enunciata singularia eadem solummodo ratione expresserunt. Exemplum suppeditat canon Neperianus pro resolvendis triangulis sphaericis reclangulis. Similiter peccatur, si ad demonstrandum usum alicuius methodi, vel ad resolvendum casum aliquem particularem, formulae complicatae maximeque indeterminatae adhibentur, ubi simplicioribus fortasse res transigi potuissent, quo autem facto non solum ipse calculus fit prolixior, verum etiam ad casus singulares applicatus, difficilior, quin etiam superfluis redditur. Huc etiam illud refero, quando theoria tam universalis, omnesque casus complectens, conditur, ut formulae, ad quas perventum est, eam ipsam ob causam, quod nimis sunt indeterminatae, resolvi non possint, et, si casus simpliciores ex illa deducuntur, operose hoc peragatur. Theoriam universalem confici puto non ex formulis, quae omnes iam casus singulares includunt, sed ex indagatione veritatum generalium, et methodi illas ad casus speciales applicandi.

Sed redeundum est ad veritates speciales, quarum adhuc classis peculiaris recensenda mihi venit. Occurrunt nempe formulae, quae talem formularum singularium consensum exponunt, ut, licet multum diversae, modo tamen prorsus eodem exprimantur. Quod

B 2

$$(a + b)^m$$

$$(a + b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2}b^2 +$$

&c. quicquid sit  $m$ , numerus integer an fractus, positivus an negativus, operationum algebraicarum factis diversarum concordiam ostendit plane singularem. Nec tamen in forma hac indeterminata aliquid est, quod in quovis casu singulari, quem complectitur, non reperiatur, unde veritatibus generalibus, uti ego quidem eas accipio, accenferi non poterit. Geometria exemplum simile praebet in illa ellipsis proprietate, quadrata ordinarum orthogonalium in axe maiore sumtarum esse ut facta segmentorum axis, quod non minus de quavis diametro eiusdemque ordinatis, verum etiam de quavis sectione conica valet, ut ut ceterum diversae sint hae lineae. Eadem tamen haec veritas si aequatione ita exprimitur, ut modus inde pateat, aequationem pro quavis sectione conica et quovis diametri situ eliciendi, alio respectu consideranda veniet. Vnde veritatum specialium duas classes constituam, alteram, qua continentur formulae, quae nexum plurium quantitarum ita ob oculos ponunt, ut perspiciatur, quomodo tum ipsae, tum modus combinationis variari possit, natura relationis et dependentiae eadem manente, quas quidem *comprehensivas*, si licet, appellaverim, ob multitudinem propositionum singularium, quas complectuntur: alteram classem earum faciam, quae ostendunt, quomodo in diversis quantitatibus et operationibus dissimilibus eadem compositio servetur, quas *extensivas* vocabo.

Ad veritates singulares refero praesertim omnes Geometriae propositiones, quarum veritas ex demonstratione casus unici, quem tibi mente fingis, perspicitur, ita tamen ut magnitudinem situmque linearum nihil ad rem facere, et conditionibus theorematum vel problematis

matris servatis, eandem semper et veram manere intelligas.

Superfunt adhuc veritates univales, quae casum unicum, omnimode determinatum, quem tibi mente fingis, vel natura rerum suppeditat, exponunt. Hisce non est, quod immerer. Definitis iis, quae in formulis, nexum et relationem diversarum quantitatum continentibus, tum ratione magnitudinis, tum modo combinationis indefinita erant, casus unici eruuntur.

Classes veritarum omnes hic enumeratas esse, mihi non persuadeo, nec scio, an divisio per omnia recte fuerit instituta. Excusari me velim, si erravero, quia huc usque veritates mathematicae potissimum fere ratione formae externae, an sint theorematum, problematum etc. sunt consideratae, quod cui bono fiat, non video. simul autem moneo, divisionem quam Logici tradunt, propositionum in univales, particulares et individuales, non esse commiscendam cum illa, quam tradidi veritarum in generales, speciales, singulares et univales. Illa formam propositionum, haec rem magis spectat. Univales et individuales inter se conveniunt, differunt tamen ratione modi, quo considerantur.

De veritatibus autem generalibus norandum est, non videri, eas per abstractionem, relictis determinationibus dissimilibus, formari posse, quippe diversae plane cum ceteris naturae sunt, et facillime demonstrantur, cum tamen repertu tam sint difficiles, ut per plura millia annorum ignotae manserint. Satis, non data opera ad illas mens pervenire videtur. Notari etiam velim, foecundas hasce et late patentes veritates, quales supra attuli, sola esse et vera scientiarum principia, non

autem illas, quibus vel vulgus utitur, ut, non potest ens simul esse et non esse; quicquid est; rationem habet sufficientem etc. quae non sunt principia, sed termini ultra quos in demonstrando non est progrediendum. Mathematicam nostram et Physicam tanta intra dimidii saeculi spatium incrementa cepisse, hoc quidem solis veritatis generalibus illo tempore detectis, est referendum.

Iam ergo methodus analytica in eo est posita, ut ad modum, quo quantitates, quae in computum veniunt, a se invicem pendent, pervenire tenter, ita ut non solum omnes, verum etiam omnes earum combinationes, quae fieri possunt, adfint. In quem finem veritates generales cum cognitis quantitatibus rationibus coniungit, ut formulas illas comprehensivas nanciscatur, quas deinde denuo cum generalibus vel ipsas inter se comparat, ut novae inde quantitatibus relationes eruantur, vel etiam quaesitum eiusque a ceteris dependentia pateat. In quo negotio opem insignem ferunt methodi generales iam cognitae, quarum auxilio pluribus in casibus eodem fere modo, exceptis levibus mutationibus, quae attentum et acutum animum non fugient, res transigi poterit. Accedit, quod in modis, quibus plures quantitates a se pendent, diligenter iam est inquisitum, quod methodi coniungendarum veritatum generalium cum specialibus, formulasque, quibus relatio et nexus quantitatibus exprimitur, evolvendi, inventae iam sunt et multum excultae, ita ut eadem vel analogam rationem procedere saepissime liceat. Unde adeo fit, ut analyticam methodum sequentes, opificum more, idem opus nulla vel parva animi contentione repetere saepius videamur. Quod si omnino ita esset, maiorem adhuc veritatum et methodorum generalium inventoribus reverentiam deberemus. Si nos illa, qua ipsi duces praeceunt,  
via



via novi aliquid inveniamus, hoc omne illorum est, quia nos inventa eorum tantummodo evolvimus et excolimus, nec maiorem inde gloriam nobis vindicare possumus, quam hanc, nos instrumentorum, quae illi invenerunt, usum optime callere.

Quod autem synthetica methodus non tanta facilitate et viae, quam eligit, compendiis sese commendat, inde fit, quod tota in singularibus veritatibus occupatur, nec ad generales ascendit, quia ex enunciatis singularibus non nisi singularia sequuntur. Unde etiam ipsi omnes illae propositiones, quae per analyticam methodum ex una formula comprehensiva, et saepius quidem una opera, deducuntur, sigillarim sunt demonstrandae. In quo vis nempe obiecto quantitatum rationes seorsim sunt excutiendae atque ad simpliciores et iam notas revocandae, unde fit, ut, cum veritates illae singulares, quibus coniunctis nova alia prodit, in obiecto vel reperiendae vel adeo extrorsum introducendae sint, internus propositio- nis cuiusdam cum ceteris nexus non adeo eluceat, solus autem in oculos incurrat ille, ex forma demonstrationis oriundus. Hinc etiam fons inventionis sub terra quasi occultatur, transitusque ab una propositione ad alteram ita fit, ut ratio eius reddi non semper possit. Dispositio veritatum ex methodo analytica fit quasi in circulo circa centrum commune, quod veritates generales occupant, ita ut facile inde ad illas perveniri possit; ex synthetica methodo, ubi ad primas veritates elementares semper regrediendum est, per plures lineas rectas, nunc parallelas, nunc se invicem decussantes disseminantur, ita ut regressus difficilis sit, progressus ob ignorantiam viarum locorumque vicinorum multum impediatur.

Ut autem veritates generales et speciales inter se coniungi possint, ut ratio et nexus quantitatum inter se exprimat et evolatur, necessaria nobis est ars, quae omnes quantitates, variosque modos, quibus a se pendent, designare, atque hinc ea, quae repesienda sunt, depromere doceat.

Haec ars est Analysis, utilissima illa scientia, quae per omnem Mathematicam tanta viarum compendia monstrat, demonstrationum labores allevat, ipsamque usibus practiis aptam et commodam sola reddit. Quamquam enim ad inveniendum haud multum proffit, in evolvendis tamen ratiociniis mirum quanta auxilia afferat. Ad veritates generales, quae totas in se complectuntur scientias, novis et inusitatis antehac viis mens evolat, omnemque aliam veritatum informationem habuisse videntur rerum inventores, quam ceteri ex vulgo homines. Atque adeo, qui minus in reperiendo sagax vel felix est, ut rite ratiocinetur, et quantitatum inter se rationes eruat et comparer, ingenii vi adiuvandus et usu rerum ea docendus est, quae regulis analyticis comprehendere non possunt. Fert tamen ipsi opem satis citam Analysis, suppeditando signa, quibus tum quantitates, tum varii relationis earum modi sistuntur, quo non dici potest, quantum ratiociniorum impeditorum turba explicetur. Quae enim menti alias confusa obversaretur idea modi, quo incognita a cognitis, variabilia a datis aliis constantibus et a se ipsis pendent, in luce collocatur symbolis illis et usu eorum, quem Analysis docet, qua auxiliante problema tandem ad aequationem reducitur, sive ad formulam, quae ostendit, quomodo diversae illae quantitates, quae in computum veniunt, duplici modo componi possint, ut utrinque idem emergat. Ad quas formulas negotium tandem redire eam ob causam videtur, quia  
iam

iam a primis initiis in disquisitionibus mathematicis nil nisi rationes aequales vel ad aequalitatem convergentes comparare possumus.

Simulac eo perventum est, fatigato animo aliquantum requiescere datur. Methodis enim et regulis suis Analysis incognita a cognitis separare, rationes variarum et constantium evolvere; plures aequationes inter se componere et comparare, atque novas quantitatum rationes et proprietates deducere, quaesitumque ita depromere docet, ut facillime et accuratissime noscatur, vel si verum non omne attingere licet, (nam etiam in Mathesi, ut alibi, si ad veritatem proxime accedere poteris, satis saepe habendum est) ut via tamen brevissima et expeditissima illud, quantum libuerit, assequaris. Harum regularum et methodorum plurimae in resolvendis geometricis, mechanicis aliisque Mechanicis, ut dicitur, applicatae problematibus sunt inventae. Scientia, quae illas colligit, et generatius latusque patentes reddit, est *Analysis*, quae in duas partes primarias secatur. Vel enim versatur in conquirendis et evolvendis rationibus quantitatum, quae mutuo quodam nexu inter se connectuntur, habebiturque *Analysis finitorum*; vel in indagandis rationibus, quibus incrementorum, quas quantitates capiunt, rationes sine fine accedunt, fitque tunc *Analysis infinitorum*. Si ex descriptione mutui quantitatum nexus ultimas haec rationes elicit, nomen accipit *Calculus differentialis*; si vero ab ultimis his rationibus ad definiendum mutuum illum nexum pervenire tentat, appellant *Calculus integralem*. Ob commune harum scientiarum nomen putant plures, eas in dissecandis quantitativis infinite parvis versari, quod longe aliter se habet. Fictae enim sunt tum quantitates infinite parvae, tum infinite magnae; nec Analysis aequationem inter  $dy$  et  $dx$ ,

sed quotientem  $\frac{dx}{dy}$  quaerit, qui ultimam rationem, ad quam ratio incrementorum finitorum ipsius  $x$  et  $y$  continuo accedit, designare putandus est.

Quo haec, quae de relatione quantitatum cognitatum ad incognitas, variabilium ad constantes dixi, melius intelligantur, intueamur paulum universam rerum naturam. Omnia hic cum omnibus infinitis modis connexa videmus. Quilibet effectus ex coniunctis inter se non numerandis causis agentibus oritur, quae rursus mutuo in se invicem influunt, alteramque altera vicissim determinant. Si unquam nobis dari posset, ut quid quaelibet causa cum effectibus suis in omnes alias valeret, separare, calculo exprimere, et quemlibet effectum ex ceteris omnibus seorsim eruere possemus, omnis natura, quanta quanta est, unico sed maximo sifteretur problemate analytico. Quia vero, quod ante pedes est, vix videmus, paucissima tantum, et ne haec quidem sine summa difficultate multoque labore, comparare possumus. Unde etiam Analysis in nexum paucarum tantum quantitatum inquirat, cum tamen, qui in natura re vera obtinet, quo nulla mutatur, quin in reliquis omnes influat, atque ut nexus quilibet momentaneus a certis quibusdam legibus, et a certa quadam anteriori inter illas coniunctione determinetur. Hinc quodammodo perspici posse credo, quid sibi velint Analytiae aequationibus inter variabiles  $x, y, z$  etc. et constantes  $a, b, c$  etc., atque in quem usum illas convertant.

Si igitur ANALYTICAE METHODI CVM ANALYSI CONIUNCTAE, perfectam nobis ideam animo informare velimus, dicendum erit, esse illam *habitu et arte*, omnes quotquot dantur quantitatum inter se rationes, quibus  
*a se*

a se mutuo pendent, atque se invicem quaelibet alteram determinant, reperendi, ulterius evolendi, atque eas ita sistere, ut calculo, quam facillime fieri potest, exprimantur, quaesitumque elegantissime et exactissime eliciatur. Prius, inventio nempe rationum ad methodum analyticam refertur, vel ut ego potius illam appellaverim, artem analyticam, nomine methodi analyticae pro coniuncta arte analytica cum Analyfi servato. Hic mens sola fere operatur, non manus aut calamus, in ceteris subsidia calculi analytici laborem mentis aliquantum allevant, quamquam etiam haec in casibus difficilioribus ad nova semper calculi artificia atteata esse debet, cui nec in simplicioribus quidem desidem esse licet, ne solutiones praeter necessitatem prolixae, deformes et taediosae evadant. Qui arte analytica destitutus est, Analyfi opificum more utitur; verum etiam sine Analyfi summum ingenium, quod arte analytica maxime polleret, complures rationes, quae ope Analysis facile eliciuntur, ob complicatum quantitatum nexum deferere cogeretur.

Ex hac artis analyticae et Analysis notione comparatio inter methodum syntheticam et analyticam in Geometria optime instituetur. Cum primum Analysis usum ad illam transferrent, Geometrarum eius temporis complures, vel quia priscam illam methodum, cui affuerant, novae, ut sit, praeferebant, vel quia non satis iustam Analyticae methodi notionem sibi formaverant, de recentiorum in Geometria innovationibus, ut ipsis visae sunt, acerbe querebantur, et Geometriam ex fastigio, in quod Veteres ipsam collocaverant, deiici, eiusque dignitatem imminui censebant; Calculum autem litteralem ex Geometria omnino exfulari debere, utpote ipsi minus aptum, et convictioni potius de ipsius veritatibus contrarium. Verum enim methodi analyticae natura non in

eo posita est, ut litteris utatur, calculoque rem transigat, quam Geometria linearum ductibus conficit, sed ut ad veritates generales ascendat, mutuumque quantitatum relationem, tum quoad necessaria tum contingentia exprimat, atque ex collatis cum hac veritatibus illis generalibus ope propositionum singularium, speciales quantitatum rationes eliciat. Cum autem haec omnia, quae tot tantasque res brevibus comprehendunt, signis etiam universalibus et brevissimis exprimenda sint, litteris et variis nexui quantitatum aptis combinationibus eam in rem utitur Analysis. Quodsi ergo veritates Geometriae universales, quarum aliquas supra adduxi, indagamus, atque has cum specialibus rationum, quas inter se habent quantitates geometricae, determinationibus conferamus, nihil sane in eo est, quod verae philosophiae indoli naturaeque intellectus nostri non conveniat. Quid quod experientia teste breviori multum et expeditiori via progredimur, hanc methodum sequentes, quam cum singulares veritates componendo non nisi singulares invenimus, totamque veritatum concatenationem non nisi difficulter perspicere discimus. Quando autem posteriori hac via omnes viarum exitus clausos videmus, pertinacem fere dixerim illum, qui expeditissimam Analysis methodum abnueret. Quod haec litteris utitur, ipsi nihil derogat. Litterae enim et modi illas combinandi media tantum sunt ratiociniorum, quorum natura potissimum erit indaganda, ut pateat, num naturae obiecti conveniant an minus.

Generatim ergo spectata methodus analytica syntheticae est praefenda, quamquam haec non sine limitatione accipienda velim. Analysis enim non nisi rationibus quantitatum evolvendis incumbit. Cum ergo in Geometria multa pendent a situ linearum, Analysis quoque hanc,

hanc, quae inde oritur, dependentiam quantitatum geometricarum exprimat, rationes finuum ceterarumque linearum trigonometricarum infert. Hinc fit, ut demonstratio methodo synthetica instituta, quae finibus non utitur, multum differat ab analytica, atque adeo ut prior, quae constructione rem absolvit, elegantior et brevior saepe fiat, quam posterior, quae calculo utitur. Haec enim quae signa quantitatum in comparandis earum rationibus adhibet, geometricis veritatibus non semper ita apta est, ut methodus synthetica, quae quantitates et rationes earum oculis ipsis exponit, omnemque demonstrationis viam sensibus quasi percipiendam praebet. De analytica autem methodo haec intelligenda sunt, quatenus Analysis nostrae ope utitur; est et alia Analysis geometrica, qua Veteres in inveniendis veritatibus geometricis usi sunt, quae in contemplandis quantitibus ipsis versatur. Ex his autem, quae iamjam attuli, sequitur, cavendum esse, ne in constructionibus geometricis solutionem analyticam a recto tramite nos deducere patiamur, quippe effectio geometrica faciliorem, elegantiolem et geometriae indoli aptiorem saepius solutionem problematis afferet, quam forma illa erit, qua quantitates numeris exprimendae sistuntur, quod quidem potissimum accideret, si ad situm linearum simul erit respiciendum.

Methodus analytica hoc sibi vindicat, ut via inventionis semper pateat, ipsa autem similem fere modum demonstrandi praesertim in obiectis eiusdem naturae sequitur; modum vero operandi eum adhibet, ut paucis lineis plurima ratiocinia absolvantur, ita tamen ut non tam ratiocinia ipsa, quam quantitatum signa et modum combinationis et evolutionis earum intuearis. Synthesis contra aliam semper atque aliam demonstrationum viam ingreditur, recto inventionis fonte, singula autem ratio-

cina nuda quasi conspicienda menti sese offerunt, unde earum cognitio intuitiva magis evadit; intellectusque, cuius vires in contemplandis rationibus quantitatum ipsarum magis intenduntur, voluptate maiore fruitur, et inopinatum earum nexum elegantemque similitudinem admiratione quasi percussus stupeat; quid quod adeo phantasia, cui tot in Geometria sublimiori imagines, rationumque similitudines singulares obliciuntur, exultat quasi in percurrendis elegantissimis quantitatum proportionibus, et formam quandam pulchritudinis contemplari sibi videtur, cui accedit reverentia quaedam, quam res a vulgo remotae in nobis excitare solent. Ad hunc autem exquisitiorem veritatis sensum opus sane est, ut demonstrationes ab aliis allatas non tironum more aegro spiritu lente peragres, sed ut celeri cogitationum motu omnem pluresque simul capias, et in interiores veritatum recessus, ingenio quasi inventorum animatus, penetres. Atque etiam tum, quando syntheticam demonstrationem ope analysis geometricae inventam ipse instruis, neglectis subsidiis quae affert Characteristica recens inventa, magis te Mathematicum te gerere existimo, quam si instrumento hoc, cuius usum nos docuere summi in Mathesi Magistri, ceu ad normam et regulam praescriptum opus perficis.

Si quis vero synthetica sola methoda in Geometria uti velit, praeter necessitatem per multas ambages progredietur. Singulares tantummodo veritates addiscet, ad fontem inventionis tarde, nec sine multo labore pertinget. Ope autem methodi analyticae vel tiro summis inter Vereres Mathematicis non ingenii vi quidem, veritatibus tamen, quarum copia ipsi datur, aequiparare sese potest, maximamque propositionum geometricarum feriem paucis formulis includere, et ad usum praesto habere poterit, simulac formulis hisce recte uti didicerit.

Vnde



Vnde syntheticam methodum, quamquam analytica multis nominibus ipsi praeferenda est, omnino non negligendam esse existimo. Intellectus inde variis modis non parum ornatur, natura veritatum geometricarum interior, cum ad prima compositionis earum elementa deducimur, melius perspicietur, atque ex comparatione utriusque methodi mirum, quantum utilitatis haurietur. Analytica tamen methodus maiori damno negligetur quam Synthetica. Hinc Angli, qui reverentia erga magnum civem ducti, hac posteriori plerumque utuntur, Mathematica non ita novis augmentis ditare videntur, uti quidem nostrates et Galli fecerunt, qui tamen ex altera parte calculandis veritatibus nimis, ut videtur, intenti, ingenii geometrici acumen aliquantum hebescere sinunt.

Licet ergo ob naturam veritatum geometricarum synthetica methodus in contemplandis illis rite et utiliter adhibeatur, in exquirendis tamen effectibus et mutationibus rerum naturalium non solum inutilem illam, verum adeo noxiam putaverim. Quippe hic quantitates non ipsae, ut in Geometria, ubi eas ope imaginum in charta ductarum nobis repraesentamus, considerantur, verum signis sunt exhibendae. Et licet plurimae quantitates, uti spatium, celeritas, tempus, rel. lineis et superficiebus designari possint, hac tamen quantitates non ipsae illae sunt, quas comparamus, unde ad ambages devolvimur, si omnia constructionibus exponere volumus, in quem finem multa ad rem ipsam non facientia inferenda sunt. Taceo quod propositum semper maxime habemus, quantitates ipsarumque mutationes numeris exprimere et noscere, quod constructio licet elegantissima praestare non potest. Si quantitates symbolis quidem designare, demonstrationes autem eo, quo in Geometria utuntur, modo ordinare vellemus, non nisi propositiones singulares

et separatas obtinebimus, quas, cum ex uno communi fonte non derivantur, in usum convertere vel plane non, vel difficulter tantum possumus. Nec alia hic ad eruendum multiplicem rerum naturalium nexum datur via, praeter illam qua ad veritates generales, quae ubique nos manuducere debent, pervenire, atque ex his ope Geometriae et artis nostrae characteristicae secundum speciales rerum naturalium determinationes evolutis, mutuum earum nexum definire, et quantitates, quae variis modis a se invicem pendent, seorsim sistere tentamus. Si ob difficultatem calculi theoria sola haeret, experientia in subsidium veniat, et quae ex formulis evolvi non possunt, nobis exhibeat, auxiliante tamen et hic loci theoria, quae, quomodo natura interrogari velit, doceat.

Nec formam quidem methodi syntheticae externam analyticae convenire censeo. Demonstrationes proprie sic dictae in hanc non cadunt, cum omnia, si rite proceditur, potius ex veritatibus generalibus evolvantur, ita ut quodvis ratiocinium, quo uteris, demonstrationem suam includat, et cum ad scopum propositum perveneris, verum te tenere, ex via qua illud assecutus es, certissime cognoscas. Definitiones in Geometria ob simplicitatem obiecti praemitti possunt, ut perspicuitati tamen non officiantur, quod secus accidit in disquisitionibus mathematicis ad res naturales vel artificiales applicatis. Hic notiones universales a singularibus sunt abstrahendae, explicandae, et a scoriis, quas usus loquendi et vulgaris concipiendi modus ipsis addiderunt, depurandae. Accedunt tentamina, experientiae, observationes, quae enarrandae, diiudicandae et comparandae sunt. Haec omnia incongrue et inconcinne dicuntur, si eo, quo geometricae veritates ob earum indolem satis commode exponuntur, modo frustatim proferuntur. Perspicuitati simul multum

tum nocetur, cum transitus a qualibet veritate ad aliam, cuius in analytica methodo magna vis est, impediatur oculisque subducatur, et nexus veritatum interior, qui pauculis verbis saepe notari potest, abrumpatur. Termini enim artis illi graeci, qui formam externam propositionum designant, hisce rebus notandis apti sane non sunt. Nauseam mover pruritus ille demonstrandi, quando ob nimium systematicae methodi amorem omnia ita divelluntur, abrumpuntur et disseminantur, ut nil habeas nisi

*Disiecti membra Poetae.*

Ratio etiam, quae inter nexum quantitatum ipsarum et nexum signorum, quibus norantur, obtinet, explicatio-  
ne saepe indiget, sine qua demonstrationes ceteroquin optimae non omni luce fulgent, quae etiam tum legentis tum scribentis notiones quas sibi formant, non raro foret emendatura, atque artificia et compendia non contemnenda saepius suppeditare possent. Ipsa denique analyticae methodi indoles peculiarem sui expositionem postulat, ut veritates generales, in quibus omnis eius vis posita est, in fastigio quasi collocentur, ex quo omnem subiectarum veritatum campum illustrent, ut comprehensivarum quas dixi, formularum formatio perspicue exponatur, ut modus, quo veritates generales cum specialibus coniunguntur, lucide appareat, et pro exemplo in casibus similibus inservire possit, ut denique omnia eo ordine disponantur, quo lector ipse se ea, antequam legerit, non invenisse miretur. Nec obliviscendum est, veritates ob commune omnium vinculum ita tradi velle, ut nexum hic mutuus non dissolvatur, pluresque, inter se affines esse, licet diversis scientiis annumerentur varias Matheos partes non eiusdem indolis esse ideoque ad eandem normam et regulam exigi non posse; quibus autem et similibus monitis generalibus longius non immoror, quia satis apparere credo, concisum illud dicendi  
D. genus,

genus, et fictitium ordinem, quo veritates mathematicae vulgo traduntur, gratiam et splendorem illis apud plerisque conciliare non posse, nisi pauci quidam eas ob internam earum pulchritudinem amarent et colerent.

Ne quis tamen lenociniis verborum ornatae Matheseos me polcere existimet, omnia quae dixi, interiorum veritatum pulchritudinem aptamque earum dispositionem respicere sciat. Dicitio ipsa sit pura, simplex et gravis, materiae gravitati conveniens. Sunt quaedam Matheseos partes, quae etiam suavitate orationis, caute tamen adhibenda, commendari possunt. Vbi calculo res expediri debet, verboritas, ut in demonstrationibus geometricis, nocet, non prodest. Utrobique autem peracto calculi et demonstrandi labore breves quaedam de indole et nexu veritatum, et via, qua ad illas perventum est, notationes philosophicae haud male saepius, quam fit, addi posse videntur.

Haec sunt quae de indole methodi mathematicae potissimum proponenda mihi visa sunt. Brevibus omnia percurrere necesse erat. Si autem haec exemplis et illustrationibus magis instruerentur, atque ad primarias Matheseos partes sigillatim extenderentur, non dubito, illos, qui percursum primis elementis, penetralia eius adire cuperent, plura viarum compendia inde discere posse, ut certius et citius optatum finem attingant. Viderint illi, penes quos his de rebus iudicium est, quae in delineatione, quam hic exhibui, probanda sint, quae corrigenda. Ignoscant si in via, qua neminem ducem habui, a recto tramite aberraverim. Selegi autem argumentum hoc, tum ut eorum de his cogitationibus iudicium explorarem, tum ut, munus Matheseos publice profitendi

à SERENISSIMO ET CELSISSIMO PRINCIPE AC  
DOMI-

DOMINO, DOMINO CAROLO BRUNOVICENSIVM  
AC LVNEBURGENSIVM DVCE singulari prorsus gratia  
mihi demandatum auspicaturus, studiorum meorum Ma-  
thematicorum rationem aliquam redderem, quod medi-  
tationibus hisce magnam Mathematicum partem comple-  
ctentibus, melius quam singulari aliquo specimine fieri  
posse censebam.

Vobis iam, Cives ornatissimi, Commilitones honoratissimi,  
studia mea commendarem, nisi quae de illorum tum utilitate tum  
pulchritudine dici possunt, ita in aprico essent, ut superfluum fe-  
re sit, multa de illis disserere, praesertim apud illos, qui studio-  
rum liberalium cultores se profitentur. Si ex abstractis meditationi-  
bus, a sensu rerum externarum avocati, tum emolumentum tum  
oblectationem capere, si coelum scandere, si in declarandis et  
comparandis rerum naturalium phaenomenis feliciter progredi,  
si plurima vitae communis negotia recte et commode expedire  
velitis, Mathesis Vobis dux erit et fidissimus et suavissimus. Feli-  
cem me, si vestra his in rebus studia accendere, si viae, quae ini-  
tio sterilis et ingrata videri possit, molestiam allevare potuero, ut  
posthaec per cultos et virentes campos pede inoffenso vel  
soli progredi queatis. Penetralia enim Deae, cuius sacra fero, in  
recessu sunt posita, quo multi tendunt, pauci perveniunt. Expe-  
riri enim vult Dea, qui eius mysteriis initiari cupiunt, num for-  
tem fatis et alacrem animum ad suscipiendum sui cultum habeant.  
Quos deinde victis omnibus obstaculis ad se penetrare videt, eos  
amplexu fovet, et maioribus quam speraverant, praemiis remune-  
ratur. Neque tamen, quibus Divam propius contingere non da-  
tur, nullo munere ditati abeunt.

Lectiones semestri hoc aestivo PUBLICAS institui in Ana-  
lysin seu Characteristicam universalem, cuius tot beneficia in su-  
perioribus laudavi, Complectetur Algebrae, succinctam theori-

am Curvarum, et calculi differentialis et integralis exempla prima et facillima, quorum posthaec in Mathesi applicata usus est uberimus. PRIVATAS habeo in I.) *Arithmetica*, *Geometria* et *calculus geometricum*, duce SEGNERO, quibus adiungam operationes geometricas in campo perendas. II.) in *scientias Mechanicas* sive doctrinam de motu et aequilibrio corporum tum solidorum tum fluidorum, delibata etiam theoria Machinarum, quae cuncta quantum fieri potest, ex principiis simplicissimis evolvere conabor. Sunt enim hic plures difficultates, quae maximos adhuc Mathematicos exercent. Adiciam his prima *Architecturae civilis et militaris elementa*, ut dimidia Matheseos pars absolvi possit, scientiis opticis et astronomicis pro semestri hiberno servatis. Comprehendam autem omnia brevibus positionibus calamo excipiendis. Quod reliquum est favori Vestro me et studia mea commendo, et persuasum habeatis velim, me in omnibus quae officii suscepti ratio postulat, desideriis Vestris fore paratissimum, omnemque operam daturum, ut consilio vel quovis alio modo Vestra in hoc genere studia adjuvem. Helmsstadii d. IX. Maii

M D C C L X V I I.



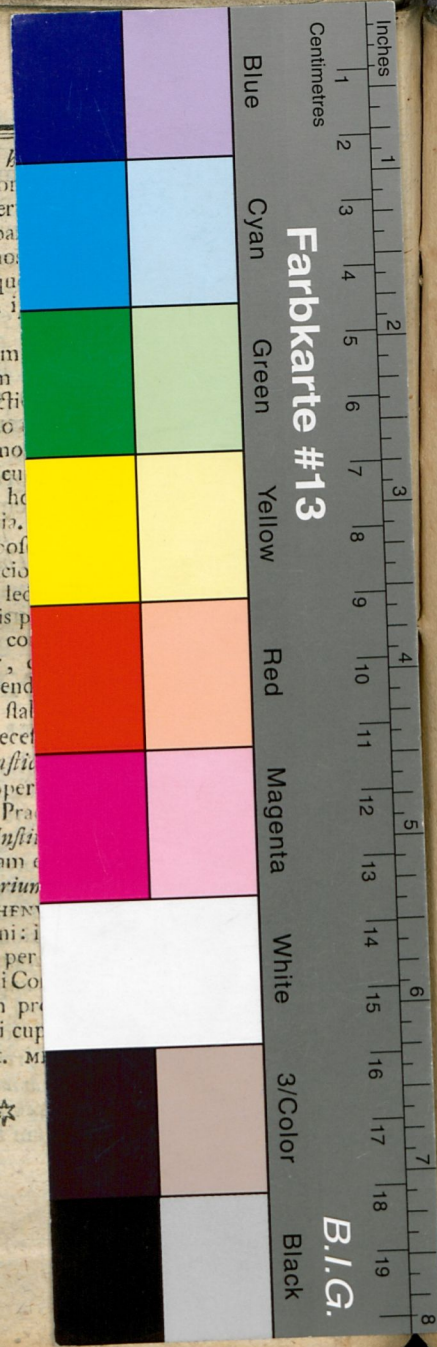






(X228 2205)





DE RATIONE  
QVAM INTER SE HABENT  
IN DEMONSTRATIONIBVS MATHEMATICIS  
METHODVS  
SYNTHETICA ET ANALYTICA

DISSERIT

ET  
LECTIONES

QVIBVS

MVNVS MATHESIN PVBLICE PROFITENDI  
CLEMENTISSIME IN SE COLLATVM  
AVSPICATVRVS EST

INDICIT

GEORGIVS SIMON KLÜGEL

MATHEMATVM IN ACADEMIA IVLIA CAROLINA  
P. P. O.

SOCIETATIS REGIAE SCIENTIARVM GÖTTINGENSIS  
CORRESPONDENS, ET TEVTONICAE, QVAE GÖTTINGAE  
FLORET, MEMBRVM ORDINARIVM NEC NON INSTITVTI  
HISTORICI IBIDEM SODALIS EXTRAORDINARIVS.

HELMSTADII

EX TYPOGRAPHEO VIDVAE SCHNORRIAE.  
CICIS CC LXVII.

1767, 4

14

67

