J. F. Pfaff
Helmstedt

GEORGII BERNHARDI BILFINGERI

QUONDAM GEOMETRA - PHILOSOPHI PER EUROPAM CELEBERRIMI

DE

PROGRESSIONIBUS LOCALIBUS
COMMENTATIO INEDITA.

QUAM

PRAEMISSA ILLUSTRIS AUCTORIS VITA

EDIDIT

JOHANNES CAROLUS FRIDERICUS HAUFF,

ARTIUM LIBERALIUM MAGISTER, PHILOSOPHIAE DOCTOR ET IN ACADEMIA MARBURGENSI MATHEMATUM AC PHYSICES LECTOR.

Dignum Laude Virum Musa Vetat Mori.

Gartz
Wpr Re

LIPSIAE

1794.

AMPLISSIMO

PHILOSOPHORUM ORDINI

QUI

PERANTIQUAE ATQUE INCLYTAE

TUBINGENSIS ACADEMIAE

ORNAMENTUM EST,

HANC COMMENTATIONEM

CELEBERRIMI QUONDAM TUBINGENSIS PHILOSOPHI

EMENDATIORISQUE PHILOSOPHIAE IN WIRTEMBERGIA PARENTIS,

GRATAM TOT INSIGNIS BENEVOLENTIAE DOCUMENTORUM

IN SE SUOSQUE EDITORUM MEMORIAM

TESTIFICATURUS

D. D. D.

JOHANNES CAROLUS FRIDERICUS HAUFF.

LECTURIS.

Commentationis, quae nunc mea cura in publicum prodit, Bilſingerianae exemplar, manu Viri Ill. ANDREAE BOEHMII, *quondam Snmo Haſſiae Landgravio á Conſiliis Intimis et in Academia Ludoviciana Profeſſoris Philoſophiae Primarii, anno* 1739, *quo Marburgi literis incubuit, ſcriptum, cum ante biennium, et quod excurrit, ejusdem ſupellex libraria Gieſſae ſub haſta venderetur, in meas manus incidit.*

De momento quidem opuſculi nihil dubitans, incertus autem, utrum revera eſſet ἀνέκδοτον, *nec ne, communicavi illud cum Viris Ill.* KAESTNERO *et* PFLEIDERERO, *judicibus de rebus, ad univerſam matheſin ſpectantibus, graviſſimis, et fautoribus mihi colendiſſimis, quorum uterque nondum eſſe editum confirmavit, et edendi conſilium probavit. Itaque invento tandem, qui illi excudendo ſumtus facere auderet, bibliopola, tale tradidi prelo, quale ipſe accepi, id unice agens, ut quam diligentiſſime typis excuderetur.*

Ad argumentum quod attinet, Progreſſiones Locales BILFINGERO *dicuntur eae, quae poſtremo ad conſtantes differentias perducunt. Denominationis rationem Ill. auctor* §. 82. *affert omnino ſatis ingenioſam. Easdem progreſſiones jam attigerunt* PASCALIUS (*Traité du Triangle Arithmetique*) *et* JAC. BERNOULLIUS (*Ars Conjectandi P. II. C. III.*) *Fuſius de iis egit* EULERUS (*Inſtitutt. Calculi Differerentialis C. I. et II.*) *et poſt hunc alii complures. Earum autem ad eruendas aequationum radices applicatio, quantum quidem conſtat,* BILFINGERO *peculiaris ejusque acumine digna eſt. Ad ultimam ſcripturae propoſitionem* (§. 94.) *excuſandam aequos judices philoſophia iſtius aetatis ſponte uſuros ſpero. Haec fere ſunt, de quibus lecturos praemonendos eſſe duxi. Ceteroquin certus ſum, hoc opuſculum eſſe ejusmodi, quo edito omnibus rerum analyticarum amantibus gratum fecerim, et cujus editi ab Ill. auctoris Manibus veniam impetrare facile poſſim.*

Prae-

Praemisi Viri Ill. vitam, qualem, deficientibus aliis fontibus, ex b. TAFINGERI *oratione funebri et Cel.* BOECKII *Historia Tubingensis Academiae exsculpere licuit, non quoniam is sum, qui mea demum voce, cujus, quae sit exilitas, probe sentio, opus fuisse existimem, ut vir tam multiplici ratione de patria praeclare meritus ab oblivionis injuria assereretur; sed quod et ipse persuasum habeo, et omnibus hanc vitam lecturis persuasum iri confido,* BILFINGERUM *ex eorum esse numero, quos in animo habuit eximius vates, delicatis carminum modis patrium coelum plane dissimulans, cum divino quodam afflatu ita caneret:* *)

Diesen Helden, die das Erdenleben,
Das, als Raupenstand, der Thor verhöhnt,
Schon zur Götterthätigkeit erheben,
Die Unsterblichkeit und Ehre krönt:
Diesen Helden lasst uns Mäler bauen
Und der Musen Lobgesänge weihn:
Lasst uns stolze Marmorsäulen hauen,
Und mit Blumenkränzen fromm umstreun!

Zwar bedürfen Sie der Marmorsäule
Nicht; auf allen Lippen schwebt ihr Ruhm!
Doch, dass hier der Jüngling stumm verweile,
Hier, bey des Verdienstes Heiligthum,
Unruhvolle Herzensschläg' empfinde,
Und sich dann zum Heldendienst der Welt
Jeder Wollust trägem Schlaf entwinde,
Sey ihr Ehrendenkmal aufgestellt!

Dabam Marburgi Cattorum, d. XVI. Februarii A. Æ. C. MDCCLXXXXIV.

J. C. F. Hauff.

*) *Eberhards Phil. Mag. I. B. 2 St. S. 189. f.*

GEOR-

GEORGII BERNHARDI BILFINGERI
VITA.

Georgius Bernhardus Bilfingerus natus *Canſtadiae* d. 23. Januarii a. 1693 patre Johanne Wendelino Bilfingero, tunc urbis *Superintendente ſpeciali*, poſtremo *Abbate Blavifontano*, matre Anna Kunigunda Manzia, Hartmanni Manzii, *Wormacienſis Eccleſiaſtae*, filia. Prolem haud vulgarem editam parentibus indicio fuere manuum duodecim, pedum undecim digiti, quorum ſuperflui poſt paucos dies amputati, nec non infantis frontem diſtinguens rubicunda faſcia. Felix inſignium, quibus parentes pollebant, animi dotum haeres ab iisdem per teneram aetatem ad omnem honeſtatem conformatus eſt. In ſchola urbis patriae brevi tempore omnes aequales ſuperavit; quo factum eſt, ut jam aetatis decimum tertium agens annum in coenobium Blavifontanum reciperetur, unde, abſoluto biennii ſtadio, in Bebenhuſanum translatus, hoc poſt alterum biennium cum ducali Stipendio Tubingenſi commutavit. Ibi tertio biennio exacto ſummis á Philoſophorum ordine honoribus ornatus, ſub finem quarti biennii á ducali Conſiſtorio ad examen theologicum evocatus eſt. Deinde, praeſtita per aliquod tempus in Coenobiis et eccleſiis Blavifontanis et Bebenhuſanis vicaria opera, eccleſiae aulicae, quae Tubingae eſt, concionatoris loco admotus fuit, neque ita multo poſt Repetentis Ducalis Stipendii Theologici dignitate auctus. Per hoc tempus eruditionis laude ita inclaruit, ut jam tunc tantum abeſſet, ut in Academia Tubingenſi aliquis inveniretur, qui cum eo de principatu certaret, ut ne comparari quidem ei quisquam recte poſſet. Cujus quidem rei inter plura alia hoc

maxi-

maxime memorabile exſtat documentum, quod, cum apud diſſertationem inauguralem CHRISTOPHORI MATTHAEI PFAFFII, famigeratiſſimi iſtius aetatis Theologi, reſpondentis vices ſuſtinuiſſet, PFAFFII pater in epiſtola ad ipſius patrem data ſic de eo profeſſus ſit: *Tuus filius non minus, quam meus, Praeſidem egit.* Non autem diutius intra fines theologicarum philoſophicarumque diſciplinarum ſeſe continuit, ſed jam praecipue ad Mathemata animum adpulit. Quorum ut adyta penetrare altius poſſet, editis quibusdam ſpeciminibus, Principis liberalitate adjutus, aliquot exteras academias adiit, ubi quidem in ſupellectili ſatis curta acquieſcere coactus, tanto amplioribus incrementis eruditionem domi acquiſitam auxit. Poſt biennium redux demandatum ſibi Profeſſoris Philoſophiae Extraordinarii in Academia Tubingenſi munus, edita diſſertatione *de Syſtemate Harmoniae praeſtabilitae*, anno 1721 auſpicatus exacto triennii ſpatio ad dignitatem Profeſſoris Ordinarii Philoſophiae Moralis ac Mathematum in Collegio Illuſtri, quod Tubingae floruit, evectus eſt. Cum vero ſalario nondum gauderet, mirum non fuit, quod á PETRO M. *Ruſſorum Imperatore*, propoſito ingenti ſtipendio, *Petropolin* evocatus, ad obſequendum promtus erat. Itaque, pactione ad quinquennium inita, anno 1725. Petropoli munus adiit Profeſſoris Logices, Metaphyſices ac Phyſices, nec non Sodalis Academiae Scientiarum Ordinarii, cujus commentarios proximis annis compluribus monumentis eruditione ſua dignis ornavit. Anno 1728 praemium 2500 ℔. ab Academia Scientiarum Pariſienſi ſolutioni quaeſtionis *de cauſa gravitatis phyſica* propoſitum, transmiſſa ad eam commentatione, obtinuit. Quam modice vero de ſua hypotheſi (duorum vorticum ſibi contrariorum, totidemque fluidorum, contrariis rotationibus ſibi occurrentium) Vir Ill. ſtatuerit, ex ipſius verbis apparet, §. 55. hujus commentationis profitentis: „*Difficile remedium fateor, et quo lubens carerem. Tamen praeſtat hoc, quam nihil dicere.*“ Interim tam inſignium de re literaria meritorum fama ad aures EBERHARDI LUDOVICI, tunc regnantis *Wirtembergiae Ducis*, pervenit, eumque com-

commovit, ut Nostro, ad patrios lares revocato, munus Professoris Theologiae Ordinarii in Academia Tubingensi et Superattendentis Ducalis Stipendii Theologici demandaret. Quo facto ab aula Russica aegre quidem, sed tanto cum honore dimissus est, ut etiam absfuturo locus inter Sodales Academiae honorarios concederetur, et annua pensio 400 fl. ad dies vitae ipsi solvenda decerneretur. Quibus beneficiis postea accessit praemium 2000 fl. ob novum inventum ad architecturam militarem spectans, Petropoli transmissum.

Enimvero, cui ante quinquennium cedere coactus fuerat invidia, eadem nunc quoque patriae finibus arcere eum annisa, Dux autem Celsissimus, cedere nescius, quod provide decreverat, constanter exsequendo, rebus academiae suae optime se consuluisse, brevi tempore expertus est. Bilfingerus enim divulgandis praecipue mathematicis, physicis et metaphysicis scientiis de illa tam praeclare meruit, ut ab ipsius aetate historiae academicae nova quasi epocha ordiatur. In praedictis scientiis Leibnitium maxime Wolfiumque secutus utriusque theorias acute examinavit et dilucide explanavit *), usus

*) Liceat hujus rei unum, sed gravissimum, afferre testem immortalem LAMBERTUM, qui (Organi §. 632) ita: „*Bilfinger, der eine besondere Geschicklichkeit hatte, Licht und Ordnung und Genauigkeit in seine Begriffe zu bringen, hat durch seine Dilucidationen der damals noch neuen und heftig bestrittenen Wolfischen Weltweisheit in vielen Stücken bessere Dienste gethan, als Wolf selbsten.*"

Novi equidem unum alterumve hodiernorum patriae meae Philosophorum, qui *Kantianae* philosophiae similem praestare operam et poterant et cupiebant; sed in magistri verba jurare detrectantes, ab adversariorum globo, quasi foedere contra *Suevica argumenta* facto, durius et indignius, quam viros ingenuos, ne dicam Philosophos, decet, excepti, in tutam se tranquillitatem recipere, quam cum hominibus, quos tam insueto sibi armorum genere videbant instructos, pugnae discrimen subire, satius ducebant.

usus doctrinarum ubivis habita ratione, et modestia ac moderatione adversus aliter sentientes nunquam violata. Genuinae quippe methodi mathematico-philosophicae compos veritatis vestigia ad ultimas usque latebras sectatus est, quam ubi tunc non invenit, ignorare nunquam turpe duxit. Ex magno discipulorum numero, quibus vir egregius in via veritatis dux et auctor fuit, sufficiat nominare KRAFFTIUM, Petropoli primo, deinde Tubingae Ill. praeceptoris successorem dignissimum, cujus memoriam elogio celebrare ipse Ill. KAESTNERUS dignatus est, WALZIUM, quem, Dresdae Mathematici aulici munere functum, scientiae, quas, testibus Actis Eruditorum Lipsiensibus, singulari cum dexteritate excoluit, praematuro fato sibi ereptum semper lugebunt, et PLOUCQUETUM, qui, per quadraginta annorum spatium Tubingensis academiae decus, ad memoriae perennitatem Ill. praeceptori conciliandam vel solus sufficeret.

Quam distincte, acute, solide atque composite de quacunque quaestione proposita dicere sueverit Vir Ill. inter innumera alia responsum notatu dignissimum de re Salinaria Sulzensi, d. 14. Martii a. 1746 editum et á b. ROESLERO *) adservatum, argumento est.

Academico munere dum fungebatur Noster, Celsissimus Princeps CAROLUS ALEXANDER, rerum mathematicarum amantissimus, tunc temporis Administrationis Regni Servici Praeses et summus Exercituum Dux Albae Graecae commoratus, commercio epistolico eum dignatus est, et quotiescunque patriae provincias invisit, ad se evocare et colloquii copiam facere, quasi aliqua lege cogente, consuevit. Forte quoque valetudinis gratia quondam per aliquot septimanas in Thermis Ferinis degens, praeter Bilfingerum, nemine familiariter usus est, et omne istud tempus mathematicis disquisitionibus

*) *Beyträge zur Nat. Gesch. d. Herz. Wirt. Tüb. 1788. 8. I. Heft. S. 79. f.*

bus impertivit. Postea vero quam idem anno 1734 in vacuum Ducis Wirtembergici locum suffectus esset, primis statim diebus Bilfingerum, Tubinga ad colloquium evocatum, magnis praemiis affecit, et sequenti anno Stuttgardiam translatum sanctioribus consiliis admovit.

Post fata Ducis cum summae rerum administratio Principi FRIDERICO CAROLO cederet, isti gravissimo muneri adjecta est Praesidis ducalis Consistorii sparta, utraque vero postea á Duce CAROLO EUGENIO, haud ita pridem defuncto, confirmata, additis multis et singularibus gratiae ac liberalitatis documentis. Inde ex hoc tempore nulla res major sine eo gerebatur, celeriterque in omnibus, quae opus erant, reperiebat. Neque in gerendis rebus minus, quam in excogitandis, promtus erat; quod et de instantibus verissime judicabat, et de futuris acutissime conjiciebat.

Sic igitur vir, cujus ingenio ac doctrinae paucos, rebus gestis neminem reperire licet parem, ut Geometra ingeniosus, Philosophus acutus, Theologus sobrius ac modestus, amicus Principum candidus, sagax et strenuus, Academiae Curator solers ac diligens, tot hisce et multis aliis nominibus tantum meritorum in patriam cumulum coacervavit, ut quidquid eorum, quae ante ipsius aetatem non exstiterunt, hodie recti bonique habeat Wirtembergia, certe ex aliqua parte é seminibus á Bilfingero sparsis progerminasse jure quodam dici possit.

Haec ergo indoles, haec studia, haec munera Ill. viri fuere. De moribus autem vitaeque ratione si quis quaesierit, Horatium, integrum vitae scelerisque purum pingentem, Nostri virtutes carmine celebrasse, recte possis respondere. Quippe rarissimo exemplo juncta in eo apparuere magna vis ingenii cum insigni animi candore, fides in Principes cum ardentissimo, omnibus officiis, in reliquos homines pariter atque in Deum, satisfaciendi, studio, indefessa industria et summa laboris patientia cum privati commodi extremo neglectu. Inprimis autem cura de inimicis bene merendi generosi animi indoles eminuit. De monumentis, quorum divinam originem ista aetate vix quisquam in dubium vocabat, satis reverenter ac

magni-

magnifice ſtatuit. Sic memorabilis illius ſententiae, quam ſaepe in ore habuit: „*Omnem vitam noſtram unum quaſi ſyſtema eſſe debere*“ commentarium ſua ipſe vita dedit optimum.

Matrimonium nunquam iniit, non quod hujuscemodi ſocietatem ſperneret damnaretve, ſed quod omne tempus viresque ampliſſimis muneribus ſibi delegatis ita unice impendit, ut quod reliquum erat, novo officiorum, quae conjugalis ſocietas inducit, agmini vix videretur ſufficere. Quamobrem nihil habuit, quo animo tot tantisque curis ac negotiis diſtento interdum laxamentum daret, praeter vineas, quas rariſſimis vitibus undequaque conquiſitis exornavit, mixto ſuae oblectationi exemplo colonis ac civibus utiliſſimo. Peractis diei laboribus veſperae aliquot horas cognatorum amicorumque ſermonibus dare ſolemne illi fuit.

Valetudinis ratio cetera ſatis firma fuit, niſi quod perpetuo catarrho, ex nimia ſeri copia verſusque caput affluxu oriundo, quaſi haereditario malo ab ineunte aetate laboravit, qui etiam mortis praematurae illi cauſa fuit. Quippe ad finem vergente anno 1749 languore correptus, tuſſique ſolito acerbiori exhauſtus in febrem incidit, quae omnibus medicorum artibus eluſis aegrotum per quinquaginta et ſex dies lectulo affixit, quo tempore ſenſim ſenſimque ex Lethargo in Apoplexiam ſeroſam incidit, adeo, ut poſt ſomnum aliquot dierum fere non interruptum d. 18. Febr. 1750 demum placide obdormiſceret. Diſſecto defuncti capite Cel. DUVERNOY cerebri ventriculos ſeri unciis quinque onuſtos deprehendit.

Sic vita plane ſingularis morte quoque ſingulari finita.

Floreat futuris quoque ſeculis memoria Viri nunquam ſatis celebrandi! Haereat bonorum omnium, haereat inprimis juvenum, qui literis operam navant, animis infixa imago! Admoneat omnes, ne fortunam prius, quam ſe ipſi, ſi non irrito, perverſo certe, labore fingere conentur, et quam plurimos ad ſtudium tantarum virtutum aemulationis ſtimulis excitet!

INDEX SCRIPTORUM
QUAE VIR ILL. PRO SUIS AGNOVIT.

I. De Harmonia animi et corporis humani maxime Praestabilita ex mente Ill. Leibnitii, Commentatio hypothetica. Francof. 1723, 8. Ed. III. Tub. 1741.

II. De Origine et Permissione mali praecipue moralis Commentatio Philosophica. Tub. 1724. 8. Ed. ult. ib. 1743.

III. Specimen doctrinae veterum Sinarum Moralis et Politicae tanquam exemplum philosophiae Gentium ad rempublicam applicatae, excerptum é libellis Sinicae genti classicis, Confucii sive dicta sive facta complexis. Accedit de literatura Sinensi dissertatio extemporalis. Francof. 1724. 8.

IV. Dilucidationes philosophicae de Deo Anima humana, Mundo et Generalibus Rerum Affectionibus. Tub. 1725. 4. Ed. III. ib. 1768.

V. Varia in Fasciculos collecta Stuttgardiae 1743. 8.

Quorum Faciculus Imus continet dissertationes philosophicas et thelogicas, quarum haec est series:

1. De Harmonia praestabilita animi et corporis humani Ed. I. Tub. 1721. 4. (Breviculum commentationis sub Nro I. indicatae.)
2. De triplici rerum cognitione, historica, philosophica et mathematica.
3. De Axiomatis philosophicis.
4. De Speculo Archimedis.
5. De Causa gravitatis physica.
6. De Cultu Dei rationali.
7. De Legibus Studii Theologiae thetici.

Fasciculus IIdus continet orationes latinas; scil.

1. De Methodo docendi in Scholis Illustribus disciplinas Morales et Mathematicas.
2. De Reductione Philosophiae ad usus publicos.
3. De Academiis Scientiarum.
4. De Invenienda locorum terrae marisque longitudine.
5. De Anatomia Elephanti et Ossibus Mamonteis,
6. De Mysteriis Christianae fidei generatim spectatis.
7. De praecipuis quibusdam discendi regulis ex comparatione corporis et animi erutis. (Hanc ab omnibus literarum studiosis sub initia curriculi academici legi ac relegi velim!)

Fasciculus IIItius continet orationes vernacula lingua habitas, quae sunt

1. Anrede an die Russische Kaiserin Catharina.
2. Uebersetzung der Lobrede des Hrn. v. Fontenelle auf Kaiser Peter I.
3. Vorschrift von dem Unterricht Kaisers Peter II.
4. Rede von den Merkwürdigkeiten der Stadt Petersburg.

Ein

5. Ein lateinisches Gedicht über die Academie zu Petersburg von Nicolaus Westermann.
6. Trauer- und Gedächtnissrede bey dem Tode des Durchl. Erbprinzen Friedrich Ludwig von Wirtemberg.
7. Die dazu verfertigte Einladungsschrift.
8. Glückwunschrede auf den Geburtstag des Durchl. Herzogs Carl Alexander zu Wirtemberg.
9. Die dazu verfertigte Einladungsschrift.

VI. Supplement aux Maximes ordinaires de la Fortification. (Hanc Commentationem in vernaculam translatam Promtuario suo *) inseruit Ill. Boehmius.)

VII. Nouveaux Projets de Fortification.

VIII. Idee d'une Citadelle,

IX. Nouveaux Systeme de Fortification.

X. Beyläuffige Beschreibung einer neuen Befestigungsart. (Hanc equidem in Promtuarii Boehmiani Volumine XII. mea cura proxime edendo, publici juris faciam.)

XI. Kurze Beschreibung einer umgekehrten Festungsart. Quae N. VI-XI. exhibent, nunquam in vulgus edita, sed paucis tantum Principibus, fautoribus atque amicis ab Ill. auctore muneri data.

XII. Dissertationes Academiae Scientiarum Petropolitanae exhibitae, ejusque commentariis insertae:

1. De directione Corporum gravium in vortice sphaerico.
2. De variis barometris sensibilioribus et eorum nova specie ac usibus.
3. De tubulis capillaribus.
4. De frictionibus corporum solidorum.
5. De thermometris et eorum emendatione.
6. An aer sanguini pulmones transeunti misceatur
7. De effectu caloris vel frigoris subitanei in expansionem vel contractionem vitrorum.
8. Disquisitiones physicae de tubulis capillaribus á Jacobo Jurino ad Academiam transmissae una cum notis G. B. B.
9. Solutio problematis de vi centrifuga corporis sphaerici in vortice sphaerico gyrantis.
10. De solidorum resistentia specimen.
11. De tracheis plantarum ex Melone observatio.
12. De radicibus et foliis Cichorii.

Praeter haec inscio et invito auctore, ut ut ipsius inscripta nomine, edita sunt:

1. G. B. Bilfingeri Praecepta Logica, curante Christ. Frider. Vellnagel. Jenae 1739. 8. quibus adjecta est Oratio sub No. V. (7) laudata.
2. G. B. Bilfingeri Elementa Physices. Lipsiae 1742. 8. Haec, praeter praecipua generalioris Physices capita, continent appendicem de experimentis et observationibus meteorologicis, deinde dissertationes sub No. XII. enumeratas, denique disquisitionem de Vampyris, é vernaculo in latinum sermonem translatam.

De utraque (Logica et Physica) vid. Bilfingeri praefatio Variorum Collectioni praemissa.

*) Magazin für Ingenieure und Artilleristen, I. Bd. Giessen 1777. 8. S. 1. ff.

CAPUT I.

CAPUT I.

DE THEORIA PROGRESSIONUM LOCALIUM.

Definitio I.

§. 1.

Si ex ſerie numerorum aequalium (ſ. ex progreſſione arithmetica, cujus termini nihilo differunt) aliam novam numerorum ſeriem hac lege exſtruas, ut primum terminum novae hujus ſeriei pro lubitu aſſumas, ſecundum facias ſummam ex primo aſſumto et ex ſecundo ſeriei antecedentis, tertium colligas ex ſecundo hoc et tertio antecedentis ſeriei, quartum ex tertio hujus et quarto ſuperioris ſeriei, et ſic ceteras quaslibet: ſi porro ex nova hac ſerie formes tertiam ſeriem eadem prorſus lege, qua ſecunda ſeries ex prima orta eſt: ſi denique quartam quoque quintam, et quamvis aliam eodem modo eruas, obtinebis ſeries numerorum, quas *progreſſiones locales* adpellare libet.

Definitio II.

§. 2. Progreſſiones *puras* voco, quarum termini primi omnes inter ſe ſunt aequales; *mixtas* dico quae inaequales habent primos.

Definitio III.

§. 3. Numerus, qui indicat, quotus in ſua ſerie ſit terminus aliquis, *radix progreſſionis* audit, ejusque nota generalis plerumque eſt littera *m*.

Definitio IV.

§. 4. Numerus indicans, quota aliqua ſit progreſſio (§. 1.) dicitur *index progreſſionalis*, et deſignatur ut plurimum per litteram *n*.

 Scho-

Scholion I.

§. 5. Ut hactenus dicta exemplo illuſtrentur placet ſubjungere ſequentes progreſſiones, ex quo ipſo ſimul ſchema calculi obſervare licet, et ordinem, quo apte ſibi ſubordinantur progreſſiones.

Indices progreſſionis	1	2	3	4	5	6	7	*etc. Radices*
1)	3	3	3	3	3	3	3	- Progreſſio I.
2)	5	8	11	14	17	20	23	- Progreſſio II.
3)	2	10	21	35	52	72	95	- Progreſſ. III.
4)	1	11	32	67	119	191	286	- Progreſſ. IV.

Theorema I.

§. 6. Quilibet terminus in quavis progreſſione eſt aequalis differentiae inde ortae, ſi ab immediate ſequenti termino auferas ſequentis hujus ſuperſtantem, ſ. terminum, qui in antecedente progreſſione eandem habet radicem, quam ille immediate ſequens habet.

Demonſtratio.

Ponatur datus terminus hic $= m$, ponatur etiam terminus antecedentis progreſſionis ille, cujus radix eſt unitate major dato m, $= p$, erit ſequens immediate datum $= m + p$, (§. 1.) eſt autem $m + p - p = m$, ergo terminus m eſt aequalis differentiae. q. e. d.

Corollarium I.

§. 7. Quodſi ergo immediate ſuperſtans quilibet á ſuo ſubſtante ſubtrahitur ſemper obtinetur ſubſtantis antecedens.

Scholion II.

§. 8. Termini hi ſuperſtans et ſubſtans reſpiciunt ad ſchema (§. 5.) progreſſionum, ibi enim termini ejusdem radicis ſibi ſubſtant et ſuperſtant.

Corollarium II.

§. 9. Habetur itaque regula, qua quaevis progreſſio antrorſum continuari poteſt, ſc. quia prima progreſſio aequales habet terminos (§. 1.) illi facile antrorſum moventur, hos licet ſubducere ſuis ſub-

ſtan-

ſtantibus (§. 7.) quo fit, ut ſecunda progreſſio antrorſum prolongetur. Eodem plane modo tertia ex ſecunda jam prolongata, quarta ex tertia antrorſum vertitur; En exemplum!

-3	-2	1	0	1	2	3	Radices
3	3	3	3	3	3	3	I.
-7	-4	-1	2	5	8	11	II.
0	-4	-5	-3	2	10	21	III.
11	7	2	-1	1	11	32	IV.

Corollarium III.

§. 10. Apparet ſimul ex praeſenti exemplo, quod radices in progreſſione antrorſum mota, ſint privativae, eadem enim lege recedunt radices, qua progrediuntur (§. 3.)

Definitio V.

§. 11. Ii termini progreſſionum ſibi ſubordinatarum, quorum radix communis eſt $= 0$, dicuntur *differentiae originales.*

Corollarium I.

§. 12: In progreſſionibus puris ergo differentiae originales omnes ſunt $= 0$, excepta prima (§. 1 et 7.)

Corollarium II.

§. 13. Datis Differentiis originalibus, progreſſiones earum facile conſtruuntur et prorſum et retrorſum. Prima enim Differentia originalis aliquoties repetita format primam progreſſionem (§. 1.) ceterae progreſſiones formantur regulis ſuis (§. 1. et 9.)

Theorema II.

§. 14. Quilibet terminus cujuscunque progreſſionis $= x$ eſt ſumma, conſtans ex ſuo immediate antecedente ejusdemque ſuperſtantibus omnibus collectis.

Demonſtratio.

Sit terminus immediate praecedens $= t$, ejusdem ſuperſtantes ſint $ſ$, r, q, p. Quoniam p ſupremus eſt, adeoque ad primam pro-

progressionem pertinet, erit suus sequens etiam $= p$, hinc sequens τῷ q est $= p + q$, et sequens τῷ r est $= p + q + r$, sequens τῷ $s = p + q + r + s$ (§. 1.) et tandem τῷ $t = x = p + q + r + s + t$, h. e. terminus $x =$ omnibus superstantibus sui antecedentis, q. e. d.

Corollarium I.

§. 15. Positio primo termino cujusvis progressionis purae $= a$, erit quilibet terminus secundus $= na$ (§. 4.) et ratio cujusvis primi ad secundum $a : na = 1 : n$.

Corollarium II.

§. 16. Est quoque tertius quilibet terminus $= na + (n-1)a + (n-2)a + (n-3)a$ etc. usque ad a, $= na + na - a + na - 2a + na - 3a + na - 4a$ etc. usque $na - (n-1)a$, $= na \begin{matrix} +na & +na \\ -a & -2a \end{matrix} \begin{matrix} +na & +na & +na \\ -3a & -4a & -5a \end{matrix}$ etc. usque $\left.\begin{matrix} +na \\ -(n-1)a \end{matrix}\right\} = a$. Atque hac ratione hujus seriei habetur initium et finis, unde etiam in hunc modum exprimi potest: $\begin{matrix} na & +na & +na & +na & +na \\ -0 & -a & -2a & -3a & -4a \end{matrix}$ etc. $\left.\begin{matrix} +na \\ -(n-4)a \end{matrix}\right\} = 4a \left.\begin{matrix} +na \\ -(n-3)a \end{matrix}\right\} = 3a \left.\begin{matrix} +na \\ -(n-2)a \end{matrix}\right\} = 2a \left.\begin{matrix} +na \\ -(n-1)a \end{matrix}\right\} = a \left.\begin{matrix} +na \\ -na \end{matrix}\right\} = 0$. Haec series aperte ostendit, quod primorum terminorum defectus accurate suppleantur ab ultimis terminis seriei; eadem namque lege progrediuntur defectuum quantitates, qua recedunt ipsi termini, ab ultimo: facta igitur compensatione, necesse est, tot terminos a fine seriei deleri, quot ab initio defectus supplentur, unde porro fit, ut terminorum pars praecise dimidia pereat, ut exempla singularia loquuntur. Quia numerus terminorum propositae seriei $= n + 1$ ob ultimum accessorium, erit numerus seriei truncatae $= \frac{n+1}{2}$, et quia porro omnes termini truncatae seriei sunt aequales, sc. $= na, na, na$ etc. summa omnium erit $\left(\frac{n+1}{2}\right) na = \frac{na + na}{2}$. Ratio inde secundorum ad ad tertios $= na : \frac{\overset{2}{na + na}}{2} = 1 : \frac{n+1}{2}$; unde quoque formula tertiorum nova emergit haec $\frac{n(n+1)}{1.2}a$.

§. 17. Quartus igitur quilibet terminus est $= \frac{n(n+1)}{2}a + \frac{(n-1)n}{2}a + \frac{(n-1)(n-1)}{2}a + \frac{(n-3)(n-2)}{2}a + \frac{(n-4)(n-3)}{2}a$ etc. usque ad $(n-n+1) \times \frac{(n-n-2)}{2} = \frac{1.2}{2}a = a = \frac{n.n+1}{2}a +$

$$\begin{array}{llll} \frac{n.n+1}{2}a + & \frac{n.n+1}{2}a + & \frac{n.n+1}{2}a + & \frac{n.n+1}{2}a \text{ etc.} \\ -na & -2na & -3na & -4na \text{ etc.} \\ +a & +3a & +3a & +6a \text{ etc.} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{etc.} + \frac{n.n+1}{2}a \\ \text{etc.} - (n-3)na \\ \text{etc.} + \frac{n-4.n-3}{2}a \end{array}\right\} 6a \left.\begin{array}{l} + \frac{n.n+1}{2}a \\ - (n-2)na \\ + \frac{n-3.n-2}{2}a \end{array}\right\} 3a \left.\begin{array}{l} + \frac{n.n+1}{2}a \\ - (n-1)na \\ + \frac{n-2.n-1}{2}a \end{array}\right\} a \left.\begin{array}{l} + \frac{n.n+1}{2}a \\ -n-na \\ + \frac{n-1.n}{2}a \end{array}\right\} = 0 \left.\begin{array}{l} + \frac{n.n+1}{2}a \\ -(n+1)na \\ + \frac{n.n+1}{2}a \end{array}\right\} 0$$

Numerus terminorum in hac serie $= n+2$. Potest autem eadem series sic exhiberi

$$\begin{array}{lll} \frac{n.n+1}{2}a & + \frac{n.n+1}{2}a & + \frac{n.n+1}{2}a \\ -0 & -na = \left(\frac{1.2n}{2}\right)a & \left.\begin{array}{l} -na \\ -(n-1)a \end{array}\right\} = 2\left(\frac{2n-1}{2}\right)a \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} + \frac{n.n+1}{2}a & + \frac{n.n+1}{2} \quad \text{etc.} & + \frac{n.n+1}{2} \\ \left.\begin{array}{l} -na \\ -(n-1)a \\ -(n-2)a \end{array}\right\} = 3\left(\frac{2n-2}{2}\right)a & \left.\begin{array}{l} -na \\ -(n-1)a \\ -(n-2)a \\ -(n-3)a \end{array}\right\} 4\left(\frac{2n-3}{2}\right)a \text{ etc.} & \left.\begin{array}{l} \\ -\frac{n-3.n-4}{2} \end{array}\right\} = 6a \\ & & +n. \end{array}$$

$$\left.\begin{matrix} +\frac{n.n+1}{2}a \\ -\frac{n-2.n-3}{2}a \end{matrix}\right\} = 3a \quad \left.\begin{matrix} +\frac{n.n+1}{2}a \\ -\frac{n-1.n+2}{2}a \end{matrix}\right\} = a \quad \left.\begin{matrix} +\frac{n.n+1}{2}a \\ -\frac{n.n+1}{2}a \end{matrix}\right\} = 0 \quad \left.\begin{matrix} +\frac{n.n+1}{2}a \\ -\frac{n+1.n}{2}a \end{matrix}\right\} = 0.$$

Quodſi jam defectus anteriorum terminorum ſupplere velis, abolitione poſteriorum terminorum deprehendes exemplis ſingularibus, duas tertias terminorum perire, et remanentem tertiam conſtare aequalibus terminis $= \frac{n.n+1}{2}a$, quae tamen aequalis eſt toti ſeriei. Inde ſequitur, totam ſeriem eſſe $= \frac{n.n+1.n+2}{1.2.3}a$ adeoque tertiorum ad quartos terminos eſſe rationem $1 : \frac{n+2}{3}$.

Problema I.

§. 18. Invenire theorema generale termini cujusvis in progreſſione pura quavis.

Reſolutio.

Quoniam vi antecedentium (§. §. 15. 16. 17.) generalis formula cujusvis primorum eſt $= a$, ſecundorum $= \frac{na}{1}$, tertiorum $= \frac{n.n+1}{1.2}a$, quartorum $= \frac{n.n+1.n+2}{1.2.3}a$; ſuſpicio oritur, anne quintorum formula ſit $= \frac{n.n+1.n+2.n+3}{1.2.3.4}a$, ſextorum $= \frac{n.n+1.n+2.n+3.n+4}{1.2.3.4.5}a$? et eadem lege ceterorum quoque. Haec ſuſpicio ut roboretur, ad exempla ſingularia deſcendatur, quibus generalis haec formula conjectata applicetur. Sic igitur deprehendetur, aptiſſime hanc formulam congruere cuilibet exemplo;

plo; unde tandem, posita hac lege constante, nulla difficultate theorema generale exstruitur hoc =

$$\frac{n \,.\, n+1 \,.\, n+2 \,.\, n+3 \text{ usque ad } \ldots\ldots\, n+m-2}{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4. \text{ etc. } \ldots\ldots\ldots \quad m-1}\, a, \text{ et inverse } =$$

$$\frac{(n+m-2)\,(n+m-3)\,(n+m-4) \text{ etc. } \ldots \; n}{(m-1)\,(m-2). \quad (m-3) \text{ etc. } \ldots \; 1}\, a, \text{ ubi nota, m esse}$$

= radici progressionis (§. 3).

Scholion III.

§. 19. Via qua ad hoc theorema perveneram, haec erat:

Primo schema, formaveram universale progressionum purarum hunc in modum:

Radices =	1	2	3	4	5	6	
I.	a	a	a	a	a	a	
II.	a	2a	3a	4a	5a	6a	
III.	a	3a	6a	10a	15a	21a	
IV.	a	4a	10a	20a	35a	56a	etc.
etc.							

Ex hoc schemate, *secundo*, mox intellexi, quemlibet terminum esse factum ex termino progressionum indeterminato primo in numerum determinatum progressionis purae, cujus primus terminus = 1. Hinc pronum erat, inferre, terminos omnium purarum progressionum constantes inter sese servare rationes; hinc ex cognitis unius casus rationibus, cognovi et reliquos infinitos omnes. Quare *tertio* sequens schema in chartam conjeci, et rationes terminorum ad invicem interposui binis quibuslibet ita nimirum:

1		2		3		4		5		6		
1	(1)	1	(1)	1	(1)	1	(1)	1	(1)	1	etc.	I.
1	(2)	2	$(1\frac{1}{2})$	3	$(1\frac{1}{3})$	4	$(1\frac{1}{4})$	5	$(1\frac{1}{5})$	6	etc.	II.
1	(3)	3	(2)	6	$(1\frac{2}{3})$	10	$(1\frac{2}{4})$	15	$(1\frac{2}{5})$	21	etc.	III.
1	(4)	4	$(2\frac{1}{2})$	10	(2)	20	$(1\frac{3}{4})$	35	$(1\frac{3}{5})$	56	etc.	IV.
1	(5)	5	(3)	15	$(2\frac{1}{3})$	35	(2)	70	$(1\frac{4}{5})$	126	etc.	V.
1	(6)	6	$(3\frac{1}{2})$	21	$(2\frac{2}{3})$	56	$(2\frac{1}{4})$	126	(2)	252	etc.	VI.
1	(7)	7	(4)	28	(3)	84	$(2\frac{2}{4})$	210	$(2\frac{1}{5})$	462	etc.	VII.

Quarto igitur ignorare jam non poteram legem, quam hae ſervant terminorum rationes, primo enim ſtatim intuitu vidi, determinationem harum rationum dependere ab indicibus progreſſionalibus, quia illae aeque ac hi progrediuntur in ſeriebus aequidifferentibus. Poſito ergo indice progreſſionali $= n$ (§. 3) erat ratio generalis primorum ad ſecundos $1 : \frac{n}{1}$, ſecundorum ad tertios $1 : \frac{n+1}{2}$, tertiorum ad quartos $1 : \frac{n+2}{3}$ etc. imo in genere $1 : \frac{n+m-2}{m-1}$, unde tandem prono alveo fluebat antecedens theorema (§. 18) generale.

Problema II.

§. 20. Explicare naturam progreſſionum mixtarum.

Reſolutio.

1) Formetur ſchema univerſale, quamvis progreſſionem mixtam ſua generalitate complectens. 2) Hujus ſchematis termini ſigillatim expendantur, et ad terminos progreſſionum purarum (§. 19.) conferantur, ſic enim nullo negotio patebunt proprietates exſtantiores. En rem praeſentem!

Radices		1	2	3
I.	a.	a.	a.	a.
II.	b.	a + b.	2a + b.	3a + b.
III.	c.	a + b + c.	3a + 2b + c.	6a + 3b + c.
IV.	d.	a + b + c + d.	4a + 3b + 2c + d.	10a + 6b + 3c + d.

4	5
a.	a.
4a + b	5a + b
10a + 4b + c	15a + 5b + c.
20a + 10b + 4c + d.	35a + 15b + 5c + d.

Inde igitur ſequentia corollaria fluunt.

Corollarium I.

§. 21. Quilibet terminus constat ex aliis terminis, quorum quilibet ad propriam sibi progressionem puram pertinet.

Corollarium II.

§. 22. Quaelibet differentia originalis novas constituit progressiones puras, et ex harum progressionum purarum terminis aggregatis proveniunt termini progressionum mixtarum (§. 11.)

Corollarium III.

§. 23. Termini puri, qui constituunt terminos mixtos, communem habent radicem m.

Corollarium IV.

§. 24. Termini puri ingredientes mixtos diversos habent indices progressionales, nimirum terminus purus ortus ex prima differentia originali, habet indeterminatum indicem $= n$ (§. 4) ortus ex secunda habet indicem $n - 1$, ex tertia $n - 2$, sicque porro.

Problema III.

§. 25. Invenire theorema generale exprimens quemcunque terminum cujuslibet progressionis mixtae.

Resolutio.

1) Quoniam cujusvis puri termini ingredientis mixtum et radix et index habetur (§. §. 23. 24.), facile etiam pro quovis habetur formula generalis ex §. 18. 2) singulas singulorum purorum formulas adde sibi invicem, sic enim orietur theorema desideratum (§. 21. 22.), quod ita se habet:

$$a\,\frac{n.n+1.n+2 \text{ usque} \ldots n+m-2}{1.\ 2.\ 3 \text{ usque} .\ m-1} + b\,\frac{n-1.n.n+1 \text{ usque} \ldots n+m-3}{1.\ 2.\ 3 \text{ usque} ..\ m-1}$$

$$+ c\,\frac{n-2.n-1.n.n+1 \text{ usque} \ldots n+m-4}{1.2.3.4 \text{ usque } m-1} \text{ etc. in infinitum.}$$

Corollarium I.

§. 26. Ex hac generali formula speciales formulae cuivis progressioni peculiares eliciuntur, si pro n substituas numerum progressionis, cujus petis formulam, E. g. formula primae progressionis est $= a \frac{1.2.3.4}{1.2.3.4}$ etc. $= a$, formula secundae est $= a \frac{2.3.4.5.\ \text{etc.}\ m}{1.2.3.4.\ \text{etc.}\ m-1}$ $+ b \frac{1.2.3.4\ \text{etc.}\ m-1}{1.2.3.4\ \text{etc.}\ m-1} + c \frac{0.1.2}{1.2.3}$ etc. $= a \frac{m.m-1.m-2\ \text{etc.}}{m-1.m-2.m-3\ \text{etc.}}$ $+ b = a \frac{m}{1} + b.$

Progressionis tertiae formula $= a \frac{m+1.m}{1.\ 2} + b \frac{m}{1} + c.$

Progressionis quartae $= a \frac{m+2.m+1.m}{1.\ 2.\ 3} + b \frac{m+1.m}{1.\ 2} + c \frac{m}{1} + d$

Progressionis quintae $= a \frac{m+3.m+2.m+1.m}{1.\ 2.\ 3.\ 4} + b \frac{m+2.m+1.m}{1.\ 2.\ 3} +$ $c \frac{m+1.m}{1.\ 2} + d \frac{m}{1} + e$ et sic deinceps.

Corollarium II.

§. 27. Consideratio praecedentium formularum specialium aperit legem constantem, quaevis formula ex dato solo indice construi potest. Nimirum 1) ex indice unitate mulctato oritur numerus differentiarum originalium. 2) Idem numerus coefficentium primum terminum purum ingredientium. 3) Ceterorum terminorum purorum coefficientes unitate semper deficiunt á praecedentium numero. Posito ergo indice $= n$, habebitur nova formula generalis pro quovis termino mixto talis $a \frac{m.m+1.m+2\ \text{etc.}}{1.2.3.\ \text{etc.}\ n-1}$ $+ b \frac{m.m+1.m+2\ \text{etc.}}{1.\ 2.\ 3.\ \text{etc.}\ n-2} + c \frac{m.m+1\ \text{etc.}}{1.2.\ \text{etc.}\ n-3} + d \frac{m.m+1.m+2\text{etc.}}{1.\ 2.\ 3.\ n-4}$ etc.

Corol-

Corollarium III.

§. 28. Si numeratores in praecedentibus formulis actu in sese invicem ducantur, novam omnino faciem acquirunt formulae speciales; En tibi aliquot!

I. $= a m^{0}$

II. $= \frac{a}{1} m^{1} + b m^{0}$

III. $= \frac{a}{1.2} m^{2} + \left.\begin{matrix} \frac{a}{1.2} \\ + b \end{matrix}\right\} m^{1} + c$

IV. $\frac{a}{1.2.3} m^{3} + \left.\begin{matrix} \frac{3a}{1.2.3} \\ + \frac{b}{1.2} \end{matrix}\right\} m^{2} + \left.\begin{matrix} \frac{2a}{1.2.3} \\ + \frac{b}{1.2} \\ + c \end{matrix}\right\} m + d$

V. $\frac{a}{1.2.3.4} m^{4} + \left.\begin{matrix} \frac{6a}{1.2.3.4} \\ + \frac{b}{1.2.3} \end{matrix}\right\} m^{3} + \left.\begin{matrix} \frac{11a}{1.2.3.4} \\ + \frac{3b}{1.2.3} \\ + \frac{c}{1.2} \end{matrix}\right\} m^{2} + \left.\begin{matrix} \frac{6a}{1.2.3.4} \\ + \frac{2b}{1.2.3} \\ + \frac{c}{1.2} \\ + d \end{matrix}\right\} m + e$

VI. $\frac{a}{1\ldots.5} m^{5} + \left.\begin{matrix} \frac{10a}{1\ldots.5} \\ + \frac{b}{1\ldots.4} \end{matrix}\right\} m^{4} + \left.\begin{matrix} \frac{35a}{1\ldots.5} \\ + \frac{6b}{1\ldots.4} \\ + \frac{c}{1\ldots3} \end{matrix}\right\} m^{3} + \left.\begin{matrix} \frac{50a}{1\ldots.5} \\ + \frac{11b}{1\ldots.4} \\ + \frac{3c}{1\ldots.3} \\ + \frac{d}{1.2} \end{matrix}\right\} m^{2} + \left.\begin{matrix} \frac{24a}{1\ldots.5} \\ + \frac{6b}{1\ldots.4} \\ + \frac{2c}{1\ldots.3} \\ + \frac{d}{1.2} \\ + \frac{e}{1} \end{matrix}\right\} m + f$

Scholion VI.

§ 29. Novae hae formulae ſuam quoque ſervant legem, qua una ex altera oritur, imo vel potius, qua quaelibet ex ſolo ſuo indice poteſt erui; atque per hanc legem univerſalis formula exſtrui poteſt: ſed quia lex haec difficilis valde eſt, et principiis nititur nondum expoſitis, hujus loci illa non eſt, inferius tamen adferenda, ubi neceſſaria principia ſatis fundata fuerint.

Corollarium IV.

§. 30. Si in ultimis hiſce formulis differentiae originales ultimato determinentur, eae ſpecialiores evadunt, ſola enim radix m tum indeterminata manebit, Ex. gr. ſint in Progr. V. $a = 24$, $b = 12$, $c = 0$, $d = -3$, $e = 9$ erit formula $= m^4 + 8\,m^3 + 17\,m^2 + 7m + 9$.

Corollarium V.

§. 31. Si in formulis hiſce ultimis pro coefficientibus illis, qui ex differentiis originalibus conſtant, ſimpliciores ſubſtituantur, ex. gr. ſi pro primo ponatur p, pro ſecundo q, et ſic deinceps, r, ſ, t etc. tum generalis formula, omnes has particulares complectens haec habebitur: $p\,m^{n-1} + q\,m^{n-2} + r\,m^{n-3} + s\,m^{n-4} + t\,m^{n-5}$ etc. etc.

Corallarinm VI.

§. 32. Eodem modo generalis formula terminorum mixtorum (§. 30.) generaliſſimam ſimul praeſtat formulam pro omnibus aequationibus algebraicis, nimirum ſi aequalis ponatur determinatae vel conſtanti alicui quantitati, et ultima differentia originalis ſit $= 0$.

Corollarium VII.

§. 33. Nec difficile eſt determinare quantitates differentiarum originalium per quantitates cognitas aequationis alicujus algebraicae, facta ſcilicet ſubſtitutione mutua ad normam ſequentis exempli: Sit data aequatio haec: $p\,m^4 + q\,m^3 + r\,m^2 + s\,m = A$, haec

igitur

igitur pertinet ad formulam V. (§. 28.) Erit ergo $p = \frac{a}{1.2.3.4}$, ergo $a = p.1.2.3.4$ porro $q = \frac{6a}{1.2.3.4} + \frac{b}{1.2.3} = 6p + \frac{b}{1.2.3}$, ergo $q - 6p = \frac{b}{1.2.3}$; ergo $b = (q - 6p)\ 1.2.3$. Deinde est $r = \frac{11a}{1.2.3.4} + \frac{3b}{1.2.3} + \frac{c}{1.2} = 11p + 3q - 18p + \frac{c}{1.2}$, hoc est $c = (r - 3q + 7p)\ 1.2$. Tandem sit $s = \frac{6a}{1...4} + \frac{2b}{1...3} + \frac{c}{1.2} + \frac{d}{1} = 6p + 2q - 12p + r - 3q + 7p + d$; erit dehinc $d = s - r + q - p$, etc. $= 0$ (§. 31).

Corollarium IX.

§. 34. Hac itaque ratione pro quavis aequatione cujuslibet gradus formulam condere licet generalem, quae exhibet regulam, qua ex datis s. cognitis quantitatibus aequationis determinantur differentiae originales. En specimen!

In Progressione

Ima erit $a = 0$.

In IIda erit $a = p$.

In IIItia erit $\begin{cases} a = p.1.2 \\ b = (q - p)\ 1 \end{cases}$

In IVta erit $\begin{cases} a = p.1.2.3 \\ b = (q - 3p).1.2 \\ c = (r - q + p).1 \end{cases}$

In Vta $\begin{cases} a = p.1.2.3.4 \\ b = (q - 6p).1.2.3 \\ c = (r - 3q + 7p)\ 1.2 \\ d = (s - r + q - p).\ 1 \end{cases}$

In VIta $\begin{cases} a = p.1.2.3.4.5 \\ b = (q - 10p)\ 1.2.3.4 \\ c = (r - 6q + 25p)\ 1.2.3 \\ d = (s - 3r + 7q - 15p)\ 1.2 \\ e = (t - s + r - q + p)\ 1 \end{cases}$

In VIIma $\begin{cases} a = p.1.2.3.4.5.6 \\ b = (q - 15p)\ 1.2.3.4.5 \\ c = (r - 10q + 65p)\ 1.2.3.4 \\ d = (s - 6r + 25q - 90p)\ 1.2.3 \\ e = (t - 3s + 7r + 15q + 31p)\ 1.2 \\ f = (u - t + s - r + q - p)\ 1 \end{cases}$

Corol.

Corollarium X.

§. 35. Si ad formulas praecedentes attendas, obſervabis 1) eas conſtare ex quantitatibus indeterminatis, et certis numeris determinatis, 2) quantitates indeterminatas eſſe partim differentias originales, partim quantitates aequationum cognitas; 3) indicem progreſſionis unitate minutum indicare, quot ingrediantur formulam differentiae originales, quot partes cognitae, et quot denique factores numerales primae parti cognitae apud primam differentiam originalem adhaereant; 4) primam differentiam originalem determinari á prima ſola parte cognita, ſecundam á duabus prioribus, tertiam á tribus prioribus etc. 5) numeros partibus cognitis adhaerentes haſce formare ſeries.

Indices ſerierum:	1 — 1	1	1	1	1	1	1	1
	2 — 1	3	7	15	31	63	127	255
	3 — 1	6	25	90	301	966	3025	9330
	4 — 1	10	65	350	1701	7770	34105	145750
	5 — 1	15	140	1050	6951	42525	246730	855950
	6 — 1	21	266	2646	22827	179487	etc.	etc.

6) Has vero ſeries oriri ex ſuis indicibus et primis terminis (qui ſunt unitates) ſi nempe quilibet et primus terminus, et alius quivis ex primo ortus ducatur in ſuum indicem, facto deinde addatur immediate ſuperſtantis ſequens terminus, ſumma enim dabit terminum ſequentem ejus, qui in indicem ducebatur. 7) Signa privativa et poſitiva alternare invicem, ita ut prima pars ex cognitis ſemper ſit poſitiva etc. 8) Factores numerales eſſe numeros ab unitate naturaliter progredientes, et tot ad quamlibet differentiam originalem pertinere, quota ipſa numero fuerit, á calce formulae numerata. Sic igitur obtinetur regula ex qua cujuslibet formulae differentiae originales per datas aequationum determinari poſſunt.

CAPUT

CAPUT II.

DE SUMMATIONE PROGRESSIONUM LOCALIUM ET NUMERIS FIGURATIS.

Definitio VI.

§. 36. *Summare* progreſſionem localem eſt invenire ſummam omnium terminorum alicujus progreſſionis localis.

Theorema III.

§. 37. Quilibet terminus progreſſionis alicujus localis, cujus differentia originalis eſt $= 0$, eſt ſumma omnium terminorum immediate antecedentis progreſſionis.

Demonſtratio.

Quoniam differentia originalis eſt $= 0$, ergo primus terminus aequalis primo termino antecedentis progreſſionis (§. 12. 2.); ſecundus ergo terminus erit ſumma ſecundi et primi antecedentium; tertius erit ſumma ex tertio, ſecundo et primo antecedentibus, adeoque quilibet erit ſumma ex ſuperſtante ſuo, ejusque antecedentibus omnibus (§. 1.) h. e. terminus talis eſt ſumma praecedentis progreſſionis. q. e. d.

Corollarium I.

§. 38. Quaelibet ergo talis progreſſio localis eſt ſeries ſummarum omnium antecedentis progreſſionis.

Corollarium II.

§. 39. Summae alicujus progreſſionis, cujus index eſt $= n$, continentur in alia progreſſione, cujus index eſt $= n + 1$, et cujus differentia originalis eſt $= 0$.

Problema IV.

§. 40. Invenire formulam generalem ſummatoriam.

Reſo-

Reſolutio.

Quoniam quaelibet ſumma eſt terminus progreſſionis alicujus, cujus index eſt $= (n + 1)$ (§. 31), et cujus ultima differentia originalis eſt $= 0$; formula ſummatoria quaeſita nil aliud erit, quam ipſa generalis formula, pro quovis termino cujuslibet progreſſionis (§. 25.), in qua pro n ponendum erit $n + 1$, unde nullo negotio formula quaeſita talis reperitur:

$$a\,\frac{n+1.\,n+2.\,n+3\ldots n+m-1}{1.\;\;2.\;\;3\ldots\ldots m-1} + b\,\frac{n.\,n+1.\,n+2\ldots\ldots n+m-2}{1.\;\;2.\;\;3\ldots\ldots m-1}$$

$$+ c\;\frac{n-1.\,n.\,n+1.\,n+2\ldots\ldots n+m-3}{1.\;\;2.\;\;3.\;\;4\ldots\ldots m-1} + \ldots$$

$$d\,\frac{n-2.\,n-1.\,n.\,n+1\ldots\ldots n+m-4}{1.\;\;2.\;\;3.\;\;4\ldots\ldots m-1}\ \text{etc. etc.}$$

Corollarium I.

§. 41. Si n determinetur, tum pro qualibet progreſſione peculiares formulae ſummatoriae eruentur tales:

Pro Ima erit $a\,\frac{m}{1}$, Pro IIda erit $a\,\frac{m.\,m+1}{1.\,2} + b\,\frac{m}{1}$.

Pro IIItia erit $a\,\frac{m.\,m+1.\,m+2}{1.\;\;2.\;\;3} + b\,\frac{m.\,m+1}{1.\,2} + c\,\frac{m}{1}$,

Pro IVta erit $a\,\frac{m.\,m+1.\,m+2.\,m+3}{1.\;\;2.\;\;3.\;\;4} + b\,\frac{m.\,m+1\ \text{etc.}}{1.\;\;2.\ \text{etc.}}$

Corollarium II.

§. 42. Formulae igitur ſingulares ſummatoriae á formulis ſingularibus terminorum (§. 26.) nil differunt, niſi quod in eis ultima differentia originalis abſit, eſt enim aequalis nihilo; deinde, quod uno gradu promoveantur ſic, ut formula alicujus termini in quavis progreſſione fiat formula ſummatoria antecedentis progreſſionis.

Deſi-

Definitio VII.

§. 43. *Progressio arithmetica* est progressio localis, cujus index est binarius. *Differentia terminorum in progressione arithmetica* est prima originalis differentia progressionis localis secundanae.

Corollarium I.

§. 44. Si differentia progressionis arithmeticae ponatur $= d$, et primus terminus ponatur $= a$, erit differentia originalis prima etiam $= d$ et secunda $= a - d$ (§. 11. 7.), hinc formula generalis cujusvis termini in progressione arithmetica est talis

$$d\frac{m}{1} + a - d \text{ (§. 26.)} = dm - d + a = (m - 1)\, d + a.$$

Corollarium II.

§. 45. Si numerus terminorum progressionis arithmeticae ponatur $= n$, erit quoque radix ultimi termini $= n$ (§. 3.) hinc ultimus terminus erit $= a + (n - 1)\, d.$ (§. 44.)

Corollarium III.

§. 46. Formula etiam summatoria pro omnibus progressionibus arithmeticis haec est (§. 41.) $d\,\frac{n.\,n+1}{1\,.\,2} + (a-d)\,\frac{n}{1} = \frac{dn^2 + dn}{2} +$ $(a-d)\,n = d\,\frac{n^2 + n}{2} + an - dn = \frac{dn^2 - dn}{2} + an = d\,\frac{n^2 - n}{2} + an$; h. e. ex datis differentia, numero terminorum, et primo termino invenitur summa progressionis arithmeticae, si quadratum numeri terminorum dimidiatum et dimidio terminorum numero mulctatum ducatur in differentiam, deinde producto addatur factum ex primo termino in numerum terminorum.

Definitio VIII.

§. 47. *Numerus figuratus* est terminus alicujus progressionis localis, in qua, si prima differentia originalis sit $= a$, tum secunda ponitur $= - a + 1$, ceterae vero omnes sunt $= 0$. In specie, si index progressionis sit $= 3$, termini ejus dicuntur *polygoni numeri*; sit $= 4$,

tum

tum habebis *pyramidales numeros primos;* sit $= 5$, tum habebis *pyramidales secundos*, et sic deinceps. Radix autem progressionis dicitur vulgo *latus numeri figurati.*

Corollarium I.

§. 48. Formula ergo generalis pro numeris polygonis omnibus est $= a\,\frac{m.m+1}{1.\;2} - a\,\frac{m}{1} + \frac{m}{1} = a\left(\frac{m^2+m}{2}\right) + (1-a)\,m.$

Corollarium II.

§. 49. Formula etiam generalis pro pyramidalibus primis haec est $= a\,\frac{m.m+1.m+2}{1.\;2.\;3.} - a\,\frac{m.m+1}{1.\;2} + \frac{m.m+1}{1.\;2}$; pro secundis vero $= a\,\frac{m.m+1.m+2.m+3}{1.\;2.\;3.\;4} + (1-a)\,\frac{m.m+1.m+2}{1.\;2.\;3}$ et sic porro.

Corollarium III.

§. 50. Formula summatoria pro polygonis erit $a\,\frac{m.m+1.m+2}{1.\;2.\;3} + (1-a)\,\frac{m.m+1}{1.\;2}$, pro pyramidalibus primis erit $=$ $a\,\frac{m.m+1.m+2.m+3}{1.\;2.\;3.\;4} + (1-a)\,\frac{m.m+1.m+2}{1.\;2.\;3}$ et sic deinceps (§. 41.), unde patet, quod summae numerorum polygonorum sint pyramidales primi, horum vero summae pyramidales secundi atque ita porro (§. 49.)

Definitio IX.

§. 51. Numerus polygonus dicitur *triangularis*, si $a = 1$; *quadrangularis*, si $a = 2$; *quinquangularis* si $a = 3$; et s. p. Itidem pyramidales vocantur *triangulares*, si $a = 1$ et sic deinceps. *Numerus angulorum* est, qui indicat, quotangularis numerus figuratus dicatur.

Corollarium I.

§. 52. Si numerus angulorum ponatur $= p$, erit $a = p - 2$.

Corollarium II.

§. 53. Quodsi ergo numeri polygoni ex suis angulis determinari debeant, tum in formula eorum pro a ponendum erit p — 2, hinc formula pro polygonis generalis haec emerget:
$$(p-2)\frac{m.\overline{m+1}}{1.\ 2.}+(3-p)\frac{m}{1}=p\frac{m.\overline{m+1}}{2}-m.\overline{m+1}-pm+3m=$$
$$\frac{pm^2}{2}+\frac{pm^2}{2}-m^2-m-pm+3m=\tfrac{1}{2}pm^2-m^2-\tfrac{1}{2}pm+2m$$
(§. 48.)

Corollarium III.

§. 54. Sit p. $=3$, erit formula triangularium $=\frac{m.\overline{m+1}}{1.\ 2}$,

sit p. $=4$, erit formula quadrangularium $=2\frac{m.\overline{m+1}}{1.\ 2.}-\frac{m}{1}=m^2$;

sit p $=5$, erit formula pentagonorum $=3\frac{m.\overline{m+1}}{1.\ 2}-2\frac{m}{1}$ et sic porro. Unde lex innotescit, quomodo progrediantur hae formulae.

Corollarium IV.

§. 55. Eodem modo pyramidales quoque numeri ex numero angulorum determinari possunt. Eorum itaque primorum formula generalis haec est: $(p-2)\frac{m.\overline{m+1}.\overline{m+2}}{1.\ 2.\ 3}+(3-p)\frac{m.\overline{m+1}}{1.\ 2}=$
$\frac{(p-2)\ m^3+3\ m^2-(p-5)\ m}{6.}$; secundorum $=$
$$(p-2)\frac{m.\overline{m+1}.\overline{m+2}.\overline{m+3}}{1.\ 2.\ 3.\ 4}+(3-p)\frac{m.\overline{m+1}.\overline{m+2}}{1.\ 2.\ 3}$$ etc. etc. etc.

Corollarium V.

§. 56. Et in specie sit p — 3, erunt pyramidales triangulares primi $=\frac{m.\overline{m+1}.\overline{m+2}}{1.\ 2.\ 3}$, secundi $=\frac{m.\overline{m+1}.\overline{m+2}.\overline{m+3}}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$,
tertii $=\frac{m.\overline{m+1}.\overline{m+2}.\overline{m+3}.\overline{m+4}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.}$ et sic in infinitum.

Defi-

Definitio X.

§. 57. Quodſi binarius in ſuas unitates reſolutus (ſc. $1 + 1$.) ad dignitatem aliquam analytice evehatur, ut ſingula binarii reſoluti pars (h. e. unitas) ſua facta diſtincte exhibeat, adeoque quaelibet dignitas binarii in certos terminos dividatur; tum termini illi vocantur *Unciae binomii cujusvis ad eandem dignitatem elevati.*

Scholion V.

§. 58. In binomio quolibet ex. gr. $a + b$ termini ejus in unitatem ducti intelliguntur, imo pro unitatibus vagis ipſis habendi ſunt, inde quoque ita exprimi poteſt $1.a + 1.b$. Dumque tale binomium ad dignitatem aliquam elevatur, patet, quod unitates, quantitatibus vagis adjunctae una cum ipſis ad eandem dignitatem eleventur, eo quidem modo, qui in allata definitione explicatus eſt. Unde manifeſtum fit, cur binarius reſolutus, et analytice in ſeſe ipſum ductus dignitatibus binomii ſuas praebeat uncias. Prima igitur dignitas binarii reſoluti ſuppeditat uncias primae binomii potentiae; ſecunda ſecundae, tertia tertiae etc. ut in ſequenti tabula ſpectare eſt.

Unciae dignitatis I	= 1	1							
II	= 1	2	1						
III	= 1	3	3	1					
IV	= 1	4	6	4	1				
V	= 1	5	10	10	5	1			
VI	= 1	6	15	20	15	6	1		
VII	= 1	7	21	35	35	21	7	1	
etc.		etc.		etc.			etc.		

Corollarium I.

§. 59. Ex antecedente ſchemate apparet, quod unciae terminorum primorum ſint unitates, ſecundorum ſint numeri naturales, tertiorum triangulares; quartorum pyramidales primi triangulares, quintorum ſint pyramidales triangulares ſecundi, et ſic in infinitum.

Corol-

Corollarium II.

§. 60. Unciae secundae ex sua serie ita desumuntur, ut exponens dignitatis (pro qua uncia excerpitur) sit aequalis radici, sive lateri ejus termini, qui in unciam abit. Tertiae unciae ex progressione sua triangulari hac lege excerpuntur, ut exponens dignitatis, (cujus expetitur uncia tertia) sit unitate minor radice termini ejus, qui in unciam abit. Sic quartarum unciarum radix binario minor est exponente suae dignitatis, etc. et sic deinceps.

Problema V.

§. 61. Invenire uncias binomii ad dignitatem vagam elevati.

Resolutio.

Quoniam prima uncia est unitas, ea ultro habetur (§. 60.); secunda uncia est aequalis exponenti vago n; tertia est triangularis numerus, cujus radix $= n - 1$ (§. 60.) Est autem generalis triangularium expressio $= \frac{m \cdot m + 1}{1. \quad 2.}$ (§. 58.), substituto ergo $n - 1$ pro m, erit uncia tertia $\frac{n \cdot n - 1}{1. \; 2}$. Porro quia radix unciae quartae est $n - 2$ atque ea fit ex progressione pyramidalium triangularium primorum (§. 60.), quorum expressio generalis est $= \frac{m \cdot m + 1 \cdot m + 2}{1. \quad 2. \quad 3}$ (§. 56.) erit ergo uncia quarta $= \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1. \quad 2. \quad 3}$. Eodem modo deprehenditur uncia quinta $= \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3}{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4}$, sexta $= \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2 \cdot n - 3 \cdot n - 4}{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4. \quad 5}$ etc. etc. unde lex patet, qua ceterae unciae progrediantur.

Definitio IX.

§. 62. Si quantitates quotcunque in serie numerorum naturalium progredientes m, $m + 1$, $m + 2$, $m + 3$ etc. in se ducas invicem, ita, ut ut productum ex prima et secunda ducatur in tertiam; factum hoc denuo in quartam, et ita quousque placet, tum facta haec *potestates progressionales* appellare lubet: In specie primam quantitatem primam potestatem voco, m (m + 1), secundam m (m + 1) (m + 2), tertiam atque ita deinceps. Numeros autem terminis potestatum progressionalium adhaerentes *uncias progressionales* nomino.

Corollarium I.

§. 63. Quia quantitas m in unitatem ducta intelligitur, constat uncias progressionales oriri, si numeri naturales invicem ducantur, ii quidem in hunc modum resoluti 1, 1 + 1, 1 + 2, 1 + 3, 1 + 4, 1 + 5 etc. Erunt igitur progressionales

Imae	=	1						
IIdae	=	1 + 1						
III -	=	1	3	2				
IV -	=	1	6	11	6			
V -	=	1	10	35	50	24		
VI -	=	1	15	85	225	274	120	
VII -	=	1	21	175	735	1624	1764	720

Corollarinm II.

§. 64. Quoniam formulae terminorum progressionum (§. 28.) oriuntur ex multiplicatione quantitatum in serie numerorum naturalium progredientium, apparet, quod numeri, eas formulas ingredientes, nil sint, nisi unciae progressionales; et quidem in formula progressionis secundae obtinet uncia potestatis progressionis secundae, et s. p. Unde, posito indice progressionis = n + 1, erit exponens potestatis progressionalis (ad quam pertinet uncia, obtinens in formula) = n.

Corollarium III.

§. 65. Quodsi ergo formula unciarum progressionalium generalis haberetur, tum etiam formula terminorum progressionalis generalis construi posset (§. 29.).

Pro-

Problema VI.

§. 66. Invenire uncias progressionales potestatis progressionalis indeterminatae s. vagae.

Resolutio.

1) Instituatur multiplicatio numerorum aliquot naturalium resolutorum (§. 63.) analytica talis, in qua termini quam pote distinctissimi exhibeantur, hunc in modum.

Uncia potestatis progr. I. = 1

$$\text{II.} = \frac{1+1}{1+1}$$

$$\text{III.} = \frac{(1+2)}{1+1+1.2}$$

2

$$\text{IV.} = 1+1+\frac{(1+3)}{1.2+1.2.3}$$

2	1.	3	
3	2.	3	

$$\text{V.} = 1+1+1.2+1.2.3+1.2.3.4 \quad (1+4)$$

2	1.3	1.2.4
3	2.3	1.3.4
4	1.4	2.3.4
	2.4	
	3.4	

$$\text{VI.} = 1+1+1.2.+1.2.3+1.2.3.4+1.2.3.4.5 \quad (1+5)$$

2	1.3	1.2.4	1.2.3.5
3	2.3	1.3.4	1.3.4.5
4	1.4	2.3.4	2.3.4.5
5	2.4	1.2.5	
	3.4	1.3.5	
	1.5	2.3.5	
	2.5	1.4.5	
	3.5	2.4.5	
	4.5	3.4.5	

2) Jam

2) Jam ſi ad hoc ſchema attendatur, obſervare licet, quod unciae primae ſint unitates: ſecundae, ſint numeri triangulares, quorum indices ſunt = exponentibus poteſtatum progreſſionalium unitate mulctatis, ad quas pertinent: tertiae oriantur ex ſecundis hoc modo, ſecundae unciae omnes poteſtatum antecedentium ducantur in numeros naturales ita, ut prima ſecundarum ducatur in binarium, ſecunda ſecundarum ducatur in ternarium, quarta ſecundarum in quinarium, e. ſ. p. deinde haec facta ſummentur, ut habeatur uncia deſiderata tertia. Eadem lege oriuntur unciae quartae ex unciis tertiis omnibus antecedentium poteſtatum, hoc unico obſervato, ut prima tertiarum ducantur in ternarium; ſic porro omnes unciae ex ſuis antecedentibus formantur, hac conſtanti lege, ut proxima uncia antecedens (illa inquam, quae ad proximam poteſtatem pertinet) ducatur in exponentem propoſitae poteſtatis (cujus nempe quaeritur uncia) ceterae vero in eos numeros, quos ſuus ordo poſtulat.

3) Sit igitur exponens poteſtatis progreſſionalis indeterminatae $= n$ (§. 64.); erit prima ejus uncia unitas, ſecunda erit $\frac{n.n+1}{1.\ 2}$ (§. 54); tertia vi legis ita exhibetur:

$$n-1\,\frac{n-1.n-2}{1.\ 2.}+n-2\,\frac{n-2.n-3}{1.\ 2}+n-3\,\frac{n-3.n-4}{1.\ 2}\ \text{etc. etc.}$$

$$=\left\{\begin{array}{l} 3\,\frac{n.n-1.n-2}{1.\ 2.\ 3}+3\,\frac{n-1.n-2.n-3}{1.\ 2.\ 3}+3\,\frac{n-2.n-3.n-4}{1.\ 2.\ 3} \\ -1\,\frac{n-1.n-2}{1.\ 2}-1\,\frac{n-2.n-3}{1.\ 2}-1\,\frac{n-3.n-4}{1.\ 2} \end{array}\right\}\ \text{etc. etc.}$$

Sic apparet, quod producta, ex quibus conſtat uncia, ſint termini progreſſionis quartae mixtarum, cujus differentia originalis prima eſt $= 3$, ſecunda $= -1$, tertia $= 0$, cujusque radix indeterminata eſt $= n-2$; Quare ejus ſumma erit $= 1.5\,\frac{n+1.n.n-1.n-2}{4.\ 3.\ 2.\ 1} - 1$

$-1\,\frac{n.n-1.n-2}{3.\ 2.\ 1}$ (§. 41) quae est ipsa uncia quaesita. Eodem artificio invenitur uncia quarta.

$$\text{Uncia IV.}\left\{\begin{array}{l}
1.3.5\,\dfrac{n+2.n+1.n.n-1.n-2.n-3}{6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1}\\[2ex]
\left.\begin{array}{l}-3.2\\-1.4\end{array}\right\}\dfrac{n+1.n.n-1.n-2.n-3}{5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1}\\[2ex]
+1\,\dfrac{n.n-1.n-2.n-3}{4.\ 3.\ 2.\ 1}
\end{array}\right.$$

$$\text{Uncia V.}\left\{\begin{array}{l}
1.3.5.7.\dfrac{n+3.n+2\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ n-4}{8.\ 7.\ 6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1}\\[2ex]
\left.\begin{array}{l}-3.5.3\\-3.2.6\\-1.4.6\end{array}\right\}\dfrac{n+2.n+1\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ n-4}{7.\ 6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1}\\[2ex]
+\left\{\begin{array}{l}3.2.2\\1.4.2\\1.1.5\end{array}\right\}\dfrac{n+1.n\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ n-4}{6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1}\\[2ex]
-1\,\dfrac{n.n-1\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ n-4}{5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1}
\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{c}\text{Uncia}\\\text{VI.}\end{array}\left\{\begin{array}{l}
1.3.5.7.9\,\dfrac{n+4.n+3.n+2.n+1.n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5}{10.\ 9.\ 8.\ 7.\ 6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1}\\[2ex]
-\left\{\begin{array}{l}3.5.7.4\\3.5.3.8\\3.2.6.8\\1.4.6.8\end{array}\right\}\dfrac{n+3.n+2.n+1.n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5}{9.\ 8.\ 7.\ 6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1}\\[2ex]
+\left\{\begin{array}{l}3.5.3.3\\2.3.6.3\\1.4.6.3\\3.2.2.7\\1.4.2.7\\1.2.1.7\end{array}\right\}\dfrac{n+2.n+1.n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5}{8.\ 7.\ 6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1}\\[2ex]
-\left\{\begin{array}{l}3.2.2.2\\1.4.2.2\\1.1.5.2\\1.1.1.6\end{array}\right\}\dfrac{n+1.n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5}{7.\ 6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2\ 1}\\[2ex]
+1\,\dfrac{n.\ n-1.\ n-2.\ n-3.\ n-4.\ n-5}{6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1}
\end{array}\right.$$

Uncia

$$
\text{Uncia VII.}\left\{
\begin{array}{l}
1.\ 3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 11\ \dfrac{n+6.\,n+5\,\ldots\ldots\ldots\,n-6}{12.\,11.\,10.\,9.\,8.\,7.\,6.\,5.\,4.\,3.\,2.\,1} \\[2ex]
-\left\{\begin{array}{l}
3.\ 5.\ 7.\ 9.\ 5 \\
3.\ 5.\ 7.\ 4.\ 10 \\
3.\ 5.\ 3.\ 8.\ 10 \\
3.\ 2.\ 6.\ 8.\ 10 \\
1.\ 4.\ 6.\ 8.\ 10
\end{array}\right\}\dfrac{n+4.\,n+3\,\ldots\ldots\ldots\,n-6}{11.\,10.\,9.\,8.\,7.\,6.\,5.\,4.\,3.\,2.\,1} \\[2ex]
+\left\{\begin{array}{l}
3.\ 5.\ 7.\ 4.\ 4 \\
3.\ 5.\ 3.\ 8.\ 4 \\
3.\ 2.\ 6.\ 8.\ 4 \\
1.\ 4.\ 6.\ 8.\ 4 \\
3.\ 5.\ 3.\ 3.\ 9 \\
3.\ 2.\ 6.\ 3.\ 9 \\
1.\ 4.\ 6.\ 3.\ 9 \\
3.\ 2.\ 2.\ 7.\ 9 \\
1.\ 4.\ 2.\ 7.\ 9 \\
1.\ 1.\ 5.\ 7.\ 9
\end{array}\right\}\dfrac{n+3.\,n+2\,\ldots\ldots\ldots\,n-6}{10.\,9.\,8.\,7.\,6.\,5.\,4.\,3.\,2.\,1} \\[2ex]
-\left\{\begin{array}{l}
3.\ 5.\ 3.\ 3.\ 3 \\
3.\ 2.\ 6.\ 3.\ 3 \\
1.\ 4.\ 6.\ 3.\ 3 \\
3.\ 2.\ 2.\ 7.\ 3 \\
1.\ 4.\ 2.\ 7.\ 3 \\
1.\ 1.\ 5.\ 7.\ 3 \\
3.\ 2.\ 2.\ 2.\ 8 \\
1.\ 4.\ 2.\ 2.\ 8 \\
1.\ 1.\ 5.\ 2.\ 8 \\
1.\ 1.\ 1.\ 6.\ 8
\end{array}\right\}\dfrac{n+2.\,n+1\,\ldots\ldots\ldots\,n-6}{9.\,8.\,7.\,6.\,5.\,4.\,3.\,2.\,1} \\[2ex]
+\left\{\begin{array}{l}
3.\ 2.\ 2.\ 2.\ 2 \\
1.\ 4.\ 2.\ 2.\ 2 \\
1.\ 1.\ 5.\ 2.\ 2 \\
1.\ 1.\ 1.\ 6.\ 2 \\
1.\ 1.\ 1.\ 1.\ 7
\end{array}\right\}\dfrac{n+1.\,n.\,n-1\,\ldots\ldots\ldots\,n-6}{8.\,7.\,6.\,5.\,4.\,3.\,2.\,1} \\[2ex]
-\ 1\ \dfrac{n.\,n-1\,\ldots\ldots\ldots\,n-6}{7.\,6.\,5.\,4.\,3.\,2.\,1}
\end{array}\right.
$$

4) Ha-

4) Harum quaelibet uncia constat partim ex indeterminatis fractionibus, partim ex numeris constantibus, qui fractionibus praefiguntur. Fractionum lex difficilis non est, tot enim quaelibet uncia habet fractiones, quot unciae antecedunt. Deinde factores, quibus constant numeratores denominatoresque sunt numeri naturales, iique ab unitate incipientes in denominatoribus; in numeratoribus autem incipiunt ab exponente, qui prius minuendus est numero indicante, quot post primam fractionem contineantur fractiones in uncia quaesita; Tandem tot coefficientes habet minima fractionum, quota uncia illa est in qua minima haec fractio continetur; ceterae fractiones suos factores unitate continua augent usque ad primam. Numerorum autem fractionibus praefixorum lex difficilior haec est: Qui primis fractionibus praefiguntur, sunt facta ex numeris imparibus 1. 3. 5. 7 etc. et quidem tot impares ad quemlibet praefixum primum requiruntur, quot antecesserunt unciae; ex. gr. numerus, qui praefigitur fractioni primae in uncia sexta est quinarius, quia quinque praecesserunt unciae, hinc constabit primus praefixus ex hisce imparibus 1. 3. 5. 7. 9. Porro numerus, qui praefigitur fractioni alicui secundae colligitur ex praefixis primis, numeris naturalibus 1. 2. 3. 4 etc. et paribus 4. 6. 8. 10. 12 etc. hunc in modum:

(a) forma factum ex numeris paribus tot, quod post secundam sequuntur fractiones in proposita uncia, ex. gr. in uncia septima post secundam fractionem sequuntur insuper quatuor fractiones aliae, ergo ex quatuor paribus 4. 6. 8. 10 formetur hoc factum; (b) ex hisce paribus primum (quaternarium scilicet) abjice, illique substitue ejus dimidium, (binarium nempe) itemque primum praefixum unciae tertiae, sic obtinebis factores quibus formatur factum secundum, ex. gr. in uncia septima hoc factum erit 3. 2. 6. 8. 10. (c) Abjice jam quoque ex propositis paribus secundum (sc. 6.) ejusque dimidium (sc. 3) substitue una cum primo praefixo unciae quartae, ut obtineas factores facti tertii ex. gr. in uncia septima 3. 5. 3. 8. 10. (d) Hac

 ratio-

ratione perge tot facta colligere, quot quodlibet factores habet; Horum igitur factorum omnium summa dabit secundum praefixum, qui quaeritur; Quartum praefixum reperies ex praefixis tertiis numeris imparibus 5. 7. 9. 11. 13 etc. et naturalibus 1. 2. 3. 4 etc. ea prorsus ratione, qua in praefixis tertiis procedebatur. Quintum etiam ex iisdem datis habebis, sc. ex antecedentibus quartis, numeris naturalibus, et paribus 6. 8. 10. 12. 14 etc. Ceterum nota, quod ad praefixos, quorum exponens par est, requirantur numeri pares 2. 4. 6. 8 etc. quorum vero exponens est impar, ii quoque postulent factores impares, 1. 3. 5. 7. 9. 11 etc. abjectis prius tot prioribus, quot antecesserunt fractiones eum, cujus quaeritur praefixus numerus.

5) Est tamen alia lex ex consideratione praecedentium unciarum observabilis, quae regulam suppeditat, qua praefixi numeri ex sese invicem oriuntur, quae ut intelligatur, notandum est, per exponentem praefixi intelligi numerum, qui indicat, quotae fractioni praefigatur ille praefixus; deinde indicem praefixi nota esse numerum, qui ostendit, quotus sit praefixus inter suos cognomines, ex. gr. sit praefixi exponens = 3, ternarius hic indicat, praefigi hunc praefixum fractioni tertiae (deorsum numerate); idem praefixus habeat indicem = 7, tum septenarius indicat, hunc praefixum esse ordine septimum inter praefixos tertianos, h. e. hunc numerum praefigi fractioni tertiae in uncia decima, (tres enim priores unciae fractione tertia carent). Regulam itaque dictam ita cape.

(1) Indicem praefixi desiderati unitate mulcta, (2) mulctatum dupla, (3) duplo aggrega exponentem praefixi, (4) aggregatum hoc duc in praefixum, qui antecedit quaesitum, (5) praefixum qui huic antecedenti superstat, duc in suum indicem, (6) factum hoc adde facto praecedenti (No 4,) summa erit praefixus quaesitus. Tota haec regula etiam ita exhiberi potest: sit exponens praefixi quaesiti = p index sit = q, Antecedens praefixus sit = A, antecedenti superstans sit = S; erit S. q + A (2 q – 2 + p) = praefixo quaesito; ex. gr.

Sit

Sit $S = 105$, $A = 25$, $p = 3$, $q = 3$ erit ergo quaeſitus numerus, qui praefigitur fractioni tertiae, unciae ſextae $= 105 . 3 + 25 (2 . 3 - 2 + 3) = 490$.

Scholion VI.

§. 67. Exponens praefixi additus ſuo indici producit numerum unciae, ad quam pertinet praefixus quaeſitus. Ceterum notandum eſt, hactenus nullam fuiſſe habitam rationem ſignorum privativorum, nam omnes praefixi ut poſitivi conſiderati fuerunt; ſigna ergo quantitativa referenda erunt ad fractiones, et privativa quidem ad fractiones ſecundas, quartas, ſextas, octavas etc. poſitiva ad ceteras. Quae obſervatio ad complendam legem praecedentem pertinet.

Scholion VII.

§. 68. Lex, quae ex ſchemate nro. 1. obſervata eſt, et ſub nro. 2. hujus ſolutionis habetur, poterat quoque obſervari ex ſeriebus aliquot unciarum, ita ſibi ſubordinatis, ut ſequens exemplum habet.

1 (1)	1 (2)	2 (3)	6 (4)	24 (5)	120
1 (2)	3 (3)	11 (4)	50 (5)	274 (6)	1764
1 (3)	6 (4)	35 (5)	225 (6)	1624 (7)	13132
1 (4)	10 (5)	85 (6)	735 (7)	6769 (8)	67284

Apparet enim, uncias ſecundas oriri ex primis et ſuis ſuperſtantibus, prout interjecti numeri oſtendunt: Quae eſt ipſa illa lex ſuperius obſervata; et forſan ex praeſenti ſchemate dilucidius patet.

Scholion VIII.

§. 69. Juvat formulam hanc in promtu habere, ut ubi ea opus fuerit, non denuo ſit formanda, difficilis enim ſane eſt conditu, partim ob ſuam prolixitatem partim quoque ob regulae perplexitatem qua praefixi numeri reperiuntur. Fidem facit ſequens formulae particula.

$$1 + \frac{n.n-1}{1.2} + 3\left.\begin{array}{l}\dfrac{n+1.n.n-1.n-2}{4.\ 3.\ 2.\ 1} \\ -1\,\dfrac{n.n-1.n-2}{3.\ 2.\ 1}\end{array}\right\} + 3.5\left.\begin{array}{l}\dfrac{n+2.n+1\,n.n-1.n-2.n-3}{6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1} \\ -10\,\dfrac{n+1.n.n-1.n-2.n-3}{5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1} \\ +1\,\dfrac{n.n-1.n-2.n-3}{4.\ 3.\ 2.\ 1}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rl} +3.5.7 & \dfrac{n+3\ldots\ldots n-4}{8\ldots\ldots 1} \\ -\ 105 & \dfrac{n+2\ldots n-4}{7\ldots\ldots 1} \\ +\ 25 & \dfrac{n+1\ldots n-4}{6\ldots\ldots 1} \\ -\ 1 & \dfrac{n\ldots\ldots n-4}{5\ldots\ldots 1}\end{array}\right\} \left.\begin{array}{rl} +3.5.7.9. & \dfrac{n+4\ldots\ldots n-5}{10\ldots\ldots 1} \\ -\ 1260 & \dfrac{n+3\ldots\ldots n-5}{9\ldots\ldots 1} \\ +\ 490 & \dfrac{n+2\ldots\ldots n-5}{8\ldots\ldots 1} \\ -\ 56 & \dfrac{n+1\ldots\ldots n-5}{7\ldots\ldots 1} \\ +\ 1 & \dfrac{n\ldots\ldots n-5}{6\ldots\ldots 1}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rl} +3.5.7.9.11 & \dfrac{n+5\ldots\ldots n-6}{12\ldots\ldots 1} \\ -\ 17325 & \dfrac{n+4\ldots\ldots n-6}{11\ldots\ldots 1} \\ +\ 9450 & \dfrac{n+3\ldots\ldots n-6}{10\ldots\ldots 1} \\ -\ 1918 & \dfrac{n+2\ldots\ldots n-6}{9\ldots\ldots 1} \\ +\ 119 & \dfrac{n+1\ldots\ldots n-6}{8\ldots\ldots 1} \\ -\ 1 & \dfrac{n\ldots\ldots n-6}{7\ldots\ldots 1}\end{array}\right\}\text{ etc. etc in inf.}$$

Corollarium I.

§. 70. Ex hac generali formula unciarum progressionalium generalis quoque formula pro terminis progressionum localium conficitur (§. 65.) quae ita sese habet.

$$\frac{a}{1,2\ldots\ldots,n}\,m^{n} + \left.\begin{array}{l} \dfrac{\dfrac{n\,.\,n-1}{1.\;2}\,a}{1.\;2\ldots\ldots,n} \\[2ex] + \dfrac{b}{1.2..n-1} \end{array}\right\}\,m^{n-1}$$

$$+ \left.\begin{array}{l} 3\,\dfrac{\dfrac{n+1\ldots n-2}{1.\;2.\;3.\;4}\,a}{1.\;2.\;3\ldots\ldots n} \\[2ex] - \dfrac{\dfrac{n\ldots\ldots n-2}{1.\;2.\;3}\,a}{1.\;2.\;3.\;n} \\[2ex] + \dfrac{\dfrac{n-1\,.\,n-2}{1.\;2}\,b}{1.\;2.\;3.\;n-1} \\[2ex] + \dfrac{c}{1,2,3,\ldots,n-2} \end{array}\right\}\,m^{n-2}$$

$$+ \left.\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} + 3.5\,\dfrac{\dfrac{n+2\ldots\ldots n-3}{6\ldots\ldots\ldots 1}\,a}{1.\;2.\;3\ldots\ldots n} \\[2ex] - 10\,\dfrac{\dfrac{n+1\ldots\ldots n-3}{5\ldots\ldots\ldots 1}\,a}{1.\;2.\;3\ldots\ldots n} \\[2ex] + n\,\dfrac{\dfrac{n\ldots\ldots\ldots n-3}{4\ldots\ldots\ldots 1}\,a}{1.\;2.\;3\ldots\ldots n} \end{array}\right. \\[6ex] \left\{\begin{array}{l} + 3\,\dfrac{\dfrac{n\ldots\ldots\ldots n-3}{4.\;3.\;2.\;1}\,b}{1.\;2.\;3\ldots\ldots n-1} \\[2ex] - \dfrac{\dfrac{n-1\,.\,n-2\,.\,n-3}{3.\;2.\;1}\,b}{1.\;2.\;3\ldots n-1} \end{array}\right. \\[6ex] + \dfrac{\dfrac{n-2\,.\,n-3}{1.\;2}\,c}{1.\;2.\;3\ldots n-2} \\[2ex] + \dfrac{d}{1.\;2.\;3\ldots\ldots n-3} \end{array}\right\}\,m^{n-3}$$

etc. etc. in infin.

Corol-

Corollarium II.

§. 71. Ex hac porro terminorum generali formula elicitur quoque generalis formula pro differentiis originalibus ex aequationum cognitis eruendis (§. 34.) haec:

$$a = p.1.2 \ldots\ldots n = A.1.2.3.\ldots\ldots n$$

$$b = \left(q - A\frac{n.n-1}{1.2}\right) 1.2\ldots\ldots n-1 = B.3.4\ldots n-1$$

$$c = \left(\begin{array}{l} r - B\dfrac{n-1.n-2}{1.2} - 3A\dfrac{n+1.n.n-1.n-2}{1.2.3.4} \\ \qquad + 1A\dfrac{n+0\ldots\ldots n-2}{1.2.3} \end{array}\right) 1\ldots n-2 = C.1.2..n-2$$

$$d = \left(\begin{array}{l} S - C\dfrac{n-2.n-3}{1.2} - 3B\dfrac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} - 3.5.A\dfrac{n+2..n-3}{6\ldots1} \\ \qquad + 1B\dfrac{n-1.n-2.n-3}{1.2.3} + 10A\dfrac{n+1..n-3}{5\ldots1} \\ \qquad\qquad - 1A\dfrac{n\ldots n-3}{4\ldots1} \end{array}\right) 1..n-3 = D.1..n$$

etc. etc.

Scholion IX.

§. 72. Haec ultima formula haud difficulter extenditur. Numeri enim, qui eam ingrediuntur, (et qui soli difficultatem habere videntur) nil sunt, nisi praefixi in formula generali unciarum progressionalium (§. 69.) ex qua etiam mutatis mutandis facile construitur.

Scholion X.

§. 73. Ceterum apparet, cujuslibet differentiae originalis determinationem pendere á determinatione antecedentis suae, quo fit, ut formula haec dissimilis sit formulis specialibus (§. 34.) Et sane perfectior foret, si differentiae originales ab invicem non dependerent. Ut ergo formula haec talis evadat, sequens adjicere lubet.

Proble-

Problema VII.

§. 74. Invenire formulam generalissimam pro differentiis originalibus ex cognitis aequationum eruendis.

Resolutio.

1) Ex consideratione specialium formularum (§. 34. 35.) apparet, numeros solos ibi difficultatem habere, quorum si formula universalis haberetur, etiam ipsa formula desiderata nil difficultatis haberet.

2) Exhibentur autem illi in hisce seriebus: (§. 35.)

1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1
1 (2)	3 (2)	7 (2)	15 (2)	31 (2)	63
1 (3)	6 (3)	25 (3)	90 (3)	301 (3)	966
1 (4)	10 (4)	65 (4)	350 (4)	1701 (4)	7770 etc. etc.

Lex quoque eorum manifesta est, oritur enim quilibet ex suo superstante, qui addendus est facto ex antecedente termino in indicem seriei: quo fit, ut primi termini sint unitates, secundi sint triangulares, tertii sint summae triangularium in suos indices ductorum; quarti sint summae tertiorum in suos indices ductorum etc. etc. Posito ergo indice indeterminato seriei alicujus $= r$, erit radix indeterminata triangularium sive terminorum secundorum etiam $= r$, consequenter quilibet secundus erit $= \frac{r.r+1}{1.\ 2}$.

Inde vero pro tertiis haec oritur formula

$$r.\frac{r.r-1}{1\ .\ 2}+r-1\,\frac{r-1.r}{1.\ 2}+r-2\,\frac{r-2\ .\ r-1}{1.\ \ 2}+r-3\,\frac{r-3\ .r-2}{1.\ 2}\ \text{etc.} =$$

$$3\,\frac{1+2\ .\ r.r+1}{3.\ \ 2.\ \ 1}+3\,\frac{r-1.r.r+1}{3.\ \ 2.\ \ 1}\ \text{etc.}-2\,\frac{r.r+1}{1.\ \ 2}-2\,\frac{r.r-1}{1.\ \ 2};$$

quorum summa est formula tertiorum $= 3\,\frac{r.r+1.r+2.r+3}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4}$; Eo-

$$-2\,\frac{r.\ \ r+1.\ \ r+2}{1.\ \ 2.\ \ 3}$$

 dem

dem modo obtinetur formula quartorum $=3.5\frac{r.r+1\ldots\ldots r+5}{6.\ 5\ldots\ldots 1}$

$-\left\{\begin{matrix}3.4\\2.4\end{matrix}\right\}\frac{r\ldots\ldots r+4}{5\ldots\ldots 1}+2.3\frac{r\ldots r+3}{4\ldots 1}$. Quintorum est $=$

$$3.5.7\frac{r.r+1\ldots r+7}{8.7\ldots\ldots 1}-\left\{\begin{matrix}3.5.6\\3.4.6\\2.4.6\end{matrix}\right\}\frac{r.r+1\ldots r+6}{7.6\ldots 1}+\left\{\begin{matrix}3.4.5\\2.4.5\\2.3.5\end{matrix}\right\}\frac{r.r+1\ldots r+5}{6.5\ldots 1}-2.3.4\frac{r.r+1\ldots r+4}{5.4\ldots\ldots 1};$$

Sextorum est $=3.5.7.9.\frac{r\ldots r+9}{10\ldots 1}-\left\{\begin{matrix}3.5.7.8\\3.5.6.8\\3.4.6.8\\2.4.6.8\end{matrix}\right\}\frac{r\ldots\ldots r+8}{9\ldots\ldots 1}+$

$$\left\{\begin{matrix}3.5.6.7\\3.4.6.7\\2.4.6.7\\3.4.5.7\\2.4.5.7\\2.3.5.7\end{matrix}\right\}\frac{r\ldots r+7}{8\ldots\ldots 1}-\left\{\begin{matrix}3.4.5.6\\2.4.5.6\\2.3.5.6\\2.3.4.6\end{matrix}\right\}\frac{r.r+1\ldots r+6}{7.6\ldots 1}+2.3.4.5.\frac{r\ldots r+5}{6\ldots\ldots 1}$$

3) Unde tandem lex elucet, quomodo ceteri termini progrediantur, scilicet: (1. quilibet terminus tot constat fractionibus, quot eum antecesserunt termini. (2 quaelibet fractio ultima s. minima tot habet factores, quotus suus est ordine terminus, ceterae fractiones vero suos factores unitate continua augent. (3. fractionum numeratores et denominatores sunt numeri naturales, isti quidem incipiunt á quantitate r, hi vero ab unitate. (4. cuilibet fractioni suus adhaeret numerus constans, quem praefixum appellamus; (§ 66. n. 4) Exponens praefixi dicatur, (ut supra) numerus, qui exponit, quotae fractioni adhaereat praefixus. Index autem indicat, quotus sit praefixus inter suos cognomines, h. e. inter eos, qui eodem exponente insigniuntur. Illius nota sit p, hujus vero q. (5. quilibet praefixus oritur ex suo antecedente et antecedentis super-

per-

perſtante ſecundum hanc legem $(A+S).(p+2q-2)$ excipiuntur tamen ab hac regula praefixi primi, qui conſtant ex factoribus tot imparibus, quot anteceſſerunt termini. Sic fiet tandem, ut ſeries generalis hanc acquirat faciem:

$$1+\frac{r.r+1}{1.2}+3\frac{r\ldots r+3}{1\ldots4}+3.5\frac{r\ldots r+5}{1\ldots6}+3.5.7\frac{r\ldots r+7}{1\ldots8}+3.5.7.9\frac{r\ldots r+9}{1\ldots10}$$

$$-2\frac{r\ldots r+2}{1\ldots3}-20\frac{r\ldots r+4}{1\ldots5}-210\frac{r\ldots r+6}{1\ldots7}-2520\frac{r\ldots r+8}{1\ldots9}$$

$$+2.3\frac{r\ldots r+3}{1\ldots4}+130\frac{r\ldots r+5}{1\ldots6}+2370\frac{r\ldots r+7}{1\ldots8}$$

$$-2.3.4\frac{r\ldots r+4}{1\ldots5}-924\frac{r\ldots r+6}{1\ldots7}$$

$$+2.3.4.5\frac{r\ldots r+5}{1\ldots6}$$

$$+3.5.7.9.11\frac{r\ldots r+11}{1\ldots12}+3.5.7.9.11.13\frac{r\ldots r+13}{1\ldots14}$$

$$-34650\frac{r\ldots r+10}{1\ldots11}-540540\frac{r\ldots r+12}{1\ldots13}$$

$$+44127\frac{r\ldots r+9}{1\ldots10}+867042\frac{r\ldots r+11}{1\ldots12}$$

$$-26432\frac{r\ldots r+8}{1\ldots9}-706040\frac{r\ldots r+10}{1\ldots11}$$

$$+7308\frac{r\ldots r+7}{1\ldots8}+303660\frac{r\ldots r+9}{1\ldots10}\quad \text{etc. etc. etc.}$$

$$-2.3.4.5.6\frac{r\ldots r+6}{1\ldots7}-64224\frac{r\ldots r+8}{1\ldots9}$$

$$+2.3.4.5.6.7\frac{r\ldots r+7}{1\ldots8}$$

4) Ex hac igitur ſerie formula pro differentiis originalibus facile conflatur, ſi quantitas ſive radix r determinetur per exponentem dignitatis indeterminatae $=n$. En illam

a =

$$a = p.1.2.3.,\ldots n$$

$$b = \left(q - p\frac{n.n-1}{2.\ 1}\right)1.2.,,n-1$$

$$c = \left(r - q\frac{n-1.n-2}{2,\ 1} + 3p\frac{n+1\ldots n-2}{4\ldots 1} - 2p\frac{n\ldots n-2}{3\ldots\ldots 1}\right)1.2\ldots n-2$$

$$d = \left(S - r\frac{n-2.n-3}{2.\ 1} + 3q\frac{n\ldots n-3}{4\ldots\ldots 1} - 15p\frac{n+2\ldots n-3}{6\ldots 1} - 2q\frac{n-1\ldots n-3}{3,,,,,,1} + 20p\frac{n+1\ldots n-3}{5\ldots\ldots 1} - 6p\frac{n\ldots\ldots n-3}{4\ldots\ldots 1}\right)1.2.,,n-3$$

$$e = \left(t - S\frac{n-3.n-4}{2.\ 1} + 3r\frac{n-1\ldots n-4}{4\ldots 1} - 15q\frac{n+1\ldots n-4}{6\ldots\ldots 1} + 105p\frac{n+3\ldots n-4}{8\ldots 1} - 2r\frac{n-2\ldots n-4}{3\ldots 1} + 20q\frac{n\ldots n-4}{5\ldots\ldots 1} - 210p\frac{n+2\ldots n-4}{7\ldots\ldots 1} - 6q\frac{n-1\ldots n-4}{4\ldots 1} + 130p\frac{n+1\ldots n-4}{6\ldots\ldots 1} - 24p\frac{n\ldots n-4}{5\ldots\ldots 1}\right)1.2.,,n-4$$

etc. etc. in infinitum.

Scholion XI.

§. 75. Poterat eadem formula elici ex ea, quae habetur §. 71; si nempe pro A, B, C etc. sui valores substituti fuissent, sed labore longe difficiliori, quia lex praefixorum non tam facile sese prodidisset teste experientia.

Scholion XII.

§. 76. Si quis ex hac formula generalissima formulas speciales condere velit, is progressiones locales instituat ex praefixis hujus formulae, qui ceu differentiae originales assumuntur, sic enim obtinetur eadem numerorum series, quae habetur §. 35.

Corollarium I.

§. 77. Quoniam in aequationibus puris q, r, s, t etc. sunt = o, p autem est = 1, patet, eandem formulam quoque praestare differentias

rentias originales, per quas construuntur aequationes, quarum termini sunt dignitates numerorum naturalium integrorum.

Problema VIII.

§. 78. Invenire formulam summatoriam pro potentiis quibuscunque, quarum radices sunt numeri naturales.

Resolutio.

Cum quaelibet series potentiarum, quarum radices sunt numeri naturales) sit progressio aliqua localis, cujus dantur differentiae originales per formulam generalem (§. 77.) adeoque quilibet ipse terminus generaliter exprimi possit (§. 27.) tum etiam nullo negotio eadem formula abit in formulam generalem summatoriam potentiarum per Probl. IV. (§. 40.); posita ergo radice ultima seriei summandae $= t$, erit ultima potentia $= t^n$ hinc

$$St^n = \frac{t.t+1.t+2\ldots t+n}{n+1} - \frac{n.n-1}{1.2}\cdot\frac{t.t+1\ldots t+n-1}{n} + \left.\begin{array}{l} \dfrac{3n+1\ldots n-2}{1\ldots 4} \\ -\dfrac{2n\ldots\ldots n-2}{1\ldots 3} \end{array}\right\} \frac{t.t+1\ldots t+n-2}{n-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} -15\,\dfrac{n+2\ldots n-3}{1.2.3.4.5.6} \\ +20\,\dfrac{n+1\ldots n-3}{1.2.3.4.5} \\ -6\,\dfrac{n\ldots\ldots n-3}{1.2.3.4} \end{array}\right\} \frac{t.t+1\ldots\ldots t+n-3}{n-2} \text{ etc. etc. etc.}$$

Corollarium I.

§. 79. Formula generalis haec finita fit, si n determinetur, quia omnes illi termini evanescunt, in quibus numerus ab n subtrahendus aequalis fiet ipsi n; ex gr. sit $n = 1$, erit $\int t^1 = \frac{t.t+1}{2} = \frac{t^2+t}{2}$; sit $n = 2$, erit $\int t^2 = \frac{t.t+1.t+2}{3} - \frac{t.t+1}{2} = \frac{2t^3+3t^2+t}{6}$, eodem modo erit

$\int t^3$

$$\int t^3 = \frac{t.t+1.t+2.t+3}{4} - 3\,\frac{t.t+1.t+2}{3} + \frac{t.t+1}{2} = \frac{t^4+2t^3+t^2}{4},$$

$$\int t^4 = \frac{t\ldots t+4}{5} - 6\,\frac{t\ldots t+3}{4} + 7\,\frac{t.t+1.t+2}{3} - \frac{t.t+1}{2} =$$

$$\frac{12t^5+120t^4+420t^3+600t^2+288t}{5.\ 12} - \frac{90t^4+540t^3+990t^2+540t}{4.\ 15}$$

$$+\frac{140t^3+420t^2+280t}{3.\ 20} - \frac{30t^2+30t}{2.\ 30} = (6t^5+15t^4+10t^3-t) : 30.$$

$$\int t^5 = (10t^6+30t^5+25t^4+25t^2+130t) : 60.$$

Scholion XIII.

§. 80. Quoniam formula haec ſummatoria ſimul quoque eſt formula cujuslibet termini progreſſionis ejus, in qua continentur omnes ſummae potentiarum, facile apparet, quomodo ex eadem formula alia exſtrui poſſit, qua etiam ſummae potentiarum ſummari poſſent: imo, quomodo etiam ſummarum ſummae, aliaeque in infinitum ſummari debeant; omnia vi Probl. IV. (§. 40.)

CAPUT III.

DE USU PROGRESSIONUM LOCALIUM IN EXTRAHENDIS RADICIBUS EX AEQUATIONIBUS ALGEBRAICIS.

Problema IX.

§. 81. Invenire radices et veras et falſas omnes cujusvis aequationis algebraicae, ſi quidem radices integri ſint numeri.

Reſolutio.

1) Ex cognitis quantitatibus aequationis eliciantur differentiae originales ejus progreſſionis, ad quam pertinet aequatio (§. 33.), idque ope alicujus formulae ſpecialis (§. 34.), vel univerſalis (§. 74).

2) Per inventas differentias originales conſtruatur progreſſio localis tam retro, quam porro (§. 13).

3) Quod-

3) Quodsi ergo aequatio habet radices integras, continebitur pars aequationis cognita in serie progressionis repertae, cui suae radices superstant, et quidem verae á dextra, falsae autem á sinistra (§. 10.) Sit data aequatio haec: $x^4 + 8x^3 - 53x^2 - 312x + 756 = 0$.

Pro hac aequatione reperitur $a = 1.2.3.4 = 24$, $b = (8-6)6 = 2.6 = 12$, $c = (-53-24+7)2 = 70.2 = 140$; $d = -312 + 53 + 8 - 1 = -252$; $e = 0$. Inde conficitur progressio localis haec:

α)	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	β)
	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	
	−156	−132	−108	−84	−60	−36	−12	12	36	60	
	+280	148	+40	−44	−104	−140	−152	−140	−104	−44	
	+140	288	328	284	180	40	−112	−252	−356	−400	
	−756	−468	−140	144	324	364	+252	0	−356	−756	

β)	3	4	5	6	7	8	9	10	-11	-10	−9	−8 α)
	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
	84	108	132	156	180	204	228	252	-252	-228	-204	-180
	40	148	280	436	616	820	1048	1300	1048	820	616	436
	360	-212	68	504	1120	1940	29[illegible]8	4288	-2012	-1192	-576	-140
	1116	-1328	-1260	-756	364	2304	etc.	etc.	-3524	-1332	-756	-896

Sunt ergo radices verae 2 et 6, falsae autem −7 et −9.

Aliud exemplum. Sit data aequatio pro latere sexanguli haec:

$$\overset{p}{x^6} \quad \overset{q}{*} \quad \overset{r}{-6x^4} \quad \overset{s}{*} \quad \overset{t}{+9x^2} \quad \overset{u}{*} \quad -4 = 0;$$

Hic erit $a = 1.2.3.4.5.6 = 720$, $b = (0-15)\,120 = -1800$, $c = (-6+65)\,24 = 1416$, $d = (0+36-90)\,6 = -324$, $e = (9-42+31)\,2 = -4$, $f = -9+6-1 = -4$, $g = 0$.

Hinc emergit progressio localis haec:

−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	
720	720	720	720	720	720	720	720	etc.
−4680	−3960	−3240	−2520	−1800	−1080	−360	+360	etc.
12936	8976	5736	+3216	1416	336	−24	336	etc.
	−10792	−4956	−1740	−324	12	−12	324	etc.
	+7016	2060	320	−4	8	−4	320	etc.
	−2272	−320	0	−4	4	−0	320	etc.
	+324	+4	+4	0	4	4	324	etc.

Sunt

Sunt ergo aequationis hujus radices verae $=1$ et 2, falſae $=-1$ et -2. Si in hac aequatione x^2 ponatur $=y$, aliam illa acquiret faciem nempe hanc: $y^3-6y^2+9y-4=0$. Hic erit $a=6$ $b=-18$, $c=16$, $d=0$.

--6	--5	--4	--3	--2	--1	0	1	2	3	4	5	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
54	--48	42	--36	--30	--24	--18	--12	--6	0	6	12	18
214	166	124	88	58	34	+ 16	4	--2	--2	4	16	34
etc.	--320	--196	--108	--50	--16	0	4	+ 2	--0	4	20	54

Eſt ergo $y=x^2=1$ et $x=1$ vel -1. Item $y=x^2=4$, ergo $x=2$ vel -2, plane ut ſupra.

Scholion XIV.

§. 82. Ob hunc harum progreſſionum uſum appellavi eas *locales;* dum enim talis ſeries omnes numeros eos exhibet, qui quantitati alicui algebraicae aequantur, ſi ejus radix ponatur aequalis cuivis numero integro; ea in re naturam imitatur *loci* alicujus *geometrici.* Nam ſicut in loco geometrico omnes continentur radices ſuae aequationis: ita in ſerie progreſſionali omnes quoque habentur et radices integrae, et numeri ex radicibus integris ſecundum regulam aequationis orti.

Scholion XV.

§. 83. Cum quaelibet aequatio tot habeat radices, quot exponens dignitatis ſuae unitates habet, neceſſe eſt, eas omnes quoque in progreſſione ſua locali exhiberi debere, ſi quidem poſſibiles fuerint. Quodſi vero contingat, ut progreſſio localis pauciores exhibeat radices, quam aequatio requirit, id indicio eſt, ceteras radices eſſe vel aequales repertarum alicui, vel ſurdas, vel fractionibus affectas, vel denique imaginarias. Quod attinet imaginarias, illae tanquam impoſſibiles in progreſſione locali non continentur. Radices cujuslibet progreſſionis localis non niſi verae et falſae ſunt, quos inter imaginariae locum non habent. Ceterum radicem, ſive numerum *poſſibilem* nomino, qui eſt ſumma unitatum aliquot, quae unitate tates ad ipſam ſummam hanc, quam conſtituunt, rationem certam habent, eamque vel finitam (ſ. commenſurabilem, uti in numeris rationalibus) vel infinitam, (ſ. incommenſurabilem, qualis eſt ratio unitatis in numero irrationali). Dum vero numerus imaginarius non ſit ſumma unitatum, nec quidquam in rerum natura detur, quod per illum numerari queat, impoſſibilis utique eſt, et merum ens rationis. Cum igitur termini progreſſionis localis alicujus ſint ſummae conſtantes ex certis unitatibus, patet, quantitates ortas ex imaginariis in ſerie localium non haberi. Quomodo vero ope progreſſionum localium indagari poſſit, utrum aequatio contineat radices imaginarias, id poſt haec oſtendendum erit. Similiter etiam alibi pateſcet, quomodo innoteſcant radices aequales, ſi quas habet aequatio. Irrationales tandem et fractionibus affectae radices per locales progreſſiones quidem non niſi caſu deprehenduntur, poſſunt tamen aſſignari limites data quavis quantitate differentes, quo fit, ut radix quam proxime determinetur. Huc pertinet ſequens

Problema X.

§. 84. Invenire limites radicum dato quovis numero differentes.

Reſolutio.

1) Si deſiderata differentia limitum ſit fractio, cujus numerator eſt unitas; tum per denominatorem multiplica radicem propoſitae aequationis, quo fit, ut novam obtineas aequationem.

2) Pro nova hac aequatione conſtrue progreſſionem localem, ejusque radices divide in numerum, per quem radix multiplicabatur; terminos vero progreſſionis divide in eum numerum, per quem multiplicabatur ultima aequationis propoſitae quantitas, ſic obtinebis progreſſionem pro aequatione propoſita, in qua radices deſiderata differentia progrediuntur. Schema calculi exemplum docet adjectum. Sit data aequatio pro latere pentagoni haec $x^4 * - 5x^2 * + 5 = 0$, pro hac aequatione reperienda ſit progreſſio localis, cujus

radices differant decima unitatis parte (h. e. $\frac{1}{10}$), multiplicetur ergo radix aequationis per 10, ut emergat nova aequatio haec:

$y^4 * - 500y^2 * + 50000 = 0$, vel ita

$0{,}0001y^4 * - 0{,}0500y^2 * + 5{,}0000 = 0$. Hujus aequationis differentiae originales ſunt $a = 0{,}0024$, $b = - 0{,}0036$, $c = - 0{,}0986$, $d = 0{,}0499$, $e = 0$. Hinc oritur progreſſio talis:

	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{9}{10}$
	0,0024.	0,0024.	0,0024.	0,0024.	0,0024.	0,0024.	0,0024.	0,0024.	0,0024.	0,0024
-	0,0036	- 12	12	36	60	84	108	132	156	180
-	0,0986	- 998	- 986	- 950	- 890	- 806	- 698	- 566	- 410	- 230
+	0,0499	- 499	- 1485	- 2435	- 3328	- 4131	- 4829	- 5395	- 5805	- 6035
	00000	0,0499.	0,1984	-0,4419	-0,7744	-11875	-1.6704	-22099	-27904	-33939

	1	$1\frac{1}{10}$	$1\frac{2}{10}$	$1\frac{3}{10}$	$1\frac{4}{10}$	$1\frac{5}{10}$	$1\frac{6}{10}$	$1\frac{7}{10}$	$1\frac{8}{10}$	$1\frac{9}{10}$
	0,0024.	0,0024.	0,0024.	0,0024.	0,0024.	0,0024.	0,0024.	0,0024.	0,0024.	0,0024
	0,0204	228	252	276	300	324	348	372	396	420
-	26	202	454	730	1030	1354	1702	2074	2470	2890
-	6061	- 5859	- 5405	-4675	- 3645	- 2291	- 589	1485	3955	6845
-	40000	-4,5819	-5,1264	-5,5939	-5,9584	-6,1875	-6,2464	-6,0979	-5,7024	-5,0179

	2	$2\frac{1}{10}$	$2\frac{2}{10}$	etc.
	0,0024.	0,0024.	0,0024	etc.
	444	468	492	etc.
	3334	3802	4294	etc.
	10179	1,3981	1,8275	etc.
—	40000	-2,6019	etc.	etc.

Sunt ergo limites radicis verae primae $= 1\frac{1}{10}$ et $1\frac{2}{10}$, alterius ſunt $= 1\frac{9}{10}$ et 2.

Quodſi in propoſita aequatione pro x^2 ſubſtituatur y, habebitur $y^2 - 5y + 5 = 0$; ubi $y = x^2$; hujus aequationis radix ducta in 10, aequationem novam facit hanc $z^2 - 50z + 500 = 0$, ſive $0{,}01z^2 - 0{,}50z + 5{.}00 = 0$, ubi $z = 10y = 10x^2$, pro hac aequatione nova inveniuntur differentiae originales hae $a = 0.02$, $b = 0.51$, $c = 0$, hinc progreſſio localis deſiderata erit haec:

0.02

0.02	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
—0.51	—49	—47	—45	—43	—41	—39	—37	—35	—33	—31
0.00	-0.49	-0.96	-1.41	-184	-2.25	-2.64	-3.01	-3.36	-3.69	-4.00
$1\frac{1}{10}$	$1\frac{2}{10}$	$1\frac{3}{10}$	$1\frac{4}{10}$	$1\frac{5}{10}$	$1\frac{6}{10}$	$1\frac{7}{10}$	$1\frac{8}{10}$	$1\frac{9}{10}$	3	$2\frac{1}{10}$
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
—29	—27	—25	—23	—21	—19	—17	—15	—13	—11	—9
-4.29	-4.56	-4.81	-5.04	-525	-544	-5.61	-5.76	-5.89	-6.00	-6.09
$2\frac{2}{10}$	$2\frac{3}{10}$	$2\frac{4}{10}$	$2\frac{5}{10}$	$2\frac{6}{10}$	$2\frac{7}{10}$	$2\frac{8}{10}$	$2\frac{9}{10}$	3	$3\frac{1}{10}$	$3\frac{2}{10}$
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
7	—5	—3	—1	1	3	5	7	9	11	13
-6.16	-6.21	-6.24	-6.25	-6.24	-6.21	-6.16	-6.09	-6.00	-5.89	-5.76
$3\frac{3}{10}$	$3\frac{4}{10}$	$3\frac{5}{10}$	$3\frac{6}{10}$	$3\frac{7}{10}$	etc.					
2	2	2	2	2	etc.					
15	17	19	21	23	etc.					
-5.61	-5.44	-5.25	-5.04	-481	etc.					

Sunt ergo limites pro y $1\frac{3}{10}$ et $1\frac{4}{10}$. Item $3\frac{6}{10}$ et $3\frac{7}{10}$, et quoniam $\sqrt{y} = x$, erunt limites pro x $\sqrt{1\frac{3}{10}}$ et $\sqrt{1\frac{4}{10}}$, item $\sqrt{3\frac{6}{10}}$ et $\sqrt{3\frac{7}{10}}$, vel radicibus extractis $\frac{180}{158}$ et $\frac{187}{158}$, item $\frac{300}{158}$, et $\frac{304}{158}$ h. e. si in decimales mutentur: $1\frac{14}{100}$ et $1\frac{19}{100}$, item $1\frac{89}{100}$ et $1\frac{92}{100}$ fere ut supra.

Scholion XIV.

§. 85. Accidit interdum, si radix aequationis magna sit, vel si limitum differentia valde parva assumatur, ut progressio localis ingens requiratur, quae calculum difficilem parit. Haec difficultas tollitur, si progressio decurtetur, h. e. si ea sola pars construatur, quae limites quaesitos continet, vel si aequatio transmutetur in aliam, cujus radix data quantitate minor sit, tum enim novae aequationi brevior progressio satisfacit. Huc igitur sequens pertinet

Problema XI.

86. Decurtare progressiones locales nimium prolixas, h. e. exhibere radices progressionis alicujus magnas ita, ut non opus sit totam construere progressionem.

Resolutio.

Radicem aequationis propositae minue eo numero, qui aequalis est uni ex radicibus illis, quas exhibere gestis, sic obtinebis novam aequationem, cujus progressionem construe ejusque radicibus adde numerum, quo radix prima minuebatur, sic habebis radices quaesitas cum suis terminis substantibus. Ex. gr. Sit data aequatio

$$y^3 - 700y^2 + 140000y - 7000000 = 0.$$

Quoniam hujus aequationis radix magna est, (uti ex ultimo constat termino) et aliunde conficitur, eam contineri intra 70 et 80, mutanda erit in aliam, in qua $x = y - 70$; h. e, $x + 70 = y$, idque hoc modo:

$$\begin{array}{rcl} y^3 & = & x^3 + 210x^2 + 14700x + 343000 \\ -700y^2 & = & -700x^2 - 98000x - 3430000 \\ +140000\,y & = & 140000x + 9800000 \\ -7000000 & = & -7000000 \\ \hline 0 & = & x^3 - 490x^2 + 56700x - 287000 \end{array}$$

Hujus aequationis differentiae originales sunt $a = 6$, $b = -986$; $c = 57191$, $d = 0$.

0	1	2	3	4	5	6
6	6	6	6	6	6	6
−986	−980	−974	−968	−962	−956	950
57191.	56211	55237	54269	53307	52351	51401
0.	56211.	111448.	165717.	219024.	271375.	322776

Est ergo $x > 5$ et < 6, adeoque $y > 75$ et < 76.

Alius modus.

1) Erue propositae aequationis differentias originales;

2) Ex inventis differentiis originalibus forma formulas generales, quibus quilibet terminus cujuslibet quaesitae progressionis generaliter exprimitur, idque ope formularum universalium (§. 28.).

3) Has formulas singulas determina per radicem aliquam determinatam; nimirum quantitatibus earum indeterminatis substitue radicem

dicem magnam, cujus gratia progressio decurtatur, sic formulae abibunt in meros numeros determinatos.

4) Hisce inventis numeris determinatis utere tanquam differentiis originalibus, h. e. continua progressionem desideratam, ex. gr. sit data aequatio $x^4 - 800x^3 + 200000x^2 - 16000000x + 400000000 = 0$.

Quoniam aliunde innotescit, hujus aequationis radicem intra 50 et 60 stare, patet, progressionem ejus fore prolixissimam, quae ergo ut decurtetur, hoc est, ut ejus regio sive pars inveniatur, quae á radice 80^{ma} incipit: ita progrediendum erit: 1) Differentiae originales sunt $a = 24$, $b = -4836$, $c = 404814$, $d = -16200801$, $e = 0$. 2) Jam formandae sunt formulae generales terminorum in progressionibus ex hisce differentiis originalibus oriundis. Quintae ergo progressionis formula habetur in ipsa aequatione proposita, sc. $x^4 - 800x^3 + 200000x^2 - 16000000x$. Quartae progressionis formula universalis est (§. 28.) $\frac{a}{6}x^3 + \frac{a+b}{2}x^2 + \frac{2a+3b+6c}{6}x + d$, hoc est, substitutis ipsis differentiis originalibus $4x^3 - 2406x^2 + 402404x - 16200801$. Tertiae formula erit $= 12x^2 - 4824x + 404814$. Secundae formula erit $24x - 4836$; et primae 24. (3) Ponatur porro $x = 50$, quia ab hac radice incipienda est progressio, erit ergo terminus pro radice hac in progressione quinta $= -393750000$, in quarta $= -1595601$, in tertia $= 193614$, in secunda $= -3636$, in prima $= 24$. Hinc sequens emergit progressio.

50	51	52	53
24	24	24	24
− 3636	− 3612	− 3588	− 3564
193614	190002	186414	182850
1595601	− 1405599	− 1219185	− 1036335
− 293750000	− 395155599	− 396374784	− 397411119

54	55	56	57
24	24	24	24
— 3540	— 3516	— 3492	— 3468
179310	175794	172302	168834
— 857025	— 681231	— 508929	— 340095
— 398268144	— 399985839	— 399458304	— 399798399
58	59	60	
24	24	24	Limites ergo sunt 58 et 59.
— 3444	— 3420	— 3396	
165390	161970	158574	
— 174705	— 12735	145839	
— 399973104	— 399985839	— 399840000	

Scholion XVII.

§. 87. Usum utique habet hoc problema in determinandis radicibus et limitibus magnis, siquidem regiones radicum prius cognitae fuerint. Cognoscuntur quidem plerumque regiones hae ex conditione aequationis et via, qua ad propositam aequationem perventum erat. Accidit tamen interdum ut regiones hae valde incertae sint, quo casu prius indagendae erunt. Quod quomodo fiat, sequens declarat

Problema XII.

§. 88. Invenire regiones radicum et limitum.

Resolutio.

1) Propositae aequationis radicem divide per numerum aliquem qui ultimum aequationis terminum, alioquin magnum, satis brevem facit. 2) Pro nova aequatione construe progressionem, progressionis vero radices multiplica per numerum radicis dividuum, terminos autem multiplica per numerum, quo ultimus aequationis terminus dividebatur. Sic obtinebis limites radicis quaesitae numero unitate majore distantes h. e. regionem progressionis ejus, cujus limites unitate differunt.

Ex.

Ex. gr. detur aequatio $x^3 + 6x^2 - 32436x + 2184840 = 0$, et dividatur per 30

$$\begin{array}{cccc} 1. & 30. & 900. & 27000 \\ \hline y^3 + \frac{1}{5}y^2 & - 36\frac{1}{25}y & + & 80\frac{23}{25} = 0 \end{array}$$

In hac vero aequatione eſt $y = \frac{x}{30}$, quaerantur ergo differentiae originales, quae ſunt $a = 6$, $b = -5\frac{15}{25}$, $= -35\frac{6}{25}$, $d = 0$ hinc conſit progreſſio haec:

-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	
-240	-210	-180	-150	-120	-90	-60	-30	0	30	60	90	120	etc.
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	
$-53\frac{15}{25}$	$-47\frac{15}{25}$	$-41\frac{15}{25}$	$-35\frac{15}{25}$	$-29\frac{15}{25}$	$-23\frac{15}{25}$	$-17\frac{15}{25}$	$-11\frac{15}{25}$	$-5\frac{15}{25}$	$+0\frac{10}{25}$	$6\frac{10}{25}$	$12\frac{10}{25}$	$18\frac{10}{25}$	
$-176\frac{14}{25}$	$-129\frac{24}{25}$	$-88\frac{9}{25}$	$52\frac{19}{25}$	$23\frac{4}{25}$	$-0\frac{11}{25}$	$-18\frac{1}{25}$	$-29\frac{16}{25}$	$-35\frac{6}{25}$	$34\frac{21}{25}$	$-28\frac{11}{25}$	$-16\frac{1}{25}$	$+2\frac{9}{25}$	
$-210\frac{22}{25}$	$-80\frac{23}{25}$	$7\frac{1}{25}$	$60\frac{1}{25}$	$83\frac{9}{25}$	$82\frac{23}{25}$	$64\frac{22}{25}$	$35\frac{6}{25}$	0	$-34\frac{21}{25}$	$-63\frac{7}{25}$	$-79\frac{8}{25}$	$+76\frac{24}{25}$	etc.

Regio ergo radicum verarum eſt intra 90 et 120, falſa Radix eſt $= -210$.

Scholion XVIII.

§. 89. Per hactenus tradita problemata radices omnes poſſibiles cujusvis aequationis algebraicae inveniuntur, et quidem radices integrae accurate, ſurdae vero quam proxime h. e. per quamvis fractionem habentur. Fatendum tamen eſt, calculum fieri perquam moleſtum, ſi fractionum appropinquantium numeratores centenarios ſupergrediantur. Conſultum ergo eſt, ſi quis ad partes milleſimas unitatis et ſupra adſpiret, ut ſequenti utatur methodo appropinquatoria, quae differt ab Harriotti methodo maxime in eo, quod citius appropinquet, et radicem accuratiorem exhibeat. Fidem faciet ſequens

Problema XIII.

§. 90. Extrahere radices aequationis per aproximationem.

Reſolutionem

Sequenti exemplo addiſce. Sit data aequatio pro latere undecanguli poſito radio $= 1$, $x^{10} - 11x^8 + 44x^6 - 77x^4 + 55x^2 - 11 = 0$.

In

In hac aequatione fit $x^2 = y$, ut brevior evadat, hoc modo $y^5 - 11y^4 + 44y^3 - 77y^2 + 55y - 11 = 0$. Quoniam radix x quaesita minor est unitate, (est enim latus undecanguli brevius radio) erit etiam $y = x^2$ minus unitate. Statim ergo limites ejus quaeri expedit decima unitatis parte differentes, quod (vi §. 84.) ita fit.

1) mutetur aequatio in aliam, ubi $z = 10y$, et $y = \frac{z}{10}$, hoc modo

$$\frac{y^5}{1} - \frac{11y^4}{10} + \frac{44y^3}{100} - \frac{77y^2}{1000} + \frac{55y}{10000} - \frac{11}{100000} = 0$$

$$z^5 - 110z^4 + 4400z^3 - 77000z^2 + 550000z - 1100000 = 0$$

Hujus novae aequationis differentiae originales sunt $a = 120$, $b = -2880$, $c = 30510$, $d = -181970$, $e = 631511$, $f = 0$; hinc

2) emergit progressio sequens:

0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{10}$	etc.
120	120	120	120	120	120	120	
−2880	−2760	−2640	−2520	−2400	−2280	−2160	
30510	27750	25110	22590	20190	17910	15750	
−181970	−154220	−129110	106520	−86330	−68420	etc.	
−631511	477291	348181	241661	155331	186911		
0	477291	825472.	1.067133.	1.222464	etc.		

Ergo $y > \frac{3}{10}$ et $< \frac{4}{10}$. 3) Ponatur jam, esse veram radicem $= 0 + t$; erit t fractio paulo major, quam $\frac{3}{10}$, ponatur interim, esse vere $t = \frac{3}{10}$, erit $y = 0 + t$, $y^2 = \frac{13}{10}t$, $y^3 = \frac{9}{100}t$, $y^4 = \frac{27}{1000}t$, $y^5 = \frac{81}{10000}t$; hinc erit porro

y^5

$$
\begin{array}{rcl}
y^5 & = & 0.0081t \\
-11y^4 & = & -0.2970t \\
+44y^3 & = & 3.9600t \\
-77y^2 & = & -23.1000t \\
+55y & = & 55.0000t \\
-11 & & -11 \\
\hline
0 & = & \left.\begin{array}{l} +58.9681 \\ -23.3970 \end{array}\right\} t - 11 \\
11 & = & 35.5711.t \text{ hinc} \\
t & = & \dfrac{11}{35.5711} = \dfrac{110000}{355711} = \dfrac{31}{100}
\end{array}
$$

Hinc accuratior emergit radix $y = 0.31$, ponatur ergo porro $y = 0 + t$, $y^2 = \frac{31}{100}t$, $y^3 = \frac{961}{10000}t$, $y^4 = \frac{29791}{1000000}t$, $y^5 = \frac{923521}{100000000}t$, erit ergo

$$
\begin{array}{rcl}
y^5 & = & 0,00923521t \\
-11y^4 & = & -0.32770100t \\
+44y^3 & = & 4.22840000t \\
-77y^2 & = & -23.87000000t \\
+55y & = & 55.00000000t \\
-11 & = & -11 \\
\hline
0 & = & \left.\begin{array}{l} 59.23763521 \\ -24.19770100 \end{array}\right\} t - 11. \\
11 & = & 35.03993421t \\
t & = & \dfrac{11.00000000}{35.00993421} = \dfrac{314}{1000} = 0.314
\end{array}
$$

Hinc licet pergere, ut supra. Assumatur nimirum $y = 0 + t$, erit $y^2 = 0.314.t$, $y^3 = 0.098596.t$, $y^4 = 0.030959144.t$, $y^5 = 0.009721171216, t$; fiat porro

$$\begin{array}{rcl} y^5 & = & 0.00972\,t \\ -11y^4 & = & -0.34055\,t \\ +44y^3 & = & 4.33822\,t \\ -77y^2 & = & -24.17800\,t \\ +55y & = & 55.00000\,t \\ -11 & = & \qquad -11 \\ \hline 11 & = & 34.82939\,t, \text{ hoc est } t = \frac{11}{34.82939} = \frac{316}{1000} = 0.316 \end{array}$$

Sit porro $y = 0.316$, erit $y = t$, $y^2 = 0.316.\,t$, $y^3 = 0.0998\,t$, $y^4 = 0.031554496.\,t$, $y^5 = 0.00997122.\,t$, fiat deinceps

$$\begin{array}{rcl} y^5 & = & 0009971 \\ -11y^4 & = & -0.347099 \\ 44y^3 & = & 4.393664 \\ -77y^2 & = & -24.332000 \\ 55y & = & 55.000000 \\ -11 & = & \qquad -11 \end{array} \Bigg\} t$$

$$0 = \left.\begin{array}{r} 59.403635 \\ -24.679099 \end{array}\right\} t - 11$$

$$11 = 34.724536.\,t, \text{ et } t = \frac{11}{34.724536} = 0.3168.$$

Sit dehinc $y = 03168$, erit $y = t$, $y^2 = 0.3168.\,t$, $y^3 = 0.10306224.t$, $y^4 = 0.031794757632.\,t$, $y^5 = 0.01007258.\,t$, inde fiet:

$$\begin{array}{rcl} y^5 & = & 0.0100726 \\ -11y^4 & = & -0.3497423 \\ 44y^3 & = & 4.4159385 \\ -77y^2 & = & -24.3936000 \\ 55y & = & 55.0000000 \\ -11 & = & \qquad -11 \end{array} \Bigg\} t$$

$$0 = \left.\begin{array}{r} 59.4260111 \\ -24.7433423 \end{array}\right\} t - 11, \text{ adeoque } t = \frac{11}{34.6826688} = 0.3172.$$

Sit

Sit ergo tandem $y = 0.3172$, erit $y = t$, $y^2 = 0.3172.t$, $y^3 = 0.100616.t$, $y^4 = 0.03191534.t$, $y^5 = 0.012354726.t$. fiat jam

$$\left.\begin{array}{rcl} y^5 & = & 0.0123547 \\ -11y^4 & = & -0.3510684 \\ 44y^3 & = & 4.4270963 \\ -77y^2 & = & -24.4244000 \\ 55y & = & 55.0000000 \end{array}\right\} t$$

$$\begin{array}{rcl} -11 & = & -11 \\ \hline 0. & = & \left.\begin{array}{l} 59.4394510 \\ 24.7754684 \end{array}\right\} t - 11 \\ \hline 11 & = & 34.6639826\,t, \text{ ergo } t = \dfrac{11}{34.6639826} = 0.3174. \end{array}$$

Hunc processum infinite continuare licet, ut claret. Ceterum praesentem casum hic desino, nec nisi valorem pro x addo, qui est $\sqrt{y} = \sqrt{(0.3174)} = 0.5634$.

Scholion XIX.

§. 91. Radix praesentis exempli unitate minor est, in aliis aequationibus radices prius minuendae sunt, ut fiant unitate minores, sic omnes casus similes fient exemplo nostro praesenti.

Scholion XX.

§ 92. Hactenus expedivi inventionem radicum possibilium: restat, ut etiam ostendam, quomodo detegantur radices aequales et impossibiles, h. e. imaginariae, prout supra (§. 83.) promisi. Huc faciet ergo sequens

Problema XIV.

§. 93. Invenire, utrum aequatio algebraica radices habeat aequales, impossibilesve.

Resolutio.

1) Si ultima aequationis cognita quantitas, vel ejusdem proxima in serie progressionis ad propositam aequationem pertinentis non invenitur, id argumento est, aequationem meras impossibiles continere radices, series enim progressionis omnes continet possibiles radices, si ergo in earum numero illa quantitas non sit, impossibilis sit oportet.

2) Si progressio tot radices non exhibeat, quot sua aequatio requirit, tum eas radices, quas exhibet series, subtrahe singulas á radice aequationis indeterminata, residua duc in se invicem, factum (quod nihilo aequale est) erit aequatio nova inferioris gradus. Per hanc aequationem novam divide propositam aequationem tam exacte, quam possibile est; quotiens erit nova aequatio, cujus progressio localis ostendit, utrum contineat radices impossibiles, an aequales radicibus primariae aequationis. Sunt autem hujus novae aequationis radices etiam radices primariae aequationis (est enim primaria aequatio factum ex hisce novis duabus aequationibus), ergo eae ostendunt, utrum primaria aequatio contineat radices impossibiles aequalesve. En exempla!

Sit $x^4 - 5x^3 + 17x^2 - 28x + 30 = 0$. Hujus aequationis differentiae originales sunt, $a = 24$, $b = -66$, $c = 78$, $d = 51$, $e = 0$.

Hinc

Hinc habetur progreſſio ſequens:

— 4	— 3	— 2	— 1	0	1	2	3	4	5
24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
— 162	— 138	— 114	— 90	— 66	— 42	— 18	6	30	54
468	348	243	144	78	36	18	24	54	108
	— 507	— 273	— 129	— 51	— 15	3	27	81	189
etc.	453	180	51	0	— 15	— 12	15	96	285

Quoniam in hac progreſſione nullus eſt terminus, qui vel aequalis ſit, vel propinquus ultimo aequationis termino, igitur omnes aequationis radices ſunt imaginariae.

Aliud Exemplum.

Sit data aequatio ſexanguli $= x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 4 = 0$. Hujus aequationis radices ſunt $+1$, $+2$, -1, -2; reſtant duae, (§. 84.) quaeritur num illae ſint imaginariae, num vero aequales ſint uni et alteri ex cognitis? Id ſic indagatur: ſit $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, $x + 1 = 0$, $x + 2 = 0$. Inde emergit aequatio (multiplicatis in ſe invicem hiſce quantitatibus) nova $= x^4 - 5x^2 + 4$, in hanc dividas primariam, erit quotiens $= x^2 - 1 = 0$, hujus radices ſunt $= + 1$ et $- 1$, unde patet, radices poſſibiles $+ 1$ et $- 1$ eſſe duplicandas.

Aliud Exemplum.

Sit $x^4 - 86x^2 + 600x - 851 = 0$, Differentiae originales ſunt: $a = 24$, $b = - 36$, $c = 158$, $d = 685$, $e = 0$.

β)	—7	—6	—5	—4	—3	—2	—1	0	α)
	24	24	24	24	24	24	24	24	
	—204	—180	—156	—132	—108	—84	—60	—36	
	598	418	262	130	22	—62	—122	—185	
	195	613	875	1005	1027	965	843	685	
	—6013	—5400	—4525	—3520	—2493	—1528	—685	0	

α)

α) 1	2	3	4		β) −12	−11	−10	−9	−8
24	24	24	24		24	24	24	24	24
−12	12	36	60		−324	300	−276	−252	−228
−170	158	−122	−62		−1858	1558	1282	1030	802
515	357	235	173		−5155	3597	−2315	−1285	−403
515	872	1107			−1392.	2205	−4520	−5805	−6208

Haec progressio duas tantum prodit radices possibiles, veram < 2 et > 1, falsam > 11 et < 12; vel, si curatius indagentur $1\frac{9}{10}$, et $-11\frac{9}{10}$. Sit igitur $x - 1.9 = 0$, et $x + 11.9 = 0$, erit eorum factum $= x^2 + 10x - 23$; per hanc divisa aequatio primaria dat quotientem $x^2 - 10x + 37 = 0$. Hujus aequationis originales differentiae sunt: $a = 2$, $b = -11$, $c = 0$; Hinc progressio fluit

2	2	2	$\overset{0}{2}$	2	2	2	2	2	2	2
−17	−15	−13	−11	−9	−7	−5	−3	−1	1	3
etc. 39	24	11	0	−9	−16	−21	−24	−25	−24	−21. etc.

Ex qua palam fit, radices reliquas esse imaginarias, nimirum (si indagentur more solito.) $5 + 2\sqrt{-3}$ et $5 - 2\sqrt{-3}$.

Scholion XXI.

§. 94. Equidem per progressiones locales radices imaginariae, quales sint, non inveniuntur; numerus earum et praesentia duntaxat reperitur. Sed parum id refert; namque Non-entium, ut sunt imaginariae radices, nullus est usus.

TANTUM.

GEORGII BERNHARDI BILFINGERI

QUONDAM GEOMETRA - PHILOSOPHI PER EUROPAM CELEBERRIMI

DE

PROGRESSIONIBUS LOCALIBUS
COMMENTATIO INEDITA.

QUAM

PRAEMISSA ILLUSTRIS AUCTORIS VITA

EDIDIT

JOHANNES CAROLUS FRIDERICUS HAUFF,

ARTIUM LIBERALIUM MAGISTER, PHILOSOPHIAE DOCTOR ET IN ACADEMIA MARBURGENSI MATHEMATUM AC PHYSICES LECTOR.

Gartz

Wr Re

Dignum Laude Virum Musa Vetat Mori.

LIPSIAE

1794.