CVRVARVM IMBRICATARVM

CONSIDERATIO ANALYTICA

7

AVCTORE

EBERHARDO AVGVSTO WILHELMO ZIMMERMANNO.

Gartz

Pre.

7

GOETTINGAE

TYPIS IOANNIS ALBERTI BARMEIERI

CIↃ IↃCC LXV.

ILLVSTRISSIMO DOMINO

DOMINO

GERLACO ADOLPHO

L. B.

DE MVNCHHAVSEN

DYNASTAE IN STRAVSFVRTH RELIQVA

AVGVSTISSIMI MAGNAE BRITANNIAE REGIS

A CONSILIIS INTIMIS

PRIMARIO STATVS ADMINISTRO

CAMERAE REGIAE PRAESIDI

ACADEMIAE GEORGIAE AVGVSTAE

CVRATORI MVNIFICENTISSIMO

MAECENATI INDVLGENTISSIMO

SALVTEM PERPETVAM

AVCTOR.

Regis et orbis amor: nostri sol splendide Pindi;
Pieridum columen, praesidiumque meum.
Exigui, quae iure TIBI debentur, agelli
Primitias facili suscipe, quaeso, manu.
Namque TVO foecundatus splendore virescit,
Donaque fert gratus qualiacunque potest.

Nec

Nec matura ſatis, nec ſunt TE munera digna:
Sunt, fateor, terrae qualia prima ſolent.
Sed radiis porro ſi me dignabere blandis
Colluſtrare TVIS, vberiora feram.
TV, precor, interſis multos fauſtiſſimus annos
Et populo et Muſis, queis TVA vita ſalus.

Ex

E x quo elaboratissimum illud Cl. FREZIERII opus, quod in scribitur: *la Theorie et Pratique de la Coupe des Pierres et des Bois*, inspicere, atque in methodum, qua vtitur, syntheticam inquirere mihi licuit: semper ego quidem in votis habui, vt multo labore studioque conscriptus hic liber analytica se commendaret methodo, eaque de causa maiorem sibi legentium numerum conciliaret. Etsi enim egregii huius auctor operis, quantum fieri potest, lectorum se captui accommodauit: nemo tamen, vt opinor, analysin, qua motu quasi accelerato omnia deteguntur, ſyntheſi, quae facilem quidem, nimis vero longam veritatis inueſtigandae viam nobis aperit, longe eſſe anteponendam, inficias ibit. Praeterea FREZIERII tractatus materias ſyntheticae methodi disquirit difficillimas, atque curuas, quas analyſis ſat faciles cognitu reddit, tanto ſtudio artificioque explicat, vt, quibus lucem adfundere voluit, ea obſcuriora videantur. Videas, quaeſo, curuae definitionem, quam *circulum imbricatum* vocant, et ne nimis taxare auctorem videar, ipſa eius verba vna cum figura, adiungam:

Si par les extremites ST, du diametre d'un cercle SATB on fait paſſer une ligne courbe plane ScT, dont l'axe ſoit Cc, ſuivant laquelle les ordonnées à ce diametre ST s'abaiſſent ou s'elevent paralelement à celles mémes d'un mouvement uniforme, en ſorte que leur milieu ſoit toujours dans le plan STc, la courbe SaTb,

Fig. 1.

SaTb, qui terminera la surface creuse, qu'elles auront formé par cette arrangement, s'appellera un cicloïmbre, *par abbreviation de l'expression latine*, circulus imbricatus, *cercle en facon de tuile creuse*.

His ergo paucis plagulis nihil aliter agere volui, quam vt, hancce curuam considerando, demonstrarem, quantum egregio huic operi vtilitatis analysis, breuitatis studiosa, adferret. Credas vero nolim, B. L. me, qui tenuitatis meae omnium optime conscius sum, tantae esse temeritatis, vt in acutissimi ingenii virum insurgere videar. Quicquid enim hae plagulae, quae alia tantummodo breuiorique vtuntur methodo, in se continent, illud me fere omne auctori debere, scito. Vale, et qualibuscunque meis conatibus faue.

DEFINITIO.

Per diametrum TS ſemicirculi TAHS tranſeat planum, plano ſemicirculi rectum. In hoc plano recto deſcripta ſit curua TcS, ſecans circulum in extremis T et S diametri; dicatur vero Cc per centrum circuli, plano eius recta, *axis curuae.* Sit porro Hh ordinata ſemicirculi, abſciſſa e centro vero Ch, per cuius extremum h in plano curuae, ducatur axi parallela hK, occurrens curuae in K; huic parallela et aequalis ducatur HZ, erit Z punctum in curua, quam *circulum imbricatum* dicunt.

Fig. 2.

COROLLARIVM I.

Facile patet, quum ſemicirculus TAS, ſemicirculo ad alteras partes plani per TS circulo recti poſito, ſit aequalis atque ſimilis, perpendicula quae Z definiunt in vtroque ſemicirculo eſſe aequalia atque ſimiliter

militer posita, ita vt si descripseris curuae partem ad vnum latus huius plani, similis et aequalis pars sita sit ad latus oppositum.

Coroll. II.

Semper vero haecce curua in superficie cylindri recti erit, cum lineae HZ perpendiculariter insistant plano circuli super eius peripheria, ita vt si HZ sibi quam proxima sumantur, includent partem cylindri recti.

Problema I.

Data aequatione pro curua TcS construere curuam quae sit locus puncti Z.

Solvtio.

Dicatur ergo $Ch = x$, $hH = y$, $HZ = z$, radius circuli $= r$, est vero aequatio pro circulo abscissis a centro sumtis $y^2 = r^2 - x^2$. Porro, sit KL perpendicularis axi curuae, eius adplicata, ergo sumi poterunt cL et

KL pro coordinatis curuae, quarum relatio datur. Eſt vero cC pars axis, conſtans data, quae dicatur b, itaque z, vel $HZ = Kh = LC = b - cL$, et ex curua datur aequatio inter cL et LK, hoc eſt, ob $LK = Ch$, inter cL et x, hoc eſt, inter $b - z$ et x. Sumto ergo x pro lubitu, datur ei reſpondens y ex natura circuli, et ſic H punctum, ſuper quo erigitur z, datum per idem x ex aequatione modo reperta.

Exemplvm I.

Inſiſtat igitur primo, circulo parabola, habebimus ex natura huius curuae $Cc = b$ parametrum $= \frac{CS^2}{a} = \frac{r^2}{a}$, a dimidium parametri notante; et porro $KL^2 = a . cL$, hinc $x^2 = a(b - z) = ab - az = r^2 - az$; comparatis ergo his duabus aequationibus $y^2 = r^2 - x^2$, et $x^2 = r^2 - az$, prodit $r^2 - y^2 = r^2 - az$, atque inde $y^2 = az$ et

$$z = \frac{r^2 - x^2}{a}$$

Con-

Consideremus nunc diuersa huius curuae puncta, quod fit vbi pro x et ei respondente y diuersos surrogamus valores; sit igitur primo $x = 0$, hoc est, euanescat Ch, erit

$$y = r = CA, \text{ et } z = \frac{r^2}{a} = b = cC,$$

igitur perpendiculum z denotans, erit altitudinis b vel partis constantis axis parabolae. Sit porro $x = r = CS$, quod dat y vel $Hh = 0$, inde etiam $z = \frac{r^2 - x^2}{a} = 0$, id quod indicat punctum curuae in hocce casu in S cadere debere, cum hic nec ordinata nec abscissa nec z alicuius magnitudinis detur; sit $y = \sqrt{a}$, erit $z = \frac{a}{a} = 1$; id quod locum habet, si rectae numeris exprimuntur; ita si pro a adsumeres 4 ped. daret altitudinem z esse vnius pedis.

Coroll. I.

Circulus imbricatus minime in infinitum excurret, etenim crescente z, decrescit

ſcit x, ita maximo z minimum reſpondet x, igitur ſummus valor ipſius z prodibit euaneſcente x, tunc vero habebimus $z = \frac{r^2}{a}$, inde patet valorem ipſius z ſemper finitum manſurum eſſe.

Coroll. II.

Valor ipſius z nunquam erit negatiuus quia nunquam fit $x > r$; igitur nulla circuli imbricati puncta iacent ad oppoſitas plani circularis partes. Idem iam ex conſtructione patet; namque ipſi ZH ad alteras partes circularis plani productae, reſpondet eadem Hh, et huic eadem hK, adeoque vnum punctum K cum recta axi parabolae parallela, parabolam ſaltim in vno puncto ſecet.

Coroll. III.

Per centrum circuli ſit diameter ipſi ST perpendicularis, huic inſiſtat planum circulo rectum, quod ſimul rectum erit

plano

plano S c T. Iam cum ad vtrasque partes huius plani circulo et S c T plano recti omnia eadem sint, etiam ab eo diuidetur circulus imbricatus in duas partes similes et aequales.

Coroll. IIII.

Dantur igitur quatuor anguli solidi aequales, quorum quilibet continetur, duobus planis rectis def. et cor. 3. et plano circuli, et intra quem vis horum angulorum solidorum cadit pars circuli imbricati similis et aequalis parti, quae cadit intra alium angulum, vt et haec tria plana quaquauersum producta diuidant circulum imbricatum in quatuor quadrantes similes et aequales.

Exemplvm II.

Ponamus nunc, loco parabolae, ellipsin cuius axis minor sit $= 2r$, dimidium axis maioris $= \frac{1}{2}a = cC$, $LK = y$ ordinata

nata ellipſeos, cujus abſciſſa eſt cL et p parameter dicatur; ergo ex natura ellipſeos

$$LK^2 = p.cL - \frac{p.cL^2}{a}$$

eſt vero ex conſtructione

$$cL = \tfrac{1}{2}a - z, \text{ et } LK = Ch$$

hinc $a.LK^2 = a.p.cL - p.cL^2$, inde vero

$$cL^2 = a.cL - \frac{ax^2}{p}$$

$$cL = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}a^2 - \frac{ax^2}{p}\right)}$$

igitur $\tfrac{1}{2}a - z = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}a^2 - \frac{ax^2}{p}\right)}$

hinc $z = \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}a^2 - \frac{ax^2}{p}\right)}$

ſcribatur nunc pro x^2 valor, quem in circuli aequatione habet nempe $r^2 - y^2$, prodibit

$$z = \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}a^2 - \frac{a}{p}.(r^2 - y^2)\right)} \text{ ergo}$$

habebimus $z^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - \frac{ar^2}{p} + \frac{ay^2}{p}$, *p* vero erit $= \sqrt{a \, . \, 2r}$ vel media proportionalis inter axin maiorem atque minorem vel hic diametrum circuli. Illato igitur hocce valore parametri in aequationem praecedentem prodit

$p = \frac{4r^2}{a}$

$$z^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - \frac{ar^2}{\sqrt{2ar}} + \frac{ay^2}{\sqrt{2ar}}$$

$z^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{ax^2}{p}$
$= \frac{1}{4}a^2 - \frac{a}{4}$
$= \frac{1}{4}\frac{a^2y^2}{r^2}$
$z = \frac{ay}{2r}$

Quodsi nunc ponemus $y = 0$, euanescet vltimus terminus et prodibit

$$z^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - \frac{ar^2}{\sqrt{2ar}} = a . \left(\tfrac{1}{4}a - \frac{r^2}{\sqrt{2ar}}\right)$$

$$= \left(\frac{a\sqrt{2ar} - 4r^2}{4\sqrt{2ar}}\right)a,$$ is valor positiuus erit et adeo z possibile pro $y = 0$, si $4r^2 < a\sqrt{2ar}$, seu $16r^4 < 2a^3r$, seu $8r^3 < a^3$, seu $2r < a$.

Igitur cum $2r$ seu ST sit axis minor ellipseos, dabitur z pro $y = 0$, seu datur pun-

z=0
pro y=0

ctum curuae imbricatae directe imminens puncto S ſuper quod eleuatur diſtantia

$$\sqrt{\left(a.\left(\tfrac{1}{4}a-\frac{r^2}{\sqrt{2ar}}\right)\right)}$$

ſi $x=o$, $z=\frac{1}{2}a$ in qua diſtantia $=Cc$ punctum curuae imbricatae reſpondens $y=r$ eleuatur ſuper A puncto.

COROLL. I.

Ex valore $z^2=\frac{1}{4}a^2-\frac{ax^2}{p}$ ſequitur, vt z decreſcat, creſcente x; igitur duorum modo repertorum z primum eſt minimum, alterum maximum.

z=0

COROLL. II.

Si in valore ipſius z, prouti per x datur, adhibeatur ſignum ſuperius ex

$$z=+\sqrt{\left(\frac{a^2}{4}-\frac{ax^2}{p}\right)}$$ ſequitur,

vt

vt cuiuis x respondeant tot z, quot definit valor adsumtus ipsius x. Iam quodlibet x, et ei oppositum negatiuum dant eundem valorem x^2; igitur dantur duo z pro quolibet x, sumto eius valore tam positiuo quam negatiuo, hoc est, ad vtrasque partes puncti C.

COROLL. III.

Rursus valori positiuo ipsius x respondent duo y opposita et aequalia, et valori eiusdem x negatiuo rursus duo y etiam opposita, caeterum inter se et prioribus aequalia.

COROLL. IIII.

Ex aequatione quae z per y exprimit

$$z = \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}a^2 + a.\left(\frac{y^2 - r^2}{\sqrt{2ar}}\right)\right)}$$

 se-

ſequitur, adhibendo ſignum ſuperius, variari z poſitiuum variato y^2. Igitur cum illa quatuor y, quae dixi, reſpondere duobus x oppoſitis ſingula dent y^2 idem, dabunt z magnitudine idem. Ita habentur quatuor z poſitiua aequalia, quorum ſi primum reſpondeat H puncto et capiatur a puncto C verſus T abſciſſa circuli = C h; ducaturque y ei reſpondens, dabit haec ordinata in quadrante A T punctum cui reſpondet ſecundum z. Ordinatae vero circuli, punctis diametri, h, et ei oppoſito reſpondentes, in ſemicirculo oppoſito ſimiliter dabunt duo puncta, quibus rurſus duo z reliqua reſpondent.

Coroll. V.

Patet vero haec ſingula quatuor z pertinere

tinere ad puncta quatuor quadrantum circuli similiter posita; sic vt horum punctorum quodlibet a circuli diametro ipsi S T perpendiculari distet arcu = A H; igitur cum et z sint aequalia, patet, quae portio curuae imminet quadranti A S, ei aequales et similes imminere tribus reliquis quadrantibus.

Coroll. VI.

Rursus cum adhibito in valoribus ipsius z, signo inferiore, cuiuis z detur oppositum, caeterum aequale, patet quae supra planum circuli contingere dixi locum etiam omnino eodem modo infra illud habere, sicque si cogitetur circulus integer atque ellipsis integra, existere octo octantes curuae imbricatae similes et aequales, quorum quatuor cadunt ſupra circulum, quilibet inter tria plana; circuli, ellipſis et tertium per c C A tranſiens circulo et ellipſi rectum; reliqui quatuor infra circuli planum eodem modo.

Coroll. VII.

Haec, quae ex aequatione deducere volui, vt calculi ad figuras curuarum imbricatarum definiendas vſus oſtenderem, facile ex conſtructione intelliguntur, cum tam ellipſis quam circulus habeant quadrantes ſimiles et ſimiliter poſitos.

Coroll. VIII.

Si loco circuli iacentis ſumatur ellipſis, cuius axis maior = S T = 2 r = axi minori ellipſeos inſiſtentis, minor vero eius axis

axis $= 2e$, parameter $= q$, reliqua omnia vt ante; erit vt ante

$$z = \pm\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}a^2 - \frac{ax^2}{p}\right)} \text{ vbi } p = \sqrt{2ra}.$$

Pro ellipsi iacente vero, vbi abscissae a centro sumuntur $y^2 = e^2 - \frac{e^2x^2}{r^2}$, ita pro quouis adsumto x, dantur ei respondentes y et z adeoque locus Z puncti, qui dicitur *Ellipsis imbricata.* Et facile exprimitur z per y, posito in valore ipsius z primo reperto, loco x^2, valorem eius in y expressum quem praebet aequatio pro ellipsi iacente. Sed hoc nullius fere vsus erit, cum valor ipsius z ita maius compositus sit proditurus.

Coroll. VIIII.

Cum ellipsis iacens aeque in quatuor

quadrantes sibi congruentes diuidatur vti ante circulus, corollaria de octo partibus similibus et aequalibus circuli imbricati, etiam hic locum habent in ellipsi imbricata.

Problema II.

Reperire partem superficiei cylindri recti a circulo imbricato resectam.

Solvtio.

Elementum huius partis est, rectangulum contentum sub ordinata z et elemento peripheriae circularis illi respondente, quod elementum potest considerari vti differentiale arcus AH, cuius sinus est x, cosinus y ad radium r; est ergo hoc differentiale $= \frac{r\,dx}{y}$, vnde elementum superficiei, quae quaeritur $= \frac{rz\,dx}{y}$.

EXEMPLVM.

Pro parabola $z = \frac{y^2}{a}$, est ergo elementum $= \frac{r y d x}{a}$, adeoque integrale $= Const. + \frac{r}{a} . \int y d x$. Si ponatur $\int y d x$, euanescere ad $x = 0$, erit $\int y d x =$ segmento circuli CAHh, quod, si dicatur S; integrale erit $Const. + \frac{r}{a} . S$.

Si hoc integrale ponatur euanescere ad $x = 0$, erit $Const. = 0$, adeoque integrale quaesitum $= \frac{r}{a} . S$.

Portio igitur superficiei cylindricae resecta toto quadrante circuli imbricati habetur ponendo $x = r$, vbi S fit quarta pars superficiei circularis. Sit $1 : \pi$ ratio diametri ad peripheriam, adeoque area circuli $= r^2 \pi$; erit pro $x = r$, $S = \frac{r^2 \pi}{4}$

COROL-

Corollarivm.

Igitur quatuor partes ſuperficiei cylindricae reſectae quatuor quadrantibus circuli imbricati, iunctim ſumtae, aequantur ſuperficiei circuli cui curua haec inſiſtit.

$\frac{r}{a}\cdot S = \frac{\pi r^3}{4a}$ $\frac{\pi r^3}{a}$

Scholion I.

Cum aeque concinnae proprietates huius ſuperficiei in reliquis exemplis, quae ex antecedentibus huc transferri poſſunt, locum non habeant, calculo prolixiori, quo illa exempla opus haberent, quum in disquiſitione vſum praeterea nullum praebeant, his ſuperſedeo.

Schol. II.

Fig. 1. Diameter circuli, generatoris (iacen-

tis) vel axis ellipſeos iacentis, tranſiens per puncta S, T, Frezierio adpellatur *axis ſubtendens*; curua autem ScT, quae in eodem cum hac linea plano iacet, nominatur *axis curuus*; linea, quae reſpondet diametro axi ſubtendenti perpendiculari *axis rectus*; linea recta Cc *axis altitudinis vel profunditatis.* Rectae per hunc axem tranſeuntes nominantur diametri.

Schol. III.

Eſt vero tam circuli imbricati, quam ellipſeos imbricatae varius in architectura vſus; quodſi enim analyſi demonſtratio harum curuarum facilitetur, clare patet, theoremata Frezierii Lib. I. Theor. X. et ſeq. magis captui accommodari. Occurrit

currit vero ellipsis imbricata, vbi, fene-
stris arcuatis, fornices perforantur, vt
Romae in foramine, quod lumen superne
in Pantheon admittit; porro etiam vbi tur-
ris intrat fornicem vel cameram sphaeri-
cam. Hic vbique superficies curuae se-
ctionibus suis eiusmodi lineas curuas
efficiunt.

7

CVRVARVM
MBRICATARVM
ONSIDERATIO ANALYTICA

AVCTORE
ERHARDO AVGVSTO WILHELMO
ZIMMERMANNO.

Gartz
Pre.

7

GOETTINGAE
TYPIS IOANNIS ALBERTI BARMEIERI
CIↃ IↃCC LXV.