



f. 360^a.
Q.





94A 7330

AK



3

7
CVRVARVM
IMBRICATARVM

CONSIDERATIO ANALYTICA

AVCTORE

EBERHARDO AVGVSTO WILHELMO
ZIMMERMANNO.



*Gartz
re.*

7

GOETTINGAE

TYPIS IOANNIS ALBERTI BARMEIERI
C1810CCLXV.

MVAVAVAV
MVRICATAVAV
CONSIDERATIO ANALYTICA

AVGUSTO
BERNARDO AVGVSTO WILHELMO
ZIMMERMANNO.



GOETTINGAE
LUDWIGI JOHANNIS ALBERTI ZIMMERMANNI
CURIOSITATE

II
GE
D
DYN
AVG
PRIN
C
CV
MA



ILLVSTRISSIMO DOMINO
DOMINO
GERLACO ADOLPHO
L. B.
DE MÜNCHHAVSEN

DYNASTAE IN STRAVSFVRTH RELIQUA
AVGVSTISSIMI MAGNAE BRITANNIAE REGIS
A CONSILII INTIMIS
PRIMARIO STATVS ADMINISTRO
CAMERAE REGIAE PRAESIDI
ACADEMIAE GEORGIAE AVGVSTAE
CVRATORI MVNIFICENTISSIMO
MAECENATI INDVLGENTISSIMO

SALVTEM PERPETVAM

AVCTOR.

ILLVSTRISSIMO DOMINO
DOMINO
GERLACO ADOLPHO
L. B.
DE MÜNCHHAVSEN
TYNASTAE IN STRAVSVRTH REGNA
AVGVSTISSIMI MAGNAE BRITANNIAE REGIS
A CONSILII INTIMIS
PRIMARIO STATVS ADMINISTRATO
CAMERAE REGIAE PRAESIDI
ACADEMIAE GEORGIAE AVGVSTAE
CARATORI MANIFICENTISSIMO
MAGNANIMI INDVLGENTISSIMO
SALVTI PERPETVAM

ACTORI



Regis et orbis amor : nostri sol
splendide Pindi ;
Pieridum columen , praesidium-
que meum.

Exigui , quae iure TIBI debentur ,
Primitias facili suscipe , quae-
so , manu.

Namque TVO foecundatus splendo-
re virescit ,

Donaque fert gratus qualiacun-
que potest.

Nec

Nec matura satis, nec sunt TE mu-
nera digna:

Sunt, fateor, terrae qualia pri-
ma solent.

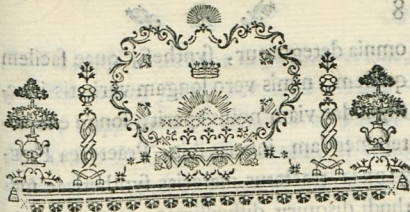
Sed radiis porro si me dignabere

Collustrare TVIS, uberiora

TV, precor, intersis multos faustif-
simus annos

Et populo et Musis, queis TVA

vita salus,



Ex quo elaboratissimum illud Cl.
 FREZIERII opus, quod in scri-
 bitur: *la Theorie et Pratique*
de la Coupe des Pierres et des Bois, inspi-
 cere, atque in methodum, qua vitur, syn-
 theticam inquirere mihi licuit: semper ego
 quidem in votis habui, vt multo labore
 studioque conscriptus hic liber analytica se
 commendaret methodo, eaque de causa
 maiorem sibi legentium numerum concilia-
 ret. Etsi enim egregii huius auctor ope-
 ris, quantum fieri potest, lectorum se ca-
 ptui accommodauit: nemo tamen, vt opi-
 nor, analysin, qua motu quasi accelerato
 A 4 omnia



omnia deteguntur, synthefi, quae facilem quidem, nimis vero longam veritatis inueftigandae viam nobis aperit, longe eſſe anteponendam, inficias ibit. Praeterea FREZIERII tractatus materias ſyntheticae methodi diſquirit difficillimas, atque curuas, quas analyſis ſat faciles cognitu reddit, tanto ſtudio artificioque explicat, vt, quibus lucem adfundere voluit, ea obſcuriora videantur. Videas, quaefo, curuae definitionem, quam *circulum imbricatum* vocant, et ne nimis taxare auctorem videar, ipſa eius verba vna cum figura, adiungam :

Fig. 1. *Si par les extremités ST, du diamètre d'un cercle SATB on fait paſſer une ligne courbe plane ScT, dont l'axe ſoit Cc, ſuivant laquelle les ordonnées à ce diamètre ST ſ'abaiffent ou ſ'eleuent paralelement à celles mêmes d'un mouvement uniforme, en ſorte que leur milieu ſoit toujours dans le plan STc, la courbe*

sinuo

A

SaTh,



Sa Tb, qui terminera la surface creuse, qu'elles auront formé par cette arrangement, s'appellera un cicloombre, par abbreviation de l'expression latine, circulus imbricatus, cercle en facon de tuile creuse.

His ergo paucis plagulis nihil aliter agere volui, quam vt, hancce curuam considerando, demonstrarem, quantum egregio huic operi vtilitatis analysis, breuitatis studiosa, adferret. Credas vero nolim, B. L. me, qui tenuitatis meae omnium optime conscius sum, tantae esse temeritatis, vt in acutissimi ingenii virum insurgere videar. Quicquid enim hae plagulae, quae alia tantummodo breuiorique vtuntur methodo, in se continent, illud me fere omne auctori debere, scito. Vale, et qualibuscunque meis conatibus faue.

DEFINITIO.

Per diametrum TS semicirculi $TAHS$ transeat planum, plano semicirculi rectum. In hoc plano recto descripta sit Fig. 2. curva TcS , secans circulum in extremis T et S diametri; dicatur vero Cc per centrum circuli, plano eius recta, *axis curvae*. Sit porro Hh ordinata semicirculi, abscissa e centro vero Ch , per cuius extremum h in plano curvae, ducatur axi parallela hK , occurrens curvae in K ; huic parallela et aequalis ducatur HZ , erit Z punctum in curua, quam *circulum imbricatum* dicunt.

COROLLARIUM I.

Facile patet, quum semicirculus TAS , semicirculo ad alteras partes plani per TS circulo recti posito, sit aequalis atque similis, perpendiculara quae Z definiunt in utroque semicirculo esse aequalia atque similiter

militer posita, ita ut si describeris curvae
partem ad unum latus huius plani, similis
et aequalis pars sita sit ad latus oppositum,

COROLL. II.

Semper vero haecce curva in superfi-
cie cylindri recti erit, cum lineae HZ per-
pendiculariter insistant plano circuli super-
eius peripheria, ita ut si HZ sibi quam
proxima sumantur, includent partem cy-
lindri recti.

PROBLEMA I.

Data aequatione pro curva T c S con-
struere curvam quae sit locus puncti Z.

SOLVTIO.

Dicatur ergo $Ch = x$, $hH = y$, $HZ = z$,
radius circuli $= r$, est vero aequatio pro
circulo abscissis a centro sumtis $y^2 = r^2 - x^2$.

Porro, sit KL perpendicularis axi curvae,
eius adplicata, ergo sumi poterunt cL et

KL

KL pro coordinatis curvae, quarum relatio datur. Est vero cC pars axis, constans data, quae dicatur b , itaque z , vel $HZ = Kh = LC = b - cL$, et ex curva datur aequatio inter cL et LK , hoc est, ob $LK = Ch$, inter cL et x , hoc est, inter $b - z$ et x . Sumto ergo x pro luto, datur ei respondens y ex natura circuli, et sic H punctum, super quo erigitur z , datum per idem x ex aequatione modo reperta.

EXEMPLVM I.

Insistat igitur primo, circulo parabola, habebimus ex natura huius curvae $Cc = b$
 $\overset{\text{parametrum}}{=} \frac{CS^2}{a} = \frac{r^2}{a}$, a dimidium parametri notante; et porro $KL = a \cdot cL$, hinc $x^2 = a(b - z) = ab - az = r^2 - az$; comparatis ergo his duabus aequationibus $y^2 = r^2 - x^2$, et $x^2 = r^2 - az$, prodit $r^2 - y^2 = r^2 - az$, atque inde $y^2 = az$ et $z = \frac{r^2 - x^2}{a}$

Con-



Consideremus nunc diuersa huius curuae puncta, quod fit vbi pro x et ei respondente y diuersos surrogamus valores; fit igitur primo $x = 0$, hoc est, euaneſcat Ch, erit

$$y = r = CA, \text{ et } z = \frac{r^2}{a} = b = cC,$$

igitur perpendicularum z denotans, erit altitudinis b vel partis constantis axis parabolae. Sit porro $x = r = CS$, quod dat y vel $Hh = 0$, inde etiam $z = \frac{r^2 - x^2}{a} = 0$, id quod indicat punctum curuae in hocce casu in S cadere debere, cum hic nec ordinata nec abscissa nec z alicuius magnitudinis detur; fit $y = \sqrt{a}$, erit $z = \frac{a}{a} = 1$; id quod locum habet, si rectae numeris exprimuntur; ita si pro a adsumeres 4 ped. daret altitudinem z esse vnus pedis.

COROLL. I.

Circulus imbricatus minime in infinitum excurret, etenim crescente z , decre-

scit



scit x , ita maximo z minimum responder
 x , igitur summus valor ipsius z prodit
 bit euanescente x , tunc vero habebimus
 $z = \frac{r^2}{a}$, inde patet valorem ipsius z sem-
 per finitum mansurum esse.

COROLL. II.

Valor ipsius z nunquam erit negati-
 uus quia nunquam fit $x > r$; igitur nulla
 circuli imbricati puncta iacent ad oppositas
 plani circularis partes. Idem iam ex con-
 structione patet; namque ipsi ZH ad alte-
 ras partes circularis plani productae, re-
 sponder eadem Hh , et huic eadem hK ,
 adeoque vnum punctum K cum recta axi
 parabolae parallela, parabolam saltim in
 vno puncto secet.

COROLL. III.

Per centrum circuli fit diameter ipsi
 ST perpendicularis, huic insitat planum
 circulo rectum, quod simul rectum erit
 plano



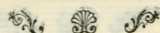
plano S c T. Iam cum ad utrasque partes huius plani circulo et S c T plano recti omnia eadem sint, etiam ab eo diuidetur circulus imbricatus in duas partes similes et aequales.

COROLL. III.

Dantur igitur quatuor anguli solidi aequales, quorum quilibet continetur, duobus planis rectis def. et cor. 3. et plano circuli, et intra quem vis horum angulorum solidorum cadit pars circuli imbricati similis et aequalis parti, quae cadit intra alium angulum, ut et haec tria plana quaquauerfum producta diuidant circulum imbricatum in quatuor quadrantes similes et aequales.

EXEMPLVM II.

Ponamus nunc, loco parabolae, ellipsin cuius axis minor sit $= 2r$, dimidium axis maioris $= \frac{1}{2}a = cC$, $LK = y$ ordinata



nata ellipse, cujus abscissa est cL et p
parameter dicatur; ergo ex natura ellip-
seos

$$LK^2 = p \cdot cL - \frac{p \cdot cL^2}{a}$$

est vero ex constructione

$$cL = \frac{1}{2}a - z, \text{ et } LK = Ch$$

hinc $a \cdot LK^2 = a \cdot p \cdot cL - p \cdot cL^2$, inde vero

$$cL^2 = a \cdot cL - \frac{ax^2}{p}$$

$$cL = \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{ax^2}{p}\right)}$$

$$\text{igitur } \frac{1}{2}a - z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{ax^2}{p}\right)}$$

$$\text{hinc } z = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{ax^2}{p}\right)}$$

scribatur nunc pro x^2 valor, quem in cir-
culi aequatione habet nempe $r^2 - y^2$,
prodibit

$$z = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{a}{p} \cdot (r^2 - y^2)\right)}$$

$$\text{habebimus } z^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{ar^2}{p} + \frac{ay^2}{p}$$

p ve.



p vero erit $\equiv \sqrt{a \cdot 2r}$ vel media
 proportionalis inter axin maiorem, atque
 minorem vel hic diametrum circuli. Illato
 igitur hocce valore parametri in aequatio-
 nem praecedentem prodit $\equiv z, y = 0$

$$p = \frac{4r^2}{a}$$

$$z^2 = \frac{x}{4} a^2 - ar^2 + ay^2$$

Quodsi nunc ponemus $y = 0$, evanescet
 vltimus terminus et prodibit

$$z^2 = \frac{x}{4} a^2 - ar^2 = a \cdot \left(\frac{x}{4} a - r^2 \right)$$

$$= \frac{a \sqrt{2ar} - 4r^2}{4 \sqrt{2ar}}, \text{ is valor positivus}$$

erit et adeo z possibile pro $y = 0$, si $4r^2$
 $< a \sqrt{2ar}$, seu $16r^4 < 2a^3r$, seu $8r^3 < a^3$,
 seu $2r < a$.

Igitur cum $2r$ seu ST sit axis minor ellip-
 seos, dabitur z pro $y = 0$, seu datur pun-

B

Etum



Etum curvae imbricatae directe imminens
 puncto S super quod eleuatur distantia

$z=0$
 $xy=0$

$$\sqrt{\left(a \cdot \left(\frac{1}{4}a - \frac{r^2}{\sqrt{2ar}}\right)\right)}$$

fi $x=0$, $z=\frac{1}{2}a$ in qua distantia = C c
 punctum curuae imbricatae respondens
 $y=r$ eleuatur super A puncto.

COROLL. I.

Ex valore $z^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{ax^2}{p}$ sequitur,
 vt z decreseat, crescente x ; igitur duo-
 rum modo reperorum z primum est mi-
 nimum, alterum maximum.

$z=0$

COROLL. II.

Si in valore ipsius z , prouti per x da-
 tur, adhibeatur signum superius ex

$$z = +\sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - \frac{ax^2}{p}\right)}$$

vt



vt cuius x respondeant tot z , quot definit valor adsumtus ipsius x . Iam quodlibet x , et ei oppositum negatiuum dant eundem valorem x^2 ; igitur dantur duo z pro quolibet x , sumto eius valore tam positivo quam negatiuo, hoc est, ad utrasque partes puncti C.

COROLL. III.

Rursus valori positivo ipsius x respondent duo y opposita et aequalia, et valori eiusdem x negatiuo rursus duo y etiam opposita, caeterum inter se et prioribus aequalia.

COROLL. IIII.

Ex aequatione quae z per y exprimit

$$z = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + a \cdot \frac{(y^2 - r^2)}{\sqrt{2ar}}\right)}$$

B 2

fe.



sequitur, adhibendo signum superius, variari & positivum variato y^2 . Igitur cum illa quatuor y , quae dixi, respondere duobus x oppositis singula dent y^2 idem, dabunt & magnitudine idem. Ita habentur quatuor & positiva aequalia, quorum si primum respondeat H puncto et capiatur a puncto C versus T abscissa circuli = Ch ; ducaturque y ei respondens, dabit haec ordinata in quadrante AT punctum cui respondet secundum z . Ordinatae vero circuli, punctis diametri, h , et ei opposito respondententes, in semicirculo opposito similiter dabunt duo puncta, quibus rursus duo & reliqua respondent.

COROLL. V.

Patet vero haec singula quatuor & pertinere



tinere ad puncta quatuor quadrantum circuli similiter posita; sic ut horum punctorum quodlibet a circuli diametro ipsi ST perpendiculari distet arcu = AH; igitur cum et α sint aequalia, patet, quae portio curvae imminet quadranti AS, ei aequales et similes imminere tribus reliquis quadrantibus.

COROLL. VI.

Rursus cum adhibito in valoribus ipsius α , signo inferiore, cuius α detur oppositum, caeterum aequale, patet quae supra planum circuli contingere dixi locum etiam omnino eodem modo infra illud habere, sicque si cogitetur circulus integer atque ellipsis integra, existere octo octantes curvae imbricatae similes et aequales, quo-



rum quatuor cadunt supra circulum, quilibet inter tria plana; circuli, ellipsis et tertium per cCA transiens circulo et ellipsi rectum; reliqui quatuor infra circuli planum eodem modo.

COROLL. VII.

Haec, quae ex aequatione deducere volui, ut calculi ad figuras curvarum imbricatarum definiendas usus ostenderem, facile ex constructione intelliguntur, cum tam ellipsis quam circulus habeant quadrantes similes et similiter positos.

COROLL. VIII.

Si loco circuli iacentis sumatur ellipsis, cuius axis maior $= ST = 2r =$ axis minori ellipseos insistentis, minor vero eius

axis



axis $= 2e$, parameter $= q$, reliqua
omnia vt ante; erit vt ante,

$$z = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - ax^2\right)} \text{ vbi } p = \sqrt{2ra}.$$

Pro ellipfi iacente vero, vbi absciffae a
centro fumuntur $y^2 = e^2 - e^2 x^2$, ita
pro quouis adsumto x , dantur ei respon-
dentes y et z adeoque locus Z puncti, qui
dicitur *Ellipsis imbricata*. Et facile ex-
primitur z per y , pofito in valore ipfius z
primo reperto, loco x^2 , valorem eius in
 y expreffum quem praebet aequatio pro
ellipfi iacente. Sed hoc nullius fere vfus
erit, cum valor ipfius z ita maius compo-
fitus fit proditurus.

COROLL. VIII.

Cum ellipsis iacens aequae in quatuor

B 4

qua-



quadrantes, sibi congruentes, diuidatur uti
ante circulus, corollaria de octo partibus
similibus et aequalibus circuli imbricati,
etiam hic locum habent in ellipsi imbricata.

PROBLEMA II.

Reperire partem superficiei cylindri
recti a circulo imbricato resectam.

SOLVTIO.

Elementum huius partis est, rectan-
gulum contentum sub ordinata z et ele-
mento peripheriae circularis illi responden-
te; quod elementum potest considerari
uti differentiale arcus AH , cuius sinus est
 x , cofinus y ad radium r ; est ergo hoc
differentiale $= r dx$, unde elementum

superficiei, quae quaeritur $= \frac{r z dx}{y}$.

EXEM.



EXEMPLVM.

Pro parabola $z = y^2$, est ergo elementum $= r y dx$, adeoque integrale $=$

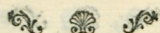
$= Const. + \frac{r}{a} \int y dx$. Si ponatur $\int y dx$

evanescere ad $x = 0$, erit $\int y dx =$ segmento circuli CAHh, quod, si dicatur S; integrale erit $Const. + \frac{r}{a} \cdot S$.

Si hoc integrale ponatur evanescere ad $x = 0$, erit $Const. = 0$, adeoque integrale quaesitum $= \frac{r}{a} \cdot S$.

Portio igitur superficiei cylindricae resecta toto quadrante circuli imbricati habetur ponendo $x = r$, vbi S fit quarta pars superficiei circularis. Sit $r \cdot \pi$ ratio diametri ad peripheriam, adeoque area circuli $= r^2 \pi$; erit pro $x = r$, $S = \frac{r^2 \pi}{4}$.

COROL.



COROLLARIUM.

$\frac{c \cdot s}{a} = \frac{\pi r^2}{4a}$
 Igitur quatuor partes superficiei cylindricae resectae quatuor quadrantibus circuli imbricati, iunctim sumtae, aequantur superficiei circuli cui curva haec insistit.

SCHOLIUM I.

Cum aequae concinnae proprietates huius superficiei in reliquis exemplis, quae ex antecedentibus huc transferri possunt, locum non habeant, calculo prolixiori, quo illa exempla opus haberent, quum in disquisitione usum praeterea nullum praebent, his supersedeo.

SCHOL. II.

Fig. I. Diameter circuli, generatoris (iacentis)



tis) vel axis ellipseos iacentis, transiens
per puncta S, T, FREZIERIO adpella-
tur *axis subtendens*; curva autem ScT,
quae in eodem cum hac linea plano iacet,
nominatur *axis curuus*; linea, quae re-
spondet diametro axi subtendenti perpen-
diculari *axis rectus*; linea recta Cc *axis*
altitudinis vel profunditatis. Rectae
per hunc axem trans^ugentes nominantur
diametri.

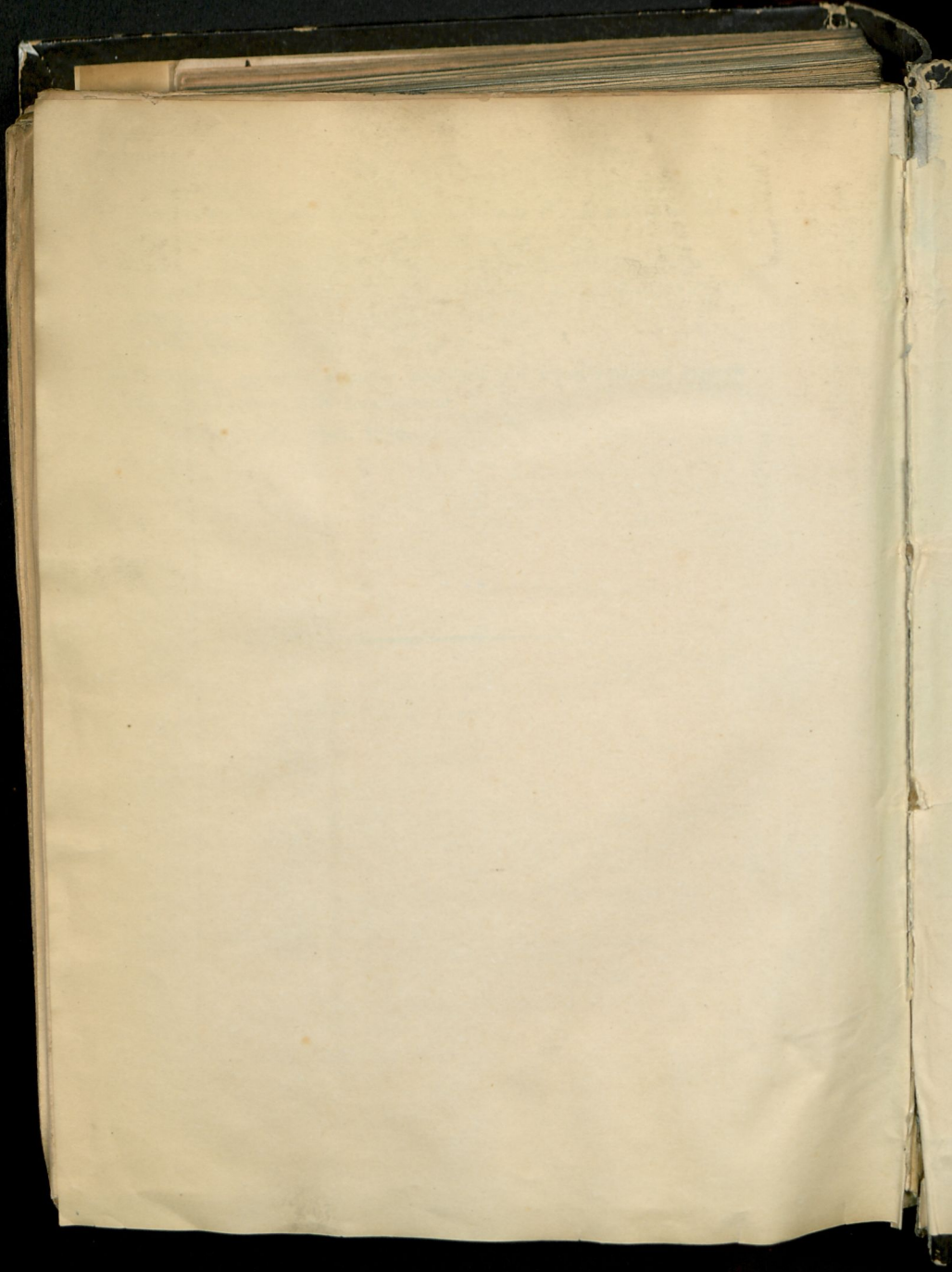
SCHOL. III.

Est vero tam circuli imbricati, quam
ellipseos imbricatae varius in architectura
vſus; quodſi enim analyſi demonſtratio
harum curuarum faciliteretur, clare patet,
theoremata FREZIERII Lib. I. Theor. X.
et ſeq. magis captui accommodari. Oc-
currit



currit vero ellipsis imbricata; ubi, fene-
 stris arcuatis, fornices perforantur, vi-
 Romae in foramine, quod lumen superius
 in Pantheon admittit; porro etiam ubi rup-
 ris intrat fornix vel cameram sphaeri-
 cam. Hic ubique superficies curvae fe-
 ctionibus suis eiusmodi lineas curvas
 efficiunt.





94A 7330

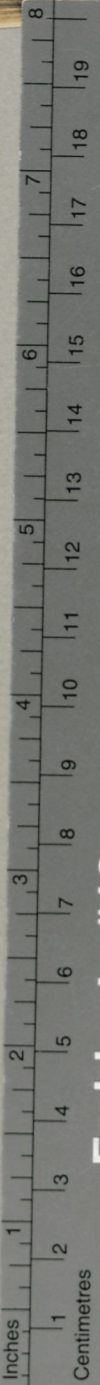
ULB Halle 3
000 410 837



56







B.I.G.



Farbkarte #13

CVRVARVM MBRICATARVM

7

ONSIDERATIO ANALYTICA

AVCTORE
ERHARDO AVGVSTO WILHELMO
ZIMMERMANNŌ.



*Garty
re.*

7

GOETTINGAE
TYPIS IOANNIS ALBERTI BARMIEIERI
C10 DCCCLXV.

