10

ORDINIS PHILOSOPHICI
IN
ACADEMIA WITTEBERGENSI
H. T.

DECANVS
GEORGIVS FRIDERICVS BERMANNVS
MATH. SVP. P. P. O.

SOLENNIA
DOCTORVM PHILOSOPHIAE
ET MAGISTRORVM ARTIVM
PRIDIE CALENDAS MAIAS
CREANDORVM
INDICIT
PRAEMISSA BREVI

DE ANGVLIS SOLIDIS
COMMENTATIONE

9

Res est admodum mirabilis, et paene incredibilis, in EVCLIDIS *Elementis Geometriae*, qui liber a tot acutissimi ingenii hominibus lectus et perpensus, semper summae ἀκριβείας geometricae * laudes tulit, qui tot commentatores atque editores nactus, qui in tot gentium linguas translatus est, in hoc ergo libro superfuisse adhuc errorem, per tot secula a nemine animaduersum. Vere tamen id dici posse, certiores nuper Mathematicos fecit illustris Academia Scientiarum Parisiensis **, cum eos monuit, Libri

* Notum est testimonium, quod EVCLIDIS Elementis P. RAMVS perhibuit: nullum paralogismum, nullam ψευδογραφίαν in toto libro a se, quamuis seuere inquirenti, animaduerti potuisse. Et de iisdem CARDANVS (de Subtilitate L. XIII): Quorum, inquit, inconcussa dogmatum firmitas, perfectioque adeo absoluta, vt nullum opus iure huic aliud comparare audeas. Quibus fit, vt adeo veritatis lux in eo refulgeat, vt soli hi in arduis quaestionibus videantur posse a vero falsum discernere, qui Euclidem habent familiarem.

** Vid. *Histoire de l'Academie Royale des Sciences*, *année* MDCCLVI. pag. 77. quod Volumen tamen non nisi paullo ante initium anni superioris ex typographeo regio prodiit.

vndecimi propoſitionem XXI. quae de omni angulo ſolido enuntiat, angulos planos, quibus ille contineatur, ſimul ſumtos minores eſſe quatuor rectis, non eſſe vniuerſaliter veram, eumque errorem Mathematicum quendam ac Ciuem Geneuenſem, LE SAGE, primum deprehendiſſe, ſibique per litteras indicaſſe. Quae ſimulac legiſſem, rei et nouitas et dignitas animum meum impellebat, vt per me ipſe cognoſcere ſtuderem, quid de hac huius theorematis reprehenſione eſſet ſtatuendum. Ac cogitans de hoc argumento, perſpexi ſane, hanc *Euclideam* propoſitionem a Clo. LE SAGE recte in eo eſſe reprehenſam, quod de omni angulo ſolido, ſine addita exceptione, aliquid enuntiet, quod in quosdam tantum angulos ſolidos competat. Cum autem ſimul intelligerem, haud adeo facilem, neque in procliui, eſſe huius errati demonſtrationem, mihique videretur e re Geometriae eſſe, vt ea demonſtratio clare exponeretur, cum praeſertim ea tradenda toti de angulis ſolidis loco plus luminis afferri poſſet, quem a Geometris nondum ſatis tractatum eſſe, vel hoc ipſum, quod illud erratum ſine animaduerſione hactenus praetermiſerint, aut adeo ſuum fecerint, indicio eſt: ſtatui, praeſenti aliquam commentationem emittendi occaſione ſic vti, de hoc vt argumento breuiter, et ad captum tironum Geometriae, quibus haec ſcriptio deſtinatur, accommodate perſcriberem. Ac quae quidem ea de re iam dicere animus eſt, ea ſic partiemur, vt primum de formis ſeu ſpeciebus, in quas angulorum ſolidorum genus diuidendum eſt, paullo accuratius commentemur, deinde exceptionis, a theoremate *Euclideo*, ſupra memorato, faciendae neceſſitatem perſpicue demonſtremus.

1. ANGVLVM SOLIDVM ita definimus cum EVCLIDE, vt eum dicamus eſſe inclinationem trium pluriumue rectarum, quarum ſingulae binae in diuerſis planis ſitae ſint, omnes autem in vno puncto concurrant. Ex qua definitione ſequitur, angulum ſolidum totidem angulis planis contineri, quot rectae ad eum conſtituendum concurrant, et ſingulos horum angulorum cadere in plana diuerſa, omnes autem habere verticem communem, illud nempe punctum, quod omnibus iſtis rectis ſit commune. Hic vertex communis ipſius *anguli ſolidi vertex* vocatur.

2. Iam

2. Iam inter angulos planos, qui solidum comprehendunt, aut est angulus gibbus, hoc est, rectis duobus maior, aut nullus talis. Si illud contingat, angulum solidum *gibbum;* sin hoc, *non gibbum* licebit appellare. Anguli solidi gibbi exemplum habebimus, si nobis fingamus pyramidem, cuius basis quatuor pluresue angulos planos habeat, inter quos gibbus occurrat; namque ille ad basin huius pyramidis angulus solidus, cuius vertex idem est, ac vertex anguli plani gibbi, ipse erit gibbus. Item si super plano circuli, ex centro eius excitetur recta, siue obliqua, siue normalis plano circuli, et deinde ex circulo eximatur sector aliquis, semicirculo minor; ac per rectam sublimem et radios circuli, reliquam circuli portionem terminantes, ducta intelligantur plana: haec cum reliqua circuli portione comprehendent angulum solidum gibbum. Haec vna est anguli solidi diuisio.

3. Diuidi autem porro anguli solidi *non gibbi* notio potest ex consideratione positionis crurum angulorum planorum, solidum comprehendentium, respectu verticis communis. Etenim aut poterit planum per verticem anguli solidi ita duci, vt crura angulorum planorum omnia ad easdem partes huius plani cadant, aut id non poterit fieri, sed vtcunque planum ducatur per verticem, quaedam crura angulorum planorum ad has, alia ad alteras partes eius plani, vel in ipsum planum cadent. Duae hinc formae anguli solidi non gibbi exsistunt. Si per verticem anguli solidi planum ita duci possit, vt omnium angulorum planorum in solido crura ad easdem plani partes cadant: angulus solidus *pyramidalis* apte dici posse videtur. Est enim talis angulus solidus ad verticem omnis pyramidis: quandoquidem planum per verticem pyramidis, basi eius parallelum, talem situm habere necesse est, vt omnium angulorum planorum in solido ad verticem angulo crura ad easdem partes huius plani cadant, ad quas est basis. Ac vicissim, si planum per verticem anguli solidi non gibbi sic transire possit, vt crura angulorum planorum in solido cuncta ad easdem plani partes cadant: planum quodlibet, ad has easdem partes illi plano parallelum, singulis his cruribus occurret, ideoque cum planis angulorum pyramidem formabit, in cuius vertice angulus ille solidus erit. Hinc contra, si per verticem anguli solidi non gibbi nullum planum sic possit duci,

ci, vt omnia angulorum planorum crura ad easdem plani partes extra illud cadant: talem angulum solidum *non pyramidalem* vocare, opinor, licebit. Fieri autem posse eiusmodi angulum solidum, vno alteroque exemplo declarabimus. In plano aliquo verticali per quoduis eius punctum B (fig. 1.) ductae intelligantur recta verticalis et recta horizontalis; atque in eodem plano ad idem punctum B ponatur angulus ABC, cuius crura BA, BC sint super horizontali, et ad diuersas verticalis partes. Deinde per rectam illam verticalem ductum intelligatur aliud planum vtcunque, et in hoc ad idem punctum B ponatur alius angulus planus DBE, ita, vt ambo eius crura BD, BE sint sub horizontali, per punctum B in hoc plano ducenda, ac communis planorum sectio inter ea crura cadat. Quo pacto, manifestum est, extiturum angulum solidum, quatuor planis angulis ABD, DBC, CBE, et EBA comprehensum, per cuius verticem B vtcunque duxeris planum, nunquam efficias, vt quatuor rectae BA, BD, BC, BE simul extra illud et ad easdem eius partes cadant. Aliud exemplum anguli solidi non pyramidalis habebimus, si ex sex angulis planis, quorum singuli sint aequales 73 gr. 13′ 17″ certa lege componamus solidum. Namque ex sex cruribus horum angulorum tria alterne sumta cadent in vnum idemque planum, reliqua vero tria ad easdem huius plani partes; quod ex infra dicendis apparebit: vt ergo hic angulus solidus nulla in pyramide angulus ad verticem fieri possit.

4. Quibus de formis variis anguli solidi expositis, veniamus ad alterum caput huius commentationis, et videamus, an, secundum theorema *Euclideum*, de omnibus cuiuscunque speciei angulis solidis vere dici possit, summam angulorum planorum, solidum angulum terminantium, deficere a quatuor rectis. Ac primum de *angulis solidis gibbis* statim manifestum est, multos tales sic fingi posse, vt in iis hoc Theorema falsum deprehendatur. Nam si ex centro circuli, ex quo sector, semicirculo minor, ablatus sit, erigamus rectam, plano circuli ad rectos: tres existent anguli plani, solidum comprehendentes, quorum duo erunt recti, tertius gibbus, seu duobus rectis maior, et quorum proinde summa excedet quatuor rectos. Et poterunt ex centro huius sectoris, semicirculo maioris,

pro

pro vna recta, plures sic duci ad easdem partes, vt anguli plani, quos hae rectae partim inter se, partim cum radiis, sectorem terminantibus, efficient, simul sumti maiores sint duobus rectis: quo facto, his angulis planis additus angulus sectoris gibbus summam dabit angulorum, solidum gibbum terminantium, maiorem quatuor rectis.

5. Deinde angulorum solidorum non gibborum eis, quos *non pyramidales* dicere ausi sumus, non semper hoc esse adiunctum, vt summa planorum in illis angulorum quatuor rectis sit minor, facile poterit demonstrari exemplo talis anguli, quatuor quidem planis angulis comprehensi, quorum tamen summa quatuor rectos excedat dato angulo Q. Cuiusmodi angulus sic poterit construi. Datus angulus Q diuidatur in quatuor partes aequales, quarum ergo quaeuis minor erit recto angulo. Singulis his partibus adiiciatur rectus: habebuntur quatuor anguli obtusi, sibi inuicem aequales. Iam ex duobus horum angulorum et quolibet angulo acuto, construatur angulus solidus, per 23. XI. Elementorum. Ex iisdem porro datis construatur alius angulus solidus priori aequalis. Iungantur hi duo anguli solidi sic, vt anguli acuti in vtroque congruant, et ceteri anguli plani vtriusque solidi ad diuersas partes plani eius, in quo est angulus acutus, cadant. Quo facto, mente remoueatur planum, in quo est hic angulus acutus: et habebitur vnus angulus solidus non pyramidalis comprehensus quatuor planis, qui singuli erunt $= R + \frac{1}{4} Q$, et quorum ergo summa excedet quatuor rectos dato Q. Nam quia in vtrouis priorum angulorum solidorum plana amborum angulorum obtusorum ad planum anguli acuti versus exteriora anguli solidi inclinata sint necesse est (quod et per se satis clarum est, et per ea, quae paullo post propositiuri sumus, manifesto demonstrabitur): fieri nequit, vt, iunctis eo, quo diximus, modo illis solidis angulis, duo ex angulis istis quatuor obtusis in vnum idemque planum cadant, et cum ceteris angulum solidum gibbum triangularem forment; sed singuli quatuor obtusi anguli in diuersa plana cadant, ideoque angulum solidum quadrangularem componant, necesse erit.

6. Sed dicet fortasse aliquis, haec omnia concedi posse, saluo *Euclideo* theoremate: Cum enim EVCLIDES contemplationem

quin-

quinque Schematum seu corporum *Platonicorum* totius sui operis finem constituerit; nec opus ipsi fuisse, nec propositum, de aliis angulis solidis loqui, quam qui his corporibus inesse possint: quare tam vndecimam definitionem Libri XI, quam propositiones *Euclideas* omnes, in quibus anguli solidi fiat mentio, non nisi de istiusmodi angulis solidis esse accipiendas, exclusa omni angulorum solidorum gibborum, et non pyramidalium consideratione. Quae cum aliqua veri specie dici posse, largiremur, si XXI. propositio Libri vndecimi *Elementorum* de toto angulorum solidorum pyramidalium genere posset obtineri. At enim vero secus se rem habere, mox videbimus. Scilicet hoc genus angulorum solidorum rursus in duas species diuidi potest: cum pyramis, ad cuius verticem aliquis est angulus solidus, aut nullum in basi sua angulum planum gibbum habeat, aut talis talesue anguli in ea basi insint. In priori casu verum est theorema *Euclideum*; id quod partim ex ipsius EVCLIDIS demonstratione de angulo solido non gibbo, et tribus planis comprehenso, partim ex CLAVII et TACQVETI demonstrationibus liquet. Sed quemadmodum hae demonstrationes non possunt ad eiusmodi pyramides extendi, in quarum basibus anguli plani gibbi occurrunt: ita accidit, vt, licet in nonnullis huiusmodi pyramidum anguli ad vertices sub theorema *Euclideum* cadant, dentur tamen permultae, in quarum angulis ad vertices idem Theorema fallat. Et hoc est, quod nunc demonstrare aggredimur. Praemittendum autem nobis est hoc

LEMMA

7. *Ex tribus angulis planis, quorum summa minor sit quatuor rectis, et quorum duo, vtlibet sumti, reliquo sint maiores, angulum solidum non gibbum construere, et singulorum planorum ad se inuicem inclinationem inuenire.*

SOLVTIONEM prioris quidem partis huius problematis iam EVCLIDES exhibuit, sed talem, quae nostro scopo non satis conuenit; hinc aliam nobis tradendam esse intelleximus, per quam ad posterioris etiam partis solutionem facile perueniri posset. Sunt vero tres casus problematis. *Casus I.* Si anguli dati α, β, γ omnes inter se inaequales, et vel singuli, vel saltim duo α, β, acuti sint: ponantur in quouis plano ad idem punctum a, eandemque re-

ctam

ctam ca (fig. 2.) duo anguli cak, cap, ipsis α, β sigillatim aequales, sic, vt crus commune ac inter reliqua crura ak, ap cadat. Sumto in recta ca quouis puncto b, ab a diuerso, hoc centro et interuallo ba describatur circulus, cuius peripheriae rectae ak, ac, ap occurrant in d, c, e punctis. Sit autem α maior quam β, et ad minor quam ae; et iungantur cd, ce. Deinde in cruribus anguli $CAB = \gamma$, cuius vertex sit punctum A, (fig. 3.) capiatur $AD = ad$, et $AE = ae$, et ex punctis D, E ducantur, in plano huius anguli, rectis AD, AE perpendiculares, quae sibi mutuo occurrent in aliquo puncto P. Ex hoc puncto excitetur plano CAB ad rectos recta PV tanta, vt ipsius quadratum aequale sit excessui quadrati rectae cd supra quadratum rectae PD, ac iungatur VA: habebimus angulum solidum comprehensum tribus angulis planis $VAC = \alpha$, $VAB = \beta$, $BAC = \gamma$. Descripto porro super recta cd semicirculo, aptetur in illo ex puncto d chorda $dq = DP$; et in semicirculo super recta ce descripto aptetur ex puncto e recta $er = EP$: erit ang. cdq = inclinationi planorum angulorum α et γ, atque ang. cer = inclinationi planorum angulorum β et γ versus eas partes, ad quas cadit punctum P. Tandem per punctum c ducatur rectae ac perpendicularis in plano adc, quae rectis ad, ae occurrat in k, p. In anguli γ (fig. 4) cruribus capiantur, inde a vertice f, $fg = ap$, et $fh = ak$, et ex centris g, h radiis cp, ck describantur circuli sibi mutuo occurrentes in puncto i. Iunctis hi, gi, erit ang. hig, vel (si hic sit obtusus) ipsi deinceps positus, inclinatio planorum angulorum α, β in solido ad se inuicem. Q. E. F.

Ad quam constructionem *demonstrandam*, primum ostendi oportebit, semper fore PD minorem quam cd, siue punctum P intra angulum BAC, siue extra eum, siue in punctum E cadat. Cadat primum P intra ang. BAC. Iam si negas, esse PD minorem quam cd: iuncta PA non erit minor quam ac (47. I. Elem.), neque angulus PAD minor angulo α. Et quia PA non minor erit quam ac, AE autem ipsi ae aequalis, et vterque angulorum PEA, cea rectus est: PE non erit minor quam ce, neque ergo angulus PAE minor esse poterit angulo β. Quare angulus BAC

 $= \gamma$

$=\gamma$ non erit minor angulis α, β simul sumtis; contra hypothesin. Erit ergo PD minor quam cd, si P intra ang. BAC cadat. Deinde si P in E cadat, negesque esse rectam ED seu PD minorem ipsa cd: neque AE erit minor quam ac. Est autem AE $= ae$. Ergo in triangulo rectangulo cea cathetus ae non erit minor hypotenusa ac. Quod est absurdum. Denique si P cadat extra angulum BAC (fig. 5. 6.): fiat angulus $ca\varepsilon = \beta$ ad easdem partes rectae ca, ad quas est ang. cad; et occurrat crus eius $a\varepsilon$ peripheriae circuli in ε. Iuncta igitur εc, erit $a\varepsilon = ae =$ AE, et $c\varepsilon = ce$, et ang. $c\varepsilon a$ rectus. Quia autem per hypothesin est ang. γ minor quam differentia angulorum α, β: erit ang. EAD minor ipso εad. Quare si figuram ADEP mente ponamus in planum circuli $a\varepsilon c$, ita, vt recta AD congruat rectae ad: cadet quidem recta DP in rectam dc, sed recta AE intra angulum $ca\varepsilon$, et punctum E intra ang. $c\varepsilon a$ cadet, ac proinde recta EP occurret rectae cd inter c et d puncta. Nam iungatur εE, et producatur: et quia in triangulo isosceli E$a\varepsilon$ angulus ad basin EεA est acutus, angulus vero $c\varepsilon a$ rectus est; recta εE intra angulum $c\varepsilon a$ cadet, et ergo rectam cd secabit inter c et d in n puncto. Quia autem angulus externus nEa est obtusus, et PEa rectus: recta PE intra angulum nEa cadat, et hinc rectam cd inter n et d secet, necesse est. Itaque, cum recta PE rectae cd inter puncta c, d occurrat, fore PD minorem ipsa cd, palam est.

Deinde, esse angulum VAD $= \alpha$, et ang. VAE $= \beta$, sic demonstrabimus. Iungantur VD, VE. Cum recta VP, plano EAD normalis, faciat angulos ad P rectos: erit quadratum rectae VD aequale quadratis rectarum VP, PD, id est, quadrato rectae cd (per constr.); et proinde VD $= cd$. Et cum ex puncto V plani VAD in planum BAC demissum perpendiculum insistat in puncto P, ex quo in communem horum planorum sectionem AC perpendicularis ducta est PD: erit etiam recta VD rectae AC ad rectos. Quare cum anguli VDA, cda recti sint, et VD $= cd$, DA $= da$: erit VA $= ca$, et ang. VAD $= cad = \alpha$. Porro cum, ob VP plano EAD, et PE rectae AE normalem (per constr.), sit angulus VEA rectus; angulus autem cae in semicirculo etiam rectus sit, et praeterea VA $=$ ca, atque AE $=$ ae: erit (47. I. Eucl.) VE $=$ ce, et hinc angulus VAE $=$ cae $=$ β. Quare angulum solidum ad A ex tribus datis planis angulis α, β, γ constructum esse patet.

Praeterea planorum VAC, BAC se mutuo in recta AC secantium inclinationem VDP esse aequalem angulo cdq (fig. 2. 3), facile intelligitur ex eo, quod VD $=$ cd, DP $=$ dq, et anguli VPD, cqd recti sint. Similiter inclinationem VEP planorum VAB, BAC ad se inuicem aequalem esse angulo cer, manifestum est.

Tandem in planis VAD, VAE ductae intelligantur ad rectam AV ex puncto V perpendiculares VC, VB, quae rectis AD, AE in C, B occurrant. Quia ang. CVA $=$ ack, et VAC $=$ cak, et VA $=$ ca: erit AC $=$ ka, et VC $=$ ck. Pari ex ratione erit AB $=$ ap, et VB $=$ cp. Hinc erit etiam fh $=$ AC (fig. 4 et 3), et fg $=$ AB; ac proinde, ob angulos gfh, BAC aequales, recta gh $=$ BC. Et quoniam ergo triangula hig, CVB sibi inuicem aequilatera sunt: erit ang. hig $=$ CVB, qui (per defin. 6. XI. Elem.) erit inclinatio plani AVC ad planum AVB, si sit acutus; vt ergo, si ille angulus hig obtusus sit, is, qui ipsi erit deinceps, inclinationem horum planorum sit exhibiturus. Q. E. D.

Casus II. Si anguli dati α, β, γ sint inaequales, et vel singuli, vel saltim duo α, β, obtusi: ponamus simul, esse β horum angulorum maximum, γ minimum. Capiatur et anguli β, et anguli α complementum ad duos rectos, quorum illud sit B, hoc A; et quasi ex angulis tribus A, B, γ angulus solidus fieri deberet ad punctum A, ita determinetur (per solutionem casus I) positio rectae AV (fig. 7.) Producantur deinde crura anguli EAD $=$ γ vltra verticem A in B et C: habebimus angulum solidum, tribus planis VAB, VAC, CAB, qui ipsis β, α, γ aequales erunt, comprehensum. Et inclinationes planorum VAC, VAB, CAB ad se mutuo eaedem erunt, atque inclinationes planorum VAD, VAE, EAD ad se inuicem, per dicta ad casum primum determinandae.

 Quo-

Quorum praeceptorum singula rationem habebunt manifestam, dummodo constet, angulos A, B, γ eas habere conditiones, quas problema requirit. Quod sic euincitur. Cum (per hyp.) sit $\alpha + A = 2R = \beta + B$, et α minor quam $\beta + \gamma$, erit A maior quam $B - \gamma$, seu $A + \gamma$ maior quam B. Similiter, quia β minor est quam $\alpha + \gamma$: patet, esse B maiorem quam $A - \gamma$, seu $B + \gamma$ maiorem quam A. Adhuc cum sit $\alpha + \beta + A + B = 4R$, et $\alpha + \beta + \gamma$ minor quam 4 R (per hyp.): erit $A + B$ maior quam γ. Ac quoniam est $\alpha + \beta$ maior quam γ: erit $A + B$ minor quam $4R - \gamma$, seu $A + B + \gamma$ minores 4 Rectis. Proinde anguli A, B, γ habent conditiones in propositione requisitas.

Casus III. Cum angulorum datorum α, β, γ, duo α et β sunt aequales: eadem fieri debent, quae in casu primo vel secundo praecepimus, prouti anguli α, β acuti erunt vel obtusi. Demonstratio quoque eadem erit, praeterquam quod iam breuius ostendi poterit, rectam PD semper minorem esse ipsa cd. Namque in hoc casu, ob aequalitatem rectarum AD, AE (per constr.), punctum P non potest cadere nisi intra angulum EAD $= \gamma$, et ang. PAD erit $= \frac{1}{2}\gamma$, ideoque, si α, β sint acuti, minor angulo α (per hyp.). Ergo, cum anguli ad D et d sint recti, et AD $= ad$ (per constr.), erit PD minor quam cd. Sed et, cum α, β obtusi sunt, erit $\frac{1}{2}\gamma$ minor quam A deinceps positus ipsi α: quoniam (per hyp.) $2\alpha + \gamma$ minor est quam 4R, et $\alpha + A = 2$ R.

8. Ex hoc lemmate haec fluunt *Corollaria*, quae inprimis in gratiam eorum, quae sequuntur, sunt notanda. 1) Si angulus solidus comprehendatur duobus planis acutis α, β, et vno recto vel obtuso γ: inclinatio planorum, in quibus sunt anguli α, β, ad se inuicem erit versus exteriora solidi. Nam quia ang. γ rectus vel obtusus est: erit rectae gh quadratum aequale quadratis rectarum fg, fh, vel eisdem maius (per 12. II. Elem.) Sunt autem rectae fg, fh aequales rectis ap, ak, et hae maiores sunt rectis cp, ck, seu rectis gi, hi. Quare quadratum rectae gh maius erit quadratis rectarum gi et hi simul sumtis, ideoque angulus gih obtusus erit, ac proinde planum VAB ad planum VAC inclinatum erit versus

versus exteriora anguli solidi A. 2) In eadem hypothesi planum cuiusque anguli acuti VAC ad planum tertii BAC inclinatum erit versus interiora solidi. Etenim in hac hypothesi punctum P cadat necesse est intra ang BAC, et proinde etiam intra angulum solidum respectu communis intersectionis AC dictorum planorum. 3) Contra ea, si duo anguli plani obtusi VAB, VAC cum recto vel obtuso BAC comprehendant angulum solidum (fig. 7.): cuiusque ex illis angulis planum ad planum huius inclinatum erit versus exteriora solidi; quemadmodum et ipsorum planorum VAB, VAC alterum ad alterum inclinationem versus exteriora solidi habet. 4) Si in angulo solido trigono sint duo acuti plani aequales: plana horum ad planum tertii inclinata erunt versus interiora solidi. Sin autem duo plani obtusi aequales insint: contrarium accidet. 5) Si in angulo solido trigono sint duo plani acuti aequales: crus ipsis commune inclinatum erit ad planum tertii anguli versus eas partes, versus quas crura huius anguli tendunt. 6) Angulus solidus per hoc lemma constructus, pyramidalis sit (§. 3) necesse est. Nam sumto in singulis trium planorum angulorum cruribus AB, AC, AV puncto quolibet ab A diuerso, poterit per haec tria puncta duci planum (per 2. XI. Elem.) quod basis erit pyramidis, verticem suum habentis in A puncto.

9. Quibus praemissis, demonstrabimus nunc, varia ratione fieri posse angulum solidum pyramidalem, quatuor pluribusue angulis planis comprehensum, quorum summa vel adaequet, vel superet quatuor Rectos. Sit igitur

I. PROBLEMA

Angulum solidum pyramidalem construere, quatuor angulis planis comprehensum, qui simul sumti excedant quatuor rectos dato angulo Q.

SOLVTIO. Bifariam secetur angulus Q, et constituatur angulus solidus ad punctum H (fig. 8) ex duobus planis obtusis IHK, LHK, quorum quisque sit $= R + \frac{1}{2} Q$, et angulo IHL, qui sit minor complemento anguli Q ad duos rectos; id quod per Lemma praecedens fieri posse facile intelligitur. Deinde ex puncto H plano IHL ad rectos excitetur recta HM ad eas partes, ad quas est recta HK (per 12. XI. Elem.). Habebimus hac ratione angulum solidum pyramidalem (remoto plano IHL), comprehensum quatuor planis angulis IHM, LHM, IHK, LHK, quorum summa $= 4 R + Q$.

In qua solutione omnia partim per se, partim per coroll. 4. et 6. praecedentis lemmatis sunt manifesta.

II. PROBLEMA

10. *Angulum solidum pyramidalem construere, comprehensum quatuor planis angulis, qui simul sumti adaequent quatuor rectos.*

SOLVTIO. Capiatur (fig. 9.) quilibet angulus acutus NKQ, qui per rectam KP vtcunque secetur in duas partes, m, n. In plano huius anguli rectae KP per punctum K ducatur perpendicularis LM, et producatur QK in R, vt recta KM faciat cum rectis KN, KR angulos x, y, qui etiam erunt acuti. Ducatur etiam per K recta KZ, quae cum ipsa KN angulum comprehendat z acutum quidem, sed maiorem angulo NKQ. Deinde ex angulis x, z, et MKQ seu $R + m$, fiat angulus solidus, in quo sit angulus planus BAC $= R + m$, BAD $= x$, et DAC $= z$ (fig. 10); item ex angulis y, z, et LKN seu $R + n$, fiat angulus alius solidus ACDE hoc pacto, vt posito angulo CAE $= R + n$ in plano subiecto similiter, atque angulus BAC in eodem positus erat, angulus CAD $= Z$ constituatur ad sinistrum crus AC illius anguli CAE, si in priori solido angulus $Z =$ DAC constitutus fuit ad dextrum crus AC anguli CAB, ac vicissim. Iungantur denique hi duo anguli solidi ita, vt puncta A, et rectae AC, et anguli DAC coincidant: habebitur, remoto plano CAD, angulus solidus, pyramidalis comprehenprehensus quatuor planis angulis EAC, EAD, DAB, BAC, quarum summa erit aequalis quatuor rectis.

DEMONSTRATIO. Posse enim ex tribus angulis planis $R + m$, x, et z per lemma praec. construi angulum solidum pyramidalem, sic ostendemus. Est $x + z = MKZ$, et $R + m = MKQ$. Ergo, quia (per constr.) MKZ maior est quam MKQ, erit $x + z > R + m$. Et quia $R + m$ est obtusus, x autem et z acuti sunt, euidens est, esse $R + m + x > z$, et $R + m + z > x$. Adhuc quia m et z sunt acuti erit $R + m + x + z < 4R$. Ergo ex tribus angulis $R + m$, x, et z construi potest angulus solidus. Similiter ostendetur, ex tribus angulis planis $R + n$, y, et z angulum solidum componi posse. Iam si iungantur hi duo solidi anguli praedicta lege, dico, neutrum planum angulorum CAE, DAE cadere posse in planum alicuius anguli BAC vel BAD in primo solido. Nam quia, iunctis duobus solidis, plana EAC, BAC sunt ad diuersas partes plani DAC, et ad hoc planum inclinata sunt versus interiora cuiusque anguli solidi (per 2. coroll. Lemm.), et ergo versus easdem partes rectae AC: plana EAC, BAC diuersa sint, et se mutuo remera secent in recta AC, necesse est. Idem de duobus planis DAE, DAB similiter liquet. Nam (per constr.) haec plana sunt ad diuersas partes plani DAC, et (per 1. coroll. Lemm.) ad hoc inclinata sunt versus exteriora cuiusque anguli solidi, ideoque versus easdem partes rectae communis AD. Cum itaque demonstratum sit, angulos EAC, BAC, DAE, DAB esse in totidem diuersis planis: patet, angulum solidum ad punctum A constitutum esse, qui quatuor his angulis planis comprehendatur. Hunc porro esse pyramidalem, nequit esse dubium. Sumtis enim punctis B, E, C in rectis AB, AE, AC vtcunque, intelligatur planum per ea transiens; hoc efficiet cum planis BAC, EAB, EAC pyramidem, cuius vertex erit punctum A. Cadet autem recta AD (per constr.) inter plana EAB, CAE, BAC, hoc est, intra illam pyramidem BCEA. Ergo recta AD basi eius, seu plano EBC, occurrat necesse est; vt ergo omnes quatuor rectae AB, AE, AC, AD secentur ab vno eodemque plano ad easdem partes puncti A. Denique cum sit ang.

BAC

$BAC = R + m$, $EAC = R + n$, $BAD = x$, et $EAD = y$, ſint autem auguli $m + n + x + y = 2$ R (per conſtr.): patet, quatuor angulos planos BAC, EAC, BAD, EAD in angulo ſolido conſtructo ſimul ſumtos eſſe $= 4 R$. Q. E. D.

III. PROBLEMA

11. *Angulum ſolidum pyramidalem conſtruere, comprehenſum quinque angulis planis, quorum ſumma quatuor rectos ſuperet dato angulo T.*

SOLVTIO. 1) Si datus angulus T, quem minorem ponimus duobus rectis, non ſit maior ſeſquirecto: ſecetur vtcunque in duas partes inaequales Q, S, quarum minor ſit S; et erit ergo S minor recto, cum ſit $S < \frac{3}{4}$ R. 2) Sin autem fuerit $T > \frac{3}{2}$ R: capiatur aliquis angulus acutus $S > 2 T - 3$ R. Quod fieri poteſt. Quia enim $2 T < 4$ R; erit $2 T - 3 R < R$; ideoque capi angulus S ſic poteſt, vt minor quidem ſit recto, maior tamen quam $2 T - 3$ R. Hic angulus S auferatur ex dato T, et reliquus ſit Q. 3) In vtrouis caſu fiat (fig. 3) angulus ſolidus A trigonus, cuius planorum vnus BAC ſit rectus, reliqui duo VAC, VAB ſint acuti, inter ſe et angulo $\frac{1}{2}$ (R + S) aequales; et determinetur (per Lemma) inclinatio plani cuiusuis horum duorum angulorum VAC, VAB ad planum recti BAC, quae inclinatio ſit aequalis angulo *edq* in fig. 2. 4) Poſthaec fiat (per I. Problema) angulus ſolidus pyramidalis H (fig. 8), comprehenſus quatuor planis angulis, quorum ſumma ſit $= 4$ R + Q, hoc tamen pacto, vt angulus LHI, quo plana, in quibus ſunt anguli recti IHM, LHM, ad ſe mutuo inclinantur, maior ſit angulo *cdq*. Quod fieri poterit, quia demonſtrabimus angulum $cdq < 2 R - Q$. 5) Denique huic ſolido angulo applicetur extrinſecus angulus ſolidus trigonus, prius conſtructus, ita, vt huius ſolidi angulus planus rectus cum angulo recto LHM in illo ſolido congruat. Dico factum eſſe, quod fieri oportebat.

DEMON-

DEMONSTRANDVM hic est ante omnia, angulum cdq semper minorem fore complemento anguli Q ad duos rectos. Nam si T non sit maior quam $\frac{3}{2}$ R: fore $T - \frac{1}{2} S \leq \frac{3}{2} R$, manifestum est. Et si $T > \frac{3}{2} R$: iterum erit $T - \frac{1}{2} S < \frac{3}{2} R$. Est enim $2T - 3R < S$ (per hyp.), ideoque $T - \frac{1}{2} S < \frac{3}{2} R$. Cum itaque in vtroque casu sit $T - \frac{1}{2} S < \frac{3}{2} R$; ac (per hyp.) sit $T - S = Q$: erit semper $Q + \frac{1}{2} S < \frac{3}{2} R$, et ergo $\frac{1}{2} S < \frac{3}{2} R - Q$, et proinde $\frac{1}{2}(R + S) < 2R - Q$. Iam in fig. 3. ex puncto V, quod est extremum rectae PV, quae in constructione anguli solidi trigoni (per Lemma) plano BAC ad rectos ducta est ex puncto P, ducatur ad punctum D in plano VAC recta VD: et erit angulus VDP inclinatio plani VCA ad planum BAC, ideoque $VDP = cdq$. Verum, ob angulum BAC rectum, et $AE = AD$, et $AEP = ADP = R$ (per constr.), est $PD = AD$. Sed $VD < VA$, ob angulum VDA rectum. Quia ergo in triangulis PVD, VAD, ad P et D rectangulis, est $DP = DA$, DV autem minor quam AV: erit angulus VDP minor quam VAD. Hinc, cum sit angulus $VAD = \frac{1}{2}(R + S)$ per constructionem, patet, semper fore $cdq < \frac{1}{2}(R + S)$. Vidimus autem, semper esse $\frac{1}{2}(R + S) < 2R - Q$. Ostensum ergo est, fore semper angulum cdq minorem complemento anguli Q ad duos rectos. Ex quo perspicuum est, angulnm LHI (fig. 8), qui minor esse debet quam $2R - Q$ (per I. Probl. et Lem.), sumi posse maiorem ipso cdq.

Quapropter si angulus solidus A trigonus, secundum praeceptum 3. constructus ita iungatur angulo solido tetragono, vt illius angulus planus rectus congruat cum huius angulo plano recto LHM (fig. 8): planum anguli acuti $\frac{1}{2}(R + S)$, qui in illo solido adiacebit rectae HM, inclinatum erit ad planum LHM sub angulo cdq, qui minor erit angulo LHI, sub quo in angulo solido tetragono planum anguli IHM ad planum LHM inclinatum est. Igitur planum illius anguli acuti $\frac{1}{2}(R + S)$, insistens rectae HM, cadet inter plana LHM, IHM. Deinde etiam hoc manifestum est, alterius anguli acuti in solido trigono A planum, quod insistet rectae LH, non posse cadere in planum LHK solidi tetragoni, vltra rectam LH productum:

 cum

cum haec duo plana ſint ad diuerſas partes plani LHM, cui in recta LH inſiſtunt, et ad hoc inclinata ſint verſus eaſdem partes rectae LH. Porro quia vidimus, plana angulorum acutorum $\frac{1}{2}(R+S)$ inter plana LHM, IHM, LHI cadere: non eſt dubium, quin etiam crus his duobus angulis commune inter eadem tria plana cadat, ideoque ſatis productum verſus eaſdem partes, verſus quas ex puncto H educitur, plano KLMI etiam occurrat. Ex quibus omnibus apparet, conſtructum eſſe angulum pyramidalem, in quo ſint quinque anguli plani, in totidem diuerſa plana cadentes. Et quoniam hi quinque anguli ſunt $R+\frac{1}{2}Q$, $R+\frac{1}{2}Q$, R, $\frac{1}{2}(R+S)$ et $\frac{1}{2}(R+S)$, eorum ſumma efficit $4R+Q+S = 4R+T$. *Q. E. D.*

12. Equidem hac methodo poſſet etiam conſtrui angulus pyramidalis ſex angulis planis contentus, qui ſimul ſumti quatuor rectos excederent angulo dato: ſed, vt appareat, non vnam duntaxat methodum ad huiuſmodi angulos ſolidos efficiendos adhiberi poſſe, iubet ſubiicere

IIII. *PROBLEMA.*

Ex planis angulis ſex aequalibus, quorum ſumma excedat quatuor rectos, angulum pyramidalem conſtruere.

SOLVTIO. 1) Centro Q (fig. 12) interuallo quolibet QN deſcribatur circulus, in quo ponatur angulus ad centrum NQO $= \frac{2}{3}$ Recti: et ſuper recta NQ fiat alius angulus ad centrum NQS, maior ipſo NQO, ſed minor Recto. Ex puncto S, in quo crus QS huius anguli peripheriam ſecat, demittatur in crus alterum QN perpendiculum SR, quod rectae QO occurret in puncto T inter O et Q. Per hoc punctum T agatur rectae QN parallela, quae peripheriae occurrat in puncto X. Capiatur in peripheria inter puncta X et N quoduis punctum W, per quod ad rectam SR agatur parallela WY, circumferentiam iterum ſecans in Y, et iungantur

tur rectae QY, QW, quae comprehendent angulum quendam quatuor tertiis recti minorem WQY, cum dimidius angulus WQY, hoc est angulus NQW, minor sit angulo NQO. 2) Fiat angulus solidus A (fig. 13), qui contineatur tribus planis angulis BAC, CAD, DAB, aequalibus sibi inuicem et angulo WQY. 3) Construantur tres alii anguli solidi, sibi inuicem aequales, quorum vnus sit (*fig.* 3) A, comprehensus angulo plano BAC = angulo BAC in fig. 13, et duobus VAC, VAB aequalibus sibi mutuo et angulo NQS, quod fieri potest (per Lemma), quoniam angulus NQS maior est dimidio anguli BAC seu YQW. 4) Hi tres anguli solidi applicentur ad angulum solidum A (*fig.* 13) extrinsecus sic, vt in vnoquoque trium illorum solidorum angulus planus BAC is, qui est = WQY, congruat cum aliquo angulorum planorum BAC, CAD, DAB in solido figurae 13. Ita habebitur angulus solidus pyramidalis, contentus sex planis angulis, aequalibus inter se et angulo NQS, quorum summa maior erit quatuor rectis.

DEMONSTRATIONE hic nihil indiget, praeter hoc, angulum solidum hexagonum, secundum haec praecepta constructum, fore pyramidalem. Quod sic ostendemus. In tribus rectis, quae ad efficiendum angulum solidum A (*fig.* 13.) concurrunt, capiantur puncta B, C, D aeque distantia a puncto A, per quae transire intelligatur planum, quod plana trium angulorum aequalium secabit in rectis BC, CD, DB sibi inuicem aequalibus. Ex vertice A anguli solidi demissum sit in planum BCD perpendiculum AG, et ex puncto G, vbi insistit, rectae BC ad rectos ducta sit GF, et iuncta AF, quae ergo bifariam secabit angulum BAC. Porro in *fig.* 3. ex puncto V in planum ang. EAC demissum sit perpendiculum VP, et ex eodem V ad AC, AE perpendiculares ductae sint VD, VE, et iunctae AP, PD, PE. Ac cum sit ang. VAD = VAE (per constr.), angulus EAD bifariam sectus erit per rectam AP; eritque ergo ang. PAE = angulo BAF in fig. 13. Iam ratio AV: AP componitur ex rationibus AV: AD, et AD: AP, quarum haec aequalis est rationi AF: AB in fig. 13; et quoniam ang.

 VAD

VAD $=$ angulo NQS in fig. 12 (per conſtr.), ratio AV: AD aequalis erit rationi QS: QR. Ergo ratio AV: AP componetur ex rationibus AF: AB, et QS: QR. Atqui ratio AF: AB porro componitur ex rationibus AF: FB, et FB: AB, quarum haec aequalis eſt rationi v W: QW in fig. 12, (dicto v puncto interſectionis rectarum WY, NQ), quoniam (per conſtr.) angulus BAC $=$ WQY. Eſt autem (per conſtr.) Wv $<$ TR, ideoque vW: QW $<$ TR: QS. Quamobrem ratio AF: AB minor eſt compoſita ex rationibus AF: FB, et TR: QS. Hinc ratio AV: AP minor etiam erit ratione compoſita ex rationibus AF: FB, et TR: QR. At in fig. 13.* eſt AF: FG $=$ (AF: FB) $+$ (FB: FG), et iunctis rectis GB, GC, GD, quae, ob aequalitatem rectarum AB, AC, AD, et angulos ad G rectos, ſibi inuicem aequales erunt, punctum G erit centrum circuli, qui circa triangulum aequilaterum BDC poteſt circumſcribi; cui conſequens eſt, angulum BGC eſſe $= \frac{4}{3}$ R, et ergo ang. BGF $= \frac{2}{3}$ R. Quare, cum in fig. 12. angulus TQR etiam ſit $= \frac{2}{3}$ R (per conſtr.), erit FB: FG $=$ TR: QR. Ergo ratio AV: AP minor ſit neceſſe eſt ratione AF: FG; et propterea angulus VAP in fig. 3. minor erit angulo AFG in fig. 13. Iam illud perſpicuum eſt, ſi angulus ſolidus A in fig. 3. applicetur angulo ſolido A fig. 13. ſic, vt angulus planus CAB in illo ſolido congruat cum angulo plano BAC in hoc, rectam AP caſuram eſſe in rectam AF, et rectam AV, in qua reliquorum duorum angulorum illius ſolidi plana ſe mutuo ſecant, poſitam fore in plano GFA, quippe quod plano BFA ad rectos eſt. Itaque cum nunc rectae AV et FG ſint in eodem plano, et a tranſuerſa AF ſic ſecentur, vt angulorum alternorum alter altero minor ſit: patet, rectam AV, in hoc ſitu productam, occurſuram eſſe productae rectae GF, ideoque etiam plano BDC, ad easdem partes puncti A, ad quas rectae AB, AC, AD eidem plano occurrunt. Quod cum de reliquis duabus rectis, quae cum his quatuor, modo commemoratis, ad angulum ſolidum in puncto A formandum concurrunt, eodem modo demonſtrari poſſit: liquet (§. 3.) angulum ſolidum hexagonum A eſſe pyramidalem. *Q. E. D.*

13. Con-

13. Concessa anguli dati in tres partes aequales sectione, poterit eadem methodo construi angulus solidus pyramidalis sub sex aequalibus angulis planis, qui quatuor rectos dato angulo excedant. At quoniam illa anguli dati trisectio vim geometriae elementaris superat, maluimus problema ad istum modum proponere, praesertim cum hic modus ad institutum nostrum haud minus sit accommodatus. Ceterum latius patere hanc methodum, et ad construendum angulum solidum pyramidalem, octo, vel decem, vel quotuis numero pari angulis planis aequalibus, quatuor rectos excedentibus, comprehensum, etiam valere, omnes in geometricis contemplationibus paullo exercitatiores facile intelligent. Illud tantum admonebimus, si desideretur angulus solidus talis, qualis supra (§. 3) mentionem iniecimus, in quo scilicet sex sint plani aequales, ex quorum sex cruribus tria in vnum idemque planum, reliqua vero tria ad easdem huius plani partes cadant, magnitudinem vniuscuiusque horum sex angulorum hoc facili calculo, cuius ratio ex praecedenti demonstratione sit perspicua, posse definiri. Per 3 diuidatur cosinus 30 gr. quotiens erit cosinus alicuius anguli acuti, qui erit quaesitus, et inuenietur in canone sinuum $= 73$ gr. $13' 16'',81$. Nam si in fig. 13. pyramidem ABDC intelligamus esse tetraedrum, erit angulus $BAF = 30$ gr. $= GBF$; et quia ergo $AF : FB = FB : FG$, erit $AF : FG = FB^q : FG^q = 3 : 1$. Quare cum nunc (fig. 3.) in angulo solido A, qui plano angulo BAC tetraedri applicandus est, debeat esse $AV : AP = AF : FG = 3 : 1$, et angulus planus EAD aequalis esse 60 gr. ratio autem AV ad AP componatur ex rationibus $AV : AD$, et $AD : AP$, seu ex ratione sinus totius ad cosinum anguli quaesiti VAD, et ratione cosinus 30 gr. ad sinum totum: liquet, inferendum esse, quemadmodum 3 ad 1, ita cosin. 30 gr. ad cosin. anguli VAD quaesiti.

14. Cum ex hactenus dictis satis superque pateat, multos angulos solidos, atque in his etiam pyramidales, formari posse, de quibus propositio XXI. Libri XI. Elementorum non sit vera: negari sane nequit, hanc propositionem hactenus per errorem pro vniuersaliter vera habitam esse. Sed nunc haud dubitamus fore quosdam, qui

 quae-

quaestionem moueant, sitne huius erroris culpa ipsi EVCLIDI tribuenda, an fortasse librariorum vel editorum veterum incuria vel περιεργίᾳ factum sit, vt verba quaedam huius propositionis, quae debitam aut limitationem, aut exceptionem continuerint, ex contextu exciderint vel extrusa sint. Quae quaestio talis est, vt ad eam non liceat, nisi coniectando, respondere. Et nostram quidem hac de quaestione sententiam si quis requirat, ingenue fatebimur, non videri nobis EVCLIDEM huius erroris posse absolui. Quod tamen salua reuerentia erga hunc antiquissimum Geometriae magistrum, quo meliorem nullum vsquam reperimus, dictum putari volumus. Equidem si certo constaret, Scholium illud, quod extremae propositioni Libri XIII. Elementorum, in qua *Euclideum* opus terminatur, adiectum legimus, ipsum EVCLIDEM habere auctorem: vix dubium foret, in XXI. vndecimi scribenda bonum dormitasse EVCLIDEM. Namque illius Scholii demonstratio hanc vndecimi libri propositionem totidem verbis repetit, et ita est comparata, vt nullam vim habere queat, nisi apud eum, qui hanc propositionem pro vniuersaliter vera habeat. Sed cum videamus, magna probabilitate opponi posse, Scholium istud pariter atque ea, quae id praecedunt a verbis ἄλλως, ὅτι μείζων κ. τ. λ. assuta esse propositioni XVIII. Libri XIII. a veteri quodam Mathematico, et fortassis a THEONE Alexandrino, quem, ex iis, quae de se ipse in aliquo loco commentarii sui in CL. PTOLEMAEI Μεγάλην Σύνταξιν scripsit, * constat, nouam editionem Elementorum parasse, in qua nonnullas propositiones adiecerit: nolumus insistere huic argumento. Est autem alia ratio, quae nobis persuadet, EVCLIDEM nimium festinanter hic iudicasse. Videlicet haud est verisimile, eum, cum haec de angulis solidis exponeret, notiones diuersarum formarum anguli solidi animo habuisse comprehensas. Quomodo enim in propositione XX. simpliciter affirmare potuisset, in angulo solido, tribus planis

* Locus ille est pag. 50: Δέδεικται ἡμῖν, ἐν τῇ ἐκδόσει τῶν Στοιχείων, πρὸς τῷ τέλει τοῦ ἕκτου βιβλίου.

planis angulis contento, duos planos vtcunque ſumtos, tertio eſſe maiores, ſi notionem anguli ſolidi gibbi menti impreſſam habuiſſet? Praeterea, cum in toto eius opere anguli plani gibbi nullum occurrat veſtigium, etſi huiuſmodi angulo nomen anguli per definitionem octauam primi aeque ac ceteris angulis conuenit: probabile eſt, cum nec de angulo ſolido gibbo, nec de illo angulo ſolido, qui eſt ad verticem pyramidis, in cuius baſi angulus gibbus planus occurrit, tunc, cum de angulis ſolidis ſcriberet, cogitaſſe. Quodſi autem diuerſae anguli ſolidi formae menti ipſius praeſentes non fuerunt: defuit ſane ratio, quamobrem non ſimpliciter de omni angulo ſolido affirmaret, quod illi formae, quam animo intuebatur, conuenire videbat. Quae cum ita ſint, non temere forſan eſt, quod credamus, communis iſtius errati auctorem ipſum fuiſſe EVCLIDEM, eoque magnum nobis documentum dediſſe, quam ſit ingenium omnium hominum ad errorem procliue, quantoque cauendum ſit opere, ne de qua re ante aliquid pro certo ſtatuamus, quam notio eius plane diſtincta informata fuerit animo, atque in omnes quaſi partes verſata, et vndique inſpecta.

Verum haec hactenus. Nunc enim ad id nos conuertamus peragendum, quod huic ſcriptioni praebuit occaſionem. Significandum nempe Vobis eſt, OPTIMI PHILOSOPHIAE CANDIDATI, decretum eſſe ab Ordine Philoſophico, vt ſummi in Philoſophia honores academici, eis, qui ſe dignos his honoribus idoneis ſpeciminibus ſint exhibituri, *pridie Calendas Maias* per me more rituque antiquo conferantur. Quare Vos, qui, ingenuis artibus gloriam quaerentes, hiſce honoribus condecorari cupitis, rogo, vt nomina apud me veſtra mature profiteamini, nobisque profectus veſtros in Philoſophia et bonis litteris, explorandi copiam faciatis.

ciatis. Ceterum quemadmodum de Ordinis nostri fauore erga omnes, per quos Philosophiam et liberales artes, earumue saltim amorem, ad posteros propagatum iri spes sit, satis Vobis constare arbitror: ita et de mea voluntate, vestra desideria Ordini, pro eo ac par erit, commendandi, studioque meo, vestro honori inseruiendi, velim sitis persuasi. Faxit autem DEVS, vt hoc institutum in ecclesiae suae, et rei publicae litteratae, vtilitatem cedat.

P. P.

Festo Epiphaniorum die A. D. N.

CIƆ IƆCC LXIIII.

VITTEBERGAE

PRELO EPHRAIM GOTTLOB EICHSFELDI

ACADEMIAE A TYPIS.

10

ORDINIS PHILOSOPHICI
IN
ACADEMIA WITTEBERGENSI
H. T.

DECANVS
GEORGIVS FRIDERICVS BERMANNVS

MATH. SVP. P. P. O.

SOLENNIA

DOCTORVM PHILOSOPHIAE
ET MAGISTRORVM ARTIVM

PRIDIE CALENDAS MAIAS

CREANDORVM

INDICIT

PRAEMISSA BREVI

DE ANGVLIS SOLIDIS

COMMENTATIONE

9