Versuch
einer
Dynamik
zum Gebrauche derjenigen
die keine höhere Mathematik verstehen,

von

P. H. C. Brodhagen,
Lehrer und Aufseher der Handlungsakademie.

Hamburg
bei Carl Ernst Bohn. 1787.

Vorrede.

Uns fehlet noch immer eine Anleitung zu den ersten Gründen der Dynamik, worin diese Wissenschaft ohne Kenntniß der höhern Analysis erlernet werden kann. Ich will damit nicht sagen, daß wir gar keine Bücher dieser Art hätten; denn das würde eine Unwissenheit derjenigen Schriften verrathen, in welchen diese Materie gründlich und mit dem größten Fleisse von unsern besten Mathematikern bearbeitet worden ist. Allein dieses kann ich behaupten, daß bei den meisten Kenntnisse vorausgesetzet werden, die ein großer Theil derjenigen, welche nur das Allgemeine von dieser Wissenschaft zu haben wünschen, nicht besitzen, auch nicht die Zeit daran wenden können, sich mit diesen Vorkenntnissen vorher bekannt zu machen. Ich habe diesen Fall bei meinem Unterricht oft gehabt, wo ich nur froh seyn mußte, die allerersten Gründe der reinen Mathematik

bei

bei meinen Schülern vorzufinden. Algebra und Analysis des Unendlichen, sind noch zu fürchterliche Namen für diejenigen, die so genannte practische Mathematiker sind und werden wollen.

Ich habe dieserwegen versucht, einen Mittelweg einzuschlagen; eine Anleitung zu dieser Wissenschaft nach meinem eignen Plane auszuarbeiten, und so, wie sie hier erscheint, dem Publikum zu übergeben.

Ob ich nun im Ganzen dasjenige erreicht habe, was mein Vorsatz bei der Ausarbeitung dieser kleinen Schrift war, muß ich dem billigen Urtheile der Kenner zur Entscheidung überlassen. So viel als in meinem Vermögen war, suchte ich den Vortrag allgemein faßlich zu machen. Ohne Kenntnisse der reinen Mathematik konnte ichs nicht wagen, eine Schrift über diese Materie auszuarbeiten; aber auch weiter nichts erwarte ich von meinen Lesern.

Die Lehrart selbst ist größtentheils synthetisch, und ich bin da nur der analytischen Methode gefolget, wo ich die Sätze kürzer zusammenziehen konnte und durfte. Ueber das erste Capitel habe ich mich im Buche

selbst

selbst erkläret. Ich hielte es nicht für überflüssig, bei der Lehre von der Bewegung der Körper etwas Allgemeines über die Beschaffenheit der Materie voran gehen zu lassen. Ich habe zugleich nützliche Versuche, die auf den Zusammenhang der Körper Bezug haben, mit beigefüget. Sie sind aus Schriftstellern genommen, deren Namen für die Aechtheit derselben Bürge sind.

Ich bin Willens, die Hydrodynamik auf eben die Art abzuhandeln, um mich auf die Weise einen Weg zur practischen und technischen Mechanik zu bahnen.

Man kann auch diese kleine Schrift als eine Ergänzung der Anleitung des Herrn Prof. Büschs (meines würdigen Lehrers und Freundes) bürgerlichen Mechanik ansehen. Dahin rechne ich vorzüglich die weitere Ausführung der Lehre vom Pendel, der, von der Wurfbewegung und vom Stoße der Körper. Ich habe deswegen auch nur das Allgemeine von der zusammengesetzten Bewegung berührt, weil diese Lehre, im vorerwähntem Buche, ausführlich und ungemein deutlich, aus einander gesetzt worden ist. Die Schriften eines Kästners, Karstens, Murschenbroeks, Gravesands und Martins, habe ich so viel, als nur immer der Vortrag erlauben wollte, benutzt, und bin nur da von ihnen abgegangen, wo es die Grenzen der gegenwärtigen Schrift nicht verstatteten.

Hamburg, im August 1787.

Inhalt.

Das I. Capitel.

Allgemeine Eigenschaften der Materie.

§. 1.

Ich glaube, es wird nicht unschicklich seyn, hier die Erklärung einiger Haupteigenschaften der Materie vorangehen zu lassen, zumal da diese Schrift für eine Art Leser bestimmt ist, die auch hierüber das Nothwendige wissen mögten. Ich weiß wohl, daß dieses ganze Capitel mehr in einem physikalischen Compendium als hier einen Platz verdient; aber warum soll man denn auch Sachen nicht sagen, oder ganz übergehen, die so nahe mit einander verwandt sind, und die beständig aus einander fließen? Dies wird mich hoffentlich entschuldigen, daß ich mich gerade bei dieser Materie etwas mehr ausgedehnt habe, als man erwarten konnte. Mein Hauptzweck dabei war, etwas mehr über den Zusammenhang der Materie zu sagen, als man gewöhnlich in Anfangsgründen dieser Art antrift. Ich habe mich dazu der besten Schriftsteller, als eines Muschenbroecks, Martin und andre mehr, bedienet, habe aber nur immer auf das Rücksicht genommen, was einen Einfluß in das bürgerliche Leben haben konnte. Von den übrigen Eigenschaften der Körper, deren ich hier in diesem Capitel erwähne, habe ich nur das Nöthigste beigebracht, oder so viel darüber gesagt, als zur Erklärung nöthig war.

§. 2.

Alles was wir unter dem Namen Materie begreifen, hat eine Ausdehnung in die Länge, Breite, Dicke oder Höhe. Auch der geometrische Körper ist ausgedehnet, aber es fehlet ihm Materie, und daher ist er durchdringlich. Vermöge der Ausdehnung, und weil diese ihre Grenze hat, erhalten beide Arten von Körpern ihre Figur oder Gestalt. Doch bei der Materie ist diese leztere sehr verschieden, und man trift in der ganzen Körperwelt nicht zween Körper an, die sich einander vollkommen gleich sind. Selbst diese vollkommne Gleichheit vermißt man sogar bei den Bestandtheilen (so weit wir dieselben kennen) der Körper.

§. 3.

Allgemein nehmen die Chemiker und Physiker jezt folgende Stoffe für die ersten Grundtheile, Elemente, der Körper an. Feuer, Luft, Wasser, Brennbares und Erde. Andere, die als die zweyten Bestandtheile angesehen werden müssen, sind aus den ersten zusammengesezt, als wozu auch die Salze am füglichsten gerechnet werden. Unser Küchensalz besteht aus seiner eignem Säure, und aus einem mineralischen Alkali, und in so ferne kann man sagen, sind dies die Bestandtheile des Küchensalzes, aber nicht die ersten. Denn

wird

wird das Salz chemisch zerlegt, so kommt man zuerst auf obige Bestandtheile, aber diese lassen sich wiederum in Erde, Wasser u. s. w. zerlegen.

§. 4.

Diese erklärten Bestandtheile, die man an und für sich als hart ansehen kann, hängen so mit einander zusammen, daß sie Körper von verschiednen Arten bilden, welches auch der Grund ist, daß die Körper in flüssige und feste eingetheilt werden. Flüssig und fest, hängt bloß von der Größe der Flächen ab, womit die Bestandtheile der Körper sich einander berühren. Bei den flüssigen ist dieser Zusammenhang sehr schwach, sie gleiten über einander weg, und daher weicht ein flüssiger Körper dem Drucke so leicht aus. Die Ursache des Zusammenhanges der Körper wissen wir nicht. Einige Naturkündiger sehen es für eine allgemeine Eigenschaft der Materie an, und das ist, seit dem berühmten Neuton, fast durchgehends die Meinung der jetzigen Gelehrten. Andre setzten die Ursache des Zusammenhangs in einer Kraft, die von aussen auf die Körper würkte. Wir mögen nun eine Ursache annehmen, welche wir wollen, so ist doch so viel gewiß, daß sich viele Geschäfte im bürgerlichen Leben auf die Würkung des Zusammenhanges der Körper gründen. Dahin gehört das Löthen der Metalle an einander, Vermischungen der Körper, und die Auflösungen derselben durch flüssige Körper. Daß der Zusammenhang der Körper nicht von dem Drucke der Luft, wie man anfangs wol glauben sollte, herrühren könne, läßt sich aus dem Versuche mit zweien bleiern Halbkugeln herleiten, die mit ihren glatten Flächen an einander gesetzet werden. Der Zusammenhang von diesen ist weit größer, als der Druck der Luft beträgt, welcher auf die Fläche der Kugel drückt.

§. 5.

Ueber den Zusammenhang der Materie hat vorzüglich Muschenbroek viele und nützliche Versuche angestellt, davon ich nur etliche hier anführen will. Der Versuch mit den Bleikugeln läßt sich mit mehrern Körpern anstellen, hauptsächlich wenn noch ein anderer Körper darzwischen gebracht wird, der den Zusammenhang noch mehr befördert. Wenn man Glas- und Messingflächen zusammen bringt, so hängen diese nicht so genau zusammen, als mit bleiernen. Aber der Zusammenhang ist sehr merklich, so bald man nur etwas zwischen sie bringt, welches die Luft vertreibt, und die hervorragenden Theile der Fläche ausfüllet. Dieser Zwischenkörper vertritt alsdann die Stelle eines Mörtels. Dazu ist Oel besser als Wasser, und Talg noch besser als das erste. Auch hier trifft man einen Unterschied an, ob der Zwischenkörper kalt oder warm ist. So brauchen gläserne Platten, mit kaltem Talg bestrichen,

strichen, um sie von einander zu ziehen, nur eine Kraft von 130 ℔; aber mit heissem Talg bestrichen, waren 300 ℔ nöthig.

Messingerne Platten, mit kaltem Talg bestrichen, erforderten eine Kraft von			mit heissem eine Gewalt von
	150 ℔	——	800 ℔
Kupferne	200 —	——	850 —
Marmorne	225 —	——	600 —
Silberne	150 —	——	250 —
Eiserne	300 —	——	950 —

Diese Platten hängen, wenn man Wasser oder Oel dazwischen bringt, mit folgender Kraft zusammen:

mit Wasser	12 Unzen,
Oel	18 Unzen,
venetianischen Terpenthin	24 Unzen,
Harz	850 ℔
Talglichte	800 —
Pech	1400 —

Von allen hängt Pech also die Körper am stärksten zusammen.

§. 6.

Die Versuche, welche Muschenbroek mit verschiednen Holzarten anstellte, können für die Baukunst von großem Nutzen seyn. Ich will also einige mit hieher setzen. Er bediente sich viereckigter hölzerner Stäbe, an welchen die Seite des Vierecks $\frac{26}{100}$ eines Zolles betrug. Die Gewichte, welche erfordert wurden, jeden solchen Stab der Länge nach aus einander zu reissen, waren folgende:

Lindenholz	1000	℔
Ellern	1000	—
Führen	600	—
Eichen	1150	—
Rüstern	950	—
Buchen	1250	—
Eschen	1250	—

Der stärkste Zusammenhang äussert sich demnach im Buchen- und Eschenholze. Dieser Zusammenhang heißt absolut (Cohærentia absoluta). Relativen Zusammenhang (Cohærentia respectiva) nennt Muschenbroek den, welchen der Körper äussert, wenn man denselben nicht der Länge, sondern der Dicke nach zerreißt. Er befestigte das eine Ende des Stabes in einer metallenen Platte, und an dem andern hing er, in gewisser Entfernung folgende Gewichter an.

Bei dem Führenholze war		und das Gewicht
die Entfernung	9 Zoll	40 Unzen
Eichen	$8\frac{1}{2}$ —	48 —
Rüstern	9 —	44 —
Fichten	$9\frac{1}{2}$ —	$36\frac{1}{2}$ —
Ellern	$9\frac{1}{4}$ —	48 —
Buchen	7 —	$56\frac{1}{2}$ —

Bei dem letztern war das Gewicht am größten, aber es zog auch in der kürzesten Entfernung.

§. 7.

§. 7.

Ueber die Festigkeit der Metalle findet man beim Muschenbroek folgende Versuche:

reines Gold brach durch ein Gewicht von		578 ℔
reines Silber	——	1156 —
Japanisches Kupfer	——	573 —
Deutsches Eisen	——	1930 —
Englisches Zinn	——	188 —
Spießglaskönig	——	30 —
Goslarischen Zink	——	76–83 —
Wismuth	——	85–92 —

Diese Versuche geschahen mit Parallelepipedis von $\frac{17}{100}$ Rheinl. Zoll. Werden die Metalle gehämmert, so kommen ihre Theile näher zusammen, und brechen daher nicht so leicht, als wenn selbige gegossen werden. So brach die geschmiedete Goldstange erst durch ein Gewicht von 895 ℔.

§. 8.

Werden Metalle mit einander vermischt, so ist ihr Zusammenhang noch stärker.

Zwei Theile Gold mit einem Theile Silber brach von	—	823 ℔
Sieben Theile Gold mit einem Theile Kupfer zerriß von		1589 ℔

woraus man leicht schliessen kann, daß es weit vortheilhafter ist, Kupfer mit dem Golde zu vermischen, als Silber; es verhält sich fast wie 1 : 2.

Fünf Theile Silber mit einem Theile Kupfer brach von	1401 ℔
Zehn Theile Silber mit einem Theile Zink brach von 1037 oder	1184 —
Fünf Theile Silber mit einem Theile Wismuth von —	375 —
Zehn Theile Silber mit einem Theile Blei — —	338 —
Vier Theile Silber mit einem Theile Zinn von Malacca	1364 —

§. 9.

Versuche mit eisernen geschmiedeten Parallelepipedis $\frac{1}{10}$ Zoll dick, zerrissen durch folgende Gewichte:

Schwedisches brach von	726 ℔
Osemundsches —	700 —
Deutsches — 755 auch	740 —
Ordinär deutsches —	676 —
Spanisches aus Andalusien	800 —

Stählerne Parallelepipeda von eben der Dicke, und zwar von dem weichsten, brach durch 1190 ℔

Von dem gewöhnlichen —	1080 —
Von dem am besten gehärteten	1500 —

§. 10.

Kupferne Parellelepipeda von $\frac{17}{110}$ Zoll Rheinl.

Schwedisches Kupfer,	geschmiedet	1065 ℔
———	gegossenes	1054 —
Ungarisches —	gegossenes	895 —

Japa-

Japanisches Kupfer, gegossenes 573 ℔

Spanisches aus Andalusien, gegossenes 809 —

Fünf oder sechs Theile Kupfer mit einem Theile Zinn, brach von 1160 ℔; daher 100 ℔ Kupfer, 10 ℔ Zinn und 8 ℔ Messing; oder nach andern, 100 ℔ Kupfer, 10 ℔ Zinn, 5 ℔ Messing und 10 ℔ Blei eine gute Proportion für Stück und Glockengut. Kupfer und Zink, zu gleichen Theilen, giebt ein schönes rothes Metall, das von 108 bis 148 ℔ brach; Kupfer, und die Hälfte Zink, giebt ein Metall, welches blasser von Farbe, sich aber gut bearbeiten läßt. Es brach bei 205 auch 210 ℔.

§. 11.

Gezogenes Zinn kann nicht ein so großes Gewicht tragen, als wenn es blos gegossen ist. Bey einem Parallelepipedo aus Blei von $\frac{17}{100}$ Zoll, gaben die Versuche folgendes:

Englisches von Hull brach mit 25 ℔,

Blei aus Indien, von 63 und 66 ℔.

Blei, mit Zinn vermischt, brach von einem kleinern Gewichte. Z. B. deutsches, von 17 ℔. Gezogenes Blei ist weit zäher und stärker als gegossenes; so brach Blei, das 9 mal gezogen, von 89 ℔.

Drei Theile Blei, mit einem Theil Zinn von Malacca, brach von 170 ℔. Ein Theil Blei, mit einem Theile Wismuth, erforderte ein Gewicht von 207 ℔.

Acht Theile Blei, mit einem Theile Spießglaskönig, brach von 260 ℔.

$\frac{4}{5}$ Theil Zinn, $\frac{1}{5}$ Blei und $\frac{3}{5}$ Zink durch 390 ℔.

Dasjenige, was ich hier von den Metallen selbst, und von deren Vermischung mit andern Metallen, habe beibringen wollen wird hinlänglich seyn, übrigens verweise ich den Leser auf das vortrefliche Buch des Herrn Muschenbroek, wo er, nebst diesen, noch viele andere Versuche über die Festigkeit der Tücher, über die, der Felle, musikalischer Saiten und Knochen, antreffen wird.

§. 12.

Hieher können auch die Versuche, welche man mit den Haarröhrchen anstellet, gerechnet werden. Denn setzt man eine solche Röhre in ein Gefäß mit Wasser (zu mehrerer Deutlichkeit kann man es ein wenig roth oder gelb färben) so steigt das flüssige Wesen beinahe auf einen Zoll hoch in die Röhre. Daß dieses nicht von dem Drucke der Luft herkomme, beweiset der Versuch, den man mit eben dieser Röhre unter der Luftpumpe machen kann. Aber nicht jedes flüssige Wesen steigt gleich hoch in der Röhre, sondern diese Höhe ist verschieden, nachdem der Liquor mehr oder weniger geistige Theile bei sich führet.

§. 13.

Das Wasser steht in einer Haarröhre am Rande höher als in der Mitte, welches auch der

Fall

Fall bei jeder andern Röhre ist. Ein Beweis, daß die Anziehungskraft des Glases stärker, als der Zusammenhang des Wassers ist. Dieser Fall trift aber nicht mit dem Quecksilber ein, sondern hier ist die Fläche desselben jederzeit erhaben, und beweiset also, daß das Quecksilber unter sich stärker zusammenhängt, als die Anziehung des Glases auf dasselbe würken kann. Daß die Anziehungskraft des Glases stärker auf das Wasser als auf das Quecksilber würkt, ist auch daraus klar: wenn ein Wassertropfen und ein Kügelchen Quecksilber auf eine Glasplatte gegossen werden, daß der erste alsdann gleich zerfließt, der andre aber seine runde Gestalt beibehält.

§. 14.

Zwei Glastafeln, unter einem sehr kleinen Winkel an einander gelegt, und in ein Gefäß mit Wasser gestellt, wirken eben so auf das Wasser, als wenn der Versuch mit einem Haarröhrchen angestellt wird, und das Wasser steigt zwischen den Wänden der Glastafeln nach einer hyperbolischen Linie.

§. 15.

Die Verwandschaft der Körper in der Chemie gründet sich auf die allgemeine Anziehung der Körper. So löset das Königswasser, Kupfer, Zinn und Gold auf. Das erste wird von dem zweiten, und dies wieder von dem dritten, aber eben dieses läßt sich weder von dem ersten noch

zweiten

zweiten niederschlagen. Man schließt demnach, daß das Königswasser mit dem Golde die meiste Verwandschaft habe. Die Laugensalze haben mit dem Wasser und Fette eine Verwandschaft, lösen, so zu sagen, beide auf, und verbinden beide mit einander zu einem seifenartigen Körper.

Man sehe hierüber Scheffers Chemie von Bergmann herausgegeben.

§. 16.

Aus dem Zusammenhange von den Theilen der Materie, rühret die Undurchdringlichkeit der Körper her. Vermöge dieser, widersteht ein Körper jeden andern, der sich in seinen Platz setzen will. Die Theile des Körpers hängen aber nicht so mit einander zusammen, daß sie den ganzen Raum (Volumen) des Körpers ausfüllen, sondern, die Theile, Elemente des Körpers, mögen eine Gestalt haben, welche sie wollen, so bleiben doch Zwischenräume (Pori) übrig, die nicht mit eben dem Stoffe ausgefüllet sind, woraus der Körper bestehet; woraus man denn auch leicht abnehmen kann, daß kein vollkommen dichter Körper in der Welt existiret. Indessen gründet sich auf die Dichtigkeit oder auf die Masse der Körper die eigenthümliche Schwere derselben. Je dichter der Körper ist, das heißt, je mehr Masse in einem bestimten Raum enthalten ist, desto schwerer ist auch der Körper. Ist die Platina ganz rein von Eisen, so ist ihre eigenthümliche

liche Schwere 23 : 1 gegen die Schwere des Wassers. Dies ist der dichteste Körper, den wir kennen, und doch löset ihn das Königswasser auf. Ein Beweis, daß die Theile dieses Auflösungsmittels in die Zwischenräume der Platina eindringen.

§. 17.

Daß das Feuer, als das heftigste und gewaltsamste Auflösungsmittel, die dichtesten und härtesten Körper in Fluß bringet oder auflöset; daß die Säuren, oder auch andere Auflösungsmittel, die Körper zertrennen, ganz oder zum Theil auflösen, geht nur deswegen an, weil die Körper Zwischenräume haben. Freilich sind diese verschieden, und in einigen Körpern sind sie weiter, in andern aber enger. Und dieses ist auch die Ursache, warum das eine Auflösungsmittel für sich allein nicht geschickt ist, einen Körper aufzulösen, da es ihn doch auflöset, so bald es mit einem andern vermischt wird. Ein Beispiel haben wir am Königswasser, das aus Salz- und Salpetersäure zusammengesetzt ist, keine von beiden aber für sich das Gold auflöset, sondern nur dann auf das Gold würket, wenn eine mit der andern vermischt ist. Die Bestandtheile des Auflösungsmittels müssen entweder in die Zwischenräume der Körper nicht hineindringen, oder aber auch nicht scharf genug seyn, um sich Platz machen zu können.

§. 18.

§. 18.

Bei einigen Körpern sind die Zwischenräume deutlich genug zu sehen, als beim Schwamm; bei andern fallen sie nicht so leicht in die Augen, können aber durch künstliche Verrichtungen leicht sichtbar gemacht werden. So läßt sich das Quecksilber durch Leder drücken, ein Mittel, wodurch es zugleich gereiniget wird. Dahin kann man auch die Ausdünstung unsers eignen Körpers rechnen. Auch die durchsichtigen Körper, als Glas, Luft rc. gehören hierher.

§. 19.

Ob die Zwischenräume der Körper mit einer fremden Materie angefüllet sind, oder ob es zerstreuete Räume in der Körperwelt giebt, dies zu untersuchen hat von jeher vielen Streit unter den Naturkündigern veranlasset. Einige behaupteten es, andere waren dagegen. Doch dies zu untersuchen gehöret mehr in die eigentliche Naturlehre, als hieher. So viel ist aber gewiß, daß die Zwischenräume noch mit andern Stoffen angefüllet seyn können, als die wir bis jetzt kennen. Denn wie viele Arten (die sogenannten Luftarten) von diesen, sind nicht in neuern Zeiten durch das Bemühen eines Pristley und andern berühmten Männern, in den Körpern entdeckt und hervorgebracht worden, die die Alten gar nicht kannten, oder wohl gar an ihrem Daseyn zu zweifeln Ursache hatten?

§. 20.

Auf die Zwischenräume der Körper gründet sich auch die Theilbarkeit derselben. Jeder Körper ist theilbar, aber wie weit sich dieses erstreckt, wissen wir nicht. Ob die Theilbarkeit ohne Ende fortgehet, oder ob sie nur auf gewisse Gränzen führet, wo die Materie sich nicht mehr theilen lasse, ist eine Sache, worüber die Meinungen der Naturkündiger von jeher verschieden gewesen sind. Geometrisch läßt die Theilbarkeit ohne Ende sich leicht darstellen, ob dies aber physisch angeht, ist eine andere Frage. So viel ist indessen gewiß, daß die Theilbarkeit der Materie sich sehr weit erstreckt, welches einige Beispiele erläutern mögen.

Ein Gran Cochenille in Uringeist aufgelöset, färbet 125,280 Gran Wasser. Ein Gran Karmin läßt sich in 442,368 Theile theilen. Ein Gran Kupfer in Salmiakgeist aufgelöset, giebt 28534 Gran Wasser eine blaue Farbe. Keil giebt diese Theilung gar auf 105,570000 an.

§. 21.

Durch die große Dehnbarkeit der Metalle läßt sich ebenfalls der Beweis für die Theilbarkeit der Materie fortsetzen. Der Golddrath, woraus unsere Tressen verfertiget werden, ist eigentlich ein Silberdrath, und nur mit Gold belegt, dessen Dicke nur den $\frac{1}{125,000}$ Theil einer Linie beträgt. Einen silbernen Cylinder von $22\frac{1}{2}$ ℔ an

Gewichte zu vergolden, der 22 Zoll lang und 15 Linien dick ist, braucht man nur eine Unze Gold, und aus diesem Cylinder zieht der Goldzieher einen Drath, oder eigentlich einen geplätteten Drath, den man Lahn nennt, von 110 Meilen. Dies beträgt an Linien 190080000. Nun läßt sich eine Linie noch in 12, dem Auge merkbare Theile zerlegen, folglich in 12 × 190080000 = 2280,960000 Theile. Dies ist aber ein Silberblech, das zwei Flächen hat, und demnach wird die Unze Gold in 4561 Millionen 920,000 Theile zerlegt, mithin ein Gran, als den 576sten Theil einer Unze, in 7,920,000 Theile. Ein 120 Ellen langer Faden wog nicht mehr als einen Gran. Dahin gehöret auch das Gewebe der Faden, den die Spinnen aus ihren Warzen spinnen, die Vertheilung des Geruchs, und andere Sachen mehr, welche dieses noch mehr erläutern können. v. Sigaud de la Fond Experimental Physik 1 T.

§. 22.

Sobald sich die Körper theilen lassen, so muß man auch eine Veränderung dieser Theile unter einander annehmen. Diese Veränderung erstrecket sich aber auf den Ort der Theile. Wir nennen dieses, sich bewegen, und können von dieser Eigenschaft der Materie keine andre Ursache angeben. Es ist also die Bewegung nichts anders, als die Veränderung des Orts. Aber keine

Bewe-

Bewegung kann sich ereignen, wenn nicht die Theile des Körpers von einander getrennet werden, und dieses setzt eine bewegende Kraft voraus, weil keine Wirkung ohne Ursache seyn kann.

§. 23.

Je mehr Masse oder Materie ein Körper hat, desto mehr widersteht er der Bewegung. Es scheinet, als wenn jeder Körper etwas in sich schlösse, wodurch er nicht nur die Bewegung, sondern auch die Ruhe hindern wolle. Viele nennen dies eine beiwohnende Kraft, und zwar die Kraft der Trägheit (vis inertiae). Aber der Zustand eines Körpers kann wohl nicht gut eine Kraft heissen, wodurch sich der Körper sowohl bei der Bewegung als bei der Ruhe leidend verhält. Besser nenne man diesen Zustand schlechtweg Trägheit, alsdenn ist es eine allgemeine Eigenschaft der Materie. Bei jedem Körper, den wir aus der Ruhe in Bewegung setzen wollen, oder umgekehrt, finden wir diesen Widerstand. Die Schwere kommt hierbei nicht in Betracht, weil wir diese erst fühlen, wenn wir den Körper heben wollen. Dieses Widerstreben hat auch keine bestimmte Größe, sondern es richtet sich nach der Menge der Materie, und daher sagen wir, der Körper hat mehr Trägheit, je mehr Masse derselbe besitzt.

Man sehe hierüber Herrn Hofrath Kästners höhere Mechanik 2 Cap. S. 11 rc.

Das zweite Capitel.

Von der Bewegung.

§. 24.

Bewegung heißt, wie wir im vorigen Capitel gesehen haben, nichts anders, als eine Veränderung des Orts. Die Lehre, welche von der Bewegung im eigentlichen Verstande handelt, heißt die Dynamik, sie ist sowohl in der eigentlichen Naturlehre, als in der practischen Mechanik und in andern Theilen der angewandten Mathematik, von einem ausgebreiteten Nutzen. Die vorzüglichsten Lehren dieser Wissenschaft sollen in den folgenden Capiteln näher und umständlicher erkläret und aus einander gesetzet werden.

§. 25.

Der Ort, den ein Körper im Weltraum einnimmt, heißt sein wirklicher, absoluter Ort. Verändert er diesen, so heißt seine Bewegung ebenfalls absolut. Vergleicht man seinen Ort aber mit andern Körpern, die ihn umgeben, so heißt der Ort relativ, und die Bewegung gleichfalls relativ.

§. 26.

Was eine Bewegung hervorbringt oder hindert, heißt hier allgemein eine Kraft. Diese kann lebendig oder würkend seyn, wenn sie den Körper in Bewegung setzt; oder todt, drückend, wenn keine Bewegung erfolget.

§. 27.

§. 27.

Ruhe, absolute oder relative, ist völlig der Bewegung, sie sei absolut oder relativ, entgegengesetzt. Ruhe muß nicht mit Gleichgewicht verwechselt werden. Unter diesem letztern Zustande verstehet man in der Geostatik (die Lehre vom Gleichgewichte der Körper) wenn zwei oder mehrerer Körper in eine solche Lage gesetzt werden, daß sie sich unter einander selbst, vermöge ihres gleichen Gewichts, Drucks oder Zugs, an der Bewegung hindern.

§. 28.

Richtung heißt diejenige Linie, nach welcher der Körper sich beweget.

§. 29.

Die Bewegung heißt gleichförmig, wenn der Körper in gleichen Zeiten gleiche Räume zurücklegt. Man sagt alsdann, die Räume sind den Zeiten proportional, oder stehen mit dem Raume in gleichem Verhältnis. Braucht ein Mensch zu einer Meile zwei Stunden Zeit, so legt er in 4 Stunden, oder in der doppelten Zeit, 2 Meilen oder den doppelten Raum zurück. Heissen die Räume S und s, die Zeiten T und t, so ist $S : s = T : t$; oder die Zeiten verhalten sich wie die Räume, und so auch umgekehrt $T : t = S : s$. Ist $t = 1$, so erhält man $T : 1 = S : \frac{S}{T}$.

§. 30.

Ungleichförmig heißt die Bewegung, wenn sich der Körper in jeder folgenden Zeit entweder geschwinder (beschleunigend) oder auch langsamer (abnehmend) als in der ersten Zeit beweget.

§. 31.

Der Körper bewegt sich einfach, wenn eine oder mehrere Kräfte den Körper nach einer gewissen Richtung zu bewegen suchen. Zusammengesetzt wird sie, wenn verschiedene Kräfte so auf den Körper wirken, daß ihre Richtungen gleichfalls verschieden sind.

§. 32.

Geradlinigt heißt die Bewegung, wenn der Körper sich nach einer geraden Linie beweget. Krumlinigt ist die Bewegung, wenn der bewegte Körper alle Augenblick seine Richtung ändert.

§. 33.

Unter der Geschwindigkeit versteht man den Raum, den der Körper in gleichen Zeiten zurücklegt. Wenn der Mensch, um eine Meile zu gehen, 2 Stunden gebraucht, das Pferd aber eben diesen Raum in einer Stunde zurücklegt, so verhalten sich beider Geschwindigkeiten zu einander, wie die Zeiten, das heißt, wie 2 : 1. Oder man kann auch sagen, die Geschwindigkeit stehet im geraden Verhältnisse des Raums, und im umgekehrten der Zeit.

§. 34.

Nennet man die Geschwindigkeit V, so ist $V = \frac{S}{T}$ das heißt: der Raum durch die Zeit dividirt, giebt die Geschwindigkeit, v, ſ, t bedeute dasselbe für einen andern Körper, so ist $v = \frac{ſ}{t}$ und man hat $V : v = \frac{S}{T} : \frac{ſ}{t}$, folglich $V ſ T = v S t$ demnach $V : v = ſ T : S t$.

Ist $T = t$ so erhält man $V : v = S : ſ$. Die Geschwindigkeiten verhalten sich demnach direct, wie die Räume. Ist aber $S = ſ$, so bekömmt man $V : v = t : T$, oder die Geschwindigkeiten verhalten sich umgekehrt, wie die Zeiten.

§. 35.

Aus der Gleichung (34) $V = \frac{S}{T}$ folget $S = V T$. Oder der Raum ist gleich der Geschwindigkeit, multiplicirt in die Zeit. Zu mehrerer Deutlichkeit kann man sich daher den Raum als ein Rechteck A B C D (Fig. 1) vorstellen, davon die eine Seite AB die Zeit, die andere AC aber die Geschwindigkeit, vorstellet.

§. 36.

Der Raum, den ein anderer Körper zurückgeleget hat, sei $ſ = v t$, so ist $S : ſ = V T : v t$.

Ist nun $T = t$, so erhalt man $S : ſ = V : v$, demnach verhalten sich die Räume wie die Geschwindigkeiten; und ist $V = v$, so haben wir $S : ſ = T : t$, oder die Räume verhalten sich wie die Zeiten. S. oben (29).

§. 37.

Ferner aus der Gleichung $V = \frac{S}{T}$ (34) folget $T = \frac{S}{V}$. Die Zeit ist gleich dem Raume durch die Geschwindigkeit dividirt.

Wir haben also auch $t = \frac{ſ}{v}$ und daher $T : t = \frac{S}{V} : \frac{ſ}{v}$ folglich ist $\frac{Tſ}{v} = \frac{tS}{V} = TſV = tSv$ demnach $T : t = Sv : ſV$, und ist $S = ſ$, so erhält man $T : t = v : V$. Die Zeiten stehen im umgekehrten Verhältnisse der Geschwindigkeiten. Ist aber $v = V$, so ist $T : t = S : ſ$, oder die Zeiten stehen im geraden Verhältnisse der Räume.

§. 38.

Die Kraft, die den Körper in Bewegung setzen soll, muß in die ganze Masse des Körpers vertheilet werden; das heißt, jeder Theil des Körpers muß eine gleiche Geschwindigkeit haben. Ich rechne hier nicht auf diejenigen Theile oder Puncte eines Körpers, wie z. B. bei einer Kugel,

gel, die sich etwas langsamer bewegen, nachdem sie einen größern oder kleinern Kreis durchlaufen, sondern bleibe bloß bei der Masse des Körpers stehen. Und es ist offenbar, daß je mehr Theile, oder je mehr Masse, der Körper hat, eine desto größere Kraft auch anzuwenden ist, um den Körper in Bewegung zu setzen, oder ihm eine gleiche Geschwindigkeit zu geben. Man heißt dieses die Quantität der Bewegung.

§. 39.

Ein Körper kann, in Rücksicht eines andern, einen gleichen Raum, in gleicher Zeit zurücklegen, aber die Quantität der Bewegung kann sehr verschieden seyn. Ein Körper, der mehr Masse hat als ein anderer, übrigens aber gleiche Geschwindigkeit mit demselben, bestätiget dieses. Man nehme z. B. an, ein Körper habe 10 Theile Masse und 5 Grade Geschwindigkeit; ein anderer besitze nur 5 Theile Masse, aber gleiche Geschwindigkeit mit dem vorigen, so ist klar, daß in den letztern nur die Hälfte der Masse, als in dem erstern, in Bewegung gesetzt wird. Die Wirkungen, oder die Kräfte beider Körper, müssen sich also auch eben so verhalten als ihre Massen, oder die Quantität der Bewegungen in beiden verhält sich, wie die Producte aus den Massen in die Geschwindigkeiten.

§. 40.

Nennet man demnach Q die Größe der Bewegung, und M die Masse, V aber die Geschwindigkeit des Körpers, so ist Q oder die Quantität der Bewegung $= MV$. Und bei einem andern Körper mögen q, m und v dieselben Dinge bedeuten, so ist $q = mv$, mithin verhalten sich die Quantitäten der Bewegung von ein paar Körper wie $Mv : mv$, oder $Q : q = MV : mv$. Sind aber die Massen einander gleich, so ist $Q : q = V : v$, das ist, die Quantitäten der Bewegung verhalten sich bei gleichen Massen wie die Geschwindigkeiten der Körper. Daher die Würkung einer Flintenkugel aus der freyen Hand geworfen, zu der, die sie erhält, wenn sie aus dem Gewehre geschossen wird. Ist hingegen $V = v$, oder sind die Geschwindigkeiten gleich, so erhält man $Q : q = M : m$, folglich wie die Massen.

Aus der Gleichung $Q = MV$ findet man auch M und V. Denn $M = \frac{Q}{V}$ und $V = \frac{Q}{M}$.

§. 41.

Diese Quantität von Bewegung würde der Körper beständig behalten, wenn keine fremde Ursachen auf ihn würkten, oder sich seiner Bewegung entgegen stellten. Zu diesen Hindernissen muß man vor allen Dingen Rücksicht auf den Körper nehmen, worin sich der Körper bewegt.

Je

Je dichter nemlich dieser ist, desto mehr Widerstand, folglich desto mehr Abgang von der Quantität der Bewegung leidet der bewegte Körper. So widersteht das Wasser ohngefähr 800 mal mehr als die Luft, weil die Dichtigkeit des erstern zu dem zweiten sich beinahe wie diese Zahlen verhalten.

§. 42.

Ein anderes Hinderniß, das sich der Bewegung eines Körpers in Weg stellet, ist seine eigne Fläche. Je mehr Fläche er der Luft, oder einen andern Körper entgegen hält, desto mehr Abgang leidet derselbe an der Quantität der Bewegung. Und endlich, muß man ja nicht die Geschwindigkeit des bewegten Körpers selbst vergessen. Weil, je geschwinder sich der Körper durch einen Zwischenkörper bewegt, desto mehr Theile desselben, muß er vor sich hertreiben, und daher auch desto eher zur Ruhe gelangen.

§. 43.

Zu diesen drei angeführten wichtigen Hindernissen kommt dennoch die vierte, nemlich das Reiben des Körpers, entweder an der Fläche, worauf er sich beweget, oder auch das Reiben der Theile an einander, wodurch der Körper sich beweget. Alle diese Umstände zusammengenommen verstatten also nicht, daß ein bewegter Körper, vermöge seiner Trägheit, auf unserer Erde sich ohne Unterlaß fortbewegen könne. Und man

sieht

sieht daher leicht, was für ein thörigtes Unternehmen dasjenige ist, eine immerwährende Bewegung, oder das sogenannte Perpetuum mobile, angeben zu wollen.

§. 44.

Bei Erklärung des Zwischenkörpers habe ich angenommen, daß derselbe völlig in Ruhe sei. Ist dies aber nicht, und der Zwischenkörper ist selbst in Bewegung, und zwar nach derselben Richtung, nach welcher der Körper sich beweget, so ist der Abgang an der Quantität der Bewegung nicht so groß, als wenn der Zwischenkörper sich in entgegengesetzter Richtung des bewegten Körpers beweget. Anders wird dieses noch ausfallen, so bald der Zwischenkörper elastisch ist. Dieses zu untersuchen erfordert ein eignes Capitel.

Das dritte Capitel.

Vom Stoße der Körper.

§. 45.

Wenn ein bewegter Körper einen andern auf seinem Wege begegnet, der entweder in Ruhe ist, oder sich auch beweget, so wird der bewegte Körper den andern mit der Quantität seiner Bewegung, bei dem Berühren stoßen, und dem andern etwas von seiner Quantität mittheilen. Dadurch verlieret also der stoßende

Körper und der gestoßene gewinnet dieses an seiner eignen Quantität der Bewegung.

§. 46.

Nun sind die Körper entweder hart, die bei dem Stoße in ihrer Figur keine Veränderung leiden, oder weich, die beim Berühren ihre Figur verändern, oder wie man sich sonsten auch ausdrückt, platt werden, dabei aber nach dem Stoße dieselbe Figur behalten. Oder es giebt auch endlich solche Körper, die in dem Augenblick, wo sie sich einander berühren, platt werden, aber gleich nach dem Berühren wieder das Vermögen haben, ihre Figur wieder herzustellen. Diese heissen federharte (elastische) Körper. Von dem Stoße dieser drei Arten von Körpern werde ich in diesem Capitel das Nähere aus einander setzen.

§. 47.

Vollkommen harte, weiche und elastische Körper giebt es gar nicht, allein die Versuche, die man mit ihnen anstellet, müssen so angesehen werden, als wenn sie mit vollkommen harte, weiche und elastische Körper gemacht wären.

§. 48.

Bei dem Stoße selbst setze ich voraus, daß derselbe nach einer geraden Linie, die durch den Schwerpunct beider Körper, und zwar senkrecht geschehe; dann auch, daß die Theile des Körpers, wie ich schon oben erwähnet habe, sich alle gleich

gleich geschwinde bewegen, ohne auf einige Puncte Rücksicht zu nehmen, die sich langsamer bewegen als andere. Dieses vorausgesetzt, werde ich erst vom Stoße harter Körper handeln, und dann zum Stoße elastischer übergehen. Hierbei giebt es drei Fälle zu betrachten. Der gestoßene Körper ist entweder in Ruhe, oder bewegt sich auch nach derselben Richtung mit dem Stoßenden, aber langsamer als der Stoßende, oder derselbe bewegt sich auch nach der entgegengesetzten Richtung des Stoßenden.

§. 49.

Der erste Fall, wenn der gestoßene Körper ruhet. Haben die Körper gleiche Masse, so verlieret der Stoßende bei der Berührung die Hälfte seiner bewegenden Quantität, und beide Körper bewegen sich nach dem Stoße mit gleicher Geschwindigkeit. Auch die Quantität der Bewegung bleibt nach dem Stoße so groß, als sie vor demselben war. Denn, so viel der stoßende Körper an seiner Geschwindigkeit verlieret, eben so viel gewinnet er auch, durch den gestoßenen, an Masse wieder.

§. 50.

Indem der bewegte Körper auf den ruhenden stößt, so kann er seine Bewegung nicht eher fortsetzen, bis er den ruhenden aus dem Wege getrieben hat. Dieser widersetzt sich ihm aber mit seiner ganzen Masse, und die Gegenwirkung ist gleich der Wirkung des Stoßenden. Dieser theilet also dem andern einen Theil seiner bewegenden Kraft mit, und beide Körper kann man nach dem Maaße als einen einzigen Körper ansehen. Jetzt hat also der Stoßende an Geschwindigkeit verlohren, aber an Masse gewonnen.

§. 51.

Der zweite Fall trift ein, wenn sich beide Körper nach einerlei Richtung bewegen. Der gestoßene Körper beweget sich in diesem Fall langsamer als der stoßende, denn sonst könnte dieser den ersten nicht einholen. Haben nun beide Körper gleichviel Masse, aber der Stoßende noch einmal so viel Geschwindigkeit als der Gestoßene, so ist die Quantität der Bewegung bei dem Stoßenden auch noch einmal so groß als bei dem Gestoßenen. Der Stoßende wird demnach bei der Berührung an seiner Geschwindigkeit verlieren, der Gestoßene aber auch eben so viel gewinnen. Folglich bleibt auch die Quantität der Bewegung nach dem Stoße eben so groß, als sie vor demselben war. Denn beide setzen nun ihren Weg zwar langsamer, aber doch mit mehr Masse fort.

§. 52.

Der dritte und letzte Fall ist, wenn beide Körper in Bewegung sind, aber in entgegengesetzter Richtung. Begegnet der stoßende Körper dem gestoßenen, so hat derselbe nicht allein die Masse des gestoßenen Körpers zu überwinden,

sondern

sondern er muß auch zugleich die Geschwindigkeit desselben stören. Beide Hindernisse benehmen ihm also etwas von der Quantität seiner Bewegung, und die Größe derselben kann der, welche sie vor dem Stoße war, nicht mehr gleich seyn. Haben beide Körper gleich viel Masse und gleich viele Geschwindigkeit, so ruhen beide nach dem Stoße. Die Quantitäten der Bewegungen heben sich hier einander auf, oder der Unterschied zwischen beiden wird Null. Hat der stoßende Körper aber eine größere Quantität der Bewegung vor dem Stoße, als der gestoßene, so wird er diesen mit sich fortreissen, aber beide werden alsdann langsamer ihren Weg fortsetzen, als vor der Berührung. Besitzt hingegen der gestoßene Körper mehr Quantität der Bewegung als der Stoßende, so geschieht das Gegentheil; und der Stoßende wird sich nach der entgegengesetzten Richtung mit dem Gestoßenen, nach der Berührung, fortbewegen.

§. 53.

Um diese drei Fälle mit einmal übersehen zu können, nenne man die Geschwindigkeit, womit beide Körper sich nach dem Stoße bewegen $= x$. Die Masse des einen Körpers sei $= M$, die Geschwindigkeit desselben $= V$; die Masse des andern Körpers (er mag ruhen, oder sich bewegen, dies gilt hier gleichviel) sei $= m$, und seine Geschwindigkeit $= v$. Demnach ist die

Quan-

Quantität der Bewegung des ersten $= MV$, und die, des andern Körper $= mv$; folglich von beiden $= MV + mv$. Da die Geschwindigkeit nach dem Stoße $= x$, so hat der erste gerade so viel von seiner Geschwindigkeit verlohren, und der andere eben so viel gewonnen. Folglich ist die Geschwindigkeit des ersten $V - x$, und des zweiten $x - v$. Die Quantität der Bewegung muß aber in beiden nach dem Stoße gleich seyn. Man erhält also $M(V-x) = m(x-v)$

$$MV - Mx = mx - mv,$$

demnach $MV + mv = (M + m)x$,

und daher $x = \frac{MV + mv}{M + m}$.

§. 54.

Ist der gestoßene Körper in Ruhe, so wird $mv = 0$, und die Bewegung nach dem Stoße $= \frac{MV}{M + m}$; haben beide Körper gleiche Massen, so wird die Geschwindigkeit nach dem Stoße die Hälfte von der, die sie vor demselben war. Ist die Masse des stoßenden Körpers $= 2$, und die des gestoßenen $= 1$; die Geschwindigkeit des ersten aber 5, und die des zweiten 3 Grade, so erhält man für die Geschwindigkeit nach dem Stoße $\frac{2 . 5 + 1 . 3}{2 + 1} = 4\frac{2}{3}$. Und so dienet diese Formel allgemein für jede Geschwindigkeit, wenn beide

Körper nach einerlei Richtung beweget werden. Setzt man den gefundenen Werth von x in die Formel der verlohrenen und gewonnenen Geschwindigkeit, so bekommt man

$$\text{für } V-x = V - \frac{MV+mv}{M+m} = m\frac{(V-v)}{M+m}$$

$$\text{und für } x-v = \frac{MV+mv}{M+m} - V = \frac{M(V-v)}{M+m}.$$

§. 55.

Bewegen sich ein paar vollkommen harte oder weiche Körper nach entgegengesetzter Richtung, sind ihre Geschwindigkeiten vor dem Stoße V und v, wird die Geschwindigkeit nach dem Stoße wie (52) wieder durch x ausgedruckt, so verliert der erste von seiner Geschwindigkeit den Werth von x, und der andere gewinnet diesen. Der erste erhält also eine Geschwindigkeit nach dem Stoße $= V - x$; und der andre $= v + x$. Man hat demnach $M(V-x) = m(v+x)$,

$$\text{und daher } x = \frac{MV-mv}{M+m}.$$

Ist $M = 4$, $V = 6$; $m = 3$, $v = 5$; so ist

$$x = \frac{4.6 - 3.5}{M+3} = 1\tfrac{2}{7}.$$

Mit einer so großen Geschwindigkeit wird der Körper, der am meisten Masse und Geschwindigkeit hat, den kleinern Körper nach eben der Richtung, die er vor dem Stoße hatte, mit fortbewegen. Sind Massen

sen und Geschwindigkeiten sich gleich, so ruhen beide Körper nach dem Stoße. Setzt man hier wieder wie (53) den Werth von x in die Formel V—x oder V + x, so erhält man für

$$V - x = V - \frac{MV - mv}{M + m} = \frac{m(V + v)}{M + m},$$

und für $v + x = v + \frac{MV - mv}{M + m} = \frac{M(V + v)}{M + m}$.

§. 56.

Die Gesetze vom Stoße der elastischen Körper lassen sich nun leicht, nach den vorhergehenden Regeln, die ich vom Stoße der vollkommen harten Körper gegeben habe, aus einander setzen. Nur muß ich folgendes Allgemeine voranschicken. Bei der Berührung zweier vollkommen elastischer Körper verlieret der Stoßende eben so viel von seiner Geschwindigkeit, als wenn der Gestoßene vollkommen hart gewesen wäre. Mit dieser Geschwindigkeit würde er sich nun fortbewegen, da man aber voraussetzt, daß der Körper elastisch ist, so wird er sich auch bemühen, sich gleich nach der Berührung mit eben der Kraft, womit er zusammengedruckt worden, wieder herzustellen. Der stoßende Körper leidet hier also noch einmal denselben Verlust, den er bei der Berührung erhielt. Folglich ist der Verlust bei einem elastischen Körper doppelt so groß, als wenn er vollkommen hart gewesen wäre. Ein gleiches eräugnet sich auch bei dem Zusammendrucken und der Wiederherstellung des gestoßenen Körpers; ausser daß dieser so viel gewinnet, als der Stoßende verlohren.

§. 57.

Der vollkommen harte oder weiche stoßende Körper verlohr (54) an Geschwindigkeit $= V - x = \frac{m(V-v)}{M+m}$; nun er aber vollkommen elastisch ist, so verlieret er nochmal so viel, das ist $\frac{2m(V-v)}{M+m}$. Hingegen gewonn der gestoßene harte Körper $x - v = \frac{M(V-v)}{M+m)}$, und vermöge seiner Elasticität $= \frac{2M(V-v)}{M+m}$. Oder die Geschwindigkeit des stoßenden elastischen Körpers ist

$$= \frac{MV - mV - 2mv}{M+m} = \frac{V(M-m) - 2mv}{M+m}$$

und des gestoßenen

$$= \frac{2MV - mV - mv}{M+m} = \frac{V(2M-m) - mv}{M+m}.$$

§. 58.

Diese Formeln lassen sich nun leicht auf den Stoß elastischer Körper anwenden. Man setze, der stoßende Körper bewege sich vor der Berührung mit 8 Graden Geschwindigkeit, und der Gestoßene sei in Ruhe; so verliert der Stoßende bei

bei dem Zusammendrücken und Wiederherstellen $= \frac{2m(V-v)}{M+m} = \frac{2(8-0)}{1+1} = \frac{16}{2} = 8$. Er verliert demnach eben so viel Grade seiner Geschwindigkeit, als er vor dem Stoße besaß, und wird also nach dem Stoße ruhen. Der Gestoßene gewinnt hingegen eben so viel. Denn $\frac{2M(V-v)}{M+m} = \frac{2(8-0)}{2} = 8$. Dieser erhält also eben so viel Geschwindigkeit nach dem Stoße, als der Stoßende vor demselben hatte, und hieraus folget: zwei elastische Körper von gleicher Masse, der eine in Bewegung, der andere in Ruhe, vertauschen ihre Geschwindigkeit; das heißt: des ersten seine wird Null, und der andere beweget sich mit der Geschwindigkeit des erstern fort.

§. 59.

Man stelle eine Reihe von elastischen Körpern dicht an einander, wozu man sich der Billiardbälle bedienen kann, und gebe dem ersten Ball eine gewisse Geschwindigkeit, so wird dieser in Ruhe kommen, der zweite aber dem ersten mit eben der Geschwindigkeit anstoßen, darauf aber auch gleich in Ruhe kommen, und dieses wird mit der ganzen Reihe Billiardbälle vorgehen, den letzten ausgenommen, welcher mit eben der Geschwindigkeit dahinlaufen wird, als der erste den zweiten angestoßen hat. Dies wird beständig eintreffen, die Reihe mag so lang seyn als sie will.

§. 60.

Bewegen sich zwei elastische Körper, die an Massen einander gleich sind, nach einerlei Richtung, so muß man für v die Geschwindigkeit des andern Körpers in die Formel setzen. Es sei z. B. die Geschwindigkeit des stoßenden Körpers = 8; die, des Gestoßenen = 6; so verlieret der erste $= \frac{2(8-6)}{2} = 2$ Grade von seiner Geschwindigkeit, und behält also noch 6 Grade übrig, mit welcher er sich nach dem Stoße in eben der Richtung fort bewegt, die er vor demselben hatte. Bei der Berührung gewinnet aber der gestoßene $= \frac{2(8-6)}{2} = 2$ Grad. Vor dem Stoße hatte dieser 6 Grade, wozu nun noch zwei neue Grade kommen, folglich besitzt derselbe jetzt 8 Grade; und mit diesen bewegt er sich nach dem Stoße fort. Es haben also beide Körper, deren Masse sich einander gleich sind, ihre Geschwindigkeiten vertauscht.

§. 61.

Elastische Körper endlich, die sich nach entgegengesetzter Richtung bewegen, sonst aber gleiche Massen und Geschwindigkeiten haben, werden nach dem Stoße dieselbe Geschwindigkeit behalten, die sie vor demselben hatten, aber in

entge=

entgegengesetzter Richtung wieder zurückgehen. Besitzen sie aber vor dem Stoße eine ungleiche Geschwindigkeit, so bewegen sie sich gleichfalls rückwerts, aber mit verwechselter Geschwindigkeit.

§. 62.

Was ich bis jezt gesagt habe, geht nur solchen Körpern an, davon einer beim Stoße dem andern ausweichen kann. Man sieht aber leicht, daß dieses bei vielen Körpern nicht Statt haben könne. Denn gesetzt, ein vollkommen weicher Körper stieße auf einen Widerstand, der nicht ausweichet, und der Stoß gienge gerade, oder so, daß derselbe mit dem Widerstand einen rechten Winkel machte, so wird der stoßende Körper bei der Berührung seine ganze Wirkung verlieren, der Körper wird ruhen, und dabei seine Gestalt verändern, oder wenn er vor dem Stoße rund war, bei dem Stoße platt werden. Ist es ein vollkommen harter Körper, so wird derselbe gleichfalls bei der Berührung an der unbeweglich harten Fläche in Ruhe kommen, aber nicht seine Gestalt verändern.

§. 63.

Ist hingegen der bewegliche Körper elastisch, und wird rechtwinklicht auf den harten unbeweglichen Gegenstand, z. B. an die Bande einer Billiardtafel, geworfen, so wird der stoßende Körper zwar zusammengedruckt, aber vermöge seiner

Elasticität den Augenblick wieder in seine vorige Figur gebracht werden, und eben durch dieses Wiederherstellen eine Kraft erhalten, womit der auffallende Körper mit eben der Geschwindigkeit zurückgeworfen worden, als er aufgefallen ist. Er kehrt, so zu sagen, in sich selbst wieder zurück. Anders wirkt der Körper, wenn derselbe nicht unter einem rechten Winkel, sondern schief auf die Fläche stößt; doch ehe ich von diesem etwas sage, muß ich folgenden Satz vorausschicken: welcher Richtung folget ein Körper, wenn mehr als eine Kraft zu gleicher Zeit nach verschiedenen Richtungen auf denselben wirkt?

§. 64.

Ein Körper A (Fig. 2) wird von einer Kraft H nach der Richtung HB, die in der Ebene HBDC liegt, gestoßen; zu eben der Zeit, oder in demselben Augenblick, sucht den Körper A, eine andre Kraft K in der Richtung HD, die in eben der Ebne liegt, nach D zu bringen. Wirkten beide Kräfte für sich allein auf den Körper A, so würde denselben die eine, nach einer gewissen Zeit in B, die andere in D bringen. Nun geschieht aber der Stoß von beiden zu gleicher Zeit, und der Körper wird weder der einem noch der andern Richtung folgen, sondern eine eigne annehmen, welche die mitlere heißt, und von beiden gleichviel abweicht. Der Körper gelangt nun in eben der Zeit in C. Denn in B und D

kann

kann derselbe nicht zugleich seyn. Den Weg, welchen der Körper auf die Weise beschreibt, ist die Diagonallinie des Parallelogramms ABCD, welches aus den beiden Richtungen der Kräfte H und K zusammengesetzt ist. Eben dieses eräugnet sich, wenn auf den Körper A mehr als zwei Kräfte wirken.

§. 65.

Um die Lehre von der zusammengesetzten Bewegung auf den Stoß der Körper anzuwenden, nehme man an, ein harter, nicht elastischer Körper, werde schief, oder unter dem Winkel ACE (Fig. 3.) auf die unbewegliche Bande ECD geworfen. Die Richtung des Wurfs sei AC, und liege mit dem unbeweglichen Widerstand in einer Ebene, die durch AFCD gehet. Würde der Wurf nach der senkrechten Linie FC vor sich gehen, so müßte der Körper, wenn er in C ankäme, auch in Ruhe kommen. Allein dieses geschieht jetzt nach der schiefen Richtung nicht, sondern der Körper wird in C mit einer gewissen Geschwindigkeit, die ihn noch über geblieben ist, sich nach der Richtung CD fortbewegen. Aber eben deswegen wird der Körper auch nicht mit seiner ganzen Kraft, sondern nur mit einem Theil derselben, auf den Punct C wirken. Wie groß dieser Theil sei, erfährt man, wenn man die Kraft des schiefen Stoßes, die hier durch die Linie AC angedeutet ist, in zwei andere Kräfte zerleget, davon die eine AF parallel mit der Bande, die andere FC aber senkrecht auf derselben steht. Die letztere drückt nur die Kraft des Stoßes aus, und mit der ersten bewegt er sich nach der Richtung CD nach dem Stoße fort. Die Kraft FC wird aber desto kleiner seyn, je schiefer der Winkel ist, unter dem der Körper A auf die Fläche ED stößt. Diese Kraft läßt sich nun leicht bestimmen, da FC = HE ist. Beide verhalten sich daher zu einander, wie die Linie AC : FC = HE. Nun ist AC der Radius, und HE der Sinus des Neigungswinkels HCE. Folglich verhält sich die Kraft des schiefen Stoßes zum geraden, wie der Radius zum Sinus des Neigungswinkels. Wäre dieser Winkel 30°, so würde die Wirkung des Stoßes unter diesem Winkel nur die Hälfte von der seyn, die sie sein wird, wenn der Wurf rechtwinklicht vorginge. Da AF = EC gleich dem Cosinus des Neigungswinkel HCE, so ist die Geschwindigkeit, mit der sich der Körper A, wenn er in C angekommen, nach der geraden Linie CD fortbewegen werde, zu der, die er im Anfange hatte, wie der Cosinus zum Radius.

§. 66.

Ist der Körper A aber elastisch, und die Bande BD (Fig. 4.) gleichfalls, und der Stoß geschieht nach der Richtung AC, so kann der Körper vermöge des schiefen Stoßes nicht in C ruhen, er wird auch nicht mit der ihm übrig gebliebenen

bliebenen Geschwindigkeit nach der Richtung CD fortgehen, sondern in einer Richtung CE zurückspringen, welche mit der Fläche BD denselben Winkel macht, als AC. Das heißt, der Winkel, womit ein elastischer Körper auf eine Bande auffällt, wird dem Winkel gleich seyn, mit dem derselbe wieder von der Ebene zurückspringt. Dieses Ein- und Zurückfallen geschieht in der Ebne, die durch ABCED geht. Die mittlere Richtung AC, in welcher der Körper einfällt, ist aus den beiden AB und BC zusammengesetzt. Eben so besteht auch die Richtung CE, nach der der Körper wieder von der Fläche zurückgeworfen wird, aus ED und CD. Durch die höhere Geometrie läßt sich zeigen, daß gerade dieser Weg, den der elastische Körper beim Ein- und Zurückfallen nimmt, von allen andern, die sonst auf den Punct C treffen können, der möglichst kürzeste sei. S. hierüber Hrn. Hofrath Kästners höhere Mechanik, S. 343.

Das vierte Capitel.

Von der Schwere der fallenden Körper.

§. 67.

Nimmt man einen Stein, oder sonst eine schwere Materie in die Hand, so drückt diese auf derselben. Dies geschieht auch, wenn man sich mit diesem Körper auf eine Höhe begiebt, so weit

wir

wir nur kommen können. Läßt man den Körper aus der Hand, so fällt er nach einer Richtung, die senkrecht auf der Oberfläche der Erde steht, zur Erde. Läßt man einen schweren Körper von einer Anhöhe herunterrollen, so wird er nicht eher ruhen, bis er den niedrigsten Punct erreicht hat. Würde man das Hinderniß, welches ihm im Fallen aufhält, aus dem Wege räumen, so würde der Körper gleich wieder nach obiger Richtung anfangen zu fallen. Diese Erfahrung können wir mit jedem schweren Körper machen, wir mögen uns an einem Orte der Erde aufhalten, an welchem wir wollen, so wie auch in Ansehung des Fallens kein Unterschied Statt findet, wir mögen hoch oder niedrig stehen. Das, was die Körper zum Fallen bringt, heißt die Schwere. Die Ebene, worin die Körper fallen, und die senkrecht auf der Oberfläche der Erde, oder vielmehr auf der Oberfläche eines stillstehenden Wassers, steht, heißt die Schwerebene. Eine Ebene senkrecht durch selbige gelegt, heißt eine Horizontalebene.

§. 68.

Da wir gesehen haben, daß die Schwere allenthalben auf den Körper wirkt, wir mögen uns hoch oder niedrig auf der Erde befinden, so muß auch eben diese einen fallenden Körper, so zu reden, in jedem Augenblicke einen neuen Stoß mittheilen, daher denn auch die Geschwindigkeit desselben

selben während des Falles beständig zunehmen wird, und je längerer Zeit der Körper zum Fallen gebraucht, je geschwinder wird er fallen. Es ist also die Schwere eine beschleunigende Kraft.

§. 69.

Ein schwerer Körper fange in A (Fig. 5.) an zu fallen, und komme nach einer Zeit, die endlich seyn mag, in B. Da nun, wie ich schon erwähnet habe, die Schwere, in jedem kleinern Zeittheile den fallenden Körper einen neuen Stoß beibringet, so folget auch, daß, so viel kleine Zeittheile vom Anfange des Fallens aus A an, verflossen sind, um eben so viel Theile hat die Geschwindigkeit zugenommen. Man stelle sich demnach vor, der Körper falle von B nach d in einer sehr kleinen Zeit, so wird derselbe mit der Geschwindigkeit, die er am Ende der ersten Zeit hatte, da er in B ankam, und die ich hier durch die Linie BC andeuten will, den sehr kleinen Raum BCde zurücklegen. Da Bd, oder die Zeit, sehr klein angenommen worden ist, so wird die Linie d e von der Linie BC nur sehr wenig verschieden seyn. Oder B C d e ist ein sehr kleines Trapezium, das der fallende Körper nach einer sehr kleinen Zeit beschrieben, oder durchgefallen ist. Man kann sich aber nun leicht vorstellen, daß der ganze durchgefallene Raum, vom Anfange bis zu Ende der Zeit, aus sehr vielen kleinen Trapeziis zusammengesetzt, bestehet; oder alle diese

zusam-

zusammengenommen das Dreieck ABC ausmachen. Kömmt der Körper von B in F nach einer Zeit, die der ersten von A in B gleich ist, und die ich in der Figur durch die Linie AB und BF vorgestellet habe, und da die Schwere ohne Aufhören auf ihn wirkt, so erhält derselbe eine Geschwindigkeit $= FG$. Und der schwere Körper ist am Ende der zweiten Zeit den Raum AFG durchgefallen. Da man die Linie FG für parallel mit BC ansehen kann, so ist $AF : AB = FG : BC$. Oder die Geschwindigkeiten verhalten sich wie die Zeiten, das will so viel sagen: die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers wächst mit der Zeit. Zu jedem Augenblick kommt ein neuer Zuwachs an Geschwindigkeit, den man sich allenfalls durch eine Reihe von Zahlen, die beständig um eins zunehmen, vorstellen kann.

§. 70.

Vermöge der Parallellinien BC und FG ist das Dreieck $ABC \sim \Delta\, AFG$, und da diese die Räume andeuten, welche von einem schweren Körper durchgefallen sind, so verhalten sich diese zu einander, wie die Dreyecke. Aehnliche Dreyecke verhalten sich aber wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten. Demnach ist

$$\Delta\, ABC : \Delta\, AFG = AB^2 : AF^2 = BC^2 : FG^2$$

oder die Räume verhalten sich wie die Quadrate der Zeiten oder Geschwindigkeiten.

§. 71.

§. 71.

Das Dreieck A a b (Fig. 6.) stelle den Raum vor, den ein schwerer Körper in einer kleinen Zeit, in einer Sekunde, oder in einem noch kleinern Zeittheile, durchgefallen ist, und a c bedeute ebenfalls ein solches Zeittheilchen, so hat der durchgefallene Raum am Ende der zweiten Zeit einen dreifachen Zuwachs von dem ersten erhalten; und am Ende des dritten Zeittheilchens ist der nun durchgefallene Raum fünfmal mehr als der erste, und am Ende der vierten Sekunde siebenmal mehr als der erste vergrößert worden. Daraus folget also, daß die Räume wie die ungeraden Zahlen, 1, 3, 5, 7, 9 ꝛc. wachsen. Die Summe von diesen geben die Quadratzahlen für die Zeiten oder Geschwindigkeiten. Denn $1+3=4=2^2$; $1+3+5=3^2$; $1+3+5+7=4^2$, d. i. für die doppelte Zeit den vierfachen Raum, für die dreifache den neunfachen Raum der ersten Zeit. Je größer die Zahlen sind, desto kleinere Unterschiede trift man für Zweipaar auf einander folgende Zahlen an; und die Bewegung, die im Anfange beschleunigend war, wird, wenn der Körper lange gefallen ist, beinahe in eine gleichförmige verwandelt.

§. 72.

Ein schwerer Körper, der durch AB gefallen, hat in B eine Geschwindigkeit BC. Würde er er diese gleich zu Anfange, nemlich in A, gehabt haben, so würde der Raum ABaC während der Zeit des Falles, beschrieben worden seyn. Dieser Raum ist aber nochmal so groß, als der, welchen der schwere Körper durchgefallen ist. Dies gilt auch für den Fall des Körpers durch AF; wäre die Geschwindigkeit in A so groß gewesen als in F, so wäre der Raum AgFg von dem Körper gleichförmig in eben der Zeit des Falles zurückgeleget worden. Demnach können wir diesen Satz allgemein festsetzen: Mit eben der Geschwindigkeit, die ein fallender Körper am Ende einer gewissen Zeit erhalten hat, bewegt sich ein Körper horizontal, in eben der Zeit gleichförmig durch den doppelten Raum.

§. 73.

Man nenne den Raum, den ein schwerer Körper in der ersten Sekunde durchfällt g; und s sei der durchgefallene Raum für die Zeit t, so ist $1^2 : t^2 = g : s$ und $s = gt^2$. Durch die Erfahrung ist ausgemacht worden, wie viel Fuß der Raum für die erste Sekunde beträgt. Diese Zahl mit dem Quadrate der Zeit multiplicirt, giebt den durchgefallenen Raum für die verlangte Zeit. Noch auf eine andere Art, als durch Versuche, (89) hat man den Raum für die erste Sekunde auf 15,625 Rheinl. Fuß herauszubringen gewußt. Ein schwerer Körper wird also nach

5 Se-

5 Sekunden einen Raum = 15,625 × 25 = 390,625 rheinl. Fuß durchgefallen seyn.

§. 74.

Aus $s = gt^2$ (73) erhält man $g = \frac{s}{t^2}$ und $t^2 = \frac{s}{g}$, folglich $t = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{g}}$. Den Raum für eine Sekunde ergiebt sich, wenn der durchgefallene Raum durch das Quadrat der Zeit getheilet wird. Dividiret man den durchgefallenen Raum, durch den, welchen der schwere Körper in einer Sekunde fällt, und zieht aus dem Quotienten die Quadratwurzel, so erhält man die Zeit. Oben haben wir den Raum für eine gewisse Zeit, die ein Körper von der Schwere getrieben zurückgelegt hat, durch gt^2 angegeben. Bei einer gleichförmigen Bewegung ist dieser $= 2gt^2$ oder $s = 2gt^2$.

§. 75.

Die Geschwindigkeit, welche ein von der Schwere beschleunigter Körper am Ende der ersten Sekunde erhalten, sei $= x$, so ist selbige für die Zeit $t = tx$. Finge er nun an, sich mit dieser Geschwindigkeit gleichförmig fortzubewegen, so wäre sein zurückgelegter Raum $tx.t = t^2x$. Nun war dieser (74) $2gt^2$; folglich haben wir eine Gleichung, worin $x = 2g$ wird, denn $xt^2 = 2gt^2$. Oder die Geschwindigkeit am Ende der ersten Sekunde ist zweimal so groß, als der

Raum, den der Körper in einer Sekunde durchgefallen ist. Nun war dieser 15,625 rheinländ. Fuß, folglich $x = 31,250$ rheinl. Fuß. In der zweiten Sekunde erlangt der Körper eine Geschwindigkeit, die noch mal so groß ist, als die, in der ersten; in der dritten eine dreifache ꝛc., weil die Geschwindigkeiten sich wie die Zeiten verhalten.

§. 76.

Folgende Tabelle, welche die durchgefallenen Räume, die Geschwindigkeit am Ende der Zeit, die Räume, welche durch eine gleichförmige Bewegung entstehen, enthält, ist nach den vorhergehenden Formeln berechnet worden.

Zeit an Sekunden.		Durchgefallene Räume.		Geschwindigkeit.		Horizontale Räume, mit einer gleichförmigen Bewegung.
''		'		'		'
1	—	15,625	—	31,250	—	31,250
2	—	62,500	—	62,500	—	125,000
3	—	140,625	—	93,750	—	187,500
4	—	250,000	—	125,000	—	250,000
5	—	390,625	—	156,250	—	312,500
6	—	562,500	—	187,500	—	375,000
7	—	765,625	—	218,750	—	437,500
8	—	1000,000	—	250,000	—	500,000
9	—	1265,625	—	281,250	—	262,500
10	—	1562,500	—	312,500	—	625,000
11	—	1890,625	—	343,750	—	687,500
12	—	2250,000	—	375,000	—	750,000
13	—	2171,875	—	406,250	—	812,500
14	—	3062,500	—	437,500	—	875,000
15	—	3515,625	—	468,750	—	937,500.

§. 77.

Heißt die Geschwindigkeit, welche ein von der Schwere beschleunigter Körper nach der ersten Sekunde erhalten c; und da wir selbige für die Zeit t (75) = tx gefunden, so ist diesemnach c = tx; setzt man nun für x den gefundenen Werth desselben, (75) so erhält man $c = 2gt$ und $t = \frac{c}{2g}$ und $2g = \frac{c}{t}$. Nun ist $t = \sqrt{\left(\frac{s}{g}\right)}$ (74) folgl. $c = 2g\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{g}} = \frac{\sqrt{g}.\sqrt{g}.\sqrt{s}}{\sqrt{g}}$

$$= 2\sqrt{g}\,\sqrt{s} = 2\sqrt{gs} = \sqrt{4gs}.$$

Oder die Geschwindigkeit für jede Höhe ergiebt sich, wenn man $62\frac{1}{2}$ in die Höhe multiplicirt, und aus dem Produkte die Quadratwurzel zieht. Denn $4g = 4.\ 15{,}625 = 62\frac{1}{2}$ rheinl. Fuß.

Z. B. die gegebene Höhe sei = 6 rheinl. Fuß, so ist $\sqrt{62\frac{1}{2}.\ 6} = 19{,}36$ rheinl. Fuß für eine Sekunde. Dieser Satz findet häufig seine Anwendung in der Hydrostatik. Auf die Art ist folgende Tabelle für etliche Höhen berechnet worden.

§. 78.

Höhe an rheinl. Fuß	—	Geschwindigkeit für eine Sekunde.
$\frac{1}{2}$	— — —	5,59 rheinl. Fuß.
$\frac{3}{4}$	— — —	6,81 — —
1	— — —	7,93 — —
$1\frac{1}{4}$	— — —	8,83 — —
$1\frac{1}{2}$	— — —	9,68 — —
$1\frac{3}{4}$	— — —	10,45 — —
2	— — —	11,21 — —
$2\frac{1}{4}$	— — —	11,85 — —
$2\frac{1}{2}$	— — —	12,50 — —
$2\frac{3}{4}$	— — —	13,10 — —
3	— — —	13,73 — —
$3\frac{1}{4}$	— — —	14,24 — —
$3\frac{1}{2}$	— — —	14,79 — —
$3\frac{3}{4}$	— — —	15,30 — —
4	— — —	15,85 — —
$4\frac{1}{4}$	— — —	16,29 — —
$4\frac{1}{2}$	— — —	16,77 — —
$4\frac{3}{4}$	— — —	17,22 — —
5	— — —	17,73 — —

§. 79.

Da ich (74) gezeiget habe, daß der Raum durch gt^2 oder $s = gt^2$ und (77) $t = \frac{c}{2g}$ vorgestellet, und man bringt diesen letzten Werth für t in die erste Gleichung, so erhält man

man $s = \frac{gc^2}{4g^2} = \frac{c^2}{4g}$, oder der Raum ist gleich dem Quadrate der Geschwindigkeit dividirt durch $62\frac{1}{2}$. Wenn nun $c = 2\sqrt{gs}$ und eine andere Geschwindigkeit $C = \sqrt{2gS}$, so verhalten diese sich, wie $\sqrt{s} : \sqrt{S}$, denn $C : c = 2\sqrt{gS} : 2\sqrt{gs} = \sqrt{S} : \sqrt{s}$.

§. 80.

So wie die Schwere die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers beschleuniget, eben so verzögert sie auch die Geschwindigkeit eines steigenden Körpers. Beides richtet sich nach einerlei Gesetze. Denn, mit der Geschwindigkeit, die man dem Körper zu Anfange des Steigens beibringet, wird derselbe nur zu einer Höhe steigen, die so hoch ist, als die Schwere ihn in eben der Zeit wieder zur Erde bringet. Nennet man nun die Geschwindigkeit, womit der Körper im Anfange an zu steigen fängt $= h$, so wird diese in der Zeit t so viel mal vermindert, als die Schwere in eben der Zeit dem Körper Geschwindigkeit zugesetzt hätte. Diese habe ich (77) durch $2gt$ angedeutet. Wird diese von h abgenommen, und der Unterschied ist Null, so hat der steigende Körper seine größte Höhe erreicht, und wird alsdann mit zunehmender Geschwindigkeit wieder zur Erde fallen. Wenn demnach

$h - 2gt = 0$, so ist $h = 2gt$ und $t = \frac{h}{2g}$.

Dividirt man demnach die anfängliche Geschwindigkeit durch zweimal den Fall eines Körpers in einer Sekunde, so erhält man die Zeit des Steigens.

§. 81.

Bewegte sich der Körper mit der Geschwindigkeit h gleichförmig in der Zeit t fort, so wäre seine Höhe $= h\,t$. Die Höhe aber, die ein schwerer Körper in eben der Zeit herunter fällt ist (74) $g t^2$. Beide von einander abgezogen giebt die Höhe, zu welcher der Körper in der Zeit t steigen wird. Man nenne diese $= x$, so ist $x = h t - g t^2$. Nun war $t = \frac{h}{2g}$ (80) folglich $t^2 = \frac{h^2}{4g^2}$. Diesen Werth statt t^2 in die Gleichung gesetzt, giebt

$$x = \frac{hh}{2g} - \frac{gh^2}{4g^2} = \frac{h^2}{2g} - \frac{h^2}{4g} = \frac{4h^2 - 2h^2}{8g} = \frac{2h^2}{8g} = \frac{h^2}{4g}.$$

Man hat demnach die Höhe, wenn das Quadrat der anfänglichen Geschwindigkeit durch den vierfachen Raum, den ein Körper in einer Sekunde durchfällt, dividiret wird. Z. B. man gebe dem Körper eine Geschwindigkeit, mit welcher er in einer Sekunde einen Raum von 600 Fuß durchläuft, so wird dieser Körper auf eine Höhe von 5760 Fuß steigen. Denn $x = \frac{600^2}{62\frac{1}{2}} = 5760$. Dies wäre ohngefähr die Höhe, welche eine Kanonennonenkugel, wenn sie vertikal abgeschossen, erreichen würde. Und die Zeit, welche sie dazu anwendete, wäre $= \frac{600}{2 \cdot 15{,}625} = 19\frac{1}{5}$ Sekunde.

§. 82.

Nach diesen hier, wie ich glaube, deutlich aus einandergesetztem Gesetze der Körper, richtet sich nun das Steigen und Fallen derselben. Und jeder Theil der Materie würde für sich, wenn man nicht auf die Hindernisse sieht, die überhaupt die Bewegung der Körper hindert, in gleichen Zeiten gleiche Räume durchfallen. Es ist also kein Unterschied in Rücksicht des Falles der Körper, ob der Körper leicht oder schwer ist, da jedes Theilchen der Körper für sich in eben der Zeit durch eine Höhe herunterfällt, als der ganze Körper selbst, der aus unendlich vielen Theilchen zusammengesetzt ist. Die Schwere, oder die Schwerkraft ist demnach die Ursache dieser Erscheinung, aber was sie eigentlich sei, worin sie bestehe, wissen wir nicht. Wir kennen sie bloß aus den Wirkungen, die wir täglich, stündlich und augenblicklich gewahr werden, und wenn wir an diesen Erscheinungen nicht so sehr gewöhnt wären, so ginge kein Augenblick vorbei, wo wir nicht über Wunder schreyen würden.

§. 83.

Es ist etwas långer als ein Jahrhundert, da man zuerst entdeckte, daß die Schwere auf der Erde eine verschiedene Wůrkung äussere, oder man fand, daß sie geringer wurde, je nåher man dem Aequator kam. Die Ursache liegt in der Umdrehung der Erdkugel um ihre Axe. Sie nimmt im Verhåltnisse des Quadrats von dem Sinus der geographischen Breite ab. Ich werde dieses in den folgenden Capiteln noch nåher und weitlåuftiger aus einandersetzen, wo diese Materie ihren eigentlichen Platz erhålt. Durch Pendelversuche hat man gleichfalls gezeigt, daß die Schwere in den hôhern Gegenden unserer Erde geringer sei, als auf der Oberflåche. Weil aber diese Versuche auf hohen Bergen angestellet sind, und diese immer noch einen Theil der Oberflåche unserer Erde ausmachen, so lassen sich aus diesen noch nicht die Folgerungen ziehen, die man sonst daraus håtte herleiten können. *)

§. 84.

Der berůhmte Neuton hat indessen aus unleugbaren Grůnden dargethan, daß die Schwere mit

*) Am besten ließen sich Beobachtungen über die Abnahme der Schwere, vermittelst der Luftreisen anstellen, weil man sich, so zu reden, dann ausserhalb der Erde versetzt befindet. Aber die Instrumente zu diesem Unternehmen müßten sehr genau und mit vieler Sorgfalt eingerichtet und verfertiget

mit dem Quadrate der Entfernung in Verhältniß steht; oder daß die Schwere von der Oberfläche der Erde abnimmt, wie das Quadrat der Entfernung zunimmt. Daß also, wenn die Entfernung des Mondes von der Erde 60 halbe Erdmesser beträgt, die Würkung der Schwere auf dem Monde 3600 mal, als das Quadrat von 60, geringer ist, als auf der Oberfläche der Erde. Neuton bewies ferner, daß das wechselseitige Anziehen der großen Himmelskörper eben diesem Gesetze unterworfen ist, und daß, so zu sagen, der Zusammenhang aller der großen und ungeheuren Weltkörper, oder der ganzen Welt, durch die Schwerkraft, in Ordnung, die Körper in ihren einmal von Gott vorgeschriebenen Kreisen, gehalten werde. Diese Anziehungskraft (attractio) äussert sich aber auch eben so stark bei der Bildung des kleinsten Wassertropfens, der Chrystallisation der Salze, und bei der, des Staubes, als bei jenen lichthellen Körpern, und hängt von ein und eben denselben Gesetzen ab. In dem letzten Kapitel dieser Schrift werde ich noch mehr Gelegenheit haben, von dieser Kraft zu reden,

 wenn

get werden; auch der Beobachter mit mehrerem Fleisse und Geschicklichkeit ausgerüstet seyn, als bisher die meisten von unsern Luftreisern gewesen sind. Ich erinnere mich eines Werkzenges, das zu diesem Zwecke von einem geschickten Künstler zu Schwerin im Mecklenburgischen verfertiget wurde, aber bis jetzt, meines Wissens, noch nicht gebraucht worden ist.

wenn ich einzelne Sätze der Astronomie durch Hülfe dieser und noch einer andern Kraft, die beide unter dem Namen Centralkräfte bekannt sind, erläutern werde.

Das Fünfte Capitel.

Vom Fall der Körper auf einer schiefen Ebene.

§. 85.

Im vorigen Kapitel habe ich den Fall der Körper nach der vertikalen Richtung erkläret; in diesem soll aber das Gesetz bestimmet werden, welchem ein Körper folgt, wenn derselbe durch die Schwere nach einer schiefen Richtung zur Erde getrieben wird. Denn eine Kugel, welche die Lehne eines Berges herabrollt, wird sich immer geschwinder bewegen, je länger der Weg ist, den sie schon zurückgeleget hat. Folglich wird die Bewegung eines rollenden Körpers eben so gut beschleuniget, als die, wenn ein schwerer Körper vertikal herunter fällt. Nur kann im ersten Fall die Geschwindigkeit nicht so groß seyn, als im letztern.

§. 86.

AHB (Fig. 7.) sei der vertikale Durchschnitt einer schiefen Ebene, worin der Winkel ABH recht ist. Der Winkel AHB ist der Neigungswinkel,

winkel, oder der, den die Fläche mit dem Horizonte, oder mit dem Durchschnitte desselben BH. macht. Die Kugel P liege auf der schiefen Ebene AH, und es entsteht die Frage: mit welcher Kraft wird sie herabrollen? Aus dem Mittelpunkte der Kugel lasse man die Linie CFG senkrecht auf BH herabfallen. Nach dieser Linie würde die Kugel, vermöge der Schwere (absolute) herabfallen, wenn die schiefe Fläche sie nicht aufhielte. Die Linie CF mag also die ganze Schwere, oder die Richtung der Kugel vorstellen, nach welcher die Schwerkraft würkt, so läßt sich diese Kraft in zwei andere, nemlich CE und Cd zerlegen, davon CE senkrecht auf der Fläche, und Cd parallel mit derselben geht. Nach der Linie CE wird die Kugel von der Fläche getragen oder aufgehalten, folglich würde dieselbe nur nach Cd = EF längst der Fläche herunter rollen. Die Kugel P wird daher in eben der Zeit durch EF auf der schiefen Fläche fortrollen, als ein anderer Körper, vermöge der Schwere, durch die senkrechte Linie CF fällt. Die erste heißt, in Rücksicht der absoluten, die relative Schwere, welche sich zu einander wie CF : FE verhalten.

§. 87.

Das Dreyeck CEF $\sim \Delta$ FGH; denn der Winkel CFE = GFH und CEF = FGH = R. Demnach ist CF : FE = FH : FG. Und da ΔFGH $\sim \Delta$ABH, so ist FH : FG = AH : AB.

Folglich

Folglich verhält sich die absolute Schwere des Körpers P zu der relativen desselben, wie die Länge der schiefen Fläche zu der Höhe derselben. Und in eben diesem Verhältnisse stehen auch die Geschwindigkeiten. Daher ist die Bewegung auf der schiefen Fläche langsamer, als wenn die Kugel vertikal herunter fällt.

§. 88.

Die Zeit, welche die Kugel P anwendet, die Vertikallinie AB durchzufallen, in eben der Zeit wird dieselbe auf der schiefen Fläche durch E F rollen; und daraus läßt sich leicht die Zeit bestimmen, welche die Kugel gebraucht, um die ganze Fläche herabzurollen, wenn die Zeit bekannt ist, welche der Körper nöthig hat, die Vertikalhöhe durchzufallen.

§. 89.

Zu dem Ende lasse man aus dem rechten Winkel ABH die Linie BX auf AH senkrecht fallen, so zeigt AX den Raum auf der schiefen Fläche an, den der Körper P in eben der Zeit herunterrollet, welche die Kugel nöthig hat die senkrechte Linie AB durchzufallen. Denn das $\triangle ABX \sim \triangle ABH$ und daher $AH : AB = AX : AB$. Die Länge der schiefen Fläche verhält sich aber zu der Höhe derselben, wie der Radius zum Sinus des Neigungswinkels der Fläche. Und aus der so eben erwähnten Proportion hat man

AX =

$AX = \frac{AH.\ AB}{AB}$ oder $\frac{AB.\ Sin.\ AHB}{Rad.}$; und heißt der Neigungswinkel $= x$ der Radius $= r$, so ist $Ax = \frac{AB\ Sin.\ x}{r}$. Aus eben der Proportion ergiebt sich auch der Werth für $AB = \frac{rad.\ AX}{sinus\ x}$.

§. 90.

Diese letzte Formel dienet, den Fall eines Körpers in einer Vertikalebne für jede Zeit anzugeben, wenn man weiß, wie viel Zeit ein Körper gebraucht, einen bekannten Raum auf einer schiefen Fläche durchzurollen. Und auf die Art ging Gallilåus zu Werke; der erste, welcher das Gesetz für die fallenden Körper angab.

§. 91.

Die Zeit, worin der Körper die senkrechte Höhe AB durchfällt, ist $= \sqrt{\left(\frac{s}{g}\right)}$ (74). Man nehme an, die Höhe der schiefen Fläche sei 9 rheinl. Fuß, so gebraucht der Körper, um diese durchzufallen, eine Zeit von $\frac{60}{79}''$. Denn $\sqrt{\left(\frac{9}{15,625}\right)} = \frac{300}{395} = \frac{60}{79}$ Sekunde. Und in eben der Zeit durchrollt der schwere Körper auf der schiefen Fläche den Raum AX. Wäre der Neigungswinkel 30°, so ist der Sinus desselben halb so groß als der Radius; mithin würde der Raum $AX = \frac{1}{2} AB$. Da nun AB zu 9 Fuß rheinl.

rheinl. angenommen, so ist der Raum auf der schiefen Fläche $4\frac{1}{2}$ Fuß. Weiß man nun die Länge der schiefen Ebne, so läßt sich leicht die Zeit berechnen, welche die Kugel gebraucht, um an der Fläche herunter zu rollen. Denn die Zeiten verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus den Räumen wie (73), und die Geschwindigkeiten zweier Körper verhalten sich wie die Räume, die in gleichen Zeiten beschrieben werden.

§. 92.

Bewiesen ist (89), daß die Räume AX und AB in gleichen Zeiten beschrieben werden, folglich verhalten sich die Geschwindigkeiten, wie die Räume, das ist, in unserm angenommenen Beispiel, wie $9 : 4\frac{1}{2} = 2 : 1$. Kommt der schwere Körper in X auf der schiefen Ebene, so hat derselbe eine Geschwindigkeit, die nur halb so groß ist, als diejenige, die der Körper durch den Fall der senkrechten Linie AB erhalten. Da das Δ $AXB \sim \Delta\ ABH$, so ist auch $AX : AB = AB : AH$, folglich ist die Geschwindigkeit in H, wenn der schwere Körper die schiefe Ebene heruntergerollet, einerlei mit der, welche der Körper durch den Fall der senkrechten Linie AB erlanget hat.

§. 93.

Setzt man mehrere schiefe Flächen an einander, aber so, daß sie alle eine gemeinschaftliche Höhe haben, wie Fig. 8. (die schiefen Ebenen

AEB

AEB und AFB) und läßt nun von dreien Körpern zugleich, zwei derselben die Flächen AF und AE herunter rollen, einen aber vertikal durch AB fallen, so werden die drei Körper zu gleicher Zeit, der eine in D, der andere in C und der dritte in B anlangen, und die Geschwindigkeiten werden sich wie die Linien AD, AC und AB zu einander verhalten; in den Puncten B, E und F aber gleich seyn. Hieraus kann man abnehmen, je kleiner der Neigungswinkel ist, den die schiefe Fläche mit dem Horizonte macht, je kleiner ist auch der Raum, den ein schwerer Körper auf der schiefen Ebene zurücklegt.

§. 94.

Wird AB zum Durchmesser eines Kreises angenommen, so liegen die Puncte D und C der schiefen Fläche, weil die Winkel ADB und ACB recht sind, im Umfange des Kreises, und die Durchschnitte der schiefen Flächen sind zugleich Sehnen des Kreises, die alle, vermöge des vorhergehenden, zu gleicher Zeit beschrieben werden. Daraus folget also, die Sehne eines Kreises mag so klein seyn als sie wolle, so braucht ein schwerer Körper, um dieselbe durchzulaufen, eben so viel Zeit, als er nöthig hat, den Durchmesser des Kreises durchzufallen.

§. 95.

Setzt man verschiedene schiefe Flächen, als AB, (Fig. 9.) BE und EH an einander, so erhält

hält der schwere Körper in B eine Geschwindigkeit, die eben so groß ist als diejenige, welche er erlanget, wenn er durch AD gefallen ist. In E hat der Körper gleiche Geschwindigkeit als durch BF, oder welches einerlei ist, der Körper erhält durch die beiden schiefen Flächen AB und BE am Ende eine gleiche Geschwindigkeit, als wäre er durch die senkrechte Linie AG gefallen. Eben dies ist auch der Fall für die drei schiefen Flächen, AB, BE, EH in Hinsicht der senkrechten Linie AK. Wird die Richtung des Körpers auf einer schiefen Ebne alle Augenblick verändert, oder besteht der Weg AH aus unendlich vielen kleinen Ebnen, so ist die Linie AH nicht mehr gerade, sondern krumm, und der Körper beschreibt eine krumme Linie, in welcher derselbe, wenn er in H anlanget, gleiche Geschwindigkeit bekömmt, als wäre er durch AK gefallen. Dieser Satz läßt sich auf den Kreis anwenden; denn AH kann der halbe Umfang, und A K der Durchmesser desselben seyn. Ein Körper wird demnach einerlei Geschwindigkeit haben, er mag den halben Kreis durchlaufen, oder den Durchmesser desselben durchgefallen seyn.

Das sechste Capitel.

Vom Pendel.

§. 96.

Ein schwerer Körper A (Fig. 10.), der an dem Ende eines Faden, der ohne Schwere ist, hänget, und das andere Ende dieses Fadens an einem Nagel C so befestiget ist, daß der schwere Körper A sich vermöge des Fadens um den festen Punct C in der Runde bewegen kann, heißt ein Pendel.

§. 97.

Bringt man den Faden mit dem schweren Körper in die Lage CB, und läßt ihn alsdann fallen, so erhält derselbe indem er den Bogen BA beschreibt, oder wenn er in dem niedern Puncte A anlanget, eine Geschwindigkeit, die so groß ist, als wenn er durch EA (95) gefallen wäre, und mit dieser erlangten Geschwindigkeit wird der schwere Körper in eben der Zeit auch den Bogen AD beschreiben. Bei diesem Auf- und Absteigen muß aber der Widerstand der Luft, das Reiben des Fadens an dem Nagel C nicht in Betracht gezogen werden.

§. 98.

Langt der Körper in D an, so ist seine Geschwindigkeit Null, und die Schwere treibt ihn alsdann wieder herunter. Weil aber der Körper an dem Faden CD, und dieser an C befestiget ist, so wird der Bogen DA aufs neue beschrieben, und in A erlangt derselbe die vorige Geschwindigkeit wieder, in welcher er aufs neue den Bogen AB hinaufsteigt. Der Bogen, den der Körper auf die Weise beschreibt, heißt ein Schwung, (Oscillatio) und die Bewegung selbst, heißt die Schwungbewegung.

§. 99.

Wird die Länge des Fadens nicht geändert, und läßt man das Pendel einen kleinern Bogen, nemlich FAG durchschwingen, so geschieht dieser Schwung mit dem vorigen fast in gleicher Zeit. Dieses läßt sich mit zwei gleich langen Pendeln versuchen, die ungleiche Bögen, wenn sie nicht gar zu sehr von einander verschieden sind, in einerlei Zeit durchschwingen, wobei aber auch mit zu beobachten ist, daß die Bögen keine beträchtliche Größe ausmachen müssen, weil die Schwingungen sonst nicht in gleichen Zeiten vorgehen. Denn aus der Geometrie erhellet, daß, je kleiner der Bogen ist, desto weniger weicht er von seiner Sehne ab, nun ist aber im vorigen Capitel bewiesen worden, daß die Sehnen eines Kreises, sie mögen klein oder groß seyn, in gleichen Zeiten von einem Körper beschrieben werden.

§. 100.

Je größer der Bogen ist, desto mehr ist der Schwung eines Körpers in demselben, von dem, in der Chorde oder Sehne verschieden, und es wird in der Folge noch gezeigt werden, wie sich die Schwingungszeiten derselben zu einander verhalten. Nachdem was (99) erinnert worden, müssen gleiche Bogen in gleiche Zeiten durchgeschwungen werden. Sind die Bogen nicht gleich, und die Zeiten, in welchen sie beschrieben werden, auch nicht, so können die Pendel nicht einerlei Länge haben.

§. 101.

Zwei Pendel (Fig. 11.) von verschiedener Länge, nemlich CA und CD, durchschwingen die Bogen FA und GD, die einander ähnlich sind in ungleichen Zeiten. Denn indem das Pendel CD den Bogen DG beschreibt, in eben der Zeit treibt die Schwere einen Körper durch den doppelten Raum von CD; oder da CD der Halbmesser des Kreises ist, der durch G und D gehet, so braucht der Körper den Durchmesser zu durchfallen eben so viel Zeit, als den Bogen GD zu durchschwingen. Dies ist gerade der Fall auch mit dem Pendel CA in Rücksicht des Bogens FA. Die Räume verhalten sich aber wie die Kreise, und diese wie die Quadrate ihrer Durchmesser. Oder wie in (70), die Räume verhalten sich wie die Quadrate der Zeiten, so ist, wenn T die Schwingungszeit für den Bogen DG, und t die, des Bogens FA bedeutet, $T^2 : t^2 = ED : BA = CD : CA = L : l$

(wenn L und l die Längen der Pendeln vorstellen) folglich $T : t = \sqrt{L} : \sqrt{L}$.
Mithin verhalten sich die Längen der Pendel wie die Quadrate der Zeiten, und die Zeiten wie die Quadratwurzeln aus den Längen der Pendeln. Ein Pendel, dessen Schwingungszeit noch mal so lange dauret als die eines andern, muß viermal länger seyn als dieses, und so auch umgekehrt; daher ist ein Pendel, das seine Schwingung in einer halben Sekunde macht, viermal kürzer, als das, welches eine Sekunde schwinget. Dies wird unten mit mehrern Beispielen erläutert werden.

§. 102.

Ein Pendel CA (Fig. 12), das einmal seine halbe Schwingung in den Bogen BA, das anderemal in den Bogen DA vollführet, hat nicht einerlei Geschwindigkeit, wenn es in den untern Punct A ankömmt, sondern diese wird mit den Sehnen der Bögen in Verhältniß stehen. Im vorigen Capitel habe ich gezeiget, daß die Sehnen eines Kreises in gleichen Zeiten von einem Körper zurückgeleget werden. Sieht man nun BA und DA als zwei schiefe Flächen an, so erhält der Körper, indem er durch DA herabrollt, eine Geschwindigkeit, die mit der Höhe des Falls durch FA gleich groß ist. Und für BA ist die Geschwindigkeit einerlei mit der, die der Körper durch

durch GA erhält. Zieht man aus B und D die Linien DF und BG senkrecht auf AE, und ebenfalls von D nach E und A, wie auch von B nach E und A gerade Linien, so ist das △ BGA ∼ △ BEA und △ AFD ∼ △ DEF, und man erhält in den beiden ersten Dreiecken

$AG : AB = AB : AE,$

in den beiden letztern aber gleichfalls

$AF : AD = AD : AE$, woraus also folget

$AG : AF = AB : AD$, oder die Geschwindigkeit zweier Schwingungen verhalten sich wie die Sehnen.

§. 103.

Ein Körper fange in A an (Fig. 13) sich zu bewegen, so werden die Geschwindigkeiten desselben mit dem Sinus der Bögen in Verhältniß stehen. Ist der Körper in D in der senkrechten Linie AC angelanget, so hat er dieselbe Geschwindigkeit, als wenn er sich durch den Bogen AE beweget hätte. Die Linie DE ist aber der Sinus dieses Bogens, und eben diese Linie mag die Geschwindigkeit für AD ausdrücken. Man ziehe mit dieser die Linie d e parallel, aber der Linie DE unendlich nahe, so wird der fallende Körper den Raum DE de mit der Geschwindigkeit DE gleichförmig durchlaufen. Zieht man von E nach C die gerade Linie EC, und auf d e die Ef senkrecht, so ist das △ Efe ∼ △ DEC, und demnach ist $DE : CE = Ff : Fe$. Nun ist Ef = Dd, und da de der Linie DE unendlich nahe ist, so ist auch Ee = Ef. Und da ferner CE = AC, so wächst der Bogen in eben dem Verhältniß als die Linie AC, oder die Geschwindigkeit stehet mit dem Sinus des Bogens in gleichem Verhältnisse. Ist der Körper bis C gefallen, so hat er eine Geschwindigkeit, die durch die Linie CB angedeutet wird. Mit dieser Geschwindigkeit bewegt sich der Körper gleichförmig in eben der Zeit, da er durch AC fällt, durch den Quadranten AB.

§. 104.

Was ich bis jetzt über die Schwungbewegung des Pendels gesagt habe, ist mehr auf die Sehne als auf den Bogen selbst anzuwenden. Durch beide (wie vorher erinnert worden, und unten noch mehr gezeigt werden soll) bewegt sich ein schwerer Körper nicht in gleichen Zeiten. Die Mathematiker haben sich daher schon lange bemühet, eine Linie auszufinden, worin dieses geschieht. Eine solche Eigenschaft besitzt die Radlinie (Cyclois). Diese hat Huygen im vorigen Jahrhundert zuerst an derselben entdeckt, und bei der Erfindung der Penduluhren glücklich angebracht.

§. 105.

Diese Linie entsteht, wenn man an einer geraden Linie DH einen Kreis in der Runde beweget. Ein beliebiger Punct H im Umfange des Kreises

Kreises angenommen, wird nach und nach, oder nachdem er sich ganz umgedrehet hat, die krumme Linie HIBDE beschreiben. Ein sinnliches Bild von dieser Linie giebt der Nagel, welcher in der Felge eines bewegten Rades sitzt. Bei dieser Linie ist noch folgendes anzumerken: die gerade Linie DH ist dem Umfange des Zeugungskreises der Radlinie gleich. Folglich ist AH dem halben Umfange gleich. Zieht man die Linie ECI mit DAH parallel, so ist das Stück EF dieser Linie so groß, als der Bogen FB des Zeugungskreises, mithin der Bogen FA = FC. Zieht man in dem Zeugungscirkel die Sehne FB, so beweiset die höhere Geometrie, daß diese die Hälfte von dem Bogen EB der Cycloide sei, und daher der Durchmesser des Kreises halb so groß, als die Hälfte der halben Cycloide; oder die Länge des Durchmessers zweimal genommen, giebt die halbe Cycloide. Zieht man an dem Puncte E der Cycloide (dieser Punct liegt in der Verlängerung der Linie EF, welche in C auf dem Durchmesser des Kreises senkrecht steht) die Tangante EG, so ist diese jedesmal mit der Sehne des Kreises parallel.

§. 106.

Die Cycloide AHGCB (Fig. 15) sei durch die Umdrehung des Kreises DEFC entstanden. DC ist die Axe der Cycloide und zugleich der Durchmesser des Kreises. EC und FC ein paar

Sehnen desselben. Hh und Gg Linien, die senkrecht auf DC stehen, aus deren Endpuncten, die in der Cycloide liegen, Tangenten gezogen, gehen mit den Chorden EC und FC parallel, wie im vorigen § gezeiget ist. Darnach läßt sich beweisen, daß ein Körper, durch die Schwere getrieben, aus jedem Puncte der Cycloide in gleicher Zeit herunterfalle, man mag denselben nun aus A, H oder G fallen lassen, so erreicht er jedesmal den Punct C in gleicher Zeit.

§. 107.

Der schwere Körper wird sich nach der Tangente zu bewegen suchen, ist derselbe nun in A, so geht die Richtung der Bewegung nach der Tangente, die durch A, für H; und für G, die durch G gehet. Die Tangente aber, welche durch H gezogen wird, gehet mit der Chorde EC parallel, und die Tangente durch G, ist parallel mit FC. In beiden Fällen ist es also gleichviel, ob die Kraft, nemlich die Schwere, den Körper nach EC oder nach der Tangente durch H zu bewegen treibt, da die Richtungen mit einander parallel gehen. Bewegt der Körper sich nach der Chorde, so hat er in E und h eine gleiche Geschwindigkeit. Aber Ch : CE = CE : CD eben den Satz, welchen wir oben schon gefunden und bewiesen haben, daß die Schwere gleiche Zeit gebraucht, den Körper entweder durch DC fallen oder auch durch EC rollen zu lassen. Eben dies gilt auch für FC,

denn

denn Cg : CF = CF : CD. Bei der Erklärung der Cycloide habe ich aber erwähnet, daß die Chorden halb so groß sind als die Bogen der Cycloide; oder daß die Sehne EC dem halben Bogen CH und FC dem halben Bogen CG der Cycloide gleich ist. Was von dem halben gilt muß auch von dem ganzen Bogen wahr seyn. Da nun ein Körper die Sehnen eines Kreises in gleichen Zeiten zurücklegt, so muß auch eben dieser Körper die Bogen der Cycloide in gleichen Zeiten beschreiben.

§. 108.

Die Geschwindigkeit, womit ein Körper den Bogen GC der Cycloide beschreibt, verhält sich wie $\sqrt{Cg}$ und diese wie die Sehne FC, weil die Geschwindigkeit in beiden gleich groß ist. Nun ist die Sehne aber dem halben Bogen der Cycloide gleich, folglich ist auch hier die Geschwindigkeit dieselbe. Daraus folget denn auch, daß die Zeit des Herunterfallens durch die halbe Cycloide $= \frac{2\,DFC}{\sqrt{DC}}$. Mithin die Zeit des Schwunges durch die ganze Cycloide

$$\frac{4DFC}{\sqrt{DC}} : 2\sqrt{DC} = \frac{4DFC}{2DC} = 2\,DFC : DC.$$

Das ist: die Zeit des Schwunges in der Cycloide verhält sich zu der Axe derselben, wie der Umfang des Kreises zu dem Durchmesser desselben.

§. 109.

Darnach läßt sich auch leicht die Länge des Sekundenpendels berechnen, wenn der Fall eines Körpers durch die Schwere getrieben, in einer Sekunde bekannt ist. Diesen letztern habe ich in (73) zu 15,625 rheinl. Fuß angenommen. Das Verhältniß des Umfanges zum Durchmesser eines Kreises nehme man wie 355 : 113, weil dieses Verhältniß bis auf 6 Dezimalstellen zutrift. Schließt man demnach, wie das Quadrat vom Umfange zum Quadrat des Durchmessers, so verhält sich auch der Fall eines schweren Körpers in einer Sekunde zu der halben Pendellänge. $355^2 : 112^2 = 15,625 : 1,583$ rheinl. Fuß. Folglich für die ganze Länge des Pendels $3,166 = 3$ Fuß 1 Zoll $11\frac{9}{10}$ Linie.

§. 110.

Anmerkung.

Aus der eigentlichen Länge des Pendels, dessen Schwung sich weit leichter für eine gewisse Zeit beobachten läßt, als der Fall eines Körpers, kann man die Höhe des Falls für eine Sekunde weit genauer berechnen als beobachten, wenn obiger Satz umgekehrt wird.

§. 111.

In (101) ist bewiesen, daß sich die Pendellängen wie die Quadrate der Zeiten, oder die Zeiten, wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen verhalten. Wenn nun die Länge eines Sekundenpendels 3,166 rheinl. Fuß beträgt, so ist die Länge eines Pendels, welches halbe Sekunden schlägt $= \frac{3,166}{4} = 0,7915$ rheinl. Fuß oder 9 Zoll $7\frac{18}{100}$ Linie. Hingegen ein Pendel, dessen Schwung 2 Sekunden dauren soll, hat eine Länge von $4 \cdot 3,166 = 12,664$ rheinl. Fuß, oder 12 Fuß 6 Zoll $6\frac{4}{10}$ Linie.

§. 112.

Wenn man in der vorigen Figur die Cycloide AHGCB nach der vertikalen Axe derselben halbiret, und die beiden Hälften so an einander bringt, (wie Fig. 16) daß die Puncte A und B in C zusammenstoßen, hierauf in C einen biegsamen Faden CP befestiget, der sich genau an CA anlegt, alsdann diesen Faden straff angezogen, abwickeln läßt, so beschreibt dieser Faden um den Punct C gleichfalls eine Cycloide APFB. Ist nun in P ein Gewicht angebracht, so ist der Faden ein Pendel, und die Schwingungen desselben geschehen in einer Cycloide. Die Länge des Fadens ist der halben Cycloide, oder zweimal dem Durchmesser des Kreises gleich, welcher einerlei mit der Axe der Cycloide ist. Die Schwingungen, welche der Pendel auf diese Art macht, sie mögen klein oder groß seyn, geschehen nach (107) in gleichen Zeiten. Nimmt man CF für die Pendelstange

an,

an, ohne daß man selbige von AC der halben Cycloide abwickelt, und läßt diese den kleinen Bogen gFh schwingen, so wird dieser nicht viel von dem Bogen der Cycloide verschieden seyn. Daraus folget also: ein Pendel, welches nur kleine Schwingungen macht, kann statt eines, das eine Cycloide beschreibt, gebraucht werden.

§. 113.

Huygen, der Erfinder der Penduluhren, ließ sein Pendel zwischen zweien Blechen schwingen, (die man noch bei einigen alten Uhren antrift) die nach einer halben Cycloide geformt waren, und erreichte dadurch den Zweck, daß das Pendel bei kleinen oder großen Schwingungen einerlei Zeit gebrauchte. Jetzt aber ist dieses wieder abgeschaft, und man läßt das Pendel nur kleine Kreisbogen beschreiben. Dieses erhält man durch eine Vorrichtung, die jetzt an unsern Uhren angebracht worden, nemlich des englischen Haken. Dieser ist beinahe als ein halber Zirkel, oder als ein gedruckter Bogen gebildet. Er schwebt auf einer gemeinschaftlichen Welle mit dem Perpendikel über dem Steigrad, und dienet dazu, alle Räder in einer gleichförmigen Bewegung zu erhalten. An beiden Enden des Hakens sind zwei Lappen oder Füße angebracht, wovon der linke nach einem spitzen Winkel abgeschärft, der rechte aber nach eben solchen Winkel ausgeschnitten ist, damit jeder Lappen desto sicherer in den

Raum zwischen zwei Zähne des Steigrads greifen kann. S. Jacobsens technologisches Wörterbuch 1ster Theil englischer Haken 588 S.

§. 114.

In mehr als einen der vorhergehenden §§ habe ich gezeiget, daß ein Körper in eben der Zeit durch den Durchmesser des Kreises von der Schwere falle, als er eine Sehne desselben durchlaufe. Nun ist der Durchmesser des Kreises gleich der doppelten Länge des Pendels. Eben so viel Zeit gebraucht aber auch der Körper wieder in die Höhe zu steigen, als er angewendet hat, bis zu dem untern Puncte zu gelangen. Die Räume verhalten sich aber wie die Quadrate der Zeiten. Während der Zeit also, daß das Pendel den Bogen beschreibt, durchfällt ein Körper, von der Schwere getrieben, den vierfachen Durchmesser des Kreises, oder achtmal die Länge des Pendels. Dies gilt aber nur für den Fall eines Körpers durch die Sehne, nicht durch den Bogen. Denn das Pendel beschreibt nur für unendlich kleine Bogen die Sehne. Die Zeit, welche ein Pendel anwendet, die Sehne zu beschreiben, verhält sich zu der des Bogens, wie 1000 : 785, das ist: wie der vierte Theil des Umfanges zum Durchmesser, folglich braucht das Pendel nicht so lange Zeit durch den Bogen zu fallen, als durch dessen Sehne.

§. 115.

Alle diese bisher angeführte Eigenschaften des Pendels lassen sich, vermittelst der höhern Geometrie, weit schärfer aus einander setzen und beweisen, als ich hier habe thun können, weil es wider den Zweck dieser Schrift gewesen wäre, Lehren zu berühren, deren Gründe hier nicht angeführt werden könten. Der Leser, der diese inne hat, wird die obigen Sätze leicht darauf anwenden können, welchem aber diese fehlen, würde mich auch hier nicht verstanden haben. Es fehlt uns überhaupt nicht an Anweisungen, in welchen derjenige, welcher die Gründe der Differential- und Integralrechnung versteht, alles das findet, was zur Erklärung obiger Sätze vom Pendel nöthig ist, aber man findet nicht leicht ein Buch, in welchem auch ein solcher Leser, der in obigen Hülfswissenschaften ungeübt ist, seine Lehrbegierde befriedigen könnte, und welches zu bewürken der wichtigste Grund von gegenwärtiger Schrift war. Habe ich dieses nur einigermaßen bewürkt, so halte ich mir für meine Mühe hinlänglich belohnt, ob sie gleich in der Dynamik von der größten Wichtigkeit ist.

§. 116.

Ich habe schon oben, als ich die Wirkung der Schwere aus einander setzte, erwähnet, daß diese nicht auf der ganzen Erde gleich groß sey, welches wohl am füglichsten auseinandergesetzt werden mögte, da die Eigenschaften des Pendels ihren Grund vorzüglich in der Schwere der Körper haben. Ist die letztere nun auf der Oberfläche der Erde nicht gleich groß, so muß auch die Länge der Pendel an verschiedenen Oertern verschieden ausfallen. Alles dieses muthmaßte man schon im Anfange des vorigen Jahrhunderts, und konnte auch theoretisch bewiesen werden; aber es fehlte noch gänzlich an Versuchen, die man mit Instrumenten an entlegenen Oertern selbst anstellen mußte. Dazu kam noch dieser Umstand, daß man Zweifel gegen die Kugelgestalt der Erde aufwarf, und wenn die Gestalt der Erde nicht völlig rund war, so mußte auch die Schwere auf der Oberfläche der Erde, mithin auch die Pendellänge verschieden gefunden werden.

§. 117.

Es geschahe im Jahre 1672, als die französische Akademie, einer aus ihrem Mittel, Namens Richer, nach Cayenne schickte, welcher Ort nur 5 Grad vom Aequator entfernt ist, um dort Versuche mit dem Pendel über die Gestalt der Erde anzustellen. Er nahm zu dem Ende ein zu Paris richtig gehendes Sekundenpendel mit. Auf Cayenne fand Herr Richer nun bald, daß seine Pendeluhr zu langsam ging, und damit dasselbe in einer Stunde 3600 Schwingungen machte, mußte er dasselben um $1\frac{3}{4}$ Linie verkürzen; denn aus den vorigen erhellet, daß, je

kürzer

kürzer das Pendel ist, desto geschwinder schwinget es. Anfangs glaubte Richer, dieser Umstand rührte von der verschiedenen Temperatur der Oerter her; doch fand er bald, daß dieser Unterschied viel zu groß war, weil man wußte, daß eine Hitze, die so groß ist als die des siedenden Wassers, das Pendel nur um $\frac{1}{3}$ einer Linie ausdehnte. Man hatte also Recht, diesen Umstand von der Abnahme der Schwere herzuleiten, wovon der Grund in der nicht völlig runden Gestalt der Erde zu suchen war. Da ich unten beweisen werde, daß die Abnahme der Schwere, von der Mittellinie der Erde an, sich nach dem Quadrate des Cosinus der Breite, oder vom Pole an, nach dem Quadrate der Sinus der geographischen Breite richte, so müssen auch die Pendellängen sich nach diesem Verhältnisse richten.

§. 118.

Seit der Zeit, daß Richer dieses zuerst an den Pendeln beobachtet, hat man sich ausserordentliche Mühe gegeben, die Pendellänge an verschiedenen Oertern der Erde, entweder durch Ausmessungen, oder auch durch Berechnungen, genau anzugeben. Zum Exempel mag folgende Tafel dienen, die ich aus Herrn Prof. Bodens Kenntniß der Erdkugel entlehnet habe, welche etliche Oerter enthält, wo die Pendellänge durch würkliche Messungen bestimmt worden sind. Die

Namen

Namen der Beobachter und die geographischen Breiten sind zugleich mit beigefüget.

§. 119.

Beobachter.	Oerter.	Breite.	Pendellänge an franz. Linien.
Bouguer	Riojama	0°. 9′	438,82.
— —	Quito am Meere	0.25.	439,10.
— —	Quito	—	438,82.
Richer	Cayenne	4 56.	439,32.
Bouguer	Panama	8 35.	439,20.
Godie	Portobello	9.33.	439,08.
—	Klein Goave	18.27.	439,27.
Ulloa	Guarico	19.46.	439 22.
de la Caille	Vorgebürge der guten Hofnung	33.55.	440,05.
Jaquier	Rom	41 54.	440,28.
Picard	Bayonne	43.30.	440,50.
Liesganig	Wien	48.12.	440,56.
Richer	Paris	48.50.	440,60.
Mairan	——	——	440,57.
Graham	London	51.31.	440,60.
Lulof	Leyden	52. 9.	440,71.
Meyer	Greifswalde	54. 4.	440,83.
	Archangel	64.33.	441,10.
	Kola	68.52.	441,31.

§. 120.

Pendellängen, so durch Vergleichungen der Schwingungen bestimmt worden.

Condamim	Para	1°.28′	439,22.
Campbell	Jamaica	18. 0.	439,44.
Mairan	Paris	48.50.	440,57.
Graham	London	51.31.	440,65.
Celsius	Upsal	59. 2.	440,91.
Grischow	Dörpt	58.26.	440,92.
— —	Reval	59.26.	440.95.
Mallet	Petersburg	59.36.	441.02.
Maupertuis.	Polla	66.48.	441,17.
Mallet	Ponoi	67. 5.	441,22.

§. 121.

Die letztere Tabelle läßt sich noch weiter ausdehnen, wenn die Pendellängen von zweien Orten gegeben werden, und auch die geographische Breite für den Ort, dessen Pendellänge durch Rechnungen gefunden werden soll, bekannt ist. Ich will hier ein Beispiel für Hamburg hersetzen; vorausgesetzt, daß die Länge der Pendeln wie die Quadrate von dem Sinus der geographischen Breite zu nehmen. Man nehme den Unterschied zweier gemessener Pendellängen, und schliesse folgendermaßen:

Das Quadrat des Sinus der Breite eines bekannten Orts, z. B. Paris, weil eben an diesem die Pendellänge sehr genau gemessen und auch verglichen ist, verhält sich zu dem Quadrate des Sinus der geographischen Breite des Orts, davon man die Pendellänge zu wissen verlangt, so auch der obige Unterschied zu dem Unterschiede der Pendellänge vom Aequator bis zu dem gesuchten Orte. Z. B. diese Rechnung läßt sich durch die Logarithmen bequem anstellen.

Pendellänge von Quito	=	439, 10.
— — Paris	=	440, 57.
Unterschied der Pendellänge	=	1′ 47″

Breite v. Paris 48°50 :	Breite v. Hamb. 53°34′ =	Untersch. 1′ 47″
Log. sin.² 19,7533570	Log. sin.² 19,8111044	Log. 2,1673173
	2,1673173	
	21,9784217	
	19,7533570	
Logarith.	2,2250647	
Untersch.	1,68	

Diesen Unterschied zu der Pendellänge von Quito addiret, giebt die Pendellänge von Hamburg, nemlich 439,10 + 1,68 = 440,78 franz. Linien. Im rheinländischen Maße nach dem Verhältniß von 139,13 : 144,00 ist 456,21 Linien oder 38 Zoll $\frac{21}{100}$ Lin. = 3′ 2″ $\frac{21}{100}$‴

§. 122.

In einer der vorigen § habe ich die Länge des Pendels auf 3′ 1″ 11,9‴ angegeben, welcher Unterschied nur geringe ist. Obige Länge in rheinl. Maße auf Hamburger nach dem Verhältnisse von 127,00 : 139,13 gebracht, giebt dasselbe auf 3 Fuß 5 Zoll 7 $\frac{79}{100}$ Linien an, welches auch mit der gemessenen Länge des Pendels von Hamburg ziemlich übereintrift, woraus sich auch zugleich die Höhe des Falls eines Körpers zu Hamburg in einer Sekunde leicht berechnen läßt. Denn (108) verhält sich

$113^2 : 355^2 = \frac{1}{2}$ Länge des Pendels $= 249,89 : x$

2466, 31 Linien Hamb. Maß = 17′ 1″ 6,31‴

§. 123.

Wenn man nach der in (121) angeführten Art die Länge des Sekundenpendels für 90°

Breite, oder für den Pol, berechnet, so findet man für dieses = 441, 69 franz. Linien. Nun war die Länge eines Sekundenpendels unterm Aequator = 439, 10 franz. Linien. Folglich verhält sich der Durchmesser des Aequators zu der Erdaxe wie diese Zahlen, oder wie die Längen der Pendeln. D. i. 43910 : 44169, oder in kleinern Zahlen wie 191 : 192. Nach diesem Verhältnisse weicht also die Erde von der wahren Kugelgestalt ab, und ist daher an den Polen etwas flacher als unterm Aequator. Dieses ist durch wirkliche Ausmessungen der Erde, nicht an einem, sondern an mehrern Oertern, bestätiget worden.

§. 124.

Bei der bisher geführten Erklärung des Pendels habe ich angenommen, daß der Faden oder die Stange desselben ganz ohne Schwere sei. Man kann aber leicht urtheilen, daß diese Voraussetzung nicht Statt haben könne. Denn die Stange oder der Faden ist vielmehr eine körperliche Masse, davon jeder Theil für sich ein Gewicht hat oder schwer ist, und jeder Theil aus diesem Grunde wie ein Pendel anzusehen ist. Man nennt es daher das zusammengesetzte, zum Unterschiede desjenigen, das ich vorhin erkläret habe, welches den Namen des einfachen führet. Kann man nun bei dem zusammengesetzten Pendel die Summe der Gewichte von allen Theilen desselben in ein einziges Gewicht bringen, so

wird

wird die Pendelstange, sie mag so schwer seyn als sie wolle, gar nicht in Betracht gezogen, sondern läßt sich alsdann als ein einfaches Pendel betrachten. Mit Hülfe der höhern Geometrie liesse sich dieses nun leicht bewerkstelligen, aber da ich mir diese gleich anfangs nicht erlaubt habe, so muß ich auch hier einen andern Weg einschlagen, der aber eben so gut zum Ziele führen wird, als jener.

§. 125.

CBOA (Fig. 17) sei eine harte unbiegsame Stange, an welcher in B und A Gewichte hängen. Jedes von diesen wird sich bemühen, um den Anhängungspunct C als ein einfaches Pendel seine Schwingungen zu vollführen, weil aber nun die beiden Gewichte vermittelst der Stange mit einander verbunden sind, so wird das Gewicht B das Gewicht A beschleunigen, oder welches einerlei ist, das Gewicht A würde für sich allein, wenn es nicht mit B verbunden wäre, nicht so geschwinde vibriren als jetzt. Aber eben dadurch wird das Gewicht an seinen Schwingungen verzögert. Läßt sich demnach zwischen den beiden Gewichten B und A ein Gewicht O in der Entfernung OC vom Anhängungspunct C angeben, dessen Schwingungen einerlei mit denen von A und B sind, so giebt eben die Entfernung OC die Länge des einfachen Pendels an, welches einerlei Zeit hält mit dem zusammengesetzten.

Diesen Punct O, den man als den Schwerpunct der beiden Gewichte ansehen kann, hier aber der Schwingungspunct, oder der Mittelpunct des Schwunges (Centrum oscillationis) heißt, zu finden, muß das Moment seiner Bewegung (worunter man das Product aus dem Gewichte multiplicirt in die Entfernung von C versteht) einerlei seyn mit den Momenten aller übrigen Gewichte.

§. 126.

Man bringe das Pendel CBOA durch einen Stoß in die Lage Cdoa. Dies geschehe nach einer unendlich kleinen Zeit. Während dieser hat sich das Gewicht B durch den Raum Bd, das einfache Pendel durch Oo, und das Gewicht A durch den Raum Aa beweget. Weil die Zeiten gleich sind, so verhalten sich die Geschwindigkeiten wie die Räume, d. i. wie Bd : Oo : Aa. Zieht man an dem Endpunct o der Linie Oo die senkrechte Linie bf, so wird das Gewicht B um bd verzögert, und A um af beschleuniget, in Hinsicht des Gewichts O.

§. 127.

Das Moment von O ist = OC (B + A), weil man sich in den Punct O die Summe beider Gewichte vorstellen muß. Das verzögerte Moment von B ist = CB. bd. B, und das von A = CA. af. A. Beide werden sich demnach gleich seyn. Denn um eben so viel, als das Gewicht

wicht B geschwinder schlägt, weil es dem Puncte C näher liegt als A, verlieret es an bd; und um eben so viel, als das Gewicht A langsamer bewegt wird, durch die größere Entfernung von C, gewinnet es wieder durch af. Nun ist aber das Δ bda $\sim \Delta$ caf, und daher

$$af : bd = of : ob = OA : OB.$$

Aber man hat auch $CB.B : CA.A. = af : bd$, und da $af : bd = AO : OB$, so erhält man aus eben dem Grunde $CB.B : CA.A = AO : OB$, und $CB.B + CA.A : CA.A = AO + BO : OB$,

folglich $BO = \frac{CA.A. \; AO + OB}{CB.B + CA.A}$.

§. 128.

Allgemein läßt sich der Schwingungspunct eines Pendels auf folgende Art finden:
Man nenne $CB = b$, $CO = x$ und $CA = a$, so ist $OB = x - b$ und $OA = a - x$.
Nun ist $Bb : Aa = a - x : x - b$.
Und daher ist $Bbx - Bb^2 = Aa^2 - Aax$

$$(Bb - Aa)\,x = Bb^2 + Aa^2,$$

folglich $x = \frac{Bb^2 + Aa^2}{Aa + Bb}$.

Multiplicirt man demnach jede Masse in das Quadrat der Entfernung, und dividiret die Summe derselben durch die Summe der Massen multiplicirt in die Entfernung vom Bewegungspuncte, so erhält man zum Quotienten die Entfernung des Schwingungs- vom Anhängungspuncte. Man nennet das Product, welches aus der Masse multiplicirt in das Quadrat der Entfernung, das Moment der Trägheit, so wie hingegen das, welches aus der Masse multiplicirt in die Entfernung, das statische Moment heißt.

§. 129.

Je größer die untere Kugel, oder je mehr Masse dieselbe bei einem zusammengesetzten Pendel hat, destoweniger kommt das Gewicht der Stange, woran die Kugel befestiget ist, in Betracht. Sieht man die Stange als eine abgeköpfte Pyramide an, so läßt sich durch die höhere Geometrie beweisen, daß der Schwingungspunct des zusammengesetzten Pendels auf $\frac{2}{3}$ (vom Anhängungspuncte angerechnet,) der Länge desselben fällt. Oder man gäbe dem einfachen Pendel Zweidrittel der Länge des zusammengesetzten, so werden beide ihre Schwingungen in gleicher Zeit vollenden.

§. 130.

Hier wäre der Ort, sich weitläuftiger über diese Materie auszulassen, wenn ich nicht befürchtete, daß es wider die Grenzen dieser Schrift laufen würde; und wenn der Leser nicht in andern Büchern dieser Art, vorzüglich in Herrn Hofrath Kästners höhern Mechanik auf der 222sten Seite, und in Herrn Hofrath Karstens Lehrbegriff der gesammten Mathematik 4ter Theil,

diese

diese ganze Lehre mit weit mehr Schärfe auseinandergesetzt vorfände, als ich hier anwenden konte. Huygen hat in der Mitte des vorigen Jahrhunderts zuerst die Theorie von dem zusammengesetzten Pendel auseinandergesetzt, die nachher durch die beiden Brüder Bernouilli noch mehr berichtiget, und zuletzt von dem berühmten Herrn Euler umständlich vorgetragen und erläutert worden.

§. 131.

Huygen erfand im Jahre 1656 die Pendeluhren, und wand obige Theorie der Pendeln glücklich auf dieselben an. Die Materie, woraus gewöhnlich unsere Pendeln bereitet werden, ist von einer solchen Beschaffenheit, daß sie die Veränderung der Witterung unterworfen ist. Denn jedermann weiß, daß die Metalle von der Wärme ausgedehnet und von der Kälte zusammengezogen werden. Das muß also nothwendig auf den Gang der Uhren einen Einfluß haben. Man hat sich daher bemühet, den Fehler, wo nicht ganz, doch wenigstens zum Theil abzuhelfen, vorzüglich an solchen Uhren, die zu astronomischen Beobachtungen gebraucht werden.

§. 132.

Aus den Versuchen, die man mit metallenen Stangen durch Hülfe des Pyrometers angestellet hat, erhellet, daß das Eisen, und nächst diesem das Kupfer am wenigsten von der Hitze ausgedehnet wird, und daß daher Pendelstangen, aus diesem Metalle verfertiget, die geringste Abweichung geben. In neuern Zeiten hat man 5 oder 6 Stangen aus diesen Metallen mit einander so zu verbinden gewußt, daß die Ausdehnungen der Stange sich gegenseitig aufheben. Die Figur eines solchen Pendels ist rostförmig, und die Stangen sind so an einander befestiget, daß die eine sich oberwärts, die andere aber unterwärts ausdehnen muß, und daß also der Schwingungspunct auf die Art fast gar keine Veränderung leidet. *)

§. 133.

Eine andere Art, die zu eben diesem Zwecke dienen solle, schlug Graham im Jahre 1721 vor. Sie bestand aus einer holen Glasröhre, die aber auch von Metall seyn kann, mit Quecksilber angefüllet, und die an einer Uhr statt des Pendels angebracht wird. Der Schwingungspunct der Röhre liegt auf $\frac{2}{3}$ der Länge der Röhre, vom Anhängepunct angerechnet; und diese Länge kommt mit der, des einfachen Pendels überein. Die Röhre wird sich nun vermöge der Materie, woraus

*) In dem astronomischen Jahrbuch von 1789 beschreibt der Herr Oberamtmann Schröter, ein von Fichtenholz und Messing zusammengesetztes Pendel, das er an seiner Uhr gebraucht, und keine Veränderung in der Länge durch Wärme und Kälte bemerkt.

woraus sie gemacht ist, der Länge nach, ausdehnen, das Quecksilber aber gleichfalls beide Körper nach entgegengesetzter Richtung, folglich wird der Schwingungspunct eben hiedurch in derselben Lage, die er vorhin hatte, liegen bleiben. Andere Arten von Pendeln, die eben dieses leisten sollten, übergehe ich; nur muß ich noch anmerken, daß sich das untere Gewicht, welches an den gewöhnlichen Pendeln befestiget ist, vermittelst einer Schraube auf- und niederwärts verschieben lasse, wodurch ebenfalls der Gang einer Uhr berichtiget werden kann.

§. 134.

Da nun noch überdem der Gebrauch der Pendeln bei den Uhren ganz nothwendig ist, so hat man dasselbe auch zum allgemeinen Maßstabe vorgeschlagen. Da diese Sache von Wichtigkeit und von vielen Nutzen für das menschliche Leben ist, aber da die Materie, worauf man gewöhnlich das Maaß von einem andern Orte aufträgt und verzeichnet, so mannigfaltigen Veränderungen unterworfen ist, so hat man schon lange vorgeschlagen, zu diesem Zwecke sich des Sekundenpendels von dem Orte zu bedienen, dessen Fußmaaß man zu wissen verlangt.

Zusatz.

Daß das Pendel auch noch bis jetzt von Gelehrten zu einem allgemeinen Maße vorgeschlagen

wird

wird, ergiebt sich aus folgender Schrift, die erst in diesem Jahre in London herausgekommen, und sehr viel Brauchbares in sich zu halten scheint. Das Werkzeug selbst ist durch die Veranlassung einer Preisaufgabe in den Jahren 1776 bis 79 von einem sehr geschickten Uhrmacher in London, Namens Hatton, verfertiget worden. Weil es aber nicht so ganz der Aufgabe der Gesellschaft ein Genüge geleistet, so hat der Verfertiger es halb vollendet liegen gelassen, und sich nicht weiter darum bekümmert. Einige Jahre nachher hat der Verfasser dieser Schrift dasselbe wieder hervorgesucht, die Mängel abgeändert, und in den Stand gesetzt, worin es in dieser Schrift beschrieben wird. Die Abhandlung selbst führet diesen Titel: An Attempt towards obtaining invariable Measures of Length, Capacity, and Weight, from the Mensuration of Time, independent of the Mechanical Operations requisite to ascertain the Center of Oscillation, or the true Lenght of Pendulums, by John Whitehurst, F. R. S. London 1787. Das ganze Verfahren des Verfassers dieser Schrift gründet sich darauf, daß er an einer Uhr, die auf acht Tage geht, zwei Pendel, oder eigentlich ein Doppelpendel anbringt, welche ihre Schwingungen in dem Verhältniß wie 1 : 2 machen. Das heißt, das eine macht 42 Schwingungen, wenn das andere in eben der Zeit 84 vollen-

vollendet. Die Länge des ersten ist demnach 20 Zoll, und die des letztern 80 Zoll. Nun muß man sich vorstellen, beide Pendel sind an einem gemeinschaftlichen Drath befestiget, und beide beschreiben, indem sie in Schwung gesetzt werden, ähnliche Bogen. Bei der Uhr muß dieser Bogen nicht über 3° 20′ ausmachen. Der Unterschied der Längen beider Pendel beträgt 60 Zoll oder 5 englische Fuß; und dieser Unterschied muß den allgemeinen Maaßstab hergeben, folglich zur Vergleichung aller übrigen dienen. Das eigentliche Pendel, welches zu London Sekunden schwingt, und dessen Länge der Verfasser dieser Abhandlung auf 39, 2 engl. Zoll angiebt, fällt zwischen diese Abtheilung. Das Merkwürdigste bei diesem Doppelpendel ist, daß der eiserne Drath nur ein Gewicht von 3 Grän, und daß die Kugel des Pendels, welche 1 Zoll im Radius hält, 25 ounc. 10 dwt. 11 gr. Troygewicht wiegt, folglich ist das Gewicht des Draths gegen das, der Kugel sehr geringe, und man kann daher das ganze zusammengesetzte Pendel sehr bequem für ein einfaches ansehen.

Bei der Vorrichtung, die an dem Werke angebracht ist, ist dieselbe so getroffen und so eingerichtet worden, daß die Schwingungen der Pendel durch Gewichte hervorgebracht werden, die in eben dem Verhältnisse stehen, als die Länge der Pendel, nemlich wie 1 : 4; oder das eine erfor-

erfordert eine Kraft von 8 und das andere eine von 32 Unzen.

Die Temperatur des Werkzeuges selbst ist 60° Fahrenh. Das eigentliche Intervall zwischen den beiden Pendeln ist nicht 60, sondern genauer 59, 892 engl. Zoll. Diese Weite wird erst in 5 gleiche Theile, jeden von diesem wieder in 10 eingetheilet. Diese Eintheilung ist deswegen getroffen, um den Kubikfuß in 1000 gleiche Theile zu theilen. Wenn nun ein Kubikfuß 1000 Unzen Avoir du pois Gewicht wiegt, so kommt ein Kubikzoll des Längenmaßes genau mit dem Gewichte einer Unze Wasser überein. Dies muß aber eben so als vorher bei einer Temperatur von 60° Fahrenheit geschehen.

Nach diesem Instrumente hat man denn folgende Vergleichungen der Fußmaßen verschiedener Länder, in Rücksicht des englischen Fußes, angestellet. Der englische Fuß ist dabei, genau in tausend Theile eingetheilet, angenommen worden.

I. Tabelle.

		Länge des Fußes in engl. Zoll und Zehntheile desselben.
London	— 1000 —	12, 0
Paris (pié de roi)	— 1068 —	12, 8
Amsterdam	— 942 —	11, 3
Bril	— 1103 —	13, 2
Antwerpen	— 946 —	11, 3

Dort

	Länge des Fußes in engl. Zoll und Zehntheile desselben.	
Dort	— 1184 —	14, 2
Leiden (Rheinl.)	— 1033 —	12, 4
Lothringen	— 958 —	11, 4
Mecheln	— 919 —	11, 0
Middelburg	— 991 —	11, 9
Strasburg	— 920 —	11, 0
Bremen	— 964 —	11, 6
Cölln	— 954 —	11, 4
Frankfurt am Mayn	— 948 —	11, 4
Spanien	— 1001 —	12, 0
Toledo	— 899 —	10, 7
Rom	— 967 —	11, 6
Bononien	— 1204 —	12, 4
Mantua	— 1569 —	18, 8
Venedig	— 1162 —	13, 9
Danzig	— 944 —	11, 3
Copenhagen	— 965 —	11, 6
Prag	— 1026 —	12, 3
Riga	— 1831 —	21, 9
Turin	— 1062 —	12, 7
Der Griechische	— 1007 —	12, 1
Der alte römische	— 970 —	11, 6
Bonanianische	— 1140 —	13, 7.

II. Tabelle.

Vergleichung des Ellenmaßes verschiedener Länder, auf den englischen Fuß reduciret.

	Tausendtheile.		Fuß.	Zolle.
Lyon	3976	—	3.	11,7
Bologna	2056	—	2.	0,8
Amsterdam	2269	—	2.	3,2
Antwerpen	2273	—	2.	0,2
Rheinländ.	2260	—	2.	3,1
Frankfurt	1826	—	1.	9,9
Hamburg	1905	—	1.	10,8
Leipzig	2260	—	2.	3,1
Lübeck	1908	—	1.	9,8
Nürnberg	2227	—	2.	3,3
Bayern	954	—	0.	11,4
Wien	1053	—	1.	0,6
Dünkerken	1903	—	1.	10,8
Florenz	1913	—	1.	11,9

III. Ta=

III. Tabelle.

Vergleichungen der Gewichte verschiedener Städte gegen das englische Avoir dupois Gewicht, in 100 Theile desselben ausgedruckt.

London	—	100
Paris	—	93
Lyon	—	109
Bologna	—	89
Amsterdam	—	93
Antwerpen	—	98
Leyden	—	96
Lothringen	—	98
Mecheln	—	98
Middelburg	—	98
Strasburg	—	93
Bremen	—	94
Cölln	—	97
Frankfurt am Mayn	—	93
Hamburg	—	95
Leipzig	—	115
Nürnberg	—	94
Wien	—	94
Castilien	—	99
Lissabon	—	106
Toledo	—	100
Rom	—	123
Florenz	—	123

Neapel	——	143
Genua	——	142
Mantua	——	143
Milano	——	140
Parma	——	143
Venedig	——	153
Danzig	——	119
Copenhagen	——	94
Prag	——	106
Cairo	——	161
Constantinopel	——	86.

Anmerkung.

Diese drei Tabellen sind sehr bequem zu gebrauchen. Denn die Fuß- und Ellenmaßen nebst den Gewichten von ein paar Städte oder Länder verhalten sich zu einander wie die ganzen Zahlen, welche bei dem Orte ausgedruckt sind. Nur bei dem Gebrauche der beiden ersten Tafeln muß man die Zahlen im umgekehrten Verhältnisse setzen. So machen z. B. 942 Fuß in London 1000 Fuß in Amsterdam. Nach Krusens Contoristen 1ster Theil finde ich folgendes Verhältniß:

918 Fuß Amsterd. = 852 Fuß Lond. oder auf den Amsterdammer Fuß gehen 11, 13 engl. Zoll, da nach der ersten Tabelle doch 11, 3 Zoll darauf gehen sollten. Dies giebt einen Unterschied von $\frac{17}{100}$ Zoll, welches beinahe $\frac{1}{5}$ Zoll beträgt. Gewiß ein merklicher Unterschied, wenn

man mit großen Zahlen rechnet. Eben so finde ich auch in der dritten Tabelle einen beträchtlichen Unterschied, wenn ich diese mit der fünften Tabelle im Kruse vergleiche. So betragen nach dieser 100 ℔ engl. avoir du pois Gew. 91 ℔ in Amsterdam, oder 94 ℔ in Hamburg; dafür giebt unsere Tafel 93 und 95 an.

Hieraus kann man also sehen, wie unsicher öfters solche Angaben sind, wenn sie nicht gehörig untersucht und mit genauern Angaben verglichen werden.

Das siebende Capitel.

Von der Wurfbewegung.

§. 135.

Nachdem ich im vorigen Capitel die Wirkung der Schwere auf das Pendel erkläret habe, will ich in diesem Capitel diejenige erwähnen, welche sie auf die geworfenen Körper äussert.

§. 136.

Ein schwerer Körper, er mag entweder parallel mit dem Horizonte, oder auch schief mit demselben von einer Kraft, deren Richtung durch den Schwerpunct des Körpers geht, fortgestoßen oder geworfen werden, wird sich, vermöge der Trägheit, gleichförmig fortbewegen, das heißt, der Körper wird mit der einmal erhaltenen Geschwindigkeit in gleichen Zeiten gleiche Räume beschreiben, wenn keine äussere Ursache seine Bewegung hindert. Er würde auch beständig nach der einmal erhaltenen Richtung, mithin in einer geraden Linie seinen Weg fortsetzen, wenn die Schwere auf denselben nicht nach einer vertikalen Richtung wirkte. Diese letztere Kraft wird daher den Körper nöthigen, eine andere, als eine gerade Linie zu beschreiben.

§. 137.

Ein geworfener Körper wird demnach von zweien Kräften getrieben; die eine wird ihn nach der Richtung fortzutreiben suchen, welche ihm von der Gewalt des Stoßes beigebracht ist. Die andere ist die Schwere, welche den Körper nach der senkrechten Richtung, und zwar beschleunigend, zur Erde treibt. Der Körper wird nun, nach dem Gesetze der zusammengesetzten Bewegung, keiner von beiden folgen, sondern eine mittlere Richtung annehmen, und da die Schwere ohne Aufhören auf den Körper wirkt, so wird der Weg, den der bewegte Körper zurücklegt, eine krumme Linie seyn. Von dieser beweist die höhere Geometrie, wenn die Wirkung der Luft bei Seite gesetzt wird, daß sie diejenige sei, welche den Namen der Parabel führet.

§. 138.

Damit man das Allgemeine der Wurfbewegung der Körper übersehe, will ich erstlich annehmen,

nehmen, der Körper werde parallel mit dem Horizonte geworfen, und beschreibe nun, vermöge seiner Trägheit, in gleichen Zeiten gleiche Räume, ohne auf den Widerstand der Luft und auf seine eigne Masse Rücksicht zu nehmen; dann auch, daß die Richtung des Stoßes durch den Mittelpunct senkrecht vor sich gehe.

§. 139.

Ein Körper, welcher nach der Richtung AE (Fig. 18) parallel mit dem Horizonte durch irgend einer Kraft fortgestoßen wird, würde dadurch, wenn nicht die Schwere nach den vertikallinien AH, BL, CM, DN, Ee auf den Körper wirkte, und auch nicht die Luft und sonst eine Hinderniß, welche von der Masse und seiner Geschwindigkeit herrühret, ihm widerstünde, die gleichen Räume AB, BC, CD und DE in gleichen Zeiten zurücklegen. Man stelle sich den Raum AE sehr klein vor, so wird dieser gleichfalls in einer sehr kleinen Zeit zurückgelegt werden, und hier wird man keinen beträchtlichen Fehler begehen, wenn man vorerwähnte Hindernisse bei Seite setzet.

§. 140.

Ist nun der geworfene Körper nach dem vierten Theil der verlaufenen Zeit in B angekommen, und die Schwere hat ihn während dieser Zeit um Bb = Aa von der geraden Richtung AE abge-

 bracht,

bracht, so ist klar, daß der Körper von zweien Kräften AB und Bb = Aa getrieben sei, deren keiner von beiden er annehmen, sondern am Ende der Zeit in b anlangen wird, und auf diese Weise den Weg Ab beschrieben haben. Dieser Weg ist aber die Diagonallinie von dem Parallelogramm AB ab, welches ich auch schon in (64) bewiesen habe.

§. 141.

Hörte nun die Schwere auf, auf den Körper zu wirken, so würde derselbe, vermöge seiner Trägheit, nach der Richtung Ab seinen Weg gleichförmig fortsetzen, und am Ende des zweiten Zeittheilchens in β anlangen, da aber dies der Fall nicht ist, so wird ihm die Schwere in eben der Zeit durch den Raum aF = lc zur Erde bringen, und der geworfene Körper beschreibt daher wieder die Diagonallinie bc von dem Parallelogramm blc, und befindet sich am Ende dieser Zeit nicht in β, sondern in c. In der Richtung dieser Linie würde der Körper, ohne die Wirkung der Schwere, am Ende des dritten Zeittheilchens in γ anlangen. Allein die Schwere höret auch hier nicht auf, auf denselben zu wirken, sondern bringt ihn statt in γ in d. Hier theilt sie ihm aufs neue eine beschleunigende Bewegung mit, und bringt ihn endlich am Ende des vierten Zeittheilchens nicht in δ, sondern in e.

§. 142.

§. 142.

So hat also der geworfene Körper, durch die Wirkung von beiden Kräften, den Weg Abcde in eben der Zeit zurückgelegt, als derselbe, wenn beide Kräfte einzeln für sich gewirkt hätten, ihn entweder nach H, nemlich durch die Schwere allein, oder auch durch den Wurf nach E, in gleicher Zeit gebracht hätten. Da die Schwere beschleunigend auf den Körper wirkt, so führt sie denselben in dem zweiten Zeittheilchen durch einen dreimal größern Raum als in dem ersten, und wie in (71) wachsen die Räume wie die ungeraden Zahlen.

§. 143.

Auf die Art läßt sich also der Weg eines geworfenen Körpers leicht verzeichnen, wenn man die Linie AE, welche parallel mit dem Horizonte geht, in vier gleiche Theile, als AB, BC, CD und DE theilet. Die Vertikallinie AH aber so eintheilet, daß die Räume Aa, aF, FG und GH wie die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 zunehmen, Alsdann die Puncte A, b, c, d und e mit geraden Linien zusammenhänget.

§. 144.

Wäre die Zeit, welche der Körper von A nach E zubringt, einer Sekunde gleich, so würde der Körper am Ende dieser Zeit, durch die Schwere getrieben, einen Raum von 15,625 rheinländ. Fuß durchgefallen, und um eben so

viel

viel würde der geworfene Körper von der geraden Linie AE abgewichen seyn. Und da sich die durchgefallenen Räume wie die Quadrate der Zeiten verhalten, so ist der Körper am Ende des ersten Viertels einer Sekunde um $\frac{1}{16}$. 15,625; am Ende des zweiten um $\frac{1}{4}$. 15,625; des dritten um $\frac{9}{16}$. 15,625 von der geraden Linie AE abgewichen.

§. 145.

Da ein so sehr kleiner Theil der Zeit während des Wurfes angenommen ist, und die Schwere unaufhörlich den Körper nach der vertikalen Richtung zur Erde zu bringen sucht, so kann man den Weg des geworfenen Körpers als eine krumme Linie ansehen. Diese Linie hat nun die Eigenschaft, wenn man nicht auf den Widerstand der Luft rechnet, daß die Stücke Aa, aF u. s. w. der geraden Linie AH, welche hier den Namen Abcissen führen, sich wie die Quadrate der Linien (Ordinaten) ab, FC, GD u. s. w., welche senkrecht an AH liegen, verhalten. Diese krumme Linie, welche auf die Weise durch die Endpuncten b, c, d und e der geraden Linien ab, FC, Gd u. s. w. konstruiret wird, heißt in der höhern Geometrie die Parabel. Folglich ist der Weg, den ein geworfener Körper nach der oben angeführten Voraussetzung beschreibet, eine Parabel.

§. 146.

Hierbei habe ich aber vorausgesetzt, daß die Linien AH, BL, CM, DE und Ee mit einander parallel gehen. Nun stellen diese Linien die Richtungen der Schwere vor, die im eigentlichen Verstande nicht mit einander parallel fortlaufen, sondern im Mittelpunct der Erde zusammen kommen. Folglich kann auch die krumme Linie im strengsten Verstande keine Parabel seyn, sondern der geworfene Körper muß eine andere Art von krummer Linie beschreiben. Weil aber die Wurfbewegung auf der Oberfläche der Erde vorgeht, und diese um 860 geographische Meilen von dem Mittelpunkt der Erde entfernt liegt, so lassen sich, vermöge dieser Entfernung, die Schwerlinien auf der Oberfläche der Erde als gleichlaufend unter sich ansehen; mithin ist auch der Weg eines geworfenen Körpers, ohne einen merklichen Fehler, eine Parabel.

§. 147.

AF (Fig. 19) sei die Richtung, nach welcher ein schwerer Körper geworfen werde; und der Winkel FAE sei der Neigungswinkel, welcher der geworfene Körper mit dem Horizonte AE macht. AG sei die Geschwindigkeit desselben, so läßt sich diese in zwei andere, nemlich in HG und HA = GB zerlegen. HG = AB, welche parallel mit der Horizontallinie AE ist, wird von der Schwere nicht gehindert; oder welches einerlei ist, die Bewegung nach dieser Linie ist gleichförmig; aber nach der vertikalen Linie HA treibt die Schwere den Körper zur Erde.

§. 148.

Heißt nun die Geschwindigkeit, womit der schwere Körper nach der Richtung AF geworfen wird h, so ist die vertikale Geschwindigkeit = h sin. GAB, und die horizontale = h cos. GAB. Da nun der Körper mit der horizontalen Geschwindigkeit sich gleichförmig fortbeweget, so wird derselbe nach der Zeit t den Weg ht cos. GAB zurückgelegt haben. In eben der Zeit wird der Körper vertikal auf die Höhe = ht sin. GAB — gt^2 gelangen, weil die Schwere die vertikale Bewegung um gt^2 verzögert. (g bedeutet hier eben das, was es oben 73). Nach diesen beiden Formeln läßt sich der Ort leicht finden, wo der Körper sich jedesmal in der Parabel aufhalte, und aus der letzten kann man leicht gewahr werden, daß die Bewegung des geworfenen Körpers nicht nach einer geraden Linie vor sich gehen könne, sondern daß derselbe nothwendig eine krumme Bahn beschreiben müsse.

§. 149.

Mit der vertikalen Geschwindigkeit h sin. GAB kann der Körper zu einer Höhe gelangen, die ich (81) durch $\frac{h^2}{4g}$ ausgedruckt habe. Da nun $h^2 = h^2 \sin. a^2$ (wenn der Neigungswinkel

= a

$=$ a heißt) so ist die Höhe $\frac{h^2 \sin. a^2}{4g}$, und diese erreicht der Körper in der Zeit $t = \frac{h}{2g} = \frac{h \sin. a}{2g}$. Drückt die Linie DC die Höhe aus, worauf der Körper steiget, so braucht derselbe auch eben die Zeit, um dieselbe wieder herunter zu fallen, und dies geschieht demnach in der Zeit $\frac{h \sin. a}{2g}$.

§. 150.

Wird für die Horizontalweite $AD = ht \cos. a$ gesetzt, und für t, der so eben gefundene Werth desselben (149) in der Gleichung $ht \cos. a$ angebracht, so erhält man für $AD = \frac{h^2 \sin. a \cos a}{2g}$ folglich für $AE = \frac{h^2 \sin. a \cos. a}{g}$, oder die horizontale Weite des Wurfs.

§. 151.

Folgendes Beispiel wird die Sache deutlicher darstellen. Man nehme an: die Geschwindigkeit einer Kugel sei 600 Fuß rheinl. für eine Sekunde, und der Wurf geschehe unter einem Winkel von 30 Grad mit dem Horizonte, so ist $h = 600$ und $a = 30°$, die vertikale Geschwindigkeit für eben die Zeit also, $= 600 \sin. 30° = 300'$ rheinl., und die horizontale $= 600 \cos. 30° = 519{,}62'$.

Die

Die Höhe, welche die Kugel mit der vertikalen Geschwindigkeit erreicht $= \frac{600^2 (\sin. 30)^2}{4. 15,625}$.

Diese Rechnung läßt sich durch die Logarithmen am leichtsten bewerkstelligen.

Log. sin. 30°	=	9. 6989700
Das Quadrat desselben	=	19. 3979400
Log. 600²	=	5. 5563024
Quadrat des rad.		24. 9542424
		20. 0000000
		4. 9542424
Logarith v. 62½	=	1. 7958800
Log.		3. 1583624
		1400 Fuß rheinl.

für die Höhe, welche die Kugel mit der erhaltenen Geschwindigkeit erreicht.

§. 152.

Dazu wird die Zeit gefunden, wenn $\frac{h \sin. a}{g}$ in Zahlen oder durch die Logarithmen angegeben wird.

Log. 600	=	2. 7781512
Log. sin. 30°	=	9. 6989700
		2. 4771212
Hievon den Log. g	=	1. 1938200
		1. 2833012

$19\frac{1}{5}$ Sekunde für die Zeit des Wurfs, folglich für die halbe $= 9\frac{3}{5}''$.

Die

Die Horizontalweite des Wurfs ergiebt sich nach der Formel $\frac{h^2 \text{ sin. a cos. a}}{g}$ vermittelst der Logarithmen, wie folget:

Log 600^2	=	5. 5563024
Log. sin. 30°	=	9. 6989700
Log. cos. 30°	=	9. 9375306
		25. 1928030
r^2	=	20. 0000000
		5. 1928030
Hiervon den Log. von g	=	1. 1938200
		3. 9989830

Die zu diesen Logarithmen gehörige Zahl ist 9976, welche die Horizontalweite an rheinländischen Füßen ausdrückt.

§. 153.

Für die Wurfweite läßt sich die Formel noch etwas kürzer ausdrücken, wenn man für das Product von sin. a cos. a = sin. 2 a setzt. Um dieses zu beweisen, beschreibe man mit dem Radius CA (Fig. 20) den Kreis ADBL, und nehme den Radius für 1; so ist AB = 2 der Winkel ACE = a, und mache den Bogen ED = AE, folglich ACD = 2a. Ax ist der Sinus des Winkels a, also AD = 2 sin. a und DB = 2 cos. a. Aus D lasse man die Linie DF auf AB senkrecht fallen, so ist DF = sinus 2 a, und die Dreiecke ADB und

und DBF sind alsdann einander ähnlich. Hieraus erhält man

$$AB : AD = DB : DF,$$

oder $2 : 2 \sin. a = 2 \cos. a : \sin. 2a$,

folglich $\sin. 2a = \frac{2 \sin. a. 2 \cos. a}{2} = \frac{4 \sin a. \cos. a}{2} =$

$$2 \sin. a. \cos a.$$

Und es ergiebt sich also $AE = \frac{h^2 \sin. 2a}{2g}$.

§. 154.

Setzt man hier eben so als vorher $h = 600$, so ist $\frac{h^2}{2g} = \frac{360000}{2.15{,}625} = 11520' \sin. 60° =$

$$11520.\ 866 = 9976' \text{ rheinl. wie vorhin.}$$

Aus dieser letzten Formel $AE = \frac{h^2 \sin. 2a}{2g}$ läßt sich h finden, wenn die Schußweite als bekannt vorausgesetzet wird; denn $h^2 \sin. 2a = 2g. AE$, folglich $h = \sqrt{\left(\frac{2g. AE}{\sin. 2a}\right)}$. Untersucht man daher die Wurfsweite durch einen Probeschuß, und setzt diese für AE, so ergiebt sich dadurch die Geschwindigkeit. Hieraus läßt sich auch der Neigungswinkel finden, unter welchem der Probeschuß geschehen muß. Herr Hofrath Karstens giebt demselben in seinem Lehrbegriff der Mathematik 4ter Theil auf 15° an.

§. 155.

Die Wurfweite legt der Körper innerhalb $19\frac{1}{5}''$ zurück, und diese Angabe kömmt völlig mit der überein, welche ich von der horizontalen Bewegung (151) angegeben habe. So läßt sich denn auch die Bahn, welche der geworfene Körper während des Wurfs beschreibt, leicht konstruiren, wenn man für die Abcissen die horizontale, und für die Ordinaten, die vertikale Geschwindigkeit (nämlich $ht \sin. a - gt^2$) und für t, die Zeit in der Formel setzet. Man sieht aber zugleich, daß ich hier keine Rücksicht auf den Widerstand der Luft genommen habe; und daß, so bald diese in Rechnung gebracht wird, die Bahn der Kugel keine Parabel seyn kann.

§. 156.

Aus der Formel $\frac{h^2 \sin. 2a}{2g}$ erhellet, daß wenn der Neigungswinkel $a = 45°$, so ist $2a = 90°$, wo der Sinus desselben dem Radius $= 1$ wird. In allen übrigen Fällen ist $2a < 1$, folglich die Schußweite bei einem Winkel von 45° am größten.

§. 157.

Was ich bisher gesagt habe, betraf nur den Bogenschuß, wo das Stück oder die Bombe einen gewissen Neigungswinkel mit dem Horizonte macht. Geht der Wurf oder der Schuß mit dem

dem Horizonte parallel, so nennet man diesen in der Artillerie einen Kernschuß, *) und der sin. a wird alsdann o; der Cosinus aber = 1. Der Kernschuß steigt also nie über dem Horizonte, sondern die Kraft der Schwere treibt ihn vielmehr unter denselben. Dieses ist auch aus der Formel klar, wo die vertikale Höhe nach einer gewissen Zeit, die t hieß, so ausgedruckt wurde: $ht \sin. a - gt^2$. Hier ist der Neigungswinkel $a = o$, mithin auch der Sinus desselben o, folglich die Höhe $= - gt^2$, wo das Zeichen Minus die Höhe, oder vielmehr die Tiefe unter dem Horizonte andeutet. Hingegen bleibt die horizontale Bewegung bei einem Kernschusse eben dieselbe, nämlich $ht \cos. a$, als sie bei dem Bogenschusse war, wenn man die Zeit t in beiden gleich nimmt.

§. 158.

Zu dem, was ich in den vorigen § theils durch geometrische Beweise, theils durch Rechnung erläutert habe, will ich noch folgendes beifügen. Wenn (Fig. 19) AG die Geschwindigkeit vorstellet, womit der schwere Körper unter dem Winkel GAB geworfen wird, und diese, wie aus dem

*) Der Kernschuß weicht am wenigsten von der geraden Linie ab, indessen bleibt die Bahn doch krumm. Der Schuß unter einer Erhöhung von 1° heißt ein Visirschuß, so wie der unter 45° der Schuß nach der höchsten Elevation genannt wird. Die übrigen, die unter einem größern Winkel als 45° geschehen, heissen nicht mehr Schüsse, sondern Würfe.

dem vorigen erhellet, in den beiden AH und HG zerleget werden kann, davon jene die vertikale, und diese die horizontale Geschwindigkeit anzeiget, so ist gleichfalls klar, daß sich die Linien AH und AG zu einander verhalten, wie die Quadrate derselben. Verlängert man nun AH bis P, so verhält sich auch AH : AG = AG : AP, woraus denn diese Proportion folget: $AH^2 : AG^2 = AH : AP$. Mithin ist AP der Durchmesser eines Kreises, der durch PKGA gehet. Da ferner die vertikale Geschwindigkeit zu der horizontalen, sich wie AH : HG verhalten, und mit HG = AB der Körper sich gleichförmig fortbeweget, so ist klar, daß die Kugel in eben der Zeit den doppelten Raum gleichförmig zurücklegt, in welcher derselbe mit der vertikalen Geschwindigkeit auf der vertikalen Höhe AH steigt. Aber eben so viel Zeit muß auch der Körper anwenden, um diese Höhe wieder herunter zu kommen, während der Zeit bewegt sich der Körper horizontal durch den doppelten Raum gleichfalls wieder als vorher, das heißt, in der ganzen Zeit des Auf- und Absteigens bewegt sich der Körper horizontal durch den vierfachen Raum von HG = AB. Mithin die horizontale Weite = 4. AB = AE. Daraus erhellet denn auch, wenn der Neigungswinkel 45° ist, alsdann diese Linie dem Halbmesser gleich wird, mithin der Wurf, als eben bewiesen worden ist, am weitsten ausfällt.

§. 159.

Die Wurfweite ist dieselbe, wenn der Neigungswinkel eben so viel Grade über 45° hat, als unter diesem Winkel. So ist z. B. die Wurfweite für einen Winkel von 40° einerlei mit der, welcher einen Winkel von 50° mit dem Horizonte macht. Die Höhen zweier geworfenen Körper verhalten sich aber wie die Tangenten der Neigungswinkel. Denn RB : GB = tang. RAB: tang. GAB. Und die Zeiten des Wurfs von ein paar Körper verhalten sich wie der Sinus des Neigungswinkel zum Radius. Denn die Zeit des Aufsteigens und Herunterfallens ist wie $\sqrt{AH} : \sqrt{AP}$. Diese aber wie $AG^2 : AP^2 = AG : AP$, aber $AP : AG = AG : AH$, das ist, wie der Rad : sin. GAB.

§. 160.

Diese bisher vorgetragene und mit Beweisgründen aus einander gesetzte Theorie der Wurfbewegung der Körper hat ihren mannigfaltigen Gebrauch und Nutzen im bürgerlichen Leben. Vorzüglich findet sie ihre Anwendung bei der Artillerie, und die Regeln, welche ich vorher angegeben habe, lassen sich auf das Werfen der Bomben, auf die Schußweiten der Kanonenkugeln und anderes kleines Geschütz anwenden. Indessen lassen sich diese Stücke durch die höhere Geometrie weit schärfer finden, weit genauer berechnen, als ich es in diesem Kapitel habe zeigen

gen können. Bei dem allen ist diese Theorie doch noch nicht scharf genug, und die Erfahrung weicht noch immer in beträchtlichen Stücken von der Theorie ab. Die Ursache davon ist, weil man zu sehr auf andere Dinge Rücksicht nehmen muß, als auf den Widerstand der Luft, Stärke der Ladung, auf die Eigenschaft des Pulvers, auf die Größe und innerer Beschaffenheit des Geschützes selbst ꝛc. aus welchem Grunde denn auch die so genannte parabolische Theorie noch so beträchtlich von der Erfahrung abweicht. Ich habe hier nur das Wesentliche in möglichster Kürze beizubringen gesucht, und wer hierüber mehr zu wissen verlangt, den muß ich auf Werke verweisen, die im eigentlichen Verstande von dieser Materie handeln, aber auch zugleich rathen, sich mit den theoretischen Kenntnissen vorher bekannt zu machen, weil man ohne diese in der ganzen Mathematik, also auch in der Artillerie, keine große Schritte thun wird.

Zusatz.

Die Berechnung, welche ich in diesem Capitel auf die Wurfbewegung der Körper angewendet habe, stimmt mit der Erfahrung bei weitem nicht überein. Ich habe nur zeigen wollen, wie der Weg eines Körpers zu bestimmen wäre, wenn der Wurf in einem luftleeren Raum vorginge.

Und auch dann würde diese Rechnung nicht Stand halten, weil selbst auf die Form des Körpers, auf das Reiben desselben an der Maschine, woraus derselbe geworfen wird, sehr vieles ankömmt, und den geworfenen Körper noch immer von der parabolischen Bahn abbringen würde. Vor Galliläus wußte man wenig von der Bahn, welche ein geworfener Körper in seinem Fluge beschriebe. Tartalea, ein italiänischer Mathematiker, schrieb etwas darüber in einem Werke, das im Jahre 1537 zu Venedig heraus kam, und den Titel Scientia nova führte. Allein die Mechanik war damals noch nicht in dem Zustande, als sie es nachher geworden ist; es läßt sich also schwerlich das von diesem Schriftsteller erwarten, was man in der Folge mit mehrerem Rechte von andern fordern konnte. Galliläus war der erste, der die Bahn eines geworfenen Körpers in einem luftleeren Raume, als eine Parabel ansahe. Nach dieser Linie fingen nun im vorigen Jahrhundert, und auch noch im Anfange des gegenwärtigen, die Artilleristen an, die Bahn der Kanonenkugeln und Bomben zu berechnen. Auf den Widerstand der Luft achteten sie gar nicht, sondern glaubten, daß dieser durch das Gewicht der Kugel überwunden würde. Einige behaupten sogar, daß die Schwere in einer beträchtlichen Entfernung keine Wirkung auf die Kugel äusserte, wenn sie aus der Mündung der Kanone

heraus

heraus flog, und sahen diesen Theil der Schußweite für eine gerade Linie an. Indessen zog doch Huygen den Widerstand der Luft schon in Betrachtung, und widerstritt also dadurch die parabolische Bewegung. Blondel berechnete nach der Parabel den Weg der Kugel; und Belidors Tafeln haben gleichfalls ihren Grund in dieser Theorie. Doch wählte letzterer schon den sogenannten Probeschuß, der unter einem Winkel von 15° gemacht wurde. Weil ihn die Erfahrung lehrte, daß die Weite nach der parabolischen Rechnung, fast siebenmal zu groß ausfiel. Dies muß man aber nur von der Bahn einer Kanonenkugel, nicht von dem Fluge einer Bombe, verstehen, weil diese, wegen der nicht so großen Geschwindigkeit, mit der parabolischen Theorie näher zusammentrift.

In neuern Zeiten haben sich Neuton, Bernoulli, Robins und Euler, viele Mühe gegeben, die krumme Linie, nach welcher sich ein geworfener Körper beweget, durch höhere Rechnung zu bestimmen, aber, so viel als mir bekannt ist, hat man diese Linie noch nicht angeben können. Es kommt dabei vorzüglich auf folgende Umstände an. 1) Auf den Widerstand der Luft. Weil die Luft ein flüssiger und dabei ein elastischer Körper ist, so hängt der Widerstand desselben von der Wirkung und von dem Stoße eines solchen Körpers ab.

Neuton nahm an, daß der Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit des geworfenen Körpers proportional sei. Z. B. wenn die Geschwindigkeit von ein paar Körper wie 3 : 4 ist, so wäre der Widerstand der Luft wie 9 : 16. Huygen glaubte, der Widerstand wäre der Geschwindigkeit proportional; folglich die Bahn der Kugel die logarithmische Linie. Bernoulli und andere gaben noch, von diesen, verschiedene Verhältnisse an. Robins brachte durch Versuche heraus, daß der Widerstand der Luft bei einer 24pfündigen Kugel mit voller Ladung (das heißt, wenn man eben so viel Pulver nimmt, als die Kugel wiegt) über zwanzig mal größer ist, als das Gewicht der Kugel beträgt. Ja Euler zeigte sogar durch Theorie, daß dieser Widerstand 28 mal das Gewicht der Kugel übertrifft, folglich ein Gewicht von 612 ℔ gleich ist.

2) Auf die Kraft und Ausdehnung des Pulvers. Gewöhnlich nimmt man die eingeschlossene Luft in dem Pulver tausendmal dichter an, als sie im gewöhnlichen Zustande ist; also übertrift ihre Elasticität die, der atmosphärischen, welche das Barometer angiebt, um eben so viel mal. Diese wird wenigstens noch fünfmal größer durch die Flamme, die bei der Entzündung des Pulvers entsteht. Also wirkt die Luft in dem Pulver auf die Kugel mit einer Kraft, die fünftausendmal größer ist, als der Druck der atmosphä-

rischen

rischen Luft beträgt. Nun kommt dieser ohngefähr mit dem Drucke einer 32 Fuß hohen Wassersäule überein, aus welchem sich also die Gewalt des Pulvers auf die Kugel leicht herleiten lasse. Darnach muß sich auch der Widerstand des Metalls richten, woraus die Kanone bereitet wird. Durch diese Kraft des Pulvers wird die Kugel bei $\frac{2}{3}$ Ladung auf 1600 Fuß in einer Sekunde fortgeworfen. Bei einer ganzen Ladung ist die Geschwindigkeit der Kugel noch größer. Woraus man also abnehmen kann, daß die Geschwindigkeit der Kugel sich beständig nach der stärkern und schwächern Ladung des Pulvers richte, mithin die Schußweite verschieden ausfallen müsse, nachdem mehr oder weniger Pulver dazu genommen wird. Hierbei muß aber auch die Güte des Pulvers, ob es feucht oder trocken, grob oder fein u. s. w. ist, in Betracht gezogen werden, weil dieses alles auf die Bewegung der Kugel einen merklichen Einfluß hat. Die Geschwindigkeit, mithin auch der Weg der Kugel, hängt 3) von der eigenthümlichen Schwere der Kugel ab, die anders ist, wenn die Kugel von Blei, anders von Eisen, weil beide von verschiedener eigenthümlicher Schwere sind. Sie verhält sich eigentlich wie die Quadratwurzeln aus den specifiken Schweren der Materie, woraus die Kugeln gegossen sind.*) 4) Kommt auch das Reiben der Kugel an dem Laufe des Geschützes, aus welchem

*) S. die Tabelle am Ende.

welchem sie geschossen wird, in Betracht. Dieses beträgt bei einer Kanone oder Bombe nicht so viel, weil die Kugel bei diesen einen beträchtlichen Spielraum hat, als bei einer Kugel, die aus einer Flinte, oder noch mehr, aus einem gezogenen Rohre geschossen wird, weil hier die Kugel in die Röhre hineingepreßt wird, und daher fast gar keinen Spielraum übrig bleibt. Auch ist die Bahn der Kugel verschieden, wenn 5) das Pulver sich nicht mit einmal entzündet, oder wenn auch 6) ein Theil des elastischen Fluidums aus der Kanone durch das Zündloch herausfährt. Denn in beiden Fällen wird die Gewalt des Pulvers auf die Kugel geringer, mithin die Bewegung langsamer. 7) Muß auch auf die Länge des Geschützes gesehen werden. Euler und andere haben gezeigt, daß, je länger ein Geschütz ist, desto geschwinder bewegt sich die Kugel. Dies scheint wider die Erfahrung zu streiten. Denn man hat gefunden, daß eine Kanone, davon ein Stück abgesprungen, nachher die Kugel geschwinder als vorhin fortgestoßen habe. Die Schuld lag aber sicher an der Seele der Kanone, die etwa krumm gebohrt seyn mögte, und nun durch das Abspringen gerade ward. Indessen kann der Abgang der Länge durch einen Zusatz von Pulver ersetzt werden. Bei einer Kanone von einer geringen Anzahl von Caliber, mit mehr Pulver geladen, kann die Kugel weiter getrieben werden, als eine Kanone, die länger

ger ist, dieselbe Kugel mit eben der Ladung schießt. Aus dem Grunde hat man in neuern Zeiten die ganzen Cartaunen, die 48 ℔ schossen, abgeschaft, statt derselben 36-Pfünder oder auch halbe Cartaunen mit 24pfündigen Kugeln eingeführt. Dazu kommt noch, daß die ganzen Cartaunen weit schwerer zu regieren und wegzubringen sind, als die halben. 8) Muß auch auf die Form der Kugel gesehen werden. Denn kommt der Mittelpunct der Größe nicht mit dem Mittelpuncte der Schwere überein, so muß die Kugel nothwendig im Fluge eine schwankende Bewegung bekommen, und deswegen eine andere Bahn beschreiben, als wenn sie genau geformt ist, und aus einerlei Dichtigkeit besteht. Aus allen diesen erhellet also, daß die Bahn der Kugel nicht in der Parabel vorgehe. Denn eine Flintenkugel von $\frac{3}{4}$ Zoll im Durchmesser, wenn dieselbe mit der Hälfte ihres Gewichts Pulver aus einem Lauf, der 45 Zoll lang, geschossen wird, erhält eine Geschwindigkeit von ohngefähr 1700 Schuhe in einer Sekunde. Wenn sich nun diese Kugel in einer Parabel bewegte, so müßte der weitste Schuß, welcher unter einem Winkel von 45° mit dem Horizonte geschieht, ohngefähr auf $3\frac{2}{5}$ deutsche Meilen sich erstrecken. Nun lehrt aber die Erfahrung, daß dieser Schuß kaum $\frac{1}{10}$ Meile reiche. Wenn eine 24pfündige Kugel aus einer dazu gebräuchlichen Kanone

 mit

mit voller Ladung geschossen wird, so wird dieselbe eine Geschwindigkeit von 1650 Schuhe in einer Sekunde erhalten. Nach der Parabel, unter der größten Schußweite berechnet, bestimmt diese dieselbe ohngefähr auf 3 deutsche Meilen, da die Erfahrung zeigt, daß dieselbe kaum $\frac{3}{5}$ Meile erreicht. Dies gilt für die Bahn einer Kanonenkugel. Allein auch eben dieses trift man bei langsamern Bewegungen, z. B. bei der Bombe, deren Flug man sehen kann, an. Sollte diese sich nach der Parabel bewegen, so müßte sie unter eben dem Winkel den Horizont wieder treffen, unter dem sie in die Höhe gegangen; die Höhe, worauf sie stiege, müsse mit der Höhe der Parabel übereinkommen, und so auch die Schußweite. Aber alles das trift bei der Bombe eben so wenig zu, als bei der Kanonenkugel, folglich beschreibt auch diese keine Parabel.

Diese so eben von mir erwähnten Sätze sind die Resultate von vielen mühsamen und verwikkelten Rechnungen eines Robins und Eulers, die sich hier aber nicht nachmachen lassen, weil sie genaue Kenntniß der höhern Analysis voraussetzen, und die ich mir einmal nicht erlaubt habe, in diesem Werke anzubringen. Diejenigen Leser, welche mit diesen Kenntnissen bekannt sind, denen wird es leicht seyn, sich die Beweise zu obigen Resultaten aus den Büchern selbst herzunehmen. Dahin gehört vorzüglich folgendes Werk: Neue

Grund-

Grundsätze der Artillerie, aus dem englischen des Herrn Benjamin Robins übersetzt und mit den nöthigen Erläuterungen und vielen Anmerkungen versehen von Leonhard Euler. Berlin 1745.

Für andere, welche diese Kenntniß nicht haben, empfehle ich die Anfangsgründe der Artillerie v. C. A. Struensee. Leipzig und Liegnitz 1769. Dahin gehört auch folgendes französisches Werk: Memoires D'artillerie, par le Sr. Surirey de Saint-Remy.

Das achte Capitel.

Von den Centralkräften.

§. 161.

Man nehme einen Stein, oder ein Gewicht, das an einem Band oder Faden befestiget ist, durch Hülfe dieses Fadens schleudre man den schweren Körper um die Hand, so wird derselbe den Faden oder das Band ausdehnen, und dieses um desto mehr, je geschwinder der schwere Körper um die Hand beweget wird. Läßt man den Faden oder das Band los, so wird der schwere Körper wegfliegen, und zwar in der Tangente des Kreises, in welcher er sich beweget. Dies lehret auch die Erfahrung, und der Versuch läßt sich zu jeder Zeit mit einer Schleuder, oder auch mit einer Scheibe, worauf ein schwerer Körper liegt,

liegt, anstellen; und der Erfolg wird allemal zutreffen, wenn das Band an der Schleuder losgelassen, oder wenn die Scheibe plötzlich in Ruhe gebracht wird.

§. 162.

Die Kraft, vermöge welcher der schwere Körper den Faden oder das Band, woran er befestiget ist, ausdehnet, oder womit derselbe sich loszureissen sucht, heißt die Fliehkraft, (Vis centrifuga) weil der Körper durch diese Kraft sich gleichsam bemühet, von dem Mittelpuncte wegzufliehen. Die andere Kraft aber, welche jener entgegenstrebt, oder den Körper nach dem Mittelpuncte hinziehet, heißt die Centripetalkraft. (Vis centripeta) Beide begreift man unter den Namen der Centralkräfte.

§. 163.

Ein Körper also, der sich in einem Kreise beweget, muß wenigstens von zweien Kräften beweget werden; von einer, die ihm nach dem Mittelpuncte drückt, von einer andern, welche ihm von demselben zu entfernen sucht. Die erste rühret von der Schwere her, und die zweite hat ihren Grund in der Trägheit der Materie. Denn nach der letztern, wird sich jeder Körper, wenn er einmal in Bewegung gesetzt ist, fortbewegen, so ferne keine äussere Ursache auf denselben wirkt. So würde sich die Bombe von dem anfangs erhaltenen Stoße nach der Richtung, die ihr von dieser Kraft mitgetheilet worden ist, beständig fortbewegen, und der Stein, welcher aus der Schleuder fährt, würde in der Tangente fortgehen, wenn die Schwere beide nicht hinderte, einen andern Weg einzuschlagen. Dies sind auch die Kräfte, wodurch die großen Weltkörper in ihren Bahnen gehalten werden, und so ihren einmal angefangenen Weg ruhig fortsetzen können. Die ungeheure Zahl von Sonnensystemen werden vermittelst dieser Kräfte im Gleichgewichte erhalten, und der Zusammenhang der ganzen materiellen Welt hängt von denselben ab.

§. 164.

Die Fliehkraft richtet sich sowohl nach der Geschwindigkeit als nach der Masse der Körper. Je geschwinder man einen Körper in einem Kreise herumführet, desto größer ist auch seine Fliehkraft, oder desto stärker wird der Faden gedehnet, an dem der bewegende Körper befestiget ist. Ein gleiches findet bei der Masse der Körper statt. Man gebe dem einen Körper mehr Masse, einem andern aber, den man mit dem ersten vermittelst eines Draths oder Fadens verbindet, mehr Geschwindigkeit, so kann auch der Körper, welcher weniger Masse, aber mehr Geschwindigkeit hat, oder welches einerlei ist, der sich in einem grössern Kreise beweget, einen Körper von weit mehr Masse an sich ziehen.

§. 165.

Ich will hier die Gesetze, wornach die Körper, welche sich in einem Kreise bewegen, in möglichster Kürze aus einander setzen, ohne mich in eine tiefe und schwere Theorie einzulassen, und ohne auch andere krumme Linien, als den Kreis, anzunehmen. Diese Sätze, die hier kürzlich erläutert werden sollen, haben ihren vielen und mannigfaltigen Nutzen, vorzüglich finden sie ihre Anwendung in der physischen Astronomie. Kepler war der erste, der ein Gesetz erfand, das in diesen Sätzen seinen Grund hat, und nach welchem sich alle Planeten um ihre Sonnen bewegen. Dies ist in der Folge noch mehr und allgemeiner durch Neuton bewiesen, so daß wir jetzt im Stande sind, die Bahn eines Planeten, und auch die Entfernung desselben von der Sonne, mit leichter Mühe nach diesem von Kepler erfundenen Gesetze zu berechnen. Ich werde am Ende dieses Kapitels mehr darüber sagen.

§. 166.

Man nehme an, ein Körper werde in A (Fig. 20.) durch irgend eine Kraft gestoßen, so daß er sich durch diese nach der Richtung Ab fortbewege. Vermöge seiner Trägheit würde er beständig und nach einerlei Richtung fortgehen. Am Ende einer Zeit, die endlich seyn mag, wird er in b anlangen, und sich also um bB von der krummen Linie, die durch A gehet, entfernet haben. Indem aber der Körper nach der Richtung Ab fortgehet, wirke eine andere Kraft auf denselben, welche ihn nach dem Mittelpuncte C zu ziehen sucht. Eben diese Kraft wird ihn am Ende der Zeit nicht in b, sondern in B bringen, und der Körper hat also auf die Weise nicht den Weg in der geraden Linie Ab, sondern in dem Bogen AB zurückgelegt. bB stellet hier die Centrifugalkraft, so wie Ad die Centripetalkraft, vor. Ist der Bogen sehr klein, so kann man bB für Ad annehmen, und auch die Sehne Bd wird nicht merklich von ihrem Bogen AB verschieden seyn. Beide Kräfte zusammen wirken demnach so auf den Körper, daß er sich weder nach der einen, noch nach der andern Richtung allein bewegen, sondern die mittlere annehmen muß, die hier aber, weil die Centripetalkraft unaufhörlich auf den Körper wirkt, ein Stück von einer krummen Linie ist.

§. 167.

Eine Kraft, die einen Körper in einem sehr kleinen Zeitraume durch den Raum AB (Fig. 21) treibet, wird denselben, vermöge seiner Trägheit, und wenn keine andere Kraft auf ihn wirkt, in eben der Zeit durch den gleichen Raum BD treiben. Aber nun wirke die Kraft aus dem Mittelpunct C auf demselben, so wird der Körper am Ende der zweiten Zeit, statt in D, in E anlangen.

gen. Dem ohngeachtet wird der Raum in der zweiten Zeit noch eben so groß seyn, als in der ersten. Denn da die Kraft aus dem Mittelpuncte den Körper nach der Linie BC zieht, so ziehe man mit dieser Linie, die Linie DE parallel. Denn ist das Δ BEC = Δ BDC, weil beide einerlei Grundlinien BC und gleiche Höhen haben. Es sind also die Räume in gleichen Zeiten einander gleich. Dies ist das erste Gesetz, welches von Kepler bei den Bewegungen der Planeten entdeckt und bewiesen worden ist.

§. 168.

Ein Körper bewege sich durch die vereinte Wirkung beider Kräfte in einem sehr kleinen Zeittheile durch den Bogen Ab. (Fig. 22) Vermittelst des Stoßes, ohne die Wirkung der Schwere, würde der Körper am Ende der Zeit die Linie AB beschrieben, und sich also um Bb vom Mittelpuncte entfernet haben, der zugleich die Wirkung der Fliehkraft andeutet. Würde aber die Schwere allein auf den Körper gewirkt haben, so würde derselbe am Ende der Zeit dem Mittelpuncte C auch um Aa näher gekommen seyn. Durch beide Kräfte zusammen beschreibt er in gleicher Zeit den Bogen Ab. Da Zeit und Raum sehr klein angenommen worden ist, so ist die Wirkung der Centrifugal- und Centripetalkraft sich gleich, und Bb = Aa, und aus eben dem Grunde ist die Sehne ab = Ab = dem Bogen

Aa,

Aa, und in der Geometrie wird bewiesen, wie Aa : ab = ab : aL, und vermöge des sehr kleinen Bogens verschwindet aA gegen AL, so wie man statt dem Bogen Ab die Sehne desselben ab setzen kann. Demnach hat man Aa : Ab = Ab : AL und $Aa = \frac{Ab^2}{AL}$. Da nun AL = dem Durchmesser des Kreises ist, so setze man dafür einen Buchstaben, nämlich D, so läßt sich die Centrifugalkraft durch $\frac{Ab^2}{D}$ ausdrücken.

§. 169.

Aa ist eigentlich der Sinus versus des Bogens Ab, und die Geometrie lehret, daß bei einem sehr kleinen Bogen der Sinus versus dem Quadrate des Bogens gleich sei. Heißt die Kraft, wodurch der Körper den Bogen oder die ihm gleiche Sehne beschreibet = C, und der Durchmesser des Kreises = a, so ist die Kraft vom Mittelpuncte $= \frac{C^2}{a}$. In einem andern Kreise findet dieses gleichfalls statt, und daher verhalten sich die Centralkräfte direct wie die Quadrate der Geschwindigkeit, und umgekehrt wie die Durchmesser oder Radii. In gleich großen Kreisen aber wie die Quadrate der Geschwindigkeiten. Ist C bestimmt, so ist das Verhältniß mit dem Durchmesser einerlei.

§. 170.

Ich habe die Centralkraft allgemein durch $\frac{C^2}{a}$ (169) vorgestellet, allein sie läßt sich noch auf eine andere Art ausdrücken, wenn man die Umlaufszeiten zweier Körper in einem Kreise durch T und t, die Kreise selbst durch O und o, oder da sich diese wie die Halbmesser verhalten, durch R und r, die Geschwindigkeiten aber durch C und c andeutet. Man hat dem zufolge

$$T : t = Oc : oC = Rc : rC.$$

Multiplicirt man die äussern und mittlern Glieder durcheinander, so erhält man

$TCr = tcR$, und daher auch

$C : c = tR : Tr.$

Oder die Geschwindigkeiten verhalten sich wie die Producte aus den Zeiten verkehrt, multiplicirt in die Halbmesser direct, der Kreise.

§. 171.

Setzt man in der Gleichung $\frac{C^2}{a}$ für C das ihm gleiche Verhältniß tR, und für c in einem andern Kreise Tr, so erhält man für $C^2 = t^2 R^2$, und für $c^2 = T^2 r^2$, für a nehme man R oder r, so erhält man für die Centralkraft einen andern, dem ersten völlig gleichen Ausdruck $\frac{t^2 R^2}{R} = t^2 R$,

und

und für $\frac{c^2}{a} = \frac{T^2 r^2}{r} = T^2 r$, oder $T^2 r = t^2 R$. Dividiret man beides durch $t^2 T^2$, so ist

$$\frac{T^2 r}{t^2 T^2} = \frac{t^2 R}{t^2 T^2} = \frac{r}{t^2} = \frac{R}{T^2},$$

das ist: der Radius getheilt durch das Quadrat der Zeit, giebt die Centralkraft.

§. 172.

Heissen die Centralkräfte V und v, so ist $V : v = Rt^2 : rT^2$, dividiret man das letzte Verhältniß durch Rr, so ist

$V : v = \frac{t^2}{r} : \frac{T^2}{R}$, und daher $V : v = tR^2 : T^2 r$.

Ist nun $V = v$, so ist auch $t^2 R = T^2 r$, und

$$T^2 : t^2 = R : r, \text{ folglich}$$
$$T : t = \sqrt{R} : \sqrt{r},$$

das heißt, sind die Centralkräfte von ein paar gleiche Körper, die verschiedene Kreise beschreiben, sich gleich, so verhalten sich die Umlaufszeiten derselben wie die Quadratwurzeln aus den Halbmessern. Haben die Körper nicht einerlei Masse, übrigens aber alles mit einander gleich, so verhalten sich die Centralkräfte wie die Massen derselben.

§. 173.

Zwei gleich große Körper, die verschiedene Kreise in gleichen Zeiten beschreiben, deren Centralkräfte verhalten sich zu einander wie die Entfernungen der Mittelpuncte ihrer Bahnen. Man nehme an, der Körper A (Fig. 23) bewege sich in eben der Zeit durch den Kreis AFNA, als der Körper B den Kreis BIMB beschreibt, so wird der Körper A, nach Verlauf einer Zeit, in F und B in eben der Zeit in I von seiner Bahn anlangen. Zieht man aus A die Tangente AD, und aus B die Tangente BH, so ist DF die Centrifugalkraft für den Körper A, und Hy dieselbe für den Körper B. Die Größe der Centrifugalkraft für einen Bogen läßt sich durch die Sekante desselben weniger dem Radius angeben. Aber hier haben wir

$HC : CB = DC : AC$, daher auch

$HC - CB : CB = DC - AC : AC$, und verwechselt

$HC - CB : DC - AC = CB : AC$, folglich

$HI : DF = CB : AC$. Oder wie in (172) gezeiget worden, $V : v = \frac{R}{T^2}\ \frac{r}{t^2}$.

Nun ist $T = t$, folglich $V : v = R : r$, das heißt, die Centralkräfte verhalten sich wie die Halbmesser ihrer Bahnen.

§. 174.

Zwei gleich große Körper, G und A (Fig. 24) die sich gleich geschwinde bewegen, beschreibe der eine, nemlich G, die Kreisbahn GILG, der andere aber bewege sich nach der geraden Linie AD, oder wird wenigstens nach der Richtung

dieser

dieser Linie fortgeworfen. In einer sehr kleinen Zeit bewege sich der Körper G nach der Tangente GH, und komme in H derselben, und der Körper A gelange in eben der Zeit in B an. In dem Puncte H der Tangente hat sich der Körper G um HI von der krummen Linie entfernet, oder die Centrifugalkraft desselben ist HI. Der geworfene Körper ist aber nicht in B, sondern durch die Schwere in E gekommen, mithin hat derselbe nicht den Weg AB in der geraden Linie, sondern den krummen Weg AE während der Zeit zurück gelegt. Langt der Körper A in F an, so hat derselbe eine Geschwindigkeit erhalten, die einerlei mit der ist, als wäre er durch die Höhe DF gefallen. Oder welches eben so viel sagen will, durch DF erhält der schwere Körper eine Geschwindigkeit, womit er den doppelten Raum in eben der Zeit gleichförmig durchlaufen konnte. Nun ist $DF = \frac{1}{2} AD$, mithin für die Geschwindigkeit durch DF, den Raum AD.

§. 175.

Da ferner die beiden Körper in gleichen Zeiten gleiche Räume beschreiben, so ist $AB = GH$ und $AB^2 = GH^2$; und da $AD = 2 DF$, (174) so ist auch $AD^2 = 4 DF^2$. Nun verhält sich $AB^2 : AD^2 = BE : DF$, und aus dem vorigen (168) ist bekannt, daß $GH^2 = HI . GL$. Setzt man daher in der Proportion für AB^2 den so eben gefundenen Werth von $GH^2 = AB^2$, so ist $HI. GL : 4 DF^2 = BE : DF$, und multiplicirt man das zweite Verhältniß in dieser Proportion mit GL, so erhält man folgende Proportion:

$$HI. GL : 4 DF^2 = BE. GL : DF. GL,$$

und verwechselt, giebt

$$HI. GL : BE. GL = 4 DF^2 : DF. GL.$$

Dividirt man das erste Verhältniß mit GL, und das zweite mit 4 DF, so hat man endlich $HI : BE = DF : \frac{1}{4} GL$. Oder die Centrifugalkraft verhält sich zu der Centripetalkraft wie DF zum vierten Theil des Durchmessers. Oder die Geschwindigkeit, womit sich der Körper durch einen Kreis beweget, ist einerlei mit der, welche er erhält, wenn er den vierten Theil des Durchmessers durchfällt.

§. 176.

Die Centralkräfte von zwei gleich großen Körpern, die sich in gleich großen Kreisen, aber mit verschiedenen Geschwindigkeiten, bewegen, verhalten sich wie die Quadrate ihrer Geschwindigkeiten. Sind die Körper ungleich, so verhalten sich ihre Centralkräfte wie die Producte aus den Massen, multiplicirt in die Quadrate der Geschwindigkeiten.

§. 177.

Sind die Massen der Körper gleich, die Umlaufszeiten und Entfernungen aber ungleich, so

verhal-

verhalten sich ihre Centralkräfte zu einander, wie ihre Entfernung vom Mittelpuncte, dividiret durch das Quadrat der Umlaufszeit. Denn aus (168) erhellet, ist die Centralkraft der Körpers $A = \frac{R}{T^2}$, und die des $B = \frac{r}{T^2}$, oder beide verhalten sich wie $\frac{AC}{TT} : \frac{BC}{tt}$.

§. 178.

Verhalten sich bei ein paar Körpern die Quadrate der Umlaufszeiten, wie die Cubi ihrer Entfernung, so stehen die Centralkräfte im umgekehrten Verhältnisse der Quadrate ihrer Entfernung. Denn ist $T^2 : t^2 = AC^3 : ac^3$, und die Centralkraft für $A = \frac{AC}{T^2}$; für $B = \frac{ac}{t^2}$. Für $T^2 : t^2$ setze man das ihm gleiche Verhältniß $AC^3 : ac^3$ in die Formel von Centralkräften, so erhält man $\frac{AC}{AC^3} : \frac{ac}{ac^3} = \frac{1}{AC^2} : \frac{1}{ac^2} = ac^2 : AC^2$. Diese letztern Sätze, die alle von Kepler entdeckt worden, in der Folge aber durch Neuton allgemeiner bewiesen sind, werde ich hier noch etwas mehr aus einander zu setzen suchen.

Einige Anwendungen der vorhergehenden Sätze von den Centralkräften auf die physische Astronomie.

§. 179.

Daß die Centralkräfte in umgekehrtem Verhältnisse von den Quadraten der Entfernung stehen, läßt sich sogleich auf die Bewegung des Mondes um unsere Erde anwenden. Ist die Entfernung desselben = 60 Erdhalbmesser von der Erde, so ist die Wirkung der Schwere auf dem Monde zu der auf der Erde wie $60^2 : 1^2$, das ist, wie $3600 : 1$; oder $\frac{1}{3600}$ von der, welche sie auf der Oberfläche der Erde ist. Da ich oben (73) gezeiget habe, daß die Schwere einen Körper in einer Sekunde 15,625 rheinl. Fuß zur Erde treibe, so ist die Wirkung unserer Schwere auf dem Monde = $\frac{15,625}{3600}$ rheinländ. Fuß; oder um diesen Bruch von einem Fuße würde der Mond von der Schwere der Erde innerhalb einer Sekunde aus seiner Bahn gezogen werden, wenn nicht die Schwungkraft desselben ihm in seiner Bahn zurückhielte. Denn hörte diese letztere Kraft auf, so müßte alsdann der Mond mit beschleunigter Geschwindigkeit zur Erde fallen. Wie viel Zeit der Mond dazu gebrauche, läßt sich leicht nach (73) berechnen.

§. 180.

Sieht man die Mondbahn als kreisförmig an, so ist der Durchmesser desselben 120 halbe Erdmesser, jeden zu 860 geographische Meilen, beträgt 103,200 Meilen. Rechnet man nun die Meile zu 23,661 rheinländ. Fuß, so erhält man für den Durchmesser der Mondbahn 2441,815200 rheinl. Fuß, wornach sich denn auch die Geschwindigkeit des Mondes für eine Zeit Sekunde, und aus diesem die Umlaufszeit des Mondes berechnen läßt. Da die Geschwindigkeit die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen dem Durchmesser der Mondbahn und der Wirkung der Schwere auf den Mond ist, oder in der Fig. 22, wo AbL die Mondbahn vorstellet, und Ab die Geschwindigkeit desselben, welche sich durch $Ab^2 = AL.\ Aa$ ergiebt.

$AL = 244175200$ rheinl. Fuß und $Aa = \frac{5}{1152}$

Mithin $Ab^2 = 2441815200.\ \frac{5}{1152} = \frac{12209076000}{1152}$

$= 10598425.$ folgl. $Ab = \sqrt{10598425} = 3255$ rheinl. Fuß,

als die Geschwindigkeit des Mondes in einer Sekunde.

§. 181.

Nach dem Verhältnisse des Durchmessers zum Umfange berechne man den Umfang der Mondbahn, so läßt sich leicht durch die so eben gefundene Geschwindigkeit des Mondes für eine

Sekunde, die Zeit finden, welche der Mond anwendet, um den Umfang seiner Bahn durchzulaufen. Ich rechne z. B. nach dem Verhältniß von 1 : 3,1415926 — und finde den Umfang der Mondbahn auf 7671189345 rheinl. Fuß, den Umfang oder diese Zahl getheilt durch die Bewegung des Mondes für eine Stunde = 11718000 rheinl. Fuß, giebt ohngefähr zum Quotienten 654 Stunden = 27 Tage 7 Stunde, als den periodischen Umlauf des Mondes, welches auch genau genug mit der Beobachtung übereintrift.

§. 182.

Wenn der Mond seinen periodischen Umlauf in 27 Tage 7 Stunden vollendet, so bewegt er sich in einer Zeitsekunde durch einen Bogen von 33 Terzien. Nimmt man aus den trigonometrischen Tafeln den Sinus versus von 33 Terzien, so wird dieser den $\frac{5}{1152}$ Theil des Halbmessers geben. Der Sinus versus kommt also mit dem in (179) gefundenen Werthe von der Wirkung unserer Schwere auf den Mond überein; und dies rechtfertiget den Ausdruck, dessen ich mich eben bei der Wirkung der Schwere bedienet habe, daß diese mit dem Sinus versus in Verhältniß stehe. Herr Professor Bode hat ein ähnliches Beispiel in seiner Sternkunde (S. Bode Erläuterung der Sternkunde 2ter Theil p. 352 ff.) angeführet, davon aber die Rechnung nicht

genau

genau mit der meinigen zusammentrifft. Der kleine Unterschied liegt wahrscheinlich darin, daß ich den Fall der Körper auf 15,625 rheinl. Fuß, Herr Bode aber nur auf $15\frac{1}{12}$ Fuß gesetzt habe.

§. 183.

Bei dem, was ich im vorigen § angenommen, habe ich vorausgesetzt, daß der Mond sich in einem vollkommenen Kreise bewege; daß dies aber nicht der Fall sei, lehret die Astronomie, und dieses findet nicht nur beim Monde, sondern auch bei allen übrigen Planeten Statt, deren Bahnen Ellipsen sind. Man setzt in dem einem Brennpunct dieser krummen Linie die Sonne, und daher ist der Planet in seiner Bahn zu einer Zeit der Sonne näher als zur andern. Da aber die Wirkung der Schwere im umgekehrten Verhältnisse vom Quadrate der Entfernung stehet, so ist ihre Wirkung am größten, wenn der Planet in der Sonnennähe, und am kleinsten, wenn er in der Sonnenferne stehet.

§. 184.

Der Planet legt aber, nach dem Keplerischen Gesetze, in seiner Bahn Räume zurück, die den Zeiten proportional sind. Nun wirkt die Fliehkraft nach dem Cubus der Entfernung, und die Schwere nach dem Quadrate derselben. Dies verursacht, daß der Planet in der Sonnennähe einen

einen größern Theil von seiner Bahn in derselben Zeit zurückleget, als wenn er in der Sonnenferne ist, das heißt, er bewegt sich im ersten Fall geschwinder als im letztern, und eben dadurch bleiben sich die Räume einander beständig gleich. Mehreres hierüber zu sagen, verstatten die Gränzen dieser Schrift nicht, und der Leser muß sich über diese Materie in Büchern Raths erholen, in welchen die physische Astronomie besonders abgehandelt wird. Ich habe hier nur blos zeigen wollen, von welchem Nutzen die allgemeinen Gesetze der Bewegung sind, und wie viel sie zur Erhöhung der Kräfte des menschlichen Geistes beizutragen vermögen. Durch diese in der That so einfache Gesetze, deren ich nur zum Theile in dem vorigen erwähnet habe, und die größtentheils alle von unserm berühmten Landsmann, den unsterblichen Kepler, herrühren, ist der Astronom jetzt in den Stand gesetzt, die Bahn und Entfernung eines neuen Planeten so bald in Ordnung zu bringen, da ehemals Jahrhunderte dazu nöthig waren. Nur noch einer meiner in (178) angeführten Sätze bleibt mir übrig mit einem Beispiel zu erklären. Dieser Satz lehret, wie man aus der Umlaufszeit, oder auch aus der Entfernung zweier Planeten von der Sonne, entweder aus der ersten die Entfernung des Planeten, oder aus der zweiten die Umlaufszeit desselben um die Sonne durch eine

leichte

leichte Rechnung finden soll. Und dies ist eben der Satz, durch den man aus der Bewegung eines Planeten, die Entfernung desselben durch die Bewegung eines Kometen, die gleichfalls durch Beobachtung gefunden wird, seine Entfernung von der Sonne angeben kann. Folgendes Beispiel wird dies näher erläutern.

§. 185.

Vorausgesetzt, daß die Umlaufszeit des Jupiters und die der Erde, nebst der Entfernung der letztern von der Sonne, gegeben sei, die Entfernung des Jupiters von der Sonne zu finden. Die Astronomen geben die Umlaufszeit des Jupiters zu 4330 Tage, und die der Erde zu 365 Tage an; die Entfernung der Erde aber von der Sonne setzen sie = 1000. Demnach ist

$365^2 : 4330^2 = 1000^3$: zu dem Kubus der Entfernung des Jupiters von der Sonne.

Diese ist $= \sqrt[3]{\frac{4330^2 . \, 1000^3}{365^2}} = 5201.$

Am bequemsten läßt sich diese Rechnung durch die Logarithmen anstellen. Umgekehrt, wenn die Entfernung zweier Planeten bekannt sind, läßt sich auf eben die Weise die Umlaufszeit von einem derselben finden, woraus man abnehmen kann, daß, durch Hülfe dieses Satzes, der Astronom im Stande ist, sowohl die Entfernung als Umlaufszeit der Planeten und Kometen in unserm Sonnen-

Sonnensystem anzugeben. Es kommt nur darauf an, daß man die Entfernung eines einzigen Planeten von der Sonne genau anzugeben wußte; denn die Umlaufszeiten derselben lassen sich, wie schon erwähnt, durch astronomische Beobachtungen bestimmen.

§. 186.

Noch ein Umstand, den ich hier nicht so ganz ausser Acht lassen darf, ist die Abnahme der Schwere auf unserm Erdballe, und der von derselben abhängende ungleiche Gang des Pendels. Diesen Umstand muß man in der größten Fliehkraft unter der Mittellinie der Erde suchen. Denn man setzt hierbei gewöhnlich voraus, daß unsere Erde anfangs aus einer weichern Masse bestanden habe, und daß diese, als sich die Erde angefangen um ihre Axe zu bewegen, ein Bestreben geäussert habe, sich vom Mittelpuncte derselben zu entfernen, aber durch die Kraft der Schwere in Gränzen eingeschlossen, und allmählig die Gestalt angenommen, die sie jetzt hat, woher es denn auch gekommen ist, daß der Durchmesser des Aequators etwas größer geworden ist, als die Erdaxe, welches auch durch die Ausmessung der Erde, vorzüglich in diesem Jahrhundert, bestätiget worden ist.

§. 187.

Da die Richtung der Fliehkraft unterm Aequator der Richtung der Schwere senkrecht entgegen

gegen wirkt, so folget auch, daß sie hier gerade am größten seyn muß. Aber die Wirkung der Schwere ist bei weitem größer als die der Centrifugalkraft. Denn nach einer Regel, die vom Herrn Halley herrühret, übertrift die Schwere die Centrifugalkraft unter der Mittellinie um 289 mal. Von hieraus nimmt sie allmählig ab, und wird endlich unterm Pole selbst Null, oder die Schwere ist hier am größten. Ueberhaupt läßt sich leicht zeigen, daß die Centralkräfte im Verhältnis der Halbmesser von ein paar Parallelen auf der Erdkugel stehen, und da die Halbmesser der Parallelkreise die Cosinus der geographischen Breite andeuten, so muß auch die Schwere nach dem Verhältnisse dieser Linien, vom Pole angerechnet, abnehmen.

Tabelle
der eigenthümlichen Schwere verschiedener Körper, nach den dreien Naturreichen geordnet.

A. Aus dem Mineralreiche.

I) Metallische Substanzen.

1) Edle oder vollkommne Metalle.

Platina im reinsten Zustande	23,000.	nach Kirwan.
Nach der Scheidung von Quarze	16 bis 18,000.	: :
Mit Quarz vermischt von	6 bis 11,000.	: :
Gold	19,640.	: :
Silber im reinsten Zustande	11,095.	: :

2) Unedle oder unvollkommne Metalle.

Kupfer	von 8, 7 bis 9,300.	nach Kirwan.
Kupfer aus Japan (gehämmertes)	9,000.	nach Muschenb.
— — — (gegossenes)	8,726.	: :
— — Spanien (gehämmert.)	8,433.	: :
— — der Barbarei (gegoss.)	8,594.	: :
— — Schweden (zu den Münzen)	8,784.	: :
— — Ungarn	7,242.	: :
Eisen von	7, 6 bis 8,000.	nach Kirwan.
Eisen aus Schweden (gehämmert.)	7,765.	nach Muschenb.
— — Deutschland	7,807.	
Zinn von	7, bis 7,450.	nach Kirwan.
— aus England (das reinste)	7,295.	nach Muschenb.

Zinn

Zinn aus Malacca (das reinste)	7,331.	nach Muschenb.
Blei von 11, 3 bis	11,479.	nach Kirwan.
— aus England (das reinste)	11,445.	nach Muschenb.
— aus Schottland (das reinste)	11,387.	: :
— aus Deutschl (das reinste)	11,445.	: :
Quecksilber aus Tyrol	14,000.	: :
— — 800 mal destilirtes	14,110.	nach Boerhave.

3) Halbmetalle.

Zink von 6, 9 bis	7,240.	nach Kirwan.
— aus Ostindien	7,240.	nach Muschenb.
— — Goslar	7,215.	: :
Spiesglaskönig, vollkommen von Eisen frei	6,860.	nach Kirwan.
Arsenikkönig	8,310.	: :
Wißmuth von 9,600 bis	9,700.	: :
Kovold	7,700.	: :
Nickel von 7,421 bis	9,000.	: :
Braunsteinkönig	6,850.	: :
Wassereisen	6,710.	: :
Wasserblei	4,569.	: :

II) Erden und Steine.

1) Kalchgeschlecht.

Durchsichtige Spate	2,700.	: :
Kreide von 2, 4 bis	2,650.	: :
Kalchsteine von 2, 65 bis	2,700.	: :
Marmor von 2, 7 bis	2,800.	: :
Gyps, Selenit von 1, 87	2,320.	: :
Flußspat (Petuntse) von 3, 14 bis	3,180.	: :

Tungstein von 4, 99 bis	5,800.	nach	Kirwan.
Saustein von 2 bis	3,000.	⸗	⸗

2) Geschlecht der Schwererde.

Schwerspat von 4 bis	4,600.	⸗	⸗

3) Bittersalzgeschlecht.

Speckstein von 2,433 bis	2,780.	⸗	⸗
Faseriger Asbest von 2, 5 bis	2,800.	⸗	⸗
Amianth	2,913.	⸗	⸗
Serpentin von 2, 4 bis	2,650.	⸗	⸗
Venetianischer Talk	2,729.	⸗	⸗

4) Thongeschlecht.

Mondmilch	1,669.	⸗	⸗
Puzzolane (vulkanisches Product) von 2, 5 bis	2,800.	⸗	⸗
Reiner Glimmer von 2,535 bis	3,000.	⸗	⸗
Dunkelblauer Schiefer	2,701.	⸗	⸗
Thonigter Schiefer von 2, 6 bis	2,780.	⸗	⸗
Thonigter Sandstein	2,288.	⸗	⸗
Hornstein, Hornblinde von 2,66 bis	3880.	⸗	⸗
Schwarzer Hornstein von 3, 6 bis	3,880.	⸗	⸗
Zeolith von 2, 1 bis	3,150.	⸗	⸗

5) Kieselgattung.

Krystall von 2, 65 bis	2,710	⸗	⸗
Kieselstein von 2, 4 bis	2,700	⸗	⸗
Feuerstein von 2, 65 bis	2,700	⸗	⸗
Bergkiesel von 2, 59 bis	2,700	⸗	⸗
Jaspis von 2, 68	2,778	⸗	⸗
Achat	2,640	⸗	⸗

Opal. Weltaug von 1, 7 bis	2,240	nach Kirwan.
Chalcedon von 2, 5 bis	4,360.	: :
Onyx von 2, 5 bis	2,600.	: :
Carniol von 2, 6 bis	2,700.	: :
Rubin (orientalischer) von 3, 18 bis	4,283.	: :
Topas von 3, 46 bis	4,560.	: :
Smaragd von 2, 78 bis	3,711.	: :
Sapphir von 3, 78 bis	3,994.	: :
Amethyst von 2, 6 bis	2,700.	: :
Lasurstein	3,054.	: :
Nierenstein von 2, 97 bis	3,389.	: :
Feldspat von 2, 4 bis	2,600.	: :
Granat von 3, 6 bis	4,188.	: :
Schörl von 3, bis	3,600.	: :
Turmalin aus Ceylon	3,295.	: :
—— — Brasilien	3,180.	: :
—— — Tyrol	3,050.	: :
Basalt	3,000.	: :
Türkischer Wezstein	2,598.	: :
Diamant von 3, 5 bis	3,660.	: :
Reißbley von 1,987 bis	2,267.	: :

III) Salzige Substanzen.

Alaun	2,275.	nach Muschenb.
Eisenvitriol von 3, 7 bis	4,912.	nach Kirwan.
Kupfervitriol	2,230.	: :
Zinkvitriol	2,000.	: :
Prismatischer Salpeter	1,920.	: :
Kubischer Salpeter	1,870.	: :
Digestivsalz	1,836.	: :

Kochsalz	2,120.	nach Kirwan.
Salmiak	1,420.	⸗ ⸗
Borax	1,740.	⸗ ⸗

IV) Brennbare Substanzen.

Naphtha	0,708.	⸗ ⸗
Mineralisches Talg	0,770.	⸗ ⸗
Gagat	1,774.	⸗ ⸗
Cannelkohle	1,270.	⸗ ⸗
Steinkohle von 1, 3 bis	1,370.	⸗ ⸗
Schwefelichte Kohle	1,500.	⸗ ⸗
Bernstein von 1,065 bis	1,000.	⸗ ⸗
Schwefel von 1, 9 bis	2,350.	⸗ ⸗

B. Aus dem Gewächsreiche.

Trocken Buchsbaumholz	1,030.	nach Martin.
Holländisches —	1,328	nach Muschenb.
Eichenholz	0,925.	nach Martin.
Rüsternholz	0,600.	⸗ ⸗
Eschenholz, noch ziemlich grün	0,734.	⸗ ⸗
welches inwendig trockner ist	0,845.	⸗ ⸗
Trocknes Pappelholz	0,755.	⸗ ⸗
Trocken Furenholz	0,546.	⸗ ⸗
Cedernholz	0,600.	⸗ ⸗
Trocken Nußbaumholz	0,631.	⸗ ⸗
— — Zachweidenholz	0,760.	⸗ ⸗
Büchenholz, mäßig ausgetrocknet	0,854.	⸗ ⸗
Schleendornholz, mäßig trocken	0,765.	⸗ ⸗
Lignum Vitä	1,327.	⸗ ⸗
— — Naphriticum	1,200.	⸗ ⸗

Aloeholz	1,777.	nach	Martin.
Brasilienholz	1,031.	s	s
Rhodischholz	1,125.	s	s
Asphaltholz	1,170.	s	s
Franzosenholz	1,337.	s	s
Sassafrasholz	0,482.	s	s
Rothholz	1,031.	s	s
Roth Sandelholz	1,128.	s	s
Weisses	1,041.	s	s
Mastixholz	0,849.	s	s
Ebenholz	1,177.	s	s
Korkholz	0,240.	s	s
Campeschenholz	0,913.	nach	Muschenb.
Kirschenholz	0,715.	s	s
Fernambucholz	1,014.	s	s
Guajacholz	1,333.	s	s
Mahagonyholz	1,063.	s	s
Nußholz	0,636.	s	s
Apfelbaumholz	0,793.	s	s
Birnbaumholz	0,661.	s	s
Königsholz	1,042.	s	s
Taxusholz	0,807.	s	s
Waizen	0,757.	s	s
Hafer	0,472.	s	s
Gerste	0,658.	s	s
Ungesichtetes Waizenmehl	0,495.	s	s
— — Roggenmehl	0,454.	s	s
Holzasche	0,930.	s	s

C. Aus dem Thierreiche.

Rindertalg	0,929. nach Muschenb.
Schaaftalg	0,943. : :
Rindsknochen	1,656. nach Martin.
Elfenbein	1,826. : :
Der Stein aus dem menschlichen Körper	1,700. : :
Das Herz des Menschen	1,017. nach Muschenb.
Ochsenhorn	1,840.
Rhinoceroshorn.	1,242.
Austerschalen	2,092.
Purpurschneckenschalen	2,590.
Schneckenschalen	2,520.
Perlmutter	2,480.
Harte Fischhaut	1,621.
Hünerey	1,090.
Honig	1,500.
Gelbes Wachs aus Rußland	0,965.
Ganz reines weisses	0,966.

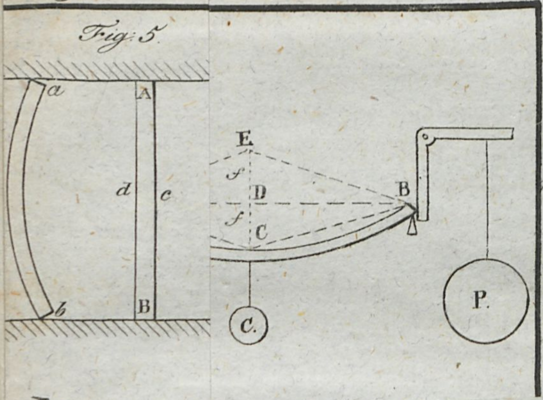
D. Flüssige Körper.

Regenwasser	1,000.
Destilirtes Wasser	0,997.
Seewasser	1,030.
Flußwasser	1,009.
Gewöhnliches Scheidewasser	1,300.
Königswasser	1,234.
Bieressig	1,034.

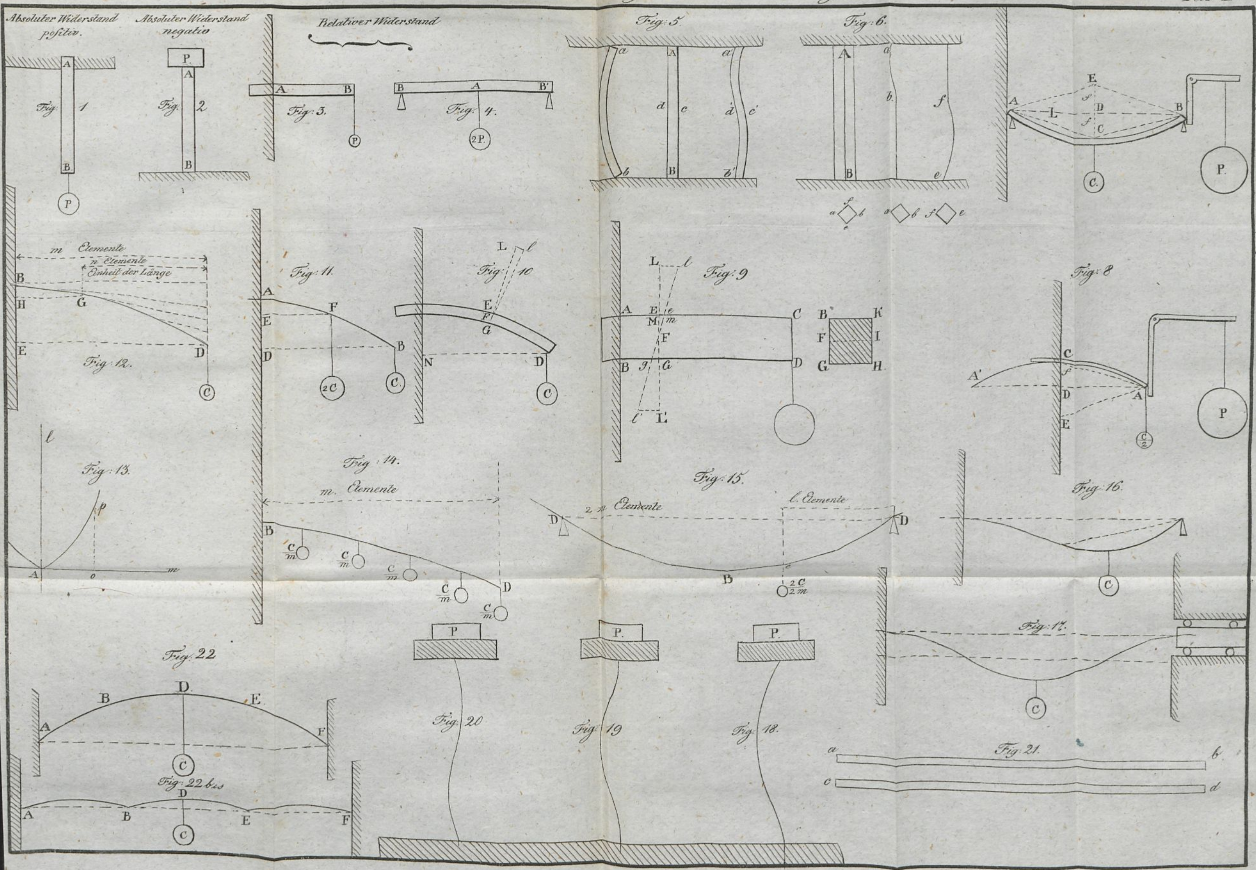
Weinessig	1,011.
Eselsmilch	1,021.
Kühmilch	1,030.
Menschenurin	1,016.
Leinöl	0,932.
Baumöl	0,913.
Terpentinöl	0,792.
Vitriolöl (gemeines)	1,700.
Menschenblut	1,040.
Salpetergeist	1,315.
Salzgeist	0,951.
Weingeist	0,987.
Rectificirter	0,866.
Vitriolgeist	1,203.
Weisser Franzwein	1,020.
Burgunder	0,953.
Champagner	0,962.
Mallaga	1,015.
Canariensect	1,033.
Moselwein	0,916.
Rheinwein	0,999.
Rother Capwein	1,018.
Weisser —	1,039.

Bei dieser Tabelle ist die eigenthümliche Schwere des Regenwassers zur Einheit angenommen. Ist nun das Gewicht eines Kubicfußes, Kubiczolles ꝛc. Regenwasser bekannt, so läßt sich, durch Hülfe dieser Tabelle, das Gewicht eines jeden Körpers nach eben dem Maaße leicht berechnen. Denn man braucht nur jedesmal das Gewicht von einem Kubicfuße Regenwasser mit der beistehenden Zahl zu multipliciren.

des geschm Tab: I

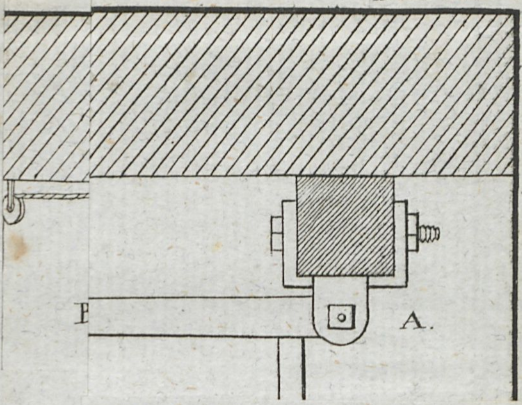


Versuche über den Widerstand des geschmiedeten Eisens

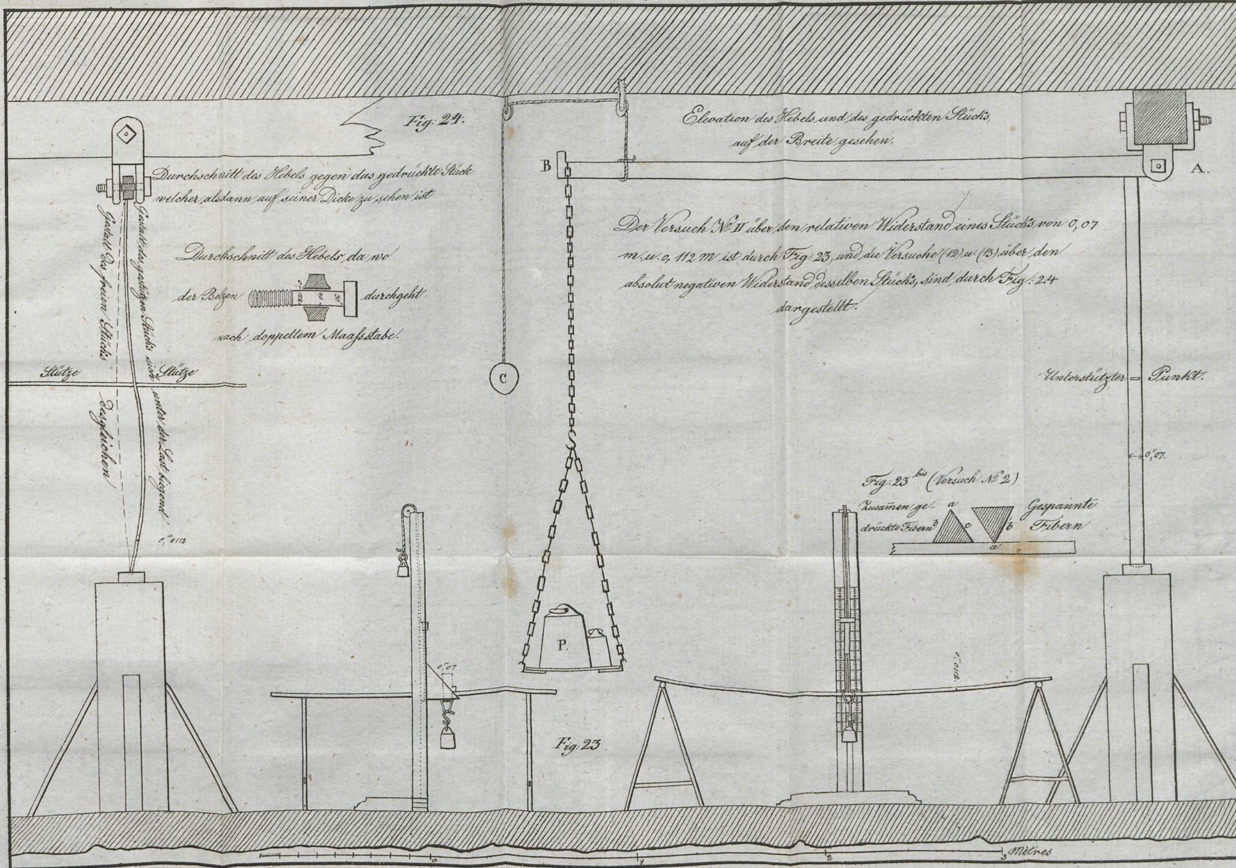


Wide

Tab: II.



Versuche über den Widerstand des geschmiedeten Eisens.

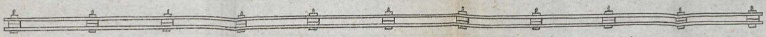



0,m02
über
0,m06
F
Mètres

Versuche über den Widerstand des geschmiedeten Eisens

Tab. III

Fig: 26.



Mit Bolzen zusamen verbundene Stücke zuerst auf die hohe Kante gestellt (Vers. 73 u 74) hernach flach gelegt (Vers. 75–80). Die Figur zeigt die Stücke, wie solche für Vers. 79 zugerichtet waren.

Fig: 26 bis

Durch Andreas-Kreuze verbundene, bis auf 6 M. verlängerte Stücke (Vers. 71 f. u Vers. 80.

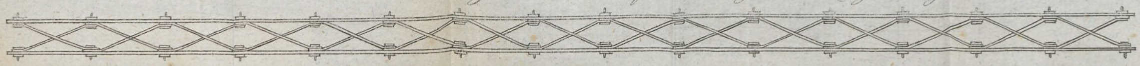
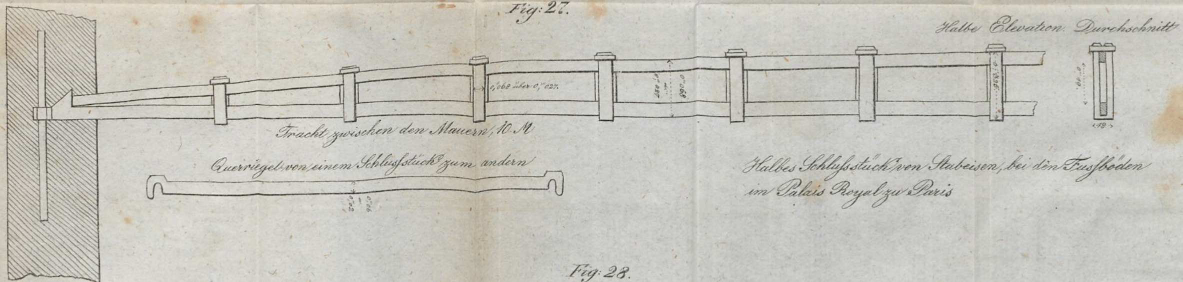


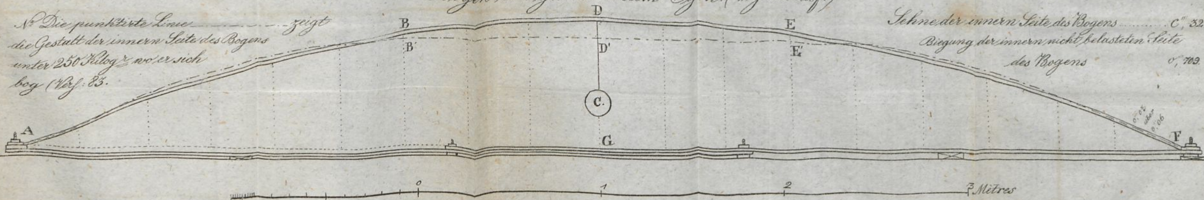
Fig: 27.



Halbes Schlussstück von Stabeisen, bei den Fussböden im Palais Royal zu Paris

Fig: 28.

Bogen von geschmiedetem Eisen (Vers. 82 u. f.)



egonal

von 0,

zwey

795.

ppelt

.0,"01.

Versuche über den Widerstand des geschmiedeten Eisens

Tab: IV

Fig: 29

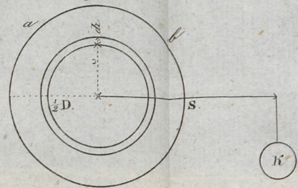


Fig: 30.

Apparat zum Messen der Drehung des geschmiedeten Eisens.

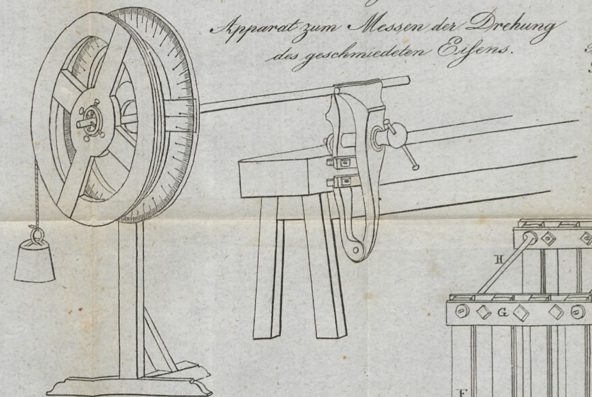
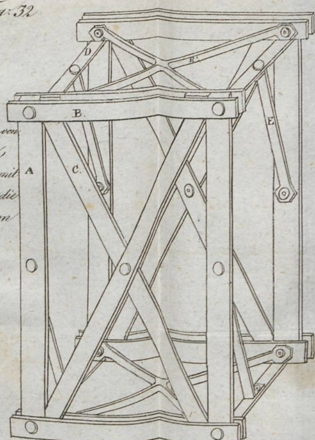


Fig: 31.

Träger für lange und dünne Stücke, welche horizontal belastet sind.

Fig: 32



Gestühle von Stabeisen, ähnliche mit denen für die Brücke von Cubzac

A. Stangen der äußern und innern Seiten, von 1,"794 u. 1,"754 auf 0,"12 u 0,"03

B. Bänder von 0,"10 u. 0,"03.

C. Andreaskreuze von 0,"10. u. 0,"015.

D. Stücke zum Zusammenhalten von 0,"08 und 0"02. E. Diagonalen desgl.

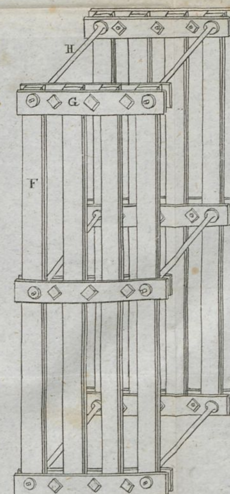
E. Andreaskreuze von 0,"03 ins Gevierte Entfernung von zwey Theilen des Schlußstücks 1,"895.

F. Zusammen gekuppelte Stäbe von 2,"12 auf 0,"12 u 0,"01.

G. Bänder von 0,"12 u. 0,"01

H. Stücke zum Zusammenhalten von Rundeisen Entfernung von zwey Theilen des Schlußstücks 1,"56

Fig: 33



System von Stücken aus Stabeisen, welche man als ein Gestühle betrachten kann.

Versuch
einer
Dynamik

zum Gebrauche derjenigen
die keine höhere Mathematik verstehen,

von

P. H. C. Brodhagen,
Lehrer und Aufseher der Handlungsakademie.

Hamburg
bei Carl Ernst Bohn. 1787.