1. Ouvrier. ...
2. Abhh. von Kästn. u. Klügel
3. Girtanner Hardwin's u. bomb. Regel

Untersuchungen
über
Cardans und Bombelli
Regeln,
oder
abgekürzte Auflösungsmethoden
cubisch- und biquadratischer
Gleichungen.

Von
Joh. Joachim Girtanner,
Lehrer der Mathematik.

St. Gallen,
bei Huber und Compagnie.
1796.

Vorerinnerung.

Man wird in der nachgesetzten kleinen Schrift keine Empfehlung der Algebra von mir erwarten. Diese Wissenschaft enthält die erhabenste Wahrheiten, mit denen sich unser Verstand beschäftigen kann, und philosophische Wahrheiten bedürfen selten Lobreden. Ueberdieses, suchten die grössesten Männer durch ihre Werke lange vor mir dieser vortreflichen Calculationsmethode, verdienten Eingang zu verschaffen. Aber eben so zweckwidrig schien mir, hier die Fortschritte historisch zu reihen, die diese Wissenschaft bis itzt, unter ihren Verehrern an allen Orten machte.

Eine der ersten Ursachen, die mich zur Bekanntmachung dieser wenigen Bogen veranlaste, war: die forschende Wißbegierde eines Eleven, der, wie in einigen andern Theilen der Mathematik, die auf seine künftige Bestimmung die nächste Beziehung zu haben scheinen, auch in der Algebra täglich meinen Unterricht besucht, und der gewohnt ist, (wie überall, wo der menschliche Verstand überzeugt werden soll) — so besonders hier zu fordern, daß der Vortrag der Wahrheiten helle, demonstrativ, kurz und belehrend seye.

Da diese Eigenschaften, der Algebra im strengsten Sinne zukommen, und mir der lichtvolle und angenehme Vortrag des grossen Eulers, bekannt war; so stund ich keinen Augenblick an, sein Werk über diesen wichtigen Theil der mathematischen Wissenschaften zu meinem Handbuche zu wählen.

Die Untersuchungen, die bey dem Unterrichte z. B. über die Auflösungsmethoden der Gleichungen des dritten und vierten Grades, angestellt wurden — hatten die natürliche Folge, daß die Bemühungen, die sich Cardan und Bombelli ehemals darüber gaben, nicht vergessen bleiben konnten. Aber der Namen und Regeln dieser Männer nur historisch oder chronologisch zu erwähnen, that nun meiner Absicht nicht genug, da es dem grossen Euler werth schien, die angegebenen Kunstgriffe der genannten Mathematiker weitläuftig und umständlich zu analysiren. Die Regeln, die sich von diesen zween Italiänern herschreiben, dürfen auch keinem Freunde der Algebra ganz fremde bleiben, wenn er schon ihre Anwendung gerne den Zeitgenossen des sechszehnten Jahrhunderts überläßt. Die Exempel, die ich aus Hrn. Eulers Algebra u. a. entlehnte, und wo ich die Auflösungen derselben, einander entgegen stellte — werden zeigen, daß man itzt nicht nur auf kürzern Wegen zur Kenntniß der Wurzeln gelangen, sondern fast überall die Anweisungen dieser Analysten ganz unbenutzt vorbey gehen kann.

Ich weiß, daß ich in diesen Bogen oft von Hrn. Euler abgegangen bin, es geschah, weil dieser berühmte Gelehrte nicht die Absicht haben konnte, die alten Auflösungsme-

thoden

thoden der cubischen und biquadratischen Gleichungen des Cardans, Ferrei, Ludovici Ferrariensis, die Bombelli vortrug, zu verkürzen, sondern nur ihre wahre Beschaffenheit zu zeigen, und dann die Versuche der Neuern darüber, die größtentheils mühevoll und doch oft ohne glücklichen Erfolg waren, überhaupt anzugeben.

Ein paar andere Beyspiele, wo ich von Hrn. Euler abwich, finden sich u. a. I) Tom. II, pag. 147. §. 136. wo die Glieder der wachsenden Reihe, der daselbst angegebenen Näherungsmethode, leichter gefunden werden: wenn das jedesmalige letzte Gliede, mit 2 multiplicirt, und zu seinem Produkte das dritte vor ihm, dreyfach addirt wird. Aber das Gefundene ist denn allezeit das letzte Glied.

II) Für alle Fälle von pag. 178 bis 182, im zweyten Abschnitte des 2ten Theils schien mir folgende allgemeine Regel mit Vortheil angewandt werden zu können, ich setze aber dabey voraus, daß alle Buchstaben hier gleiche Grössen wie dort, bedeuten:

demnach $mxy + ax + by = c$

folglich: $y = \frac{c - ax}{mx + b}$

oder $my = \frac{mc - amx}{mx + b} = - a + \frac{mc + ab}{mx + b}$

also wieder $y = \frac{- a}{m} + \frac{mc + ab}{m^2x + mb}$. Weil nun y eine ganze positive Zahl seyn soll, so muß folglich die Summe der beeden Brüche, die seinen Werth ausmachen, ebenfalls eine ganze positive Zahl seyn. Es ist aber $\frac{a}{m}$ jedesmal bekannt, und daher der andre Bruch auch. Man setze seinen Zähler $= n$, so wird: $y = \frac{- a}{m} + \frac{n}{m}$

folglich: $\frac{mc + ab}{m^2x + mb} = \frac{n}{m}$

$m^2c + abm = nm^2x + mnb$

$\frac{m^2c + abm - mnb}{nm^2} = \frac{mc + ab - nb}{nm} = x$,

Wird nun y in jedem Falle: 1, 2, 3 . . . ꝛc.

ge-

gesetzt; so kann n allemal als gegeben angesehen werden, daher denn der Werth von x in lauter bekannten Grössen ausgedrückt ist, und jeder, der für x eine ganze positive Zahl giebt, ist zu einer Auflösung dienlich. Aber diese Ergänzungen fanden hier nur zu ihrer Anzeige, eine Stelle. —

Da besonders die Gleichungen einer der wichtigsten Gegenstände algebraischer Bemühungen waren, so kann auch meine Absicht, die eben diesen Zweck hatte, von Sacheverständigen, nicht verkannt werden.

St. Gallen,
geschrieben am 16ten Hornung
1796.

Vom Verfasser.

Von der Auflösung der cubischen Gleichungen.

§. 1.

Wenn man die Hyperbel, die cubische Gleichung, die auf trigonometrischen Linien beruhet, und also jede Construction durch die sich Gleichungen des dritten Grades darstellen lassen, ausweichen will: so müssen die Wurzeln derselben nur durch Kunstgriffe, die der Algebra zugehören, gesucht werden.

§. 2.

Da nun die Wurzeln überhaupt, oft möglich, oft unmöglich; zuweilen positiv, zuweilen negativ; einmal rational, das andremal imaginär sind — so sieht man leicht ein, daß diese Bedingungen alle, das Suchen der Wurzeln selbst so wol als ihrer Eigenschaften, sehr mühesam machen, und den Gang der Alten, bey dergleichen Calculationen, äusserst aufhalten mußten, bis sie sich im Stande zu seyn glaubten, uns hierüber in ihren Schriften sichere Anleitungen, überliefern zu können.

§. 3.

Unter denen, die in der Vorzeit hierinn selbst gedacht, und ihre Entdeckungen über die

Gleichungen des 3ten Grades besonders, mit Ruhm auf die Nachwelt gebracht haben; verdienen u. a. Nicolaus Tartaglia, Scipio Ferreus, — und vorzüglich der unglückliche Cardan, der die Sätze der erstern bekannt gemacht, hinlängliche Beweise dafür gesucht, und wenigstens für cubische Gleichungen, beygebracht hat, genannt zu werden. Die kleine Zänkerey interessirt mich hier sehr wenig: ob Cardan nur die Erfindung des Ferreus von Bononien, mitgetheilt habe, u. s. w. — da ausgemacht ist, daß auch unter den spätern Analysten, jeder eben diese Regel, auf einem ihm eigenen Wege suchte, und fand. Man sehe z. B. Hrn. Eulern, Kästner, Lambert u. a. und schon vorher fanden Harriot, Wallis, Landen — jeder auf einem besondern Wege eben die Kunstgriffe. Man sehe darüber Hrn. Hofr. Kästners Algebra 2te Aufl. pag. 403. §. 720. Cardans Regel ward also, wie man auch an den folgenden Beyspielen sehen wird, immer ein merkwürdiger Vorwurf der Untersuchung aller Algebraisten bis auf unsere Zeiten. Daher kann ihre Kenntniß keinem Mathematiker gleichgültig seyn.

§. 4.

Die Unvollständigkeit, der indessen der Jesuit Franciscus a Schooten und einige Neuere, die sogenannte cardanische Regel beschuldigen, als thäte sie in den Fällen nicht genug, wo in dem lezten Gliede mögliche Wurzeln enthalten wären; leitet mich so wol zur Untersuchung dieses

ses Vorgebens, als zur eigenen Anzeige mancher Gleichungen, die zwar cubische Auflösungen zulassen, aber weit leichter als es durch die cardanische Regel geschehen kann, ausgeführt werden können.

§. 5.

Unter der Menge von Fällen, die ich als Belege für meine Behauptung anführen könnte, will ich mich vorsätzlich nur auf die Gleichungen, die man in Herrn Eulers Algebra findet, einschränken, dann aber auch besonders zeigen: wie cubische und biquadratische Gleichungen, die Hr. Euler und andere grosse Mathematiker in ihren Schriften anführen, in manchen Operationen weit kürzer und leichter nach folgender Methode, als durch Cardans, Bombelli, und anderer Analysten Regeln, aufzulösen sind. Vielleicht wird einst ein Freund der höhern Rechnungskunde, das hier Gesagte, zur Grundlage eines Systems nehmen, das ihn bey der Nachwelt unvergeßlich machen wird.

§. 6.

Da sich indessen nach Bombelli Annahme, jede biquadratische Gleichung, durch zwo quadratische vorstellen läßt, und überhaupt die Gleichungen höherer Grade das Auflösen aller niedern vorauszusetzen scheinen; so wird sich auch eine jede vollständige cubische Gleichung durch zween Factoren, deren der einte das Quadrat der unbekannten Grösse, der andere aber nur ihre erste Potenz enthält, ausdrücken lassen müssen.

§. 7.

Um das eben Gesagte, allgemein zu machen, setze man eine vollständige cubische Gleichung habe diese Form: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. und die zween Factoren, die sie vorstellen sollen, seyn I) $x^2 + \frac{1}{2} ax + p$; II) $x + r$. Werden nun diese zween Factoren miteinander multiplicirt, so erhält man I) $r + \frac{1}{2} a = a$; II) $\frac{1}{2} ar + p = b$; oder $p = b - \frac{1}{2} ar = b - \frac{1}{4} a^2$. weil aus I erhellet, daß $r = \frac{1}{2} a$, und, II) $rp = c$, daher $p = \frac{c}{\frac{1}{2}a}$ ist.

§. 8.

Da nach dem Vorigen $p = b - \frac{1}{4} a^2$; und $p = \frac{c}{\frac{1}{2}a}$ ist, so muß $b - \frac{1}{4} a^2 = \frac{c}{\frac{1}{2}a}$ seyn. Nun sind aber a, b, c, allemal Coefficienten, die bestimmt sind, wenn daher $b - \frac{1}{4} a^2$ nicht gleich $\frac{c}{\frac{1}{2}a}$, so ist ein solcher Fall nach dieser Methode nicht aufzulösen. Einige folgende Exempel werden uns näher hievon überzeugen.

§. 9.

Es sey anfänglich diese Gleichung zu betrachten:

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, hier ist nun nach (§. 7.)

$$a = -6$$
$$b = +11$$
$$c = -6$$

daher $p = b - \frac{1}{4}a^2 = +11 - 9 = +2$. Es muß aber auch $p = \frac{c}{\frac{1}{2}a} = \frac{-6}{-3} = +2$ seyn. Dieses nun trift in unserm Falle glücklich zu, daß $b - \frac{1}{4}a^2 = \frac{c}{\frac{1}{2}a}$ ist, daher die vorgegebene Gleichung durch diese Methode aufgelöst werden kann, und ihre zween Factores werden seyn:

I) $x^2 - 3x + 2 = 0$

also: $x^2 = 3x - 2$

und $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{(\frac{9}{4} - 2)}$

$= \frac{3}{2} \pm \sqrt{(\frac{9-8}{4})} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$

$= \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$ $(=) + 2.$ $(=) + 1.$

und II) $x - 3 = 0$ folgl. $x = 3$, welches sogleich eine Wurzel der Gleichung giebt.

§. 10.

Herr Euler sagt in seiner Algebra pag. 96. §. 161. T. II. „dieses findet aber nur statt, „wenn das erste Glied der Gleichung x^3 mit „1, die übrigen aber mit ganzen Zahlen multi„plicirt sind. Wenn aber darinn Brüche vor„kommen, so hat man ein Mittel die Gleichung „in eine andere zu verwandeln, welche von Brü„chen befreyet ist.“ Aber ein Beyspiel dessen sich Herr Euler in dem angeführten §. selbst bedient, soll beweisen, daß nach der obigen Methode, hier keine Verwandlung der Gleichung vorgehen muß, um zur richtigen Angabe der Wurzeln zu gelangen, denn es sey diese Gleichung gegeben: $x^3 - 3x^2 + \frac{11}{4} x - \frac{3}{4} = 0$.

Hier ist also $a = -3$
$b = +\frac{11}{4}$
$c = -\frac{3}{4}$

folgl. $p = b - \frac{1}{4} a^2 = \frac{c}{\frac{1}{2}a} = \frac{1}{2} = \frac{-\frac{3}{4}}{-\frac{3}{2}} = +\frac{1}{2}$

nud $r = -\frac{3}{2}$.

Daher die beide Gleichungen in unserm Falle seyn werden:

I) $x^2 - \frac{3}{2} x + \frac{1}{2} = 0$ und II) $x - \frac{3}{2} = 0$.

od. $x^2 = \frac{3}{2} x - \frac{1}{2}$ also $x = \frac{3}{2}$.

und $x = \frac{3}{4} \pm \sqrt{(\frac{9}{16} - \frac{1}{2})}$

$= \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4} = +1$

$= +\frac{1}{2}$, welches die 3 Wurzeln sind, die Herr Euler erst nach einer mühesamen Verwandlung am angezogenen Orte auch so findet.

§. 11.

Da die Cardansche Regel will, daß aus jeder cubischen Gleichung, wo sie angewandt werden soll, das 2te Glied, welches das Quadrat der unbekanuten Grösse enthält, weggeschaft werden muß, und diese Vorrichtung allemal wenigstens unangenehm ist, so soll ein Exempel, das Herr Euler nachdem er das 2te Glied aus der Gleichung gebracht, und auch da zum Behufe der cardanschen Regel gewählt hat, — begreiflich machen, daß nach der abgehandelten Methode, diese analytische Aengstlichkeit ganz wegfällt, und daß man

so

so einfach als es bey Rationalwurzeln geschieht, auch zur Kenntniß der irrationalen Wurzeln einer gegebenen Gleichung gelangen kann. Ich will aber zuerst Herrn Euler durch die ganze Operation selbst reden lassen.

§. 12.

Er sagt §. 184. im 2ten Theil seiner Algebra: „Es sey diese allgemeine cubische Glei„chung gegeben: $x^3 + axx + bx + c = 0$, „aus welcher das zweyte Glied weggebracht wer„den soll.

„Zu diesem Ende setze man zu x den drit„ten Theil der Zahl des zweyten Gliedes mit „ihrem Zeichen, und schreibe dafür einen neuen „Buchstaben z. E. y, dieser Regel zufolge wer„den wir haben $x + \frac{1}{3}a = y$, und also $x =$ „$y - \frac{1}{3}a$ woraus die folgende Rechnung ent„steht:

„ $x = y - \frac{1}{3}a$, $xx = yy - \frac{2}{3}ay + \frac{1}{9}aa$,

ferner $x^3 = y^3 - ay^2 + \frac{1}{3}ay + \frac{1}{3}a^2y - \frac{1}{27}a^3$;

$$\begin{array}{rl}
\text{also } x^3 = & y^3 - ayy + \frac{1}{3}aay - \frac{1}{27}a^3 \\
+axx = & \quad + ayy - \frac{2}{3}aay + \frac{1}{9}a^3 \\
+bx = & \qquad\quad + by - \frac{1}{3}ab \\
+c = & \qquad\qquad\quad + c \\
\hline
& y^3 - (\frac{1}{3}aa - b)\,y + \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c = 0,
\end{array}$$

in welcher Gleichung das zweyte Glied fehlt.

„§. 185. Nun kann man auch des Cardani „Regel leicht auf diesen Fall anwenden, denn „da $x^3 = fx + g$ oder $x^3 - fx - g =$ „0, so wird für unsern Fall $f = \frac{1}{3}aa - b$, „und $g = -\frac{2}{27}a^3 + \frac{1}{3}ab + c$. Aus die-

„sen

„sen für die Buchstaben f und g gefundenen „Werthen, erhalten wir:

$$„y = \sqrt[3]{\frac{g + \sqrt{(gg - \frac{4}{27}f^3)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{g - \sqrt{(gg - \frac{4}{27}f^3)}}{2}},$$

„und da solchergestalt y gefunden worden, so „werden wir für die vorgebene Gleichung haben „$x = y - \frac{1}{3}a$.

„§. 186. „Mit Hülfe dieser Veränderung „sind wir nun im Stande die Wurzeln von „allen cubischen Gleichungen zu finden, welches „wir durch folgendes Exempel zeigen wollen. „Es sey demnach die vorgegebene Gleichung fol„gende $x^3 - 6xx + 13x - 12 = 0$. Um „hier das zweyte Glied wegzubringen; so setze „man $x - 2 = y$, so wird:

$$x = y + 2,\ xx = yy + 4y + 4, \text{ ferner}$$
$$x^3 = y^3 + 6yy + 12y + 8, \text{ also}$$

$$\begin{array}{rrrrr} x^3 = & y^3 & + 6yy & + 12y & + 8 \\ -6xx = & & - 6yy & - 24y & - 24 \\ +13x = & & & + 13y & + 26 \\ -12 = & & & & - 12 \\ \hline & y^3 & & + y & - 2 = 0, \end{array}$$ oder

„$y^3 = -y + 2$, welches mit der Formel x^3 „$= fx + g$ verglichen giebt $f = -1$, $g =$ „2; also $gg = 4$, und $\frac{4}{27}f^3 = -\frac{4}{27}$.

„Also $gg - \frac{4}{27}f^3 = 4 + \frac{4}{27} = \frac{112}{27}$; daher „erhalten wir:

„$\sqrt{(gg - \frac{4}{27}f^3)} = \sqrt{\frac{112}{27}} = \frac{4\sqrt{21}}{9}$, woraus „folget:

„y

„$y = \sqrt[3]{\left(\frac{\frac{2+4\sqrt{21}}{9}}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{\frac{2-4\sqrt{21}}{9}}{2}\right)}$ oder

„$y = \sqrt[3]{\left(\frac{1+2\sqrt{21}}{9}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{1-2\sqrt{21}}{9}\right)}$ oder

„$y = \sqrt[3]{\left(\frac{9+2\sqrt{21}}{9}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{9-2\sqrt{21}}{9}\right)}$ oder

„$y = \sqrt[3]{\left(\frac{27+6\sqrt{21}}{27}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{27-6\sqrt{21}}{27}\right)}$ oder

„$y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{(27+6\sqrt{21})} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{(27-6\sqrt{21})}$

„und hernach bekömmt man $x = y + 2$.

„§. 187. Bey Auflösung dieses Exempels „sind wir auf eine doppelte Irrationalität gera„then, gleichwol muß man daraus nicht schlies„sen: daß die Wurzel schlechterdings irratio„nal sey, indem es sich glücklicher Weise fügen „könnte, daß die Binomie $27 \pm 6\sqrt{21}$, wirk„liche Cubi wären. Dieses trift auch hier zu, „denn da der Cubus von $\frac{3+\sqrt{21}}{2}$ dem $\frac{216+48\sqrt{21}}{8} = 27 + 6\sqrt{21}$ ist, so ist „auch die Cubicwurzel aus $27 + 6\sqrt{21} =$ „$\frac{3+\sqrt{21}}{2}$ und die Cubicwurzel aus $27 -$ „$6\sqrt{21} = \frac{3-\sqrt{21}}{2}$. Hieraus also wird der „obige Werth für y seyn $y = \frac{1}{3}\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right) +$ „$\frac{1}{3}\left(\frac{3-\sqrt{21}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Da nun y

„=

„$= 1$, so bekommen wir $x = 3$, welches eine „Wurzel ist der vorgegebenen Gleichung. Wollte man die beyden andern auffinden, so müßte „man die Gleichung durch $x - 3$ dividiren „wie folget:

$$
\begin{array}{l}
x-3)\ x^3 - 6xx + 13x - 12\ (xx - 3x + 4 \\
\quad\ \underline{x^3 - 3xx} \\
\qquad\ - 3xx + 13x \\
\qquad\ \underline{- 3xx + 9x} \\
\qquad\qquad\ + 4x - 12 \\
\qquad\qquad\ \underline{+ 4x - 12} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

„und diesen Quotienten $xx - 3x + 4 = 0$ „setzen, also daß $xx = 3x - 4$, und $x = \frac{3}{2}$ „$\pm \sqrt{(\frac{9}{4} - \frac{16}{4})} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{7}{4}}$, das ist $x =$ „$\frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2}$. Dieses sind nun die beyden an„dern Wurzeln, welche beyde imaginär sind.“ So weit Herr Euler, ich merke hierbey nur folgendes an: I) daß in manchen Fällen, und besonders hier, Cardans Regel zu grossen und unnützen Weitläuftigkeiten führet, und oft die Wurzeln durch irrationale und daher unkennliche Ausdrücke angiebt, wo es nach andern Methoden, wie ich es hernach zeigen will, leicht möglich wäre, sie geschwinde und mit einem Male rational und deutlich zu bekommen. Ich weiß zwar II) wol, daß der grosse Euler an diesem Beyspiele vorzüglich alles, was bey der Cardanschen Regel in Acht zu nehmen ist, zeigen wollte, und daher mit Bedacht keine kürzern Wege gieng. Aber ich mögte doch auch fragen? Wem es wol einfiele, daß z. B.

$$\sqrt[3]{\frac{(27+6\sqrt{21})}{27}}+\sqrt[3]{\frac{(27-6\sqrt{21})}{27}}=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}$$

$= 1$ wäre? Und doch lassen sich diese irrationale Binomial-Ausdrückungen, nach der Cardanschen Regel nicht kürzer noch deutlicher geben. Ich habe oben gesagt, daß es sehr wenig Mühe kosten dürfte, z. B. durch die bereits beygebrachte Methode mich leichter und kürzer zu fassen. Dieses Beyspiel soll meine Behauptung rechtfertigen. Man setze also noch einmal

$x^3 - 6xx + 13x - 12 = 0$ hier ist an kein Wegschaffen des 2ten Gliedes zu gedenken, sondern es ist geradezu $a = -6.$

$b = +13.$

$c = -12.$

also $p = b - \frac{1}{4}a^2 = \frac{c}{\frac{1}{2}a} = +4$, und $r = \frac{1}{2}a = -3.$

daher $x^2 + \frac{ax}{2} + p = 0$ und $x + r = 0$

d. i. I) $x^2 - 3x + 4 = 0$, II) $x - 3 = 0$

also $x^2 = 3x - 4$

und $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{(\frac{9}{4} - 4)}$

$= \frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{7}{4}}$

$= \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2},$

folglich aus dieser letztern Gleichung sogleich $x = +3.$ ohne einige Irrationalität.

welches wie oben, die beyden andern imaginairen Wurzeln sind.

§. 13.

§. 13.

Ich weiß wol, daß es hier möglich gewesen wäre, die Rationalwurzel aus dem letzten Gliede wovon sie ein Factor seyn muß, und dann auch die zwo imaginären Wurzeln hernach, durch eine quadratische Gleichung, zu finden. Allein wem leuchtet nicht ein, daß auch diese so simple Methode, doch mehr Zeit und Mühe fordert, als das vorige Verfahren? Zudem wird sie bisweilen fruchtlos und beschwerlich angewandt, wo die eben angezeigte Methode das gesuchte Resultat, ohne alle Kunst giebt, wie man es hernach sehen wird.

§. 14.

Die, von dem grossen Euler im folgenden 188 §. des vorhin angeführten Cap. gegebene Erläuterung, wo er sagt: „wenn aber keine Rationalwurzel statt findet, so kann auch die „Wurzel nicht anders, als auf diese Art, nach „des Cardani Regel ausgedrückt werden, so, „daß alsdenn keine weitere Abkürzung Platz findet, u. s. w." kann ich des grossen Mathematikers, der Gelehrte und Anfänger nach Herrn Hofr. Kästners Urtheile mit gleicher Gründlichkeit unterrichtet, kaum gemäß glauben, aufs wenigste denke ich, daß es mir erlaubt seye, seine Aussage so lange auf die Seite zu setzen bis mir mehrere Gründe diesen Ausspruch zu unterschreiben, nothwendig machen. Ich will indessen prüfungsfähige Mathematiker schliessen

lassen,

lassen, von was das, was im folgenden vorgetragen werden soll, zeuge.

§. 15.

Man habe diese Gleichung: $x^3 + 2\sqrt{2}\, x^2 + 6\sqrt{2}\, x + 12 - 2\sqrt{2} = 0$. Hier ist nach unserer Methode

$$a = +2\sqrt{2}$$
$$b = +6\sqrt{2}$$
$$c = +12 - 2\sqrt{2}$$

folgl. $p = b - \frac{1}{4}a^2 = 6\sqrt{2} - 2$.

da nun p auch $= \frac{c}{\frac{1}{2}a} = \frac{12 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

und dieser Ausdruck $= b - \frac{1}{4}a^2 = -2 + 6\sqrt{2}$ seyn muß, welches hier glücklich zutrift, wenn man den Zähler und Nenner des Bruches, durch $+\sqrt{2}$ multiplicirt, wodurch erhalten wird: $\frac{12\sqrt{2} - 4}{+2}$, welche Formel denn nach der wirklichen Theilung $= -2 + 6\sqrt{2}$ ist. Demnach da p hier $= -2 + 6\sqrt{2}$; und $r = \sqrt{2}$ ist; so erhält man sogleich folgende zwo Gleichungen:

$$\text{I)}\ x^2 + x\sqrt{2} - 2 + 6\sqrt{2} = 0$$
$$x^2 = -x\sqrt{2} + 2 - 6\sqrt{2}$$
$$x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}.\ 2 + 2 - 6\sqrt{2})}$$
$$= -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \pm \sqrt{(5 - 12\sqrt{2})}$$

und II) $x + \sqrt{2} = 0$, woraus $x = -\sqrt{2}$ erhalten wird.

Es ist leicht durch die Probe sich von diesem allen zu versichern, denn es sey z. E.

$$x = -\sqrt{2},$$

so ist $x^2 = +2$, und $x^3 = -2\sqrt{2}$; also die obige Gleichung $x^3 = -2\sqrt{2}$

$$+2\sqrt{2}\,x^2 = +4\sqrt{2}$$
$$+6\sqrt{2}\,x = -12$$
$$+12-2\sqrt{2} = +12-2\sqrt{2}$$

folglich $x^3 + 2\sqrt{2}\,x^2 + 6\sqrt{2}\,x + 12 - 2\sqrt{2} = 0.$

§. 16.

Zuweilen stößt man aber doch auf Fälle, die vermittelst dieser Methode unmöglich aufgelöst werden zu können, scheinen, obschon sich das zweite Glied in ihnen findet, und wo man ihre Factoren, weil sie alle rational sind, aus dem letzten Gliede der Gleichung errathen könnte. Allein, auch diese Fälle sind doch der vorigen Auflösung unterworfen, und die scheinbare Unmöglichkeit verschwindet durch eine blosse Verwandlung.

§. 17.

Es sey z. B. die gegebene Gleichung diese:

$x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0,$

man setze hier $x = y - 1$

so ist $x^3 = y^3 - 3y^2 + 3y - 1.$

$$-7x^2 = -7y^2 + 14y - 7.$$
$$+14x = +14y - 14.$$
$$-8 = -8.$$

also $y^3 - 10y^2 + 31y - 30 = 0.$

nun

nun ist hier $a = -10$
$b = +31$
$c = -30$

folglich $p = b - \frac{1}{4}a^2 = \frac{c}{\frac{1}{2}a} = +6$, und $r = \frac{1}{2}a = -5$.

Daher erhält man I) $y^2 - 5y + 6 = 0$
oder $y^2 = 5y - 6$
und $y = \frac{5}{2} \pm \sqrt{(\frac{25}{4} - 6)}$
$= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$
$= +3$ und $+2$.

und II) $y - 5 = 0$, woraus sogleich folgt: $y = +5$. Wenn nun $y = +5$; $+3$; und $+2$ ist, und $x = y - 1$; so ist damit auch der Werth von x bekannt, denn er muß seyn $x = +4$; $+2$; und $+1$. Man sehe hierüber Hrn. Lamberts Beyträge zur Mathematik T. II. pag. 219. §. 39.

§. 18.

Ich weis wol, daß nach Cardans Regel, alle cubische Gleichungen aufzulösen sind, aber man ist bey aller ihrer Verwickelung dennoch jedesmal genöthigt, das 2te Glied aus der Gleichung zu schaffen. Hier fällt dieser Umstand nicht nur ganz weg, sondern es lassen sich auch Gleichungen finden, die, (wenn sie schon für die Cardanische Regel zubereitet sind, demnach das 2te Glied mangeln, wie man schon oben §. 12. sah, und hier eines besondern Umstandes wegen wiederholt wird,) nach der vorhin gebrauchten Methode gleichwol die Wurzeln richtig angeben.

§. 19.

Es sey nach Herrn Eulers Algebra p. 109. §. 180. diese cubische Gleichung aufzulösen: $x^3 = 6x + 9$, oder $x^3 - 6x - 9 = 0$, so ist: $a = 0$; $b = -6$; $c = -9$.

Da $p = \frac{c}{\frac{1}{2}a}$, so hat man folgende zwo Gleichungen:

$x^2 - 9 = 0$, und $x + 0 = 0$. Da nun x hier nicht $= 0$ seyn kann, so multiplicire man diese beyde Gleichungen, dieses giebt

$$\frac{x^3 - 9x = 0}{}$$

daher $x^2 = 9$

und $x = 3$. Freylich findet sich so nur eine Wurzel, allein die Kunstgriffe wie man die übrigen finden müsse, sind zu bekannt, als daß ich sie hieher zu setzen, nöthig hätte.

Es seye ferner nach Herrn Euler am angeführten Orte §. 181. gegeben diese Gleichung: $x^3 = 3x + 2$, oder $x^3 - 3x - 2 = 0$, so wird $a = 0$; $b = -3$, $c = -2$. Da wieder $p = \frac{c}{\frac{1}{2}a} = -2$, und $r = 0$. Also die Gleichungen:

$x^2 - 2 = 0$, und $x + 0 = 0$. Da aber x hier wieder nicht 0 seyn kann, so addire man beide Gleichungen.

also $x^2 = x + 2$

$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{4} + 2)}$

$= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \begin{matrix} +2 \\ -1 \end{matrix}$

Wünschte

Wünschte man statt dieser Auflösung eine andere, ohne jedoch weder die Cardansche Regel, noch die Factoren des letzten Gliedes brauchen zu müssen; so verwandle man die Gleichung; und setze $x = y - 1$, wie oben, hierdurch erhält man:

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & y^3 - 3y^2 + 3y - 1 \\ -3x & = & \qquad\quad -3y + 3 \\ -2 & = & \qquad\qquad\quad -2 \\ \hline \end{array}$$

also $y^3 - 3y^2 = 0$

oder $y^3 = 3y^2$

und $y = 3$. Da nun $x = y - 1$, so ist $x = + 2$ wie vorhin.

§. 19.

Nicht selten ereignet sich der Fall, daß die Cardanische und andere Regeln, Rationalwurzeln nicht anders als durch irrationale Ausdrücke oder durch Näherungen angeben; obschon die Gleichungen Rationalwurzeln enthalten. Wem sollte aber bey solchen Fällen nicht zu Sinne kommen, die Cardansche und andere Auflösungsmethoden so lange zu verlassen, bis die Factoren des letzten Gliedes der Gleichung, ihm eben dieses überzeugend darthun, da aber dieser Umstand nie eintreten wird, weil eine cubische Gleichung keine andere Rationalwurzeln haben kann, als solche, die zugleich Theiler des letzten Gliedes sind; so läßt sich die Probe: ob Rationalwurzeln in der Gleichung stecken, geschwind und leicht anstellen, besonders wenn das letzte Glied oder das Product aus allen drey Wurzeln der Gleichung, klein ist. Es sey z. B. nach Hrn. Eulers Algebra Tom. II. p. 110. §. 182. diese Gleichung gegeben: $x^3 = 6x + 40$, wo $x = 4$ eine Rationalwurzel ist. Wer wird hier nicht lieber die Factoren des lezten Gliedes die Musterung passiren lassen, als mit Cardan die Wurzel $x = \sqrt[3]{(20 + 14\sqrt{2})} + \sqrt[3]{(20 - 14\sqrt{2})}$ setzen? Doch es war Hrn. Eulern in dem angeführten ganzen Capitel nur darum zu thun, Cardans Regel nach allen ihren Vorzügen und Mängeln kenntlich zu machen. Wolf, der diese Aufgabe wol kannte, und sie aufzulösen vornahm, verfiel noch bey der Annahme einer andern unbekannten Grösse, in viele Weitläuftigkeit. Man sehe hierüber seine Elem. Analys. §. 360. nach.

Von

Von der Auflösung der biquadratischen Gleichungen.

§. 20.

Seitdem die größten Analysten sich Mühe gegeben haben, die Algebra der Alten zu vervollkommnen, und z. B. auch für die Gleichungen des 3ten und 4ten Grades, allgemeine Auflösungsmethoden zu suchen; seitdem Bombelli und andere so glücklich waren, uns mit Beyhülfe cubischer Gleichungen auf allgemeinen Wegen zur Kenntniß der Wurzeln des 4ten Grades zu führen; — seitdem versuchten es mehrere, z. B. Moivre, u. a. ihre Auflösungsmethoden für besondere Fälle der genannten Gleichungen, der Welt mitzutheilen, und dieses thaten sie desto lieber, da sie so glaubten der beschwerlichen cardanischen Regel ausweichen, und die biquadratische Gleichungen, blos durch zwo quadratische vorstellen zu können. Herr Euler, der gewohnt ist jedem Verdienste, Gerechtigkeit wiederfahren zu lassen, sagt selbst von solchen Bemühungen: „daß sie öfters mit Nutzen angebracht werden können.“

§. 21.

Da aber diese Auflösungen ziemlich eingeschränkt waren, indem die einte forderte, daß die

Glieder der biquadratischen Gleichung vor- und rückwärts gleichartig fortgehen, oder, daß nach Hrn. Euler, die Gleichungen allgemein so vorgestellt werden können: $x^4 + max^3 + naax^2 + ma^3x + a^4 = 0$; und die andere voraussetzte, daß das zweite und vierte Glied verschiedene Zeichen haben müssen, oder, daß sich eine solche Gleichung allgemein so ausdrücken lasse: $x^4 + max^3 + naax^2 - ma^3x + a^4 = 0$; so war eine Bemühung, die diesen voreilte, und die nicht so eingeschränkt als diese war, wenigstens nicht überflüssig, zumal, wenn sie in den mehresten Fällen mit Vorbeygehung der cubischen Gleichungen, die rational- irrational- und imaginären Wurzeln der Biquadrate, weit leichter und bequemer bestimmen, und angeben lehrte.

§. 22.

Da ich einen Versuch dieser Art gewagt habe, und nun glaube meine Absicht sey erreicht; so enthalte ich mich nicht länger, meine Bemühungen hierüber, der Welt mitzutheilen, und besonders Mathematiker entscheiden zu lassen: ob die angeführten Beyspiele, die ich verschiedenen Gelehrten, am öftersten aber Herrn Euler nachschrieb, nicht die hier gelehrte Methode empfehlen, und ihr, wo nicht überall, doch größtentheils die bekannten, allgemeinen und besondern Auflösungsmethoden dieser Gleichungen, nachsetzen, da sie nie auf cubische Gleichungen führet, wenn ich schon des Bombelli Regel, wie man hernach sehen wird, zum Grunde meiner Calculationen, für die Auflösung der Gleichungen des 4ten Grades, legte. Ehe ich aber an Beyspielen, die eine directe Beziehung auf die eben genannte Regel haben, zu zerlegen vornehme, will ich an der Auflösung obiger zween besonderer Fälle, oder wo die allgemeine Formeln der Gleichungen: $x^4 + max^3 + na^2x^2 + ma^3x + a^4 = 0$; und $x^4 + max^3 + na^2x^2 - ma^3x + a^4 = 0$ sind, die Anwendbarkeit derselben, zeigen.

§. 23.

Man habe also mit Hrn. Euler am angezogenen Orte §. 201. diese Gleichung: $x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 4x + 1 = 0$. aufzulösen. Hier werden nun alle die Vorrichtungen zur Keuntniß der Wurzeln erfordert, deren Hr. Euler im vorhergehenden §. 200 erwähnt, und deren Weitläuftigkeit man auch dann gerne ausweichen wird, wenn man auch die Formel, die zu ihrer Auflösung führet, wirklich bey Handen hätte, denn es wird doch immer erfordert, I) daß $p + q = m$; II) $pq + 2 = n$; oder $pq = n - 2$ werde.

§. 24.

Nach Herrn Euler, ist wie bekannt, des Bombelli Regel, wenn x die unbekannte Grösse der biquadratischen Gleichungen vorstellt, $= (xx + \frac{1}{2} ax + p)^2 - (qx + r)^2 = 0.$, wo a einen gegebenen, p; q; r; aber allemal ge-

gesuchte Coefficienten andeuten. Multiplicirt man diese quadratische Gleichungen jede für sich besonders, so erhält man mit Hrn. Euler, für die erstere: $x^4 + ax^3 + \frac{1}{4} a^2x^2 + apx + p^2$, und für die andere: $+ 2px^2 - 2qrx - q^2x^2 - rr$. Da nun das 1te und 2te Glied hier schon gleich sind; so findet man, daß das 3te Glied $= \frac{1}{4} a^2 + 2p + q^2$; das 4te $= ap - 2qr$; und das letzte $= p^2 - r^2$, wird.

§. 25.

Setzt man nun die allgemeine biquadratische Gleichung $= x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$; wo a, b, c, alle nur mögliche Coefficienten bedeuten können, so findet sich, daß das 3te Glied, oder $b = \frac{1}{4} a^2 + 2p - q^2$; das 4te $= ap - 2qr = c$; und das fünfte oder letzte $= d = p^2 - r^2$ nach der vorhin gegebenen Formel, ist.

§. 26.

Ich nahm mit Hrn. Euler an, daß $(x^2 + \frac{1}{2} ax + p)^2$, mit $- (qx + r)^2$ multiplicirt werden müsse, folglich erhielt ich eben die Ausdrückungen, es war nämlich bey mir $b = \frac{1}{4} a^2 + 2p - q^2$; $c = ap - 2qr$; und $d = p^2 - r^2$ wie vorhin, oder auch $p^2 = d + r^2$; $q^2 = \frac{1}{4} a + 2p - b$, daher $q = \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 + 2p - b)}$, $= \frac{ap - c}{2r}$, und $r = \sqrt{(p^2 - d)}$,

dem-

demnach waren auch hier, die Coefficienten p, q, und r, bestimmt.

§. 27.

Nun sey nach Bombelli Formel, $p^2 = d + r^2$; $q = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + 2p - b)}$; und in der oben §. 23. angeführten Gleichung $a = -4$; $b = -3$; $c = -4$; $d = +1$; wird $r = 0$ gesetzt, so ist $p^2 = d + r^2 = 1 + 0$, daher $p = \pm 1$; und wenn $p = +1$ genommen wird, so wird $q = \sqrt{(4 + 2 \mp 3)}$, und daher die beyde Gleichungen, oder

$$(xx + \tfrac{1}{2}ax + p)^2 - (qx + r)^2 = 0, \text{ gleich:}$$
$$(xx - 2x + 1)^2 - (3x)^2 = 0.$$
$$\text{oder } x^2 - 2x + 1 = 3x$$
$$\text{daher } x^2 = 5x - 1.$$
$$\text{und } x = \tfrac{5}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{25}{4} - 1)}$$
$$= \tfrac{5}{2} \pm \sqrt{\tfrac{21}{2}} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2} \text{ wird.}$$

Um die andern zwo Wurzeln zu erhalten, setze man wie vorhin $p = +1$; $r = 0$; nur sey $q = -3$; dann wird man haben: $(xx - 2x + 1)^2 - (-3x)^2 = 0$, oder $x^2 - 2x + 1 = -3x = 0$.

$$\text{folglich } xx = -x - 1.$$
$$\text{demnach } x = -\tfrac{1}{2} \mp \sqrt{(\tfrac{1}{4} - 1)}$$
$$= -\tfrac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{-3}}{2}$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2},$$ welches die 4 Wurzeln sind, die Herr Euler §. 201. auch angiebt.

§. 28.

Nach eben dieser itzt angeführten Regel, geschiehet mit gleicher Leichtigkeit, die Auflösung der Gleichungen des zweiten Falles, dessen Hr. Euler a. a. O. §. 202. erwähnt. Es sey z. B. nach §. 203. diese Gleichung gegeben: $x^4 - 3 \cdot 2x^3 + 3 \cdot 8x + 16 = 0$; so ist hier $a = -6$; $b = 0$; $c = 24$; $d = 16$. also $p^2 = 16 + r^2$. Da auch hier d schon ein Quadrat ist, und folglich p^2 auch ein Quadrat wird, wenn $r = 0$ gesetzt wird; so erhält man hieraus, wenn $p = -4$ ist:

$q = \surd(\frac{1}{4}a^2 + 2p) = \pm 1$. Ist nun $p = -4$

$$q = +1$$
$$r = 0,$$

so hat man $xx - 3x - 4 = x$

$$x^2 = 4x + 4$$

$$x = 2 \pm \surd(4 + 4) = 2 \pm \surd 8,$$

welches die zwo erstern Wurzeln der Gleichung sind, die übrige zwo findet man, wenn wie vorhin $p = -4$; q aber $= -1$; $r = 0$ angenommen wird, alsdann ergiebt sich, daß

$$x^2 - 3x - 4 = -x$$

folglich $x^2 = 2x + 4$

daher $x = 1 \pm \surd(1 + 4) = 1 \pm \surd 5$ seyn wird. Herr Euler zeigt deutlich, daß die gefundene Wurzeln, die 4 Factoren der vorgegebenen Gleichung seyn.

§. 29.

Um meine Aussage mit noch mehr Beweisen zu versehen, und zu zeigen, daß wenn p, q, und r in einer Gleichung des 4ten Grades, als Coefficienten bestimmt sind, man hernach keiner cubischen Gleichung um x oder die noch unbekannte Wurzel kennen zu lernen, bedürfe; will ich Hrn. Euler und andere Gelehrte, die zur Auflösung ihrer Beyspiele Cardans Regel in vielen Fällen unentbehrlich finden, ihre angeführte Exempel abentlehnen, und die cubische Gleichungen dennoch in allen meinen Beyspielen weglassen.

§. 30.

Es sey z. E. nach Eulers Algebra Tom. II. pag. 126. §. 208. die biquadratische Gleichung $= x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$; Herr Euler, der diese Gleichung nach Bombelli Regel auflöst, setzt ganz richtig, mit der allgemeinen Formel dieses Autoren verglichen, $a = -10$; $b = 35$; $c = -50$; $d = 24$, und erhält sodann nach einer ziemlich mühesamen Calculation diese cubische Gleichung: $8p^3 + 140p^2 + 808p - 1540 = 0$ und damit $p = 5$, und $p = 7$, welche Werthe der Wurzeln sich aus dem letzten Gliede der Gleichung, leicht ergeben. Um die 3te zu finden, wird die erste cubische Gleichung mit 2^3 dividirt, so erhält man: $p^3 - \frac{35}{2}p^2 + 101\,p - \frac{385}{2} = 0$. Hr. Euler sagt am angeführten Orte:

„und

„und da die Zahl im zweiten Gliede $\frac{35}{2}$, die
„Summe aller 3 Wurzeln ist, die beyden erstern
„aber zusammen 12 machen, so muß die 3te =
„$\frac{11}{2}$ seyn.

§. 31.

Um dieses zu zeigen, fährt er §. 209. weiter
fort: „es sey erstlich $p = 5$, daraus wird alsdenn
„$q = \sqrt{(25 + 10 - 35)} = 0$ und $r = -\frac{50 + 50}{0}$
„$= \frac{0}{0}$. Da nun hierdurch nichts bestimmt wird,
„so nehme man die 3te Gleichung $r^2 = p^2 -$
„$d = 25 - 24 = 1$, und also $r = 1$: daher
„unsere Quadratgleichungen seyn werden:
„ I) $xx = 5x - 4$, II) $xx = 5x - 6$.
„ Die erstere giebt nun diese zwo Wurzeln:
„$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$, also $x = \frac{5 \pm 3}{2}$, folglich
„entweder $x = 4$, oder $x = 1$: die andere
„aber giebt $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, also $x = \frac{5 \pm 1}{2}$;
„daraus wird entweder $x = 3$, oder $x = 2$.
„u. s. w.

§. 32.

Vermittelst der oben §. 24. gedachten Regel, wird sich die Gleichung $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$, so zerlegen lassen:

$$a = -10$$
$$b = +35$$
$$c = -50$$
$$d = +24$$

demnach da $p^2 = d + r^2 = 24 + r^2$, so ist entweder $p = \pm 5$, und $r = \pm 1$.

oder $p = \pm 7$, und $r = \pm 5$. wird nun $p = +7$ gesetzt, so erhält man für $q = \sqrt{(25 + 14 - 35)} = \pm 2$. Woraus denn, wenn $q = -2$ und $r = +5$ genommen wird, folgt: $(x^2 - 5x + 7)^2 = -(-2x + 5)^2$

$$x^2 - 5x + 7 = -2x + 5$$
$$x^2 = 3x - 2$$
$$x = \tfrac{3}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{9}{4} - 2)} = \tfrac{3}{2} \pm \tfrac{1}{2} = +2 \text{ } +1.$$

Setzt man ferner $p = +7$; $q = +2$; $r = -5$, so werden die folgende zwo Gleichungen, die ganz ungezwungen aus diesen Bestimmungen fliessen, die übrige zwo Wurzeln angeben, man hat nämlich:

$$(x^2 - 5x + 7)^2 - (2x - 5)^2 = 0.$$

oder $x^2 - 5x + 7 = 2x - 5$.

$$x^2 = 7x - 12$$
$$x = \tfrac{7}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{49}{4} - 12)}$$
$$= \tfrac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{1}}{2} = \tfrac{7}{2} \pm \tfrac{1}{2} = +4 \text{ } +3,$$

welches die 4 Wurzeln sind, die man aus eben diesen Factoren des letzten Gliedes der Gleichung, auch gefunden hätte.

§. 33.

§. 33.

Da sich die folgende Gleichung, so in Herrn Eulers Algebra pag. 128. §. 210. findet, wie ich sie hinschrieb, diese Gleichung aber eine, von den vorigen Gleichungen verschiedene Gestalt hat, weil einige Glieder in derselben mangeln: so wird es allerdings darum zu thun seyn, zu wissen: ob sie der gleichen Auflösungsmethode wie die vorigen unterworfen sey, folglich, ob auch da, ihre Reduction auf eine cubische Gleichung ausgewichen werden könne, oder nicht?

es sey vorgegeben: $x^4 * * - 16x - 12 = 0.$

hier ist $a = 0$
$b = 0$
$c = -16$
$d = -12$

$$p^2 = -12 + r^2$$

es sey $p = \pm 2$, so wird $r = \pm 4$; nimmt man $p = +2$, und $r = +4$, so wird q, welches $= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + 2p - b)} = \sqrt{(0 + 4 - 0)} = \pm 2.$ Es sey demnach $q = +2$; $p = +2$, und $r = +4$, so erhält man aus dieser Bestimmung:

$$(x^2 + 2)^2 - (2x + 4)^2 = 0$$

$$x^2 + 2 = 2x + 4$$

$$x^2 = 2x + 2$$

$$x = 1 \pm \sqrt{(1 + 2)} = 1 \pm \sqrt{3},$$

welches just die zwo ersten Wurzeln der Gleichung sind, wie sie Herr Euler a. a. o. auch fand.

Um die zwo letztern zu finden, setze man: $p = + 2$; $q = - 2$; $r = - 4$; so bekömmt man: $(x^2 + 2)^2 - (-2x - 4)^2 = 0$

oder $x^2 + 2 = - 2x - 4$

daher $x^2 = - 2x - 6$

folglich $x = - 1 \pm \sqrt{(1 - 6)} = - 1 \pm \sqrt{-5}$.

Also sind auch Gleichungen in denen einige Glieder mangeln, von dieser Auflösungsmethode nicht ausgenommen.

§. 34.

Um dieses noch mehr zu bestättigen, will ich einige Beyspiele, wo dieser Fall statt hat, aus andern Mathematikern entlehnen, und ihre Anweisungen beisetzen, die sie den Auflösungen ihrer Gleichungen voran gehen lassen. Man habe zu dem Ende, aus Hrn. **Lamberts Beyträgen zur Mathematik** T. II. pag. 208. folgende Gleichung: $x^4 * - 15x^2 + 10x + 24 = 0$. Zur Auflösung dieser Gleichung bedient sich Hr. **Lambert** einer andern, die er pag. 207. fand, und von welcher er daselbst §. 27. sagt: „Diese Gleichung werde ich hier eben „nicht auflösen, sondern noch einen andern „Rückweg nehmen, und zeigen, wie wenn man „jede Gleichung vom 4ten Grade, deren 2tes „Glied $= 0$ ist, mit der Gegenwärtigen, $0 =$ „$a^4 + 2A\, a^2 - 8Ca + A^2 - 4B$, vergleicht, man

„auf

„auf die cubische Gleichung: $o = y^3 + Ay^2$ „$+ By - CC$ kommen, und nachdem man „ihre Wurzeln p^2, q^2, r^2 gefunden, sodann „auch die Wurzeln der Gleichung vom 4ten „Grade haben könne, welche man mit $o = a^4$ „$+ 2Aa^2 - 8Ca + \begin{matrix}A^2\\-4B\end{matrix}$ verglichen hatte.

„Denn da a der Coefficient des 2ten Gliedes „der Gleichung $o = x^3 + ax^2 + bx + c$, „und folglich die Summe ihrer Wurzeln ist, so „ist $a = p + q + r$. §. 28. heist es, da „es genug ist, dieses Verfahren in einem Bey„spiele zu zeigen, so setze man noch einmal $o =$ „$x^4 * - 15x^2 + 10x + 24$, oder wenn wir „a für x setzen $o = a^4 - 15a^2 + 10a +$ „24, diese mit $o = a^4 + 2Aa^2 - 8C + \begin{matrix}A^2\\-4B\end{matrix}$ „verglichen, giebt $A = -\frac{15}{2}$

$C = -\frac{5}{4}$

$B = +\frac{129}{16}$

„demnach, wenn diese Werthe in der Gleichung „$o = y^3 + Ay^2 + By - CC$ gesetzt wer„den $o = y^3 - \frac{15}{2}y^2 + \frac{129}{16}y - \frac{25}{16}$ eine „cubische Gleichung, von deren Auflösung, die „Auflösung der fürgegebenen Gleichung vom „4ten Grade abhängt.

„§. 29. Man setze, um erstlich die Brüche „aufzuheben $y = \frac{1}{4}v$, so ist $o = v^3 - 30v^2$ „$+ 129v - 100$. Ferner setze man, um das „zweyte Glied wegzuschaffen, $v = Z + 10$, „so ist $o = Z^3 - 171Z - 810$. Vergleicht „man diese Gleichung mit $o = Z^3 - \frac{3}{4}rrZ - \frac{1}{4}rrD$,

„$\frac{1}{4}$ rrD, so findet man $\frac{3}{4}$ rr = 171; $\frac{1}{4}$ rrD =
„810; folglich $r = \sqrt{228}$, und $D = \frac{270}{19}$, wel-
„ches eben die Werthe sind, die wir oben (§. 4.)
„gefunden haben. Wir haben demnach auf eben
„die Art die Wurzel Z = 15, und damit die
„beyden übrige Z = − 6, und Z = − 9. Da
„nun v = Z + 10 ist, so sind 25; 4; 1; die
„drey Werthe von v, und eben so $\frac{25}{4}$; 1; $\frac{1}{4}$;
„die drey Werthe von y. Da nun $y = x^2$ ist,
„so sind $\pm\frac{5}{2}$; $\pm\frac{1}{2}$; ± 1; die 3 Werthe von
„x. Nun ist a deren Summe, demnach ist:

$$a = \pm\tfrac{5}{2};\ \pm 1;\ \pm\tfrac{1}{2}.$$

„dieses giebt achterley Werthe, von denen wir
„aber nur

$$a = +\tfrac{5}{2} + 1 - \tfrac{1}{2} = +3$$
$$a = +\tfrac{5}{2} - 1 + \tfrac{1}{2} = +2$$
$$a = -\tfrac{5}{2} - 1 - \tfrac{1}{2} = -4$$
$$a = -\tfrac{5}{2} + 1 + \tfrac{1}{2} = -1$$

„gebrauchen, welche der fürgegebenen Gleichung
„genug thun“.

§. 35.

Man sieht, daß der sel. Lambert sich der Formel, auf welche die Trisection eines beliebigen Kreisbogens und die Trigonometrie führen, bediente, um die angezeigte Wurzeln zu finden, und daß dieses allemal der Fall ist, wo nach (§. 5.

a. a. O.) die biquadratische Gleichungen entweder lauter unmögliche, oder nur reale Wurzeln haben. Es wird daher nicht unschicklich seyn, an eben dieser Gleichung zu zeigen, wie auch in solchen Fällen, die Wurzeln nach der schon oft erwähnten Auflösungsmethode, kurz und leicht zu finden wären. Man setze noch einmal:

$$x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = 0$$

so ist hier $a = 0$

$b = -15$

$c = +10$

$d = +24$

folglich $\underline{p^2 = 24 + r^2}$

also $p = \pm 5$; und $r = \pm 1$

es sey $p = +5$; $r = +1$; so wird $q = \sqrt{(10 + 15)} = \pm 5$. Wird q erstlich $= -5$ genommen, so erhält man diese zwo Gleichungen:

$$\underline{(x^2 + 5)^2 - (-5x + 1)^2 = 0}$$

$$\underline{x^2 + 5 = -5x + 1}$$

$$\underline{x^2 = -5x - 4}$$

$$x = -\tfrac{5}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{25}{4} - 4)}$$

$$= -\tfrac{5}{2} \pm \sqrt{\tfrac{9}{4}} = -\tfrac{5}{2} \pm \tfrac{3}{2} = -1$$

$$= -4.$$

welches zwo von den oben gefundenen Wurzeln sind.

Nimmt man nun $p = +5$; $q = +5$. $r = -1$; so ergeben sich aus den Gleichungen, die aus diesen Bestimmungen fliessen, auch die zwo Uebrige, denn man wird bekommen:

$$(x^2 + 5)^2 - (5x - 1)^2 = 0$$

also $$x^2 + 5 = 5x - 1$$

$$x^2 = 5x - 6$$

$$x = \tfrac{5}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{25}{4} - 6)}$$

$$= \tfrac{5}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}} = +3$$

$$= +2.$$

§. 36.

Eine der vorigen fast ähnliche Gleichung des 4ten Grades, bey deren Auflösung das 2te Glied nach Cardan, des Cartes — absolut mangeln muß, und welche Cardans Regel und andere weitläufige Kunstgriffe und Vorbereitungen nothwendig macht, bis man zur Kenntniß ihrer Wurzeln gekommen ist — ist die folgende, die ich, aus des berühmten französischen Mathematikers, Hrn. Abbé Bossut (Cours de Mathematiques. Paris 1790. pag. 397. §. 269.) entlehnte. Sie heißt daselbst:

$$x^4 - 12x^2 - 8x + 2 = 0.$$

Hr. Bossut sagt: „Cette Equation est „délivrée de son second Terme; & on a, „$p = -12$, $q = -8$, $r = 2$. L'équation „en s'est, $s^3 - 24 s^2 + 136 s - 64 = 0$; „& en supposant $s = u + 8$, on a l'équation „en u sans second terme, $u^3 - 56u = 0$; „d'oû l'on tire ces trois racines réelles; $u = 0$, „$u = + \sqrt{56}$, $u = - \sqrt{56}$. Ainsi les „racines de l'équation proposée $x^4 - 12x^2$ „— &c., sont toutes quatre réelles, ou toutes „quatres imaginaires. C'est le premier cas „qui a lieu, parceque les trois valeurs de

„ $\underline{s}$ sont positives, a cause de $\underline{s} = \underline{u} + 8$
„ Employons la première Valeur de $\underline{u}$, c'est.
„ à dire, prenons $\underline{u} = 0$; nous aurons, $\underline{s} =$
„ $\underline{u} + 8 = 8$, & $\sqrt{\underline{s}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
„ Subſtituant cette Valeur de $\underline{s}$ dans les ex-
„ preſſions generàles de x, de l'article (264)
„ on aura, pour les quatre racines de notre
„ équation:

$$x = \sqrt{2} + \sqrt{\left(4 + \frac{\sqrt{8}}{2}\right)}$$

$$x = -\sqrt{2} + \sqrt{\left(4 - \frac{\sqrt{8}}{2}\right)}$$

$$x = \sqrt{2} - \sqrt{\left(4 + \frac{\sqrt{8}}{2}\right)}$$

$$x = \sqrt{2} - \sqrt{\left(4 - \frac{\sqrt{8}}{2}\right)}.\text{“}$$

Ich ſetze eben dieſe Gleichung: $x^4 - 12x^2 - 8x + 2 = 0$ noch einmal, und ſie wird ohne Zuziehung mehrerer unbekannter Gröſſen, oder beſchwerlicher Verwandlungen, und cubiſcher Formeln ſogleich geben:

a

Anmerkung. Wenn man ſich die Mühe nimmt, die in dem oben genannten Werke §. 264. gegebene Formel nachzuſehen, ſo wird man finden, daß alle die Vorrichtungen, die man nach denen daſelbſt gemachten Forderungen treffen muß, das Suchen der Wurzeln äuſſerſt ſauer machen.

$$a = 0$$
$$b = -12$$
$$c = -8$$
$$d = +2$$

also $p^2 = +2 + r^2$. Daher z. E. $p = \pm 2$; und $r = +\sqrt{2}$, seyn wird, und mit diesen zwo Bestimmungen hat man, wenn $p = -2$; $q = \frac{ap - c}{2r} = \frac{8}{2\sqrt{2}}$; und $r = \sqrt{2}$ ist:

$$(x^2 - 2)^2 - (2\sqrt{2}(x) + \sqrt{2})^2 = 0$$
$$\text{oder } x^2 - 2 = 2\sqrt{2}(x) + \sqrt{2}$$
$$\text{also } x^2 = 2\sqrt{2}(x) + 2 + \sqrt{2}$$
$$\text{und } x = \sqrt{2} \pm \sqrt{(2 + 2 + \sqrt{2})}$$
$$= \sqrt{2} \pm \sqrt{(4 + \sqrt{2})},$$ welches zwo der oben gefundenen Wurzeln sind.

§. 37.

Daß nun z. B. die Ausdrückungen: $\sqrt{2} + \sqrt{\left[4 + \frac{\sqrt{8}}{2}\right]}$, und $\sqrt{2} + \sqrt{(4 + \sqrt{2})}$ gleich seyn, erhellet so: da $\frac{8}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ ist; so ist auch $\sqrt{2} + \sqrt{4 + \left[\frac{\sqrt{8}}{2}\right]} = \sqrt{2} + \sqrt{(4 + \sqrt{2})}$.

§. 38.

Da man das zweite Glied gerne aus einer Gleichung schaft, weil sich dadurch die Rechnung

 mit

mit den Wurzeln verkürzt, dieses aber nicht der Fall bey dem dritten und den folgenden Gliedern ist; so werde ich keine Exempel aufsuchen, wo sich diese Umstände bey den Gleichungen anschaulich zeigen, sondern ich kehre wieder zu den Beyspielen, die sich in Herrn Eulers- Algebra finden, zurücke.

§. 39.

Um die Regel, die Bombelli zur Erfindung der Wurzeln des vierten Grades angab, noch deutlicher zu machen, wiederholt Hr. Euler bey dem folgenden Exempel §. 211. seiner Algebra, die ganze Verfahrungsart dieser Methode. Er sagt: „Es sey demnach diese Gleichung gegeben: $x^4 - 6x^3 + 12xx - 12x + 4 = 0$, „welche in dieser Formel enthalten seyn soll „$(xx - 3x + p)^2 - (qx + r)^2 = 0$, wo „im ersten Theil $- 3x$ gesetzt worden, weil „$- 3$ die Hälfte der Zahl $- 6$, im 2ten Glied „der Gleichung ist. Diese Form aber entwickelt, giebt: $x^4 - 6x^3 + (2p + 9 - q^2)$ „$xx - (6p + 2qr)\ x + p^2 - r^2 = 0$, mit „dieser Form vergleicht man nun unsere Gleichung, „so bekömmt man: I) $2p + 9 - q^2 = 12$, „II) $6p + 2qr = 12$, und III) $p^2 - r^2 = 4$, „aus der ersten erhalten wir $q^2 = 2p - 3$; „aus der zwoten $2qr = 12 - 6p$ oder $qr =$ „$6 - 3p$, aus der dritten $rr = p^2 - 4$: nun „multiplicire man r^2 und q^2 mit einander, so „bekommt man: $qqrr = 2p^3 - 3pp - 8p +$ „12. Quadrirt man aber den Werth von qr,

„so

„so kömmt $qqrr = 36 - 36p + 9pp$: daher
„erhalten wir diese Gleichung: $2p^3 - 3pp$
„$- 8p + 12 = 9pp - 36p + 36$, oder
„$2p^3 - 12pp + 28p - 24 = 0$, oder durch
„2 dividirt diese: $p^3 - 6pp + 14p - 12$
„$= 0$, wovon die Wurzel ist: $p = 2$; daraus
„wird $qq = 1$, $q = 1$ und $qr = r = 0$.
„Unsere Gleichung wird also seyn: $(xx - 3x$
„$+ 2)^2 = xx$, daraus die Quadratwurzel xx
„$- 3x + 2 = \pm x$; gilt das obere Zeichen,
„so hat man $xx = 4x - 2$, für das untere
„Zeichen aber $xx = 2x - 2$: woraus diese 4
„Wurzeln gefunden werden: $x = 2 \pm \sqrt{2}$,
„und $x = 1 \pm \sqrt{-1}$."

§. 40.

Diese vorstehende Gleichung, wird nach unserer Auflösung kürzer diese Gestalt bekommen: $a = -3$, $b = +12$, $c = -12$, $d = +4$, daher $p^2 = d + r^2 = 4 + r^2$. Es sey $r = 0$, so ist $p = \pm 2$. Da ferner $(\frac{1}{4} aa + 2p - qq) = 12$, oder $= (9 + 4 - q^2)$ ist; so muß $q = \pm 1$ seyn. Daher hat man nun die Gleichungen wie vorhin:

$$\frac{\frac{(x^2 - 3x + 2)^2 - x^2 = 0}{(x^2 - 3x + 2)^2 = x^2}}{x^2 - 3x + 2 = \pm x\text{; u. s. w.}}$$

§. 41.

Die nächste Gleichung, die uns nun nach Hrn. Eulers Algebra aufzulösen folget, findet sich da-

daselbst pag. 132, §. 217. Sie heißt: $x^4 - 25xx + 60x - 36 = 0$, welche mit der vorhin von Hrn. Euler sehr umständlich beschriebenen neuen Formel, verglichen, giebt: „$a = 25$, „$b = -60$ und $c = 36$, woraus man ferner „erhält $f = \frac{25}{2}$, $g = \frac{625}{16} + 9 = \frac{769}{16}$ und h „$= \frac{225}{4}$: also ist unsere cubische Gleichung

$$z^3 - \frac{25}{2} zz + \frac{769}{16} z - \frac{225}{4} = 0.$$

„Um hier die Brüche wegzubringen, so „setze man $z = \frac{u}{4}$, so wird $\frac{u^3}{64} - \frac{25}{2} \cdot \frac{uu}{16} +$ „$\frac{769}{16} \cdot \frac{u}{4} - \frac{225}{4} = 0$, welche mit 64 multiplicirt „giebt $u^3 - 50uu + 769u - 3600 = 0$, wovon die „drey Wurzeln gefunden werden sollen, welche alle „drey positiv sind, und wovon eine Wurzel ist $u = 9$, „um die andere zu finden, so theile man $u^3 - 50uu$ „$+ 769u - 3600 = 0$, durch $u - 9$, und „da kömmt diese neue Gleichung: $uu - 41u$ „$+ 400 = 0$, oder $uu = 41u - 400$, „woraus gefunden wird: $u = \frac{41}{2} \mp \sqrt{(\frac{1681}{4} -$ „$\frac{1600}{4}) = \frac{41 \mp 9}{2}$: also sind die drey Wurzeln, „$u = 9$, $u = 16$, $n = 25$, daher wir erhalten: I) $z = \frac{9}{4}$, II) $z = 4$, III) $z = \frac{25}{4}$.

„Dieses sind nun die Werthe der Buchstaben „p, q, und r, (die in der neuen Auflösungsformel, die Hr. Euler vorhin mit seiner ihme vorzüglich geläufigen Gabe der Deutlichkeit, zergliederte, angenommen werden,) also daß p „$= \frac{9}{4}$, $q = 4$, $r = \frac{25}{4}$; weil nun $\sqrt{pqr} =$ „$\sqrt{h} = -\frac{15}{2}$, und dieser Werth $= \frac{1}{2} b$ negativ

„gativ ist, so muß man sich mit den Zeichen
„der Wurzeln $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$, $\sqrt{r}$, darnach richten;
„es muß nämlich entweder nur ein minus, oder
„drey minus vorhanden seyn: da nun $\sqrt{p} =$
„$\frac{3}{2}$ $\sqrt{q} = 2$ und $\sqrt{r} = \frac{5}{2}$, so werden die 4
„Wurzeln unserer vorgegebenen Gleichung seyn:

$$\text{I)}\ x = \tfrac{3}{2} + 2 - \tfrac{5}{2} = 1,$$
$$\text{II)}\ x = \tfrac{3}{2} - 2 + \tfrac{5}{2} = 2,$$
$$\text{III)}\ x = -\tfrac{3}{2} + 2 + \tfrac{5}{2} = 3,$$

$\text{IV)}\ x = -\frac{3}{2} - 2 - \frac{5}{2} = -6$, aus wel-
„chen diese vier Factoren der Gleichung ent-
„stehen $(x-1)(x-2)(x-3)(x+6) =$
„0, wovon die beyden erstern geben $xx - 3x$
„$+ 2$, die beyden andern aber $xx + 3x -$
„18, und diese zwey Produkte mit einander
„multiplicirt, bringen just unsere Gleichung
„hervor.

§. 42.

So schön Hr. Euler diese neue Auflösungsmethode aus einander setzt, und ihre Richtigkeit an der erklärten Gleichung zeiget, so leitet sie doch, besonders Anfänger, durch viele Umwege zur Wahrheit. Die folgende Auflösung scheint mir ungleich einfacher, und daher auch gemeinverständlicher. Man urtheile selbst, ich setze wieder: $x^4 - 25xx + 60x - 36 = 0$.

hier ist $a = 0$
$b = -25$
$c = +60$
$d = -36$

folg-

folglich $\underline{p^2 = -36 + r^2}$

setzt man $p = 0$, so ist $r = \pm 6$

daher $q = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + 2p - b)} = \sqrt{25} = \pm 5.$

Es sey erstlich $q = +5$, $r = -6$,

also $\underline{x^2 = 5x - 6}$

und $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{(\frac{25}{4} - 6)}$

$= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = 3$

$= 2.$

Anmerkung. Nimmt man $q = -5$, $r = +6$, so erhält man auch die zwo letztern Wurzeln.

§. 43.

Es wäre leicht zur Bestättigung der Richtigkeit dieser Auflösungsmethode, noch Gleichungen aufzuführen, die Wolf, Bezoût und andere in ihren Werken der Nachwelt hinterlassen haben. Man sehe darüber z. B. **Wolfs** Anfangsgründe der Algebra pag. 178. §. 320. die Gleichung $x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$; und Bezoût Cours de Math. pag. 236, §. 210, die Gleichung $x^4 * + 3x^2 - 52x + 48 = 0$, nach. Allein ich schränke mich bedächtlich, nur auf die Gleichungen ein, die Hr. Euler in seiner Algebra verzeichnete, und überlasse die Nachlese, über die Anwendbarkeit der oben beschriebenen Regel, nun denen, die Geschick und Musse genug haben, sie zu machen, daher setze ich dem Verzeichnisse meiner Bemerkungen über Cardans und Bombelli Regeln nur noch

die

die letzte Gleichung dieses grossen Analysten bey, die sich am angeführten Orte pag. 135, §. 220. findet. Hr. Euler sagt:

§. 44.

„Es wird doch noch nöthig seyn, diese Re„gel auch auf eine solche Gleichung anzuwenden, „deren Wurzeln nicht rational sind:

„Eine solche Gleichung sey nun diese: y^4 „$- 8y^3 + 14yy + 4y - 8 = 0$. Hier „muß man vor allen Dingen das zweyte Glied „wegschaffen, daher setze man zu der Wurzel y „noch den vierten Theil der Zahl des zweyten „Gliedes, nämlich $y - 2 = x$, so wird „$y = x + 2$ und $yy = xx + 4x + 4$, „ferner $y^3 = x^3 + 6xx + 12x + 8$.

$$
\begin{array}{lrrrrr}
\text{„und } y^4 = & x^4 + & 8x^3 + & 24xx + & 32x + & 16 \\
- 8y^3 = & & - 8x^3 - & 48xx - & 96x - & 64 \\
+ 14yy = & & & + 14xx + & 56x + & 56 \\
+ 4y = & & & & + 4x + & 8 \\
- 8 = & & & & & - 8 \\
\hline
& x^4 + & 0 - & 10xx - & 4x + & 8 = 0,
\end{array}
$$

„welche mit unserer Formel verglichen, giebt „$a = 10$, $b = 4$, $c = - 8$; woraus wir „demnach schliessen $f = 5$, $g = \frac{17}{4}$, $h = \frac{1}{4}$, „und $\sqrt{h} = \frac{1}{2}$. Daraus wir sehen, daß das „Product $\sqrt{pqr}$, positiv seyn wird. Die cubi-

„sche Gleichung wird demnach seyn $z^3 - 5zz$
„$+ \frac{17}{4}z - \frac{1}{4} = 0$, von welcher cubischen Glei-
„chung die drey Wurzeln p, q und r gesucht
„werden müssen.

§. 45.

„Hier müssen nun erstlich die Brüche weg-
„geschaft werden, deswegen setze man $z = \frac{u}{2}$,
„so wird $\frac{u^3}{8} - \frac{5uu}{4} + \frac{17}{4} \cdot \frac{u}{2} - \frac{1}{4} = 0$, mit 8
„multiplicirt giebt $u^3 - 10uu + 17u - 2$
„$= 0$, wo alle Wurzeln positiv sind. Da nun
„die Theiler des letzten Gliedes sind 1 und 2, so
„sey erstlich $u = 1$, da wird $1 - 10 + 17$
„$- 2 = 6$, und also nicht 0, setzt man aber
„$u = 2$, so wird $8 - 40 + 34 - 2 = 0$,
„welches ein Genüge leistet. Daher ist eine
„Wurzel $u = 2$: um die andere zu finden, so
„theile man durch $u - 2$ wie folget:

$$
\begin{array}{l}
u - 2)\ u^3 - 10uu + 17u - 2\ (uu - 8u + 1 \\
\qquad\quad \underline{u^3 - 2uu} \\
\qquad\qquad - 8uu + 17u \\
\qquad\qquad \underline{- 8uu + 16u} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad u - 2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{u - 2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

„und da bekömmt man $uu - 8u + 1 = 0$, „oder $uu = 8u - 1$, woraus die beyden „übrigen Wurzeln sind $u = 4 \pm \sqrt{15}$. Da „nun $z = \frac{u}{2}$, so sind die drey übrigen Wur„zeln der cubischen Gleichung: I) $z = p = 1$, II) $z = q = \frac{4 + \sqrt{15}}{2}$, III) „$z = r = \frac{4 - \sqrt{15}}{2}$.

§. 46.

„Da wir nun p, q, und r gefunden, so werden ihre Quadratwurzeln seyn $\sqrt{p} = 1$, $\sqrt{q} = \sqrt{\frac{(8 + 2\sqrt{15})}{2}}$, $\sqrt{r} = \sqrt{\frac{(8 - 2\sqrt{15})}{2}}$.

§. 47.

Aus demjenigen aber, was oben (in Hrn. „Eulers Algeb. T. II, pag. 72, §. 118.) ist „gezeigt worden, da die Quadratwurzel aus „$(a \pm \sqrt{b})$, wenn $\sqrt{(aa - b)} = c$, also „ausgedrückt worden: $\sqrt{(a \pm b)} = \sqrt{\frac{a + c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - c}{2}}$, so ist für unsern Fall $a = 8$ und „$\sqrt{b} = 2\sqrt{15}$, folglich $b = 60$, daher $c =$ „2, und $b = 60$, hieraus bekommen wir

$\sqrt{}$

„$\sqrt{(8 + 2\sqrt{15})} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$, und
„$\sqrt{(8 - 2\sqrt{15})} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$. Da wir
„nun gefunden haben $\sqrt{p} = 1$, $\sqrt{q} =$
„$\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}$ und $\sqrt{r} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$, so wer-
„den die vier Werthe für x, da wir wissen,
„daß derselben Product positiv seyn muß, fol-
„gender Gestalt beschaffen seyn:

„I) $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = 1 +$
„$\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{5}$.

„II) $x = \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r} = 1 -$
„$\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{5}$.

„III) $x = - \sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r} =$
„$- 1 + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} =$
„$- 1 + \sqrt{3}$.

„IV) $x = - \sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r} =$
„$- 1 - \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} = - 1$
„$- \sqrt{3}$.

„Da nun für die gegebene Gleichung $y =$
„$x + 2$ war, so sind die vier Wurzeln derselben

„I)

„ I) $y = 3 + \sqrt{5}$,
„ II) $y = 3 - \sqrt{5}$,
„ III) $y = 1 + \sqrt{3}$,
„ IV) $y = 1 - \sqrt{3}$."

§. 48.

Nun sey in eben dieser vollständigen Gleichung $y^4 + 8y_3 + 14yy + 4y - 8 = 0$,

$$a = -8$$
$$b = +14$$
$$c = +4$$
$$d = -8$$

also $p^2 = -8 + r^2$

setzt man $p = \pm 1$; so wird $r = \pm 3$.
und $q = \pm 2$.

es sey erstlich $p = +1$; $q = +2$; $r = -3$, so bekömmt man:

$$y^2 - 4y + 1 = 2y - 3$$
$$y^2 = 6y - 4$$
$$y = 3 \pm \sqrt{(9 - 4)}$$
$$= 3 \pm \sqrt{5},$$ welches die zwo erste Wurzeln.

Setzt

Setzt man $p = + 1$; $q = - 2$; $r = + 3$, so wird:

$$\frac{y^2 - 4y + 1 = - 2y + 3}{y^2 = 2x + 2}$$

$$y = 1 \pm \sqrt{(1 + 2)} = 1 \pm \sqrt{3},$$

welches die 2 letztern Wurzeln der obigen Gleichung sind. Denn, da die Gleichung selbst 3 positive Wurzeln anzeigt, weil sie 3 Abwechslungen und nur eine Folge der Zeichen enthält; so könnten diese Wurzeln bey einer andern Bestimmung der Buchstaben p, q, und r, nicht erhalten werden, wenn ihr Product dennoch $= - 8$ folglich auch die Gleichung $= 0$, werden sollte.

Verbesserung.

Seite 35, in der 4ten Linie von unten, lese man $\sqrt{\left[4 + \frac{\sqrt{8}}{2}\right]}$ statt: $\sqrt{4} + \left[\frac{\sqrt{8}}{2}\right]$.

Setzt man $p = $ [illegible], $q = $ [illegible], $r = $ [illegible];

$$y^2 - 4y + 1 = -4y + 2$$

$$y^2 = 2y + 2$$

$$y = 1 \pm \sqrt{(1+2)} = 1 \pm \sqrt{3},$$

welches [illegible] letztern Wurzeln der obigen Glei- [illegible] sind. Denn, da die Gleichung [illegible] drey Wurzeln zulässt, [illegible] Wurzeln [illegible] einer andern Bestimmung der Coefficienten p, q und r nicht [illegible] [illegible] die Gleichung [illegible] folgen.

Berichtigung.

Seite 22. In der 4ten Zeile von unten, lies statt $\sqrt{\left[1+\frac{\sqrt{8}}{2}\right]}$ lies: $\sqrt{4}+\left[\frac{\sqrt{8}}{2}\right]$

Untersuchungen

über

Cardans und Bombelli Regeln,

oder

abgekürzte Auflösungsmethoden cubisch- und biquadratischer Gleichungen.

Von

Joh. Joachim Girtanner,

Lehrer der Mathematik.

St. Gallen,

bei Huber und Compagnie.

1796.