



№ 337.

Georg Vega's
Ritters des militärischen Marien-
Theresien-Ordens,
Majors und Professors der Mathematik des
k. k. Artilleriecorps u. s. w.

Mathematische Betrachtungen

über

eine sich um eine unbewegliche Achse gleich-
förmig drehende feste Kugel, und die Folgen
dieser Voraussetzung für Astronomie, Geo-
graphie und Mechanik, in Beziehung
auf unser Erdsphäroid.

Mit 1. Kupfer.

Erfurt,
bey Beyer und Marina
1798.

R. 397.

GENEPIED
UNIVERS
ZVHALLE

Mathematische Betrachtungen

über die Richtungen! der Schwere, Längen des Secundenspendels, Bestimmung der wahren Breiten aus den wahren Polhöhen, Längen der einzelnen Meridiane in verschiedenen Breiten, bey einer sich um eine unbewegliche Achse gleichförmig drehenden festen Kugel, wie auch von der Gestalt der Oberfläche des Wassers im Stande des Gleichgewichts an einer solchen Kugel, und von der Nothwendigkeit der Berichtigung der scheinbaren Breiten oder wahren Polhöhen, um wahre Breiten zu erhalten, sowohl bey der Berechnung der Entfernung der Orter aus ihren Längen und Breiten, als auch bey der Zeichnung eines Stückes einer solchen Kugelfläche nach einer beliebigen Projection; mit Beziehung auf unser Erdsphäroid.

Vorgelesen in der kurfürstl. Akademie nützlicher Wissenschaften
zu Erfurt, am 2ten Jänner 1798.

§. I.

Es sey ANESA die Meridian-Ebene einer vollkommenen festen Kugel.

Der Durchmesser $AE = SN$ sey $= D =$
6543210 Par. Tois. so groß als ohngefähr der mittlere

§ 2

lere

Ihre Durchmesser unsers Erdsphäroids wo $\text{Log. } D = 6.8157909.$

Die gleichförmige Dichtigkeit der in Betrachtung gezogenen Kugel sey ohngefähr eben so groß als die mittlere Dichtigkeit unsers Erdsphäroids. Es sey nämlich an der angenommenen Kugelgröße im freyen Zustande der Ruhe die Beschleunigung dieser Kugelschwere = g , und die davon abhängende Länge des einfachen Sekundenpendels $p = \frac{2g}{\pi^2}$
 $= 441 \text{ Par. Lin. wo } \text{Log. } p = 2.6444386.$

§. 2.

In diesem freyen Zustande der ruhenden Kugel wird die Beschleunigung dieser Kugelschwere an jedem Punkte der Kugelgröße gleich groß, und die Richtung dieser Schwerkraft überall gegen den Mittelpunkt gerichtet seyn; die wahre Polhöhe wird der wahren geographischen Breite, so wie die Aequators-Höhe der Polardistanz des Zeniths gleichen; und aus den gegebenen geographischen Längen und Breiten zweyer Derter wird deren Entfernung nach der bekannten trigonometrischen Formel bestimmt; die Oberfläche einer flüssigen Masse, eines Sees oder Meeres in den unmerklichen Vertiefungen an der Oberfläche einer solchen festen und ruhenden Kugel wird vollkommen sphärisch seyn; und wenn man vom Aequator bis zum Pol in der Richtung
 des

des Meridians sich einen Kanal mit Wasser angefüllt gedenket, so wird die Durchschnittslinie AZN der Oberfläche des ruhenden Wassers mit der Meridians Ebene ACN, eine Kreislinie seyn.

§. 3.

Nun nehme man an, diese feste Kugel werde in eine gleichförmige Rotation um die Achse SN versetzt; die Rotationszeit sey $t = 23^{\text{v}} 56^{\text{m}} 4. 1^{\text{s}} = 86164. 1$ Sek. der mittleren Sonnenzeit, wo $\log. t = 4. 9353264.$

Frage: Was werden nun für Veränderungen erfolgen?

Antwort. Die Richtung der wahrnehmbaren Schwere wird außer den beyden Polen und dem Aequator nicht mehr gegen den Mittelpunkt gerichtet seyn; die wahrnehmbare Länge des einfachen Sekundenpendels wird nur an den beyden Polen der ursprünglichen gleich seyn, und von beyden Polen gegen den Aequator abnehmen. Die wahre geographische Breite wird nicht mehr der wahren Polhöhe sondern nur die scheinbare Breite der wahren Polhöhe gleich seyn; man wird die wahre Polhöhe oder scheinbare Breite um den Ablenkungswinkel der Richtung der wahrnehmbaren Schwere, vom Mittelpunkt in der Meridian-Ebene gegen den Aequator, berichtigen müssen, um sodann nach der bekannten triaonometrischen Formel aus den geographischen

Längen und Breiten zweyer Orter ihre Entfernung berechnen zu können Die Oberfläche eines Sees oder Meeres einer solchen Kugel wird sodann nicht mehr sphärisch seyn zc.

§. 4.

Um einige der erwähnten Veränderungen deutlicher einsehen und berechnen zu können, betrachte man den Punkt Z des Meridians in der wahren Breite $AZ = ACZ = B$. Aus der Umdrehungsbewegung dieser festen Kugel um die Achse SN erhält wegen der Fliehkraft der Punkt Z ein Bestreben nach der Richtung des Cosinus DZ der Breite in der Meridianebene von Z gegen F fortzugehen; die Beschleunigung dieser Fliehkraft in dem Punkte Z nach der Richtung ZF ist $= \frac{2\pi^2 \cdot ZD}{t^2} = \frac{\pi^2 D \cos b}{t^2}$ (verm. Vega Mathem. 3r Band §. 198. I und §. 200.) Die Beschleunigung aber des Punktes Z nach der Richtung ZC wegen der ursprünglichen Schwere ist $= g = \frac{1}{2} \pi^2 p$. Nimmt man nun ZF und ZP den zwey erwähnten Beschleunigungen gemäß, und ergänzt das Parallelogramm FBGZ, so ist ZB die Größe und Richtung der wahrnehmbaren Schwere HR senkrecht auf ZP die wahre Horizontlinie, RN = NCR die wahre Polhöhe, ACQ = APZ = RCN = AQ die scheinbare Breite = B; BZG = ZCQ = ZQ = APZ - ACZ = B - b ist der Ablenkungswinkel der Richtung
der

der wahrnehmbaren Schwere von der ursprünglichen, und ZG — ZB ist die Verminderung der ursprünglichen Beschleunigung der Schwere.

§. 5.

Aus dem Winkel FZG = 180° — b aus FZ = $\frac{\pi^2 D \cos b}{t^2}$ und ZG = $\frac{1}{2} \pi^2 p$ läßt sich der Winkel FZB = 180° — B, und auch die Beschleunigung nach der Richtung ZB bestimmen, es ist nämlich (vermöög Vega Mathem. 3r Band §. 64).

Tang. B = $\left\{ \frac{t^2 p}{t^2 p - 2D} \right\}$ Tang. b, und Tang. b = $\left\{ 1 - \frac{2D}{t^2 p} \right\}$ Tang. B; die Gleichung aber zwis-

schen der wahrnehmbaren Länge des Sekundenpendels = q und zwischen den ursprünglichen p ist $q^2 = p^2 + \frac{4D^2}{t^4} \cos. 2b - \frac{4pD \cos. 2b}{t^2}$, wo

nun $p - q$ sehr nahe = $\frac{2D}{t^2} \left\{ 1 - \frac{D}{pt^2} \right\} \cosin 2b$;

denn wenn $p - q = \delta$ gesetzt wird, so ist $p - \delta = q$, $p^2 - 2p\delta + \delta^2 = q^2$, und da δ^2 in Absicht 2p δ äußerst klein, so ist $p^2 - 2p\delta = q^2$ sehr nahe; näm-

lich $\delta = \frac{p}{2} - \frac{q^2}{2p}$.

§. 6.

Die Abnahmen der ursprünglichen Länge des einfachen Sekundenpendels in verschiedenen wahren

Breiten verhalten sich demnach wie die quadrirten Cosinus dieser Breiten. Und da unter dem Nequator die wahrnehmbare Beschleunigung der Schwere

$$\gamma = g - \frac{\pi^2 D}{t^2},$$

oder in Längen der Sekundenpendel ausgedrückt $\frac{1}{2} \pi^2 q = \frac{1}{2} \pi^2 p - \frac{\pi^2 D}{t^2}$, und daher die Verminderung der ursprünglichen Länge des Sekundenpendels daselbst $p - q = \frac{2D}{t^2}$ ist, so ist auch für die wahre Breite b diese Verminderung oder Abnahme sehr nahe $\delta = \frac{2D}{t^2} \cos^2 b$; wo nun aus der beobachteten oder wahrnehmbaren Länge des einfachen Sekundenpendels in einer bekannten wahren Breite die ursprüngliche Länge, die nur noch unter den Polen statt findet, sich berechnen läßt.

§. 7.

Aus den oben bemerkten Zahlen für D, t, p folgt nun die Formel zur Verwandlung der wahren Polhöhen B , in wahre Breiten b , und umgekehrt.

$$\begin{aligned} \text{Log. Tang. } b &= \text{Log. Tang. } B + 0.9984973 - 1 \\ \text{Log. Tang. } B &= \text{Log. Tang. } b + 0.0015027. \end{aligned}$$

Und

Und die Formel für die Verminderung δ der ursprünglichen Länge des einfachen Sekundenpendels 441 Linien in der wahren Breite b ist.

$$\text{Log. } \delta = 2 \text{ Log. Cos. } b + 0.1826818, \text{ oder} \\ \delta = 1.523 \cos. ^2 b \text{ Par. Lin.}$$

Für die wahre Polhöhe oder scheinbare Breite $B = 45^\circ$ ist daher die wahre geographische Breite $b = 44^\circ 54' 3''$, und folglich der größte Ablenkungswinkel der Richtung der wahrnehmbaren Schwere von der Richtung der ursprünglichen = $5' 57''$; die Abnahme der Länge des Sekundenpendels aber $\delta = 0.764$ Par. Lin. und folglich die wahrnehmbare Länge des einfachen Sekundenpendels in dieser wahren Breite $q = 440.236$ Par. Lin.

§. 8.

Wenn nun bey den angeführten Umdrehungs-
Bewegung einer solchen festen Kugel aus den bekann-
ten geographischen Längen und wahren Polhöhen
zweyer Orter, wie solche auf gewöhnliche Art be-
stimmt werden, die Entfernung dieser zwey Orter
mittelt der bekannten sphärisch-trigonometrischen
Formel zu berechnen wäre, so müßte man vorher
aus den wahren Polhöhen die wahren Breiten dieser
zwey Orter nach voriger Formel herleiten, und so-

§ 5

dann

dann erst in der dazu gehörigen sphärisch-trigonometrischen Formel die Werthe substituiren. Eben so müßte man bey der Zeichnung einer geographischen Karte nach einer beliebigen Projectionsmethode die gewöhnlichen geographischen Breiten nach obiger Formel verbessern, solche in wahre Breiten verwandeln, und sodann erst in das Projectionsnetz eintragen, damit die abgebildeten Derter darinnen ihre richtige Lage gegen einander erhalten, sonst entstehen daraus sehr merkliche Abirrungen, besonders bey Dertern, wovon einige nördlich, und andere südlich vom Aequator liegen. Wenn man z. B. ein Stück einer solchen Kugelfläche vom 30° südlichen bis zu 30° nördlicher Breite nach Art einer gewöhnlichen geographischen Karte abzeichnen wollte, und würde da zwey Derter, welche beyde unter einerley Meridian liegen, wovon aber eines 30° südliche und das andere 30° nördliche wahre Polhöhe hat, in das Projectionsnetz eintragen, ohne die Breiten auf obige Art zu berichtigen, so wäre ihre Entfernung von einander in der Zeichnung über $10\frac{1}{2}$ Minuten fehlerhaft.

§. 9.

Zur Verwandlung der wahren Polhöhen in wahre Breiten läßt sich nach obiger Formel eine sehr einfache Tabelle berechnen, etwan für alle einzelne Grade von 0 bis 90, wodurch die Verwandlung der scheinbaren Breiten in wahre und umgekehrt sehr abgekürzet wird. Hier folgt diese Tabelle.

Tab

Tabelle

der wahren Breiten, Ablenkungswinkel der Schwerkraft, Längen der einzelnen Meridiangrade und des einfachen Sekundenpendels für verschiedene wahre Polhöhen oder scheinbare Breiten bey einer vollkommenen Kugel unter den angeführten Umständen.

Wahre Polhöhe oder scheinbare Breite.	Wahre Breite oder Meridianbogen von Aequator.	Unterschied oder Ablenkungswinkel.	Länge des Sekundenpendels in Par. Linien	Längen der einzelnen Meridiane angrade.	Eben diese Längen in Par. Tois.
0	0	0			
1	0 59 47	0 0 13		0 59 47	56894
2	1 59 34	0 0 26		0 59 47	
3	2 59 22	0 0 38		0 59 48	
4	3 59 10	0 0 50		0 59 48	
5	4 58 58	0 1 2		0 59 48	
6	5 58 46	0 1 14		0 59 48	
7	6 58 34	0 1 26		0 59 48	
8	7 58 22	0 1 38		0 59 48	
9	8 58 10	0 1 50		0 59 48	
10	9 57 58	0 2 2		0 59 48	
11	10 57 46	0 2 14		0 59 48	
12	11 57 35	0 2 25		0 59 49	
13	12 57 24	0 2 36		0 59 49	
14	13 57 13	0 2 47		0 59 49	
15	14 57 2	0 2 58	439, 477.	0 59 49	
16	15 56 51	0 3 9		0 59 49	56926
17	16 56 41	0 3 19		0 59 50	
18	17 56 31	0 3 29		0 59 50	
19	18 56 21	0 3 39		0 59 50	
20	19 56 11	0 3 49		0 59 50	
21	20 56 2	0 3 58	439, 578.	0 59 51	
22	21 55 53	0 4 7		0 59 51	
23	22 55 44	0 4 16		0 59 51	
24	23 55 35	0 4 25		0 59 51	
25	24 55 27	0 4 33		0 59 52	
26	25 55 19	0 4 41		0 59 52	
27	26 55 11	0 4 49		0 59 53	
28	27 55 4	0 4 56		0 59 53	
29	28 54 57	0 5 3		0 59 54	
30	29 54 51	0 5 9	439, 856.	0 59 54	57005

Wahre Pol- höhe oder scheinbare Breite.	Wahre Brei- te oder Meri- dianbogen von Aequa- tor.			Unter- schied oder Ablen- kungswin- kel.			Länge des Zenithen- pendels in Par. Linien	Längen der einzelnen Meridian- grade.	Eben diese Längen in Par. Tois.
o	o	o	o	o	I	II		o	o
31	30	54	45	o	5	15		o	59 54
32	31	54	39	o	5	21		o	59 55
33	32	54	34	o	5	26		o	59 55
34	33	54	29	o	5	31		o	59 56
35	34	54	25	o	5	35		o	59 56
36	35	54	21	o	5	39		o	59 56
37	36	54	17	o	5	43		o	59 57
38	37	54	14	o	5	46		o	59 57
39	38	54	11	o	5	49		o	59 58
40	39	54	9	o	5	51		o	59 58
41	40	54	7	o	5	53		o	59 58
42	41	54	5	o	5	55		o	59 59
43	42	54	4	o	5	56		o	59 59
44	43	54	3	o	5	57		I	o o
45	44	54	3	o	5	57	440, 236	I	o o 57100
46	45	54	3	o	5	57		I	o o I
47	46	54	4	o	5	56		I	o o I
48	47	54	5	o	5	55		I	o o 2
49	48	54	7	o	5	53		I	o o 2
50	49	54	9	o	5	51		I	o o 2
51	50	54	11	o	5	49		I	o o 2
52	51	54	13	o	5	47		I	o o 3
53	52	54	16	o	5	44		I	o o 4
54	53	54	20	o	5	40		I	o o 4
55	54	54	24	o	5	36		I	o o 5
56	55	54	29	o	5	31		I	o o 5
57	56	54	34	o	5	26		I	o o 5
58	57	54	39	o	5	21		I	o o 6
59	58	54	45	o	5	15		I	o o 6 57195
60	59	54	51	o	5	9	440, 617	I	o o 6
61	60	54	57	o	5	3		I	o o 7
62	61	55	4	o	4	56		I	o o 7
63	62	55	11	o	4	49		I	o o 7
64	63	55	18	o	4	42		I	o o 8
65	64	55	26	o	4	34		I	o o 8
66	65	55	34	o	4	26		I	o o 9
67	66	55	43	o	4	17		I	o o 9
68	67	55	52	o	4	8		I	o o 9
69	68	56	1	o	3	59		I	o o 10
70	69	56	10	o	3	50		I	o o 10

Wahre Pol- höhe oder scheinbare Breite	Wahre Brei- te oder Wert- dianbogen von Aequa- tor.			Unters- chied oder Ablen- kungswin- kel.			Länge des Sextanten- pendels in Par. Einien	Längen der einzelnen Meridis- angrade			Eben diese Längen in Par. Tois.
	o	1	11	o	1	11		o	1	11	
71	70	56	20	0	3	40	44 0,897	I	0	10	57275
72	71	56	30	0	3	30		I	0	10	
73	72	56	40	0	3	20		I	0	11	
74	73	56	50	0	3	10		I	0	11	
75	74	57	1	0	2	51		I	0	11	
76	75	57	12	0	2	48		I	0	11	
77	76	57	23	0	2	37		I	0	12	
78	77	57	34	0	2	26		I	0	12	
79	78	57	46	0	2	14		I	0	12	
80	79	57	58	0	2	2		I	0	12	
81	80	58	10	0	1	50	I	0	12		
82	81	58	22	0	1	38	I	0	12		
83	82	58	34	0	1	26	I	0	12		
84	83	58	46	0	1	14	I	0	12		
85	84	58	58	0	1	2	I	0	12		
86	85	59	10	0	0	50	I	0	12		
87	86	59	22	0	0	38	I	0	13		
88	87	59	34	0	0	26	I	0	13		
89	88	59	47	0	0	13				57307	
90	90	0	0	0	0	0	441,				

§. 10.

Nun sollte noch die krumme Linie bestimmt werden, welche die Oberfläche des Wassers im Stande des Gleichgewichts bey der Umdrehungsbewegung der Kugel in einem Kanal von einem Pol zum andern an der Meridianebene bildet. Diese krumme Linie muß wegen der Eigenschaft der flüssigen Massen gewiß so beschaffen seyn, daß die Richtung der wahrnehmbaren Schwere in jedem Punkte auf der Tangente dieses Punktes senkrecht sey; die wahrnehmbaren Richtungen der Schwere in verschiedenen Brei-

Breiten sind daher Normalen dieser krummen Linie. Die Bestimmung dieser krummen Linie überlasse ich indessen dem eigenen Nachdenken des Lesers, und will nur noch folgende Betrachtungen anstellen.

§. II.

Wenn man bey einem abgeplatteten Sphäroid, oder eigentlich bey einem Ellipsoid, welches durch die Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Achse entsteht, den Winkel, welchen der Halbmesser aus einem beliebigen Punkt im Mittelpunkte mit der großen Achse einschließt, die wahre Breite dieses Punktes = b , den Winkel aber, welchen die Normale aus diesem nämlichen Punkte mit der nämlichen großen Achse einschließt, die scheinbare Breite dieses Punktes = B benennet, und dabey die große Achse mit A , die kleine aber mit a bezeichnet, so folget aus den bekannten Eigenschaften der Ellipse, die Gleichung,

$$\text{Tang. } B = \left(\frac{A}{a}\right)^2 \text{Tang } b \text{ und } \text{Tang } b = \left(\frac{a}{A}\right)^2$$

Tang. B , es ist nämlich für die Gleichung der Ellipse

$$y = \frac{a}{A} \sqrt{\left(\frac{1}{4} A^2 - x^2\right)} \text{ die Subnormale } \frac{a^2}{A^2} x,$$

und bey der angenommenen Bezeichnung auch $y = x$, Tang. b ; woraus nun die angeführte Gleichung leicht folget.

Oben

Oben hatten wir Tang. $b = (1 - \frac{2D}{t^2p})$ Tang. $B.$

und allhier ist Tang. $b = (\frac{a}{A})^2$ Tang. $B.$

Wegen der Einförmigkeit dieser zwey Ausdrücke sollte man vermuthen, es dürfte vielleicht bey unserm Erdsphäroid $\frac{a}{A} = \sqrt{1 - \frac{2D}{t^2p}}$, und daher äußerst nahe $\frac{a}{A} = \frac{578}{579}$ seyn.

§. 12.

Ingleichen wenn man auf der angenommenen Kugel in der Richtung des Meridians über beyde Pole sich einen Kanal mit Wasser angefüllt gedenkt, so scheint bey der festgesetzten Umdrehungsbewegung die Oberfläche des Wassers im Stande des Gleichgewichts an der Meridianebene eine Ellipse abzubilden, deren kleine Achse von einem Pole zum andern sich zur großen, als dem Durchmesser des Aequator sich vielleicht verhalten könnte, wie 578 zu 579; die kleine Achse wäre daher $a = 6537558$, und die große $A = 6548870$ Par. Toisen, und das Wasser unter dem Aequator würde um 5656 Tois. höher stehen als unter dem Pole, weil nur bey dieser Gestalt der Oberfläche des Wassers unter den angenommenen Umständen die wahrnehmbare Richtung der Schwere überall senkrecht auf der Oberfläche wäre.

Wenn

Wenn die oberste Schich der angenommenen Kugel in der Dicke von ohngefähr 3000 auch 4000 Tois. aus einer weichen beynähe flüssigen Materie bestünde, der übrige Kern aber vollkommen fest wäre, so könnte man ebenfalls vermuthen, daß vielleicht auch eine solche Kugel bey der festgesetzten Umdrehungsbewegung die Gestalt eines Ellipsoids von den Abplattungsverhältniß $\frac{578}{579}$ annehmen würde; die Richtung der wahrnehmbaren Schwere wäre sodann überall senkrecht auf der Oberfläche, und die wahrnehmbare Länge des einfachen Sekundenpendels überall — jedoch das muß erst aus den Gründen der Attractionslehre bestimmt werden, welches ich bey einer andern Gelegenheit untersuchen will.

§. 13.

Wey einem solchen Ellipsoid von den Abplattungsverhältniß $\frac{578}{579}$ und der angeführten Größe der Achsen wären demnach aus den wahren Polhöhen die wahren Breiten nach der nämlichen Formel, wie oben bey der sich herumdrehenden Kugel zu berechnen; und eben so auch bey der Zeichnung einer Karte nach einer beliebigen Projectionsmethode die Derter nach ihren Längen und verbesserten wahren Breiten in das Projectionssnetz einzutragen. Wey der Zeichnung des Projectionssnetzes, da in einer solchen

solchen Zeichnung das Abplattungsverhältniß $\frac{578}{579}$ nicht bemerkbar dargestellt werden kann, müßte man das Ellipsoid immer für eine vollkommene Kugel ansehen, deren Durchmesser der mittlern geometrischen Proportionalgröße zwischen den zwey Achsen gleich sey. Nach eben dieser nämlichen Voraussetzung könnte man aus den Längen und verbesserten wahren Breiten zweyer Orter, deren Entfernung von einander ohne merklichen Fehler nach der bekannten sphärisch-trigonometrischen Formel berechnen.

§. 14.

Der Halbmesser eines solchen abgeplatteten Ellipsoids von der Umdrehungsachse a , und dem Durchmesser des Aequators A , für die wahre Breite b , ist

$$R = \frac{Aa}{2\sqrt{(A^2 \sin.^2 b + a^2 \cos.^2 b)}} \text{ für die obigen Werthe } a = 6537558, \text{ und } A = 6548870 \text{ Par. Tois. folgt daher nachstehende Tabelle.}$$

Benden wanren pithds ben	oder wahren Breiten		Halbmess- ser R des Ellipf.	Länge des Bogens zwischen den jenen Halbmess- ben dem Ellipsoid.	Länge des Bogens ben der Kugel des Durchm. $D = \sqrt{Aa}$	Zunahmen der Meridiangrade.		
						Ben dem Ellipsoid	Ben der Kugel	
0°	0	0	0	3274435	56943	56894	0	0
1	0	59	47	3274433				
15	14	57	2	3274058	56968	56926	25	32
16	15	56	51	3274006				
30	29	54	51	3273025	57029	57005	86	111
31	30	54	45	3272940				
45	44	54	3	3271613	57100	57100	157	206
46	45	54	3	3271514				
59	58	54	45	3270284	57171	57195	228	301
60	59	54	51	3270197				
74	73	56	50	3269211	57233	57275	290	381
75	74	57	1	3269159				
89	88	59	47	3268781	57257	57307	314	413
90	90	0	0	3268779				

Es ist merkwürdig, daß unter den festgesetzten Umständen die Zunahmen der wirklichen wahrnehmbaren Längen der Meridiangrade bey der vollkommenen Kugel größer sind, als bey dem angenommenen Ellipsoid.

§. 15.

Um von der eigentlichen Figur unserer Erde, welche vermöge des Durchschnittes ihres Schattenskegels bey den Mondfinsternissen immer eine Kugel zu seyn scheint, deutlichere Begriffe zu erlangen, dürfte es nicht undienlich seyn über ein abgeplattetes Ellipsoides solche Betrachtungen anzustellen, wie es
all

allhier bey einer Kugel geschehen ist; nur müßten diese Betrachtungen noch weiter ausgedehnet, und mit den zuverlässigsten Ausmessungen verschiedener Meridiangrade verglichen werden. Allhier will ich nur noch bemerken, daß die krumme Linie nes, welche die Oberfläche des Wassers im obenerwähnten Kanale an der Meridianebene bildet, keine Ellipse, sondern eine andere krumme Linie von der Eigenschaft sey, daß vermöge der Grundlehren der Hydrostatik die wahrnehmbaren Richtungen der Schwere zwar überall mit den Richtungen der Normalen dieser Punkte übereintreffen; dabey müssen aber vermöge der nämlichen Grundlehren der Hydrostatik, die Abstände oder Ordinaten dieser krummen Linie auf den Richtungen der Normalen von der Kreislinie gerechnet, sich umgekehrt verhalten, wie die wahrnehmbaren Beschleunigungen der Schwere in eben diesen Punkten. In der abgebildeten Figur ist daher bey den

angenommenen Größen Nn , oder Ss : $Ee = p : \frac{2D}{r^2}$

oder äußerst nahe wie $577 : 579$ oder etwas einfacher ausgedrückt $Nn : Ee = 289 : 290$, wenn nes die Oberfläche des Wassers in dem kreisförmigen Kanale NES vorstellet, und dabey die Tiefen des Wassers Nn oder Ss in Rücksicht des Halbmessers der Kugel gleichsam unendlich klein sind, etwan nicht viel über eine deutsche Meile betragen. Liebhaber der höhern Geometrie können für eine solche Kurve, die von einer Kreislinie äußerst wenig abweicht, eine Gleichung suchen, derselben einen

beliebigen Namen geben, und ihre Eigenschaften bestimmen.

§. 16.

Die obenangeführte Formel für den Halbmesser des Ellipsoïds kann man auch so schreiben:

$$R = \frac{\frac{1}{2}A}{\sqrt{(\cos.^2 b + \frac{A^2 \sin.^2 b}{a^2})}} =$$

$$\frac{\frac{1}{2} a A \sqrt{2}}{\sqrt{[(A^2 - a^2) (\frac{A^2 + a^2}{A^2 - a^2} + \cos. 2b)]}}$$

Will man hingegen diese Formel durch die wahre Polhöhe oder scheinbare Breite = B ausdrücken,

$$\text{so ist } R = \frac{1}{2} a \sqrt{\left(\frac{\frac{A^4}{a^4} + \text{Tang.}^2 B}{\frac{A^2}{a^2} + \text{Tang.}^2 B} \right)}$$

oder auch

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{(A^2 + a^2) \left(\frac{A^4 + a^4}{A^4 + a^4} + \cos. 2B \right)}{A^2 - a^2} + \cos. 2B \right]}$$

§. 17.

Auch für den Krümmungshalbmesser = K läßt sich eine brauchbare Formel angeben; für die wahre Pol-

Poßhöhe ober scheinbare Breite = B ist der Krümmungshalbmesser des elliptischen Meridianbogens

$$K = \frac{A^2}{2a (\sin.^2 B + \frac{A^2}{a^2} \cos.^2 B)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{a^2 A^2 \sqrt{2}}{\sqrt{[(A^2 - a^2) (\frac{A^2 + a^2}{A^2 - a^2} + \cos. 2B)]^{\frac{3}{2}}}}$$

Diese Formeln sind aus den oben im §. 11. bemerkten Gleichungen der Ellipse $y = \frac{a}{A} \sqrt{(\frac{1}{4}A^2 - x^2)}$

$$y = x \text{ Tang. } b, \quad x = \frac{\frac{1}{2} a A}{\sqrt{(a^2 + A^2 \text{ Tang.}^2 b)}} \quad \text{Sub-}$$

$$\text{normale} = \frac{a^2 x}{A^2}, \quad \text{Tang. } B = \frac{A^2}{a^2} \text{ Tang. } b \quad \text{sehr leicht}$$

abzuleiten, wenn man sich nur noch dabey aus der Kegelschnittslehre erinnert, daß der Krümmungshalbmesser dem Würfel der Normale getheilt durch das Quadrat des halben Parameters, dieser Halparameter aber der dritten Proportionalgröße nach der großen und kleinen Halbachse gleich sey.

§. 18.

Für obige Werthe $A = 6548870$ und $a = 6537558$ Par. Loif. folgt nachstehende Tabell: der Krümmungshalbmesser und wirklichen Längen einiger scheinbaren Breitengrade, nebst den dazu gehörigen wahren Breiten.

M 3

Wahre

Wahre Polhöhe oder scheinbare Breite.	Wahre Breite.	Krümmungs- halbmesser.	Länge des scheinbaren Breitengrades.
0 1	0 0' 0" 0 59 47,57	3263132 3263135	56953
15 16	14 57 1,85 15 56 51,17	3264265 3264417	56974
30 31	29 54 51,23 30 54 45,17	3267361 3267618	57029
45 46	44 54 3,16 45 54 3,35	3271598 3271892	57103
59 60	58 54 44,68 59 54 50,68	3275575 3275846	57172
74 75	73 56 50,62 74 57 1,30	3278806 3278959	57227
89 90	88 59 47,52 90 0 0,	3280100 3280100	57249

Die Längen der scheinbaren Breitengrade, welche oben im §. 14. bey dem nämlichen Ellipsoid aus den Halbmessern und den dazwischen eingeschlossenen Winkeln berechnet wurden, weichen von letztern aus den Krümmungshalbmessern abgeleiteten etwas ab, welches aber blos daher rühret, weil dort bey der Bestimmung der wahren Breiten die Bruchtheile der Sekunden vernachlässiget wurden.

An

In einem abgeplatteten Ellipsoïd, dessen große Achse, oder Aequators Durchmesser
 $A = 6548870$, und die kleine Achse $a = 6537558$ Pariser Toisen, sind:

Bey den wahren Polhö- hen oder schein- baren Breiten.	Die wahren Breiten.	Halbmesser des Ellipsoïdes.	Krümmungs- Halbmesser	Maas eines scheinbaren Breitengra- des.	Dessen Länge in Pariser Toisen.			Zunahmen der wirklichen Längen der scheinbaren Breitengrade.	
					Aus dem Halbmess- ser.	Aus dem Krüm- mungs- Halbmess	Bey der Kugel des Durchm. \sqrt{Aa}	Bey dem Ellipsoïd	Bey der Kugel
0°	0° 0' 0"	3274435	3263132	0° 59' 47.57"	56953	56953	56923	0	0
1	0 59 47.57	3274433	3263135						
15	14 57 1.85	3274058	3264265	0 59 49.32	56974	56974	56931	21	28
16	15 56 51.17	3274006	3264417						
30	29 54 51.23	3273025	3267361	0 59 53.94	57029	57029	57004	76	101
31	30 54 45.17	3272940	3267618						
45	44 54 3.16	3271613	3271598	1 0 0.19	57103	57103	57103	150	200
46	45 54 3.35	3271514	3281792						
59	58 54 44.68	3270284	3275575	1 0 6	57172	57172	57195	219	292
60	59 54 50.68	3270197	3275846						
74	73 56 50.62	3269211	3278806	1 0 10.68	57227	57227	57270	274	367
75	74 57 1.30	3269159	3278959						
89	88 59 47.52	3268781	3280100	1 0 12.48	57249	57249	57298	296	395
90	90 0 0	3268779	3280100						

211 4

§. 19.

153



Bei einem abgeplatteten Ellipsoid, an welchem die Richtung der wahrnehmbaren Schwere überall mit der Normale zusammentrifft, oder senkrecht gegen die Oberfläche ist, läßt sich das Abplattungsverhältniß $= \frac{A}{a}$, welches ich $= \alpha$ setzen will, aus den gemessenen Längen zweier Meridiangrade M, N , in sehr verschiedenen scheinbaren Breiten m, n (m in der Mitte von M nahe am Aequator, und n in der Mitte von N so nahe als möglich am Pole) sehr leicht herleiten, es ist nämlich bei dieser Bezeichnung wegen §. 17.

$$1) \frac{\alpha^2 a \cdot \text{Arc. } 1^\circ}{2(\sin.^2 m + \alpha^2 \cos.^2 m)^{\frac{3}{2}}} = M$$

$$2) \frac{\alpha^2 a \cdot \text{Arc. } 1^\circ}{2(\sin.^2 n + \alpha^2 \cos.^2 n)^{\frac{3}{2}}} = N$$

daraus folgt durch die Division dieser zwey Gleichungen

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{N^{\frac{2}{3}} \sin.^2 n - M^{\frac{2}{3}} \sin.^2 m}{M^{\frac{2}{3}} \cos.^2 m - N^{\frac{2}{3}} \cos.^2 n} \right)}$$

An unserem Erdsphäroid hat man durch die wirklich vorgenommenen Ausmessungen und Beobachtungen gefunden, daß die Meridiangrade vom Aequator gegen beyde Pole zunehmen. Daraus hat man geschlossen, daß unser Erdsphäroid ein abge-

gez

geplattetes Ellipsoid sey, und hat sodann aus den unter verschiedenen Breiten gemessenen Meridiangraden mittelst voriger Formel das Abplattungsverhältniß abgeleitet. Allein dieser Schluß kann nur alsdann richtig seyn, wenn vorher aus andern unumstößlichen Gründen erwiesen wird, 1) daß unser Erdsphäroid wirklich ein abgeplattetes Ellipsoid sey; 2) daß bey der Umdrehungsbewegung dieses Erd-Ellipsoids die Richtung der wahrnehmbaren Schwere überall mit der Normallinie zusammentreffe. Denn oben im §. 9. hat man ja gesehen, daß auch bey der Umdrehungsbewegung einer vollkommenen Kugel die Meridiangrade vom Aequator gegen die Pole sehr merklich zunehmen. Wenn man dort aus dem Meridiangrade am Aequator $56894 = M$ und am Pol $57307 = N$, und aus den dazu gehörigen Breiten $m = 0^\circ, 30'$, $n = 89^\circ, 30'$ mittelst der Formel §. 17. das Achsenverhältniß berechnen wollte, so würde folgen $\alpha = \sqrt[3]{\frac{57307}{56894}}$ und daher äußerst nahe α oder $\frac{A}{a} = \frac{415}{414}$, da doch völlig genau $A = a$ ist.

§. 20.

Ehe man bloß allein aus den gemessenen Längen der Meridiangrade in verschiedenen Breiten und aus den dabey beobachteten Längen des einfachen Sekundenpendels auf die eigentliche Figur unseres Erdsphäroids einen Schluß wagen darf, scheint es

M 5

noth-

nothwendig zu seyn, folgende Fragen nach den Gründen der Attractionslehre genau zu erörtern.

1) Bey einem vollkommenen Ellipsoid von gleichförmiger Dichtigkeit, dessen Größe, Masse, und Achsenverhältniß für bekannt angenommen werden, im freyen Zustande der Ruhe ohne Rotation wo zielen die Richtungen der Schwere (der eigenen Attraction mit Beseitigung aller äußern Störungen) unter verschiedenen Polhöhen hin? 2) Was ist da für eine Relation zwischen den wahren Polhöhen und wahren Breiten? 3) Wie verhalten sich die Längen des einfachen Sekundenpendels oder die hiemit in Verbindung stehenden Beschleunigungen der Schwere in verschiedenen wahren Breiten? 4) Wie sind da die wirklichen Längen der Meridiane in verschiedenen Breiten beschaffen? 5) Was hat an einem solchen Ellipsoid die Oberfläche des Wassers in einem Kanale von einem Pole zum andern im Stande des Gleichgewichts für eine Gestalt? 6) Wie ist da die Oberfläche eines Meeres beschaffen? 7) Wenn man nun annimmt, daß ein solches Ellipsoid von vollkommener Festigkeit in eine gleichförmige Umdrehungsbewegung um seine Erzeugungsachse versetzt wird, wie lauten sodann die Antworten auf vorige Fragen? 8) Wie sind alle diese Antworten beschaffen, wenn das in Betrachtung gezeigte Ellipsoid nicht abgeplattet, sondern länglich ist?

Jch

Ich zweifle nicht, daß alle diese Fragen, nebst mehr andern, in verschiedenen Schriften ausführlich, und umständlich erörtert seyn werden. Nur ist es mir in meiner dormaligen Lage von allen literarischen Hilfsmitteln schon so lange entblößet, nicht gestattet nachschlagen zu können, was und wie darüber gedacht und gesagt worden sey.

Aufgesetzt zu Mainz im Junii 1797

von

Georg Vega ic.

derzeit Vertheidigungs- Artillerie-
Commandant allhier.

An

A n h a n g.

Anwendung der im 30 §. der Einleit. m. log. trig. Tafeln bemerkten Berichtigung der gewöhnlichen geogr. Breiten auf geographische Ortsbestimmungen.

Im Traité analyt. des mouvem. appar. des corps celest. par Mr. du Séjour finde ich die Lage von Brest auf folgende Art angegeben.

Länge des senkrechten Bogens von Brest bis auf den Meridian der Pariser Sternwarte = 259168 Par. Loif.

Abstand dieses senkrechten Distanzbogens von der Pariser Sternwarte gegen Süden = 14614 Par. Loif.

Wahre Polhöhe der Pariser Sternwarte = $48^{\circ} 50' 14''$ Hieraus läßt sich nun die Polhöhe und der Längenunterschied für Brest auf folgende Art berechnen.

Ich setze den Durchmesser unserer Erbkugel = 6343210 Par. Loif. (eine Zahl, die bey dieser Folge

Folge der Ziffern sehr leicht im Gedächtnisse zu behalten ist; der fränkische Métre wäre für diesen Durchmesser äußerst nahe = 37 Par. Zoll; da solcher von 443. 44 Par. Lin. schon bis 443. 52 angewachsen ist, so kann er vielleicht in Kürze bis 444.00 anwachsen). Daraus folgt wegen der Umdrehungsbewegung der Erdkugel die wahre Breite der Pariser Sternwarte = $48^{\circ} 44' 20''$ mittelst der Formel $\text{Log. Tang. lat. ver.} = \text{Log. Tang. elev. poli} + 0.9984973 - 1$. Es ist daher Polardistanz der Pariser Sternwarte = $41^{\circ} 15' 40''$ Der senkrechte Distanzbogen von Brest bis an den Pariser Meridian 259168 Par. Loif. in Grade verwandelt = $4^{\circ} 32' 19\frac{3}{4}'' = B$ nach der Formel $\text{Log. B. Sef.} = \text{Log. } 259168 + 5.3144251 - \text{Log. } \frac{1}{2} (6543210) = 5.4135814 + 0.7996642 - 2 = 4.2132456$, nämlich $B = 16339.75 \text{ Sef.}$ Der Abstand aber dieses senkrechten Distanzbogens von der Pariser Sternwarte 14614 gegen Süden ist = $0^{\circ} 15' 21\frac{1}{2}'' = a$ nach der Formel $\text{Log. } a = \text{Log. } 14614 + 0.7996642 - 2 = 2.9644333$, nämlich $a = 921, 37 \text{ Sef.}$ Es ist daher die Polardistanz dieses senkrechten Bogens = $41^{\circ} 15' 40'' + 0^{\circ} 15' 21\frac{1}{2}'' = 41^{\circ} 31' 1'' = A$.

Nun läßt sich in dem rechtwinklichten sphärischen Dreyeck aus A und B der dem Perpendikel B gegenüber

über liegende Winkel b am Pol als der Längenunterschied zwischen Paris und Brest mittelst der bekannten Formel berechnen.

$$\text{Cot. } b = \text{Cot. } B \times \text{Sin. } A.$$

Es ist nämlich

$$\text{Log. Sin. } A = \text{L. Sin. } 41^{\circ} 31' 1'' = 9.8214097$$

$$\text{Log. Cot. } B = \text{L. Cot. } 43^{\circ} 32' 19\frac{3}{4}'' = \underline{11.1002833}$$

Längenunterschied

$$6^{\circ} 49' 45''; \text{ Log. Cot. } b = 10.9216930$$

in Zeit verwandelt = $27^{\text{m}} 19^{\text{s}}$.

Eben dieses findet auch du Sejour durch eine sehr künstliche und mühsame Berechnung.

In dem nämlichen rechtwinklichten sphärischen Dreyecke findet man die Hypothenuse H als die Polardistanz von Brest mittelst der Formel $\text{Cos. } H = \text{Cos. } A \times \text{Cos. } B$.

Es ist nämlich

$$\text{Log. Cos. } A = \text{Log. Cos. } 41^{\circ} 31' 1'' = 9.8743424$$

$$\text{Log. Cos. } B = \text{Log. Cos. } 43^{\circ} 32' 19\frac{3}{4}'' = \underline{9.9986359}$$

Polardistanz von Brest

$$= 41^{\circ} 43' 11'' \text{ Log. Cos. } H = 9.8729783$$

daher wahre Breite

$$= 48^{\circ} 16' 49''$$

und endlich Polhöhe

$$= 48^{\circ} 22' 43'' \text{ wegen L. T. elev. pol. =}$$

$$\text{L. T. lat. ver. } + 0.0015027$$

Du

Du Sejour findet diese Polhöhe durch seine künstliche Berechnung = $48^{\circ} 22' 39''$.

Wenn die geodätische Angabe der Lage von Brest nach du Sejour richtig ist, so dürfte die so berechnete Länge und Polhöhe eben so zuverlässig seyn, als wenn solche durch die sorgfältigste astronomische Beobachtung bestimmt worden wäre, obschon der angenommene Durchmesser der Erdkugel vielleicht über 1000 Par. Tois. fehlerhaft ist. Um die geographischen Ortsbestimmungen nach der angeführten Art aus geodätischen Messungen möglichst richtig zu erhalten, dürfte es vielleicht rathlich seyn für verschiedene sehr entlegene Erdstrecken verschiedene Halbmesser der Erdkugel anzunehmen. Der Erdhalbmesser für die Erdoberfläche von Ungarn ist gewiß kleiner, als der des mittlern Horizonts von der Schweiz.

Wenn ich die geodätischen Messungen des großbritannischen Generals le Roi, und die damit verbundenen verschiedenen astronomischen Beobachtungen bey der Hand hätte, so wollte ich gern untersuchen, ob die Berechnung der Längen und Polhöhen nach der angeführten Art allda auch eben so genau zutrifft, als bey Brest. Wenn der Distanzbogen zwischen den Sternwarten von Paris und Greenwich in Par. Tois. bekannt ist, so muß aus diesem und den beyden Polhöhen der Längenunterschied berechnet werden können.

Damit

Damit in einer geographischen Karte die Lage der Derter gegen einander möglichst richtig werde, wenn solche nach ihren beobachteten Längen und Polhöhen eingetragen werden, so sollte bey der Entwerfung und Zeichnung des geographischen Netzes die oben angeführte Berichtigung der Polhöhen oder scheinbaren Breiten der Parallelkreise in Erwägung gezogen werden. Die Parallelkreise sollten nämlich für die wahren geographischen Breiten gezeichnet, und diesen die dazu gehörigen scheinbaren Breitengrade beygesetzt werden. Z. B. Um die Parallelkreise von 10° , 20° , 30° , 40° , 50° , 60° , 70° , oder 80° scheinbare Breite erhalten, müßten die zu $9^{\circ} 57' 58''$, $19^{\circ} 56' 11''$, $29^{\circ} 54' 51''$, $39^{\circ} 54' 9''$, $49^{\circ} 54' 9''$, $59^{\circ} 54' 51''$, $69^{\circ} 56' 10''$, $79^{\circ} 57' 58''$ zugehörigen Parallelkreise gezeichnet, und solche mit den vorigen Zahlen benennet werden. Dadurch werden die Meridiangrade vom Aequator gegen die Pole ein wenig zu nehmen, als wenn die Erde ein abgeplattetes Sphäroid wäre. Bey der Entwerfung eines geographischen Netzes für Afrika dürfte es allerdings nothwendig seyn die angeführte Berichtigung der scheinbaren Breiten in Erwägung zu ziehen.



Pa 3460

ULB Halle

3

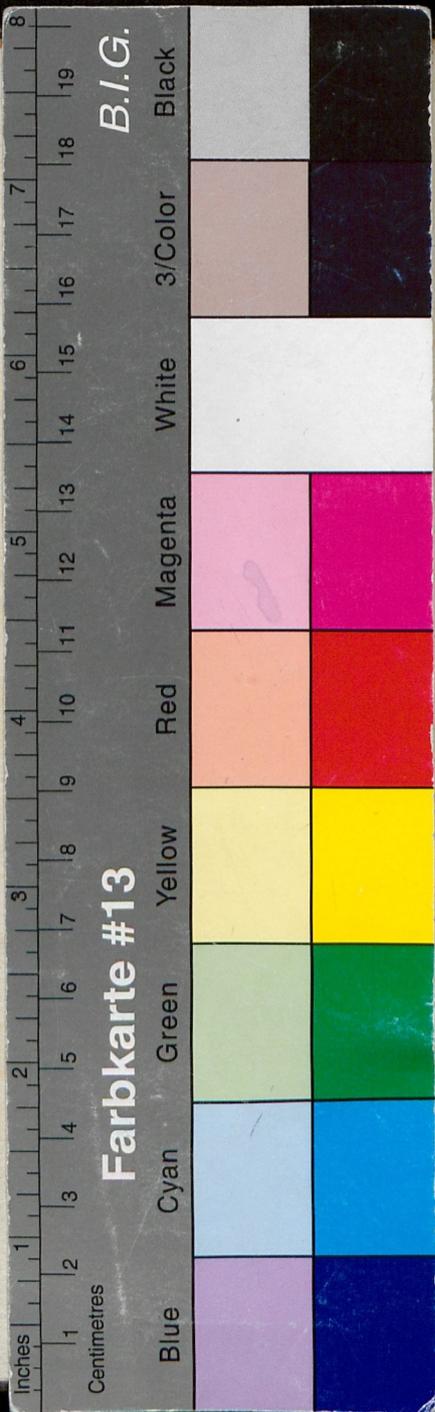
005 377 587



110







Georg Vega's
Ritters des militärischen Marien-Theresien-Ordens,
Majors und Professors der Mathematik des
k. k. Artilleriecorps u. s. w.

Mathematische Betrachtungen

über

eine sich um eine unbewegliche Achse gleich-
förmig drehende feste Kugel, und die Folgen
dieser Voraussetzung für Astronomie, Geo-
graphie und Mechanik, in Beziehung
auf unser Erdsphäroid.

Mit 1. Kupfer.

Erfurt,
bey Beyer und Marina
1798.

R. 397