18

Anwendung der Combinatorischen Analytik zur Bestimmung der trigonometrischen Linien der Summe mehrerer Winkel, wenn die trigonometrischen Linien der einzelnen Winkel gegeben sind.

Von

Dr. Burckhardt.

Mit 1. Kupfer.

Erfurt,
bey Beyer und Maring.
1799.

2

B., Johann Karl

Anwendung der Combinatorischen Analytik zur Bestimmung der trigonometrischen Linien der Summe mehrerer Winkel, wenn die trigonometrischen Linien der einzelnen Winkel gegeben sind.

Von
Dr. Burckhardt.

(Vorgelesen in der kurf. mainzl. Akademie nützl. Wissenschaften zu Erfurt, den 2ten Januar 1798.)

Allgemeine Formeln sind dem Mathematiker nicht nur wichtig, weil die täglichen Erweiterungen der Analysis und ihrer Anwendungen diese Allgemeinheit immer mehr erfordern, sondern auch vorzüglich dadurch schäzbar, daß man die besondern Fälle, die sie unter sich befassen, sämmtlich leicht übersehen und ihren gegenseitigen Zusammenhang bemerken kann. In dieser Rücksicht wage ich es, einer Erlauchten Akademie diesen Versuch vorzulegen. Bekannt

kannt sind die Formeln für Tangenten, Cosinus und Sinus des mfachen Bogen aus den trigonometrischen Linien des einfachen Bogens: ich habe allgemeiner angenommen, daß die m Bogen ungleich sind, daß die Tangente jedes Bogens oder sein Sinus oder Cosinus gegeben sey, und habe nun die Tangente, den Sinus und den Cosinus der Summe aller m einzelnen Bögen gesucht; hieraus ließen sich denn leicht jene bekannten Formeln herleiten, indem man alle einzelnen gegebenen Bogen und ihre trigonometrischen Linien einander gleich sezte. Den Fall für die Tangente hat schon Prony im Journal polytechnique Cahier II. p. 16. so behandelt; natürlich braucht er keine Combinationsclassen, sondern willkührliche Zeichen dafür: wie vortheilhaft aber der Gebrauch systematischer Zeichen ist, sobald man nur etwas an ihren Gebrauch gewöhnt ist, wird man hoffentlich auch hier finden.

I. Satz.

Die Bogen

$\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''' \ldots\ldots a^{(n-1)}, \alpha^{(n)}$

haben folgende Tangenten:

$t, t', t'', t''' \ldots\ldots t^{(n-1)}, t^{(n)}$

dann

dann ist tang. $[\alpha + \alpha' \dots + \alpha^{(n-1)}]$

$$= \frac{A^{\backprime}_{(n)} - C^{\backprime}_{(n)} + E^{\backprime}_{(n)} - G^{\backprime}_{(n)} + \dots}{1 - B^{\backprime}_{(n)} + D^{\backprime} - F^{\backprime} + \dots}$$

wo: $A^{\backprime}_{(n)}, B^{\backprime}_{(n)}, C^{\backprime}_{(n)}, D^{\backprime}_{(n)} \dots\dots$ die 1ste, 2te, 3te, 4te .... Combinationsclasse ohne Wiederholungen aus allen n gegebenen Tangenten $t, t', \dots t^{(n-1)}$ bedeuten. Die Reihe dieser Classen bricht von selbst ab, da die nte Klasse die lezte ist und aus dem Product aller Tangenten besteht.

Beweis.

1) Bekanntlich ist tang. $(\alpha + \alpha') = \frac{t + t'}{1 - t\,t'}$

dies ist offenbar $\frac{A^{\backprime}_{(2)}}{1 - B^{\backprime}_{(2)}}$

Nach eben diesem Satz ist tang. $(\alpha + \alpha' + \alpha'')$

$$= \frac{\text{tang. } (\alpha + \alpha') + \text{tang. } \alpha''}{1 - \text{tang. } (\alpha + \alpha') . \text{tang. } \alpha''}.$$

Man substituire nun für tang. $(\alpha + \alpha')$ den in (1) gefundenen Werth und multiplicire Zähler und Nenner mit $1 - tt'$ so wird

$$\text{tang.}\,(\alpha+\alpha'+\alpha'') = \frac{t'+t''+t''(1-tt')}{1-tt'-t''(t+t')}$$

$$= \frac{(t+t'+t'')-tt't''}{1-(tt'+tt''+t't'')}$$

oder wenn man die Combinationsclassen braucht

$$\text{tang.}\,(\alpha+\alpha'+\alpha'') = (\underset{(3)}{A`}-\underset{(3)}{C`}) : [1-\underset{(3)}{B`}].$$

3) Nun ist ferner tang. $(\alpha+\alpha'+\alpha''+\alpha''')$

$$= \frac{\text{tang.}\,(\alpha+\alpha'+\alpha'')+\text{tang.}\,\alpha'''}{1-\text{tang.}\,(\alpha+\alpha'+\alpha'').\,\text{tang.}\,\alpha'''}$$

hier wieder für die tang. $(\alpha+\alpha'+\alpha'')$ ihren Werth aus (2) gesezt und Zähler und Neaner mit $(1-tt'-tt''-t't'')$ multiplicirt, findet sich

$$\text{tang.}\,(\alpha+\alpha'+\alpha''+\alpha''') =$$

$$\frac{(1-tt'-tt''-t't'')t'''+t+t'+t''-tt't''}{1-tt'-tt''-t't''-t'''(t+t'+t''-tt't'')}$$

oder tang. $(\alpha+\ldots\alpha''')$

$$= \frac{(t+t'+t''+t''')-(tt't''+tt't'''+tt''t'''+t't''t''')}{1-(tt'+tt''+tt'''+t't''+t't'''+t''t''')+tt't''t'''}$$

$$= (\underset{(4)}{A`}-\underset{(4)}{C`}) : (1-\underset{(4)}{B`}+\underset{(4)}{D`})$$

4) Die Analogie giebt das Gesetz des Fortgangs so deutlich, daß keine weitere Entwickelung der

der Formeln nöthig zu seyn scheint. Man kann aber nach der bekannten Bernoullischen Beweisart die Formel in aller Strenge beweisen. Wenn nämlich der Satz für die Summe von n Bogen wahr ist, so ist er auch für die Tangente der Summe von (n + 1) Bogen gültig. Denn es sey der Kürze wegen

$$\beta = \underset{(n)}{A'} - \underset{(n)}{C'} + \underset{(n)}{E'} - \underset{(n)}{G'} + \cdots$$

$$\gamma = 1 - \underset{(n)}{B'} + \underset{(n)}{D'} - \underset{(n)}{F'} + \cdots$$

so ist nach dem obigen Satz

$$\text{tang.}\,(\alpha + \alpha \ldots + \alpha^{(n-1)}) = \frac{\beta}{\gamma}.$$

Da nun $\text{tang.}\,(\alpha + \alpha' \ldots + \alpha^{(n-1)} + a^{n)})$

$$= \frac{\text{tang.}\,(\alpha + \alpha' \ldots + \alpha^{(n-1)}) + \text{tang.}\,\alpha^{(n)}}{1 - \text{tang.}\,(\alpha + \alpha' \ldots + \alpha^{(n-1)}).\,\text{tang.}\,\alpha^{(n)}}$$

$$= \left(\frac{\beta}{\gamma} + t^{(n)}\right) : \left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\, t^{(n)}\right)$$ oder mit γ multiplicirt

$$\text{tang.}\,(\alpha + \alpha' \ldots + \alpha^{n)}) = \frac{\beta + \gamma\, t^{(n)}}{\gamma - \beta\, t^{(n)}}.$$

Substituirt man nun für β und γ ihre Werthe, so erhält man für den Zähler der gesuchten $\text{tang.}\,(\alpha + \alpha' \ldots + \alpha^{(n)})$.

$$A'_{(n)} - C'_{(n)} + E'_{(n)} - G'_{(n)} +$$
$$+ t^{(n)} - t^{(n)} B'_{(n)} + t^{(n)} D_{(n)} - t^{(n)} F'_{(n)} + \ldots$$

Hier lassen sich die über einanderstehenden Glieder bequem summiren. Es ist nämlich $A'_{(n)} + t^{(n)} = A'_{(n+1)}$, dieß ist für sich klar; ferner ist $C'_{n} + B'_{n} t^{(n)} = C'_{(n+1)}$. Denn um die 3te Classe aus $(n+1)$ Dingen zu erhalten, darf man nur zur 3ten Classe aus n Dingen die neuen Verbindungen hinzusetzen, die aus dem $(n+1)$ten Ding entstehen; man erhält diese, indem man die vorhergehende Classe mit dem lezten Dinge verbindet. Diese Gründe sind allen Classen allgemein, daher ist

$$E'_{(n)} + D'_{n} t^{(n)} = E'_{(n+1)}$$

und $G'_{(n)} + F'_{(n)} t^{(n)} = G'_{(n+1)}$ etc.

Hierdurch wird der Zähler

$$= A'_{(n+1)} - C'_{(n+1)} + E'_{(n+1)} - G'_{(n+1)}$$

Eben so ist der Nenner $\gamma - \beta\, t^{(n)}$ folgendem Ausdruck gleich

$$1 - \underset{(n)}{B'} + \underset{(n)}{D'} - \underset{(n)}{F'} + \underset{(n)}{H'} - \ldots$$

$$- \underset{(n)}{A'}t^{(n)} + \underset{(n)}{C'}t^{(n)} - \underset{(n)}{E'}t^{(n)} + \underset{(n)}{G'}t^{(n)} - \ldots$$

welcher nach obigen Gründen sich in folgenden verwandelt:

$$1 - \underset{(n+1)}{B'} + \underset{(n+1)}{D'} - \underset{(n+1)}{F'} + \underset{(n+1)}{H'} - \ldots$$

Hiernach ist tang. $(\alpha + \alpha' \ldots + \alpha^n) =$

$$(\underset{(n+1)}{A'} - \underset{(n+1)}{C'} + \underset{(n+1)}{E'} - \underset{(n+1)}{G'} \ldots\ldots):$$

$$(1 - \underset{(n+1)}{B'} + \underset{(n+1)}{D'} - \underset{(n+1)}{F'} + \ldots)$$

Wenn also das angenommene Gesetz für die Tangente einer Anzahl Bogen wahr ist, so ist es auch für die nächst höhere Anzahl wahr. Durch die in (1) (2) und (3) angestellte Rechnung erhellet, daß es bis zur Tangente der Summe von 4 Bogen wahr ist, also ist das Gesetz allgemein für jede Anzahl von Bogen gültig.

II. Hülfssatz.

Wenn in der $m$ten Combinationsclasse ohne Wiederholungen aus n gegebenen Dingen d. h. in $\underset{(n)}{M'}$ diese n Dinge alle einander gleich werden, z. E. $= t$, so verwandelt sich jede Complexion (jedes Product

duct aus m verschiedenen Factoren) izt in t^m. Diese mte Potenz von t muß man aber so vielmal nehmen als vorher einzelne Verbindungen in $\overset{M'}{(n)}$ waren. Die Anzahl dieser Verbindung ist bekanntlich $^n\mathfrak{M}$

$$= \frac{n.\ n-1.\ n-2\ \ldots\ (n-m+1)}{1.\ 2.\ \ 3.\ \ldots\ldots\ m.}$$

III. Satz.

Wenn in der Formel des ersten Satzes $t = t' = t'' = t''' =$ etc. wird, so ist auch $\alpha = \alpha' = \alpha'' = \alpha''' = \alpha'''' \ldots\ldots$ und $\alpha + \alpha' + \alpha'' \ldots + a^{(n-1)} = n\alpha$; ferner nach dem Hülfssatze $\underset{(n)}{A'} = {}^n\mathfrak{A}t$; $\underset{(n)}{B'} = {}^n\mathfrak{B}t^2$; $\underset{(n)}{C'} = {}^n\mathfrak{C}t^3$ etc.; dies substituirt erhält man

$$\text{tang.}\,(n\alpha) = \frac{{}^n\mathfrak{A}t - {}^n\mathfrak{C}t^3 + {}^n\mathfrak{E}t^5 - {}^n\mathfrak{G}t^7 + \ldots\ldots}{1 - {}^n\mathfrak{B}t^2 + {}^n\mathfrak{D}t^4 - {}^n\mathfrak{F}t^6 + \ldots\ldots}$$

dies ist die bekannte Formel für die Tangente des nfachen Bogens aus der Tangente des einfachen Bogens.

IV. Satz.

Es sey die Summe aller (n+1) Winkel $\alpha + \alpha' + \alpha'' \ldots + \alpha^{(n)} = 180^\circ$; so ist die Tangente dieser

dieser Summe = o. Die gegebenen Tangenten $t, t', t'' \ldots$ gehören aber nicht zum Halbmesser 1, wie in den Formel des ersten Satzes, sondern zum Halbmesser x?

Man wird unmittelbar obige Formel brauchen können, wenn man nur die hier gegebenen Tangenten durch Dividiren mit x auf den Halbmesser 1 bringt. Man dividirt also die erste Classe A' durch x, die 2te B' durch x^2, C' durch x^3 ꝛc. und bezieht dann die Classen unmittelbar auf die gegebenen Tangenten $t, t', t'' \ldots$ so wie sie für den Halbmesser x gehören. Man erhält demnach

$$\text{tang.}\,(\alpha + \alpha' + \alpha'' \ldots\ldots + \alpha^{n}) = o = \frac{\underset{(n+1)}{A'}x^{-1} - \underset{(n+1)}{C'}x^{-3} + \underset{(n+1)}{E'}x^{-5} - \underset{(n+1)}{G'}x^{-7} \ldots\ldots}{1 - \underset{(n+1)}{B'}x^{-2} + \underset{(n+1)}{D'}x^{-4} - \underset{(n+1)}{F'}x^{-6} \ldots\ldots}$$

$$\text{d. h. } o = \underset{(n+1)}{A'}x^{-1} - \underset{(n+1)}{C'}x^{-3} + \underset{(n+1)}{E'}x^{-5} - \underset{(n+1)}{G'}x^{-7} \ldots\ldots$$

Durch Multipliciren mit x^{n} oder mit x^{n+1} erhält diese Gleichung noch folgende Form:

für n = ungerader Zahl

$$o = \underset{n+1}{A'}x^{n-1} - \underset{(n+1)}{C'}x^{n-3} + \underset{(n+1)}{E'}x^{n-5} - \underset{(n+1)}{G'}x^{n-7} \ldots\ldots$$

für n = gerader Zahl.

$$0 = \underset{(n+1)}{A'} x^{n-1} - \underset{(n+1)}{C'} x^{n-2} + \underset{(n+1)}{E'} x^{n-4} - \underset{(n+1)}{G'} x^{n-6} \ldots\ldots$$

Es kann bey diesem Verfahren der Zweifel entstehen, ob man berechtigt ist allemal den Zähler der Tangente $(\alpha + \alpha' + \alpha'' \ldots . \alpha^{(n)})$ $= 0$ zusetzen, wenn die Tangente selbst $= 0$ wird, da ein Bruch auch dadurch $= 0$ werden kann, daß sein Nenner unendlich groß wird: ich theile daher noch folgende Auflösung mit, wo diese Schwürigkeit wegfällt. Da $(\alpha + \alpha' + \alpha'' \ldots\ldots + \alpha^{(n-1)})$ $= 180^0 - \alpha^{(n)}$, so ist $- \tan\alpha^{(n)} = \tan(\alpha + \alpha' + \ldots\ldots + \alpha^{(n-1)})$

$$\text{oder } -\frac{t^{(n)}}{x} = \frac{\underset{(n)}{A'} x^{-1} - \underset{(n)}{C'} x^{-3} + \underset{(n)}{E'} x^{-5} - \ldots}{1 - \underset{(n)}{B'} x^{-2} + \underset{(n)}{D'} x^{-4} - \ldots}$$

oder mit dem Divisor linker Hand des Gleichheitszeichens multiplicirt:

$$-t^{(n)} x^{-1} + t^{(n)} \underset{(n)}{B'} x^{-3} - t^{(n)} \underset{(n)}{D'} x^{-5} + \ldots$$

$$= \underset{(n)}{A'} x^{-1} - \underset{(n)}{C'} x^{-3} + \underset{(n)}{E'} x^{-5} \ldots\ldots$$

oder $0 =$

$$\begin{cases} \underset{(n)}{A'} x^{-1} - \underset{(n)}{C'} x^{-3} + \underset{(n)}{E'} x^{-5} - \ldots\ldots \\ + t^{(n)} x^{-1} - t^{(n)} \underset{(n)}{B'} x^{-3} - t^{(n)} \underset{(n)}{D'} x^{-5} - \ldots \end{cases}$$

wo

wo sich die über einander stehenden Glieder nach dem oben bemerkten Satz summiren lassen, so daß

$$0 = A'_{(n+1)} x^{-1} - C'_{(n+1)} x^{-3} + E'_{(n+1)} x^{-5} - \ldots\ldots$$

wird, welches mit der oben gefundenen Formel vollkommen identisch.

Erstes Beyspiel.

Man sucht den Halbmesser GD des im Dreyeck ABC beschriebenen Kreises EDF (Fig. 1.) Man hat also $n + 1 = 3$ oder $n = 2$; $FGC = CGD = \alpha$; $DGB = BGE = \alpha'$; $EGA = AGF = \alpha''$; $DG = FC = t$; $DB = BE = t'$; $AE = AF = t''$; so hat man $0 = A'_{(3)} x^2 - C_{(3)} x^0$ oder $x^2 = C'_{(3)} : A'_{(3)}$ d. h. $x^2 = t\, t'\, t'' : (t + t' + t'')$.

Dafür kann man leicht die drey Seiten des Dreyecks substituiren; es sey $CB = a$, $BA = c$, $AC = b$ ferner $\frac{a + b + c}{c} = s$, so hat man $t + t' = a$; $t' + t'' = b$; $t'' + t = c$, und alle drey Gleichungen addirt $2\,(t + t' + t'') = a + b + c = 2s$; also $t + t' + t'' = s$.

Hieraus findet sich

$$t = s - (t' + t'') = s - b.$$
$$t' = s - (t + t'') = s - c.$$
$$t'' = s - (t + t') = s - a.$$

Diese Werthe in obige Formel gesezt wird x^2
$$= \frac{(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}{s}$$

Zweytes Beyspiel.

Man sucht den Halbmesser EG des im Viereck ABCD beschriebenen Kreises. Hier ist $EG = x$; $IB = BE = t$; $EC = CF = t'$; $FD = DH = t''$; $HA = AI = t'''$. $n + 1 = 4$. oder $n = 3$. folglich $0 = \underset{(4)}{A'}\,x^3 - \underset{(4)}{C'}\,x^1$; keine 5te und höhere Klassen aus 4 Dingen giebt es nicht: die erhaltene Formel mit x dividirt giebt $0 = \underset{(4)}{A'}\,x^2 - \underset{(4)}{C'}$ oder $x^2 = \underset{(4)}{C'} : \underset{(4)}{A'}$
$$= \frac{tt't'' + tt't''' + tt't''' + t't''t'''}{t + t' + t'' + t'''}$$
Es ist nicht möglich statt der vier Größen t, t', t'', t''' die vier Seiten des Vierecks in dieser Formel zu substituiren, so wie im ersten Beyspiel geschehen. Es ist nämlich die Summe der zwey einander gegenüberstehenden Seiten gleich groß, $CB + AD = DC + AB$ (jede dieser Summen ist $= t + t' + t'' + t'''$). Durch diese Gleichung ist eine von den vier Seiten schon durch die übrigen drey bestimmt; man hat also wenn alle vier Seiten gegeben, nur drey Data, und zur Eliminirung der vier Größen t, t', t'', t''' nur drey Gleichungen. Dieser Umstand hat bey allen Vielecken statt, wo die Anzahl der Seiten gerade ist.

V. Satz.

V. Satz.

Von den Bogen

$\alpha, \alpha', \alpha'' \alpha''', \alpha'''' \ldots\ldots \alpha^{(n-1)}, \alpha^{(n)}$ sind gegeben

die Sin. $s, s', s'', s''', s'''' \ldots\ldots s^{(n-1)}, s^{(n)}$

und Cos. $c, c', c'', c''', c'''' \ldots\ldots c^{(n-1)}, c^{(n)}$

Man sucht den Sinus und Cosinus der Summe der n gegebenen Bogen.

1) Zum Grund der folgenden Auflösung dienen die zwey bekannten Sätze daß $\sin.(a+b) = \sin.a\cos.b + \sin.b\cos.a$ und $\cos.(a+b) = \cos.a\cos.b - \sin.a.\sin.b$.

2) Nach diesem ist $\sin.(\alpha+\alpha') = sc' + cs'$ und $\cos.(\alpha+\alpha') = cc' - ss'$.

3) Man erkennt ferner, daß, wenn der Sinus und Cosinus der Summe von $(n-1)$ Bogen gegeben sind, man daraus den Sinus von n Bogen findet; indem man den Sinus mit $c^{(n-1)}$ den Cosinus mit $s^{(n-1)}$ multiplicirt. Eben so den Cosinus von n Bogen, indem man den Cosinus von $(n-1)$ Bogen, mit Cosinus von $\alpha^{(n-1)}$ d. h. $c^{(n-1)}$, den Sinus hingegen mit $s^{(n-1)}$ multiplicirt, und die Zeichen des Sinus alle in entgegengesezte verwandelt. Dies giebt folgende involutorische Darstellung:

Für

Für den Sinus.

		1	2	3	4	5	
	+	s	c'	c''	c'''	c''''	
1.							
	+	c	s'	c''	c'''	c''''	
2.							
	+	c	c'	s''	c'''	c''''	
	—	s	s'	s''	c'''	c''''	etc.
3.							
	+	c	c'	c''	s'''	c''''	
	—	s	s'	c''	s'''	c''''	
	—	s	c'	s''	s'''	c''''	
	—	c	s'	s''	s'''	c''''	
							etc.
4.							
	+	c	c'	c''	c'''	s''''	
	—	s	s'	c''	c'''	s''''	
	—	s	c'	s''	c'''	s''''	
	—	c	s'	s''	c'''	s''''	
	—	s	c'	s''	s'''	s''''	
	—	c	s'	c''	s'''	s''''	
	—	c	c'	s''	s'''	s''''	
	+	s	s'	s''	s'''	s''''	
5.							

etc.

Für den Cosinus.

		1	2	3	4	5	
1.	+	c	c′	c″	c‴	c⁗	
	−	s	s′	c″	c‴	c⁗	etc.
2.							
	−	s c′		s″	c‴	c⁗	
	−	c s′		s″	c‴	c⁗	
3.							
	−	s c′ c″			s‴	c⁗	
	−	c s′ c″			s‴	c⁗	
	−	c c′ s″			s‴	c⁗	
	+	s s′ s″			s‴	c⁗	etc.
4.							
	−	s c′ c″ c‴				s⁗	
	−	c s′ c″ c‴				s⁗	
	−	c c′ s″ c‴				s⁗	
	+	s s′ s″ c‴				s⁗	
	−	c c′ c″ s‴				s⁗	
	+	s s′ c″ s‴				s⁗	
	+	s c′ s″ s‴				s⁗	
	+	c s′ s″ s‴				s⁗	
5.							

etc.

In der Tafel für den Sinus enthält der rechte Winkel (1, 1) den Sinus des einfachen Bogens α, der Winkel (2, 2) den Werth des Sinus von $(\alpha + \alpha')$, der Winkel (3, 3) den Werth von Sinus $(\alpha + \alpha' + \alpha'')$. Auf eben die Art enthält in der Tafel für den Cosinus der Winkel (5, 5) den Cosinus des Bogens $(\alpha + \alpha' + \alpha'' + \alpha''' + \alpha'''')$. Wollte man die Tafeln fortsetzen, so dürfte man nur unter dem Sinus, die Glieder des Cosinus schreiben, an die Theile des Sinus mit c''''', an die des Cosinus s''''' hinzusetzen und man hätte sogleich den Werth des Sinus $(\alpha + \alpha' + \alpha'' \ldots + \alpha''''')$. Eben so erhielt man Cosinus $(\alpha + \alpha' \ldots + \alpha''''')$ indem man unter dem Cosinus die Glieder des Sinus aber mit entgegengesezten Zeichen schreibt, dann die Glieder des Cosinus mit c''''', die des Sinus mit s''''' verbindet. Um dies in der Tafel desto deutlicher zu bemerken, habe ich die hinzugesezten Glieder ebenfalls in Winkel eingeschlossen.

4) Diese Involution gewährt schon alle Leichtigkeit, die man wohl wünschen kann, da man die Glieder alle so erhält, daß man aus den frühern die spätern durch Anfügung neuer Theile erhält und da man überhaupt bey der ganzen Operation keinen Buchstaben schreibt, der nicht unmittelbar gebraucht würde.

Man erhält indeß sehr leicht noch folgende zweyte combinatorische Darstellung dieser Sinus und Cosinus. Zu dem Ende darf man nur die Glieder nach der Anzahl der s ordnen, die sie enthalten. So ist:

$$\begin{array}{rl}
\sin\alpha = & s \\
\sin(\alpha + \alpha') = & s c' \\
& + s' c \\
\sin(\alpha + \alpha' + \alpha'') = & s c' c'' \quad - s s' s'' \\
& + s' c c'' \\
& + s' c c' \\
\sin(\alpha + \alpha' + \alpha'' + \alpha''') = & s c' c'' c''' - s s' s'' c''' \\
& + s' c c'' c''' - s s' s''' c'' \\
& + s'' c c' c''' - s s'' s''' c' \\
& + s''' c c' c'' - s' s'' s''' c
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\sin(\alpha + \alpha' + \alpha'' + \alpha''' + \alpha'''') \\
= + s c' c'' c''' c'''' - s s' s'' c''' c'''' + s s' s'' s''' s'''' \\
\quad + s' c c'' c''' c'''' - s s' s''' c' c'''' \\
\quad + s'' c c' c''' c'''' - s s'' s''' c' c'''' \\
\quad + s''' c c' c'' c'''' - s' s'' s''' c c'''' \\
\quad + s'''' c c' c'' c''' - s s' s'''' c'' c''' \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - s s'' s'''' c' c''' \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - s' s'' s'''' c c''' \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - s s''' s'''' c' c'' \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - s' s''' s'''' c c'' \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - s'' s''' s'''' c c'
\end{array}$$

$$\cos\alpha = +c$$

$$\cos(\alpha+\alpha') = +cc' - ss'$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\alpha'+\alpha'') = +cc'c'' &- ss'c'' \\ &- ss''c' \\ &- s's''c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\alpha'+\alpha''+\alpha''') = cc'c''c''' &- ss'c''c''' + ss's''s''' \\ &- ss''c'c''' \\ &- s's''cc''' \\ &- ss'''c'c''\end{aligned}$$

und $\cos(\alpha+\alpha'+\alpha''+\alpha'''+\alpha'''')$

$$\begin{aligned}= +cc'c''c'''c'''' &- ss'c''c'''c'''' + ss's''s'''c'''' \\ &- ss''c'c'''c'''' + ss's''s''''c''' \\ &- ss'''c'c''c'''' + ss's'''s''''c'' \\ &- ss''''c'c''c''' + ss''s'''s''''c' \\ &- s's''cc''c'''' + s's''s'''s''''c \\ &- s's'''cc''c'''' \\ &- s's''''cc''c''' \\ &- s''s'''cc'c'''' \\ &- s''s''''cc'c''' \\ &- s'''s''''cc'c''\end{aligned}$$

5) Diese Größen lassen sich combinatorisch so ausdrücken:

$$\sin(\alpha+\alpha'+\alpha'') = \underset{(3)}{A^{\backprime}}c^* - \underset{(3)}{C^{\backprime}}$$

$$\sin(\alpha+\alpha'+\alpha''+\alpha''') = \underset{(4)}{A^{\backprime}}c^* - \underset{(4)}{C^{\backprime}}c^*$$

$$\sin(\alpha+\alpha'+\alpha''+\alpha''+\alpha'''') = \underset{(5)}{A^{\backprime}}c^* - \underset{(5)}{C^{\backprime}}c^* + \underset{(5)}{E^{\backprime}}$$

$$\cos(\alpha+\alpha'+\alpha'') = cc'c'' - \underset{(3)}{B^{\backprime}}c^*$$

$$\cos(\alpha+\alpha'+\alpha''+\alpha''') = c\,c'\,c''\,c''' \quad - B^{\backprime}_{(4)}\,c^* + D^{\backprime}_{(4)}$$

$$\cos(\alpha+\alpha' \ldots + \alpha'''') = c\,c'\,c''\,c'''\,c'''' - B^{\backprime}_{(5)}\,c^* + D^{\backprime}_{(5)}\,c^*$$

Hier sind $A^{\backprime}$, $B^{\backprime}$, $C^{\backprime}$, $D^{\backprime}$, $E^{\backprime}$ die 1ste 2te 3te 4te 5te Combinationsclasse ohne Wiederholungen aus den fünf gegebenen Sinus s, s', s'', s''', s''''; das dabeystehende Zeichen c^* bedeutet die bey jeder Complexion fehlenden Cosinus, c, c, c'', c''', c''''. Wie viel c fehlen und wie viel jedes c Striche erhalten muß geben die vorhandenen s sogleich an, da jede Complexion z. B. beym Sinus $(\alpha+\alpha'+\alpha''+\alpha'''+\alpha'''')$ aus fünf Factoren bestehen, und alle fünf Factoren zusammen allemal die ganze Reihe der Striche enthalten müssen, wenn nämlich z. B. $s'\,s''$ gegeben, so müssen noch hinzukommen $c\,c'''\,c''''$ und die ganze Complexion ist $s'\,s''\,c\,c'''\,c''''$; eben so wird aus $s\,s''\,s''''$ durch Hinzusetzen der fehlenden $c'\,c'''$ die vollständige Complexion $s\,s''\,s''''\,c'\,c'''$.

6) Es ist also im allgemeinen

$$\sin(\alpha+\alpha'+\alpha'' \ldots + \alpha^{(n-1)})$$

$$= A^{\backprime}_{(n)}\,c^* - C^{\backprime}_{(n)}\,c^* + E^{\backprime}_{(n)}\,c^* - G^{\backprime}_{(n)}\,c^* + \ldots$$

und $\cos(\alpha+\alpha'+\alpha'' \ldots + \alpha^{(n-1)})$

$$= c\,c'\,c''\,c''' \ldots c^{(n-1)} \quad - B^{\backprime}_{(n)}\,c^* + D^{\backprime}_{(n)}\,c^* - F^{\backprime}_{(n)}\,c^* + \ldots$$

Diese

Diese Gesetze lassen sich sogleich durch das Bernoullische Verfahren in aller Strenge erweisen. Man multiplicire $\sin\,(\alpha \ldots\ldots + \alpha^{(n-1)})$ mit $c^{(n)}$, den cosinus mit $s^{(n)}$, addire beyde Producte so muß man für den sinus $(\alpha + \alpha' \ldots\ldots + {}^{(n)})$ einen Ausdruck erhalten, der eben das Gesetz beobachtet wie die in (6) gegebene Formel. Man erhält so:

$$\sin(\alpha \ldots \alpha^{(n-1)}) \,.\, c^{(n)} = A^{\backprime}_{n} c^{*} \,.\, c^{(n)} - C^{\backprime}_{(n)} c^{*} c^{(n)}$$
$$+ E^{\backprime}_{(n)} c^{*} \,.\, c^{(n)} - G^{\backprime}_{(n)} c^{*} c^{(n)} + \ldots\ldots$$

$$\cos(\alpha \ldots \alpha^{n-1})\, s^{(n)} = + s^{(n)}\, c c' \ldots\ldots c^{(n-1)} ;$$
$$B^{\backprime}_{(n)} c^{*} + s^{(n)} D^{\backprime}_{(n)} c^{*} - s^{(n)} F^{\backprime}_{(n)} c^{*}$$

$$\text{Summe} = \sin\,(\alpha + \alpha' \ldots\ldots \alpha^{(n)}) = A^{\backprime}_{(n+1)} c^{*} - C^{\backprime}_{(n+1)} c^{*}$$
$$+ E^{\backprime}_{(n+1)} c^{*} - G^{\backprime}_{(n+1)} c^{*} + \ldots\ldots$$

Denn der Factor $c^{(n)}$ in der ersten Reihe vermehrt offenbar nur die Menge der fehlenden c; ist also unter dem allgemeinen Zeichen c^{*} begriffen: daß aber $A^{\backprime}_{(n)} + s^{(n)} = A^{\backprime}_{(n+1)}$ und $C^{\backprime}_{(n)} + s^{(n)} B^{\backprime}_{(n)} = C^{\backprime}_{(n+1)}$ rc. ist schon oben (1. 4.) hinlänglich dargethan worden.

Der Beweis für den Cosinus ist dem obigen ganz ähnlich. Man multiplicire nämlich $\sin\,(\alpha + \alpha' \ldots\ldots + \alpha^{(n-1)})$ mit $- s^{(n)}$ und $\cos\,(\alpha + \alpha'$

....+

.... $+\alpha^{(n-1)}$) mit $c^{(n)}$, die Summe giebt den $\cos(\alpha+\alpha' \ldots\ldots + \alpha^{(n)})$, der das Gesetz in (6) beobachten muß wenn beyde Formeln richtig seyn sollen. Ich sage, wenn beyde Formeln richtig seyn sollen: denn bey dem gegebenen Beweis für die Formel des Sinus brauchte man den Ausdruck für den Cosinus, so daß also der Beweis nichts beweisen würde, sobald jener Ausdruck etwas unwahres enthielte. Beyde Formeln sind nämlich so genau mit einander verbunden, daß man nur beyde zugleich und eine durch die andere beweisen kann: auch ist, genau genommen, das combinatorische Gesetz, das den Sinus und Cosinus ausdrückt, fast das nämliche; der ganze Unterschied besteht darin, daß der Sinus die 1ste, 3te, 5te ... also die ungeraden Classen enthält, da hingegen der Cosinus die 2te, 4te, 6te d. h. die geraden Combinationsclassen enthält. Es ist also

$$-\sin(\alpha+\alpha' \ldots + \alpha^{(n-1)})\, s^{(n)} = -s^{(n)} - s^{(n)} \overset{\backprime}{A}_{(n)} c^* + \overset{\backprime}{C}_{(n)} s^{(n)} c^* - \overset{\backprime}{E}_{(n)} s^{(n)} c^* + \ldots\ldots$$

$$\cos(\alpha+\alpha' \ldots + \alpha^{(n-1)})\, c^{(n)} = c\,c'c'' \ldots c^{n-1} c^{(n)} - \overset{\backprime}{B}_{(n)} c^* c^{(n)} + \overset{\backprime}{D}_{(n)} c^* c^{(n)} - \overset{\backprime}{F}_{(n)} c^* c^{(n)} + \ldots\ldots$$

$$\text{Summe} = \cos(\alpha+\alpha' \ldots + \alpha^{(n)}) = c\,c'c'' \ldots c^{(n)} - \overset{\backprime}{B}_{(n+1)} c^* + \overset{\backprime}{D}_{(n+1)} c^* - \overset{\backprime}{F}_{(n+1)} c^* + \ldots\ldots$$

8) Wir bemerken nur noch, daß man die gegebenen Formeln auch nach den Cosinus c, c', c''.... hätte ordnen können, und dadurch Ausdrücke erhalten haben würde, die den gegebenen sehr ähnlich gewesen wären. Die fehlenden Glieder in jeder Complexion wären dann nicht mehr c, sondern s gewesen. Aus Verbindung beyder Methoden hätte sich dann eine neue Art ergeben, die fehlenden Cosinus in der einen Formel und die fehlenden Sinus in der andern zu finden. Für den Zweck dieser Untersuchung sind aber die gegebenen Formeln vollkommen hinreichend: da man sich zur wirklichen Entwickelung der zuerst gegebenen involutorischen Darstellung bedienen wird.

VI. Satz.

Sezt man $\alpha = \alpha' = \alpha'' = \alpha''' \ldots = \alpha^{(n-1)}$
so wird auch $s = s' = s'' \ldots\ldots = s^{(n-1)}$
und $c = c' = c'' = c''' \ldots\ldots = c^{(n-1)}$.
Ferner ist nach dem in (II.) gegebenen Hülfssatz
$\underset{(n)}{A'} = n s' = {}^{n}\mathfrak{A} s$; $\underset{(n)}{B'} = {}^{n}\mathfrak{B} s^2$; $\underset{(n)}{C^{I}} = {}^{n}\mathfrak{C} s^3$ ꝛc.
hieraus erhält man

$$\text{sinus}\ (n\alpha) = {}^{n}\mathfrak{A} s^1\, c^{n-1}\ {}^{n}\mathfrak{C} s^3\, c^{n-3} + {}^{n}\mathfrak{E} s^5\, c^{n-5} - {}^{n}\mathfrak{G} s^7\, c^{n-7} + \ldots\ldots$$

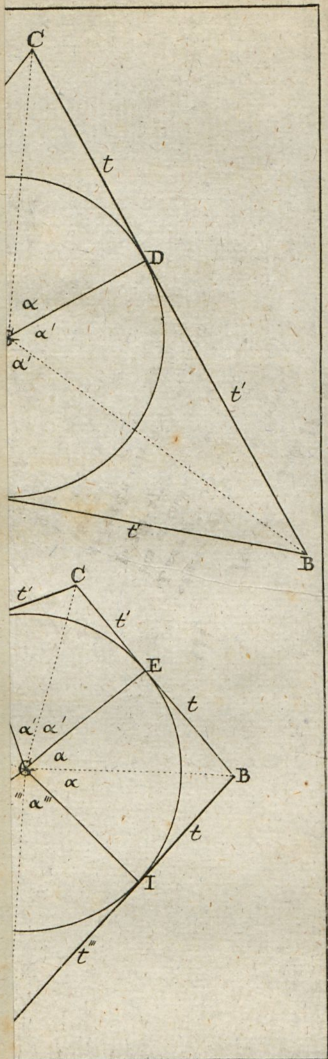
$$\text{cosinus}\ (n\alpha) = c^{n} - {}^{n}\mathfrak{B} s^2\, c^{n-2} + {}^{n}\mathfrak{D} s^4\, c^{n-4} - {}^{n}\mathfrak{F} s^6\, c^{n-6} + \ldots\ldots$$

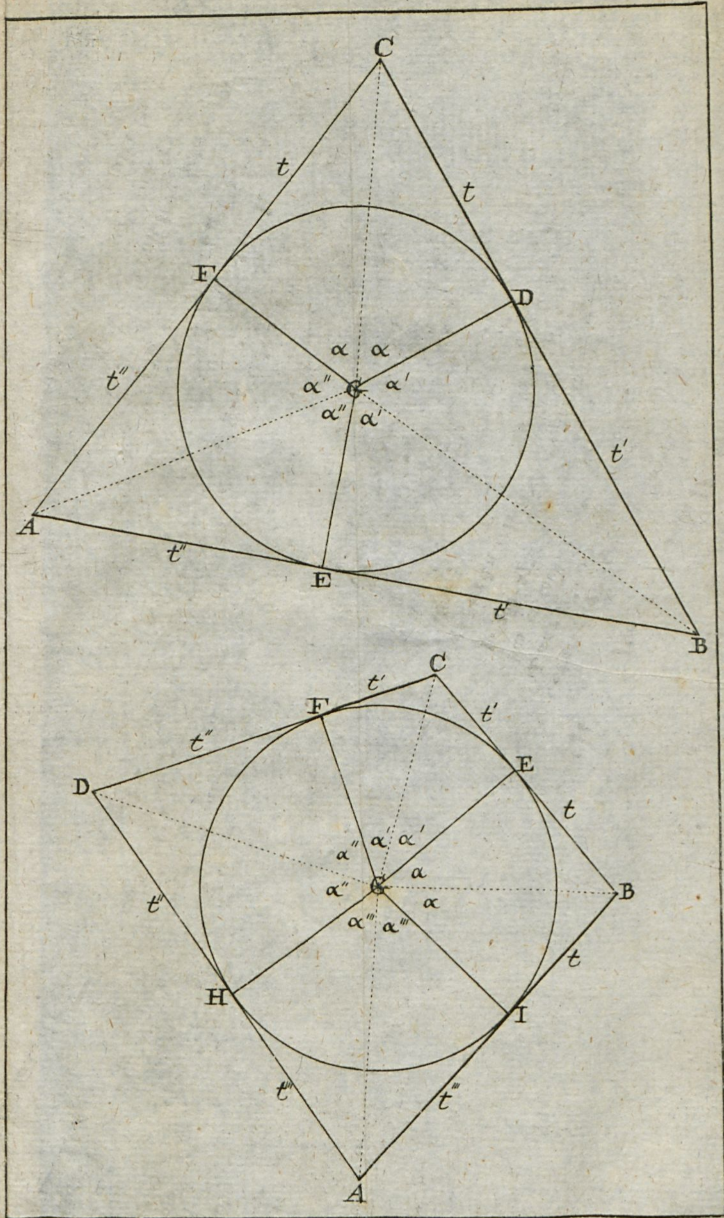
4) Kästner A. G. Berechnung über ostindische Münzen.
S. 235 bis 240

5) —— Ueber ordentliche Vielecke um ein gleiches, mit 2 Kupfertafeln. S. 241. bis 256

6) Cramp D. C. Fractionum Wallisianarum Analysis.
S. 257 bis 296

7) Burckhardt Dr. Anwendung der combinatorischen Analytik zur Bestimmung der trigonometrischen Linien der Summe mehrerer Winkel ꝛc. Mit 1. K. S. 297 bis 216


C
t
D
α
α'
α'
t'
t'
B
C
t'
t'
E
t
α'
α'
α
B
α
α'''
t
I
t'''


C
t
t
F
D
α
t''
α''
α'
t'
A
E
B
C
t'
F
t''
E
D
t
α''
α'
α
B
α'''
H
I
t'''
A

18

Anwendung

der

Combinatorischen Analytik

zur

Bestimmung der trigonometrischen Linien der Summe mehrerer Winkel, wenn die trigonometrischen Linien der einzelnen Winkel gegeben sind.

Von

Dr. Burckhardt.

Mit 1. Kupfer.

Erfurt,
bey Beyer und Maring.
1799.