Carl Mollweide
Halle 1810

1

KLEINE

MATHEMATISCHE ABHANDLUNGEN.

VON

LAMB. HENR. RÖHL,

PROFESSOR DER MATHEM. UND ASTRONOM. AUF DER ACADEM. ZU GREIFSWALD.

Gart,
7 fr.

GREIFSWALD,

GEDRUCKT UND ZU FINDEN BEY ANT. FERD. RÖSE,

1790.

Vorbericht.

Diese Abhandlungen sind gröſtentheils bey verſchiedenen Anläſſen bereits einzeln, jedoch mit fortlaufenden Seitenzahlen gedruckt, und die lezte von Beſtimmung der Geſchwindigkeit des Schalls bey einer Gelegenheit in der Academie vorgelesen. Vielleicht finden sich einige darunter, die es nicht unwerth sind, für Zerstreuung auf diese Art bewahrt zu werden; und in dieser Rücksicht sind sie jezt, unter diesem Titul zusammengefasst, dem Publicum vorgelegt.

Greifswald im März 1790.

der Verfasser.

I.

METHODVS GENERALIS

INVESTIGANDI

OMNES NVMEROS INTEGROS POSITIVOS,

QVI

PRO INDETERMINATIS SVBSTITVTI

SATISFACIVNT

AEQVATIONI INDETERMINATAE SIMPLICI.

Inter problemata mathematica haud raro inueniuntur eiusmodi, quorum data non sufficiunt, vt quaesita omnia perfecte determinari possint. Contingit id semper, quoties data in problemate non suppeditant tot ab inuicem independentes aequationes, quot quantitates inueniendae praecipiuntur. Omnibus tunc adhibitis aequationibus in problemate occurrentibus relinquitur tamen aequatio plures continens quantitates incognitas, quarum nulla determinari potest, nihi reliquae omnes pro arbitrio sunt assumtae. Quum autem hoc pluribus modis fieri possit atque sic incognitae diuersos induant valores, eiusmodi problemata indeterminatorum nomine insigniuntur, prouti et ipsa eiusmodi aequatio dicitur indeterminata et quantitates quaesitae vel incognitae quantitates indeterminatae.

 Solu-

Solutione horum problematum tandem deuenimus ad aequationem, quae sub hac forma generali continetur

$$az \pm by \pm cx \pm dv \text{ etc.} = n.$$

vbi a, b, c, d etc., n quantitates determinatas atque datas denotant, z, y, x, v, etc. quantitates indeterminatas. Nihil vlterius in tali aequatione efficiendum relinquitur, nisi vt dependentia vnius indeterminatorum a reliquis atque datis distincte exponatur, id quod mutatione aequationis propositae in sequentem succedit

$$v = \frac{n - az - by - cx \text{ etc.}}{d}$$

Clarius scilicet nunc perspicitur quomodo valor indeterminati v invenire possit, si pro z, y, x etc. valores pro arbitrio assumuntur. Indeterminatus v omnes possibiles valores reales ac imaginarios, rationales ac irrationales, integros ac fractos, positiuos ac negatiuos induere potest, si loco z, y, x, etc. quoslibet horum valorum substituere licet. Atque in aequationibus simplicibus, vti proposita est, nullo negotio cauetur, ne valor pro v inuentus fiat irrationalis vel imaginarius, siquidem nulla alia re opus est, vt huius generis valores excludantur, quam vt pro z, y, x, etc. non nisi valores reales ac rationales assumantur, quod ab arbitrio solum dependet. His vero valoribus indeterminatorum exclusis, si tunc nihil interest, vtrum integri vel fracti, positiui vel negatiui sint indeterminatorum valores, facile patet, quod et v omnes eiusmodi valores admittat atque sic numerus solutionum aequationis adhuc quoque maneat infinitus.

Quod si autem quaestiones vel natura sua vel ex addita expressa conditione ad solos numeros integros ac positiuos, vti saepius fieri solet, restringuntur, ita vt numeri determinati coefficientes a, b, c, n, etc. non tantum numeri integri sint, sed etiam indeterminati z, y, x, v, etc. ad vnum omnes tales et simul numeri positiui fieri supponantur, res omnino aliter se habere dicenda erit. Hoc scilicet casu pro z, y, x, etc. non nisi numeri integri positiui assumi possunt, et hi quoque non indistincte, sed cautione ea, vt v quoque numerus integer positiuus fieri possit. Sic in nostra proposita aequatione indeterminata pro z, y, x, etc. tales numeri integri sumi debent, vt primum $n - az - by - cx$ etc. maneat numerus positiuus, deinde vt expressio fracta

$$\frac{n - az - by - cx \text{ etc.}}{d}$$

numero integro fiat aequalis. Totum itaque hocce negotium in eligendis numeris pro z, y, x, etc. substituendis non amplius a solo arbitrio dependet, sed certis ipsa aequatione stabiliendis legibus adstrictum est.

His itaque conditionibus infinitus alias solutionum numerus vehementer restringitur, ita vt ad mirabilem quandoquidem redigatur paucitatem, et non raro ipsa quaestio impossibilis reperiatur, licet in aliis casibus ingens adhuc solutionum numerus locum habere possit.

Neque admodum rarae atque insolentes in scientiis non minus quam in vita communi inueniuntur quaestiones huiusmodi restrictiones inuoluentes, id quod ex vnico allato exemplo diiudicari posse mihi persuadeo.

Concipiantur quatour vires A, B, C, D, certo modo adplicatae ad effectum aliquem producendum, ita vt effectus totus compositus aequalis sit summae ex effectu cuiuslibet harum virium compositae. Sit effectus potentiae A aequalis 3. centen. libr., potentiae B 4. cent. libr., potentiae C. 5. potentiae denique D. 7. cent. libr. ita vt effectus compositus sit aequalis 19. cent. libr.

Ponamus naturam rei ac potentiarum concedere tantum eam effectuum specialium mutationem, vt duplicari, triplicari et sic per numeros integros progrediendo multiplicari possint, ita vt effectus compositus semper aequalis maneat summae omnium effectuum specialium.

Si iam postulatur, vt effectus 50, cent. libr. producatur, quaeri potest:

Quantum cuiuslibet harum virium effectus multiplicari debeat, vt effectus quaesitus obtineatur, atque.

Quis sit modus, si pluribus id effici poterit, quo effectus speciales minimum, quantum fieri potest, ab aequalitate recedunt.

Sint v, x, y, z, numeri qui indicant multiplicationem effectus potentiarum A, B, C, D, ordine quo hic positae sunt, erit summa effectum specialium

$$3v + 4x + 5y + 7z = 50.$$

quo facta quaestio proposita reducta est ad mere arithmeticam, qua inueſtigandi proponuntur omnes poſſibiles numeri integri poſitiui loco v, x, y, z, ſubſtituendi, qui aequationi ſatis facere poſſunt, vt optio, quae praecepta eſt, inter ſolutiones inſtitui poſſit.

Sicuti iam ex adducto exemplo patet, vbique huius generis quaeſtiones occurrere poſſe, ita nec Analyſtae intermiſerunt methodum detegere, quae in earum ſolutione adhibere poteſt, quam tamen non niſi certae harum aequationum claſſi adplicatam eſſe inueni

Sit Aequatio

$$dz \pm ay = n$$

et ſeparato vno indeterminatorum.

$$z = \frac{n \pm ay}{d}.$$

Diuidatur iam terminus quilibet numeratoris ſeorſim per d, vt expreſſiones integrae eliciantur, et fractiones, quae hoc facto remanent, colligantur in vnam ſummam. Ponamus

$$\frac{n}{d} = f + \frac{g}{d} \text{ et } \frac{ay}{d} = hy + \frac{ky}{d}, \text{ erit}$$

$$z = f \pm hy \pm \frac{ky - g}{d}.$$

Hac aequationis praeparatione facta omnis res eo redit, vt numeri omnes integri quaerantur loco y ſubſtituendi, ita vt expreſſio fracta fiat numero integro aequalis. Inuenti valores pro y tunc in aequatione pro z ſubſtituantur et hoc modo etiam valores pro z poſſibiles eliciuntur.

Hunc in finem ponitur

$$\frac{ky - g}{d} = \alpha$$

vbi α quemamque numerum integrum denotat atque reducta aequatione prodit

$$y = \frac{d\alpha + g}{k}$$

quae expreſſio numero integro aequalis erit, ſi tam d quam g per k diuiſibi-

diuisibiles sunt. Si non sunt diuisibiles iterum ex quouis termino numeratoris per k diuiso integri eliciantur, atque operationes repetantur, donec valor in forma integra pro y prodeat

$$y = l\beta \mp m$$

quo valore in aequatione pro z substituto ea huius modi formam subit

$$z = e - b\beta.$$

Quicunque tunc numeri integri loco β assumantur, z et y per numeros integros explicantur, qui aequationi ab initio positae.

$$dz \pm ay = n$$

satisfaciunt. Atque inter hos numeros integros facile ii eligi poterunt, quorum substitutione z et y numeri integri euadunt.

Non licuit mihi haec scribendo ipsum euoluere Diophantum, qui primus huius generis quaestiones tractasse dicitur, vt scire possim, vtrum hancce methodum adhibuerit. Ex iis autem, quae Wolfius in analysi de adplicatione Algebrae ad problemata arithmetica indeterminata proposuit, in eam fere opinionem seductus sum, quod Diophantus magis de tollenda irrationalitate in aequationibus compositis quam de tollendis fractionibus in aequationibus simplicibus sollicitus fuerit. Eulerus in Analytica indeterminata mothodum hancce non nisi in solutione eiusmodi aequationum adhibuit, vbi fractio post separationem vnius indeterminati et antea dictam praeparationem aequationis relicta vnicum tantum indeterminatum inuoluit. In iis casibus, vbi haec fractio duos vel plures indeterminatos continet, adplicatio huius methodi primo quidem intuitu difficultatibus subiecta esse videtur. At generalem esse hancce methodum inueni, ita vt omnes possibiles numeri integri, qui aequationi satisfacere possunt ea adhibita erui possint, si modo necessariae quaedam cautiones in hisce operationibus non negligantur, quas infra distinctius ostendam.

Alia autem methodus generalis mihi data quadam occasione de hisce rebus meditanti se praeterea obtulit, quam hisce breuiter communicare, neque inutile neque amatoribus calculi analytici iniucundum fore existimaui.

Aequationes de quibus hic agitur ad vnum omnes sub hac forma generali comprehenduntur

$$az \pm by \pm cx \pm dv \pm \text{etc.} = n.$$

In qua litterae a, b, c, d, etc. n, numeros denotant determinatos, litterae autem z, y, x, v, etc. numeros indeterminatos, atque haec aequatio ita ſoluenda proponitur, vt numeri poſitiui integri omnes poſſibiles quaerantur, qui loco z, x, y, v, etc. ſubſtituti aequationi ſatisfaciunt, atque id ita quidem, vt ſimul detegatur methodus generalis, quae id efficere poteſt, quicunque ſit numerus indeterminatorum.

Primum itaque vnus indeterminatorum ſeparetur atque aequatio, vti in caſu duorum indeterminatorum, ad ſolutionem praeparetur. Nihil quidem hic intereſt, quinam in hunc finem eligatur indeterminatus, quoniam autem ſolutio multum abbreuiatur, ſi denominator fractionis poſt hanc praeparationem ortae paruus ſit, plerumque ille determinatus eligitur, cuius coefficiens minimus eſt. Separatione itaque indeterminati aequatio noſtra ſequentem induit formam

$$v = \frac{n \pm az \pm by \pm cx \pm \text{etc.}}{d}.$$

Si itaque d inter coefficientes minimus eſt, ex quolibet numeratoris termino per d diuiſo oritur quotiens, quem hic ſuppono numerum integrum cum adiuncta fractione. Sit itaque.

$$\frac{n}{d} = e + \frac{f}{d}$$

$$\frac{az}{d} = gz + \frac{hz}{d}$$

$$\frac{by}{d} = iy + \frac{ky}{d}$$

$$\frac{cy}{d} = lx + \frac{mx}{d}$$

$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

atque hiſce valoribus ſubſtitutis inuenitur

$$v = e \pm gz \pm iy \pm lx \pm \frac{hz \pm ky \pm mx \pm f}{d}$$

Ad eius modi itaque expreſſionem pro v ex integris et fractis compoſitam ſemper pervenimus, quicunque ſit numerus indeterminatorum. Si autem aliquis coefficientium ex. gr. a, diuiſibilis ſit per d

nihil

nihil aliud efficitur, quam vt indeterminatus illi competens z inter terminos fractionis non occurrat.

Omnis vero res nunc eo redit, vt omnes numeri integri positiui possibiles eruantur, a quorum substitutione loco z, y, x, etc. expressio fracta

$$\frac{hz \pm hy \pm mx \text{ etc. } \pm f}{d}$$

numero integro aequalis fieri potest.

Numerator huius fractiones semper est summa algebraica quantitatis indeterminatae $hz \pm ky \pm mx \pm$ etc. et quantitatis determinatae f, quae etiam vel negatiua vel aequalis o esse potest, semper autem minor est diuisore d. Constat autem ex principiis arithmeticis, quod summa numerorum integrorum per aliquem numerum integrum d non diuidi possit, nisi summa residuorum quae relinquuntur quolibet summae termino seorsim per d diuiso, sit aequalis aut o aut kd, vbi k quemcunque numerum integrum denotare potest. Quum vero in nostro casu vnus summae terminus $\pm f$ minor est diuisore d, eius residuum erit $\pm f$, adeoque residuum alterius partis summae $hz \pm ky \pm mx \pm$ etc. erit $\mp f$. Quum autem nihil interest, quo signo termini affecti sunt, modo residua cum eodem signo notata intelligantur, simplici signo in posterum vti licebit.

Quodsi iam numerus hic indeterminatus, vt in nostro exemplo, ex pluribus terminis, quorum quilibet indeterminatus est, consistit, breuitatis causa residuum summae vocabo illud, quod relinquitur, si omnes indeterminati in summam collecti diuidi per denominatorem intelligantur, summa autem residuorum mihi est summa ex omnibus residuis collecta, quae remanent, si quilibet indeterminatorum seorsim per denominatorem diuiditur. Atque tunc dico, quod, si residuum summae est f, summa residuorum sit $f + ud$, vbi n quemlibet numerum integrum, cyphra non excepta denotare potest.

$$\text{Sit } \frac{hz + ky + mx + \text{etc.}}{d} = p + \frac{f}{d}$$

Sit

Sit porro $\frac{hz}{d} = q + \frac{b}{d}$

$$\frac{ky}{d} = r + \frac{c}{d}$$

$$\frac{mx}{d} = t + \frac{s}{d}$$

ob. $\frac{hz + ky + mx \text{ etc.}}{d} = \frac{hz}{d} + \frac{ky}{d} + \frac{mx}{d}$ etc.

erit $p + \frac{f}{d} = q + r + t + \frac{b + c + s}{d}$

vbi $\frac{f}{d}$ est fractio vera, $\frac{b + c + s}{d}$ vel fractio vera erit vel spuria. In casu priori erit $p = q + r + t$ atque

$\frac{f}{d} = \frac{b + c + s}{d}$ adeoque $f = b + c + s$.

In casu posteriori est $p > q + r + t$. Sit itaque $p - u = q + r + t$ erit $u + \frac{f}{d} = \frac{f + ud}{d} = \frac{b + c + s}{d}$ atque $f + ud = b + c + s$. Atque sic patet propositio.

Eodem modo ostenditur, quod residuum summae sit $= f$, si summa residuorum est $ud + f$.

Sit vt antea

$$\frac{hz + ky + mx \text{ etc.}}{d} = p + \frac{w}{d}$$

atque porro $\frac{hz}{d} = q + \frac{b}{d}$

$$\frac{ky}{d} = r + \frac{c}{d}$$

$\frac{mx}{d}$

$$\frac{mx}{d} = t + \frac{s}{d}$$

erit $q + r + t$ etc. $+ \frac{b + c + s \text{ etc.}}{d} = p + \frac{w}{d}$

vel quoniam $b + c + s$ etc. $= ud + f$

$$q + r + t \text{ etc.} + \frac{ud + f}{d} = p + \frac{w}{d}$$

$$q + r + t \text{ etc.} + u + \frac{f}{d} = p + \frac{w}{d}$$

Quoniam $\frac{f}{d}$ et $\frac{w}{d}$ ſunt fractiones verae, $q, r, t, u, p,$ autem quantitates integrae aequalitas non conſiſtere poteſt, niſi ſit

$$\frac{f}{d} = \frac{w}{d} \text{ adeoque } f = w.$$

Facile hinc quoque videre licet, ſi in numeratore fractionis numerus determinatus deficit, quod reſiduum ſummae ſit $= o$ et ſumma reſiduorum $= ud$.

Omnes iam numeri infiniti ratione reſiduorum, quae poſt factam diuiſionem per numerum aliquem determinatum reliquuntur, in tot claſſes diſpeſcuntur, quot vnitates habet diuiſor. Omnes ſcilicet numeri qui eundem relinquunt reſiduum ad eandem quoque claſſem referuntur. Atque pro diuiſore d claſſes conſtituuntur ſequenti modo.

Ordo claſſium	1.	2.	3.	- - $f+1$.	-	- d.
forma claſſium	$d\alpha$.	$d\alpha+1$.	$d\alpha+2$.	- $d\alpha+f$.	-	$d\alpha+d-1$.

Claſſis 1. continet omnes numeros per d diuiſibiles; eorum forma eſt $d\alpha$.

Claſſis 2. continet omnes numeros, qui per d diuiſi relinquunt reſiduum 1. Eorum forma eſt $d\alpha + 1$.

et ita porro, donec deueniamus ad claſſem vltimam numeros continentem, qui per d diuiſi relinquunt reſidunm $d-1$, quorum forma eſt $d\alpha + d-1$.

Facile perſpicitur nullum cogitari poſſe numerum integrum, qui ad aliquam harum claſſium referri non poſſet, atque quaelibet claſſis infinitos ſub ſe comprehendit numeros, quemlibet numerum integrum, cyphra non excepta, pro α ſubſtituendo. Hoc modo in communi vita reſpectu diuiſoris 2 omnes numeri in pares et impares diſtinguuntur. Si itaque vnus tantum eſt indeterminatus az ac numeri pro eo ſubſtituendi quaeruntur, vt ille per d diuiſus relinquat reſiduum r, omnes hi infiniti numeri loco az ponendi ad vnicam claſſem numerorum pertinent, quorum forma eſt $d\alpha + r$.

Sit aequatio

$$5y + 11z = 98$$

$$y = 19 - 2z - \frac{z-3}{5}$$

Secundum modo dicta pro z non niſi numeri ex claſſe $5\alpha + 3$ erunt ſubſtituendi; adeoque erit

$$z = 5\alpha + 3.$$
$$y = 13 - 11\alpha.$$

Quae ſolutio parum differt ab ea, quae vbique docetur. Si autem in numeratore fractionis duo numeri indeterminati occurrunt $az + by$ per d diuidendi et quaerantur numeri pro illis ſubſtituendi, vt reſiduum ſummae aequalis ſiat numero f; dico, quod az ex qualibet claſſe ſumi atque cuilibet coordinari poſſit claſſis, ex qua by ſumitur, ita vt $az + by$ per d diuiſum relinquat reſiduum f. Etenim az ſumitur ex claſſe quarum numeri reſiduum relinquunt vel minus vel maius, quam f, vel ei aequale. Atque in quolibet caſu claſſis pro by ei coordinari poteſt, vt ſumma reſiduorum ſit vel f vel $f + ud$.

Si ponatur $az = d\alpha + f - a$
ſumatur $by = d\beta + a$
atque tunc erit ſumma reſiduorum $= f$, adeoque reſiduum ſummae $= f$.
Si ponatur $az = d\alpha + f + a$
ſumatur $by = d\beta + d - a$
quo facto erit ſumma reſiduorum $d + f$, atque reſiduum ſummae $= f$.
Si denique ponatur $az = d\alpha + f$
atque ſumatur $by = d\beta$
erit iterum ſumma reſiduorum $= f$, hinc quoque reſiduum ſummae $= f$.

Euidens

Euidens hinc ſit, quod d modis diuerſis claſſes numerorum pro az ac by ſubſtituendorum combinari poſſint ita, vt vbique reſiduum ſumae fiat $= f$, atque

$$\frac{az + by - f}{d}$$

numero integro aequalis.

Quum autem quaelibet harum poſitionum alios atque alios pro z et y conſtituat valores, aequatio talis ex qua eiusmodi fractio elicitur complete ſoluta cenſeri non poteſt, niſi adhibitis omnibus hiſce poſitionibus. Vt hae combinationes claſſium diſtinctius concipiantur, eas in ſequenti ſchemate repraeſentare volui.

$$\begin{array}{llll}
az & = d\alpha & \text{- - - - -} \; by & = d\beta + f \\
 & = d\alpha + 1 & \text{- - - - - -} & = d\beta + f - 1 \\
 & = d\alpha + 2 & \text{- - - - -} & = d\beta + f - 2 \\
 & \quad | & & \quad | \\
 & = d\alpha + f & \text{- - - - -} & = d\beta \\
 & = d\alpha + f + 1 & \text{- - -} & = d\beta + d - 1 \\
 & = d\alpha + f + 2 & \text{- - -} & = d\beta + d - 2 \\
 & \quad | & & \quad | \\
 & = d\alpha + f + (d - f - 1.) & & = d\beta + d - (d - f - 1)
\end{array}$$

Accedat iam tertius numerus indeterminatus cx, ita vt nunc in numeratore fractionis tres indeterminati occurrant cum numero determinato f, et ſit d fractionis denominator. Patet iam, quod cum quaIibet poſitione pro az omnes claſſes by combinari poſſint, modo cuilibet claſſi by coordinetur talis claſſis cx, vt ſumma reſiduorum harum claſſium aequalis fiat reſiduo claſſis illius by, quae correſpondens eſt claſſi aſſumtae az. Sic cum claſſe $az = d\alpha + 2$; omnes claſſes by combinari poſſunt, modo claſſes cx cuiliber claſſi by ita coordinentur, vt ſumma reſiduorum claſſium by et cx correſpoedentium ſemper maneat $f - 2$, quoniam $f - 2$ eſt reſiduum claſſis by correſpondentis claſſi $az = d\alpha + 2$. Vti in ſequenti ſchemate repraeſentatur.

$$\begin{array}{llll}
az = d\alpha; \; by & = d\beta + f & \text{- - -} \; cx & = d\gamma \\
 & = d\beta + f - 1 & \text{- - -} & = d\gamma + 1 \\
 & = d\beta + f - 2 & \text{- - -} & = d\gamma + 2 \\
 & \quad | & & \quad |
\end{array}$$

 $= d\beta$

$$
\begin{array}{rlrl}
 & = d\beta \text{ - - - - - - - } & = & d\gamma + f \\
 & = d\beta + (d-1) \text{ - - } & = & d\gamma + f + 1 \\
 & \;\;\vert & & \\
 & = d\beta + d - (d-f-1) & = & d\gamma + f + d - f - 1 \\
az = d\alpha + 1;\ by & = d\beta + f - 1 \text{ - - } & cx = & d\gamma \\
 & = d\beta + f - 2 \text{ - - } & = & d\gamma + 1. \\
 & = d\beta + f - 3 \text{ - - - } & = & d\gamma + 2 \\
 & \;\;\vert & & \vert \\
 & = d\beta \text{ - - - - - - - } & = & d\gamma + f - 1 \\
 & = d\beta + d - 1 \text{ - - - } & = & d\gamma + f \\
 & = d\beta + d - 2 \text{ - - - } & = & d\gamma + f + 1 \\
 & \;\;\vert & & \vert \\
 & = d\beta + f \text{ - - - - - } & \neq & d\gamma + d - 1
\end{array}
$$

Eodem modo fiunt combinationes pro reliquis claſſibus *az*, atque hinc palam fit, quod pro tribus indeterminatis, numerus combinationum claſſium ſit $d \bowtie d$ ſiue d^2. Quum autem quilibet indeterminatus in qualibet combinatione ex alia claſſe numerorum ſumatur, qualibet combinatione diuerſi quoque valores pro x, y, z, obtinentur, adeoque aequatio et nunc complete reſoluta cenſeri non poteſt, niſi omnibus adhibitis combinationibus, factisque ſubſtitutionibus inde ortis pro indeterminatis.

Accedat iam quarta indeterminata *gv*, atque illico patet, quod cuilibet claſſi *cx* ita coordinari poſſit claſſis *gv* vt ſumma reſiduorum ſit numerus datus. Sumta itaque pro lubitu aliqua claſſium combinatione, illi claſſes omnes pro *cx* et *gv* ita adiungi poſſunt, vt ſumma reſiduorum in claſſibus *cx* et *gv* aequalis maneat reſiduo claſſis *cx* correſpondentis aſſumtae combinationi claſſium *az* et *by*. Quo facto ſumma reſiduorum ex omnibus claſſibus erit $f + ud$, adeoque reſiduum ſummae $= f$. Quoniam vero iam aderant d^2 combinationes claſſium *az* et *by*, atque quaelibet earum iam d diuerſas combinationes claſſium *cx* et *gv* admittit, oriuntur iam pro quatuor indeterminatis d^3 diuerſae claſſium combinationes, et non niſi omnibus adhibitis quaeſtio pro ſoluta erit cenſenda.

Quomodo hae combinationes conſtitui poſſunt, ex ſequenti ſchemate perſpicietur.

Pro

Pro combinatione $az + d\alpha$ $by = d\beta + f$ oriuntur sequentes combinationes classium pro cx et gv

$$\begin{array}{llll}
cx & = d\gamma & \text{- - - - - -} & gv = d\delta \\
 & = d\gamma + 1 & \text{- - - - - -} & = d\delta + d - 1 \\
 & = d\gamma + 2 & \text{- - - - -} & = d\delta + d - 2 \\
 & \quad | & & \; | \\
 & = d\gamma + f & \text{- - - - - -} & = d\delta + d - f \\
 & = d\gamma + f + 1 & \text{- - -} & = d\delta + d - (f+1) \\
 & \quad | & & \; | \\
 & = d\gamma + f + (d - f - 1) & \text{-} & = d\delta + d - (d - f - 1)
\end{array}$$

Pro combinatione $az = d\alpha + 1$ - $by = d\beta + f - 1$.

$$\begin{array}{llll}
cx & = d\gamma & \text{- - - - -} & gv = d\delta \\
 & = d\gamma + 1 & \text{- - - - - -} & = d\delta + d - 1 \\
 & = d\gamma + 2 & \text{- - - - - -} & = d\delta + d - 2 \\
 & \quad | & & \; | \\
 & = d\gamma + f & \text{- - - - - -} & = d\delta + d - f \\
 & = d\gamma + f + 1 & \text{- - - -} & = d\delta + d - (f+1) \\
 & \quad | & & \; | \\
 & = d\gamma + f + (d - f - 1) & & = d\delta + d - (d - f - 1)
\end{array}$$

vnde abunde constat quomodo vlterius in formandis combinationibus progredi possumus, vt d^3 combinationes obtineantur.

Ex hocce modo combinationes classium eruendi, ex quibus numeri pro indeterminatis $z, y, x, v,$ etc. substituendi sumi debent, clare perspicitur, quod accedente vno determinato ex qualibet combinatione, quae illo adhuc deficiente iam aderat, fieri d combinationes. Si itaque pro n indeterminatis numerus combinationum classium est d^{n-1} erit numerus harum combinationum pro $n + 1$ indeterminatis $= d^n$. Legem autem hancce iam demonstratam dedimus pro vno, pro duobus, tribus, quatuor indeterminatis, ergo valebit illa quoque pro quinque, sex etc. pro omnibus, quot eorum erunt, indeterminatis.

Quodsi nunc pro nostra aequatione

$$v = e - gz - iy - lx \text{ etc.} - \frac{hz + ky + mx \text{ etc.} - f}{d}$$

classium combinationes, vti praeceptum est, ernimus, atque vna earum sit pro hz classis secunda, pro ky classis quarta, pro mx classis prima etc. quilibet horum indeterminatorum aequalis ponatur formae eius classis, ex qua numeri pro illo substituendi sumi debent, vt hoc modo fiat

$$hz = d\alpha + 1.$$
$$ky = d\beta + 3$$
$$mx = d\gamma$$
etc. etc.

Ex qualibet harum aequationum porro elicitur forma numerorum integrorum loco z, y, x, etc. ponendorum, quorum substitutione in aequatione pro v, etiam hic indeterminatus forma numeri integri ita exprimitur

$$v = e - at - bs - cr. \text{ etc.}$$

vbi tamen litterae a, b, c, etc. iis initio in aequatione positis non amplius aequales censendae. Nihil tunc superest, quam vt loco indeterminatorum t, s, r, etc. valores integri assumantur, quae aequationibus z, y, x, etc. conuenire possunt, ita vt positiui maneant hi indeterminati, atque simul $e > at + bs + cr$ etc. reperiatur.

Si tunc eodem modo cum omnibus classibus numerorum loco z, y, x, etc. substituendorum procedatur, omnes possibiles numeri integri positiui obtinentur, qui aequationi adeoque et quaestioni propositae satisfaciunt.

Ne denique in hac generali resolutione aliquid ambigui relinquatur, ipsis exemplis additis ostendamus, quomodo praecepta huc vsque proposita debeant adplicari.

Sit itaque Aequatio

$$5x + 6y + 7z = 84$$

$$x = 16 - y - z - \frac{y + 2z - 4}{5}.$$

Adeoque $y + 2z$ pertinent ad formam numerorum $5\alpha + 4$, quod ex quinque combinationibus classium pro y et $2z$ seorsim constituendarum obtinetur, quoniam pro duobus indeterminatis et denominatore 5, numerus harum combinationum est $5^{2-1} = 5$. Hae combinationes sunt

pro y		pro $2z$
5α	- - -	$5\beta + 4$

$$\begin{array}{lll} 5\alpha + 1 & - & -5\beta + 3 \\ 5\alpha + 2 & - & -5\beta + 2 \\ 5\alpha + 3 & - & -5\beta + 1 \\ 5\alpha + 4 & & 5\beta. \end{array}$$

Prima combinatio efficit, $y = 5\alpha$ atque $2z = 5\beta + 4$. et $z = 2\beta + 2 + \frac{\beta}{2}$.

Ponatur iam $\frac{\beta}{2} = \gamma$ erit $\beta = 2\gamma$ atque $z = 5\gamma + 2$. Quibus valoribus in aequatione x substitutis, erit

$$x = 14 - 6\alpha - 7\gamma.$$

atque $y = 5\alpha$

$z = 5\gamma + 2$ reperti sunt.

His formis numerorum consideratis palam fiet, neque pro α neque pro γ accipi posse numeros negatiuos, ne z et y negatiui fiant, praeterea nec $\alpha = 0$ poni posse, ne y euanescat. Denique pro α non sumi potest numerus maior quam 2, neque pro γ maior quam 1 vt x maneat numerus positiuus.

Posito itaque $\alpha = 1$

et $\gamma = 0$

erit $x = 8$. et $5x = 40$

$y = 5$ $6y = 30$

$z = 2$. $7z = 14$.

Posito porro $\alpha = 1$.

et $\gamma = 1$.

erit $x = 1$. et $5x = 5$

$y = 5$ $6y = 30$

$z = 7$ $7z = 49$

Posito denique $\alpha = 2$

$\gamma = 0$

erit $x = 2$. et $5x = 10$

$y = 10$ $6y = 60$

$z = 2$ $7z = 14$.

atqui omnes hi numeri aequationi satisfaciunt, quoniam vbique $5x + 6y + 7z = 84$.

Ex

Ex combinatione ſecunda eſt

$$y = 5\alpha + 1.$$
$$2z = 5\beta + 3.$$

adeoque $z = 2\beta + 1 + \frac{\beta + 1}{2}$

Ponatur $\frac{\beta+1}{2} = \gamma$

erit $\beta = 2\gamma - 1$
atque $z = 5\gamma - 1$
$x = 17 - 6\alpha - 7\gamma.$

Hic negatiuus numerus loco α atque γ poni non poteſt, neque $\gamma = 0$ eſſe poteſt. Praeterea pro α non maior numerus quam 1, et pro γ non maior quam 2 aſſumi poteſt. Hinc relinquuntur ſequentes poſitiones

$\alpha = 0$
$\gamma = 1.$

vnde $x = 10$ et $5x = 50$
$y = 1$ $6y = 6$
$z = 4$ $7z = 28$

Porro $\alpha = 0$
$\gamma = 2$

efficiunt $x = 3$ atque $5x = 15$
$y = 1$ $6y = 6$
$z = 9$ $7z = 63.$

Denique ex $\alpha = 1$
$\gamma = 1$

prodit $y = 4$ atque $5y = 20$
$y = 6$ $6y = 36$
$z = 4$ $7z = 28.$

Itaque hi quoque numeri ſummam productorum efficiunt 84.

Tertia combinatio dabat

$$y = 5\alpha + 2.$$
$$2z = 5\beta + 2.$$

adeo-

adeoque $z = 2\beta + 1 + \frac{\beta}{2}$.

Ponatur $\frac{\beta}{2} = \gamma$

erit $\beta = 2\gamma$

et $z = 5\gamma + 1$.

vnde habemus $x = 13 - 6\alpha - 7\gamma$.

Hic iterum neque α neque γ numero negatiuo exponi possunt, atque α non maior quam 2, et γ non maior quam 1 sumi debet. Prodeunt hinc sequentes positiones.

$\alpha = 0$
$\gamma = 0$

efficit $x = 13$ atque $5x = 65$
$y = 2$ $6y = 12$
$z = 1$ $7z = 7$.

Ex $\alpha = 0$
$\gamma = 1$

producitur
$x = 6$ et $5x = 30$
$y = 2$ $6y = 12$
$z = 6$. $7z = 42$.

Porro ex $\alpha = 1$
$\gamma = 0$

oritur $x = 7$ hinc $5x = 35$
$y = 7$ $6y = 42$
$z = 1$ $7z = 7$.

Tandem $\alpha = 2$
$\gamma = 0$

offert $x = 1$ et $5x = 5$
$y = 12$ $6y = 72$
$z = 1$ $7z = 7$.

Atque summa horum productorum vbique est $= 84$.

Quarta combinatio sistit aequationes

$y = 5\alpha + 3$

et $2z = 5\beta + 1$.

$$z = 2\beta + \frac{\beta + 1}{2}$$

Sit $\frac{\beta + 1}{2} = \gamma$

erit $\beta = 2\gamma - 1$

vnde $z = 5\gamma - 2$

atque $x = 16 - 6\alpha - 7\gamma.$

Loco α et γ non nisi numeri positiui admitti possunt, atque γ non minor quam 1 esse potest. Praeterea α non maior quam 1 et γ non maior quam 2 assumendi sunt, vt x maneat positiuus numerus. Hinc oriuntur sequentes positiones

$\alpha = 0$ porro $\alpha = 0$ denique $\alpha = 1$

$\gamma = 1.$ $\gamma = 2.$ $\gamma = 1$

Ex prima positione sequitur

$x = 9$ atque $5x = 45$

$y = 3$ $6y = 18$

$z = 3$ $7z = 21.$

Ex secunda positione

$x = 2$ atque $5x = 10$

$y = 3$ $6y = 18$

$z = 8$ $7z = 56$

Ex tertia denique prodit

$x = 3$ hinc $5x = 15$

$y = 8$ $6y = 48$

$z = 3$ $7z = 21.$

atque summa productorum ex qualibet positione est $= 84.$

Vltima denique combinatio producit aequationes

$y = 5\alpha + 4.$

et $2z = 5\beta$

$$z = 2\beta + \frac{\beta}{2}$$

Ponatur $\frac{\beta}{2} = \gamma$

erit $\beta = 2\gamma$

$z = 5\gamma.$

$x =$

$$x = 12 - 6\,\alpha - 7\,\gamma.$$

Ex hisce aequationibus perspicitur, quod nec α nec γ per numeros negatiuos, nec γ per o repraesentari possit. Itemque quod nec α nec γ maiores quam 1 sumi possunt. Vnica itaque hic prodit positio

$$\alpha = o$$
$$\gamma = 1.$$

vnde habemus $x = 5$ et $5x = 25$
$y = 4$ $6y = 24$
$z = 5.$ $7z = 35.$

quorum productorum summa $= 84$.

Inuenimus sic 14 solutiones huius aequationes, quae autem non nisi omnibus adhibitis combinationibus detegi poterant.

Exemplum supra traditum offerebat hancce aequationem

$$3v + 4x + 5y + 7z = 50$$

$$\text{vnde } v = 16 - x - y - 2z - \frac{x + 2y + z - 2}{3}$$

Quum haec fractio, cuius denominator 3 est, tres numeros indeterminatos continet, erit numerus combinationum classium numerorum $= 3^2 = 9$. atque hae classes ita combinandae sunt, vt summa residuorum sit 2 vel $3k + 2$, si tota expressio fracta numero integro aequalis fieri debet. Combinationes inde ortae erunt sequentes

pro x	pro $2y$	pro z
3α	$3\beta + 2$	3γ
	$3\beta + 1.$	$3\gamma + 1.$
	$3\beta.$	$3\gamma + 2.$
$3\alpha + 1.$	$3\beta + 1.$	3γ
	3β	$3\gamma + 1$
	$3\beta + 2$	$3\gamma + 2$
$3\alpha + 2.$	3β	3γ
	$3\beta + 1.$	$3\gamma + 2$
	$3\beta + 2$	$3\gamma + 1.$

In prima combinatione ponatur

$$x = 3\alpha. \quad 2y = 3\beta + 2. \quad z = 3\gamma$$

$$y = \beta + 1 + \frac{\beta}{2}$$

$$\text{et si } \frac{\beta}{2} = \delta$$

$$\beta = 2\delta$$

$$\text{erit } y = 3\delta + 1.$$

$$\text{atque } \frac{x + 2y + z - 2}{3} = \frac{3\alpha + 3\beta + 3\gamma + 2 - 2}{3}$$

$$= \alpha + \beta + \gamma$$

atque si hi valores introducantur in aequationem pro v, erit

$$v = 15 - 4\alpha - 5\delta - 7\gamma.$$

vbi apparet, quod neque pro α, neque pro δ, neque pro γ valorem negatiuum substituere, neque α neque $\gamma = o$ sumere liceat. Vnica hinc positio valere potest

$$\alpha = 1. \quad \delta = 0. \quad \gamma = 1.$$

$$\text{vnde} \quad \begin{array}{lcl} v = 4. & \text{et} & 3v = 12 \\ x = 3 & & 4x = 12 \\ y = 1 & & 5y = 5 \\ z = 3. & & 7z = 21. \end{array}$$

quorum productorum summa efficit 50 vti praecipiebatur.

Simili mode ex secunda combinatione inuenitur

$$v = 16 - 4\alpha - 5\delta - 7\gamma$$
$$x = 3\alpha$$
$$y = 3\delta - 1$$
$$z = 3\gamma + 1.$$

vnde tres sequentes casus prodeunt.

$$\begin{array}{lllll} v = 7 & \text{et porro} & v = 2 & \text{denique} & v = 3 \\ x = 3 & & x = 3 & & x = 6 \\ y = 2 & & y = 5 & & y = 2 \\ z = 1 & & z = 1. & & z = 1. \end{array}$$

Ex combinatione tertia inuenitur

$$v = 12 - 4\alpha - 5\delta - 7\gamma$$
$$x = 3\alpha$$
$$y = 3\delta$$
$$z = 3\gamma + 2.$$

atque vnicus casus $v = 3. \quad x = 3. \quad y = 3. \quad z = 2.$

Ex combinatione quarta oriuntur aequationes

$$v = 17 - 4\alpha - 5\delta - 7\gamma.$$

$$x = 3\alpha + 1.$$
$$y = 3\delta - 1$$
$$z = 3\gamma$$

quae duos efficiunt casus

$v = 5$	et	$v = 1$
$x = 1$		$x = 4$
$y = 2$		$y = 2$
$z = 3$		$z = 3.$

Combinatio quinta offert aequationes

$$v = 13 - 4\alpha - 5\delta - 7\gamma$$
$$x = 3\alpha + 1$$
$$y = 3\delta$$
$$z = 3\gamma + 1$$

atque resolutiones sequentes

$v = 8$	$v = 3$	$v = 1$	$v = 4$
$x = 1$	$x = 1$	$x = 1$	$x = 4$
$y = 3$	$y = 6$	$y = 3$	$y = 3$
$z = 1$	$z = 1$	$z = 4.$	$z = 1$

In combinatione sexta latent aequationes

$$v = 9 - 4\alpha - 5\delta - 7\gamma$$
$$x = 3\alpha + 1$$
$$y = 3\delta + 1$$
$$z = 3\gamma + 2$$

atque solutiones

$v = 9$	$v = 2$	$v = 4$	$v = 5$	$v = 1$
$x = 1$	$x = 1$	$x = 1$	$x = 4$	$x = 7$
$y = 1$	$y = 1$	$y = 4$	$y = 1$	$y = 1.$
$z = 2$	$z = 5$	$z = 2$	$z = 2.$	$z = 2$

Combinatione septima eliciuntur aequationes

$$v = 14 - 4\alpha - 5\delta - 7\gamma$$
$$x = 3\alpha + 2.$$
$$y = 3\delta$$
$$z = 3\gamma$$

quae vnicam solutionem producunt, $v = 2, x = 2\ y = 3, z = 3.$

Octaua combinatio dat aequationes

$$v = 11 - 4\alpha - 5\delta - 7\gamma$$

 $x =$

$$x = 3\alpha + 2$$
$$y = 3\delta - 1$$
$$z = 3\gamma + 2$$

atque tres ſolutiones

$v = 6$	$v = 1$	$v = 2$
$x = 2$	$x = 2$	$x = 5$
$y = 2$	$y = 5$	$y = 2$
$z = 2$	$z = 2$	$z = 2$

Ex nona denique combinatione fluunt aequationes

$$v = 10 - 4\alpha - 5\delta - 7\gamma$$
$$x = 3\alpha + 2$$
$$y = 3\delta + 1$$
$$z = 3\gamma + 1$$

atque ſex ſolutiones

$v = 10$	$v = 6$	$v = 2$	$v = 5$	$v = 3$	$v = 1$
$x = 2$	$x = 5$	$x = 8$	$x = 2$	$x = 2$	$x = 5$
$y = 1$	$y = 1$	$y = 1$	$y = 4$	$y = 1$	$y = 4$
$z = 1$	$z = 1$	$z = 1$	$z = 1$	$z = 4$	$z = 1$

Sunt itaque omnino 26 ſolutiones poſſibiles, quae non niſi adhibitis omnibus hiſce combinationes eruuntur, atque ſolutio ex combinatione tertia elicita conditiones problemati adiectae maxime conuenire videtur. Poſitis ſcilicet $v = 3$, $x = 3$, $y = 3$, $z = 2$ effectus potentiarum $A = 9$, $B = 12$, $C = 15$ et $D = 14$ omnium minime ab aequalitate recedunt.

Methodus huc vsque tradita atque exemplis ſatis illuſtrata ex ipſis numerorum proprietatibus eorumque partitione in claſſes reſpectu cuiusuis diuiſoris petita vniuerſalis eſt, quotquot in numeratore fractionis ex aequatione poſt eius praeparationem reſultantis occurrant indeterminati. Ex lege autem, ſecundum quam numeri combinationis claſſium numerorum pro magnitudine denominatoris et numero indeterminatorum numeratoris progrediuntur, vltro patet, laborem in ſoluendis huiusmodi quaeſtionibus facile in immenſum excreſcere, cui incommodo vix vllum remedium parari poſſe videtur.

Quum itaque diſcrimen inter hanc noſtram methodum generalem atque eam, qua aequationes ſolui ſolent, quae vnicum tantum indeterminatum in numero fractionis relinquunt, ex ipſa hac tractatione

tione satis perspici potest, reliquum est, vt adhuc ostendamus, quibus cautionibus haec ipsa methodus ita extendi potest, vt ad plures indeterminatos aeque possit adplicari.

Sumamus in hunc finem aequationem quatuor indeterminatorum methodo generali supra iam expeditam, vbi erat

$$v = 16 - x - y - 2z - \frac{x + 2y + z - 2}{3}.$$

atque methodo huic conuenienter ponatur

$$\frac{x + 2y + z - 2}{3} = p$$

vt fiat

$$v = 16 - x - y - 2z - p$$

$$\text{et } x = 3p + 2 - 2y - z.$$

In hac aequatione pro x assumantur iam loco p numeri determinati, ita tamen vt $3p + 2$ maior fiat, quam summa coefficientium y et z, quae in nostro casu est $= 3$. Hac scilicet ratione efficitur vt valor x positiuus fieri possit.

Hoc modo

posito	$p = 1.$	erit	$x = 5 - 2y - z$
	$p = 2$	- - - -	$x = 8 - 2y - z$
	$p = 3$	- - - -	$x = 11 - 2y - z$
	$p = 4$	- - - -	$x = 14 - 2y - z$
	etc.		etc.

In qualibet harum pro x ortarum aequationum, loco y et z omnes numeri possibiles integri et positiui assumi debent, quibus valor positiuus indeterminati x non destruitur et qui praeterea cum valoribus pro x et p in aequatione pro v substituti etiam huius valorem ita determinant, vt positiuus maneat. Hoc modo quilibet numerus loco p positus magnum plerumque numerum solutionum offert, nec omnes solutiones elicitae sunt, antequam pro p omnes numeri assumti sunt, qui modo dictis conditionibus non repugnant, atque in aequatione x ex quolibet valore pro p orta pro y et z itidem omnes conuenientes numeri adhibiti sunt.

Si nullus indeterminatorum in numeratore fractionis cum coefficiente $= 1$, vti x in nostro casu occurrit, valor x pro quolibet assumto valore p non immediate per aequationem formae integrae inuenitur,

tur, sed solutionem nouae inde ortae aequationis indeterminatae requirit. Si *v. g.* fractio fuisset

$$\frac{8x + 9y + 10z}{15} = p$$

$$8x + 9y + 10z = 15p.$$

pro quolibet diuerso determinato valore p nouam obtinemus aequationem

$$\begin{array}{ll} p = 1. & 8x + 9y + 10z = 15. \\ p = 2 & 8x + 9y + 10z = 30 \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

quarum resolutione facta tandem constare potest, quinam numeri integri x, y, z, substituendi sunt, vt hisce aequationibus satisfieri possit. Est autem in hac aequatione numerus indeterminatorum semper minor, quam in aequatione proposita. Generaliter itaque solutio aequationis m indeterminatorum tantum solutione aequationum $m - 1$; $m - 2$; etc. - - - 2 indeterminatorum absoluitur, licet in casibus specialibus ex hac serie aequationum soluendarum vna vel plures excidere possint; quod vbique locum inueniet, quoties coefficiens indeterminati separandi reliquorum coefficientes vel omnes vel aliquot eorum absque residuo diuidit. Haec quoque est caussa, quare solutio nostri exempli nulla eiusmodi solutione subsidiaria implicatur.

Redeamus iam ad ipsam exempli propositi solutionem, in quo posito $p = 1$. aequationes

$$x = 3p + 2 - 2y - z$$

et $v = 16 - x - y - 2z - p$

abeunt in has $x = 5 - 2y - z$

et $v = 10 + y - z$

Hic ex aequatione pro x palam fit, quod $z < 3$ et $y < 2$ sumendum sit, ne x euanescat vel in negatiuum valorem abeat. Deinde ex hisce valoribus ii tantum combinandi sunt, qui summam $2y + z$ infra numerum 5 deprimunt.

$$\begin{array}{lll} \text{Posito itaque} & z = 1. \text{ hinc} & 7z = 7 \\ \text{et} & y = 1 & 5y = 5 \\ \text{erit} & x = 2 & 4x = 8 \\ & v = 10. & 3v = 30. \end{array}$$

adeoque summa productorum $= 50$.

Posito

Poſito	$z = 2$	vnde	$7z = 14$
et	$y = 1$		$5y = 5$
erit	$x = 1$		$4x = 4$
et	$v = 9$		$3v = 27$

et ſumma productorum iterum $= 50$. Nec alias poſititiones loco z et y admittit aſſumtio $p = 1$.

Aſſumatur iam $p = 2$

erit $x = 8 - 2y - z$

atque $v = 6 + y - z$.

Iterum hic ex aequatione pro x colligitur, quod y non maior quam 3, nec z maior quam 5 ſumi poſſit, ſi x neque euaneſcere neque in negatiuum valorem tranſire debeat. Quinam autem ex hiſce valoribus loco y et z ſubſtituendis coniungi poſſunt, ſumma $2y + z$, quae numerum 7 excedere non debet, prodit. Poſito ſic $y = 1$, z omnes valores ab 1 vsque ad 5 induere poteſt. Poſito $y = 2$; z numerum 3 non ſuperabit. Poſito denique $y = 3$ erit $z = 1$. Adeoque ſuppoſitio $p = 2$ offert nouem ſolutiones ſequentes.

Poſitis	$y = 1.$	$y = 1$	$y = 1$
	$z = 1.$	$z = 2$	$z = 3$
erit	$x = 5$	$x = 4$	$x = 3$
	$v = 6.$	$v = 5$	$v = 4.$
Poſitis	$y = 1$	$y = 1$	
et	$z = 4$	$z = 5$	
erit	$x = 2$	$x = 1$	
	$v = 3$	$v = 2.$	
Ponatur	$y = 2$	$y = 2$	$y = 2$
et	$z = 1$	$z = 2$	$z = 3$
erit	$x = 3$	$x = 2$	$x = 1$
	$v = 7$	$v = 6$	$v = 5.$

Si denique ponatur

	$y = 3$
et	$z = 1$
erit	$x = 1$
et	$v = 8.$

vbi iterum in omnibus hiſce caſibus erit

$$3v + 4x + 5y + 7z = 50.$$

Supponatur porro $p = 3$. atque reperietur

$$x = 11 - 2y - z$$
$$\text{et} \quad v = 2 + y - z.$$

Si iam ſola aequatio pro x conſideratur, apparet mox, quod 4 limes ſit, quem y non tranſcendere debet, atque z ad numerum 8 poſſit adſcendere; Aſt aequatio pro v inuenta limitem pro z conſtitutum admodum deprimit, ſiquidem minor ſumi debet quam $y + 2$.

Poſito ſcilicet $y = 1$. valor pro z non maior quam 2 aſſumi poterit, ne v euaneſcat vel in negatiuum tranſeat.

Poſito $y = 2$. loco z ad ſummum 3 poni poteſt. Cum $y = 3$ maximus numerus pro z ſubſtituendus erit $= 4$.

Denique cum $y = 4$, z non maior quam 2 combinari poteſt

Ex hac itaque aſſumtione pro p exſurgunt 11 ſolutiones ſequentes.

Poſitis	$y = 1.$	$y = 1$	
et	$z = 1.$	$z = 2$	
erit	$x = 8.$	$x = 7$	
et	$v = 2.$	$v = 1.$	
Poſitis	$y = 2.$	$y = 2$	$y = 2$
et	$z = 1$	$z = 2$	$z = 3$
erit	$x = 6$	$x = 5$	$x = 4$
et	$v = 3$	$v = 2$	$v = 1.$
Porro	$y = 3$	$y = 3$	
et	$z = 1$	$z = 2$	
dant	$x = 4$	$x = 3$	
et	$v = 4$	$v = 3$	
atque	$y = 3$	$y = 3$	
et	$z = 3$	$z = 4$	
erit	$x = 2$	$x = 1$	
et	$v = 2$	$v = 1$	
Denique	$y = 4$	$y = 4$	
et	$z = 1$	$z = 2$	
efficiunt	$x = 2$	$x = 1$	
et	$v = 5$	$v = 4.$	

Atque hic quoque erit vbique

$$3v + 4x + 5y + 7z = 50.$$

Pona-

Ponatur porro $p = 4$.
atque tunc aequationes

$$x = 3p + 2 - 2y - z$$
$$\text{et } v = 16 - x - y - 2z - p$$

transfeunt in has

$$x = 14 - 2y - z$$
$$v = y - 2 - z.$$

Aequatio pro x numerum 6 limitem pro y et numerum 11 limitem pro z quidem conftituit, aft aequationem pro v eos admodum contrahere facile perfpicitur. Scilicet y iam non infra 4 fumi poteft, nec z maior quam 2, et fpeciatim.

Si y ponatur $= 4$; z tantummodo $= 1$ affumi poteft, reliquas omnes pofitiones pro z aequatio pro v excludit.

Pofito $y = 5$, aequatio pro v non admittit $z > 2$. Denique $y = 6$ affumto aequatio pro x non permittit $z > 1$. Vnde quatuor exfurgunt folutiones fequentes

Pofito	$y = 4$	
et	$z = 1$	
erit	$x = 5$	
et	$v = 1$.	
Pofito	$y = 5$	$y = 5$
et	$z = 1$	$z = 2$
erit	$x = 3$	$x = 2$
et	$v = 2$	$v = 1$
Pofito	$y = 6$	
et	$z = 1$	
erit	$x = 1$	
et	$v = 3$.	

Qui cafus datae aequationi

$$3v + 4x + 5y + 7z = 50$$

aeque fatisfacient.

Quodfi iam vlterius quis progredi velit ponendo

$$p = 5.$$

Aequationes $x = 3p + 2 - 2y - z$

atque $v = 16 - x - y - 2z - p$

mutantur in ſequentes

$$x = 17 - 2y - z$$

et $$v = y - 6 - z.$$

Hic autem aequatio pro x non permittit $y > 7$; aequatio pro v autem eundem numerum y non < 8. vnde operatio vlterior poſitione $p = 4$ abrumpitur, nec problema plures ſolutiones, quam 26, quas eruimus, admittit. Abunde itaque patet, quod hiſce adhibitis cautionibus methodus haecce easdem ſolutiones quas antea expoſita offerat. Vtraque itaque generalis eſt atque ſolutioni cuiuslibet aequationum ſub expoſita forma comprehenſarum par dicenda.

Vtraque etiam methodus eodem antea iam memorato incommodo premitur, quod ſcilicet labor in problematibus huius generis complete ſoluendis vehementer creſcat, aucto numero indeterminatorum, qui relinquuntur in numeratore fractionis ortae poſt factam praeparationem, qua ſcilicet vno indeterminatorum ſeparato in altera aequationis parte termini, quantum fieri potuit, forma numerorum integrorum induti ſunt. Methodo enim primum explicata combinationes claſſium ita augentur, vt non niſi magno in iis conſtituendis adhibito ordine caueri poſſit, ne aliqua earum negligatur, atque ſic caſus lateant, quorum euolutionem completa problematis ſolutio iure ſuo poſtulat. Methodus autem ſecunda creſcente ſic numero indeterminatorum incidit in aeque incommodam atque prolixiorem reſolutionem datae aequationis in alias itidem indeterminatas. Nullum autem artificium par eſſe poteſt incomodis hiſce tollendis, ſiquidem cum ipſa quaeſtionum harum natura arctiſſime cohaerent atque ex numero indeterminatorum creſcente naſci quaſi videntur.

II.

ERLÄUTERUNG
EINER VORTHEILHAFTEN
RECHNUNGS-METHODE
AUS BEOBACHTUNG
DER DISTANZ DES MONDES
DIE MEERESLÄNGE ZU FINDEN.

Es gehet der Schiffarth, wie allen andern Künsten und Wissenschaften, welche sich nach und nach sehr langsam entwickeln und ihrer Vollkommenheit nähern, dass man von der Geschichte ihrer Progressen wenig Zuverlässiges findet. Anfangs tappte man ohne Zweifel an den Küsten von einem Lande zum andern; Man wagte es dann über einen Meerbusen zu setzen wenn Wind und Wetter günstig dazu war; und erfahrne Seeleute bedienten sich dan des Tages der Sonne und des Nachts der Sterne, um in ihrer Fahrt die Richtung zu behalten, in welcher sie das Land treffen musten, welches sie suchten.

Etwa um die Mitte des zwölften Jahrhunderts fing man an, die Magnetnadel zur See zu gebrauchen. Ob man gleich damahl nicht anders glaubte, als dass sie sich grade gegen Norden richtete, und sich daher in seiner Fahrt allezeit ziemlich betrogen finden muste, so war doch dies Mittel besser, als was man bis dahin gehabt hatte, die Richtung zu finden, der man in seinem Gange folgte, und die verwegenen Seeleute entferneten sich nach und nach mit grösserer Zuversicht von den Küsten.

Dies Inſtrument und das Logg, womit ſie die Geſchwindigkeit des Schiffs richtig meſſen zu können glaubten, waren nun die einzigen Hülfsmittel, mit welchen ſie groſse Meere mehr durchirrten als durchſchiffeten. Wenn dieſe Inſtrumente ihre gegenwärtige Vollkommenheit auch ſchon damals gehabt hätten, ſo muſſen ſie auf einem langen Wege doch zu gröſſen Unrichtigkeiten führen, und je mehr ſie ſolches empfanden, deſto mehr ſuchten ſie nach Mitteln dieſelben verbeſſern zu können. Der Gradſtock diente ihnen nun die Höhe der Sonne zu meſſen. Sie lerneten daraus die geographiſche Breite zu finden, und ſo unvollkommen auch dieſe Beobachtungen ausfielen, ſo zogen ſie doch dieſe Beſtimmung ihrer Schiffs-Rechnung vor, und verbeſſerten in derſelben hiernach ihre Breite, allein es fehlete ihnen gänzlich an einem Mittel ihre Länge zu verbesſern.

Mit der Erweiterung der Schiffarth vergröſserte ſich ihr Einfluſs auf das Wohl der Staaten, und ſie ward für die an der See gelegenen Länder durchaus nothwendig, wenn ſie nicht das Gleichgewicht gegen ihre Nachbarn gänzlich verlieren wollten. Daher nahmen die Staaten ſelbſt es auf ſich, alles was zur Aufnahme der Schiffarth gereichen konnte, ſelbſt zu veranſtalten, welches bisher nur ein Werk von Privatperſonen geweſen war. Philipp III. König in Spanien war der erſte, welcher einen Preis für diejenigen ausſetzte, die eine Methode angeben würden, wodurch der Schiffer die geographiſche Länge zur See finden und darnach alſo die Schiffsrechnung auch in dieſem Stücke verbesſern könnte, und dies nante man das Problem der Meereslänge.

Dieſem Beiſpiele folgte Holland und nachher Frankreich und England, alle ſetzten anſehnliche Belohnungen auf dieſe Erfindung, und dadurch ward dies eine der berühmteſten Aufgaben, welche die gelehrteſten und ſinnreichſten Köpfe bereits einige Jahrhundert beſchäftiget hat.

Bisher hat man ſich bey dieſer Erfindung an der Natur der Sache unmittelbar gehalten, entweder weil man an keinen Körpern Eigenſchaften wahrgenommen hatte, deren Veränderungen von der Lage des Ortes abhängen, wo er ſich befindet, oder weil man das Geſetz nicht herauszubringen vermochte, wie erſtere von den letztern abhängen. Dies iſt wohl der Fall mit der Abweichung und Abſinkung

der

der Magnetnadel. So viel weiſs man, daſs dieſelbe ſich mit der Länge und Breite des Orts verändere, und es iſt höchſt warſcheinlich, wenn das Geſetz dieſer Veränderung bekannt wäre, daſs man aus Beobachtung der Lage der Magnetnadel die geographiſche Länge und Breite der Oerter, vielleicht beyde, wenigſtens eine, wenn die andre bekannt iſt, werde beſtimmen können. Allein bis dahin, daſs dergleichen entdeckt worden und dienliche Abweichungs- und Abſinkungs-Compaſſe, welche auf der See gehörige Genauigkeit geben, verſertiget werden, kann man freilich bey dieſer Erſindung nur der Narur der Sache unmittelbar folgen.

Die Sonne durchläuft nun in ihrer ſcheinbaren Bewegung in einem Tage oder 24 Stunden ihrer ganzen Parallel-Kreis und kommt damit in dieſer Zeit nach und nach in die Mittagskreiſe aller Oerter der Erde. Weil nun in ſolcher Zeit ihre Bewegung gleichförmig iſt, ſo verhalten ſich die Abſtände der Mittagskreiſe wie die Zeiten welche die Sonne bey dieſer Bewegung zubringt, von dem einen Mittagskreiſe zum andern zu gelangen. Sind zween Mittagskreiſe einen Grad von einander entfernt, ſo gebraucht die Sonne vier Zeitminuten von dem einem zum andern zu gelangen; eine ganze Stunde, wenn ſie 15 Grade von einander entfernt ſind, u. ſ. f. Man erkennet hieraus leicht daſs die Tagszeiten an Orten von verſchiedener Länge anders und anders ſeyn, und folglich die Uhren an ſolchen Orten, nach dem Stande der Sonne in einerley Augenblick ganz verſchiedene Stunden zeigen müſſen. Wenn die Uhr in dem Meridian eines Orts G. 12. zu Mittage iſt, ſo iſt ſie in dem Meridian 15° gegen Oſten ſchon 1. n. M. in dem Meridian 30° gegen Oſten 2. U. n. Mitt. u. ſ. ſ. Umgekehrt iſt es dann 11 U. v. M. in dem Meridian 15° gegen Weſten, 10 U. v. M. in dem Meridian 30° gegen Weſten u. ſ. f. Und eben der Unterſchied bleibt, wenn gleich die Stundenzahl im Meridian G. ſich ändert. Wenn ſie hier 6 U. v. M. iſt, ſo iſt ſie in den nach Oſten gelegenen Meridianen 7, 8, u. ſ. f. in den nach Weſten gelegenen 5, 4, u. f. wenn ſie von dem Meridian G, 15°, 30°, u. ſ. f. entfernet ſind. Wenn alſo die Länge des Orts G bekannt iſt, und ich unter einem Meridian P wiſſen könnte, wie viel die Uhr unter dem Meridian G iſt, wenn ſie unter meinen Meridian 3 oder 7

u. s. f. ist, mit einem Worte, wenn ich den Unterscheid der Uhren unter beyden Meridianen, und welche von beiden vorgehet, kennete, so könnte daraus der Abstand der Meridiane in Grade und Gradminuten, und welcher von beiden Oestlich ist, hergeleitet werden. Dann würde der in Graden gefundene Abstand zu der bekannten Länge von G, addirt, wenn P östlich, oder von derselben subtrahirt, wenn P westlich gefunden worden, die Länge des Meridian P geben.

Hiedurch war also das Problem der Meereslänge auf die folgende Aufgabe gebracht:

Eine Methode angeben, wodurch der Schiffer auf der See wissen kann, wie viel die Uhr an einem Orte von bekannter Länge ist.

Dieser Aufgabe durch eine Maschine, welche die Zeit genau anzeiget, ein Genüge zu thun, ist eine Arbeit für die Künstler bisher gewesen, und die Astronomen bemüheten sich zu gleicher Zeit, Erscheinungen am Himmel aufzusuchen, die zur See beobachtet werden konten, oft genug vorkamen und welche die Uhr für einen bekannten Meridian angaben.

Unter den Künstlern, haben de Sully und Iohn Harrison sich Aufmerksamkeit erworben. Ersterer brachte 1726. eine Seeuhr zu stande, allein sie ist ohne Zweifel der Absicht nicht angemessen gewesen, indem man in der Folge keinen Gebrauch davon gemacht hat. Und eben so wenig scheinet die nachher von le Roi verfertigte Uhr zu ihrer Vollkommenheit gebracht zu seyn.

Grösseres Aufsehen machte besonders 1761 Harrisons Erfindung in England. Dieser Mann der zum Schreiner- und Zimmer-Handwerk erzogen war, hatte schon im Jahr 1726 angefangen Erfahrungen über alle Veränderungen zu machen, die der Gleichförmigkeit in der Bewegung einer Seeuhr hinderlich seyn könnten, und wie man denselben begegnen könnte. Seine Entdeckungen hierin legte er 1735 den Gelehrten und Künstlern in London vor; erhielte ein sehr vortheilhaftes Zeugniss, und 1736, ward seine erste Arbeit vom Cap. Roger Wills auf einer Seereise geprüft, und erhielte von demselben das Zeugniss, dass diese Uhr einen Fehler von anderthalb Graden, der sich in der Schiffs Rechnung von Lissabon bis am Canal eingeschlichen, verbessert hätte. Nun bewilligte die Commission des Longitude ihm eine Beihülfe, um seine Erfindung noch zu grösserer Voll-

kommen-

kommenheit zu bringen. Er erhielte andre ehrenvolle Ermunterungen theils von der Commission der Länge, theils von der Königlichen Societät zu London. Unterdessen setzte er seine Versuche in der Stille fort, bis 1761, da er dann seine Seeuhr in Gestalt einer grossen Taschenuhr etwa 5 Zoll im Durchmesser zu stande gebracht hatte und von der Commission der Länge Befehl erhielte, sich zu einer Reise anzuschicken, worauf seine Uhr nach der Parlaments Acte von 1714 probirt werden sollte, eine Reise die seines Alters wegen, nachher seinem Sohne Wilhelm Harrison übertragen ward.

Bey dieser Prüfung wurden alle nöthige Vorsichtigkeiten angewandt. Harrison und ein Astronome Robinson, wurden mit der Uhr auf dem Deptfort, worauf der Gouverneur von Jamaica Lyttleton überreisete, nach Jamaica eingeschifft, und die Uhr ward in einem Gehäuse, mit 3 Schlössern versehen, aufbewahrt, zu dem einen hatte gedachter Gouverneur den Schlüssel; zu dem andern der Capitain, und zum dritten der Lieutenant des Schiffs. Zu Portsmouth bestimmte Herr Robertson vor der Abfahrt die wahre Zeit und hatte den Gang der Uhr beobachtet, welche dann nach dem Meridian von Portsmouth gestellt ward. Zu Jamaica bestimmte Herr Robinson bey ihrer Ankunft die wahre Zeit und was die Harrisonsche Uhr zeigte. Alles ward in Gegenwart von Zeugen gemacht, aufgeschrieben und versiegelt der Admiralität zugeschickt. Es fand sich, dass die Uhr auf der Hinreise nach dem Unterscheide der Meridiane nur 5 Zeit Secunden in eilf Wochen und 4 Tagen verlohren hatte, wenn man den Unterscheid der Meridiane zu 5 St. 2 Min. 51 Sec. annimt. Weil aber dieser Unterscheid nicht so ganz zuverläsig seyn mochte, so ward der Versuch fortgesetzt, Harrison und Robinson wurden nun auf der Schalouppe Merlin mit der Uhr eingeschifft und langten gegen den 2 April 1762 wieder zu Portsmouth an. Sie hatten einen starken Sturm auf der Reise ausgestanden, und gleichwol betrug der Irrthum der Uhr von ihrer Abreise aus Portsmouth an, bis sie wieder daselbst anlangten, nicht mehr als 1 Min. 54″ in Zeit, welches noch nicht einen halben Grad in dem Unterscheide der Mittagskreise ausmacht. Hiedurch hatte also Harrison ein Recht auf die Belohnung von 20000 Pf. St. nach der Parlementsacte von 1714, die ihm auch in der Folge ausgezahlt worden.

Nunmehro muſte wohl jederman glauben, daſſ dieſe Erfindung gemacht ſey, aber deſto gröſſer muſte die Verwunderung ſeyn, daſs die Commiſſion der Länge aufs neue Preiſe für dieſe Erfindung ausſetzte. Dieſes und weil dieſe Uhr ſelbſt für die Königlichen Schiffe nicht angeſchafft worden, iſt wohl ein untrügliches Kennzeichen, daſs auch dieſe Erfindung das vorgeſteckte Ziel noch nicht erreicht habe. Perſonen, welche ſie auf Seereiſen geſehen und gebraucht haben, haben mir verſichert, das diejenigen, welche ſie gehabt und welche für 70 Pf. Sterl. gekauft geweſen, zu ſolcher Abſicht nicht hätten angewandt werden können.

Unterdeſſen waren die Aſtronomen auch nicht müſſig geweſen zu verſuchen, ob ſie nicht am Himmel eine ſolche Uhr aufſtellen könnten, an welcher man die Tageszeit eines Ortes, deſſen Länge bekannt iſt, erkennen könnte. Sie hatten ihre Hofnung in dieſer Abſicht auf den Mond gerichtet, der ſich in ſeiner Bahn ziemlich geſchwinde beweget und über einen halben Grad in jeder Stunde zurücklegt, mithin in einer Zeitminute über eine halbe Gradminute. Wenn man daher in Beſtimmung ſeiner Länge in der Beobachtung auch auf 2 Gradminuten fehlte, ſo würde der Irrthum in der Zeit nicht 4 Minuten und daher in Beſtimmung der geographiſchen Länge keinen Grad betragen. Hiebey kam es nun auf zwey Stücke an, erſtlich den Mond genau genug berechnen und danächſt ihn auf dem Schiffe ſo genau beobachten zu können, daſs der Fehler ſich in der eben angezeigten Gränze von zwo Minuten hielte.

In der erſten Abſicht haben die Herren Euler, Clairaut, und der ſeel. Mayer in Göttingen vorzüglich gearbeitet, und es wurden endlich beſonders von dem letztern vorzüglich gute und zur Rechnung bequeme Tabellen hervorgebracht. Unter den Erſcheinungen, die man am Monde oft genug beobachten konnte, fand man ſeine Diſtanzen von der Sonne und von den gröſten Fixſternen der Erfindung der Länge am angemeſſenſten. Zu dem Ende war eine richtigere Beſtimmung der Lage dieſer Sterne und Berechnung der Sonne nöthig. Um beides haben De la Caille und vorerwähnter Mayer vorzügliche Verdienſte und ihre Sonnentafeln und Sternverzeicheiſſe zeichnen ſich ihrer Genauigkeit wegen beſonders aus.

Zum

Zum guten Glück kam nun auch der Hadleysche See Octant ans Licht, welcher, wie man selbst in England angeben soll, eine Erfindung eines Americaners ist, von dem sie Hadley nach England gebracht, und von den dasigen Künstlern ausführen lassen. Mit diesem Instrument lassen sich Höhen und Distanzen mit erforderlicher Genauigkeit messen, und wenn es bis zu einen Sextanten vergrössert wird, leztere in ihrem erforderlichen Umfange. De la Caille hatte auf seiner astronomischen Reise nach dem Cap der guten Hofnung die Messung der Distanzen des Mondes vorzüglich geschickt gefunden die Meereslänge zu finden und diesen Gedanken bey seiner Zurückkunft bekannt gemacht. Die Engländer, auf alles hieher gehörige aufmerksam, ergriffen denselben, fanden ihn brauchbar und suchten ihn für die Schiffarth bequem zu machen. Vermuthlich war die Commission der Länge dadurch bewogen worden, der Eulerschen Mondtheorie und den Mayerschen Mondtafeln einen Theil der ausgesetzten Preise zu bestimmen. Ein gewisser Schriftsteller tadelt nur die dabey beobachtete Proportion und dass der Franzose, der ein ausgezeichnetes Verdienst dabey hat, gänzlich übergangen sey.

Indessen veranstaltete nun die Commission der Länge, dass die Distanzen des Mondes von der Sonne und einigen der vornehmsten Fixsterne für jeden Tag von drey zu drey Stunden von zwo Personen besonders der Richtigkeit wegen berechnet und von einer dritten verglichen und zur Aufnahme der Schiffarth in den Nautical-Almanac eingerückt würden. Sie werden auch aus England mitgetheilt in der Connoissance des temps auf den Meridian von Paris reducirt angeführt. Da die Unterscheide dieser Distanzen von drey zu drey Stunden beynahe gleich sind, so kann man für jede Distanz durch die blosse Proportions Regel die dazu gehörige Londner oder Pariser Zeit, und umgekehrt, für jede dieser Zeiten, die dazu gehörige Distanz finden. Und der Schiffer erkennet also an diesen Distanzen die Uhr in Paris und London. Sie sind für ihm das was die Uhrenzeiger für diese Städte selbst sind, indem er aus der gemessenen Distanz ausrechnen kann, wie viel zur Zeit der Messung derselben die Uhr an dem Orte gewesen, auf dessen Meridian die Tafeln oder Verzeichnisse gestellt sind, nach denen er rechnet. Ehe aber diese Rechnung

ange-

angestellet werden kann, muſs die gemessene Distanz von der Refraction und Parallaxe befreiet werden.

In dem Nautical Almanac und daher auch in der Connoissance des temps sind diese Distanzen so berechnet, wie sie ohne Einfluſs der Refraction und Parallaxe seyn würden, und sie konnten auch nicht anders berechnet werden, wenn sie überall gebraucht werden sollten. Durch die Messung der Distanz erhält man sie mit Refraction und Parallaxe. Hievon muſs die gemessene Distanz also zuerst befreiet werden, ehe man sie mit der berechneten vergleicht, und dafür die Pariser oder Londoner Zeit sucht, und deswegen muſs man auch die Höhe der Sonne oder des Sterns, imgleichen die Höhe des Mondes zu eben der Zeit messen, wenn man die Distanz misset, wozu also drey Beobachter gehören. Wenn man diese Beobachtungen hat, so findet man in den Refractions-Tafeln die zu den Höhen gehörige Refraction. Eben so findet man auch in der Connoissance des tems für jeden Tag von 12 zu 12 Stunden die Horizontalparallaxe des Mondes, und man kann hier diejenige ohne weitere Correction gebrauchen, welche der Beobachtungs Zeit am nächsten ist, indem ihre veränderung in einem ganzen Tage lange keine Gradminute beträgt. Aus dieser Horizontalparallaxe findet man dann die der gemessenen Mondhöhe zugehörige Parallaxe aus der Analogie sin. tot : cos. der Höhe = Horiz. Parall. : Höhenparallaxe. Diese addiret man zu der gemessenen Mondhöhe, oder subtrahirt sie von deren Complement, dem Abstande des Mondes vom Scheitelpunkt. Nach diesen bey den gemessenen Höhen angebrachten Correctionen berechnet man aus der gemessenen Distanz, und den gefundenen wahren Höhen die wahre oder von Refraction und Parallaxe befreiete Distanz.

Um diese Rechnung den Seeleuten zu erleichtern hat die Commission der Länge Tabellen berechnen lassen, nach welchen man aus den angeführten datis die wahre Distanz durch leichte Addition und Subtraction finden kann, wenn man damit versehen ist. Diese Tafeln sollen dazu dienen die Auflösung Sphärischer Dreyecke zu vermeiden, welches sie allerdings auf eine vortheilhafte Art leisten. Allein da diese Tabellen doppelte Eingänge haben, so erfordern sie etwas umständliche Interpolationen, und ich finde die dadurch erhaltenen

tenen Vortheile so grofs nicht, als es dem ersten Ansehen nach scheinet.

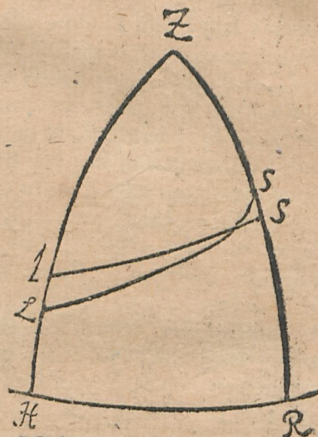
Die Rechnungen der Sphärischen Trigonometrie werden nur besonders dadurch beschwerlich, wenn das sphärische Dreyeck in zwey rechtwincklichte aufgelöset werden mufs, da man erst Ueberlegung anstellen mufs, ob das Perpendicul innerhalb oder aufserhalb des Dreiecks falle, also Summe oder Differenz für die Seite oder den Winkel des einen rechtwinkelichten Dreiecks zu nehmen sey; imgleichen, ob das gefundene stumpf oder spitz sey. Allein in einem einzelnen Falle, wie dieser, können dafür sehr leichte Regeln gegeben werden, die ohne Mühe zur mechanischen Fertigkeit gebracht werden; und wenn man dan bey Bestimmung der Winkel und Auffsuchung der Sinus- oder Tangenten-Logarithmen die Secunden, wie hier geschehen kann, aufser Acht läfset, so verliehren auch diese Rechnungen den gröften Theil des beschwerlichen, was sie sonst wegen Interpolation der Logarithmen in Ansehung der Secunden mit sich führen.

Indessen giebt es auch hier eine Methode, wobey man der Zerfällung des Dreiecks in zwey rechtwinklichte, und daher der Betrachtungen, ob das Perpendicul innerhalb oder aufserhalb des Dreiecks falle; ob die Bogen auf der Grundlinie addirt oder subtrahirt werden müssen, und ob das gesuchte stumpf oder spitz genommen werden solle, gänzlich überhoben seyn kann. Herr Chevalier De Borda hatte solche dem Herrn De la Lande mitgetheilt, welcher auch die Rechnungs-Regeln derselben, jedoch mit Verschweigung der Gründe in der Connoissance des temps für das Jahr 1775, mit einem darnach gerechneten Exempel anführte. Nachdem er vorher weitläuftig von den in England herausgegebenen Tafeln, deren ich vorhin gedacht habe, gehandelt hatte, so setzte er hinzu:

„Ceux qui n'ont point les tables, dont nous venons de parler, „verront içi avec plaisir une methode très simple et trés elegante, qui „m'a été communiquée par M. le Chevalier de Borda, pour y „suppléer.„

Und ich habe geglaubt, dafs man wenigstens mit eben so viel Vergnügen hier die Gründe sehen werde, welche auf verschiedenen Wegen zu dieser allerdings vortheilhaften Methode führen können, und welche daneben ſo allgemein ſind, daſs ſie einen Fall in der ſphäriſchen Trigometrie zu berechnen überhaubt erleichtern. Da ich einen Seeofficier in den Schiffsrechnungen zu unterrichten Gelegenheit hatte, ſo war ich genöthiget dieſe Gründe aufzuſuchen, und was ich bey dem Anlaſſe gefunden, will ich hier mittheilen.

Um ſich hievon einen vollſtändigen Begriff zu machen, muſs man bis zu der Unterſuchung zurückgehen, wie man dieſe Berechnung durch Auflöſung ſphäriſcher Dreiecke anſtellen müſſe. Es ſey alſo HR der Horizont, ZH der Scheitelkreis des Mondes, ZR der Scheitelkreis der Sonne oder eines Fixſterns, die ſich im Scheitelpuncte Z ſchneiden. HL, die ſcheinbare oder gemeſſene Höhe des Mondes, Hl die wahre oder von Refraction und Parallaxe befreiete; RS die Scheinbare, Rs die wahre oder von der Refraction befreiete



Höhe der Sonne oder eines Fixſterns. LS die gemeſſene, ls die wahre Diſtanz des Mondes von der Sonne oder einem Fixſtern; Man erhält hiedurch zwey ſphäriſche Dreiecke, die einen gemeinſchaftlichen Winkel Z haben, darin die Complemente der ſcheinbaren und wahren Höhen und die ſcheinbaren und wahren Diſtanzen die Seiten ſind,

Im Dreiecke ZLS ſind alle drey Seiten aus der Beobachtung bekannt, ZL und ZS, ſind Complemente der gemeſſenen Höhen und LS iſt die gemeſſene Diſtanz, und man findet den Winkel Z aus einer der folgenden beyden Proportionen

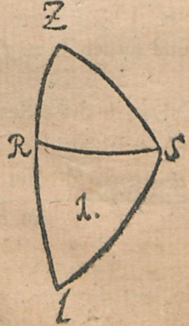
$$\text{ſin } ZL \times \text{ſin. } ZS : \text{ſin } \frac{LS + (ZL - ZS)}{2} \cdot \text{ſin } \frac{LS - (ZL - ZS)}{2}$$
$$= (\text{ſin tot.})^2 : (\text{ſin } \tfrac{1}{2} Z)^2$$

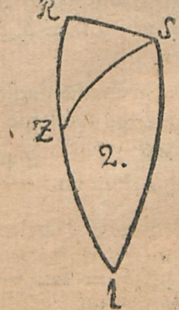
oder

$$\text{oder } \sin ZL \times \sin ZS : \sin \frac{ZL + ZS + LS}{2} \cdot \sin \frac{ZL + ZS - LS}{2} = (\sin \text{tot.})^2 : (\cos. \tfrac{1}{2} Z)^2$$

Man findet dieſen Winkel beſtimmt, und darf keine Unterſuchung anſtellen, ob er ſtumpf oder ſpitz zu nehmen ſey.

Hiedurch hat man nun in dem Dreiecke Zls, die beiden Seiten Zl und Zs nebſt dem eingeſchloſſenen Winkel Z, und daraus berechnet man die dritte Seite Sl, als die wahre Diſtanz des Mondes von der Sonne oder Fixſtern. Bey dieſer Rechnung fället man nun aus s oder l ein Perpendicul auf die gegenüberſtehende Seite, wobey dann zu erwägen iſt, ob das Perpendicul innerhalb oder auſſerhalb falle. Dies hängt nun von dem Winkel Z ab; Wenn er ſtumpf iſt, ſo fällt daſſelbe auſserhalb; wenn er ſpitz iſt, innerhalb des Dreiecks, im erſten Falle liegt es gegen das Supplement des Winkels Z, im andern gegen den Winkel Z ſelbſt. Ob es daher gleich willkührlich iſt, ob man das Perpendicul aus l oder s fällen will, ſo iſt es doch anzurathen, daſs man allezeit auf einerley Art verfahre und es aus dem an der kleinern Seite liegenden Winkel allezeit auf die gröſsere Seite ziehe. Folgende beyde Figuren, wo in der erſten Z ſpitz iſt und SR innerhalb des Dreiecks fällt; in der zwoten Z ſtumpf iſt, und daher SR auſserhalb des Dreiecks Zls fällt, ſtellen dies ſinnlich vor.





Nun

Nun berechnet man in dem rechtwinklichten Dreiecke ZRS die Seite ZR nach der Analogie

$$\text{ſin. tot.} : \text{coſ. } Z = \text{tang. } ZS : \text{tang. } ZR.$$

und weil nun das Perpendicul in beiden Fällen allezeit gegen einen ſpitzen Winke lieget, auch die Seiten Zs und Zl als Complemente der Höhen allezeit ſpitz ſind, ſo iſt ZR allezeit ſpitz.

Für den Fall der erſten Figur, da sR innerhalb fällt, hat man nun $Rl = Zl - ZR$. Für den Fall der zwoten Figur, da sR auſserhalb liegt, iſt $Rl = Zl + ZR$. Hieraus ergiebt ſich endlich sl aus der Analogie

$$\text{coſ. } ZR : \text{coſ. } Rl = \text{coſ. } ZS : \text{coſ. } sl.$$

und da ZR ſowohl als Zs allezeit ſpitz ſind, ſo hängt die Beſchaffenheit von sl bloſs von Rl ab, das iſt, sl iſt ſpitz, wenn Rl ſpitz iſt, und sl iſt ſtumpf, wenn Rl ſtumpf iſt.

Wenn man ſich auf dieſe Art zu einerley Verſahren gewöhnt, ſo erleichtert man ſich die bey demſelben anzuſtellenden Erwägungen und man gelanget ſehr bald zu einer mechaniſchen Fertigkeit. Dadurch verliehret dann auch dieſe Triangularrechnung alles beſchwerliche, weitläuſtig wird man ſie ohne dies nicht finden.

Um aber die Gründe einer noch einſachern Rechnung aufzuſuchen, bey welcher alle dergleichen Ueberlegungen wegſallen und wobey man das geſuchte beſtimmt findet, ſo ſetze man in der erſten Figur S. 38. der Kürze wegen

$ZS = a$; $ZL = b$. $SL = d$; und ferner $Zs = f$; $Zl = g$ und $sl = x$.

dann hat man aus dem erſten Dreiecke ZSL nach der erſten im vorigen angeſührten Analogie

$$(\text{ſin. } \tfrac{1}{2} Z)^2 = \text{ſin. } \frac{d + (a - b)}{2} \cdot \text{ſin } \frac{d - (a - b)}{2} \cdot \frac{(\text{ſin tot.})^2}{\text{ſin. } a \,\text{ſin. } b}$$

und aus dem andern Dreiecke

$$(\text{ſin. } \tfrac{1}{2} Z)^2 = \text{ſin. } \frac{x + (f. - g)}{2} \cdot \text{ſin. } \frac{x - (f - g)}{2} \cdot \frac{(\text{ſin. tot.})^2}{\text{ſin. } f. \text{ſin. } g.}$$

Dies

Dies giebt nun $\sin.\frac{x+(f-g)}{2}\sin.\frac{x-(f-g)}{2} =$

$$\frac{\sin\tfrac{1}{2}(d+(a-b)).\sin\tfrac{1}{2}(d-(a-b)).\sin f.\sin g.}{\sin a.\sin b.}$$

Es ist aber

$$\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{f-g}{2}\right)=\sin\frac{x}{2}\cos.\frac{f-g}{2}+\cos.\frac{x}{2}.\sin\frac{f-g}{2}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{f-g}{2}\right)=\sin\frac{x}{2}\cos.\frac{f-g}{2}-\cos.\frac{x}{2}.\sin\frac{f-g}{2}$$

Daraus erhält man

$$\sin\frac{x+(f-g)}{2}.\sin\frac{x-(f-g}{2}=\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2\left(\cos.\frac{f-g}{2}\right)^2$$
$$-\left(\cos.\frac{x}{2}\right)^2\left(\sin\frac{f-g}{2}\right)^2$$

Und wenn man nun $1-\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2$ stat $\left(\cos.\frac{x}{2}\right)^2$, danächst 1 stat $\left(\sin\frac{f-g}{2}\right)^2+\left(\cos.\frac{f-g}{2}\right)^2$ schreibt, so hat man

$$\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2-\left(\sin\frac{f-g}{2}\right)^2=\frac{\sin\frac{d+(a-b)}{2}.\sin\frac{d-(a-b)}{2}\sin f.\sin g.}{\sin a.\sin b.}$$

Diese Formul ist zu logarithmischen Rechnungen nicht bequem genug. Wenn man aber $1-\left(\cos.\frac{x}{2}\right)^2$ stat $\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2$ und $1-\left(\cos.\frac{f-g}{2}\right)^2$ stat $\left(\sin\frac{f-g}{2}\right)^2$ schreibt, so erhält man

$$\left(\cos.\frac{x}{2}\right)^2=\left(\cos.\frac{f-g}{2}\right)^2-\frac{\sin\frac{d+(a-b)}{2}.\sin\frac{d-(a-b)}{2}.\sin f.\sin g.}{\sin a.\sin b.}$$

welches auch so ausgedrückt werden kann

 (cos.

$$\left(\cos.\frac{x}{2}\right)^2 = \left(1 - \frac{\sin\frac{d+(a-b)}{2}.\sin\frac{d-(a-b)}{2}.\sin f.\sin g.}{\sin a.\sin b.\left(\cos.\frac{f-g}{2}\right)^2}\right)\left(\cos.\frac{f-g}{2}\right)^2$$

Und dieſe Formul läſset ſich ganz bequem durch Logarithmen rechnen.

Man nenne P einen Bogen deſſen ſinus iſt,

$$\frac{\sqrt{\sin\frac{d+a-b}{2}.\sin\frac{d-(a-b)}{2}.\sin f.\sin g.}}{\cos.\frac{f-g}{2}.\sqrt{\sin a.\sin b.}}$$

ſo hat man

$$\sin P = \frac{\sqrt{\sin\frac{d+a-b.}{2}.\sin\frac{d-(a-b)}{2}.\sin f.\sin g.}}{\cos\frac{f-g}{2}.\sqrt{\sin a.\sin b.}}$$

Und nun läſſet ſich P durch Logarithmen finden. Man nimmt die Summe der Logarithmen der vier Sinus des Zählers, addirt noch um die Dimenſion herzuſtellen, den doppelten Logarithmen des ſinus totus und ziehet davon ab die Summe der Sinuslogarithmen von a und b; oder wenn man noch vortheilhafter rechnen will, ſo addire man zu den 4 Sinuslogarithmen des Zählers das arithmetiſche Complement der Sinurlogarithmen von a und b. Was man dadurch erhält, halbirt man; und von ſolcher Hälfte ziehet man den Caſinuslogarithmen von $\frac{f-g}{2}$ ab, ſo hat man den Sinuslogarithmen von P und findet P in der Tafel.

Nun war $\left(\cos.\frac{x}{2}\right)^2 = (1-(\sin P)^2).\left(\cos.\frac{f-g}{2}\right)^2$ und wenn man $(\cos.P)^2$ ſtat $1-(\sin P)^2$ ſchreibt

(coſ.

$\left(\text{cof.}\,\frac{x}{2}\right)^2 = (\text{cof. P})^2 \,.\, \left(\text{cof.}\,\frac{f-g}{2}\right)^2$ Daher wird

$$\text{cof.}\,\frac{x}{2} = \text{cof. P}\,.\,\text{cof.}\,\frac{f-g}{2}.$$

Wenn man alſo weiter zu den Coſinuslogarithmen von P, den ſchon vorher gefundenen Coſinuslogarithmen von $\frac{f-g}{2}$ addirt und den Sinustotuslogarithmen abziehet, ſo hat man den Coſinuslogarithmen von $\frac{x}{2}$ und findet alſo $\frac{x}{2}$ und folgends x nach den Sinustafeln.

Wenn man hiebey in Erwägung ziehet, daſs in dem Ausdruck

$$\left(\text{cof.}\,\frac{x}{2}\right)^2 = \left(1 - \frac{\text{ſin}\,\frac{d+a-b}{2}\,.\,\text{ſin}\,\frac{d-(a-b)}{2}\,\text{ſin}\,f.\,\text{ſin}\,g.}{\text{ſin}\,a.\,\text{ſin}\,b.\left(\text{cof.}\,\frac{f-g}{2}\right)^2}\right)\left(\text{cof.}\,\frac{f-g}{2}\right)^2$$

ein Theil deſſelben, nämlich

$$\frac{\text{ſin}\,\frac{d+a-b}{2}\,.\,\text{ſin}\,\frac{d-(a-b)}{2}}{\text{ſin}\,a.\,\text{ſin}\,b.} = (\text{ſin}\,\tfrac{1}{2}\,Z)^2$$

ſey; den ſinus totus $= 1$ geſetzt, da dan auch

$$\left(\text{cof.}\,\frac{x}{2}\right) = \left(1 - \frac{\text{ſin}\,f.\,\text{ſin}\,g.\,(\text{ſin}\,\frac{1}{2}\,Z)^2}{\left(\text{cof.}\,\frac{f-g}{2}\right)^2}\right)\left(\text{cof.}\,\frac{f-g}{2}\right)^2 \text{ iſt,}$$

ſo wird man finden, daſs eben dieſe Formul auch aus dem analytiſchen Ausdruck, wodurch aus einem Winkel und den beiden ihn im ſphäriſchen Dreieck einſchlieſsenden Seiten die dritte Seite beſtimmt wird, hergeleitet werden könne.

Man hat nämlich, wenn wir unſre Benennungen beybehalten

$$\text{cof.}\,x = \text{cof.}\,f.\,\text{cof.}\,g. + \text{ſin}\,f.\,\text{ſin}\,g.\,\text{cof.}\,Z.$$

Schreibt man nun $1 - 2\,(\text{ſin}\,\frac{1}{2}\,Z)^2$ ſtat cof. Z, ſo erhält man

cof.

$$\cos x = \cos f . \cos g . + \sin f . \sin g . - 2 \sin f . \sin g . (\sin \tfrac{1}{2} Z)^2 .$$

$$\text{oder } \cos x = \cos (f-g) - 2 \sin f . \sin g . (\sin \tfrac{1}{2} Z)^2$$

Wenn man nun ferner

$$1 - 2 \left(\sin \frac{x}{2}\right)^2 \text{ stat } \cos \frac{x}{2}$$

und $2 \left(\cos \dfrac{f-g}{2}\right)^2 - 1$ stat $\cos (f-g)$ schreibt, so erhält man

$$\left(\sin \frac{x}{2}\right)^2 = \left(\cos \frac{f-g}{2}\right)^2 - \sin f . \sin g . (\sin \tfrac{1}{2} Z)^2$$

$$\text{oder } \left(\sin \frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sin f . \sin g . (\sin \frac{1}{2} Z)^2}{\left(\cos \frac{f-g}{2}\right)^2}\right) \left(\cos \frac{f-g}{2}\right)^2$$

wie zuvor. Und hieraus siehet man von selbst, dass nach dieser Methode überhaupt aus zwo Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die dritte Seite vermittelst der Logarithmen bequem gefunden werden kann, ohne dass es nöthig ist, das Dreyeck in zwey rechtwinklichte zu zerfällen.

Zu eben diesen Ziel kan man auch durch die Formul für $(\cos \frac{1}{2} Z)^2$ gelangen, die im vorigen angewandt ist.

Man hat auch hier

$$(\cos \tfrac{1}{2} Z)^2 = \frac{\sin \frac{a+b+d}{2} . \sin \frac{a+b-d}{2} . (\sin \text{tot})^2}{\sin a . \sin b .}$$

$$(\cos \tfrac{1}{2} Z)^2 = \frac{\sin \frac{f+g+x}{2} . \sin \frac{f+g-x}{2} . (\sin \text{tot})^2}{\sin f . \sin g .}$$

Und daraus

$$\sin . \frac{f+g+x}{2} . \sin \frac{f+g-x}{2} = \frac{\sin \frac{a+b+d}{2} . \sin \frac{a+b-d}{2} . \sin f . \sin g .}{\sin a . \sin b .}$$

Hier ist nun

$$\sin\left(\frac{f+g}{2}+\frac{x}{2}\right) = \sin\frac{f+g}{2}\cos.\frac{x}{2} + \cos.\frac{f+g}{2}\sin\frac{x}{2};$$

$$\sin\left(\frac{f+g}{2}-\frac{x}{2}\right) = \sin\frac{f+g}{2}\cos.\frac{x}{2} - \cos.\frac{f+g}{2}.\sin\frac{x}{2}$$

Wodurch man also erhält

$$\sin\frac{f+g+x}{2}.\sin\frac{f+g-x}{2} = \left(\sin\frac{f+g}{2}\right)^2\left(\cos.\frac{x}{2}\right)^2$$
$$-\left(\cos.\frac{f+g}{2}\right)^2(\sin\tfrac{1}{2}x)^2$$

und wenn man stat $\left(\cos.\frac{x}{2}\right)^2$ setzet $1-\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2$, so wird

$$\sin\frac{f+g+x}{2}.\sin\frac{f+g-x}{2} = \left(\sin\frac{f+g}{2}\right)^2 - \left(\left(\sin\frac{f+g}{2}\right)^2 + \left(\cos.\frac{f+g}{2}\right)^2\right)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}x^2 = \left(\sin\frac{f+g}{2}\right)^2 - \left(\sin\frac{x}{2}\right)^2$$

Man erhält dadurch

$$\left(\sin\frac{f+g}{2}\right)^2 - \left(\sin\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{\sin\frac{a+b+d}{2}.\sin\frac{a+b-d}{2}.\sin f.\sin g.}{\sin a.\sin b.}$$

und

$$\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\sin\frac{f+g}{2}\right)^2 - \frac{\sin\frac{a+b+d}{2}.\sin\frac{a+b-d}{2}.\sin f.\sin g.}{\sin a.\sin b.}$$

oder auch

$$\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2 = \left(1 - \frac{\sin\frac{a+b+d}{2}.\sin\frac{a+b-d}{2}.\sin f.\sin g.}{\sin a.\sin b.\left(\sin\frac{f+g}{2}\right)^2}\right)\left(\sin\frac{f+g}{2}\right)^2$$

Wenn auch hier P einen Bogen bedeutet, dessen Sinus ist

$$\frac{\sqrt{\sin\frac{a+b+d}{2}\,.\,\sin\frac{a+b-d}{2}\,.\,\sin f.\,\sin g.}}{\sin\frac{f+g}{2}\,.\,\sqrt{\sin a.\,\sin b.}}$$

so ist $\sin P = \frac{\sqrt{\sin\frac{a+b+d}{2}\,.\,\sin\frac{a+b-d}{2}\,.\,\sin f.\,\sin g.}}{\sin\frac{f+g}{2}\,.\,\sqrt{\sin a.\,\sin b.}}$

woraus also P gefunden wird, wenn man die arithmetischen Complemente der Sinuslogarithmen von a und b mit den 4 Sinuslogarithmen des Zählers addirt, die Summe halbirt, und von der Hälfte den sinuslogarithmen von $\frac{f+g}{2}$ abziehet, und für solchen sinuslogarithmen den Bogen aus den Tafeln sucht. Da nun

$$(\sin P)^2 = \frac{\sin\frac{a+b+d}{2}\,.\,\sin\frac{a+b-d}{2}\,.\,\sin f.\,\sin g.}{\sin a.\,\sin b.\left(\sin\frac{f+g}{2}\right)^2}$$

ist, so erhält man

$$\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2 = (1-(\sin P)^2)\left(\sin\frac{f+g}{2}\right)^2$$

und wenn man $(\cos. P)^2$ stat $1-(\sin P)^2$ schreibt

$$\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2 = (\cos. P)^2\left(\sin\frac{f+g}{2}\right)^2$$

also $\sin\frac{x}{2} = \cos. P \sin\frac{f+g}{2}$.

den Cosinuslogarithmen des gefundenen Bogen P hat man also nur zu dem Sinuslogarithmen von $\frac{f+g}{2}$ zu addiren, um den Sinuslogarithmen von $\frac{x}{2}$, daraus nach den Tafeln $\frac{x}{2}$ und x zu finden.

Dies

Dies ist nun die Methode nach welcher der Chevalier de Borda gerechnet hat, und wovon De la Lande die Rechnungsregeln in der angeführten Connoissance des temps mitgetheilet, ihre Gründe aber verschwiegen hatte.

Auch in diesem Ausdrucke für $\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2$ hat man

$$(\cos.\tfrac{1}{2}Z)^2 = \frac{\sin\frac{a+b+d}{2}.\sin\frac{a+b-d}{2}}{\sin a.\ \sin b.}$$

den sinus totus logarithmen $= 1$ gesetzt. Also

$$\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2 = \left(1 - \frac{\sin f.\sin g.(\cos.\frac{1}{2}Z)^2}{\left(\sin\frac{f-g}{2}\right)^2}\right)\left(\sin\frac{f-g}{2}\right)^2$$

Und man kan daher auch hiernach überhaubt aus einem Winkel und den beiden ihn einschliessenden Seiten die dritte Seite eines sphärischen Dreiecks finden, ohne es in zwey rechtwinklichte Dreiecke zerfället zu haben.

Auch diese Formul folgt aus dem analytischen Ausdruck

$$\cos.x = \cos.f.\ \cos.g. + \sin f.\ \sin g.\ \cos.\ Z.$$

Hier setzt man für cos. Z nun $2\,(\cos.\frac{1}{2}Z)^2 - 1$, so hat man

$$\cos x = \cos.f.\ \cos.g. - \sin f.\ \sin g. + 2\sin f.\ \sin g.\ (\cos.\tfrac{1}{2}Z)^2.$$

oder $\cos.x = \cos.(f+g) + 2\sin f.\ \cos.g.\ (\cos.\frac{1}{2}Z)^2$

schreibt man nun $1 - 2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2$ stat cos. x und $1 - 2\left(\sin\frac{f+g}{2}\right)^2$ stat cos. $(f+g)$, so erhält man

$$\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\cos.\frac{f+g}{2}\right)^2 - \sin f.\ \sin g.\ (\cos.\tfrac{1}{2}Z)^2$$

$$\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2 = \left(1 - \frac{\sin f.\sin g.(\cos\frac{1}{2}Z)^2}{\left(\sin\frac{f+g}{2}\right)^2}\right)\left(\sin\frac{f+g}{2}\right)^2$$

und wenn man auch hier den Winkel P sucht, so dass

$$\sin P = \frac{\cos.\frac{1}{2}Z.\sqrt{\sin f.\sin g.}}{\sin\frac{f+g}{2}}$$

wird, welcher sehr leicht durch Sinuslogarithmen gefunden wird, so ist $(\sin P)^2 = \frac{\sin f.\sin g.(\cos.\frac{1}{2}Z)^2}{\left(\sin\frac{f+g}{2}\right)^2}$

$$\text{Also}\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2 = (1-(\sin P)^2)\left(\sin.\frac{f+g}{2}\right)^2$$

$$\text{oder}\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2 = (\cos.P)^2\left(\sin.\frac{f+g}{2}\right)^2$$

$$\text{Und folglich}\ \sin\frac{x}{2} = \cos.P.\sin\frac{f+g}{2}$$

Wodurch man also aus zwo Seiten und dem eingeschlossenen Winkel eines sphärischen Dreiecks, die dritte Seite überhaubt finden kan, ohne dass es nöthig ist, das Dreieck in rechtwinklichte zu zerlegen.

Um die Anwendung dieser verschiedenen Rechnungsmethoden und ihre Vortheile in einem Beispiel zu zeigen, so sey 1781. d. 27. Jun. 11 U. 23′ früh die Distanz des Mondes von der Sonne gemessen 65° 27′.

die Höhe des Mondes 15° 21′. der Sonne 78° 18.

Man sucht die Meereslänge zur Zeit der Beobachtung.

Man sucht nun zuförderst die wahren Höhen, wozu man die den scheinbaren Höhen zugehörige Refraction aus den überall vorkommenden Refractionstafeln, die für die Zeit der Beobacbtung dem Monde zukommende Horizontalparallaxe aus der Connoissance des temps nimt, oder aus astronomischen Tafeln berechnen muss. In unserm Falle ist die Refraction für die Sonnenhöhe nur einige Secunden, die aus der Acht gelassen werden. Für die Mondhöhe ist die Refraction 4′ die Horizontalparallaxe 59′ 06″ und die Höhenparallaxe 54′. Dadurch erhält man denn

die wahre Mondhöhe 16° 14′. ihr Complement 73° 46′.

die wahre Sonnenhöhe 78° 18′. ihr Complement 11° 42′.

Damit

Damit ſtellet man die Rechnung folgendergeſtalt

1. Nach der Formul

$$\cos.\ \frac{x}{2} = \cos.\ P\ \cos.\ \frac{f-g}{2}$$

und um P zu finden iſt hier

$$\sin P = \frac{\sqrt{\sin \frac{d+a-b}{2} .\ \sin \frac{d-(a-b)}{2} .\ \sin f.\ \sin g.}}{\cos \frac{f-g}{2} .\ \sqrt{\sin a.\ \sin b.}}$$

gemeſs. Diſtantz. . .	65. 27. . . $d.$	$10 - \mathrm{l.}\sin a$ . .	0.0157758
Cpl. d. gem. Mond H. .	74. 39. . . $a.$	$10 - \mathrm{l.}\sin b$ . .	0.6929593
Cpl. d. gem. Sonn. H. .	11. 42. . . $b.$	$\mathrm{l.}\sin c$ . .	9.9543963
Summe.	151. 48.	$\mathrm{l.}\sin e$ . . .	8.3387529
2	75. 54.		
$\frac{d+a-b}{2}$	= 64. 12. . . $c.$	$\mathrm{l.}\sin f$ . . .	9.9823306
$\frac{d-(a-b)}{2}$	= 1. 15. . . $e.$	$\mathrm{l.}\sin g$ . . .	9.3070407.
		Summe.	38.2912556.
Cpl. wahr. Mond H	= 73. 46. . . $f.$	Hälfte.	19.1456278
Cpl. wahr. Sonn. H	= 11. 42. . . $g.$	l. coſ. h.	9.9329137.
	62. 04.	l. ſin P. .	9.2137141.
$\frac{f-g}{2}$	= 31. 02. . . $h.$	l. coſ. P. .	9.9941289
P	= 9° 24′	l. coſ. $\frac{1}{2}x$	9.9270426.

Daraus wird die wahre Diſtanz $x = 64°\ 34'$ gefunden.

2. Nach der Formul

$$\sin \tfrac{1}{2} x = \cos.\ P.\ \sin.\ \frac{f+g}{2}$$

und es iſt

$$\sin P = \frac{\sqrt{\sin\frac{a+b+d}{2}\,.\,\sin\frac{a+b-d}{2}\,.\,\sin f.\sin g.}}{\sin\frac{f+g}{2}\,.\sqrt{\sin a.\sin b.}}$$

Daher kan man nun ſo rechnen.

gemeſs. Diſtanz . . .	65.°	27. d.	10 — l. ſin a . .	0.0157758
Cpl. gem. Mond H . .	74.	39. a.	10 — l. ſin b . .	0.6929593
Cpl. gem. Sonn. H . .	11.	42. b.	l. ſin c .	9.9867144
Summe . .	151.	48.		
$\frac{a+b+d}{2} =$	75.	54. . c.	l. ſin e .	9.2585823
$\frac{a+b-d}{2} =$	10.	27. . e.	l. ſin f . .	9.9823306
			l. ſin g . .	9.3070407
Cpl. wahr. Mond H . .	73.	46. f.	Summe.	39.2434031.
Cpl. wahr. Sonn. H . .	11.	42. g.	Hälfte	19.6217015.
Summe.	84.	88.	l. ſin h . .	9.8316056
$\frac{f+g}{2}$ . .	42.	44. h.	l. ſin P . . .	9.7900959.
			l. coſ. P . .	9.8960379
P =	38.°	05′	l. ſin ½ x.	9.7276435.

Dadurch erhält man wie zuvor die wahre Diſtanz des Mondes von der Sonne. 64° 34′. zur Zeit der Beobachtung nach dem Meridian des Orts der Beobachtung

d. 27 Jun. Vormittage 11 U. 23′.

Man ſiehet auch leicht wie vielen Vortheil dieſe Methode vor der gewöhnlichen Rechnung durch Auflöſung eines ſphäriſchen Dreiecks darbiete, die übrigens eben daſſelbe Reſultat giebt.

Nach der Connoiſſance des temps 1781. war

d. 26 Jun. 9 U. 9′ abends die Diſtanz . . 64° 03.
d. 26 Jun. 12 U. 9′ . . . . 65. 40.

Daraus erhält man für die Diſtanz 64° 34. nach der Pariſer Zeit

d. 26 Jun. 10 U. 06.′ Abends und
d. 27 Jun. 11 U. 23. Vorm. nach dem Meridian des Schiffs

das

das giebt den Meridian Unterſcheid 13 Stunden 17.′ oder 199° 15′ öſtlich.

Uud daher 219° 15′ Länge des Orts der Beobachtung, den erſten Meridian durch die Inſul Ferro genommen.

Ich habe hier beyläufig mitgenommen, daſs auf dieſe Art der Fall in der ſphäriſchen Trigonometrie: aus zwo Seiten und dem eingeſchloſſenen Winkel die dritte Seite finden, ohne Zerfällung des Dreiecks in rechtwinklichte berechnet werden könne. Nennet man die Seiten a, b, c, und die gegenüberliegende Winkel A, B, C, ſo hat man für a

$$(\text{coſ.}\ \tfrac{1}{2}a)^2 = \left(1 - \frac{\text{ſin}\ b.\ \text{ſin}\ c.\ (\text{ſin}\ \frac{1}{2}A)^2}{\left(\text{coſ.}\frac{b-c}{2}\right)^2}\right)\left(\text{coſ.}\frac{b-c}{2}\right)^2$$

oder

$$(\text{ſin}\ \tfrac{1}{2}a)^2 = \left(1 - \frac{\text{ſin}\ b.\ \text{ſin}\ c.\ (\text{coſ.}\ \frac{1}{2}A)^2}{\left(\text{ſin.}\ \frac{b-c}{2}\right)^2}\right)\left(\text{ſin.}\ \frac{b+c}{2}\right)^2$$

und ähnliche Formuln für b und c, und ich habe gewieſen wie die Logarithmen ſehr bequem bey der Rechnung gebraucht werden können.

Auch kan man aus ſolchen datis, die übrigen beiden Winkel zuſammen durch zwo Analogien finden, ohne das Dreieck in rechtwinklichte zu zerlegen. Da dieſelben bekannt ſind

$$\text{ſin}\ \tfrac{1}{2}(b+c)\ :\ \text{ſin}\ \tfrac{1}{2}(b-c) = \text{cot.}\ \tfrac{1}{2}A\ :\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(B-C)$$
$$\text{coſ.}\ \tfrac{1}{1}(b+c) : \text{coſ.}\ \tfrac{1}{2}(b-c) = \text{cot.}\ \tfrac{1}{2}A\ :\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(B+C)$$

da man den aus der halben Summe und Differenz die Winkel B und C ſelbſt findet. Mithin kan man aus dieſen datis nämlich zwo Seiten und dem eingeſchloſſenen Winkel alles übrige in dem ſphäriſchen Dreiecke ohne Zerlegung deſſelben in rechtwinklichte finden.

Daſs

Dafs dies nun auch in dem Falle geschehen könne, wenn zween Winkel und die dazwischen liegende Seite gegeben sind, folget schon daraus, dafs man nur das dazu gehörige Supplementdreieck, dessen Seiten Supplemente von dieses Winkeln, und dessen Winkel Supplemente von dieses Seiten sind, berechnen dürfe, so hätte man in dem Supplementdreiecke zwo Seiten und den eingeschlossenen Winkel zu datis, wenn in dem vorgegebenen zween Winkel und die dazwischen liegende Seite data sind, und der Fall wäre gänzlich auf den vorhergehenden zurückgebracht.

Allein man kan auch das vorgegebene Dreieck aus der Seite a und den daran liegenden Winkeln B und C ohne Zerlegung berechnen. Die beiden übrigen Seiten aus den beiden Analogien

$$\sin \tfrac{1}{2}(B+C) : \sin \tfrac{1}{2}(B-C) = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2} a : \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(c-b)$$

$$\text{cos.}\ \tfrac{1}{2}(B+C) : \text{cos.}\ \tfrac{1}{2}(B-C) = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2} a : \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(c+b)$$

da man den aus der halben Summe und Differenz beider Seiten die Seiten selbst findet

Um aber aus solchen datis den dritten Winkel A zu finden suche man die Formul

$$\text{cos.}\ A = \sin B.\ \sin C.\ \text{cos.}\ a - \text{cos.}\ B.\ \text{cos.}\ C.$$

zur Rechnung mit Logarithmen auf vorige Art einzurichten. Man schreibe $1 - 2(\sin\tfrac{1}{2} a)^2$ stat $\text{cos.}\ a$, so wird

$$\text{cos.}\ A = -(\text{cos.}\ B\ \text{cos.}\ C - \sin B \sin C) - 2 \sin B \sin C (\sin \tfrac{1}{2} a)^2$$

$$\text{cos.}\ A = -\text{cos.}\ (B+C) - 2 \sin B \sin C (\sin \tfrac{1}{2} a)^2$$

schreibt man ferner $2(\text{cos.}\ \tfrac{1}{2} A)^2 - 1$ stat $\text{cos.}\ A$ und auch $1 - 2(\sin \tfrac{1}{2}(B+C))^2$ stat $\text{cos.}\ (B+C)$ so wird

$$(\text{cos.}\ \tfrac{1}{2} A)^2 = \left(\sin \frac{B+C}{2}\right)^2 - \sin B.\ \sin C.\ (\sin \tfrac{1}{2} a)^2$$

und endlich

$$(\text{cos.}\ \tfrac{1}{2} A)^2 = \left(1 - \frac{\sin B.\ \sin C.\ (\sin \tfrac{1}{2} a)^2}{\left(\sin \frac{B+C}{2}\right)^2}\right).\left(\sin \frac{B+C}{2}\right)^2$$

Wenn man gleich anfangs $2(\text{cos.}\ \tfrac{1}{2} a)^2 - 1$ stat $\text{cos.}\ a$ geschrieben hätte, so wäre dadurch erhalten

cos.

$$\text{cos. } A = 2 \text{ sin } B. \text{ sin } C. (\text{cos. } \tfrac{1}{2} a)^2 - \text{sin } B. \text{ sin } C. - \text{cos. } B. \text{ cos. } C.$$

oder

$$\text{cos. } A = 2 \text{ sin } B. \text{ sin } C. (\text{cos. } \tfrac{1}{2} a)^2 - \text{cos. } (B - C)$$

Nun ferner $1 - 2 (\text{sin } \tfrac{1}{2} A)^2$ stat cos. A und $2 \left(\text{cos. } \frac{B-C}{2}\right)^2$ stat cos. (B − C) gesetzt giebt

$$(\text{sin } \tfrac{1}{2} A)^2 = \left(\text{cos. } \frac{B-C}{2}\right)^2 - \text{sin } B. \text{ sin } C. (\text{cos. } \tfrac{1}{2} a)^2 \text{ oder}$$

$$(\text{sin } \tfrac{1}{2} A)^2 = \left(1 - \frac{\text{sin } B. \text{ sin } C. (\text{cos. } \tfrac{1}{2} a)^2}{\text{cos. } \left(\frac{B-C}{2}\right)^2}\right) \left(\text{cos. } \frac{B-C}{2}\right)^2$$

welche Formul so wie die vorige zu logarithmischen Rechnungen bequem wird, wenn man

$$\frac{\text{sin } B. \text{ sin } C. (\text{cos. } \tfrac{1}{2} a)^2}{\left(\text{cos. } \frac{B-C}{2}\right)^2} = (\text{sin } P)^2$$

also $\text{sin } P = \dfrac{\text{cos. } \tfrac{1}{2} a \sqrt{\text{sin } B. \text{ sin } C.}}{\text{cos. } \frac{B-C}{2}}$

setzt, wodurch man erhält

$$(\text{sin } \tfrac{1}{2} A)^2 = (1 - (\text{sin } P)^2) \left(\text{cos. } \frac{B-C}{2}\right)^2$$

Folglich $\text{sin } \tfrac{1}{2} A = \text{cos. } P. \text{ cos. } \dfrac{B-C}{2}$

und eben so aus der erstern Formul, wenn man

$$\frac{\text{sin } B. \text{ sin } C. (\text{sin } \tfrac{1}{2} a)^2}{\left(\text{sin } \frac{B+C}{2}\right)} = (\text{s. } P.)^2$$

und also $\text{ſin}\, P = \dfrac{\text{ſin}\, \frac{1}{2} a \sqrt{\text{ſin}\, B.\ \text{ſin}\, C.}}{\text{ſin}\, \dfrac{B+C}{2}}$ ſetzt,

daraus man wie vorher erhält

$$\text{coſ.}\, \tfrac{1}{2} A = \text{coſ.}\, P.\ \text{ſin}\, \frac{B+C}{2}$$

da man nur P vorher ſuchen darf, wofür man einen andern und andern Bogen erhält, nachdem man aus der einen oder der andern Formul rechnet.

Es bleiben alſo nur die beiden Fälle übrig, wo es bey Berechnung dieſer Dreiecke ihrer Zerfällung in rechtwinklichte bedarf, wenn man nämlich

1. aus zwo gegebenen Seiten und dem nicht von ihnen eingeſchloſſenen Winkel, dieſen Winkel und die dritte Seite
2. aus zween gegebenen Winkeln und einer nicht zwiſchen ihnen liegenden Seite, dieſe Seite und den dritten Winkel

ſucht. Ich habe aber bisher weder ein Mittel finden können, dieſe Formul

$$\text{tang.}\, C = \frac{\text{ſin}\, A.\ \text{ſin}\, a - \text{ſin}\, B.\ \text{ſin}\, b.}{\text{coſ.}\, B.\ \text{ſin}\, b.\ \text{coſ.}\, a - \text{coſ.}\, A.\ \text{ſin}\, a\ \text{coſ.}\, b.}$$

zu vortheilhafter Berechnung mit Logarithmen geſchmeidig zu machen, noch habe ich einen andern Ausweg dieſe Fälle ohne Zerfällung in rechtwinklichte Dreiecke zu berechnen aufgefunden und muſs es dermalen hiebey bewenden laſſen.

RECHNUNGSMETHODE,
ZU AUFLÖSUNG EINES FALLS
DER
SPHÄRISCHEN
TRIGONOMETRIE
OHNE ZERFÄLLUNG IN RECHTWINKLICHTE DREIECKE.

BEY GELEGENHEIT
DER ERLÄUTERUNG DER DE BORDISCHEN METHODE
DIE WAHREN DISTANZEN DES MONDES VON DER SONNE
AUS DEN SCHEINBAREN ZU BERECHNEN.

III.

ÜBER DIE GEOGRAPHISCHE LAGE VON GREIFSWALD.

§. 1.

Das erste Geschäft des practischen Astronomen ist die genaue Bestimmung der geographischen Lage seiner Sternwarte. Man darf nicht denken dass dies eine Sache sey, welche leicht ins Werk zu setzen ist. Wenn es dabey auf einige Minuten nicht ankommen soll, so kann freilich eine einzige Messung der mittäglichen Höhe der Sonne oder eines Sterns hinreichen, so wie die Schiffer auf ihren Reisen damit zu frieden seyn können. Allein wenn eine Genauigkeit erfordert wird, welche den Astronomen befriedigen soll und ausreichen eine nützliche Vergleichung der an verschiedenen Orten angestellten Beobachtungen anzustellen, wenn diese Bestimmung auf wenige Secunden genau seyn soll, so gehören dazu grosse und kostbare Instrumente oder in Ermangelung derselben Zeit, unglaubliche Mühe und in meinem Falle, da ich eine entlegene Sternwarte habe, Aufopferung von Bequemlichkeit, die vielleicht nicht grösser seyn dürfte, die Reise um die Welt zu machen, und am Ende findet man doch keine befriedigende Gewisheit. Ich habe dies alles erfahren, als ich nach Errichtung der hiesigen öffentlichen academischen Sternwarte mit einem unvollkommenen Instrumente die Polhöhe oder geographische Breite derselben mit Genauigkeit zu bestimmen suchte, und es war mir daher nicht unerwartet

 wenn

wenn ich von Oertern, wo schon lange die practische Sternkunde getrieben war, las, dass man über ihre geographische Lage noch keine befriedigende Gewisheit hatte.

§. 2.

Aus ältern Zeiten habe ich über die Lage von Greifswald fast gar nichts aufgezeichnet gefunden. Leonh. Christoph Sturm giebt in seiner Geographia mathematica die Länge von Greifswald 35° 09′ an und dessen Breite 54° 14′. Da hiebey der erste Meridian durch Teneriffa angenommen und die Länge von Paris zu 22° 23′ angegeben worden, so wäre der Längenunterscheid zwischen Paris und Greifswald 12° 46′, und also, den ersten Meridian so angenommen dass der 20ste Grad durch die Pariser Sternwarte gehet, würde die Länge von Greifswald seyn 32° 46′.

Sturm giebt sein Verzeichniss von der geographischen Lage der Oerter für einen Auszug aus Riccioli Geographia reformata an, nur dass er die Längen der Oerter von dem ersten Meridian des Riccioli der Insul Palma auf den ersten Meridian der Insul Teneriffa reducirt und einiger Oerter geographische Lagen hinzugesetzt hat.

In der Sammlung Astronomischer Tafeln der Königl. Preussischen Academie der Wissenschaften 1 Band p. 44. wird ein gewisser Pyl angeführet, nach welchen die Breite von Greifswald, so wie vorher, und die Länge 33° 10′ 35″ seyn soll, den ersten Meridian so genommen, dass die Pariser Sternwarte 20° Länge hat. Vermuthlich ist dieser Pyl derselbige welcher 1699. d. 23 Sept. hieselbst eine Sonnenfinsterniss beobachtet hat, die sich in den Memoires de l'Academie de Paris von 1701 findet, und woraus die Länge von Greifswald von Cassini zu 33° 10′ 37″ berechnet worden, wo ich aber doch die in der Sammlung unter seinen Nahmen angeführte Breite nicht finde.

Nach Mayers Mappa critica Germaniae ist die Länge von Greifswald 31° 28′ und dessen Breite 54° 06′ angegeben worden, welche Bestimmungen der Wahrheit sehr nahe kommen.

§. 3.

Im siebzehnten Bande der Abhandlungen der Königl. Schwedischen Academie der Wissenschaften findet sich ein Auszug aus Astronomi-

nomi-

nomischen Beobachtungen welche Herr Prof. Mayer zu Greifswalde die geographische Lage dieser Stadt betreffend überschickt hat. Das Resultat verschiedener Vergleichungen beobachteter Finsternisse der Jupiters Trabanten, mehrentheils Austritte, setzet den Unterscheid zwischen dem Upsalschen und Greifswaldischen Meridian 16′ 26″ in Zeit. Dies gäbe 4° 06′ 30″ Unterscheid im Bogen und also den Meridianunterscheid von Paris 11° 11′; mithin 31° 11′ Länge. Diese Bestimmungen kommen der Wahrheit allerdings näher. Allein theils war Herr Professor Mayer zu der Zeit noch mit keinem zuverlässigen Zeitmesser versehen, theils sind bey Vergleichung der Beobachtungen nicht diejenigen Vorsichtigkeiten beobachtet worden, welche die folgenden Zeiten als unumgänglich nöthig gefunden haben, wenn genaue Resultate aus diesen Beobachtungen verlangt werden, daher auch diese Bestimmungen einer Verbesserung bedürfen.

Aus der Sonnenfinsterniss vom 1 Apr. 1764 habe ich den Meridian-Unterscheid zwischen Paris und Greifswald zu 45′ 03″ in Zeit berechnet, das giebt 31° 15′ 45″ Länge. Aus der Sonnenfinsterniss vom 16 August 1765 fand ich diesen Unterscheid 44′ 58″ und also 31° 14′ 30. Im ersten Bande der neuen critischen Greifswaldischen Nachrichten sind diese Beobachtungen und Resultate angeführet. In den Tabellen der Königl. Preussischen Academie der Wissenschaften ist aus dem Durchgange der Venus vor der Sonne 1761 die Länge von Greifswald zu 30° 58′ und aus der Sonnenfinsterniss von 1769 vom Herrn Sejour zu 31° 01′ berechnet, aber diese Resultate sind zuverlässig zu klein, indem eben daselbst die Länge von Berlin zu 31° 02′ 45″ aus dem Anfange und zu 30° 59′ 15″ aus dem Ende der Sonnenfinsterniss von 1764 berechnet, auch vom Herrn Bernoulli aus genauen Vergleichungen dieselbe noch neulich 31° 02′ 10″ höchstens gefunden worden. Es liegt aber Greifswald aller Anleitung zu Folge gegen eine Zeitminute oder gegen 15 Gradminuten östlicher als Berlin, und diese Bestimmungen würden es westlicher setzen.

Wenn man aber von dem Mayerschen und meinen Resultaten das Mittel nimmt, so findet man die Länge von Greifswald 31° 13′ 45″. Und hiebey wird man es in Ansehung der Länge so lange bewenden lassen können, bis genauere und mit aller nöthigen Vorsichtigkeit angestellte Vergleichungen dieselbe näher bestimmen. Hiernach

nach wäre der Meridianunterscheid zwischen Paris und Greifswald in Zeit 44′ 55″.

§. 4.

Was nun die Breite betrifft, so ist selbige außer den schon angeführten Bestimmungen von 54° 14′ imgleichen von 54° 06′ von dem Herrn Professor Mayer auf 54° 04′ 25″ in vorgedachten Auszuge gesetzt worden. Dieses Resultat ist aus beobachteten Mittagshöhen der Sonne von 1752 bis 1756 und verschiedener Fixsterne geschlossen worden. Die Höhen sind mit einem Quadranten von 2 Fuss im Halbmesser gemessen worden, dessen Rand in 10 Minuten abgetheilet, von dem ehemaligen Director Ekström in Stockholm verfertiget ist, und sich noch auf der academischen Sternwarte befindet. Das Sehrohr ist mit einem Louvillischen Micrometer versehen, wo jeder Schraubengang 4′ 08″ 42‴ ausmacht, und noch in 100 Theile abgetheilet worden. Die Abweichung der Sonne ist nach Cassini Tafeln berechnet und vermuthlich auch dessen Strahlenbrechungs Tafel angewandt worden. Da man schwerlich von einem solchen Instrument nach dieser Methode eine für die Astronomie befriedigende Genauigkeit erwarten konnte, so errichtete Herr Prof. Mayer in einer hiesigen wüsten Kirche einen Gnomon. Ob gleich durch diese Art Beobachtungen wegen des schwer zu bestimmenden Halbschattens nicht wohl eine grösere Genauigkeit zu erwarten war, als zum geographischen Gebrauch hinreicht, so ward ich doch dadurch aufmerksam gemacht, da ich fand, dass die dadurch erhaltene Breite bey den zuverläsigsten Beobachtungen allezeit gröser ausfielen und 54° 05′ sehr nahe kamen, nnd ich war sehr begierig, diese Sache so viel möglich in Gewissheit zu setzen. Unter diesen Betrachtungen erhielte ich von dem Abbt Hell, dessen zu Wårdhus gemachte Beobachtung vom Durchgange der Venus 1769, worin er die Auflösung der Aufgabe ankündigte.

> Quadrante quantumnis erroneo atque errore eiusdem incognito exactam definire altitudinem Poli per fixas non verticales et refractione quacunque affectas, nulla adhibita correctione refractionis in tabulis expressae.

wodurch mein Verlangen die hiesige Polhöhe genauer zu bestimmen aufs neue erweckt ward.

§. 5.

Diese Methode bestehet im wesentlichen darin, daſs man zween Sterne, welche in dem nordlichen und südlichen Quadranten des Meridians fast in gleicher Höhe durch den Mittagskreis gehen, so daſs sie in dem Sehrohr beide gesehen werden können, wenn der Quadrant auf einerley Diuisions-Punct gestellt ist, beobachte und durch Hülfe des Micrometers abmesse, wie viel der eine niedriger oder höher als der andere durch den Mittagskreis gehet. Dieser Unterscheid ist es allein, welchen man aus der Beobachtung sucht, aber nicht die eigentliche Höhe der Sterne, und daher hat die richtige oder unrichtige Abtheilung des Quadranten auf die Beobachtung nicht den geringsten Einfluſs, sondern allein die richtige Bestimmung der Wehrte des Micrometers, und daſs der Quadrant bey beiden Beobachtungen genau auf einerley Punct gestellt werde.

Wenn man auf diese Art den Unterscheid der Abstände beider Sterne durch die Beobachtung gefunden hat, so berechnet man ihre wahren Abweichungen oder Abstände vom Pol. Wenn der nordliche Stern in seiner Culmination beobachtet worden, so giebt der Unterscheid ihrer Abstände vom Pol die Summe der Parallelabstände beider Sterne vom Scheitelpunct. Wenn er aber in seinem untern Durchgange durch den Mittagskreis beobachtet worden, so giebt die Summe ihrer Abstände vom Pol die Summe ihrer Parallelabstände vom Scheitelpunct. Aus dieser berechneten Summe und dem beobachteten Unterscheide ihrer Parallelabstände vom Scheitelpunct findet man dann so wohl den gröſsern als kleinern Parallelabstand und die Beobachtung selbst zeiget, welchem Stern der gröſsere und kleinere Abstand zukommt. Aus diesem so erhaltenen Parallelabstande der Sterne vom Scheitelpunct und ihrer berechneten Abweichung findet man den, wie gewöhnlich die Abweichung des Scheitelpuncts oder Breite des Orts.

§. 6.

Der Abbt Hell hatte bey seiner Berechnung zwar ein anderes Verfahren gebraucht und dadurch gewissermaſsen die Ursache versteckt, weswegen die Abtheilung des Quadranten keinen Einfluſs auf das Resultat hat, indem er die Höhenangabe des Quadranten in Rechnung brachte und durch die Rechnung nachher verbesserte. Allein

 das

das hier angeführte Verfahren leget alles klärer vor Augen und zeiget deutlicher, worauf es bey der Beobachtung ankommt.

Diese Methode hat also das vorzügliche was ihr der Abbt Hell beilegt, daſs die fehlerhafte Eintheilung des Quadranten auf das Resultat keinen Einfluſs hat. Und da beide Sterne in faſt gleicher Höhe gesehen werden, in einer Höhe von 50° aber auf einen ganzen Grad der Unterscheid der Strahlenbrechung nur eine oder zwo Secunden beträgt, vorausgesetzt, daſs die Refraction in dem nordlichen und südlichen Theile des Horizonts einerley sey, so wird die deswegen anzuſtellende Verbeſſerung gleichfalls unnöthig.

Allein deswegen bleibt doch die Unvollkommenheit nach, welche ein Micrometer an einem Sehrohr von zween Fuſs angebracht mit sich führet, und die aus der unrichtigen Stellung des Quadranten in einerley Höhe, erwachsen kann, die dazu bey Nachtzeit bey dem Schein eines Lichts geschehen muſs. Ich getraue mich nicht hiebey für einen Irrthum von einer halben Minute zu ſtehen. Rechnet man nun dazu daſs die Abweichungen aller Fixſterne, welche man bey diesen Beobachtungen gebraucht, nicht gleich genau beſtimmt seyn können, so siehet man leicht daſs auch bey dieser Methode die Ungewiſsheit nicht so gänzlich gehoben wird, wie der berühmte Aſtronom anzunehmen scheint, sondern bey aller Anſtrengung des Beobachters auf eine Minute und darüber gehen kann.

Indeſſen glaubte ich doch in Ermangelung beſſerer Inſtrumente dieselbe anwenden zu müſſen, als hieselbſt eine neue Sternwarte errichtet war. Ich muſte glauben, daſs, wenn die Resultate auch über eine ganze Minute von einander abgingen, doch das aus allen genommene Mittel die Beſtimmung der Wahrheit sehr nahe bringen würde. Zu dem Ende suchte ich die Fixſterne auf welche über 52° als die Höhe des untern Durchganges des Polſterns durch den Mittagskreis in faſt gleicher Höhe gegen Norden und Süden gehen würden, und fand bald so viel, daſs ich über 30 correspondirende Beobachtungen machen konnte, und welche aus verschiedenen Ursachen wiederholet worden.

Die folgenden sind die erſten Beobachtungen mit ihren Resultaten. Wenn man nichts weiter als die Polhöhe sucht, so kann man aus der beobachteten Höhe und berechneten würklichen Abweichung eines

nes jeden der beiden correſpondirenden Sterne dieſelbe beſonders ſuchen und daraus das Mittel nehmen, man erhält eben daſſelbe als wenn man ſie nach dem Hellſchen Verfahren durch Verbeſſerung der Summe der beobachteten Abſtände vom Scheitelpunct ſucht, oder wenn man ſie aus der berechneten Summe dieſer Abſtände und ihrem beobachteten Unterſcheide berechnet, ob gleich Nebenabſichten dem einen Verfahren vor dem andern den Vorzug geben können. Ich will für die erſte Beobachtung alle drey Wege nehmen.

1. Punct des Quadranten. *) 88° 40′ + 148 — 225.

α. Caſſiop. 1778. d. 22 Oct. 88° 40′ + 148.
γ. Perſeus 1778. d. 20 Dec. 88. 40. — 225.
α. Caſſiop. Höhe . . 88. 46. 08.
γ. Perſeus Höhe 88. 30. 41.
α. Caſſiop. Abſt. vom Scheitelp. 1. 13. 52.
γ. Perſeus . . . . 1. 29. 19.
Summe 2. 43. 11.
α. Caſſiop. Abweich. 55. 19. 25.
γ. Perſ. Abweich. . 52. 36. 38.
Abſtande vom Sch. 2. 42. 47.
beobacht. Abſt. 2. 43. 11.
Irrthum des Quadr. 24″
Hälfte . . . 12.
α. Caſſiop. verbeſſerter Abſt. 1. 13. 40.
Abweich. 55. 19. 25.
Polhöhe 54. 05. 45.
γ. Perſeus verb. Abſt. 1. 29. 07.
Abweich. 52. 36. 38.
Polhöhe 54. 05. 45.

Auf dem zwoten Wege hat man

Summe

*) Die Grade und Minuten zeigen allezeit die Höhe an auf welche der Quadrant bey beiden Beobachtungen geſtanden. Die beiden Zahlen mit den Zeichen die Micrometertheile für den beweglichen Faden des Micrometers, in der Ordnung, wie die Beobachtungen folgen, (+) bedeutet höher, (—) niedriger.

Summe der Abſtände. 2. 42. 47.
Unterſcheid derſelben. 15. 27.
Halbe Summe. 1. 21. 23. 5
halber Unterſch. 7. 43. 5

gröſter Abſt. γ. Perſ. 1. 29. 07.
kleinſter Abſt. α. Caſſiop. 1. 13. 40.

wie die vorigen verbeſſerten Abſtände, daraus man alſo auch mit den Abweichungen eben die vorige Polhöhe findet.

Auf dem dritten Wege ſucht man aus den unverbeſſerten Abſtänden und den berechneten Abweichungen die Polhöhen und nimmt davon das Mittel.

α. Caſſiop. Abſtand. 1. 13. 52.
Abweich. 55. 19. 25.

Polhöhe. 54. 05. 33.
γ. Perſeus Abſtand. 1. 29. 19.
Abweich. 52. 36. 38.

Polhöhe. 54. 05. 57.

Mittel aus beiden 54° 05′ 45″ wie vorher.

2. Quadrant Punct 88° 30′ + 390 − 202.
1778. d. 26 Oct. α. Caſſ. 88° 46′ 10″.
1779. d. 24 Mai. β. Drach. 88. 21′. 38.
Polhöhe 54. 06. 05.

3. Quadrantpunct. 88° 50′ + 479 − 446.
1779. d. 9 Mart. γ. gr. Bär. 89. 09. 51.
79. d. 6 Ian. γ. Perſeus. 88. 31. 31.
Polhöhe 54.° 05.′ 09.″

4. Quadrantpunct 88° 10′ − 221 + 278.
79. d. 9 Mart. ζ. gr. Bär. 88° 00′ 50′. N.
79. d. 26 Mai. β. Drach. 88. 21. 31. S.
Polhöhe 54. 06. 12.

5. Quadrantpunct 87° 40. + 501 − 349.
79. d. 10 Mart. ζ. gr. Bär 88. 00. 46. N.
79. d. 1 Jul. γ. Drach. 87. 25. 32. S.
Polhöhe 54. 05. 45.

6. Qua-

6. Quadrantpunct 86° 40′ + 397 − 513.
1779. d. 9 Mart. ε. gr. Bär 86. 56. 27. N.
79. d. 13 Mart. η. gr. Bär 86. 18. 44. S.
Polhöhe 54. 06. 15.

7. Quadrantpunct 86. 30. + 31 − 268.
79. d. 28 Febr. β gr. Bär. 86. 31. 17. N.
79. d. 27 Mart. η. gr. Bär. 86. 18. 53. S.
Polhöhe 54. 05. 36.

8. Quadrantpunct. 86.° 20 − 285 − 28.
78. d. 26 Nov. β. Caſſiop. 86. 08. 11. N.
79. d. 28 Mart. η. gr. Bär. 86. 18. 50. S.
Polhöhe 54. 05. 06.

9. Quadrantpunct 85. 00. + 36 − 319.
78. d. 29. Oct. δ. Caſſiop. 85. 01. 29. N.
*79. d. 1 Febr. ι. gr. Bär. 84. 46. 47. S.
Polhöhe 54. 06. 39.

10. Quadrantpunct 85. 00. + 36 − 45.
78. d. 29 Oct. δ. Caſſiop. 85. 01. 29. N.
79. d. 10 Ian. α. Perſeus. 84. 58. 08. S.
Polhöhe 54. 05. 56.

11. Quadrantpunct. 84.° 50′ + 130 − 80.
79. d. 27 Mai. ϑ. Drach. 84. 55. 23. N.
79. d. 7 Febr. ι gr. Bär 84. 46. 41. S.
Polhöhe 54. 05. 53.

12. Quadrantpunct 84. 50. + 130 + 191.
79. d. 27 Mai. ϑ. Drach. 84. 55. 23. N.
79. d. 10 Ian. α. Perſeus 84. 57. 57. S.
Polhöhe 54. 05. 14.

13. Quadrantpunct 84. 40. − 115. + 146.
78. d. 28 Oct. γ. Caſſiop. 84. 35. 14. N.
*79. d. 13 Jan. ι. gr. Bär. 84. 46. 03. S.
Polhöhe 54. 06. 55.

14. Qua-

*) Dieſe Abweichung iſt aus der connoiſſance gerechnet und vermuthlich zu groſs.

14. Quadrantpunct 84. 10. + 251 – 366.
79. d. 27 Mai. ι. Drach. 84. 20. 24. N.
79. d. 23 Febr. κ. gr. Bär. 83. 55. 00. S.
Polhöhe 54. 05. 34.
15. Quadrantpunct 81. 50. + 343 – 264.
79. d. 27 Mai. η. Drach. 82. 04. 13. N.
79. d. 22 Jan. α. Fuhrm. 81. 39. 03. S.
Polhöhe 54. 05. 38.
16. Quadrantpunct 81. 40. – 209 – 22.
78. d. 1 Nov. ε. Cassiop. 81. 31. 20. N.
79. d. 27 Jan. α. Fuhrm. 81. 39. 05. S.
Polhöhe. 54. 05. 57.
17. Quadrantpunct 81. 00. + 237 – 280.
79. d. 7. Mart. α. gr. Bär. 81. 09. 49.
79. d. 28. Jan. β. Fuhrm. 80. 48. 24.
Polhöhe 54. 06. 15.
18. Quadrantpunct 80° 50′ + 474 – 490.
79. d. 3 Mart. α. gr. Bär. 81. 09. 39. N.
79. d. 2 Iul. δ. Schwan 80. 29. 41. S.
Polhöhe 54. 06. 21.
19. Quadrantp. 80° 40′ + 715 – 245.
79. d. 1 Mart. α. gr. Bär. 81. 09. 38. N.
79. d. 1 Iul. δ. Schwan. 80. 29. 51. S.
Polhöhe 54. 06. 16.
20. Quadrantpunct 80° 40. + 715 – 391.
79. d. 1 Mart. α. gr. Bär. 81. 09. 38.
79. d. 1 Iul. α. Schwan 80. 23. 48.
Polhöhe. 54. 06. 13.
21. Quadrantpunct 76. 50. + 0. + 294.
79. d. 3 Iul. δ. Drach. 76. 50. 00.
78. d. 1 Dec. ο. Androm. 77. 02. 11.
Polhöhe 54. 06. 19.
22. Quadrantpunct 76. 50. + 0 – 500.
79. d. 3 Iul. δ. Drach. 76. 50. 00.
78. d. 22 Dec. γ. Andr. 77. 10. 43.
Polhöhe 54. 05. 35.

23. Qua-

23. Quadrantpunct 74. 30 + 10. + 0.
78. d. 5 Nov. β. Cepheus. 74. 30. 25.
79. d. 2 Iul. α. Leyer. 74. 30. 00.
Polhöhe 54. 05. 41.
24. Quadrantpunct 69. 00. + 52. + 58.
1779. d. 27 Mai. β. kl. Bär. 69. 02. 09.
79. d. 2 Iul. β. Leyer. 69. 02. 24.
Polhöhe 54. 05. 22.
25. Quadrantpunct 69. 00. + 52 + 101.
79. d. 27 Mai. β. kl. Bär. 69. 02. 09.
79. d. 2 Iul. ε. Schwan. 69. 04. 11.
Polhöhe 54. 05. 16.
26. Quadrantpuuct 68. 50. + 310 − 174.
79. d. 1 Iul. β. kl. Bär. 69. 02. 51.
79. d. 26. Dec. γ. Nordl. Dreieck. 68. 42. 47.
Polhöhe 54. 06. 24.
27. Quadrantpunct 68. 40. + 555 − 490.
79. d. 1 Iul. β. kl. Bär. 69. 03. 00.
79. d. 1 Iul. γ. Leyer. 68. 19. 41.
Polhöhe 54. 05. 29.
28. Quadrantpunct 67. 30. + 306 − 502.
78. d. 7 Nov. γ. Cepheus. 67. 42. 41.
79. d. 23 Mai. ε. Hercul. 67. 09. 11.
Polhöhe 54. 06. 34.
29. Quadrantpunct 55. 50. + 218 − 285.
78. d. 1 Nov. α. kl. Bär. 55. 58. 59.
78. d. 3 Dec. β. Widder. 55. 38. 11.
Polhöhe 54. 05. 44.
30. Quadrantpunct 55. 50. + 218. − 600.
78. d. 1 Nov. α. kl. Bär. 55. 58. 59.
79. d. 31 Mart. η. Boot. 55. 25. 08.
Polhöhe 54. 06. 04.
31. Quadrantpunct 55. 50. + 218 − 373.
78. d. 1 Nov. α. kl. Bär. 55. 58. 59.
79. d. 23 Mai. γ. Hercul. 55. 34. 32.
Polhöhe 54. 06. 26.

32. Quadrantpunct 52. 20. – 148 – 57.
79. d. 12 Mart. α. kl. Bär. 52. 13. 52.
79. d. 3. Apr. γ. Schlange. 52. 17. 38.
Polhöhe 54. 06. 26.
33. Quadrantpunct 52. 10. + 94 – 203.
79. d. 12 Mart. α. kl. Bär.. 52. 13. 54.
79. d. 3 Apr. β. Schlange. 52. 01. 35.
Polhöhe 54. 06. 06.
34. Quadrantpunct 52. 00. + 334 – 60.
79. d. 11 Mart. α. kl. Bär. 52. 13. 51.
79. d. 22 Ian. α. Stier. 51. 57. 31.
Polhöhe 54. 05. 53.
35. Quadrantpunct 52. 00. + 334 – 413.
79. d. 11 Mart. α. kl. Bär. 52. 13. 51.
79. d. 27. Febr. β. Löwe. 51. 42. 53.
Polhöhe 54. 05. 57.

Aus allen diesen Beobachtungen würde man 54° 05. 55. für das Mittel erhalten. Und wenn man diejenigen wegwirft, welche über 6′ 30″ und unter 5′ 30″ geben, so hat man für die Polhöhe aus 26 Beobachtungen das Mittel 54° 05′ 59″.

Die Berechnungen der Abweichungen sind nach der Angabe der Berliner Ephemeriden geführet, und obgleich bey Anwendung dieses Instruments zu den Beobachtungen die Aberration und Nutation aus der Acht gelassen werden konnte, so habe ich doch darauf Rücksicht genommen, da es ohne grosse Mühe geschehen konnte.

§. 8.

Ob gleich aus den vorher angeführten Ursachen keine völlig übereinstimmende Resultate erhalten werden konnten, indem ich bey Vergleichung der Berliner Ephemeriden mit den Pariser Connoissance des mouvements celestes in Angabe der Abweichung häufig beträchtliche Verschiedenheit fand, z. B. bey γ. Perseus über eine Minute, so versuchte ich doch, ob sich die Resultate nicht näher zusammen bringen liessen. Ich hatte bemerkt, dass die Axe des Sehrohrs der Fläche des Quadranten nicht parallel sey, sondern gegen das Objectiv convergire. Dies hatte den Erfolg, das die Sterne entweder nicht im Meridian

ridian oder nicht in der Mitte des Sehrohrs dem Durchschnitt des verticalen und horizontalen Fadens beobachtet werden konnten, wenn die Fläche des Quadranten im Mittagskreise gebracht war. Ich liefs deswegen die Schraube verlängern und einen durchbohrten messingenen Kloben an dem Obiectiv Ende zwischen dem Sehrohr und Quadranten legen, wodurch diesem Fehler abgeholfen ward. Ich rectificirte den festen so wohl als den beweglichen Faden des Micrometers und wiederholte die Beobachtungen. Und ich führe dies alles deswegen an, damit man daran keinen Anstofs nehme, wenn diese Höhenmessungen mit den vorigen etwa nicht überein kommen.

1. Quadrantpunct 88° 50'.+483.−478.
1779. d. 19 Oct. γ. gr. Bär. 89. 10. 01. N.
80. d. 20 Mai. γ. Perseus. 88. 30. 12. S.
Polhöhe 54. 05. 52.

2. Quadrantpunct 88. 30.+361.+0.
79. d. 11 Sept. α. Cassiop. 88. 44. 58. N.
79. d. 17 Octob. γ. Perseus. 88. 30. 00. S.
Polhöhe 54. 05. 34.

3. Quadrantpunct 88. 30.+361−205.
79. d. 11 Sept. α. Cassiop. 88. 44. 58.
79. d. 20 Iul. β. Drach. 88. 21. 30.
Polhöhe 54. 05. 44.

4. Quadrantpunct 88° 10'−245+262.
80. d. 25 Mart. ζ. gr. Bär. 87. 59. 51. N.
79. d. 21 Iul. β. Drach. 88. 20. 52. S.
Polhöhe 54. 06. 02.

5. Quadrantpunct 87° 40'+484−381.
80. d. 24 Mart. ζ. gr. Bär. 88. 00. 04. N.
79. d. 21 Iul. γ. Drach. 87. 24. 12. S.
Polhöhe 54. 05. 58.

6. Quadrantpunct 86. 40.+375−566.
80. d. 24 Mart. ε. gr. Bär. 86. 55. 33. N.
80. d. 1 Mart. η. gr. Bär. 86. 16. 32. S.
Polhöhe 54. 06. 32.

 7. Qua-

7. Quadrantpunct 86.° 30′+33—324.
80. d. 20 Mart. β. gr. Bär. 86. 31. 22. N.
80. d. 4 Mart. η. gr. Bär. 86. 16. 34. S.
Polhöhe 54. 06. 33.

8. Quadrantpunct 86. 20.+276—81.
80. d. 24 Mart. β. gr. Bär. 86. 31. 26. N.
80. d. 7 Mart. η. gr. Bär. 76. 16. 39. S.
Polhöhe 54. 06. 35.

9. Quadrantpunct 86. 10.—28+160.
79. d. 18 Sept. β. Cassiop. 86. 08. 50. N.
80. d. 11 Mart. η. gr. Bär. 86. 16. 38. S.
Polhöhe 54. 06. 24.

10. Quadrantpunct 85. 00+9—69.
79. d. 18 Sept. δ. Cassiop. 85. 00. 22.
79. d. 18 Oct. α. Perseus. 84. 57. 08.
Polhöhe 54. 05. 57.

11. Quadrantpunct 85. 00.—120—69.
80. d. 29 Iun. ϑ. Drach. 84. 55. 02.
79. d. 19 Oct. α. Perseus. 84. 57. 08.
Polhöhe 54. 05. 25.

12. Quadrantpunct 85. 00. +9.—348.
79. d. 18 Sept. δ. Cassiop. 85. 00. 22.
80. d. 21 Febr. ι. gr. Bär. 84. 45. 35.
Polhöhe 54. 06. 42.

13. Quadrantpunct 84. 50.+122—108.
80. d. 30 Iun. ϑ. Drach. 84. 55. 04.
80. d. 23 Febr. ι. gr. Bär. 84. 45. 31.
Polhöhe 54. 06. 26.

14. Quadrantpunct 84. 10.+238—411.
80. d. 29 Iun. ι. Drach. 84. 19. 52.
80. d. 26 Febr. κ. gr. Bär. 83. 52. 58.
Polhöhe 54. 06. 12.

15. Quadrantpunct 81. 50.+349—293.
80. d. 30 Iun. η. Drach. 82. 04. 28.
80. d. 7 Febr. α. Fuhrm. 81. 37. 51.
Polhöhe 54. 06. 31.

16. Qua-

16. Quadrantpunct 81. 00. + 201 − 316.
80. d. 5. Apr. α. gr. Bär. 81. 08. 20.
80. d. 9 Febr. β. Fuhrm. 80. 46. 54.
Polhöhe 54. 06. 12.

17. Quadrantpunct 80.° 50′ + 445 − 512.
1780. d. 6 Apr. α. gr. Bär. 81. 08. 27
79. d. 23 Iul. δ. Schwan. 80. 28. 47.
Polhöhe 54. 06. 10.

18. Quadrantpunct 80. 50. + 445. − 661.
80. d. 6 Apr. α. gr. Bär. 81. 08. 27.
79. d. 23 Iul. α. Schwan. 80. 22. 36.
Polhöhe 54. 06. 13.

19. Quadrantpunct 77° 00. − 280. + 232.
79. d. 16 Aug. δ. Drache. 76. 48. 24.
79. d. 21 Oct. γ. Androm. 77. 09. 37.
Polhöhe 54. 05. 37.

20. Quadrantpunct 77. 00. − 280. + 40.
79. d. 16 Aug. δ. Drache. 76. 48. 24.
79. d. 26 Sept. ο. Androm. 77. 01. 39.
Polhöhe 54. 06. 06.

21. Quadrantpunct 74. 30. − 12. + 8.
79. d. 11 Sept. β. Cepheus. 74. 29. 30.
79. d. 20 Iul. α. Leyer. 74. 29. 40.
Polhöhe 54. 05. 26.

22 Quadrantpunct 69. 00. + 68 + 26.
80. d. 25. Mart. β. kl. Bär. 69. 02. 49.
79. d. 21 Iul. β. Leyer. 69. 01. 05.
Polhöhe 54. 06. 07.

23. Quadrantpunct 69. 00. + 68 + 90.
80. d. 25 Mart. β. kl. Bär. 69. 02. 49.
79. d. 26 Sept. ε. Schwan. 69. 03. 44.
Polhöhe 54. 05. 42.

24. Quadrantpunct 68. 50 + 296 − 191.
80. d. 28 Mart. β. kl. Bär. . . . 69. 02. 16.
79. d. 5 Oct. γ. Nordl. Dreieck. 68. 42. 05.
Polhöhe 54. 06. 16.

25. Qua-

25. Quadrantpunct 67. 30. + 292 — 495.
79. d. 11 Sept. γ. Cepheus. 67. 42. 06.
80. d. 1 Iul. ε. Hercules. 67. 09. 29.
Polhöhe 54. 06. 13.

26. Quadrantpunct 55. 50. + 210 — 300.
1779. d. 19 Sept. α. kl. Bär. 55. 58. 42.
79. d. 5 Oct. β. Widder. 55. 37. 34.
Polhöhe 54. 06. 00.

27. Quadrantpunct 55. 50. + 210 — 390.
79. d. 19 Sept. α. Kl. Bär. 55. 58. 42.
80. d. 19 Iun. γ. Hercules. 55. 33. 50.
Polhöhe 54. 06. 32.

28. Quadrantpunct 55. 40. + 444. — 376.
79. d. 19. Sept. α. kl. Bär. 55. 58. 24.
80. d. 29 Mai. η. Boot. 55. 24. 35.
Polhöhe 54. 06. 04.

29. Quadrantpunct 52. 10 + 87 — 314.
80. d. 8 Apr. α. kl. Bär. 52. 13. 36.
79. d. 9 Dec. α. Stier. 51. 57. 00.
Polhöhe 54. 05. 59.

30. Quadrantpunct 52. 10. + 87 — 220.
80. d. 8. Apr. α. kl. Bär. 52. 13. 36.
80. d. 11 Mart. β. Schlange. 52. 00. 53.
Polhöhe 54. 05. 59.

31. Quadrantpunct 52. 10. + 87. + 169.
80. d. 8 Apr. α. kl. Bär. 52. 13. 36.
80. d. 11 Mart. γ. Schlange. 52. 17. 00.
Polhöhe 54. 06. 18.

32. Quadrantpunct 52. 00. + 329. — 451.
80. d. 8 Apr. α. kl. Bär. 52. 13. 38.
80. d. 15 Mart. β. Löwe. 51. 41. 18.
Polhöhe 54. 06. 07.

Aus diesen 32 Resultaten erhält man das Mittelresultat 54° 06′ 06″. Und wenn man diejenigen über 6′ 30″ und unter 5′ 30″ weglässt das Mittelresultat 54° 06′ 02″ für die Polhöhe.

§. 9.

§. 9.

Da ich fand daſs dieſe Reſultate noch nicht ſo nahe zuſammentraſen als ich wünſchte, ſo ſuchte ich unter dieſen Sternen alle diejenigen aus, deren Unterſcheid in der Höhe nicht viel über 20′ betrug, damit ſie bey ihrem Durchgange nicht weit aus der Mitte des Sehrohrs beobachtet werden konnten, und alſo auch derjenigen Abweichung vorgebeuget würde, welche durch Beobachtungen weit von der Axe des Sehrohrs auf die Wehrte des Micrometers hervorgebracht werden konnte, worauf bey dieſen Reſultaten alles ankommt. Nach dieſer Auswahl machte ich zu dieſer Abſicht aufs neue folgende Beobachtungen.

1. Quadrant Punct 88° 40′ + 134 − 237.
80. d. 16 Sept. α. Caſſiop. 88° 45′ 33″
80. d. 17 Sept. γ. Perſeus. 88. 30. 11.
Polhöhe 54.° 06. 02.

2. Quadrantpunct 88. 30. + 379. − 223.
80. d. 17 Sept. α. Caſſiop. 88. 45. 43.
80. d. 20 Jul. β. Drach. 88. 20. 45.
Polhöhe 54. 06. 39.

3. Quadrantpunct. 88 10 − 256 + 265.
80. d. 16 Mai. ζ. gr. Bär. 87. 59. 23.
80. d. 23 Jul. β. Drach. 88. 20. 59.
Polhöhe 54. 05. 48.

4. Quadrantpunct 86. 20. + 211 − 64.
80. d. 27 April β. gr. Bär. 86. 30. 47.
80. d. 26 Mai. η. gr. Bär. 86. 17. 20.
Polhöhe 54. 06. 05.

5. Quadrantpunct 86. 10. − 35 + 183.
80. d. 15 Sept. β. Caſſiop. 86. 08. 33.
80. d. 24 Mai. η. gr. Bär. 86. 17. 35.
Polhöhe 54. 06. 05.

6. Quadrantpunct 85. 00. + 4. − 59.
80. d. 15 Sept. δ. Caſſiop. 85. 00. 10.
80. d. 17 Sept. α. Perſeus. 84. 57. 33.
Polhöhe 54. 05. 53.

7. Quadrantpunct 85. 00. + 4. − 334.
− 315.
80. d. 15 Sept. δ. Cassiop. 85. 00. 10.
80. d. 10 Apr. ι. gr. Bär. 84. 46. 09.
81. d. 9 Mart. ι. gr. Bär. 84. 46. 57.
Polhöhe 54. 06. 31. 54. 06. 30.

8. Quadrantpunct 85. 00. − 120. − 59.
80. d. 29 Iun. ϑ. Drach. 84. 55. 02.
80. d. 17 Sept. α. Perseus. 84. 57. 33.
Polhöhe 54. 05. 12.

9. Quadrantpunct 84. 40. + 122. − 74.
80. d. 30 Iun. ϑ. Drach. 84. 55. 04.
81. d. 12 Mart. ι. gr. Bär. 84. 46. 56.
Polhöhe 54. 05. 27.

10. Quadrantpunct 84. 40. − 144. + 164.
80. d. 15 Sept. γ. Cassiop. 84. 34. 02.
81. d. 13 Mart. ι. gr. Bär. 84. 46. 48.
Polhöhe 54. 06. 12.

11. Quadrantpunct 81. 30. + 20 + 187.
80. d. 15 Sept. ε. Cassiop. 81. 30. 50.
80. d. 14 Oct. α. Fuhrm. 81. 37. 45.
Polhöhe 54. 06. 36.

12. Quadrantpunct 81. 00. + 211. − 317.
80. d. 4 Mai. α. gr. Bär. 81. 08. 45.
89. d. 14 Oct. β. Fuhrm. 80. 46. 52.
Polhöhe 54. 06. 23.

13. Quadrantpunct 77. 00. − 269 + 47.
80. d. 24 Aug. δ. Drach. 76. 48. 51.
80. d. 18 Sept. ο. Androm. 77. 01. 57.
Polhöhe 54. 06. 21.

14. Quadrantpunct 77. 00. − 269 + 213.
80. d. 24 Aug. δ. Drach. 76. 48. 51.
80. d. 18 Sept. γ. Androm. 77. 08. 50.
Polhöhe 54. 06. 24.

15. Qua-

15. Quadrantpunct 74. 30. — 5. — 30.
80. d. 2 Sept. β. Cepheus 74. 29. 48.
80. d. 8 Aug. α. Leyer. 74. 28. 45.
Polhöhe 54. 06. 14.
16. Quadrantpunct 69. 00. + 83. + 36.
81. d. 15 Mart. β. kl. Bär. 69. 03. 27.
80. d. 9 Aug. β. Leyer. 69. 01. 30.
Polhöhe 54. 05. 55.
17. Quadrantpunct 69. 00. + 83. + 80.
81. d. 15 Mart. β. kl. Bär. 69. 03. 27.
80. d. 9 Aug. ε. Schwan. 69. 03. 19.
Polhöhe 54. 05. 53.
18. Quadrantpunct 55. 50. + 196 — 305.
80. d. 17 Sept. α. kl. Bär. 55. 58. 07.
80. d. 17 Sept. β. Widder. 55. 37. 21.
Polhöhe 54. 06. 12.
19. Quadrantpunct 55. 50 + 196 — 390.
80. d. 17 Sept. α. kl. Bär. 55. 58. 07.
80. d. 19 Iun. γ. Hercul. 55. 33. 50.
Polhöhe 54. 06. 30.
20. Quadrantpunct 52. 10. + 80 — 318.
80. d. 9 Mai. α. kl. Bär. 52. 13. 39.
80. d. 17 Sept. α. Stier. 51. 56. 52.
Polhöhe 54. 06. 14.
21. Quadrantpunct 52. 10. + 80 — 230.
80. d. 9 Mai. α. kl. Bär. 52. 13. 39.
80. d. 30 Mai. β. Schlange. 52. 00. 28.
Polhöhe 54. 06. 26.
22. Quadrantpunct 52. 19. + 80. + 158.
80. d. 9 Mai. α. kl. Bär. 52. 13. 39.
80. d. 30 Mai. γ. Schlange. 52. 16. 33.
Polhöhe 54. 06. 46.

Das Mittel aus allen 22 Beobachtungen giebt die Polhöhe 54° 06′ 10″. Wenn man zwo Beobachtungen, welche die Polhöhe unter 54° 05′ 30″ und drey, welche sie über 54° 06′ 30″ geben, wegläſst, ſo bleibt noch das gefundene Mittel von 54° 06′ 10″.

 Wenn

Wenn man endlich aus den drey Mittelresultaten

54. 05′ 59″.
54. 06. 02.
54. 06. 10.

das Mittel nimmt, so findet man für die Polhöhe 54° 06′ 04″. und hiebey muste ich es diesmahl bewenden lassen.

Wenn man die Beobachtungen einerley correspondirender Sterne unter sich vergleicht, so dienet solches dazu zu erkennen, dass der Unterscheid der Resultate zuweilen von ungleicher Stellung des Quadranten, zuweilen auch von nicht völlig genau bestimmter Abweichung der Fixsterne herrühre. Wenn man aus diesen Beobachtungen besonders das Mittel nimmt, und aus diesen Mittelresultaten endlich wiederum das Mittel, so erhält man ebenfals für die Polhöhe

54° 06′ 03″.

Da eine grössere Genauigkeit mit diesem Instrumente für mich wenigstens nicht zu erreichen ist, so erwarte ich mit grossem Verlangen den Uranometer, welchen der Herr Ober Consistorialrath Silberschlag für die hiesige Sternwarte in Berlin verfertigen läset, wodurch denn ohne zweifel die hiebey nachgebliebene Ungewisheit gänzlich gehoben werden wird. Von der Güte und Vollkommenheit dieses Instruments werde ich bey Bekanntmachung der damit angestellten Beobachtungen nähere Nachricht geben.

IV. Ueber des Herrn Professor Fuſs Rechnungsformel aus den gemessenen Höhen und Abstande zweyer Weltkörper ihren wahren Abstand zu finden.

Die Abhandlung n. II. über die Bordasche Rechnungsformel war schon abgedruckt und an verschiedene Freunde vertheilet, als Herr Bode mir eine andre über eben diese Aufgabe vom Herrn Prof. Fuſs aus Petersburg mittheilte, welche nachher in dem Astronomischen Iahrbuch für 1784. Seite 180 bekannt gemacht ward. Sie ist diese:

$$\cos d' = 2\cos s \cdot \cos(s-d) \sec h \cdot \sec h' \cdot \cos(h+\delta) \cdot \cos(h'-r) - \cos(h+\delta+h'-r)$$

und sieht dem ersten Anschein nach ganz anders aus als die Bordasche II. Seite 45.

$$\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\sin\frac{f+g}{2}\right)^2 - \frac{\sin\tfrac{1}{2}(a+b+d) \cdot \sin\tfrac{1}{2}(a+b-d)\sin f \cdot \sin g}{\sin a \cdot \sin b};$$

wenn man auch auf die Verschiedenheit in den Benennungen nicht achtet.

Indessen sahe ich bald, daſs sie aus einerley Gründen mit dieser abgeleitet werden könnte, und daſs die letztere in die erste überginge, wenn man in ihr die Benennungen der erstern substituiret und eine schickliche Abänderung des trigonometrischen Ausdrucks vornimmt. Und ich hoffe, daſs es den Lesern angenehm seyn werde, die Vergleichung derselben zu sehen.

Ich will zuerst dieselbe aus den Trigonometrischen Ausdrücken herleiten. Wenn man die Figur der Abhandlung II. Seite 38 hiebey vergleicht, so seyn ZH und ZR zween Quadranten, Z der Scheitelpunct, HL und Rs, die gemessenen Höhen, Ls die gemessene Distanz, Hl und RS die von Parallaxe und Strahlenbrechung befreieten Höhen, und lS die wahre Distanz. So hat man nach der Kugeltrigonometrie im Dreyeck ZLs

$(\cos\tfrac{1}{2}Z)^2$

$$(\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}Z)^2 = \frac{\mathrm{sin}\,\tfrac{1}{2}(ZL + Zs + Ls)\,\mathrm{sin}.\tfrac{1}{2}(ZL + Zs - Ls)}{\mathrm{sin}.ZL.\mathrm{sin}Zs}$$

$$= \frac{\mathrm{sin}.\frac{ZL + Zs + Ls}{2}.\mathrm{sin}\left(\frac{ZL + Zs + Ls}{2} - Ls\right)}{\mathrm{sin}.ZL.\mathrm{sin}Zs}$$

$$= \frac{\mathrm{cos.}\left(90^\circ - \frac{ZL + Zs + Ls}{2}\right).\mathrm{cos.}\left(90^\circ - \frac{ZL + Zs + Ls}{2} - Ls\right)}{\mathrm{sin}ZL.\mathrm{sin}Zs}$$

$$= \frac{\mathrm{cos.}\frac{90^\circ - ZL + 90^\circ - Zs + Ls}{2}.\mathrm{cos.}\left(\frac{90^\circ - ZL + 90^\circ - Zs + Ls}{2} - Ls\right)}{\mathrm{cos.}(90^\circ - ZL)\,\mathrm{cos.}(90^\circ - Zs)}$$

Nun ist aber $90^\circ - ZL = HL$, und $90^\circ - Zs = Rs$.

Daher wird

$$(\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}Z)^2 = \frac{\mathrm{cos.}\frac{HL + Rs + Ls}{2}.\mathrm{cos.}\left(\frac{HL + Rs + Ls}{2} - Ls\right)}{\mathrm{cos.}HL.\mathrm{cos.}Rs.}$$

Es sey nun $HL = h$; $Rs = h'$; $Ls = d$; und $\frac{h + h' + d}{2} = s$.

Ferner schreibe man $\frac{1 + \mathrm{cos.}Z}{2}$ statt $(\mathrm{cos.}\tfrac{1}{2}Z)^2$ und

$\mathrm{sec.}h.\mathrm{sec.}h'$ stat $\frac{1}{\mathrm{cos}h.\mathrm{cos}h'}$ so erhält man

$$\mathrm{cos}Z = 2\mathrm{cos.}s.\mathrm{cos}(s - d)\,\mathrm{sec.}h.\mathrm{sec.}h' - 1.$$

Nun giebt weiter die Trigonometrie in dem Dreiecke ZlS aus dem Winkel Z und den anliegenden Seiten Zl und ZS für die Seite lS

$$\mathrm{cos.}lS = \mathrm{cos.}Zl.\mathrm{cos}ZS + \mathrm{sin}Zl.\mathrm{sin}ZS\,\mathrm{cos.}Z$$

und wenn man den für $\mathrm{cos}Z$ erhaltenen Werth einführt, auch Hl statt Zl und RS stat ZS nimmt, so wird

$$\mathrm{cos.}lS = \mathrm{sin}Hl.\mathrm{sin}RS + 2\mathrm{cos.}Hl.\mathrm{cos}RS.\mathrm{cos.}s.\mathrm{cos.}(s - d).\mathrm{sec}h.\mathrm{sec}h'$$
$$- \mathrm{cos.}HL.\mathrm{cos.}RS$$

$$= 2\mathrm{cos.}Hl.\mathrm{cos.}RS.\mathrm{cos.}s.\mathrm{cos}(s - d)\,\mathrm{sec.}h.\mathrm{sec.}h'$$
$$- (\mathrm{cos}Hl.\mathrm{cos}RS - \mathrm{sin}Hl.\mathrm{sin}RS)$$

Es ist aber $\cos.Hl \cos RS - \sin Hl . \sin RS = \cos.(Hl + RS)$ und wenn nun $h + \delta$ stat Hl und $h' - r$ stat RS auch d' stat lS geschrieben wird, so ist

$$\cos.d' = 2\cos.s . \cos.(s-d) \sec.h . \sec h' . \cos(h+\delta)\cos.(h'-r) - \cos.(h+\delta+h'-r)$$

welches der verlangte Ausdruck ist.

Hieraus erhellet nun schon, dass diese Rechnungsformel mit der Bordaschen einerley seyn müsse und dass beyde bloss im Ausdrucke unterschieden seyn können. Um dies noch vollständiger zu übersehen, führe man hier die Bordaschen Benennungen und trigonometrischen Ausdrücke ein.

Man schreibe also x stat d'; compl. a statt h; compl. b stat h'; compl. f statt $h' - r$; compl. g statt $h + \delta$; ändre darnach sin. in cos. und cos. in sin, und gebrauche stat der Secanten die cosinus, so hat man

$$\cos.x = \frac{2\cos.s.\cos.(s-d)\sin.f.\sin.g}{\sin.a.\sin b} - \cos.(h+\delta+h'-r).$$

Man schreibe ferner compl. $\frac{1}{2}.(a+b+d)$ stat $s = \dfrac{h+h'+d}{2}$ und compl. $\frac{1}{2}(a+b-d)$ stat $s-d$, so ist

$$\cos x = \frac{2.\sin\frac{a+b+d}{2}.\sin\frac{a+b-d}{2}\sin f.\sin g.}{\sin a \sin.b.} - \cos.(h+\delta+h'-r)$$

Endlich setze man noch $1 - 2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2$ stat $\cos.x$

und $2\left(\cos.\frac{h+\delta+h'-r}{2}\right)^2 - 1$ stat $\cos.(h+\delta+h'-r)$

und dann $f+g$ stat $h+\delta+h'-r$ so kommt

$$1-2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2 = 2.\frac{\sin\frac{a+b+d}{2}.\sin\frac{a+b-d}{2}\sin f.\sin g}{\sin a.\sin b.} + 1 - \sin 2\left(\frac{f+g}{2}\right)^2$$

und so die Bordasche Rechnungsformel. II. Seite 45.

$$\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\sin\frac{f+g}{2}\right)^2 - \frac{\sin\frac{a+b+d}{2}.\sin\frac{a+b-d}{2}.\sin f.\sin g}{\sin a.\sin b.}$$

Um

Um zu zeigen, wie nach der Fussischen Formel die Rechnung geführt werden könne, wollen wir das Beispiel II. Seite 49. 50 nach derselben hersetzen.

gemess. Distanz $= 65^\circ\ 27' = d.$
gemess. Mondhöhe $= 15\ \ 21 = h.$
gemess. Sonnenhöhe $= 78.\ 18. = h'$

$$159^\circ.06' = h + h' + d.$$
$$2)\ \overline{79^\circ\ 33' = s.}$$
$$14.06' = s - d.$$

Mond Parallaxe und Strahlenbr. $= 53' = \delta$
für die Sonne $= 0 = r$
Also $h + \delta = 16^\circ\ 14'$
$h' - r = 78.\ 18$

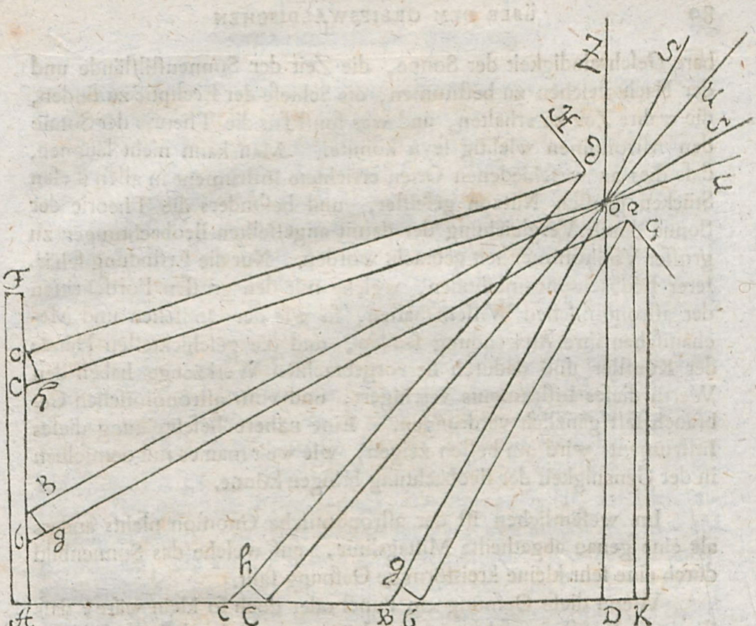
$h + \delta + h' - r = 94^\circ\ 32'$

	log. 2.	0.3010300
$s = 79^\circ\ 33'$ - - - - - - -	log. cos.	9.2585832
$s - d = 14.06$ - - - - - - -	log. cos.	9.9867144
$h = 15.21.$ log. sec $= 10$ —	log. cos.	0.0157758
$h' = 78.18.$ log. sec $= 10$ —	log. cos.	0.6929593
$h + \delta = 16\ 14.$ - - - - - -	log. cos.	9.9823306
$h' - r = 78.18.$ - - - - - -	log. cos.	9.3070407
		9.5444340.

Zu diesen gefundenen Logarithmen
gehöret der cosinus - - - - - - - - 0.3502092
$h + \delta + h' - r = 94^\circ\ 32'$ - - cosin. — 0.0798391.

$$\cos. d' = 0.4292483.$$
$$\text{Compl. } d' = 25^\circ\ 25'\ 11''$$
$$d' = 64^\circ\ 34'.\ \text{wie num. II.}$$

V. Ueber



V.
ÜBER DEM GREIFSWALDISCHEN ASTRONOMISCHEN GNOMON.

Der Aſtronomiſche Gnomon war lange Zeit dasjenige Inſtrument mit welchem man die genaueſten Beobachtungen anſtellen zu können glaubte. Sein nächſter Gebrauch beſtand darin, die mittägliche Sonnenhöhe zu meſſen, und daraus die geographiſche Breite des Orts oder deſſen Polhöhe herzuleiten, den Durchmeſſer der Sonnenſcheibe zu meſſen, die ſcheinbare Geschwindigkeit der Sonne, die Zeit der Sonnenstillstände und der Nachtgleichen zu bestimmen, die Schiefe der Ecliptic zu finden, die wahre Zeit zu erhalten, und was sonst für die Theorie der Sonne den Astronomen wichtig seyn konnte. Man kann nicht läugnen, dass dies an verschiedenen Orten errichtete Instrument in allen diesen Stücken grossen Nutzen geleistet, und besonders die Theorie der Sonne durch Vergleichung der damit angestellten Beobachtungen zu grosser Vollkommenheit gebracht worden. Nur die Erfindung schärferer Beobachtungsmethoden, welche mit den grossen Fortschritten der astronomischen Wissenschaften, so wie der Optischen und Mechanischen ihre Anwendung fanden, und die geschicktesten Hände der Künstler und dadurch hervorgebrachten Werkzeuge haben den Werth dieses Instruments verringert, und vom astronomischen Gebrauch fast gänzlich verdrungen. Eine nähere Beschreibung dieses Instruments wird am besten zeigen, wie weit man es mit demselben in der Genauigkeit der Beobachtung bringen könne.

Im wesentlichen ist der astronomische Gnomon nichts anders als eine genau abgetheilte Mittagslinie, auf welche das Sonnenbild durch eine sehr kleine kreisförmige Oefnung fällt.

Wenn diese Oefnung ein Punct oder doch so klein wäre, dass sie als ein Punct angesehen werden könnte, und daneben das Bild der Sonne auf der Mittagslinie deutlich gesehen werden könnte, so dass die Puncte B und C sich völlig auszeichneten, wo die von den äussersten Puncten des Sonnenrandes ausgehende Strahlen S und U die Mittagslinie träfen, so würde die Beobachtung mit Zuverlässigkeit gemacht werden können. Und dann käme die Richtigkeit der Bestimmung der Winkel, welche die Verticallinie DZ mit den Strahlen SB und UC machte, allein auf die Genauigkeit an, mit welcher die Linien von der Oefnung *o* nach D, *o*D, DB und DC gemessen würden. Die halbe Summe der beyden Winkel D*o*B und D*o*C gäbe den Abstand des Sonnenmittelpuncts vom Zenith und der halbe Unterscheid beyder Winkel den Sonnenhalbmesser.

Allein eine so kleine Oefnung giebt kein deutliches Sonnenbild und noch weniger zeichnen sich die Puncte B und C mit nöthiger Klarheit aus. Man ist deswegen gezwungen, der Oefnung einen merk-

merklichen Durchmesser zu geben, und damit verliehret zugleich die Beobachtung selbst an Zuverlässigkeit und Genauigkeit.

Wenn nämlich die Oefnung einen Durchmesser *ad* hat, so ist der äusserste Strahl S von dem obern Sonnenrande nicht SoB, sondern S*ab*, und der äusserste Strahl U von dem untern Sonnenrande nicht UoC sondern U*dc*, vorausgesetzt, dass der Strahl von der Oefnung *da* bis zur Mittagslinie keine Aenderung in seiner Richtung leidet. Auf B*b* und C*c* fällt noch immer etwas Sonnenlicht, aber immer weniger, je weiter man sich von B und C entfernet, und den Puncten *b* und *c* nähert.

Da also von *b* nach D, imgleichen von *c* nach A hin kein Sonnenlicht fällt sondern von der Mauer aufgefangen wird, so liegt solches im vollen Schatten; von B nach *b* und eben so von C nach *c* erstreckt sich der Halbschatten, das ist, es fallen in diesen Räumen nicht von der ganzen Sonnenscheibe Strahlen. Von B nach C erstreckt sich die volle Erleuchtung. Da nun ausser BC das Licht almählig abnimmt, so ist es äusserst schwer, und unsern Augen wohl unmöglich, die Puncte B und C zu bestimmen, wo dieses Abnehmen anfängt, und eben so verhält es sich mit den Puncten *b* und *c*, wo dies Abnehmen aufhöret, und der volle Schatten eintritt. Indessen hat man sich bey den gnomonischen Beobachtungen allezeit an die Puncte *b* und *c* zu halten gesucht, und dabey kam es dann darauf an, die Halbschatten B*b* und C*c* in Rechnung zu bringen.

Bey der grossen Entfernung der Sonne von unserer Erde ist es erlaubt, Strahlen, welche aus einerley Punct der Sonne, wie SB und S*b* oder UC und U*c*, zu uns kommen, für parallel zu halten. Wenn also der, in der durch A gehenden verticalen Fläche ADZ liegende Durchmesser der Oeffnung *da* mit AD parallel läge, so wären *o*B*ba* und *o*C*cd* Parallelogramme und $oa = od = Bb = Cc$. Allein bey dieser Lage der Oeffnung fällt besonders bey niedriger Sonnenhöhe das Sonnenbild unförmlich lang aus. Daher kann man der Oeffnungsebene diese Lage nicht geben, und noch weniger in unsern Falle, wo das Sonnenbild bald auf eine verticale Ebene fällt. In allen diesen Fällen ist also der Halbschatten B*b* dem Halbmesser der Oeffnung *oa* nicht gleich, und eben so wenig *od* dem Halbschatten C*c*.

Um nun zu ſehen, wovon die Gröſſe des Halbſchatten auf der Horizontallinie abhänge, ziehe man bg durch b und Ch durch C mit HG parallel, ſo iſt $bg = oa = od = Ch$ und $gbB = hCc$ gleich dem Winkel, welchen die Oeffnungsebene mit der Horizontalebene macht. Wenn man nun noch die Winkel oBD, oCD als gegeben anſiehet, ſo kennet man auch die Winkel bgB, Chc, und es iſt $\sin oBD : \sin(180° - (oBD + gbB)) = gb : Bb$. Woraus alſo erhellet, daſs die Gröſſe des Halbſchattens von der Gröſſe des Halbmeſſers der Oeffnung oa, dem Winkel der Oeffnungsebene mit der Horizontal-Ebene, und dem Winkel oBD abhänge, wovon die beyden erſten Stücke bey einem und eben demſelben Gnomon beſtändige Gröſſen ſind, die dritte aber veränderlich, mit welcher ſich auch die Gröſſe des Halbſchatten verändert. Um dies noch näher zu überſehen, ſo hat man zu bedenken, daſs $\sin.(180° - (oBD + gbB)) = \sin.(oBD + gbB) = \sin oBD . \cos gbB + \sin gbB . \cos. oBD$ ſey. Setzt man nun zur Abkürzung $oBD = x$; $gbB = \alpha$; $gb = h$ und $Bb = y$, ſo iſt $\sin x : \text{ſ}. x \cos\alpha + \sin\alpha . \cos x = h : y$, und $y = h . \cos\alpha + h \sin\alpha \cot. x$. Hieraus ſiehet man nun, wovon die Gröſſe der Halbſchatten abhänget und wie er berechnet werden müſte, und daſs zu dem Ende bey Conſtruction eines Gnomons nicht allein darauf geſehen werden müſſe, daſs die Verhältniſſe der Höhe des Gnomons oD zu den Linien DB, DC etc. genau angegeben, und dadurch die Winkel DCo, DBo etc. gefunden werden können, ſondern daſs auch der Oeffnungshalbmeſſer und die Neigung der Oeffnungsebene gegen die Horizontal- oder Verticalebene genau gemeſſen werde, damit gezeigter maſſen aus Beobachtung der Puncte b und c die Puncte B und C gefunden, und die Beobachtung auf den Fall zurück gebracht werde, da die Oeffnung, durch welche die Sonnenſtrahlen fallen, nur ein Punct iſt. Auf ähnliche Art findet man die Halbſchatten Cc und Bb auf der Verticallinie des Gnomons AF.

Ich habe aber ſchon gezeiget, daſs es überaus groſſe Schwürigkeit habe, die Gränzen des Halbſchattens B und C genau zu beobachten. Aber dieſe Schwürigkeit wird noch vermehret durch die Strahlenbeugung, welche die bey dem Rande der Oeffnung nahe vorbeyfahrenden Strahlen leiden, imgleichen durch ein gewiſſes Zittern des Sonnenrandes, welches von der durch die erwärmte Atmoſphämosphäre bewegte Luft abzuhängen scheinet. Und diese Umstände, die man bisher nicht in Rechnung bringen kann, machen die Beobachtung der Gränzen des Halbschattens noch unsicherer, als sie schon ohne das sind. Wie viel es dieser Unbequemlichkeit abhelfe, wenn man die Oeffnung bis kurz vor der Beobachtung bedecket, damit die Platte, darin dieselbe sich befindet, nicht von der Sonne vorher erwärmt werde, kann ich nicht sagen, vermuthe aber nicht, daſs es viel ausmachen könne. Man hat deswegen noch auf andere Art versucht, den Abirrungen, welche der Oeffnungshalbmesser und der Rand der Oeffnung verursacht, dadurch vorzubauen, daſs man ein Collectivglas in der Oeffnung setzt. Allein hier dürften leicht die Farben an dem Rande des Sonnenbildes eben dergleichen Unrichtigkeiten erzeugen. Gewiſs ist es daher, daſs dies mit so vielen Umständen zu erbauende Instrument diejenige Genauigkeit nicht gewähret, welche die Astronomie jetzt von Beobachtungen durch andere Instrumente fordert. Indessen so lange man noch keine mechanischen Werkzeuge hatte, von welchen man eine solche Genauigkeit erwarten konnte, muste der Gnomon unter die vorzüglichsten astronomischen Instrumente gerechnet werden.

Nach diesen Grundsätzen ward in der hiesigen wüsten sogenannten Mönchenkirche ein Gnomon errichtet, dessen Construction hier aufbehalten zu werden verdienet.

Die Höhe des Gnomons oder der Oeffnung, durch welcher die Sonnenstrahlen auf die Mittagslinie fallen, beträgt 41,77 Fuſs Schw. Maaſs. Von diesem Punct D gehet die horizontale Mittagslinie 34,046 Fuſs schw. Maaſs fort, da dieselbe auf die an einem Pfeiler in die Höhe laufende verticale Mittagslinie stöſst. Sowohl die horizontale als die verticale Mittagslinie ist mit messingenen Platten belegt, welche mit in Bley vergossenen Schrauben auf Gothlandischen Steinen befestiget sind, und auf diesem Messing ist die Abtheilung der horizontalen und verticalen Mittagslinie gemacht, in Theilen, wovon 100000 Theile auf die ganze Höhe des Gnomons gehen. Die Zahlen gehen auf der horizontalen Mittagslinie von dem Puncte D von *o* an bis zur verticalen Mittagslinie AF, werden aber nur zusammt den messingenen Platten bey 54000 sichtbar, und gehen fort bis 81508, wo die verticale Mittagslinie anfängt, von diesem Puncte E gehen dann die Zahlen von o an nach F in die Höhe. Neben der verticalen Mittagslinie ist eine Maschine angebracht, mit einem über einer Rolle geführten Gegengewicht, in welcher der Beobachter sich in die Höhe lassen kann, um die Beobachtungen in der Verticallinie zu machen. Die Neigung der Platte, worin sich die Oeffnung zur Durchlassung der Sonnenstrahlen befindet, gegen die verticale Ebene ist 36° 53′, mithin ihre Neigung gegen die horizontale Ebene 53° 07′.

Der Durchmesser der Oeffnung war genau gemessen, 30 Theile von einem Maasstabe, wovon 66 Theile gleich sind mit 100 Theilen, davon 100000 die ganze Höhe des Gnomons Do ausmachen. Von diesen Theilen, nach welchen die Mittagslinien abgetheilet waren, enthielte daher der Durchmesser der Oeffnung 45,6 und der Halbmesser derselben 22,8.

Auf diese Art ist dieser Gnomon verfertigt, und hierin liegen die Elemente zur Berechnung der damit angestellten Beobachtungen. Damit es nun nicht nöthig seyn dürfte, über jede Beobachtung eine ganze Rechnung anzustellen, so sind für die Puncte der horizontalen und verticalen Mittagslinien von 100 zu 100 die Winkel berechnet, welche die auf die Mittagslinien fallende Sonnenstrahlen mit der Verticallinie machen. Die Winkel für die übrigen Puncte können dann durch eine leichte Interpolation gefunden werden.

Eben so sind nach der vorhergehenden Formul für die Halbschatten

$$y = h \cos\alpha + h \sin\alpha \cot. x.$$

wenn nun $h = 22{,}8$, und $\alpha = 53° 07'$ gesetzt wird, für die Puncte der horizontalen und nach einer ähnlichen Formel für die der verticalen Mittagslinie von 1000 zu 1000 die Grösse der Halbschatten berechnet worden, weil auch hier die Grössen für die übrigen Puncte der Mittagslinien durch eine leichte Interpolation herausgebracht werden konnten. Beyde Tabellen theile ich hier mit, theils um sie aufzubehalten, theils um die nachfolgenden gnomonischen Beobachtungen desto leichter darnach zu prüfen.

Tafel

Tafel für die Halbschatten auf der horizontalen Mittagslinie.

Mittagsl.	*Halbsch.*	*Mittagsl.*	*Halbsch.*	*Mittagsl.*	*Halbsch.*	*Mittagsl.*	*Halbsch.*
50000	23	60000	25	70000	26	80000	28.
51000	23	61000	25	71000	27	81000	28
52000	23	62000	25	72000	27	82000	29
53000	23	63000	25	73000	27	83000	29
54000	24	64000	25	74000	27	84000	29
55000	24	65000	26	75000	27	85000	29
56000	24	66000	26	76000	28	86000	30
57000	24	67000	26	77000	28	87000	30
58000	24	68000	26	78000	28	88000	30
59000	24	69000	26	79000	28	89000	30.

Tafel für die Halbschatten auf der verticalen Mittagslinie.

Mittagsl.	H. S.	*Mittagsl.*	H. S.	*Mittagsl.*	H. S.	*Mittagsl.*	H. S.	*Mittagsl.*	H. S.
0	35	10000	33	20000	32	30000	30	40000	28
1000	35	11000	33	21000	31	31000	30	41000	28
2000	35	12000	33	22000	31	32000	30	42000	28
3000	34	13000	33	23000	31	33000	29	43000	28
4000	34	14000	33	24000	31	34000	29	44000	28
5000	34	15000	32	25000	31	35000	29	45000	27
6000	34	16000	32	26000	31	36000	29	46000	27
7000	34	17000	32	27000	30	37000	29	47000	27
8000	34	18000	32	28000	30	38000	29	48000	27
9000	33	19000	32	29000	30	39000	28	49000	27.

Mittagsl.	*Halbsch.*	*Mittagsl.*	*Halbsch.*	*Mittagsl.*	*Halbsch.*	*Mittagsl.*	*Halbsch.*
50000	27	60000	25	70000	23	80000	21
51000	26	61000	25	71000	23	81000	21
52000	26	62000	25	72000	23	82000	21
53000	26	63000	24	73000	23	83000	21
54000	26	64000	24	74000	23	84000	21
55000	26	65000	24	75000	22	85000	21
56000	26	66000	24	76000	22	86000	20
57000	25	67000	24	77000	22	87000	20
58000	25	68000	24	78000	22	88000	20
59000	25	69000	23	79000	22	89000	20

Tafel für die Abſtände vom Scheitelpuncte auf der horizontalen Mittagslinie.

	58000		61000		64000
0	30. 06. 50.	0	31. 23. 00.	0	32. 37. 09.
1	09. 24.	1	25. 30.	1	39. 35.
2	11. 58.	2	28. 00.	2	42. 01.
3	14. 32.	3	30. 30.	3	44. 27.
4	17. 06.	4	33. 00.	4	46. 53.
5	19. 40.	5	35. 30.	5	49. 19.
6	22. 14.	6	38. 00.	6	51. 45.
7	24. 47.	7	40. 29.	7	54. 11.
8	27. 20.	8	42. 58.	8	56. 36.
9	29. 53.	9	45. 27.	9	59. 01.
	59000		62000		65000
0	30. 32. 26.	0	31. 47. 56.	0	33. 01. 26.
1	34. 59.	1	50. 25.	1	03. 51.
2	37. 32.	2	52. 54.	2	06. 16.
3	40. 05.	3	55. 23.	3	08. 41.
4	42. 38.	4	57. 51.	4	11. 06.
5	45. 10.	5	32. 00. 19.	5	13. 30.
6	47. 42.	6	02. 47.	6	15. 54.
7	50. 14.	7	05. 15.	7	18. 18.
8	52. 46.	8	07. 43.	8	20. 42.
9	55. 18.	9	10. 11.	9	23. 06.
	60000		63000		
0	30. 57. 50.	0	32. 12. 39.		
1	31. 00. 22.	1	15. 07.		
2	02. 53.	2	17. 34.		
3	05. 24.	3	20. 01.		
4	07. 55.	4	22. 28.		
5	10. 26.	5	24. 55.		
6	12. 57.	6	27. 22.		
7	15. 28.	7	29. 49		
8	17. 59.	8	32. 16.		
9	20. 30.	9	34. 43.		

	66000		70000		74000		78000
0	33. 25. 30.	0	34. 59. 31	0	36. 30. 05.	0	37. 57 15.
1	27. 53.	1	35. 01. 49.	1	32. 18.	1	59. 23.
2	30. 16.	2	04. 07.	2	34 31.	2	38. 01. 31.
3	32. 39.	3	06. 25.	3	36. 44.	3	03. 39.
4	35. 02.	4	08. 43.	4	38. 57.	4	05. 47.
5	37. 25.	5	11. 01.	5	41. 10.	5	07. 55.
6	39. 48.	6	13. 19.	6	43. 23.	6	10. 03.
7	42. 11.	7	15. 37.	7	45. 36.	7	12. 10.
8	44 34.	8	17. 55.	8	47. 48.	8	14. 17.
9	46. 57.	9	20. 12.	9	50. 00.	9	16. 24.
	67000		71000		75000		79000
0	33. 49. 20.	0	35. 22. 29.	0	36. 52. 12.	0	38. 18. 31.
1	51. 42.	1	24 46.	1	54. 24.	1	20. 38.
2	54. 04.	2	27. 03.	2	56. 36.	2	22. 45.
3	56. 26.	3	29. 20.	3	58. 48.	3	24. 52.
4	58. 48.	4	31. 37.	4	37. 01. 00.	4	26. 59.
5	34. 01. 10.	5	33. 53.	5	03. 11.	5	29. 05.
6	03. 32.	6	36. 10.	6	05. 22.	9	31. 11.
7	05. 54.	7	38. 26.	7	07. 33.	7	33. 17.
8	08. 15.	8	40 42.	8	09. 44.	8	35. 23.
9	10. 36.	9	42. 58.	9	11. 55.	9	37. 29.
	68000		72000		76000		80000
0	34. 12. 57.	0	35. 45. 14.	0	37. 14. 06.	0	38. 39. 35.
1	15. 18.	1	47 30.	1	16. 17.	1	41. 41.
2	17. 39.	2	49. 46.	2	18. 27.	2	43. 47.
3	20. 00.	3	52. 02.	3	20. 37.	3	45. 53.
4	22. 20.	4	54. 17.	4	22. 47.	4	47. 58.
5	24. 40.	5	56. 22.	5	24. 57.	5	50. 03.
6	27. 00.	9	58. 47.	6	27. 07.	6	52. 08.
7	29. 20.	7	36. 01. 02.	7	29. 17.	7	54. 13.
8	31 40.	8	03. 17.	8	31. 27.	8	56. 18.
9	34. 00.	9	05. 32.	9	33. 36	9	58. 23.
	69000		73000		77000		81000
0	34. 36. 20.	0	36. 07. 47.	0	37. 35. 45.	0	39. 00. 28.
1	38. 40.	1	10. 01.	1	37. 54.	1	02. 32.
2	41. 00.	2	12. 15.	2	40. 03.	2	04. 36.
3	43. 19.	3	14. 29.	3	42. 12.	3	06. 40.
4	45. 38.	4	16. 43.	4	44. 21.	4	08. 44.
5	47. 57.	5	18. 57.	5	46. 30.	5	10. 48.
6	50. 16.	6	21. 11.	6	48 39.	6	12. 52.
7	52. 35.	7	23. 25.	7	50. 48.	7	14 56.
8	54. 54.	8	25. 39.	8	52. 57.	8	17. 00.
9	57. 13.	9	27. 52.	9	55. 06	9	19. 03.

Tafel für die Abstände vom Scheitelpuncte auf der verticalen Mittagslinie.

	0000		3000		6000		9000
0	39. 11. 32.	0	40. 02. 58.	0	40. 56. 17.	0	41. 51. 36.
1	13. 13.	1	04. 43.	1	58. 06.	1	53. 29.
2	14. 54.	2	06. 28.	2	59. 55.	2	55. 22.
3	16. 35.	3	08. 13.	3	41. 01. 44.	3	57. 15.
4	18. 16.	4	09. 58.	4	03. 33.	4	59. 08.
5	19. 58.	5	11. 43.	5	05. 22.	5	42. 01. 01.
6	21. 40.	6	13. 28.	6	07. 11.	6	02. 54.
7	23. 22.	7	15. 14.	7	09. 00.	7	04. 47.
8	25. 04.	8	17. 00.	8	10. 50.	8	06. 41.
9	26. 46.	9	18. 45.	9	12. 40.	9	08. 35.
	1000		4000		7000		10000
0	39. 28. 28.	0	40. 20. 31.	0	41. 14. 30.	0	42. 10. 29.
1	30. 10.	1	22. 17.	1	16. 20.	1	12. 23.
2	31. 52.	2	24. 03.	2	18. 10	2	14. 17.
3	33. 35.	3	25. 49.	3	20. 00.	3	16. 11.
4	35. 18.	4	27. 55.	4	21. 50.	4	18. 06.
5	37. 01.	5	29. 22.	5	23. 41.	5	20. 01.
6	38. 44.	6	31. 09.	6	25. 32.	6	21. 56.
7	40. 27.	7	32. 56.	7	27. 23.	7	23. 51.
8	42. 10.	8	34. 43.	8	29. 14.	8	25. 46.
9	43. 53.	9	36. 30.	9	31. 05.	9	27. 41.
	2000		5000		8000		11000
0	39. 45. 36.	0	40. 38. 17.	0	41. 32. 56.	0	42. 29. 36.
1	47. 19.	1	40. 04.	1	34. 47.	1	31. 31.
2	49. 03.	2	41. 52.	2	36. 38.	2	33. 27.
3	50. 47.	3	43. 40.	3	38. 30.	3	35. 23.
4	52. 31.	4	45. 28.	4	40. 22.	4	37. 19.
5	54. 15.	5	47. 16.	5	42. 14.	5	39. 15.
6	55. 59.	6	49. 04.	6	44. 06.	6	41. 11.
7	57. 43.	7	50. 52.	7	45. 58.	7	43. 07.
8	59. 28.	8	52. 40.	8	47. 50.	8	45. 04.
9	40. 01. 13.	9	54. 28.	9	49. 43.	9	47. 01.

	12000		16000		20000		24000
0	42. 48. 58.	0	44. 08. 49.	0	45. 32. 40.	0	47. 00. 44.
1	50. 55.	1	10. 52.	1	34. 49.	1	03. 00.
2	52. 52.	2	12. 55.	2	36. 58.	2	05. 16.
3	54. 49.	3	14. 58.	3	39. 07.	3	07. 32.
4	56. 46.	4	17. 01.	4	41. 17.	4	09. 48.
5	58. 43.	5	19. 04.	5	43. 27.	5	12. 04.
6	43. 00. 41.	6	21. 07.	6	45. 37.	6	14. 20.
7	02. 39.	7	23. 11.	7	47. 47.	7	16. 36.
8	04. 37.	8	25. 15.	8	49. 57.	8	18. 52.
9	06. 35.	9	27. 19.	9	52. 07.	9	21. 09.

	13000		17000		21000		25000
0	43. 08. 33.	0	44. 29. 23.	0	45. 54. 17.	0	47. 23. 26.
1	10. 31.	1	31. 27.	1	56. 27.	1	25. 43.
2	12. 30.	2	33. 32.	2	58. 38.	2	28. 00.
3	14. 29.	3	35. 37.	3	46. 00. 49.	3	30. 18.
4	16. 28.	4	37. 42.	4	03. 00.	4	32. 36.
5	18. 27.	5	39. 47.	5	05. 11.	5	34. 54.
6	20. 26.	6	41. 52.	6	07. 22.	6	37. 12.
7	22. 25.	7	43. 57.	7	09. 34.	7	39. 30.
8	24. 24.	8	46. 02.	8	11. 46.	8	41. 48.
9	26. 24.	9	48. 08.	9	13. 58.	9	44. 06.

	14000		18000		22000		26000
0	43. 28. 24.	0	44. 50. 14.	0	46. 16. 10.	0	47. 46. 25.
1	30. 24.	1	52. 20.	1	18. 22.	1	48. 44.
2	32. 24.	2	54. 26.	2	20. 34.	2	51. 03.
3	34. 24.	3	56. 32.	3	22. 46.	3	53. 22.
4	36. 24.	4	58. 38.	4	24. 59.	4	55. 41.
5	38. 24.	5	45. 00. 44.	5	27. 12.	5	58. 00.
6	40. 25.	6	02. 51.	6	29. 25.	6	48. 00. 20.
7	42 26.	7	04. 58.	7	31. 38.	7	02. 40.
8	44. 27.	8	07. 05.	8	33. 51.	8	05. 00.
9	46. 28.	9	09. 12.	9	36. 05.	9	07. 20.

	15000		19000		23000		27000
0	43. 48. 29.	0	45. 11. 19.	0	46. 38. 19.	0	48. 09. 40.
1	50. 30.	1	13. 26.	1	40. 33.	1	12. 01.
2	52. 31.	2	15. 34.	2	42. 47.	2	14. 22.
3	54. 33.	3	17. 42.	3	45. 01.	3	16. 43.
4	56. 35.	4	19. 50.	4	47. 15.	4	19. 04.
5	58. 37.	5	21. 58.	5	49. 29.	5	21. 25.
6	44. 00. 39.	6	24. 06.	6	51. 44.	6	23. 46.
7	02. 41.	7	26. 14.	7	53. 59.	7	26. 07.
8	04. 43.	8	28. 22.	8	56. 14.	8	28. 29.
9	06. 46.	9	30. 31.	9	58. 29.	9	30. 51.

	28000		32000		36000		40000
0	48. 33. 13.	0	50. 10. 19.	0	51. 52. 12.	0	53. 39. 05.
1	35. 35.	1	12. 48.	1	54. 49.	1	41. 49.
2	37. 57.	2	15. 18	2	57. 26.	2	44. 33.
3	40. 20.	3	17. 48.	3	52. 00. 03.	3	47. 18.
4	42. 43.	4	20. 18.	4	02. 40.	4	50. 03.
5	45. 06.	5	22. 48.	5	05. 17.	5	52. 48.
6	47. 29.	6	25. 18.	6	07. 55.	6	55. 33.
7	49. 52.	7	27. 48.	7	10. 33.	7	58. 18.
8	52. 15.	8	30. 18.	8	13. 11.	8	54. 01. 04.
9	54. 39.	9	32. 49.	9	15. 49.	9	03. 50.
	29000		33000		37000		41000
0	48. 57. 03.	0	50. 35. 20.	0	52. 18. 27.	0	54. 06. 36.
1	59. 27.	1	37. 51.	1	21. 06.	1	09. 22.
2	49. 01. 51.	2	40. 22.	2	23. 45.	2	12. 08.
3	04. 15.	3	42. 54.	3	26. 24.	3	14. 54.
4	06. 40.	4	45. 26.	4	29. 03.	4	17. 41.
5	09. 05.	5	47. 58.	5	31. 42.	5	20. 28.
6	11. 30.	6	50. 30.	6	34. 21.	6	23. 15.
7	13. 55.	7	53. 02.	7	37. 01.	7	26. 02.
8	16. 20.	8	55. 34.	8	39. 41.	8	28. 50.
9	18. 45.	9	58. 07.	9	42. 21.	9	31. 38.
	30000		34000		38000		42000
0	49. 21. 11.	0	51. 00. 40.	0	52. 45. 01.	0	54. 34. 26.
1	23. 37.	1	03. 13.	1	47. 41.	1	37. 14.
2	26 03.	2	05. 46.	2	50. 22.	2	40. 02.
3	28. 29.	3	08. 19.	3	53. 03.	3	42. 50.
4	30. 55.	4	10. 52.	4	55. 44.	4	45. 39.
5	33. 21.	5	13. 25.	5	58. 25.	5	48. 28.
6	35. 48.	6	15. 59.	6	53. 01. 06.	6	51. 17.
7	38. 15.	7	18. 33.	7	03. 47.	7	54. 06.
8	40. 42.	8	21. 07.	8	06. 29.	8	56. 55.
9	43 09.	9	23. 42.	9	09. 11.	9	59. 45.
	31000		35000		39000		43000
0	49. 45. 36.	0	51. 26. 17.	0	53. 11. 53.	0	55. 02. 35.
1	48. 03.	1	28. 52.	1	14. 35.	1	05. 25.
2	50. 31.	2	31. 27.	2	17. 18.	2	08. 15.
3	52. 59.	3	34. 02.	3	20. 01.	3	11. 05.
4	55. 27.	4	36. 37.	4	22. 44.	4	13. 56.
5	57. 55.	3	39. 12.	5	25. 27.	5	16. 47.
9	50. 00. 23.	6	41. 48.	6	28. 10.	6	19. 38.
7	02 52.	7	44. 24.	7	30. 53.	7	22. 29.
8	05. 21.	8	47. 00.	8	33. 37.	8	25. 20.
9	07. 50.	9	49. 36.	9	36. 21.	9	28. 12.

	44000		48000		52000		56000
0	55. 31. 04.	1	57. 28. 18.	0	59. 30. 52.	0	61. 38. 48.
1	33. 56.	0	31. 18.	1	34. 00.	1	42. 04.
2	36. 48.	2	34. 18.	2	37. 08,	2	45. 20.
3	39. 40.	3	37. 18.	3	40. 16.	3	48. 36.
4	42. 33.	4	40. 19.	4	43. 25.	4	51. 53.
5	45. 26.	5	43. 20.	5	46. 34.	5	55. 10.
6	48. 19.	6	46. 21.	6	49. 43.	6	58. 27.
7	51. 12.	7	49. 22.	7	52. 52.	7	62. 01. 44.
8	54. 05.	8	52. 23.	8	56. 01.	8	05. 01.
9	56. 59.	9	55. 25.	9	59. 11.	9	08. 19.

	45000		49000		53000		57000
0	55. 59. 53.	0	57. 58. 27.	0	60. 02. 21.	0	62. 11. 37.
1	56. 02. 47.	1	58. 01. 29.	1	05. 31.	1	14. 55.
2	05. 41.	2	04. 31.	2	08. 41.	2	18. 13.
3	08. 35.	3	07. 33.	3	11. 51.	3	21. 31.
4	11. 30.	4	10. 35.	4	15. 02.	4	24. 50.
5	14. 25.	5	13. 38.	5	18. 13.	5	28. 09.
6	17. 20.	6	16. 41.	6	21. 24.	6	31. 28.
7	20. 15.	7	19. 44.	7	24. 35.	7	34. 47.
8	23. 10.	8	22. 47.	8	27. 46.	8	38. 07.
9	26. 06.	9	25. 51.	9	30. 58.	9	41. 27.

	46000		50000		54000		58000
0	56. 29. 02.	0	58. 28. 55.	0	60. 34. 10.	0	62. 44. 47.
1	31. 58.	1	31. 59.	1	37. 22.	1	48. 07.
2	34. 54.	2	35. 03.	2	40. 34.	2	51. 27.
3	37. 50.	3	38. 07.	3	43. 46.	3	54. 47.
4	40. 46.	4	41. 12.	4	46. 59.	4	58. 08.
5	43. 43.	5	44. 17.	5	50. 12.	5	63. 01. 29.
6	46. 40.	6	47. 22.	6	53. 25.	6	04. 50.
7	49. 37.	7	50. 27.	7	56. 38.	7	08. 11.
8	52. 34.	8	53. 32.	8	59. 51.	8	11. 32.
9	55. 32.	9	56. 38.	9	61. 03. 05.	9	14. 54.

	47000		51000		55000		59000
0	56. 58. 30.	0	58. 59. 44.	0	61. 06. 19.	0	63. 18. 16.
1	57. 01. 28.	1	59. 02. 50.	1	09. 33.	1	21. 38.
2	04. 26.	2	05. 56.	2	12. 47.	2	25. 00.
3	07. 24.	3	09. 02.	3	16. 01.	3	28. 22.
4	10. 23.	4	12. 08.	4	19. 16.	4	31. 45.
5	13. 22.	5	15. 15.	5	22. 31.	5	35. 08.
6	16. 21.	6	18. 22.	6	25. 46.	6	38. 31.
7	19. 20.	7	21. 29.	7	29. 01.	7	41. 54.
8	22. 19.	8	24. 36.	8	32. 16.	8	45. 17.
9	25. 18.	9	27. 44.	9	35. 32.	9	48. 41.

	60000		64000		68000		72000
0	63. 52. 05.	0	66. 10. 38.	0	68. 34. 16.	0	71. 02. 49.
1	55. 29.	1	14. 10	1	37. 56.	1	06. 35.
2	58. 53.	2	17. 42.	2	41. 36.	2	10. 22.
3	64. 02. 17.	3	21. 14.	3	45. 16.	3	14. 09.
4	05. 42.	4	24. 46.	4	48. 56.	4	17. 56.
5	09. 07.	5	28. 19.	5	52. 36.	5	21. 43.
6	12. 32.	6	31. 52.	6	56. 16.	6	25. 30.
7	15. 57.	7	35. 25.	7	59. 56.	7	29. 17.
8	19. 22.	8	38. 58.	8	69. 03. 37.	8	33. 04.
9	22. 48.	9	42. 31.	9	07. 18.	9	36. 52.
	61000		65000		69000		73000
0	64. 26. 14.	0	66. 46. 04.	0	69. 10. 59.	0	71. 40. 40.
1	29. 40.	1	49. 38.	1	14. 40.	1	44. 28.
2	33. 06.	2	53. 12.	2	18. 21.	2	48. 16.
3	36. 32.	3	56. 46.	3	22. 02.	3	52. 05.
4	39. 59.	4	67. 00. 20.	4	25. 44.	4	55. 54.
5	43. 26.	5	03. 55.	5	29. 26.	5	59. 43.
6	46. 53.	6	07. 30.	6	33. 08.	6	72. 03. 32.
7	50. 20.	7	11. 05.	7	36. 50.	7	07. 21.
8	53. 47.	8	14. 40.	8	40. 32.	8	11. 10.
9	57. 14.	9	18. 15.	9	44. 15.	9	14. 59.
	62000		66000		70000		74000
0	65. 00. 42.	0	67. 21. 50.	0	69. 47. 58.	0	72. 18. 48.
1	04. 10.	1	25. 26.	1	51. 41.	1	22. 38.
2	07. 38.	2	29. 02.	2	55. 24.	2	26. 28.
3	11. 06.	3	32. 38.	3	59. 07.	3	30. 18.
4	14. 35.	4	36. 14.	4	70. 02. 50.	4	34. 08.
5	18. 04.	5	39. 50.	5	06. 34.	5	37. 58.
6	21. 33.	6	43. 26.	6	10. 18.	6	41. 49.
7	25. 02.	7	47. 03.	7	14. 02.	7	45. 40.
8	28. 31.	8	50. 40.	8	17. 46.	8	49. 31.
9	32. 00.	9	54. 17.	9	21. 30.	9	53. 22.
	63000		67000		71000		75000
0	65. 35. 30.	0	67. 57. 54.	0	70. 25. 14.	0	72. 57. 13.
1	39. 00.	1	68. 01. 32.	1	28. 59.	1	73. 01. 04.
2	42. 30.	2	05. 10.	2	32. 44.	2	04. 55.
3	46. 01.	3	08. 48.	3	36. 29.	2	08. 47.
4	49. 32.	4	12. 26.	4	40. 14.	4	12. 39.
5	53. 03.	5	16. 04.	5	43. 59.	5	16. 31.
6	56. 34.	6	19. 42.	6	47. 45.	6	20. 23.
7	66. 00. 05.	7	23. 20.	7	51. 31.	7	24. 15.
8	03. 36.	8	26. 59.	8	55. 17.	8	28. 07.
9	07. 07.	9	30. 38.	9	59. 03.	9	32. 00.

	76000		78000		80000
0	73. 35. 53.	0	74. 53. 59.	0	76. 13. 04.
1	39. 46.	1	57. 55.	1	17. 03.
2	43. 39.	2	75. 01. 51.	2	21. 02.
3	47. 32.	3	05. 47.	3	25. 01.
4	51. 25.	4	09. 43.	4	29. 00.
5	55. 18.	5	13. 40.	5	32. 59.
6	59. 12.	6	17. 37.	6	36. 58.
7	74. 03. 06.	7	21. 34.	7	40. 57.
8	07. 00.	8	25. 31	8	44. 57.
9	10. 54.	9	29. 28.	9	48. 57.
	77000		79000		81000
0	74. 14. 48.	0	75. 33. 25	0	76. 52. 57.
1	18. 42.	1	37. 22.	1	56. 57.
2	22. 37.	2	41. 19.	2	77. 00. 57.
3	26. 32.	3	45. 17.	3	04. 57.
4	30. 27.	4	49. 15.	4	08. 57.
5	34. 22.	5	53. 13.	5	12. 58.
6	38. 17.	6	57. 11.	6	16. 59.
7	42. 12.	7	76. 01. 09.	7	21. 00.
8	46. 07.	8	05. 07.	8	25. 01.
9	50. 03.	9	09. 05.	9	29. 02.

Wenn man dasjenige erwäget, was ich bereits über die Zuverläſſigkeit dieſer Art Beobachtung geſagt habe, ſo hat die Fortſetzung der Mittagslinie in der Verticalebene keine andere Abſicht haben können, als daſs ſie zum gemeinen Gebrauch zur Beſtimmung der Mittagszeit dienen ſollte. Die Höhe des Gnomons wird hier im Grunde ſo viel geringer als man in der Mittagslinie ſteiget, und eben ſo viel verliehret die Zuverläſſigkeit der Beobachtung in Anſehung der Höhenmeſſung. Rechnet man hiezu noch die unbequeme Lage, in welcher der Beobachter in einem Stuhl ſeitwärts der Verticallinie hängend beobachten muſs, und daſs auf die Abtheilung der Verticallinie weniger Sorgfalt gewandt worden, ſo darf man ſich nicht ſehr wundern, daſs durch dieſe Beobachtungen die Beſtimmung der Polhöhe von den übrigen ſo weit abgehet, daſs ſie dabey in keine Betrachtung kommen können. Ich habe daher gegenwärtig allein die Beobachtungen auf der Horizontallinie zu dieſer Beſtimmung gebraucht, und unter ſelbigen auch nur diejenigen Iahre dazu genommen, von welchen ich gewiſs ſeyn konnte, daſs noch

alles

alles in unverrückten Zustande sey. In den letzten Jahren des Siebenjährigen Krieges ward diese wüste Kirche zum Heu- und Stroh-Magazin gebraucht, und obgleich die Befehlshaber beständig diesen Platz zu verschonen ausdrücklich befahlen, so ward doch solches schlecht oder gar nicht befolget, sondern alles war angefüllt und der Zugang dahin gesperrt, ja man fand nachher sogar Spuhren, dass hin und wieder Versuche gemacht waren, das wenige Messing abzureissen, die gleichwohl durch die starke Befestigung desselben vereitelt waren. Dass indessen irgendwo einige Verrückung des Instruments vorgefallen seyn müsse, oder die Mauer selbst successiven Aenderungen unterworfen sey, schliesse ich daraus, weil alle nachher gemachte Beobachtungen sowohl auf der Horizontal- als Verticallinie die Breite des Orts einige Minuten geringer angeben als vorher. Ausserdem übergehe ich hier die Beobachtungen auf der Horizontallinie in den nahe an der Verticallinie gelegenen Puncten, weil die Beobachtungen daselbst nur in einer sehr unbequemen und gezwungenen Lage des Beobachters statt finden, und damit bleiben nur die Beobachtungen von der Mitte des Maymonats bis zur Mitte des Julius übrig, welche ich hier mit ihrer Berechnung darstelle. Die erste Columne giebt den Monatstag der Beobachtung an; die zwote die Beobachtung des obersten und untersten Sonnenrandes; die dritte eben diese Beobachtungen von dem Halbschatten befreiet; die vierte die ihnen zugehörigen Höhen der Sonnenrände; die fünfte die daraus geschlossene Höhe des Mittelpuncts der Sonne; die sechste eben diese Höhe von der Strahlenbrechung nach des Abt de la Caille Tabelle befreiet. Endlich die siebendte die daraus folgende Polhöhe oder Breite von Greifswald, wobey die Sonnenabweichung bis 1759 incl. aus den Ephemeriden des erwähnten Abts mit Rücksicht auf den Meridian Unterscheid zwischen Paris und Greifswald zu 45 Zeitminuten genommen worden.

1755.

1755. May-Monath.

	Beobacht.	Verbess. v. Halbs.	Abst. v. Scheitelpunct.	Abst. d. Mittp. v. Scheitelp.	Verbess. v. Strahlenbr.	Polhöhe.
22	67410	67383	33°. 58'. 24".	33°. 43. 27	33. 44. 11.	54°. 06'. 28".
	66100	66126	33. 28. 30.			
24.	66435	66409	33. 35. 15.	33. 20. 10	33. 20. 54.	54. 06. 16.
	65125	65151	33. 05. 05.			
28.	64700	64675	32. 53. 34.	32. 38. 26.	32. 39. 08.	54. 06. 24.
	63410	63435	32. 23. 19.			

Iunius.

3.	62600	62575	32. 02. 10.	31. 46. 46.	31. 47. 27.	54. 06. 24.
	61310	61335	31. 31. 22.			
4.	62300	62275	31. 54. 46.	31. 39. 19.	31. 39. 59.	54. 06. 10.
	61010	61035	31. 23. 52.			
5.	62010	61985	31. 47. 34.	31. 32. 27.	31. 33. 08.	54. 06. 13.
	60750	60775	31. 17. 21.			
6.	61760	61735	31. 41. 21.	31. 26. 11.	31. 26. 52.	54. 06. 25.
	60500	60525	31. 11. 02.			
7.	61500	61475	31. 34. 52.	31. 19. 49.	31. 20. 29.	54. 06. 08.
	60250	60275	31. 04. 46.			
9.	61090	61065	31. 24. 37.	31. 09. 15.	31. 09. 56.	54. 06. 33.
	59820	59845	30. 53. 54.			
13.	60435	60410	31. 08. 10.	30. 52. 35.	30. 53. 15.	54. 05. 56.
	59155	59179	30. 37. 00.			
14.	60260	60235	31. 03. 46.	30. 48. 17.	30. 48. 57.	54. 05. 56.
	59030	59054	30. 33. 49.			
15.	60155	60130	31. 01. 07.	30. 45. 56.	30. 46. 35.	54. 06. 25.
	58910	58934	30. 30. 45.			
17.	59980	59955	30. 56. 42.	30. 41. 41.	30. 42. 20.	54. 06. 38.
	58750	58774	30. 26. 40.			
19	59835	59811	30. 53. 03.	30. 27. 57.	30. 28. 35	54. 06. 00.
	58600	58624	30. 22. 51.			
30.	60415	60390	31. 07. 40.	30. 52. 39	30. 53. 17.	54. 06. 34.
	59180	59204	30. 37. 38.			

Iulius.

1.	60565	60540	31. 11. 26.	30. 56. 19.	30. 56. 59.	54. 06. 20.
	59320	59344	30. 41. 12.			
5.	61315	61290	31. 30. 15.	31. 15. 11.	31. 15. 51.	54. 06. 15.
	60065	60090	31. 00. 07.			
6.	61535	61510	31. 35. 45.	31. 20. 54.	31. 21. 35.	54. 06. 16.
	60300	60325	31. 06. 02.			
7.	61800	61775	31. 42. 21.	31. 27. 20.	31. 28. 00.	54. 06. 31.
	60550	60575	31. 12. 19.			
8.	62065	62040	31. 48. 56.	31. 33. 50.	31. 34. 31.	54. 05. 32.
	60805	60830	31. 18. 44.			
13.	63625	63600	32. 27. 22.	32. 12. 07.	32. 12. 49.	54. 05. 51.
	62335	62360	31. 56. 52.			

1756. May - Monath.

	Beobacht.	Verbess. v. Halbs.	Abstand vom Scheitelp.	Abstand des Mittelp. v. Scheitelp.	Verbess. v. d Strahlenbr.	Polhöhe.
19.	68590	68564	34°. 26'. 10.	34. 10. 54.	34. 11. 39.	54. 06. 26.
	67240	67266	33. 55. 38.			
21.	67530	67504	34. 01. 15.	33. 46. 18.	33. 47. 02.	54. 06. 29.
	66220	66246	33. 31. 22.			
22.	67040	67014	33. 49. 20.	33. 34. 32.	33. 35. 16.	54. 06. 30.
	65710	65736	33. 19. 44.			
23.	66540	66514	33. 37. 45.	33. 22. 41.	33. 23. 24.	54. 06. 05.
	65230	65256	33. 07. 37.			

Iunius.

3.	62360	62335	31. 56. 15.	31. 41. 04.	31. 41. 44.	54. 06. 14.
	61090	61115	31. 25. 52.			
16.	59990	59966	30. 56. 58.	30. 41. 49.	30. 42. 28.	54. 06. 22.
	58750	58774	30. 26. 40.			
17.	59930	59906	30. 55. 27.	30. 40. 10.	30. 40. 49.	54. 06. 25.
	58680	58704	30. 24. 53.			
19.	59840	59816	30. 53. 10.	30. 38. 00.	30. 38. 39.	54. 06. 26.
	58600	58624	30. 22. 51.			
20.	59820	59796	30. 52. 40.	30. 37. 30.	30. 38. 09.	54. 06. 24.
	58580	58604	30. 22. 20.			
22.	59830	59806	30. 52. 55.	30. 37. 45.	30. 38. 24.	54. 06. 23.
	58590	58614	30. 22. 35.			
24.	59910	59886	30. 54. 57.	30. 39. 47.	30. 40. 26.	54. 06. 25.
	58670	58694	30. 24. 38.			
25.	59970	59946	30. 56. 28.	30. 41. 19.	30. 41. 58.	54. 06. 23.
	58730	58754	30. 26. 10.			
26.	60050	60025	30. 58. 28.	30. 43. 12.	30. 43. 51.	54. 06. 16.
	58800	58824	30. 27. 57.			
28.	60260	60235	31. 03. 46.	30. 48. 32.	30. 49. 11.	54. 06. 21.
	59010	59034	30. 33. 18.			
29.	60390	60365	31. 07. 02.	30. 51. 49.	30. 52. 29.	54. 06. 25.
	59140	59164	30. 36. 37.			

Iulius.

7.	62000	61975	31. 47. 19.	31. 32. 12.	31. 32. 53.	54. 06. 29.
	60740	60765	31. 17. 06.			
14.	64660	64635	32. 52. 36.	32. 37. 21.	32. 38. 03.	54. 05. 50.
	63360	63385	32. 22. 06.			
16.	65480	65454	33. 12. 24.	32. 57. 16.	32. 57. 59.	54. 06. 29.
	64180	64205	32. 42. 08.			
22.	67850	67824	34. 08. 48.	33. 54. 00.	33. 54. 44.	54. 06. 40.
	66550	66576	33. 39. 12.			

1757. Iunius.

	Beo-bacht.	Verbess. v. Halbs.	Abstand vom Scheitelp.	Abst. d Mittp. v. Scheitelp.	Verbess. v. d. Strahlenbr.	Polhöhe.
8.	61160	61135	31°. 26'. 22".	31°. 11'. 09".	31. 11. 49.	54. 05. 54.
	59900	59925	30. 55. 56.			
9.	60960	60935	31. 21. 20.	31. 06. 06.	31. 06. 46.	54. 05. 58.
	59700	59725	30. 50. 52.			
10.	60780	60755	31. 16. 51.	31. 01. 38.	31. 02. 18.	54. 06. 10.
	59525	59550	30. 46. 26.			
11.	60620	60595	31. 12. 49.	30. 57. 20.	30. 58. 00.	54. 06. 08.
	59345	59369	31. 41. 51.			
13.	60330	60305	31. 05. 31.	30. 50. 10.	30. 50. 50.	54. 06. 17.
	59070	59094	30. 34. 50.			
14.	60200	60175	31. 02. 15.	30. 47. 00.	30. 47. 40.	54. 06. 10.
	58950	58974	30. 31. 46.			
15.	60105	60080	30. 59. 52.	30. 44. 29.	30. 45. 09.	54. 06. 15.
	58845	58869	30. 29. 06.			
16.	60105	60080	30. 57. 20.	30. 42. 00.	30. 42. 40.	54. 06. 03.
	58750	58774	30. 26. 40.			
17.	59940	59915	30. 55. 41.	30. 40. 13.	30. 40. 53.	54. 06. 04.
	58675	58699	30. 24. 45.			
20.	59820	59795	30. 52. 38.	30. 37. 17.	30. 37. 56.	54. 06. 06.
	58565	58589	30. 21. 57.			
21.	59815	59790	30. 52. 31.	30. 37. 10.	30. 37. 49.	54. 06. 09.
	58560	58584	30. 21. 49.			
22.	59820	59795	30. 52. 38.	30. 37. 25.	30. 38. 04.	54. 06. 08.
	58575	58599	30. 22. 13.			
23.	59850	59825	30. 53. 24.	30. 38. 08.	30. 38. 47.	54. 06. 12.
	58600	58625	30. 22. 52.			
24.	59875	59850	30. 54. 02.	30. 38. 57.	30. 39. 36.	54. 05. 55.
	58640	58664	30. 23. 52.			
25.	59950	59925	30. 55. 56.	30. 40. 32.	30. 41. 12.	54. 06. 03.
	58690	58714	30. 25. 08.			
26.	60005	59980	30. 57. 19.	30. 42. 22.	30. 43. 06.	54. 06. 03.
	58780	58804	30. 27. 26.			
27.	60110	60085	30. 59. 59.	30. 44. 40.	30. 45. 20.	54. 05. 56.
	58855	58879	30. 29. 21.			
29.	60350	60325	31. 06. 02.	30. 50. 33.	30. 51. 13.	54. 05. 59.
	59080	59104	30. 35. 05.			
30.	60480	60455	31. 09. 18.	30. 54. 10.	30. 54. 50.	54. 06. 05.
	59235	59259	30. 39. 02.			

1757. Iulius.

	Beobacht.	Verbess. v. Halbs.	Abst. v. Scheitelpunct	Abst d Mittp. v. Scheitelp.	Verbesser. v. Strahlenbr.	Polhöhe.
3.	60990	60965	31. 22. 07.	31. 06. 44.	31. 07. 24.	54. 05. 43.
	59720	59744	30. 51. 21.			
4.	61220	61195	31. 27. 52.	31. 12. 32.	31. 13. 12.	54. 06. 21.
	59950	59975	30. 57. 12.			
9.	62475	62450	31. 59. 05.	31. 43. 55.	31. 44. 36.	54. 05. 59.
	61205	61230	31. 28. 45.			
10.	62790	62765	32. 06. 51.	31. 51. 36.	31. 52. 17.	54. 06. 10.
	61510	61535	31. 36. 22.			
11.	63110	63085	32. 14. 45.	31. 59. 25.	32. 00. 06.	54. 06. 07.
	61820	61845	31. 44. 05.			
12.	63450	63425	32. 23. 05.	32. 07. 33.	32. 08. 14.	54. 06. 00.
	62140	62165	31. 52. 01.			
13.	63790	63765	32. 31. 25.	32. 16. 10.	32. 16. 52.	54. 05. 58.
	62500	62525	32. 00. 56.			
14.	64165	64140	32. 40. 33.	32. 25. 25.	32. 26. 07.	54. 06. 12.
	62880	62905	32. 10. 18.			
15.	64555	64530	32. 50. 02.	32. 34. 36.	32. 35. 18.	54. 06. 00.
	63240	63265	32. 19. 10.			
17.	65370	65344	33. 09. 45.	32. 54. 32.	32. 55. 15.	54. 06. 05.
	64065	64090	32. 39. 20.			
18.	65810	65784	33. 20. 19.	33. 05. 00.	33. 05. 43.	54. 06. 03.
	64490	64515	32. 49. 41.			
19.	66260	66235	33. 31. 06.	33. 15. 51.	33. 16. 35.	54. 06. 01.
	64940	64966	33. 00. 37.			
21.	67225	67199	33. 54. 03.	33. 38. 42.	33. 39. 26.	54. 06. 10.
	65885	65911	33. 23. 22.			

1758. May - Monath.

21.	67760	67734	34. 06. 42.	33. 51. 17.	33. 52. 01.	54. 05. 33.
	66410	66436	33. 35. 53.			
22.	67260	67234	33. 54. 52.	33. 39. 25.	33 40. 09.	54. 05. 39.
	65910	65936	33. 23. 58.			
23.	66770	66744	33. 43. 14.	33. 27. 50.	33. 28. 34.	54. 05. 42.
	65430	65456	33. 12. 27.			
24.	66300	66274	33. 32. 02.	33. 16. 37.	33. 17. 20.	54. 05. 45.
	64965	64991	33. 01. 13.			
26.	65410	65384	33. 10. 43.	32. 55. 20.	32. 56. 03.	54. 05. 50.
	64090	64115	32. 39. 57.			
27.	64970	64944	33. 00. 05.	32. 44. 42.	32. 45. 05.	54. 05. 10.
	63655	63680	32 29. 20.			
29.	64190	64165	32. 41. 10.	32. 25. 59.	32. 26. 42.	54. 06. 04.
	62900	62925	32. 10. 48.			

1758. Iunius.

	Beobacht.	Verbess. v. Halbs.	Abst. v. Scheitelpunct.	Abst. d. Mittp. v. Scheitelp.	Verbesser. v. Strahlenbr.	Polhöhe.
1.	63120	63095	32. 15. 00.	31. 59. 55.	32. 00. 36.	54. 06. 04.
	61850	61875	31. 44. 50.			
2.	62800	62775	32. 07. 08.	31. 51. 52.	31. 52. 33.	54. 05. 57.
	61520	61545	31. 36 37.			
3.	62490	62465	31. 59. 25.	31. 44. 12.	31. 44. 53.	54. 05. 51.
	61215	61240	31. 29. 00.			
4.	62200	62175	31. 52. 17.	31. 36. 57.	31. 37. 38.	54. 05. 44.
	60920	60945	31. 21. 37.			
5.	61930	61905	31. 45. 34	31. 30. 19.	31. 31. 00.	54. 05. 53.
	60660	60685	31. 15. 05.			
7	61410	61385	31. 32. 37.	31. 17. 26.	31. 18. 06.	54. 05. 21.
	60150	60175	31. 02. 15.			
8.	61205	61180	31. 27. 30.	31. 12. 21.	31. 13. 01.	54. 05. 49.
	59950	59975	30. 57. 12.			
9.	61000	60975	31. 22. 22.	31. 07. 11.	31. 07. 51.	54. 05. 49.
	59745	59770	30 52. 00.			
10.	60815	60790	31. 17. 44.	31. 02. 31.	31. 03. 11.	54. 06. 00.
	59560	59585	30. 47. 19.			
11.	60640	60615	31. 13. 20.	30. 58. 10.	30. 58. 50.	54. 05. 58.
	59390	59415	30. 43. 01.			
12.	60480	60455	31. 09. 18.	30. 54. 14.	30. 54. 54.	54. 06. 01.
	59240	59265	30. 39. 11.			
21.	59780	59755	30. 51. 38.	30. 36. 52.	30. 37. 31.	54. 05. 51.
	58570	58595	30. 22. 06.			
23.	5 810	59785	30. 52. 23.	30. 37. 37.	30. 38. 16.	54. 05. 52.
	58600	58625	30. 22. 52.			
25.	59920	59895	30. 55. 10.	30. 39. 54.	30. 40. 33.	54. 05. 48.
	58670	58695	30. 24 39.			
26.	59990	59965	30. 56. 57.	30. 41. 45.	30. 42. 24.	54. 05. 52.
	58745	58770	30. 26. 34.			
27.	60090	60065	30. 59. 29.	30. 44. 14.	30. 44. 53.	54. 06. 05.
	58840	58865	30. 28. 59.			
29	60300	60275	31. 04. 46.	30. 49. 33.	30. 50. 12.	54. 05. 48.
	59050	59075	30. 34. 21.			
30.	60440	60415	31. 08. 18	30. 53. 06.	30. 53. 46.	54. 05. 54.
	59190	59215	30. 37. 55.			

Iulius.

1.	60600	60575	31. 12. 19.	30. 57. 01.	30. 57. 41.	54. 05. 58.
	59340	59365	30. 41. 44			
7.	61850	61825	31. 43. 35.	31. 28. 27.	31. 29. 08.	54. 05. 55.
	60590	60615	31. 13. 20.			

1758. Iulius.

	Beobacht.	Verbeß. v. Halbſ.	Abſtand vom Scheitelp.	Abſt d. Mittp. v. Scheitelp.	Verbeß. v. d. Strahlenbr.	Polhöhe.
9.	62400	62375	31. 57. 14.	31. 42. 07.	31. 42. 48.	54. 05. 54.
	61135	61160	31. 27. 00.			
13.	63700	63675	32. 29. 12.	32. 14. 05.	32. 14. 47.	54. 05. 56.
	62420	62445	31. 58. 58.			
15.	64460	64435	32. 47. 44.	32. 32. 20.	32. 33. 02.	54. 05. 58.
	63150	63175	32. 16. 57.			
19.	66140	66114	33. 28. 13.	33. 12. 50.	33. 13. 33.	54. 05. 40.
	64810	64835	32. 57. 27.			
21.	67090	67064	33. 50. 51.	33. 35. 29.	33. 36. 13.	54. 05. 47.
	65750	65776	33. 20. 07.			

1759. May-Monath.

	Beobacht.	Verbeß. v. Halbſ.	Abſtand vom Scheitelp.	Abſt d. Mittp. v. Scheitelp.	Verbeß. v. d. Strahlenbr.	Polhöhe.
23.	66900	66874	33. 46. 20.	33. 30. 49.	33. 31. 33.	54. 05. 53.
	65550	65576	33. 15. 19.			
30.	63610	63885	32. 34. 21.	32. 19. 00.	32. 19. 42.	54. 05. 49.
	62610	62635	32. 03. 29.			
31.	63530	63505	32. 25. 02.	32. 09. 39.	32. 10. 20.	54. 05. 24.
	62230	62255	31. 54. 16.			

Iunius.

	Beobacht.	Verbeß. v. Halbſ.	Abſtand vom Scheitelp.	Abſt d. Mittp. v. Scheitelp.	Verbeß. v. d. Strahlenbr.	Polhöhe.
1.	63210	63185	32. 17. 12.	32. 01. 38.	32. 02. 19.	54. 05. 48.
	61900	61925	31. 46. 04.			
7.	61490	61465	31. 34. 37.	31. 19. 41.	31. 20. 21.	54. 06. 10.
	60210	60235	31. 03. 46.			
11.	60680	60655	31. 14. 20.	30. 58. 47.	30. 59. 27.	54. 05. 33.
	59400	59424	30. 43. 14.			
13.	60380	60355	31. 06. 47.	30. 51. 19.	30. 51. 59.	54. 05. 46.
	59110	59134	30. 35. 51.			
14.	60250	60225	31. 03. 31.	30. 48. 09.	30. 48. 49.	54. 05. 54.
	58990	59014	30. 32. 47.			
16.	60040	60015	30. 58. 12.	30. 42. 51.	30. 43. 30.	54. 05. 50.
	58790	58814	30. 27. 41.			
20.	59810	59786	30. 52. 24.	30. 37. 10.	30. 37. 49.	54. 05. 45.
	58565	58589	30. 21. 56.			
21.	59800	59776	30. 52. 10.	30. 36. 51.	30. 37. 30.	54. 05. 48.
	58550	58574	30. 21. 32.			
22.	59800	59776	30. 52. 10.	30. 36. 51.	30. 37. 30	54. 05. 46.
	58550	58574	30. 21. 32.			
23.	59815	59791	30. 52. 32.	30. 37. 14.	30. 37. 53.	54. 05. 41.
	58565	58589	30. 21. 56.			
25.	59905	59881	30. 54. 49.	30. 39. 28.	30. 40. 07.	54. 05. 46.
	58650	58674	30. 24. 07.			
27.	60060	60035	30. 58. 43.	30. 43. 20.	30. 43. 59.	54. 05. 47.
	58800	58824	30. 27. 57.			

1759. Iulius.

	Beobacht.	Veraeſſ. v. Halbſ.	Abſtand vom Scheitelp.	Abſt. d. Mittp v. Scheitelp.	Verbeſſ. v. d. Strahlenbr.	Polhöhe.
5.	61310	61285	31. 30. 07.	31. 14. 47.	31. 15. 27.	54. 05. 42.
	60040	60065	30. 59. 28.			
16.	64750	64725	32. 54. 47.	32. 39. 18.	32. 40. 00.	54. 05. 39.
	63430	63455	32. 23. 49.			
17.	65160	65134	33. 04. 41.	32. 49. 01.	32. 49. 44.	54. 05. 27.
	63820	63845	32. 33. 22.			
20.	66490	66464	33. 36. 33.	33. 21. 14.	33. 21. 57.	54. 05. 41.
	65160	65186	33. 05. 56.			

Dies ſind alle in dieſen Monathen in 5 Iahren gemachte Beobachtungen, ſo wie ſie in dem Iournal, iedoch ohne eigentliche Berechnung der Polhöhe angeführet ſind. Sie ſind von verſchiedenen Beobachtern gewiſs mit aller Genauigkeit, welche dieſe Art der Beobachtung verſtattet, angeſtellet. Und wenn man aus den Beſtimmungen der Polhöhe aus allen 122 Beobachtungen das arithmetiſche Mittel nimmt, ſo erhält man 54° 06′ 03″. Welche der vorher aus Beobachtung der Fixſterne erhaltenen Beſtimmung von 54° 06′ 04″ auf eine Secunde nahe kommt.

Das arithmetiſche Mittel der Polhöhe aller Beobachtungen iſt im Iahr 1755 - - - - 54° 06′ 18″
1756 - - - 54. 06. 18.
1757 - - - - 54. 06. 05.
1758 - - - - 54. 05. 50.
1759 - - - - 54. 05. 44.

Ich habe ſchon angeführet, daſs alle nach dem ſiebeniährigen Kriege gemachte Beobachtungen die Polhöhe geringer als vorher, und wie ſie auf andre Art gefunden wird, angeben. Wenn man die Reihe von Beobachtungen aufmerkſam anſiehet, ſo findet man darin ſchon ein ſolches allmähliches Abnehmen, welches eine Veränderung des Gnomons bemerken läſſet. Im Iahr 1758 und 1759 finden ſich ſchon keine Polhöhen von 6 Minuten. Im Iahr 1768 iſt keine von 5 Minuten, und die mittlere aus 22 Beobachtungen giebt 54° 04′ 36″. Im Iahr 1772 iſt aus 15 Beobachtungen das Mittel 54° 04′ 30″. Und den entſcheidentſten Verſuch geben die 1785 mit dieſem Inſtrumente gemachten Beobachtungen, welche ich noch herſetzen werde.

Maius

Maius. 1785.

	Beobacht.	Verbess. v. Halbs.	Abst. v. Scheitelpunct.	Abst. d. Mittp. v. Scheitelp.	Verbesser. v. Strahlenbr.	Polhöhe.
23.	66450	66424	33° 35′ 36″	33° 20′ 09″	33° 20′ 53″	54° 03′ 13″
	65110	65136	33. 04. 43.			
24.	65980	65954	33. 24. 24.	33. 08. 30.	33. 09. 13.	54. 02. 39.
	64610	64635	32. 52. 36.			
25.	65530	65504	33. 13. 36.	32. 58. 25.	32. 59. 08.	54. 03. 19.
	64225	64250	32. 43. 14.			
27.	64685	64660	32. 53. 13.	32. 38. 02.	32. 38. 45.	54. 03. 16.
	63390	63415	32. 22. 50.			
Iunius.						
3.	62250	62225	31. 53. 16.	31. 38. 19.	31. 39. 00.	54. 03. 17.
	60990	61015	31. 23. 22.			
5.	61710	61685	31. 40. 07.	31. 25. 01.	31. 25. 41.	54. 03. 23.
	60445	60480	31. 09. 55.			
8.	61020	60995	31. 22. 52.	31. 07. 07.	31. 07. 46.	54. 02. 59.
	59720	59745	30. 51. 22.			
dub. 12.	60310	60285	31. 05. 01.	31. 50. 18.	31. 50. 58.	54. 03. 32.
	59100	59124	30. 35. 36.			
14.	60070	60045	30. 58. 58.	30. 43. 54.	30. 44. 33.	54. 03. 25.
	58835	58859	30. 28. 50.			
16.	59890	59865	30. 53. 59.	30. 38. 55.	30. 39. 35.	54. 03. 07.
	58640	58664	30. 23. 52.			
20.	59715	59690	30. 49. 59.	30. 34. 56.	30. 35. 35.	54. 03. 30.
	58485	58509	30. 19. 53.			
23.	59760	59735	30. 51. 07.	30. 35. 49.	30. 36. 28.	54. 03. 19.
	58510	58534	30. 20. 32.			
28.	60160	60135	31. 01. 15.	30. 46. 00.	30. 46. 40.	54. 03. 30.
	58910	58934	30. 30. 45.			
29.	60280	60255	31. 04. 16.	30. 49. 10.	30. 49. 50.	54. 03. 27.
	59040	59065	30. 34. 05.			
30.	60420	60395	31. 07. 47.	30. 52. 42.	30. 53. 22.	54. 03. 21.
	59180	59204	30. 37. 38.			
Iulius.						
1.	60585	60560	31. 11. 57.	30. 56. 50.	30. 57. 30.	54. 03. 28.
	59340	59364	30. 41. 43.			

Das arithmetische Mittel aus allen 16 Beobachtungen giebt die Polhöhe, 54° 03′ 17″ welches nun allen übrigen himmlischen Erscheinungen und deren Beobachtungen, worin diese Grösse Einfluss hat, widerspricht. Indessen sind diese Beobachtungen vom Herrn Professor Nordmarck mit aller Genauigkeit angestellet, wie ich zuweilen angesehen habe, und stimmen sehr gut zusammen. Ich kann daher keinen andern Schluss daraus ziehen, als dass auch diese alte Mauren von der Zeit angegriffen worden, und die Beobachtungen, welche mit diesem Instrument in Zukunft angestellet werden, zum astronomischen Gebrauch gänzlich unnützlich sind, woferne nicht eine Reparation unternommen würde, die kostbarer wäre, als es ein solches Instrument gegenwärtig verdienet, und dabey keinen Bestand erwarten lässet.

VI.

BERICHTIGUNG DER LAGE DES MITTAGSROHRS ODER TRANSITSINSTRUMENTS.

(INSTRUMENT DES PASSAGES.)

DURCH MIT DEMSELBEN SELBST ANGESTELLTE BEOBACHTUNG.

Da es auf jeder Sternwarte durchaus nothwendig ist, allemahl von der eigentlichen Tagesstunde oder sogenannten wahren Zeit, genau versichert zu seyn, so ist auch dieses Instrument, durch dessen Gebrauch man dieselbe am bequemsten erhält, schon deswegen unentbehrlich, wenn man auch nicht auf die genaue Bestimmung der graden Aufsteigung der Weltkörper sehen wollte, die man dadurch erhalten kann. Dass dies Instrument von dem Künstler gut und genau gearbeitet seyn müsse, wenn die damit angestellte Beobachtungen richtig und genau seyn sollen, bedarf keiner Erinnerung. Die Axe des Sehrohrs muss auf der Umdrehungsaxe, worauf es liegt, vollkommen senkrecht seyn, so, dass wenn letztere horizontal liegt, erstere einen Verticalkreis beschreibe; sie muss so auf ihre Unterlagen ruhen, dass sie genau zur horizontalen Lage gebracht, und danächst durch eine Stellschraube so viel im

Azimuth verrückt werden kann, daſs dieſer Verticalkreis, den das Sehrohr beſchreibt, mit dem Mittagskreiſe zuſammenfalle. Dieſe Einrichtung iſt das Werk des Künſtlers, die richtige Stellung ſelbſt aber die Arbeit des Aſtronomen. Ich ſetze voraus, daſs die Umdrehungsaxe vermittelſt einer Setzwaage oder Waſſerwaage bereits in die horizontale Lage gebracht ſey; daſs auch der Verticalkreis, den das Sehrohr beſcreibt, durch Beobachtungen correſpondirender Sonnenhöhen dem Mittagskreiſe bereits ſo nahe gebracht ſey, als es dieſe Beobachtungen verſtatten, und meine Abſicht ſoll jetzt nur allein darauf gerichtet ſeyn, die Regeln zu erklären, nach welchen dieſe Lage durch aſtronomiſche Beobachtungen der Fixſterne berichtigt werden kann.

Die erſte ſehr genaue Berichtigung geben die Beobachtungen der Circumpolarſterne, das iſt, der Sterne die in ihrer täglichen Bewegung nicht untergehen, an die Hand. Da man einen ſolchen Stern während eines Umlaufs in dem Verticalkreis des Inſtruments zweimahl, ſowohl in ſeiner Culmination als in ſeinem untern Durchgange, beobachten kann; ſo findet man daraus die Zeit, welche er von der Culmination bis zum untern Durchgange an der Weſtſeite, imgleichen vom untern Durchgange bis zur Culmination an der Oſtſeite zugebracht hat. Da nun der Mittagskreis der einzige Verticalkreis iſt, der die Parallelkreiſe halbiret, ſo findet man aus der Gleichheit oder Ungleichheit der erwähnten beobachteten Zeiten, ob die Axe des Sehrohrs den Mittagskreis beſchreibt, oder an welcher Seite deſſelben der Vertical des Inſtruments liegt. Iſt die Zeit von der Culmination bis zum untern Durchgange kleiner, als der andere Theil ſeines Umlaufs, ſo liegt der Vertical an der Nordſeite nach Weſten, und wenn dieſe Zeit gröſser iſt, ſo weicht er nach Oſten ab. Man kann nun das Inſtrument entweder nach und nach dem Meridian näher bringen, und die Beobachtung fortſetzen, bis es die verlangte richtige Lage hat, oder man kann die Gröſse der Abweichung für die Culmination ſowohl als für den untern Durchgang zu beſtimmen ſuchen, und darnach daſſelbe auf einmahl in die richtige Lage zu bringen ſuchen. Die erſtere Art macht viele vergebliche Mühe und in einem unbeſtändigen Clima hat es viele Schwürigkeit damit, es zu der Genauigkeit zu bringen, welche man ſucht. Daher iſt es am vortheilhafteſten, ſogleich den letztern Weg zu verfolgen.

Auch auf diesen kann man zwo verschiedenen Richtungen folgen. Man kann den Winkel zu bestimmen suchen, welchen der Verticalkreis des Instruments mit dem Mittagskreise macht, wodurch man den Bogen der Abweichung im Horizont erhält, und dann vermittelst eines Signals oder durch Abzählung der Schraubengänge der Stellschraube, wenn man ihre Werthe kennet, dem Rohr die gehörige Richtung geben. Dieser Methode scheinet *Ludlam* gefolget zu seyn, wenn ich nach dem Auszuge urtheilen darf, welchen Herr *Bernoulli* in Recuiels pour les Astronomes T. I. gemacht hat, von dessen Astronomicalobservations, with an Account of several Astronomicalinstruments. Allein diese Art der Berichtigung führet zu viele Schwürigkeiten mit sich, als dass ich mich unterstehen würde sie zu unternehmen.

Weit leichter würde es seyn diese Abweichung in dem Parallelkreise des Sterns zu bestimmen, und das Instrument bey der Beobachtung des Durchganges des Sterns selbst zu berichtigen. Und diese Methode verdient eine nähere Aufklärung. Es kommen hiebey drey verschiedene Fälle vor, nachdem nemlich der Scheitelpunct dem Pol grade eben so nahe liegt, als der Parallelkreis des Sterns, den man beobachtet; oder vom Pol weiter entfernt ist, oder ihm näher liegt. Ich will jedem besonders betrachten.

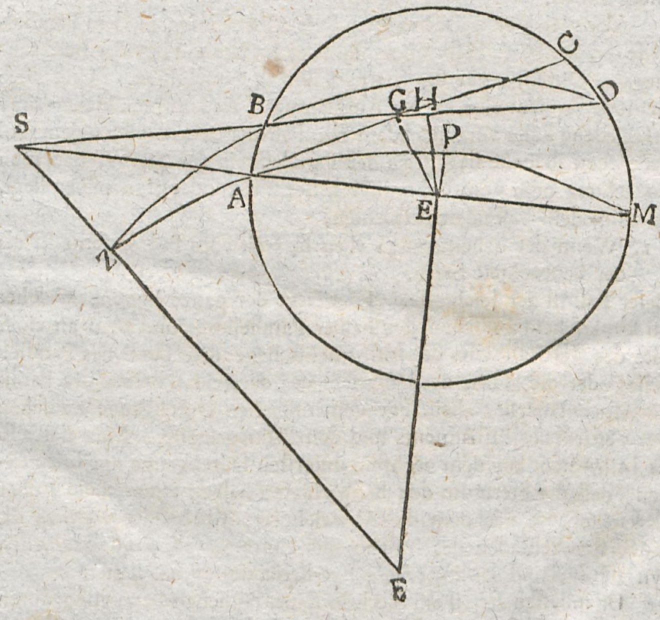
1. Wenn der Scheitelpunct eben so weit vom Pol entfernt ist als der beobachtete Stern.

Dieser Fall ist der leichteste. Hier liegt der ganze Bogen, welcher den Unterscheid zwischen den halben Parallelkreis und dem an einer Seite des Verticalkreises des Instruments liegenden Theil des Parallelkreises oder die Hälfte des Unterscheides der beiden Seiten des Parallelkreises ausmacht, allein bey dem untersten Durchgange zwischen dem Vertical des Instruments und dem Mittagskreise. Man hat also das Instrument bey dem nächsten untersten Durchgange nur so zu rücken, dass der Stern um den beobachteten halben Unterscheid früher oder später, je nachdem die Abweichung östlich oder westlich ist, in den Stundenfaden des Instruments eintrete, als sonst geschehen seyn würde, und damit ist die ganze Berichtigung beschaffet.

Da indessen selten ein Stern in seiner täglichen Bewegung durch den Scheitelpunct gehet, so wird dieser Fall nur selten Statt finden.

2. Wenn der Scheitelpunct weiter vom Pol entfernt ist, als der Parallelkreis der beobachteten Sterne.

In diesem Falle schneidet der Verticalkreis den Parallelkreis zweymahl, sowohl bey der Culmination als dem untern Durchgange an einerley Seite des Mittagskreises. Der Zeitunterscheid des Durchganges von der Culmination bis zum untern Durchgange, von demjenigen vom untern Durchgange bis zur Culmination giebt die doppelte Summe beider Bogen des Parallels zwischen dem Verticalkreise des Instruments und dem Mittagskreise. Es kommt nur darauf an, jeden dieser Bogen besonders zu finden, um dem Instrument entweder bey der Culmination oder bey dem untern Durchgange die richtige Lage zu geben.



Es

Es ſey ZPM ein Mittagskreis, P der Pol, ABCM ein Parallelkreis, und ZBD der Verticalkreis des Inſtruments, der den Parallelkreis in B und D ſchneidet und mit dem Mittagskreiſe, der den Parallelkreis in A und M ſchneidet, den Winkel AZB einſchlieſset. Man verlängere die Verticallinie FZ bis ſie von der erweiterten Ebene des Parallelkreiſes in S geſchnitten wird, und ziehe und verlängere die Sehnen DB und MA. Iede derſelben muſs die Verticallinie FZ ſchneiden, dies kann nur in S geſchehen. Daſelbſt werden ſie auch ſich ſelbſt unter dem Winkel MSD ſchneiden. Es iſt aber $MSD = MAD - ADB = \frac{1}{2}(MD - AB)$. Um dieſen Winkel zu beſtimmen mache man $DC = AB$ und ziehe AC und deſſen Abſtand vom Mittelpunct EG, ſo iſt $AE : EG = 1 : \sin CAM$ oder $\sin AP : EG = 1 : \sin \frac{1}{2}(MD + AB)$ alſo $EG = \sin AP \times \sin \frac{1}{2}(MD + AB)$. Und es iſt $EG = EH$ weil $AC = BD$.

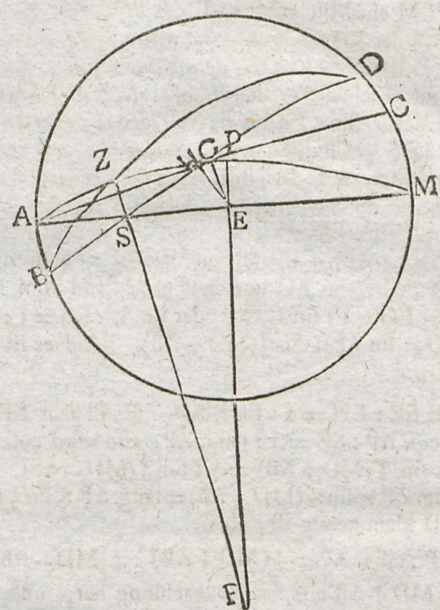
Ferner iſt $SE : EH = 1 : \sin MSD$. Es iſt aber $EF : SE = 1 : \text{tang. } ZP$ oder $\cos. AP : SE = 1 : \text{tang. } ZP$, alſo wird $\cos. AP \times \text{tang. } ZP : \sin AP \times \sin \frac{1}{2}(MD + AB) = 1 : \sin \frac{1}{2}(MD - AB)$, und daraus erhält man $\text{tang. } ZP \times \sin \frac{1}{2}(MD - AB) = \text{tang. } AP \times \sin \frac{1}{2}(MD + AB)$. Und wenn MD klein genug iſt, ſo iſt

$$\text{tang. } ZP : \text{tang. } AP = \tfrac{1}{2}(MD + AB) : \tfrac{1}{2}(MD - AB).$$

Da man nun $MD + AB$ aus der Beobachtung hat, und $MD - AB$ durch dieſe leichte Anologie findet, ſo erhält man ſowohl MD als AB beſonders, und kann das Inſtrument nach AB bey der Culmination oder nach MD bey dem untern Durchgange berichtigen. Es iſt auch bey dieſer Analogie unnöthig, die Zeit in Circultheile zu verwandeln.

3. Wenn der Abſtand des Scheitelpuncts vom Pol kleiner iſt als der Abſtand des Parallelkreiſes von demſelben.

Alsdann ſchneidet der Vertical des Inſtruments bey der Culmination den Parallel an der einen Seite und beym untern Durchgange an der andern.



Der Zeitunterſcheid der Durchgänge an beiden Seiten des Verticalkreiſes giebt nun den doppelten Unterſcheid der zwiſchen dem Verticalkreiſe des Inſtruments und dem Mittagskreiſe bey der Culmination und dem untern Durchgange gelegenen Bogen des Parallels, deren Hälfte MD – AB, iſt; und man findet nun ihre Summe MD + AB durch eben die vorhergehende Analogie. Wenn hier AZPM der Mittagskreis iſt, und BZD der Verticalkreis des Inſtruments, ſo iſt BAD kleiner als der halbe Parallelkreis, und zwar um MD – AB, und BMD – BAD = 2 (MD – AB) welches man daher durch die Beobachtung erhält. Wenn man nun die Sehnen AM und BD nebſt der Verticallinie FZ ziehet, ſo ſchneiden ſich alle dieſe Linien in S und der Winkel MSD wird = MAD + ADS = $\frac{1}{2}$ (MD + AB). Man mache DC = AB, ſo iſt AC = BD, und die Abſtände vom Mittelpunpuncte gleich. Es ist aber dieser Abstand = AE × sin. MAC = sin AP × sin. $\frac{1}{2}$(MD – AB). Und SE : EH = 1 : sin MSD; SE = cos. AP tang. ZP, also cos. AP × tang. ZP : sin AP × sin $\frac{1}{2}$ MD – AB = 1 : sin $\frac{1}{2}$(MD + AB). Folglich tang. ZP : tang. AB = $\frac{1}{2}$(MD – AB) : $\frac{1}{2}$(MD + AB), wenn MD und AB, wie hier, kleine Bogen sind. Man findet also auch hier MD und AB besonders, und berichtigt das Instrument bey der Culmination durch AB und bey dem untern Durchgange durch MD. Wenn nemlich der westliche Bogen zu klein ist, so rückt man das Instrument bey der Culmination so, dass der Stern um AB, und beym untern Durchgange um MD später an den Stundenfaden gelange; und wenn der östliche Bogen zu klein ist, dass er bey der Culmination um AB und beym untern Durchgange um MD früher am Stundenfaden treffe, als ohne diese Berichtigung geschehen wäre. Uebrigens ist es hiebey auch nicht nöthig die Zeitunterscheide bey Anwendung der Analogie in Bogen zu verwandeln.

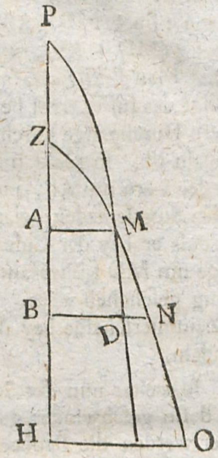
Ie weiter nun der Stern den man beobachtet vom Pol entfernt ist, desto geschwinder gehet er durch den Stundenfaden, desto genauer werden die Beobachtungen und desto besser kann das Instrument berichtiget werden. An Oertern von solcher Breite, die hierin eine gute Wahl verstattet, hat diese Berichtigung den Vorzug, dass unrichtige Bestimmungen der graden Aufsteigung und Abweichung der Sterne darauf keinen schädlichen Einfluss haben können, weil die Beobachtung nur mit einem und eben denselbigen Stern geschiehet. Sie erfordern aber eine Sternwarte, da man auch die nordliche Seite des Mittagskreises offen haben kann, und setzt in unbeständigen Climaten oft die Gedult des Astronomen auf die Probe.

Die zwote Art der Berichtigung erfordert die Beobachtung der Durchgänge zweener Sterne an beiden Seiten des Aequators, die einen grossen Unterscheid in der Abweichung haben, deren grade Aufsteigung genau bekannt ist, und deren Unterscheid in der graden Aufsteigung übrigens ziemlich gleichgültig ist.

Wenn nemlich das Mittagsrohr den Mittagskreis beschreibet, so werden die Durchgänge in den berechneten wahren Zeiten nach der Uhr erfolgen, und der Unterscheid der Uhrzeit der Durchgänge,

wenn

wenn es nöthig ist, auf Sternzeit zurückgeführet, wird dem Unterscheide der graden Aufsteigung beyder Sterne völlig gleich seyn.



Wenn aber der Verticalkreis des Mittagsrohrs vom Mittagskreise unterschieden, wenn PH der Mittagskreis, ZO der Verticalkreis des Instruments ist, so werden die Durchgänge früher oder später erfolgen, als die Culminationen im Mittagskreise, nachdem der Verticalkreis an der östlichen oder westlichen Seite liegt. Auch werden die Unterscheide der Durchgänge beyder Sterne durch das Mittagsrohr, dem Unterscheide ihrer graden Aufsteigungen nicht gleich seyn. Ob also das Rohr im Mittagskreise gehet oder nicht, solches findet man aus der Gleichheit und Ungleichheit dieser Unterscheide sogleich. Und eben so findet man, daſs das Rohr gegen Osten abweicht, wenn der Durchgang eher erfolgt, als es die Rechnung der Culmination des Sterns angiebt, und daſs es gegen Westen abweiche, wenn dieser Durchgang später erfolgt, als es die Rechnung erfordert.

Man kann aber auch diese Lage aus dem beobachteten Unterscheide der Durchgänge beyder Sterne bestimmen, wenn man nur den Unterscheid ihrer graden Aufsteigungen genau kennt. Es sey (a) die wahre Zeit der Culmination, (d) der Unterscheid der Uhr von der wahren Zeit bey der ersten und zweiten Beobachtung (denn man kann die Beobachtungen so wählen, daſs man die kleine Abänderung in der Zwischenzeit nicht achten darf). Es sey ferner (e) die Zeit des Unterscheides zwischen den Durchgang des höhern Sterns durch den Stundenfaden und seiner Culmination; (E) die Zeit dieses Unterscheides in Ansehung des niedrigern Sterns, da dann allemahl $E > e$ ist; n sey der Unterscheid ihrer graden Aufsteigungen in Zeit, so hat man viele verschiedene Fälle, je nachdem der höhere oder niedrigere Stern vorangehet, das Instrument nach Ost oder West abweicht,

und

und die Uhr vor der wahren Zeit aus oder ihr nachgehet, und gelanget in jedem Falle zu der gesuchten Bestimmung.

A) Der höhere Stern gehe voran.

1. Das Instrument weiche nach Osten ab und die Uhr gehe voraus, so ist die Uhrzeit des Durchganges
für den höhern Stern $= a + d - e$
für den niedrigern $= a + d + n - E$
der Unterscheid $= n - E + e < n$.

2. Wenn die Abweichung des Instruments noch östlich ist und die Uhr nachgehet, so ist die Uhrzeit des Durchganges
für den höhern Stern $= a - d - e$
für den niedrigern $= a - d + n - E$
der Unterscheid $= n - E + e < n$.

3. Wenn die Abweichung des Instruments westlich ist und die Uhr vorausgehet, so ist die Uhrzeit des Durchganges
für den höhern Stern $= a + d + e$
für den niedrigern $= a + d + n + E$
der Unterscheid $= n + E - e > n$.

4. Wenn die Abweichung des Instruments noch westlich ist und die Uhr nachgehet, so ist die Uhrzeit des Durchganges
für den höhern Stern $= a - d + e$
für den niedrigern $= a - d + n + E$
der Unterscheid $= n + E - e > n$.

Hieraus folget also die erste Regel:

Wenn der höhere Stern vorangehet und der Unterscheid der beobachteten Durchgangszeiten (wenn es nöthig ist, auf Sternzeit gebracht) kleiner ist, als der Unterscheid der graden Aufsteigungen, so weicht das Mittagsrohr nach Osten ab; und nach Westen, wenn dieser beobachtete Unterscheid grösser ist als der Unterscheid der graden Aufsteigungen der beobachteten Sterne.

Umgekehrt werden wir sie finden, wenn der niedrige Stern vorangehet.

B) Der niedrigere Stern gehe voran.

1. Das Inſtrument weiche nach Oſten ab und die Uhr gehe voraus, ſo iſt die Uhrzeit des Durchganges

für den niedrigern Stern	$a + d - \mathrm{E}$
für den höhern	$a + d + n - e$
der Unterſcheid	$n - e + \mathrm{E} > n.$

2. Die Abweichung des Inſtruments ſey noch öſtlich und die Uhr gehe nach, ſo iſt die Uhrzeit des Durchganges

für den niedrigern Stern	$a - d - \mathrm{E}$
für den höhern	$a - d + n - e$
der Unterſcheid	$n - e + \mathrm{E} > n.$

3. Die Abweichung ſey weſtlich und die Uhr voraus, ſo iſt die Uhrzeit des Durchganges

für den niedrigern Stern	$a + d + \mathrm{E}$
für den höhern	$a + d + n + e$
der Unterſcheid	$n + e - \mathrm{E} < n.$

4. Die Abweichung des Inſtruments ſey noch weſtlich und die Uhr gehe nach, ſo iſt die Uhrzeit des Durchganges

für den niedrigern Stern	$a - d + \mathrm{E}$
für den höhern	$a - d + n + e$
der Unterſcheid	$n + e - \mathrm{E} < n.$

Und hieraus folgt nun die zwote Regel:

Wenn der niedrigere Stern vorangeht und der Unterſcheid der beobachteten Durchgangszeiten (wenn es nöthig iſt, auf Sternzeit gebracht) kleiner iſt, als der Unterſcheid der graden Aufſteigungen, ſo weicht das Inſtrument nach Weſten ab; und nach Oſten, wenn dieſer beobachtete Unterſcheid gröſser iſt, als der Unterſcheid der graden Aufſteigungen der beobachteten Sterne.

Und nach dieſen beyden Regeln findet man ganz leicht bey dieſer Beobachtungsmethode, ob das Inſtrument abweiche, und nach welcher Seite die Abweichung liege.

Man findet auch aus dieſen Beobachtungen die Gröſse der Abweichung des Verticals des Inſtruments vom Meridian. Herr *de la*

Lande

Lande giebt in P. III. Liv. XIV. §. 2607. seiner Astronomie für den Winkel am Scheitelpunct oder den Bogen im Horizont die Formul $\frac{15\,t \sin PD \sin PB}{\sin BD \sin PZ}$, wo t unser $E - e$ bedeutet, davon Herr *Bernoulli* in seinen Recueilles pour les Astronomes P. I. p. 54., den ihm dafür vom Herrn *de la Lande* mitgetheilten Beweis, bekannt macht. Herr *de la Lande* zeiget, wie hiernach das Instrument berichtiget werden könne. Allein diese Berichtigung scheinet vielen Schwürigkeiten unterworfen zu seyn. Wenn allein von Berichtigung des Instruments die Rede ist, so wird man viel leichter auf folgende Art zum Zweck kommen.

Aus der vorhergehenden Formul erhellet, daſs dieser Winkel des Verticals des Instruments mit dem Mittagskreise $= o$ sey, wenn $t = E - e = o$ wird, welches nicht anders geschehen kann, als wenn E sowohl als e jede Gröſse besonders $= o$ werden, weil $E > e$ ist. Dies kann nun auf zweyerley Art erhalten werden. Man kann nämlich die Zeit der Culmination des einen oder andern Sterns genau berechnen, und das Instrument vermittelst der Stellschraube so rücken, daſs der Stern grade zu solcher Zeit in den Stundenfaden trete; alsdann lieget das Instrument im Scheitelpunct sowohl als in der Höhe der Culmination des Sterns, also der Vertical des Instruments in zwey Puncten im Mittagskreise und folglich überall, daher e sowohl als $E = o$ werden.

Wenn man sich aber auf diese Berechnung der Culmination nicht einlassen oder sich darauf nicht verlassen will, so kann man diese Berichtigung auch durch den Unterscheid der graden Aufsteigung in Zeit allein bewerkstelligen. Nachdem man durch die beschriebenen Beobachtungen des Durchganges zweyer Sterne gefunden hat, daſs das Instrument abweiche, beobachtet man den vorhergehenden Stern aufs neue, und rückt dann bey der Beobachtung des nachfolgenden das Instrument so, daſs derselbe grade um die Zeit, welche dem Unterscheide der graden Aufsteigung gleich ist, nach dem erstern in den Stundenfaden trete. Dadurch ist e oder E, folglich jede $= o$ geworden, und das Instrument wird dem Mittagskreis beschreiben.

Diese Art der Berichtigung durch Beobachtung des Durchganges zweyer Fixsterne kann nun auch auf den Sternwarten vorgenommen werden, welche die Oefnung der nordlichen Seite des Mittagskreises nicht verstatten, und hat das Vorzügliche dass sie in kürzerer Zeit bewerkstelliget werden kann, als die erstere durch Beobachtung der Circumpolarsterne. Man findet auch allezeit geschwinde ob und wieviel das Instrument abweicht, und kann die Zeiten der Beobachtungen, welche bey der unrichtigen Lage desselben gemacht sind, verbessern. Uebrigens wird die Berichtigung aus Beobachtungen der Circumpolarsterne, wenn die Sternwarte sie verstattet, doch allemahl der leztern vorzuziehen seyn, indem diese doch immer eine Furcht, wegen unrichtiger Bestimmung der graden Aufsteigungen der Sterne oder ihres Unterscheides, nachlässet.

VII.

ÜBER
DIE ABMESSUNG DER ABSTÄNDE
VERMITTELST DES SCHALLS.

Ueber die Art und Weise wie der Schall fortgehet, und die Geschwindigkeit des Ganges desselben, sind in dem vorigen Jahrhunderte und in der ersten Hälfte des gegenwärtigen, bereits Versuche angestellet und allezeit Winke gegeben, dass diese Erscheinung mit Vortheile auf die Abmessungen grosser Distanzen zur Erleichterung geographischer Operationen gebraucht werden könne.

Da solches gleichwohl in der grossen Zwischenzeit, so viel ich weiss, nirgends geschehen ist, so dürfte es der Mühe nicht unwerth seyn, die Schwürigkeiten aufzusuchen, welche sich hier in den Weg gelegt haben mögen, und in wieferne sie in den Relationen und deren ungewisser Bestimmung liegen können, welche die Naturkundigen bey ihren Versuchen bey der Bewegung des Schalls gefunden haben, und Mittel aufzufinden, wenn es deren allenfalls giebt, wie ihnen begegnet werden könne.

Die Florentinische Academie, der die Naturkunde so vieles zu danken hat, glaubte aus ihren Versuchen festsetzen zu können:

1. Daſs die Geschwindigkeit des Schalls gleichförmig sey, das ist, daſs der Schall in gleichen Zeiten gleiche Wege zurücklege.

2. Daſs die Geschwindigkeit desselben nicht geändert werde, der Schall möge stark oder schwach seyn, das Stück, welches den Schall erregt, möge nach dem Orte der Beobachtung hin, oder, wie man wolle, abwärts gerichtet seyn.

3. Daſs auch der Wind, er möge dem Wege des Schalls folgen oder demselben entgegen gehen, er möge stark oder schwach seyn, gar keinen Einfluſs auf die Geschwindigkeit des Schalls habe. *)

4. Daſs die Geschwindigkeit des Schalls 1175 Fuſs französisch Maſs, in einer Secunde betrage.

Diese Bestimmung der Geschwindigkeit des Schalls, gieng nun sehr weit von derjenigen ab, welche *Gassendus* nach verschiedenen Erfahrungen angegeben hatte, nach welchen dieselbe 1463 Fuſs in einer Secunde betragen sollte. *Cassini*, *Picard* und andere französische Naturkundige machten neue Versuche, und *Derham*, *Flamsted* u. a., unter den Engländern. Erstere fanden diese Geschwindigkeit 1080 französische, und letztere 1142 englische Fuſs. Auch diese Resultate stimmten nicht genau überein, indem 1142 englische Fuſs nur 1071 französische Fuſs ausmachen, wenn man das Verhältniſs des französischen Fuſses zum englischen 1440 : 1351,6 annimmt. Indessen war der Fehler so klein, daſs er leicht auf die Beobachtungen geschoben werden konnte. Die Engländer setzten ihre Untersüchungen hierüber fort, besonders in der Absicht näher zu erforschen, ob der verschiedene Zustand der Luft oder sonst etwas sich aufgeben mögte, welches die Geschwindigkeit des Schalls verändern könne. *Derham* besonders zeichnete sich durch eine Menge von Beobachtungen hierüber aus, und gab uns folgende Resultate seiner angewandten Bemühungen:

1. Daſs

*) *Muschenbrock* tentam. exprim. natur. Acad. del Cimento. pag. 106. sq.

1. Daſs die Geſchwindigkeit des Schalls gleichförmig ſey.

2. Daſs die Geſchwindigkeit des Schalls nicht geändert werde, das Stück mag gegen den Beobachter, oder, wie man wolle, abwärts horizontal oder in die Höhe gerichtet, abgefeuert werden; der Schall mag ſtark oder ſchwach, hoch oder niedrig ſeyn; er mag durch einen Schuſs oder Schlag erregt werden; die Witterung ſey, welche ſie wolle, trübe und nebelicht oder klar, kalt oder warm; der Barometer ſteige oder falle; es mag regnen oder ſchneien.

3. Daſs der Wind nach ſeiner Richtung und Stärke, die Geſchwindigkeit des Schalls allerdings ändere. *).

Dieſe Erfahrungen beſtätigten das Miſstrauen, welches man wider die Schlüſſe der Akademie del Cimento gefaſst hatte. Da die Luft bey Fortpflanzung des Schalls ſo würkſam iſt, ſo konnte man ſich nicht überreden laſſen, daſs ein widriger oder günſtiger Wind in die Geſchwindigkeit des Schalls keinen Einfluſs haben ſollte, es ſey nun daſs derſelbe von der Luft würklich fortgetragen, oder auf andre Art durch dieſelbe fortgepflanzt werde. Sie beſtätigten übrigens zu nicht geringer Verwunderung die Unveränderlichkeit dieſer Geſchwindigkeit bey jeder andrer Beſchaffenheit der Luft.

Hiebey blieb man bey dieſer Unterſuchung lange Zeit ſtehen, obgleich die Geſchwindigkeit des Schalls ſo wenig als andre einſchlagende Veränderungen deſſelben abgemacht waren, bis die Academie der Wiſſenſchaftenzu Paris im Jahr 1738. einigen ihrer Mitgliedern aufgab, dieſe Sache aufs neue zu unterſuchen, und ſetzte drey berühmte Beobachter an der Spitze derſelben, *Caſſini de Tury*, *Maraldi*, *de la Caille*. Aus ihren Unterſuchungen zog ſie folgende Reſultate: **)

1. Daſs die Geſchwindigkeit des Schalls gleichförmig ſey.

2. Daſs die Richtung des Stücks gegen den Beobachter oder abwärts von demſelben, heitere Luft und regnigtes Wetter, die Stärke

*) Philoſophical Transact. N. 313.

**) Hiſtoire et Mem. de l'Acad. des Sciences pour l'année 1738.

Stärke und Schwäche des Schalls, die Barometeränderungen, keinen Einfluſs auf die Geſchwindigkeit des Schalls haben.

3. Daſs die Figur und andre natürliche Beſchaffenheiten des Bodens, über welchen der Schall fortgehet, weder ſeine Geſchwindigkeit noch Richtung ändern, ſondern derſelbe nach allen Seiten in grader Linie fortgehe.

4. Daſs aber die Richtung des Windes die Geſchwindigkeit des Schalls verändere.

5. Daſs bey ſtiller Luft, oder wenn der Wind auf die Bahn des Schalls ſenkrecht fällt, die Geſchwindigkeit des Schalls 173 Toiſen oder 1038 franz. Fuſs in einer Secunde ſey.

Sie behaupten noch daſs die Aenderung der Geſchwindigkeit des Schalls der Geſchwindigkeit des Windes gleich ſey, wenn die Richtung des Windes mit dem Wege des Schalls keinen Winkel einſchlieſset, und daſs daher die Gröſse dieſer Aenderung für jede andere Richtung berechnet werden könne. Ich habe aber nicht gefunden, daſs ſie dieſe letztere Behauptung aus Beobachtungen hergeleitet haben, noch unter ihren Verſuchen eine bemerket, welche dieſelbe darbeut.

So unvollkommen nun auch unſere bisherige Theorie von der Fortpflanzung des Schalls iſt, und auf was für Art und Weiſe dieſelbe durch die Luft bewerkſtelliget wird, ſo ſcheinet es doch mit derſelben ſchwerlich beſtehen zu können, daſs keine Relation der Töne, und keine Beſchaffenheit der Luft auf die Geſchwindigkeit des Schalls einigen Einfluſs haben ſollte, der Ton mag nun hoch oder niedrig, die Luft kalt oder warm, feucht oder trocken ſeyn. Und vermuthlich liegt hierin eine der Urſachen, welche die Mathematiker furchtſam gemacht hat, von der Erſcheinung des Schalls eine Anwendung auf geographiſche Verrichtungen zu machen.

Herr *Leonh. Euler* bringt im II Th. ſeiner Opuſculor. es zur höchſten Wahrſcheinlichkeit, daſs ein hoher Ton mit gröſserer Geſchwindigkeit fortgepflanzt werde als ein tiefer. Und es ſcheint nicht, daſs der Verſuch, aus welchem *Derham* das Gegentheil ſchloſs, dagegen eine erhebliche Schwürigkeit machen könne. Er fand nämlich, daſs ein durch ein Stück erregter Schall und ein anderer, welcher

durch

durch eine Kugelbüchſe erregt ward, mit gleicher Geſchwindigkeit fortgepflanzt worden. Allein die Verſchiedenheit in den Stimmungen dieſer Töne war ſo groſs nicht, daſs dieſer Unterſcheid ihrer Geſchwindigkeiten auf dieſem Wege bemerklich ward. Indeſſen betrug der Weg des Schalls bey dem *Derhamſchen* Verſuch mit dem Stücke doch 60000 Fuſs, beynahe $2\frac{1}{2}$ deutſche Meilen. Und daher würde die aus dieſer Quelle herrührende Veränderung in den geographiſchen Verrichtungen um ſo weniger Einfluſs haben können, da man bey denſelben ohnehin Inſtrumenten gebrauchen würde, die keine Töne von ſo verſchiedener Stimmung hervorbringen.

Eben ſo wenig kann man es mit der Theorie vom Schalle vereinigen, daſs die Beſchaffenheit der Luft gar keine Veränderung der Geſchwindigkeit des Schalls nach ſich ziehen ſollte. Wir haben würkliche Verſuche die ſolches offenbar ergeben. Herr *Bianconi* theilet in einem Briefe an *Scipio Maffei* ſeine darüber angeſtellten ſchönen Erfahrungen mit, und wir haben einen Auszug dieſes Briefes im 16. Bande des Hamburg. Magazins. In einer völlig heitern und windſtillen Nacht d. 9 Aug. 1740., da das Reaumürſche Thermometer 28 Gr. über den Gefrierpunct und das Barometer 28 Zoll 1 Linie hoch ſtand, ward der Schall eines auf der Veſtung Urbana abgefeuerten Stücks in 76 Sec. auf 30 italiäniſche Meilen bis zu einem bey Bologna gegen Morgen von der Veſtung liegenden Kloſter fortgepflanzt. Und in dem folgenden Winter d. 7 Febr. 1741. gebrauchte er auf eben dem Wege $78\frac{1}{2}$ Sec., da das Thermom. 1,2 unter dem Gefrierpuncte, und das Barom. 27 Zoll 6 Linien ſtand.

Herr *Bianconi* hat den 12 Febr. 1741. bey ſtiller ſehr neblichter Luft, den Verſuch, da das Thermometer auf 0 und das Barometer 28 Z. 4 L. ſtand, wiederholet. Da nun der Nebel verhinderte, das Feuer des Stücks zu ſehen, ſo lieſs er auch ein Stück nach dem Kloſter bringen, und er begab ſich mit der Penduluhr nach der Veſtung. Hier ward das Stück abgefeuert, und, als der Schall bey dem Kloſter ankam, auch das daſelbſt befindliche; und von der Abfeurung des Stücks auf der Veſtung, bis der Schall des bey dem Kloſter ſtehenden Stücks daſelbſt ankam, zählte er 157 Sec. Dies gäbe für den Weg des Schalls von einem Orte zum andern $78\frac{1}{2}$ Sec. wie vorher. Er ziehet aber nach einer Schätzung 3 Sec. ab, welche zwischen der Ankunft des Schalls beym Kloster und der Abfeurung des Stücks verlohren seyn mögten, rechnet für den Werth des Schalls also 77 Sec., schiebet den Unterscheid von anderthalb Secunden auf die verschiedene Wärme, die doch nur 1,2 Grad ausmachte, und schliesst daraus, dafs die nebelichte Beschaffenheit der Luft in der Geschwindigkeit des Schalls keine sonderliche Aenderung verursache. Allein aus diesem Versuche lässet sich im Grunde nichts schliessen, weil er nicht mit der gehörigen Vorsichtigkeit angestellet worden. Er hätte bey dem Kloster aufzählen lassen müssen, wie viel Secunden zwischen der Ankunft des Schalls und dem Abfeuern des Stücks verflossen wären. Die blosse Schätzung trügt gar zu leicht und führet nie zu einen sichern Schluss.

Da es hiedurch ausgemacht ist, dafs die Geschwindigkeit des Schalls von der warmen und kalten Luft, imgleicken von ihrer grössern und geringern Schwere abhängt, also die von den französischen Akademisten gefundene Geschwindigkeit nicht das allgemeine Maafs geben kann, so ist die bisher vernachlässigte Anwendung dieser Erscheinung auf geographische Operationen hinlänglich gerechtfertiget.

Indessen hätte man die fernere Untersuchung nicht aufgeben dürfen. Wenn nichts als diese Beschaffenheit der Luft im Wege stünde, so liesse sich die Geschwindigkeit des Schalls für jeden Stand des Thermometers und Barometers bey fortgesetzten Versuchen endlich wohl angeben. Herr *Bianconi* findet aber in den Aenderungen, welche der Wind in der Geschwindigkeit des Schalls würket, verdrüslichere Hindernisse, die entweder gar nicht oder doch sehr schwer zu heben seyn werden. Es ist allerdings gegründet, dafs dies Hindernifs grofs wäre, wenn es bey geographischen Operationen in Betrachtung gezogen werden müste. Man müste dann zuerst untersuchen, ob die Würkung des Windes auf den Schall der Stärke desselben gleich sey, das ist, ob die Geschwindigkeit des Schalls um die ganze Geschwindigkeit des Windes vermehrt werde, wenn der Wind mit dem Wege des Schalls einerley Richtung hat, und eben so vermindert werde, wenn er die entgegengesetzte Richtung hat, welches von den französischen Academisten, ohne sich auf Ver-

suchen

suchen zu gründen, angenommen worden. Und danächst müste man ein bequemes Mittel haben, die Geschwindigkeit des Windes ohne viele Umstände messen zu können. Alsdann scheinet es keinen Zweifel unterworfen zu seyn, dass man bey jeder Neigung des Windstrichs gegen den Weg des Schalls, dessen Würkung auf die Geschwindigkeit des Schalls nach dem Cosinus dieser Neigung berechnen könne, und zu diesem Behuf müste auch diese Neigung jedesmahl beobachtet werden. Wer siehet aber nicht, dass alles dieses jetzt noch schwer zu bestimmen seyn dürfte, und dann die Operationen, welche man einfacher machen wollte, mit zu vielen Umständen beladen würden. Und hierin liegen ohne Zweifel die Ursachen, warum man diese Methode Distanzen zu messen, gänzlich aufgegeben zu haben scheinet.

Allein ich denke, dass eine geringe Aenderung der Methode, welcher man bisher bey diesen Versuchen gefolgt ist, diesen Schwürigkeiten gänzlich ausweichen werde. Gewöhnlich gieng man bisher bey diesen Untersuchungen über die Geschwindigkeit des Schalls folgenden Weg. Man erregte an dem einen Orte A vermittelst Abfeurung eines Stücks, einen Schall, bemerkte an einem andern Orte B, dessen Abstand von A genau bekannt seyn muste, die Zeitsecunden, welche zwischen dem auf dem Stück in A gegebenen Feuer und der Ankunft des Schalls in B verflossen, und erhielte durch diese Beobachtung die Zeit, welche der Schall auf diesem Wege zugebracht hatte, woraus man, da seine Geschwindigkeit gleichförmig war, den Weg für eine Secunde oder seine Geschwindigkeit erhielte. Allein hiedurch erhielte man nur seine Geschwindigkeit für diesen einzelnen Fall, mit allen den Aenderungen vermischt, welche Wind und andere Beschaffenheiten der Luft demselben geben konnten, ohne sie von einander zu sondern oder zerlegen zu können.

Man hat zwar zuweilen an beyden Orten A und B ein Stück abgefeuert, und den Versuch ein wenig abgeändert, indem man an dem Orte B ein Stück abfeuern und in dem Augenblick, wenn der Schall in A anlangte, auch daselbst das Stück abfeuern liess und die Secunden zählte, welche von der Abfeurung in B, bis der Schall des in A abgefeuerten Stücks daselbst anlangte, verflossen waren. Allein es geschahe dies blos in den Fällen, wenn man von dem einen Orte das Feuer in dem andern nicht sehen konnte. Man suchte auch hiedurch nichts anders, als durch die erstere Methode, und der Versuch ward überdies unzuverläsig, weil es schwer zu erhalten seyn dürfte, dass ein Stück grade in dem Augenblicke abgefeuert werde, wenn der Schall eines andern daselbst anlanget. Wenn indessen dieser Versuch etwas genauer und so angestellet würde, dass an beyden Orten beobachtet, und bloss die Zeit der Uhr bemerkt würde, wenn daselbst das Stück abgefeuert wird, und der Schall von dem andern daselbst anlangt, so würde man etwas anders erhalten und die Geschwindigkeit des Schalls ohne alle Vermischung mit den Aenderungen, welche der Wind oder ein anderer Umstand, welcher der Geschwindigkeit des Schalls auf dem einen Wege grade eben so vortheilhaft als auf dem andern nachtheilig ist, in derselben hervorbringen kann.

Es sey in A eine Uhr, und in B eine andere, t sey die Zeit, welche der Schall ungestört auf dem Wege von A nach B, oder umgekehrt gebraucht, und m sey die Grösse, um welche diese Zeit durch den Wind oder eine ähnliche Ursache, die auf dem einen Wege vermehret und auf dem andern vermindert wird. In A werde nun ein Stück gelöset, wenn diese Uhr z zeiget, und die Uhr in B gehe um d voraus, so wird dieselbe bey Abfeurung des Stücks in A $z+d$ seyn, und wenn die Zeit des Schalls durch den Wind auf dem Wege von A nach B vergrössert wird, so wird er in der Zeit $z+d+t+m$ in B anlangen. Der Unterscheid der Uhr in A, wenn daselbst das Stück abgefeuert worden, und der Uhr in B, wenn der Schall daselbst anlangt, ist also $d+t+m$.

Nachher schiesse man das andere Stück in B ab, und bemerke daselbst die Zeit u, so wird die Zeit der Uhr in A, $u-d$ seyn, vorausgesetzt, dass in dieser kurzen Zeit, der Gang der Uhren keine Aenderung erlitten, die Betrachtung verdient. Da nun die Zeit des Schalls um m verringert wird, so wird derselbe in A in der Zeit $u-d+t-m$ anlangen, und wenn diese Zeit von der Uhrzeit in B abgezogen wird, so ist der Unterscheid $d-t+m$. Ziehet man nun diesen Unterscheid von dem vorigen ab, so erhält man $2t$, also auch t, das ist, die Zeit des Schalls ohne Aenderung, welche der Wind oder eine ähnliche

liche Ursache in der Geschwindigkeit des Schalls gewürckt hat. Man siehet leicht, daſs man hiebey nicht nöthig habe, den Gang der beyden Uhren gegen einander zu kennen, und eben so wenig wird es nöthig seyn zu erinnern, daſs bey andern Voraussetzungen, wenn nämlich die Uhr bey A vorausgehet, oder der Windstrich die Geschwindigkeit des Schalls auf dem Wege von A nach B vermehre und von B nach A vermindere, man auf gleiche Weise das Resultat ohne dergleichen Vermischung finden werde.

In Ansehung dieser Aenderungen der Geschwindigkeit des Schalles könnte man daher ohne Bedenken die Abmessungen der Oerter so genau verrichten und ganze Provinzen in Grund legen, als durch den weitläuftigen Weg der Triangularoperationen.

Ich erwarte hiebey den Einwurf nicht, daſs denn doch bey dieser Methode noch die Aenderungen nach bleiben, welche aus andern Ursachen, Kälte und Wärme, gröſsere und geringere Schwere der Luft u. s. w., die sich auf dem Hin- und Hergange nicht aufheben, in der Geschwindigkeit des Schalls hervorgebracht werden. Es ist freilich wahr, daſs dies alles auch hier noch nachbleibe, und ich glaube nicht, daſs alle dadurch bewürkte Aenderungen der Geschwindigkeit so unbedeutend seyn dürften, daſs sie, ohne vorhergegangene Untersuchung, verachtet werden könnten, wie die französischen Akademisten, die Florentiner und *Derham* glauben. Aber nachdem die verdrüſslichsten Hindernisse, welche vom Winde verursacht werden, nunmehro vermittelst der vorgeschlagenen Methode aus dem Wege geräumet worden, so müsten die abgebrochenen Untersuchungen wieder vorgenommen, und bey verschiedenen Stande des Thermometers, Barometers und Hygrometers, die in der Geschwindigkeit des Schalls etwa gewürckten Aenderungen ausgemittelt werden. Zu dem Ende müsten zween Orte, deren Abstand genau abgemessen worden, und an welchen die Schüsse, welche an einem geschehen, noch deutlich an dem andern gehöret werden können, gewählet werden, wo diese Untersuchungen in ununterbrochener Folge bey dem verschiedenen Ständen oberwähnter meteorologischer Instrumente angestellet würden; so würde man im Stande seyn, Tabellen für jedes derselben zu verfertigen, welche die Aenderungen in der Geſchwindigkeit des Schalls für jede Beſchaffenheit der Luft angäben.

Und dann erſt würde man im Stande ſeyn, die geographiſchen Operationen mit der gröſten Genauigkeit und Leichtigkeit hiedurch anzuſtellen. Da man auf ähnliche Art in der Aſtronomie weit mehr verwickelte Erſcheinungen von einander geſondert, ſo müſte es ein Wunder ſeyn, wenn man bey dieſer leichten Sache damit nicht zu Stande kommen ſollte, und mir deucht, daſs der davon gewiſs zu erwartende Nutzen in der Geographie der darauf zu verwendenden Mühe und Koſten überflüſsig entſprechen würde, wenn man auch auf die Erweiterung der Naturlehre bey einer genauen Beſtimmung dieſer ſo wichtigen Erſcheinung keine Rückſicht nehmen wollte.

KLEINE

MATHEMATISCHE ABHANDLUNGEN.

VON

LAMB. HENR. RÖHL,

PROFESSOR DER MATHEM. UND ASTRONOM. AUF DER ACADEM. ZU GREIFSWALD.

Gart

GREIFSWALD,

GEDRUCKT UND ZU FINDEN BEY ANT. FERD. RÖSE,

1790.