11

DE

RATIONIBVS REGVLARVM, QVAS CALCVLVS DIFFERENTIALIS IN CONSTITVENDIS PVNCTIS CVRVARVM MVLTIPLICIBVS, ET SVBTANGENTIBVS IN IIS AD HAEC PVNCTA DVCENDIS

OFFERT

INCLYTAE

FACVLTATIS PHILOSOPHICAE LIPSIENSIS

PERMISSV

PRO LOCO

IN EADEM OBTINENDO

DISPVTABIT

GEORGIVS HENRICVS BORTZ

PROF. MATH. P. O. AC COLL. B. MARIAE VIRG.

COLLEGIATVS

RESPONDENTE

CAROLO FRIDERICO HINDENBVRGIO

DRESDENSI

D. XXVI. AVGVSTI CIↃ IↃ CCLXIX.

LIPSIAE

EX OFFICINA LANGENHEMIA

§. I.

De punctis curuarum Algebraicarum multiplicibus, ac in specie duplicibus, triplicibus - - n tuplicibus, quorum consideratio insignem Geometriae sublimioris partem constituit, inter caeteros Geometras EVLERVS atque CRAMERVS VV. Ill. luculentissime egerunt. Diuersam tamen vtrique inierunt rationem. Nam EVLERVS in Introductione ad Analysin infinitorum L. II. §. 295-302. breuibus haec puncta formulis complexus est, atque ex natura tangentium absque subsidio calculi differentialis deriuauit. CRAMERVS autem in Introductione ad Analysin curuarum Algebraicarum c. X. in iisdem his punctis determinandis, et a punctis curuarum simplicibus dignoscendis compendiosa vsus est aequationum transformatione, ac inprimis Abbatis de GVA Analytico Triangulo. Quum principes hos libros, ex quibus sera posteritas Geometriam discet, primum legerem, ac ea, quae hi duumuiri de punctis curuarum multiplicibus demonstrassent, meditarer, in mentem iam tum veniebat experiri, num calculus differentialis, cuius in resoluendis problematis, subtangentes curuarum concernentibus, quo etiam puncta multiplicia curuarum

referenda ſunt, elegantia ac praeſtantia cognita eſt, aliquem tum in iis dignoſcendis, tum in ducendis ad ea ſubtangentibus vſum praeſtaret. Quam viam ingredienti illico patuit, non multo labore opus eſſe ad conſtituenda horum punctorum criteria. Sumta enim qualibetcunque aequatione curuae algebraicae, qua punctum eiusmodi multiplex continetur, nihil aliud requiritur, quam inueſtigare eos x et y valores, qui, ſubſtituti in aequationem, efficiant, vt tota euaneſcat, atque eo modo, vt ex primis regulis aequationum conſtat, indicium praebeant, punctum eſſe in curua. Quodſi iidem valores in differentialem aequationis illati, eandem denuo deſtruant, curuae punctum eiusmodi, vt ex ſequentibus vberius patebit, eſt neceſſario multiplex. Sumatur, exempli gratia, aequatio a CRAMERO
Fig. I. l. c. §. 170. propoſita, in qua *IK axis y, AB axis x ponatur. Fiat* $x=0$ *erit* $y^4-8y^3+16y^2=0$ Ergo $y=0$; $y=0$; $y=4$ curuam bis contingit IK et $Ff=4$ ac conſtituatur ea primo loco; ſecundo vero ponatur eius differentialis

I.) $y^4 - 8y^3 - 12xy^2 + 16y^2 + 48xy + 4xx - 64x = 0$

II.) $4y^3dy - 24y^2dy - 24xydy - 12y^2dx + 32ydy$
$+ 48xdy + 48ydx + 8xdx - 64dx = 0.$

Ex infinitis x et y valoribus, in vtrasque inferatur valor $x=y=2$, non ſolum prima aequatio, ſed etiam altera, aequabitur nihilo. Punctum itaque ad $x=y=2$, non ſolum eſt in curua, ſed etiam multiplex eſſe deprehenditur. Quotuplex autem ſit, duplexne an vero triplex, cognoſcetur ex tertia formanda columna, in quam ingredietur differentialis noua, quae, ſi dy et dx, ex rationibus poſthaec adducendis, conſtantes ponantur, ita erit comparata:

III.) $12y^2dy^2 - 48ydy^2 - 24xdy^2 - 48ydxdy + 32dy^2$
$+ 96dxdy + 8dx^2 = 0.$

in qua, illatis prioribus x et y valoribus, cum non euaneſcat aequatio, punctum curuae erit non niſi duplex. Quodſi vero et haec columna euanesceret, punctum esset triplex, continuataque eiusmodi differentiatione, si et sequens differentialis ab iisdem valoribus destrueretur, punctum esset quadruplex etc. Atque hac ratione facile est iudicare, num curua aliqua proposita habeat puncta multiplicia, et quotuplicia ea tandem sint.

§. II.

Difficilior vero est subtangentium in curuis, ad eiusmodi puncta ducendarum, determinatio. Nominando enim in aequatione, quam §. I. proposuimus, abscissas y et semiordinatas x, subtangen- Fig. I. tium formula notissima erit $= \frac{xdy}{dx}$ Cum vero ratio $dy : dx$ in differentiali prima fiat indeterminata, h. e. $= \frac{0}{0}$ ipsa subtangentialis formula erit indeterminata, licet curua in hoc puncto habeat non vnam, sed duas tangentes determinatas. Quamquam autem hac ratione certissime colligitur, punctum ad $x = y = 2$ esse multiplex: tamen per calculum differentialem, sepositis aliis methodis, quae eodem fundamento nituntur, breuioribus interdum, determinatus valor $\frac{dy}{dx}$ non apparebit, nisi in subsidium vocetur regula, ab Ill. HOSPITALIO in praestantissimo libro: Analyse des infinement petits, artic. 163. tradita; ex cuius nimirum praescripto fractionis eiusmodi numerator pariter ac denominator separatim differentiandi ac diuidendi sunt. Tanta est huius regulae amplitudo atque vtilitas, vt Ill. IOHANNES BERNOVLLIVS eam non solum dignam indicaret, cuius inuentae gloriam sibi vindicaret, sed etiam perficeret, sanciendo, quodsi accideret, vt noua fractio ex differenrentiatione fractionis alicuius orta, eadem laboraret difficultate, i. e. nouos acquireret terminos, sese inuicem destruentes et in nihilum abeuntes, (vt in punctis triplicibus etc. necessario fit) denuo eam differentiandam esse ac diuidendam, donec determinatus prodeat valor. Tom. I. Op. omn. No. LXXI. Cum itaque in antecedenti exemplo sit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12y^2 - 48y - 8x + 64}{4y^3 - 24y^2 + 32y - 24xy + 48x}.$$

aut, facta diuisione, et substitutis $y = x = 2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - 12y - 2x + 16}{y^3 - 6y^2 + 8y - 6xy + 12x} = \frac{0}{0}$$

hinc, ex regula Hospitalii prodibit,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6ydy - 12dy - 2dx}{3y^2dy - 12ydy + 8dy - 6xdy - 6ydx + 12dx}$$

et illato $y = x = 2$

fiet, $\frac{dy}{dx} = \frac{-2dx}{-16dy}$ adeoque $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{1}{8}$

Cum vero sit subtangens $= \frac{xdy}{dx}$ erit Quadr. subtang.

$$= \frac{x\ dy^2}{dx^2}$$

$$= \frac{4 \cdot 1}{8} = \frac{1}{2}$$

Et subtangens ipsa $= \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$

Cuiuis profecto in dignoscendis hac ratione punctis curuarum multiplicibus ac in determinandis ad ea subtangentibus versanti, ti, necessario veniet in mentem, indagare: quomodo tandem ea, qnae diximus, exemploque idoneo adstruximus, cum legibus calculi differentialis consentiant.

§. III.

Recentiores Analyseos infinitorum scriptores, quibus Germania nostra vere superbit, et qui, in praeclaris, quae edidere, systematibus, nihil eorum omiserunt, quae quidem ad recludendos intimos huius scientiae recessus pertinent, breuitati nimirum vt consulerent, maluerunt ista, proprio cuiusuis studio indaganda relinquere, quam longiori disquisitione explicare; quod cuiuis facile patebit perlegenti ea, quae Ill. SEGNERVS T.I. et II. Part.III.Curs.Math. itemque Ill. KAESTNERVS in elementis analyseos infinitorum artic. 372. nec non Clariss. KARSTENIVS in sublim. mathesi T. II. Sect. IV. §. 38-41. de punctis multiplicibus tradiderunt. Qua propter quae olim ipse de his meditatus sum, quaeque partim ex CRAMERO, partim ex SAVRINI et BRAGELONGNI disquisitionibus, quae de hoc argumento in memoriis academiae Parisinae leguntur, notabiliora collegi: ea aliquot propositionibus complexa, ad disputandum proponam, peruestigaturus:

I.) cur in subtangentibus curuarum ad puncta multiplicia determinandis, formula subtangentialis fiat indeterminata.

II.) quare continuata differentiatione ex lege artic. 163. Ill. HOSPIT. haec ipsa formula fiat determinata.

III.) quomodo haec cum formula calculi differentialis pro subtangentibus vulgari consentiant.

Quae considerationes accuratiorem punctorum multiplicium in curuis algebraicis notitiam necessario requirunt.

§. IV.

Puncta curuae simplicia sunt, per quae, cum sint in vno eodemque plano, vnus eiusdem curuae ramus transit: multiplicia

plicia vero nominantur, vbi plures eiusdem curuae rami ſibi occurrunt vel occurrere cenſentur.

§. V.

Duo nimirum in lineis curuis algebraicis, de quibus ſolis in hac diſſertatione agitur, conſideranda veniunt. Primo loco ſeſe offerunt earum rami, qui aut in infinitum excurrunt, et vel ad hyperbolicum, vel ad parabolicum genus referri ſolent, aut ſpatio finito includuntur, ac generali nomine curuarum oualium inſigniuntur. Atque hac ramorum conſideratione, optime et facillime poſſunt curuarum ordines in genera ac ſpecies diſpertiri; Quod, qua via ac ratione ex generalibus quorumuis ordinum curuarum aequationibus deduci poſſit, Illuſtris EVLERVS docuit, in introductione ad Analyſin infinitorum, vbi non ſolum ſectiones conicas pertractauit, ſed etiam curuas tertii, poſt Neutonum, et quarti ordinis in genera ac ſpecies diſpeſcuit, enumerauit, ac earum generales proprietates eruit. Alterum, quod in lineis algebraicis conſiderandum eſt, ſingula earum puncta concernit, quae, cum per ea vnicus tantum curuae ramus tranſeat, ſimplicia vocantur. Ex eiusmodi ſimplicibus curuarum punctis maxime notari merentur, puncta flexus contrarii omnium ordinum, quorum indolem, ad meliorem punctorum multiplicium intelligentiam, iuuabit Fig. II. paullo accuratius conſiderare. Eſto itaque circulus diametri AB, ductisque diametro parallelis chordis, CD, cd, $\varkappa\delta$ puncta peripheriae A et B a diametro ſectae, (per 15. Elem. III.) omnium maxime diſtant; in reliquis parallelis chordis, puncta interſectionis C et D, c et d, $\varkappa$ et δ, eo ſunt propinquiora ſibi, quo ſunt, quae ea connectunt, chordae, a centro remotiores, donec tandem, vbi fit diſtantia chordae a diametro radio aequalis, puncta interſectionis coeunt, eorumque diſtantia, quauis data minor h. e. infinite parua euadit. Duo itaque interſectionis

ctionis puncta, quorum esse distantia infinite parua censetur, constituunt punctum contactus, quod proinde dicitur aequiualere duabus intersectionibus, vel intersectionum punctis infinite propinquis. Quod si ducantur ad diametrum ex punctis C et D, c et d semiordinatae perpendiculares, CF, DG et cf, dg, singulis respondebunt diuersae abscissae AF, AG; Af, Ag, quae, quo propinquiora puncta intersectionum fiunt, tanto magis ad se accedunt, donec tandem ad punctum contractus I, coincidunt et aequales fiunt. Quare in puncto contactus, facile mente concipi potest, duas factas esse tangentes aequales, itemque duas ordinatas duasque abscissas aequales et eiusdem signi omnes. Multiplex eiusmodi proinde vocanda erit tangens semiordinata et abscissa; et quidem duplex, si vna tangens vel semiordinata vel abscissa id praestat, quod in curua proposita praestare duae deberent; quod aliter concipi non potest, nisi sint hae lineae, et aequales inter se et eiusdem signi. Cum vero recta linea, curuae in tot solummodo punctis occurrere aut eam secare possit, quot exponens supremae incognitae in aequatione curuae vnitates continet: tangens circulo, vel alii lineae ex sectionibus conicis, in nullo puncto praeterea occurrere vel eam secare potest.

Sumta aequatione linearum curuarum tertii ordinis, illico patet, ex dimensione semiordinatarum vel abscissarum, curuam a recta ter secari posse. Coeuntibus autem duabus intersectionibus in punctum contactus, fieri potest, in hoc curuarum genere, vt tangens adhuc semel curuae occurrat, eamque secet. Quodsi vero tertiae intersectionis punctum, his accedat, et elemento contactus fiat quauis data distantia propinquius: tangens in eodem elemento tangit et in extremitate eius secat curuam. Eiusmodi tangens, quae simul in punctis infinite propinquis tangit et secat curuam, producta nusquam praeterea curuae, tertii quidem ordinis, occurrere eamque

secare

ſecare poteſt. Ipſa autem tangens, abſciſſa ac ſemiordinata eam habent multiplicitatem, vt ſint triplices, conſtituantque punctum flexus contrarii. Contactus itaque in puncto flexus contrarii aequiualet tribus interſectionibus infinite propinquis, punctumque eiusmodi non ſolum per methodos cognitas ex aequatione colligitur, ſed etiam viſibile eſt. Neceſſario enim e. g. ramus, qui ad tangentem conuexus eſt, ſi ad eum tertium accedat interſectionis punctum, ſic, vt a tangente producta ſecari poſſit ramus, eidem tangenti ſit concauus, conſpiciendumque ſe praebet punctum flexus contrarii, quod proinde vocari ſolet ſimplex ſeu ordinis primi, et proinde imparis, eſtque viſibile. Progrediendo ad curuas quarti ordinis, pariter animaduertendum eſt, rectam curuas eiusmodi in quatuor punctis ſecare poſſe. Coaleſcentibus autem duobus interſectionum punctis in puncto contactus, tangens quae ducitur ad contactum, in duobus praeterea punctis occurrere poteſt curuae; accedente porro infinite propinque tertio interſectionis puncto, ad extremitatem contactus oritur punctum flexus contrarii; et coeunte denique etiam quarto interſectionis puncto, oritur duplex punctum contactus, ſiue punctum flexus contrarii ſecundi ordinis, ideoque paris gradus, duobus nimirum tangentium elementis inter ſe coniunctis. Gallis hoc punctum dicitur *ſerpentement*, eſtque inuiſibile. Tangens in eiusmodi puncto aequiualet quatuor tangentibus aequalibus, itemque abſciſſae ac ſemiordinatae ſunt quadruplices, nec poteſt eiusmodi tangens curuae propoſitae amplius occurrere. Aſcendendo autem ad curuas ſuperiorum ordinum puncta flexus contrarii pariter deprehenduntur eſſe vel imparis ordinis et viſibilia, vel paris ordinis et inuiſibilia. Atque ex his, quae paulo vberius explicauimus, facile colligitur:

I) in puncto ſimplicis contactus concipi poſſe duas tangentes ſibi aequales eiusdemque ſigni, duabusque aequalibus ſemiordinatis pariter reſpondere duas abſciſſas aequales eodemque ſigno notatas. Atque his nititur methodus Carteſiana determinandi curuarum tangentes.

II) in puncto flexus contrarii ordinis primi tres concipiendas eſſe aequales tangentes, tres abſciſſas ac ſemiordinatas, eiusdem ſigni omnes. His nititur methodus determinandi puncta flexus contrarii. Quo complicatior autem curuarum natura in altioribus ordinibus fit, eo difficilior eſt rectarum ad puncta contactuum ducendarum relatio. Cum vero haec rectarum multiplicitas oriatur ex acceſſu mutuo elementorum in curuis, cogitatione ac mente concipiendorum: per omnia haec puncta non niſi vnicus ramus tranſit, ac proinde puncta haec ſimplicia vocantur.

§. VI.

Prius autem quam ad puncta multiplicia inueſtiganda progrediar, neceſſario notandum duco:

I) principium illud geometriae ſublimioris, quo curua a recta in tot punctis ſecari poſſe aſſeritur, quot exponens ſupremae incognitae in eius aequatione vnitates continet, non eo ſenſu interpretandum eſſe, ac ſi recta curuam alicuius ordinis ſemper in tot punctis ſecaret. Nam his verbis ſolummodo ſupremus in quouis ordine interſectionum numerus indicatur, vltra quem interſectio amplius fieri nequit. Poſſunt interſectiones quaedam fieri imaginariae, poſſunt in quouis ordine ſumi eiusmodi hypotheſes, quibus poſitis alterutrius coordinatarum vel etiam ambarum exponens ita minuitur, vt tamen curvae ordo non deprimatur. Quod cum fieri poſſit in conicis, parabola, v. c. et hyperbola ad aſymptotos, multo magis in curuis tertii ac ſuperiorum ordinum contingit.

II) in punctis flexus contrarii ſimplicis, duplicis etc. aſſerui duplices, triplices etc. eſſe tangentes, abſciſſas et ſemi-

 ordi-

ordinatas: fieri vero non implicat, vt ipſa ſemiordinata vel abſciſſa, aut etiam alterutri recta parallela, fiat tangens.

Cum ex praecedenti annotatione ſemiordinata vel abſciſſa aut vtriusque exponens, ſaluo curuarum ordine, imminui poſſit: conſequitur, vt, pro varietate aequationum, abſciſſa magis multiplex eſſe poſſit quam ſemiordinata, ac vice verſa. Omnis haec ſubtilitas contactuum interſectionumque rectarum cum curuis, ex curuarum aequationibus diiudicanda eſt, quae ſolae continuitatis in iis obuiae legem exponunt, et ſine quibus difficulter iſta animo concipi poſſunt.

§. VII.

Alia vero punctorum multiplicium indoles in eo poſita eſt, quod puncta illa vere ſint mathematica, ac ipſae curuae, quae ſibi in his punctis, vel contingendo, vel decuſſando occurrunt, omni careant latitudine. Quare eorum multiplicitas ex occurſu plurium ramorum vnius eiusdemque curuae aeſtimanda eſt. In punctis vero ſimplicibus, quae pariter ex curuarum aequationibus dignoſcenda ſunt, multiplicitatem tangentium ſemiordinatarum ac abſciſſarum, oriri ex eo vidimus, quod elementa vnius curuae eiusque interſectiones ita coeant, vt nulla ramorum fiat interſectio §. 5. Quod aliter eſt in punctis multiplicibus, quae et ipſa ſunt multiplicia, quia ad diuerſos ramos ſpectant, aeque ac ſemiordinatae, abſciſſae, et tangentes ſunt multiplices, h. e. aequales et eiusdem ſigni, quia eaedem ad diuerſos ramos referendae. Sumſimus §. 1. dari plures eiusmodi curuarum aequationes, quae puncta multiplicia complectuntur, vbi certis valoribus x et y in aequationem et eius differentiales inferendis, loca curuae inueniri facile poſſunt circa quae illa puncta haereant. Sed multo euidentior apparet, ramorum partim, in vna eademque curua plurium, ſiue ad contactum ſiue ad decuſſationem occurſus, partim vero rectarum ad eiusmodi

modi puncta ducendarum multiplicitas, si altiorum ordinum, e. g. tertii, quarti exempli loco sumantur aequationes, quae curuas exhibent, quarum omnia puncta sunt simplicia; in quibus vero, simulac ipsarum x et y coefficientium constantium indeterminatorum aliqui vel euanescere ponantur, vel eorum ratio erga se certo modo determinetur, oriuntur puncta multiplicia. Quod vt eo melius appareat, vnam eiusmodi aequationem tertii ordinis curuae, cuiusmodi plures in recensionibus curuarum tertii et quarti ordinis Eulerianis occurrunt, eo modo tractabimus et explicabimus. Exemplo sit:

$$ay^2 - x^3 + (b - c)\, x^2 + bcx = 0$$

in qua deest y^1. Eadem reducta fit:

$$y = \pm \frac{\sqrt{x^3 - bx^2 + cx^2 - bcx}}{\sqrt{a}} = \pm \frac{\sqrt{x(x^2 + cx - bx - bc)}}{\sqrt{a}}$$

$$= \pm \frac{\sqrt{x\,(x - b).(x + c)}}{\sqrt{a}}$$

Sumtis itaque x positiuis ac $> b$ curua ex duobus constat ramis in infinitum excurrentibus. Ponendo vero $x = b$ fit $y = 0$, et curua in hoc puncto secat axem abscissarum. Quod Fig. 5. si autem ponatur $y = 0$ fit $x = 0$, $x = b$, $x = -c$, quod indicio est, abscissarum axem vltra b excurrere. Fiat nunc $AB = b$ atque A sit origo abscissarum, vnde x positiuae progrediantur versus dextram; quamdiu est $x < b$, semiordinatae sunt imaginariae, et intra limites AB nullus curuae ramus extenditur. Indagando vero curuae ductum in regione abscissarum negatiuarum, aequatio ad eam regionem accommodata erit

$$y = \pm \frac{\sqrt{-x\,(-x-b).(-x + c)}}{\sqrt{a}}$$

 $y =$

$$y = \pm \frac{\sqrt{(xx + xb).(-x + c)}}{\sqrt{a}}$$

Totus eius ductus pendet a ratione x ad c; quod ſi ponatur $x = c$ fit $y = 0$; et ſi $x > c$, fiunt ſemiordinatae imaginariae. Ergo vltra $AC = c$, curua non excurrit. Ponendo vero $x < c$ duae reſpondent curuae ſemiordinatae, quae, cum eſt $x = 0$ et $x = c$, fiunt $= 0$. Curua itaque in regione abſciſſarum negatiuarum conſtat ex ouali figura ſeu nodo, qui cum recta AB ramisque duobus in regione poſitiuarum x, conſtituit curuam, aequatione $ay^2 - x^3 + (b - c)x^2 + bcx = 0$, expreſſam, in qua omnia puncta ſunt ſimplicia.

Fig. 4. Concipiatur nunc fieri $b = 0$, aequatio mutabitur in $ay^2 - x^3 - cx^2 = 0$. Neceſſario itaque puncta curuae A et B coeunt, rami in regione poſitiua obuertunt conuexitatem ac ex vnico ramo fiunt duo in punctis A et B, ſe coniungentes ad continuationem ramorum nodi, conſtituuntque punctum duplex ex decuſſatione. Facta enim $y = 0$ et $x = 0$ tota aequatio euaneſcit, iique valores per regulam §. 1. in differentialem

$$2ay\,dy = 3x^2\,dx + 2cx\,dx$$

illati, eam deſtruunt, ſed poſiti in

$$a\,dy^2 = 3x\,dx^2\,c\,dx$$

eam non deſtruunt; ergo punctum hoc eſt duplex.

Fig. 5. Fiat praeter $b = 0$ etiam $c = 0$ euaneſcet nodus, et aequatio remanebit $ay^2 = x^3$ conſtituetque cuſpidem, cuius punctum B eſt duplex, quia poſita $x = 0$, fit $y = 0$, $y = 0$ et vice verſa poſita $y = 0$ fit $x = 0$, $x = 0$, $x = 0$, qui valores in aequationem ipſam aeque ac in eius differentialem ſubſtituti, ambas deſtruunt. Tandem ſeruata recta b, fiat $c = 0$, Aequatio generalis fit:

$$ay^2 - x^3 + bxx = 0$$

Totus

Totus nodus reducitur ad punctum, quod, licet a reliquis curuae ramis sit separatum, attamen vi aequationis ad eandem lineam pertinet, ac omnia puncti duplicis, licet inuisibilis, habet criteria, soletque vocari punctum coniugatum. Curua ter occurrit axi abscissarum: semel in B, bis in A in quo haeret punctum duplex; His similia in notissima curuarum quarti generis, conchoide, per determinationem mutuae rationis coefficientium constantium indeterminatorum eruentur, quae in exemplo allato per positionem vnius vel vtriusque deducta indeterminatarum $=0$ deducta sunt, pluraque in ordinibus curuarum altioribus occurrunt. Fig. 6.

§. VIII.

Consequitur ex his:

1) nullam ex conicis sectionibus posse habere punctum duplex. In generali enim earum aequatione:

$$a + by + cx + dy^2 + exy + fx^2 = 0$$

nulla eiusmodi indeterminatorum coefficientium determinatio cogitari potest, vt rami vnius eiusdemque curuae conicae sese intersecent. Accedit, rectas ad punctum duplex ducendas, in illo bis secare curuam, ac praeterea adhuc in tertio ordine semel eam secare posse, et in altioribus ordinibus punctum duplex habentibus, id plus simplici vice fieri posse. Ex iisdem rationibus curuae tertii ordinis punctum triplex habere nequeunt. Nam in eiusmodi puncto tres sibi occurrunt vnius eiusdemque curuae rami, rectae ad illud ducendae fiunt triplices ac praeterea, saltem si opus est, quod et in antecedenti propositione intelligendum, mutata origine coordinatarum, adhuc semel occurrere possunt curuae.

Ergo in genere, in nullo curuarum ordine punctum tantam multiplicitatem habere potest, quot habet vnitates exponens supremus ordinis eiusdem. Quot vero puncta multiplicia ordinis inferioris, curua ordinis superioris simul e. g. quot puncta duplicia ſimul vna eademque curua quarti ordinis vel quot puncta duplicia, triplicia etc. ſimul habere poſſit curua octaui ordinis, ea diſquiſitio eſt altioris indaginis, et ab Ill. CRAMERO c. X. §. 180. copioſiſſime illuſtrata.

II) quam in punctis duplicibus varietatem §. 7. obſeruaui: eadem locum habet in triplicibus etc. eaque diſtribui optime poſſunt, in puncta multiplicia viſibilia et inuiſibilia ſeu puncta coniugata. In ſubſidium vero vocatis, quae §. 5. de punctis flexus contrarii dicta ſunt, facile patet, in puncto duplici ex decuſſatione ramos progredi poſſe vel ſine inflexione, vel vt alteruter habeat vel vterque ſimul, punctum flexus contrarii; ex quo varia punctorum duplicium genera, pluraque triplicium etc. deduci poſſent. Verum, cum iſta quidem ſint cognitu iucunda, parum tamen nos, in his, quae inſtitui, iuuent: ad reliqua nunc peragenda pergam.

§. IX.

In puncto duplici duas ſemiordinatas et abſciſſas, in triplici tres ſemiordinatas ac abſciſſas in *n* tuplici *n* tuplices ſemiordinatas et abſciſſas fieri aequales et eiusdem ſigni, idque ab occurſu duorum vel plurium ramorum dependere, ex iis quae in ſuperioribus diſputauimus clarum eſt. Cum vero in punctis duplicibus curuae tertii generis adhuc ſemel alterutra coordinatarum, et in altioribus, quae eiusmodi punctum habent curuis, in pluribus curuae occurrere poſſit punctis: vtrum vna coordinatarum ſecet curuam vel ambae, vel reliquae interſectiones fiant imaginariae, id dependet :

1) a curuae, punctum duplex, triplex etc. habentis aequatione, ac in ſpecie a dimenſionibus coordinatarum, cum alterutrius exponens minui poſſit, quoad ordo curuae non mutatur.

2) a diuerſa conſtitutione originis coordinatarum, ac earum permutatione. Vnde in ſpecialibus caſibus facile id, quod contin-

contingit, decernetur. Vt posterioris asserti veritas perspiciatur, iuuat, ea quae diximus, exemplo illustrare, quod lucem reliquis affundere potest. Consideremus curuam quarti ordinis, Conchoidem, cuius notissima aequatio est:

$$x^4 + 2bx^3 \left.\begin{array}{l} + y^2 \\ + b^2 \\ - a^2 \end{array}\right\} x^2 - 2a^2bx - a^2b^2 = 0$$

quae conchoidem superiorem ac inferiorem repraesentat. Posito enim $-x$ pro $+x$ in aequationem, prodibit inferior, nec nisi termini dimensionis imparis alia consequentur signa. Quia in ea deest y^1, indicio hoc est, cuilibet x respondere duas y aequales et oppositas, cuilibet vero y, cum x sit quartae dimensionis, quatuor respondere debere abscissas. Sed cum duae se tantum conspiciendas praebeant, reliquae duae sunt vel prioribus aequales, vel impossibiles.

Ponatur $x = a$ fiet ex

$$x^2y^2 = a^2x^2 + 2a^2bx + a^2b^2 - b^2x^2 - 2bx^3 - x^4$$

$a^2y^2 = 0$; ergo $y = 0$; $y = 0$

Substituatur in eandem, $x = -a$ fiet itidem aequationis terminus $a^2y^2 = 0$. Est itaque $x + a = 0$, aeque ac $x - a = 0$ radix aequationis, et productum ex radicibus his: $x^2 - a^2 = 0$ diuidet

$$-x^4 - 2bx^3 \left.\begin{array}{l} + a^2 \\ - b^2 \end{array}\right\} x^2 + 2a^2bx + a^2b^2 = 0$$

vt quotus sit:

$-x^2 - 2bx - b^2 = 0$ Ergo radices ex
$x^2 + 2bx + b^2 x + b = 0$, $x + b = 0$ ergo
ad $x = -b$ fit $y = 0$. $y = 0$

Cum itaque sit:

$$\begin{aligned} y^2x^2 &= a^2b^2 + 2a^2bx + a^2x^2 - b^2x^2 - 2bx^3 - x^4 \\ &= (ab + ax)^2 - (bx + x^2)^2 \\ &= a^2(b + x)^2 - x^2(b + x)^2 \\ &= (a^2 - x^2) \cdot (b + x)^2 \end{aligned}$$

Erit

Erit $y = \frac{(b + x).\ \sqrt{(a^2 - x^2)}}{x}$

fiat $b < a$ ac praeterea $x = -b$ fiet $y = 0$. Quod ex consideratione vlteriori abscissarum ac semiordinatarum indicat nodum ac punctum duplex, idque confirmat regula §. 1.

x^4	$4x^3 dx$	$+ 12x^2 dx^2$
$+ 2bx3$	$+ 6bx^2 dx$	$+ 12bxdx^2$
$+ y^2 x^2$	$+ 2yx^2 dy$	$+ 4yxdxdy$
$+ b^2 x^2$	$+ 2y^2 xdx$	$+ 2x^2 dy^2$
$- a^2 x^2$	$+ 2b^2 xdx$	$+ 2y^2 dx^2$
$- 2a^2 bx$	$- 2a^2 xdx$	$+ 4xydydx$
$- a^2 b^2$	$- 2a^2 bdx$	$+ 2b^2 dx^2$
		$- 2a^2 dx^2$
posito $y = 0$	$y = 0,\ x = -b$	illatis iisdem valoribus
et $x = -b$	fit diff. $= 0$	non fit $= 0$
Aequatio tota fit $= 0$		

ergo punctum curuae ad $y = 0$ et $x = -b$ est duplex. In eo vero duae semiordinatae oppositae necessario fiunt aequales et eiusdem signi, et ex natura aequationis perspicitur plures in
Fig. 7. hoc puncto non dari posse semiordinatas. Cum vero per eandem quodlibet y quatuor x habere debeat: duae fiunt in puncto duplici aequales, scilicet $x = -b$ quatenus pertinet ad ramum KCR. Eademque $x = -b$ quatenus pertinet ad ramum ϱCm. Reliquae duae abscissae curuae occurrunt cum sit $x = a$ et $x = -a$.

§. X.

Cum aequationes quae irrationales quantitates nullas habent, totius curuae indolem exponant; ea intellectui cognoscenda

ſcenda praebeant, quae ſenſibus non aſſequuntur; omnium ac ſingulorum punctorum quae ſunt in curuis naturam determinent; punctis vero duplicibus triplicibus - - - n tuplicibus, duae tres - - n tuplices ſemiordinatae et abſciſſae aequales et eiusdem ſigni reſpondeant, et vna in tertio, vel plures in altioribus curuarum ordinibus inaequales adeſſe poſſint §. 9. Conſequens eſt, vt aequationes, quae vel ipſae per ſe puncta multiplicia continent, vel, quae determinando coefficientes indeterminatos ad eiusmodi puncta reducuntur, contineant plures radices, i. e. valores y et x aequales eiusdemque ſigni, qui ſi, in aequationem ipſam, eiusque differentialem pro incognitis ſubſtituantur, totam aequationem faciunt euaneſcere, ac indicium praebent, punctum eiusmodi non ſolum in curua, ſed etiam multiplex eſſe.

§. XI.

Quod ſi vero in factores ſimplices radicales ſoluitur aequatio, per quemuis eiusmodi factorum non niſi vnus curuae ramus repraeſentatur. Cum autem puncta multiplicia non in ſingulis ramis curuarum extent, ſed ex concurſu plurium ramorum oriantur §. 6. quanquam in aliis caſibus reſolutio aequationum in Factores radicales aliqua commoda praeſtat, tamen in punctis multiplicibus impedimento eſt, quominus ea cognoſci poſſint.

Aequatio e. g. §. I. propoſita reſolui poteſt in ſequentes Factores ſimplices:

$$y - 2 - \sqrt{4x} + \sqrt{4 + 2x} = 0$$

$$y - 2 + \sqrt{4x} + \sqrt{4 + 2x} = 0$$

$$y - 2 + \sqrt{4x} - \sqrt{4 + 2x} = 0$$

$$y - 2 - \sqrt{4x} - \sqrt{4 + 2x} = 0$$

Quodſi ex ſingulis ad $y = x = 2$ quaerantur puncta, erunt illa non niſi ſimplicia.

§. XII.

Si aequatio $C = x^n + Bx^{n-1} \ldots\ldots + R = 0$; continens radices complures aequales et inaequales, multiplicetur per ſeriem indicum ac diuidatur per x: Aequatio inde orta D continet omnes radices aequales, eliminata vna. Sint radices aequales $= u$ earumque numerus $= z$ vocetur P productum ex inaequalibus, erit:

$$(u + x)^z . P = C$$

Sed

$$(u + x)^z = u^z + zu^{z-1}x + \frac{z.(z-1)}{1.2} u^{z-2} x^2 \ldots$$

Ergo:

$$(u + x)^z . P = P.(u^z + zu^{z-1}x + \frac{z.(z-1)}{1.\ 2.} u^{z-2} x^2 \ldots)$$

Fiat ex praeſcripto: $\frac{0}{x}$ $\frac{1}{x}$ $\frac{2}{x}$

Ergo $(u + x)^z . P$, multiplicatum per ſeriem indicum per x diuiſorum

$$\text{Erit } = P(zu^{z-1} + \frac{z.(z-1)}{1.} u^{z-2} x + z.\frac{(z-1)(z-2)}{1.\ 2.} u^{z-3} x^2 \ldots)$$

$$= P(z(u^{z-1} + \frac{z-1}{1.} u^{z-2} x \ldots)$$

$$= P(z.(u + x)^{z-1} = D$$

quae continet omnes radices aequales praeter vnam, quae eſt eliminata. Quodſi denuo aequatio diuidatur per $\frac{0}{x}$, $\frac{1}{x}$ . . . eliminabitur denuo vna aequalium, fietque $E = z(z-1)(u + x)^{z-2} . P$

Atque

Haec regula etiam valet de aequationibus, quae radices imaginarias aequales continent, et cum exponentes in aequatione bene ordinata progrediantur in progressione arithmetica: regula cum HVDDENII X de reductione aequationum, tractatui Geometriae Cartesianae Ed. SCHOOTENII inserta, conuenit.

Quodsi eadem ad casus speciales applicetur, consequitur ex genesi coefficientium, duos terminos vltimos aequationis, tres, quatuor - - - euanescere pro numero nimirum radicum aequalium. Ponatur exempli loco:

$$x^4 - 17x^3 + 108x^2 - 304x + 320 = 0$$

cui aequationi, cum tres aequales radices respondeant, tres vltimi termini euanescunt, transformando propositam sic, vt ponatur $y = x - 4$. Erit itaque

$$\begin{array}{rcrrrrr} x^4 & = & y^4 & + 16y^3 & + 96y^2 & + 256y & + 256 \\ -17x^3 & = & & -17y^3 & - 204y^2 & - 816y & - 1089 \\ +108x^2 & = & & & +108y^2 & + 864y & + 1728 \\ -304x & = & & & & - 304y & - 1216 \\ +320 & = & & & & & + 320 \end{array}$$

Ergo $x^4 - 17x^3 + 108x^2 - 304x + 320 = y^4 - y^3$

Hinc $y = 0;\ y = 0;\ y = 0;\ y = 1$

Itaque cum superius posuerimus $y = x - 4$, prodit $x = 5$ et exempli loco posita aequatio $= (x-4)^3 (x-5) = 0$

§. XIII.

Ex quo apparet, per regulam HVDDENII successiue eliminari posse radices aequales ex aequatione, ac eam, eliminata vna aequalium, substituta altera, euanescere, quod toties contingere necesse est, quoties multiplicatione facta, remanet adhuc aequalis, nec radicum qualitas mutatur, h. e. si aequales fuerint reales, manent post multiplicationem tales, nec imaginariae per eam multiplicationem conuertentur in reales.

Quae-

§. XIV.

Quaelibet aequatio, ex potentiis x et y conſtans, conſiderari poteſt tanquam ex duabus ſeriebus compoſita, quarum vna ſecundum dimenſiones y, altera ſecundum dimenſiones x progreditur. Quodſi earum quaelibet radices aequales contineat, applicabitur regula HVDDENII, ſi prima per ſeriem indicum y; altera per ſeriem indicum x multiplicetur, ac per reſpectiue incognitas diuidatur

Propoſita ſit v. c.

$$y^4 - 8y^3 - 12xy^2 + 16y^2 + 48xy + 4x^2 - 64x = 0$$

Fiat A

$$\begin{array}{ccccccccc} y^4 & - & 8y^3 & - & (12x - 16)y^2 & + & 48xy & + & 4x^2 = 0 \\ & & & & & & & & -64x \\ \frac{4}{y} & & \frac{3}{y} & & \frac{2}{y} & & \frac{1}{y} & & \frac{0}{y} \end{array}$$

B

$$\left.\begin{array}{l} 4x^2 - 12y \\ \quad + 48y \\ \quad - 64 \end{array}\right\} x + \begin{array}{l} + y^4 \\ - 8y^3 \\ - 16y^2 \end{array}$$

$$\frac{2}{x} \qquad \frac{1}{x} \qquad\qquad \frac{0}{x}$$

Prodit D

$$4y^3 - 24y^2 - 24xy + 32y + 56x \begin{array}{l} - 12y^2 \\ + 48y = 0 \\ - 64 \end{array}$$

Subſtituendoque in propoſitata et in D $y = x = 2$ vtraque aequatio euaneſcit, eademque ratione tractata D eliminabitur ſecunda aequalium. Regula itaque HVDDENII et ad dignoſcenda puncta multiplicia et ad determinandum quotuplicia ea ſint, perquam accommodata eſt, eaque maxime nititur Theoria, quam de hoc argumento ſuppeditauit Ill. CRAMERVS loc. ſuper. cit.

§. XV.

§. XV.

Differentiale cuiusuis aequationis obtinetur, ſi ea multiplicetur per ſeriem indicum, ductam in differentiale variabilis, diuiſum per va riabilem

1) ſi vna variabilis aequationi ineſt, res eſt manifeſta. Etenim,

$$y^m + ay^{m-} \quad by^{m-2} \; ---- + P = 0$$

Si multiplicetur per

$$\frac{mdy}{y}, \; \frac{(m-1)\,dy}{y}, \; \frac{(m-2)\,dy}{y}, \; ---- \; 0$$

Efficitur

$$my^{m-1}dy + (m-1)\,ay^{m-2}dy + (m-2)\,by^{m-3}dy --- = 0$$

2) ſi ex duabus variabilibus conſtat, ordinatis iisdem in binis columnis ſecundum dimenſiones earum, ex No. I. res conficitur. Sit itaque

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2}y^t - cy^{t-1} --- = 0$$

Erit A

$$x^m + ax^{m-1} + by^t x^{m-2} - cy^{t-1} ----$$
$$\frac{mdx}{x} \quad \frac{(m-1)\,dx}{x} \quad \frac{(m-2)\,dx}{x} \qquad 0$$

B

$$bx^{m-2}y^t - cy^{t-1} + x^m \; ax^{m-1} ----$$
$$\frac{tdy}{y} \qquad \frac{(t-1)\;dy}{y} \qquad 0$$

Facta operatione orietur differentialis

$$mx^{m-1}dx + (m-1)\;ax^{m-2}\;dx + (m-2)\;\;bx^{m-2}$$
$$y^t dx + tbx^{m-2}y^{t-1}dy - (t-1)\,cy^{t-2}dy --- = 0$$

Cum de duplicibus, triplicibus *n*tuplicibus punctis curuarum ex ipſarum aequetionibus, ab omni irrationalitate liberis, iudicandum ſit §. II. eaeque ex duabus variabilibus conſtent: disquiſitione opus non eſt, vtrum ſi radicales ſint in aequationibus eadem ratione differentiales earum obtineantur.

§. XVI.

Cum vero, vt iam monuimus, indices variabilium in bene ordinata aequatione progrediantur in progressione arithmetica; differentialia vero earundem prodeant multiplicando eas per seriem indicum, quorum singuli ducantur in variabilis differentiale diuisum per variabilem: idem sane efficitur hac operatione, quod praestat regula Huddenii. Quodsi aequatio contineat plures radices aequales, differentiando aequationem semel, vna eliminabitur aequalium, bis differentiando duae excidunt, et sic continuata differentiatione eliminari poterunt omnes aequales radices.

Si vero in semel differentiata aequatione, aequalium radicum vna in aequationem inferatur, tota destruitur, idemque accidit vlterius progrediendo pro numero nimirum aequalium radicum.

§. XVII.

Cum in punctis duplicibus - - - n tuplicibus ambae, y et x deprehendantur - - - n tuplices esse, eaedem aequales sint et eiusdem signi necesse est. §. 8. Et cum per differentiationem primam in duplicibus vna eliminetur aequalium, remanente altera: in triplicibus post duplicem differentiationem duae exterminentur, aequales, residuaque sit tertia et sic in reliquis magis multiplicibus punctis: consequens est: in $(n-1)$ tuplici differentiali ad punctum n tuplex substituta pro x et y residua aequalium totam euanescere aequationem, et sic in reliquis. Fit ergo ratio $\frac{dx}{dy}$ non ex positione $dx = 0$, vnde et dy fieret $= 0$: sed potius ob aequales, quas continet radices. Iam vero cum per Huddenianam regulam, aeque ac per regulas calculi differentialis, si duae tres - - - aequales radices insint, duo, tres - - - euanescant in aequatione termini, reli-

quis

quis manentibus: patet, cur continuata, ex reg. §. I., differentiatione, ratio $\frac{dx}{dy}$ ex indeterminata fiat determinata.

§. XVIII.

In aequationibus pro punctis duplicibus - - - n tuplicibus, potest etiam ex rationis $\frac{dx}{dy}$ valore, et quidem numeratore ac denominatore, eliminari y, substituendo pro eo, ac eius potentiis, valores ipsius in x. Quod si fit, apparebit, adesse in punctis duplicibus factorem communem vnum, in triplicibus duo factores communes, et sic porro, qui hanc rationem indeterminatam reddiderunt, iisque factoribus exterminatis, ratio fit determinata. Vtrum vero haec methodus simplicior sit ea, quam §. I. proposuimus, quilibet decernet, eo modo tractando aequationem §. I. Hac vero multo complicatiores in punctis triplicibus - - - n tuplicibus reperientur. Quaesiturus enim factorem communem debet

I) inuestigare valores y in x, quod in altioribus aequationibus per quam difficile est.

II) substituere hos valores pro omnibus potentiis y.

III) ita tractare valores substitutos, vt ad factores communes reducantur; quibus omnibus in methodo per calculum differentialem non est opus.

§. XIX.

Superest tandem, vt ostendam, quomodo haec determinatio subtangentium, cum vulgari subtangentium formula in calculo differentiali demonstrata, conspiret. Qua in re mihi licebit breuiori esse, cum in recentioribus systematis vberrime ostensum sit, differentialem cuiusuis aequationis completam

 prodire,

prodire, ſi in ea y et x ita creſcere concipiantur, vt pro y, $y + dy$ et pro x ponantur $x + dx$. Obtinebitur pro aequatione qualibetcunque, aequatio, quae conſtabit, ſubtracta propoſita, ex differentialium potentiis, prima, ſecunda, tertia etc. variis coefficientibus affectis, quae, ſi per columnas ordinentur aequalium potentiarum, quaelibet columna conſequens, reſpectu antecedentis h. e. ea, quae ex potentiis ſecundis conſtat, reſpectu columnae ex potentiis primis conſtantis etc. non abſolute ſed reſpectiue, poſitis dy et dx infinite paruis, euaneſcet. Quodſi itaque accidat, vt columna potentiarum dx et dy h. e. differentialis contracta, ob radices aequales euaneſcat: in ſubſidium vocanda eſt columna, quadrata dx et dy et his aequiualentes continens; et hac etiam euaneſcente, vt in punctis triplicibus fit, columna, cubos dy et dx complectens, adhibenda, et ſic porro. Quod vt eo melius appareat, ſcribantur Columnae A, B, etc. et in quacunque aequatione v. c.

$$y^4 - 2x^2y^2 + x^4 + 6axy^2 - 7ax - 4a^2y + 18a^2x^2 - 20a^3x + 8a^4 = 0$$

pro y et x inferantur $y + dy$ et $x + dx$ prodibit,

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
$y^4 =$	y^4	$4y^3dy$	$6y^2dy^2$	$4ydy^3$	dy^4
$-2x^2y^2 =$	$-2y^2x^2$	$-4x^2ydy$	$-8xydxdy$	$-4ydydx^2$	$-dy^2dx^2$
		$-4y^2xdx$	$-2x^2dy^2$	$-4xdxdy^2$	
			$-2y^2dx^2$		
$+x^4 =$	$+x^4$	$+4x^3dx$	$+6x^2dx^2$	$+4xdx^3$	$+dx^4$
$+6axy^2 =$	$+6axy^2$	$+6ay^2dx$	$+12aydxdy$	$+6adxdy^2$	
		$+12axydy$	$+6axdy^2$		
$-7ax =$	$-7ax$	$-7adx$			
$-4a^2y^2 =$	$-4a^2y^2$	$-8a^2ydy$	$-4a^2dy^2$		
$+18a^2x^2 =$	$+18a^2x^2$	$+36a^2xdx$	$+18a^2dx^2$		
$-20a^3x =$	$-20a^3x$	$-20a^3dx$			
$+8a^4 =$	$+8a^4$				

Aequa-

Aequatio differentialis, quae ſub C potentias dx et dy continet, poſitis dx et dy infinite paruis, ſola conſtituit formulam ingredientem in formulam ſubtangentium vulgarem. Hac vero euaneſcente, neceſſario locum obtinebit columna D, in punctis triplicibus columna E, et ſic in reliquis. Hinc etiam patet, qua ratione haec eruendi ſubtangentes ad puncta multiplicia methodus, cum formula in calculo differentiali pro ſubtangentibus vulgari conſentiat.

THESES.

I.

Gemina in ſingulos dies perpendiculorum reciprocatio quam nonnulli praeterito ac praeſenti ſaeculo obſeruari poſſe exiſtimarunt, legitimo fundamento caret.

II.

Propoſitiones 28. 29. Elem. VI. Euclidis, quas Tacquetus in elementis Geometriae planae, nullius fere vſus eſſe pronuntiauit, ſunt vtiliſſimae.

III.

Lunae atmoſphaeram, telluris noſtrae atmoſphaera multo tenuiorem eſſe, ex quibusdam rationibus deprehenditur.

IV.

Inſignia maxime momenta, e quibus Syſtematis Copernicani prae reliquis praeſtantia apparet, noſtro ſunt ſaeculo demonſtrata.

V.

Qui Phaenomena Electrica, attractionis, repulſionis, lucis, ex Aethere explicant, reducunt Phyſices partem ad problema: Aetheris principium motus, eiusdemque conſeruationis rationem inuenire.

VI.

Plantae ſunt machinae hydraulicae viuae, vitaeque earum rationem et Theoriam, nemo adhuc a priori demonſtrauit.

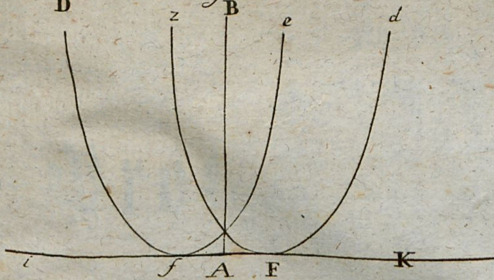

Fig. 1.

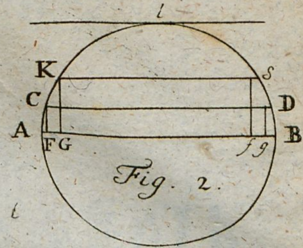

Fig. 2.

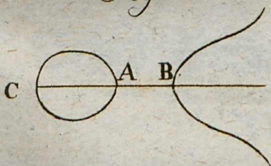

Fig. 3.

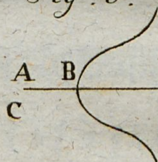

Fig. 6.

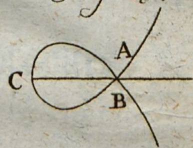

Fig. 4.

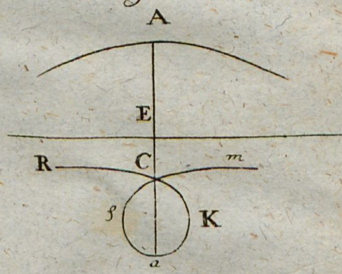

Fig. 7.

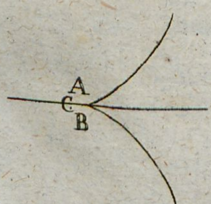

Fig. 5.

DE RATIONIBVS REGVLARVM, QVAS CALCVLVS DIFFERENTIALIS IN CONSTITVENDIS PVNCTIS CVRVARVM MVLTIPLICIBVS, ET SVBTANGENTIBVS IN IIS AD HAEC PVNCTA DVCENDIS OFFERT

INCLYTAE
FACVLTATIS PHILOSOPHICAE LIPSIENSIS
PERMISSV

PRO LOCO

IN EADEM OBTINENDO

DISPVTABIT

GEORGIVS HENRICVS BORTZ

PROF. MATH. P. O. AC COLL. B. MARIAE VIRG.
COLLEGIATVS

RESPONDENTE

CAROLO FRIDERICO HINDENBVRGIO

DRESDENSI

D. XXVI. AVGVSTI CIↃ IↃ CCLXIX.

LIPSIAE
EX OFFICINA LANGENHEMIA