Sendschreiben

wegen

einiger scheinbaren Schwürigkeiten

bey der

Multiplication und Division der positiven und negativen Größen

An

Sr. Hochedelgebohrnen

Herrn

Johann Friedrich Stoy

Sr. Königl. Majestät in Polen und Durchlaucht. in Sachsen hochbestalltem Bergrath,

von

Daniel Gottlob Rudolph,

A. M.

Leipzig,
in Lankischens Buchhandlung, 1757.

Ew. Hochedelgebohrnen haben einen so vortrefflichen Geschmack von den mathematischen Wissenschaften, und eine so schöne Einsicht in das ganze Reich der Natur, daß ich allemal ein heftiges Verlangen, Sie unter der Zahl derjenigen zu sehen, die ich als Gönner geziemend verehre, getragen habe. Dieses Verlangen wurde zu meinem größten Vergnügen erfüllt. Denn ich erfuhr von einem meiner Freunde, den ich sonderlich werth halte, wie bereitwillig Ew. Hochedelgebohrnen wären, mich einer Gewogenheit, die ausnehmend groß ist, genüßen zu lassen. Wie erwünscht war mir diese Nachricht! Ich bekam hierdurch die beqvemste Gelegenheit mich schriftlich zu Ihnen zu nahen, da ich es vorhero aus einer etwas schüchternen Hochachtung nicht wagen wollte. Erlauben Sie also, daß ich Ihnen diese geringe Arbeit, als das erste Zeichen meiner Hochachtung, mit welcher ich Sie verehre, vor die Augen legen darf. Sie ist geringe, weil Sie schon gewohnt sind, solche Betrachtungen, die eine tiefere Einsicht erfodern, zu beurtheilen. Sie ist aber auch geringe, weil ich vielleicht diejenige Schärfe, die man sonst bey Abhandlungen von dieser Art beobachten muß, nicht in Acht genommen habe.

Vor kurzem kam eine kleine Schrift zum Vorschein mit der Aufschrift: Carl Christ. Krausens M. D. Sendschreiben an Herrn Wenzesl. Joh. Gustav. Karsten der Ph. Mag. auf der Universität zu Rostock, in welchem nicht nur dem Herrn Magister, sondern allen Gelehrten ohne Unterschied ein Preis von 12 Stück Ducaten angeboten wird. Leipzig, bey Carl Ludwig Jacobi 1757. 8. 1 Bogen stark. Sie ist eine Antwort auf die Abhandlung des Herrn M. Karsten, in welcher er seine akademischen Vorlesungen bekannt macht. Ich glaube nicht, daß ich nöthig habe, die ganze Ordnung des Streites in einer Vollständigkeit anzuführen, Ew. Hochedelgebohrnen werden es hernach selbst erkennen, daß die Beurtheilung der Meynung des Herrn D. Krausens ohne diese historische Wiederholung geschehen kann. Erlauben Sie es unterdessen, daß ich vorhero mit einigen Erklärungen, die Ihnen überflüßig bekannt seyn werden, den Anfang machen darf.

Es giebt eine gewisse Art von Größen, die haben diese Eigenschaft an sich, daß sie, wegen ihrer völligen Widrigkeit, so oft sie auf irgend eine Weise in Verbindung gerathen, einander entweder gänzlich oder zum Theil aufheben. Sie sind gar nicht selten; denn alle die Größen gehören hieher, die, ob sie wohl unter einem weitern Begriffe befindlich sind, wegen ihrer besondern Umstände, in denen sie sich befinden, einander gerade entgegenstehen. Man rechnet hieher, wenn ich mich etlicher Exempel bedienen darf, das Steigen und Fallen eines Körpers; eine Bewegung die vorwärts, und eine andere, die rückwärts geschieht; baares Geld und Schulden, und viele andere mehr, die gar zu bekannt sind, als daß ich sie nennen darf. Diese Größen haben den Namen der positiven und negativen Größen erhalten. Diejenigen heißen positiv, welche der Gegenstand unsrer Betrachtung sind, mit welchen man es eigentlich zu thun hat, und von welchen man redet; die übrigen, welche ihnen gerade entgegen sind, werden negative Größen genennt. Beschäfftiget man sich mit dem Vorwärtsgehen, so stellt das Rückwärtsgehen die negative Größe vor. Man sieht leicht, daß sich zwischen dergleichen Größen eine Gränze befindet, von welcher die positiven Größen auf der einen und die negativen Größen auf der andern Seite ihren Anfang nehmen. Ohne diese Gränzen ist man niemals im Stande sich einen gehörigen Begriff von ihnen zu machen, oder sie, wie es nöthig ist, untereinander zu vergleichen.

Weil die positiven und negativen Größen widrige und einander entgegen gesetzte Größen sind, so waren Zeichen nöthig, damit man sie, so oft sie betrachtet werden, nicht unter einander verwechselt. Die positiven bekamen das Zeichen (+) und die negativen das Zeichen (—). Ich will mich recht sehr erniedrigen, denn ich denke immer, daß man bey einer gehörigen Erläuterung sehr leicht einigen Schwierigkeiten vorbeuget, auf welche in der Folge vieles ankommen möchte. Ich will von 4 Thalern baarem Gelde reden, ich werde sie also mit + 4 bezeichnen müssen.

Hätte ich aber auch noch 2 Thaler Schulden, als Größen, die den vorigen 4 Thalern völlig zuwider sind, so müßte ich sie auf diese Weise — 2 bezeichnen.

Mit den positiven und negativen Größen werden allerley Veränderungen vorgenommen. Am Ende lauft es aber beständig da hinaus, man soll sie entweder in ihrem Zustande, oder in ihrer Bestimmung, die sie haben, lassen; oder sie sollen in einem entgegen gesetzten Sinne genommen werden. Dieses heißt nichts anders, als, man soll die positiven Größen bey aller ihrer Veränderung positiv, und die negativen Größen negativ bleiben lassen. Jedermann erkennt, daß hiezu abermal 2 Zeichen, die dieses zu erkennen geben, unumgänglich nöthig sind. Man hat hiezu eben diejenigen, mit welchen sonsten die positiven und negativen Größen bezeichnet werden erwählt. Sollen die positiven Größen in ihrem Zustande und die negativen noch fernerhin negativ bleiben, so bedient man sich dabey des Zeichens (+). Begehrt man aber die positiven Größen in einen entgegengesetzten Zustand zu bringen, oder sollen sie bey ihrer geschehenen Veränderung zu negativen werden, oder will man die negativen Größen in einen entgegengesetzten Zustand versetzen, so braucht man hierzu das Zeichen (—). Und dieses verursacht niemals im geringsten eine Unordnung. Wir wollen dieses hernach mit einigen Beyspielen erläutern. Unterdessen erinnern wir hier, daß an dem, was wir bisher gesaget haben, vieles gelegen ist. Denn auf solche Weise kömmt diesen Zeichen eine doppelte Bedeutung zu. Man könnte die eine beqvem die problematische und die andere die arithmetische nennen. Viele, die dieses aus der Acht lassen, finden freylich allerley Schwürigkeiten, aber sie sind selber Schuld daran, wenn sie sich die gehörige Kraft, die den mathematischen Zeichen zukommen, nicht mit der erforderlichen Deutlichkeit vorstellen. Die andere Vorerinnerung mag diese seyn. Die Multiplication ist, wie ein jeder weis, nichts anders als eine beqveme Addition, denn sie besteht darinnen, daß man entweder die ganze Größe oder einige von ihren Theilen etlichemal nimmt. Soll ich 4 durch 2 multipliciren, so muß ich dieses dabey denken: die 4 soll zweymal gesetzt und in eine Summe gefaßt werden. Und will ich 6 durch 3 multipliciren, so muß ich die 6 so vielmal nehmen, als die dabey befindliche Zahl 3 Einheiten in sich enthält, nämlich 3 mal. Die dabey befindliche Zahl 2 in dem ersten Falle, und 3 in dem andern Falle verschaft eben die Beqvemlichkeit bey der Bezeichnung des Addirens. Es würde zu beschwerlich seyn, wenn man 7 durch 9 multipliciren, und bey der Bezeichnung die 7 ausdrücklich 9 mal hinsetzen wollte. Das war eben die Ursache, warum die Menschen eine beqvemere Bezeichnung der Addition erdachten, in dem Falle, wenn von der Zusammensetzung lauter gleicher Größen die Rede ist. Man darf nicht meynen, wie einige glauben, als wenn diese Erklärung der Multiplication, sich nur allein auf die ganzen Zahlen schickte, sie kann auch ohne Bedenken auf die gebrochenen Zahlen angewendet werden. $\frac{2}{3} \times 4$, heißt, $\frac{2}{3}$ ganz 4 mal nehmen, welches am Ende 8 dergleichen Drittheile giebt. $9 \times \frac{2}{3}$ bedeutet die 9, 2 drittelmal nehmen, oder vermöge des Begriffes eines Bruches, sie in 3 Theile zergliedern und 2 dergleichen Theile nehmen, hiermit bekömmt man 6. Der Ausdruck $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$ zeigt an, daß man ein Halbes $\frac{3}{4}$ mal nehmen soll, und dieses geschieht, wenn man ein Halbes in 4 gleiche Theile zergliedert und drey von diesen Viertheilen nimmt. Durch Hülfe der Linien kann man sich alles dieses am besten erläutern.

So lange nun von keinen entgegengesetzten und widrigen Größen die Rede ist, so lange bleibt die Beschäfftigung, die mit den gemeinen Zahlen vorgenommen werden, ohne eine andere Erinnerung hinzuzufügen. Soll man aber dergleichen Größen multipliciren oder dividiren, so ist es nicht hinlänglich, wenn man sie oder ihre Theile nur etliche mal setzt, wie es bey der gemeinen Multiplication geschieht, oder die eine von der andern etliche mal hinweg nimmt, welches bey der gemeinen Division üblich ist, sondern man muß außerdem auch darauf sehen, ob die Größe, die ich etliche mal nahm, ihre vorige Bestimmung oder ihren vorigen Zustand behalten soll oder nicht. Wodurch erfahre ich dieses? Das muß mich das Zeichen lehren, das bey der Zahl, die die Vervielfältigung anzeigt, befindlich ist. Ich will 4 x 2, ich muß also die 4 zweymal setzen, und weiter habe ich nichts zu thun, wenn ich die 4 und 2 als gemeine Zahlen ansehe. Gesetzt aber, ich soll + 4 x 2, so müßte ich die positive 4 zweymal setzen; aber habe ich hiermit alles gethan, was ich habe thun sollen? Bey dieser Bezeichnung der 2 könnte es scheinen. Ich habe sie freylich 2 mal genommen, aber was hilft mich dieses nehmen, da ich sehe,

daß

daß ich am Ende einen zweifelhaften Fall erhalte? Ich habe die + 4 zweymal genommen. Aber wie denn? Soll sie in diesem Zustande bleiben oder in einen entgegengesetzten versetzt werden? Das weis ich nicht. Und was ist denn die Ursache hievon? Keine andere als diese, weil die 2 nicht mit dem gehörigen Zeichen, welches doch bey den Beschäfftigungen mit den widrigen Größen erfordert wird, verbunden ist. Ich will also zu der 2 das Zeichen + setzen. Ja, so bald ich dieses thue, so verschwindet das Zweifelhafte auf einmal, denn nunmehro sehe ich wohl, daß ich nicht nur die positive Größe zweymal setzen, sondern, daß ich sie auch in ihrer Bestimmung, die sie hat, nämlich positiv lassen soll. Ich will die 2 mit dem Zeichen — verbinden. Gut, so werde ich genöthiget, die + 4 nicht nur 2 mal zu setzen, sondern auch in einen entgegengesetzten Zustand zu bringen. Dem Positiven ist das Negative zuwider. Ich muß also die + 4 zweymal negativ setzen. Hiermit entsteht freylich eine negative 8, und hierüber wundere ich mich gar nicht, denn das Zeichen der 2 erforderte dieses Verfahren. Hieraus sieht man, wie wichtig es ist, daß man den Werth und die Bedeutung der Zeichen wohl

wohl von einander unterscheidet. Finde ich den Ausdruck

$$+4 \times +2$$

so muß ich dem Zeichen + bey der 4 eine andere Bedeutung geben als dem Zeichen + bey der 2. Denn bey der 4 zeigt es an, daß die 4 eine positive Größe sey, eine solche Größe, die ich zum Augenmerke angenommen habe; bey der 2 hingegen zeigt es gar nicht an, daß 2 eine positive Größe sey, denn sie ist, wenn ich mich des Ausdruckes bedienen darf, eine abstrackte Zahl, sie zeigt nur an, daß ich die + 4 etlichemal nehmen soll, und das dabey befindliche Zeichen erinnert mich nur, in was für einen Zustand die + 4 zu setzen sey, ob ich die zweymal genommene 4 positiv oder negativ nehmen soll. Hingegen zeigt wohl das + oder — bey dem Produckte, welches am Ende entsteht, eine positive oder negative Größe an. Ich weis wohl, daß es manche nicht gerne sehen, wenn man den einen Faktor bey der Multiplication als eine abstracte Zahl betrachtet. Es ist wahr, daß 4 Rthl. x 2 eben das Product giebt, was man von 2 x 4 Rthl. erlangt. Aber man überlegt nicht recht, was das heißt

$$2 \times 4 = 4 \times 2$$

Denn

Denn sonst müßte man sich bey dem Satze

$$8 \text{ Rthl.} : 4 \text{ Rthl.} = 10 \text{ ℔} : x$$

noch weit mehr daran stoßen, weil

$$x \text{ ℔} = 4 \text{ Rthl.} \times 10 \text{ ℔} : 8 \text{ Rthl.}$$

Und man weicht dieser vermeynten Schwürigkeit gewiß nicht aus, wenn man die Erklärung der Multiplication annimmt, daß sie so viel heißt, als eine Zahl finden, deren Einheit sich zu der einen gegebenen, wie sich die andere gegebene zu der Zahl, die man eben sucht, verhält. Wer sie genauer betrachtet, der wird leichte erkennen, daß sie nichts anders, als eine Folge derjenigen Erklärung ist, die wir vorhin schon angeführt haben.

Die Regeln der Multiplication, daß wir wiederum zur Hauptsache kommen, haben gar nicht diejenigen Schwürigkeiten, die man von ihnen vorgiebt. Man sagt:

$$+4 \times +2 = +8$$
$$-4 \times -2 = +8$$

nämlich einerley Zeichen geben ein positives Produkt.

Die Sache hat ihre völlige Richtigkeit, denn

$$+4 \times +2$$

bedeutet so viel als $+4 + +4 = +8$.

Das

Das heißt, man muß die $+4$ zweymal und wegen des Zeichens $+$ bey der 2, zweymal positiv setzen. Ferner ist

$$-4 \times -2$$
so viel als $+4 + +4 = +8$

D. h. Es soll die negative 4 zweymal, und wegen des Zeichens $-$ bey der 2, zweymal in einem entgegengesetzten Zustande gesetzt werden. Das Entgegengesetzte von -4 ist ohnstreitig $+4$. Nehme ich dieses 2 mal, so muß ich nothwendig $+8$ erhalten.

Man sagt ferner

$$+4 \times -2 = -8$$
und $-4 \times +2 = -8$

nämlich, verschiedene Zeichen geben ein negatives Produkt. Und was ist richtiger als dieses? Man muß sich nur einen rechten Begriff von denen dabey befindlichen Zeichen machen. Wir wollen beyde Fälle näher betrachten.

Der erste Fall ist

$$+4 \times -2$$

und dieses bedeutet so viel, als

$$-4 + -4 = -8$$

d. h. Man soll die $+4$ zweymal, und wegen des Zeichens $-$ bey der 2, zweymal in dem

dem entgegengesetzten Sinne nehmen. Das Widrige von + 4 ist gewiß — 4. Aber eine — 4 zu einer — 4 addirt giebt meines Erachtens allzeit — 8.

Der andre Fall ist

$$-4x + 2 = -8$$
$$-4 + -4 = -8$$

Hier soll ich also die — 4 zweymal nehmen, aber so, daß sie in diesem Zustande verbleibt, denn dieses erfordert das bey der 2 befindliche Zeichen +.

Haben nun die Regeln der Multiplication ihre Richtigkeit, so bleiben auch die Regeln der Division unumstößlich. Sie sind gar zu sehr durch den Beyfall der berühmtesten Männer, eben so, wie die Lehren der Astronomie durch die Observationen erfahrner Astronomorum, bestätiget worden. Wie viele wichtige algebraische Entdeckungen, welche die Naturlehre gebilliget hat, gründen sich auf sie! Das müssen ohnstreitig starke Beweise seyn, welche Grundsätze des Verstandes, scharfsinnige Männer und die Erfahrung selbst befestiget.

Man kann die Erklärung der Division auf verschiedene Weise abfassen. Wir wollen anfangs diejenige vor uns nehmen, die man sonst zuerst von ihr zu geben pflegt. Größen dividiren heißt, die eine von der andern, so vielmal, als es angeht, hinwegnehmen, und es am Ende anzeigen, wie vielmal dieses geschehen kann. So vielmal sich aber die eine Größe von der andern hinwegnehmen läßt, eben so vielmal muß sie auch in der andern befindlich seyn. Die Division ist also eigentlich nur eine wiederholte Subtraction. Vielleicht sehen manche diese Erklärung von der Division bey der Division der Brüche entweder als unbrauchbare oder doch als eine unbeqveme Erklärung an. Allein man übereilt sich gewiß. Es giebt vielerley Fälle bey ihrer Division, wir wollen der Deutlichkeit wegen die vornehmsten betrachten. Der eine Fall ist, wenn ein Bruch durch eine ganze Zahl dividirt werden soll,

wie z. E. $\frac{3}{4} : 2$

welches so viel bedeutet, als untersuchen, wie viel mal die 2 in $\frac{3}{4}$ befindlich sey. Hierbey denkt man gewiß dunkel. Denn das Ganze und die Theile sind heterogen. Man verwandle aber das Ganze 2 in gleichnamichte Theile, nämlich in $\frac{8}{4}$, so bekömmt man $\frac{3}{4} : \frac{8}{4}$.

Aber 3 Viertheile durch 4 dergleichen Theile dividiren, heißt dem Ausdrucke nach soviel, wie

wie $\frac{4}{5}$. Und diesen Quotienten giebt die gemeine Regel für diesen Fall.

Ein andrer Fall ist, wenn man $\frac{2}{3}$ durch $\frac{5}{6}$ dividiren oder untersuchen soll, wie viel mahl $\frac{5}{6}$ in $\frac{2}{3}$ enthalten sey. Auch dieser Ausdruck ist dunkel, und zwar blos einzig und allein darum, weil $\frac{2}{3}$ und $\frac{5}{6}$ heterogene Theile sind. Man bringe aber nur ihre Einheiten zu einerley Benennung, so wird alles deutlich werden, nämlich

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{6} = \frac{12}{18} : \frac{15}{18}.$$

Aber 12 von den Achtzehntheilen durch 15 dergleichen Theile dividiren, giebt ohnfehlbar den Ausdruck $\frac{12}{15}$, und also eben den Quotienten, den man durch die gemeine Regel erlangt.

Der dritte Fall, wenn man eine ganze Zahl durch einen Bruch dividirt. Z. E.

$$4 : \frac{2}{3}$$

und also untersucht, wie viel mal die 4 Zweydrittheile in sich faßt. Will man auch dieses deutlicher haben, so verwandle man die 4 ebenfalls in Drittheile, so bekömmt man

$$\frac{12}{3} : \frac{2}{3}.$$

Nun geben aber 12 Drittheile durch 2 dergleichen Drittheile dividirt den Quotienten

$$\frac{12}{2} = 6.$$

Dieses zum vorausgesetzt, wollen wir die Division der positiven und negativen Größen ein wenig genauer vor uns nehmen. Hiebey eräugnen sich, wie bey der Multiplication, zwey Hauptfälle; der eine ist, wenn man Größen, die einerley Zeichen haben, durch einander dividirt; der andere aber, wenn Größen mit verschiedenen Zeichen durch einander dividirt werden. Für beyde Fälle hat man abermal der Beqvemlichkeit wegen etliche Regeln vorgeschrieben. Die erste heißt: Größen mit einerley Zeichen geben einen Quotienten mit dem Zeichen +. Also ist

$$\frac{+6}{+3} = +2 \text{ und } \frac{-6}{-3} = -2.$$

Man will wissen, wie viel mahl in der positiven 6 der positive Theil 3 befindlich sey? Niemand wird zweifeln, daß diese + 6 den Theil 3, in eben der Bestimmung genommen, 2 mal in sich fasse. Das Zeichen des Quotienten ist also hier kein Zeichen einer positiven Größe, sondern vielmehr ein solches Zeichen, welches zu erkennen giebt, daß man das Enthaltenseyn in keinem widrigen Sinne verstehen soll. Es ist also, wie vorhero bey der Multiplication der eine Factor eine allgemeine Zahl, die nur das Enthaltenseyn des Divisors in dem Dividendus bemerkt.

Der

Der andere Fall, nämlich die Division der — 6 durch — 3 läßt sich auf eben diese Art erläutern. Es ist augenscheinlich, daß die negative 6 den negativen Theil 3 zweymal in sich enthält. Der Quotiente 2 bekömmt dahero das Zeichen +, nicht als wenn + 2 eine positive Größe wäre, sondern vielmehr darum, weil uns dieses erinnert, daß die negative 6 die negative 3, ohne sie in einem entgegengesetzten Sinne zu nehmen, 2 mal, wie sie gegeben wurden, in sich fasse.

Die andere Hauptregel ist von diesem Innhalte:

Größen, mit verschiedenen Zeichen, geben bey der Division einen Quotienten mit dem Zeichen —.

So ist $\frac{+6}{-3} = -2$, und $\frac{-6}{+3} = -2$.

In dem ersten Falle soll man untersuchen, wie vielmahl die positive 6 die negative 3 als einen Theil in einem der 6 entgegengesetzten Sinne genommen, in sich enthalte. Ohnstreitig 2 mal, wenn man ihr eine entgegengesetzte Bestimmung giebt. Hier kann also der Quotiente 2 kein anders als das Zeichen — erhalten. Denn dieses zeigt es eben an, daß man etwas in einem entgegengesetzten

Sinne nehmen oder betrachten soll. Es ist also das Zeichen — bey dem Quotienten wiederum kein Zeichen einer negativen Größe.

Die Erläuterung des andern Falles ist von eben der Beschaffenheit. Man soll — 6 durch + 3 dividiren, das heißt untersuchen, wie vielmal der positive Theil 3 in dem negativen Ganzen 6 und also in einer entgegengesetzten Bestimmung betrachtet, befindlich sey. Wer wird es aber läugnen, daß die negative 6 den positiven Theil 3, in einem entgegengesetzten Sinne genommen, zweymal in sich faßt? Der Quotiente 2 konnte dahero kein anderes als das Zeichen — erhalten, ein solches Zeichen, das die entgegengesetzte Bestimmung beständig zu erkennen giebt.

Bey dieser angenommenen Erklärung der Division bemerken die Zeichen, die sich bey dem Dividendus und Divisor befinden, wie wir bisher gezeigt haben, den positiven und negativen Zustand; hingegen bemerkt das Zeichen des Quotienten, in was für einem Sinne, oder mit was für einer Bestimmung die Größen, die man dividirte, zu betrachten sind.

Alles dieses bestätiget auch die wesentliche Eigenschaft eines jeden Quotienten. Denn so oft man den Divisor in den Quotienten mul-

multipliciret, so muß der Dividendus vollkommen wieder hergestellt werden. Man nehme nun die vorigen Fälle wieder vor sich und erinnere sich derjenigen Erläuterung, die wir von der Multiplication positiver und negativer Größen gegeben haben, so werden die Regeln der Division von neuen bestätiget werden.

Es war $\frac{+6}{+3} = +2$

nun ist aber $+3 \times +2 = 6$.

Ferner $\frac{-6}{-3} = +2$

und $-3 \times +2 = -6$.

Weiter $\frac{+6}{-3} = -2$

und $-3 \times -2 = +6$.

Endlich $\frac{-6}{+3} = -2$

und es ist $+3 \times -2 = -6$.

Weil sich die vorhin angeführte Erklärung der Division nicht beqvem zu denjenigen Fällen schickt, in welchen der Divisor, wie bey den Brüchen, größer als der Dividendus ist, so wollen wir uns noch einer andern bedienen. Man wird aber dem ohngeachtet erkennen, daß die vorigen Regeln noch eben so feste und unveränderlich, wie bey der vorigen Erklärung, bleiben. Eine Größe wird auch durch die andere dividirt, wenn man die erste in so viel gleiche Theile, als die andere Einheiten in sich faßt, zergliedert, und einen von diesen Theilen nimmt.

Ich will nunmehro + 6 durch + 3 dividiren, mithin muß ich die + 6, von welcher ich aber schlechterdings wissen muß, in was für einem Zustand ich sie betrachten soll, in 3 gleiche Theile zergliedern.

Und dieses zeigt mir das Zeichen +, welches bey der 3 befindlich ist, hinlänglich an. Ich soll sie in ihrer Bestimmung und also positiv lassen. Wird nun die + 6 in 3 gleiche Theile zergliedert, und einer davon genommen, so kann es nicht anders geschehen, als, ich muß den Theil + 2 und also einen positiven Quotienten erhalten.

Will ich $\frac{-6}{-3}$, so werde ich — 6, aber in einem entgegengesetzten Zustande betrachtet, wegen des Zeichens — bey der 3, in 3 gleiche Theile zergliedern. Der entgegengesetzte Zustand von — 6 ist + 6, und einer von den 3 Theilen + 2. Der Quotiente ist also positiv.

Hier-

Hieraus erhellet hinlänglich, daß Grö=
ßen, die einerley Zeichen haben, bey ihrer
Division einen positiven Quotienten geben.

Auch die andere Regel kan bey dieser Er=
klärung der Division vollständig gerechtferti=
get werden.

Denn soll man $\frac{+6}{-3}$,
so wird die $+6$, die man aber wegen des
Zeichens — bey der 3 in dem entgegengesetz=
ten Zustande betrachten, und hiemit in -6
verwandeln soll, in 3 gleiche Theile zerglie=
dert. Einer davon ist -2 und also der be=
gehrte Quotiente.

Will man aber $\frac{-6}{+3}$,
so muß man von der -6, die in ihrem Zu=
stande verbleiben soll, den 3ten Theil neh=
men, und der kan kein andrer, als -2 seyn.
Hier ist der Quotiente abermal negativ, und
die Regel behält ihre Richtigkeit, daß Grö=
ßen mit verschiedenen Zeichen bey der Divi=
sion einen negativen Quotienten haben.

Dieser Begriff der Division unterscheidet
sich in Ansehung der Zeichen von dem vor=
hergehenden einigermaßen. Hier ist näm=
lich das Zeichen bey dem Dividendus und
Quotienten ein Zeichen einer positiven oder

negativen Größe, und das Zeichen des Divisors soll uns hier erinnern, in was für einem Sinne der gegebene oder angenommene Dividendus zu nehmen sey. Vorhero war der Quotiente eine abstrackte Zahl, und hier ist es der Divisor. Im übrigen ist dieses der wesentlichen Eigenschaft des Quotienten auf keine Weise entgegen. Denn auch nach der andern Erklärung der Division ist,

wenn $\frac{+6}{+3} = + 2$,

$+ 2 x + 3 = - 6.$

und wenn $\frac{-6}{-3} = + 2$,

$+ 2 x - 3 = - 6.$

Diese Betrachtungen sollen den Nutzen haben, daß man erkennt, daß die Zeichen bey zwoen Größen, die man multipliciren oder dividiren will, niemals auf einerley Weise genommen werden dürfen. Denn in

$+ a x - b = - p$

bemerkte das erste Zeichen bey a den Zustand, in welchem sich die Größe, wenn sie gegeben wird, befindet; Das andere aber b giebt zu erkennen, in was für einem Zustande man sie, bey der Veränderung, die mit ihr vorgenommen wird, betrachten soll. Das Zeichen

chen — des Produkts zeigt eine negative Größe an.

Diese Betrachtung findet auch bey der Division, aber auf eine doppelte Weise, nachdem man die Erklärung von der Division einrichtet, statt.

Denn setzt man $\frac{+a}{-b} = -q$,

so würde nach der ersten Erklärung + a eine positive Größe — b eine negative Größe bedeuten; und hingegen das Zeichen — bey q anzeigen, daß der Divisor b als ein Theil in dem Ganzen a etlichemal, aber in einem entgegengesetzten Sinne, befindlich sey.

Nach der andern Erklärung aber würde + a eine positive, und — q eine negative Größe vorstellen; Das Zeichen — bey dem Divisor würde hingegen anzeigen, daß ich das Ganze + a in einer entgegengesetzten Bestimmung nehmen sollte.

Hieran ist ungemein viel gelegen. Denn so oft man sich die Zeichen anders als auf diese Weise vorstellt, so ist man in Gefahr des rechten Weges zu verfehlen, und Schwürigkeiten zu finden, wo doch eigentlich keine angetroffen werden. Es muß doch ein Unterschied seyn zwischen den Größen, die man ohne auf ihren Zustand zu sehen, worinnen sie sich befinden, betrachtet, und zwischen andern, wo man die Absicht hat, ihre Bestimmung und ihren Zustand in Erwägung zu ziehen.

Nachdem ich meines Erachtens bishero von der Natur der Multiplication und Division positiver und negativer Größen ausführlich gehandelt habe, so muß ich mich nunmehro auch zu der Beurtheilung einer Meynung wenden, die den gewöhnlichen Regeln, die man für diese Größen vorgeschrieben hat, zuwider scheinet. Man bedient sich vornehmlich dieser Art zu schlüßen.

$\frac{+2}{-2}$ ist beständig $= 1$ gewesen.

Der Quotiente, der hier als eine Einheit erscheint, mag im übrigen eine Bestimmung haben, welche er will. Dieses aber wäre ein Merkmaal, daß der Dividendus und Divisor einerley Größen hätten. Denn die gemeine Arithmetick lehre es schon, daß, so oft sich der Quotient als eine Einheit zeigte, der Dividendus und Divisor von gleicher Größe seyn müßten.

Hieraus folge augenscheinlich, daß

$$+2 = -2.$$

Man setze aber einmal auf beyden Seiten $+2$ hinzu.

Es

Es ist bekannt genug, daß Gleiches, zu Gleichen addirt, gleiche Summen giebt.

Hiermit würde $+2$ und $+2 = -2$ und $+2$.

Das heißt $+4 = 0$.

Aber welch ein Widerspruch!

Der Gelehrte, der sich dieser Art zu schlüßen bedient, ist ziemlich bereitwillig. Er sieht es voraus, daß man ihm läugnen wird, daß

$$+2 = -2.$$

Ist nun, so sagt er, $+2$ nicht so groß wie -2, so müssen sie nothwendig verschiedne oder ungleiche Größen haben.

Er läßt sich es also gefallen, daß

$+2$ nicht $= -2$.

Es mag also, schlüßt er fort, $+2 > -2$.

Diesemnach muß nothwendig auch

$$+2^2 > +2^2$$

Das heißt $+4 > +4$.

Abermal ein Widerspruch! Und dieser muß auch entstehen, wenn $+2 < -2$ gesetzt wird.

Lauter Widersprüche! Wie schlecht sieht es also um den Grund der algebraischen Betrachtungen aus! Und so fehlerhaft sind beynahe alle algebraische Bemühungen, die

der

der Mathematik das Leben gegeben haben. Aber ich wünsche es gerne, und vielleicht wünschen es viele, andere Regeln zu sehen, die inskünftige zu einem Leitfaden der Multiplication und Division dieser Art von Größen dienen könnten. Jedoch ich vergesse mich; Das ist ja keine Widerlegung. Ich will mich dahero zur Sache selbst wenden.

Ist es denn wahr, daß

$$\frac{+2}{-2} = \text{einer Einheit?}$$

und mag man es zugeben, daß

entweder $+ 2 = - 2$

oder $+ 2 >$ oder $< - 2$?

Es ist wirklich wahr, daß

$$\frac{+2}{-2} = \text{einer Einheit,}$$

Aber einer bloßen Einheit, ohne darauf zu sehen, in was für einem Zustande sie sich befindet? Keinesweges. Wir haben es vorhin überflüssig gezeigt, was das heißt, $+ 2$ durch $- 2$ dividiren. Wir haben hinlänglich gewiesen, wie man sich die Zeichen bey der Division, nach dem ihre Erklärung angenommen wird, vorstellen müsse. Und diese Erklärungen erfordern es, daß

$$\frac{+2}{-2} = -1$$

und

und weil $-2 \times -1 = +2$

so erlangt man zwar $+2 = +2$

und dieses ist ein wahrer Satz, aber nimmermehr

$$+2 = -2.$$

Wir erinnern zum andern, daß man bey dem Multipliciren und Dividiren der Größen eigentlich niemals fraget, ob die Größen einander gleich sind, oder nicht. Ein anders ist, die Größen relativisch, und ein anders, die Größen absolut betrachten. Daß sich bey der nähern Betrachtung der Multiplication und Division Verhältnisse herleiten lassen, das erfordern ihr Wesen und diejenigen Erklärungen, die man von ihnen zu geben pflegt. Sind aber die bisherigen Erklärungen von der Multiplication und Division alle falsch, so will ich es gern einräumen, wenn man aus dem Satze

$$\frac{+2}{-2} = -1$$

schlüßen will, daß $+2 = -2$.

Dieser andere Fehler wird in der Vernunftlehre fallacia elenchi genennt; weil hier über etwas gefragt wird, wovon doch gar nicht die Rede ist. Wir erinnern drittens, daß hiebey eine offenbare petitio principii oder demon-

demonstratio in orbem begangen wird. Man wird mir es zu gut halten, daß ich die Fehler so künstlich anzeige.

Der Gelehrte sagt, wenn nicht

$$+2 = -2$$

so muß $+2 >$ oder < -2.

Gesetzt es wäre $+2 > -2$

so müßte auch $+2^2 > +2^2$

oder $+4 > +4$.

Aber warum bedient sich denn dieser Gelehrte der Regeln der Multiplication, solcher Regeln, die ihm doch verdächtig vorkommen.

Denn ist es wahr, daß

$$-2 \times -2 = +4$$

so muß auch zugestanden werden, daß

$$\frac{+2}{-2} = -1$$

und nicht überhaupt eine Einheit.

Aber hiermit sieht man, daß man keine gegründete Ursache habe eine von diesen Folgen herzuleiten, daß

entweder $+2 = -2$

oder $+2 >$ oder < -2.

Daß man die positiven und negativen Größen, wenn es nöthig ist, in eine Vergleichung bringt, ist gar nichts widersinnisches. Dergleichen

gleichen Größen sind homogen, wenn man auf den weitern Begriff sieht, unter den sie sich bringen lassen. Baares Geld und Schulden, beydes sind Geld.

Eine Bewegung die vorwärts geschieht und eine andere, die rückwärts erfolgt, sind beydes Bewegungen. Bey alle dem aber sind es auch heterogene Größen, denn wie könnten sie sonst widrige heissen, wie könnte die eine die andere aufheben. Aber dürfen denn dergleichen Größen verglichen werden? und lassen sie sich denn in eine Verhältniß bringen? Wären sie äußerst heterogen und wäre zwischen ihnen gar keine Art der Verbindnung, so würde es freylich nicht angehen. Es würde lächerlich seyn, wenn ich eine vorwärtsgehende Bewegung mit den Schulden vergleichen wollte. Diese Größen, wenn ich sie als Größen betrachte, sind zwar äußerst von einander unterschieden, allein sie haben im geringsten nicht diejenige Widrigkeit, daß, wenn man sie vereinigen wollte, die eine die andere ganz oder zum Theil aufheben sollte. Ich sehe also immer noch nicht, daß die Gelehrten, welche die Multiplication und Division der positiven und negativen Größen vermittelst der Verhältnisse bestätiget haben, augenscheinlich geirret hätten. Man kann auch die heterogenen

genen Größen, wenn nur irgend eine Verbindung unter ihnen statt findet, zum wenigsten mittelbar vergleichen, und dieses letztere thun die Menschen zu unzähligenmalen. Ich könnte Philosophen nennen, die es selbst sagen, daß sich die heterogenen Größen mittelbar vergleichen lassen, und ich glaube gänzlich, sie haben völlig recht.

Man muß nur den Zeichen ihren wahren Werth und ihre eigentliche Bedeutung geben, so werden die Verhältnisse, deren man sich bey der Erläuterung der Multiplication und Division positiver und negativer Größen bedienet, verständlicher werden. Z. E. wenn man sagt, daß

$$+1 : +2 = +3 : +6$$
$$+1 : +2 = -3 : -6$$
$$+1 : -2 = -3 : +6$$
$$+1 : -2 = +3 : -6$$

Jedoch, dieses alles bey Seite gesetzt, die positiven und negativen Größen sollen in gewisser Absicht homogen oder gleichartig seyn. Wie sieht es nun bey der Frage aus, ist

$$+2 = -2\ ?$$

ich kann es bejahen und verneinen, wie es einer haben will. Sie sind einander gleich, wenn ich blos auf die Anzahl ihrer Einheiten sehen wollte. Sie sind verschieden, weil das positive nicht das negative ist. Gesetzt einmal

$$+\ 2 = -\ 2$$

und $+\ 2 = +\ 2$

so soll $+\ 4 = 0$.

Das folgt wieder nicht; denn, wenn ich sage, daß $+ 2 = - 2$, so sehe ich blos auf die Menge ihrer Einheiten. Und hiemit ist es eben so viel, als wenn ich sagte

$$2 = 2.$$

So bald ich nun zu beyden eine 2 hinzufüge, so darf ich nicht mehr schlüßen, als ich soll. Nicht so, daß eine positive 2 und eine andere positive 2 so groß wie $+ 4$ und eine negative 2 zu einer positiven 2 gesetzt $= 0$. Denn hiemit ändert man ja den ersten Hauptsatz, der eigentlich nur heißen sollte

$$2 = 2.$$

Ich will den andern Satz vornehmen, er heißt $+ 2 >$ oder $< - 2$

Es sey einmal $+ 2 > - 2$.

In was für einer Absicht kann ich dieses sagen? Etwan deswegen, weil in der $+ 2$ mehr Einheiten als in der $- 2$ befindlich sind. Das würde ein gewaltiger Fehler seyn. Oder

 darum,

darum, weil es widrige Größen sind? Noch viel weniger. Warum sage ich also

$$+2 > -2$$
oder $$+2 < -2?$$

ich habe nicht den geringsten Grund dazu. Ist aber dieses, so darf ich mich auch nicht für den Widersprüchen, die man aus dem Satze

$$+2 = -2$$

und aus diesem $+2 >$ oder < -2 herleileitet, fürchten, sondern ich erfreue mich vielmehr, daß die gar zu bekannten Regeln und die gewöhnlichen Begriffe der positiven und negativen Größen ihre Richtigkeit erhalten. Und es wäre auch wirklich ein bischen zu arg, daß jene tiefsinnigen Männer, ein Newton, ein Bernoulli, ein Euler, ein Kästner, ein Segner, ein Heinsius, ein Hausen und viele andere bewundernswürdige Männer einen Irrthum, der noch dazu auf der Schwelle der Mathematick begangen wird, es gar nicht hätten einsehen sollen. Es wäre zu arg, wenn sie sich jemals der Gleichung bedienet hätten, daß

entweder $+2 = -2$
oder $+2 >$ oder < -2.

Es wäre zu arg, wenn sie geschlossen hätten,

weil $\frac{2}{2} = 1$,
so müßte auch $\frac{+2}{-2} = 1$,

sondern

sondern sie haben vielmehr so geschlossen:

$$\frac{+2}{-2} = -1$$

und also $+2 = -2 \times -1 = +2$.

Sie sagen alle, daß in $+2$ zwo Einheiten, und so auch in -2 zwo Einheiten befindlich sind; aber sie sagen niemals, daß es völlig Einheiten von einerley Art sind. Und was hätte man sonst für eine Ursache zu sagen, daß $+2$ eine positive, und -2 eine negative Größe sey.

Ich könnte leicht noch etliche Erinnerungen hinzufügen, allein die Gränzen, die ich dieser Abhandlung gesetzt habe, erlauben es nicht, daß ich mich in Weitläuftigkeiten einlassen sollte. Und vielleicht haben diejenigen, die ich schon gemacht habe, einen gewissen Grad der Hinlänglichkeit. Dem sey unterdessen wie ihm wolle, so sehe ich es gern, wenn man mich nicht unter diejenigen rechnet, die ihr Absehen mehr auf die versprochne Belohnung und auf die bestimmte Strafe gerichtet haben. Ich begehre mich weder in das eine noch in das andre einzulassen, denn ich habe gar zutrifftige Bedenken, die mich und vermuthlich auch viele andre von dieser gesetzlichen Art zu arbeiten, abgehalten haben. Es würde mit den Regeln der Klugheit streiten, wenn man sich der Gefahr die eine ziemliche Wahrscheinlichkeit hat, da sie noch dazu mit so unbequemen Folgen verbunden ist, mit Vorsatz aussetzen wollte. Diese Gefahr ist so wohl auf der einen als auf der andern Seite. Die Wahrheit wird zu ängstlich gesucht, wenn man sich bey ihrer Erfindung oder bey ihrer Beurtheilung wie die Engelländer aufs Wetten legen soll. Ich habe dahero meine Gedanken ganz frey angezeigt. Kein Gewinnst hat mich dazu ermuntert, und keine ausgesetzte Strafe furchtsam oder bekümmert dabey gemacht.

Hier erkennen nun Ew. Hochedelgebohrnen sowohl die Beschaffenheit dieses Streits, als auch die Ursachen, die mich, einen Antheil daran zu nehmen, bewogen haben. Sie sind scharfsinnig gnug, die Fehler, die dabey begangen werden, vollkommen einzusehen. Sie sind aber auch so gütig, meine Uebereilungen, wenn Sie einige wahrnehmen sollten, mit der Leutseligkeit, die Ihnen eigen ist, zu übersehen. Ich wünsche nichts mehr, als die Ehre zu haben, Ihre Gewogenheit, die ich ungemein hochschätze, zeitlebens zu genüßen.

Sendschreiben

wegen
einiger scheinbaren Schwürigkeiten
bey der
Multiplication und Division der positiven und
negativen Größen

An
Sr. Hochedelgebohrnen
Herrn
Johann Friedrich Stoy
Sr. Königl. Majestät in Polen und Durchlaucht.
in Sachsen hochbestalltem Bergrath,

von
Daniel Gottlob Rudolph,
A. M.

Leipzig,
in Lankischens Buchhandlung, 1757.