Geräth

von

Mauer-Quadranten.

Abhandlung zu Berechnung des Grades der Genauigkeit

mit welcher

auf einen Mauer-Quadranten

nach

John Birds und Georg Friedr. Branders

Theilungs-Methode

die Abtheilung der Theilkreyse vor die 90 und 96 Theilung

vollführt werden kann,

abgefaßt

von

Johann Leonhard Späth,

Mechan. und der mathemat. Wissenschaften Beflissener.

Nebst einer Kupfertafel.

Leipzig,

im Schwickertschen Verlage 1788.

Vorrede.

Die Veranlassung zu gegenwärtiger Untersuchung war eine Reise, welche ich diesen Sommer durch die Nördlichen Provinzen Deutschlands vorgenommen habe. Ich fand nemlich auf dieser Reise Gelegenheit, viele und mancherley kostbare von deutschen und englischen Mechanikern verfertigte mathematische Instrumente zu Gesicht zu bekommen; und unter denselben zogen besonders die großen, vom Hrn. Bird in London verfertigte Mauerquadranten meine Aufmerksamkeit an sich. Ich sahe an denselben nicht nur in einem einzigen Stücke alles gleichsam concentrirt, was der Kunst-Fleis eines geschickten Mechanikers nur immer zu Stande zu bringen vermag, sondern ich mußte auch, aus der Uebersicht des großen Ganzen sowohl, als der Verbindung jeder einzelnen Theile desselben unter einander, den Künstler bewundern, der in seinem Metier, mit einem geschickten Gebrauch der Feile und des Dreh-Stahls, auch die Regeln der Theorie zu verbinden weis.

Ein jeder, der die Wichtigkeit der Arbeit eines Künstlers bey Verfertigung eines dergleichen Mauerquadranten einzusehen vermag, und die Schwierigkeiten kennt, mit welchen der Künstler bey Abtheilung des Theil-Kreyses auf denselben, zu kämpfen hat, wird mir zugeben, daß ein solches Stück jederzeit unter die ersten und vorzüglichsten Arbeiten eines Künstlers gezehlet, oder mich in unserm Termino auszudrücken, als ein Meisterstück desselben angesehen werden darf.

Denn hier ist der Fall, da der Künstler sich den Beyfall des Kenners der Arbeit nicht nur, sondern auch den Beyfall des Astronomen, der ein solches vor ihm verfertigtes Werkzeug zu seinen Beobachtungen gebrauchen soll, zu verdienen sich bemühen muß. Der Beyfall des letztern bleibt vor ihn immer der wichtigste und vorzüglichste: denn er ist ihm ein Beweis, daß er nach statisch- und mechanischen Gründen die Verbindung und Ordnung der Bestandtheile an seinem Quadranten nicht nur richtig getroffen habe, sondern auch, daß seine Theilungs-Methode, nach welcher er den Theil-Kreys desselben abtheilte, gut und approbabel sey.

Der Beyfall berühmter Astronomen, und die außerordentliche Uebereinstimmung der Beobachtungen, welche mit den vom Hrn. Bird verfertigten Werkzeugen angestellt wurden, waren auch die Beweggründe, daß die Commißion der Länge zu London, Hrn. Bird aufforderte, die Art, nach welcher er seine Mauerquadranten abzutheilen pflegte, bekannt zu machen, und ihm deswegen einer Belohnung von 500 Pfund Sterling zu versichern. Hr. Bird ermangelte nicht diesem Verlangen der Commißion zu willfahren, und übergab derselben eine deutliche Beschreibung der Art, seine Quadranten abzutheilen, mit der eidlichen Versicherung, daß in derselben das ächte und wahre Verfahren enthalten sey, nach welchem er einen Mauerquadranten von 8 Fuß auf das Observatorium nach Greenwich, und einige andere abgetheilt habe.

Nach eben diesem Verfahren waren auch diejenigen Mauerquadranten abgetheilt, die noch dermalen vom Hrn. Bird verfertiget auf den Observatorien in Göttingen, Berlin und Manheim aufgerichtet stehen.

Ich hatte mir schon vor einiger Zeit vorgenommen, die Genauigkeit aufzusuchen, mit welcher ein Quadrant nach dieser Methode, die Hr. Bird in seiner Beschreibung The Method of dividing Astronomical Instrumentes anzeigt, abgetheilt werden könnte, um dieselbe mit jener Genauigkeit vergleichen zu können, welche mein theurester Lehrer, Hr. G. F. Brander, bey Abtheilung eines Kreyses nach seiner Methode erreicht, und die mit Hrn. Birds Methode, Quadranten abzutheilen, beynahe eine und eben dieselbe ist: allein andere Arbeiten, die ich vornehmen mußte, hinderten mich immer an der Ausführung meines Vorhabens, bis ich diesen Herbst neuen Anlaß zu Unternehmung dieser Arbeit nahm, bey Gelegenheit, da ich auf dem Observatorio zu Berlin den auffallenden Unterschied bemerkte, zwischen der Abtheilung auf dem Theil-Kreyse des Limbi des vom Hrn. Bird verfertigten Mauerquadranten, und der Abtheilung auf dem Limbo jenes Quadranten, dessen sich Hr. Maupertuis bediente, die Weite von Tornea nach Kittis unter dem Polar-Cirkel zu messen; und gegenwärtige Abhandlung enthält nunmehro das Resultat meiner Untersuchungen. Ich verfolge in dieser Abhandlung das Theilungs-Geschäffte Hrn. Birds nach systematischer Ordnung, und vergleiche dasselbe gleichsam Schritt vor Schritt, mit dem Verfahren Hrn. Branders, bey Abtheilung eines Kreyses, von welchem in einer lateinischen Abhandlung des P. Caesarius Aman, unter dem Titel Quadrans Astronomicus etc. das mehrere nachzulesen ist; ich suche ferner die Fehler auf, welche einem jeden dieser beyden berühmten Künstler, ohnerachtet alles von ihrer Seite bey dem Theilungs-Geschäffte angewandten Fleißes, Sorgfalt und Geschicklichkeit, dennoch zu begehen möglich sind, und untersuche die Folgen, welche diese Fehler in Verbindung mit einander auf die wahre Lage eines auf den Theil-Kreys aufgezeichneten Punctes haben mögen.

Ich habe, was das erstere, nemlich die Fehler anbetrift, die bey dem Theilungs-Geschäffte von Seiten des Künstlers nicht vermieden werden können, dieselbe in drey Haupt-Gattungen eingetheilt; nemlich: in Fehler, welche abhangen, einmal aus physischen Ursachen von der Person des Künstlers, der da theilt, selbst; zweytens von den Eigenschaften der Werkzeuge, mit welchen der Quadrant abgetheilt wird; und drittens von den Eigenschaften der Masse des Quadranten selbst, die mit denselben abgetheilt werden soll.

Unter die Erste Gattung rechne ich alle die kleinen Fehler, die von der Schärfe des Gesichts und des Gefühls des Künstlers abhängen; in soferne derselbe nemlich vermittelst eines Vergrößerungs-Glases einen Punct von gewisser Dimension auf dem Theil-Kreyse noch deutlich sehen kann, und in Rücksicht dergleichen Tiefe der Theil-Puncte auf dem Theil-Kreyse nur bis auf einen gewissen Theil gewis ist.

Unter die Zweyte Gattung dieser Fehler rechne ich alle diejenigen, die bey dem Theilungs-Geschäffte herkommen, von der Dicke der Spitzen des Stangen-Cirkels, von der Ausdehnung der Masse des Chorden-Masstabs, nach welchem die Chorden vor die Normal-Bögen auf dem Theil-Kreyse abgenommen werden, und von der Genauigkeit selbst, mit welcher der Künstler den Masstab und die Nonius-Abtheilung vor denselben aufzeichnen kann.

Unter der Dritten Gattung dieser Fehler begreife ich alle diejenigen, die bey Abtheilung des Theil-Kreyses entstehen von dem verschiedenen Grade der Ausdehnung der Masse des Quadranten und des Chorden-Masstabs, und von der Dichtigkeit und Schnellkraft des erstern.

Auch habe ich es vor meine Absicht dienlich gehalten, die Größe eines jeden Fehlers dieser Art, in Statu absoluto, ohne Verbindung mit einem andern von §. 3 bis §. 6 zu berechnen.

Was Zweytens anbelangt die Berechnung der Folgen der Fehler, welche diese verschiedenen Gattungen der Fehler in Verbindung mit einander auf die wahre Größe eines auf den Theil-Kreys aufgezeichneten Bogens haben mögen, so hielte ich es vor das rathsamste, um diese Untersuchung in der größten Allgemeinheit anstellen zu können, einen Ausdruck zu construiren, nach welchem man die Folgen berechnen könnte, welche diese Fehler auf die Lage eines jeden auf dem Theil-Kreyse aufgezeichneten Punctes in jedem vorkommenden Fall haben mögen.

Da ferner beyde Künstler mit einander darinnen übereinkommen, daß sie gewisse Bögen, die ihnen bey dem Theilungs-Geschäffte die Stelle der Regulatoren vertreten müssen, durch ihre Chorden nach Theilen des Halbmessers des Theil-Risses auf den Theil-Kreys tragen, und aus den Puncten vor diese Bögen andere zwischen dieselbe hineinfallende Puncte durch immediate Bisection bestimmen, so war es mir nothwendig vor eine jede dieser Theilungs-Methoden einen Ausdruck zu construiren, nach welchem man die Genauigkeit berechnen kann, mit welcher der Künstler einen Bogen mediate durch seine Chorde, oder immediate durch Bisection aus den Gränz-Puncten eines schon aufgezeichneten Bogens, auf den Theil-Kreys aufzeichnen kann.

Was den erstern Fall anbetrift, da nemlich die Bögen durch ihre Chorden aufgetragen werden, so legte ich in §. 6 die nemliche Formel zum Grunde, welche ich in meinen Analytischen Betrachtungen *) über den Grad der Genauigkeit bey Abmessung der Winkel und Längen auf dem Felde und Papier, zum Grunde gelegt habe, und zeige von §. 7 bis §. 10, auf was Art die Größe derjenigen Theile aufgesucht werden müsse, vor welche der Künstler in Rücksicht der wahren Länge einer abgemessenen Chorde noch stehen kann; wegen der Schärfe seines Gesichts, der Dicke der Cirkel-Spitzen, der Genauigkeit der Abtheilung seines Chorden-Masstabes und dessen Nonius-Abtheilung, und dem verschiedenen Grade der Ausdehnung der Masse des Masstabes und des Quadranten bey einerley Grad der Wärme; und in §. 12 untersuche die Folgen nach der in §. 6 gegebenen Formel, welche diese Theile, durch welche die Länge der abgemessenen Chorde nur auf einen gewissen Theil gewis bleibt, auf die wahre Größe des aufgezeichneten Bogens selbst, haben mögen.

Vor den Zweyten Fall, da der Bogen immediate durch Bisection aus einem andern bestimmt wird, habe ich die Formel in §. 9. IV. construirt. Es ist dieselbe eben so allgemein, wie die erstere Formel in §. 6 vor die mediate Theilung eines Bogens, und brauchbar die Genauigkeit in Rücksicht der wahren Lage eines Punctes auf dem Theil-Kreys aufzusuchen, der Punct mag nach der ersten Bisection oder nach der zten Bisection eines Fundamentalbogens entstanden seyn: auch sind nach derselben alle in §. 10 angesetzte Ausdrücke vor die Incrementen der Bögen von ganzen Graden berechnet worden.

Ich habe ferner bey Construction der Formel in §. 6 sowohl als der Formel in §. 9 zum Grunde die Voraussetzung gelegt, der möglichst kleinste Fehler, welchen der Künstler bey Auf-

*) Diese analytische Betrachtungen habe vor einiger Zeit, der Monatscher Kunst- und Buchhandlung übergeben, und glaubte, daß dieselbe auf künftige Jubilatemesse im Druck erscheinen könnte: so wie ich aber von Nürnberg vernehme, ist selbige bereits in Arbeit genommen, der Buchdrucker aber zweifelt ob er dieselbe bis auf künftige Messe zu Stande bringen werde.

zeichnung eines Bogens auf den Theil-Kreys begehen kann, sey = 0, in dem Fall, da sich die kleinen Theile, durch deren Verbindung mit einander die Größe eines Bogens auf dem Theil-Kreyse nur bis auf einen gewissen Theil gewis wird, gänzlich unter einander aufgehoben hätten, und die Formeln so eingerichtet, daß sich jederzeit der möglichst größte Werth des Increments aus denselben ergibt, auf welchen der Künstler in Absicht der wahren Größe eines von ihm auf den Theil-Kreys aufgezeichneten Bogens gewis bleibt; und nach dieser Voraussetzung sind auch die Tabelle in §. 12 vor alle einzelne Grade des Quadranten von 1° bis 90° und die Formeln in § 11, 2. berechnet worden, nach welchen man die Genauigkeit untersuchen kann, mit welcher die Nonius-Abtheilung vor die 90 Theilung auf dem Quadranten, kann aufgezeichnet werden.

Nicht weniger sind auch diese beyde Formeln in §. 6 und §. 9 vor die 96 Theilung und deren Nonius-Abtheilung brauchbar.

Uebrigens wird ein Beobachter, der mit Werkzeugen zu thun hat, die auf die Birdische oder Branderſche Methode eingetheilt sind, durch den Gebrauch dieser beyden Formeln in den Stand gesetzt, die Verhältnisse aufzusuchen, welche diejenigen Theile, auf welche der Künstler bey Aufzeichnung eines Bogens auf den Theil-Kreys, in Rücksicht der wahren Größe desselben gewis bleibt, unter einander haben mögen: er kann sich nach Anleitung derselben eine krumme Linie construiren, deren Abscissen nach Arithmetischer Ordnung nach der Anzahl der Grade auf dem Theilkreyse fortgehen, und deren Ordinaten die Incremente oder die kleinen Theile selbsten vorstellt, auf welche der Künstler in Ansehung der wahren Größe eines Bogens, die jeder Abscisse entspricht, gewis ist.

Der Beobachter gewinnt hiedurch den beträchtlichen Vortheil, daß er die Genauigkeit der 90 und 96 Theilung unter einander vergleichen, und bey Beobachtungen jedesmal denjenigen Punct herauswählen kann, der ihm in Ansehung der Abtheilung, auf der 90 oder 96 Theilung, die meiste Genauigkeit in Absicht auf die wahre Größe des gemessenen Winkels verspricht.

Auch kann der Beobachter vermittelst dieser Formeln die Stellen sowohl in der 90 als 96 Theilung ausfindig machen, bey welchen die Genauigkeit bey Aufzeichnung der Puncte in Rücksicht ihrer wahren Lage auf dem Theilkreyse, die größte oder kleinste ist, und seine Masregeln bey Prüfung der Eintheilung seines Quadranten darnach nehmen.

Letztlich kann sich auch der Künstler vom Metier, wenn er etwas mehr als den Gebrauch der Feile und des Drehstahls versteht, aus dieser Abhandlung, Regeln herausziehen, nach welchen er einen Quadranten auf die möglichst vortheilhafteste Art, nach den angezeigten Methoden abzutheilen, in den Stand gesetzt wird.

Sollte diese Untersuchung mir den Beyfall der Kenner erwerben, so soll mir dieselbe Aufmunterung seyn, ähnliche Untersuchungen auch über andere Theilungs-Methoden anzustellen, und auch Formeln zu construiren, nach welchen ein Beobachter den Grad der Genauigkeit untersuchen kann, mit welcher er die Lage eines Punctes, oder die Größe eines Bogens auf dem Theilkreyse zu prüfen im Stande ist; er mag die Prüfung mechanisch mit dem Stangen-Cirkel, oder geometrisch durch Beobachtungen auf dem Lande, oder astronomisch durch Beobachtungen am Himmel vornehmen.

Geschrieben bey meiner Anwesenheit in Leipzig den 1. Dec. 1787.

Inhalt dieser Abhandlung.

Es enthält

Construction der Fundamental-Formel, nach welcher man untersuchen kann, mit welcher Genauigkeit ein Bogen durch Bisection aus einem andern Bogen auf den Theil-Kreys bestimmt werden kann.

§. 10. Untersuchung über die Genauigkeit der immediaten Theilungs-Methode.

§. 11. I. Betrachtungen über die Abtheilung des Nonius oder Vernier vor die 90 Theilung.

II. Untersuchungen, mit welcher Genauigkeit dieser Nonius aufgezeichnet werden kann.

III. Bemerkungen über die Branderſche Methode, Nonius-Abtheilungen auf Glas zu zeichnen.

§. 12. Berechnung des Grades der Genauigkeit, mit welcher die Bögen von einzelnen Graden, von 1° bis 90° auf den Theil-Kreys können aufgezeichnet werden.

I. Betrachtung über die Gesichts-Schärfe } Hrn. Birds.
II. — — — Dicke der Cirkel-Spitzen } Hrn. Birds.
III. Beschreibung seiner Methode den Chorden-Masstab zu theilen.
IV. Eintheilung dieses Masstabs in Bisections-Fächer.
V. Maaße der Chorden vor die Normal-Bögen.
VI. Berechnung der Genauigkeit, mit welcher diejenigen Puncte auf den Masstab könnten aufgezeichnet werden, die bey Abmessung der Chorden vor die Normal-Bögen auf dem Masstab, in den Cirkel fallen.
VII. Dergleichen Berechnung vor die Nonius-Abtheilung.
VIII. IX. X. XI. XII. Berechnung der Genauigkeit, mit welcher Hr. Bird die Länge einer Chorde auf den Theil-Kreys aufzeichnen konnte.
XIII. XIV. XV. Berechnung der Genauigkeit, mit welcher Hr. Bird sowohl als Hr. Brander die Normal-Bögen auf den Theil-Kreys aufzeichnen, und aus denselben die Lage der Zwischen-Puncte vor die Bögen von ganzen Graden von 1° bis 90° auf dem Theil-Kreyse bestimmen kann.

§. 1.

Wenn es darauf ankömmt, den Grad der Genauigkeit bey Eintheilung des Theil-Kreyses auf dem Limbo astronomischer Werkzeuge zu untersuchen, so ist bey dieser Untersuchung der erste Hauptgegenstand dieser: daß man sich bemühe, diejenigen Fehler aufzusuchen, welche ohnerachtet alles von Seiten des Künstlers angewandten Fleises, Vorsicht und Geschicklichkeit dennoch bey dem Theilungs-Geschäffte zu begehen möglich sind: Weis man einmal, nach welchen Classen sich diese verschiedene Arten der Fehler abtheilen, so liegt es zweytens nur noch an dem, daß man die Folgen, welche diese Fehler in Rücksicht auf die wahre Lage der auf den Theilkreys aufgezeichneten Puncte, haben mögen, gehörig entwickle, um den Grad der Zuverläßigkeit in Ansehung der wahren Größe jedes auf dem Limbo aufgezeichneten Bogens beurtheilen zu können. — Es ist leicht zu ermessen, daß die Folgen der Fehler, denen der Künstler bey dem Theilungs-Geschäffte ohnerachtet aller angewandten Vorsicht und Fleiße niemalen ausweichen kann, in Verhältnis der Theilungs-Methode selbst stehen mögen, deren er bey Abtheilung eines Kreysbogens in seine gehörige Anzahl Theile, sich bedient: daß also auch bey Abtheilung eines und eben desselben Kreises, durch die Hand ein und eben desselben Künstlers und mit einerley Werkzeugen, nach verschiedenen Theilungs-Methoden, auch die Genauigkeit in Rücksicht der wahren Lage der aufgezeichneten Theil-Puncte, verschieden seyn müsse.

Aus den verschiedenen Theilungsmethoden, deren sich die Künstler zu Abtheilung der Kreysbögen bedienen mögen, wähle ich zu meiner gegenwärtigen Absicht diejenige aus, deren sich einer der ersten und berühmtestrn Künstler in England, Herr Bird, zu Abtheilung Astronomischer Werkzeuge bedient: berechne den Grad der Zuverläßigkeit derselben, und vergleiche denselben mit jenem, welcher dem Fleiße und Geschicklichkeit eines der berühmtesten Künstler in Deutschland, des Hrn. Branders, bey Abtheilung Astronomischer Werkzeuge entspricht.

Dieser Plan macht es mir nothwendig, ehe ich zu wirklicher Untersuchung der Genauigkeit der Theilungs-Methoden beyder berühmter Künstler schreite, eine kurze Beschreibung von dem Methodo dividendi derselben voranzuschicken.

Ich fange demnach bey Hrn. Birds Theilungs-Methode an, und bediene mir hiezu seiner unter dem Titel: The Method of dividing Astronomical Instrumentes, im Jahr 1767 herausgegebenen Beschreibung, in welcher derselbe das Theilungs-Geschäffte bey Abtheilung eines Quadranten von ungefähr 8 Fußen-Halbmesser auf eine deutliche und systematische Art behandelt.

Aus dieser Beschreibung erhellet, daß Hr. Bird bey Abtheilung dieses Quadranten einen Masstab zum Grunde legt, der auf die Ebene eines meßingnen Planchets durch äußerst feine Theilstriche aufgezeichnet war: jeder Zoll war bey demselben in 10 einzelne Theile abgetheilt, und das ganze Planchet seiner Länge nach in einem Stück Meßing sanft und satt beweglich. Auf der Ebene dieses Stücks, waren 101 Theile des Planchets in 100 gleiche Theile durch Theilstriche abgetheilt, dergestalt, daß wenn das Planchet in demselben verschoben wurde, die Theilstriche auf demselben, die Theilstriche auf dem Planchet sehr genau schnitten. Hr. Bird war vermöge dieser angebrachten, sogenanten Vernier- oder Nonius-Abtheilung im Stande, jede Länge auf diesem Masstab nach Zehentausendtheilen eines Schuhes zu messen.

Auf diesen Masstab nun mas Hr. Bird die Länge der Chorden der Bögen von 60°; 42° 40′; 30°; 15°; 10° 40′; 4° 40′, vor den Halbmesser seines abzutheilenden Quadranten ab, vermittelst sechs Stangen-Zirkel, die zu diesem Gebrauche besonders scharfsinnig eingerichtet waren, und während der Zeit des Theilungs-Geschäfftes in unverrückter Oeffnung erhalten werden mußten, und durchschnitte in Fig. 1.

mit der Chorde	des Bogens von	aus dem Punct	den Theil-Kreys in	und bekam dadurch die Gränzen des Bogens, von
N. a	60°	o	b	60°.
N. b	42° 40′	o	i	42° 40′.
N. c	30°	o	c	30°.
N. d	15°	o	e	15°.
N. e	10° 20′	o	k	10° 20′.
N. f	4° 40′	o	l	4° 40′.
N. c	30°	b	d	90°.
N. d	15°	b	g	75°.
N. e.	10° 20′	g	h	85° 20′.
N. f	4° 40′	d	h	85° 20′.

Nachdem Hr. Bird auf diese Weise die Bögen von 60°; 42° 40′; 30°; 15°; 10° 20′; 4° 40′; 90°; 75°; 85° 20′ auf den Theil-Kreys auf der Ebene des Limbi aufgezeichnet hatte, so gieng er ferner bey Bestimmung der Bögen vor andere Anzahl Grade folgendermaßen zu Werke: Er

bisectirte den Bogen von	aus den Puncten vor vor die Bögen, von	und bekam durch diese Bisection die Bögen von
85° 20′	85° 20′ und 0°.	42° 40′.
42° 40′	42° 40′ und 0°.	21° 20′.
	42° 40′ und 85° 20′.	64°. *
21° 20′	21° 20′ und 0°.	10° 40′.
	21° 20′ und 42° 40′.	32°. *
	42° 40′ und 64°.	53° 20′.
	64° 0′ und 85° 20′.	74° 40′.
10° 40′	10° 40′ und 0°.	5° 20′.
	10° 40′ und 21° 20′.	16°. *
	21° 20′ und 32°.	26°, 40′.
	32° 0′ und 42° 40′.	37°, 20′.
	42° 40′ und 53° 20′.	48°. *
	53° 20′ und 64°.	58° 40′.
	64° 0′ und 74° 40′.	69° 20′.
	74° 40′ und 85° 20′.	80°. *

Er bisectirte den Bogen von	aus den Puncten vor die Bögen, von	und bekam durch diese Bisection die Bögen von
5° 20′	5° 20′. und 0°.	2° 40′.
	5° 20′ und 10° 40′.	8° 0′. *
	10° 40′ und 16°.	13° 20′.
	16° und 21° 20′.	18° 40′.
	21° 20′ und 26° 40′.	24° 0′. *
	26° 40′ und 32°.	29° 20′.
	32° und 37° 20′.	34° 40′.
	37° 20′ und 42° 40′.	40°. *
	42° 40′ und 48°.	45° 20′.
	48° und 53° 20′.	50° 40′.
	53° 20′ und 58° 40′.	56°. *
	58° 40′ und 64°.	61° 20′.
	64° und 69° 20′.	66° 40′.
	69° 20′ und 74° 40′.	72°. *
	74° 40′ und 80°.	77° 20′.
	80° 0′ und 85° 20′.	82° 40′.

So weit kommt Hr. Bird mit seiner Abtheilung nach der fünften Bisection. Nun fährt er fort mit Bisectiren so lange, bis der Bogen von 85° 20′ in seine gehörige Anzahl Theile; als im gegenwärtigen Fall in $85\frac{1}{3} \times 12$ oder 1024 Theile nach der zehenden Bisection abgetheilt ist.

§. 2.

Nachdem bereits von Hrn. Birds Verfahren bey Eintheilung Astronomischer Werkzeuge das Nöthige angezeigt habe, so ist noch übrig, auch von der Branderschen Theilungs-Methode so viel als zur gegenwärtigen Absicht erforderlich seyn möchte, hier anzuführen.

Ich benütze hier jene Abhandlung, welche der P. Caesarius Amman im Jahre 1770 unter dem Titel Quadrans Astronomicus etc. herausgegeben. Es zeiget sich aus derselben, daß Hr. Brander bey Eintheilung dieses Quadranten einen Maßstab zum Grunde gelegt habe, der auf die Ebene eines meßignen Planchets nach Duodecimal-Linien des Pariser Maaßes abgetheilt war: an diesem Planchet streifte ein Index, welcher vermittelst einer feinen Mikrometer-Schraube sanfte vor- und rückwärts geführet werden konnte. Von dieser Schraube maaßen 36 Gänge genau 12 pariser Duodecimal-Linien; ein Cadrans an derselben zeigte 0, 01 eines Umgangs; und Hr. Brander konnte also nach diesem Maßstab eine jede Länge auf $\frac{1}{3600}$ eines Zolles messen.

Auf diesem Maßstab nun nahm Hr. Brander die Länge der Chorden der Bögen von 60°; 42° 40′; 30°; 25° 20′; 21° 20′; 15°; 10°; 5°; 4° 40′ mit Stangen-Cirkeln ab, und durchschnitte in Fig. 1.

mit der Chorde	des Bogens von.	aus dem Punct	den Theil-Kreys in	und bekam dadurch die Gränzen des Bogens von
N. a	60°	o	b	60°.
N. b	42° 40′	o	i	42° 40′.
N. c	30°	o	c	30°.

mit der Chorde	des Bogens von	aus dem Punct	den Theil-Kreys in	und bekam dadurch die Gränzen des Bogens von
N. g	25° 20′	o	n	25° 20′.
N. h	21° 20′	o	q	21° 20′.
N. d	15°	o	e	15°.
N. k	10°	o	v	10°.
N. v	5°	o	w	5°.
N. f	4° 40′	o	l	4° 40′.
N. c	30°	b	d	90°.
N. g	25° 20′	b	h	85° 20.

Uebrigens bisectirt Hr. Brander den Bogen von 85° 20′ auf die nemliche Art wie Hr. Bird. Hr. Brander hatte nach dieser Theilungs-Methode außer diesem Quadranten, der noch dermalen auf dem Observatorio zu Ingolstadt sich befindet, und in seinem Laboratorio im Jahre 1768 vollendet wurde, auch einige andere schon vorhero, und besonders auch einen Azimuthal-Quadranten nach München, abgetheilt: um so mehr erfreuete es ihn, da er einige Jahre nachero Hrn. Birds oben angezeigte Beschreibung seiner Theil-Methode zu Gesicht bekam, daß diese seine Theilungs-Methode mit der Theilungs-Methode dieses berühmten Mechanikers so genau überein kam.

§. 3.

Nachdem ich von dem Verfahren beyder Künstler bey Abtheilung eines Kreys-Bogens so viel als zu meinem gegenwärtigen Plan erforderlich war, angeführet habe, so werde nunmehro zu wirklicher Ausarbeitung desselben schreiten können. Da ich nach demselben die Aufsuchung derjenigen Fehler, welchen der Künstler bey dem Theilungs-Geschäffte nicht ausweichen kann, zum ersten Gegenstande gewählt habe, so werde ich dieselbe in verschiedene Classen eintheilen, und mich bemühen einige Analytischen Ausdrücke zu construiren, nach welchen man berechnen kann, in wieferne ein Künstler bey Aufzeichnung eines Bogens von jeder Anzahl Grade auf den Theil-Kreys, in Absicht der wahren Größe dieses Bogens gewis seyn könne.

Was nun vors erste anbetrift die Gattung der Fehler, die einer jeden Theilungs-Methode gleichsam als ein nothwendiges Uebel eigen sind, so theile ich dieselbe ab in folgenden Classen:

A Fehler, die ohnerachtet alles von Seiten des Künstlers angewandten Fleißes, Vorsicht und Geschicklichkeit, von ihm selbsten aus Physischen Ursachen herrühren.

B Fehker, die von der Construction und Eigenschaften der Werkzeuge abhängen, mit welchen der Theil-Kreys abgetheilet wird.

C Fehler, die von den Eigenschaften des Metalls abhängen, auf welchem der Theil-Kreys gezogen ist, der abgetheilt werden soll.

Unter die erste Classe A der Fehler, zähle ich alle diejenige, die von der Schärfe des Gesichts, und dem Grade des Gefühls des Künstlers abhängen, und lege bey Untersuchung der jedesmaligen Größe desselben, was erstern Fall anbelangt, den Erfahrungs-Satz zum Grunde, daß ein Gegenstand unserm Auge zweymal undeutlich zu werden anfängt: einmal, wenn derselbe dem Auge zu nahe gebracht; und zweytens wenn derselbe von dem Auge etwas zu weit entfernt wird. Zwischen diese beyde Gränzen nun fällt die Weite des deutlichen Sehens, die man allgemein die Gesichtsweite oder Gesichtsferne nennt. Die Gesichtsweite will ich ein vor allemal mit γ bezeichnen.

Ein jeder Punct α, der in dieser Gesichtsweite γ noch deutlich gesehen wird, nimmt in dem Auge des Beobachters einen gewissen Winkel φ ein; und seine Dimension ist in dem Auge des Beobachters gleichsam ein Ens minimum, das er auf einer Ebene in der Gesichtsferne γ noch deutlich bemerken kann, und ist gleich einem Punct von der Größe γ tang φ: oder weil in diesem Falle φ immer nur sehr klein ist, so ist auch $\alpha = \gamma . \varphi$; und $\varphi = \frac{\alpha}{\gamma}\, 206264$.

I. Nun stelle in Fig. 2, aα den Punct α und ab eine Linie auf einer Ebene äußerst fein gezogen vor: die Länge dieser Linie ab aber, soll der Künstler mit einem Zirkel abnehmen, dessen Spitzen ich mathematischen Puncten indessen gleich annehme; so wird folgendes sich ereignen. Einmal: Wenn der Künstler den Cirkel von a nach b öffnet, und die Spitze desselben in a einsetzen will, bleibt er in Ansehung des wahren Standes der Spitze nur bis auf den Theil αa gewis, ob dieselbe in der Gränze der Linie ab in a genau stehe oder nicht, weil er einen Punct α von kleinerer Dimension als der Punct αa, nicht mehr in der Gesichtsferne γ deutlich sehen kann. Eben dieser Fall ereignet sich zweytens auch, wenn der Künstler die andere Spitze in die Gränze b der Linie ab einsetzen will, um den Abstand dieser zweyen Gränzen a b zwischen die Spitzen des Cirkels zu fassen: der Künstler bleibt also in diesem Falle ungewis, ob die Länge der abgemessenen Linie ab, wirklich

$$\text{gleich ab} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{matrix} ab + a\alpha + b\beta \\ ab + a\alpha - b\beta \\ ab - a\alpha + b\beta \\ ab + a\alpha - b\beta \end{matrix}\right\} \text{ gleich sey.}$$

II. Aus diesem folgt ferner, daß wenn an dieser Linie ab ein Index x vor- und rückwärts könnte geschoben werden, und derselbe auf dieser Linie den Theilstrich h abschneiden sollte, der Beobachter in Ansehung des wahren Standes dieses Indicis, der hier z. E. den ersten Theilstrich einer Nonius-Abtheilung vorstellen mag, an dem Theilstriche h nur auf die Dimension a$\alpha = \alpha$ gewis seyn könne, wenn auch beyde Theilstriche sowohl der Theilstrich h als der Theilstrich x des Indicis genau einerley Breite hätten, und also das Augenmaas hierbey gar nicht in Betracht gezogen werden dürfte.

II. Bedienet sich der Künstler eines Vergrößerungs-Glases, das ihm jeden Punct μ mal vergrößert, so ist er auch in Rücksicht des wahren Standes des Indicis x auf dem Theilstrich h, μ mal gewisser; er bleibt nemlich in Ansehung des wahren Standes dieses Indicis auf dem Theilstrich h, bis auf den Theil $\frac{\alpha}{\mu}$ den ich künftig mit α° bezeichne, gewis.

IV. Außer der Schärfe des Gesichts, hat auch noch der mehr oder mindere Grad des Gefühls des Künstlers bey Eintheilung der Kreys-Bögen Einfluß auf die wahre Größe auf denselben augezeichneter Bögen, aus folgenden Gründen: Es sey in Fig. 3 die Linie ab die Länge einer Chorde die einem Bogen ψ, und bc die Länge einer Chorde, welche einem Bogen u auf dem Theil-Kreyse zukommt. Der Künstler trägt dieselbe auf die Ebene des Limbi in den Theil-Kreys abc, indem er dieselbe so genau als möglich mit dem Stangen-Cirkel faßt, die eine Spitze desselben in a setzet und die andere in b etwas sanfte durch einen senkrechten Druck mit dem Finger auf den obern Theil des Gehäuses, in welchem diese Spitze befestiget ist, in die Maße des Limbi eindrücket: Es hängt also die Tiefe des Puncts a und des Puncts b in dem Theil-Kreyse von dem mehr oder minder gleichen Druck des Fingers, und dieser Druck von dem Grad des Gefühls des Künstlers ab.

Nun aber nehme ich an, der Künstler wisse aus vielfältiger Erfahrung, daß er bey Aufzeichnung zweyer Puncte nach eben besagter Weise, in den Theil-Kreys in Rücksicht der gleichen Tiefe derselben bis auf den Theil $b\beta$ gewis seye, und berechne ferner die Folgen, welche blos allein aus dieser Ursache in Absicht auf die wahre Größe der auf dem Theil-Kreyse aufgezeichneten Chorden entstehen. Gesetzt, es soll aus dem Puncte a des Theil-Kreyses die Chorde ab des Bogens ψ nach b getragen werden, und aus dem Punct b die Chorde bc des Bogens u, nach c. Bey dem Punct b ist der Künstler um den Theil $b\beta$ ungewis, ob die Tiefe des Puncts b genau der Tiefe des Punctes a gleich sey oder nicht: ist dieselbe der Tiefe des Puncts a gleich, so ist die Chorde ab so genau, als sie mit dem Cirkel abgenommen worden, auch auf den Theil-Kreys gezeichnet: ist diese Tiefe des Puncts b aber um den Theil $b\beta$ tiefer als die Tiefe des Puncts a, so ist eigentlich die Weite von a nach β das Maas der abgemessenen Chorde, vor welches er aber den Abstand der Puncte a und t auf dem Theil-Kreyse annimmt. Nun ist aber der Abstand des Puncts t von a kleiner als die Länge der Chorde, wie sie mit dem Cirkel abgenommen worden, um den Theil $a\beta - at$; und der Künstler bleibt also aus diesem Grunde bey Aufzeichnung der Länge der Chorde des Bogens ψ um den Theil $a\beta - at = bt$ ungewis.

Ferner, trägt er das Maas der Chorde des Bogens u aus dem Punct b mit dem Stangen-Cirkel in den Theil-Kreys nach c. Bekömmt der Punct c mit dem Punct b einerley Tiefe, $c\gamma$, so ist der Abstand $\beta\gamma$ beyder Puncte β und γ in der Maße des Limbi, auch gleich der Länge der Chorde des Bogens u, gleich bc. Aber eben in dieser Sache ist der Künstler nur bis auf den Theil $b\beta$ gewis. Ist der Punct b um diesen Theil $b\beta$ tiefer als der Punct c, so ist βo gleich bc das Maas der Chorde des Bogens u, und er schneidet den Theil-Kreys aus dem Punct β mit der Länge der Chorde des Bogens u in dem Punct o, der von dem Punct c um die Weite $oc = \beta c - bo$ entfernt ist.

Es ist also in diesem Falle, die Summe der Chorden-Längen vor beyde Bögen ψ und u, so wie sie in der Maße des Limbi eingestochen werden $a\beta + \beta o$, gleich $ab + bc$, allein der Punct b als die Gränze des Bogens ψ fällt um den Theil der Chorde $a\beta - bt$, zu nahe gegen den Punct a, und der Gränz-Punct o des Bogens u fällt um den Theil oc zu nahe an den Punct b, es wird also hierdurch der Bogen $\psi + u$ auf dem Theil-Kreyse um den Theil oc zu klein aufgezeichnet.

Ist der Halbmesser des Theil-Kreyses gleich r, so ist hiedurch der Bogen $\psi + u$ um einen Winkel von $\frac{oc}{r}\,206264$ Secunden zu klein aufgezeichnet. Dieser Winkel heiße λ.

Es ist aber $oc = \beta c - bo = bc - ob.$

$$ob = \sqrt{(bc^2 - b\beta^2)};\ \text{demnach}$$

$$oc = bc - \sqrt{(bc^2 - b\beta^2)};\ \text{und}$$

$$\lambda = \frac{(bc - \sqrt{(bc^2 - b\beta^2)}).\ 206264}{r},$$

Dieser Ausdruck vor oc läßt sich noch sehr abkürzen, wenn man annehmen darf, daß der Theil βb zur Länge der Chorde bc ein sehr großes Verhältnis habe.

Es ist nemlich auch $\sqrt{(bc^2 - b\beta^2)} = bc.\sqrt{\left(1 - \frac{b\beta^2}{bc^2}\right)} = bc\left(1 - \frac{b\beta^2}{bc^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Setzet man nun den Quotienten $\frac{b\beta^2}{bc^2} = p$, und den Exponanten $\frac{1}{2}$ gleich m, so ist allgemein

$$\left(1 - \frac{b\beta^2}{bc^2}\right)^{\frac{1}{2}} = (1 - p)^m = 1 - mp + \frac{m(m-1)}{1.2}p^2 - \frac{m.(m-1)(m-2)}{1.2.3}p^3 \text{ etc.}$$

weil aber der Voraussetzung gemäs bβ gegen bc sehr klein ist, der Bruch $\frac{b\beta^2}{bc^2}$ also einen sehr kleinen Werth haben muß, so kann man füglich die höhern Potenzen desselben gänzlich außer Betracht lassen: so würde also

$$oc = bc - bc(1 - mp) = -bc \times mp = -\frac{b\beta^2}{2.bc.}; \text{ und}$$

$$\lambda = -\frac{b\beta^2 \times 206264}{2 \times r \times bc.}$$

§. 4.

Unter die zweyte Classe der Fehler, die dem Künstler bey Abtheilung eines Kreysbogens ohnerachtet aller angewandten Vorsicht und Fleiße, demohngeachter zu begehen möglich sind, zähle ich alle diejenigen, die von der Construction und Eigenschaften der Theilungs-Werkzeuge herkommen mögen.

Was erstlich anbelangt die Gattungen der Theilungs-Werkzeuge selbsten, so ist aus §. 1 und §. 2 zu ersehen, daß der Künstler bey Abtheilung eines Kreyses nur zweyerley Gattungen derselben, nemlich eines Masstabs und einiger Stangen- und Feder-Cirkel benöthiget seye.

Um nun die Größe der Fehler der zweyten Classe aufsuchen zu können, so setze ich indessen die wirklich unmögliche Bedingung zum voraus, daß auf diesem Masstab Theile einerley Art, gänzlich genau einander gleich seyn, und also gleich große Räume einnehmen: ich nehme ferner an, die Construction der Stangen-Cirkel sey so getroffen, daß von der Festigkeit der Gehäuse derselben, von der Festigkeit der in diesen Gehäusen eingestellten stählernen Spitzen, von dem zu geringen Grad der Härte dieser Spitzen, und der Biegsamkeit der Stange des Cirkels gar keine Fehler bey Abtheilung eines Kreyses mit demselben zu befürchten sind.

Fast sollte man glauben, daß es einem Künstler, der einen Kreys vermittelst solcher Theilungs-Werkzeuge abtheilt, wenn er noch überdas Vorsicht und Genauigkeit von Seiten seiner mit dem Gebrauche derselben verbindet, fast nicht möglich seyn könnte, Fehler bey Abtheilung des Kreyses zu begehen, welche die Construction und Eigenschaften dieser Theilungs-Werkzeuge zum Grunde hätten. Allein wenn man erwäget, daß sich unter dieser Gattung von Fehlern, diejenigen Fehler aufsuchen lassen, welche von der Dicke der Cirkel-Spitzen des Stangen-Cirkels, von der Ausdehnung seiner Stange nach dem Grade der Feuchtigkeit, und von der Ausdehnung und Zusammenziehung des Metalls, auf dessen Ebene der Masstab getheilt ist, nach der Temperatur der Luft, herrühren, so wird man bald zugeben, daß aus diesen Ursachen Fehler bey Abtheilung eines Kreyses entstehen können, deren Größe der Künstler durch Vorsicht und Fleiß verringern, das Daseyn derselben aber niemalen gänzlich vertilgen kann.

I. Ich nehme unter der Gattung dieser Fehler, zuerst diejenigen vor, die bey dem Theilungs-Geschäffte von der Dicke der Cirkel-Spitzen herkommen, und verfahre bey Bestimmung der Größe derselben folgendermaßen:

Es stelle in Fig. 4 die Linie ab die Länge einer Chorde vor, welche mit dem Stangen-Cirkel abgenommen werden soll: mn sey die Dicke des äußersten Theils der Spitze des Stangen-Cirkels. Wird diese Spitze in den End-Punct a der Linie ab gesetzt, so deckt sie auf derselben einen Theil $a\alpha$ zu der ihrer Dicke mn gleich ist.

Wenn nun die Gesichts-Schärfe des Künstlers von so hohem Grade wäre, daß es ihm möglich wäre einen Punct von unendlich kleiner Dimension noch deutlich zu bemerken, so würde derselbe in Ansehung des wahren Standes der Cirkel-Spitze auf dem Gränz-Theil a der Linie ab nur bis auf den Theil $a\alpha$ gewis seyn, den dieselbe auf der Linie ab zudeckt. Eben dieses ist auch der Fall bey dem Gränz-Punct b.

Der Künstler würde also in diesem Fall, blos allein wegen der Dicke der Cirkel-Spitzen ungewis bleiben, ob der Abstand der äußersten Theile seiner Cirkel-Spitzen genau der Länge der Chorde ab, oder einer Länge $\left\{\begin{matrix} ab + a\alpha + b\beta \\ ab - a\alpha - b\beta \\ ab - a\alpha + b\beta \\ ab + a\alpha - b\beta \end{matrix}\right\}$ gleich seye.

Bezeichnet man nun die Dicke der Spitze eines Stangen-Cirkels mit dem Buchstaben β, und setzt voraus, das beyde Spitzen genau einerley Dicke haben, so ist in diesem Falle der Fehler, den der Künstler bey Abnehmuug der Länge einer Chorde von einem Masstab, blos allein wegen der Dicke der Cirkel-Spitzen begehen kann, gleich $\pm(\beta + \beta)$.

II. Ich begreife ferner unter den Fehlern der zweyten Classe, alle diejenigen, die von der Ausdehnung und Zusammenziehung der Theilungs-Werkzeuge, nach dem veränderlichen Grad der Wärme, Trockenheit und Feuchtigkeit der Luft abhängen. Es ist eine durch die tägliche Erfahrung sich bestätigende Sache, daß eine jede Masse von Metall mit einer Eigenschaft begabet sey, vermöge deren dieselbe einem gewissen Grad von Pyrometrischer Ausdehnung oder Zusammenziehung fähig ist, nach dem zu- oder abnehmenden Grad der Wärme in unserer Atmosphäre. Nun ist aber in unserer Himmels-Gegend der kälteste Augenblick des Tages beym Aufgang der Sonne, wenn nemlich das Wetter einförmig ist. Von diesem Augenblick an, da die Wärme unserer Atmosphäre die geringste ist, fängt dieselbe allmählig mit dem Zunehmen der Tages-Stunden zu wachsen, und wir haben an solchen Tagen den wärmsten Augenblick zwischen 2 und 3 Uhr zu erwarten: von dieser Zeit an, nimmt die Wärme mit dem Abnehmen der Tages-Stunden auf den Abend wieder nach und nach ab.

Da nun die Masse, auf welcher der Masstab abgetheilt ist, nach welchem die Chorden auf den Theil-Kreys getragen werden, eine Masse von Metall ist, so folgt aus dieser Eigenschaft der Metalle, daß auch seine Länge, und mit derselben die Länge jeder Chorde auf demselben, nach diesem veränderlichen Grade der Wärme zu- oder abnehmen müsse.

Außer dieser Veränderung, welche die Länge des Masstabs von der Veränderung der Wärme der Atmosphäre leidet, kommt hier auch noch ein anderer Umstand in Betracht, durch welchen die Länge des Masstabs leiden kann; nemlich der Einfluß, welchen die ihm von der Person des Künstlers durch Ausdünstung und Aushauchung mitgetheilte Wärme auf ihn haben mag. Dieser Einfluß ist wirklich beträchtlicher als man glauben sollte. Denn es bestätiget die Erfahrung, daß die Wärme, welche einem verschlossenen Zimmer durch die Gegenwart von 3 oder 4 Personen mitgetheilt worden, beynahe derjenigen gleich komme, welche durch die Sonne bewirkt wird.

Es bestätiget sich ferner durch die Erfahrung, daß die Bestandtheile des Holzes ein gewisses Hygrometrisches Bestreben äußern, nach dem Grade der Feuchtigkeit und Trockenheit unserer Atmosphäre entweder in die Länge sich zu ziehen, oder in die Kürze sich zu begeben.

Nun aber zeigt sich in unserm Erd-Striche der Augenblick der größten Feuchtigkeit, eine Stunde nach Sonnen-Aufgang, wenn nemlich das Wetter gleichförmig ist, und nimmt nach einem gewissen Verhältnis mit dem zunehmenden Grade der Wärme des Tages ab, und wir haben in Sommertagen, wenn nicht Local-Umstände eine Abänderung machen, gemeiniglich zwischen 3 und 4 Uhr den trockensten Augenblick; in Wintertagen aber zwischen 2 und 3 Uhr des Tages.

Aus diesen Erfahrungen lässet sich also auch schließen, daß die Stange eines Stangen-Cirkels, deren Masse gemeiniglich Holz ist, eben sowohl diesen Eigenschaften ausgesetzt sey, und also auch die Länge einer Chorde, nach welcher die Spitzen des Stangen-Cirkels bey einem gewissen Grade der Feuchtigkeit und Wärme der Atmosphäre, gestellt sind, nach dem zu- oder abnehmenden Grade der Feuchtigkeit bey einerley Grad der Wärme auch größer oder kleiner werden müsse.

a. Um aber zu zeigen, in wieferne aus dieser Beschaffenheit der Umständen, Fehler bey dem Theilungs-Geschäffte eines Kreyses entstehen können, so nehme ich einmal an, der Masstab, nach welchem die Chorden auf den Theil-Kreys getragen werden, sey zu einer Zeit von dem Künstler aufs sorgfältigste verfertiget worden, da das Thermometer auf n Graden über dem Eis-Puncte stunde: die Linie ab Fig. 5 sey in diesem Zustande die Länge einer Chorde, die bey dem Halbmesser r einem Bogen c zugehöret. Die Masse des Masstabs sey A, und verändere sich um w Theile ihrer Länge, wenn der Stand des Thermometers um einen Grad steigt oder fällt; w ist immer kleiner als 1. Nun fange der Künstler an, bey einer Temperatur von m Graden, wo $m > n$ ist, und $m - n = d$, den Kreys auf seinem Quadranten abzutheilen, und nehme mit dem Stangen-Cirkel die Länge der Chorde des Bogens c ab, um dieselbe auf den Theil-Kreys überzutragen.

Wäre nun $m = n$, also die Temperatur der Luft in diesem Augenblick, gleich der Temperatur, unter welcher er den Masstab abtheilte, so würde das Maas dieser Chorde in beyden Fällen ein und eben dasselbe seyn, wenn nicht die Länge des Masstabes eine Veränderung erlitte, durch die Wärme, welche demselben von der Person des Künstlers durch die Ausdünstung und Aushauchung mitgetheilt wird. Durch diese Wärme steige das Thermometer um p Grade: es würde also in diesem Falle die Länge der Chorde ab um w $(ab \times p.)$ Theile größer als unter der Temperatur n seyn.

Aber der Voraussetzung gemäs fängt der Künstler das Theilungs-Geschäffte an, da die Temperatur der Luft m Grade, also um d Grade größer als die Temperatur n ist; es muß also auch in diesem Falle die Länge der Chorde ab zunehmen um $ab \times (p + d)$ w. $= \delta, = b\beta$.

b. Wäre m gegen n negativ, also das Theilungs-Geschäffte zu einer Zeit vorgenommen, da die Temperatur der Luft m Grade unter dem Punct n war, so ist $- m - n = d$; und $\delta' = ab \times (p - d)$ welcher Fall aber nicht wohl vorkommen wird.

Aus diesem folgt, daß wenn die Masse des Limbi, auf welchem der Theil-Kreys gezogen ist, eine gänzlich *constante* Masse wäre, die gar keiner Ausdehnung und Zusammenziehung durch einen mehr oder mindern Grad der Wärme fähig wäre, der Künstler bey Aufzeichnung der Länge dieser Chorde auf den Theil-Kreys wirklich einen Fehler von der Größe δ bey diesen Umständen begehen könnte.

§. 5.

Jetzt ist noch übrig die Gattung derjenigen Fehler zu untersuchen, die einem Künstler bey Eintheilung eines Kreys-Bogens, ohnerachtet alles von ihm angewandten Fleißes, zu begehen möglich sind, und die ihren Grund in den Eigenschaften der Masse haben, auf welcher der Theil-Kreys, der getheilt werden soll, eingezogen ist.

I. Ich zähle vors erste unter die Gattung dieser Fehler, alle diejenigen Fehler, die von der Ausdehnung und Zusammenziehung der Masse des Limbi nach dem verschiedenen Grade der Wärme entstehen, und berechne die Größe derselben folgendermaßen:

Es sey die Masse des Limbi, B, die sich um k Theile ihrer Länge ändert, wenn sich der Stand des Thermometers um einen Grad ändert; auch ist jederzeit $k < 1$.

Die Masse A des Masstabs, auf welchem die Chorden abgenommen werden, sey constans, und ab in Fig. 6 stelle die Länge der Chorde eines Bogens ψ und bd die Länge einer Chorde eines Bogens u vor.

Die Chorde ab werde aus dem Anfangs-Puncte a der Eintheilung des Limbi unter der Temperatur von ε Graden nach dem Punct b auf den Theil-Kreys getragen: Nach Verlauf einer Zeit t, in welcher der Thermometer um ω Grade gestiegen, nimmt der Künstler die Chorde des Bogens u von dem Masstab ab, und durchschneidet mit derselben aus dem Punct b den Theil-Kreys in d: es fragt sich nunmehro, wie groß möchte bey diesen Umständen der Fehler seyn, der von der Ausdehnung des Limbi vor diesen Fall, entstehet?

Es hängt einmal die Größe des Bogens ψ von der Länge der Chorde ab, und die Größe des Bogens u von der Länge der Chorde bd, folglich die Größe des Bogens $\psi + u$ von der Summe der Längen der Chorden ab + bd ab.

Nun wird aber die Chorde ab um den Theil $b\beta$ länger, indem sich die Masse B bey der zunehmenden Wärme von ω Graden um den Theil $k.\ ab \times \omega$ verlängert. Während daß also der Künstler die Chorde bd aus dem Punct b nach d überträgt, ist der Punct b in Rücksicht gegen den Punct a bey der Temperatur von $\varepsilon + \omega$ Graden um $b\beta$ weiter entfernt, als unter der Temperatur ε; folglich ist es eben so viel, als hätte der Künstler die Chorde bd aus dem Punct β nach g übertragen, er fehlet also in diesem Falle um den Theil $b\beta$ der Chorde ab, folglich um einen Winkel $\frac{b\beta}{r} \times 206264$ oder $k \frac{(ab \times \omega}{r} . 206264$ Secunden, wenn der Halbmesser des Theil-Kreyses gleich r ist.

II. Unter die Fehler der dritten Classe rechne ich ferner diejenigen, die von der Schnell-Kraft der Masse, aus welcher das Corpus des Quadranten, der abgetheilt werden soll, zusammengesetzt ist, herrühren. Gewöhnlich bestehet der Limbus eines Quadranten in seinem ersten Zustande aus einem meßingnen geraden Linial, oder Schiene, deren Bestandtheile durch die Gewalt des Hammers, oder der Walze in eine Lage gegen einander gebracht werden, daß das ganze Linial sich in eine Richtung ziehet, die mit dem Krümmungs-Bogen des Theil-Kreyses, der darauf gezogen werden soll, parrallel lauft. Mit diesem Limbo werden andere meßingne gerade Schienen untereinander und gegeneinander verbunden, so daß alles zusammen ein Corpus ausmacht, das man einen Quadranten heißt.

Nun aber erweiset sich aus der Erfahrung, daß eine jede Masse Metall, deren Theile durch den Hammer können getrieben werden, eine gewisse Kraft äußere, aller Beugung zu widerstehen, und wenn sie wirklich durch eine äußere Kraft gebogen worden, in ihre vorige Lage wieder zurückzukehren. Diese Kraft, welche man die Schnell-Kraft nennt, ist in Verhältnis der Dichtigkeit und absoluten Festigkeit des Metalles. Da nun das ganze Corpus des Quadranten aus Meßing oder Kupfer, also aus einem Metalle bestehet, das mit einem ziemlichen Grade von Elasticität auch in seinem natürlichen Zustande begabet ist; da ferner dieses Corpus vor und bey seiner Construction durch die Gewalt des Hammers, der Walze, des Hobels und der Feile, noch über das zu einem sehr ansehnlichen Grade der Dichtigkeit gebracht wird, so lässet sich ganz natürlich aus dem allen schließen, daß ein Quadrant, der aus dergleichen meßingnen Schienen zusammengesetzt ist, einen sehr beträchtlichen Grad der Elasticität haben müsse.

Ferner ist es bey Verfertigung eines Quadranten so wohl als eines jeden andern Werkzeugs, mit welchem Winkel gemessen werden, das erste Augenmerk eines Künstlers der sich mit Verfertigung dergleichen Werkzeuge abgibt, die Ebene desselben so viel möglich plan zu machen: man hat auch wirklich mancherley Vortheile und Regeln, nach welchen diese Absicht mit ziemlicher Genauigkeit erreicht, und die Spannung der Theile des ganzen Corpus ins Gleichgewicht gebracht wird: alleine noch ist es weit dahin, daß man dieses allgemein vor eine jede Richtung, in welcher dasselbe gebracht wird, behaupten könnte. Die Richtung, nach welcher die Künstler die Ebene eines Quadranten reguliren, ist fast durchgehends die horizontale Richtung selbst, oder wenigstens eine andere, die von derselben nicht viel abweicht. Während dieser Arbeit ruhet das ganze Corpus des Quadranten auf der Ebene eines genau applanirten Tisches oder Gestelles. In dieser Lage müssen sich zwar wohl die Bestandtheile des ganzen Corpus durch die Kraft des Arms und der Hand des Künstlers nach einer Richtung beugen, die ihm derselbe geben will; allein in dem Augenblick, da das Corpus aus dieser Lage gebracht, und in seinem Schwerpunct oder andern Puncten nach einer Richtung aufgehangen wird, die mit dem Horizont einen Winkel macht, sind diese Theile sich selbsten wieder überlassen, und das ganze Corpus wird sich in eine Ebene ziehen, in welcher das Gleichgewicht, in Rücksicht der Spannung der Theile gegen einander in demselben hergestellt ist.

Um aber zu zeigen, in wieferne aus dieser Ursache Fehler in Absicht auf die wahre Größe auf die Ebene des Limbi aufgezeichneter Bögen entstehen können, setze ich folgenden Fall.

Es sey oncampo die Ebene eines Mauerquadranten, der in den Puncten x und y an der Wand einer Mauer nach verticaler Richtung hängt.

onzdp sey eine Vertical-Ebene durch die Ebene onmp, als einen Theil der Ebene des Quadranten.

Es sey ferner wups eine Ebene, nach welcher die Ebene des Quadranten bey seiner Verfertigung regulirt, und in dieser Ebene auf einem Gestelle nach allen seinen Theilen flach auf demselben liegend, abgetheilt worden. a und b sind zwey Theil-Puncte auf dem Theil-Kreyse, welche die Gränzen eines Bogens k auf demselben vorstellen: es fragt sich, in wieferne bey dieser so genannten windschiefen Ebene des Quadranten die Puncte a und b, wenn auch ihre Lage auf dem Theil-Kreys gänzlich die wahre wäre, demohngeachtet nicht die wahre Gränzen des Vertical-Winkels k vorstellen können?

Wäre die Ebene des Quadranten die nemliche geblieben, in dem Augenblick, da er in den Puncten x und y aufgehangen ward, die er hatte, als er auf dem Gestelle von der Hand des Künstlers nach der Ebene puwsp regulirt wurde, so würden alle Puncte desselben, o, n, c, b, a, m, p auch in ein und eben derselben Vertical-Ebene ozdp sich befinden: allein so hat sich der Voraussetzung gemäs die Ebene puwsp seines ersten Zustandes aus irgend einem Grunde, der sowohl in der Eigenschaft der Materie des Quadranten, als auch in der Construction desselben bey Verbindung der Streb-Schienen unter und gegen einander liegen mag, in die windschiefe Ebene oncbampo gezogen: die Puncte o, n, m, p. desselben liegen noch in der Vertical-Ebene ozdp; aber die gebogene Ebene durch die Puncte n, c, b, a, m, macht mit der Vertical-Ebene einen Winkel bmz; der Punct b steht unter dem Winkel $bn\beta$, und der Punct a unter dem Winkel $an\alpha$ von derselben ab. Denkt man sich durch diese Puncte a und b zwey Ebenen $tb\beta nt$ und $ta\alpha nt$ aus dem Durchschnitts-Punct n der Ebene ncbamn des Theils des Quadranten mit der Ebene ozdp, senkrecht auf die Vertical-Ebene ozdp, so werden diese Ebenen dieselbe in der Linie $n\beta$ und $n\alpha$ schneiden, und $\beta n\alpha$ wird die wahre Größe des Winkels k seyn. Auf der Ebene des Quadranten aber, ist dieser Winkel gleich bna, und es ist wirklich auch $bna = \beta n\alpha$; aber bna ist nicht das Maas des Winkels k in der Vertical-Ebene, welche doch bey dem Gebrauche des Mauerquadranten bey allen Beobachtungen zum Grunde lieget. Ein Beobachter wird also jedesmal, wenn ihm bey einer Beobachtung mit diesem Quadranten der Index des Nonius oder Vernier auf diese Puncte a und b zu stehen kommt, den gemessenen Bogen k noch um den kleinen Bogen $\alpha\beta$ — ab verbessern müssen, um das Maas des Winkels k, welches derselbe in der Vertical-Ebene hat, zu bekommen; im entgegen gesetzten Falle aber, wenn er das Maas des Winkels bna vor das wahre Maas dieses Winkels k annehmen wollte, würde er die Größe des Winkels k in der Vertical-Ebene, um einen Bogen $\alpha\beta - \grave{a}b = \delta$ zu klein bekommen. Die ganze Sache wird also darinnen bestehen, wenn man die Größe des Fehlers, der aus dieser windschiefen Ebene des Quadranten in Absicht auf die wahre Größe eines mit demselben abgemessenen Winkels k entstehet, untersuchen will, daß man die Größe des Winkels berechnet, welche dieser Winkel k in der Vertical-Ebene hat; diese aber ergibt sich aus folgenden Betrachtungen:

Es ist einmal aus dem, was bisher gesagt worden, ersichtbar, daß der Punct t der Pol des Kreyses $\beta\alpha m$ seyn müsse, weil die Ebenen $tb\beta nt$ und $ta\alpha nt$ senkrecht auf der Ebene ozdp stehen; er ist also auch das Maas des Winkels $\beta t\alpha = \beta n\alpha$. Nun ist $bt = 90° - bn\beta$; $at = 90° - an\alpha$, und $ba = k$. Demnach sind in dem sphärischen Dreyeck bta alle 3 Seiten bekannt, folglich läßt sich auch der Winkel bta daraus finden.

Es ist nemlich $\text{Cos}\,\beta ta = \frac{\text{Cos } k}{\text{Sin at. Sin bt.}} - \text{Cot at. Cot bt;}$

Weil aber $bt = 90° - b\beta$, und $at = 90° - a\alpha$ ist, so ist auch

$$\text{Cos}\,\beta n\alpha = \frac{\text{Cos } k}{\text{Cos } bn\beta.\ \text{Cos } an\alpha.} - \text{tang } bn\beta.\ \text{tang } an\alpha.$$

Hieraus läßt sich also vermittelst der Sinustabellen, der Winkel $\beta n\alpha$ finden; dieser sey gleich K; und hiermit wird $\delta = K - k$.

Es verstehet sich von selbsten, daß in diesem angeführten Fall der Winkel bmz niemalen groß seyn werde, weil angenommen worden, der Künstler habe den möglichsten Fleiß und Vorsicht bey Verfertigung des Quadranten angewandt. Seine Größe hängt also blos von dem Grade der Schnellkraft der Bestandtheile des Quadranten, und andern Kleinigkeiten ab, vor welche der Künstler bey Verbindung der Streb-Schienen unter und gegen einander, auch bey allem angewandten Fleiße und Sorgfalt und geschickter Einrichtung derselben nicht stehen kann, daß die Ebene des Quadranten in dem verticalen Hangen desselben, der Ebene nicht gleich bleibt, die er ihm in horizontaler Lage auf dem Gestelle, auf welchem er eingetheilt worden, gegeben hat.

III. Auch die Dichtigkeit der Masse an und vor sich, aus welcher das Corpus des Quadranten zusammengesetzt ist, hat einen Einfluß auf die Genauigkeit, mit welcher ein Künstler einen Kreysbogen auf dem Limbo desselben abtheilen kann.

Es zeiget sich durch die Erfahrung, daß eine meßingne Schiene mit einer andern, die ihr an Masse, Dichtigkeit, und Maasen gleich ist, einen gleichen Grad der Schnellkraft äußere.

a. Es sey z. E. in Fig. 8, ohg das Corpus des Quadranten von Meßing, dessen Dichtigkeit ich nach allen Seiten gleich groß annehme. ab sey eine meßingne Schiene und dc eine andere, die mit ab gleich lang, breit und dick, und in dem Schwer-Punct f des Quadranten mit derselben rechtwinklicht verbunden ist. Die Dichtigkeit der Schiene ab sey M; die Dichtigkeit der Schiene dc sey N. Ist nun $M = N$, so hat das Corpus ogh sowohl nach der Richtung og als oh gleiche Spannung: ist $M > N$, so sucht sich das Corgus ogh bey h, g niederwärts zu senken, und eine Linie durch ab gehet zugleich auch durch die höchsten Puncte der Ebene, in welcher die Puncte o, h, g liegen. Ist $M < N$, so bestrebt sich der Limbus gdh in den Puncten g, h niederwärts zu sinken, und d ist der höchste Punct der krummen Ebene, in welche der Limbus sich dadurch begeben hat. Man ersiehet also hieraus, daß auch mit dem gleichen Grade der Dichtigkeit der Masse des Quadranten, der Grad der Genauigkeit bey Abtheilung desselben einigermaßen in Verhältnis stehe; weil von demselben die Ebene abhängt, in welche sich das Corpus des Quadranten in dieser oder jenen Richtung gegen den Horizont zieht.

b. Außer diesem kommt auch noch von einer andern Seite dies Verhältnis der Dichtigkeit der Masse desselben mit dem Grad der Genauigkeit bey Abtheilung desselben in Betracht.

Es ist in lit. a die Dichtigkeit des Corpus ogh durch seine ganze Fläche verbreitet gleich groß angenommen worden: nun aber sey der Limbus gdh aus einer Masse verfertiget, deren Dichtigkeit in der Stelle

$$\left.\begin{array}{l} g \text{ gleich } U \\ p \quad — \quad V \\ q \quad — \quad W \end{array}\right\} \text{seye.}$$

Auch habe der Künstler ein so außerordentlich feines und geübtes Gefühl, daß der Druck seines Fingers auf den Kopf des Stangen-Cirkels bey Aufzeichnung der zwey End-Puncte einer Chorde, oder überhaupt bey Aufzeichnung eines jeden Puncts auf den Theil-Kreys gdh, jederzeit gleich stark sey. Sind nun g, p, q Punkte auf dem Theil-Kreyse, welche dieser Künstler auf denselben gezeichnet hat, und ist u, v, w die Tiefe derselben, so müssen auch $u = v = w$ seyn, wenn $U = V = W$ ist.

Ist aber $U > V$, so ist $u < v$; ist $W > U$, so ist $u < w$; und wenn $V = \frac{1}{x}U$ ist, so ist auch $v = xu$, das ist, die Tieffen der Theil-Puncte auf dem Limbo stehen in Verhältnis der Dichtigkeit desselben.

In wieferne aber aus dieser ungleichen Dichtigkeit des Limbi Fehler in Absicht auf die Lage der Theil-Puncte bey Aufzeichnung derselben entstehen können, ist aus dem zu ersehen, was ich in §. 3. IV. hievon gesagt habe.

§. 6.

So wäre denn nun das erste Hauptstück bey Untersuchung der Genauigkeit, mit welcher ein Kreys auf der Ebene des Limbi eines Quadranten abgetheilt werden kann, abgehandelt, da ich bereits von §. 3 bis §. 6 die Gattungen der Fehler, die bey dem Theilungs-Geschäffte unvermeidlich sind, entwickelt, und die Größe jedes derselben in *Statu absoluto* aufgesucht habe. Ich werde also nunmehro die Folgen untersuchen können, welche diese verschiedene Gattungen der Fehler in Verbindung mit einander auf die Lage der auf dem Theil-Kreys aufgezeichneten Theilungs-Puncte haben mögen.

Die verschiedene Arten der Aufzeichnung eines Bogens durch Theil-Puncte in den Theil-Kreys, nöthigen mich, diese Untersuchung über die Folgen der bey dem Theilungs-Geschäffte unvermeidlichen Fehler, in zwey Classen abzutheilen. Ich werde nemlich

Erstens untersuchen die Folgen dieser Fehler in Rücksicht auf die wahre Größe eines auf den Theil-Kreys aufgezeichneten Bogens, vor den Fall, wenn dieser Bogen *mediate* vermittelst seiner Chorde auf den Theil-Kreys aufgezeichnet wird; und

Zweytens die nemliche Untersuchung anstellen, vor den Fall, da die Größe eines Bogens *imediate* durch Bisection aus einem bereits auf dem Theil-Kreys aufgezeichneten Bogen, auf demselben bemerkt wird.

Ich fange demnach bey ersterer Theilungs-Methode an, und untersuche die Genauigkeit, mit welcher der Künstler in Fig. 9 den Bogen oabcd auf dem Theil-Kreys vermittelst der Chorden oa, ab, bc, cd aufzeichnen kann; und bezeichne in dieser Absicht, einmal

die Chorde	mit dem Buchstaben	und den ihr zukommenden Bogen mit dem Buchstaben	und den Bogen oabcd mit dem Buchstaben P
oa	a	A	
ab	b	B	
bc	c	C	
cd	d	D	

Ich bezeichne ferner, den Theil, auf welchen der Künstler gewis ist, auf dem Theil-Kreyse

in Ansehung der Länge der Chorde.	mit dem Ausdruck.	in Ansehung der wahren Größe des Bogens.	mit dem Ausdruck.
a	da	A	dA
b	db	B	dB
c	dc	C	dC
d	dd	D	dD
—	—	P	dP

Nach dem jedesmaligen Werth von dP wird also die Genauigkeit beurtheilt werden müssen, die der Künstler bey Aufzeichnung dieses Bogens vermittelst der Chorden a, b, c, d erreicht. Es stehet derselbe genau im Verhältnis der Werthe von dA, dB, dC, dD, und diese hängen von dem Werthe der Theile da, db, dc, dd, dr ab.

Um die Verhältnis dieser Theile aber aufzusuchen, scheint mir der kürzeste Weg zu seyn, einen Ausdruck zu construiren, nach welchem sich diese Verhältnis der Theile da, db, dc, dd, dA, dB, dC, dD, dP unter einander auf einmal übersehen ließe. In dieser Absicht lege ich hiebey folgende Gleichung zum Grunde, nach welcher ist

$$\mathrm{Sin}\, P = \mathrm{Sin}\,(A+B)\,\mathrm{Cos}\,(C+D) + \mathrm{Cos}\,(A+B)\,\mathrm{Sin}\,(C+D),$$

Wird diese Gleichung differenzirt, so wird

$$dP\,\mathrm{Cos}\,P = \left(+\begin{matrix}(dA+dB)\,\big(\mathrm{Cos}(C+D)\,\mathrm{Cos}(A+B) - \mathrm{Sin}(C+D)\,\mathrm{Sin}(A+B)\big) - (dA+dB)\,(dC+dD)\,\mathrm{Cos}(A+B)\,\mathrm{Sin}(C+D) \\ (dC+dD)\,\big(\mathrm{Cos}(A+B)\,\mathrm{Cos}\,(C+B) - \mathrm{Sin}(A+B)\,\mathrm{Sin}\,(C+D)\big) - (dC+dD)\,(dA+dB)\,\mathrm{Cos}(C+D)\,\mathrm{Sin}(A+B)\end{matrix}\right.$$

$$dP\,\mathrm{Cos}P = (dA+dB+dC+dD)\,\mathrm{Cos}(A+B+C+D) - (dA+dB)(dC+dD)\,\mathrm{Sin}(A+B+C+D);\ \text{und}$$

$$\frac{dP.}{dA+dB+dC+dD} = 1 - \frac{(dA+dB)\,(dC+dD).}{dA+dB+dC+dD}\ \mathrm{tang}\,(A+B+C+D)$$

Nun aber nehme die Bögen dA, dB, dC, dD so klein an, daß sie wirklich kleiner als jeder Bogen sind, der sich noch angeben läßt; so nähert sich das Verhältnis $\frac{dP}{dA+dB+dC+dD}$, dem wirklichen Verhältnis der Differentialen der Bögen A, B, C, D, P; und es wird in dem Augenblick, da dieses Verhältnis verschwinden will, das Differential des Bogens P gleich seyn der Summe der Differentiale der Bögen A, B, C, D; oder seyn $dP = dA + dB + dC + dD$.

Nun wäre also ein Ausdruck vor das Differenzial des Bogens P oder vor dP gefunden: es wird also nur darauf ankommen, auch die Werthe der Differenziale der Bögen A, B, C, D aufzusuchen, und dieselben in den Ausdruck vor dP zu substituiren, so wird daraus ein Ausdruck können hergeleitet werden, aus welchem man die Verhältnisse der Differenziale der Bögen und ihrer Chorden-Differenziale, auf einmal übersehen kann.

No. 1. Wüßte man demnach das Verhältnis $\frac{dx}{dX}$, welches eine Chorde x zu ihrem Bogen X bey einem gewissen Halbmesser r hat, so wäre die Absicht auf einmal hiebey erreicht.

Dieses Verhältnis aber ergibt sich aus der Gleichung vor den Bogen, nach welcher $x = 2\, r \,\mathrm{Sin}\, \frac{1}{2} X$, und hieraus ist,

$$\frac{dx}{dX} = r \,\mathrm{Cos}\, \tfrac{1}{2} X - \frac{2\, d r \,\mathrm{Sin}\, \frac{1}{2} X;}{dX.} \quad \text{und}$$

$$dX = \frac{dx - 2\, d r \,\mathrm{Sin}\, \frac{1}{2} X}{r \,\mathrm{Cos}\, \frac{1}{2} X.}$$

Werden in diesen Differenzial-Ausdruck nach und nach, statt des Buchstabens X, die Buchstaben A, B, C, D, und statt dx die Differenziale da, db, dc, dd substituirt, so wird hieraus

$$dA = \frac{da - 2\, d r \,\mathrm{Sin}\, \frac{1}{2} A}{r \,\mathrm{Cos}\, \frac{1}{2} A}. \qquad dB = \frac{db - 2\, d r \,\mathrm{Sin}\, \frac{1}{2} B}{r \,\mathrm{Cos}\, \frac{1}{2} B}$$

$$dC = \frac{dc - 2\, d r \,\mathrm{Sin}\, \frac{1}{2} C}{r \,\mathrm{Cos}\, \frac{1}{2} C.}: \qquad dD = \frac{dd - 2\, d r \,\mathrm{Sin}\, \frac{1}{2} D}{r \,\mathrm{Cos}\, \frac{1}{2} D.}$$

folglich:

$$dP = \frac{da - 2\, d r \,\mathrm{Sin} \frac{1}{2} A}{r \,\mathrm{Cos}\, \frac{1}{2} A.} + \frac{db - 2\, d r \,\mathrm{Sin} \frac{1}{2} B}{r \,\mathrm{Cos}\, \frac{1}{2} B.} + \frac{dc - 2\, d r \,\mathrm{Sin} \frac{1}{2} C}{r \,\mathrm{Cos}\, \frac{1}{2} C.} + \frac{dd - 2\, d r \,\mathrm{Cos} \frac{1}{2} D}{r \,\mathrm{Cos}\, \frac{1}{2} D.}$$

Nach diesem Ausdruck berechne ich nun in der Folge die Genauigkeit, mit welcher ein Künstler die Größe eines Bogens vermittelst der Chorden anderer Bögen auf den Theil-Kreys tragen kann.

Ich gebe zu dem Ende den in demselben vorkommenden Differenzal-Ausdrücken da, db, dc, dd, dr endliche Werthe, und finde auf diese Weise auch einen endlichen Werth von dP

Dieser Werth von dP zeigt mir in jedem Falle die Größe eines Bogens an, auf welchen der Künstler bey Aufzeichnung eines Bogens durch seine, oder durch die Chorden mehrerer Bögen, in Rücksicht seiner wahren Größe gewis bleibt: und nach der jedesmaligen Größe dieses Bogens, beurtheile ich die Genauigkeit, die der Künstler bey Aufzeichnung dieses Bogens erlangt, indem ich sage, der Künstler mißt in diesem Fall den Bogen P bis auf einen Winkel dP genau.

Alles wird hiebey einzig und allein darauf ankommen, in diesen Ausdruck den jedesmaligen Werth von da, db, dc, dd, dr zu setzen: diese Werthe aber in jedem Fall angeben zu können, leite ich folgende Betrachtungen ein:

Wenn man das Verfahren des Künstlers bey Aufzeichnung der Cardinal-Puncte auf den Theil-Kreys eines Quadranten nach §. 1 und §. 2 aufmerksam betrachtet, und sich erinnert dessen, was von §. 3 bis §. 6 über die Gattung der bey dem Theilungs-Geschäffte unvermeidlichen Fehler gesagt werden, so wird man sich überzeugen, daß die jedesmaligen Werthe von da, db, dc, dd in Verhältnis stehen müssen

Erstens mit der Genauigkeit, mit welcher der Künstler, von der wahren Länge jeder Chorde auf seinem Masstab, überzeugt ist:

Zweytens, mit der Genauigkeit, mit welcher der Künstler, diese Länge der Chorde auf dem Masstab, mit dem Stangen-Cirkel von demselben abnehmen kann:

Drittens, mit der Genauigkeit, mit welcher der Künstler, diese von dem Masstab abgenommene Chorde, in Rücksicht der Ausdehnung und Zusammenziehung der Masse des Masstabs und des Quadranten, auf den Theil-Kreys übertragen kann. Es hängt ferner ab

Erstere Genauigkeit, von dem Theil $d'a$, $d'b$, $d'c$, $d'd$, auf welchen der Künstler bey Abtheilung des Chorden-Masstabes und der Nonius-Abtheilung desselben, in Ansehung der wahren Länge jeder Chorde a, b, c, d gewis bleibt:

Die zweyte hängt ab, von dem Theil $d''a$, $d''b$, $d''c$, $d''d$, auf welchen der Künstler bey Abmessung der Länge der Chorden a, b, c, d auf dem Masstab, in Rücksicht der Schärfe seines Gesichts und der Dicke der Cirkel-Spitzen, gewis ist: und die

Dritte hängt ab, von der Zuverläßigkeit, mit welcher der Künstler von dem Grade der Ausdehnung der Masse seines Masstabs und der Masse seines Quadranten, den er abtheilen soll, und von dem unveränderlichen Grade der Wärme während des Theilungs-Geschäfftes, überzeugt ist. Den Theil, auf welchen der Künstler in Rücksicht der wahren Länge einer Chorde, a, b, c, d in Ansehung dieser letztern Ursachen, gewis ist, bezeichne mit $d'''a$, $d'''b$, $d'''c$, $d'''d$.

So wäre demnach allgemein

$$
\begin{aligned}
da &= d'a + d''a + d'''a.\\
db &= d'b + d''b + d'''b.\\
dc &= d'c + d''c + d'''c.\\
dd &= d'd + d''d + d'''d.
\end{aligned}
$$

Diese Werthe sollen nunmehro im folgenden §. aufgesucht werden.

§. 7.

I. Da ich in dem vorhergehenden §. den Werth von $da = da' + da'' + da'''$ angenommen habe, so wird es nunmehro darauf ankommen, die Werthe jedes einzelnen Ausdrucks da', da'', da''' aufzusuchen. Ich fange in dieser Absicht sogleich mit Entwickelung des Werthes von da''' an, und bemerke hierüber folgendes:

Es zeiget der Ausdruck $d'''a$, $d'''b$, $d'''c$, $d'''d$ den Theil einer Chorde a, b, c, d an, auf welchen der Künstler in Ansehung der Länge derselben gewis ist, in Rücksicht des verschiedenen Grades der Ausdehnung der Masse des Masstabs und Quadranten, wenn er dieselbe nicht unter einem und ebendemselben Grad der Wärme auf den Theil-Kreys aufzeichnet.

Es hängt also der Werth von $d'''n$ einmal ab, von der mehr oder mindern Verschiedenheit der Ausdehnung und Zusammenziehung der Masse des Chorden-Masstabs und des Quadranten, der abgetheilt werden soll, und von dem verschiedenen Grad der Wärme, bey welcher jede dieser Chorden auf den Theil-Kreys getragen wird; und zweytens hängt auch der Werth von d‴u ab, von den verschiedenen Theilungs-Methoden, nach welchen die Künstler diese Chorden auf den Theil-Kreys aufzutragen pflegen.

Ich rechne unter diese Methoden vors erste, jenen Fall, da der Künstler die Chorden a, b, c, d in dem Augenblick, da er jede derselben von dem Masstab abnimmt, auch so gleich auf den Theil-Kreys überträgt; und zweytens, da der Künstler die Längen der Chorden a, b, c, d mit einemmal von dem Masstab abnimmt, und dieselbe nach und nach auf den Theil-Kreys aufzeichnet. Von diesen zweyen Fällen, wähle den erstern, und untersuche nunmehro die Werthe von d‴a, d‴b, d‴c, d‴d, vor den Fall, da der Künstler abnimmt

unter der Temperatur	von dem Masstab die Chorde	und dieselbe überträgt auf den Theil-Kreys, bey dem Grad der Wärme	Erster Fall.
*	a	$* + \Delta\varepsilon'$	
$* + \Delta\varepsilon'$	b	$* + \Delta\varepsilon' + \Delta\varepsilon''$	
$* + \Delta\varepsilon' + \Delta\varepsilon''$	c	$* + \Delta\varepsilon' + \Delta\varepsilon'' + \Delta\varepsilon'''$	
$* + \Delta\varepsilon' + \Delta\varepsilon'' + \Delta\varepsilon'''$	d	$* + \Delta\varepsilon' + \Delta\varepsilon'' + \Delta\varepsilon''' + \Delta\varepsilon''''$	

Es stelle zu dem Ende vor:

	einen Chorden-Masstab von einer Masse	die Ausdehnung der Masse dieses Masstabs	sey Theile seiner Länge	Wenn die Wärme zunimmt um einen Grad.
Fig. 9	M	M	w	
Fig. 10	N	N	k	

und werde getragen bey der Temperatur *			
auf die Masse	die Linie	als die Länge der Chorde	des Bogens
M	oa	a	A
N	oa	a	A
M	ab	b	B
N	ab	b	B
M	bc	c	C
N	bc	c	C
M	cd	d	D
N	cd	d	D

und es verlängere sich			
auf der Masse	die Länge der Chorde.	um den Theil.	wenn die Wärme zunimmt um
M	a	a α	$\Delta\varepsilon'$
N	a	a $\mathfrak{a}$	
M	b	b β	
N	b	b $\mathfrak{b}$	
M	c	c γ	
N	c	c $\mathfrak{c}$	
M	d	d δ	
N	d	d $\mathfrak{d}$	
M	a	a α'	$\Delta\varepsilon' + \Delta\varepsilon''$
N	a	a $\mathfrak{a}'$	
M	b	b β'	
N	b	b $\mathfrak{b}'$	
M	c	c γ'	
N	c	c $\mathfrak{c}'$	

auf der Masse	die Länge der Chorde.	um den Theil.	wenn die Wärme zunimmt um
M	d	$d\delta'$	
N	d	dd'	
M	a	$a\alpha''$	$\Delta\varepsilon' + \Delta\varepsilon'' + \Delta\varepsilon''$
N	a	aa''	
M	b	$b\beta''$	
N	b	bb''	
M	c	$c\gamma''$	
N	c	cc''	
M	d	$d\delta''$	
N	d	dd''	
M	a	$a\alpha'''$	$\Delta\varepsilon' + \Delta\varepsilon'' + \Delta\varepsilon''' + \Delta\varepsilon''$
N	a	aa'''	
M	b	$b\beta'''$	
N	b	bb'''	
M	c	$c\gamma'''$	
N	c	cc'''	
M	d	$d\delta'''$	
N	d	dd'''	$\Delta\varepsilon' + \Delta\varepsilon'' + \Delta\varepsilon''' + \Delta\varepsilon''''$.

Nun sey ferner die Ausdehnung der Masse des Masstabs N gänzlich conform mit der Masse des Quadranten: auch die Puncte a, b, c, d die Gränzen vor die Bögen, A, A + B, A + B + C, A + B + C + D, auf dem Theil-Kreyse bey der Temperatur *; so folgt hieraus weiters, daß der Künstler aufzeichnen werde, auf den Theil-Kreys, Fig. 11. wenn er sich zu Abmessung der Chorden bedient des Masstabs von

der Masse	den Punct	als die Gränze des Bogens.	unter der Temperatur
N	a	A	$* + \Delta\varepsilon'$.
M	α	A	
N	b'	A + B	$* + \Delta\varepsilon' + \Delta\varepsilon''$.
M	β'	A + B	
N	c''	A + B + C	$* + \Delta\varepsilon' + \Delta\varepsilon'' + \Delta\varepsilon''$.
M	γ''	A + B + C	
N	d'''	A + B + C + D	$* + \Delta\varepsilon' + \Delta\varepsilon'' + \Delta\varepsilon''' + \Delta\varepsilon''''$.
M	δ'''	A + B + C + D.	$* + \Delta\varepsilon' + \Delta\varepsilon'' + \Delta\varepsilon''' + \Delta\varepsilon''''$.

Es ist aber größer

die Chorde	als die Chorde	um den Theil	gleich
$\delta\alpha$	da	$a\alpha - aa$	$a\alpha$
$\alpha'\beta'$	$a'b'$	$b\beta' - bb'$	$b'\beta'$
$\beta''\gamma''$	$b''c''$	$c\gamma'' - cc''$	$c''\gamma''$
$\gamma'''\delta'''$	$c'''c'''$	$d\delta''' - dd'''$	$\delta'''d'''$

und die Chorde

$a\alpha = w.\Delta\varepsilon' a.$	$dd''' = k(\Delta\varepsilon' + \Delta\varepsilon'' + \Delta\varepsilon''' + \Delta\varepsilon'''')(a+b+c+d)$
$b\beta' = w(\Delta\varepsilon' + \Delta\varepsilon'')(a+b)$	$cc''' = k(\Delta\varepsilon' + \Delta\varepsilon'' + \Delta\varepsilon''')(a+b+c)$
$c\gamma'' = w(\Delta\varepsilon' + \Delta\varepsilon'' + \Delta\varepsilon''')(a+b+c)$	$bb' = k.(\Delta\varepsilon' + \Delta\varepsilon'')(a+b)$
$d\delta''' = w(\Delta\varepsilon' + \Delta\varepsilon'' + \Delta\varepsilon''' + \Delta\varepsilon'''')(a+b+c+d)$	$aa = k.\Delta\varepsilon'.a.$

Folglich ist auch

$$\mathfrak{a}\alpha = (w-k).\ \Delta\varepsilon'.\ a. \qquad = da'''$$
$$\mathfrak{b}'\beta' = (w-k)\ (\Delta\varepsilon' + \Delta\varepsilon'')\ (a+b) \qquad = db'''$$
$$\mathfrak{c}''\gamma'' = (w-k)\ (\Delta\varepsilon' + \Delta\varepsilon'' + \Delta\varepsilon''')\ (a+b+c) \qquad = dc'''$$
$$\delta'''\mathfrak{d}''' = (w-k)\ (\Delta\varepsilon' + \Delta\varepsilon'' + \Delta\varepsilon''' + \Delta\varepsilon'''')\ (a+b+c+d) \qquad = d\mathfrak{d}'''$$

In diesem Falle würde also der Künstler in Ansehung der wahren Länge der Chorden a, b, c, d auf dem Theil-Kreyse nur bis auf die Theile d'''a, d'''b, d'''c, d'''d gewis seyn, wenn ich annehme, daß die Eintheilung auf dem Chorden-Masstab ohne allen Fehler wäre; er ferner die Länge jeder Chorde gänzlich genau von demselben abnehmen, aber dieselbe nicht unter einerley Temperatur auf den Theil-Kreys tragen könnte. In wieferne diese letzte Voraussetzung bey Eintheilung eines Quadranten statt finden möge, werde ich in der Folge untersuchen.

II. Noch ist der zweyte Fall übrig, nach welchem der Künstler zwar unter einerley Temperatur die Chorden von dem Masstab abnimmt, dieselbe aber nicht unter ein und ebendemselben Grad der Wärme auf den Theil-Kreys auftragen kann.

Ich lege bey Untersuchung der Werthe von d'''a, d'''b, d'''c, d'''d vor diesem Fall, die 12te Figur zum Grunde, und setze, es wären in derselben die Puncte a, b, c, d, die Gränzen der Bögen A, A + B, A + B + C, A + B + C + D in dem Fall, da es dem Künstler möglich gewesen wäre, die Chorden a, b, c, d, unter ein und ebenderselben Temperatur * auf den Theil-Kreys zu tragen, unter welcher er die Länge derselben auf dem Chorden-Masstab mit dem Stangen-Cirkel abgenommen hat: es komme ferner wegen der Ausdehnung der Masse des Quadranten der

Punct	in die Lage	bey der Temperatur	statt dessen aber setzt ihn der Künstler, indem er die Chorde aufträgt, so wie sie unter der Temperatur * gemessen worden, in die Lage	der aufgezeichnete Punct steht also ab von seinem wahren Orte, um den Theil
a	a	$* + \Delta\varepsilon'$	α	aα
b	b	.	β	bb — aα.
c	c	.	γ	cc — aα.
d	d	.	δ	dd — aα.
a	a'	$* + \Delta\varepsilon' + \Delta\varepsilon''$	a	aα'.
b	b'	.	β'	bb' — aα'.
c	c'	.	γ'	cc' — aα'.
d	d'	.	δ'	dd' — aα'.
a	a''	$* + \Delta\varepsilon' + \Delta\varepsilon'' + \Delta\varepsilon'''$	a	aα''
b	b''	.	β''	bb'' — aα''.
c	c''	.	γ''	cc'' — aα''.
d	d''	.	δ''	dd'' — aα''.
a	a'''	$* + \Delta\varepsilon' + \Delta\varepsilon'' + \Delta\varepsilon''' + \Delta\varepsilon''''$.	a	aα'''
b	b'''	.	β'''	bb''' — aα'''.
c	c'''	.	γ'''	cc''' — aα'''.
d	d'''	.	δ'''	dd''' — aα'''.

	Nun ist ferner
$a\alpha = k.\ \Delta\varepsilon'.\ a.$	$b\beta' = k.\ (\Delta\varepsilon' + \Delta\varepsilon'')\ (a + b).$
$a\alpha' = k.\ (\Delta\varepsilon' + \Delta\varepsilon'')\ a.$	$c\gamma'' = k.\ (\Delta\varepsilon' + \Delta\varepsilon'' + \Delta\varepsilon''')\ (a + b + c).$
$a\alpha'' = k.\ (\Delta\varepsilon' + \Delta\varepsilon'' + \Delta\varepsilon''')\ a.$	
$a\alpha''' = k.\ (\Delta\varepsilon' + \Delta\varepsilon'' + \Delta\varepsilon''' + \Delta\varepsilon'''')\ a.$	$d\delta''' = k.\ (\Delta\varepsilon' + \Delta\varepsilon'' + \Delta\varepsilon''' + \Delta\varepsilon'''')\ (a+b+c+d)$

folglich ist

$$a\alpha = k.\ \Delta\varepsilon'.\ a = da'''$$
$$b\beta' - a\alpha' = b''\beta'' = k.\ (\Delta\varepsilon' + \Delta\varepsilon'')\ b. = db'''$$
$$c\gamma'' - a\alpha'' = c''\gamma'' = k.\ (\Delta\varepsilon' + \Delta\varepsilon'' + \Delta\varepsilon''')\ (b + c) = dc'''$$
$$d\delta''' - a\alpha''' = d''\delta'' = k.\ (\Delta\varepsilon' + \Delta\varepsilon'' + \Delta\varepsilon''' + \Delta\varepsilon'''')\ (b + c + d) = dd'''$$

Auf einen Theil von dieser Größe, würde also der Künstler, in Ansehung der Länge der Chorden a, b, c, d, auf dem Theil-Kreyse gewis seyn, in dem Fall, da er unter der Temperatur * die Chorden a, b, c, d von dem Masstab abgenommen, und

die Chorde	auf den Theil-Kreys getragen hätte in dem Augenblick, da der Grad der Wärme war
a	$* + \Delta\varepsilon'$
b	$* + \Delta\varepsilon' + \Delta\varepsilon''$
c	$* + \Delta\varepsilon' + \Delta\varepsilon'' + \Delta\varepsilon'''$
d	$* + \Delta\varepsilon' + \Delta\varepsilon'' + \Delta\varepsilon''' + \Delta\varepsilon''''$.

Zweyter Fall.

Ehe ich in diesen Untersuchungen weiter gehe, werde ich noch einiges zu sagen haben, über das Verfahren, welches der Künstler beobachtet bey Aufsuchung des Werthes von w und k, oder bey Bestimmung der Größe der Ausdehnung und Zusammenziehung der Masse des Chorden-Masstabs, und der Masse des Quadranten, der nach demselben getheilt wird, bey einerley Grad der Wärme. Ich führe in dieser Absicht folgendes Verfahren an, nach welchem ein Künstler die Ausdehnung einer Masse, vermittelst der Wärme des Wassers, oder auch vermittelst der Wärme der Sonnen-Stralen zu bestimmen sucht: im erstern Fall verfähret der Künstler folgendermaßen:

Er nimmt ein Stück M von der Masse, aus welcher der Chorden-Masstab verfertiget werden soll, und ein Stück N von der Masse, aus welcher der Quadrant zusammengesetzt wird; hängt beyde in ein Gefäs mit Wasser, dessen Temperatur er genau bemerket: mißt die Länge beyder Stücke M und N genau, und gibt sodann dem Wasser im Gefäße einen gewissen Grad der Wärme. Bey diesem Grad der Wärme aber werden die Feuer-Theilchen in der Masse M so wohl als in der Masse N dieselbe in einen größern Raum ausdehnen, welchen er nunmehro messen, und mit dem Raume, den sie zuvor in ihrem natürlichen Zustande einnahmen, vergleichen, und hieraus die Größe der Ausdehnung jeder derselben, bey dem Zunehmen der Wärme von einem Grad bestimmen kann, wie folgt:

Ich setze hiebey voraus die Ausdehnung der Masse M und N sey während des eben angezeigten Versuches durch ihre ganze Länge gleichsförmig, und dem Steigen und Fallen des Thermometers proportional, auch abstrahire von allem Einfluß, welchen die Ausdehnung der Massen während des Versuches durch Mittheilung eines gewissen Grades der Wärme in einander haben möchten: auch setze die Ausdehnung der Massen in Breite und Tiefe gleich Null.

Nun sey

der Masse	Länge	bey der Temperatur des Wassers in seinem natürlichen Zustande
M	t	i
N	d	i

und werde befunden

bey dem Versuch	die Länge der Masse	gleich	der Barometer stund auf Grade	der Thermometer auf Grade	das Wasser hatte beym Anfang des Versuchs die Temperatur	und beym Ende des Versuchs die Temperatur
Ersten	M	$t+x'$	m	n	i	h
Ersten	N	$d+y'$	m	n	i	h
Zweyten	M	$t+x''$	$m+\lambda.$	n	i	$h+\Delta h.$
Zweyten	N	$d+y''$	$m+\lambda.$	n	i	$h+\Delta h.$
Dritten	M	$t+x'''$	$m-\lambda.$	n	i	$h-\Delta h.$
Dritten	N	$d+y'''$	$m-\lambda.$	n	i	$h-\Delta h.$

Es ist also nach

dem Versuch	die Ausdehnung der Masse	gleich Theile ihrer Länge
Ersten	M	$\frac{1.\ x'}{t(h-i)}$
	N	$\frac{1.\ y'}{d(h-i)}$
Zweyten	M	$\frac{1.\ x''}{((h+\Delta h)-i)t}$
	N	$\frac{1.\ y''}{((h+\Delta h)-i)d}$
Dritten	M	$\frac{1.\ x'''}{((h-\Delta h)-i)t}$
	N	$\frac{1.\ y'''}{((h-\Delta h)-i)d}$

Wenn die Wärme um einen Grad zunimmt.

Nimmt man aus diesen dreyen Versuchen das Mittel von die Größe der Ausdehnung der Massen M und N, so ist

$$\tfrac{1}{3}t\left(\frac{x'}{h-i}+\frac{x''}{(h+\Delta h)-i}+\frac{x'''}{(h-\Delta h)-i}\right)=w.$$

und

$$\tfrac{1}{3}d.\left(\frac{y'}{h-i}+\frac{y''}{(h+\Delta h)-i}+\frac{y'''}{(h-\Delta h)-i}\right)=k.$$

Der zweyte Fall läßt sich leicht aus dem erstern herleiten.

§. 8.

Nach Entwicklung der Werthe von dn''' kommt nunmehro der Reihe nach die Untersuchung über die Werthe von $d''a$, $d''b$, $d''c$, $d''d$.

Ein jeder dieser Ausdrücke stellet den Theil einer Chorde, a, b, c, d vor, auf welchen der Künstler in Ansehung der wahren Länge derselben, in Rücksicht der Schärfe seines Gesichts und der Dicke der Cirkel-Spitzen, gewis ist, wenn er die Länge jeder dieser Chorden von dem Chorden-Masstab abnimmt.

Um die Werthe von dn'' einer Chorde n ausfindig zu machen, sehe ich mich genöthiget, das Verfahren eines Künstlers bey Abmessung einer Chorde auf dem Chorden-Masstab, systematisch durchzugehen.

„Es schiebet nemlich der Künstler, wenn er die Länge einer Chorde n auf dem Masstab „abnehmen will, einmal die Nonius-Abtheilung an der Fläche des Masstabes so lange hin und „wieder, bis der Index der Nonius-Abtheilung genau von dem Anfangs-Puncte der Einthei„lung auf dem Liniale, um die Länge der Chorde n absteht, und in diesem Fall ein Theilstrich „x auf der Nonius Abtheilung genau einen Theilstrich y auf dem Chorden-Linial schneidet.“

„Ist nun dieses mit möglichster Genauigkeit vollbracht, so setzet der Künstler die eine Spi„tze seines Stangen-Cirkels in den Anfangs-Punct der Eintheilung auf dem Liniale, und den „andern in den Anfangs-Punct der Nonius-Abtheilung, mißt also auf diese Art, die Länge „der Chorde n nach Theilen des zum Grunde liegenden Halbmessers.“

a. Aus diesem angezeigten Verfahren aber, wird man ersehen, daß der Künstler einmal gewis bleibe in Ansehung des wahren Standes des Theil-Strichs x auf dem Theil-Strich y, auf welchen er stehen muß, wenn der Index der Nonius-Abtheilung genau n Theile des Masstabs von dem Punct o der Eintheilung des Linials abstehen soll, bis auf den Theil α nach §. 3. III. oder wenn er sich eines Vergrößerungs-Glases bedienet, das ihm jeden Gegenstand μ mal größer darstellet, bis auf die Dimension $\frac{\alpha}{\mu} = \alpha^{\circ}$.

b. Es ist zweytens der Künstler nach §. 3. I. und §. 4. I. in Ansehung des wahren Abstandes des Indicis der Nonius-Abtheilung von dem Puncte o des Linials, gewis bis auf den Theil $\beta + \alpha^{\circ}$ in Rücksicht der Schärfe seines Gesichts, und der Dicke der Cirkel-Spitzen: folglich ist der Künstler in Ansehung der wahren Länge jeder Chorde gewis bis auf den Theil $\beta + \alpha^{\circ} + \beta + \alpha^{\circ} + \alpha^{\circ} = 3\alpha^{\circ} + 2\beta = 2(\beta + \frac{3}{2}\alpha^{\circ})$. Es ist demnach $d''a = d''b = d''c$, $d''d = 2(\beta + \frac{3}{2}\frac{1}{\mu}\gamma \tang \phi)$.

§. 9.

Noch ist übrig auch die Werthe von $d'a$, $d'b$, $d'c$, $d'd$ aufzusuchen. Ich habe nemlich in §. 6 den Theil, auf welchen der Künstler in Ansehung der wahren Länge einer Chorde n, so wie dieselbe auf den Masstab aufgezeichnet ist, gewis ist, mit $d'n$ bezeichnet. Es ist also aus diesem leicht zu urtheilen, daß der Werth von d'n abhangen müsse von der Genauigkeit, mit welcher ein Künstler die Abtheilung auf den Chorden-Masstab, und auf die Nonius-Abtheilung aufzeichnen kann. Ich werde also nunmehro, da ich die Werthe von d'a, d'b, d'c, d'd aufsuchen will, zuerst die Genauigkeit anzugeben suchen, mit welcher ein Künstler die Lage der Puncte oder Theil-Striche sowohl auf dem Chorden-Masstab als Nonius-Abtheilung bestimmen kann, und aus der Vergleichung bey der mit einander den jedesmaligen Werth von d'a, d'b, d'c, d'd selbsten herleiten. In dieser Absicht nun bedinge folgendes:

Es sey in Fig. 13 die Linie oa eine äußerst feine Linie, welche auf die Ebene eines Linials von der Masse M, dessen Ausdehnung w Theile seiner Länge ist, wenn die Wärme um einen Grad zunimmt, gezogen ist. Die Länge dieser Linie mißt E landübliche Schuhe, und der Künstler will dieselbe in $2 \cdot u$ gleiche Theile abtheilen.

In o sey der Anfangs-Punct der Eintheilung, und von diesem aus und dem Punct a bisectirt der Künstler die Länge oa in dem Punct b. Der Punct b theilet also den ganzen Masstab in zwey gleiche Theile, und ich betrachte denselben bey allen folgenden Untersuchungen gleichsam als einen Regulator, von welchem aus ich alle andere Puncte ordne; auch heiße den Theil bo, der auf der linken Seite desselben liegt, die linke Halbscheid, und den Theil ba, der rechts dieses Puncts fällt, die rechte Halbscheid des Masstabs, und bezeichne erstere mit dem Zeichen H; letztere aber mit dem Zeichen H.

Ich setze ferner, der Künstler bisectire

in H		in H	
die Weite	in dem Punct	in dem Punct	die Weite
ob	c	h	ab
oc	d	i	ah
od	e	k	ai
oe	f	l	ak

bis er endlich auf einen Punct kommt, der sowohl von dem Punct o als dem Punct a um den Theil $\frac{1E}{2u}$ abstehet.

Nach diesem Verfahren theile ich nun auch die Puncte, die auf diese Weiße auf dem Masstab entstehen, wenn die Bisection so lange fortgesetzt wird, bis der Künstler auf Puncte kommt, deren Abstand von einander durchgehends gleich $\frac{E}{2u}$ ist, in verschiedene Classen nach ihren Entstehungs-Ordnungen ein, und zähle unter die Fundamental-Ordnung oder die Haupt-Bisections-Ordnung

in $\overset{1}{H}$ den Punct	Erste	in $\overset{2}{H}$ den Punct
c		h
d	Zweyte	i
e	Dritte	k
f	Vierte	l
$\frac{1}{2}$ u	Erste	$\frac{3}{2}$ u
$\frac{1}{4}$ u	Zweyte	$\frac{7}{4}$ u
$\frac{1}{8}$ u	Dritte	$\frac{15}{8}$ u
$\frac{1}{2^m}$ u	mte	$\left(\frac{2^{m+1}-1}{2^m}\right)$ u

Substituirt man in diesem letztern allgemeinen Ausdruck in den Buchstaben m alle ganze Zahlen von der Zahl eins, bis auf eine Zahl, die gleich einer Zahl $\frac{\log u}{\log 2}$ ist, so bekommt man nach und nach Puncte, sowohl in $\overset{1}{H}$ als $\overset{2}{H}$, die ich Puncte vom ersten Grad heiße; nemlich wenn $u = 512$ wäre

in $\overset{1}{H}$ die Puncte			und	in $\overset{2}{H}$ die Puncte.		
$\frac{1}{2}$ u.	$\frac{1}{4}$ u.	$\frac{1}{8}$ u.		$\frac{3}{2}$ u.	$\frac{7}{4}$ u.	$\frac{15}{8}$ u.
$\frac{1}{16}$ u.	$\frac{1}{32}$ u.	$\frac{1}{64}$ u.		$\frac{31}{16}$ u.	$\frac{63}{32}$ u.	$\frac{127}{64}$ u.
$\frac{1}{128}$ u.	$\frac{1}{256}$ u.	$\frac{1}{512}$ u.		$\frac{255}{128}$ u.	$\frac{511}{256}$ u.	$\frac{1023}{512}$ u.

Bey dem Theilungs-Geschäffte theilet der Künstler weiters jede Fundamental-Ordnung durch Bisectionen in mehrere Theile, und zwar gemeiniglich in der Halbscheid $\overset{1}{H}$ von der rechten gegen die linke, und in der Halbscheid $\overset{2}{H}$ von der linken gegen die rechte, bis er jedesmal auf einen Punct kommt, der einem Theil von denen Theilen, in welche er den Masstab abtheilen will, gleich ist.

Es entstehen durch diese Bisection, neuerdings Puncte auf dem Masstab, welche ich Puncte vom 2ten Grad heiße, und die Fächer, welche dieselbe auf dem Masstab begränzen, heiße Ordnungen vom 2ten Rang.

Um diese Puncte vom 2ten Grad, die in jede Ordnung vom ersten Rang in jeder Halbscheid des Masstabs fallen, zu finden, habe ich folgenden Ausdruck construirt:

in $\overset{1}{H}$.

$$\frac{(2^n+1)\,u.}{2^{a-1}\cdot 2^{n+1}}$$

in $\overset{2}{H}$.

$$\frac{((2^a-1)\,2^{n+1}+2^n-1)\,u.}{2^{a-1}\cdot 2^{n+1}.}$$

Will man nach diesem Ausdruck die Puncte vom 2ten Grad finden, die in jede Halbscheid des Masstabs hinein fallen, so verfährt man folgendermaßen:

Man setzet in demselben in den Buchstaben a, nach und nach alle ganze Zahlen von der Zahl 1 bis auf eine Zahl, die gleich ist m — 2. und stellet, wenn man annimmt, es sey

a gleich	in den Buchstaben n alle mögliche ganze Zahlen, die zwischen die Zahl 1 und die Zahl m fallen,	so bekommt man die Puncte vom 2ten Grad, die gehören in die Fundamental-Ordnung.
1	m — 1.	Erste.
2	m — 2.	Zweyte.
3	m — 3.	Dritte.
m — 1.	m — (m — 1).	(m — 2) te.
m — 1.	*	(m).te.

Das Zeichen * bedeutet, daß in die mte Fundamental-Ordnung kein Punct vom 2ten Grad hinein fallen könne.

Durch diese Puncte vom 2ten Grad, entstehen ferner

in der Fundamental-Ordnung	Ordnungen vom 2ten Rang.
Ersten.	m — 1.
Zweyten.	m — 2.
Dritten.	m — 3.
Vierten.	m — 4.
(m — 1) ten.	m — (m — 1).

Diese Ordnungen vom 2ten Rang, werden nun ferner abgetheilt, durch Puncte vom dritten Grad.

Um diese Puncte vom dritten Grad, die in die Erste Fundamental-Ordnung hinein gehören, und in jede Ordnung vom 2ten Rang fallen, zu finden, dienet folgender Ausdruck:

in $\overset{1}{H}$.

$$\frac{(2^{b-1}\cdot 2^{n+1}+2^n+1)\,u}{2^b : 2^{n+1}.}$$

in $\overset{2}{H}$.

$$\frac{((2+2^b-2^{b-1}-1)\cdot 2^{n+1}+2^n-1)\,u.}{2^b : 2^{n+1}.}$$

Es zeiget in diesem Ausdruck der Buchstabe b, die Ordnung vom 2ten Rang an, und man kann in denselben alle ganze Zahlen stellen, die zwischen die Zahl 1 und eine Zahl fallen, die gleich m — 1; und wenn man in demselben Ausdruck setzt, es sey

b gleich	und vor n alle ganze Zahlen von der Zahl 1 bis auf eine Zahl	so bekommt man alle Puncte vom 3ten Grad, die fallen in die Ordnung vom 2ten Rang.
1	m — 2.	Erste.
2	m — 3.	Zweyte
3	m — 4.	Dritte.
m — 2.	m — (m — 1).	(m — 2) te.
m — 1.	*	(m — 1) te.

Durch diese Puncte wird nun auf jeder Hälfte des Masstabs, jede Ordnung vom 2ten Grad in gewisse Fächer, oder Ordnungen vom 3ten Range abgetheilt; und es gehören in der

Ersten Fundamental-Ordnung, in die

Ordnung vom 2ten Rang.	Ordnungen vom dritten Rang.
Erste.	m — 2.
Zweyte.	m — 3.
Dritte.	m — 4.
(m — 2) te.	m — (m — 1).

Diese Ordnungen vom dritten Rang, werden nun neuerdings bisectirt durch Puncte vom 4ten Grad, und es entstehen hieraus in jeder Fundamental-Ordnung, in jeder Ordnung vom dritten Rang, Ordnungen vom vierten Rang. Diese Ordnungen werden abermals durch Puncte abgetheilt, und so entstehen Ordnungen vom fünften Rang, und so weiter, bis endlich nach der Ordnung vom (m — 1) ten Rang, der ganze Masstab in lauter gleiche Theile abgetheilet ist.

Vor jede dieser Ordnungen könnte nun ein Ausdruck construirt werden, nach welchem man die Puncte finden könnte, welche in jede derselben hinein gehören; ja man siehet aus den bisher angesetzten, wenn dieselbe aufgelöst werden, deutlich, daß, da die Coefficienten derselben, nach einem Gesetze fortgehen, sich endlich ein allgemeiner Ausdruck müßte construiren lassen, nach welchem man alle und jede Puncte, welche nur immer auf den Masstab fallen, finden könnte. Allein ein solcher Ausdruck würde in der That ein wirklich unbrauchbarer Ausdruck auf dem Papiere bleiben, da man sich bey dem Gebrauche desselben so vielem Irrthum im Calcul aussetzen müßte, daß es wirklich weit vortheilhafter und die Geisteskräfte weniger anstrengend ist, die Puncte lieber durch Zeichnung zu bestimmen, wenn man wissen will, in welche Ordnung dieselbe gehören, in Fällen, da m eine große Zahl ist, und also viele Bisectionen erfordert werden, den Masstab in einzelne Theile abzutheilen.

Ich habe das bisherige blos angeführt, daß man mich verstehen möge, was ich unter Bisections-Ordnungen verstehe, weil ich von diesen Benennungen in der Folge öfters Gebrauch machen werde; werde also nunmehro zu näherer Untersuchung über die Werthe von $d'a$, $d'b$, $d'c$, $d'd$ schreiten können.

II. In dieser Absicht nun lege ich den Erfahrungs-Satz zum Grunde, daß die Fehler, welche bey jeder Gattung von Abtheilungen in Absicht auf die wahre Lage der aufgezeichneten Theil-Puncte begangen werden können, sich mit der Anzahl der Operationen anhäufen können, welche vorgenommen werden müssen, um diesen oder jenen Punct an seinen Platz zu bringen; es wird also, wenn man auch das überleget, was eben zuvor über die Ordnung der Entstehung der Puncte auf dem Masstabe gesagt worden, leicht einzusehen seyn, daß die Genauigkeit in Rücksicht der wahren Lage eines oder des andern Puncts auf dem Masstabe, die in verschiedene Ordnungen gehören, nicht ein und eben dieselbe seyn könne, sondern abnehmen müsse, nach dem Range der Ordnung, in welche dieser Punct fällt.

Um nun diese Genauigkeit in jedem Falle angeben zu können, werde ich mich bemühen, einige Ausdrücke zu construiren, nach welchen man dieselbe berechnen kann. Zu diesem Ende fange sogleich mit dem einfachsten Falle an, und suche die Genauigkeit auf, mit welcher der Künstler einen jeden Punct vom ersten Grade in jeder Halbscheid $\overset{1}{H}$ oder $\overset{2}{H}$ auf den Masstab aufzeichnen kann. Ich nehme an, der Künstler trage die Länge oa seines Masstabes von einem andern Masstabe mit dem Stangen-Cirkel ab, und sey in der abgenommenen Länge bis auf einen Theil $a\alpha = dE$ gewis, ob die auf der Ebene der Masse M aufgezeichnete Länge oa wirklich E landübliche Schuhe oder $E \pm dE$ landübliche Schuhe messe.

Er bisectirt ferner die Linie oa in dem Puncte b, aus dem Punct o und a: wäre der Künstler nun in Ansehung des Punctes a gewis, daß derselbe von dem Punct o aufs genaueste E landübliche Schuhe abstehe, so wüßte er auch gewis, daß der Punct b, der sich durch die zwey Bisections-Linien aus dem Punct o und a ergibt, auch $\frac{1}{2}$ E Schuhe von dem Punct o abstehen müsse.

Allein so ist er in diesem Stücke nur bis auf den Theil $a\alpha$ gewis, und es ist ihm möglich den Masstab bey b aus so vielen Puncten zu schneiden, als sich in der Dimension $a\alpha$ Puncte denken lassen, und der Künstler bleibt also in Ansehung der Lage des Puncts b, nur bis auf den Theil $\pm\, b\beta = \frac{1}{2}\, a\alpha$ gewis; denn es ist $a\alpha + ab - b\beta = \frac{1}{2}(oa + a\alpha)$. Auf diesen Theil wäre also der Künstler in Ansehung der Lage des Puncts b einmal gewis, in so ferne derselbe sich aus den Durchschnitts-Linien ergibt. Diesen Punct aber macht der Künstler sichtbar, indem er denselben mit dem Bonzen, etwas sanfte in die Masse des Masstabs drückt: hiebey aber bleibt der Künstler in der Wahl, ob die Spitze des Bonzen genau auf dem Durchschnitts-Puncte stehe oder nicht, nur bis auf den Theil α° gewis, und hieraus folgt, daß er in Ansehung des Punctes b, so wie er wirklich auf dem Masstab aufgezeichnet ist, nur bis auf den Theil oder incrementum $a\alpha \pm \alpha^{\circ}$ gewis seyn könne. Diesen Theil bezeichne ich künftighin mit dE°, und es zeigt also dE° jederzeit die Genauigkeit an, mit welcher der Punct, der die Länge des Masstabes in 2 gleiche Theile abtheilt, auf demselben aufgezeichnet ist.

Wird die Linie ob neuerdings bisectirt in dem Punct c, so folgt aus dem, was eben zuvor gesagt worden, daß der Künstler in Ansehung der Lage des Puncts c, nur gewis seyn könne bis auf den Theil $c\gamma$, der gleich ist $b\beta + \alpha = dE^{\circ} + \alpha^{\circ}$. Es folget ferner, wenn ich bezeichne den Theil, auf welchen der Künstler gewis ist, in der Halbscheid $\overset{1}{H}$ in Ansehung der Lage des Gränz-Puncts der

Fundamental-Ordnung	durch	daß seyn müsse	gleich	gleich	gleich
Ersten	dE'	dE'	$\frac{1}{2}dE^{\circ} + \alpha^{\circ}$	$\frac{1}{2}dE^{\circ} + \alpha^{\circ}$	$d.\ \frac{1}{2}\ u.$
Zweyten	dE''	dE''	$\frac{1}{2}dE' + \alpha^{\circ}$	$\frac{1}{4}dE^{\circ} + \frac{3}{2}\alpha^{\circ}$	$d.\ \frac{1}{4}\ u.$
Dritten	dE'''	dE'''	$\frac{1}{2}dE'' + \alpha^{\circ}$	$\frac{1}{8}dE^{\circ} + \frac{7}{4}\alpha^{\circ}$	$d.\ \frac{1}{8}\ u.$
Vierten	dE''''	dE''''	$\frac{1}{2}dE''' + \alpha^{\circ}$	$\frac{1}{16}dE^{\circ} + \frac{1}{8}\alpha^{\circ}$	$d.\ \frac{1}{16}\ u.$
m ten.	dE^{m}	dE^{m}	$\frac{1}{2}dE^{m-1} + \alpha^{\circ}$	$\frac{1}{2^{m}}dE^{\circ} + \frac{(2^{m}-1)}{2^{m-1}}\alpha^{\circ}$	$d.\ \frac{1}{2^{m}}\ u.$

III. Wird die Linie ba bisectirt in dem Punct h, so bleibet der Künstler in Ansehung der wahren Lage dieses Puncts gewis bis auf den Theil hx; und es ist aus der Gleichung $a\alpha + \frac{1}{2}ab \pm hx = \frac{1}{2}(ab + b\beta + a\alpha)$, $hx = \frac{1}{2}(a\alpha + b\beta)$.

Es bleibt ferner der Künstler bey Aufzeichnung des Punctes h mit dem Bonzen nur bis auf einen Theil α° gewis, ob er die Spitze desselben wirklich in den Punct setzt, der sich aus den Durchschnitts-Linien aus dem Punct a und b ergibt; folglich ist er in der Lage des Puncts h, so wie derselbe sich wirklich auf dem Masstab befindet, nur bis auf den Theil $\frac{1}{2}(dE + dE') \pm \alpha^{\circ} = dE'$ gewis.

Hieraus folget ferner, daß wenn ich in der Halbscheid $\overset{2}{H}$ bezeichne den Theil, auf welchen der Künstler gewis ist, in Ansehung der Lage des Gränz-Puncts der

Fundamental-Ordnung.	durch	seyn müsse	gleich.	gleich	gleich.
Ersten	dE'	dE'	$\frac{1}{2}(dE^{\circ} + dE) + \alpha^{\circ}.$	$\frac{3}{2}\ dE^{\circ}.$	$\frac{3}{2}\ d.\ u.$
Zweyten	dE''	dE''	$\frac{1}{2}(dE + dE') + \alpha^{\circ}.$	$\frac{7}{4}\ dE^{\circ}.$	$d.\ \frac{7}{4}\ u.$
Dritten	dE'''	dE'''	$\frac{1}{2}(dE + dE'') + \alpha^{\circ}.$	$\frac{15}{8}\ dE^{\circ}.$	$d.\ \frac{15}{8}\ u.$
Vierten	dE''''	dE'''	$\frac{1}{2}(dE + dE''') + \alpha^{\circ}.$	$\frac{31}{16}\ dE^{\circ}.$	$d.\ \frac{53}{16}\ u.$
m ten.	dE^{m}	dE^{m}	$\frac{1}{2}(dE + dE^{m-1}) + \alpha^{\circ}.$	$\frac{(2^{m+1}-1)dE^{\circ}.}{2^{m}.}$	$d.\frac{(2^{m+1}-1)u.}{2^{m}.}$

Weiter folget auch aus dem vorhergehenden, daß abhangen müssen die Incrementen aller Puncte, die fallen in die

in $\overset{1}{H}$ Von dem Werth der Incrementen.	Fundamental-Ordnung	in $\overset{2}{H}$ Von dem Werth der Incrementen.
dE° u. dE' oder $\frac{1}{2}\,dE + \alpha$ u. $\frac{1}{2}\,dE^\circ + \alpha^\circ$	Ersten	dE° u. dE' oder $\frac{1}{2}\,dE + \alpha$ u. $\frac{3}{2}\,dE^\circ$.
dE' u. dE'' oder $\frac{1}{2}\,dE^\circ + \alpha^\circ$ u. $\frac{1}{4}\,dE^\circ + \frac{3}{2}\,\alpha^\circ$	Zweyten	dE' u. dE'' oder $\frac{3}{2}\,dE^\circ$ u. $\frac{7}{4}\,dE^\circ$.
dE'' u. dE''' oder $\frac{1}{4}\,dE^\circ + \frac{3}{2}\,\alpha^\circ$ u. $\frac{1}{8}\,dE^\circ + \frac{7}{4}\,\alpha^\circ$	Dritten	dE'' u. dE''' oder $\frac{7}{4}\,dE^\circ$ u. $\frac{15}{8}\,dE^\circ$.
dE''' u. dE'''' oder $\frac{1}{8}\,dE^\circ + \frac{7}{4}\,\alpha^\circ$ u. $\frac{1}{16}\,dE^\circ + \frac{15}{8}\,\alpha^\circ$	Vierten	dE''' u. dE'''' oder $\frac{15}{8}$ u. $\frac{31}{16}\,dE^\circ$.
$\frac{1}{2^{m-1}}\,dE^\circ + \frac{(2^{m-1}-1)}{2^{m-2}}\,\alpha^\circ$ u. $\frac{1}{2^{m}}\,dE^\circ + \frac{(2^{m}-1)}{2^{m-1}}\,\alpha^\circ$	m ten	$\frac{(2^{m}-1)}{2^{m-1}}\,dE^\circ$ u. $\frac{(2^{m+1}-1)}{2^{m}}\,dE^\circ$

IV. Auf diese Weise wäre also nun einmal der Ausdruck construirt, nach welchem man die Incremente aller Puncte vom ersten Grad berechnen kann; es fehlet also nur noch ein Ausdruck, nach welchem man die Incremente aller möglichen Puncte von jedem Grade berechnen kann. Um auch diesen Ausdruck anzugeben, nehme ich an, es sey ein gewisses Fach X auf dem Masstab, in Rücksicht dessen Gränzen der Künstler an einem Ende desselben bis auf den Theil $\overset{n}{\Delta X}$, und an der andern Gränze desselben bis auf einen Theil $\overset{n-1}{\Delta X}$ gewis ist. Der Buchstabe n bezeichne hier einen Ordnungs-Exponenten, und es sey

$$\overset{n}{\Delta X} = \frac{1}{2^{m}}\,\Delta X + \frac{(2^{n}-1)}{2^{n-1}}\,\alpha^\circ, \text{ und } \overset{n-1}{\Delta X} = \frac{1}{2^{n-1}}\,\Delta X + \frac{(2^{n-1}-1)}{2^{n-2}}\,\alpha^\circ.$$

Nun bisectirt der Künstler dieses Fach, und bleibt in Rücksicht der wahren Lage des Puncts, der dasselbe in zwey gleiche Theile theilet, gewis, bis auf einen Theil $\frac{1}{2}\left(\overset{n}{\Delta X} + \overset{n-1}{\Delta X}\right) + \alpha^\circ$: dieser Theil ist gleich

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\,\Delta X + \frac{(2^{n-1}-1)}{2^{n-2}}\,\alpha^\circ + \frac{1}{2^{n}}\,\Delta X + \frac{(2^{n}-1)}{2^{n-1}}\,\alpha^\circ\right) + \alpha^\circ,$$

und ich bezeichne denselben durch dx'.

Ich nehme ferner an, der Künstler bisectire die rechte Halbscheid des Faches X, weiters von der linken gegen die rechte, so lange, bis er nach der zten Bisection auf einen Theil kommt, der $\frac{1}{X}$ des ganzen Faches ist, und bezeichne die Incremente der Puncte, welche er nach und nach durch diese Bisectionen in dem Fache X erhält, mit dx'', dx''', dx^{z}.

Es würde also nach III.

$$\overset{n}{dx} = \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{2^{n-1}}\Delta X + \frac{(2^{n-1}-1)}{2^{n-2}}\alpha^0 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{n}}\Delta X + \frac{(2^{n}-1)}{2^{n-1}}\alpha^0 + \frac{1}{2^{n-1}}\Delta X + \frac{(2^{n-1}-1)}{2^{n-2}}\alpha^0\right) + \alpha^0\right] + \alpha^0.$$

$$dx'' = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{3}{2}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\Delta X + \frac{(2^{n-1}-1)}{2^{n-2}}\alpha^0\right) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{n}}\Delta X + \frac{(2^{n}-1)}{2^{n-1}}\alpha^0\right) + \tfrac{3}{2}\alpha^0\right]$$

$$dx''' = \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{2^{n-1}}\Delta X + \frac{(2^{n-1}-1)}{2^{n-2}}\alpha^0 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{3}{2}\left[\frac{1}{2^{n-1}}\Delta X + \frac{(2^{n-1}-1)}{2^{n-2}}\alpha^0\right] + \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{2^{n}}\Delta X + \frac{(2^{n}-1)}{2^{n-1}}\alpha^0\right] + \alpha^0\right) + \alpha^0\right] + \alpha^0$$

$$dx''' = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{7}{4}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\Delta X + \frac{(2^{n-1}-1)}{2^{n-2}}\alpha^0\right) + \tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{n}}\Delta X + \frac{(2^{n}-1)}{2^{n-1}}\alpha^0\right) + \tfrac{7}{2}\alpha^0\right]$$

$$\overset{z}{dx} = \tfrac{1}{2}\left[\frac{2^{z}-1}{2^{z-1}}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\Delta X + \frac{(2^{n-1}-1)}{2^{n-2}}\alpha^0\right) + \frac{1}{2^{z-1}}\left(\frac{1}{2^{n}}\Delta X + \frac{(2^{n}-1)}{2^{n-1}}\alpha^0\right) + \frac{(2^{z-1}-1)}{2}\alpha^0\right] \pm \alpha^0$$

Dieses wäre nun der Ausdruck, nach welchem man die Genauigkeit aller in dem Fach X aufgezeichneten Puncte berechnen kann; ich habe in demselben angenommen, daß sich die Theile α^0, die von der Zeichnung des Puncts mit dem Bonzen herkommen, zur Hälfte gegen einander aufgehoben haben; da es doch bey vielfältig nach einander vorgenommenen Bisectionen kaum möglich ist, daß alle auf eine Seite fallen sollten.

Vor diesem Fall, würde auch in der größten Allgemeinheit seyn

N. 1. $$\overset{z}{dx} = \tfrac{1}{2}\left[\frac{2^{z}-1)}{2^{z-1}}\overset{n-1}{\Delta X} + \frac{1}{2^{z-1}}\overset{n}{\Delta X} + \frac{(2^{z-1}-1)}{2}\alpha^0\right] \pm \alpha^0.$$

Etwas abgeändert muß dieser Ausdruck werden, wenn der Künstler das Fach X von der rechten gegen die linke theilt, in diesem Fall ist nemlich

N. 2. $$\overset{z}{dx} = \tfrac{1}{2}\left[\frac{(2^{z}-1)}{2^{z-1}}\overset{n}{\Delta X} + \frac{1}{2^{z-1}}\overset{n-1}{\Delta X} + \frac{(2^{z-1}-1)}{2}\alpha^0\right] \pm \alpha^0.$$

Dieses Ausdrucks werde ich mich bedienen, die Genauigkeit aller in der Halbscheid $\overset{1}{H}$ und $\overset{2}{H}$ aufgezeichneten Puncte und der Nonius-Abtheilung zu berechnen. Alles kommt hiebey darauf an, den jedesmaligen Werth von $\overset{n}{\Delta X}$ in diesen Ausdruck gehörig zu substituiren, und ich verfahre hiebey folgendermaßen. Wenn z. E. die Genauigkeit in Rücksicht der wahren Lage eines Punctes vom 2ten Grad, der nach der 3ten Bisection der ersten Fundamental • Ordnung entstehet, nach diesem Ausdruck gefunden werden soll, so setze ich einmal

$$n = (\,\mathrm{I}\,) \text{ und } z = (\,\mathrm{III}\,); \quad \Delta X' = dE'; \text{ so wird}$$

$$dz''' = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{7}{4}\, dE' + \tfrac{1}{4}\, dE^{o} + \tfrac{3}{2}\, \alpha^{o}\right) \pm \alpha.$$

$$dz''' = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\,\tfrac{7}{4}\, dE^{o} + \alpha^{o} + \tfrac{1}{4}\, dE^{o} + \tfrac{3}{2}\, \alpha^{o}\right) \pm \alpha \text{ nach II.}$$

$$dz''' = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{9}{8}\, dE^{o} + \tfrac{5}{2}\, \alpha^{o}\right) \pm \alpha^{\bullet}.$$

V. Wenn ich nun annehme, es sey in Rücksicht der

Chorde	in §. 8. das Increment des Theil-Strichs	gleich	so wird folgen, daß seyn müsse	gleich.
	η	$\overset{a}{dx}$		
a	x	$\overset{a}{dx}$	$d'a$	$\pm\,(\overset{a}{dx} + \overset{a}{dx})$
	η	$\overset{b}{dx}$		
b	x	$\overset{b}{dx}$	$d'b$	$\pm\,(\overset{b}{dx} + \overset{b}{dx})$
	η	$\overset{c}{dx}$		
c	x	$\overset{c}{dx}$	$d'c$	$\pm\,(\overset{c}{dx} + \overset{c}{dx})$
	η	$\overset{d}{dx}$		
d	x	$\overset{d}{dx}$	$d'd$	$\pm\,(\overset{d}{dx} + \overset{d}{dx})$

Nunmehro wären also die Werthe von $d'a$, $d'b$, $d'c$, $d'd$, $d''a$, $d''b$, $d''c$, $d''d$, $d'''a$, $d'''b$, $d'''c$, $d'''d$, entwickelt, und es würde nur blos noch darauf ankommen einen jeden derselben in Zahlen aufzulösen, und in den Ausdruck vor dP, in §. 6. zu substituiren, wenn man die Genauigkeit in Rücksicht der wahren Größe eines auf den Theil-Kreys durch die Chorden, a, b, c, d aufgezeichneten Bogens P, berechnen wollte. Ich werde diese Arbeit vornehmen, wenn ich zuvor noch einiges über die imediate Theilung eines Bogens durch Bisection aus einem andern auf dem Limbo aufgezeichneten Bogen, nach §. 6. werde in dem folgenden §. angemerkt haben.

§. 10.

Nachdem ich über die mediate Abtheilung eines Bogens vermittelst seiner oder der Chorden mehrerer Bögen, die nöthigen Untersuchungen von §. 6 bis §. 9 angestellt, und einen Ausdruck construirt habe, nach welchem man die Genauigkeit berechnen kann, mit welcher ein Künstler einen Bogen auf diese Art auf den Theil-Kreys aufzeichnen kann, so werde ich nunmehro zu der in §. 6 angezeigten imediaten Theilungs-Methode übergehen und die Genauigkeit aufsuchen können, mit welcher ein Künstler einen Bogen durch eine oder mehrere Bisectionen aus einen bereits aufgezeichneten Bogen, auf den Theil-Kreys aufzuzeichnen im Stande ist.

Ich lege bey dieser Untersuchung ebenfalls Hr. Birds imediate Theilungs-Methode zum Grunde, und vergleiche die Genauigkeit, welche dieselbe in Rücksicht auf die wahre Lage der aufgezeichneten Theil-Puncte gewährt, mit der Genauigkeit, die Hr. Brander bey Abtheilung des nemlichen Kreyses erreicht, wenn er denselben nach seiner Methode immediate abtheilet.

Erinnert man sich an das, was in §. 1 über die Theilungs-Methoden beyder Künstler gesagt worden, so wird man finden, daß nach der Birdschen Neune, und nach der Branderschen in allem Eilf Fächer auf dem Theil-Kreyse vorkommen, und es begränzen nach

	das Fach.	die Puncte,	und es fallen in dieses Fach in allem zusammen Puncte.
Bird	Erste	0 und 4° 40′.	56
Brander		0 und 4° 40′.	56
Bird	Zweyte	4° 40′ und 10° 20′.	68
Brander		4° 40′ und 5°.	4
Bird	Dritte	10° 20′ und 15°.	96
Brander		5° und 10°.	60
Bird	Vierte	15° und 21° 20′.	76
Brander		10° und 15°.	60
Bird	Fünfte	21° 20′ und 30°.	104
Brander		15° und 21° 20′.	76
Bird	Sechste	30° und 42° 40′.	152
Brander		21° 20′ und 25° 30′.	50
Bird	Siebende	42° 40′ und 60°.	208
Brander		25° 30′ und 30°.	54
Bird	Achte	60° und 75°.	180
Brander		30° und 42° 40′.	152
Bird	Neunte	75° und 85° 20′.	126
Brander		42° 40′ und 60°.	208
.	Zehente	60° und 75°.	180
.	Eilfte	75° und 85° 20′.	136

Diese Puncte, welche ein jedes dieser Fächer begränzen, heiße ich künftighin die Normal-Puncte, und die Puncte, welche in diese Fächer hineinfallen, Zwischen-Puncte.

Wollte man annehmen, es wäre möglich, die Spitze des Bonzen bey Aufzeichnung dieser Zwischen-Puncte, auf das genaueste in den Durchschnitt-Punct der Bisections-Linien vor denselben, zu setzen, so müßte nothwendig folgen, daß der Werth der Incrementen aller Zwischen-Puncte abhängen müßte von dem Werth der Incrementen, der Normal-Puncte, zwischen welche dieselbe hinein fallen. Würde man also den Werth dieser Incrementen wissen, das ist, wüßte man den Theil anzugeben, auf welchen der Künstler bey Aufzeichnung der Normal-Puncte in Rücksicht ihrer wahren Lage, gewis ist, so käme es blos noch darauf an, auch das Gesetz ausfindig zu machen, nach welchem die Incrementen der Zwischen-Puncte von den Incrementen der Normal-Puncte abhangen, wenn man die Genauigkeit angeben will, mit welcher man in Rücksicht ihrer wahren Lage auf dem Theil-Kreyse gewis ist.

I. Was ersteres anbelangt, so habe ich bereits in §. 6 einen Ausdruck construirt, nach welchem man die Genauigkeit in Rücksicht der auf dem Limbo aufgezeichneten Normal-Puncte gewisser Bögen, berechnen kann: und in Rücksicht des letztern werde ich mich des in §. 9 angesetzten Ausdrucks N. 1 und N. 2 bedienen, und nach demselben den Grad der Genauigkeit berechnen vor alle Bögen, die imediate durch Bisection aus einem andern Bogen auf den Theil-Kreys aufgezeichnet worden sind, und verfahre hiebey folgendermaßen:

Ich bezeichne einmal

die Incremente der Bögen, von		durch	die Incremente ihrer Chorden.	durch
A	60°	dA	a	da.
B	15°	dB	b	db.
C	10° 20′	dC	c	dc.
D	4° 40′	dD	d	dd.
T	42° 40	dT	t	dt.
V	30°	dV	v	dv.
W	25° 30′	dW	w	dw.
G	21° 20′	dG	g	dg.
I	5°	dI	i	di.
L	10°	dL	l	dl.
P	85° 20′	dP	—	—
Q	10° 40′	dQ	—	—

II. Ich bezeichne ferner die Incremente der Gränz-Puncte oder Normal-Puncte eines jeden Faches in der größten Allgemeinheit mit $\overset{n}{\Delta X}$ und $\overset{n-1}{\Delta X}$, und drücke durch $\overset{z}{dX}$ das Incrementum eines Punctes aus, der nach der zten Bisection dieses Faches in demselben entstehet: es drücke ferner α° den Theil aus, auf welchen der Künstler bey mechanischer Aufzeichnung eines Puncts in den Durchschnitts-Punct zweyer Bisections-Bögen, gewis ist, daß der aufgezeichnete Punct auch wirklich senkrecht auf diesem Durchschnitts-Puncte stehe.

So wäre demnach $$\overset{z}{dX} = \tfrac{1}{2}\left[\frac{(2^{z}-1)}{2^{z-1}}\,\overset{n}{\Delta X} + \frac{1}{2^{z-1}}\,\overset{n-1}{\Delta X} + \frac{(2^{z-1}-1)}{2}\,\alpha^{\circ}\right] \pm \alpha^{\circ}$$

der Ausdruck, nach welchem ich die Incremente aller auf dem Theil-Kreys aufgezeichneten Puncte berechnen werde. Ich werde hiebey zuerst die Birdische Methode vornehmen, und sogleich mit Berechnung der Puncte, die in das erste Fach hinein fallen, den Anfang machen.

Ich nehme an, die Bisections-Theilung werde von der rechten gegen die linke vorgenommen, und der Theil-Kreys von 5 zu 5 Minuten getheilt. Es wäre also in dem angesetzten Ausdruck in diesem Falle $\overset{n-1}{\Delta X} = dD$, und $\overset{n}{\Delta X} = 0$, weil sich vor den Anfangs-Punct der Eintheilung kein Incrementum denken läßt, indem seine Lage auf dem Theil-Kreyse willkührlich ist; allein der Bogen von 4° 40′ ist nicht von 5 zu 5 Minuten theilbar, wohl aber der Bogen von 10° 40′. Ich setze also einmal $\overset{n-1}{\Delta X} = dQ = d.\ 10^{\circ}\,40'$, und heiße den Theil des Bogens P von 0 bis 10° 40′ das Erste Fundamental-Bisections-Fach desselben.

Wird dieses Fach so lange bisectirt, bis der Künstler auf einen Bogen von 5 Minuten bey dem Anfangs-Puncte der Eintheilung kommt, so entstehen hiedurch aufs neue in diesem Fache, sieben andere Fächer, die ich Ordnungen vom ersten Range heiße; und diese Ordnungen werden von den Puncten vor die Bögen 5° 20′, 2° 40′, 1° 20′, 0° 40′, 0° 20′, 0° 10′, 0° 5′ begränzt.

Um nun die Incrementen aller dieser Puncte zu finden, setze ich ferner in dem Ausdruck vor $d x^{z}$, in den Buchstaben z nach und nach alle ganze Zahlen, von der Zahl 1 an, bis auf die Zahl 7, und so wird in dem

Bey der Voraussetzung, daß

Ersten Fundamental-Fach, nach der

Bisection	das Increment des Bogens	gleich.
Ersten	5° 20′	$\frac{1}{2} dQ + \frac{2}{4} \alpha^{0}$.
Zweyten	2° 40′	$\frac{1}{4} dQ + \frac{3}{4} \alpha^{0}$.
Dritten	1° 20′	$\frac{1}{8} dQ + \frac{7}{4} \alpha^{0}$.
Vierten	0 40′	$\frac{1}{16} dQ + \frac{11}{4} \alpha^{0}$.
Fünften	0 20′	$\frac{1}{32} dQ + \frac{19}{4} \alpha^{0}$.
Sechsten	0 10′	$\frac{1}{64} dQ + \frac{35}{4} \alpha^{0}$.
Siebenten	0 5′	$\frac{1}{128} dQ + \frac{63}{4} \alpha^{0}$.

bey mechanischer Aufzeichnung dieser Puncte mit dem Bonzen keine Fehler begangen werden.

III. Wird nun ferner bisectirt

die erste Ordnung, so entstehen in derselben Ordnungen vom 2ten Rang, und es begränzen dieselbe die Puncte der Bögen 8°, 6° 40′, 6°, 5° 40′, 5° 30′, 5° 25′; auch ist in derselben

$$\Delta x^{n-1} = dQ. \quad \Delta x^{n} = \tfrac{1}{2} dQ + \tfrac{1}{2} \alpha^{0}.$$

und diesem zufolge das

Increment des Bogens	gleich.
8°	$\frac{3}{4} dQ + \frac{3}{2} \alpha^{0}$.
6° 40′	$\frac{5}{8} dQ + \frac{5}{4} \alpha^{0}$.
6°	$\frac{9}{16} dQ + \frac{13}{8} \alpha^{0}$.
5° 40′	$\frac{17}{32} dQ + \frac{43}{16} \alpha^{0}$.
5° 30′	$\frac{33}{64} dQ + \frac{151}{32} \alpha^{0}$.
5° 25′	$\frac{56}{128} dQ + \frac{559}{64} \alpha^{0}$.

die zweyte Ordnung, so entstehen in derselben Ordnungen vom 2ten Rang, und es begränzen dieselbe die Puncte der Bögen 4°, 3° 20′, 3°, 2° 50′, 2° 45′; auch ist in derselben

$$\Delta x^{n-1} = \tfrac{1}{2} dQ + \tfrac{1}{2} \alpha^{0}. \quad \Delta x^{n} = \tfrac{1}{4} dQ + \tfrac{3}{4} \alpha^{0}.$$

und diesem zufolge das

Increment des Bogens	gleich
4°	$\frac{3}{8} dQ + \frac{3}{8} \alpha^{0}$.
3° 20′	$\frac{5}{16} dQ + \frac{13}{16} \alpha^{0}$.
3°	$\frac{9}{32} dQ + \frac{45}{32} \alpha^{0}$.
2° 50′	$\frac{17}{64} dQ + \frac{157}{64} \alpha^{0}$.
2° 45′	$\frac{33}{128} dQ + \frac{573}{128} \alpha^{0}$.

die dritte Ordnung, so entstehen in derselben Ordnungen vom 2ten Rang, und es begränzen dieselbe die Puncte der Bögen
$2^\circ,\ 1^\circ\ 40',\ 1^\circ\ 30',\ 1^\circ\ 25'.$
auch ist in derselben

$$\overset{n-1}{\Delta x} = \tfrac{1}{4}\, dQ + \tfrac{3}{4}\,\alpha^0.\quad \overset{n}{\Delta x} = \tfrac{1}{8}\, dQ + \tfrac{7}{4}\,\alpha^0.$$

und diesem zufolge das

Increment des Bogens	gleich
$2^\circ.$	$\frac{3}{16}\, dQ + \frac{10}{8}\,\alpha^0.$
$1^\circ\ 40'.$	$\frac{5}{32}\, dQ + \frac{28}{16}\,\alpha^0.$
$1^\circ\ 30'.$	$\frac{9}{64}\, dQ + \frac{76}{32}\,\alpha^0.$
$1^\circ\ 25'.$	$\frac{17}{128}\, dQ + \frac{220}{64}\,\alpha^0.$

die vierte Ordnung, so entstehen in derselben Ordnungen vom 2ten Rang, und es begränzen dieselbe die Puncte der Bögen
$1^\circ,\ 0^\circ\ 50',\ 0^\circ\ 45'.$
auch ist in derselben

$$\overset{n-1}{\Delta x} = \tfrac{1}{8}\, dQ + \tfrac{7}{4}\,\alpha^0.\quad \overset{n}{\Delta x} = \tfrac{1}{16}\, dQ + \tfrac{11}{4}\,\alpha^0.$$

und diesem zufolge das

Increment des Bogens	gleich.
1°	$\frac{3}{32}\, dQ + \frac{18}{8}\,\alpha^0.$
$0^\circ\ 50'$	$\frac{5}{64}\, dQ + \frac{44}{16}\,\alpha^0.$
$0^\circ\ 45'$	$\frac{9}{128}\, dQ + \frac{108}{32}\,\alpha^0.$

die fünfte Ordnung, so entstehen in derselben Ordnungen vom 2ten Rang, und es begränzen dieselbe die Puncte der Bögen
$0^\circ\ 30',\ 0^\circ\ 25'.$
auch ist in derselben

$$\overset{n-1}{\Delta x} = \tfrac{1}{16}\, dQ + \tfrac{11}{4}\,\alpha^0.\quad \overset{n}{\Delta x} = \tfrac{1}{32}\, dQ + \tfrac{19}{4}\,\alpha^0.$$

und diesem zufolge das

Increment des Bogens	gleich
$0^\circ\ 30'$	$\frac{3}{64}\, dQ + \frac{30}{8}\,\alpha^0.$
$0^\circ\ 25'$	$\frac{5}{128}\, dQ + \frac{72}{16}\,\alpha^0.$

die sechste Ordnung, so entstehet in derselben eine Ordnung vom 2ten Rang, und es begränzet dieselbe der Punct des Bogens
$0^\circ\ 15'.$
auch ist in derselben

$$\overset{n-1}{\Delta x} = \tfrac{1}{32}\, dQ + \tfrac{19}{4}\,\alpha^0.\quad \overset{n}{\Delta x} = \tfrac{1}{64}\, dQ + \tfrac{35}{4}\,\alpha^0.$$

und diesem zufolge das

Increment des Bogens.	gleich.
$0^\circ\ 15'.$	$\frac{3}{128}\, dQ + \frac{54}{8}\,\alpha^0.$

Dieses wären nun einmal die Puncte vom 2ten Grad. Wird jede dieser Ordnungen neuerdings bisectirt, so entstehen in jeder derselben Puncte vom dritten Grad, und muß so lange mit bisectiren fortgefahren werden, bis dieses Erste Fundamental-Fach in lauter Bögen von 5 Minuten abgetheilt ist: Eben dieses muß auf die nemliche Art in jedem andern Fundamental-Fach geschehen, bis der Bogen von $85\frac{1}{3}$ Grad in 1024 gleiche Theile abgetheilt ist. Ich rechne nemlich, was die Bisections-Fächer anbetrift, unter das

Bisectionale Fundamental-Fach.	nach der Theilungs-Methode.	den Bogen von
Erste	Birds	0 bis $10^\circ\ 40'.$
Erste	Branders	0 bis $10^\circ\ 40'.$
Zweyte	Birds	$10^\circ\ 40'$ bis $21^\circ\ 20'.$
Zweyte	Branders	$10^\circ\ 40'$ bis $21^\circ\ 20'.$
Dritte	Birds	$21^\circ\ 20'$ bis $42^\circ\ 40'.$
Dritte	Branders	$21^\circ\ 20'$ bis $42^\circ\ 40'.$

Bisectionale Fundamental-Fach.	nach der Theilungs Methode.	den Bogen von
Vierte	Bird	42° 40′ bis 85° 20′.
Vierte	Brander	42° 40′ bis 85° 20′.
Fünfte	Bird	85° 20′ bis 90°.
Fünfte	Brander	85° 20′ bis 90°.

Ich habe nach dem eben angezeigten Verfahren, nach dem Ausdruck vor $d\overset{z}{x}$ die Incremente der Zwischenpuncte vor jedes dieser Fächer berechnet, und will dieselbe auch hieher setzen, wie ich dieselbe vor den Fall, da die Theile α° sich gegen einander aufgehoben haben, vor Bögen von ganzen Graden befunden habe. Es liegt bey dieser Berechnung die Birdische Theilungs-Methode zum Grunde, und ich werde aus dieser Berechnung Gelegenheit nehmen, die Genauigkeit der Birdischen immediaten Theilungs-Methode, mit der Branderschen immediaten Theilungs-Methode zu vergleichen. Es ist ferner bey dieser Berechnung nicht auf den Grad der Ausdehnung der Masse des Quadranten Rücksicht genommen worden, da bey diesem Theilungs-Geschäffte von dieser Eigenschaft der Masse des Quadranten, auf die Lage der Puncte keine Fehler entstehen können, indem sich die Größe jedes Bogens gleichförmig ändert, und man rechnen darf, daß der Künstler bey Aufzeichnung eines Punctes keine Zeit verliert, jede Bisections-Linie, durch welche der Punct entstehet, in gleichen Zeit-Theilen auf den Theil-Kreys zu ziehen.

So wäre denn nun das

Increment des Bogens	gleich	Increment des Bogens	gleich
1°	$\frac{3}{32}\,dQ + \frac{18}{8}\,\alpha^\circ$	19°	$\frac{1}{16}\,(3\,dQ + 12\,dG)$
2°	$\frac{3}{16}\,dQ + \frac{10}{8}\,\alpha^\circ$	20°	$\frac{1}{8}\,(1\,dQ + 7\,dG)$
3°	$\frac{9}{32}\,dQ + \frac{45}{32}\,\alpha^\circ$	21°	$\frac{1}{32}\,(dQ + 31\,dG)$
4°	$\frac{3}{8}\,dQ + \frac{3}{8}\,\alpha^\circ$	22°	$\frac{1}{16}\,(15\,dQ + 2\,dU)$
5°	$\frac{15}{32}\,dQ + \frac{23}{16}\,\alpha^\circ = dI$	23°	$\frac{1}{32}\,(27\,dG + 8\,dU)$
6°	$\frac{9}{16}\,dQ + \frac{13}{8}\,\alpha^\circ$	24°	$\frac{1}{4}\,(3\,dG + 2\,dU)$
7°	$\frac{21}{32}\,dQ + \frac{21}{16}\,\alpha^\circ$	25°	$\frac{1}{32}\,(23\,dG + 20\,dU)$
8°	$\frac{3}{4}\,dQ + \frac{3}{2}\,\alpha^\circ$	26°	$\frac{1}{16}\,(9\,dG + 8\,dU)$
9°	$\frac{27}{32}\,dQ + \frac{17}{16}\,\alpha^\circ$	27°	$\frac{1}{32}\,(15\,dG + 17\,dU)$
10°	$\frac{15}{16}\,dQ + \frac{3}{8}\,\alpha^\circ = dL$	28°	$\frac{1}{8}\,(3\,dG + 5\,dU)$
11°	$\frac{1}{32}\,(31\,dQ + dG)$	29°	$\frac{1}{32}\,(9\,dG + 11\,dU)$
12°	$\frac{1}{8}\,(7\,dQ + dG)$	30°	$\frac{1}{16}\,(3\,dG + 13\,dU) = dV$
13°	$\frac{1}{32}\,(27\,dQ + 5\,dG)$	31°	$\frac{1}{32}\,(3\,dG + 29\,dU)$
14°	$\frac{1}{16}\,(11\,dQ + 5\,dG)$	32°	$\frac{1}{2}\,(dG + dT) = dU$
15°	$\frac{1}{32}\,(19\,dQ + 13\,dG) = dB.$	33°	$\frac{1}{32}\,(29\,dU + 2\,dT)$
16°	$\frac{1}{2}\,(dQ + dG)$	34°	$\frac{1}{16}\,(13\,dU + 3\,dT)$
17°	$\frac{1}{32}\,(13\,dQ + 19\,dG)$	35°	$\frac{1}{16}\,(14\,dU + 6\,dT)$
18°	$\frac{1}{16}\,(5\,dQ + 11\,dG)$	36°	$\frac{1}{8}\,(5\,dU + 3\,dT)$

Increment des Bogens	gleich	Increment des Bogens	gleich
37°	$\frac{1}{16}(17\,dU + 15\,dT)$	67°	$\frac{1}{64}(55\,dO + 9\,dP)$
38°	$\frac{1}{16}(7\,dU + 9\,dT)$	68°	$\frac{1}{16}(13\,dO + 3\,dP)$
39°	$\frac{1}{32}(11\,dU + 21\,dT)$	69°	$\frac{1}{64}(49\,dO + 15\,dP)$
40°	$\frac{1}{4}(dU + 3\,dT)$	70°	$\frac{1}{32}(23\,dO + 9\,dP)$
41°	$\frac{1}{32}(5\,dU + 27\,dT)$	71°	$\frac{1}{64}(43\,dO + 21\,dP)$
42°	$\frac{1}{16}(3\,dU + 13\,dT)$	72°	$\frac{1}{8}(5\,dO + 3\,dP)$
43°	$\frac{1}{64}(63\,dT + 1\,dO)$	73°	$\frac{1}{64}(37\,dO + 27\,dP)$
44°	$\frac{1}{16}(15\,dT + 1\,dO)$	74°	$\frac{1}{32}(17\,dO + 15\,dP)$
45°	$\frac{1}{64}(57\,dT + 7\,dO)$	75°	$dA + dB.$
46°	$\frac{1}{32}(27\,dT + 5\,dO)$	76°	$\frac{1}{16}(7\,dO + 9\,dP)$
47°	$\frac{1}{64}(51\,dT + 13\,dO)$	77°	$\frac{1}{64}(25\,dO + 39\,dP)$
48°	$\frac{1}{4}(3\,dT + 1\,dO)$	78°	$\frac{1}{32}(11\,dO + 21\,dP)$
49°	$\frac{1}{64}(45\,dT + 19\,dO)$	79°	$\frac{1}{64}(19\,dO + 45\,dP)$
50°	$\frac{1}{32}(21\,dT + 11\,dO)$	80°	$\frac{1}{4}(dO + 3\,dP)$
51°	$\frac{1}{64}(39\,dT + 25\,dO)$	81°	$\frac{1}{64}(13\,dO + 51\,dP)$
52°	$\frac{1}{16}(9\,dT + 7\,dO)$	82°	$\frac{1}{32}(5\,dO + 29\,dP)$
53°	$\frac{1}{64}(33\,dT + 27\,dO)$	83°	$\frac{1}{64}(7\,dO + 57\,dP)$
54°	$\frac{1}{32}(15\,dT + 17\,dO)$	84°	$\frac{1}{16}(dO + 15\,dP)$
55°	$\frac{1}{64}(27\,dT + 41\,dO)$	85°	$\frac{1}{64}(dO + 57\,dP)$
56°	$\frac{1}{8}(3\,dT + 7\,dO)$	86°	$\frac{1}{16}(15\,dP + dH)$
57°	$\frac{1}{64}(21\,dT + 53\,dO)$	87°	$\frac{1}{32}(27\,dP + 5\,dH)$
58°	$\frac{1}{32}(9\,dT + 25\,dO)$	88°	$\frac{1}{4}(3\,dP + dH)$
59°	$\frac{1}{16}(3\,dT + 9\,dO)$	89°	$\frac{1}{32}(21\,dP + 11\,dH)$
60°	$dA.$	90°	$dA + dV.$
61°	$\frac{1}{4}(3\,dA + dO)$	91°	$\frac{1}{32}(15\,dP + 17\,dH)$
62°	$\frac{1}{2}(dA + dO)$	92°	$\frac{1}{8}(3\,dP + 5\,dH)$
63°	$\frac{1}{8}(dA + 5\,dO)$	93°	$\frac{1}{32}(9\,dP + 23\,dH)$
64°	$\frac{1}{2}(dT + dP)$	94°	$\frac{1}{16}(3\,dP + 13\,dH)$
65°	$\frac{1}{64}(45\,dO + 11\,dP)$	95°	$\frac{1}{32}(3\,dP + 25\,dH)$
66°	$\frac{1}{32}(29\,dO + 3\,dP)$	96°	$dP + dQ = dH$

$dQ = \frac{1}{4}(dT + 6\alpha^{\circ})$; $dG = \frac{1}{2}(dT + 2\alpha^{\circ})$ $dO = \frac{1}{4}(3\,dT + dP) + \frac{3}{2}\alpha^{\circ}$. $dU = \frac{3}{4}(dT + 14\alpha^{\circ})$

§. 11.

Alles was bisher gesagt worden, betrift einzig und allein, die Untersuchung über den Grad der Genauigkeit, welche der Künstler bey mediater sowohl, als imediater Abtheilung eines Viertel-Bogens in seine 90 Grade, erreichen kann, wenn er von seiner Seite allen möglichen Fleiß, Sorgfalt und Geschicklichkeit anwendet: ich könnte also auch diese Abhandlung hiemit beschliessen, da ich, wie ich glaube, die Regeln und Ausdrücke, nach welchen der Calcul bey dieser Untersuchung geführt werder muß, einfach dargestellt und zum Gebrauche bequem eingerichtet habe. Allein um diese Untersuchung vollständig zu machen, will ich auch noch die Genauigkeit auffsuchen, mit welcher ein Künstler die Nonius-Abtheilungen vor diesen Bogen von 90 Graden, abtheilen kann, und sodann noch über die Genauigkeit bey Abtheilung eines Viertel-Bogens in 96 Theile und dessen Nonius-Abtheilung, einige Bemerkungen machen. Ich fange also mit ersterer Untersuchung an, und bemerke folgendes:

Ein Künstler will einen Nonium abtheilen, der nach seiner Sprache ε Theile eines Grades geben soll; ein Theil auf dem Theil-Kreys von den gleichen Theilen, in welche der Bogen von $85\frac{1}{3}$ Graden abgetheilt ist, mißt λ Theile eines Grades, und entsteht, wenn ein bisectionaler Bogen P, q mal nach einander bisectirt wird, es ist also $\lambda = \frac{P}{2^q}$; und ein Theil auf dem Nonio $\frac{P}{2^q} + \varepsilon$, gleich $\frac{P + 2^q \varepsilon}{2^q}$; Ein Theil auf dem Nonio ist also um den Theil ε größer, als auf dem Theil-Kreyse; und es fragt sich nun, wie viel Theile der Künstler von dem Theil-Kreys abnehmen, und in wie viel Theile er dieselbe auf dem Nonio abtheilen müsse, daß ein Theil auf demselben genau $\frac{P + 2^q \varepsilon}{2^q}$, Theile eines Grades messe?

Wäre die Anzahl der Theile, welche der Künstler von dem Theil-Kreys abnehmen soll, gleich x, so ist die Anzahl der Theile, in welche er dieselbe auf der Nonius-Platte abtheilen muß, nach der Theorie der Nonius-Abtheilung, gleich $(x - 1)$ Theile, und $\frac{P}{2^q . (x-1)} = \varepsilon$, und $x = \frac{P}{2^q . \varepsilon} + 1.$

So viel Theile müßte also der Künstler von dem Theil-Kreyse abnehmen, und dieselbe auf der Nonius-Platte in $\frac{P}{2^q . \varepsilon}$ Theile abtheilen.

Der ganze Bogen der Nonius-Abtheilung wird also $\frac{(P + 2^q \varepsilon)}{2^q} \frac{P}{2^q . \varepsilon}$ Theile eines Grades messen.

Der Künstler weiß also nunmehro, wie viel Theile er von dem Theil-Kreys abnehmen, und in wie viel Theile er dieselbe theilen muß, daß sein Nonius genau ε Theile eines Grades geben kann; allein nun entsteht vor ihn die Hauptfrage: ob dieser Bogen auch rein bisectional seye, das ist, ob sich derselbe durch immediate Abtheilung in einzelne Theile theilen lasse? Ist dieses wirklich der Fall, so wird die Abtheilung auch immediate unternommen; ist dieses aber nicht, so nimmt der Künstler zu folgendem Hülfsmittel seine Zußucht, und sucht durch immediate Abtheilung eines Auxiliar = Bisectional = Bogens, die Theile des inbisectionalen Bogens herzuleiten. Dieser Auxiliar = Bogen sey ψ, und auf ihn gehen $\frac{2^p \cdot (P + 2\varepsilon)^q}{2^q}$ solcher Theile, dergleichen den wirklichen Bogen des Nonius $\frac{(P + 2\varepsilon)^q}{2^q} \cdot \frac{P}{2^q . \varepsilon.}$ Theile eines Grades ausmachen.

Es ist also der Bogen $\psi = \frac{2^p \cdot (P + 2 . \varepsilon)^q}{2^q}$; und es stehet dem Künstler nunmehro frey, in den Buchstaben p eine jede ganze Zahl zu stellen, die in den Ausdruck vor ψ substituirt einen Bogen gibt, der größer als der Bogen $\frac{(P + 2\varepsilon)^q}{2^q} \cdot \frac{P}{2^q . \varepsilon.}$ ist. Dieser Bogen wird sich jederzeit immediate in 2^p Theile abtheilen lassen, und die letzten $\frac{P}{2^q . \varepsilon.}$ Theile desselben machen sodann die wirkliche Nonius = Abtheilung vor den Theil = Kreys aus.

III. In wieferne aber der Künstler bey dieser immediaten Abtheilung des Nonii, in Rücksicht der wahren Lage der Theil = Puncte vor denselben, durch welche nachhero wie gewöhnlich Tangenten gezogen werden, gewis seyn könne, untersuche ich also: Der Künstler muß, um den Bogen ψ auf einen Theil = Kreys, dessen Halbmesser ϱ seye, auftragen zu können, die Chorde u desselben nach Theilen dieses Halbmessers berechnen, und die Länge derselben von einem Masstab abnehmen. Nun aber bleibt der Künstler bey Abmessung der Chorde u auf den Theil du, und bey Bestimmung des Halbmessers ϱ bis auf den Theil $d\varrho$ in Rücksicht deren wahren Länge gewis, und ich setze ferner, er bleibe aus dieser Ursache, in Ansehung der wahren Größe des Bogens ψ, so wie er denselben auf den Theil = Kreys getragen hat, bis auf den Theil oder das Increment $d\psi$ gewis.

Es ist ferner nach §. 6. $d\psi = \frac{du - d\varrho \text{ Sin } \psi}{\varrho \text{ Cos. } \frac{1}{2} \psi.}$; oder wenn $d\varrho$ negativ genommen wird, ist $d\psi = \frac{du + d\varrho \text{ Sin } \psi.}{\varrho \text{ Cos. } \frac{1}{2} \psi.}$

Es ist ferner, weil wegen der wenigen Größe, die dieser Bogen ψ jederzeit haben mag, auf den Theil nicht Rücksicht genommen werden darf, auf welchen der Künstler in Ansehung der verschiedenen Ausdehnung der Masse, auf welche der Theil = Kreys gerissen wird, und der Masse des Masstabs, von welcher die Chorde u abgenommen wird, in der wahren Länge der=

selben gewis ist, so ist auch $du = d\varrho$ und demnach $d\psi = \frac{(1 + \text{Sin}\,\psi).\ d\varrho}{\varrho\ \text{Cos}\ \frac{1}{2}\psi}$; weil nun $1 + \text{Sin}\,\psi = \frac{\text{Cos}\ \frac{1}{2}\psi + \text{Sin}\,\psi}{\text{Cos}\ \frac{1}{2}\psi}$ und $\text{Cos}\ \frac{1}{2}\psi + \text{Sin}\,\psi = 2\ \text{Sin}\,(\frac{1}{2}\psi + 45^\circ).\ \text{Cos}\,(\frac{3}{4}\psi - 45^\circ)$; so ist auch $d\psi = \frac{2.\ \text{Sin}\,(\frac{1}{2}\psi + 45^\circ).\ \text{Cos}\,(\frac{3}{4}\psi - 45^\circ).\ d\varrho}{\varrho\ \text{Cos}\ \frac{1}{2}\psi^2}$.

Von dem Werthe dieses kleinen Bogens, und von der Genauigkeit, mit welcher jeder Punct auf dem Theil-Riß sichtbar gemacht werden kann, wird also die Genauigkeit in Rücksicht der wahren Lage der Puncte, welche die Nonius-Abtheilung ausmachen, abhangen. Ich werde diese Genauigkeit vor den Fall untersuchen, den Hr. Bird in der erwehnten Beschreibung seiner Theilungs-Methode anführt, da er das Verfahren bey Abtheilung des Nonii vor den Mauerquadranten in Greenwich beschreibt. Es war dieser Quadrant von fünf zu fünf Minuten abgetheilt; vor denselben sollte ein Nonius abgetheilt werden, der eine halbe Minute angibt, und Hr. Bird kam dadurch in die Verlegenheit einen Bogen von 11 Theilen des Theil-Kreyses in 10 gleiche Theile abzutheilen, welche Zahl nur durch 5 und 2 theilbar ist. Hr. Bird aber half sich bald aus dieser Verlegenheit heraus, indem er statt den Bogen von 55 Minuten in 10 Theile zu theilen, einen Auxiliar-Bogen von $2^\circ\ 56'$ in 32 gleiche Theile immediate abtheilte.

Es ist also in gegenwärtigem Falle in I, $\lambda = 5'$; $\varepsilon = \frac{1}{2}'$. $p = 5$. Nimmt man $P = 85^\circ\ 20'$, so ist $q = 10$, weil $\lambda = 5$.

Es könnte eben sowohl in dem Ausdruck vor ψ, $p = 4$ seyn, und dann würde der Auxiliar-Winkel von $88'$ in 16 Theile abzutheilen gewesen seyn. Hr. Bird nahm aber $p = 5$, und setzte also $\psi = 2^\circ\ 56'$, weil er glaubt, die Größe des Bogens vor den Nonium genauer zu bekommen, wenn er denselben durch immediate Bisection aus einem größern Bogen bestimmte.

Um nun die Genauigkeit angeben zu können, mit welcher Hr. Bird diesen Bogen abzutheilen im Stande war, lege ich hiebey den Ausdruck von dx^z §. 9. N. 2 zum Grunde, und suche nach demselben zuerst die Incremente der Puncte vom ersten Grad, 16, 8, 4, 2, 1 auf. Ich setze zu dem Ende in dem Ausdruck

$$\overset{z}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{(2^z - 1)}{2^{z-1}}\,\overset{n}{\Delta X} + \frac{1}{2^{z-1}}\,\overset{n-1}{\Delta X} + \frac{(2^{z-1} - 1)}{2}\,\alpha^\circ\right] \pm \alpha^\circ.$$

den Theil $\overset{n-1}{\Delta X} = d\psi$ und $\overset{n}{\Delta X} = 0$; weil der Anfangs-Punct der Eintheilung willkührlich ist; und es wird diesem zufolge

das Increment des Bogens	gleich.	und es fällt das Increment des Bogens	zwischen die Incremente der Bögen
$1^\circ\ 28'$	$\frac{1}{2}(d\psi \pm 2\,\alpha^\circ)$	$0^\circ\ 49', 5$ und $0^\circ\ 55'$	$0^\circ\ 44'$ und $1^\circ\ 28'$
$0^\circ\ 44'$	$\frac{1}{4}(d\psi \pm 5\,\alpha^\circ)$	$0^\circ\ 27', 5$ und $0\ 33$	$0^\circ\ 44'$ und $0^\circ\ 22'$
$0^\circ\ 22'$	$\frac{1}{8}(d\psi \pm 14\,\alpha^\circ)$	$0^\circ\ 38', 5$	$0^\circ\ 44'$ und $0^\circ\ 33'$
$0^\circ\ 11'$	$\frac{1}{16}(d\psi \pm 36\,\alpha^\circ)$	$0'\ 16', 5$	$0^\circ\ 22'$ und $0^\circ\ 11'$
$5^\circ\ 5', 5$	$\frac{1}{32}(d\psi \pm 136\,\alpha^\circ)$		

und es ist nach der Ordnung der Theil-Puncte, das

Increment des Bogens	gleich.	Increment des Bogens	gleich.
$0\ 5', 5$	$\frac{1}{32}(d\psi + 136\ \alpha^\circ)$	$0\ 33'$	$\frac{1}{16}(3\ d\psi + 24\ \alpha^\circ)$
$0\ 11'$	$\frac{1}{16}(d\psi + 36\ \alpha^\circ)$	$0\ 38', 5$	$\frac{1}{32}(7\ d\psi + 44\ \alpha^\circ)$
$0\ 16', 5$	$\frac{1}{32}(3\ d\psi + 64\ \alpha^\circ)$	$0\ 44'$	$\frac{1}{4}(d\psi + 5\ \alpha^\circ)$
$0\ 22'$	$\frac{1}{8}(d\psi + 14\ \alpha^\circ)$	$0\ 49', 5$	$\frac{1}{32}(9\ d\psi + 63\ \alpha^\circ)$
$0\ 27', 5$	$\frac{1}{32}(5\ d\psi + 52\ \alpha^\circ)$	$0\ 55'$	$\frac{1}{16}(5\ d\psi + 23\ \alpha^\circ)$

Formeln vor die Nonius-Abtheilung der 90 Theilung.

III. Nach diesen Formeln ließe sich also die Genauigkeit berechnen, mit welcher Hr. Bird die Puncte vor die Nonius-Abtheilung nach dem eben angezeigten Verfahren aufzeichnen kann.

Eine andere Gestalt haben diejenigen Formeln, nach welchen man die Genauigkeit bestimmen kann, die Hr. Brander bey Aufzeichnung einer Nonius-Abtheilung nach seiner Methode erreicht. Hr. Brander zeichnet nemlich weder mediate noch immediate diese Puncte auf die Ebene der Nonius-Platte oder des Limbi des Quadranten; sondern bestimmt die Lage der Theil-Striche auf der Nonius-Platte selbst, durch Umgänge einer Mikrometer-Schraube. Ich habe in meinen Analytischen Betrachtungen über den Grad der Genauigkeit bey Abmessung der Horizontal-Winkel auf dem Felde, einen Ausdruck construirt, nach welchem man die Genauigkeit aufsuchen kann, die ein Künstler erreicht, wenn er eine Länge durch Schrauben-Revolutionen in gewisse Theile abtheilet; werde also hier hievon nichts weiter erinnern.

Hr. Brander verfertigte dergleichen Nonius-Abtheilungen mit großer Genauigkeit: er zeichnete dieselbe durch äußerst feine Theil-Striche auf die Ebene eines Glases, vermittelst seiner Theil-Maschine, von welcher er eine gewissenhafte Beschreibung ihrer Bestand-Theile und seines Verfahrens bey dergleichen Abtheilungen mit derselben, einige Jahre vor seinem Tode der Churbayrischen Academie der Wissenschaften übergeben hat.

Ein Nonius dieser Art, den Hr. Brander an dem Azimuthal-Quadranten von ungefehr 3 Fuß im Halbmesser angebracht hatte, der in seinem Laboratorio im Jahr 1768 verfertiget wurde, und seit der Zeit auf dem Observatorio in Ingolstadt aufgestellt ist, faßte einen Bogen von 90' in sich, und Hr. Brander theilte die Chorde desselben auf seiner Theil-Maschine durch Schrauben-Umgänge auf der Ebene eines Glases in 10 gleiche Theile, so daß dieser Nonius einzelne Minuten gab, auf einem Quadranten, der nach der im §. 2. angezeigten Theil-Methode von 10 zu 10 Minuten abgetheilt war. Auf diesem Nonio mas die Dicke eines Theil-Striches nicht mehr als $\frac{1}{20}$ eines Scrupels, und es konnte ohnerachtet dieser äußersten Feinheit jeder Theil-Strich noch deutlich auch ohne Vergrößerungs-Glas gesehen werden, wenn dieser Nonius in seiner Büchse in der Alhidade auf dem Limbo sich befand; auch waren, weil das Glas selbsten eine sehr geringe Dicke hatte, und der Ebene des Limbi bis zum Berühren nahe gebracht werden konnte, von der Parallaxi keine Fehler in Rücksicht des Standes jedes Theil-Striches des Nonii über dem Theil-Strich auf dem Limbo zu befürchten, und jeder dieser letztern konnte vermittelst derselben auch ohne Vergrößerungs-Glas noch in zwey gleiche Theile geschnitten werden.

IV. Was die sogenannte 96 Theilung auf dem Limbo betrift, so pflegt Hr. Bird dieselbe auf allen Werkzeugen zum Winkelmessen, die von einiger Impordance sind, anzubringen, und theilet den Viertelsbogen auf eben die Weise in 96 Theile, wie vorhin von der 90 Theilung gezeigt worden. Er trägt nemlich die Bögen von 64 und 32 Theilen mediate durch ihre Chorden auf, und bestimmt aus denselben den Punct von 96 Theilen: dieser Bogen wird nun ferner in 1536 gleiche Theile abgetheilt, und es fallen in jedes von den drey Fundamental-Bisections-Fächern 512 Puncte, welche alle immediate durch Bisection auf dem Theil-Kreyse bestimmt werden, aus den Normal-Puncten vor die Bögen von 32, 64, 96 Theilen des Viertelsbogen.

Was anbelangt die Genauigkeit in Rücksicht der wahren Lage dieser Normal-Puncte, so kann dieselbe nach der in §. 6. N. 1. angesetzten allgemeinen Fundamental-Formel berechnet werden; wenn man in den Ausdruck vor den Bogen X die Bögen C, A, und vor dx die Incremente setzt, auf welche man in Ansehung der wahren Länge der Chorden dieser Bögen gewis ist.

Die Incremente aller Zwischen-Puncte aber können nach der in §. 9. N. 2 angesetzten Formel berechnet werden, auf eben die Art, wie ich in §. 10 vor den Bogen von 10° 20′ der 90 Theilung gezeigt habe. Eben dieses gilt auch vor die Nonius-Abtheilung dieser 96 Theilung. Es wird hiebey der Auxiliar-Winkel ψ in I gleich o, weil der Bogen des Nonii vor diese Abtheilung jederzeit in sich selbst bisectional ist, und in dem Ausdruck vor $\overset{z}{dx}$ in §. 9 wird, was die Punte in demselben vom ersten Grade anbetrift, $\overset{n}{\Delta x} = \overset{n-1}{\Delta x} = \alpha^{\circ}$, weil Hr. Bird nach seinem Verfahren bey Aufzeichnung der Gränzen vor diesen Bogen, bey jeder derselben nur bis auf den Theil α° gewis ist.

§. 12.

Das letzte, was mir bey dieser Untersuchung noch übrig bleibt, ist dieses: daß ich mich bemühe, den allgemeinen Ausdruck vor dX in §. 6. 1. von welchem in jedem Falle die Genauigkeit in Rücksicht der wahren Größe eines auf den Theil-Kreys aufgezeichneten Bogens abhängt, in Zahlen aufzulösen, und dieses soll nun in diesem §. vorgenommen werden.

Ich werde in dieser Absicht zuerst die Genauigkeit berechnen, mit welcher Hr. Bird nach seiner Methode die Normal-Puncte mediate durch die Chorden der Bögen, welche sie begränzen, auf den Theil-Kreys aufzeichnen kann, und sodann auch die Genauigkeit aufsuchen, welche Hr. Bird bey Aufzeichnung dieser Puncte erreichen würde, wenn er dieselbe nach der Branderschen Methode aufzeichnete.

I. Das erste, was sich mir hiebey zur Untersuchung darbietet, ist dieses: daß ich die Gesichts-Schärfe Hr. Birds aufsuche, um denjenigen kleinen Punct α angeben zu können, den Hr. Bird in der Gesichtsferne γ noch deutlich zu sehen vermag. Diesen Punct nun suche aus jener Stelle in Hrn. Birds Beschreibung seiner Theil-Methode, herzuleiten, da er sagt, bey Gelegenheit, wo er die Abtheilung seines Masstabs beschreibt, „daß er mit einer Linse von ein Zoll

„Brenn-Weite auf seinem Masstab noch den dritten Theil von dem Tausendsten eines Zolles schä„tzen könne." In Rücksicht dieser Angabe wäre also in allen bisher angesetzten Formeln der Werth von $\alpha^{o} = \frac{\alpha}{\mu} = 0,\ 00003$ eines Schuhes.

Wenn nun die Gesichtsferne Hr. Birds die gewöhnliche Gesichtsferne der Künstler, deren Auge gewohnt ist, immer nahe Gegenstände zu betrachten, nemlich ungefehr $\frac{1}{2}$ Fuß wäre, so würde ihm diese Linse jeden Gegenstand ungefehr 6mal größer vorstellen, und Hr. Bird müßte diesem zufolge in dieser Gesichtsferne mit bloßem Auge einen Punct von der Dimension $0,00003 \times 6$ oder $0,00018$ eines Schuhes noch deutlich sehen; und sein Gesichts-Winkel würde nach §. 3. einem Bogen $2.\ 0,00018.\ 206264$ oder $1'\ 14''$ gleich seyn; es wäre also in §. 8. $\mu = 6$; $\gamma = \frac{1}{2}$; $\Phi = 74''$.

II. Ich setze ferner, es sey die Dicke der Cirkel-Spitzen, deren sich Hr. Bird bey dem Theilungs-Geschäffte bedienet, die möglichst kleinste, bey welcher man während der Abtheilung dieselbe bey einer Masse von gehärtetem Stahl erhalten kann; und nehme an, es sey diese Dicke gleich einem Punct von der Dimension $0',00005$ eines Schuhes. Es würde also in §. 4. I. und §. 8. $\beta = 0',00005$.

III. In wieferne nun diese beyde Stücke Einfluß auf die richtige Abtheilung eines Quadranten haben mögen, will ich nunmehro untersuchen, und sogleich den Anfang machen, mit Berechnung der Genauigkeit, mit welcher Hr. Bird den Chorden-Masstab, und die Nonius-Abtheilung vor denselben, abzutheilen im Stande seyn möchte: ich werde mich aber hiebey blos auf diejenigen Puncte einschränken, die Hr. Bird bey Abmessung der Chorden der Bögen von $60°$, $30°$, $15°$, $10°\ 20'$ in den Cirkel fallen, und die Incremente derselben nach Anleitung der Beschreibung, die Hr. Bird von seiner Theil-Methode, nach welcher dieser Masstab und seine Nonius-Abtheilung abtheilte, gibt, berechnen: im wesentlichen besteht dieselbe in folgendem:

„Hr. Bird nahm eine Länge von 5, 12 Fuß zwischen den Spitzen eines Stangen-Cirkels „von einem Masstab ab, und trug dieselbe dreymal an einander auf eine Linie, die mit äußer„ster Feinheit auf die Ebene eines meßingnen Lineals gezogen war: er bestimmte also auf dem„selben hiedurch die Gränzen einer Linie von $15'$, 36 Fuß Länge.

„Mit drey andern Stangen-Cirkeln hatte er ferner Längen von 2, 56, 1, 28 und $0'$, 64 „Fuß abgenommen, und diese trug er mit möglichster Fertigkeit in diese Linien, um sich nicht „den Fehlern auszusetzen, die bey einem Lineal von so ansehnlicher Länge, bey Abtheilungen ei„ner Linie von $15'$, 36 auf demselben, von der Ausdehnung oder Zusammenziehung zu befürch„ten sind. Sein Masstab bestund also anfänglich aus drey Haupt- oder Fundamental-Bi„sections-Fächern, welche von den Puncten 0, und 512; 512 und 1024; 1024 und 1536 „begränzt wurden. Diese Fächer bezeichne ihrer Ordnung nach mit I, II, III.

IV. Jedes dieser Fächer wurde nun in 8 andere, oder Neben-Fächer abgetheilt, und es begränzten in dem

Fundam. Fach.	die Puncte	das Nebenfach	Fundm. Fach	die Puncte	das Nebenfach.	Fundm. Fach	die Puncte	das Nebenfach
I.	0 u. 64	Erste	II.	512 u. 576	Erste	III.	1024 u. 1088	Erste
	64 u. 128	Zweyte		576 u. 640	Zweyte		1088 u. 1152	Zweyte
	128 u. 192	Dritte		642 u. 704	Dritte		1152 u. 1216	Dritte
	192 u. 256	Vierte		704 u. 768	Vierte		1216 u. 1280	Vierte
	256 u. 320	Fünfte		768 u. 832	Fünfte		1280 u. 1344	Fünfte
	320 u. 384	Sechste		832 u. 896	Sechste		1344 u. 1418	Sechste
	384 u. 448	Siebende		896 u. 960	Siebende		1418 u. 1472	Siebende
	448 u. 512	Achte		960 u. 1042	Achte		1472 u. 1536	Achte

Jedes dieser Neben-Fächer wurde nun ferner durch immediate Bisection mit dem Feder-Cirkel in 64 gleiche Theile abgetheilt, so daß also ein jeder von diesen Theilen eine Länge von 0, 1 eines Zolles in sich hielt.

Vor diesen Masstab verfertigte Hr. Bird eine Nonius-Abtheilung, welche $\frac{1}{1000}$ eines Zolles gab; indem er 101 Theile des Masstabs in 100 gleiche Theile auf der Nonius-Platte abtheilte, und also jeder Theil auf demselben um $\frac{1}{100}$ eines Theil des Masstabes größer als auf dem Masstabe selbsten war. Diese Länge von 101 Theilen des Masstabes in 100 gleiche Theile abzutheilen, bediente sich Hr. Bird einer Hilfs-Weite, die ich mit ω bezeichne. Setzet man in §. 11, $\lambda = \frac{1}{10}$ Zoll; $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ Zoll, so kann man nach dem Ausdruck $\frac{(\lambda + \varepsilon)}{\varepsilon} 2^{p} = \omega$, diese Hilfs-Weite finden, wenn man in p eine ganze Zahl substituirt, die den Ausdruck vor ω nicht kleiner als 101 λ gibt: es würde also in diesem Fall der kleinste Werth von $p = 7$, also $\omega = 129, 28$. Hr. Bird nimmt aber $p = 8$, weil er glaubt, die Theile vor den Nonius genauer zu bestimmen, wenn er dieselbe durch Bisection aus einer größern Länge findet; setzt also $\omega = 258, 16$, und theilt diese Länge durch immediate Bisection in 256 gleiche Theile ab. Von diesen Theilen schneidet er 100 vor die Nonius-Abtheilung ab, und erhält auf diesem Wege der Bisection die Größe dieser Theile weit genauer, als wenn er die unbisectionale Länge von $\frac{101}{10}$ eines Zolles, durch multisection in 100 Theile getheilt hätte. Vermittelst dieses Masstabes und Nonius-Abtheilung wurde Hr. Bird in den Stand gesetzt, die Länge einer Chorde auf demselben nach 10000 Theilen eines Schuhes, und vermittelst einer Linse von 1 Zoll Brenn-Weite, nach 30000 Theilen eines Schuhes abzumessen.

V. Nun mas nach diesem Masstabe auf dem Quadranten, dessen Abtheilung Hr. Bird beschreibt, die Länge der

Chorde von	Theile dieses Masstabes
60°	959, 358.
20°	496, 615

Chorde von	Theile dieses Masstabes
15°	250, 448.
$10^\circ\ 20'$	172, 79047.
$42^\circ\ 40'$	698, 0318
$4^\circ\ 40'$	78, 1186.

und Hr. Bird mußte auf das genaueste zusammen bringen bey Abmessung

der Chorde des Bogen von	auf dem Masstab den Theil-Strich	auf dem Nonio mit dem Theilstrich	und es fällt auf dem Masstab der Punct	in das Nebenfach	zwischen die Puncte
60°	1924	36	1924	0te	—
30	536	61	536	1te	512 und 576
$15'$	306	46	306	5te	320 und 256
$10^\circ\ 10'$	194	79	194	4te	192 und 256
$40^\circ\ 40'$	796	3	796	5te	768 und 832
$4^\circ\ 40'$	168	11	168	3te	128 und 192

VI. Von der mehr oder minder wahren Lage dieser Puncte auf dem Masstab und dem Nonio, würde also nach §. 9. V. auch die Genauigkeit in Rücksicht der wahren Länge jeder Chorde abhängen, wenn ich indessen annehme, es seye Hrn. Bird möglich, die Länge jeder Chorde, so wie dieselbe die Masstab- und Nonius-Theilung angiebt, mit aller Zuversicht mit dem Cirkel abzunehmen.

Diese Genauigkeit aber angeben zu können, wird es darauf ankommen, die Incremente dieser Puncte aufzusuchen; das ist: die Werthe von $\overset{a}{dx}$, $\overset{\mathfrak{a}}{dx}$, $\overset{b}{dx}$, $\overset{\mathfrak{b}}{dx}$, $\overset{c}{dx}$, $\overset{\mathfrak{c}}{dx}$ 2c. in §. 9. V. zu entwickeln. Von diesen werde nun zuerst die Incremente $\overset{a}{dx}$, $\overset{b}{dx}$, $\overset{c}{dx}$, $\overset{d}{dx}$ vornehmen, also nunmehro die Genauigkeit berechnen, mit welcher Hr. Bird diejenigen Puncte mochte auf den Masstab gezeichnet haben, die ihm bey Abmessung der Chorden der Bögen von 60°, 30°, 15°, $10^\circ\ 20'$, $42^\circ\ 40'$, $4^\circ\ 40'$ auf demselben in den Cirkel fielen.

Bey dieser Untersuchung kommt es nun darauf an, die Incremente derjenigen Puncte aufzusuchen, zwischen welche diese Puncte hinein fallen; zuvörderst aber den Theil anzugeben, auf welchen Hr. Bird bey Aufzeichnung seines Masstabes in Ansehung der Länge von 5, 12 Schuhen, die er von einem Etalons abnahm, gewis seyn möchte.

Dieser Theil ist nach §. 8. gleich $2(\alpha^\circ + \beta)$; es wäre also einmal das Increment des Punct 512 auf dem Masstab, das ich durch d. 512 ausdrücke gleich $2.(\alpha^\circ + \beta)$; und diesem zufolge, weil der Cirkel umgeschlagen worden, um den Punct 1024 zu bestimmen, auch $d.\,1024 = 2(\alpha^\circ + \beta) + 2(\alpha^\circ + \beta) = 4(\alpha^\circ + \beta)$.

Diesen Theil bezeichne ich nach §. 9 durch dE; und d. 512 durch dE°. Auch bediene ich mich, um die Incremente der Zwischen-Puncte zu berechnen, der Formeln N. 1. und N. 2 in §. 9; und finde nach angestellter Berechnung nach denselben,

$d.\,168 = \frac{1}{64}(21\ dE^{\circ} + 111\ \alpha^{\circ})$ | $d.\,194 = \frac{1}{256}(97\ dE^{\circ} + 440\ \alpha^{\circ})$.

$d.\,306 = \frac{1}{256}(153\ dE^{\circ} + 236\ \alpha^{\circ})$ | $d.\,536 = \frac{1}{64}(61\ dE^{\circ} + 3\ dE + 41\ \alpha^{\circ})$

$d.\,796 = \frac{1}{128}(57\ dE^{\circ} + 71\ dE + 222\ \alpha^{\circ})$ | $d.\,1024 = 2\ dE^{\circ}$.

VII. Ich fahre fort, und untersuche nunmehro auch die Genauigkeit, mit welcher Hr. Bird die Nonius-Abtheilung möchte aufzeichnen können, das ist: ich berechne die Incremente der Puncte 3, 11, 36, 44, 61, 79 auf demselben, und bezeichne in dieser Absicht den Theil, auf welchen Hr. Bird in Ansehung der wahren Länge seiner angenommenen Hülfs-Weite ω gewis seyn möchte mit $d\omega$: bediene mich übrigens auch bey dieser Untersuchung der Formeln N. 1 und N. 2 in §. 9, und finde durch dieselbe

$d.\ 3 = \frac{1}{256}(d\omega + 228\ \alpha^{\circ})$ | $d.\ 11 = \frac{1}{64}(3\ d\omega + 108\ \alpha^{\circ})$.

$d.\ 36 = \frac{1}{64}(9\ d\omega + 156\ \alpha^{\circ})$. | $d.\ 44 = \frac{1}{64}(11\ d\omega + 108\ \alpha^{\circ})$.

$d.\ 61 = \frac{1}{256}(61\ d\omega + 396\ \alpha^{\circ})$. | $d.\ 79 = \frac{1}{256}(139\ d\omega + 596\ \alpha^{\circ})$.

So wäre dann nun nach §. 9. und §. 10.

$$da' = d\overset{a}{x} + d\overset{\mathfrak{a}}{x} = 2\ dE^{\circ} \qquad + \tfrac{1}{64}(9\ d\omega + 156\ \alpha^{\circ}).$$

$$db' = d\overset{b}{x} + d\overset{\mathfrak{b}}{x} = \tfrac{1}{256}(153\ dE^{\circ} + 236\ \alpha^{\circ}) \qquad + \tfrac{1}{64}(11\ d\omega + 108\ \alpha^{\circ}).$$

$$dc' = d\overset{c}{x} + d\overset{\mathfrak{c}}{x} = \tfrac{1}{256}(97\ dE^{\circ} + 440\ \alpha^{\circ}) \qquad + \tfrac{1}{256}(139\ d\omega + 596\ \alpha^{\circ}).$$

$$d\mathfrak{d}' = d\overset{d}{x} + d\overset{\mathfrak{d}}{x} = \tfrac{1}{64}(21\ dE^{\circ} + 111\ \alpha^{\circ}) \qquad + \tfrac{1}{64}(3\ d\omega + 108\ \alpha^{\circ}).$$

$$dv' = d\overset{v}{x} + d\overset{\mathfrak{v}}{x} = \tfrac{1}{64}(61\ dE^{\circ} + 3\ dE + 41\ \alpha^{\circ}) \qquad + \tfrac{1}{256}(61\ d\omega + 396\ \alpha^{\circ}).$$

$$dt' = d\overset{t}{x} + d\overset{\mathfrak{t}}{x} = \tfrac{1}{128}(57\ dE^{\circ} + 71\ dE + 222\ \alpha^{\circ}) \qquad + \tfrac{1}{256}(d\omega + 228\ \alpha^{\circ})$$

$$d\mathfrak{w}' = d\overset{w}{x} + d\overset{\mathfrak{w}}{x} = \tfrac{1}{256}(218\ dE^{\circ} + 464\ \alpha^{\circ}) \qquad + \tfrac{1}{256}(139\ d\omega + 596\ \alpha^{\circ}).$$

Ich habe hier auch das Increment $d\mathfrak{w}'$ der Chorde des Bogens von 25° 20′ beygefügt, deren sich Hr. Brander zu Bestimmung des Regulators oder des Bogens von 85° 20′ bedient.

Es mißt diese Chorde 420, 79 Theile des Masstabs; und wenn dieselbe von dem Masstab abgenommen werden soll, so muß der Nonius so gestellt werden, daß sein 79ster Theilstrich mit dem 442sten des Masstabs in eine gerade Linie fällt.

Es ist übrigens in allen diesen Formeln der Werth von α° durchgehends gleich $\frac{1}{2} \times 0,00003 = 0,000015$ eines Schuhes, weil Hr. Bird sich zu Aufzeichnung der Puncte mit dem Bonzen, einer Linse von $\frac{1}{2}$ Zoll Brenn-Weite bedient. Was aber die Werthe von α° in dem Ausdruck vor dE° und $d\omega$ anbelangt, so bleiben dieselben nach I gleich 0, 00003, weil Hr. Bird sich an seinen Stangen-Cirkeln einer Linse von ein Zoll Brenn-Weite bedient.

Diesem zufolge wäre also

$$\left.\begin{aligned} dE^{\circ} &= 0',00016 \\ d\omega &= 0',00016 \end{aligned}\right\}\ \text{eines Schuhes.}$$

Werden diese Werthe in die oben angesetzten Formeln gestellt, so wird

der Werth von	gleich Theile eines Schuhes
$d'a$	0', 00008.
$d'b$	0', 000145.
$d'c$	0', 000208.
$d'd$	0', 0001106.
$d'v$	0', 0002383.
$d't$	0', 000267.
$d'w$	0', 000285.

Auf Theile von dieser Größe, bleibt also Hr. Bird in Ansehung der Länge der Chorden der Bögen von 60°, 15°, 10° 20', 4° 40', 30°, 42° 40', 25° 20' ungewis, blos allein in Rücksicht derjenigen Fehler, die, ohnerachtet alles von seiner Seite angewandten Fleißes, Sorgfalt und Genauigkeit, dennoch ihm bey Abtheilung des Chorden-Masstabes und der Nonius-Abtheilung vor denselben, zu begehen möglich sind.

VIII. Erwäget man ferner, das, was in §. 8 gesagt worden, so wird man zugeben, daß, wenn auch die Theile $d'a$, $d'b$, $d'c$, $d'd$ 2c. in VII. gleich Null gesetzt werden könnten, dem ohngeachtet Hr. Bird der wahren Länge jeder Chorde mit aller Zuversicht nicht gewis werden konnte, da er nach §. 8 in Rücksicht der Länge jeder Chorde, so wie dieselbe die Abtheilung des Masstabs und Nonius-Abtheilung ergibt, wenn er dieselbe von demselben mit dem Cirkel abnimmt, nur bis auf den Theil $2(\beta + \frac{3}{2}\alpha^0)$ dieser Länge gewis ist. Es ist also einmal

$$d''a = 2\,(0,\,00005 + \tfrac{3}{2}.\,0,\,00003) = 0,\,00019 \text{ Theile eines Schuhes.}$$

Oder wenn ich annehme, Hr. Bird bediene sich der Linse von $\frac{1}{2}$ Zoll Brenn-Weite, um den jedesmaligen Stand des Theil-Strichs x des Nonii auf dem Theil-Strich y des Masstabes, bey Abmessung einer Chorde, zu beobachten: und den Theil, welchen Hr. Bird vermittelst dieser Linse auf dem Masstabe noch bemerken kann, mit α' bezeichne; So würde hiedurch

$$d''a = 2\,(\alpha^0 + \beta) + \alpha' = 0,\,00016 + 0,\,000015 = 0,\,000175.$$

So wäre also Hr. Bird in Ansehung der wahren Länge

der Chorde des Bogens	so wie er die Länge dieser Chorden zwischen die Spitzen seines Stangen-Cirkels gefaßt hat, gewis bis auf Theile eines Schuhes
60°	0', 000555
15°	0', 000320
10° 20'	0', 000383
4° 40'	0', 0002856
30°	0', 0004133
42° 40'	0', 000442
25° 20'	0', 000460.

IX. Die Längen der Chorden der Bögen von 60°, 42° 40', 30°, 15°, 10° 20', 4° 40', nimmt Hr. Bird nach §. 7. II. von dem Masstab ab, und trägt dieselbe nach und nach auf den Theil-Kreys des Quadranten nach §. 1.

„Hr. Bird beobachtete hiebey die Vorsicht, daß er schon den Tag zuvor, an welchem er „das Theilungs-Geschäffte vornehmen wollte, die Längen aller dieser Chorden von dem Mas„stab nahm, und die Stangen-Cirkel in diesen Oeffnungen die Nacht über auf dem Quadranten „liegen lies: er durfte also den andern Morgen in dem Augenblick, da er die Chorden auf den „Theil-Kreys tragen wollte, nur nochmals nachsehen, ob sich die Längen derselben während der „Zeit geändert hätten, und in diesem Fall vermittelst der Schraube an dem Stangen-Cirkel „nur eine kleine Correction vornehmen: er beobachtete diese Vorsicht, um denjenigen kleinen „Fehlern auszuweichen, die er von der Ausdehnung der Masse des Quadranten befürchtete, wenn „er mit Abmessung dieser Chorden viel Zeit verliehren sollte, da er aus Erfahrung wohl wußte, „daß mit jedem Moment der Zeit der Grad der Wärme und mit derselben auch die Länge der „Masse des Quadranten und seines Masstabes sich ändert.

In wieferne nun hierdurch Hr. Bird seine Absicht erreicht haben möchte, will ich nunmehro untersuchen.

Bey dieser Untersuchung aber sehe ich mich genöthiget, meine Zuflucht zu Muthmaßungen und Schätzungen zu nehmen, da Hr. Bird den Grad der Ausdehnung der Masse seines Quadranten nicht angibt, und von der Zeit, während welcher er die Chorden auf den Theil-Kreys trug, nur so viel sagt, daß er im Stande gewesen sey, das Theilungs-Geschäffte bey Aufzeichnung dieser Puncte in wenigen Minuten zu vollenden.

Um nun also dem ohngeachtet den Werth von k in §. 7. II. angeben zu können, nehme ich die Ausdehnung der Masse des Quadranten sehr geringe an; theils um einen so viel möglich kleinen Werth vor die Fehler zu bekommen, die von derselben bey Auftragung der Chorden herkommen, um mich von der Wahrheit nicht zu weit zu entfernen; theils auch, weil ich weis, daß in den Englischen Fabriken dem Meßing, aus welchem auch dieser Quadrant verfertiget war, ein sehr ansehnlicher Grad der Dichtigkeit gegeben wird, das an denen Instrumenten wohl zu sehen ist, die vom Hrn. Bird verfertiget, in Göttingen, Manheim, Berlin, Dresden u. s. w. aufgestellt stehen.

Aus diesen Beweggründen, nehme ich also an, die Masse des Quadranten ändere sich um 0, 000012 seiner Länge, wenn die Wärme um einen Grad nach Reaumürs Thermometer zu- oder abnimmt. Es ist also vor diesen Fall in §. 7. II. $k = 0,\ 000012$.

Was ferner die Zeit betrift, in welcher Hr. Bird diese Normal-Puncte möchte aufgetragen haben, so eigne ich ihm eine große durch Uebung erworbene Fertigkeit in Abmessung und Auftragung der Chorden zu, und setze, er möge innerhalb 6 Minuten seine Stangen-Cirkel bey der Temperatur * nach der Länge der aufzuzeichnenden Chorden gestellt haben; und trage die Chorde von 60° auf den Theil-Kreys, in dem Augenblick, da die Wärme um $\Delta E'$ Grade zugenommen hatte, und 8 Minuten verflossen waren, seit dem Zeit-Theil, da Hr. Bird die Länge dieser Chorde auf dem Masstab mas. Ueberhaupt aber seyen die Zeiten und Temperaturen, unter welchen die Chorden auf den Theil-Kreys getragen worden, folgende: Ich rechne die Zeiten alle von dem Augenblick * an, da die Chorden auf dem Masstab abgenommen wurden, und setze, es werde auf den Theil-Kreys getragen

die Chorde des Bogens	bey der Zeit	bey der Temperatur
60°	$* + 8'$	$* + \Delta E'$.
30°	$* + 10'$	$* + \Delta E' + \Delta E''$.
15°	$* + 12'$	$* + \Delta E' + \Delta E'' + \Delta E'''$.
10° 20′	$* + 14'$	$* + \Delta E' + \Delta E'' + \Delta E''' + \Delta E''''$.
4° 40′	$* + 16'$	$* + \Delta E' + \Delta E'' + \Delta E''' + \Delta E'''' + \Delta E^{v}$.
42° 40′	$* + 18'$	$* + \Delta E' + \Delta E'' + \Delta E''' + \Delta E'''' + \Delta E^{v} + \Delta E^{v\prime}$.

Nach dieser Voraussetzung wäre also die Zeit des Theilungs-Geschäfftes bey Aufzeichnung der Normal-Puncte im ganzen genommen 18 Minuten.

Nun wären also die Zeiten gegeben, und es fehlen nur noch die Werthe von $\Delta E'$, $\Delta E''$ rc. welche denselben zukommen: Diese aber hängen nicht sowohl von dem Grade der Wärme ab, welche die Luft in dem Zimmer, in welchem getheilt wurde, an und vor sich hat, sondern auch von derjenigen Wärme, welche in demselben, durch die Ausdünstung und Aushauchung Hrn. Birds und seines Gehülfen verbreitet wurde.

Wäre diese Wärme constans, so würde ihr Einflus auf die Lage der Puncte, die bey derselben auf den Theil-Kreys getragen werden, gleich Null seyn: dies kann aber weder von einer noch der andern angenommen werden, denn die Wärme der Atmosphäre nimmt an Tagen, da das Wetter gleichförmig ist, nach und nach mit jedem Zeit-Theil zu, bis dieselbe auf einen Grad gestiegen ist, von welchem an, sie wieder allmählich abnimmt: und die Wärme, welche die Luft in dem Zimmer durch die Gegenwart zweyer Personen mitgetheilt wird, ist auch nicht immer ein und eben dieselbe: jene wächst mit dem Aufsteigen der Sonne, und diese nach Verhältnis der mehr oder mindern Ausdünstung der Personen in dem Zimmer, die durch verschiedene Arten der Bewegungen, welche dieselbe zu gewissen Absichten vornehmen, befördert wird.

Erwäget man diese Umstände, so wird man zugeben, daß sich wohl schwerlich ein Gesetz sollte angeben lassen, nach welchem vor einen jeden Augenblick der Zeit, der Grad der Wärme mit Genauigkeit sich angeben ließe: ich werde also, durch die Erfahrung geleitet, ein etwas der Wahrheit sehr nahe kommendes annehmen, und setzen, die Wärme nähme in dem Zimmer der Zeit proportional zu, dergestalt, daß nach Verlauf von 30 Minuten der Stand des Thermometers um 2 Grade höher ist, als in dem Augenblick, da das Theilungs-Geschäffte unternommen wurde; und ich glaube durch diese Hypothese mich nicht zu weit von der Wahrheit zu entfernen, da ich keinen großen Zeit-Verlauf angenommen habe. Nach dieser Hypothese bestimme ich nun die Werthe von $\Delta E'$, $\Delta E''$, $\Delta E'''$ vor die angenommenen Zeiten, und finde diesem zufolge den

Werth von	gleich, Graden des Thermometers.
$\Delta E'$	0, 53
$\Delta E' + \Delta E''$	0, 66
$\Delta E' + \Delta E'' + \Delta E'''$	0, 80
$\Delta E' + \Delta E'' + \Delta E''' + \Delta E''''$	0, 93
$\Delta E' + \Delta E'' + \Delta E''' + \Delta E'''' + \Delta E^{v}.$	1, 06
$\Delta E' + \Delta E'' + \Delta E''' + \Delta E'''' + \Delta E^{v} + \Delta E^{vi}.$	1, 20

Substituire ich diese Werthe nebst dem Werth von k in die Formeln in §. 7. II. so wird hieraus

$$\left.\begin{array}{lll} d'''a = -0,000012.\ 0,53.\ 8. & = 0,00005088 & - \\ d'''v = -0,000012.\ 0,66.\ 4,2. & = 0,000033264 & - \\ d'''b = -0,000012.\ 0,80.\ 2,1. & = 0,00002016 & - \\ d'''c = -0,000012.\ 0,93.\ 1,5. & = 0,00001674 & - \\ d'''d = -0,000012.\ 1,06.\ 0,6. & = 0,000007632 & - \\ d'''t = -0,000012.\ 1,2.\ 5,8. & = 0,00008352 & - \end{array}\right\}\ \text{Theilen eines Schuhes.}$$

X. Addiret man nun alle in VII, VIII, IX gefundene Incremente in eine Summe, und nimmt die Werthe von $d'a$, $d'b$, $d''a$, $d''b$ rc. auch negativ, so folget, daß Hr. Bird gewis seye in Rücksicht der wahren Länge der

Chorde des Bogens	so wie er dieselbe auf den Theil-Kreys aufgezeichnet hat, bis auf den Theil eines Schuhes, daß jede derselben nicht mehr als um diese Theile zu klein seyn könne
60°	0, 00060588
15°	0, 00034016
10° 20′	0, 00039974
4° 40′	0, 000293232
30°	0, 000446564
42° 40′	0, 00052552

Hätte Hr. Bird statt der Chorde von 10° 20′ die Chorde von 25° 20 auf den Theilkreys getragen, so wäre, wenn man dw', dw'' auch negativ nimmt,

$$dw = 0,0004936.$$

XI. Nach X. ersiehet man also, in wieferne Hr. Bird in Rücksicht der wahren Länge jeder dieser Chorden gewis seyn möchte, daß er dieselbe nicht mehr als um diese Theile zu klein auf den Theil-Kreys getragen habe.

Ich will nunmehro auch untersuchen, in wieferne Hr. Bird gewis seyn möchte, daß er die Längen dieser Chorden zu groß auf den Theil-Kreys getragen habe. In dieser Absicht nehme die Werthe von $d'a$, $d''a$, $d'b$, $d''b$ rc. positiv, und finde, indem ich dieselbe zu den negativen Werthen $d'''a$, $d'''b$ addire, die immer negativ bleiben müssen, so lange $\Delta E'$, $\Delta E''$ rc. positiv ist, daß Hr. Bird gewis seye, in Ansehung der Länge der

Chorde des Bogens	daß er die Länge dieser Chorden zu groß auf den Theil-Kreys getragen habe, auf Theile eines Schuhes
60°	0, 00050412.
15°	0, 00029840.
10° 20′	0, 00036626.
4° 40′	0, 000277968.
30°	0, 000380036.
42° 40′	0, 000358480.

Unter der Bedingung in X. würde auch vor diesen Fall

$$dw = 0', 00042640.$$

XII. Aus X. und XI. nehme nunmehro das Mittel, und setze folgendes: Hr. Bird seye mit aller Zuversicht gewis, in Ansehung der wahren Länge,

der Chorde des Bogens	so wie er dieselbe auf den Theil-Kreys des Quadranten aufgezeichnet hat, bis auf Theile eines Schuhes	
60°	0, 00055500	= da.
15°	0, 00031928	= db.
10° 20′	0, 00038300	= dc.
4° 40′	0, 00028560	= dd.
30°	0, 00041330	= dv.
42° 40′	0, 00044200	= dt.
25° 20′	0, 00051000	= dw.

XIII. Um nun endlich die Incremente dA, dB, dC, dD, dV, dT, dW der Bögen A, B, C, D, V, T, W, angeben zu können, lege ich den allgemeinen Ausdruck in §. 6. N. 1. zum Grunde, nach welchem ist,

$$dX = \frac{dx - 2\,dr \,\mathrm{Sin}\, \tfrac{1}{2} X.}{r.\ \mathrm{Cos}\, \tfrac{1}{2} X.}$$

und substituire in den Ausdruck vor dx und X nach und nach die Incremente der Bögen A, B, C, D, V, T, W; ich nehme nemlich

	positiv dx		negativ dx		
Erster Fall nach XI.	so bekommt	die Werthe	so bekommt	die Werthe	Zweyter Fall nach X.
		$da' + da'' - da'''$		$-(da' + da'' + da''')$	
		$db' + db'' - db'''$		$-(db' + db'' + db''')$	
		$dc' + dc'' - dc'''$		$-(dc' + dc'' + dc''')$	
		$dd' + dd'' - dd'''$		$-(dd' + dd'' + dd''')$	
		$dv' + dv'' - dv'''$		$-(dv' + dv'' + dv''')$	
		$dt' + dt'' - dt''$		$-(dt' + dt'' + dt''')$	
		$dw' + dw'' - dw'''$		$-(dw' + dw'' + dw''')$	
	positiv dr		negativ dr		
	so bekommt	den Werth	so bekommt	den Werth	
		$da' + da'' - da'''$		$-(da' + da'' + da''')$	

XIV. Um ferner auch den Ausdruck vor dx, bequemer durch Logarithmen auflösbar zu machen, gehe ich es also an: Weil auch ist

$$dX = \frac{\frac{dx}{2\,dr} - \text{Sin}\,\tfrac{1}{2}X}{r\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}X} .\ 2\,dr,$$

so setze ich, es sey $\frac{dx}{2\,dr} = \text{Sin}\,y$; diesem zufolge wird

Vor den ersten Fall

$$dX = \frac{\text{Sin}\,y - \text{Sin}\,\tfrac{1}{2}X}{r\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}X} .\ 2\,dr. = \frac{\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}(y + \tfrac{1}{2}X).\ \text{Sin}\,\tfrac{1}{2}(y - \tfrac{1}{2}X)}{r\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}X} .\ 4\,dr.$$

Vor den zweyten Fall, da dX positiv, und dr negativ ist:

$$dX = \frac{\text{Sin}\,\tfrac{1}{2}X + \text{Sin}\,y.}{r\,\text{Cos.}\,\tfrac{1}{2}X} .\ 2\,dr. = \frac{\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}X + y).\ \text{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}X + y)}{r\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}X} .\ 4\,dr.$$

In diesem Falle erhält dX seinen größten Werth, und nach diesem Ausdruck werde nunmehro die Werthe von dA, dB, dC, dD, dV, dT, dW in Zahlen auflösen.

Bey dieser Arbeit kommt es nun zuvörderst darauf an, die Werthe von Sin y in jedem dieser Fälle aufzusuchen; und ich finde in dieser Rücksicht folgendes:

Wenn vorstellt	das Increm. des Bogens	so ist	gleich	also y gleich Graden.
dX	A	Sin y	$\frac{0,\ 00060588}{2.\ 0,\ 00060588}$	30°.
dX	B	Sin y	$\frac{0,\ 00029840}{2.\ 0,\ 00060588}$	14° 15′.
dX	C	Sin y	$\frac{0,\ 00036626}{2.\ 00060588}$	17° 36′.
dX	D	Sin y	$\frac{0,\ 000277968}{2.\ 00060588}$	13° 15′.
dX	V	Sin y	$\frac{0,\ 000380036}{2.\ 00060588}$	18° 17′.
dX	T	Sin y	$\frac{0,\ 000358480}{2.\ 00060588}$	17° 14′.
dX	W	Sin y	$\frac{0,\ 0004260}{2.\ 00060588}$	20° 36′.

Die Berechnung der Werthe von dA, dB, dC ꝛc. wird nun übrigens nach dem gewöhnlichen Wege durch Logarithmen bewerkstelliget, und es ergibt sich nach derselben,

der möglichst größte Werth von	von Secunden
dA	35, 828
dB	11, 879

der möglichst größte Werth von	von Secunden
dC	12″, 3105
dD	8″, 4369
dV	18″, 528
dT	22″, 139
dW	19″, 337.

Nun bestimmt

nach §. 1. Hr. Bird den Bogen	aus den Bögen	nach §. 2. Hr. Brander den Bogen	aus den Bögen
90°	60° und 30°	90°	60° und 30°
75°	60° und 15°	75°	60° und 15°
85° 20′	das erstemal 60° und 15° und 10° 10′ das andremal 60° und 90° und 4° 40′	85° 20′	das erstemal 60° und 25° 20′ das andremal —

Es bleibt also mit Zuversicht gewis

Hr. Bird In Ansehung der wahren Größe des Bogens	bis auf die Incremente	bis auf die Incremente	Hr. Brander In Ansehung der wahren Größe des Bogens
90°	dA + dV	dA + dV	90°
75°	dA + dB	dA + dB	85°
85° 20′	das erstemal dA + dB + dC das zweytemal dA + dV + dD	das erstemal dA + dW das 2temal —	85° 20′
42° 40′	dT	dT	42° 40′
21° 20′	$\frac{1}{2}$ (dT + 2 α^o)	dG	21° 20′
10° 40′	$\frac{1}{4}$ (dT + 6 α^o)	$\frac{1}{2}$ (dG + α^o)	10° 40
25° 20′	—	dW	25° 20′.

Bis auf diese Theile wären also beyde Künstler, in Rücksicht der wahren Lage der Normal-Puncte, und der Bisections-Puncte vom ersten Range gewis.

XV. Ich werde nunmehro die Incremente vor die Bögen von ganzen Graden ebenfalls berechnen, und hiebey nach der in §. 10 angenommenen Ordnung verfahren.

Um bey dieser Arbeit etwas geschwinder fortzukommen, drücke ich den Theil α^o ebenfalls nach Theilen eines Grades in Secunden aus; es ist nemlich, weil $\alpha^o = 0', 000015$, der Winkel, welchen dieser Punct auf dem Theil-Kreyse einnimmt, gleich $\frac{0,000015}{8} \cdot 206264 =$ 0, 4 Secunden.

So wäre dann nun der möglichst größte Werth des Theiles, auf welchen mit Zuversicht gewis ist

Bird in Secunden	in Ansehung der wahren Größe des Bogens von Graden	Brander in Secunden	Bird in Secunden	in Ansehung der wahren Größe des Bogens von Graden	Brander in Secunden
1, 48	1	1, 65	23, 71	46	23, 52
1, 65	2	1, 98	24, 18	47	23, 91
1, 875	3	2, 36	24, 66	48	24, 35
2, 451	4	3, 138	25, 13	49	24, 46
3, 46	5	8, 5 *	25, 6	50	24, 18
4, 101	6	5, 132	26, 073	51	25, 6
4, 545	7	5, 665	26, 58	52	26, 04
5, 201	8	6, 376	25, 04	53	24, 49
5, 506	9	6, 723	27, 49	54	26, 84
6, 739	10	12, 62 *	29, 97	55	29, 19
6, 302	11	8, 216	36, 48	56	35, 42
6, 677	12	8, 959	33, 86	57	32, 87
6, 977	13	9, 207	31, 39	58	30, 44
7, 864	14	10, 447	32, 2	59	31, 4
* 8, 302	15	11, 191 *	* 35, 828	60	* 35, 828
8, 802	16	11, 934	34, 92	61	34, 621
9, 177	17	12, 68	34, 1	62	33, 414
9, 802	18	13, 42	34, 609	63	33, 854
9, 752	19	13, 412	41, 1	64	38, 653
10, 802	20	14, 908	32, 93	65	31, 28
11, 786	21	15, 652	34, 81	66	33, 26
12, 351	22	17, 33	36, 11	67	34, 39
14, 44	23	18, 28	37, 42	68	35, 53
17, 254	24	21, 652	38, 72	69	30, 66
19, 371	25	23, 59	40,	70	37, 8
15, 352	26	18, 672	41, 33	71	38, 93
14, 834	27	17, 79	42, 63	72	40, 63
15, 428	28	18, 124	43, 93	73	41, 51
18, 691	29	22, 32	47, 11	74	42, 37
16, 616 *	30	* 18, 79	* 47, 707 *	75	* 47, 707
17, 21	31	19, 125	47, 84	76	44, 59
16, 804	32	19, 02	49, 14	77	45, 73
16, 627	33	18, 635	50, 45	78	46, 86
17, 804	34	19, 604	51, 75	79	47, 98
23,	35	24, 891	52, 55	80	49, 13
18, 804	36	20, 137	54, 35	81	50, 26
19, 437	37	20, 482	59, 4	82	54, 84
19, 804	38	20, 774	56, 96	83	52, 52
20, 705	39	22,	58, 26	84	53, 65
20, 805	40	21, 359	53, 94	85	49, 61
21, 305	41	21, 653	60, 4	86	35, 67
21, 138	42	21, 554	60, 96	87	56, 42
22, 296	43	22, 276	61, 55	88	57, 18
22, 77	44	22, 69	62, 13	89	57, 93
20, 22	45	20, 20	* 54, 356	90	* 54, 356

Vergleichet man die Werthe der Incremente, von dieser Tabelle vor einerley Bögen, wenn diese Bögen nach der Birdschen oder Branderschen Methode auf den Theilkreys gezeichnet worden, so wird man finden, daß in der ersten Halbscheid des Bogens von 85 $\frac{1}{3}$, die Werthe der

Incremente vor die Branderfche, und in der zweyten Halbscheid, vor die Birdische Methode größer ausfallen. Dies kommt daher: was den ersten Fall betrift, weil Hr. Brander den Bogen von 21° 20′ mediate durch seine Chorde auf den Theil-Kreys trug, da denselben Hr. Bird durch immediate Bisection aus dem Punct 0 und 42° 40′ etwas genauer bestimmte. Hr. Bird räth zwar in seiner Beschreibung ebenfalls diesen Bogen durch seine Chorde aufzutragen, er unterließ aber doch dieses bey Abtheilung seines Quadranten.

Hätte Hr. Brander die Bögen von 21° 20′, und 10° und 5° ebenfalls immediate, wie Hr. Bird, bestimmt, so würden die Incremente vor alle Bögen in der Ersten Halbscheid des Quadranten durchaus den Birdschen gleich seyn.

Was die Zweyte Halbscheid betrift, so fallen in derselben die Incremente vor die Birdische Methode größer aus; dies kommt daher: weil Hr. Bird den Bogen von 85° 20′ durch die Chorden dreyer Bögen bestimmt, da Hr. Brander denselben einfacher, blos durch die Chorden zweyer Bögen, nemlich den Bogen von 60° und 25° 20′ findet. Denn was die Genauigkeit in Rücksicht der wahren Größe dieses Bogens betrift, so verhält sich die Genauigkeit, mit welcher Hr. Brander denselben angibt, zur Genauigkeit, mit welcher Hr. Bird denselben bestimmt, wie 55165 : 60017.

In wieferne sich die Genauigkeit in Rücksicht der wahren Größe der aufgezeichneten Bögen unter einander, verhalten möge, ist aus der Tabelle selbsten zu ersehen.

Uebrigens darf man sich nicht wundern, daß die Incremente vor einige Bögen so außerordentlich groß ausgefallen sind. Denn es ist jeder Werth eines solchen Increments in dieser Tabelle ein größtes, das nur in dem allerunglücklichsten Falle, bey Aufzeichnung eines Bogens statt finden kann. In den meisten Fällen wird man annehmen können, daß sich von den dreyen in VII, VIII, IX berechneten Gattungen der Fehler, die bey dem Theilungs-Geschäffte vorfallen können, immer zwey gegen einander aufheben. Mir gnüget hiebey die Möglichkeit gezeigt zu haben, auf was Art die Lage eines Punctes auf dem Theil-Kreyse irrig werden kann, wenn alle Fehler, die bey Aufzeichnung desselben nur immer vorfallen können, auf eine Seite fallen.

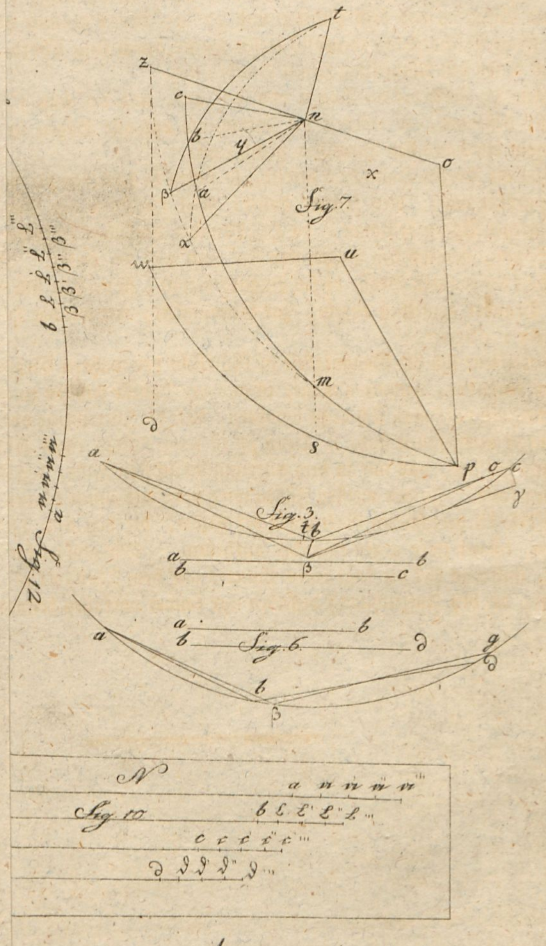
Fig. 7.
Fig. 3.
Fig. 6.
N
Fig. 10
Fig. 12.

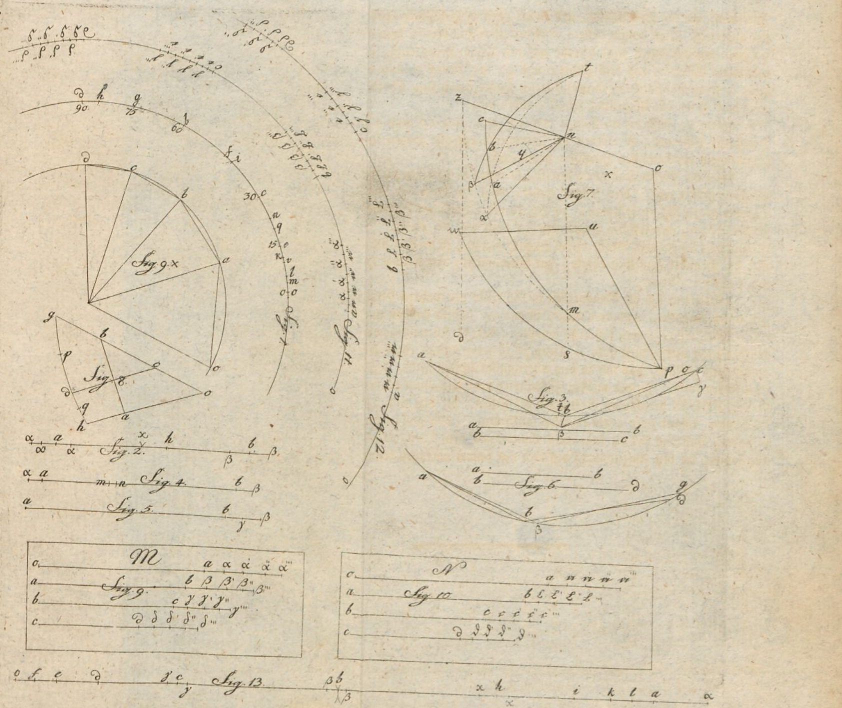
Fig. 9. x
Fig. 8.
Fig. 1.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 7.
Fig. 3.
Fig. 2.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
M
Fig. 9.
N
Fig. 10.
Fig. 13.

Abhandlung zu Berechnung des Grades der Genauigkeit

mit welcher

auf einen Mauer-Quadranten

nach

John Birds und Georg Friedr. Branders

Theilungs-Methode

die Abtheilung der Theilkreyse vor die 90 und 96 Theilung

vollführt werden kann,

abgefaßt

von

Johann Leonhard Späth,

Mechan. und der mathemat. Wissenschaften Beflissener.

Nebst einer Kupfertafel.

Leipzig,

im Schwickertschen Verlage 1788.