KEPLERI PROBLEMA CELEBRE

COMMENTATIO

QVAM

AMPLISSIMI PHILOSOPHORVM ORDINIS

CONSENSV

PRO RITE OBTINENDIS

SVMMIS IN PHILOSOPHIA HONORIBVS

PUBLICE DEFENDET

WOLF HERZ DETMOLDT

HAMELIENSIS.

DIE XXXI. DECEMBR. MDCCXCVIII.

GOTTINGAE,
IN OFFICINA BARMEIERIANA.

PRAEFATIO.

Keplerus vir ille eſt, cui tota iſta debetur dignitas firmitasque, qua hodie gaudet aſtronomia! Contigit viro immortali, omnium ſcientiarum reginam, aſtronomiam! incertam, hac et illuc ante eum fluctuantem, in ſolido fundamento ſtabilire atque in aeternum munire! Iuſta itaque ſunt laudes Dom. de la Lande 1), cum, opus iſtius 2) in quo primum iactum eſt immutabile aſtronomiae ſyſtematicae fundamentum, omnes illos totum legiſſe velit, qui defi-

1) Conf. Aſtronomie par M. de la Lande, Tomus 2. p. 6.

2) Aſtronomia nova Αιτιολογητος, ſeu phyſica coeleſtes, tradita commentariis de motu ſtellae Martis ex obſervationibus, C. V. Tychonis-Brahe. Pragre 1609. in fol.

siderent cognomine aſtronomi digni iudicari. . . Mais un aſtronome, ipſe dicit, doit le live en entier; parmi les ſuperfluités, les longuers, les tentatives inutiles, qui y ſont melés; on y voit une marche lumineuſe et des traits de genie, qui doment la plus grande ſatisfaction! Audeo imo, opus iſtud criticen aſtronomiae vocare 1). Sed ne nimius ſim in laudibus, quibus rite ſoluendis haud par mihi adeſt Oratio, ad id potius me conuerto, de quo in hac diſſertatione acturus ſum.

Inter

1) Non peſſum non, quin animaduerſiunculam hic afferam, quae, etſi in commentatione aſtronomica locum non habeat, iuſtam tamen declarat nouam illam denominationem, Criticen aſtronomiae. Ad relinquendum vero certo certius ſyſtema aſtronomiae, inde profectus eſt KEPLERVS, vt eum planetam (terram ſcilicet) quo omnes obſeruationes inſtituuntur, iisdem naturae legibus ſubiiceret, quibus omnes alio s planetas obnoxios animaduerterat. Negotium, quod omnes ante eum aſtronomi prorſus neglexerant: hinc vero tot tantaeque difficultates, quae larga illa hypotheſium copia vix tolli potuerunt! hinc perpetuus diſſenſus inter theoriam et obſeruationes! Omnes iſtae difficultates a KEPLERO, hoc leui negotio, remotae ſunt! recluſa intima naturae myſteria! ſtrata via ad remotiſſimos naturae receſſus! — Eadem, ſed ex oppoſito, via ingreſſus, audet noſtris temporibus vir excellentiſſimus KANTIVS, mentis facultatum ſyſtema exhibere! vindicat rationem a ſeruitute naturae! imperium, quod ſemper penes naturam fuerat, rationi tradidit! ratio iubet natura paret! et ſic cunctae inuictae adhuc difficultates, vt ſtellae a ſole, fugantur!

Inter omnes leges naturae quas KEPLERVS explorauerat, illa ex mea sententia maximi momenti est, quae *lex de areis* vocatur. Haec est lex totius nouae astronomiae fundamentalis. Ex calculo enim, has lege de areis instituto, exoptatissima harmonia inter theoriam et obseruationes prodiit; eaque harmonia, distinctio illa 1) inter optica et physica in theoria mechanicae coelestis, principium tanquam systematis, legalis atque necessaria facta est.

Calculus autem hac theoria fundatus, magnis laborat difficultatibus. Pendet enim a problematis solutione, quae non nisi per approximationem exhiberi potest. Ob istas difficultates, cognomen ei adhaeret *celebri*. KEPLERVS iamdudum senserat illas difficultates, qui, de solutione indirecta prorsus desperans, (minime ex virium defectu, sed potius ex principiis matheseos) 2) omnes sui aeui prouocaueret

1) Confusio ista physicorum atque opticorum veteres valde vexauit, quippe quod semper calculum obseruationi quidem congruum a theoria autem discrepantem inuenere. Nam secundum eorum theoriam motus acceleratio, in ratione deametri magnitudinis apparentis esse debuit: Obseruatio autem semper duplo maiorem probavit.

2) Nefas itaque habendum est, eadem de KEPLERO pronunciare, quibus alibi APOLLONIVM pergeum irridet, quod problema de loco stationario planetae, solvere non poterat. . . *In hac sudauit quondam Apollonius pergeus geumetra, dixitque quod geometrae facere debeant vt hic iuuent astronomos! at nec fecit ipse quod aleos iussit* v. *Tab. Rudolph.* p. 72.

rat geometras, vt in negotio tam graui quam arduo, auxilium ei ferre vellent. . . *Haec est mea sententia, quae quo minus habere videtur geometric pulchritudinis*, (ipse de sua methodo profitetur), *hoc magis ad hortor geometras, vt mihi soluant hoc problema: data area partis semicirculi, datoque puncto diametri, inuenire arcum et angulum ad illud punctum, cuius anguli cruribus et quo arcu data area comprehenditur: vel aream semicirculi ex quocunque puncto in datam rationem secare. Mihi sufficit credere, solui a priori non posse propter arcus et sinus* ἑτερογενεἰαν.

Gravitas problematis vna cum viri tum principis inter doctos prouocatione erat in causa, quo minus dormirent geometrae. Occupauit itaque a KEPLERI inde aeuo vsque ad nostra tempora, praestantissima in geometria ingenia.

Omnium primum methodus inuenta erat, quae *Hippothesis ellyptica simplex* vocatur. KEPLERVS iam animaduerterat, planetarum orbitis circularibus suppositis, posse hacce methodo 1) veritati quam proxime accedi, BOUILLIAUDO autem mox illucebat, methodum istam in ellypsi haud minus locum habere, dummodo vnus focorum punctum aequans supponatur (ex hypothesi Ptolomei). Seth Ward, inclytus inter Britannos vir, edidit a 1654 examen astro philol. in opere suo, Astronomia geometrica, in quo aliam methodum publicauerat; quae a Brittis vulgo *Wardi hypothesis* vocatur; quod ne dixerim! Ipse enim auctorem vocat

1) Astronom. philol. p. 46.

vocat Boulliaudum. Omnes methodos, quae hac fundantur hypothesi, Mercator speciali examini subiecit 1).

Haec Wardi hypothesis palmaria omnino foret, si mathematica rigorositate et exactitudine aeque aliis excelleret, quam simplicitate atque elegantia. Sed in planetis valde excentricis ista methodus nullo modo admitti potest. Si e. g. aequationem Mercurii secundum hanc methodum calculare velis, semper 34′ 22″ plus iuxto inuenies.

Agit de hoc problemate NEWTONIVS in suis principiis philosophiae naturalis 2). Vtitur primum Linea, quae trochoides vocatur; quam methodum, propter difficultates hanc lineam describendi, ipse parum idoneam censet, aliam ideoque probat solutionem; postremum vero Wardi recomendat *methodum notissimam*, vt ipse dicit; ex quo colligi potest, Wardi methodum multum apud geometras tum temporis valuisse. Agunt de hac materia, CASSINI 3), KEIL 4), de LA HIRE 5). Eminet inter omnes EULERI methodus analytica; quam olim illust. Dom. KAESTNERVS, propria concisione atque elegantia, analysi suae infinitorum inserueratː in nouissima autem editione omisit. Dedit. Dom. de la

 LAUDE

1) Philos. Trans. 1670. Nro. 57.
2) p. 107. Prop. XXXI. Preb. XXI.
3) Elements d'Astr. Liv. II. p. 141.
4) Phios. Trans. 1713.
5) Mem. de L'Ac. 1701.
6) Theoria motus planetarum et cometarum.

Lande 1) ſolutionem ſecundum formulas, quas Clairaut in ſua theoria lunae compoſuerat. Agunt poſtremum de hac materia, de La Caille 2) et L'Abbé Bossut 3), prior ſynthetice, poſterior analytice.

Mihi quidem, cum ad id tantum ſpecto, vt principia, quibus haec theoria fundatur, accurate atque diſtincte euolvam, perinde eſſe potuit, qua methodo haec principia ceu exemplo illuſtrentur. Cum autem iam temporis in verſione 4) Lectionum aſteonomiae autore de La Caille, occupatus ſim, methodo vſus ſum, in his lectionibus expoſita.

1) Aſtronomie, tome 3. p. 492.

2) Leçons d'Aſtronomie p. 68, 69. 70. 71.

3) Recherſes ſur les alternations que la reſiſtence de L'ether peut produire dans le mouvement moyen des planetes. (eſt commentatio victrix).

4) In iſta verſione, de hac theoria tanquam funda mentum totius novae aſtronomiae, praecipue ratio mihi habenda erit; omnesque ſolutiones, tam analyticas quam ſyntheticas ſingulari ſubiicere examini animus eſt.

Motus

Motus corporis medius ille vocatur, de quo dici poteſt, ſpatia deſcripta temporibus eſſe proportionalia. Attamen in mechanica demonſtratur paribus celeritatibus ſpatia eſſe in ratione temporum; itaque motus medius ita definiri poteſt, vt dicatur: eſſe motum vniformi celeritate. Planetae vero, per hunc motum in orbitis ſuis agetari nequeunt, propter ſitum anomalum, quem occupat punctum, circum quod in gyrum aguntur. Itaque non licet de planetarum motu pronunciare: ſpatia temporibus eſſe proportionalia, quia reuera non ſunt. Hinc illa diſtinctio inter motum medium et motum verum apud planetas, quorum prior mere eſt imaginarius, poſterior autem, vt denominatio iam indicat, eſt realis, angulumque exprimit, qui a planeta in dato tempore confectus eſt.

Kepleri autem ingenium acutiſſimum ſcrutando explorauerat, planetas quoque vera vniformi celeritate moveri, dummodo celeritas eorum non ad angulos referatur ſed ad areas, quas temporibus equalibus deſcribunt. En legem illam

illam tam maxime celebratam: *Ellypſeos ſectores temporibus eſſe propertionales.*

Keplerus demonſtrat hanc legem de areis apud circulum excentricum! deinde vero, ſine ſingulari demonſtratione, ab eo ad ellypſes transfertur. Ex quo factum eſt, vt lex iſta de areis, exactitudini magis et conſenſui calculi cum obſeruationibus, auctoritatem ſuam debuerit, quam rigori demonſtrationis in genere. Quodſi vero motus planetarum mechanice repreſentatur, id eſt tanquam motus quem vires centrifugae centripetaeque producunt, tum legis neceſſitas non ſolum in hoc caſu ſingulari probatur, quo planetae in circulum aguntur, ſed vniuerſaliter, quauis curua ferantur. Hac de re legem iſtam de areis ad modum Newtoni 1) probaturi ſumus.

Ponatur itaque tempus totius reuolutionis planetae $=$ T in r partes equales diuidi; proiciatur porro planeta vi aliqua, in directione AB (Fig. I.), ita vt linea partem ſpatii exhibeat, quam planeta in hoc tempusculo deſcribere cogitur: manifeſtum eſt, planetam, niſi a vi aliena deuietur, in $\frac{2}{r}$ T Lineam BC deſcripturum priori AB equalem. Planeta autem a vi quadam ſoli inſita, vt cum Newtonio dicam, ab initiali ſua directione deflectitur. Vocatur illa

1) Conf. Newtoni princip. philoſ. nat. Sect. II. Prop. I. Theorema I. de inventione virium centripetarum.

illa vis *centripeta*, atque per lineam BG exprimatur. Planeta a duobus his viribus sollicitatus, scilicet AB et BG, cursum suum diriget in diagonali BD, quod ex mechanica satis notum est. Occupabit ideo $\frac{2}{r}$.T elapso locum D.

Trianguli autem ASB et BSC equalem habent aream, propter basin et altitudinem, quae in ambobus eadem est. At trianguli SBD et SBC haud minus equalem habent aream; continentur enim inter paralellas CD et BG; ergo area trianguli ABS = areae trianguli SBD eodem modo de $\frac{3}{r}$.T. $\frac{4}{r}$.T. et vniuersaliter de $\frac{n}{r}$. T propari potest: areas semper esse equales q. e. d.

In demonstratione modo allata, vis centripeta constans atque in omnibus punctis eadem praesumitur, vt vulgo fit; nihilo minus vero valet et tum ista lex, cum vis centripeta non constans, sed variabilis assumitur. Fac itaque, planetam, postquam in D peruenerit, non amplius a vi centripeta = BG, sed = DF, a directione initiali deflecti, tum iterum planeta diagonalem sequetur. Areae autem triangulorum SBD et SDM, ex eadem ratione, qua casu priori, equales sunt; trianguli LSD et DSM sunt inter paralellas LM et DF, ideoque areae eorum etiam equales, ergo area trianguli LSD = areae SDM = a. SBD = a. ASB. q. e. d.

Ex mera figurae inſpectione patet, cum vis centripeta non ſemper eadem ſit, ſed mox maior mox minor, FD maiorem eſſe quam BG, adeoque LD $>$ DB, ergo angulus LSD $>$ BSD. Anguli autem iſti verum indicant motum. Lex de areis ergo ita exprimi debet: *in quovis motu qui viribus centralibus producitur, ſpatia vniformi deſcribuntur celeritate, ſi celeritas ad areas refertur.*

Cum iam quis que motus curuilineus, tanquam motus ortus a viribus centralibus explicari poſſit 1), omnia quae iam de tali motu demonſtrata ſunt, hic quoque valent. Iure itaque KEPLERVS contendit, planetas in orbitis, medio motu i. e. vniformi celeritate, agitari, dummodo celeritas ad areas refertur.

Sit itaque tempus totius reuolutionis $= T$; area orbitae $= \Pi$. erit $\frac{\Pi}{T} =$ Celeritas 2), qua motus vniformiter conficitur, et ad quoduis tempus datum $= t$, erit pars orbitae huic tempori conueniens $= \frac{\Pi}{T} \cdot t$.

Iam

1) Si enim rectae AB et BG infinite paruae aſſumuntur curua habetur; aut tum *forma* motus curuilineus hiſce viribus explicatur.

2) Celeritas eſt vnitas menſurae rationis inter ſpetium et tempus, quae $C = \frac{S}{T}$ exprimitur, ex hac definitione perinde eſt, qualis ſit quantitas $= S$, dummodo $C = \frac{S}{T}$ exprimi poteſt.

Iam iam ad problema illud celebere peruenimus, de quo iam ſupra mentio facta eſt. Quaeritur enim; ex parte ellypſeos $= \frac{\Pi}{T} \cdot t$, quae ad quodcunque tempus datur, angelum Inuenire, qui huic parte ellypſeos conueniens ſit? aut vt vulgo dicitur: data *anomalia media inuenire anomaliam veram* 1)?

Solutio.

Sit AMGA (Fig II.) ellypſis in qua plaueta mouetur. A, *aphelium;* P, *perihelium;* AP, *axis maior;* S, ſol in *foco* ellypſeos. Cum radio $= \frac{1}{2}$ AP ducatur circulus ADEP, qui *circulus excentricus* vocatur. Ponamus planetam eſſe certo quodam tempore in loco M; tum angulus ASM vocatur *anomalia vera.* Si iam de eirculo excentrico, arcus ACD dato tempori proportionalis deſumatur, erit angulus ACD aut arcus AD a quo menſuratur, *anomalia media.* Angulus ACN, vocatur *anomalia excentrica;* SM diſtantia planetae a ſole vocatur *radius vector.*

Ante omnia demonſtrandum erit, ſectorem ANS eſſe equalem ſectori ACD.

 Sit

1) Motus verus et medius idem eſt quod anomalia vera et media.

Sit enim dimidium axis maioris = a; axis minoris = b; habetur area circuli = P a²; area ellypſeos = P.ab. 1). Sit breuitatis cauſa P a² = k. P. ab = π: tempus reuolutionis = T. tempus datum = t. His poſitis, erit ſecundum legem de areis: T: t = k: Sect. ACD porro T. t = π: Sect. AMS: ergo, k: π = Sect. ACD: Sect. AMS: eſt autem k: π = Sect. ANS: Sect. AMS: itaque Sect. ANS = Sect. ACD. q. e. d.

Sector ACD eſt = Sect. ACN + Sect. NCD; Sect. ASN = Sect. ACN + ▿ NCS: ergo Sect. NCD = ▿ NCS. Area autem trianguli NCS = ST. ½ NC: area Sectoris NCD = ND. ½ NC. atque arcus ND = rectae ST. Haec illa difficultas eſt, qua problema noſtrum propoſitum vrgetur: poſcitur aequatio inter arcum et rectam, quae geometrica dari nequit: approximatione ergo opus eſt.

Sumatur pro arbitrio arcus AN; quo facto, in triangulo SCT, ex datis angulis ſcilicet C (qui ab arcu AN menſuratur) et latere CS, (eccentricitas) habetur latus ST: valor eius, in gradus conuerſus atque ad arcum AN additus, mediam exhibebit anomaliam quae operatio tamdiu repetenda, quamdiu arcus AN + recta ST non ſatis proxime valorem arcus AN accedant. Operatione autem ad vulgarem trignometriam pertinente, rem exemplo illuſtrare haud animus eſt.

Angu-

1) Eſt a: b = P. a²: area ellypſeos = $\frac{\text{P a}^2\text{ b}}{\text{a}}$ = P. ab.

Angulo C (*anomalia eccentrica*) approximando inuento, describatur cum radio MF ex Centro M semicirculus, qui lineam SM prolongatum in puncto O seccabit. Quo res expeditius absoluatur, sit angulus ACN *anomalia excentrica* $= \vartheta$; angulus ASM, *anomalia vera* $= \varphi$ dimidium axis majoris $= 1$; CS *eccentricitas* $= e$; SM radius vector $= y$; MF $= r$. Erit primum: SO : SR = SF : SQ aut (quod idem est, vt ex constructione patet) 2CA : 2CI = 2CS : SM — MF. Ex hac aequatione, si 2CI = Cos. ϑ ponatur, erit, $e\,\mathrm{Cos.}\,\vartheta = \frac{y - r}{2}$: est autem $\frac{y + r}{2} = 1$ ergo $y = 1 + e.\,\mathrm{Cos.}\,\vartheta$. In triangulo SMI est Cos. $\varphi = \frac{e + \mathrm{Cos.}\,\vartheta}{1 + e.\,\mathrm{Cos.}\,\vartheta}$. Si valor hic Cos. φ, in formulam

$$\mathrm{tang.}\ \tfrac{\varphi}{2}^2 = \frac{1 - \mathrm{Cos.}\,\varphi}{1 + \mathrm{Cos.}\,\varphi}$$ substituatur, erit:

$$\mathrm{tang.}\ \varphi^2 = \frac{1 + e.\,\mathrm{Cos.}\,\vartheta - e - \mathrm{Cos.}\,\vartheta}{1 + e.\,\mathrm{Cos.}\,\vartheta + e + \mathrm{Cos.}\,\vartheta} = \frac{1 - e - \mathrm{Cos.}\,\vartheta\,(1 - e)}{1 + e + \mathrm{Cos.}\,\vartheta\,(1 + e)}$$

$$= \frac{1 - e}{1 + e}\left(\frac{1 - \mathrm{Cos.}\,\vartheta}{1 + \mathrm{Cos.}\,\vartheta}\right) = \mathrm{tang.}\ \vartheta^2 \left(\frac{1 - e}{1 + e}\right).$$ atque tang.

$$\varphi^2 = \mathrm{tang.}\ \vartheta^2 \left(\frac{1 - e}{1 + e}\right)$$ ex quo podit: $\sqrt{(1 + e)} : \sqrt{(1 - e)}$

$= \mathrm{tang.}\ \vartheta : \mathrm{tang.}\ \varphi$. ergo $\mathrm{tang.}\ \varphi = \frac{\sqrt{(1 - e)}.\ \mathrm{tang.}\ \vartheta}{\sqrt{(1 + e)}}$.

Si

Si e contrario ex anomalia vera anomaliam mediam definire velis; calculus ita instituendus erit: primum habetur tang. $\vartheta = \frac{\sqrt{(1+e)}\ \text{tang.}\ \varphi}{\sqrt{(1-e)}}$: tum quaerendus est valor rectae ST qui ad anomaliam excentricam additus dabit anomaliam mediam. Sed cum id agitur, vt ex media vera inueniatur, ista methodus, quae vulgo *inversa* vocatur, nullum praebet vsum.

Problema.

Data anomalia vera, $= \varphi$ inuenire radium vectorem $= y$ huic correspondentem?

Solutio.

$$y = \frac{1 - e^2}{1 - e + 2e\ \text{sin.}\ \tfrac{1}{2}\varphi^2}$$

Demonstratio.

In triangulo SMF est: SF. SM $(= 2\text{CS}.\text{SM}):(\text{SA}-\text{SF}).(\text{SA}-\text{SM}) = 1 : \text{sin}\ \tfrac{1}{2}\varphi^2$: ex quo fit. $y = \frac{1-e^2}{1-e + 2e\ \text{sin.}\ \tfrac{1}{2}\varphi^2}$ q.e.d.

Differentia inter anomaliam veram et anomaliam mediam, *aequatio Centri* ab astronomis vocatur. Ex iis quae iam de motu vero et medio exposita sunt, sponte quisque sibi persuasum habebit, centri aequationem mox positiuam mox

mox negatiuam, et ita esse exponendam: Centri aequatio

$$= \pm \left(\frac{\sqrt{(1-e)}.\,\mathrm{taug.}\,\vartheta}{\sqrt{(1+e)}} - \frac{360^\circ}{T}.\,t \right)$$

Constat enim: spatia, medio motu vuiformi celeritate describi, vero autem motu, mox accelerata mox retardata confici; ideoque anomalia media mox maior mox minor erit anomalia vera. Quodsi, (vt imaginationi adiuvetur) rectae CD et SM (Fig. 2.) circa puncta C et S ita rotantur, vt simul ab A ad P perueniant, eodemque tempore rursus ad A redeant; manifestum est, angulum ACD in semicirculo ADG esse externum respectu anguli ASD; sed in altero semicirculo PEA angulum PCD semper esse internum respectu anguli alterius; itaque in parte orbitae sinistra anomalia media maior est quam anomalia vera, adeoque aequatio centri negatiua: in parte orbitae dextra autem erit anomelia media minor, quam anomalia vera, ergo aequatio centri positiva: in A et P fit = o.

Ex hac contemplatione tertium et vltimum nobis obvoluitur problema. Cum enim aequatio centri ab A incipiat increscere, deinde autem ad nihilum vsque decrescat, denique negatiua emergat; punctum habeat, necesse est, in quo fit maxima, et ex quo rursus decrescere incipiat. Quaeritur itaque: vbi *est locus ille planetae in orbita sua in quo aequatio centri fit maxima?*

Solutio.

Solutio.

Ex centro S ducatur circulus cum radio = dimidio quantitatis proportionalis inter axem minorem et axem maiorem; area circuli aequabitur areae ellypſeos. Si planeta in hoc circulo moueri ponatur, manifeſtum eſt, anomaliam veram ſemper aequalem eſſe anomaliae mediae; quoniam enim centrum orbitae cum centro virium coincidit, et eius area aequatur areae ellypſeos; ergo circuli ſectores ſunt ſectoribus ellypſeos aequales.

Hic autem caſus vnice locum habet, cum planeta in punctis M et N verſatur: in omnibus aliis punctis partis ellypſeos ſuperioris ANM diſtantia a ſole maior eſt radio circuli; brevior autem in parte ellypſeos inferiori MPN: attamen cum orbitarum ſectores nihilo minus aequales eſſe debeant, ſequitur, angulos eorum eſſe inaequales. Eſt ergo M punctum illud, quo anomalia media deſinit ſuperare anomaliam veram, N autem eſt punctum, quo anomalia media deſinit ab anomalia vera ſuperari: ſunt itaque puncta M et N in orbita planetae termini aequationis centri incrementi et decrementi.

Termini autem iſti facile determinari poſſunt: ducatur linea MF: et ita in triangulo SMF omnia latera nota erunt. Sit MS $= \sqrt{(ab)} = s$; MF $= a - s$ (eſt enim $s = MF + a$) $= d$; CS $= 2e$: erit Coſ. $\varphi = \frac{s^2 + 4e^2 - d^2}{4 . es}$ atque

$$\text{ſin.}\ \varphi = \sqrt{\frac{(s + d + 2e).(d + 2e - s).(s + d - 2e).(s + 2e - d).}{4\ es}}$$

haec

Haec sufficiant, vt videatur, quomodo secundum Kepleri hypothesim physicam calculus iustituendus sit.

Analyticam vero methodum, ne prorsus derelinquere videar, non nihil istius, quam amplectitur dom. de La Lande, in medium proferam. Ista enim longe abest, vt eum desideret ambitum notionum analyticarum, quem omnis alia methodus analytica requirit; quippe dubium non est quin a nemine fuerit animo comprehensa, qui analyseos solummodo libauit elementa; de ceteris autem non aeque constat. Nimirum methodus auctoris Bossut, (nam vnius tantum faciam mentionem) lectorem supponit in astronomia physica versatissimum.

Sit itaque dimidium axis maioris $= 1$; radius vector $= y$. anomalia vera $= \varphi$; media $= \vartheta$ excentricitas $= e$; erit differentiale sectoris elliptici $= \frac{y^2 d\varphi}{2}$; 1) differentiale sectoris circularis $= \frac{d\vartheta}{2}$: secundum analogiam iam vsitatam, erit, $d\vartheta = \frac{y^2 d\varphi}{\sqrt{(1-ee)}}$. Haec formula est differentiale anomaliae mediae; ergo $\vartheta = \int . \frac{y^2 d\varphi}{\sqrt{(-ee)}}$.

Sed prius quam inlegrale investigem, alia indicanda erit expressio radii vectoris quae facile, ex illa quae supra data

1) arcus enim a quo angulus mensuratur est $y d\varphi$.

data eſt, deduci poteſt. Eſt illic $y = \frac{1 - ee}{1 - e + e 2 \sin \frac{1}{2} \varphi^2}$: ponamus pro $2 \sin \frac{1}{2} \varphi^2$ valorem equalem $= 1 - \text{Coſ.}\, \varphi$ erit $y = \frac{1 - ee}{1 - \text{Coſ.}\, \varphi}$. Quo valore in $y^2 d\varphi$ ſubſtituto, prodibit $y^2 d\varphi = (1 - ee)^2 (1 - e \,\text{Coſ}\, \varphi)^{-2} d\varphi$. Quae formula vt integretur, ab eo incipiendum vt valor $(1 - e \,\text{Coſ.}\, \varphi)^{-2}$ ſecundum Leges binomiales euoluatur: erit autem $= 1 + 2e . \text{Coſ.}\, \varphi + 3e^2 \,\text{Coſ.}\, \varphi^2 + 4e^3 \,\text{Coſ.}\, \varphi^3 + 5e^4 . \text{Coſ.}\, \varphi^4 \ldots\ldots, + n e^{n-1} \,\text{Coſ.}\, \varphi^{n-1} \ldots$ pro $\text{Coſ.}\, \varphi^2$, $\text{Coſ.}\, \varphi^3$, $\text{Coſ.}\, \varphi^4$, ſubſtituatur: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{Coſ.}\, 2\varphi$, $\frac{3}{4} \text{Coſ.}\, \varphi + \frac{1}{4} \text{Coſ.}\, 3\varphi$, $\frac{5}{8} + \frac{1}{2} \text{Coſ.}\, 2\varphi + \frac{1}{8} \text{Coſ.}\, 4\varphi$. Quo facto, erit $(1 - e \,\text{Coſ.}\, \varphi)^{-2} d\varphi = (1 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{15}{8} e^4) d\varphi + (2e + 3e^3) . \text{Coſ.}\, \varphi . d\varphi + (\frac{3}{2} e^2 + \frac{5}{2} e^4) \text{Coſ.}\, 2\varphi d\varphi + e^3 \,\text{Coſ.}\, 5\varphi d\varphi + \frac{1}{8} e^4 \,\text{Coſ.}\, 4\varphi d\varphi = \frac{y^2 d\varphi}{(1 - ee)^2}$ atque erit

$$\int . \frac{y^2 d\varphi}{(1 - ee)^2} = (1 + \tfrac{3}{2} e^2 + \tfrac{15}{8} e^4) \varphi + (2e + 3e^3) \sin . \varphi$$
$$+ (\tfrac{3}{4} e^2 + \tfrac{5}{4} e^4) \sin 2\varphi \ldots\ldots$$

ponatur iſta ſeries $=$ X. erit $\vartheta = X. (1 - ee)^{\frac{3}{2}}$.

Hoc modo anomalia media ex anomalia vera inuenitur. Vt iam ex media vera eruatur, operatione opus eſt analytica, quae ſerierum inuerſio vocatur, et quae eo conſiſtit, vt problema illud ſoluatur: data quantitate x per ſeriem quandam ad variabilem y ordinatam: ſeriei formam inuenire, quae ad quantitatem x diſpoſita, quantitatem y ex-

exhibeat. In caſu praeſenti, forma ſeriei quaerenda erit, quae, ſi loco ſin. φ, ſin. ϑ ſubſtituitur, ſinus φ eodem modo habeatur, quo modo ſin. ϑ per ſeriem, quae ſin. φ continet. Hanc autem operationem vna cum theoria qua fundata eſt prolixius exponere, limites prohibent, quibus vulgo huiuscemodi ſpecimina contineri ſolent.

THESES.

I.

Cometas in parabala moueri non eſt hypotheſis phyſica, ſed calculi compendium.

II.

Lex de areis eſt fundamentalis totius nouae aſtronomiae.

III.

Ariſtotelis demonſtratio de terrae figura non ſatis rigida mihi videtur.

IV.

IV.

Methodus de Maupertuis rationem axium terrae e principiis physices determinare non satis certis fundatur principiis.

V.

Nihil valet argumentum contra calculum fluxionum, quod principiis vtitur quae in mechanica occurrunt.

VI.

Pluuii phaenomenon per solutionem aquae in aere explicari non potest.

VII.

Iridis theoria est elegantissima in tota omni scientia naturae.

VIII.

Spatium, formam esse intuitus externi, nihil est nisi hypothesis.

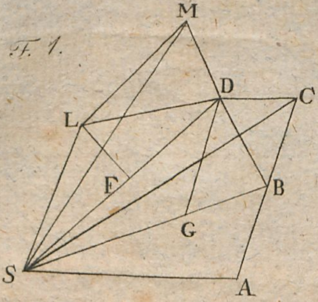
IX.

Ars paedagogica, principiis nullo modo fundari potest.

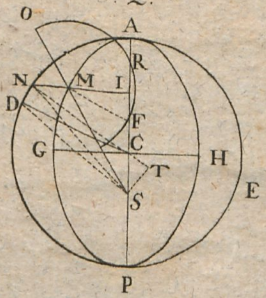
Errata.

S. Pagina 2 in nota 2 coelestes — coelestis
Pag. 3 Lin. 12 celebri — celebris.
Pag. 4 Lin. 3 geometric — geometricae.
Pag. 5 Lin. 8 juxto — justo.
Pag. 7 Lin. 6 agetari — agitari.
Pag. 9 Lin. 10 propari — probari.
Pag. 10 Nota 1 motus curvileneus — motus curvilinei.

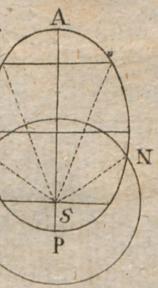
F. 1.



F. 2.



F. 3.



KEPLERI
PROBLEMA CELEBRE

COMMENTATIO

QVAM

AMPLISSIMI PHILOSOPHORVM ORDINIS

CONSENSV

PRO RITE OBTINENDIS

SVMMIS IN PHILOSOPHIA HONORIBVS

PUBLICE DEFENDET

WOLF HERZ DETMOLDT

HAMELIENSIS.

DIE XXXI. DECEMBR. MDCCXCVIII.

GOTTINGAE,
IN OFFICINA BARMEIERIANA.