Kurze Abhandlung über die Theorie der Festigkeit der Materialien.

Entworfen von Gottlob Ludwig von Pöllnitz.

Mit Einem Kupfer.

Leipzig, bey Adam Friedrich Böhme. 1795.

Meinem

gütigen Vater

widmet

dieses kleine Schriftchen

als

ein geringes Kennzeichen

von

kindlicher Liebe und Achtung

Gottlob Ludwig von Pöllnitz.

Ueber die Festigkeit der Materialien.

Untersuchungen über die Festigkeit der Materialien sind in der Baukunst, Mechanik, Schiffkunst und in vielen andern menschlichen Beschäftigungen von großem Nutzen. Diese lehrreichen Betrachtungen führen oft auf die weisen Absichten hin, die der göttliche Urheber der Natur bey vielen Anordnungen der Körperwelt genommen hat: Hier sollen blos in der Kürze einige Hauptsätze über die Stärke des Zusammenhanges unter den Theilen der festen Materialien betrachtet werden. Ausführlich haben darüber geschrieben und nützliche Versuche angestellt, Belidor[1]), Büffon[2]), Muschenbröck[3]).

1) Ingenieurwissenschaft B. 4. Cap. 2. 3.

2) In den Abhandlungen der Pariser Akademie von den Jahren 1740 und 1741. pag. 453, besonders über die Stärke des Holzes, wo er mehr ins Große gehende Versuche angestellt hat.

3) Er hat davon ein eigenes Werk geschrieben: Introduct. ad cohae-

§. 1.

Die Festigkeit eines Körpers heißt diejenige Kraft, welche bey der geringsten Vermehrung den Zusammenhang seiner Theile trennt. Sie heißt absolut, wenn ihre Richtung durch den Schwerpunkt und Unterstützungspunkt des Körpers geht; relatif, wenn sie mittelst eines Hebelarms den Körper abbricht.

Fig. I.

§. 2.

Wird ein Körper in verticaler Lage mit seinem obern Ende B befestigt, und man hängt an sein unteres Ende A ein solches Gewicht p, welches bey der geringsten Vermehrung den Körper zerreißt, so heißt dieses Gewicht p das Maaß seiner absoluten Festigkeit.

Fig.

cohaerentiam corp. firmorum, in seinen *Diss. phys.* p. 421. Er hat bey einer großen Menge von Körpern untersucht, wie viel Kraft nöthig war sie von einander zu reißen; in andern Versuchen hat er auch die Kraft zu bestimmen gesucht, wodurch sie zerbrochen, das heißt, es hat Muschenbrök die *Cohaerentiam absolutam* und auch die *Cohaerentiam respectivam* der Theile des festen Körpers untersucht. Viele dieser Versuche hat er mit mehrern neuern in der Introduct. ad Philosoph. Nat. §. 1129 seq. beschrieben.

Fig. II.

§. 3.

Wird aber ein Körper, zum Beispiel ein Balken A B in horizontaler Lage an dem einen Ende in B befestigt, und man hängt an das andere Ende A ein solches Gewicht v, welches bey der geringsten Vermehrung den Körper abbricht, so heißt dieses Gewicht v nebst dem halben Gewicht des abgebrochnen Stück des Balkens das Maas seiner relativen Festigkeit.

Fig. III.

§. 4.

Die absoluten Festigkeiten zweyer Körper, welche durchaus von einerley physischer Beschaffenheit sind, verhalten sich wie die kleinsten Trennungsflächen, welche auf den Richtungen der Kräfte senkrecht stehen.

Beweis.

Weil in den angezeigten kleinsten Durchschnittsflächen die kleinste Anzahl physischer Punkte oder Fibern getrennt werden darf, so muß der Riß daselbst erfolgen. Nun sey die Fläche f der Fläche F, n mahl genommen gleich, nämlich $n f = F$, so muß auch die Kraft p der Kraft

P, n mahl genommen gleich seyn, nämlich $np = P$ es findet also folgende Proportion statt:

$$f : F = p : P$$

das ist: die Trennungsflächen verhalten sich wie die absoluten Festigkeiten.

§. 5.

Herrn Muschenbröks Versuche über das Zerreißen einiger Holzgattungen, Metalle und Seile waren folgende *):

Beym Holze war die Trennungsfläche = 0,0729 Quadratzoll. Die Körper wurden von folgenden Gewichten zerrissen:

Buchenholz	von	1250 Pfund
Eschen	—	1250
Eichen	—	1150
Linden	—	1000
Ulmen	—	950
Tannen	—	600
Fichten	—	550

Beym

*) Siehe Introd. ad cohaerent. corpor. firmor. Die zu den Versuchen gebrauchten Stücken Holz waren prismatische viereckte Stangen, deren Queerschnitte Quadrate, und jede Seitenlinie daran $\frac{27}{100}$ rheinl. Zolle.

Bey den Metallen war die Trennungsfläche = 0,01 rheinländische Quadratzoll *). Die Körper wurden von folgenden Gewichten zerrissen:

Gold	von	500	Pfund
Eisen	—	450	
Silber	—	370	
Messing	—	360	
Kupfer	—	299¼	
Zinn	—	40¼	
Bley	—	29¼	

Die Durchmesser der Seile waren in rheinländischen Duodecimallinien und wurden von folgendem Gewichte zerrissen:

8	Linien	von	330	Pfund
12	—	—	750	
16	—	—	1030	
20	—	—	2080	
24	—	—	3000	
30	—	—	4730	
36	—	—	7900	

*) Diese Versuche machte Muschenbröck mit Metalldrathen, die $\frac{1}{10}$ rheinl. Zolles dicke waren, an deren jeglichen er ein Gewichte hieng.

Fig. IV.

§. 6.

Ein Beyspiel mag zur Erläuterung dienen: Wie dicke müssen die Ringe einer Kette seyn, welche 6000 Pfund tragen sollen? Aus Versuchen setzen wir als bekannt voraus, daß ein Cylinder von geschmiedeten Eisen, einen Quadratzoll im Durchschnitte, von 70000 Pfund zerrissen wird. Es sey also der Durchschnitt eines Kettenringes gleich x Quadratzolle; um mehrerer Sicherheit willen wollen wir annehmen der Ring zerreiße nur an einer Stelle, man setze also folgende Proportion an: 70000 Pf. : 6000 = 1 Quad. Zoll : x Quadratzoll, daraus findet man $x = \frac{6000}{70000} = \frac{3}{35}$ Quadratzoll. Will man den Durchmesser der gefundnen Kreisfläche x wissen, so sey selbiger = y, und so ist die Kreisfläche $x = \frac{y^2 \pi}{4} = \frac{3}{35}$ und daraus findet man sodann y, wenn man für π setzt 3, 14 nämlich y

$$= \sqrt{\frac{3 \cdot 4}{35 \cdot 3,14}} = 0,32 \text{ Zolle.}$$

Eine Kette, deren Ringe im Durchmesser 0, 32 Zolle dicke sind, vermag daher eine Last von 6000 Pfund zu halten.

Fig.

Fig. V.

§. 7.

Die relativen Festigkeiten zweyer Körper, die durchaus von einerley physischer Beschaffenheit sind, verhalten sich wie die Trennungsflächen multiplicirt in die Abstände ihrer Schwerpunkte vom Unterstützungspunkte, dividirt durch die correspondirenden Längen der Körper.

Beweis.

Es sey M eine Wand, in welcher der Körper mit dem einen Ende C befestigt ist, die Länge des Körpers A B sey l, der Schwerpunkt der Trennungsfläche D E F G, sey C, und C A = a, in C denke man sich die ganze absolute Festigkeit des Körpers vereinigt als eine Kraft, die nach C G wirkt, senkrecht auf A C in B hänge ein Gewicht v, welches bey der geringsten Vermehrung den Körper bricht. A sey der Unterstützungspunkt, so ist C A B ein Winkelhebel, in C wirkt die absolute Festigkeit p senkrecht auf A C und B, die relative Festigkeit v senkrecht auf A B. Diesemnach müssen die Momente von beyden Seiten gleich seyn, das ist

$$a.\ p = l\ v$$

Es

Es ist also $v = \frac{a.p}{l}$

nun sey für einen andern Körper, dessen Länge = L der Abstand des Schwerpunktes der Trennungsfläche vom Unterstützungspunkte = A, die absolute Festigkeit = P die relative Festigkeit = V, so muß auch

$$V = \frac{A.P}{L}$$

Mithin wenn man beyde Sätze zusammen vergleicht,

$$v : V = \frac{a\,p}{l} : \frac{A\,P}{L}. \text{ seyn:}$$

Nun aber ist nach §. 4 $p : P = f : F$, wenn also f, F die Trennungsflächen der beyden betrachteten Körper sind und man selbige in die vorige Proportion substituirt, so ist

$$v : V = \frac{a\,f}{l} : \frac{A\,F}{L}.$$

§. 8.

Aus denen im vorhergehenden §. 7. erwiesenen Proportionen lassen sich folgende Sätze ableiten:

1) Wenn die Trennungsflächen gleich sind, so verhalten sich die relativen Festigkeiten wie die Abstände

stände der Schwerpunkte vom Unterstützungspunkte, getheilt durch die Längen der Körper, das ist wenn

$F = f$, so ist $v : V = \frac{a}{l} : \frac{A}{L}$.

2) Wenn die Längen der Körper gleich sind, nämlich $L = l$, so ist

$$v : V = a\,f : A\,F.$$

3) Wenn die Trennungsfläche f ein Rechteck ist, nämlich $f = b\,c$
und $F = B\,C$,

$$\text{so ist } v : V = \frac{\frac{1}{2}b . b\,c}{l} : \frac{\frac{1}{2}B . B\,C}{L}.$$

4) Für $l = L$ und $a = b = c$
und $A = B = C$
ist $v : V = a^3 : A^3$.

5) Wenn die Trennungsflächen ähnlich sind, das ist, wenn $b : c = B : C$,
so ist $v : V = b^3 : B^3 : o$
wie im vorigen Falle.

Es lassen sich, wie man leicht einsieht, noch mehrere Bedingungen hinzufügen.

§. 9.

§. 9.

Einige Beyspiele mögen das in §. 7 und 8 Vorgetragene erläutern. Es sey D B. Fig. 5. ein Balken, dessen Länge A B 30 Schuhe, die Breite F G 10 Zoll, die Höhe 8 Zoll, der Balken sey Tannenholz. Mit wie viel Pfunden wird er zerbrochen werden können?

Auflösung.

Nach Muschenbrök wurde ein hölzernes Parallelepipedum von Tannenholz, dessen Länge 10 rheinländische Zolle und am Kopfe jede Seite des Quadrats = 0,27 Zoll war, mit dem einen Ende befestigt, am andern Ende von einem Gewichte = $36\frac{1}{2}$ Pfund gebrochen. Es ist also nach der Proportion

$$v : V = \frac{\frac{1}{2} b . b c}{l} : \frac{\frac{1}{2} B . B C}{L}.$$

Für dieses Beyspiel ist

b	=	0,27	Zolle
c	=	0,27	—
l	=	10	—
B	=	10	—
C	=	8	—
L	=	360	—
v	=	$36\frac{1}{2}$	—

$36\frac{1}{2}$

$$36\frac{1}{2} : \dot{V} = (0{,}27)^3 : \frac{100.8}{360}$$

oder $\frac{73}{2} : V = 0{,}19683 : \frac{20}{9}$, mithin

ist $V^2 = 4120$ Pfund.

Fig. VI.

§. 10.

Ein hohler Cylinder hat, mit einem dichten Cylinder von gleicher Länge und gleicher Masse derselben Materie verglichen, mehr relative Festigkeit, deswegen hat die weise Vorsehung die cylindrische Röhrengestalt bey den Flugfedern der Vögel, den Beinen der Thiere, den Halmen mehrerer Gewächse, und so weiter gewählt, um mit weniger Masse größere Festigkeit zu verbinden. Z. B. es sey der Halbmesser eines dichten Cylinders $g\,k = b$, der Halbmesser eines hohlen Cylinders $G\,K = \alpha$, der Halbmesser des ausgehöhlten $G\,n = \beta$, die Länge beider Cylinder $A\,B = l$.

So ist der Cubik-Inhalt des des dichten Cylinders $A\,K\,B. = \alpha^2\pi.\,l$ und des innern $n\,d$ gleich $\beta^2\pi\,l$, mithin des hohlen $\alpha^2\,\pi.\,l - \beta^2\pi\,l$ und der

Cubik-

Cubikinhalt des dichten Cylinders $M = b^2 \pi l$, folglich, da beyde Cylinder gleich viel Materie haben, so ist

$$\frac{\alpha^2 \pi l - \beta^2 \pi l = b^2 \pi l}{\alpha^2 - \beta^2 = b^2.}$$

Nun ist die relative Festigkeit des hohlen Cylinders und des dichten, nämlich

$$v : V = \frac{[\alpha^2 \pi - \beta^2 \pi]}{l} . \alpha : \frac{b^2 \pi . b}{l}$$

oder $v : V = b^2 \pi . \alpha : b^2 \pi . b$

$$v : V = \alpha : b.$$

Da aber α größer als b, so ist auch v größer denn V.

Zusatz.

aus $v : V \; \alpha : b$ folgt $\beta = \frac{b \sqrt{v^2 - V^2}}{V}$

und $\alpha^2 - \beta^2 = b$ $\quad \alpha = \frac{b v}{V}$.

Fig. VII.

§. 11.

Bey zwey Balken, deren Breite B, b und Höhe A, a gegeben ist, verhält sich nach §. 8 $v : V = \frac{a b a}{b}$ $: \frac{A B A}{L}$. oder $v : V = \frac{a^2 b}{l} : \frac{A^2 B}{L}$.

und

und wenn die Längen beyder Balken einerley sind, nämlich $L = l$, so ist $v : V = a^2 b : A^2 B$; wenn also durch einen Versuch v und $a^2 b$ bekannt sind, so läßt sich aus einem andern gegebenen Balken die Festigkeit V berechnen, nämlich es ist $V = \frac{v.}{a^2 b} A^2 B = m A^2 B$, wo also m eine absolute Zahl bedeutet, die durch Versuche bestimmt ist.

Fig. VIII.

§. 12.

Nach dem letzten Satze §. 11 läßt sich folgende Aufgabe durch Differential-Rechnung auflösen: Aus einem Baume den stärksten Balken zu hauen, der nämlich in Rücksicht der Festigkeit der stärkste ist.

Auflösung.

Es sey der Durchmesser des Baumes $BC = a$ $BE = x$, so ist aus der Natur des Kreises $AB^2 = a.x$ und $AC = a^2 - a\,x$, folglich da nach dem vorhergegangenen Lehrsatze §. 11 die Festigkeit des Balkens $= m. AC.^2 AB$ ist, wo, wie erinnert worden, m einen beständigen Coefficienten bedeutet, welcher durch Versuche bestimmt seyn muß, so muß die Festigkeit in diesem Falle ein Maximum seyn, man differentire den Ausdruck

$$V = m\,(a^2 - a\,x).\,\sqrt{a\,x} = m\,(a^{\frac{5}{2}}\,x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\,x^{\frac{3}{2}})$$

$$d\,(V) = d\,m\,(a^{\frac{5}{2}}\,x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\,x^{\frac{3}{2}})$$

$$o = \tfrac{1}{2}\,m\,a^{\frac{5}{2}}\,x^{\frac{1}{2}}\,d\,x - \tfrac{3}{2}{}^{m}\,a^{\frac{3}{2}}\,x + \tfrac{1}{2}\,d\,x$$

$$\frac{a^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} = 3\,a^{\frac{3}{2}}\,x^{\frac{1}{2}};\; a = 3\,x;\; \frac{a}{3} = x$$

Die Auflösung zeigt also, daß man den Durchmesser des Baumes in drey gleiche Theile theilen soll: Auf den ersten Theilungspunkte errichte man eine senkrechte Linie, wo diese den Umkreis trifft, ziehe man an dem einen Endpunkte des Durchmessers die Linie A C zu ihr durch den andern Endpunkt B die parallele B D, endlich ziehe man D C und A B, so hat man den Durchschnitt des Balkens, welcher, mit der Seite A B aufgelegt, die größtmöglichste Festigkeit unter allen Balken hat, die aus dem Baume gehauen werden können.

Fig. IX.

§. 13.

Aufgabe.

Wenn ein horizontal liegender Balken A B = a in der Mitte C von einer Last R gebrochen wird, so soll man eine Last Q finden, welche, in irgend einem anandern Punkte D angebracht, den Balken bricht, vorausgesetzt, der Balken sey in A und B befestigt.

Auflösung.

Um den Balken A C, der in A fest ist, zu zerbrechen, ist die Last $\frac{1}{2}$ R nöthig, nun sey A D = b, so ist der Balken A D in A zu brechen, dazu eine Last $\frac{1}{2}\,a.\frac{\frac{1}{2}\,R}{b}$ nöthig, eben so ist den Balken B C in B zu brechen eine Last $\frac{1}{2}$ R in C nöthig, mithin den Balken B D zu brechen eine Last $\frac{\frac{1}{2}\,a\,.\,\frac{1}{2}\,R}{a-b}$ nöthig, folglich die gesuchte Last

$$Q = \frac{\frac{1}{2}\,a\,.\,\frac{1}{2}\,R}{b} + \frac{\frac{1}{2}\,a\,.\,\frac{1}{2}\,R}{a-b} = \frac{1}{4}\,a\,.\,R\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a-b}\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\,a^2.\,R}{b\,.\,(a-b)}$$

Beyspiel in Zahlen.

Es ist $a = 30'$ $b = 12'$ $R = 6000$ Pfund

$a^2 = 900$ $\frac{1}{4} a^2 = 250$

$\frac{1}{4} a^2 R = 1500000$

$a - b = 18$

$(a - b).\ b = 216$

$Q = 6944$ Pfund.

§. 14.

Aus voriger Formel $Q = \frac{\frac{1}{4} a^2 . R}{b(a - b)}$ lassen sich auch Formeln für b und R ableiten, nämlich:

$$\text{I)}\quad R = \frac{Q.\ b\ (a - b}{\frac{1}{4}\ a^2}$$

eben so läßt sich b finden, nämlich:

$$\frac{\frac{1}{4} a^2 R}{Q} = a\ b - b^2$$

$$b^2 - a\ b = - \frac{\frac{1}{4} a^2 R}{Q}$$

$$b = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} . \frac{R}{Q}}$$

$$\text{II)}\quad b = \frac{a}{2} \left(1 \pm \sqrt{\frac{Q - R}{Q}} \right).$$

Auf-

Aufgabe.

Es sey Q = 69044 Pfund b = 20′ a = 55″ wie groß wird R seyn? Man findet, daß $\frac{48330800}{3025} \cdot 4$ = 6390 = R ist.

Beyspiel zu No. II.

Es sey Q = 6944 R = 544 Pfund a = 40′

$$\frac{Q-R}{Q} = \frac{6400}{6944} = 0,9202$$

$$\sqrt{\frac{Q-R}{Q}} = 0,95$$

$$1 - \sqrt{\frac{Q-R}{Q}} = 1\ 0,95 = 0,05$$

$$\frac{a}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{Q-R}{Q}}\right) = 005 . 20 = 1 \text{ Schu} = b.$$

Fig. X.

§. 15.

Aufgabe.

Wenn den Balken A B in horizontaler Lage eine Last p in M angebracht, zerbricht, und der Balken unter den Winkel m gegen den Horizont geneigt wird, so soll man eine Last Q finden, welche in M angebracht, den Balken in dieser Lage zerbricht.

Auflösung.

Es drücke N M die gesuchte Kraft Q aus, man zerlege selbige in ihre Seitenkräfte, D M, E M, so drückt D M die Kraft aus, welche senkrecht auf den Balken wirkt, und E M, welche nach der Richtung des Balkens wirkt, letztere wird von der Befestigung in B aufgehoben, erstere D M ist $= Q. \text{Cosin. } m$, es ist also $Q. \text{Cosin } m = p$, mithin ist die gesuchte Kraft $Q = \frac{p}{\text{Cosin } m.}$

Beyspiel in Zahlen.

Es sey $m = 60°$

$p = 3000$ Pfund

folglich ist $\text{Cosin. } 60° = \frac{1}{2}$

also $Q = \frac{3000}{\frac{1}{2}} = 6000$ Pfund.

Dieses Gewicht vermag also den Balken in dieser Lage zu zerbrechen.

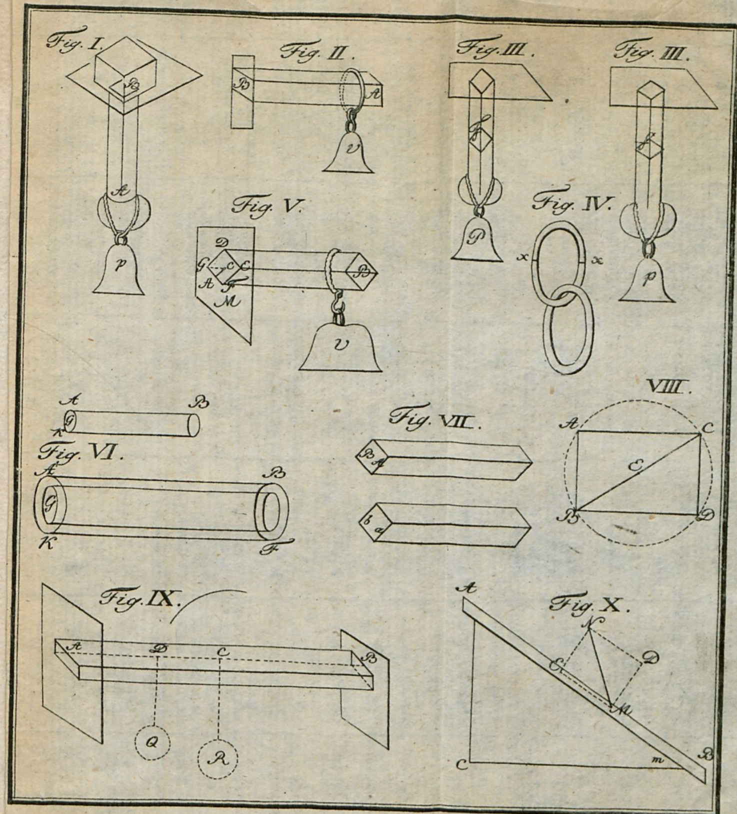
Fig. I.
Fig. II.
Fig. III.
Fig. III.
Fig. V.
Fig. IV.
VIII.
Fig. VII.
Fig. VI.
Fig. IX.
Fig. X.

Kurze Abhandlung über die Theorie der Festigkeit der Materialien.

Entworfen

von

Gottlob Ludwig von Pöllnitz.

Mit Einem Kupfer.

Leipzig,
bey Adam Friedrich Böhme.
1795.