METHODUM SERIERUM INFINITARUM,

Indultu Superiorum

PRÆSIDE

M. CHRISTIANO WOLFIO,

die XXIII. Dec. A. 1705.

placidæ Eruditorum disquisitioni

submittet

JUSTUS GOTTHARDUS RABENERUS, 7

Lipsiensis.

LIPSIÆ,

LITERIS CHRISTIANI GOEZI.

32.

METHODUS
SERIERUM INFINITARUM.

§. I.

SI Valor alicujus Quantitatis in particulas in infinitum excrescentes resolvitur, ita ut, exhibitis quibusdam terminis reliquorum in infinitum continuatio distincte concipi possit; termini isti in infinitum excrescentes junctim sumti vocantur *Series infinita.*

§. 2. Ex serierum itaque numero excluduntur omnes approximationes, quarum continuatio in infinitum distincte concipi nequit: qualis est in extractionibus radicum revocatio fractionum ad partes decimales, expressio item peripheriæ circularis juxta *Archimedem* & *Ludolphum à Ceulen* aliosque.

§. 3. Complexus regularum resolutionem Quantitatum in §. 2. commemoratam edocentium *Methodus serierum infinitarum* nuncupatur. Quare nobis ostendendum est, qua ratione Quantitas proposita quælibet in seriem infinitam resolvatur.

§. 4. Quantitates integræ facillime in seriem resolvuntur. Nimirum Quantitas proposita ducatur in seipsam, & factum unitate minutum dividatur per propositam, ut primus habeatur seriei terminus. Pro obtinendis terminis reliquis assumatur numerus quicunque loco Numeratoris communis, & per hunc unitate auctum continuo multiplicetur denominator termini præcedentis, quò prodeat denominator subsequentis.

§. 5. Quodsi adeo Quantitas proposita dicatur *a*, erit terminus primus seriei $a^2-1,:a$. Si jam ulterius Numerator communis assumatur m-1, prodibit series universalis pro omnibus Quantitatibus integris

$$\frac{a^2-1}{a}+\frac{m-1}{ma}+\frac{m-1}{m^2a}+\frac{m-1}{m^3a}+\frac{m-1}{m^4a}+\frac{m-1}{m^5a}\ \&c.$$

§. 6. Proponatur enim e. gr. in seriem resolvendus binarius. Quia $a=2$, erit $a^2-1=3$, $\frac{a^2-1}{a}=\frac{3}{2}$. sit $m-1=2$, erit $ma=6$, adeoque

$\frac{m-1}{ma}=\frac{2}{6}$, $\frac{m-1}{m^2a}=\frac{2}{18}$. $\frac{m-1}{m^3a}=\frac{2}{54}$, $\frac{m-1}{m^4a}=\frac{2}{162}$ &c. ut adeo prodeat $2=\frac{3}{2}+\frac{2}{6}+\frac{2}{18}+\frac{2}{54}+\frac{2}{162}$ &c. in infinitum, seu $2=\frac{3}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}$ &c. Sit $a=5$, erit $\frac{a^2-1}{a}=\frac{24}{5}$. Sit $m-1=1$, erit $ma=10$, adeoque $\frac{m-1}{ma}=\frac{1}{10}$, $\frac{m-1}{m^2a}=\frac{1}{20}$, $\frac{m-1}{m^3a}=\frac{1}{40}$ &c. Prodibit igitur $5=\frac{24}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{40}$ in infinitum.

§. 7. In his seriebus termini omnes communi gaudent Numeratore, excepto primo: Denominatores progrediuntur in ea ratione, quam habet unitas ad Numeratorem communem unitate auctum. Si vero desideres, ut termini eundem cum primo admittant Numeratorem, pro exponente rationis assumendus est Numerator primi unitate auctus. Atque ita reperietur $2=\frac{3}{2}+\frac{3}{8}+\frac{3}{32}+\frac{3}{128}$ &c. $5=\frac{24}{5}+\frac{24}{125}+\frac{24}{3125}$ &c. Series generalis pro omnibus integris erit $\frac{a^2-1}{a}+\frac{a^2-1}{a^3}+\frac{a^2-1}{a^5}+\frac{a^2-1}{a^7}+\frac{a^2-1}{a^9}$ &c.

§. 8. Seriem hac ratione productam æquivalere quantitati propositæ sic demonstro: Si proposita quantitas ducatur in seipsam, erit ut unitas ad ipsam, sic ipsa ad productum *per def. 15. Elem. 7.* Et si factum dividatur per quantitatem propositam, erit ut productum ad ipsam, ita quotus ad unitatem, *per def. cit.* Quotus igitur ad unitatem eandem habet rationem, quam habet ad ipsam proposita Quantitas, consequenter æquatur Quantitati propositæ, *per 9. Elem. 5.* Quare re si factum illud unitate minuatur, & ipsa tamen Quantitas proposita divisoris loco subscribatur, illud ad hanc minorem habere debet rationem, consequenter fractio minor est Quantitate proposita, *per 8. Elem. cit.* Quoniam vero character Quantitatis propositæ, *e. gr. a*, semper supponit æqualium partium aliquem numerum, *e. gr.* duas, si fuerit $a = 2$; quinque, si $a = 5$: Quadratum per radicem divisum fractionem exhibet, quæ ita explicari debet. Denominator significat, quamlibet partem denuo fuisse subdivisam in tot alias, quot integra habere supponebatur. Numerator indicio est, tot partes ex subdivisione primarum resultare, quot ipse habet unitates. Quare si Numerator unitate minuitur, fractio non amplius æquivalet integro, sed deficit pars una, quæ exprimitur per fractionem, cujus Numerator unitas, Denominator idem, qui erat termini primi. Ab hac igitur parte ut denuo auferri possit particula alia, fractio hæc erit multiplicanda per numerum quemcunque: Quo facto, particula ista in totidem alias divisa concipitur, quot numerus prædictus habet unitates, sed quæ simul sumtæ isti æquivalent, *per* 17. *Elem.* 7. Unde si Numerator novæ fractionis minuatur unitate, id quod relinquitur, non amplius particulæ integræ æquatur, sed una deficit, quæ per fractionem exprimitur, cujus Numerator est unitas, denominator idem cum denominatore termini secundi. Quamobrem ut denuo ex eadem auferri possit particula aliqua, multiplicanda est fractio, & quidem per eundem numerum, per quem fiebat multiplicatio, cum terminus seriei quæreretur secundus; Ita enim obtinetur, ut Numerator termini tertii æquetur Numeratori secundi, & Denominator tertii sit ad Denominatorem secundi, uti Denominator secundi ad Denominatorem primi. Quoniam vero hæc operatio in infinitum continuari potest, cum ablata particula ex termino præcedenti per fractionem continuo designetur, cujus Numerator unitas, Denominator coincidit cum Denominatore termini præcedentis, cujuscunque autem Quantitatis datæ sumi possit multiplum desideratum, adeoque fractio illa per illum ipsum numerum, per quem fractiones, particularum residuarum in anterioribus terminis indices, multiplicatæ sunt, multiplicari valeat; evidens est, per regulas traditas aliquam obtineri seriem ex terminis numero infinitis constantem, cujus progressus distincte concipitur, quæque æquatur Quantitati propositæ. Q. e. d.

§. 9. Series istas infinitas æquivalere Quantitati propositæ, alia adhuc ratione demonstrari potest, quærendo nempe summam totius seriei juxta regulas summandi Progressiones Geometricas consuetas, modo loco termini ultimi, qui in summandis seriebus finitis terminorum Geometrice proportionalium inter data reponitur, assumatur cyphra. Ita enim erit differentia primi & ultimi æqualis primo $= \frac{a^2 - 1}{a}$, quæ divisa per exponentem rationis unitate minutum $a^2 - 1$ dat summam omnium terminorum primo excepto, $\frac{a^2 - 1}{a^3 - a}$. Quod si igitur addatur terminus primus, prodit summa $\frac{a^2 - 1}{a^3 - a} + \frac{a^2 - 1}{a} = \frac{a^3 - a + a^5 - 2a^3 + a}{a^4 - a^2} = \frac{a^5 - a^3}{a^4 - a^2}$, h. e. divisione actu facta, a. Ita in casu §. 5. summa omnium excepto primo reperitur ut summa integræ seriei in antecedenti, eique additur terminus primus.

§. 10. Regressus hic à serie ad summam omnibus illis dubiis eximendis sufficit, quæ contra series infinitas movit *Dethlevus Cluverus*, Geometra insignis, qui *in Actis Eruditorum Lipsiensibus Mens. Oct. anni 1687 p. 587* notat, perperam a Geometris supponi, dari in hujusmodi seriebus infinitis terminum ultimum, & hunc ipsum ob continuo decrescentem parvitatem tandem degenerare in quoddam non-quantum, sive non ens, aut nihil. In *nova Crisi temporum part. 1 anni 1701 p. 32 Barrowium & Newtonum*, immo *p. 35* in genere taxat Geometras omnes tum antiquos, tum modernos, quod communi de annihilatione ultimi termini in infinito opinione sunt imbuti.

§. 11. Etenim non opus est, ut contra κοινὴν ἔννοιαν seriebus infinitis aliquem tribuamus terminum ultimum; sed sufficit *per §. 9.* constare, in summandis talibus seriebus nullam esse rationem habendam termini ultimi. Similiter non opus est, ut statuamus, continuatam terminorum subdivisionem in infinitum in nihilo tandem terminari, cum bene observarit *Clar. Autor p. 63 l. c.* asymptotos hyperbolarum abunde satis evincere, annihilationem per continuum in infinitum decrementum non invenire locum, alias enim asymptoti cum hyperbola demum coinciderent, quod absonum: sed sufficit, *ex §. 9.* manifestum esse,

esse, per continuum illud in infinitum decrementum terminos seriei tandem degenerare in quantitates propositæ incomparabiles, adeoque heterogeneas, consequenter cum reliquis non summabiles, cum additio sit quantitatum homogenearum in unam summam collectio.

§. 12. Atque ex hoc fundamento ostendit ingeniosissimus *Leibnitius* in litteris ad *Dn. Varignonium*, Geometram excellentem, datis, ex quibus excerpta leguntur *in Diario Eruditorum Gallico anni 1702 p. 297 & seqq.* Analysin Mathematicam ob controversias nonnullas Metaphysicas ex numero Scientiarum Mathematicarum non esse expungendam. Et ubi *in Actis Erudit. Lipsiens.* ad nonnullas difficultates *à Bernhardo Nieuwentiit* circa methodum differentialem motas *Mens. Jul. anni 1695* respondet, *p. 13* notat, Quantitates infinite parvas, utut nihil dicere omnino non liceat, haud tamen esse comparabiles cum istis, quarum respectu infinite parvæ existunt, atque adeo, quemadmodum Quantitas non augetur, si lineæ punctum alterius lineæ addas, vel superficiei lineam; ita similiter lineam non augeri, si lineam quidem addas, sed incomparabiliter minorem.

§. 13. Cæterum ex arbitraria numeri *m in §. 6 juxta §. 4* assumtione claret, unamquamque Quantitatem in infinite diversas resolvi posse series infinitas. Unde ulterius liquet, unam eandemque quantitatem infinitis modis resolvi posse in partes numero infinitas, ita ut in una resolutione pars quælibet ex infinitis ratione molis differat à parte qualibet ex infinitis in resolutione alia quacunque, ut adeo non infiniti saltem, quin infinite infiniti quiddam in Quantitate contineatur. Etenim $2 = \frac{3}{2} + \frac{2}{6} + \frac{2}{18} + \frac{2}{54}$ &c. in infinitum *per §. 7.* & $2 = \frac{3}{2} + \frac{3}{8} + \frac{3}{32} + \frac{3}{128}$ &c. in infinitum *per §. 7.* Sed terminus quilibet seriei indicat aliquam Quantitatis partem. Quare cum termini numero sint infiniti, partes quoque esse debent numero infinitæ. Termini tamen unius seriei sigillatim sumti non æquantur terminis alterius seriei sigillatim sumtis, cum e. gr. $\frac{2}{6}$ sunt minores quam $\frac{3}{8}$, & $\frac{2}{18}$ majores quam $\frac{3}{32}$ &c. *per 10. Elem. 5.* Quamobrem 2 resolvere licet in partes numero infinitas multiplici ratione, immo infinitis modis, quia infinitæ dantur series, quarum quælibet sigillatim sumta binario æquatur, *per §. 4.*

§. 14. Enimvero quæ de binario demonstrata sunt, facile in genere de Quantitate quacunque evincuntur. Nam infinitæ inveniri

pos-

possunt series numero & ipsæ infinitæ, quarum unaquæque sigillatim sumta æquatur Quantitati eidem propositæ, *per §. præced.* In qualibet vero serie terminorum Numeratores aliam ad suos Denominatores habent rationem, quia numerus *m* cujuslibet seriei differt à numero *m* alterius cujuscunque, *per § 4 & 6.* Quare etiam singuli termini unius non æquabuntur sigillatim terminis singulis alterius seriei, *per 9 Elem. 5.* Ast termini respondent partibus Quantitatis integræ. Partes igitur, quas indicat in integro series una, non sunt ejusdem molis cum partibus, quas in eodem ponit series quælibet altera. Cum adeo series sint numero infinitæ, unum integrum partes continet numero infinitas, non una constanti ratione, sed ratione molis infinite varias.

§. 15. Cæterum cum Quantitates integræ in series converti nequeant, nisi prius in fractiones spurias convertantur, *per §. 4.* leges ibidem traditæ fractionibus quoque accommodari posse intelliguntur. Sed antequam ulterius progrediamur, notandum est, nos in posterum in designanda multiplicatione, divisione ac analogia Quantitatum usuros esse Symbolis Leibnitianis, quæ reliquis vulgo usitatis quin præferenda sint nemo sapiens dubitare potest. Quemadmodum enim *summus Leibnitius* in maximis, ita & in minimis Sapientiæ leges exactissime constanter observat. Sapientis est, via brevissima ad scopum tendere. Contra sapientiæ igitur leges peccat, qui media adhibet perplexa; ubi dantur multo simpliciora. Quare cum *Leibnitio* multiplicationem potius designabimus per simplex punctum, quam per characterem vulgo receptum x; divisionem per duo puncta, quam per notationes in fractionibus scribendis dudum Arithmeticis usitatas, nisi singularis quædam circumstantia vulgarem notandi modum adhiberi suadeat. Ut intelligatur, quousque signum multiplicationis & divisionis extendatur, loco lineolæ suprascribendæ juxta communem methodum adhibebimus comma unicum, vel præmittendum, vel postponendum signo multiplicationis & divisionis, prouti vel quantitates antecedentes, vel subsequentes afficere debet. Præterea in Logica veriori demonstrandum est, fontem omnium errorum quærendum esse in cognitione intuitiva, quæ opponitur alteri per deductionem acquisitæ: oriri scilicet errores, quotiescunque diversi habemus pro iisdem. Unde deducitur regula, in cognitione acquirenda sollicite cavendum esse,

ne

ne diversa confundantur, ut habeantur pro eodem. Ex quo ulterius consequitur, si conceptus intellectus puri per signa imaginationi exhibere libuerit, quæ diversa sunt in conceptu, ut diversa etiam repræsentanda esse imaginationi. Quamobrem talia eligenda sunt signa, quæ inter se non facile confundi possunt: id quod denuo obtinetur per signa Leibnitiana, non æque per vulgaria: Etenim in vulgari notatione signum multiplicationis x facillime confunditur cum charactere quantitatis incognitæ x: in Leibnitiana non item. Similiter sapientiæ legibus conforme est, ut, quod fieri potest per pauca, non fiat per plura: consequenter in nostro casu non plura adhibenda sunt signa, quam quæ rebus repræsentandis sufficiunt. Quare rerum repræsentatarum scrutari convenit connexiones, ut eædem connexiones per eadem denotentur signa. Quod observatum est in notatione analogiæ Leibnitiana, dum quantitates proportionales A, B, C & D, ita designat: $A:B = C:D$, cujus fundamentum est *def.* 4. *Elem* 5.

§ 6. Ut ratio resolvendi fractiones in series infinitas per methodum *in* §. 4. expositam appareat, proponatnr exempli loco $a:b$. Multiplicetur ea per numerum quemcunque m, ut habeatur $ma:mb$, & Numerator minuatur unitate, ut prodeat seriei terminus primus $ma-1, :mb$, remaneatque pars ulterius resolvenda $1:mb$, quæ per m multiplicata producit $m:m^2b$. Hoc productum si minuatur unitate, habebitur terminus secundus $m-1, :m^2b$. Simili labore inveniuntur termini reliqui, quotquot libuerit, ut tandem habeatur $\frac{a}{b} = \frac{ma-1}{mb} + \frac{m-1}{m^2b} + \frac{m-1}{m^3b}$ &c. Utimur autem hic notatione vulgari, quia facilius sic conspicitur totius seriei progressus. Cæterum si fiat $a=3$, $b=4$, $m=2$, erit $a:b=3:4$, $ma:mb=6:8$ &c. Quare reperietur $\frac{3}{4}=\frac{5}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$ &c.

§. 17. Quodsi desideretur, ut terminus primus seriei eundem cum reliquis habeat Numeratorem; per Numeratorem fractionis propositæ particula residua est multiplicanda. Ita reperietur $\frac{a}{b} = \frac{a-1}{b} + \frac{a-1}{ab} + \frac{a-1}{a^2b} + \frac{a-1}{a^3b}$ &c. in infinitum. Sit e. gr. $a=3$, $4=6$, erit $a:b=3:4$, $a-1, :b=2:4$, $a-1, :ab=2:12$,

$a - 1, : aab = 2 : 36$ &c. ut adeo obtineatur $\frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{2}{12} + \frac{2}{36} + \frac{2}{108}$ &c. h. e. $= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{54}$ &c.

§. 18. Poterunt autem series methodo hactenus exposita inventæ ad aliam expressionem revocari, terminum nempe quemlibet resolvendo in duos factores, quorum alter est Quantitas integra Numeratori fractionis resolvendæ æqualis, alter vero fractio, cujus Numerator unitas, Denominator æqualis Denominatori resolvendæ: atque hanc ulterius convertendo in potentiam imperfectam exponentis negativi, more Analystis dudum recepto. e. gr. in serie §. 7, $a^2 - 1, : a = a^2 - 1, . a^{-1}, a^2 - 1, : a^3 = a^2 - 1, . a^{-3}, a^2 - 1, : a^5 = a^2 - 1, . a^{-5}$ &c. ut adeo series citata abeat in hanc: $a^2 - 1, . a^{-1} + a^2 - 1, . a^{-3} + a^2 - 1, . a^{-5} + a^2 - 1, . a^{-7} + a^2 - 1, . a^{-9}$, hoc est, si actu multiplicemus, $a - a^{-1} + a^{-1} - a^{-3} + a^{-3} - a^{-5} + a^{-5} - a^{-7}$ &c. Unde alia adhuc ratione apparet, series per methodum nostram productas æquivalere quantitati propositæ, cum redigantur ad series in quibus terminus primus est ipsa quantitas proposita, bini reliquorum vero terminorum constanter se mutuo destruunt.

§. 19. Utut vero fractio quælibet per hanc methodum in series infinitas, quæ & ipsæ numero sunt infinitæ, resolvatur; consultum tamen est hic quoque exponere methodum, quam pro fractionibus in series infinitas resolvendis dedit *Nicolaus Mercator, Holsatus, in Logarithmotechnia, Londini 1668 in 4. publicata, prop 15 p. 29 & 30*, exposuit post ipsum *celeberrimus Wallisius, in Algebra c. 88 f. 362 & seqq. Vol. 2. Oper. Mathem.* Quamvis enim per hanc una fractio non in tot resolvitur series; quæ tamen hinc prodeunt series, in Geometria longe utilissimæ existunt. Tota autem huc redit, ut divisio actu instituatur juxta communes divisionis in Arithmetica litterali leges.

§. 20. Non opus igitur est, ut eas hic exponamus, cum sint satis notæ: adeoque ad exemplum saltem aliquod erunt applicandæ. Sit igitur in seriem resolvenda fractio $a :, b + c$. Assumatur quoti loco $a : b$, qui ductus in $b + c$ dabit $ab : b + ac : b = a + ac : b$. Facto hoc ex dividendo a subducto relinquitur $- ac : b$. Quodsi jam hoc residuum ulterius dividas per $b + c$, quotus novus erit $- ac : bb$, qui per divisorem multiplicatus producit $- abc : bb - acc : bb = - ac : b - acc : bb$ ex dividendo $- ac : b$ auferendum, ut relinquatur

$+ acc$

$+ acc : bb$. Hoc residuum si denuo dividatur per $b + c$, quotus novus erit $acc : b^3$. Atque adeo vulgari hac divisione continuata, quousque libuerit, inveniuntur termini quotlibet seriei infinitæ, deprehenditurque $\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} - \frac{ac^3}{b^4} + \frac{ac^2}{b^5}$ &c. in infinitum.

§. 21. Inventis autem aliquot saltem terminis, statim apparet, qua ratione series citra divisionem actu institutam in infinitum sit continuanda. In nostro scilicet exemplo evidens est, Numeratores constituere seriem progressionis Geometricæ, in qua terminus primus est a, exponens rationis c; Denominatores contra seriem Progressionis Geometricæ alterius, cujus terminus primus b coincidit cum exponente rationis.

§. 22. Nititur cognitio continuationis in infinitum non nuda inductione, qua argumentantur ab aliquibus singularibus ad universalia. Talis enim argumentandi modus ex Mathesi, in qua omnimodam sectamur certitudinem, merito eliminandus, cum sit ex natura sua erroneus, utpote fundamento hoc manifeste falso nixus: Quicquid competit aliquibus singularibus sub uno genere contentis, illud competit omnibus: ut recte eundem à *Wallisio* in *Arithmetica infinitorum* usurpatum taxaverit *Fermatius* in litteris ad *Kenelmum Digby* datis, quæ leguntur *Vol. II Oper. Mathem. Wallisianorum f. 760 & 761*; taxaverint *Collectores Actorum Erudit. Lipsiens. Mens. Jun. anni 1696 p. 252 & Mens. Jun. anni 1686 p. 287*; taxaverint & alii. Neque enim sufficit, ut propositiones per inductionem collectæ sæpius sint veræ; siquidem non ideo veræ sunt, quod per inductionem collectæ, sed quia casu incidimus in talia per quorundam singularium contemplationem, quæ omnibus sub eodem genere contentis conveniunt. Equidem ab uno singulari ad omnia sub eodem genere contenta procedit argumentatio, si demonstratum fuerit, quod de subjecto aliquo affirmatur, eidem competere, quatenus naturam generis, sub quo continetur, participat, (ita enim competere debet omnibus naturam generis participantibus, atque in hoc ipso fundatur methodus veritates particulares ad universales revocandi) enimvero proposita tali demonstratione, res tota confecta est, nec ullus amplius relinquetur inductioni locus.

§. 23. Oſtendemus igitur in noſtro exemplo, quo pacto ex genuinis notionibus progreſſus totius ſeriei inventis aliquibus terminis deducatur. Scilicet dividendus primum propoſitus unica conſtat nota a, diviſor duabus $b + c$. Pro obtinendo termino primo dividendus a per primam diviſoris notam b diviſus quoti loco reponitur, qui per primam diviſoris notam b multiplicatus producit dividendum a, ductus in notam alteram c dat fractionem, cujus Numerator eſt factum ex dividendo primum propoſito a in notam diviſoris alteram c. Quodſi adeo hæc duo facta ex dividendo ſubducantur, relinquitur fractio prædicta cum ſigno privativo. Dum jam ulterius quæritur novus quotus, dividendus per primam diviſoris notam dividitur; cum vero ille ſit fractio, cujus Numerator factum ex dividendo primum propoſito in notam diviſoris alteram, Denominator nota diviſoris prima, prodibit pro termino ſecundo ſeriei fractio, cujus Numerator idem cum Numeratore dividendæ, Denominator factum ex prima diviſoris nota in eandem, h. e. quadratum ejusdem. Hæc fractio ſi ducatur in diviſoris notam primam, prodit dividendus; ſi in ſecundam, emergit factum ex primum propoſita fractione in notam ſecundam diviſoris: & utraque quantitas ſigno privativo affecta. Cum adeo quotus continuo ſit fractio ex dividendo per primam diviſoris notam diviſo emergens, & in diviſorem ductus producat factum ex gemina parte compoſitum, quarum altera æquatur dividendo, altera producto ex quoto in alteram diviſoris notam; hoc ex dividendo ſubductum ſemper reſiduam facit partem ſui alteram, qui in diviſione prima eſt fractio, cujus Numerator factum ex dividendo primum propoſito in alteram diviſoris notam, Denominator prima diviſoris nota. Quare in omni diviſione exponens notæ ſecundæ diviſoris in fractionis Numeratore, & exponens primæ in ipſius Denominatore unitate augetur, adeoque progreſſio earum notarum procedit ſecundum ordinem potentiarum naturalem. Quod attinet alternationem ſignorum + & —, facile hic invenire locum intelligitur. Cum enim dividendus ſemper ſit nota unica, factum, dum diviſio peragitur, ex eo ſubducendum ex duabus conſtet notis poſitivis, quarum prior dividendo æquatur, evidens eſt reſiduum in prima diviſione eſſe debere negativum: & quia in ſecunda notæ facti ſubducendi ſunt privativæ, reſiduum fore poſitivum, conſequenter

iu

tertia notæ ejusdem facti erunt positivæ, hinc residuum negativum. Quoniam ergo productum subducendum est positivum, si dividendus fuerit positivus & contra, residuum vero positivum, si illud negativum, & contra; Signorum $\dagger$ & $-$ alternatio per integram seriem in infinitum necessaria est.

§. 24. Tria hic notanda sunt, nempe 1. quod, quia nil refert, utrum divisor scribatur $b \dagger c$, an $c \dagger b$, fractio $a : b \dagger c$ in aliam resolvatur, si c fiat prima divisoris nota, & reliqua peragantur ut in §. 20. Reperietur enim $\frac{a}{c \dagger b} = \frac{a}{c} - \frac{ab}{cc} \dagger \frac{abb}{c^3} - \frac{ab^3}{c^4} \dagger \frac{ab^4}{c^5}$ &c. 2. Quod fractiones quoque, quarum Denominator æque ac Numerator nota unica constat, in series resolvantur, si divisor supponatur æqualis quantitati cuidam alteri ex duabus partibus compositæ, e. gr. $a : b = a :, c \dagger 1$. Ita enim deprehendetur $\frac{a}{b} = \frac{a}{c} - \frac{a}{c^2} \dagger \frac{a}{c^3} - \frac{a}{c^4}$ &c. vel si assumatur $a : b = a.,1 \dagger c,\ a - ac \dagger ac^2 - ac^3$. Substituto igitur valore ipsius c in serie prima, erit $\frac{a}{b} = \frac{a}{b-1} - \frac{a}{\overline{b-1}^{\,2}} \dagger \frac{a}{\overline{b-1}^{\,3}} - \frac{a}{\overline{b-1}^{\,4}}$ &c. Idem si fiat in serie altera; prodit $a : b = a - a.,b-1 \dagger a.,\overline{b-1}^{\,2} - a.,\overline{b-1}^{\,3}$ &c. 3. Quod eadem divisio iis etiam applicari queat fractionibus, quarum Numerator est quantitas composita. Sit e. gr. $x^3 - y^3, : x \dagger y$, reperietur series, $xx - xy \dagger yy - \frac{2y}{x} \dagger \frac{2y^4}{xx} - \frac{2y^5}{x^3} \dagger \frac{2y^6}{x^4}$ &c. h. e. ut ratio continuationis facilius appareat, $x^2 . y^0 - x^1 . y^1 \dagger x^0 . y^2 - \frac{2.}{x} y^3 \dagger \frac{2.}{x^2} y^4 - \frac{2.}{x^3} y^5 - \frac{2.}{x^4} y^6$ &c. Sit in genere $x^m - y^m, :, x \dagger y$, prodibit series $x^{m-1} - x^{m-2} y \dagger x^{m-3} y^2 - x^{m-4} y^3 \dagger x^{m-5} y^4 - x^{m-6} y^5$ &c. cujus ope aliæ fractiones per consuetas comparationum leges in series infinitas resolvuntur, ex. gr. Sit $m = 4$, erit $x^m - y^m, :, x \dagger y$

$= x^4 - y^4, :, x + y, x^{m-1} = x^3, - x^{m-2} y = - x^2 y, x^{m-3} y^2 = xy^2,$
$- x^{m-4} y^3 = - y^3, x^{m-5} y^4 = y^4 : x, - x^{m-6} y^5 = - y^5 : x^2$, hoc eſt, invenietur ſeries $x^3 - x^2 y + xy^2 - y^3 + \frac{y^4}{x} - \frac{y^5}{xx}$ &c.

§. 25. Quantitates ſurdæ in ſeries convertuntur, ſi ex potentia imperfecta ſub ſigno radicali poſita juxta leges extractionis Radicum conſuetas actu extrahatur radix. Unde denuo opus non eſt, ut has leges fuſius exponamus: quin potius applicandæ ſtatim ſunt ad unum alterumque exemplum, ut res evadat manifeſta. Primus autem hac methodo uſus eſt *Iſaacus Newtonus*, Geometra profundiſſimus, quemadmodum apparet ex litteris ad *Dn. Oldenburgium* d. 24 Oct. anni 1676 datis, quæ leguntur *Tom. 3. Oper. Walliſ.* f. 634 & ſeqq. Utiliter eandem quoque adhibuit *David Gregorius in Exercit. Geometr. de dimenſione Figurarum* & perſpicue explicavit p. 20 & 21, quod etiam fecit *Walliſius in Algebra c. 91 f 368.*

§. 26. Sit igitur $\sqrt{cc + xx}$ convertenda in ſeriem infinitam. Extrahatur adeo actu radix ex $cc + xx$. Juxta regulas igitur conſuetas c erit terminus primus radicis, cujus quadratum cc ex $cc + xx$ ſubductum relinquit xx. Jam novus diviſor erit $2c$, per quem diviſione inſtituta prodit $xx : 2c$. Quotus hic ſi ducatur in diviſorem $2c$, habebitur $2cxx : 2c = xx$, quod productum una cum Quadrato novi quoti $x^4 : 4c^2$ ex dividendo xx ſublatum relinquit $-x^4 : 4c^2$. Habemus adeo quotum $c + xx : 2c$, cujus duplum $2c + xx : c$ dat novum diviſorem: per quem ſi dividatur $-x^4 : 4c^2$, quoti loco prodit $-x^4 : 8c^3$. Is in diviſorem $2c + xx : c$ ductus producit $-2cx^4 : 8c^3 = -x^4 : 4cc - x^6 : 8c^4$, quod productum una cum quadrato novi quoti $x^8 : 64c^6$ ex dividendo $-x^4 : 4c^2$ ſubductum relinquit $x^6 : 8c^4 - x^8 : 64c^6$. Duplum quoti inventi $2c + xx : c - x^4 : 4c^3$ dat denuo novum diviſorem, per quem ſi dividatur reſiduum $x^6 : 8c^4 - x^8 : 64c^6$, quotus erit $x^6 : 16c^5$. Hic ductus in diviſorem producit $2cx^6 : 16c^5 + x^8 : 16c^6 + x^{10} : 16c^5$, quod productum una cum Quadrato novi quoti $x^{12} : 256c^{10}$ ex dividendo $x^6 : 8c^4 - x^8 : 64c^6$ ſublatum relinquit $-5x^8 : 64c^6 - x^{10} : 16c^3 - x^{12} : 256c^{10}$. Si jam hoc reſiduum ulterius dividatur

tur per duplum quoti hactenus inventi, $2c + xx:c - x^4:4c^3 + x^6:8c^5$, obtinebitur quotus $-5x^8:128c^7$. Ut adeo prodeat $\sqrt{cc + xx} = c + \frac{xx}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{16c^5} - \frac{5x^8}{128c^7}$ &c.

§. 27. Eadem ratione quantitas irrationalis ad seriem infinitam revocatur, si extrahenda sit radix cubica: e. gr. Sit quantitas resolvenda $\sqrt[3]{ax^2 + x^3}$, ex ax^2 extracta radix est $a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}$, cujus Cubus ax^2 ex proposito cubo imperfecto sublatus relinquit x^3. Per quadrati quoti inventi triplum $3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}$ si dividatur x^3, novus quotus erit $x^3 : 3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}}x^{\frac{5}{3}}$, qui ductus in divisorem $3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}$ dat x^3, una cum facto ex quadrato novi quoti $\frac{1}{9}a^{-\frac{4}{3}}x^{\frac{10}{3}}$ in triplum antecedentis $3a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}$, nempe $\frac{1}{3}a^{-1}x^{\frac{12}{3}}$, & cubo novi Quoti $\frac{1}{27}a^{-\frac{6}{3}}x^{\frac{15}{3}}$ subducendum ex x^3, ut relinquatur $-\frac{1}{3}a^{-1}x^{\frac{12}{3}} - \frac{1}{27}a^{-\frac{6}{3}}x^{\frac{15}{3}}$. Quodsi denuo per quoti inventi quadrati triplum dividatur hoc residuum, invenietur novus quotus $\frac{1}{9}a^{-\frac{5}{3}}x^{\frac{8}{3}}$. Continuans processum juxta leges consuetas extrahendi radicem Cubicam deprehendet $\sqrt[3]{ax^2 + x^3} = a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}}x^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{9}a^{-\frac{5}{3}}x^{\frac{8}{3}} + \frac{5}{81}a^{-\frac{8}{3}}x^{\frac{11}{3}}$ &c.

§. 28. Eodem modo se res habet in extrahendis radicibus dignitatum altiorum. Utut vero leges harum Operationum in Arithmetica exponi non consueverint; attamen in Algorithmo litterali hospes sit necesse est, qui eos extemplo investigare non noverit, cum saltem opus sit, ut radix binomia $a + b$ elevetur ad eam dignitatem, cujus radix desideratur, atque in exemplo hoc universali attendatur, qualis institui debeat divisio, ut radix nota a + b quoti loco obtineatur. Quare cum hæc satis facilia existant, ea ulterius prosequi tædet.

§. 29. Quo-

§. 29. Quoniam hæ operationes prolixæ ac ideo tædiosæ existunt; pro extractione radicum sequens theorema condidit methodi hactenus expositæ celeberrimus Autor: $\overline{P + PQ}^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-2n}{3n} CQ + \frac{m-3n}{4n} DQ$ &c. in quo $P + PQ$ denotat quantitatem, ex qua extrahenda radix, P terminum ejus primum, Q illius residuum per terminum primum divisum, A seriei terminum primum, B secundum, C tertium, D quartum &c. Quibus notatis, evidens est theorematis usus. Sit enim extrahenda radix quadrata ex $cc + xx$, erit $P = cc$, $Q = xx : cc$, $m = 1$, $n = 2$. Quare $P^{\frac{m}{n}} = \overline{cc}^{\frac{1}{2}} = c$, $\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2} c \cdot \frac{xx}{cc} = \frac{xx}{2c}$, $\frac{m-n}{2n} BQ = \frac{1-2}{4} \cdot \frac{xx}{2c} \cdot \frac{xx}{cc} = -\frac{x^4}{8c^3}$, $\frac{m-2n}{3n} CQ = \frac{1-4}{6} \cdot -\frac{x^4}{8c^3} \cdot \frac{xx}{cc} = + \frac{x^6}{16c^5}$ &c. Obtinetur adeo multo facilius eadem series, quæ operosius in §. 26 inveniebatur, nempe $\sqrt{cc + xx} = c + \frac{xx}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{16c^5}$ &c. Sit ulterius extrahenda radix cubica ex $ax^2 + x^3$, erit $P = ax^2$, $PQ = x^3 : axx = a^{-1}x$, $m = 1$, $n = 3$, adeoque $P^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}}$, $\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{3} \cdot a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}} \cdot a^{-1} x = \frac{1}{3} a^{-\frac{2}{3}} x^{\frac{5}{3}}$, $\frac{m-n}{2n} BQ = \frac{1-3}{6} \cdot \frac{1}{3} a^{-\frac{2}{3}} x^{\frac{5}{3}} \cdot a^{-1} x = -\frac{1}{9} a^{-\frac{5}{3}} x^{\frac{8}{3}}$, $\frac{m-2n}{3n} CQ = \frac{1-6}{9} \cdot -\frac{1}{9} a^{-\frac{5}{3}} x^{\frac{8}{3}} \cdot a^{-1} x = + \frac{5}{81} a^{-\frac{8}{3}} x^{\frac{11}{3}}$, $\frac{m-3n}{4n} DQ = \frac{1-9}{12} \cdot \frac{5}{81} a^{-\frac{8}{3}} x^{\frac{11}{3}} \cdot a^{-1} x = - \frac{10}{243} a^{-\frac{11}{3}} x^{\frac{14}{3}}$.

Ut

Ut adeo denuo obtineatur series in §. 27 inventa nempe $\sqrt[3]{axx + x^3} = a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{3} a^{-\frac{2}{3}} x^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{9} a^{-\frac{5}{3}} x^{\frac{8}{3}} + \frac{5}{81} a^{-\frac{8}{3}} x^{\frac{11}{3}} - \frac{10}{243} a^{-\frac{11}{3}} x^{\frac{13}{3}}$ &c.

§. 30. Qua ratione ad theorema hoc utilissimum pervenerit, partim ipse in epistola d. 24 Octob. anni 1676 per *Oldenburgium* ad *Leibnitium* data, quæ legitur apud *Wallisium Vol. III. f. 634 & seqq.* partim *Wallisius in Algebra cap. 85 f. 357 & cap. 91 f. 368* exponit. Ejusdem originem quoque exponit *Bernhardus Nieuwentiit in Analysi infinitorum cap. 2 §. 21 p. 146 & seqq. Abrahamus* item *de Moivre* in *Animadv. in Cheynæum p. 93 & 94.* Nos saltem adhuc notamus, cum sit $\sqrt[m]{\overline{f + g}^{\,n}} = \overline{f + g}^{\frac{m}{n}}$, adeoq; extractio radicis m ex dignitate n ipsius $f + g$ coincidat cum evectione ad dignitatem $\frac{m}{n}$; per idem theorema radicem binomiam ad dignitatem quamcunque attolli posse. Atque hinc cum $\frac{a}{b + c} = a \cdot \overline{b + c}^{-1}$, poterit per idem divisio quoque peragi, si nempe $b + c$ evehatur ad potestatem -1, & seriei emergentis singuli termini multiplicentur per a. Erit nempe $P = b$, $Q = c:b$, $m = -1$, $n = 1$ adeoque $P^{\frac{m}{n}} = b^{-1}$, $\frac{m}{n} AQ = -1 . b^{-1} . c:b = cb^{-2}$, $\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{2}{2} . -cb^{-2} . c:b = + c^2 b^{-3}$, $\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{3}{3} . c^2 b^{-3} . c:b = -c^3 b^{-4}$, $\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{4}{4} . -c^3 b^{-4} . c:b = + c^4 b^{-5}$. Erit adeo $\frac{1}{b+c} = \frac{1}{b} - \frac{c}{bb} + \frac{c^2}{b^3} - \frac{c^3}{b^4} + \frac{c^4}{b^5}$ &c. Quodsi itaque multiplicatio fiat per a prodibit $\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} - \frac{ac}{bb} + \frac{ac^2}{b^3} - \frac{ac^3}{b^4} + \frac{ac^4}{b^5}$ &c. prorsus ut in §. 20.

§. 31.

§. 31. Cum theorema hoc Newtonianum saltem ad quantitates binomias extendatur; placuit *Arrahamo de Moivre*, Analystæ peritissimo, excogitare theorema universale, pro infinitinomio ad potestatem indeterminatam elevando, cujus adeo ope multinomium quodcunque ad datam quamcunque dignitatem evehitur. Investigationem theorematis exhibuit, continuationis legem patefecit, patefactam demonstratione munivit (id quod semper in doctrina serierum infinitarum fieri debebat per §. 1 & 22) *in Transact. Anglic. A. 1697 num. 230 p. 619 & seq* Proponit etiam nobilissimum hoc theorema in *Animadv. laudatis p. 99* & legem continuationis patefacit p. 100: prolixius tamen est, quam ut huc transferatur.

§. 32. Ipse autem *Newtonus* præter theorema explicatum regulam etiam tradidit pro integrandis quantitatibus in seriebus infinitis, quam explicant *Wallisius in Algebra c. 95. f. 394* & *Abrahamus de Moivre in Animad. citat. p. 38 & seqq.* quorum hic methodi demonstrationem Analyticam exhibet *p. 42 & 43.* Enimvero cum applicatio tædiosa evadat, & *Illustris Leibnitius in Actis Erud. Lips. anni 1693. p. 178* novam exhibuerit methodum eamque generalissimam, ita ut ejus ope non tantum in calculo communi, sed & in summatorio seu differentiali, aut differentio-differentiali ad seriem semper perveniri possit; illius explicationem in præsenti omittimus, Leibnitianæ recensendæ operam nostram dicaturi.

§. 33. Data scilicet quantitate in seriem resolvenda, supponit seriem jam esse inventam, in qua coëfficientes terminorum ex successu definit: quemadmodum ex subjuncto exemplo apparet. Sit ex. gr. quantitas per seriem infinitam integranda $adx :, a + x = dy$, erit multiplicando per $a + x$, $adx = ady + xdy$, & dividendo per dx, $a = ady + xdy, : dx$, consequenter $ady + xdy, : dx - a = o$. Fiat jam $y = bx + cx^2 + ex^3 + fx^4$ &c. erit per leges calculi differentialis $dy = bdx + 2cxdx + 3ex^2dx + 4fx^3dx$ &c. adeoque $dy : dx = b + 2cx + 3ex^2 + 4fx^3$ $ady : dx = ab + 2acx + 3eax^2 + 4afx^3$ &c. & $xdy : dx = bx + 2cx^2 + 3ex^3 + 4fx^4$. Quare habebitur

ady

$$\frac{ady - xdy}{dx} - a = ab + 2acx + 3aex^2 + 4afx^3 \ \&c.$$
$$+ bx + 2cx^2 + 3ex^4 - a = 0.$$

adeoque

$ab - a = 0$	$2ac + b = 0$	$3ae + 2c = 0$	$4af + 3e = 0$
$ab = a$	$2ac = -b$	$3ae = -2c$	$4af = -3e$
$b = 1$	$c = -b:2a$	$e = -2c:3a$	$f = -3e:4a$
	h. e $c = -1:2a$	h. e. $e = 1:3aa$	h. e. $f = -1:4a^3$.

Coëfficientium valores ita determinati si substituantur in æquatione arbitrario assumta, prodit $y = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2a} + \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^4}{4a^3}$ &c. integralis ipsius $dy = adx :, a + x$.

§. 34. Methodum hanc cum proposuisset *Illustris Leibnitius*, placuit celeberrimo *Johanni Bernoullio in iisdem Actis anni 1694 p. 437. & seqq.* exhibere theorema generale, cujus ope facilius habentur series, quam si pro dato quolibet exemplo peculiaris calculus instituendus. Est vero sequens: $ndz = nz - \frac{zzdn}{1.2dz} + \frac{z^3ddn}{1.2.3dz^2} - \frac{z^4dddn}{1.2.3.4dz^3}$ &c. in quo n est quantitas quomodocunque ex indeterminatis & constantibus formata. Utut vero in eodem occurrant quantitates differentiales, differentio-differentiales &c. in applicatione tamen omnes evanescunt, quoniam in quolibet casu datur relatio ipsius dn ad dz^2 &c. Ut applicatio hujus theorematis manifesta evadat, proponatur denuo in seriem resolvenda $adx :, a + x$, erit $z = x$, $dz = dx$, $n = a :, a + x$. hoc est, si $a + x$ fiat $= r$, $a : r$ Quare $nz = ax : r$, $dn = - adx : r^2$, $ddn = 2radxdr : r^4$, assumta scilicet $-adx$ pro constanti, $= 2adx^2 : r^3$ actu nempe dividendo per r, & pro dr substituendo dx, cum enim sit $a + x = r$, erit $dx = dr$; $dddn = - 6r^2 adx^2 dr : r^6$, assumta nempe denuo $2adx^2$ pro constanti, $= - 6adx^3 : r^4$, actu nimirum dividendo per r_2 & pro dr substituendo dx. Unde porro habetur $-zzdn : 2dz = + ax^2dx : 2r^2dx$, $z^3ddn : 6dz^2 = 2ax^3dx^2 : 6r^3dx^2$, $-z^4dddn : 24dz^3 = + 6ax^4dx^3 : 24r^4dx^3$. Invenitur adeo integralis ipsius $adx :, a + x = \frac{ax}{r} + \frac{ax^2}{2r^2} + \frac{ax^3}{3r^3} + \frac{ax^4}{4r^4}$ &c. Apparet adeo, in Actis

C 2 Li-

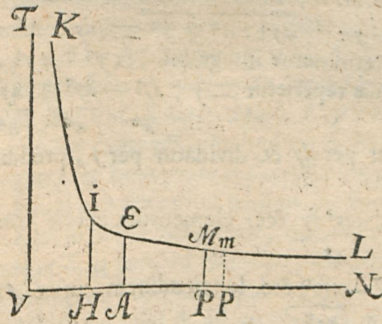
Lipsiensibus errorem typographicum fuisse commissum, cum ibi habeatur $\frac{ax}{r} + \frac{ax^2}{r^2} + \frac{ax^3}{r^3}$ &c. quem miror Tractatui suo de Methodo fluxionum inversa intulisse *Cheynæum p. 50.*

§. 35. Qua ratione hoc theorema investigetur, docuit *Abrahamus de Moivre l. c. p. 71.* Ponatur scilicet ipsius ndz integralis $= nz - q$, erit $ndz = ndz + zdn - dq$, adeoque $dq = zdn$. Fiat $dn = vdz$, erit $dq = vzdz$. Ponatur ejus integralis $\frac{1}{2}vzz - r$, erit $vzdz = vzdz + \frac{1}{2}z^2dv - dr$, adeoque $dr = \frac{1}{2}z^2dv$. Fiat $dv = sdz$, erit $dr = \frac{1}{2}z^2sdz$. Ponatur ejus integralis $\frac{1}{6}z^3s - t$, erit $\frac{1}{2}z^2sdz = \frac{3}{6}z^2sdz + \frac{1}{6}z^3ds - dt$, adeoque $dt = \frac{1}{6}z^3ds$. Fiat $ds = xdz$, erit $dt = \frac{1}{6}z^3xdz$, cujus integralis ponatur $\frac{1}{24}z^4x - w$. Et sic in infinitum. Invenitur adeo integralis $ndz = nz - \frac{1}{2}vzz + \frac{1}{6}z^3s - \frac{1}{24}z^4x$ &c. h. e. Int. $ndz = nz - \frac{z^2dn}{1.2.dz} + \frac{z^3ddn}{1.2.3dz^2} - \frac{z^4dddn}{1.2.3.4dz^3}$ &c. Nam $dn = vdz$, adeoque $dn : dz = v$. Et $dv = sdz$, h. e. $ddn : dz = sdz$, assumendo dz pro constante, consequenter $ddn : dz^2 = s$. Denique $ds = xdz$, h. e. assumendo in $ddn : dz^2$ pro constante dz^2, $dddn : dz^2 = xdz$, adeoque $dddn : dz^3 = x$.

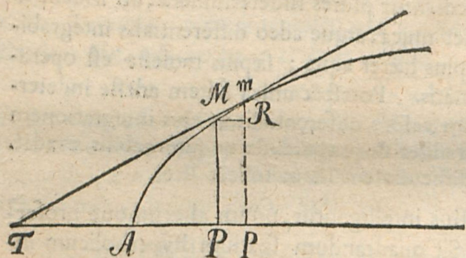
§. 36. Eodem prorsus modo, quo theorema hoc generale investigatur, in exemplis etiam singularibus inveniri possunt series. Sit e. gr. in seriem resolvenda $adx :, a + x$. Fiat $a + x = r$, erit $adx :, a + x = adx : r$. Ponatur integralis ipsius $adx : r = ax : r + q$, erit $adx\ r = ardx - axdr, : r^2 + dq = adx : r - axdr : r^2 + dq$, consequenter $dq = axdr : r^2$. Ponatur ejus integralis $ax^2 : 2r^2 + v$. Erit $axdr : r^2 = axr^2dx - ax^2rdr, : r^4 + dv = axdx : r^2 - ax^2dr : r^3 + dv$, consequenter $dv = ax^2dr : r^3 = ax^2dx : r^3$. Ponatur ejus integralis $ax^3 : 3r^3 + s$, erit $ax^2dx : r^3 = 9ax^2r^3dx - 9ax^3r^2dr, : 9r^6 + ds = ax^2dx : r^3 - ax^3dr : r^4 + ds$, adeoque $ds = ax^3dr : r4 = ax^3dx : r4$ &c. Habetur itaque Integr. $\frac{adx}{a + x} = \frac{ax}{r} + \frac{ax^2}{2r^2} + \frac{ax^3}{3r^3} + \frac{ax^4}{4r^4}$ &c. prorsus ut in §. 34.

§. 37. Methodi ſerierum hactenus explicatæ inſignis eſt uſus tum in quadrandis, tum in rectificandis curvis, nec minus in determinando centro gravitatis & percuſſionis, aliisque in caſibus. Utut vero omnium commodiſſime hic adhibeatur calculus integralis ſeu ſummatorius, qui eſt differentiali reciprocus, utpote ex differentiis inveſtigare docens ſummas, quemadmodum differentialis ex ſummis quærit differentias; quoniam tamen ſummæ ſunt ut latera, differentiæ ut potentiæ quantitatum, ſicuti ex potentiis non ſemper extrahi poteſt radix perfecte, ita nec differentiæ ſemper ſummari poſſunt. Quamobrem in hoc caſu opportune recurrimus ad ſeries infinitas, ſicut in extractione radicum, ubi perfecta radix haberi nequit, ad approximationem in partibus decimalibus confugimus. Immo interdum ſeries infinitæ commode adhibentur etiam ubi differentiis reſpondent ſummæ. Scilicet ſi valorem differentiæ ingrediantur plures indeterminatæ, ab iisdem liberandus eſt, ut ſaltem reſtet unica, atque adeo differentialis integrabilis reddatur. Hic vero ſæpius hæret aqua; ſæpius moleſta eſt operatio in ſeparandis indeterminatis. Poteſt & unica ſaltem adeſſe indeterminata, ſed ita connecti cum valore differentialis, ut ejus integrationem impediat, adeoque formula aliter ſit præparanda ut ſummabilis evadat. Per ſeries autem infinitas difficultatem iſtam tollere licet.

§. 38. Hæc ut rectius intelligantur, unum alterumque proferre libet exemplum. e. gr. Sit quadrandum ſpatium hyperbolicum interminatum intra aſymptotos. Sit KL Hyperbola, TV & VN ſint ejus aſymptoti. Fiat $VH = HI = a$, $VA = c$, $AP = x$, $PM = y$. Intelligatur pm ipſi PM infinite propinqua, erit $Pp = dx$ & ex datis eſt $VP = c + x$. Jam cum ſit $VH : HI = VP : PM$, *per prop. 2 libr. 4 Sect. Con. Philippi de la Hire*; erit $a^2 = cy + yx$, adeoque $y = a^2 : (c + x)$. Eſt autem $Pm = ydx$ differentia-



tialis areæ interminatæ intra hyperbolam & ipsius asymptotos. Quare $\int ydx$ æquatur æreæ quæsitæ. Hæc summa ut inveniatur, ex natura Curvæ primo loco substituitur valor ipsius y, ut evadat $ydx = a^2dx : c + x$, qui cum summari nequeat, $a^2 : c + x$ resolvitur per methodum aliquam superius expositam, ex. gr. *per §. 20*, in seriem infinitam $\frac{a^2}{c} - \frac{a^2x}{c^2} + \frac{a^2x^2}{c^3} - \frac{a^2x^3}{c^4}$ &c. Unde $a^2dx : a + x$ evadit $\frac{a^2dx}{c} - \frac{a^2xdx}{c^2} + \frac{a^2x^2dx}{c^3} - \frac{a^2x^3dx}{c^4}$ &c. quæ series si integretur, cum singuli termini summabiles existant, prodit $\int ydx = \frac{a^2x}{c} - \frac{a^2x^2}{2c^2} + \frac{a^2x^3}{3c^3} - \frac{a^2x^4}{4c^4}$ &c.



§. 39. Sit ulterius rectificanda Parabola, h. e. determinanda sit longitudo Parabolæ AM. Sit $AP = x$, $PM = y$, Parameter $= a$, erit $Pp = dx$, $MR = dy$, & $PT = 2yy : a$ *per art. 11 Analys. infinite parvorum Hospitalii.* Et $TM = \sqrt{4y^4 : a^2 + y^2}$, per *prop. 47 Elem. 1.* Erit etiam $MP : TM = mR : Mm$, *per art. 10 Anal. cit.* h. e. $y : \sqrt{4y^4 : a^2 + y^2} = dy : Mm$. Ut ergo valor elementi curvæ determinetur integrabilis, ex $y^2 + 4y^4 : a$ radix actu extrahatur *per §. 29*, quæ reperietur $= y + \frac{2y^3}{a^2} - \frac{2y^5}{a^4} + \frac{4y^7}{a^6} - \frac{10y^9}{a^8}$ &c. Ea si multiplicetur per dy & dividatur per y, prodibit $dy + \frac{2y^2dy}{a^2} - \frac{2y^4dy}{a^4} + \frac{4y^6dy}{a^6} + \frac{10y^8dy}{a^8}$ &c. elementum curvæ Mm; cujus integralis $y + \frac{2y^3}{3a^2} - \frac{2y^5}{5a^4} + \frac{4y^7}{7a^6} - \frac{10y^9}{9a^8}$ &c. longitudinem curvæ Am quæsitam determinat.

§. 40.

§. 40. Quodſi detur æquatio pro omnibus Paraboloidibus in infinitum, $y^m = a^n x$, & *per art. cit. Analyſ. infinit.* inveniatur $TM = my^m : a^n$, erit $TM = \sqrt{y^2 + m^2 y^{2m} : a^{2n}}$ quæ *per §. 29* abit in ſeriem $y + \frac{m^2 y^{2m-1}}{2a^{2n}} - \frac{m^4 y^{4m-3}}{8a^{4n}} + \frac{m^6 y^{6m-5}}{16a^{6n}} - \frac{5m^8 y^{8m-7}}{128a^{4n}}$ &c. Ea ſi multiplicetur per dy & dividatur per y obtinebitur valor generalis elementi omnium Paraboloidum in infinitum, $= dy + \frac{m^2 y^{2m-2} dy}{2a^{2n}} - \frac{n.4 y^{4m-4} dy}{8a^{4n}} + \frac{n.6 y^{6m-6} dy}{16a^{6n}} - \frac{5m^8 y^{8m-8} dy}{128a^{4n}}$ &c. cujus integralis $y + \frac{m^2 y^{2m-1}}{2m-1, .2a^{2n}} - \frac{m^4 y^{4m-3}}{4m-3, .8a^{4n}} + \frac{m^6 y^{6m-5}}{6m-5, .16a^{6n}} - \frac{5m^8 y^{8m-7}}{8m-7, .128a^{4n}}$ &c. inſervit determinandæ longitndini omnium Paraboloidum in infinitum.

§. 41. Plura exempla ut addamus, inſtituti noſtri ratio non permittit. Conſultum tamen videtur annotare, unde plura peti poſſint. Primus igitur quadraturam Hyperbolæ in ſerie infinita exhibuit *Nicolaus Mercator*, ſupra laudatus, *in Logarithmotechnia*, *prop. 17. p. 31. ſeqq.* cujus demonſtrationem dedere *Walliſius in Tranſ. Anglic. A. 1668 num. 38. pag. 756 & ſeq.* & *Jacobus Gregorius*, *Scotus*, *in Exercitationibus Geometricis Lond. 1668 in 4to. editis p. 9 & ſeq.* Eodem anno ſeriem infinitam pro hyperbola quadranda in *Tranſact. Anglic. num. 34 p 646 & ſeq.* propoſuit *Guil. Brouncker*, *Vice-Comes.* Tertiam addidit *Walliſius* in *Mechanica*, *anno 1670 primum edita*, *cap. 5 prop. 31 f. 916 & ſeq. Vol. I. Oper. Math.* Autor tamen eſt idem *Walliſius in Algebræ cap. 90 f. m. 366*, methodum ſerierum ad quadrandam hyperbolam jam ante hos omnes applicaſſe *Newtonum.* Immo *Leibnitius* quoque non ſolum jam circa illud tempus methodum invenerat quantitates quascunque in ſeries reducendi, quemadmodum ex litteris à *Newtono* anno 1675 d. 13 Jun. ad *Oldenburgium* datis & d. 26 Jun. cum *Leibnitio* communicatis colligitur, quæ leguntur apud *Walliſium Oper. Math. Vol. III. f. 622*; ſed & ad problemata utilia ſolvenda adhibuit, quorum ſpecimicimina egregia una cum ipsa methodo traduntur in ipsius litteris A. 1676 d. 27 Aug. ad *Oldenburgium* datis & cum *Newtono* communicatis, quæ denuo leguntur apud *Wallisium* l. c. f. 629 & seq.

§. 42. Varia quoque serierum exempla dedit *Leibnitius* in Actis Eruditorum Lipsiensibus. Ita e. gr. *A. 1683 Mens. Octob. p. 425 & seq.* series infinitas ad definiendam accurato calculo quantitatem interusorii simplicis applicavit, duabus suppositionibus fundamenti loco ex jure petitis; & *A. 1691 Mens. Apr. p. 178 & seq.* easdem ad Quadraturam Arithmeticam communem sectionum Conicarum, quæ centrum habent, transtulit, indeque Trigonometriam Canonicam ad quantamcunque in numeris exactitudinem à Tabularum necessitate liberatam deducit, usum insimul specialem ad lineam Rhombicam accurate æstimandam atque in plano projiciendam ostendens. Similiter *Jacobus Bernoullus*, cujus obitum merito lugent, quotquot profundior juvat Mathesis, ad usuras æstimandas in iisdem Actis *A. 1690 Mens. Maj. p. 222* series infinitas adhibet: adhibet ad solvenda problemata alia. Vide e. gr. *Mens. Jun. A. 1694 p. 274.* Ex iisdem cum *Leibnitio* atque *Newtono* ad facile construendos Logarithmos, nec non ex Logarithmis datis inveniendos numeros utitur *Edmundus Halley in Trans. Angl. num. 216 A. 1695 p. 58 & seq.*

§. 43. Dubitari quoque non potest, præclara per methodum serierum applicatam daturum nobis fuisse *Jacobum Gregorium*, supra laudatum, inter Geometras nomen celeberrimum, nisi mors præmatura impediisset, quo minus, quæ meditabatur, exequeretur. Testatur namque *David Gregorius*, ipsius ex fratre nepos, Mathematum quondam Professor in Academia Edinbergensi, nunc in Oxoniensi Astronomiæ Savilianus longe celeberrimus, in *Exercitatione Geometrica de dimensione figurarum, Edinburgi 1684 in 4. edita* p. 2-4, ipsum multa de figurarum dimensione aliisque problematibus per infinitas series solvendis meditatum esse, & ferente occasione cum quibusdam communicasse. Quis vero ab ingenio ejus in rebus Geometricis tractandis sperari debuerit successus, satis, opinor, constabit, quibus innotuere quæ *in Vera Circuli & Hyperbolæ Quadratura, Patavii A. 1668 in 4. publicata*, ipsique subjuncta *Geometriæ parte universali, quantitatum curvarum transmutationi & mensuræ inserviente*, de seriebus convergentibus dedit, in quibus ultimus terminus dat quæsitum, alterius adeo

gene-

generis a seriebus nostris, in quibus summa quæsito satisfacit. Summus certe Geometra *Newtonus* spem sibi de ipso conceperat summam. Vide *Wallisium Operum Vol. 3. f. 636*

§. 44. Quod vero præstare prohibebatur *Jacobus Gregorius*; id præstare conatus est *David Gregorius* in laudato jam aliquoties de dimensione figurarum Tractatu. Cum enim in Adversariis patrui sui nil præter methodi serierum infinitarum exempla quædam, nequaquam vero methodum ipsam & operandi formam deprehenderet; ipse invenit methodum seriebus istis producendis aptam (cujus fundamentum, quod supponit, demonstrat *Bernhardus Nieuwentiit* in *Analysi Infinit. cap. 2 p. 22*) & non solum ad sectiones Conicas, sed alias etiam curvas tum quadrandas, tum rectificandas applicavit. Utitur etiam, sicubi opus est, in præstantissimo opere *Elementorum Astronomiæ Physicæ & Geometricæ, e. gr. prop. 6 & 7 lib. 4 f. 293 & seq.* pro determinando motu apsidum ex data lege vis centripetæ in orbibus ellipticis, qui circulis finitimi sunt, & contra. Invenit etiam methodum, quibus infinitæ numero curvæ & spatia iis & rectis comprehensa, nullius antea cognitæ methodi legibus subjecta mensurantur, in litteris cum *Wallisio* communicatam, quas legere est in ipsius *Algebra, f. m. 377*.

§. 45 *Gregorii* conterraneus *Johannes Craigius*, cui curvarum Quadraturæ huc usque multum cordi fuere, exempla serierum infinitarum complura dedit. Etenim non solum in *Methodo figurarum lineis rectis & curvis comprehensarum Quadraturas determinandi, quæ Londini 1685 in 4. prodiit, probl. 12 & seq. p. 14 & seq. Quadraturarum* ad quadrandas præter circulum, Hyperbolam & Ellypsin aliquot curvas alias, *ac probl. 1 & seq. de rectificatione curvarum* ad rectificandam Parabolam & Hyperbolam series infinitas adhibet, & *in Tractatu Mathematico de figurarum curvilinearum Quadraturis & locis Geometricis Londini 1693 in 4. edito part. 1 exempl. 8 & 10 p. 11 & seq.* ad series infinitas confugit; sed elegans etiam exhibuit specimen methodi generalis determinandi figurarum Quadraturas, quod ex *Actis Philosophicis Anglicanis n. 284. A. 1703 p. 136 & seq. Actis Lipsiensibus Mens. Jul. anni 1704 p. 311 & seq.* inserui meruit.

§. 46. Magis tamen, quam *Craigius*, quadraturas per series infinitas promovit summus Geometra *Isaacus Newtonus*, in *Tractatu de*

Qua-

Quadratura Curvarum, quam Opticæ ſuæ idiomate Anglicano Londini anno 1704 editæ ſubjunxit: ubi inprimis elegantes ſunt illæ ſeries, quæ, ſi quæſitum Algebraice exprimi posſit, abrumpuntur ſeu finiuntur. Opportune quoque iisdem ſeriebus uſus eſt in abſtruſo opere *Principiorum Philoſophiæ Naturalis Mathematicorum*, e gr. *in ſchol. prop. 93 lib. 1 p. 225*, ubi oſtendit, quomodo inveniatur lex attractionis in planum ſecundum lineas perpendiculares factæ, ita ut corpus attractum in data quacunque linea curva moveatur: & in exemplis *prop. 10 lib. 2 p. 263 & ſeq.* ubi docet in medii denſitatem inquirere, quæ faciat, ut projectile in datà aliqua linea moveatur.

§. 47. Quin *Illuſtris Marchio Hoſpitalius* in parte poſteriori Analyſeos infinite parvorum ſerierum quoque infinitarum doctrinam multis egregiis exemplis illuſtraturus fuiſſet, nulli dubitamus. Unde miramur, *DN. Quadratum* (vernaculo idiomate *Carré* appellant) in *Methodo pro dimenſione ſuperficierum & ſolidorum, illorum centris gravitatis, percuſſionis & oſcillationis per applicationem calculi integralis*, eas plane non attigiſſe, cum tamen id præſtandum ſibi ſumſerit, quod *Hoſpitalius* ob promiſſam ab *Illuſtri Leibnitio* ſcientiam infiniti (*vid. præf. Hoſpitalii ad Analyſin infinite parvorum & Acta Lipſ. Menſ. Maj. anni 1702 p. 219*) præſtare renuerat, niſi forte, quæ ſublimiora ſunt, ideo aliis excutienda reliquerit, quia in tyronum unice gratiam prima calculi integralis quædam lineamenta in exemplis facilibus ducere ipſi viſum fuit.

§. 48. Sibi itaque a *Dn. Quadrato* relictum eſſe credidit, in qua ingenii vires exerceret *Georgius Cheynæus*, Medicus Scotus, qui in *Fluxionum methodo inverſa, ſive Quantitatum fluentium legibus generalioribus*, id potisſimum agit, ut ſerierum infinitarum doctrinam promoveat, methodo exemplis pluribus illuſtrata. Utut vero non tyronibus, ſed Mathematicis ſcribere ſibi propoſuiſſet; de eo tamen judicat *Moivre* in Animadverſionibus in ipſius Tractatum ſub finem præfationis, eum nec tyronibus, nec Mathematicis, ſed ſibi ſoli ſcripſiſſe, cum plures ab eo errores commiſſos eſſe oſtendat. Optandum ergo, *ut Illuſtris Leibnitius* ſuam tandem nobis largiatur ſcientiam infiniti, arcana Geometriæ prorſus reſeraturam. Cæterum multa de ſeriebus infinitis utilia ex laudatis *Dn. de Moivre* Animadverſionibus addiſcere licet: & ſi earum

rum lectionem cum evolutione Tractatus Cheynæi conjungas, ex hoc quoque utilitatem percipere poteris. Inprimis autem sub calcem *a p. 102 usque ad finem* generalia quædam invenies Theoremata pro Quadraturis Curvarum aut earundem ad simpliciores reductione *in Transact. Anglic. num. 278 A 1702 p. 113* primum proposita, adjecto tamen inventionis modo in casibus similibus imitando, qui in Transactionibus desiderabatur.

§. 49. Quæ *Bernhardus Nieuwentiit* de his seriebus attingit *in Analysi infinitorum cap. 2 § 21 & seq. p. 146 & seq.* perpauca sunt, ablegare enim placuit lectores suos *in schol. §. 23 cit. p. 150* ad superius commendatum *Dn. Gregorii* Tractatum de dimensione figurarum. Plura serierum exempla, quam *Nieuwentiit* exhibet *Carolus Hayes* in *Tractatu de fluxionibus* sive *introductione ad Philosophiam Mathematicam & Mechanicam*, anno demum præterito Londini in fol. idiomate Anglico edito. Cum enim omnia fere congesserit, quæ in Analysi infinite parvorum *Hospitalis*, Methodo ad §. 47 citata *Quadrati*, Analysi infinitorum *Nieuwentiitii*, Tractatu gemino de Quadraturis *Craigii*, Methodo fluxionum inversa *Cheynæi* Actis Lipsiensibus, alibique reperiuntur, *sect.* 4. areas superficierum curvinearum determinans, eas, ubi opus est, per series quoque infinitas exhibet.

§. 50. Apparet itaque, unde plura desumere debeat, qui hanc de seriebus infinitis doctrinam, cujus prima saltem rudimenta in tyronum gratiam tradere hac vice libuit, plenius cognoscere desideraverit. Ei tamen suademus, ut non promiscue legat Autores quosvis, ne, dum diversa notandi ratione, diversa item methodo applicandi series utuntur, confundatur magis, quam proficiat. Neque enim credendum est, eadem omnes ratione procedere, qua nos usi sumus in §. 38 & 39, ubi calculum integralem conjunximus cum methodo serierum sed plerique via incedunt prorsus diversa. Quamobrem consultum esse judicamus, ut, si quis ad interiora Geometriæ penetrare studuerit, cognitas Analyseos vulgaris legibus, ex *Johannis Kersey Elementis Algebræ*, *idiomate Anglico Londini 1673 in fol. editis*, *Abrahami de Graaf & Kinckhuysen Algebra*, *hujusque Geometria & fundamento Geometriæ*, scriptis in Belgio idiomate Belgico publicatis, aut libris etiam aliis; ex Analysi infinitorum *Hospitalii* supra laudata calculum

 diffe-

differentialem, ex *Quadrati* Methodo superius ibidem commemorata calculum integralem familiarem sibi reddat, atque his cognitis *Craigii* Tractatus de Quadraturis & *Gregorii* de dimensione figurarum ita legat, ut, non juxta illorum methodos, sed leges calculi differentialis atque integralis problemata ab iis tradita ipse solvat, adhibitis, ubi opus fuerit, methodo serierum à nobis explicata, & circa calculum integralem iis quoque notatis, quæ ad specimina quædam illustria doctrinæ fluxionum observavit *Abrahamus de Moivre in Transf. Angl. A. 1695. num. 216 p. 52 & seqq.* Ita enim fiet, ut leges calculi differentialis & summatorii, itemque serierum infinitarum, earundemque ad problemata solvenda applicationem perspiciat: quo facto, collatio Analyseos infinite parvorum *Hospitalii* cum Tractatu de Fluxionibus *Caroli Hayes* differentiam calculi differentialis & methodi fluxionum prodet, in sola notandi & dicendi ratione inter se differentium. Quodsi quis hanc differentiam a cognitis Analyseos finitorum legibus statim didicerit, is, sepositis *Hospitalii*, *Quadrati*, *Craigii*, & *Gregorii* scriptis, ad lectionem Tractatus de Fluxionibus *Caroli Hayes* progredi poterit, cum in uno reperiat, quæ in reliquis conjunctis offendit, iisque longe adhuc plura.

§. 51. Quoniam adeo multum laboris lucrari valemus, siquidem differentia methodi fluxionum & calculi integralis nobis constiterit; eandem brevissimis exponere libet. *Fluxionem* scilicet vocant Angli, quod *Leibnitius* primus inventor *differentiam* aut *quantitatem differentialem* appellat. Illi *quantitatem* dicunt *Fluentem*; quam hic *integralis* aut *summæ* nomine indigitat. *calculus differentialis* illis audit *Methodus fluxionum: calculus integralis* vero *Methodus fluxionum inversa*, quia differentiali reciprocus, sicuti extractio radicum elevationi ad potentias reciproca existit. *Leibnitius* Quantitatis y differentialem denotat per dy; Angli per $\dot{y}$. Convertuntur adeo fluxiones in differentias pro puncto suprascripto præfigendo d, e. gr. pro $\dot{y}$ scribendo dy. Leibnitianam vero notandi & scribendi rationem ea, quam Angli nonnulli adhibent, præferimus, ob rationes similes in § 15. expositis. Cæterum ex supra citatis Auctoribus differentiis & summis utuntur cum *Leibnitio*, uterque *Bernoullius*, *Hospitalius*, *Quadratus*, *Craigius*; cum *Newtono* autem fluxiones usurpant, *Wallisius*, *Halley*, *Gregorius*,

Moi-

Moivre, *Cheynæus*, *Hayes*; *Nieuwentiit* nec differentias, nec fluxiones adhibet, sed infinitesimarum appellatione contentus, quas insueta prorsus aliis ratione notat. Optandum foret, ut in his quoque daretur Geometrarum consensus, ne tyrones confunderentur.

COROLLARIA.

I.

INtellectus hominis finitus rerum non minus infinitarum, quam finitarum distinctos sibi formare potest conceptus: distincte enim concipit series infinitas & singulorum in iis terminorum generationem, utut omnes actu exhibere nequeat, *vi* §. *7 & 8.* Immo quod admiratione dignum magis existit, unico conceptu admodum simplici res numero infinitas, quarum singulæ sunt diversæ, exprimit: quemadmodum ex paragraphis citatis manifestum redditur.

II. Quod certo respectu est finitum, id alio respectu multis modis esse potest infinitum *vi* §. *13 & 14* Ex. gr. binarius, si consideretur ut integrum aliquod, finitus est: si ut constans ex partibus, multis modis infinitus existit, cum multis modis in partes numero infinitas sit divisibilis. Jam cum binarius possit accipi pro ente quocunque in duas partes divisibili, adeoque pro omni re corporea;

 quod

quod dictum est de binario, de omni quoque re corporea valet.

III. Unum infinitum alteri infinito vel æquale est, vel eodem majus, vel minus, *vi* §. *14.* & §. *4.* E. gr. Binarius in series infinitas numero infinitas est resolubilis; temarius item. Omnes series infinitæ, in quas resolvitur binarius, sunt inter se æquales: omnes item series, in quas temarius abit. Sed una series pro ternario major est una serie pro binario.

IV. Immo infinita sunt inter se in eadem ratione, qua finita: uti *ex* §§. *citat.* colligitur. Ex. gr. Series infinita pro binario est ad setiem infinitam pro temario in ratione subsesquialtera. Hanc ipsam propositionem ingeniose ex Geometria demonstravit *Edmundus Halley in Miscellaneis Curiosis ab Anonymo ex Transactionibus Anglicanis*, *Anglico sermone, Londini 1705 in 8.* editis p. 288 & seqq.

V. Si omnia sub eadem proportione mutarentur corpora, nullum objectum nobis appareret minus, etiam si ne millesimam magnitudinis pristinæ retinuisset partem, e. gr. corpora nostra abirent in corpusculum, vermiculo illi æquale, qui, recensente *Francîsco Tertio de Lanis in Magisterio Naturæ & Artis Tom. 1. lib. 1. c. 1. observ. 2. f. 2.* Eustachii Divini oculis microscopio munitis, lineas 143, adeoque corpora 294207 vicibus augente, non major apparuit, quam nudo oculo unum arenæ minutissimæ granulum: nec appareret majus, etiam-

etiamsi magnitudo nova respectu *pristinæ* esset gigantea.

V. Affirmare igitur non veremur, eundem reperiri Mechanismum in machinulis Naturæ minimis, qui in Machinis majoribus deprehenditur, & utrasque, tum minimas, tum majores juxta easdem motus leges operari: id quod non solum observationibus microscopicis, sed legibus quoque sapientiæ divinæ per Metaphysicas demonstrationes stabiliendis convenientissimum. Quamobrem ridendi non sunt, qui de minimis corpusculis eadem ratione loquuntur, qua de majoribus.

VI. Non obstante immaterialitate & libertate mentis affirmari potest, operationes quoque mentis nostræ mechanica ratione peragi. Mechanicæ autem hujus & legum ipsius notitia ad scientias moralem & Rationalem, omni fere perfectione adhuc indigas, perficiendas multum confert. Quamobrem mortalium ingeniosissimus *Leibnitius* systema suum Harmoniæ præstabilitæ explicaturus Mentem & corpus nunc cum duobus pendulis, nunc cum duobus horologiis convenienter admodum comparat.

VII. Qui *Geometriam*, *Arithmeticam*, *Algebram*, & *Analysin infinitorum* nondum didicit, ut solidam de rebus naturalibus acquirat scientiam, fieri nequit. Eundem in modum judicat *Dethlevus Cluverus in Nova Crisi temporum part. 1. p. 70*, nisi quod Analysi infinitorum inventam à se Analysin infinitarum similitudinum substituat, nullibi tamen adhuc satis explicatam.

V. Qui

IX. Qui omnem ſuam cognitionem tandem in concluſiones per inductionem probatas reſolvit, is non majorem de concluſionibus univerſalibus habet certitudinem, quam Scepticus, *vi* §. 22.

X. Cum Scriptura ſacra phœnomena rerum naturalium tantum recenſeat, non vero reſolvat; quæſtiones ad hiſtoriam naturalem ſpectantes, ubi eas attingit, inde quidem decidi poſſunt, nequaquam tamen quæ pertinent ad ſcientiam naturalem.

METHODUM SERIERUM INFINITARUM,

Indultu Superiorum

PRÆSIDE

M. CHRISTIANO WOLFIO,

die XXIII. Dec. A. 1705.

placidæ Eruditorum disquiſitioni

ſubmittet

JUSTUS GOTTHARDUS RABENERUS,

Lipſienſis.

LIPSIÆ,

LITERIS CHRISTIANI GOEZI.