16

DISSERTATIO MATHEMATICA
EXHIBENS TENTAMEN
EX NOTIONE LINEAE RECTAE
DISTINCTA ET COMPLETA
AXIOMATIS XI EVCLIDIS VERITATEM
DEMONSTRANDI.

QVAM
RECTORE ACADEMIAE MAGNIFICENTISSIMO
SERENISSIMO PRINCIPE AC DOMINO
DOMINO
CAROLO AVGVSTO
DVCE SAXONIAE IVLIACI CLIVIAE MONTIVM ANGARIAE ET GVESTPHALIAE, LANDGRAVIO THVRINGIAE REL.
PRO LOCO
IN AMPLISSIMO PHILOSOPHORVM ORDINE
RITE OBTINENDO
PVBLICE DEFENDET
A. D. XXV. SEPTEMBRIS CIϽ IϽ CC LXXXVIIII.

IOANNES HENRICVS VOIGT
PHILOS. D. MATHESEOS P. P. O. ACAD. IENENS. ET REG. SOC.
SCIENTIAR. GOTTINGENS. CORRESP.
ASSVMTO SOCIO
ANDREA KRALOWANSKY
HVNGARO.

IENAE
TYPIS GOEPFERDTII.

15

SERENISSIMO PRINCIPI AC DOMINO

ERNESTO

DVCI SAXONIAE, IVLIACI, CLIVIAE, MONTIVM, ANGARIAE ET GVESTPHALIAE, LANDGRAVIO THVRINGIAE REL.

PATRI PATRIAE

CVM OMNIVM BONARVM LITERARVM TVTORI

TVM INPRIMIS

MATHEMATICARVM AC PHYSICARVM DISCIPLINARVM

ET ARBITRO PERITISSIMO

ET LIBERALISSIMO PROMOTORI

OB INNVMERA BENEFICIA IN SE PATREMQVE SVVM COLLATA, MATHESEOSQVE TVM DISCENDAE, TVM GOTHAE NVPER, TVM NVNC IN ACADEMIA IENENSI PVBLICE DOCENDAE, CONCILIATA RELIQVORVM ACADEMIAE NVTRITORVM, PRINCIPVM OPTIMORVM, VOLVNTATE, COPIAM INDVLGENTISSIME FACTAM

TENVEM ISTVM LIBELLVM

GRATISSIMI ANIMI SINCERISSIMAEQVE PIETATIS

TESSERAM

TANTO PRINCIPI

CVMVLATISSIMAM PROSPERITATEM

ADPRECATVS

SEQVE IN TERRIS SVB EIVS IMPERIO

LAETISSIME FLORENTIBVS

NATVM, EDVCATVM, ORNATVM

ET OLIM SIBI GRATVLATVS, ET IMMORTALI MEMORIA IN POSTERVM

RETENTVRVS

LONGE VERECVNDISSIME

D. D. D.

CELSISSIMO EIVS NOMINI

ADDICTISSIMVS AC DEVOTISSIMVS

IOANNES HENRICVS VOIGT.

I.

Vndecimum axiomatum, quae Euclides elementis ſuis praemisit, merito consideratur vt basis theoriae parallelarum: quare iure postulatur, vt aut euidentiam axiomati necessariam per ſe possideat, aut eandem formali demonſtratione sibi conciliet, quo demum in claſſe theorematum locum obtineret.

II.

Axioma hoc in versione BARROVIANA sic enuntiatur *): *Si in duas rectas lineas* AD, CB, *altera* BA *recta incidens, internos ad easdem partes angulos* BAD, ABC *duobus rectis minores faciat, duae illae rectae in infinitum productae, ſibi mutuo incident, ad eas partes, vbi ſunt anguli duobus rectis minores.*„ Fig. 1.

Conuerſa illius est **): „*Si in duas rectas lineas* ab, cd: fig. 2. *recta incidens linea* ef, *internos ad easdem partes* agh, chg *duobus rectis aequales fecerit, aut etc. parallelae erunt inter ſe ipſae rectae lineae* ab, cd;„ quae ab Euclide independenter ab axiomate XI omni cum rigore demonstrata est.

III.

*) Elem. lib. I. 13.

**) l. c. prop. XXVII. XXVIII.

A

III.

In angulis qui valde sunt acuti, et inprimis si linea tertia BA fig. 1. non sit longa, certitudo asserti ita est manifesta, vt propositio haec euidentiam omnem, quae desiderari potest, habere videatur; verum si anguli adeo augeantur, vt non multo a rectis differant, et simul BA longitudinis non sit exiguae, euidentia illius reapse euanescere incipit, et cum praeterea casus incidant, vbi *linea curua*, quae plane in situ CB deprehenditur BA nunquam attingat, licet prolongetur quantumlibet, rigor geometricus suppeditat rationem quaerendi, cur quod in quibusdam lineis curuis vsu veniat, non idem in rectis vsu venire possit?

IV.

A longo inde tempore laborabant geometrae in suppeditanda formali demonstratione, memorati axiomatis; sed docta, ill. KLÜGELII dissertatio olim Gottingae scripta *) parcit labori, hoc loco de tentaminibus antiquioribus quidpiam dicendi. Sufficit, nullum adhuc ibi memoratorum XXVIII tentaminum, quae auctoribus suis digna visa sunt, vt publice proponerentur, deprehensum esse, in quo plane acquiescendum sit.

V.

Post haec varia adhuc conamina prodierunt, de quibus pauca tantum spatium et consilium praesentis scripti, commemorare permittunt. Sic b. KARSTENIVS dum Halae munus professoris iniret 1778. dissertationem sub tit. *Versuch einer völlig berichtigten Theorie von den Parallellinien*, typis imprimi curauit, quam

*) Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio. Gott. 1763 4.

quam deinde aliquantum mutatam et vberioribus deductionibus auctam edidit **). In hocce libello theoria parallelarum non immediate axiomati Euclideo, fed quibusdam aliis, ab auctore prolatis axiomatibus quae situm et directionem linearum rectarum in planis concernunt, fuperstructa est.

Anno 1781. Cel. HINDENBVRGIVS *) nouum parallelarum fystema publicauit, cuius fumma, iudicio b. KARSTENII, fequens est **): Propositionem, „omnes rectae lineae, cum tertia parallelae, funt etiam ad fe inuicem parallelae„, per fe euidentiorem, axiomate Euclidis, factam esse, et veritatem huius ex illa duci posse. Animaduersiones a b. KARSTENIO hac occasione manifestatas, vid. l. c.

Ao. 1784. apparuit libellus Cl. SCHVLZII, concionatoris aulici et Mathem. Prof. Regiomontani ***) in quo theoriam parallelarum in propositione hac fundat: magnitudo anguli plani determinatur magnitudine illius fuperficiei planae, quae intra eius crura sine fine prolongata, sita est. Cenfura KARSTENIANA huius demonstrandi methodi, occasionem dedit Cl. SCHVLZIO, principia fua nouis argumentis fulciendi, ita vt demonstratio Cl. SCHVLZII hodieque vt incompleta considerari debeat.

 Nuper

*) KARSTENS *mathem. Abhandlungen. Halle* 1786. *S.* 115. *fq.*

**) *Leipziger Magazin zur Naturkunde, Mathem. u. Oecon.* 1781. *St.* 2. *u.* 1786. *St.* 3.

***) KARSTENS *mathem. Abhandl. S.* 159. *fq.*

****) *Entdeckte Theorie der Parallelen, nebft einer Unterfuchung ihrer bisherigen Schwierigkeit. Königsberg* 1784.

Nuper etiam Cl. Lazari Bendavidis *) vidimus demonstrationem pluries memorati principii Euclidei de parallelis. Auctor, vt ex declaratione illius pag. 4. patet, sibi quidem videbatur axioma XI Euclidis non minus rigorose et euidenter demonstrare posse, quam quaecunque propositio in Euclide, e. g. illa, quod duo latera in triangulo simul sumta, semper tertio maiora sint, demonstrata est. Demonstratio autem Eucl. axiom. in auctoris Xma propositione ita incipit. Assumatur fig. 3. in vno crure *ab* anguli acuti *abc* pro lubitu punctum *a*, quod tamen ab illa in *b* super *bc* erecta perpendiculari remotius sit, quam punctum *c*, cet. In Ephemeridibus literaturae vniuersae **) censor scripti huius iam monuit, D. Bendauid in eo petitionem principii commisisse. Si nimirum secundum postulata auctoris *ag* maior esse debeat *cb*, necesse est vt *ag* cum *cb* comparari, consequenter reapse metiri possit, sed si metiri potest, longitudo eius definita sit, necesse est, seu certum esse debet, lineam quandam ex *a* cum alia ex *b* quae super *ab* angulos $<$ 2 R faciunt, concursuram; at plane haec est illa propositio, quae hic, quamuis in alio figurae loco, primum demonstranda erat. Reliquas recentiores huius generis demonstrationes, quae memorari adhuc possent, ne iusto fusior sim, praetereo.

VI.

Luculentissimo sane ac simplicissimo modo Ill. Kaestnervs ***) veritatem XI axiom. Euclid. ostendit. „Demittatur, inquit, fig.

*) *Ueber die Parallellinien. In einem Schreiben an Hn. Hofr. Karsten, von Lazarus Bendauid. Berlin* 1786.

**) *Allgemeine Literaturzeitung. Supplementb.* 1786. *No.* 85.

***) *Anfangsgr. der Arithm. Geometr. etc.* 11 *Satz* 5 *Zus.*

fig. 4. AB cum angulo illi immutabiliter adhaerente BGP iuxta EH, ita vt AB successiue in talem veniat situm, qualem *ab* repraesentat, tum certe GP, licet breuissima assumatur, locum *gp* occupabit, atque *cd* secabit; linea enim AB tamdiu deorsum moueri potest, donec super *cd*, et G in H incidat, vbi demum GP necessario sub Hd in Hh cadet et consequenter antea tota per H*d* penetrare debet ---; Sed (vir hac in re summus, in litteris, materiam hancce concernentibus, humanissime ad me datis, dicit) illud: *Ergo, etiam sufficienter prolongata G P semper scindit c d* ——, non adieci, quia dantur curuae, quae aeque sub *cd* vt recta Hh, possunt cadere; et tamen non sequitur, quod in situ, quem figura indicat, recta *cd* a curua satis prolongata scindatur. Quid autem interest, (pergit ille) quod isthoc in rectis fieri necesse est; et in curuis fieri nequit? — Scilicet discrimen inter recta et curua; verum plane id ipsum enodandum esset, si argumentum de rectis valeret, quod de curuis non valet. Eiusmodi curuae innumerabiles excogitari possunt: vna illarum esset Dioclis Cissois in analysi mea finitor. §. 470. Logistica quoque *GP* esse posset, cuius asymptota *cd* esset; Analys. infin. §. 213. Ille quidem, cui axioma Euclidis demonstratur, eiusmodi lineas nondum nouit; sed ex axiomate Euclidis sequitur, lineas tales dari; vt proinde illud argumentis demonstrari nequeat, quae etiam in has extendantur et tunc aliquid falsi euadet, nisi ostendetur, cur haec extensio locum habere non possit.,, Alio loco ait: „*Res redit ad notionem lineae rectae, logice distinctam*, cuius nos tantum *claram* habemus,, — Tantum Ill. KAESTNERVS. Hoc respectu ego talem logice distinctum conceptum lineae rectae detegere, et illius ope axiomatis Euclidis demonstrationem suppeditare tentaui, vt nimi-

rum appareat, vnde veniat, quod quaedam lineae curuae, ſed in certo non nisi situ, illud non praestent, quod de rectis asseritur. Rogo itaque lectorem benev. vt hoc inprimis consideret in diiudicanda integra dissertatione. Additamentum potius explicandae difficultatis, quam abſolutam et completam demonstrationem, eam esse volui.

VII.

Conceptus, qui omnibus geometricis obiectis fundamenti loco inseruit, est conceptus *extensionis;* est autem geometrica extensio spatium, quod quantitas continua explet *). Ad notionem hanc, ope considerationis *corporum* mundanorum peruenimus.

VIII.

Si animus corporibus solummodo quoad extensionem aduertatur, obseruabit, omnes illius partes ita inter se cohaerere, vt vbi vna desinit, ibi statim altera incipiat, et inter unius finem ac alterius principium nihil sit, quod non ad hanc quantitatem pertineat. **) Characteres istius ideae expressione quanti continui continentur.

IX.

Extensio haec circa quodlibet corpus extremum quoddam vbi desinit, i. e. limitem, ***) habet: in limite vero isto generaliter considerato, iterum variae species distingui possunt.

Omne

*) Kaestn. Geom. def. 3.

**) l. c. def. 2.

***) l. c. def. 1.

Omne corpus finitum existit in spatio quod illud vndiquaque circumdat, vt aqua piscem. Vniuersae igitur partes corporis cum spatii, in quo illud deprehenditur vniversis partibus concurrentes efficiunt in his limitibus illam extensionis speciem, quae *superficies* appellatur. Ab hac extensione omnes illae separantur, quae versus internas corporis partes cogitari possunt, et quae singulatim spectatae, profunditas corporis, dicuntur.

X.

In superficie ante considerata fingi potest alicubi initium a quo illa semper magis atque vlterius circa corpus extenditur, donec ex alia parte iterum in locum veniat, in quo initium cepit. Initium istud et finis hic dant duos limites, qui in ipsissimo illo loco spatii iacent. Extensio superficiei ab initio ad finem circa corpus est extensio quae superficiei per se competit, nec opus est in eadem consideranda, extensionem corporis (IX.) profunditatem dictam, simul spectare.

XI.

Habet vero praeter extensionem istam, superficies adhuc aliam, quae illi pari modo per se spectatae propria est; initium eius nempe, §pho praecedenti memoratum non vnico tantum et indiuisibili loco est, sed super plura loca corporis extendi potest, et quidem in directione, quae ab illa, qua superficies circa corpus mouetur, differt. Vnde in qualibet superficie, duas quoad directionem diuersas extensiones, concipere licet, et cum vtraque corpori, praeter illam, quae profunditas eius appellatur, etiam competat, fatendum eis, corpus triplicem, superficiem vero duplicem tantum habere extensionem.

XII.

Superficies itaque non solum per se, sed separatim etiam quoad limites suos, seu seriem illam locorum vbi (X.) consideratum initium et finis illorum concurrunt, extensa est. Hic limes extensus, *linea* vocatur, quae non nisi vna gaudet extensione; nam superficies, cuius illa solummodo limes est, duas habet. Cum igitur linea extremum vnius harum duarum extensionum sit, plus altera illa specie extensionis, quae illi cum superficie communis est, conseruare nequit.

XIII.

Linea denique etiam alicubi desinere potest, qui lineae limes, *punctum* dicitur. Illi nulla amplius extensio est. Linea nempe, cuius illud limes est, vnam tantum extensionem habuit, cuius nulla pars puncto tribui potest, quia ibi tantum quaeri debet, vbi tota linea, consequenter et omnis extensio, finem nacta est.

XIV.

Ex obseruatis his sequitur, triplicem tantummodo corporum, nequaquam autem superficierum et linearum extensionem separatim ac per se, sed semper in coniunctione corporum cogitari posse. Limes est conceptus relatiuus et priuatiuus inuoluens quod existentis quidpiam aliquousque et non vlterius, extendatur; neque igitur de determinata hac extensione aliter sermo esse potest, quam si simul res ipsa adsit, quam huc vel illuc extendi oporteat. Idem et de puncto valet. Nullibi enim illud cogitari potest, quam vbi corpus est.

XV.

Hoc respectu nequit vel tenuissima corporis lamina superficies geometrica; angustissima pars superficiei, linea; et breuissima pars lineae punctum vocari; sed punctum semper est limes tantummodo breuissimae huius lineae partis. Par est ratio lineae in relatione ad superficiem et superficiei in relatione ad corpus.

XVI

Ex opposito autem in geometria etiam permissum est, diuisionem corporis tamdiu continuare, donec tandem ad corpusculum ita exiguum perueniatur quod minus esse nequit, licet semper adhuc naturam corporis retineat. Istud denique *elementum corporis* dicetur. Tale elementum itaque etiam triplicis dimensionis capax est; sed limites eius ita prope iuxta se inuicem iacent, vt inter illas noui, a prioribus, diuersi, assumi vel cogitari nequeant. Posito enim quod nouus priori propior limes sumi possit, non fuisset antea elementum reapse, sed elementorum aggregatum. Huiuscemodi elementum corporeum potest nihilominus, illo, quod amplius diuidi non possit, non obstante, varias habere formas; nam e. g. elementum vrbis plane alia res est, quam elementum exercitus, et tamen vtrumque in suo genere simplex est.

XVII.

Simili modo angustissimus superficiei tractus non tantum in una, sed in altera quoque sua extensione, repraesentari, atque infinite parua pars superficiei *abcd* fig. 5 quam tractus hi communem habent, *elementum superficiei* appellari potest; vbi *ab* vel *cd* i. e. limes huiuscemodi elementi superficiei, *elementum lineae* erit.

XVIII.

Elementum proinde lineae nullius est capax latitudinis aut profunditatis, et extensio in longum ab vtroque limite non nisi hoc efficit, vt vnus ab altero distinguatur. Tale lineae elementum nec *rectum*, nec *curuum* dici potest, natura sua nondum est harum qualitatum capax; modus tantum definitus, quo plura lineae elementa coniunguntur, ad diuisionem in rectum curuumque ducit, quod in sequentibus vberius declarabitur. Sed iam hic obseruare licet, elementum lineae rectae ab elemento curuae e. g. parabolicae, logisticae etc. diuersum et tamen quodlibet in suo genere indiuisibile esse posse; plane vt (XVI.) elementa corporum.

XVIIII.

Est itaque linea geometrica limes superficiei geometricae (XVII) quae sit e. g. fig. 6. *abc*, et vnus eiusdem limitum linea *ab*. Fingatur nunc, puncta *a* et *b* in spatio ita teneri, vt semper eodem loco remaneant, quamuis tota figura *abc* ex charta erigi, et circa illa immutabilia puncta moueri cogitetur. Si tum linea *ab* ita erit comparata, vt omnia illius puncta, durante integro motu figurae *in vno eodemque loco maneant*, eam *rectam*, si vero contra, *curuam*, appello. Ita e. g. fig. 7. puncta ad lineam *ab* pertinentia, dum superficies *adbc* circumagetur, semper alium, et inter ceteros locum *adb* occupabunt quam primum nempe punctum *c* ad obuersam partem in γ collocabitur. Ista ergo ratio est, ob quam non vt recta, sed vt curua spectari debet.

Hinc iam et certitudo axiomatis illius cogitur: „inter duo puncta plures rectae vna, duci non possunt.„ Nam si *ab* semper

per eundem locum retinet, necesse est, vt omnes rectae, inter *a* et *b* incidentes, vna super alia iaceant.

XX.

Interim tamen dari possunt lineae curuae, vt *adeb* fig. 8. in quibus dum superficies, cuius vnum constituunt limitem circum circa agitur, minimum aliquot puncta v. g. *d* et *e* locum non mutant; verum tum dici etiam potest, puncta ista *d* et *e* reuera cum *a* et *b* in recta linea sita esse; atque vt integra recta linea obtineatur, nil nisi spatium inter *a*, *d*, *e* et *b* meris eiusmodi elementis expletum, imaginari opus est, quae inter rotandum, prout memorata puncta, in uno eodemque situ permaneant.

XXI.

Cogitetur iam linea vt aggregatum suorum elementorum, ita tamen, vt modi compositionis eorum praecipua ratio habeatur. Esto elementorum primum *ab* fig. 9. quod nec rectum nec curuum assumitur, (XVIII.) et aliud *bg*; hoc posterius potuerit erga *ab* talem habere situm, vt si *a* et *g* loco fixo detinentur, tota *ag*, circumacta *agd*, uno eodemque loco remaneat. Sed etiam talem erga *ab* situm nancisci potest, vt a sinistris iuxta *g* ad *c* in linea *δg* incidat. Si ergo ex hoc situ a sinistris circa *b*, tanquam centrum, circumagitur, breuior conficienda illi erit via vt cum *ab* congruat, quam si eandem hanc viam a dextris circa *b* absoluere debeat. Fingatur nempe, plane eiusmodi elementum in altera parte, e. g. *bγ* quod hic eundem ipsum situm erga *b* habeat, quem antea *bc* in sinistro latere erga *ab* habuit. Hocce *bγ*, typi instar *bc* apparebit, si superficies *agd* ita vertetur, vt *δ* cum *d* coincidat. Sed nunc

$b\gamma$ aeque ita longum iter a dextris absoluendum habebit vsque dum eo pertingat, vbi *ab* teget, prout antea *bc* simili scopo a sinistris absoluit. At via *bc* quae a sinistris ad *ab* ducit, tanto est breuior illa, quae a dextris eo tendit, quantum via ex *c* ad γ efficit. E contrario *bg* aeque longum conficiet iter, siue a dextris, siue a sinistris versus *ab* eat.

XXII.

Secundum (XIX.) dicta, ita situm est *bg* erga *ab*, vt cum illo rectam; *bc* vel $b\gamma$ ex opposito ita, vt vtrumque curuam formet lineam. *ag* est ex hypothesi (XXI) minima recta, et *abc* aut $ab\gamma$ minima curua linea quia nempe non ex pluribus quam duobus elementis constant; vnum autem elementum per se neque rectum neque curuum esse potest. Licet itaque dicere: in linea recta vnum elementum respectu sui contermini sic iacet, vt punctum extremum, quod non est communis limes, aeque procul ire debeat, si elementum circa mutuum limitem tamdiu vertatur, donec in primum elementum incidat, siue iter hoc a dextris, siue a sinistris faciat. Ex aduerso in linea curua elementum vicinum in eo est situ, vt via ex una parte semper maior sit, quam ex altera. Longitudinem vel breuitatem viae, praesenti respectu ego tanquam magnitudinem inclinationis considerabo, quam elementum vnum erga suum vicinum habet, ita scilicet, vt quo breuior via haec sit, eo maior inclinatio dici debeat et v. v. —; atque tum affirmandum erit, in linea recta elementum vnum ratione sui contermini ex vtraque parte aequalem, in curua vero in aequalem inclinationem habere.

XXIII.

XXIII.

Inclinatio duorum elementorum vel etiam duarum linearum mutua, *angulus* dicitur; diuiditur ille in *gibbum* vt in latere dextro ad *abc*, et *concauum*, sicut in sinistro ad idem ipsum *abc*. Sumamus *bc* versus *g* circa punctum *b* tamdiu moueri, vsquedum cum *bg* congruat et adhuc porro dextrorsum versus γ; angulus concauus *abc* qui initio in sinistra parte conspicuus erat, iam in dextra videbitur. Transitus ex vno statu in alterum factus est, dum *bc* in *bg* situm esset, vbi angulus neque gibbus, neque concauus erat, et vbi per consequens *bc* versus *ab* in vna parte, plane tantam habuit inclinationem, quantam in altera. Sed in statu hoc *bc* cum *ab* etiam in recta linea positum erat; potest ergo dici: in linea recta vnum elementum versus alterum illi adiacens, ab vtraque parte parem habet inclinationem, seu ita cum illo coëxistit, vt nec gibbum, nec concauum angulum cum eodem efficiat.

XXIV.

Inclinationem *be* versus *ab* quae, per demonstrationem §phi praeced. ambobus lateribus aequalis est, ego nomine *anguli indifferentis* insignio. Vnde apparet, omnem concauum angulum minorem, et quemlibet gibbum maiorem esse indifferente; siquidem in concauo angulo *abc*, si *ab* immutabilis manet, *bc* vsque ad *g* promoueri oportet, antequam in talem situm veniat, in quo angulum indifferentem cum *ab* constituat. Hoc progressu angulus concauus crescit in sinistro, et vna decrescit gibbus in dextro latere in eadem proportione.

XXV.

Moueatur latus anguli concaui bc fig. 10. ad medietatem suae viae versus a et subsistat demum in δb; simili ratione idem illud latus procedat, sicut angulus gibbus abc deposcit, in parte dextra ad dimidium viae versus a, vbi bd teget, posterior haec dimidia via maior erit, quam illa prior, quia (XXII.) in casu priori tota via breuior, quam in posteriori, est. Erit ergo etiam angulus $cb\delta$ minor cbd. Iam si hae duae semiuiae atque cum illis anguli $cb\delta$ et cbd aequari deberent, bc ex g in sinistra ac dextra parte versus a moueatur, ideoque initio indifferentem angulum cum ab formet, necesse erit (XXIV).

XXVI.

Ille autem angulus, qui oritur si bc, quod nunc in bg situm sit, a dextris et sinistris versus a ad dimidium suae viae circa b vertatur, *angulus rectus* audit, vt $gb\delta$; gbd; δba; dba; stant igitur super recta linea a sinistris duo, et a dextris etiam duo anguli recti et priores sunt plane ita magni ac posteriores, quia omnes quatuor aeque magni sunt, Porro patet, circa punctum b nullos amplius quam duo haec rectorum angulorum paria dari.

XXVII.

Teneantur nunc puncta δ et d in spatio immota et vertatur figura δda circa b donec a infra δd perueniat, tum ab cum bg congruet; δb autem et bd se ipsum teget. Sunt enim tantum quatuor memorati anguli recti circa punctum b possibiles, atque omnes eiusdem simul magnitudinis, consequenter superiores ambo in inferiores incident. Cum ergo δbd post conuersionem super se ipsa haereat, quod vt res ipsa loquitur,

non

non solum in casu eo locum habet, dum *ba* cum *bg* congruit; sed etiam in qualibet altitudine super, et in qualibet profunditate subter charta, oportet *δbd* lineam rectam esse (XXIII); quoniam vero illa, isthaec nullo alio modo fieri potest, quam si *δba* et *abd* sint anguli recti, affirmare fas erit, quod, si in linea quadam duo recti anguli immediate iuxta se positi sint, ita nempe, vt vnum latus commune habeant, reliqua autem duo, partes illius lineae sint, quae a communi latere secatur, linea haec recta sit.

XXVIII.

Omnes anguli qui recto includuntur, *acuti*; prout illi, qui rectum inter sua latera continent, *obtusi* dicuntur. Anguli qui ex puncto quodam communi in linea recta exsurgunt, ita possunt dispesci vt portio vna in vno, altera vero in altero recto contineatur, non obstante illo, quod interdum vnus secetur. Vbicunque igitur linea recta est, ibi omnes illi in vno puncto insistentes anguli simul sumti 2 R efficiunt; et si in linea quadam omnes anguli 2 R efficiunt, puncto ex quo oriuntur, vbicunque assumto, linea talis recta est; vel etiam: si in linea quadam ex puncto aliquo anguli exsurgunt, qui tantam faciunt summam, quantam anguli quidam, ex puncto communi lineae rectae orti, linea haec ratione vtriusque iuxta verticem angulorum siti elementi sui, recta est.

XXIX.

Ex ista explicatione notionis lineae rectae, definitiones illius in systematibus occurrentes, commode illustrari possunt. Sic e. g. Evclides ait, lineam rectam eam esse, quae ex aequo

(ἐξίσȣ)

(ἐξίσȢ) sua interiacet puncta. Hoc ἐξίσȢ manifeste nihil aliud significat, quam quod in linea recta nunquam duo elementa ita concurrant, vt concauum aut gibbum angulum (XXIII.) constituant, sed inclinatio cuiuslibet elementi versus vicinum in vna parte aeque ita magna sit, ac in altera; vel: si quis tantum in concauo angulo inclinationem aut propensionem elementorum vicinorum statuat, in gibbo contra, illorum coëxistentiam reclinationem appellet, dici posset, rectam lineam esse, vbi elementum quodlibet respectu sui vicini, nec inclinetur nec reclinetur, atque sine dubio hoc sibi vult Euclidis τὸ ἐξίσȢ.

XXX.

Ex mente Platonis in linea recta punctum extremum omnia reliqua adumbrare oportet. Isthoc etiam eo ducit, quod in linea recta in nulla parte species quaedam anguli, vel aliquid huiusmodi prominere, vt angulus gibbus oriri queat; nam si hoc esset, vertex istiusmodi anguli et aliud punctum extremum lineae rectae neutiquam possent a reliquo puncto extremo adumbrari, cum interea, dum linea vertitur, gibbus semper in alium situm veniat et tamen inferior extremitas lineae vna cum superiori immutabiliter eodem loco maneat.

XXXI.

Wolfivs dicit, lineam rectam illam esse, cuius pars similis esset toti. Hoc haud dubie sequentia denotat: In linea recta tam in toto, quam in qualibet parte punctum aliquod cogitari, cui certus numerus elementorum in directione qua placuerit,

cuerit, superponi potest, semper tamen, et in vna, et in altera parte, omnes simul sumti hinc enascentes anguli tantam, quantam 2 R, summam efficient. E contrario in curuis valere quidem hoc interdum de quibusdam locis, sed nunquam de integris lineis, potest.

XXXII.

Pari ratione sequitur ex, antea euoluta lineae rectae natura; in illa viam ab vno extremo puncto ad alterum, omnium esse breuissimam. Considerari enim potest, via quaelibet tanquam summa passuum, quae sunt elementa eius; at omnis summa quae ex quantis oppositis constat, plures requirit vnitates, ac si quanta non essent opposita. Patet hoc exinde quod in summandis oppositis quantis in vtraque parte aliquid penitus tollatur, ergo respectu summae, tamquam plane nihilum consideretur. Hinc illud quod tolli debet, ratione habita inueniendae summae, vel obtinendi residui, expensae sunt, quibus parci potuisset, si *oppositio* quantorum euitata fuisset. Si igitur fig. 9. punctum *a* non in linea recta *abg* versus *g* proficiscitur, necesse est, vt versus dextram aut sinistram a punctis huiusce lineae recedat; sed vt denique tamen ad *g* veniat, suo tempore iterum dicto puncto appropinquet, necesse est; facit itaque si recessionem initio factam et illam subsecutam appropinquationem, consideres aliquid oppositi, quod in via lineae rectae nequaquam videtur. Expendit secundum considerationes praemissas in via sua per lineas curuas, passus, qui se ipsos iterum tollunt et ad aduentum in b nihil conferunt. Via proinde in linea curua neutiquam ita breuis est, ac in recta, ergo linea recta est via breuissima inter duo puncta.

XXXIII.

Videtur quidem, ad hanc demonstrationem supra explicatus conceptus lineae rectae nihil conferre; ad hoc itaque intelligendum, consideretur, quod si punctum *a* fig. 7. per *adb* mouetur, quod, in altera lineae parte *ab* per *aδb* eodem plane modo praestare posset, (XXII.) *adb* sit quantum, *aδb* aequale, sed oppositum; iam vero notum est, si quantitas quaedam in oppositum verti debet, hocce aut per reductionem ad nihilum, aut per infinitum fieri oportere; sed priusquam quantitas aliqua ad nihilum redigatur, imminui seu minor fieri debet. Tum demum linea curua *adb* manifeste in illi oppositam aequalem *aδb* transibit, quando iam in rectam *ab* mutata, ac qua curua, in o versa est. Antequam igitur re ipsa in *ab* mutetur, eam successiue minorem fieri necesse est: atque hic nullum est dubium, *aeb* minorem esse, *adb*; verum *aeb* iterum maior est, *ab*, quia rursus imminutio peragi debet, donec *ab* ita appropinquet, vt cum illa congruere incipiat. Quamprimum denuo in altera parte ex *ab* prodit, et versus *δ* conuexa est, iterum augetur maiorque iam est, quam *ab*. Meditationes hae haud locum habuissent, si ignotum mansisset, *ab* rectam, *adb* vero curuam et *aδb*, *adb* aequalem ac oppositam curuam propter conuersionem superficiei *abc* fuisse.

XXXIV.

Si duae lineae rectae e. g. *ag* et *δd* fig. 11. se mutuo scindunt, anguli verticales *δba* et *gbd*; vel *δbg* et *abd* inter se aequales sunt. Nam cum in lineis rectis inclinatio elementorum ad se inuicem in parte vna, vt in altera sit, (XXIII.) $\delta ba + abd = abd + dbg$ ergo $\delta ba = dbg$ et pari ratione $abd = \delta bg$ erit.

XXXV.

XXXV.

Vice versa, si duae lineae in puncto quolibet pro lubitu assumto, sese mutuo secare possunt, et illorum, proxima sibi elementa, in puncto concursus, aequales angulos verticales efficiunt, lineae tales rectae sunt. Nam quodlibet par angulorum contiguorum simul sumtorum in vna parte tantum facit, quantum in parte altera, vnde lineas has rectas esse sequitur, (XXVIII).

XXXVI.

Duae lineae rectae, si vna alteram attingit, aut solummodo vnum, aut tot habent puncta communia, vt ex ambabus non nisi vna recta oriatur. Sint e. g. lineae *ab* et *cd* fig. 12. quae in *g* concurrant. Si praeter haec puncta in *g*, adhuc aliud par, v. g. *d* et *b* coincideret, et tamen *gd* a *gb* diuersa maneret, plures, vna recta, essent possibiles lineae inter duo puncta; contra (XIX). Sed si in concursu *b* et *d* reliqua etiam puncta, quae inter *g* et *b*; *g* et *d* continentur, conueniant, tota *cd* cum *ab*, vel illius prolongatione congruet, atque vtraque iam vna tantum est linea recta. Sunto duae lineae rectae fig. 13. *ag* et *fbc*; assumatur, lineae posterioris pars *fb* in *ag*, residua pars *bc* vero super eadem sita sit. Cum *fg* recta sit, *f* et *g* immobiles teneri et cum figura circumagi, possunt. Si itaque punctum *c* super *g* situm est, inter vertendum vno loco semper manere per consequens cum *fb* in linea recta esse, nequit. Ergo *fbc* aliter recta esse non potest, quam si *bc*, *ag* tegat, quamprimum pars *fb* hanc lineam texerit.

XXXVII.

Parallelae sunt lineae rectae, quae cum in eodem sint

 plano,

plano, et ex vtraque parte in infinitum producantur, in n. tram sibi mutuo incidunt *) e. g. *ab*, *cd*, fig. 2.

XXXVIII.

Si linea recta *ab* fig. 14. cum alia *ac* in *a* conueniat, ceterum a sinistris eius sita sit, ab hac ad *ac* semper propius accedere potest, dum angulus *bac* imminuitur. Sed si prolongetur *ab*, illius extrema puncta *d* vel *e*, imminutione anguli non obstante, semper in certa distantia a punctis prolongatae *ac* v. g. *g* aut *h* seruari possunt: verum, quamprimum *bac* ad nihilum vsque minuetur et punctum *b* in *ag* veniet, omnia etiam reliqua puncta quantumcunque promotae *ab*, cum prolongata *ac* coincident (XXXVI). Si igitur angulus *bac* ita mutatur, vt continuo decrescat, neque, vt puncta *ae* a sinistris iuxta *ag* maneant, omnis prolongatio linearum *ag* et *ac* proderit quidquam; potius ambae in infinitum protractae, postquam angulus nihilo factus esset aequalis, mutuo se tegent; imo, si angulus modo praecedenti, vlterius adhuc mutetur, puncta *ae* a dextris iuxta *ag* locum occupabunt.

XXXIX.

Sin autem angulus *bah* fig. 15. non mutetur, sed proximum elementum, quo *ab* aucta est, e. g. *bd*, cum linea *ab* dextrorsum minorem, quam sinistrorsum angulum formet, vt scilicet prior concauus, posterior gibbus sit, necesse est, vt, si *abd* cum immutato angulo *bam* tamdiu super *mn* moueatur, donec *b* in rectam *ah* v. g. in β incidat, elementum *db* cum *ah* minorem efficiat angulum, quam effecisset, si *ab* directio-

ne

*) Evcl. El. I. def. XXXIV.

ne recta vno elemento versus d prolongata fuisset: nam $\delta\beta h$ $\lhd$ $ba\beta$, quia prior in posteriori continetur, si ba inclinatione eadem manente, versus $\alpha\beta$ vsque ad β promouetur. Sic ergo promotione hac in β idem plane effectum est, quod (XXXVIII) de ba concessum fuit, scilicet angulum $ba\beta$ semper imminui oportere. Tales prolongationes vbi sequentia elementa cum praecedentibus in vna parte concauos, in altera gibbos angulos constituunt, curuas gignunt lineas, (XXII.). Appropinquant itaque prolongatione curuilinea, dum linea curua super mn mouetur, pedetentim elementa abd ad elementa ah imminutione anguli bac; atque ista appropinquatio seu imminutio anguli quam elementum vnum in abd, dum mouetur, cum elemento altero in $a\beta h$ formant, tam diu continuari potest, donec elementum quoddam lineae abd in lineam ah totaliter incidat, et omnes similes prolongationes in abd et ah, ad puncta lineae abd iuxta ah conseruanda, susceptae, nihil amplius prosint. Quod autem in lineis curuis quae hic assumuntur, per motum, elementa ab a remota, cum elementis lineae ah reapse semper minores faciant angulos, in sequentibus vberius declarabitur.

XXXX.

Possibilitas, quomodo linea quaedam ad aliam continuo accedere possit, ita vt tamen nunquam concurrant, alia etiam ratione concipi potest. Posito ba fig. 16. attingat, recte prolongata, ac in m', hoc ipsum eadem illa, imo maiori etiam prolongatione, non efficietur, si prolongatio ista ita fiat, vt ab cum bb' in dextra parte concauum angulum constituant; scilicet consideratis ab et bb' vt meris elementis, linea abb' quae a dextris est concaua, curua erit. Angulus $b'bm$ propterea semper adhuc aeque acutus esse potest, ac ante $m'bm$ erat. Sumatur, lineam abb' ex b' in directione recta protractam, contigisse ac in m', hoc rursus fieri non potuerit, si directionem suam denuo ita mutat, vt ad dextram concaua maneat, velut e. g. versus b''. Ceterum et hic, siue prolongatio versus m'', siue versus b'' assumatur, angulus $m'b'm$ vel $m'b'b''$ acutus esse potest. Hinc omnino patet, quomodo prolongationes lineae cuiusdam, quae in directione recta fiunt, aliam lineam rectam contingant, et e contrario concursus semper impediatur, atque plane impossibilis reddatur, si prolongationes ita instituantur, vt linea non maneat recta, sed mutetur in curuam.

XLI.

Haec eo fine praevie obseruata sunt, vt pateat, lineam quandam ad aliam interdum accedere et denique cum illa concurrere posse, si sufficienter prolongetur; nonnunquam tamen prolongationem istam, licet tamdiu continuetur, quamdiu placet, reapse concursum non effecturam. Porro clarum est ex considerationibus hisce, quod discrimen istud in genere a *recto* et *curuo* pendeat. In sequentibus, quid ex rectitudine et curuatura sequatur, accuratius definietur ac XI Euclidis axiomati imprimis accommodabitur.

XLII.

Quandoquidem propositio: „Si in duas rectas lineas, recta incidens linea alternatim angulos aequales inter se, aut linea illa incidens externum angulum interno et opposito et ad easdem partes aequalem fecerit, aut internos ad easdem partes

duobus

duobus rectis aequales; parallelae erunt inter se ipsae rectae lineae.,, — Ad rigorem demonstrata est *), necesse est, vt aeque, si duae lineae parallelae adsint, quaelibet recta illas secans fig. 2. angulos alternos, aut internos et externos aequales formet, *modo demonstrari queat, per punctum* g *nullam aliam lineam, quam* ab, *cum* cd *parallelam esse posse.* Nam nisi $egb = ehd$ esset, posset in g alia, e. g. gl sub eodem angulo poni, qui par sit ghd et linea ista vi prius memoratae propositionis, parallela esse deberet cd. Si itaque per hypothesin praeter ab alia nulla per g cum cd parallela esse potest, cogitur, ab ipsam illam esse lineam, quae cum eg angulum $egb = ghd$ constituat.

XLIII.

Age sint lineae rectae ba et $\beta\alpha$ fig. 17. parallelae; nullum aliud *elementum lineae* in a collocari potuerit, quod $\beta\alpha$ pariter parallelum esset: nam sit am tale elementum, $\beta\alpha$ angulo $\beta\alpha g$ non mutato, ita in recta linea gd moueri potest, vt superius punctum m elementi am contingat, per consequens $\beta'\alpha'$ adhuc cum ba, sed non cum am parallela sit. Parallela nimirum manet $\beta'\alpha'$ cum ba, quia adhuc angulus $bag = \beta'\alpha'g$ est. Nec verendum est, vt per magnam hancce appropinquationem $\beta\alpha'$ cum ba plane coincidat. Separatae enim manent lineae, cum m extra ab situm sit, et simul in lineam $\alpha'\beta'$ cadat; et cum porro vna extremitas m, elementi am, extra ab, et altera a in ab, locata sit, oportet, $\alpha'\beta'$ non solum ab ab, sed etiam ab am diuersam esse. Si itaque tales tantummodo anguli alterni cogitantur, vbi latus, inter parallelas situm, *merum est elementum*, quoad rectas parallelas, quae iuxta se inuicem tam prope

*) Evcl. El. I. prop. XXVII. XXVIII.

prope iacent, vt ex linea, a qua ambae secantur, vnum solummodo elementum deprehendatur, inter eas facile iudicatu erit, ex supra allatis, angulum alternum alteri, et consequenter etiam externum interno opposito etc. ſemper esse aequalem.

XLIV.

Concipiatur fig. 18. ba esse parallelam $m\alpha$, et vnam alteri ita vicinam, vt a dextris ex ab nullum elementum per a transire queat, quin $\alpha\beta$ attingat et quod per consequens pariter parallelum cum $m\alpha$ esse possit; ponatur has duas parallelas a tertia recta ita scindi, vt non nisi elementum ma inter eas cadat, tum angulus $bam = am\alpha$ erit. (XLII. XLIII.)

XLV.

Age nunc demonstretur ipſum Euclidis axioma: Si in duas rectas lineas etc. (II.)

Demonſtratio: Sint illae §. II. memoratae rectae hic, fig. 19. ac et $\alpha\beta$, tertia incidens autem gd, et ſumatur interim caſus, quod ca perpendicularis ſuper gd et conſequenter $\alpha\beta g$ acutus sit, sic $\beta\alpha$, si angulo eodem manente, ſuper gd moueatur, in situm ab, plane ad sinistram iuxta ac venire potest. Collocetur porro $\alpha\beta$ angulo non mutato tam prope ad ac, vt ex ac nihil plus elemento am, refecetur et triangulum elementare ama' obtineatur. In hoc angulus $ama' = ham$ erit (XLIV.)

Imponatur $a'm$ triangulum $a'me$, vt $me = aa'$ et $a'e = am$ sit: tum angulus $a'me = aa'm$ fiet.

Assumatur etiam nunc in ab, $ah = a'm$ et ducatur hm; in ag pars $af = a'a$, ducaturque hf, sic obtinebuntur quatuor triangula: fha; ahm; ama'; $a'me$, quae omnia inter ſe ſunt aequalia.

qualia. In duobus hoc modo enatis parallelogrammis $fhma$ et $amed'$, am vtrique commune, et ſumma angulorum ex m, ſcilicet $hma + ama' + d'me =$ est ſummae angulorum ex a, nimirum $fah + ham + maa'$. Cum vero per hypoth. faa' recta ſit, etiam hme rectam esse oportebit. (XXVIII.)

Collocentur porro duo parallelogrammata $hmaf$ et $amea'$ iuxta ſe inuicem ſupra lineam he, et vnum illorum ad dextram iuxta $a'e$; tunc orientur in figura anguli $b'mn + nme + ema' = haf + ham + maa'$, qua ratione $a'mb'$ erit recta. Porro anguli $amh + hmb + b'mn = nme + ema' + ama'$; ergo etiam amn recta, quae cum integra recta ac congruet.

Nunc concipiatur, parallelogrammum $hfam$ ad locum $amea'$ et cum illo ha ad locum $a'm$ promotum atque mb' in rectum protractum esse; sic angulus $b'mn = ham$, conſequenter prolongatio $b'm$ in rectum, ratione ac eundem plane ſeruat ſitum quem ante ha ad hancce ac tenebat. Si parallelogrammum $b'fa'k$ vltra motum verſus d vſque ad $b'd'$ in ſitum $ned'a$ veniat et prolongatio $d'b$, quae iam $d''n$ est, pari ratione continuetur; quodlibet nouum mb' iterum angulum priorem ham cum ac faciet, nec ideo metuendum erit, quod aliquando talis prolongatio tota in ac caſura, vel plane ad dextram iuxta illam ventura ſit et res, de qua (XXXVIII.) actum, accidat. Hic enim ne appropinquatio quidem oritur. Interim apparebit infra, etiam appropinquationem esse poſſibilem, quin tamen aliquando totalis concurſus conſequatur.

Diſtantia ad' appelletur *paſſus*; ſic ah post primum paſſum verſus d, in loco $a'm$ ſita erit, ibique etiam ac ſecabit. Prolongationibus in linea recta, ſeu additamentis vti mb' et nn factis, passus, priori *aequalis* $a'a''$ repeti potest, et linea $a''n$ nunc quoque ac ſub angulo eodem ac antea, ſcindet.

Si vero distantia $a\alpha$ finita est, vt hic ſumitur, necesse est, vt etiam certa definitaque multitudo passuum semper α attingere valeat. Quodsi igitur ante quemlibet nouum gressum, prius additamentum $a''n$ ſupra memorato modo repetatur, clarum est, prolongatam $a''n$ nunquam ab ac recessuram et illam tunc quoque ſecturam, cum ad α pertingat.

XLVI.

Si ambo interni anguli $ca\alpha$ et $\beta\alpha a$ fig. 20. acuti ſunt, vtriusque angulus contiguus obtuſus est. Quodsi igitur $a\beta$ ſuper dg eodem angulo manente moueatur, donec α ad a perueniat, angulus obtuſus βad acutum cad includet, et per conſequens $\beta\alpha$ tota iuxta ac a sinistris sita erit. Simulac haec ita ſe habent, contemplationes et argumenta (XLV.) etiam ad caſum istum applicari possunt, nam ibi nihil ex illo concluſum est, quod parallelogramma e. g. $hfam$ etc. rectangula erant.

XLVII.

Quodsi vnus duorum angulorum, veſut $ca\alpha$ fig. 21. obtuſus et $\beta\alpha a$ acutus est, ceterum ſemper adhuc $ca\alpha + a\alpha\beta > 2$ R, demonstrari potest, quod tum $\beta\alpha d > ca\alpha$ sit; etenim $gac + ca\alpha + b\alpha a + b\alpha d = 4$ R, et per hypoth. $ca\alpha + b\alpha a < 2$ R; conſequenter $gac + b\alpha d > 2$ R; ſed $gac + ca\alpha = 2$ R; ergo $gac + b\alpha d > gac + ca\alpha$, hinc $b\alpha d > ca\alpha$. Demonstratio itaque (XLV.) etiam ad hunc caſum transferri potest. Praeter hos tres autem, nullus datur quartus, cum duo obtusi, vel duo recti anguli < 2 R esse nequeant.

XLVIII.

Quum itaque in linea recta fig. 16. primum eius elementum ba cum recta quadam certum angulum v. g. gab fecit, elementum eius ſecundum bb' cum alia recta mb, parallela ga, plane eundem angulum formabit; vt nempe $gab = mbm'$ etc. fiat. Curuae e contrario $abb'b''$ plane alia ratio est, ibi ſequentes angulos ſemper maiores vel minores praecedentibus esse oportet, si lineae rectae mb, $m'b'$ pariter cum ga parallelae ſunt (XXII.). Si ergo successiue vsque ad magnitudinem illius anguli creſcant, quem ca cum ga gignit, prolongationes inter mouendum (XLV.) in lineam ac cadent et vlteriori motu tandem plane ab illa recedent. Vnde clarum est, cur de lineis quarum vna recta, altera curua est, non vniuerſaliter, prout de ambabus rectis, affirmare liceat, quod ſufficienter protractae, mutuo ſeſe ſcindere deberent, etiamsi elementum primum curuae cum recta ga angulum efformasset, qui cum angulo caa coniunctim $\lessdot$ 2 R facit.

XLIX.

Hocce obstitit hucdum, quo minus propositio Euclidis, axiomatis loco haberetur. Experientia docuit dari lineas, quae cum tertia ſemper angulos $\lessdot$ 2 R constituerent, et tamen in infinitum protractae non concurrerent, vt e. g. curuae, quae aſymptotis ſunt instructae. Hinc necesse fuit, propositionem istam ad ſolas rectas restringere, prout ipſe Euclides iam fecerat; nihilo tamen minus quaeri adhuc poterit, quae sit ratio, ob quam rectae id praestare non possent, quod curuae ſaepe praestant, et quodnam sit signum characteristicum rectarum et curuarum, ex quo diuerſae illae conclusiones reſultent?

Equidem existimo, me in praecedentibus, imprimis §. XLVIII. quaestioni huic abunde satisfecisse.

L.

Sed vix inutile futurum credo, methodo hucdum obseruata inuestigare, quid per hanc vel illam lineam curuam, sub hypothesi, quam propositio Euclidis praesupponit efficiant, non effici queat; ad hunc finem algebraicas, vnam sine, alteram cum asymptota, elegi. Prima esto Parabola.

LI.

Sint ergo fig. 22. ab; bb'; $b'b''$, elementa Parabolae, vbi angulus bag continuo quidem crescet, sed rectus nunquam fiet. Si iam vt in (XLV.) ca super gd perpendicularis assumatur, vnum laterum memorati anguli semper erit diagonalis et alterum, latus rectanguli e. g. $a'bba$. Angulus ergo bab; $b'bn$ etc. nunquam o euadet, hinc $b'b''$ etc. inter mouendum nunquam ac teget. Contemplationi (XLV.) conuenienter, transitu primi elementi ba per ca simul primus passus ex a versus β fiat. Punctum b sit nunc in m et am nominetur *gradus*. Quodsi am tribus gradibus, et βm vno elemento parabolico augeatur, secundus priori aequalis passus fieri potuerit, quia $aa' = a'a''$ praesupponitur. Passu hoc secundo peracto, finis elementi secundi parabolae in ac iacet. Si an porro quinque gradibus prolongetur et parabola denuo vno elemento $b'b''$, iterum passus vnus perficietur et finis tertii elementi parabolae ad ac perueniet etc. Nunc illo, quod hic ex demonstratione (XLV.) applicari potest, in auxilium sumto, patet, lineam parabolicam cuius axis cum ac parallelus est, ac semper scissuram, modo do vtraque ſatis prolongetur. Ceterum intelligitur quod prolongationes lineae curuae, reſpectu earum, quae in recta neceſſariae erant, *accelerato* quasi motu fieri debeant, quod etiam rei naturae conſentaneum eſt, cum parabola prolongatione per ſuas, ſemper altius aſcendentes directiones, concurſum cum ac velut vitare, vel minimum illum retardare, intendit.

LII.

Has ipſas contemplationes nunc ad curuam aſymptota inſtructam transferre, et eo fine Logiſticam eligere liceat, quae fig. 23. ad geometricam progreſſionem, 1, 2, 4 etc, delineata eſt. Si aſymptota inter eam et ac ſita ſit, iam per ſe patet, nec non methodo demonſtrationis (XLV) euinci poteſt, quod omni poſſibili prolongatione ac ab illa nunquam contingi queat. Sit nempe $\alpha b b'$--- iſta curua et $B''C''$ illius aſymptota, diſtantia etiam eiuſdem, ex a, minor quam $a\alpha$. Collocetur integra ad ſiniſtram iuxta ac, vt α tegat a. Paſſus primus ponatur $= \frac{1}{2} aB = a\beta$, quia illius ope finis elementi primi, cum ac congruet. Si paſſum alterum plane eiuſdem magnitudinis facere lubet, euidens eſt, infinitam multitudinem additamentorum in ac, quorum quodlibet $= am$ et aeque ita infinitum numerum elementorum Logiſticae $= bb' + b'b' + b''b'''$ etc. deſiderari ad punctum B ad a, vel $B'C'$ ad ac proferendum. Priusquam itaque conditio haec expleatur, quod tamen propter ſeriem infinitam poſſibile non eſt, mirum etiam non erit, ſi abb' ab ac recedat, dum *paſſus integer* perficitur. Si ergo additamenta ante motum reipſa fieri poſſint, paſſum hunc ſecundum ſ ccesiue i. e. minutis partibus facere oportet. Per quamlibet huiuſcemodi partem, vnum am in ac et vnum bb'--- in ab'--- adii-

adiicietur; ſed hinc porro patet, tam exiguos greſſus *infinite multos* neceſſarios eſſe, ad conſtituendum *unicum magnum*, primo aequalem.

Si itaque α non eſt propius ad a quam diſtantia duorum eiusmodi paſſuum facit, haud aliter etiam contingetur, quam ſi curua ſimul ab ac diuellatur; vnde cogitur, illam ac omnibus finitis, quantumcunque iteratis prolongationibus, non ſciſſuram eſſe.

LIII.

Si contra ea aſymptota in figura ad ſiniſtram iuxta ac et curua ab--- ad dextram iuxta eandem ſitae ſunt et diſtantia $B\alpha$ numero deſignari poteſt finito, etiam additamenta neceſſaria, vt abb' indiuiſa ab ac, tantum per ipſam ac moueatur, quantum requiritur, vt iterum ad punctum α redeat, quoad numerum et magnitudinem exprimi poſſunt. Nam ſi $B\alpha$ plus faciat quam differentia duorum immediate ſe ſubſequentium membrorum progreſſionis geometricae, ad cuius normam curua delineata eſt, motum ad extremum membrum a ſiniſtris inter quod et eius proximum, diſtantia incidit, continuare licebit. Sin autem haec differentia minor ſit diſtantia inter $\frac{1}{2^\infty}$ ſeu o et primum membrum, tum illa erit fractio pura atque ſic noſci poteſt inter quae membra nouae progreſſionis: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} -- \frac{1}{2^\infty}$ incidat, et, vt antea, magnitudo ac numerus neceſſariorum additamentorum, inueniri poteſt. His conditionibus tandem et in hac linea aſymptotica concurſus cum ac poſſibilis erit. Additamenta in ac ſemper eadem manebunt magnitudine, ad bb' autem neceſſaria, continuo imminuuntur; hoc vltimum vero, quod bene notandum, non de integris paſſibus, ſed tantummodo de partibus illorum de-

descrescentibus valet; alias hoc obseruationi in fine (LI.) factae, repugnaret.

LIV.

In Parabola sub conditionibus (XLV.) semper concursus vtriusque lineae locum habuit, quia angulus *bam* fig. 23. nunquam o fieri potuit. In Logistica quidem ostendi nequit, angulum hunc aliquando o futurum, exinde tamen non sequitur fore, vt iam semper concursus linearum possibilis sit: solummodo tum consequentia haec legitima erit, cum asymptota remotior ab *α* super *gd* stabit, quam *ac*. Quodsi autem distantia ista minor sit, quam distantia inter *ac* et *α*, concursus locum non habebit, vel potius, demonstrari nequit, illum esse necessarium; siquidem tot passus, quot quis vellet, libere perfici nequeunt; vt nimirum (LII.) integer passus secundus fiat, oportet prius aliquid infiniti quoad numerum fieri, hacque ratione passus ille secundus in infinitum retardabitur. Potest quidem contemplatio ista ita adornari, vt reipsa gressus hicce factu possibilis videatur: sed tum (XLV.) requisitae conditiones ad secandum non explebuntur, ergo neque hoc modo passus sperari potest. In linea recta tanti poterant passus peragi, quanto quis voluit, et nullius sequentis conditio, quam antecedentis, difficilius implenda erat. In Parabola etiam multitudo gressuum pro lubitu perfici potuit, neque difficultas, quae quidem cum sequentibus passibus continuo crescebat, impediuit, quo minus hi essent possibiles.

LV.

Exemplum, vbi concursus, plane locum non habet, quia prolongationibus tandem aliquando *bam* = o euadet, praebet nobis

nobis circulus fig. 24. in quo tamen etiam discrimen inter veram sectionem et nudum concursum faciendum est. Tres nimirum casus in eodem occurrunt 1. *ac* post quantascunque prolongationes plane non secabitur, si distantia eius, maior radio est. 2. *ac* tum solummodo contingetur, cum distantia radio aequalis fuerit; hic semel vnum circuli elementum, modo necessaria prolongatio adsit. totum in *ac* cadet et saepius memoratus angulus huius elementi cum *ac*, $=0$ fiet. 3. scindetur *ac* si distantia minor sit radio.

LVI.

Similes contemplationes quoad reliquas, etiam curuas adiungere, partim spatium, partim consilium dissertationis huius non permittunt; sufficiat itaque, quasdam tantum vniuersales obseruationes adiecisse.

LVII.

Longa basis in triangulis rectilineis nunquam haecce triangula impossibilia reddit, dummodo basis ista longa, finita adhuc maneat, ut scilicet finito elementorum lineae rectae numero metiri queat. Pariter nec in curuis impossibilitas haecce prius apparet, quam si asymptotis, vel aliquo *ac* respiciente puncto flexus contrarii vel conuersionis, prout v. g. circulus (LV.) sint instructae, et distantia lineae *ac* plus efficiat, quam distantia asymptotae aut puncti conuersionis, ab α, fig. 23. 24. possibilitas tandem aliquando subsecuturi concursus dubia est, si curuarum, quae asymptotis destituuntur, axis parallelus cum *ac* non procedat, sed ab eadem deflectat. In tali rerum statu curua conuersionis punctum versus *ac*, adipiscetur, atque haec posterior aut in perpetuum a curua remota manere, aut

ali-

aliquando illius tangens fieri potest. In cafu posteriori triangulum possibile quidem adhuc, fed simul terminus possibilium erit.

Parabolae quarum axis *ac* parallela. aut verfus illam inclinata est, si ad sinistram iuxta *ac* iacent, nuda prolongatione, aeque nulla fui puncta verfus dextram proferent; sin vero dextrorfum mouentur passibus vniformibus, prolongationes accelerando fieri oportebit si femper puncta illarum, a sinistris vel in *ac* ipfa manere debent. Afymptoticae lineae quae sinistrorfum iuxta *ac* positae sitae, si axis illarum cum *ac* parallelus est, fola protractione, nulla puncta verfus dextram promouebunt, igiturque hoc refpectu cum rectis et parabolicis conueniunt; fuccessiuo ex opposito motu omnia fua puncta, quantumcunque continuetur et acceleretur prolongatio dextram verfus ad *ac* deferri possunt, quod etiam femper fit, dum afymptota illarum in *ac* cadere incipit. Hac ex parte cum lineis, quibus puncta conuersionis funt, conueniunt. Si afymptota earundem angulum acutum in *gd* verfus *g* format, parabolicis, quarum axis cum *ac* parallelus currit, habita ratione relictionis punctorum in parte sinistra *ac*, vel continui concurfus cum hac linea, aequiparantur; tum fcilicet afymptota femper *ac* fecat; Si igitur fig. 25. cum hacce afymptota βc parallela $\beta\gamma$ ducatur, trans punctum *a*, et $\beta\gamma$ ista femper *ac* fcindet, confequenter etiam inter vtramque parallelam sita curua, *ac* in euitabiliter fecet, minimum cum illa concurrat, necesse est. Lineae tandem conuersionis punctis instructae, fola prolongatione, ita vt eas loco moueri opus non sit, si initio totae ad laeuam sitae erant, fua puncta verfus dextram proferunt, in cafu, quo punctum conuersionis illarum in *gd* proiectum non tanto ab *a* distat, quantum longitudo illarum axis facit; hac ratione ab omnibus hacdum enumeratis discriminantur. Si ad haec mutatio loci accesserit, reliqua quoque omnia ad sinistram sita puncta dextrorsum proferri potuerint, quod fit quamprimum illarum conuersionis punctum in *ac* aderit. Hoc respectu illis asymptoticis aequipollent, quarum asymptota *ac* parallela mouetur, Quod prolongatae *ac* nec secare, nec plane intactam relinquere, sed nonnisi attingere valeant, est singularis illis prae cunctis memoratis, propria qualitas.

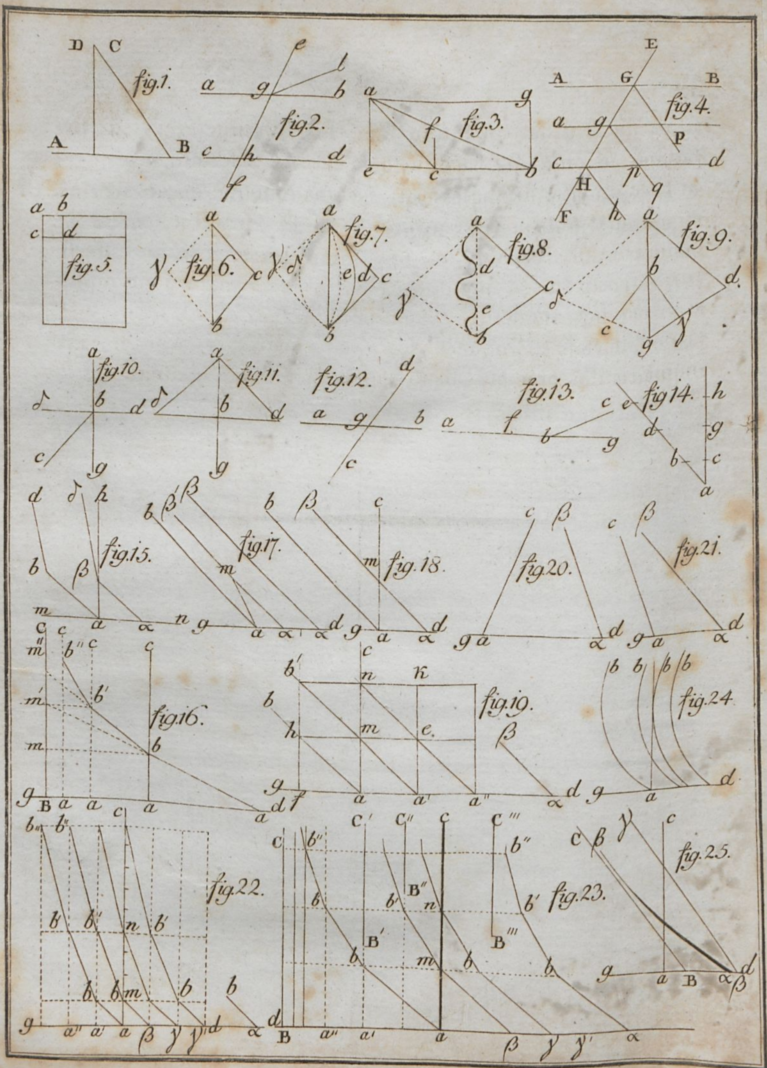
fig.1.
fig.2.
fig.3.
fig.4.
fig.5.
fig.6.
fig.7.
fig.8.
fig.9.
fig.10.
fig.11.
fig.12.
fig.13.
fig.14.
fig.15.
fig.16.
fig.17.
fig.18.
fig.19.
fig.20.
fig.21.
fig.22.
fig.23.
fig.24.
fig.25.

THESES.

I. In axiomatum numero illa tantum cenſenda ſunt, quae ex definitione deduci possunt, atque sic demonstrationem, licet simplicissimam, admittunt.

II. Theoremata ab axiomatibus tantum illo differunt, quod priorum demonstratio ex iam demonstratis propositionibus, posteriorum vero ex meris notionibus petitur.

III. In geometria puncta ab elementis ſollicite ſunt distinguenda.

IV. Si in definienda quantitate geometrica elementa menſurae loco assumantur, nulla hic, vt in arithmetica, dabuntur quanta incommenſurabilia.

V. Erecta in retina inuerſe formatorum obiectorum visio, non nisi ab angulo illo dependet, ſub quo radius lucis a qualibet obiecti parte retinam ferit.

VI. Diſplosio lacrymarum vitrearum, fracta illarum cauda, non ab incluſo aere deriuanda est, ſed a singulari illis propria compositione vel crystalliſatione partium, vi cuius aduerſus se inuicem intentae ſunt.

VII. Disruptionis vaſorum, in quibus aqua gelu est durata, caussa non est aer incluſus, ſed potius particularum aquearum crystalliſatio, quae efficit, vt maius ſpatium occupent iam, quam antea.

16

DISSERTATIO MATHEMATICA EXHIBENS TENTAMEN EX NOTIONE LINEAE RECTAE DISTINCTA ET COMPLETA AXIOMATIS XI EVCLIDIS VERITATEM DEMONSTRANDI.

QVAM

RECTORE ACADEMIAE MAGNIFICENTISSIMO

SERENISSIMO PRINCIPE AC DOMINO

DOMINO

CAROLO AVGVSTO

DVCE SAXONIAE IVLIACI CLIVIAE MONTIVM ANGARIAE ET GVESTPHALIAE, LANDGRAVIO THVRINGIAE REL.

PRO LOCO

IN AMPLISSIMO PHILOSOPHORVM ORDINE RITE OBTINENDO

PVBLICE DEFENDET

A. D. XXV. SEPTEMBRIS CIↃ IↃ CC LXXXVIIII.

IOANNES HENRICVS VOIGT

PHILOS. D. MATHESEOS P. P. O. ACAD. IENENS. ET REG. SOC. SCIENTIAR. GOTTINGENS. CORRESP.

ASSVMTO SOCIO

ANDREA KRALOWANSKY

HVNGARO.

15

IENAE

TYPIS GOEPFERDTII.