6. 4

DISPVTATIO MATHEMATICA
DE

TRIANGVLO RECTANGVLO AEQVICRVRO,

QVAM,

B. C. D.

AMPLISSIMO PHILOSOPHORVM IN ILLVSTRI GRYPHICA ACADEMIA ORDINE BENIGNE PERMITTENTE,

A. R. S. MDCCXXXVIIII. DIE VIIII. MARTII,

H. L. Q. C.

PVBLICO ERVDITORVM EXAMINI
SVBIICIENT

PRAESES

M. CHRISTIAN WILHELM CONRADI,

STOCKHOLMIENSIS

&

RESPONDENS

LVDOVICVS AVGVSTVS WVRFFEL,

GRYPH: POMER:

GRYPHISWALDIÆ,

STANNO HöPFNERIANO.

ILLVSTRIS
ACADEMIAE GRYPHICAE
MAGNIFICO
DOMINO RECTORI,
CETERISQVE,
SPLENDIDISSIMVM HOC APOLLINIS SACRARIVM
INSIGNIBVS SVIS MERITIS ORNANTIBVS PROMOVENTIBVSQVE,
DOMINIS PROFESSORIBVS,
MAGNIFICIS, MAXIME VENERANDIS, CONSVLTISSIMIS, EXPERIENTISSIMIS, EXCELLENTISSIMIS, AMPLISSIMIS,
DOMINIS, PATRONIS AC PRAECEPTORIBVS,
AETERNO OBSEQVIO COLENDIS,
HOC SPECIMEN MATHEMATICVM
SACRVM FACIT,
SE STVDIAQVE SVA
HVMILLIME
COMMENDATVRVS,

L. A. Würffel.

DE TRIANGVLO RECTANGVLO AEQVICRVRO DISSERTATIO.

DEFINITIO I.

§. I. Longitudo, latitudine & profunditate carens, *Linea* dicitur.

SCHOLION.

§. II. *Alii etiam fluxionem puncti lineam dicunt;*

COROLLARIVM.

§. III. Concipitur itaque linea in mente. Licet enim subtilissima pingatur, attamen, nisi nudis oculis, armatis saltem, cernitur latitudine gaudens.

Definitio II.

§. IIII. Linea, cuius omnia ad eandem plagam tendunt puncta, *recta* dicitur, cuius puncta ad diuersam, *curua* audit.

Definitio III.

§. V. Inclinatio duarum linearum in vno puncto concurrentium, *angulus* dicitur.

Hypothesis.

§. VI. *Mensura angulorum Geometris est arcus, ex vertice, radio arbitrario, intra crura eius descriptus.* Wolffii *Elem. Geometr.* §. 57.

Definitio IV.

§. VII. *Angulus rectus* est, cuius mensura est quadrans.

Scholion.

§. VIII. Wolffio *angulus rectus dicitur, cui deinceps positus est aequalis. Est autem perinde, quam recipere velis definitionem. Idem plane notant.*

Definitio V.

§. VIIII. Angulus, cuius mensura quadrante maior, dicitur *obtusus*, cuius mensura quadrante minor, *acutus*.

Axioma I.

§. X. *Duae rectae spatium non includunt.*

Definitio VI.

§. XI. Figura tribus terminata lineis, *triangulum* dicitur.

Defini-

Definitio VII.

§. XII. *Linea perpendicularis* dicitur, quae cum alia linea efficit angulum rectum.

Definitio VIII.

§. XIII. *Triangulum rectilineum* est, quod tribus rectis terminatur; *sphaericum*, quod tribus curuis.

Scholion.

§. XIV. *Nobis h. l. sermo est de triangulis rectilineis.*

Definitio VIIII.

§. XV. *Area trianguli* dicitur planum, tribus lineis terminatum.

Definitio X.

§. XVI. *Perimeter* longitudo est, quae planum determinat.

Scholion.

§. XVII. *In casu speciali ad triangulum perimeter est summa linearum, quae trianguli aream includunt.*

Definitio XI.

§. XVIII. *Altitudo trianguli* est perpendiculum, ex figurae apice in basin demissum.

Definitio XII.

§. XVIIII. *Triangulum rectangulum* dicitur, quod angulo gaudet recto, [§. VII.] *obtusangulum*, cui angulus est obtusus, [§. VIIII.] *acutangulum*, cuius anguli omnes acuti. [§. VIIII.]

Definitio XIII.

§. XX. *Triangulum aequilaterum* tribus lateribus gaudet aequalibus, *aequicrurum*, quod & *Isosceles*, duabus rectis gaudet aequalibus. Cui autem nulla alteri aequalis, *scalenum* vocatur,

Definitio XIV.

§. XXI. In triangulo rectangulo latera angulum rectum includentia *catheti* dicuntur; linea, angulo recto opposita, *hypothenusa*.

Definitio XV.

§. XXII. *Diagonalis* est linea, ex vertice anguli vnius in verticem alterius oppositi ducta. Wolffius *Elem: Geometr:* §. 111.

Definitio XVI.

§. XXIII. Lineae semper aequidistantes dicuntur *parallelae*.

Definitio XVII.

§. XXIIII. *Geometrice proportionales* dicuntur quantitates; si a: b: c: vel si a: b = c: d. I: E: quantitas prima aeque est multiplex vel submultiplex secundae ac secunda tertiae: vel quantitas prima aeque multiplex vel submultiplex est secundae, ac tertia quartae. In priori casu vocatur continua proportio, vel progressio geometrica continua.

Scholion.

§. XXV. *Symptomata proportionis geometricae continuae suppeditat* Wolffius *Elementor. Analys.* §. 118. *sq.*

Axioma II.

§. XXVI. *Sectio plani est linea, lineae vero punctum.*

Definitio XVIII.

§. XXVII. *Sectionem trianguli regularem* dico, si linea secans concipi potest parallela, aut perpendicularis alicui laterum.

Axioma III.

§. XXVIII. *Duae lineae eadem inclinatione secantes tertiam; aequales efficiunt angulos.*

Corol-

Corollarium I.

§. XXVIIII. Angulorum, qui aequali linearum in tertiam inclinatione prodeunt, mensura est æqualis. (§. VI.)

Corollarium II.

§. XXX. Parallelae in eandem incidentes rectam, angulos efficiunt aequales.

Corollarium III.

§. XXXI. Omnes anguli recti sunt aequales. (§. VII. XXVIIII.)

Corollarium IIII.

§. XXXII. Anguli ad basin in triangulo aequicruro sunt aequales.

Lemma I.

§. XXXIII. *Anguli trianguli cuiusuis simul sumti, circuli dimidium exaequant.*

Lemma II.

§. XXXIIII. *Quadratum hypothenusae est aequale quadratis cathetum.*

Lemma III.

§. XXXV. *Perpendicularis ex △ rectanguli angulo recto in hypotenusam demissa efficit triangulum toti similem & latera homologa proportionalia.*

Lemma IIII.

§. XXXVI. *Perpendicularis ex apice trianguli aequicruri demissa in basin, triangulum in duas partes secat aequales.*

Lemma V.

§. XXXVII. *Anguli dimidio circuli inscripti mensura est quadrans.*

Lemma VI.

§. XXXVIII. *Parallelogramma quibus aequalis est altitudo ac basis, sunt aequalia. Eadem est & triangulorum ratio.*

Lemma VII.

§. XXXVIIII. *Recta secans parallelas, angulos alternos & angulum internum externo reddit aequalem.*

Axioma IIII.

§. XL. *Apex trianguli aequicruri aequidistat ab vtroque baseos extremo.*

Fig. I.

Definitio XVIIII.

§. XLI. *Triangulum rectangulum aequicrurum* est, cuius basis AC est hypothenusa anguli recti B, & catheti AB, & BC sibi sunt aequales.

Theorema I.

§. XLII. *In triangulo rectangulo aequicruro angulorum ad basin mensura est semiquadrans.*

Demonstratio.

Omnes anguli trianguli cuiusuis exaequant dimidium circuli. (§. XXXIII.). Est autem angulus ad apicem quadrans. Proinde mensuram quadrantis habet summa angulorum ad basin. Sunt autem anguli ad basin in triangulo aequicruro aequales. (§. XXXII.) E. quilibet horum angulorum gaudet mensura quadrantis dimidii. Q. E. D.

Scholion.

§. XLIII. *Secundum hactenus receptam circuli diuisionem in gradus 360, erit angulus ad verticem h. l. 90°. atque alter angulorum ad Basin* $90^{\circ}:2 = 45^{\circ}$.

Corollarium.

§. XLIIII. Est itaque trianguli aequicruri rectanguli angulus ad verticem aequalis summae angulorum ad basin.

Axioma V.

§. XLV. *Omnia triangula rectangula aequicrura sunt similia.*

Theo-

Theorema II.

§. XLVI. *Super eandem hypothenusam vnicum tantummodo construi potest triangulum rectangulum aequicrurum.*

Demonstratio.

Sit Hypothenusa AC, cathetos necessario se tangere oportet in peripheria semicirculi A B e C. (§.XXXVII.) E. nec infra peripheriam, v. g. in d, esset enim hic angulus obtusus; nec supra peripheriam, v. g. in J, iste enim angulus esset acutus. E. tantummodo se tangunt catheti in puncto quodam peripheriæ semicirculi. Jam dico, triangulum rectangulum æquicrurum alias non posse habere cathetos, quam in B se tangentes. Sunt enim A B & BC æquales. (§. XLI.) Adeoque & arcus AB & BC æquales. Ponatur autem e punctum concursus cathetum, vel aliud præter B, erit cathetus vna longior altera. Quod quoniam problematis conditio non patitur: erit adeo B punctum concursus cathetum æqualium; iam, quoniam catheti in vnico tantummodo concurrere possunt puncto, vnicum modo datæ hypothenusæ superstrui potest triangulum rectangulum æquicrurum. Q. E. D. Fig. XVII.

Scholion.

§. XLVII. Non obstat, quod in altera parte circuli æquales exstruere possim cathetos, quo minus theorema præcedens asseram. Mutatur enim h. l. modo plaga, ipsum vero triangulum idem manet.

Corollarium I.

§. XLVIII. Omnia itaque triangula, æqualibus inscripta hypothenusis, rectangula æquicrura sunt æqualia.

Corollarium II.

§. XLIX. Atque triangula, quorum catheti æquales, gaudebunt hypothenuſa æquali, & inuicem erunt æqualia.

Theorema III.

§. L. *Triangulum rectangulum aequicrurum eſt aequale dimidio quadrati, cuius diagonalis eſt hypothenuſa trianguli.*

Demonstratio.

Fig. IV. Quoniam latera & anguli quadrati ſunt æqualia, erit AB = BC = AD = CD, & AC = AC: proinde △ ABC = △ ADC. (§. XLVI.) E. △ ABC = $\frac{\square ABCD}{2}$. Porro quoniam AB = BC = AD = CD, erit △ ABC æquicrurum. Eſt autem B angulus rectus. Proinde △ ABC triangulum rectangulum æquicrurum. AC autem eſt diagonalis quadrati ABCD; (§. XXII.) atque quoniam angulo recto B oppoſita eſt, hypothenuſa △ ABC. E. triangulum rectangulum æquicrurum eſt æquale dimidio quadrati, cuius diagonalis æqualis hypothenuſæ ipſius trianguli. Q. E. D.

Corollarium I.

§. LI. Sunt itaque triangula rectangula æquicrura æqualia dimidiis quadratorum, quorum latera æqualia cathetis.

Corollarium II.

§. LII. Eſt quadratum hypothenuſæ = quadratis cathetum, (§. XXXIV.) atque catheti ſunt æquales per conſtructionem; E. $AC^2 = 2 AB^2$. △ ABC autem æquale

æquale eſt $\frac{1}{2}$ AB^2 E. etiam $= \frac{AC^2}{4}$. i. e. triangulum rectangulum æquicrurum æquale eſt quartæ parti quadrati hypothenuſæ ſuæ.

Corollarium III.

§. LIII. Quoniam $AB = BC$ &c. et B angulus rectus erit $x = o$ (§. XXXII.) $= \frac{1}{2} B$. Porro quoniam $A = B = C = D$, erit $o = u$ & $x = y$, & $o + u = u + y = x + y = x + o = A = B = C = D$. $AcD + y = u + o + x$, & $D + B = 4x = 4o = 4y = 4u$ &c.

Theorema IV.

§. LIV. *Triangulum rectangulum aequicrurum ex apice perpendiculariter ſectum in duo diuiditur triangula rectangula aequicrura aequalia.*

Demonstratio.

Linea perpendicularis BD angulos *m* & *n* conſtituit rectos. (§. VIII.) Eſt itaque $m = n$, & quoniam rectus eſt, erit $m = B$. $C = A$ (§. XXXII.) $= \frac{1}{2} B = \frac{1}{2} m$: (§. XLII. XLIV.) $o = 2m - m - \frac{1}{2} m = \frac{1}{2} m = A$. Proinde $AD = DB$. E. △ ADB triangulum rectangulum æquicrurum. Eſt autem $m = n$, $C = A$, proinde $u = o = C$, $BD = BD$ & $BC = AB$. E. $DC = AD = BD$. E. △△ ABD & BCD triangula rectangula æquicrura. Q. E. D. Fig. I.

Aliter.

Si triangulum rectangulum ABC perpendiculariter ex apice ſecatur, erit △ ADB ∽ △ ABC. (§. XXXV.) Ac triangulum æquicrurum perpendiculariter ex apice ſectum in duas partes diuiditur æquales. (§. XXXVI.)

Proinde triangulum æquicrurum rectangulum ex apice perpendiculariter sectum in duo diuiditur triangula rectangula æqualia. Q. E. D.

Corollarivm I.

§. LV. Est itaque perpendiculum *BD* trianguli rectanguli æquicruri æquale dimidiæ hypothenusæ.

Corollarivm II.

§. LVI. Alterum triangulorum ex perpendiculari sectione ortorum æquale est dimidio trianguli totius.

Corollarivm III.

Fig. II. §. LVII. Quoniam LO = ON = OM, (§. LV.) poterit ex O describi semicirculus, per puncta, L, M, N, transiens. (§. XXXVII.)

Theorema V.

Fig. I. §. LVIII. *Hypothenusa trianguli rectanguli aequicruri simpli est cathetus dupli. Atque cathetus trianguli rectanguli aequicruri simpli est dimidia hypothenusa dupli.*

Demonstratio.

Sit triangulum rectangulum æquicrurum simplum ABD, erit ABD + BCD, quoniam BCD = ABD, (§. LIV.) = ABC = 2 ABD = 2 BCD. (§ LIV.) Hypothenusa trianguli simpli ABD = BCD est AB = BC. (§ XXI.) Porro BD = AD = DC. (§. LV.) Quoniam B per constructionem angulus rectus: quoniam m rectus & $A = \frac{1}{2} m$, erit $o = \frac{1}{2} m = A : B = m$, $o = \frac{1}{2} m = \frac{1}{2} B$, & $B - o = \frac{1}{2} B = u$. E. u = o. C = A per constructionem. BD = BD, BC = AB. E. DC = AD, & AD = BD, BD = DC. Sunt

itaque

itaque △△ ABD & BCD æqualia. Eſt itaque △ ABC $=2$ △ ABD $=2$ △ BCD. Quoniam *B* angulus rectus, erunt AB = BC catheti △ ABC. Sunt autem eædem lineæ hypothenuſæ angulorum m & n. Proinde Hypothenuſa trianguli rectanguli æquicruri ſimpli eſt cathetus dupli. Quod erat prius.

Eſt porro per demonſtrata AD = DC. E. AD = $\frac{1}{2}$ AC: ac, quoniam DB = DC, erit DB = $\frac{1}{2}$ AC: AD autem = DC = BD ſunt catheti triangulorum ABD & BCD: ac, quia AC hypothenuſa trianguli ABC, erit AD dimidia eiusdem hypothenuſa. Quod erat poſterius.

Corollarium I.

§. LIX. In triangulo rectangulo æquicruro dupli duplo, i. e. quadruplo erit hypothenuſa æqualis duplo catheto dupli, ſ. quod idem eſt, duplæ hupothenuſæ ſimpli. Ac proinde catheti quadrupli erunt æquales cathetis duplis ſimpli.

Scholion.

§. LX. Sit v. g. triangulum ſimplum BDA, erit duplum *EBA*, (§. LIV.) & *CEA* duplum dupli, i. e. quadruplum ipſius *BDA*. Eſt autem *BD* = *AD* = $\frac{1}{2}$ *AE*. (§. LVIII.) Proinde cathetus dimidia quadrupli eſt cathetus ſimpli. Fig. III.

Corollarium II.

§. LXI. Triangulum rectangulum æquicrurum æquale eſt quadrato, cuius diagonalis = catheto alteri. (§. L.)

Corollarium III.

§. LXII. Summa cathetorum trianguli rectanguli æquicruri ſimpli eſt æqualis hypothenuſæ dupli.

Theorema VI.

Fig. V. §. LXIII. *Si extra apicem trianguli rectanguli aequicruri, perpendiculo basi immisso, fiat sectio, triangulum exinde ortum erit rectangulum aequicrurum, & tam dimidio quam toti triangulo simile.*

Demonstratio.

Sit trianguli EFG, perpendiculum ex apice FH: atque perpendiculum extra apicem, JK. Quoniam ad K angulus rectus, erit JK parallela FH, (§. XXX.) Ergo J = y (§. XXXIX.) Proinde GK : KJ = GH : HF. Quoniam GH = HF, (§. LIX.) erit GK = KJ. Atque △ GKJ triangulum rectangulum æquicrurum. Quod erat prius.

Porro quoniam △ GJK triangulum rectangulum æquicrurum, △ FGH triangulum rectangulum æquicrurum, & △ EFG triangulum rectangulum æquicrurum, erit propter △ GKJ ∽ △ FGH, & △ FGH ∽ △ EFG, & △ GJK ∽ △ EFG. Quod erat posterius.

Corollarium I.

Fig. II. §. LXIV. Si perpendiculum PQ extra perpendiculum ex apice MO ex dimidio catheti MN demissum fuerit; erit PN : ON = QN : MN. Est autem per conditionem QN = QM = $\frac{1}{2}$MN, Ergo PN = OP = $\frac{1}{2}$ON. Perpendicularis itaque, ex dimidio catheti in hypothenusam demissa, secabit dimidiam hypothenusam in duas partes æquales.

Corollarium II.

§. LXV. Quoniam PN = PQ & MO = NO, PN = $\frac{1}{2}$ON, erit PQ = $\frac{1}{2}$OM, & PQ + PN = NO = MO.

Corol-

Corollarium III.

§. LXVI. Hinc $\triangle$ PQN $=$ $\triangle$ OPQ $=$ $\frac{1}{2}$ $\triangle$ NOQ $=$ $\frac{1}{2}$ $\triangle$ MOQ $=$ $\frac{1}{4}$ $\triangle$ MNO. Triangulum adeo rectangulum æquicrurum, quod perpendiculariter extra basin secatur ita, vt perpendicularis secans ex dimidio catheti demittatur, constituit triangulum æqualem quartæ parti trianguli perpendiculariter ex apice secti MON. (§. LIX.)

Corollarium IV.

§. LXVII. Potest itaque radio $\frac{1}{2}$ QN describi semicirculus cuius diameter $=$ QN, qui æqualis est quartæ parti semicirculi ex Q descripti per puncta M, O, N; cum figuræ similes sint in ratione duplicata homologorum laterum, & circuli ut quadrata diametrorum.

Corollarium V.

§. LXVIII. Quoniam $\triangle$ LMO $=$ $\triangle$ MNO, (§. LIV.) erit LMO $=$ $\frac{1}{2}$ $\triangle$ LMN. (§. LVI.) Est autem $\triangle$ PQN $=$ $\frac{1}{4}$ $\triangle$ MNO. (§. LXVI.) E. $\triangle$ PQN $=$ $\frac{1}{8}$ $\triangle$ LMN.

Corollarium VI.

§. LXIX. Atque exinde semicirculus ex O radio $\frac{1}{2}$ LN descriptus transiens per M, erit æqualis 8 semicirculis radio $=$ $\frac{1}{2}$ QN descriptis.

Scholion.

§. LXX. Methodum dicta suppeditant, dato circulo simplo multiplum construendi. Sit semicirculus v. g. QPN simplus, erit diameter QN, i. e. hypothenusa trianguli rectanguli æquicruri, quod semicirculo QNP inscribi potest. Est autem OQN semicirculus duplus. Diameter eius ON $=$ PQ $+$ PN, vel summæ cathetum trian-

trianguli rectanguli æquicruri, quod simplo inscribi poterat semicirculo. Porro ex adductis per consequentiam sequitur necessariam, circulum, cuius diameter QN, æqualem esse semicirculo, cuius diameter PQ + PN.

Theorema VII.

§. LXXI. *Triangulum rectangulum aequicrurum a cathetorum alteri parallela sectum reddit triangulum minus ex sectione ortum simile maiori, ideoque erunt & latera homologa proportionalia.*

Demonstratio.

Fig. V. Sit triangulum maius EFG, erit angulus G = G & J = F. (§. XXX.) Proinde △ LJG ∽ △ EFG; Et GJ : GF = GL : GE, atque GL : JL = EG : EF.

Corollarium I.

Fig. III. §. LXXII. Si parallela catheto *BD* ex $\frac{1}{2}$ EA i. e. D iungatur hypothenusæ CA, eam in duas æquales secabit partes *AB* & *BC*. (§. LXXI.)

Corollarium II.

§. LXXIII. Erit itaque triangulum *ABD* = $\frac{1}{4}$ △ ACE. (§. LIX.)

Corollarium III.

Fig. II. §. LXXIV. Est etiam △ NOQ = 2 △ PQN. Et in triangulo rectangulo æquicruro bissecans cathetum alteri parallela in dimidium cadit basis, estque triangulum inde ortum æquale duplo trianguli, formato perpendiculari ex dimidio catheti. (§. LXVIII. LIX.)

Theorema VIII.

§. LXXV. *Hypothenusae parallela secans triangulum aequicrurum efficit triangulum ex sectione ortum toti simile.*

Demon-

Demonstratio.

Sit triangulum maius ABC, & hypothenusæ parallela FG; erit $F = A$, (§. 30.) proinde $\triangle BGF \sim \triangle ABC$. FIG. VI.

Corollarium I.

§. LXXVI. Latera adeo trianguli minoris homologis maioris erunt proportionalia, & $BF : FA = BG : GC$, ac $BF : FG = AB : AC$, rel.

Corollarium II.

§. LXXVII. Si ex apice trianguli demittatur perpendiculum in hypothenusam BH, erit $\triangle BFK : \triangle BHA = \triangle BFG : \triangle ABC$ & $\triangle BFK : \triangle BFG = \triangle BAH : \triangle ABC$.

Corollarium III.

§. LXXVIII. Si basi parallela DE cathetum vtramque in duas æquales secuerit partes, erit DE æqualis $\frac{AC}{2}$. Nam $BD : DE = BA : AC$. Proinde $DE = AH = CH$.

Corollarium IV.

§. LXXIX. Erit itaque in hoc casu $\triangle DBE = \frac{\triangle ABC}{4}$ (§. LIX.)

Corollarium V.

§. LXXX. Si triangula rectangula æquicrura AEC Fig. III. & ABC Fig. VI. æqualia secentur a catheto & hypothenusæ parallelis: sit in priori casu catheto EC parallela BD, Fig. III. cathetum AE in duas æquales secans partes, & in posteriori hypothenusæ parallela, cathetum AB & BC, Fig. VI. bis secans; erunt triangula ex sectionibus dictis orta ABD, Fig. III. & BDE, Fig. VI. æqualia. (§. LXXIII. & LXXIX.) FIG. VI. & III.

COROLLARIVM VI.

FIG. VI. §. LXXXI. Quoniam $\triangle ADH = \frac{\triangle ABC}{4}$, (§. LXXIII.) & $\triangle BDE = \frac{\triangle ABC}{4}$; (§. LXXIX.) erit $\triangle ADH + \triangle BDE = \frac{\triangle ABC}{2} = \triangle ABH = \triangle BHC$.

COROLLARIVM VII.

§. LXXXII. Eſt igitur Rhomboides $DECH = \triangle ADH + \triangle BDE = \triangle BAH = \frac{1}{2} \triangle ABC$.

COROLLARIVM VIII.

§. LXXXIII. Quoniam $\triangle ADH = \triangle BDE$, (§. LXXX.) erit $DHCB = ADEC = \triangle \frac{3\,ABC}{4}$.

COROLLARIVM IX.

§. LXXXIV. Si triangulum hypothenuſæ parallela GF ſectum, porro ex apice B ſecetur perpendiculari BH: erit in $\triangle BHC$, KG ſecans trianguli BHC, catheto HC parallela: proinde $BK:KG = BH:CH$.

COROLLARIVM X.

§. LXXXV. Sit porro in $\triangle ABC$, ſecans baſi parallela DE; (§. LXXVIII.) erit $\triangle BJE : \triangle BHC = \triangle BDE : \triangle ABC$. Eſt autem $\triangle BDE = \frac{\triangle BCA}{4}$. E. $\triangle BJE = \frac{\triangle BHC}{4}$.

COROLLARIVM XI.

§. LXXXVI. Quoniam $\triangle BHC = \triangle ABH$ (§. LIV.) $= \frac{\triangle ABC}{2}$, (§. LVI.) ac $\triangle BJE = \frac{\triangle BHC}{4}$; erit $\triangle BJE = \frac{\triangle ABC}{8}$.

COROL-

Corollarium XII.

§. LXXXVII. Si itaque perpendicularis EL extra apicem *B* ex $\frac{1}{2}$ *BC* demittatur, erit △ CLE exinde ortum æquale triangulo BJE, parallela basi cathetos in æquales diuidente partes, & perpendiculo ex apice orto. (§. LXVIII. §. LXXXVI.)

Corollarium XIII.

§. LXXXVIII. Quoniam triangulum $BDE = \frac{\triangle ABC}{4}$ & $\triangle BHC = \frac{\triangle ABC}{2}$; erit $\triangle BDE = \frac{\triangle BHC}{2}$.

Corollarium XIV.

§. LXXXIX. Est juxta superius demonstrata continua triangulorum proportio geometrica sequentem in modum. △ *BJE : BDE : BHC :- ABC.* &c.

Scholion.

§. XC. *Possem equidem alia corollaria, eaque permulta, ex Theoremate hocce deriuare*, v. g. △ ELC + △ DJH = △ DBE = △ DBH = △ DHA = □ HJEL *rel. sed in allatis subsistere malumus, quoniam et ea præcipua sunt visa; atque ex eorum expositione facile cuiuis patebit modus reliqua euoluendi. Vti denique veritas hæc a nobis proposita plurium fons est larga, sic aliæ hinc forte & foecundiores eruentur a ruminantibus.*

Theorema IX.

XCI. *Omnia triangula ex regularibus sectionibus trianguli rectanguli aequicruri orta sunt similia.*

Demonstratio.

Omnes sectiones trianguli regulares reducuntur ad perpendiculares & parallelas. (§. XXVII.) Omne vero triangulum ex trianguli rectanguli æquicruri se ctione, ex apice perpendiculari; (§. LIV.) ex sectione perpendiculari extra apicem; (§. LXIII.) ex sectione cathetorum alteri parallela (§. LXXI.) & ex sectione hypothenusæ parallela (§. LXXV.) ortum est triangulum rectangulum æquicrurum. Proinde omnia triangula, ex sectione rectanguli æquicruri regulari orta, sunt similia. Q. E. D.

Theorema X.

§. XCII. *Triangulum rectangulum aequicrurum, cuius hypothenusa aequalis lateri trianguli regularis, minus est ipso triangulo regulari. Cuius vero catheti lateri regularis aequales, maius est ipso regulari.*

Demonstratio.

Fig. VII. Hypothenusa trianguli rectanguli maior est cathetum altero. (§. XXXIV.) Proinde per conditionem Theorematis latera trianguli regularis maiora sunt cathetis trianguli rectanguli æquicruri. Porro quoniam $A = B = C$ & $A + B + C$ æquales semicirculo; (§. XXXIII.) erit alter angulorum æqualis sextæ parti circuli. Quoniam autem $o = u = \frac{1}{2}E$ = octavæ parti circuli; (§. XLII.) erit angulus C maior angulo o: proinde crura trianguli regularis cadent extra cathetos trianguli rectanguli æquicruri, atque quoniam crura maiora sunt cathetis, & anguli trianguli regularis maiores angulis ad basin trianguli rectanguli æquicruri; *AB* & *BC* concurrent extra apicem trianguli rectanguli æquicruri: proinde apex trianguli regularis est extra apicem rectanguli æquicruri, cuius hypothenusa æqualis lateribus. Præter spatium itaque, quod trianguli rectanguli æquicruri perimeter complectitur, aliud quoddam spatium extra cathetos trianguli rectanguli æquicruri continet, nimi-

rum

rum △ ABE + △ BEC. Est autem △ AEC = △ AEC: itaque △ AEC + △ ABE + △ BEC > △ AEC, & △ ABC = △ AEC + △ ABE + △ BEC. E. △ ABC > △ AEC. Quod erat prius.

Porro perpendicularis ducatur ex *B* in AC in D, & erit x angulus rectus (§. XII.) & *BC* hypothenusa trianguli *BCD*. (§. XXI.) Quadratum hypothenusæ est æquale quadratis cathetum. (§. XXXIV.) Proinde hypothenusa maior est cathetum altero. *BC* adeo maior est *BD*: est vero *BD* altitudo △ ABC, (§. XVIII.) FC autem altitudo △ ACF, (§. XVIII.) FC vero æquale est AC = BC per conditionem Theorematis. Proinde FC maior *BD*. Cum vero sit basis communis triangulorum ABC & ACF, habebunt rationem altitudinum. Ideoque triangulum regulare minus est triangulo rectangulo æquicruro. Quod erat posterius.

THEOREMA XI.

§. XCIII. *Cathetus AD trianguli rectanguli aequicruri ABD productus, sectus a perpendiculari BC, ex extremo hypothenusae AB, in* C, *erit aequalis catheto AD, & △ ABD ∽ & = △ BDC.* FIG. I.

DEMONSTRATIO.

Quoniam *m* est angulus rectus, per construct. erit & *n* rectus. (§. VIII.) B vero angulus rectus est per construct. atque *o* est semirectus: (§. XLII.) proinde *u* est semirectus. Itaque △ BCD ∽ △ ABD. Proinde BD : DC = BD : AD. Est autem per construct. BD = AD. Ergo BD = CD, & CD = AD. Quod erat vnum.

Porro quoniam BD = AD = DC, (§. XLIX.) ideoque △ BCD = △ ABD. Quod erat secundum.

COROLLARIVM.

§. XCIV. Est igitur △ ABC = △ ABD. 2. vel = △ BCD. 2.

THEOREMA XII.

§. XCV. *Si vtraque cathetus producta a lineis perpendicularibus, ab vtroque trianguli rectanguli aequicruri extrema aeque distantibus, secetur, & a puncto sectionis altero ad alterum ducatur linea, erit triangulum ex cathetum productione ortum ipsi triangulo simile, ex cuius cathetum productione ortum est.*

DEMONSTRATIO.

FIG. VIII. Sit triangulum ABC, ex cuius cathetis productis simile prodit. Producatur vtraque cathetus, nimirum AB in F & BC in G, vbi a perpendicularibus GQ & FR secantur; ducatur ex G in F linea GF. Dico △ GBF esse simile △ ABC. Nam concipiatur linea HJ, vbi perpendiculares GQ & FR secant cathetos AB & BC in H & J: erit CR per conditionem Theor. = AQ, ad R erit angulus rectus, vt & ad Q. (§. XII.) C = A per posit: erit RJ = HQ & JC = HA: & quoniam BC = AB, erit BA − HA = BC − JC & BH = BJ. △ BHJ itaque est rectangulum æquicrurum. △ BFJ ∽ △ BHJ. (§. XCIII.) Pari ratione △ BGF ∽ △ BFJ. Erg. △ BGF ∽ △ BHJ. △ BHJ autem per demonstrata ∽ △ ABC. Erg. △ BGF ∽ △ ABC. Q. E. D.

COROLLARIVM I.

§. XCVI. Si catheti productæ secantur a perpendicularibus ex baseos extremis A & C missis, AD & CE, erit BE = BC & DB = AB & ABC = DBE. (§. XCV. §. XCIII.)

COROL-

COROLLARIUM II.

§. XCVII. Si perpendiculares PN & OM, ex hypothenusa AC ductæ, cathetos AB & BC in L & K in æquales secant partes, erit △ BMN = BLK. (§. XCIII. §. XCV.) △ BLK autem est = △ ABC : 4. (§. LXXIX.) Ergo △ BMN = △ ABC : 4.

COROLLARIUM III.

§. XCVIII. Quoniam æqualibus hypothenusis æqualia superstruuntur triangula rectangula æquicrura, (§. XLVIII.) erit triangulum ex productione cathetum ortum æquale triangulo, cuius basis est linea, quæ determinatur per perpendiculares, ab extremis baseos æque distantes. v. g. △ GBF est æquale illi triangulo, quod superstrui potest hypothenusæ QR, rectangulo æquicruro.

THEOREMA XIII.

XCIX. *Si ex angulo recto D trianguli rectanguli aequicruri ACD ducatur linea BD, hypothenusam in aequales secans partes in E, atque a perpendiculari ex altero basis extremo excitata secetur in B, erit △ ABD ∽ & = △ ACD.* FIG. IX.

DEMONSTRATIO.

Est enim BAD = ADC. (§. XII.) CAD = C. (§. XXXII.) ADE = EDC = C = EAD = BAE = B. Erit adeo △ BAD ∽ △ ACD. Quod erat prius.

Porro quoniam AD = AD, & AD : BA = AD : DC, erit DC = BA. Hinc △ ABD = △ ACD. Quod erat posterius.

COROL-

COROLLARIVM I.

§. C. Quoniam $\triangle$ ABD = $\triangle$ ACD, & AED = $\triangle$ AED, erit $\triangle$ ABD − $\triangle$ AED = $\triangle$ ACD − $\triangle$ AED, i. e. $\triangle$ ABE = $\triangle$ CDE.

COROLLARIVM II.

§. CI. $\triangle$ AED = $\triangle$ CDE, (§. LIV.) & $\triangle$ ABE = CDE. (§. C.) E. $\triangle$ ABE = $\triangle$ AED.

THEOREMA XIV.

FIG. X. §. CII. *Si in triangulo rectangulo aequicruro* ABC *catheto* BC *parallela* DF *producta ab alteri catheto* AC *parallela* EB *ex extremo basis* B *secetur in E, erit* $\triangle$ EFB $\backsim$ $\triangle$ ABC *&* AFD.

DEMONSTRATIO.

Quoniam BE parallela AC, & ad C angulus rectus, erit EBC angulus rectus. (§. XXX.) Et quoniam DE parallela BC, & ad C angulus rectus, erit ob eandem rationem FDC angulus rectus. Atque cum EB sit parallela CD, erit E angulus rectus. *ABC* est semirectus: (§. XLII.) ideo EBF semirectus, & EFB semirectus. (§. XXXIII.) Ergo $\triangle$ EFB rectangulum æquicrurum, & $\backsim$ $\triangle$ *ABC*. Quoniam $\triangle$ AFD $\backsim$ $\triangle$ *ABC*, (§. LXXI.) erit etiam $\triangle$ EFB $\backsim$ $\triangle$ ADF. Q. E. D.

COROLLARIVM I.

§. CIII. Sit AD = DC, erit AD + DF = AC = BC. Sed $DE = BC$, quoniam omnes anguli $\square$ *BCDE* recti. (§. CII.) E. $EF = FD$: & quoniam $AD = \frac{AC}{2}$, erit $AF = \frac{AB}{2}$. Ergo $AF = FB$. Proinde $\triangle\, BEF = \triangle\, ADF = \triangle\, \frac{ABC}{4}$. (§. LXXIII.)

COROL-

Corollarium II.

§. CIV. Quoniam $\triangle$ AFD = $\triangle$ bEF, erit etiam rectangulum BCDE = $\triangle$ ABC.

Corollarium III.

§. CV. Sit triangulum rectangulum æquicrurum ABC, & vtrique catheto parallela ex hypothenusæ extremo ducatur; sic A = B & C = D, (§. xxx.) atque $\triangle$ ACD, quoniam super eadem hypothenusa excitatum, = $\triangle$ AbC. (§. XLVI.) Fig. IV.

Corollarium IV.

§. CVI. Quoniam CD parallela AB, erit C angulus rectus, & ob eandem rationem A & D anguli recti; ac quoniam *AB* = *BC*, erit *AD* = *DC*. Ergo si vtrique catheto parallela ex extremo basis ducitur, oritur inde quadratum duplum ipsi triangulo.

Theorema XV.

§. CVII. *Si hypothenusæ* GH *parallela* NM, *tangens verticem anguli recti* L, *secetur a catheto* LH *parallela* JO, *producta in* K, *efficiet* $\triangle$ KOL $\backsim$ $\triangle$ GHL. Fig. XI.

Demonstratio.

Angulus O = L. (§. xxx. xxxi.) Ergo KOL rectus; (§. viii.) KLO = G: (§. xxxix.) itaque $\triangle$ LOK $\backsim$ $\triangle$ GLH. Q. E. D.

Corollarium.

§. CVIII. Si GO = OL, erit $\triangle$ LOK = $\triangle$ JGO = $\triangle$ GLH.

Theorema XVI.

Fig. XII. §. CIX. *Si in triangulo rectangulo aequicruro hypothenusæ parallela* SP *producta, donec a perpendiculari ex basis extremo* R *secatur in* V, *erit* △ TVR *aequale triangulo* SOX, *a perpendiculari extra apicem orto, quae cathetum* OQ *in eodem puncto* S *secat ac hypothenusae parallela.*

Demonstratio.

Propter triangulum rectangulum æquicrurum sunt anguli ad R semirecti. Quoniamque SV & OR parallelæ ex hypothesi, erit $m = n$; sed $n = o$, ideo $m = o$, & $V = X$, atque $SX = VR$, ideo △ SOX = △ TVR. *Q. E. D.*

Corollarium.

§. CX. Si itaque OS = QS, erit △ TVR = $\frac{\triangle OQR}{8}$. (§. LXXXVII.)

Problema I.

§. CXI. *Data hypothenusa construere triangulum rectangulum aequicrurum.*

Resolutio.

Fig. II. Sit hypothenusa data LN, quæ diuidatur in O, vt sit LO = ON. Ex O ducatur linea perpendicularis OM, quæ æqualis sit LO = ON. Punctum M, quod determinat lineam OM, est punctum concursus cathetum, vel vertex anguli recti. Ducatur ab L ad M linea LM & ab N ad M linea MN. △ LMN erit quæsitum.

Demonstratio.

In LN describatur semicirculus LMN. Quia OM = LO = radio circuli, erit M angulus ad peripheriam semicirculi, proinde angulus rectus. (§. XXXVII.) Arcus LM est mensura anguli LOM, (§. VI.) atque MN mensura

mensura anguli NOM. (§.VI.) Anguli LOM & NOM sunt recti per construct. Vterque arcus eodem descriptus est radio, proinde arcus LM = arcui MN. Chordæ autem arcuum æqualium sunt æquales. Proinde LM = MN. E. △ LMN triangulum rectangulum æquicrurum. Q. E. F.

PROBLEMA II.

§. CXII. *Data catheto construere triangulum rectangulum aequicrurum.*

RESOLVTIO.

Sit cathetus trianguli data AB. Erigatur in altera eius extremitate B perpendicularis BC, quæ fiat æqualis ipsi AB. Ab A ad C ducatur hypothenusa AC. Sic △ ABC erit triangulum rectangulum æquicrurum. FIG. I.

DEMONSTRATIO.

Nam BC = AB per constructionem, B est angulus rectus per constr. E. △ ABC est rectangulum æquicrurum. Q. E. F.

PROBLEMA III.

§. CXIII. *Inuenire triangulum rectangulum aequicrurum dimidium quadrati dati.*

RESOLVTIO ET DEMONSTRATIO.

Triangulum rectangulum æquicrurum est æquale dimidio quadrati, cuius diagonalis æqualis hypothenusæ trianguli. (§. L.) Proinde secetur quadratum a diagonali, sic prodibit triangulum quæsitum. Q. E. J.

PROBLEMA IV.

§. CXIV. *Triangulum rectangulum aequicrurum construere quadrato dato aequale.*

RESOLVTIO.

FIG. XIII. Quadratum datum ſit ACBD; diuidatur per diagonalem in duas partes æquales. Sumatur diagonalis illa AB pro catheto trianguli, cuius extremitati B imponatur perpendicularis ipſi AB æqualis, ac AD demum producatur, vsque dum ſecet BE in E.

DEMONSTRATIO.

Quadratum eſt duplum trianguli, cuius hypothenuſa æqualis diagonali. (§. L.) Proinde latus quadrati æquale catheto trianguli æqualis dimidio quadrati. (§. LI.) Hypothenuſa autem trianguli rectanguli æquicruri ſimpli eſt cathetus dupli. (§. LVIII.) Proinde, quoniam $\triangle ABE = \triangle ABC . 2$, erit $\square ACBD = \triangle ABE$. Q. E. F.

PROBLEMA V.

§. CXV. *Data area deſcribere triangulum rectangulum æquicrurum.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Ponatur area a^2; erit quadrati $= a^2$ latus $= a$. Conſtruatur itaque quadratum, cuius latus ſit æquale $\sqrt{a^2} = a$. Huic quadrato æquale conſtruatur triangulum rectangulum æquicrurum ſecundum §. CXIV.

SCHOLION I.

FIG. XIII. §. CXVI. Sit v. g. area trianguli $16 = a^2$, erit latus quadrati $4 = a =$ AD. Quoniam AD = DB & D angulus rectus, erit $AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, & BE = AB per reſolut: erit area $\triangle ABE = (\sqrt{AD^2 + BD^2} . \frac{1}{2}\sqrt{AD^2 + BD^2}) = \sqrt{2a^2} . \frac{1}{2}\sqrt{2a^2} = \sqrt{16.2} . \frac{1}{2}\sqrt{16.2} = 4\sqrt{2} . 2\sqrt{2} = 8 . \sqrt{4} = 8 . 2 = 16$.

SCHO-

SCHOLION II.

§. CXVII. Sic etiam res sese habet in quantitatibus surdis. Sit v. g. 5 area trianguli rectanguli æquicruri quæsiti, modo prius per potentiam hypothenusæ construatur quadratum, cuius latus $= \sqrt{5}$. Quod sic prodit, si altera cathetorum trianguli rectanguli $= 2 = \sqrt{4}$ & altera $1 = \sqrt{1}$. Est enim quadratum hypothenusæ æquale quadratis cathetum; (§. XXXIV.) proinde quadratum hypothenusæ, cuius catheti 2 & 1, $= 4 + 1 = 5$. E. ipsa hypothenusa $= \sqrt{5}$. Et sic porro.

PROBLEMA VI.

§. CXVIII. *Data peripheria describere triangulum rectangulum aequicrurum.*

RESOLVTIO.

Omnis res eo redit, vt pro cathetum altera valorem inueniamus, qui refertur ad summam laterum. Est autem peripheria trianguli rectanguli æquicruri æqualis vtrique catheto & hypothenusæ. (§. XVI.) Quoniam æquales catheti, erit hypothenusa æqualis radici ex duplo quadrato catheti alterius. Proinde peripheria æqualis duplo catheti & radici ex duplo quadrato catheti alterius. Sumatur iam peripheria $= b$, cathetus $= x$. Erit

$$2x + \sqrt{2x^2} = b$$
$$b - 2x = \sqrt{2x^2}$$
$$b^2 - 4bx + 4x^2 = 2x^2$$
$$b^2 - 4bx + 2x^2 = 0$$
$$b^2 + 2x^2 = 4bx$$
$$\frac{b^2}{2} + x^2 = 2bx$$
$$\frac{b^2}{2} = 2bx - x^2$$
$$x^2 - 2bx = -\frac{b^2}{2}$$

$$x^2 - 2bx + b^2 = b^2 - \frac{b^2}{2} = \frac{b^2}{2}$$

$$x \mp b = \sqrt{b^2 : 2}$$

$$x = b - \sqrt{b^2 : 2}$$ valor catheti. Vnde hoc elicitur Theorema: *In triangulo rectangulo aequicruro cathetorum altera aequalis est differentiae inter trianguli perimetrum, & mediam proportionalem inter perimetrum & eius dimidium.*

Constructio.

Fig.XIV. Sit AB linea perimetro trianguli rectanguli æquicruri æqualis, erit AD = $\frac{1}{2}$ AB, atque ex D excitetur perpendicularis DC = AD = DB. Ducatur hypothenusa BC trianguli BCD. Fiat AE = CB. Ex E ducatur perpendicularis EF, vsque dum secetur a BC in F. △ BEF erit triangulum rectangulum æquicrurum, cuius peripheria = AB.

Demonstratio.

Ad E est angulus rectus, (§. XII.) B angulus communis triangulis BCD & BEF, itaque △ BEF ∽ BCD, æquicrurum. Sed & CD = BD per constr. Ergo CB = $\sqrt{CD^2 + BD^2}$. Quoniam AB = b per construct. & DB = $\frac{1}{2}$ AB = CD = $\frac{1}{2}b$, erit $\sqrt{CD^2 + BD^2} = \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}b^2} = \sqrt{\frac{2}{4}b^2} = \sqrt{\frac{1}{2}b^2}$. Quoniam AE = CB per construct, erit BE = $b - \sqrt{\frac{1}{2}b^2}$. Itaque EF = $b - \sqrt{\frac{1}{2}b^2} = x$. Q. E. D.

Scholion I.

§. CXIX. Problema hocce analytice resolui compendii gratia. Alias enim loco cuiusuis æquationis peculiari opus fuisset theoremate. Patet præterea hac ratione methodus inueniendi valorem catheti alterius. Dein-

Deinceps itaque, vbi res postulauerit, eodem in soluendo vtemur modo.

Scholion II.

§. CXX. Hic valor $\sqrt{2xx} = \sqrt{2bb - 4bx + 4xx}$, qui hoc modo poterit resolui, substituto pro x, eius valore

$$b^2 = b^2$$
$$-4bx = -4b \cdot b - \sqrt{\tfrac{1}{2}bb} = -4b^2 + 4b\sqrt{\tfrac{1}{2}bb}$$
$$4x^2 = 4\left(b - \sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}\right)^2 = 4b^2 - 8b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2} + 2b^2$$
$$= 6b^2 - 8b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}$$

Ergo $\sqrt{2xx} = \sqrt{b^2 - 4b^2 + 4b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2} + 6b^2 - 8\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}}$ $= \sqrt{3b^2 - 4b\sqrt{\tfrac{1}{2}bb}} = b - 2\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}$.

Corollarium I.

§. CXXI. Quia $DB = \tfrac{1}{2}b$, erit $\triangle BCD = \tfrac{1}{2}b \cdot \tfrac{1}{4}b = \tfrac{1}{8}b^2$. $BE = b - \sqrt{\tfrac{1}{2}bb}$, E. $\triangle BEF = \left(b - \sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}\right) \cdot \left(b - \sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}\right) : 2 = \left(b - \sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}\right) \cdot \left(\tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}\right) = \tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2} \cdot 2 + \tfrac{1}{4}b^2 = \tfrac{3}{4}b^2 - b\sqrt{\tfrac{1}{2}bb}$.

Est itaque $\triangle BCD : \triangle BEF = \frac{b^2}{8} : \tfrac{3}{4}b^2 - b^2\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{8} : \tfrac{3}{4} - \sqrt{\tfrac{1}{2}} = 1 : 6 - 8\sqrt{\tfrac{1}{2}}$. Atque exinde $CDEF = \frac{b^2}{8} - \tfrac{3}{4}b^2 + b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}$.

Corollarium II.

§. CXXII. Si AB summa perimetri, & DB eiusdem semisumma, prætereaque EB altera cathetum, erit DE semihypothenusa $= (\frac{2x + \sqrt{2xx}}{2} - x = x + \frac{1}{2}\sqrt{2xx} - x = \frac{1}{2}\sqrt{2x^2}.)$ Quia EF parallela CD, erit GF = DE, C = C, G est angulus rectus per construct. Sed DE est semihypothenusa $\triangle$ BEF, & cathetus $\triangle$ CGF. Ergo CF = BE = EF. (§. LVIII.) Id quod analytice ita potest euinci, si ponatur BE $= x$, erit BF $= \sqrt{2xx}$ (§. XXXIV.) BD $= x + \frac{1}{2}\sqrt{2xx}$ per hypothesin. Ergo

$$BE : BD = BF : BC$$

$$x : x + \tfrac{1}{2}\sqrt{2xx} = \sqrt{2xx} : \frac{x\sqrt{2xx} + xx}{x} = \sqrt{2x^2} + x.$$

Sed FB $= \sqrt{2x^2}$, Ergo CF $= \sqrt{2xx} + x - \sqrt{2xx} = x = b - \sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}$.

Corollarium III.

§. CXXIII. Secundum hactenus dicta AD = CD = DB $= \frac{1}{2}b$. CB = AE $= \sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}$. EF = EB = GD $= b - \sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}$. FB $= \sqrt{3b^2 - 4b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}} = -b + 2\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}$. DE = HJ = GH = GF = JF = CG $= \frac{1}{2}$ BF $= \sqrt{\tfrac{3}{4}b^2 - b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}b^2} - \tfrac{1}{2}b$. CF = EB (§. CXXII.) $= b - \sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}$. DH $= \tfrac{1}{2}b - \sqrt{3b^2 - 4b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}} = \tfrac{1}{2}b + b - 2\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2} = \tfrac{3}{2}b - 2\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}$. $\triangle$ BCD = $\triangle$ BEF + $\triangle$ CGF + $\square$ FJGH + $\square$ JEDH $= \frac{1}{8}b^2$ (§. CXXI.). Sunt autem $\triangle$ BEF $= (b - \sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}).(b - \tfrac{1}{2}b^2) : 2 = \tfrac{3}{4}b^2 - b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}$. (§. CXXI.) $\triangle$ CGF

= $\triangle$ BEF

$= \frac{\triangle BEF}{2}$ (§. LVIII.) $^2 = \frac{3}{8}b^2 - \frac{1}{2}b\sqrt{\frac{1}{2}b^2}$. $\square$ FJGH $= \triangle CGF . 2 = \triangle BEF^2 = \frac{3}{4}b^2 - b\sqrt{\frac{1}{2}b^2}$. $\square$ JEDH $= (\frac{3}{2}b - 2\sqrt{\frac{1}{2}b^2}) . (\sqrt{\frac{1}{2}b^2} - \frac{1}{2}b) = -\frac{7}{4}b^2 + \frac{5}{2}b\sqrt{\frac{1}{2}b^2}$.

E. Summa $\triangle BCD = \frac{15}{8}b^2 - \frac{5}{2}b\sqrt{\frac{1}{2}b^2} - \frac{14}{8}b^2 + \frac{5}{2}b\sqrt{\frac{1}{2}b^2} = \frac{1}{8}b^2$.

Problema VII.

§. CXXIV. *Inuenire rationem trianguli rectanguli aequicruri ad triangulum regulare, cuius latus aequale hypothenusae aut catheto.*

Resolutio et Demonstratio.

I. Si latus eſt æquale hypothenuſæ. Ponatur hypothenuſa AC trianguli EAC $= a$, erit AE $= \sqrt{\frac{1}{2}a^2}$. $\triangle$ CEA itaque $= \frac{1}{2}a . \frac{1}{2}a = \frac{1}{4}a^2$. vel $= \sqrt{\frac{1}{2}a^2} . \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}a^2} = \frac{1}{4}a^2$. Quia CD $= \frac{1}{2}a$, & BC per conditionem problematis $=$ AC $= a$, erit BD $= \sqrt{BC^2 - CD^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2}$. E. $\triangle$ ABC $= \frac{1}{2}a . \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$. Eſt itaque $\triangle$ ACE : $\triangle$ ABC $= \frac{1}{4}a^2 : \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} = 1 : \sqrt{3}$. Fig. VII.

II. Sit latus regulare æquale catheto $= a$. Erit $\triangle$ ACF $= \frac{1}{2}a^2$ & in triangulo ABC, BD $= \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2}$; itaque triangulum ACF : ABC $= \frac{1}{2}a^2 : \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} = 2a^2 : a^2\sqrt{3} = 2 : \sqrt{3}$.

 Scho-

SCHOLION.

§. CXXV. Quo inuentum aliis problematibus solvendis inseruiat $\sqrt{3}$, quantum fieri potest, ab irrationalitate liberabimus extrahendo radicem, dum quantitas toti inassignabilis remaneat. Est itaque

```
V3.00 00 00 00 00 00 00 00  = 1.73205080.
 1 .. .. .. .. .. .. .. ..
 200 .. .. .. .. .. .. ..
  27 .. .. .. .. .. .. ..
 189 .. .. .. .. .. .. ..
   1100 .. .. .. .. .. ..
    343 .. .. .. .. .. ..
   1029 .. .. .. .. .. ..
      7100 .. .. .. .. ..
      3462 .. .. .. .. ..
      6924 .. .. .. .. ..
        17600 .. .. .. ..
        34640 .. .. .. ..
        1760000 .. .. ..
         346405 .. .. ..
        1732025 .. .. ..
           2797500 .. ..
           3464100 .. ..
           279750000 ..
            34641008 ..
           277128064 ..
              262193600
              346410160
              262193600
```

Poterit adeo $\sqrt{3}$ constitui $= 1.732$, præsertim cum in computando tantus numerus haud minimam pariat molestiam.

COROL-

Corollarium I.

§. CXXVI. Cum triangula eiusdem baſeos habeant rationem altitudinum, erit $DE : BD = 1 : \sqrt{3}$, & $FC : BD = 2 : \sqrt{3}$.

Corollarium II.

§. CXXVII. Triangulum rectangulum æquicrurum ad triangulum regulare, cuius latus æquale hypothenuſæ, ferme eſt, vt $1 : \frac{1732}{1000}$, i. e. vt $1000 : 1732$. Et triangulum rectangulum æquicrurum ſe habet ad regulare, cuius latus æquale catheto, ferme vt $2 : 1.732$, ſiue vt $2.000 : 1.732$.

Scholion.

§. CXXVIII. Addidi ferme. Ex operatione enim (§. cxxv.) patet, non accurate 1.732 reſpondere $\sqrt{3}$.

Problema VIII.

§. CXXIX. *Data area trianguli rectanguli aequicruri inuenire aream trianguli regularis, cuius latus aequale lateri rectanguli aequicruri. Ac data area trianguli regularis inuenire aream trianguli rectanguli aequicruri, cuius latus aequale lateri regularis.*

Resolutio.

I. Si datum eſt triangulum rectangulum æquicrurum, & inueniendum triangulum regulare, cuius latus æquale hypothenuſæ, inueſtigetur quarta proportionalis ad 1000, 1732 & aream datam. Sit $1000 = 1$, $1732 = \sqrt{3}$, quantitas data c, erit triangulum regulare quæſitum $c\sqrt{3}$.

II. Si datum eſt triangulum rectangulum æquicrurum, & inuenienda area trianguli regularis, cuius latus

 æquale

æquale catheto, inueſtigetur quarta proportionalis ad 2000, 1732 & aream trianguli datam. Sit 2000 = 2, $1732 = \sqrt{3}$, quantitas data c, erit trianguli regularis area $\frac{c\sqrt{3}}{2}$.

III. Si datum eſt triangulum regulare, & inuenienda area trianguli æquicruri rectanguli, cuius hypothenuſa æqualis lateri regularis, inueſtigetur quarta proportionalis ad 1732, 1000, & aream trianguli regularis datam. Sit 1000 = 1, $1732 = \sqrt{3}$, area data c, erit area inuenienda $c : \sqrt{3}$.

IV. Si datum eſt triangulum regulare, & inuenienda area trianguli rectanguli æquicruri, cuius alterum crus æquale lateri regularis, ad 1732, 2000 & aream datam inueſtigetur quarta proportionalis. Sit $1732 = \sqrt{3}$, 2000 = 2, area data c, erit trianguli area quæſita $2c : \sqrt{3}$.

Scholion.

§. CXXX. Res exemplis clarior reddetur. Sit v. g. Caſ. I. area trianguli rectanguli æquicruri 38, ſic ad regulas proportionum

$$1000 : 1732 = 38 : \frac{1732 . 38}{1000} = \frac{65816}{1000} = 65 + \frac{102}{125}.$$

In caſu altero ſit area trianguli rectanguli æquicruri 76, ſic ad regulas proportionum erit

$$2000 : 1732 = 76 : \frac{1732 . 76}{2000} = \frac{131632}{2000} = 65 + \frac{102}{125}.$$

In caſu tertio ſit area trianguli regularis æqualis 1732, & erit ad regulas proportionales

$$1732 : 1000 = 1732 : \frac{1732000}{1732} = 1000.$$

In

In casu quarto esto area trianguli regularis 12124, sic secundum regulas proportionum erit

$$1732 : 2000 = 12124 : \frac{12124 \cdot 2000}{1732} = \frac{24248000}{1732} = 14000.$$

Quoniam autem 1732 non accurate respondet valori $\sqrt{3}$, nec adeo accurata erit ista operatio. Sed quod inassignabilis est differentia inter $\sqrt{3}$ & 1.732 toti, non est quod eum numerum reputemus.

PROBLEMA IX.

§. CXXXI. *Construere triangulum rectangulum aequicrurum quadrati dati duplum.*

RESOLVTIO.

Producantur latera quadrati BGDF, BF & BG eundem angulum *B* includentia, ita, vt longitudo productorum AF & EG reddatur æqualis lateribus BF & BG. Ducatur hypothenusa AE. Sic △ ABE æquale duplo quadrati dati BGDF. FIG. XIII.

DEMONSTRATIO.

BG = GE per construct. & BF = AF per constr. Ad F sunt anguli recti, quia BFD angulus quadrati. Ad G eandem ob causam anguli recti. AF = BF & EG = BG per constr. Et FD atque GD communes. Ergo △ AFD = △ BFD, & △ EGD = △ BGD. E. △ ADF + BDF = 2 △ BDF, & △ BDG + △ DEG = 2 △ BDG. Ergo △ AFD + △ DGE = □ BFDG. Atque △ AFD + △ DGE + □ BFDG = 2 □ BFDG. Porro ad *B* angulus est rectus, quoniam est angulus quadrati, & per construct. AF = BF & BG = GE. Sed BF = BG,

 quia

quia latera sunt quadrati eiusdem. Itaque AF = GE. E. BF + AF = BG + EG. E. AB = BE. E. △ ABE triangulum rectangulum æquicrurum æquale duplo quadrati BGDF. Q. E. J. & D.

Problema X.

§. CXXXII. *Data area construere triangulum rectangulum aequicrurum cuiuis figurae datae aequale.*

RESOLVTIO.

Ex area cuiuscunque figuræ radix quadrata extrahatur, radix inuenta dupletur. Construatur super hypothenusa æquali duplo radicis inuentæ secundum §. CXI. triangulum æquicrurum.

Demonstratio.

Area trianguli est æqualis facto ex dimidia basi in altitudinem, vel ex altitudine in dimidiam basin. (per elem. Geom.) Ponatur iam hypothenusa pro basi, altitudo erit æqualis dimidiæ basi. (§. LV.) Proinde area trianguli rectanguli æquicruri est æqualis quadrato dimidiæ hypothenusæ. Area autem cuiusuis figuræ quadrato æqualis sumi potest, cuius latus in seipsum ductum dat aream datam figuræ. Ergo area cuiusuis figuræ est æqualis triangulo rectangulo æquicruro, cuius area æqualis dicto quadrato, & sic figuræ datæ. Si itaque latus in se ductum est quadratum, figuræ datæ æquale, triangulum rectangulum æquicrurum, cuius dimidia hypothenusa æqualis lateri, cum sit æquale huic quadrato, quin & idem figuræ datæ sit æquale, ambigi nequit. Q. E. J.

Scho-

Scholion.

§. CXXXIII. Sit v. g. inueniendum triangulum rectangulum æquicrurum æquale rectangulo, cuius latus vnum $= 2$, alterum vero $= 8$. Esset area eius 16. Proinde construenda esset hypothenusa æqualis 8, sic semihypothenusa in altitudinem ducta esset $= 16$. Si datum esset quadratum 25, & inueniendum triangulum, quod responderet ipsi quadrato dato, hypothenusa esset construenda $= 10$. Nam $\frac{1}{2} . 10 . \frac{1}{2} . 10 = 100 . \frac{1}{4} = 25$. Seu si generatim formulam volueris habere, secundum quam construere poteris hypothenusam, habeas hanc: $\sqrt{abc} =$ dimidiæ hypothenusæ, i. e. factum ex dimidia altitudine in basin & summam triangulorum, si radix extrahatur, æquale erit dimidiæ hypothenusæ trianguli rectanguli æquicruri figuræ regulari æqualis. In figuris autem irregularibus res non ita procedit; quod altitudines basesque inæquales esse possunt. Est itaque in irregularibus $\sqrt{ag + bx + cz + dv + et \,\&c.} =$ semihypothenusæ trianguli rectanguli æquicruri figuræ irregulari datæ æqualis.

Corollarium.

§. CXXXIV. Si in figuris regularibus nota est ratio altitudinis ad basin cuiusuis trianguli, poterit construi triangulum rectangulum æquicrurum figuræ datæ æquale, data magnitudine lateris cuiusdam. v. g. in triangulo regulari altitudo se habet ad basin, vt $\sqrt{3} : 2$, (§. CXXVI.) i. e. $= 1732 : 2000$. (§. CXXV.) E. $\triangle$ regularis cuius basis est 2000, area est 1732000. E. hypothenusa $\triangle$ rectanguli æquicruri regulari æqualis est $2 . \sqrt{1732000}$. (§. CXXXII.) $= \sqrt{6928000}$. Quodsi radix extrahatur, erit

$\sqrt{6,92}$,

$\sqrt{6,92,80,00} = 2632$ circiter

```
   4
 ────
 2|92
  |46
 2|76
 ──────
   16|80
    5|23
   15 69
   ───────
    1|11|00
     |52|62
    1 05 24
    ────────
       5 76
```

In hexagono latera æqualia ſunt radio circuli, cui inſcripti ſunt. Sex itaque triangula, in quæ poterit diuidi, ſunt regularia. Si itaque baſis cuiusuis trianguli, i. e. latus figuræ, fuerit 500, erit perpendicularis ex centro $= 433$. E. area hexagoni $= \frac{500 \cdot 433 \cdot 6}{2} = 649500$. E. dimidia hypotenuſa $= \sqrt{2598000}$. Pari ratione res ſe habet in reliquis figuris regularibus; modo inveſtigetur ratio altitudinis ad latus. Conf. Cel. WOLFFII *Elem. Analyſ. finitor.* §. 268. *ſq.*

DEFINITIO XVIII.

§. CXXXV. Figuram figuræ inſcribi dico, ſi anguli figuræ vnius tangunt perimetrum alterius. Cuius anguli tangunt perimetrum alterius, figura dicitur inſcripta.

DEFINITIO XIX.

§. CXXXVI. Figuram figuræ circumſcribo, ſi peripheria figuræ vnius tangit ſingulos angulos figuræ alterius. Figura, cuius peripheria tangit ſingulos alterius angulos, dicitur circumſcripta.

§. CXXXVII.

Theorema XVII.

§. CXXXVII. *Praeter triangulum & quadratum non datur polygonum regulare, quod triangulo rectangulo aequicruro potest inscribi.*

Demonstratio.

Aut angulus polygoni tangit hypothenusam, aut latus polygoni insistit hypothenusæ. Si angulus polygoni tangit hypothenusam, ponatur figura vel latera opposita habens lateribus, vel latera opposita angulis. Si latera sunt opposita, anguli etiam sunt oppositi. Proinde si latera lateribus sunt opposita & hypothenusam tangit angulus polygoni, angulus oppositus aut tangit angulum rectum aut non; si non tangit, non amplius est figura inscripta, per definitionem: si autem tangit, per elementa Geometriæ angulus polygoni regularis quadratum excedentis maior est recto. E. crura eius cadunt extra crura anguli recti; proinde anguli, qui efficiuntur, si latera alia scindunt latera dicta, sunt extra triangulum rectangulum æquicrurum. E. p. def. figura non est inscripta triangulo rectangulo æquicruro. Si autem angulus lateri est oppositus & hypothenusam tangit angulus, cathetos extremitates lineæ angulo oppositæ tangere necesse est. (per def) Sed lineæ crura trianguli constituentia non eadem inclinatione tangunt latus polygoni ac alia latera. Proinde catheti cadunt vel extra vel intra latera polygoni tangentia latus angulo oppositum. E. si alia latera hæc tangunt latera, angulum efficiunt vel extra vel intra cathetos, id quod repugnat definitioni. E. nec in hoc casu figura est inscripta. Si latus insistit hypothenusæ & latus lateri est oppositum, cathetos oppositi lateris extremitates tangere necesse est, vi definit. Latera autem latus lateri oppositum secantia non eadem idem latus tangunt inclinatione. E. cadunt vel extra vel intra cathetos. E. anguli, qui prodeunt aliis lateribus, hæc latera ſecantibus cadunt vel extra vel intra cathetos. E. Figura hoc l. non eſt inſcripta. Si latus inſiſtit hypothenuſæ & angulus lateri eſt oppoſitus, angulum rectum trianguli æquicruri tangere oportet verticem anguli polygoni; ſic autem, quia rectus minor angulo polygoni, latera angulum includentia cadunt extra crura trianguli; E. & anguli ab aliis lateribus ad contactum producti. E. nec ſic figura eſt inſcripta. Nullo itaque modo figura regularis inſcribi poteſt triangulo rectangulo æquicruro. Q. E. D.

Scholion I.

§. CXXXVIII. Non dubito, fore, quibus obſcurior aliquantum fuerit viſa hæc demonſtratio, quia nulla ferme ſenſibus exponitur imago. Sed figuras addere noluimus, ne, ſi vel pentagonum vel hexagonum, vel aliam forte figuram proponendo, a ſpeciali ad generale concludere videremur. Ceterum, ſi cui difficilis admodum perceptu fuerit demonſtratio, in hexagono & pentagono tentet, vtrum poſſit eam triangulo rectangulo æquicruro inſcribere. Reliqua exinde polygona inſcribi non poſſe facile animaduertet, modo attente examinet rationes, quo minus id fieri poſſit.

Scholion II.

§. CXXXIX. Si anguli recti trianguli rectanguli æquicruri vertex cadit in punctum verticis anguli polygoni, lineæ angulum polygoni includentes, cadunt extra crura trianguli rectanguli æquicruri. Si autem cathetos tangunt anguli polygoni, latera polygoni vel extra vel intra cathetos cadere poſſunt.

Scho-

Scholion III.

§. CXL. Non negauimus, triangulum regulare, seu quadratum triangulo rectangulo æquicruro posse inscribi. Quod equidem quadratum possit inscribi, dubium non est. (§. CXXXI.) Nec maiori negotio & alterum potest euinci, quod h. l. prætermittimus.

Postulatum.

§. CXLI. Quadratum triangulo rectangulo æquicruro inscribi posse.

Problema XI.

§. CXLII. *Determinare latus quadrati ita inscripti triangulo rectangulo aequicruro, vt vnum laterum insistat hypothenusae.*

RESOLVTIO.

Ponatur $\triangle$ ABC $= \frac{1}{4} a^2$, & latus quadrati DE $=$ x. Fig. XVIII.
Quia FG parallela DE, & DE insistit AC, erit GBF triangulum rectangulum æquicrurum. Quia EF est perpendicularis ad ED & ED insistit AC, EF est perpendicularis ad AC. E. ECF triangulum rectangulum æquicrurum. (§. LXIII.) Ob eandem rationem ADG triangulum rectangulum æquicrurum. Ideoque

$$\triangle GFB = \overline{x:2}^2 = \frac{1}{4} x^2$$
$$+ \triangle GAD + \triangle CEF = x . x:2 + x . x:2 = x . x = x^2$$
$$+ \square FEDG = x . x = x^2 \qquad \text{i. e.}$$
$$\frac{9}{4} x^2 = \frac{1}{4} a^2. \text{ E. } \frac{4}{36} a^2 = x^2. \text{ E. } \frac{1}{9} a^2 = x^2. \text{ E. } \frac{1}{3} a = x.$$

THEOREMA XVIII.

§. CXLIII. *Latus quadrati triangulo rectangulo aequicruro ita inscripti, vt latus alterum insistat hypothenusae, est aequale tertiae hypothenusae parti.*

THEOREMA XIX.

§. CXLIV. *Quadratum triangulo rectangulo aequicruro ita inscriptum se habet ad triangulum, vt 4 : 9.*

COROLLARIVM I.

§. CXLV. Potest itaque triangulo rectangulo æquicruro inscribi quadratum, si latus fiat $\frac{1}{3}$ hypothenusæ. (§. CXLIII.)

COROLLARIVM II.

§. CXLVI. Quia in triangulis similibus latera homologa inter se eandem habent rationem, $BG = \frac{1}{3} AB$. Potest itaque determinari punctum, vbi latus alterum quadrati secat cathetos. (§. CXLIII.)

PROBLEMA XII.

§. CXLVII. *Triangula rectangula aequicrura construere, quae in progressione geometrica accrescant hac ratione 1 : 2 : 4 : 8 : &c.*

RESOLVTIO.

FIG. XV. Producatur cathetus AC in D, vsque dum $AD = 2\,AC$, mittatur perpendicularis ex B in D. Porro producatur AB in E, vt $AE = 2\,AB$, ex D in E ducatur perpendicularis DE. Porro AD producatur in F, vt $AF = 2\,AD$, & ex E ducatur ad F perpendicularis EF. Et sic porro.

DEMON-

Demonstratio.

Si AB hypothenusa △ ABC, erit AC cathetus. Proinde AD = 2 AC hypothenusa △ dupli (§. LVIII.) & AB cathetus eiusdem △. (§. LVIII.) Si porro AB cathetus △ ABD producitur in E, vt AE = 2 AB, triangulum, cuius hypothenusa AE, duplum est △, cuius cathetus AB. (§. LVIII.) Et sic porro. Q. E. J.

Scholion.

§. CXLVIII. Pari ratione etiam triangula rectangula æquicrura possunt construi, alia proportione accrescentia v. g. 1 : 3 : 9 : 27. &c. per potentiam hypothenusæ.

Problema XIII.

§. CXLIX. *Construere triangula rectangula aequicrura geometrica progressione decrescentia hac ratione* $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8}$: *&c.*

Resolutio.

Diuidatur triangulum ABC æqualiter in D. CD = DB = AD excipiatur circino, & fiat $1\,C = b\,C = CD$. $1\,dC = 1\,d = 1\,db$ rursus excipiatur circino, & $2\,C = 2\,bC$ fiat æquale $1\,d\,C$. Porro $2\,d = 2\,d\,C = 2\,d\,b$ excipiatur circino, & $3\,C = 3\,b\,C$ fiat æquale $2\,d\,C$, & sic in infinitum. Fig. XVI.

Demonstratio.

Triangulum BCD = $\frac{1}{2}$ △ ABC. (§. LVI.) E. CD cathetus trianguli rectanguli æquicruri dimidii ABC. (§. LVIII.) Sed 1 C = 1 b C = DC per constr. E. △ 1 b C = △ BCD. (§. XLIX.) Porro △ 1 d C : △ 1 B C = △ ADC : ABC. (§. LVI.) E. △ 1 d C = $\frac{1}{2}$ △ 1 b C.

Problema XIV.

§. CL. *Triangula rectangula aequicrura construere, in arithmetica progressione crescentia hac ratione 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. &c.*

Resolutio et Demonstratio.

Sumatur aliquod triangulum rectangulum pro vnitate. Sic triangulum, cuius cathetus æqualis hypothenusæ, erit duplum. Perpendicularis porro hypothenusæ imponatur æqualis catheto simpli; ducatur hypothenusa, quæ pro catheto trianguli tripli est habenda. Hypothenusæ dupli, siue catheto tripli denuo imponatur perpendicularis catheto primi trianguli æqualis, atque hypothenusa ducatur, cathetus quadrupli, & sic in infinitum. Q. E. J.

Scholion.

§. CLI. Hæc sunt, quæ de trianguli æquicruri natura exponere animus fuit. Potuissemus equidem alia plura addere v. g. de relatione triangulorum ex laterum compositione, de subnormali trianguli rectanguli æquicruri. Nec non de methodo construendi triangula in progressione triangulari, quadrangulari, pyramidali &c. sed omnia hæc pluribus egent præmissis, atque prolixiorem reddidissent dissertationem. Sufficiat itaque de triangulo rectangulo æquicruro dixisse tantum.

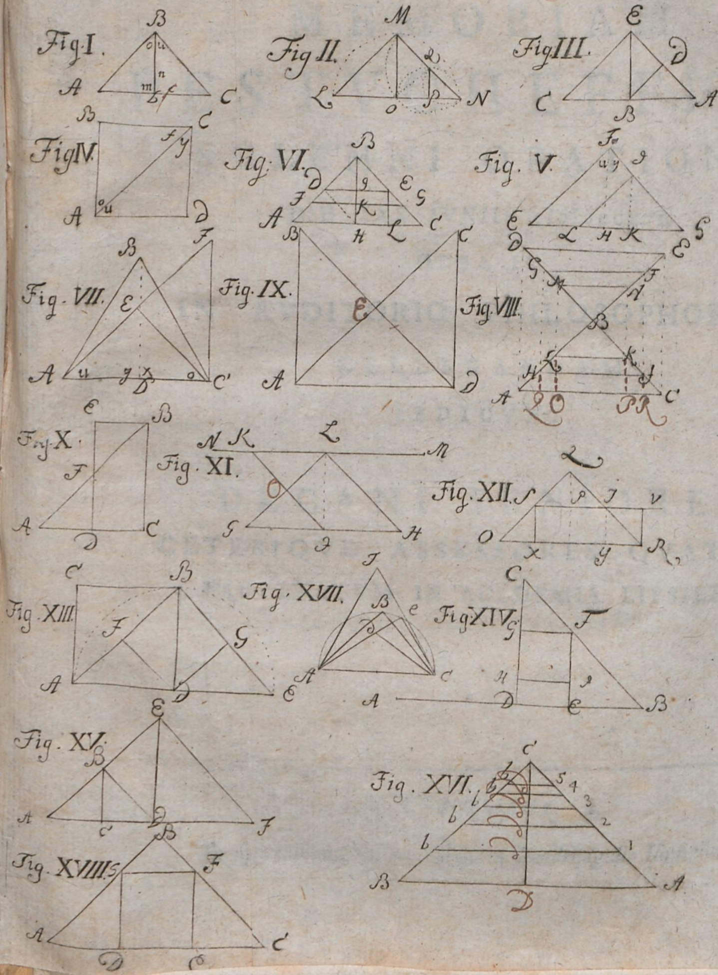
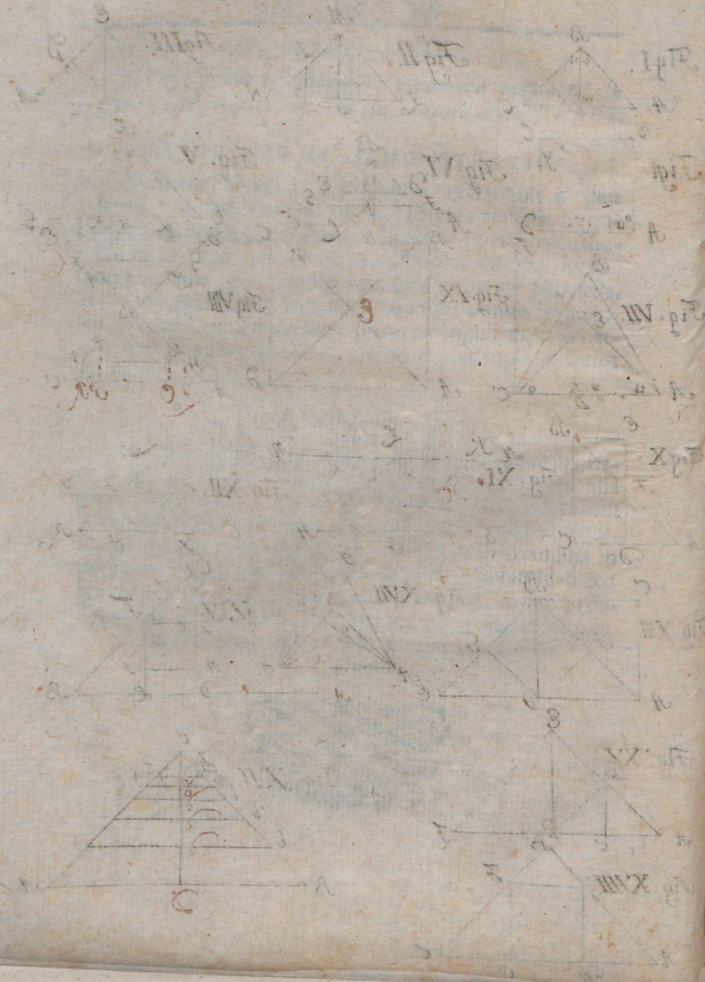


Fig. I.
Fig. II.
Fig. III.
Fig. IV.
Fig. VI.
Fig. V.
Fig. VII.
Fig. IX.
Fig. VIII.
Fig. X.
Fig. XI.
Fig. XII.
Fig. XIII.
Fig. XVII.
Fig. XIV.
Fig. XV.
Fig. XVI.
Fig. XVIII.



6.

4

DISPVTATIO MATHEMATICA

DE

TRIANGVLO RECTANGVLO AEQVICRVRO,

QVAM,

B. C. D.

AMPLISSIMO PHILOSOPHORVM IN ILLVSTRI GRYPHICA ACADEMIA ORDINE BENIGNE PERMITTENTE,

A. R. S. MDCCXXXVIIII. DIE VIIII. MARTII,

H. L. Q. C.

PVBLICO ERVDITORVM EXAMINI SVBIICIENT

PRAESES

M. CHRISTIAN WILHELM CONRADI,

STOCKHOLMIENSIS

&

RESPONDENS

LVDOVICVS AVGVSTVS WÜRFFEL,

GRYPH: POMER:

GRYPHISWALDIÆ,

STANNO HÖPFNERIANO.