7

Neue Erforschungen in Geometrie,

welche mit-unter verschiedene bisher noch nicht berechnete Tafeln mit Decimalen, und den Logarithmen dazu enthalten,

von

C. L. Schübler,
Mitglied des innern Raths zu Heilbronn.

Frankfurt und Leipzig
1790.

8

Vorrede.

Ich habe den Titel meines Werks mit Verlegenheit niedergeschrieben. Es kann wol seyn, daß mir manches neu scheint, was es nicht ist; Was nicht entlehnt, was selbst-ausgespäht ist, kann drum dennoch alt seyn. Aber aufrichtig darf ich versichern, daß ich doch sehr viele Schriften aufgeschlagen, und durchgeblättert habe, um zu ersehen, wo meine Entwikklungen etwa anzutreffen wären? und daß mein Nachsuchen gröstentheils vergeblich war. Es seie mir erlaubt, nur einiges aus meinem Buch speciell hier aufzuführen, worauf ich durch eigenes Nachdenken gekommen bin:
Die Gesezzlichkeit der zunehmenden Areen, als aliquoter Theile eines jeden Dreiekks §. 8. und §. 13. im Ersten Abschnitt.
Die allgemeine Darstellung für Dreiekke und Trapez. bei Dichotomie §. 17.
Desgleichen auch, ausser Dichotomie noch, die Reihen §. 23. und 24.

Ferner: Die algebraische Vorstellungsart im Zweyten Abschnitt; insbesondere die allgemeingültige Signatur für alle unterste Trapezien. §. 26. und folg.

Die Skale für die Trapezien §. 29.

Die analytischen Angaben, Dreiekke und Trapezien in den Ausdrukk der Höhe und der Basis (*) zu versezzen §. 30. — 36.

)(2 Zu-

(*) Pflicht der Aufrichtigkeit befielt mir, zu bekennen, daß ich ein paar Haupt-Formeln, welche §. 30. vorkommen, der gütigen Mittheilung eines grosen Gelehrten zu verdanken habe, dessen Namen ich nennen würde, wenn mir nicht eine gewisse Pflicht der Discretion, (über die ich mich hier nicht näher erklären kann,) die Feder hielte.

Zusammen-Ordnung solcher Proportionen, wie §. 35. und 36. insbesondre vorkommen.

Weiter: Die Belehrungen, ähnliche Dreiekke grösern einzuzeichnen, oder aus grösern kleinere ähnliche abzunehmen, auf die Weise, wie im Dritten Abschnitt §. 38. — 40. gezeigt wird; und dann für den Calkül Tafeln, wie die für Dichotomie §. 42. und die am Schluß des Werks; und für Trichotomie u. s. f. in §. 45. §. 47. und §. 48. im Vierten Abschnitt.

Endlich: Trigonometrische Vergleichungen von Linien und Flächen, wie im Fünften Abschnitt, insbesondre §. 51. und §. 52. anzutreffen sind.

Viele einzelne Bemerkungen übergehe ich! — Mehr, als einmal schien es mir selbst unglaublich, daß dieser und jener meiner Säzze nicht längst schon von mehrern Geometern sollte vorgetragen worden seyn; ja nicht nur kurz vorgetragen, sondern im Detail verfolgt worden seyn. Und noch gewärtige ich von geschikkten Literatoren in Mathematik hierüber Zurechtweisung; und werde mich gewiß mit Dank auf ältere oder neuere Diatriben hinfüren lassen, welche die Gegenstände meiner Lucubrationen etwa gründlicher erörtert enthalten. — —

Billige Richter werden übrigens die Mühe nicht verkennen, welche eine genaue Ausarbeitung von Tafeln, wie die dichotomische am Schluß, und die trichotomische S. 83. ist, erfordern. Indessen läßt sich kein Beifall abnötigen, noch steht es dem Autor zu, den Werth seiner Arbeit selbst präsumtuos zu bestimmen; insbesondre sollte wol der Mathematiker, (meine ich) das — Tollat sua munera Cerdo! des edlen Persius immer seinen Walspruch seyn lassen, so oft er fürs Publicum trit.

Geschrieben zu Heilbronn, im December 1789.

Ein-

Errata:

Seite 5. §. 3. Lin. 6.	statt: $= \frac{1}{3}$tel	lies	$= \frac{2}{3}$tel.
Seite 6. Lin. 12. und 13.	statt: gielt	lies	gilt.
Seite 31. Lin. 3.	statt: Decinal.	lies	Decimalen.
Seite 64. Lin. 16.	statt: $fg + m$	lies	$fg + x$.

Einleitung.

Es ist seit hundert Jaren unbeschreiblich viel in Geometrie und Analysis ausgespäht, und berichtiget worden. Es wird noch immer tiefer gegraben, und ohne zweifel werden binnen weniger Decennien noch grose Schäzze entdekkt werden.... Aber daß, *was* in der Tiefe gefunden, und von etlichen Wenigen als bedeutend erprobt worden, auch ans *helle* Tageslicht gefördert, und zu Jedermans Gebrauch dargelegt werde, dafür sind immer noch, meines Bedünkens, zu wenige Hände beschäftigt. — Vielleicht hätte ich sezzen sollen: mit zu wenigem *Geschikk* oder mit zu wenigem *Glük* beschäfftigt! Ich will das unentschieden lassen; der Calkül liegt mir zu hoch, welcher die Antheile bestimmt angäbe, *wie* viel deßfalls den Arbeitern, und wie viel denen, *für* welche gearbeitet wird, zur Last zu legen, oder gleichsam zur Unehre überzuschieben wäre. Ich sage nicht gerne etwas unangenehmes, das doch nichts fruchtet, und schreibe nicht gerne etwas, das mir am Ende doch wol für verstekkten Stolz und Eigendünkel ausgelegt werden möchte!

Genug, ich will mich auch unter die anstellen, welche bemüht sind, geometrische Warheiten, und interessante Vorstellungen der Analysis zu verbreiten, und, so viel möglich, gemeinnüzziger zu machen. Alle vernünftige Erzieher haben es bisher gebilligt, und als bewährt-gut gepriesen, mathematische Säzze durch sinnliche Darstellungen, und durch Gestalten, welche die Neugier reizen, leicht faßlich zu machen; und sie dringen noch immer darauf, daß man doch Sorge tragen solle, der Einbildungskraft mehr Nahrung zu verschaffen, wenn man der Jugend ge-

gewisse mathematische Säzze beizubringen wünscht, welche sich ihr schwer einprägen, und deren Bekanntschaft, und feste Fixirung doch zuverlässig sehr wichtig ist. Ich habe vielfältig hierüber nachgedacht. Die nächstfolgende Blätter mögen zeugen, wie ich glaube, daß sich mitunter die Sache angreifen läst. Ich will aber nicht damit sagen: " So müsse man allgemein verfaren! So müsse man durchaus zu Werke gehen! " Ich liefere nur Beiträge zur Intuition geometrischer Constructionen, zur Verbreitung interessanter Theoreme, deren Innhalt für jedermann wol zugänglich wäre, und doch meistens für verstekkt, abstrus, und unfreundlich = finster für immerhin, geachtet wird. Das mechanische Verfaren, welches ich hiebei gleich zum Anfang angebe, ist sehr leicht = faßlich. Denn was ist wol leichter, als aus einem Stükkchen Papier ein Dreiekk nach Willkühr zu schneiden, dasselbe zur Helfte, zum Drittel u. s. f. zu falten, und Stükke herunter zu schneiden, wie die Falten angeben. Das ist beinahe Spielerei! Aber daß mein Zwekk nicht Spielerei sei, daß sich auch auf dem Weg dieses spielend = leichten Verfarens auf sehr ernsthafte Folgerungen kommen lasse, daß dasselbe wol so gar, vermittelst ganz natürlicher Combinationen, auf bedeutende neue Entdekkungen hinfüren könne, das werden, wie ich hoffe die Blätter der nächstfolgenden Bogen sattsam darthun.

Um das mechanische Verfaren von linearischen Darstellungen zu unterscheiden, werde ich vorne herein den Drukk in Columnen einrichten. In der 2ten Columne sind die Beweise über die Angaben zu suchen, welche in der 1sten Columne jederzeit vorkommen. Sie sezzen Bekanntschaft mit sehr wenigen Säzzen der Elementar = Geometrie, die auch das kleinste Handbuch enthält, voraus.

Ueber die Kenntnis und Behandlung gewisser aliquoter Theile eines jeden Dreiekks und Trapezions.

Erster Abschnitt.

§. 1.

Schneide dir ein Dreiekk von beliebiger Gröse und willkürlich-ungleichen Seiten. Falte es in der Mitte, und ziehe die Scheitel-Spizze bis an die Grund-Linie herab. Die Fläche, welche du damit herabziehst, ist ein Dreiekk, ähnlich deinem ganzen Dreiekk, aber nur ein Viertel desselben, dem Innhalt nach; Schneide es gar hinweg; (die Falte zeigt den Weg des Schnitts) so bleibt der Rest, ein Trapezion, dessen Area $\frac{3}{4}$ von der Area des ganzen Dreiekks ist.

(Fig. 1.)

Zeichne ein Dreiekk, ABC, von willkürlich-grosen Seiten. Lasse ein Perpendikel, BP, von seinem Scheitel, B. auf die Basis AC, fallen. Ziehe durch die Mitte dieses Perpendikels eine Paralele, mn, mit der Grundlinie AC: Das obre Dreiekk Bmn, ist nur ein Viertel des ganzen Dreiekks $= \frac{1}{4} \triangle ABC$; aber demselben ähnlich. Und das Trapezion drunter, ACmn, also $= \frac{3}{4} \triangle ABC$. Der Beweiß davon, daß $Bmn = \frac{1}{4}$ ABC sei, leuchtet wol jedem ein, der nur Gn mit Am paralel ziehen, (*)

§. 2.

(*) Man denke sich das Dreiekk ABC als die Helfte eines geschobenen Vierekks, oder Paralelogramms, das dann $= 2. \triangle ABC$ wäre; So ist doch gewiß der 4te Theil dieses Paralelogramms dem geschobenen Vierekk AGmn gleich.

Das

§. 2.

Jedes Trapezion läst sich als der Abschnitt eines Dreiekks betrachten; jedes läst sich auch selbst wieder in 2. Dreiekke zerschneiden.

Das untre △ ACm dessen Basis die Basis des Trapezions selbst ist, ist immer gröser, als das andre, △ Cmn, (in welchem man die andre Paralele des Trapezions das △ GnC dem △ Bmn gleich anerkennen, und das Paralelogram AGmn = 2 Bmn ersehen kann.

(Fig. 2.)

Jedes Trapezion giebt, wenn die 2. Seiten Am und Cn verlängert werden, ein Dreiekk, dessen Basis-Winkel den Basis-Winkeln des Trapezions gleich sind, weil mn immer als paralel mit AC laufend gedacht werden mus. Sonst wäre ja kein Trapezion, sondern ein Trapezoid vorhanden, sich

Das bestreitet gewiß niemand; Ist aber AGmn = $\frac{1}{4}$ von 2. △ ABC; so ist es sicher auch = $\frac{1}{2}$ von △ ABC. Die andere Helfte des △ ABC ist dann notwendig die Summe der 2 Dreiekkchen Bmn + GCn; Diese sind selbst unter sich ganz gleich. Denn in ihnen sind gleich 1) die Winkel: n = B, weil Gn mit AB paralel gezogen, also n als äusserer Winkel gegen B zu betrachten ist; 2tens die Winkel: C = mnB; ganz aus gleichem Grund; Endlich 3tens ist auch die Seite Cn = Bn; weil mn durch die Mitte der Höhe gezeichnet ist, und Gn durch den Einschnitt-Punct bei n bestimmt wurde. Demnach ist die Gleichheit erwiesen: △ Bmn = △ GCn; Da nun ihre Summe = $\frac{1}{2}$ ABC beträgt; so beträgt jede Helfte = $\frac{1}{4}$ ABC; also hält die Area des obersten Dreiekks offenbar so viel, wie oben steht.

sich als Basis denken kann;) und zwar ist das gedachte grösere Dreiekk, ACm, jederzeit $= \frac{2}{3}$ des Trapz. und $= \frac{1}{2}$ des $\triangle$ ABC. Folglich noch einmal so gros, als das zuerst herunter geschnittne $\triangle$ Bmn d. h. $\triangle$ ACm $=$ 2. $\triangle$ Bmn.

Aber das zweite kleinere Dreiekk des Trapezions, $\triangle$ Cmn, ist jederzeit $= \frac{1}{3}$ des Trapez. und $= \frac{1}{4} \triangle$ ABC.

Folglich dem zuerst heruntergeschnittenen $\triangle$ Bmn gleich: $=$ Cmn $= \triangle$ Bmn $= \frac{1}{4}$ ABC.

§. 3.

Es läst sich aus dem vorhandenen Trapezion gar kein andres Dreiekk dessen Basis nehmlich doch des Trapezions Basis bleiben soll, ausschneiden, als eines von derselben Gröse $=$ ⅔tel, $=$ 2. Bmn; man mag die Scheitelspizze auf mn annehmen, wo man will. Z. B. in E, in n... Man erhält jedesmal ein Dreiekk, dessen Inhalt $= \triangle$ ACm $= \frac{1}{2} \triangle$ ABC ist.

welches bekannlich keine 2. paralele Seiten nötig hat, von welchem aber gegenwärtig nicht die Rede ist.

Die Diagonale Cm in dem Trapezion bildet zwei ungleiche und unähnliche Dreiekke, ACm, und Cmn.

Das $\triangle$ ACm ist die Helfte des ganzen $\triangle$ ABC; (Der Schenkel Cm fällt in die Mitte des Linie AB;) und ist dem $\triangle$ BCm gleich, weil $\triangle$ BCm und $\triangle$ ACm einerlei Basis $= \frac{1}{2}$ AB, und einerlei Höhen haben.

Ganz aus dem leztern Grund ist dann auch $\triangle$ Cmn $=$ Bmn $= \frac{1}{4}$ ABC.

(Fig. 3.)

Wenn die Bedingung bleibt, AC soll die Basis des Dreiekks seyn, so wird jedes darauf errichtete Dreiekk, dessen Spizze nur bis mn, reicht, $=$ ACm seyn, auch wenn mn nach Gefallen verlängert würde. Es bleibt dieselbe Höhe und dieselbe Basis, so lange mn mit AC paralelläuft.

§. 4.

Eben so gros, als das andre kleinere Dreiekk des Trapezions, △ Cmn ist, ist jedes Dreiekk, daß sich auf der andern Seite herunter schneiden läst, unter der festen Bedingung, daß die Basis mn bliebe, die Höhe aber die Höhe des Trapezions fortan wäre. So ist dann Gmn = Cmn = Amn, immer = $\frac{1}{4}$ △ ABC, = Bmn, und 1. Drittel des Trapezions.

Was von diesem Trapezion gielt, gielt von jedem. Ein Dreiekk, dessen Basis die kleinere Paralele (die Falte) ist, ist immer so ein Drittel; und ein △, dessen Basis die grössere, die Grund-Linie selbst ist, immer zwei Drittel des Trapezions; Das erste immer $\frac{1}{4}$ ABC. Das zweite immer $\frac{1}{2}$ ABC.

In der Zeichnung denke man sich jezt das Trapezion umgekehrt, oder doch die Dreiekke als auf dem Scheitel stehend △ Gmn = Cmn. Daß sie gleich sind, wird wol von jedem einzusehen, der §. 1. und 2. versteht.

Daß der Puncte unzälig-viele seyn können, zwischen A und C, welche als Spizzen unzäliger Dreiekke denkbar sind, ist auch klar für sich.

Man vergleiche hiemit Kästn. Geom. 42 Saz. 24 Zus. S. 302. (4ter Ausg.)

Die Gesezlichkeit ist allgemein; nicht nur bei einem Trapezion, das von einem Dreiekk, welches ABC ähnlich wäre, herkäme; doch vorausgesezt, daß das Trapezion die halbe Höhe eines Dreiekks hat, und mit diesem verglichen wird.

§. 5.

§. 5.

Aber, wenn das Trapez. nicht, wie §. 2. in zwei Dreiekke zerschnitten wird, sondern der Schnitt zwischen m und n hinein fällt, von den beeden Ekken A und C heraufgehend, so erhält man jedesmal drei Dreiekke. Nehmlich, wenn man Z. B. $\triangle AEC = \frac{2}{3}$ des Trapezions herausschneidet, so fallen zwei Dreiekke zur Seite herunter, das $\triangle AEm + \triangle CEm$; die Summe ihrer Areen ist $= \frac{1}{3}$tel des Trapez. $= \frac{1}{4} ABC = Bmn$,

Diese herabfallende Dreiekk sind jederzeit ungleich, wenn das Trapez. von einem ungleichschenklichten $\triangle ABC$ herkommt, d. h. wenn Am nicht Cn gleich ist.

Sie sind aber gleich, und betragen eines wie das andere $\frac{1}{6}$tel des Trapezions, und $\frac{1}{8}$tel $\triangle ABC$, wenn das Trapezion von einem gleichschenklichten $\triangle$ herkommt, d. h. wenn $Am = Cn$ ist.

Die Diagonale Cm ist nicht wesentlich notwendig, um ein Dreiekk in das Trapezion einzuzeichnen, das $= \frac{1}{2} ABC$ seyn soll; noch ist es die Diagonale Cn; Allein, wenn man diese Diagonalen nicht zieht, sondern Z. B. die Linien AE, CE an mn hin, so ergeben sich jedesmal zwei Dreiekke zur Seiten, (nehmlich noch ausserdem $\triangle AEC$, welches in der Mitten zwischen ihnen befindlich ist.) Die Summe ihrer Areen mus $= \frac{1}{3}$tel des Trapezions seyn; das folgt aus der erwiesenen Gröse der Area $\triangle AEC$, welche zwei Drittel von dem Innhalt des Trapezions einnimmt.

Um-

Umgekehrt, schneidet man von mn her gegen G zu, oder überhaupt gegen einen Punct auf AC, so erhält man ausser dem mittleren Dreiekks Gmn, (welches immer = $\frac{1}{3}$tel des Trapez. und $\frac{1}{4}$ ABC ist,) zwei zur Seite abfallende Dreiekke, AGm + CGn, deren Summe = $\frac{2}{3}$ des Trapezions = $\frac{1}{2}$ ABC ist.

Kommt das ganze Trapezion von einem gleichschenklichten △ ABC her, so sind diese abfallende Dreiekke, jedes = $\frac{1}{4}$ ABC, d. h. jedes dem △ Bmn gleich, und selbst unter sich gleich.

Sonst aber — sind sie jederzeit ungleich, und nur in der Summe bekannt.

Auch hier, wenn man in das Trapezion nicht gerade 2. Dreiekke einzeichnen will, fallen die Diagonalen Cm, und An weg; und man erhält immer drei Dreiekke: △ AGm + Gmn + CGn; deren einzelne Gröse und Gestalt sich nach dem in der Mitte stehenden, hier nach △ Gmn, bestimmen. Ist dieses gleichschenklicht, so sind sie alle drei ganz gleich.

Prodromus zu dem folgenden §. 6.

(Eine kleine Geschichte.)

Ich befand mich einsmals in einer Gesellschaft, in welcher unter andern von den Eigenheiten der Zal 3 und 9 gesprochen wurde. Auch mit den Dreiekken ist's doch gar besonders; (fiel einer der Anwesenden ein.)

Schnei-

Schneiden sie sich eines von Papier oder Karten zurecht; und dann schneiden Sie ihm eine seiner Spizzen ab, welche Sie wollen, so läst sich daraus sogleich, (wenn man das abgeschnittene Stükk neben an sezt,) immer ein Quadrat bilden. Ich machte ihm Einwürfe; er forderte ein Kartenblatt, und schnitt — — Sein Angeben traf nicht zu. Es fiel ihm ein, daß er eine Bedingung beizusezzen vergessen hätte; Er bog den Spizzen des Dreiekks, welchen er in der Hand hatte, herab bis zur Basis, und schnitt dann. — — Da traf es zu; es ließ sich so gleich aus den zwei Stükken des Dreiekks ein Quadrat bilden: Man sehe die Reihe der Zeichnungen, Fig. 4. an:

Wenn man diese Figuren betrachtet, so läst sich bald folgendes heraus merken:

(1.) Das Verfaren, aus dem Dreiekk sogleich ein Vierekk so zu bilden, hat nur statt, wenn ein recht winklichtes Dreiekk gegeben ist, wie ABC eines ist; und wie freilich immer vorhanden ist, wenn man von einem gewönlichen ganzen Karten-Blatt eine Ekke wegschneidet. Ich brachte daher meinen freundschaftlichen Unterredner in einige Verlegenheit, als ich mir sein Karten-Dreiekk ausbat, den rechten Winkel bei A wegschnitt, und ihm so ein schief-winklichtes Dreiekk zurükgab, mit der Bitte, auch daraus, wie vorhin, ein Vierekk zu bilden.

(2.) Die Behauptung, es lasse sich auf die gemeldte Art immer ein Quadrat formiren, ist in bestimmterem Ausdrukk so zu nehmen:

Entweder ein reines vollkommenes Vierekk, (Quadratum.)
Oder ein Rechtekk, ein Rectangel, (Quadratum oblongum.)

Nehmlich blos in dem Fall, wenn die ganze Höhe des gegebenen rechtwinklichten Dreiekks, (AB) zweimal so gros, als die Grundlinie desselben Dreiekks ist, kommt ein reines Quadrat durch das erzälte Verfaren zum Vorschein; d. h. wenn die halbe Höhe der Basis desselben Dreiekks gleich ist.

Ist aber die halbe Höhe der Basis nicht gleich, so erhält man notwendig nur ein Rectangel, oder ein Vierekk, in welchem blos die entgegenstehende Seiten gleich sind.

(3.) Der mechanische Act, vermittelst dessen man die Spizze eines solchen gegebenen Dreiekks, B, bis an die Ekke der Grundlinie, A, herunter beugt, ist weiter nichts, als Halbirung der Höhe, oder Bestimmung der halben Höhe, wie man ja mit jedem Blättchen Papier, das man zusammenfaltet, anzugeben vermag; En ist die Falte, d. i. die Gränze der halben Höhe; auch wie man spricht, die Helfte des Loths, oder Perpendikels, AB.

„Warum aber trifft dann dieß immer just so zu, daß ein jedes so abgerissene Stükk eines Dreiekks die Ergänzung zu einem Quadrat oder Rechtekk abgiebt?"

Die Frage wird sich wol ein jeder, der die Säzze des folgenden Blats zu lesen Lust hat, wie ich hoffe, beantworten können: Sie sezzen blos die Ueberzeugung voraus, daß jedes Dreiekk die Helfte eines Paralelogramms, und jedes rechtwinklichte △ insbesondre die Helfte eines Rechtekks oder Quadrats sei.

§. 6.

§. 6. (Fig. 5.)

Falte ein dir vorkommendes Dreiekk, in der Mitte; (wie §. 1.) schneide, was ober der Falte liegt, ab; und zerschneide das damit einzeln erhaltene △ Bmn wiederum in zwei rechtwinklichte Dreiekke; Diese zwei Dreiekke lassen sich jedesmal an das übriggebliebene Trapezion zur rechten, und zur linken so anlegen, (anschifften) daß ein Parallelogramm zum Vorschein kommt, (ein Rechtekk oder ein Vierekk,) dessen Innhalt ganz dem Innhalt des △ ABC gleich seyn mus, da es ja ganz aus Fragmenten des Dreiekks ABC besteht.

So läst sich jedes Dreiekk blos mechanisch in ein Rechtekk verwandeln von ganz gleichem Innhalt. Die Höhe des Rechtekks ist immer die halbe Höhe des Dreiekks.

Daß das △ BEn ⩵ △ DCn, und jedes dieser Dreiekke ein Viertel des Rechtekks, PCED sei, ist gewiß leicht begreiflich; eben so leicht, als daß △ BPC so gros, als dieses Rechtekk seyn müsse.

Deshalb ergänzt dann das Stükkchen BEn das Trapezion EnPC zu einem Rechtekk, (oder Vierekk) notwendig.

Eben so verhält sichs mit dem andern △ BEm ⩵ △ LAm.

Der Punct, der die Helfte zwischen ED angiebt, n, wird durch die Mitte der Diagonale BC; Eben so der Punct, m, welcher die Helfte von LE angiebt, wird durch die Mitte der Diagonale AB bestimmt; Hinwiederum aber die Mitte dieser zwei Diagonalen, durch die Mitte der gemeinschaftlichen Höhe, PB.

§. 7. (Fig. 6.)

Faltet man das abgeschnittene Dreiekk, Bmn in der Mitte, so erhält man abermals oben ein Dreiekkchen, Biv, und unten ein Trapezion, mniv; von welchen sich das nehmliche sagen und bemerken läſt, was wir von den ähnlichen Fragmenten des ganzen △ABC, d. h. von Bmn + ACmn selbst bemerkt haben. Das △ Biv ist ein Viertel des △ Bmn; und da dieses ein Viertel des ganzen △ ABC ist, so ist notwendig

$\triangle\ Biv = \frac{1}{16}\ \triangle\ ABC.$

Das Trapezion unten dran, mniv, ist $\frac{3}{4}$tel des △ Bmn, also $= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}\ ABC = \frac{3}{16}\ ABC.$

Die geometrische Verzeichnung auf dem Papier verräth zwar sogleich die Aehnlichkeit des obersten Dreiekkchen, Biv, mit Bmn, und ABC selbst; wie auch die Aehnlichkeit der Trapezien mniv und ACmn; Aber die Gröse der Areen erräth das Auge nimmer mehr.

Nur ein Schluß der Rechnung giebt sie bestimmt an, und erst durch Hülfslinien läſt sich das Resultat des Calküls, auch graphisch, überzeugend darthun.

§. 8.

Anstatt sich allein mit △ Bmn zu beschäftigen, kann man sogleich das ganze Dreiekk ABC vornehmen, und dasselbe doppelt falten, oder den Act der ersten Faltung (§. 1.)

Anstatt der einen Paralele, mn, mit der Grundlinie AC, gleich laufend, kommen nun noch zwei neue Paralelen zum Vorschein, iv, und ts; und dadurch geben sich wieder-

wiederholen, so daß das entfaltete Dreiekk sodann drei Trapezien, und das Dreiekkchen obendran, △ Biv zeigt.

Schneidet man diese Trapezien nach der Reihe herunter, so erhält man folgende Areen:

△ Biv $= \frac{1}{16}$ △ ABC.

Trapez. mniv $= \frac{3}{16}$ △ ABC.

Trapez. mnts $= \frac{5}{16}$ △ ABC.

Trapez. ACts $= \frac{7}{16}$ △ ABC.

Schneidet man das obre Trapezion mniv querdurch, so erhält man zwei Dreiekke; Das Grösere, min, ist die Helfte des △ Bmn, also die Helfte eines Viertels, $= \frac{1}{8}$ ABC $= \frac{2}{16}$. Das kleinere, niv, ist $= \frac{1}{16}$ ABC, weil es mit △ Biv gleiche Höhe und Basis hat. Diese zwei Dreiekke verhalten sich dann, wie 1 : 2.

drei Trapezien nebst dem Dreiekkchen Biv. Die Gröse dieser Trapezien ist leicht erwiesen:

Wir kennen schon Trap. mniv $= \frac{3}{16}$. Wird dasselbe durch eine Diagonale, in, getheilt, so ist das eine △ = Der Helfte des △ Bmn, weil i in der Mitte der Linie Bm liegt; also △ min $= \frac{1}{8}$ ABC.

Das andre, △ niv, ist wolbegreiflich = △ Biv.

Die Diagonale hätte auch von m nach v laufen können, man hätte eben zwei solche Dreiekke dadurch erhalten, wie aus §. 2. erhellen mus.

Daß das zweite Trapezion mnts $= \frac{5}{16}$ sey, zeigt sich so:

Die Diagonale bildet auch in diesem Trapezion zwei Dreiekke; Das kleinere, △ mnt ist sicher = △ min, das zu nächst ober ihm liegt, auch = △ mvn; in dem es ja gleiche Höhe und Basis mit diesen hat; also ist es $= \frac{2}{16}$ oder ein Achtel des △ ABC.

Schnei-

Schneidet man das 2te Trapezion mnts, eben so quer durch, so ist das grösre Dreiekk, das damit abfällt, △ tns = $\frac{3}{16}$ ABC;

Das kleinere aber, △ mnt = $\frac{2}{16}$ ABC; oder ein Achtel des ganzen △ ABC.

Diese zwei Dreiekke verhalten sich also gegen einander, wie 2 : 3.

Schneidet man auch das unterste Trapezion ACts = $\frac{7}{16}$ eben so quer durch, so erhält man abermals zwei Dreiekke;
Das grösre, ACs ist = $\frac{1}{4}$ ABC = $\frac{4}{16}$.
Das kleinere Ats = $\frac{3}{16}$ ABC.

Diese verhalten sich also gegen einander, wie 3 : 4.

Es läßt sich schon hier ahnden, daß diese schöne Gesezlichkeit bei simpler Dichotomie an jedem Trapezion, auch bei einer Wahl ganz andrer Falten, seine Anwendung finden möchte. Die Gewißheit hievon wird aber erst weiter unten beigebracht werden können.

Das grösere △, tns, ist = $\frac{3}{16}$, wie sich (unter andern) ergiebt, wenn man von t nach v eine Hülfslinie zieht, und also dadurch ein △, Btv zeichnet; Dieses ist doch sicher = $\frac{3}{16}$; demselben gleich wäre sodann △ tnv; und endlich diesem gleich, unser △ tns.

Also rechnet man die zwei Dreiekke, tns + mnt, zusammen; ihre Summe ist die Area des Trapezions = $\frac{5}{16}$.

In dem lezten Trapezion ist △ Ats immer = tns, also = $\frac{3}{16}$ ABC; also mus wol das unterste △ ACs = $\frac{4}{16}$ seyn, weil kein andre Zal denkbar ist, wenn man herunter zält, um $\frac{16}{16}$ voll zu machen. Doch kann man diese Gröse auch so darthun: Weil ein △ ABv = $\frac{4}{16}$ notwendig ist, und △ ACs gleiche Höhe und Basis hat, so mus auch dieses △ gleichen Innhalt haben.

§. 9.

§. 9. (Fig. 6.)

Schneidet man von einem so doppelt gefaltenen Dreiekk, das Stükk, das durch die unterste Falte markirt ist, weg, so erhält man ein Dreiekk, (Bts) ganz ähnlich dem ganzen Dreiekk, dessen Innhalt aber nur $\frac{9}{16}$ des ganzen und dessen Höhe $\frac{3}{4}$tel der Höhe PB in ABC enthält. Liefe die Falte, ts, also nur ein wenig höher, so erhielte man wol $\frac{8}{16}$ oder die Helfte des ganzen △ABC nahe hin. Ganz genau erhält man aber diese oft verlangte Helfte des ganzen Dreiekks ABC, durch wiederholte Halbirungen der Höhe, (als womit wiederholtes zusammen = falten eben zusammen trifft) nimmermehr, man mag Versuche anstellen, wie man will.

Schneidet man von dem neu erhaltenen △ Bts, das oberste Dreiekkchen, Biv, weg, so bleibt ein Trapezion übrig, tsiv, welches

Wird die Paralele ts zur Basis eines △, Bts, angenommen, so ersieht man sofort, daß alle Winkel bleiben, und also Bts ∽ ABC seyn müsse. Die Innhalte stehen gegen einander, wie $9 : 16 = 3 : 4$.

Dies erinnert an den Saz: die Areen zweier ähnlicher Dreiekke verhalten sich, wie die Quadrat-Wurzeln der Höhen, (S. Kästn. Geom. 42 Saz. 23 Zus.) weil die zwei leztern Zalen wirklich als die □ Wurzeln aus den zwei erstern anzusehen sind. Ich hätte sogleich §. 1. darauf füren können, weil auch dort die Area des △ ABC zur Area des △ Bmn sich verhält, (1 zu 4), wie die Höhe PB zu der Höhe $\frac{1}{2}$ PB, d. i.
$1 : 4 = 1 : 2 = \sqrt{1} : \sqrt{4}$.

Uebrigens wird darüber, daß man durch fortgesezte Halbirungen der Höhe, und Paralelen (immer in der Mitte zweier schon vorhandnen aus den zwei mittlern Trapezien besteht, und also:

$= \frac{3}{16} + \frac{5}{16} = \frac{8}{16}$ ABC.

d. h. die Helfte des ganzen Dreiekks rein und vollkommen zum Innhalt hat.

§. 10.

Schneidet man von diesem Trapezion das kleine Dreiekkchen, △ niv, (welches = Biv ist,) weg, so bleibt ein Trapezoid = tins = $\frac{8}{16} - \frac{1}{16} = \frac{7}{16}$. Dessen Innhalt also dem Innhalt des weggeschnittenen untersten Trapezions ACts wieder, gleich ist; aber auch = △ Bms = △ Btn.

Schneidet man aber die Ekke, sin, von diesem Trapezoid ab, so bleibt ein Dreiekk, tis, = $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$ ABC. Es ist dem ganzen △ ABC zwar nicht ähnlich, hat aber doch einen homologen Winkel, bei t, welcher dem bei A gleich ist, und die Helfte der Höhe PB, wie auch die Helfte des Schenkels AB = ti zur Seite. Paralelen gezogen,) doch nie eine Linie erhält, welche mit vollendeter Schärfe ein Dreiekk, = $\frac{1}{2}$ ABC, angiebt, unten noch insbesondere abgehandelt werden.

(Fig. 7.)

Findet jemand Lust, oder hat ein Bedürfnis, das Trapezoid, tins, in ein Dreiekk verwandelt zu sehen, welches dem △ ABC ähnlich wäre, der würde die Kunst, dieses zu bewerkstelligen, aus sehr vielen Handbüchern erlernen können; Namentlich aus Schulzens Taschenb. Th. 1. §. 425. bis 434.

Es giebt der Methoden mehrere. Für Anfänger ist immer die anzurathen, nach welcher das gegebene Trapezoid tins zuerst in ein reines Quadrat, so dann in ein Paralelogramm mit einem bestimmten aus dem △ ABC übergetragenen Winkel verwandelt, und endlich dieses Paralelogramm,

13

Auch ein anderes Dreiekk = $\frac{3}{8}$ ABC läſt ſich ſehr bequem aus dem ganzen Dreiekk ABC ausſchneiden, rechts oder links,

$\triangle$Ain = Cmv, jedes = $\triangle$tis.

Man denke es ſich ſynthetiſch, z. B.

$\triangle$Amn + min = $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ iſt = $\frac{3}{8}$.

§. II.

Schneidet man von einem Dreiekk das obre und unterſte Trapezion heraus, ſo iſt die Summe dieſer beiden = $(\frac{3}{16} + \frac{7}{16}) = \frac{5}{8}$ ABC, d. h. ſie ſind, beede zuſammen durch eine Diagonale halbirt wird. (*)

Eben dieſes will ich auch hiemit auf ſehr viele andre Figuren bezogen haben, welche wir bisher als aliquote, aber nicht als ähnliche Theile des $\triangle$ ABC haben kennen lernen.

(Fig. 7.)

Die ſtetige arithmetiſche Proportion liegt garnicht tief verſtekkt, wenn man die nun bereits bekañte Areen der Trapezien nur neben einander ſezzt:

$$\frac{3}{16} : \frac{5}{16} = \frac{5}{16} : \frac{7}{16};$$

(*) Ein jedes Trapezoid läſt ſich doch ſicher in zwei Dreiekke abtheilen, wie eben das vorhandene, tins, in $\triangle$tin + $\triangle$tns; (in der 6ten Fig.) und jedes dieſes Dreiekke in ein □ oder Rechtekk verwandeln. Ein Vierekk, ſo gros als die Summe dieſer zwei Vierekke, ergiebt ſich aus Pythagoras Theorem, wenn man ſie rechtwinklicht zuſammenſezzt, und die Hypotenuſe quadrirt. ... Das übrige folgt ſpielend. Ich wollte dieſes blos Anfängern zu lieb noch beigefügt haben; und verweiſe ſie übrigens, als an die Haupt-Quelle, an Euklids Probl. 42. L. 1. und Probl. 14. L. 2. Wer die dortigen Säzze nicht durch zu ſtudiren Gedult hat, für den iſt wol Mathematik nicht beſtimmt, noch er für Mathematik!

genommen, doppelt so gros, dem Innhalt nach, als der Innhalt des mittlern, mnts, weil $\frac{10}{16} = 2.(\frac{5}{16})$ beträgt.

Eben so viel beträgt die Summe der 2. Dreiekke: △ Bin ✠ △ AmC; denn $\frac{2}{16}$ ✠ $\frac{8}{16}$ ist auch = $\frac{10}{16}$.

Eine sehr leichte Folgerung daraus ist: daß das Fragment eines Paralelogramms, oder das querliegende Trapezion, Cmin, notwendig = $\frac{6}{16}$ oder $\frac{3}{8}$ seyn müsse; wie ja die Ergänzung zum ganzen Dreiekk erfordert.

So lassen sich noch manche andre Aequivalente herausschneiden.

§. 12.

Aus einem Dreiekk ABC ein Trapezion = $\frac{3}{4}$ ABC herabzuschneiden, lehrte uns schon §. 1. und 2. genüglich. Aber, wenn man nur das Dreiekkchen Biv faltet, und dann auch von C nach i eine Falte schlägt, ists eben so leicht, ein Dreiekk, das $\frac{3}{4}$ ABC ist, Die Summe der äusern Glieder ist der Summe der mittlern ja immer gleich. Das eine äussre Glied ist aber das Correlat des obersten Trapezions, das andre das Correlat des untersten.

Zeichnet man das Trapezoid Cmin aus, daß ein Rechtekk daraus wird, so ist zur Ergänzung das △ Bin nötig. Als dann hat man ein Rechtekk, Ci, mit dem Innhalt = $\frac{1}{2}$ ABC. Dieses Rechtekks Höhe wäre immer ein Viertel des einen Hauptschenkels, AB; Die Basis aber, Cm, die bedeutende Linie, welche AB von C aus halbirt.

(Fig. 7.)

Das Dreiekk, ACi, welches man in Zeichnung so leicht, blos durch die Diagonale, Ci erhält, und welches dann als = $\frac{3}{4}$ ABC erscheint, hat die nehmliche Höhe, wie das △ Bts, welches (nach §. 9.) um eine Paralele höher steht, und dessen Area = $\frac{9}{16}$ ABC ist.

ab-

abzuschneiden; es ist $\triangle$ ACi; dann man betrachte nur das anliegende $\triangle$ BiC, es ist offenbar $= \frac{4}{16}$; folglich bleibt

für $\triangle$ ACi, $= \frac{12}{16}$, also $\frac{3}{4}$ ABC.

Es ist dem Dreiekk ABC nicht ähnlich, hat aber doch den Winkel bei A, und die Basis AC gemein, und zur Höhe zugleich $\frac{3}{4}$tel der Höhe PB.

Verlangt man $\frac{13}{16}$ ABC, so ist es jezt leicht das Trapezoid, ACis, zu schneiden, welches diesen Gehalt hat.

Verlangt man $\frac{14}{16}$, oder $\frac{7}{8}$ ABC, so ist das Trapezoid, ACin, offenbar so gros.

Schneidet man endlich von $\triangle$ ACi ein Dreiekkchen, so gros als Cis oder nis weg, so bleibt eine Area $= (\frac{12}{16} - \frac{1}{16})$, d. h. $\frac{11}{16}$; Soviel ist auch die Summe der mittlern Trapezien, mit dem kleineren Dreiekk des untersten Trapezions,

tsiv $+$ Ats $= \frac{8}{16} + \frac{3}{16}$, oder das Trapezoid Asiv $=$ Ctiv.

Drükkt man $\frac{3}{4}$ als $= \frac{12}{16}$ aus, so zeigt sich das Verhältnis der Areen dieser zwei Dreiekke Bts, und ACi gegen einander:

$$9 : 12 = 3 : 4$$

Sie sind nicht ähnlich. Wären sie es, so würden ihre Höhen heisen: $\sqrt{9} : \sqrt{12}$; aber ihre Höhen sind hier gleich, jede $\frac{3}{4}$ PB.

Uebrigens ist, wie man sieht, die Zal, welche den Innhalt des Dreiekks, ACi, ausdrükkt, nehmlich $\frac{3}{4}$, mit der Zal, welche die Höhe dieses Dreiekks ausdrükkt, den Zifern nach einerlei, welches blos bei diesem $\triangle$ vorkommt, und daher wol zu merken ist. Bei der Area ist (3 : 4) im Flächenmaas oder in der 2ten Dimension zu denken; bei der Höhe im Linien-Maas, oder in der ersten Dimension.

§. 13. (Fig. 8.)

Jedes der drei Trapezien läst sich schnell zu einem Paralelogramm zurecht-schneiden. Der Schnitt mus immer mit AB paralel laufen, und nach s, oder n, oder v, gehen. Da fällt jederzeit ein Dreiekkchen, das = Biv ist, ab; und der Rest ist ein Paralelogramm,

in dem Trap. mniv, eines $= \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$.
in dem Trap. mnts, eines $= \frac{4}{16} = \frac{2}{8}$.
in dem Trap. ACts, eines $= \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

Eben so gros sind die drei Rechtekke in eben diesen drei Trapezien,

$$\left.\begin{array}{l} vw = 1 \\ mf = 2 \\ rg = 3 \end{array}\right\} \text{8tel } ABC;$$

Die Summe des 1sten und 3ten ist doppelt so gros, als das 2te.

Es ist also das Gesez, wie bei den Trapezien selbst.

Die Figur bekommt in der Zeichnung ein viel gefälligeres Ansehen, wenn man △, ABC, als ein gleichschenklichtes Dreiekk zeichnet. Alsdann fällt das Perpendikel, PB, allerwärts durch die Mitte; und die rechtwinklichte Dreiekkchen an beeden Seiten herunter sind dann durchgehends gleich, jedes einzeln = der Helfte des △ Biv; dahingegen jezt blos ihre Summe, in jedem Trapezion zusammen addirt das △Biv, oder $= \frac{1}{16}$ ABC beträgt.

Allein, um die Allgemeinheit der bisherigen Säzze zu erproben, fand ich für räthlicher, immer ein ungleichschenklichtes △ zum Grund zu legen.

§. 14.

Wir haben jezt Fragmente genug von 1 . . . bis 16 Theile, und mehrere (aequivalente) Areen, die sich sämmtlich, als abgerissene Stükke des Dreiekks, ABC, betrachten lassen. Ich will die vorzüglichsten zur Uebersicht zusammen stellen:

1. 16tel. . . . . . △ Biv, △ miv, △ niv, (Atl + Csg.)
2. . . . 1. 8tel. . . △ Bin, △ Bvm, △ vis; Paral. mv; Rctng. vw.
3. . . . . △ Bis, △ Bvt, △ Civ, △ Aiv; △ Ats; Trap. mniv.
4. . . . 1. Viertel. . △ Bmn, △ Amn, △ BiC, △ ACs, △ tin.
5. . . . . Trap. mnts. = Trapzd. Cmis.
6. . . . 3. 8tel. . . △ Ain; △ Cmv; △ tis; Trap. Cmin; Rctn. tlsgi
7. . . . . Trap. ACts; Trapzd. Avin. = tins = △ Bms.
8. . . . 4. Achtel. . △ ACm; △ ABn; Trap. ivts; = (△ Biv + Tr. ACts.)
9. . . . . △ Bts; Trapzd. Astv, = Ctis.
10. . . . 5. 8tel. . . (△ Bin + ACm.); = (Trap. mniv + Tr. ACts) = Asin.
11. . . . . Trapzd. Asiv. = Ctiv.
12. . . . 3. Viertel. . △ ACi = △ ACv; = Trap. ACmn = △ ABs.
13. . . . . Trapzd. ACis.
14. . . . 7. 8tel. . . Trapzd. ACin. = ACmv.
15. . . . . (△ Bts + □ tlsg); (Ein V. Ekk). = Trap. ACiv.

Ich will diese 15. aliquote Theile des Dreiekks ABC mit Decimalen ausdrükken; Der Gebrauch davon wird sich weiter unten näher darthun:

1 Sechzentel	ist	=	0, 0625.	9 Sechzentel	ist	=	0, 5625.
2 . . .		=	0, 125.	10 . . .		=	0, 625.
3 . . .		=	0, 1875.	11 . . .		=	0, 6875.
4 . . .		=	0, 25.	12 . . .		=	0, 75.
5 . . .		=	0, 3125.	13 . . .		=	0, 8125.
6 . . .		=	0, 375.	14 . . .		=	0, 875.
7 . . .		=	0, 4375.	15 . . .		=	0, 9375.
8 . . .		=	0, 5.	16 . . .		=	1, 0000.

Hiemit will ich die Innhalte der Dreiekke, und der Trapezien verbinden, welche bei 4. Paralelen die simpelste sind; Nehmlich, wenn

das obre Dreiekk			das Trapezion drunter.	
$\frac{1}{16}$ ABC ist, also	0, 0625.	so ist:	$\frac{15}{16}$ ABC	= 0, 9375.
$\frac{4}{16}$	0, 25.	so ist:	$\frac{12}{16}$ . .	= 0, 75.
$\frac{9}{16}$	0, 5625.	so ist:	$\frac{7}{16}$ . .	= 0, 4375.

Eine solche Vergleichung der Trapezien und der Dreiekke oben dran wird unten mehr im Detail vorkommen. Ich wollte hier blos darauf vorbereiten; Und gehe nunmehr auf dem einmal betretenen Pfad gerade zu weiter, ohne jedoch die doppelte Vorstellungs-Art des mechanischen Verfarens mit Dreiekk-Abschnitten, und mit linearischen Constructionen (in 2. Columnen) noch fernerhin zu verfolgen. Jeder meiner Leser wird das Geschäft nun für sich selber, so weit ihn gelüstet, fortsezzen können. Meiner Vorträge sind noch viele; Ich mus Zeit und Raum sparen.

§. 15.

§. 15.

Würde die Höhe des Dreiekks ABC nicht in vier- sondern acht Theile abgetheilt, so erhielte man acht Paralelen, und das oberste Dreiekkchen wäre nun nicht Biv, sondern $\frac{1}{4}$ Biv, d. h. $\frac{1}{4}$. ($\frac{1}{16}$ ABC) = $\frac{1}{64}$ ABC.

Hierauf käme ein Trapezion, dessen Basis, iv, wäre, dessen Area selbst aber $\frac{3}{4}$ △ Biv, d. i. $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{16}$ oder $\frac{3}{64}$ notwendig seyn muste.

Aus dem folgenden Trapezion, welches bisher, mniv, (= $\frac{3}{16}$) war, würden nunmehr zwei gebildet.

Der Gehalt des obern, (dessen obere Seite iv wäre) würde nun (folgweise) = $\frac{5}{16}$ seyn;
und der Gehalt des nächsten dran, (dessen Basis, mn, wäre) um zwei 64stel mehr, oder = $\frac{7}{64}$.

So liefe die Reihe dann fort; es folgten noch vier Trapezien; Ihre Areen wären, $\frac{9}{64}$, $\frac{11}{64}$, $\frac{13}{64}$, $\frac{15}{64}$. Hielte die Area des lezten Trapezions also nur ein einziges 64stel mehr, so wäre es $\frac{16}{64}$ d. i. $\frac{1}{4}$ ABC = Bmn. Also ist es nur um einen so geringen Theil kleiner. Diese Bemerkung ist nicht unwichtig; — Gar sehr interessant aber die Erkenntnis der ganzen Reihe überhaupt. Sie enthält jezt 8. Glieder; Der Verhältnis-Anzeiger bleibt, 2, wie er es bei der vorigen Reihe, von $\frac{1}{16} \ldots \frac{7}{16}$ war. Das heißt: wenn eine Area = x ist, so ist die nächstfolgende drunter: x + 2.

§. 16.

Theilt man die Höhe in 16. gleiche Theile ab, so wird das oberste Dreiekkchen $= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{64} = \frac{1}{256}$ seyn; Darauf folgen 15. Trapezien; Das erste hält $= \frac{3}{256}$, das zweite $= \frac{5}{256}$, das dritte hat im Zäler 7, das vierte hat 9, und so geht es fort; das 15te oder unterste hat 31, oder ist $= \frac{31}{256}$ ABC.

Theilte man die Höhe desselben Dreiekks, ABC, in 32. gleiche Theile ab, so würde der Innhalt des obersten Dreiekkchens $= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{256} = \frac{1}{1024}$ ABC seyn; Darauf aber folgten 31. Trapezien bis auf die Grundlinie hinab. Das erste ist: $= \frac{3}{1024}$ ABC. Das zweite hat im Zäler 5, der Nenner aber bleibt. So läuft die Reihe fort; . . . . . .
Das 31ste und lezte ist: $= \frac{63}{1024}$.

Auf ähnliche Weise gehts dann ins Unendliche gleichförmig weiter, wenn man immer ein vielfaches der Zwei, (ein Multiplum der Zal, 2,) in der Eintheilung der Höhe beibehält.

§. 17.

Um dieses allgemein zu fassen, gewöhne man sich an folgende Vorstellungs-Art:

Da überall bei diesen Abtheilungen, und Unterabtheilungen Multipla von 2 vorkommen, so ist wol räthlich, ohngefär wie folgt, sich auszudrükken:

Wenn

Wenn PB die Höhe eines Dreiekks, von welcher Gattung es seyn mag, z. B. des $\triangle$ ABC, in der Mitte von einer mit der Grundlinie gleichlaufenden Linie durchschnitten wird, also die Hauptvoraussezzung $\frac{PB}{2}$ ist, so giebt das 2 Stükke: 1 Dreiekk $= \frac{1}{2^2}$

und 1 Trapezion $= \frac{3}{2^2}$

Da sind also Zwo Paralelen, (die Basis dazu gezält).

Wenn dieselbe Höhe viermal abgetheilt wird, und, den Abtheilungs = Puncten gemäs, vier Paralelen gezeichnet werden, (die Basis dazu gerechnet,) also die Haupt = Voraussezzung $\frac{PB}{2^2}$ ist, so giebt das 4 Stükke: (*) 1 Dreiekk $= \frac{1}{2^4}$

und 3 Trapezien: $\frac{3}{2^4} + \frac{5}{2^4} + \frac{7}{2^4}$.

Wenn dieselbe Höhe achtmal abgetheilt, und so acht Paralelen gezogen werden, also die Haupt = Voraussezzung $\frac{PB}{2^3}$ ist, so giebt das 8 Stükke: 1 Dreiekk $= \frac{1}{2^6}$

und 7 Trapezien: $\frac{3}{2^6} + \frac{5}{2^6} \ldots + \frac{15}{2^6}$.

(*) Man merke sich hiebei, um das folgende leicht zu verstehen, diese Potenzen der Zal 2:
$2^1 = 2$. $2^2 = 4$. $2^3 = 8$. $2^4 = 16$. $2^5 = 32$. $2^6 = 64$. $2^7 = 128$. $2^8 = 256$. $2^9 = 512$. $2^{10} = 1024$. $2^{11} = 2048$.

Wenn dieselbe Höhe sechszehnmal abgetheilt ist, und sechszehn Paralelen gezogen werden, also die Haupt = Voraussezzung $\frac{PB}{2^4}$ ist, so giebt das 16 Stükke: 1 Dreiekk $= \frac{1}{2^8}$

und 15 Trapezien: $\frac{3}{2^8} + \frac{5}{2^8} \ldots + \frac{31}{2^8}$.

Endlich läst sich allgemein sezzen, wenn die Höhe 2^n mal abgetheilt worden, und 2^n Paralelen gezeichnet stehen, also die Haupt = Voraussezzung $\frac{PB}{2^n}$ ist, so giebt das, 2^n Stükke; nehmlich immer

1 Dreiekk, $= \frac{1}{2^{2n}}$, (dem Innhalt nach)

und $2^n - 1$ Trapezien, (der Anzal nach,) deren Innhalte

sind: $\frac{3}{2^{2n}} + \frac{5}{2^{2n}} + \frac{7}{2^{2n}} \ldots\ldots + \frac{2^{n+1}-1}{2^{2n}}$

wo also jeder dieser Brüche eine gewisse Area vorstellt.

Man mag die Reihe noch so weit hinaus, als man etwa Lust hat, fortsezzen, so werden diese allgemeine Vorstellungen zutreffen, und die von mir gebrauchte Signaturen richtig überall hinweisen. Man versuche es selbst mit mehreren Beispielen in Concreto.

§. 18.

Der Folge wegen ist nötig zu bemerken, daß der allgemeine Ausdruk für jedes unterste und lezte Trapezion, $\frac{2^{n+1}-1}{2^{2n}}$, (wenn nehmlich bei der Eintheilung der Höhe $\frac{PB}{2^n}$ angenommen ist,) auch sich von der Anzal der Trapezien, die jedesmal 2^n-1 ist, hernehmen lasse.

Diese Gröse nehmlich duplirt, $= 2.(2^n-1)$
und (zu diesem Doppelten) $+1$ addirt, $= \quad +1$
giebt zur Summe den Záler zu der $= 2.\ 2^n - 2 + 1$
Innhalts-Gröse des lezten Trapezions oder $2.(2^n-1)+1$
welche Signatur, wie man bald einsieht, eben so viel, als die obige Gröse des Zälers $(2^{n+1})-1$ besagt; Der Nenner bleibt, 2^{2n}, wie oben.

Also der ganze Gehalt eines lezten Trapezions oder seine Area wäre auch als $= \frac{2.(2^n-1)+1}{2^{2n}}$ zu gedenken.

Natürlich kann man aber auch den Ausdruk desselben Zälers von der Anzal der Theilungs-Puncte selbst hernehmen: Diese Zal ist $= 2^n$. Diese Gröse duplire man, und ziehe 1 ab, so hat man ebendasselbe Aequivalent: $= (2.2^n)-1$ im Záler. Also heist alsdann der Gehalt des Trapezions $= \frac{(2.2^n)-1}{2^{2n}}$. Blos der Folge wegen ist diese Vorstellungsart nicht unwichtig.

§. 19.

Wenn man die Höhe eines Dreiekks ABC, in 3 Theile theilt, und durch die Puncte der Abtheilung Paralelen mit der Grundlinie zieht, mn, fd, so erhält man oben 1 Dreiekk, und 2 Trapezien.

Das Dreiekk Bmn, ist immer = 1/9 tel ABC.

Das erste Trapezion mnfd, ist = 3/9 tel auch = 1/3 tel.

Das zweite Trapezion (ACfd,) ist = 5/9 tel ABC.

Der Beweis dieser Säzze ist leicht, man sehe die gezogenen Linien in den Constructionen Fig. 9.

(I.) So gros, als Δ Bmn ist Δ mnd wie auch Δ mdC; (bei gleicher Höhe und Basis.)

Also ist Δ Bmn $= \frac{1}{3}$ Δ BCm. Aber dieses Dreiekk BCm ist ein Drittel des ganzen Dreiekks ABC; ($= \frac{1}{3}$ ABC.) Folglich ist Δ Bmn $= \frac{1}{3}$. ($\frac{1}{3}$ ABC) d. h. $= \frac{1}{9}$ ABC.

(II.) Das Trapezion, mnfd, besteht aus den 2 Dreiekken, mnd und mfd. Wir kennen gewiß schon beede, wenn wir nur auf die Constructionen des 2ten und 4ten §phen zurükſehen: Denselben gemäs ist Δ mnd ein Drittel des Trapezions oder Δ mnd = Bmn, d. i. $= \frac{1}{9}$ ABC.

und Δ mfd $= \frac{2}{3}$ des Trapezions, oder $\frac{2}{9}$ ABC.

Folglich das ganze Trapezion $= \frac{2}{9} + \frac{1}{9} =$ d. i. $\frac{3}{9}$ oder $\frac{1}{3}$ ABC.

(III.) Das unterste Trapezion, ACfd, ist dann notwendig $= \frac{5}{9}$; als Complement zu $\frac{9}{9}$; so daß damit abermals eine arithmetſche Progreſſion vorhanden ist, die auch, wie die uns bekannte von 2 zu 2 steigt:

$(\frac{1}{9} + \frac{3}{9} + \frac{5}{9})$ ABC = Tot. Δ ABC.

§. 20.

Da im untern Trapezion, ACf = $1/3$tel ABC ist, (wie der Augenschein der Eintheilung selbst beweist,) so ist das neben anliegende $\triangle$ Cfd leicht zu berechnen; es ist anzusehen, als Trap. tot. — ACf
d. i. = $5/9$ tel — $3/9$ tel = $2/9$ tel ABC.

Folglich ist dieses Dreiekk Cfd = $\triangle$ mfd; wie auch aus geom. Gründen, (bei gleicher Höhe und Basis) folgt. So bewährt eine Betrachtung und Rechnung die andere.

Eben so gros ist $\triangle$ Cmn. Denn man ziehe nur einmal ab:
$\triangle$ BCm — $\triangle$ Bmn = Cmn
d. i. $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \left(\frac{3}{9} - \frac{1}{9}\right) = \frac{2}{9}$ ACB.

Eben so gros ist dann auch auf der andern Seite das
Dreiekk Amn = $\triangle$ Cmn = $2/9$ tel ABC.

Folglich ist die Summe dieser 2 Areen = $4/9$ tel ABC = $\triangle$(Amn + Cmn).

Eben so gros ist $\triangle$ Bfd = $\frac{1}{9} + \frac{3}{9} = 1$ — Trap. ACfd = $1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$.

Addirt man aber das obre Dreiekk, Bmn, und das untre Trapezion ACfd, so erhält man:
$\frac{1}{9} + \frac{5}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ ABC.

Eben so gros ist das $\triangle$ ACm, wie auch BCf.

Addirt man Bmd, und eben dieses Trapez. so bekommt man
$\frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{7}{9}$ ABC = ($\triangle$ Bmd + Tr. ACfd.)

Eben so gros ist das Trapezoid: ACmd: = ACm + Cmd $\frac{6}{9} + \frac{1}{9}$, d. i. $\frac{7}{9}$.

Weiter, da Bmd = 2 Bmn, also $2/9$tel ABC ist, und $\triangle$ ACm = $6/9$tel, so erhält man auch dadurch $8/9$ tel ABC, = $\triangle$ Bmd + $\triangle$ ACm; Denn summirt ist: $\frac{2}{9} + \frac{6}{9} = \frac{8}{9}$.

Eben so gros ist die Summe der 2 Trapezien.

 Damit

Damit hätten wir dann abermals Areen von 1/9 tel ABC bis 9/9 tel; welche sich in der Folge noch durch viele Gleichungs-Grösen vermehren lassen werden.

Ich will denselben hier nur noch 2 Rechtekke beifügen, um eine (nicht unfruchtbare) Vergleichung mit dem Innhalt des §. 13. veranlassen:

Fig 10. Das Rechtekk, mnkr; ist = 2/9tel ABC.

Die Ergänzungen zur Seite betragen 1/9 tel des △ ABC zusammen aus.

Der Beweis ist leicht: (*) Das □ mnkr ist = △ mfd; Dann es nimmt die Helfte der Basis dieses △ mfd ein; (kr ist = 1/2 tel fd.) Die Höhe ist ebendieselbe.

Weiter das □ afgd ist = 4/9 tel. Das obere Rechtekk ist ja jezt nur doppelt vorhanden. Auch sind die Seiten-Ergänzungen wiederum zusammen = 1/9 tel. Aber das ganze Trapezion war 5/9 tel; Also 5/9 tel − 1/9 tel, giebt 4/9 tel ABC.

Demnach verhalten sich die zwei Rechtekke mnkr, und afgd, wie 2 : 4, d. i. wie 1 : 2, und haben also gegeneinander eben dasselbe Grösen-Verhältnis, welches die zwei oberste vw, und nf, in Fig. 8. führten. Diese Uebereinkunft wird jeder als notwendig ersehen, der bedenkt, daß in Fig. 8. das △ Bts sich betrachten lasse, wie unser gegenwärtig beleuchtetes, mittelst dreier Paralelen trichotomisch geformtes, △ ABC.

Nun

(*) So, wie dem 13ten §phen gemäs in Fig. 8. das Rechtekk vw dem △ min gleich war, und zwei Drittel des dortigen Trapezions mniv einnahm, eben so zeigt sich hier □ mnkr. Man denke sich auf einige Momente, das Dreiekk, Bfd, abgesondert, so daß fd die äusserste Gränze der Figur wäre, so mus doch gewiß von △ Bfd gelten, was von Bmn in Fig. 8. statt hatte.

Nun last uns eine Reihe aus den bisher eruirten Areen, welches aliquote Theile von ABC auch bei diesen Eintheilungen sind, zusammen ordnen:

Decinalen.

1/9 tel = 0, 111 . . . = △ Bmn.

2/9 tel = 0, 222 . . . = △ Bmd, = □ mr.

3/9 tel = 0, 333 . . . = △ BmC = Trap. mnfd = △ ACfi

4/9 tel = 0, 444 . . . = 2 (△ Cmn) = △ Bfd = □ ad.

5/9 tel = 0, 555 . . . = Trap. ACfd.

6/9 tel = 0, 666 . . . = △ ACm = BCf. = △ Bmn + Trap. ACfd.

7/9 tel = 0, 777 . . . = ACmd (Trapezoid.) = △ Bmd + Trap. ACfi.

8/9 tel = 0, 888 . . . = △Bmn + △ACm. = der Summe der 2 Trapezien.

Es ist sehr leicht einzusehen, daß 1/3 tel zu 0, 333 . . . gehöre, und 2/3 tel zu 0, 666 . . . Auch, daß die Summe der 2 Rechtekke, (□ mr + □ ad) = 2/3 tel ABC sei; und endlich, daß die Tüpfelchen andeuten, es liessen sich die Decimalen fortsezzen, so weit man nur die Schärfe treiben wolle, ob sich gleich die lezte Decimale nie angeben läst, und also die vollkommene Ergänzung natürlich immer unausgedrükkt bleibt, welches aber im Calkül nicht gefärlich wird, weil sie sich bis auf ein Minimum reduciren läst.

§. 21.

Wenn wir die Höhe PB in 9 gleiche Theile theilen, und wieder Paralelen mit der Basis durch die Theilungs-Puncte ziehen, so erhalten wir abermals oben ein Dreiekkchen, Biv, und 8 Trapezien, von iv an. (Fig. 9.)

Unser

Unser bisher geseztes oberes Dreiekk Bmn besteht jezt aus diesem kleinen △ Biv, und aus 2 Trapezien. Die Berechnung ist leicht: Wir verfaren ganz analogisch, wie oben §. 7 — 16, so:

△ Biv ist $= \frac{1}{9}$ Bmn $= \frac{1}{9}$ ($\frac{1}{9}$ ABC) d. h. $= \frac{1}{81}$ ABC.

Erstes Trapez. $= \frac{3}{9}$ Bmn $= \frac{3}{9}$ ($\frac{1}{9}$ ABC) d. h. $= \frac{3}{81}$ ABC.

Zweites Trapez. $= \frac{5}{9}$ Bmn $= \frac{5}{9}$ ($\frac{1}{9}$ ABC) d. h. $= \frac{5}{81}$ ABC.

Nun kommt aus der ersten Figur das Trapez. mnfd, jezt synthetisch als drei Trapezien, deren Gröse immer um 2/81 tel steigt; also

$$\text{Trap. mnfd} = \begin{cases} 1. = \frac{7}{81}. \\ 2. = \frac{9}{81}. \\ 3. = \frac{11}{81}. \end{cases}$$

Endlich kommt das lezte Trapez. ACfd, aus der 9ten Figur, auch wieder jezt synthetisch in drei Trapezien, wie folgt:

$$\text{Trap. ACfd} = \begin{cases} 1. = \frac{13}{81}. \\ 2. = \frac{15}{81}. \\ 3. = \frac{17}{81}.\ \text{ABC.} \end{cases}$$

so hat man das ganze Dreiekk ABC = △ Biv + 8 Trapez.

Die Summation der Zäler giebt die Probe: Es ist eine arithmetische Progression von 1 bis 17, aus 9 Gliedern bestehend; Also nach der bekannten Formel: $\frac{(1 + 17)\,9}{2} = \frac{18.\,9}{2} = 81$ heist der Zäler. Ebenso der Nenner. Folglich 81/81 tel = 1, wie eben seyn soll.

Man sieht leicht, daß bei diesen Abtheilungen die Areen, welche in der Mitte liegen, zum Innhalt Theile von 81 haben, die eine Reduction verstatten.

Nehm-

Nehmlich: Das erste Trapez. (unter Biv) ist = 3/81tel = 1/27tel ABC.
Das vierte . . . . ist = 9/81tel = 1/9tel $(= \frac{3}{27}.)$
Das siebente . . . . . ist = 15/81tel = 5/27tel.

Diese drei Trapez. formiren also auch wieder unter sich eine stetige arithm. Proportion = 1 : 3 : 5.

§. 22.

Hierauf trit, der Ordnung nach, die Eintheilung der Höhe PB in 27 gleiche Theile ein.

Da bekommt man dann wieder ein oberstes Dreieckchen, und unter demselben 26 Trapezien bis auf die Grundlinie des Dreiekks, ABC, herab. Das oberste Dreieckchen ist analogisch-genommen = 1/9tel Δ Biv,
d. i. $= \frac{1}{9} (\frac{1}{81} \text{ABC.}) = \frac{1}{729} \text{ABC},$

Hierauf folgen die Trapezien: Das erste = 3/729tel.
Das zweite = 5/729tel.
: : : : : : : :
Das unterste oder das 26ste = 53/729tel.

Da geben abermals die Werthe des 1ten, des 4ten, des 7ten . . . eine Progression, wie oben = 1 : 3 : 5 : 7 . . .

Nehmlich:	3/729tel ist =	1/243tel, auch	$3 : 3^6 =$	$1 : 3^5.$
Das 4te =	9/729tel ist =	3/243tel, auch	$(3 + 6) : 3^6 =$	$3 : 3^5.$
Das 7te =	15/729tel ist =	5/243tel, auch	$(9 + 6) : 3^6 =$	$5 : 3^5.$
Das 10te =	21/729tel ist =	7/243tel, auch	$(15 + 6) : 3^6 =$	$7 : 3^5.$
Das 13te =	27/729tel ist =	9/243tel, auch	$(21 + 6) : 3^6 =$	$9 : 3^5.$
Das 16te =	33/729tel ist =	11/243tel, auch	$(27 + 6) : 3^6 =$	$11 : 3^5.$
Das 19te =	39/729tel ist =	13/243tel, auch	$(33 + 6) : 3^6 =$	$13 : 3^5.$
Das 22te =	45/729tel ist =	15/243tel, auch	$(39 + 6) : 3^6 =$	$15 : 3^5.$
Das 25te =	51/729tel ist =	17/243tel, auch	$(45 + 6) : 3^6 =$	$17 : 3^5.$

§. 23.

Laßt uns jezt zu allgemeinen Vorstellungen schreiten: Wird die Höhe eines jeden Dreiekks, ABC,

in drei Theile getheilt, so daß 3 Paralelen (die Basis dazu gez.) vorhanden sind, d.h. wenn $\frac{PB}{3}$ ist: so giebt das 3 Stükke:	Bei 9 Theilen der Höhe, also 9 Paralelen, oder $\frac{PB}{3^2}$ erhält man 9 Stükke, (*) nehmlich:	Bei 27 Theilen der Höhe, also 27 Paralelen, oder $\frac{PB}{3^3}$ erhält man 27 Stükke, nehmlich:	Bei 81 Theilen der Höhe, also 81 Paralelen, oder $\frac{PB}{3^4}$ erhält man 81 Stükke, nehmlich:
1 Dreiekk $= \frac{1}{3^2}$	1 Dreiekk $= \frac{1}{3^4}$	1 Dreiekk $= \frac{1}{3^6}$	1 Dreiekk $= \frac{1}{3^8}$
und 2 Trapezien, $\frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^2}$	und 8 Trapezien, $\frac{3}{3^4} + \frac{5}{3^4} \cdots + \frac{17}{3^4}$	und 26 Trapezien, $\frac{3}{3^6} + \frac{5}{3^6} \cdots + \frac{53}{3^6}$	und 80 Trapezien, $\frac{3}{3^8} + \frac{5}{3^8} \cdots + \frac{161}{3^8}$

Der ganz allgemein-gültige Ausdruk wird also folgender seyn: Die Höhe eines jeden Dreiekks, wenn sie synthetisch $\frac{1}{3^n}$mal genommen wird,

(d.h.

(*) Man merke sich die Potenzen der 3: $3^2 = 9$. $3^3 = 27$. $3^4 = 81$. $3^5 = 243$. $3^6 = 729$. $3^7 = 2187$. $3^8 = 6561$.

(d. h. wenn 3^n Paralelen vorhanden sind, oder $\frac{P.B}{3^n}$ gesezt ist, giebt 3^n Stükke, nehmlich immer 1 Dreiekk $= \frac{1}{3^{2n}}$

und $3^n - 1$ Trapezien,

deren Reihe ist: $\frac{3}{3^{2n}} + \frac{5}{3^{2n}} + \frac{7}{3^{2n}} \ldots + \frac{(2.(3^n-1))+1}{3^{2n}}$

Statt des lezten Ausdruks für das unterste Trapez. hat aber auch der statt: $= + \frac{(2.\,3^n) - 1}{3^{2n}}$ welcher simpler ist. Der obere ist von der Anzal der Trapezien her genommen, der untere, (dessen Zäler $(2.3^n) - 1$ ist) von der Anzal der Abtheilungs-Puncte der Höhe, d. h. von der Anzal der Paralelen, 3^n, im Dreiekk abgeleitet. Man vergleiche damit die zwo Bemerkungen in §. 18; nebst den dort stehenden Gleichungen.

Man erhält aber noch einen Ausdruk für dieses lezte Trapezion, worinn gar keine Potenz der 2 mehr im Zäler erscheint, wenn man bedenkt, oder überzeugt ist, daß 2×3^n so viel ist, als $3^{n+1} - 3^n$;

Daher der ganze Zäler heisen mus:

$$\frac{3^{n+1} - 3^n - 1}{3^{2n}} \text{ auch } \frac{3^{n+1} - 1 - 3^n}{3^{2n}} \text{ auch } = \frac{3^{n+1} - (3^n + 1)}{3^{2n}}$$

Man dürfte wol beim Gebrauch bald die eine, bald die andre dieser Formeln dienlicher finden. Daher keine derselbe ganz zurükzulegen ist.

§. 24.

Wenn wir nach der Reihe fortfaren, Eintheilungen der Höhe PB in einem Dreiekk, ABC, vorzunehmen, so gerathen wir, da uns nun die Verhältnisse bei $\frac{PB}{2}$, $\frac{PB}{3}$, und deren Vielfachen, bei $\frac{PB}{2^n}$, $\frac{PB}{3^n}$, bekannt sind, auf $\frac{PB}{5}$; (weil nehmlich $\frac{PB}{4}$ als $=$, $\frac{PB}{2^2}$, schon unter die Formel $\frac{PB}{2^n}$, und deren zugehörige Beleuchtungen zurük zu weisen ist.)

Die Eintheilung der Höhe in 5 gleiche Theile, veranlaßt (wegen der damit eingezeichneten Paralelen), 1 Dreiekk oben, und 4 Trapezien. Die Areen dieser vier Figuren wären:

$$\tfrac{1}{25} + \tfrac{3}{25} + \tfrac{5}{25} + \tfrac{7}{25} + \tfrac{9}{25}\ ABC = \tfrac{25}{25}\ ABC.$$

Auch weiterhin trit die ganz ähnliche Gesezlichkeit ein, welche wir schon aus §. 17. und §. 21. kennen. Die Ausdrükke durch Potenzen im Nenner, und dann auch insbesondre bei den untersten Trapezien, geht deshalb auch hier durchgehends an.

Laßt uns daher dem schon einmal gefaßten Leit-Faden treu bleiben, und folgende Vorstellungen verfolgen:

Wenn die Höhe des Dreiekks, ABC, eingetheilt wird

In 5 Theile, oder wenn $\frac{PB}{5}$ gesezt ist, also bei 5 Paralelen erhält man (*) 5 Stükke	In 25 Theile, oder wenn $\frac{PB}{5^2}$ gesezt wird, also bei 25 Paralelen erhält man 25 Stükke	In 125 Theile, oder wenn $\frac{PB}{5^3}$ gesezt wird, oder bei 125 Paralelen erhält man 125 Stükke	In 625 Theile, oder wenn $\frac{PB}{5^4}$ gesezt wird, oder bei 625 Paralelen erhält man 625 Stükke
1 Dreiekk $= \frac{1}{5^2}$	1 Dreiekk $= \frac{1}{5^4}$	1 Dreiekk $= \frac{1}{5^6}$	1 Dreiekk $= \frac{1}{5^8}$
und 4 Trapezien,	und 24 Trapezien,	und 124 Trapezien,	und 624 Trapezien,
$\frac{3}{5^2} + \frac{5}{5^2} + \frac{7}{5^2} + \frac{9}{5^2}$	$\frac{3}{5^4} + \frac{5}{5^4} \ldots + \frac{49}{5^4}$	$\frac{3}{5^6} + \frac{5}{5^6} \ldots + \frac{249}{5^6}$	$\frac{3}{5^8} + \frac{5}{5^8} \ldots + \frac{1249}{5^8}$

Dadurch rechtfertigt sich folgender allgemein-gültige Ausdrukk:

Wenn 5^n Parälelen in dem Dreiekk, ABC, gesezt sind, also die Höhe $= \frac{PB}{5^n}$ genommen wird, so giebt diese Abtheilung 5 Stükke, oder Areen, nehmlich immer 1 Dreiekk, $= \frac{1}{5^{2n}}$

und $5^n - 1$ Trapezien,

deren Reihe ist: $\frac{3}{5^{2n}} + \frac{5}{5^{2n}} + \ldots\ldots + \frac{(2.\ 5^n) - 1}{2^{2n}}$

 welcher

(*) Die Potenzen der 5 laufen so: $5^2 = 25.$ $5^3 = 125.$ $5^4 = 625.$ $5^5 = 3125.$ $5^6 = 15625.$ $5^7 = 78125.$ $5^8 = 390625.$

welcher lezte Ausdrukk des untersten Trapezions denen, welche wir aus §. 17. und §. 23. kennen, ganz homogen ist, und die Bemerkung §. 18. bestätigen wird.

§. 25.

Ich will diese Exemplificationen nicht weiter fortsezzen, um mir Raum zu ersparen. Blos Nachschlagens wegen, und damit alles leicht unter den Blik falle, schliesse ich diesen Abschnitt noch mit der dekadischer Abtheilung:

Wenn nehmlich die Höhe eines Dreiekks, in zehn gleiche Theile getheilt, also $\frac{PB}{10}$ gesezt wird, und darnach Paralelen gezogen werden, so giebt das zehn Stükke: 1 Dreiekk $= \frac{1}{10^2}$, oder 1 Hundert-theilchen der Area von ABC, dem Innhalt nach; und 9 Trapezien:

$$\frac{3}{10^2} + \frac{5}{10^2} \cdots + \frac{19}{10^2}.$$

Wird die Höhe in 100 gleiche Theile abgetheilt, also $\frac{PB}{10^2}$ gesezzt, so sind 100 Paralelen vorhanden; das giebt 100 Areen; 1 Dreiekk $= \frac{1}{100^4} = \frac{1}{10000}$; und 99 Trapezien:

$$\frac{3}{10^4} + \frac{5}{10^4} \cdots + \frac{199}{10^4}.$$

Wird die Höhe in 1000 gleiche Theile getheilt, oder $\frac{PB}{10^3}$ gesezzt, so sind 1000 Paralelen vorhanden; das giebt 1000 Areen; Die Area des obersten △ ist ein Milliontheilchen des ganzen Dreiekks, oder man erhält

1 Dreiekk $= \frac{1}{10^6}$; und 999 Trapezien:

$$\frac{3}{10^6} + \frac{5}{10^6} \cdots + \frac{1999}{10^6}.$$

Die Fortsezzung dieses Geschäfts auf mehr specielle Fälle ist nunmehr gewiß leicht, und sei individuellem Fleis bei jeder vorkommenden Erfordernis von mir jezt überlassen.

Zweiter Abschnitt.

Analytische Folgerungen

aus den bisherigen Vorträgen; nebst andern algebraischen Erörterungen über Dreiekke und Trapezien.

§. 26.

Ich folgere aus Vergleichung der Erscheinungen, welche von §. 1. bis §. 25. beleuchtet sind, das allgemeinste, was sich folgern läßt.

Wenn die Höhe eines Dreiekks $\frac{1}{x^n}$ mal abgetheilt wird, und man durch die Puncte der Abtheilung Linien, mit der Basis des Dreiekks paralel, zieht, (also $\frac{PB}{x^n}$ die Haupt-Prämisse heißt,) so ist das oberste Dreiekkchen jederzeit $= \frac{1}{x^{2n}}$, und darauf kommen, (der Zälung nach,) $x^n - 1$ Trapezien, deren Areen sind:

$$\frac{3}{x^{2n}} + \frac{5}{x^{2n}} + \frac{7}{x^{2n}} \cdots + \frac{2\,x^n - 1}{x^{2n}}.$$

§. 27.

Der Algebraiker geht öfters von so allgemein-bedeutsamen Ausdrükken gerne regressiv und progressiv; Daher sich auch von $\frac{PB}{x^n}$ zur linken und zur rechten, gleichsam abwärts und aufwärts, schreiten läßt:

$$\frac{PB}{x^{n-1}},\ \frac{PB}{x^{n-2}}\ \text{u. s. f.} \ldots \quad \frac{PB}{x^{n+1}},\ \frac{PB}{x^{n+2}}\ \text{u. s. f.} \ldots$$

und diesen Signaturen correspondirten sodann die für die oberste Dreiekkchen:

$$\frac{1}{x^{2n-2}},\ \frac{1}{x^{2n-4}}\ \text{u. s. f.} \ldots \quad \frac{1}{x^{2n+2}},\ \frac{1}{x^{2n+4}}\ \text{u. s. f.} \ldots$$

Die Trapezien behielten immer die Nenner der Dreiekkchen, die Zäler aber wären die bekannte: 3, 5, 7 ... Nur die Signaturen für die unterste Trapez. wären noch etwa besonders heraus zu merken:

$$\frac{2.x^{n-1}-1}{x^{2n-2}},\ \frac{2.x^{n-2}-1}{x^{2n-4}}\ \text{u. s. f.} \ldots \quad \frac{2.x^{n+1}-1}{x^{2n+2}},\ \frac{2.x^{n+2}-1}{x^{2n+4}}\ \text{u. s. f.} \ldots$$

Was ich zur linken oder abwärts nenne, geht auf immer ins grösere laufende Dreiekke und Trapezien; dagegen was ich zur rechten oder aufwärts heise, auf immer ins kleinere hinein abnehmende Dreiekke und Trapezien deutet. Wenn der Nenner unter PB abnimmt, so nimmt ja die Abtheilung der Höhe ab, also der Gehalt der Areen zu. Nimmt aber der Nenner unter PB zu, so nimmt die Abtheilung der Höhe zu, es kommen mehr Paralelen, und Trapezien zum Vorschein, also nimmt sicher der Gehalt der Areen ab.

Wer an diesen leztern Combinationen etwa nicht Lust hat, weil er vielleicht keinen unmittelbaren Nuzzen davon einsieht, der mag diesen Paragraphen überschlagen.

Die Gesezlichkeit aber, welche in dem nächst vorhergehenden aus der kurzen Formel für die Reihen, (wie im ersten Abschnitt genug speciell vorgekommen sind,) so hell ins klare gestellt ist, diese schöne Gesezlichkeit ist, meines Bedünkens, zu interessant, als daß sie so schlechthin übersehen, und als gar nicht vorhanden vernachlässiget werden sollte! Und doch erwähnt kein mir bekanntes Werk in Mathem. derselben? . . .

Alle in den zwei vorgehenden Paragraphen befindliche Signaturen sind relative Ausdrükke. Die Demarkationen der Höhe, oder die Abtheilungen des Perpendikels im Dreiekk, werden gezählt, und die Abtheilungs-Zal allgemein, x^n, genannt, und so im Gedächtnis behalten; (wo x^n auch x^1 seyn kann.) Alsdann werden von der ganzen Area des Δ, welche $= 1$ gedacht werden mus, gewisse aliquote Theile genommen, und deren Bruch-Gröse in den Ausdrukk jener Abtheilungs-Zal x^n versezzt, welche also gleichsam das regulative Princip, von welchem man ausgeht, nach welchem man sich richtet, ist, und die Signatur der Areen formt.

Das ganze Geschäft läuft demnach, wie fast die wichtigste Geschäfte des Geometers und Algebraikers, überall auf eine gewisse Reduction auf Gleichartigkeit hinaus. Von diesem allgemeinen Bemühen habe ich anderwärts umständlicher gesprochen, (*) und es für Psychologen interessant darzustellen gesucht. — —

F   §. 28.

(*) S. meinen Versuch, der Einrichtung unseres Erkenntnis-Vermögens durch Alg. nachzuspüren. (Leipz. 1787.) in den §. 20. und §. 56. 57.

§. 28.

So wie man aliquote Theile der Höhe nehmen, deren gewählter Abtheilung gemäs Paralelen ziehen, und dann ähnliche kleinere Dreiekke von ABC, als gleichartige Fragmente gleichsam nach dem Vorbild des grosen ganzen Dreiekks zeichnen kann, wobei unser Verstand notwendig immer regressive Acte vornimmt; so kann man auch entgegengesezzt progressiv verfaren, indem man ein kleines Dreiekk wählt, dessen Höhe einfach, oder mehrfach verdoppelt, (unten-an) Paralelen mit der Basis zieht, die jezt alle gröser und immer gröser werden, und so ähnliche grösere Dreiekke bildet. Ein Beispiel in unsern Zeichnungen läß sich Fig. 6. gedenken, wo sich Δ Biv, als das gegebene Dreiekk als eine Einheit, und auch die Höhe darinn, als $= 1$ denken läßt. Verdoppelt man diese Höhe, und zieht unten eine Paralele (mit iv) nehmlich mn; so erhält man ein Δ Bmn, dessen Area 4mal so gros ist, als die des Δ Biv. Ich will die Exemplificationen nicht weiter im Detail verfolgen; Wer den Innhalt des ersten Abschnitts durchhin, und insbesondre die analytische Sprache des §. 26. versteht, wird auch folgendes verstehen:

Wenn die Höhe eines Dreiekks ABC, x^n mal genommen, oder statt PB die Verlängerung des Perpendikels, x^n. PB gedacht, darauf hin unten x^n Paralelen gezogen, und ein ähnliches groses Dreiekk, welches mehrere Trapezien von gleichen Höhen einschließt, formirt wird, so ist die Area des Dreiekks, auf dessen Basis die bis dahin verlängerte Linien PB, jezt x^n. PB genannt, aufsteht, $= x^{2n}$. ABC; Wenn man die Trapezien zählt, so sind deren: $x^n - 1$, wie §. 26. (als numerus seriei.)

Das gröste Trapezion, doch noch immer von gleicher Höhe mit den übrigen, auf dessen Basis das lezte aliquote Stükk des verlängerten Perpendikels aufsteht, hat jedesmal zum Innhalt: $2x^n - 1$; das nächst-darauf folgende kleinere aber $2x^n - 3$; und die allgemeine Vorstellung der Areen dieser Trapezien nach der Reihe ist notwendig dann folgende:

$$3 + 5 + 7 \ldots 2x^n - 3 + 2x^n - 1.$$

insoferne nehmlich die Vorstellung progressiv synthetisch von einem kleinen $\triangle ABC = 1$ ausgeht, dessen nächstes Trapezion drunter immer einen 3mal grösern Innhalt, als das $\triangle$ selbst, hat, welches aus obigen Erörterungen überflüssig erhellen mus. (*)

§. 29.

Das gröste Trapezion, welches die Höhen aller übrigen, zusammen genommen, hätte, und also unmittelbar unter ABC anfienge, (mit der Linie BC selbst,) wird sich natürlich als: $x^{2n} - 1$ vorstellen lassen, wenn das ganze grose vervielfachte Dreiekk x^{2n} heißt, und das simple als $= 1$ genommen wird. Das nächst darauf folgende würde seyn: $x^{2n} - 4$, weil man sich den Abzug von x^{2n} (das heißt von dem ganzen grosen Dreiekk,) jezt so zu denken hätte: $x^{2n} - 1 - 3$, oder $x^{2n} - (1 + 3)$, welches aber eben $x^{2n} - 4$ ist.

Das weiter-folgende Trapezion hätte sodann zur Area: $x^{2n} - 9$. Hiedurch läßt sich eine merkwürdige Series von Trapezien formiren; welche so heißt:

$$(x^{2n} - 1) + (x^{2n} - 4) + (x^{2n} - 9) + (x^{2n} - 16) \ldots + (2x^n - 1)$$

oder $(x^{2n} - 1) + (x^{2n} - 2^2) + (x^{2n} - 3^2) + (x^{2n} - 4^2) \ldots + (2x^n - 1)$

 in

(*) Man denke sich Z. B. immer nur die leichte Proportionen: $\frac{1}{4} : \frac{3}{4} = 1 : 3$; oder $\frac{1}{9} : \frac{3}{9} = 1 : 3$; oder $\frac{1}{25} : \frac{3}{25}$.

in dem ja die Subtrahenden fort und fort Quadrate der natürlich-auf einander folgenden Zalen 2, 3, 4 . . . sind.

Dieser Series von Trapezien correspondirt notwendig die Reihe der ober ihnen befindlichen Dreiekke, welche leicht begreiflich so läuft:

$1 + 4 + 9 + 16 \ldots$ oder $1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \ldots$ $(x^{2n} - 2.\ x^n - 1.)$

Offenbar ist also der allgemeine Ausdruk des lezten und grösten Subtrahenden bei der Signatur des kleinsten Trapezions jederzeit:

$x^{2n} - 2\,x^n - 1$, oder $x^{2n} - (1 + 2\,x^n)$.

Und eben dieses kleinste Trapezion hiese dann ganz so: $x^{2n} - [x^{2n} - (1 + 2x^n)]$ welches nichts anders besagt, als eben: $2x^n - 1$, die Gröse, welche oben so gleich von mir gesezzt worden ist.

Damit seien diese Erörterungen, welche hauptsächlich der Progressus und Regressus mit Paralelen (gegen die Basis gezogen) bestimmte, geschlossen. Nun sollen andere beginnen, welche zu verwandt mit den Haupt-Phänomenen des vorigen Abschnittes sind, als daß sie nicht in dem gegenwärtigen selbst eine Stelle behaupten sollten.

§. 30.

Um noch näher zu lernen, wie man den Innhalt eines jeden Dreiekks, und eines jeden Trapezions in den Ausdruk der Höhe, oder des Perpendikels im Dreiekk allgemein versezzen kann, wenn diese Höhe eine gewisse bestimmt ausgesprochene Zal ist, (Z. B. Perp. = 17 Fus) so erwäge man folgendes:

Ein Dreiekk, durch dessen Area eine einzige Paralele (mit der Basis) läuft, werde, wie das $\triangle$ Fig. 5, gedacht, doch daß die Paralele nicht gerade durch die Mitte der Höhe streiche, sondern willkürlich höher oder tiefer, als dort mn, jedoch immer paralel mit der Basis AC. Ich will diese willkürlich-gezogene Linie MN heisen; sie ist Grundlinie des Dreiekks BMN, welches dem $\triangle$ ABC demnach immer ähnlich bleibt; MN falle nah an AC hin, oder nahe an den Scheitel B. Die Proportion trit sicher jedesmal ein, PB : BE = AC : MN; oder kürzer:

$$h : y = b : \frac{b.y}{h.}$$

wo die einzelnen Buchstaben des folgenden Calküls wegen bequemer seyn werden.

BE, oder y ist ein aliquoter oder aliquanter Theil von der Höhe h, (von dem Perpendikel PB ein Stükk.) Und $\frac{b.y}{h}$ oder MN ist ein homologes Stükk von der Basis; ich will ihm keinen besondern einzelnen kleinen Buchstaben jezt geben; man merke es sich nur als 4tes Glied der geom. Proport. und als Correlat der Grund-Linie in dem $\triangle$ BMN, oder als die Zal-Gröse ihres Maases. Die Area dieses $\triangle$ BMN ist also wol notwendig $\frac{1}{2}$ BE$\times$MN, d. h. $= \frac{1}{2}. y. \frac{by}{h}$, oder $= b. \frac{y^2}{2h}$.

Der Innhalt des Trapezions drunter ist, der bekannten Formel gemäs, $\frac{PE.(MN + AC)}{2}$ (nach Kästn. Geom. S. 42. Zus. 18.) hier $= \frac{h-y}{2}. \frac{(b.-y)}{h} + b = \frac{1}{2}. h-y. \frac{(by + bh)}{h}$, oder $\frac{(h-y).(h+y).b}{2h}$,

wo

wo abermals b als Factor in eine Gröse sich zeigt, welche ganz von der Höhe geborgt ist. Die simple Höhe im Trapezion selbst ist als Differenz Gröse: $PB - BE = PE$, d. i. $= h - y$, vorgestellt. Das Quadrat dieser Trapezions-Höhe heißt: $(h-y)^2 = h^2 - 2hy + y^2$ und ist von $h^2 - y^2$, (der Diff. der zwei quadrirten Höhen der Dreiekke ABC, und BMN) wol zu unterscheiden, welche leztere eben das Product $(h - y).(h + y)$ ist. Für dieser Verwechslung hat man sich insbesondre bei folgender Proportion, welche wesentlich zu unserem Zwekk führt, in acht zu nehmen:

$$\frac{b.y^2}{2h} : \frac{(h+y)(h-y).b}{2h} = y^2 : h^2 - y^2;$$ deren Sinn mit Worten ausgedrükkt folg. ist: der Innhalt des △ BMN verhält sich zu dem Innhalt des Trapez. $ACMN$, wie das □ der Höhe in dem △ BMN zu der Differenz der 2. erwähnten quadrirten Höhen (nehmlich der 2. quadrirten Höhen in den 2. △ △ ABC und BMN). Daß das lezte Glied der Proportion so heise, wird man sich leicht durch wirkliche mltct. der mittl. Glieder, und Div. ihres Products durch das erste überzeugen können; es heben sich da alle Grösen bis auf $h^2 - y^2$ oder $(h + y).(h - y)$.

Sind wir nun so weit, so können wir jezt schnell der zu erst gesezten Aufgabe ein Genüge leisten: „Sowol Dreiekk, als Trapez. ganz in den Ausdrukk der Höhe zu versezzen.“ Wir haben blos die Basis b, als einen aliquoten oder aliquanten Theil von h zu betrachten, und etwa allgemein qh zu benennen, wo q eine ganze Zal, aber auch eine gebrochene vorstellen kann; und zwar eine ganze vorstellen wird, wenn die Basis, b, gröser als

die

die Höhe ist, folglich h einige mal genommen werden mus, (q mal h) um b auszumessen; (*) Dagegen eine gebrochene (Zal), wenn die Basis kleiner ist, als die Höhe, und ein Fragment von h schon zureicht, um b darzustellen.

Sezt man nun so q h für b in den Quotienten $\frac{b.y}{h}$, so wird daraus: $\frac{qh.y}{h}$ d. h. qy; welches auch schon aus der aller ersten (S. 45. stehenden) Proportion folgt, als welche nun notwendig $h : y = qh : qy$ heisen muß, weil sich im 4ten Glied h hebt. Natürlich fließt hieraus, daß auch der Innhalt des △ BMN jezt statt $\frac{h.y^2}{2h}$ heisen müsse: $\frac{qh.y^2}{2h}$ d. i. $= \frac{q.y^2}{2}$ oder $\frac{1}{2}. q. y^2$; und weiter der Innhalt des Trapezions ACMN drunter: $= \frac{q.(h^2-y^2)}{2}$ oder $\frac{1}{2}. q. (h^2 - y^2)$, welches jeder gewiß leicht finden wird, der in der zweiten Proportion, welche S. 46. steht, in die zwei ersten Gliedern für b das Aequivalent qh einschreiben mag. Sicher ist dann:

$$\frac{q.y^2}{2} : \frac{q.(h+y).(h-y)}{2} = y^2 : (h+y).(h-y).$$

$$\text{oder } \tfrac{1}{2}\, q.y^2 : \tfrac{1}{2}\, q.(h^2 - y^2) = y^2 : h^2 - y^2$$

und da kommt kein b mehr in den zwei ersten Gliedern vor, sondern blos Theile oder Multipla der Höhe h; Folglich ist der Aufgabe ein Genüge

(*) Hicher gehört auch, wenn q ein unächter Bruch ist, Z. B. $\frac{3}{2}$ h = b, wo natürlich b gröser und h = $\frac{2}{3}$ b ist.

Genüge geschehen; (weil ja nehmlich das erste Glied ar. △, das zweite ar. Trap. ist, und so wol das Dreiekk, als das Trapezion ganz im Ausdrukk der Höhe dargestellt, oder ihre Innhalte sind in denselben versezzt sind.)

§. 31.

Wenn man, h, die Höhe in dem △ ABC, als = 1 denkt so wird die Höhe in dem Dreiekk BMN, wie auch die in dem Trapezion ACMN ein Fragment von 1, d. h. jederzeit ein Bruch. Daher sich leicht begreifen läßt, daß in allen bisher gesezzten Gleichungen, wo h steht, sich 1 dafür einschreiben lasse; und, wo y steht, nh; Und n immer eine gebrochene Zal da bedeuten müsse; der Factor h also ganz entbehrt werden könne, so lange h = 1 gälte, weil 1, als Signatur, in Multiplication sich jederzeit entbehren läßt. In dem Fall wäre dann y = n; und obige zwei Haupt-Proportionen sähen jezt so aus:

(I.) $h : nh = qh : nqh$; statt $h : y = b : \frac{by}{h}$

auch: $1 : n = q : nq$

wo also die Paralele MN, als Zal, auf die zween simpeln Factoren, $n \times q$, reducirt wäre, in so ferne nehmlich die Höhe $h = 1$ gedacht, und alles nach ihr gemessen würde.

(II.) Die Area des △ BMN wird jezt zu $qh. \frac{(nh)^2}{2h}$, d. h. zu

$\frac{q.n^2.h^2}{2}$ oder $= \frac{1}{2}q.n^2.h^2$; und, wenn $h = 1$ ist, zu $\frac{q.n^2}{2} = \frac{1}{2}q.n^2$,

welches in dem Fall so viel auswerfen mus, als $\frac{b.y^2}{2h}$ die Fundamental-Formel für den Innhalt dieses △, $= \frac{1}{2}$ BC.MN, nach S. 45.

Die Signatur fürs Trapezion verwandelt sich jezt ebenfalls merklich; Für $\frac{(h-y).(h+y).b}{2h}$ trit nun ein: $\frac{h^2(1-n^2)\,q.}{2}$

Dieses erweise ich, wie folgt: $(h-y).(h+y)$ ist so viel als h^2-y^2. wie wir aus dem vorigen Blat wissen. Ist nun $y = nh$, so wird h^2-y^2 zu $h^2-n^2h^2$, oder zu $h^2(1-n^2)$; Folglich, für $(h^2-y^2).b:2h$, trit jezt ein: $\frac{h^2.(1-n^2).qh.}{2h}$, weil qh die Basis b vorstellt; aber da hebt sich $qh : 2h$ auf $q : 2$; also bleibt: $\frac{h^2.(1-n^2).q}{2}$ oder $\frac{1}{2}\,q.\,h^2.\,(1-n^2.)$

Die zweite Proportion, welche S. 47. steht, wird demnach jezt so heisen:

$\frac{q.n^2h^2}{2} : \frac{h^2.(1-n^2.)\,q}{2} = n^2h^2 : h^2-n^2h^2$, auch $n^2h^2 : h^2(1-n^2)$

und, wenn $h = 1$ gilt, so kommt zum Vorschein:

$\frac{q.n^2}{2} : \frac{(1-n^2.)\,q}{2} = n^2 : 1-n^2$; auch $n^2 : (1+n)(1-n)$;

wo man abermals sich in Acht zu nehmen hat, daß man nicht $1-n^2$ mit $(1-n)^2$ verwechsle. Die leztere Gröse, als ein □ von $1-n$, wäre $1-2n+n^2$. Aber $1-n^2$ ist $= (1+n).(1-n)$; und davon ist eben hier die Rede. Die Signaturen für den Innhalt des Trapezions sind also gleichgeltend folgende:

$$\frac{(h+y).(h-y).b}{2h} = \frac{(h^2-y^2).b}{2h} = \frac{q.h^2.(1-n^2).}{2} = \frac{h^2.[(1+n)(1-n)].q}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,[\,q.h^2\,(1-n^2)\,] = \tfrac{1}{2}\,[\,h^2\,(1+n)\,(1-n).q.\,]$$

und wenn $h = 1$ ist, so gilt eben so viel: $\frac{1}{2}(1-n^2.)\,q = \frac{1}{2}(1+n)(1-n).q.$ auch $\frac{1}{2}.[q-q.n^2]$; auch $= \frac{1}{2}.[(q+qn).(1-n)]$ oder $\frac{1}{2}.[(1+n)(q-nq)]$.

Um den bisher geführten Vortrag durch ein specielles Beispiel in Zalen für manche Leser verständlicher zu machen, so denke man sich, h, die Höhe in dem Dreiekk ABC, $= 1$; die in dem $\triangle$ BMN $= \frac{1}{4}$, also nh $= \frac{1}{4}$; sonst y genannt, als gegeben. Die Basis aber MN, oder nq $= \frac{1}{6}$, wo $\frac{2}{3} =$ qh oder auch $=$ q. allein (*) vorstellen müßte. Der Innhalt des $\triangle$ BMN ist dann $= \frac{1}{2}\, q . n^2$, hier $= \frac{1}{2} . \frac{2}{3} . \frac{1}{16} = \frac{1}{3} . \frac{1}{16}$; Das heißt: $\frac{1}{48}$ wäre Area $\triangle$ BMN im Ausdrukk der Höhe. Das Trapez. ACMN drunter mus aber seyn: (nach $\frac{1}{2}\,(1 - n^2 .)\, q.$) $= \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{16}\right) \frac{2}{3}\right] = \frac{1}{2} . \left[\frac{15}{16} . \frac{2}{3}\right] = \frac{15}{48}$. Das heißt: $\frac{5}{16}$ wäre Area Trap. im Ausdruk der Höhe des ganzen $\triangle$ ABC; und $\frac{1}{48} + \frac{15}{48}$ zusammen gäben $\frac{16}{48}$. d. i. $\frac{1}{3}$ in der zweiten Dimension, als Area; welches eben richtig ist, und die genügende Probe abgiebt. Denn die gegebene Basis mit der halben Höhe mult. giebt den Innhalt des ganzen Dreiekks ABC; Also hier $\frac{2}{3} . 1 . \frac{1}{2}$, oder $\frac{2}{6}$, d. i. $\frac{1}{3}$ Quadrat Schuh hält das $\triangle$, wenn die Höhe 1 Schuh Längenmaas enthält, und die Basis $\frac{2}{3}$ der gegebenen Höhe beträgt.

§. 32.

(*) Nehmlich, man hat sich die Proportion zu denken: PB : BE $=$ AC : MN, auch nun h : nh $=$ qh : nqh, weil h $= 1$ seyn soll, als $1 : \frac{1}{4} = \frac{2}{3} : \frac{2}{12}$, d. h. 1 : n $=$ q : nq ist $1 : \frac{1}{4} = \frac{2}{3} : \frac{1}{6}$. Die Basis des ganzen $\triangle$ ist also, kleiner als die Höhe, nur als 2/3tel von 1 angenommen; b oder qh $<$ h; Folglich auch die Basis im kleinern $\triangle$ kleiner als die darinn befindliche Höhe, MN oder nq $<$ n; $(\frac{1}{4} . \frac{2}{3})$ oder $\frac{1}{6} < \frac{1}{4}$.

§. 32.

Es erfordert nur noch sehr simple Evolutionen, um sich von folgenden weitern Gleichungen zu überzeugen:

Die Area des ganzen $\triangle$ ABC heise: A; so ist:

$$A = \frac{\text{Trapez. } ACMN.\ PB^2}{PB^2 - BE^2} = \frac{(\text{Trap.}) \times h^2}{h^2 - y^2}$$

Denn die Proportion hat statt:

$$h^2 - y^2 : \quad h^2 = \frac{(h^2 - y^2.)\, b}{2\, h} : \frac{h.b}{2};$$

wo also erst im lezten Glied die Area des $\triangle$ ABC erscheint; in so ferne ja gewis $\frac{1}{2}.\ h.\ b = A$ immer zu denken ist. Also läßt sich sprechen: (in dem man die zwei lezten Glieder, als die ersten ansieht,)

„ Das Trapez. verhält sich zum ganzen $\triangle$ ABC, wie die Differenz der viel
„ erwähnten 2. quadrirten Triangular-Höhen zu der quadrirten Höhe des $\triangle$ ABC.
„ und umgekehrt: Das $\triangle$ ABC: Trap. $= h^2 : h^2 - y^2$.

Nimmt an, $b = qh$; und $y = nh$; und $h = 1$; so heißt die obige Gleichung zum Innhalt: $A = \left[\frac{(1-n^2)\, q}{2} .\ 1^2\right] : [1-n^2]$ d. i. $\frac{q}{2}$,
weil sich alles übrige hebt; und die Analogie nicht zu bezweifeln steht:

$$h^2.(1-n^2) : h^2 = \tfrac{1}{2}.\ [h^2.(1-n^2).q] : \tfrac{1}{2}\ [q\, h^2]$$

Also auch, wenn $h = 1$, auch $h^2 = 1$ ist: $1 - n^2 : h^2 = \frac{1}{2}(1-n^2)q : \frac{1}{2}q$.
und umgekehrt: $A : \text{Trap.} = 1^2 : 1 - n^2$; oder: wie 1 zu $(1 + n).(1 - n)$ verhält sich der Innhalt des $\triangle$ ABC zum Innhalt des drinnen befindlichen Trapezions ACMN.

§. 33.

Als leichte Folgerungen hebe ich weiter zu verschiedenem Gebrauch, (sollte auch gleich der Raum dieser Blätter zu beschränkt seyn, um alles in der Anwendung zu zeigen,) folgende Gleichungen aus:

Aus der Proportion: Ar. △ ABC: zu Ar. △ BMN = wie Trapez. ACMN folgt, den Signaturen des §. 29. gemäs, dieses 4te Glied so: $\frac{hb}{2} : \frac{b.y^2}{2h} = \frac{(h^2-y^2)\,b}{2h} : \left(\frac{h^2-y^2}{h^2}.\right)\frac{b.\,y^2}{2h}$; wo man auch den Cubus von h in den Nenner sezzen kan. Schreibt man statt △ ABC kurz = A; statt BMN = a; so heißt dieses 4te Glied: $\frac{h^2-y^2}{h^2}.\,a = \frac{\text{Trap.} \times a}{A.}$; und also ist $\frac{\text{Trap.}}{A} = \frac{h^2-y^2}{h^2}$, auch $= 1 - \frac{y^2}{h^2}$ welche Gleichung schon interessant genug ist; und weiter auf nächstfolgende führt:

$$\frac{\text{Trap.}}{A} + \frac{y^2}{h^2} = 1;\ \text{und}\ \frac{y^2}{h^2} = 1 - \frac{\text{Trap.}}{A} = 1 - \frac{h^2-y^2}{h^2}.$$

Und alsdenn ist klar, daß ein Aequivalent des Trapezions sei: $\left(\frac{h^2-y^2}{h^2}\right).\,A$; auch $= A - \frac{A.\,y^2}{h^2}$; nicht mehr und nicht weniger als $[(h+y).(h-y)]: 2h$, aber simpler, und faßlicher so dargestellt.

Wird nun die Area des △ ABC, wie bisher, = 1 genommen, so folgt hieraus Trap. $= 1 - \frac{y^2}{h^2}$; Eine Formel, an welche ich weiter unten erinnern werde.

Wird

Wird die Proportion so verändert, daß das zweite Glied das erste wird, so hat man: $a : A = \text{Trap.} : \frac{A . \text{Trap.}}{a}$

oder $\frac{b . y^2}{2h} : \frac{bh}{2} = \frac{(h^2 - y^2) . b}{2h} : \left[\frac{h^2 - y^2}{y^2} . \frac{bh}{2} .\right]$

Das vierte Glied ist demnach $= \frac{h^2 - y^2}{y^2} . A$; und verdient in dieser Form sonderlich mit dem vierten Glied der vorigen Proportion, in so ferne dasselbe $\frac{h^2 - y^2}{h^2} . a$ hies, verglichen zu werden.

$\frac{\text{Trap.}}{a}$ ist also $\frac{h^2 - y^2}{y^2}$; auch $= \frac{h^2}{y^2} - 1$.

Daraus folgt: $1 + \frac{\text{Trap.}}{a} = \frac{h^2}{y^2}$; auch $= 1 + \frac{h^2 - y^2}{y^2}$;

und daraus: $1 = \frac{h^2}{y^2} - \frac{h^2 - y^2}{y^2} = \left(\frac{h^2}{y^2} - \frac{\text{Trap.}}{a}\right)$.

Offenbar erhalten wir jezt auch einen diesen Signaturen conformen Werth für das Trapezion überhaupt: $\frac{h^2 - y^2}{y^2} . a = \text{Trap.}$ auch $= \frac{a . h^2}{y^2} - a$.

Endlich, wenn man die Proportion so sezt, daß das Trapezion das erste Glied wird, so erhält man: $\text{Trap.} : A = a : \frac{A . a}{\text{Trap.}}$

oder: $\frac{(h^2 - y^2) . b}{2h} : \frac{bh}{2} = \frac{b . y^2}{2h} : \left(\frac{bh}{2} . \frac{y^2}{h^2 - y^2}\right)$ oder: $A . \frac{y^2}{h^2 - y^2}$

heißt

heißt da das vierte Glied. Aber die Gleichung für das Trapezion, welche auch **hieraus** fließt, ist: $a.\frac{h^2-y^2}{y^2}$ oder $a\left(\frac{h^2}{y^2}-1\right)$ ganz, wie wir dieselbe erst zehn Zeilen weiter oben gefunden haben.

Demnach kennen wir nun zwei Haupt-Ausdrükke für jedes Trapezion, die im Resultat **gleich** viel besagen:

$$\frac{h^2-y^2}{h^2}.A=\frac{h^2-y^2}{y^2}.a;\text{ auch }\left(1-\frac{y^2}{h^2}\right).A=\left(\frac{h^2}{y^2}-1\right).a.$$

Diese Wendungen scheinen mir viele Geschmeidigkeit zu haben, und, so vorgestellt, selbst dem Gedächtnis sich leicht einzuprägen.

Läßt man für y durchgehends den Werth dafür nh, wie §. 29. einrükken, so erhält man als allgem. Signatur für jedes Trapezion.

$$\left(\frac{h^2-n^2h^2}{h^2}\right).A;\text{ d. h. }(1-n^2).A.\text{ und }\frac{h^2-n^2h^2}{n^2h^2}.a;\text{ d. h. }\left(\frac{1}{n^2}-1\right).a.$$

Folglich ist $(1-n^2).A=\left(\frac{1-n^2}{n^2}\right).a=$ Trapez.

§. 34.

Bekanntlich ist jede Basis, als $\frac{2A.}{h}=b$, und die Höhe, als $h=\frac{2A.}{b}$ anzunehmen. Das ist notorisch; Weniger bekannt aber folgendes:

Der Theil des Perpendikels, der uns bisher y hies, hat zur Geichung: $h.\ \sqrt{\left(1-\frac{\text{Trap.}}{A}\right)} = y.$ Denn man sehe nur auf dem vorigen Blat die Aequivalente zu $\frac{y^2}{h^2}$ nach. Denkt man sich aber y, als nh, so heißt das Aequivalent $\frac{y^2}{h^2} = \frac{n^2.\ h^2}{h^2}$ d. i. n^2; Also $n^2 = 1 - \frac{\text{Trap.}}{A}$; und $\sqrt{n^2}$, oder $n = \sqrt{\left(1-\frac{\text{Trap.}}{A.}\right)}$

Eine zweite Gleichung für y fließt weiter aus der Gleichung: $\frac{h^2}{y^2} = 1 \pm \frac{\text{Trap.}}{a}$, (s. S. 53.) Nehmlich daraus ergiebt sich: $y^2 = h^2 : \left[1 \pm \frac{\text{Trap.}}{a}\right]$; Folglich auch $y = h : \left[\sqrt{\left(1 \pm \frac{\text{Trap.}}{a}\right)}\right]$.

Und endlich, wenn auch da nh für y eingeschoben wird, so kommt $\frac{1}{n^2} = 1 \pm \frac{\text{Trap.}}{a}$; und $n^2 = 1 : \left[1 \pm \frac{\text{Trap.}}{a}\right]$.
Folglich $n = 1 : \left[\sqrt{\left(1 \pm \frac{\text{Trap.}}{a}\right)}\right]$ wo man sich, was zwischen den Klammern befindlich ist, immer als den Nenner eines Bruches zu denken hat, dessen Zäler vor den zwei Pünktchen : steht.

Auf eben die Weise ergiebt sich aus den Gleichungen zu $(h^2 : y^2)$ die für h^2, und h allein: $h^2 = y^2\left(1 \pm \frac{\text{Trap.}}{a}\right)$ und $h = y.\ \sqrt{\left(1 \pm \frac{\text{Trap.}}{a}\right)}$.

§. 35.

§. 35.

Zum Schluß will ich noch einige Reihen hieher gehöriger Analogien hersezzen; Zuerst die in welchen, h^2, das Quadrat der bisherigen Höhe im Dreiekk ABC, durchgehends, als drittes Glied erscheint: Nur zwei dieser Proportionen sind bereits vorkommen:

$$A : a = h^2 : y^2 = h^2 : n^2 . h^2$$

$$a : A = h^2 : \frac{h^4}{y^2} = h^2 : \frac{h^2}{n^2}$$

$$A : \text{Trap.} = h^2 : h^2 - y^2 = h^2 : h^2 . (1 - n^2)$$

$$\text{Trap.} : A = h^2 : \frac{h^4}{h^2 - y^2} = h^2 : \frac{h^2}{1 - n^2}$$

$$a : \text{Trap.} = h^2 : \frac{h^2}{y^2} . (h^2 - y^2) = h^2 : \frac{h^2 . (1 - n^2)}{n^2}$$

$$\text{Trap.} : a = h^2 : \frac{h^2 y^2}{h^2 - y^2} = h^2 : \frac{n^2 h^2}{1 - n^2}$$

Man übersieht leicht, wie einfach meistens das vierte Glied werden mus, wenn die Höhe $= 1$, und also auch $h^2 = 1^2$ gedacht würde.

Macht man h^2 zum vordersten Glied, so zeigt sich:

$$h^2 : A = a : \frac{b^2 . y^2}{4 h^2} = a : \tfrac{1}{4} [b^2 . n^2]$$

$$h^2 : A = \text{Trap.} : \frac{b^2 . (h^2 - y^2)}{4 h^2} = \text{Trap.} : \tfrac{1}{4} [b^2 . (1 - n^2)]$$

$$h^2 : a = \text{Trap.} : \frac{b^2 . y^2 (h^2 - y^2)}{4 h^4} = \text{Trap.} : \tfrac{1}{4} [b^2 . n^2 . (1 - n^2)]$$

Begreiflich ist im lezten Glied jedesmal nh für y untergeschoben.

Nimmt

Nimmt man durchgehends y^2, als drittes Glied solcher Proportionen an, so erscheint das vierte Glied so:

$$A : a = y^2 : \frac{y^4}{h^2} = n^2h^2 : n^4.h^2.$$

$$a : A = y^2 : h^2 = n^2h^2 : h^2$$

$$A : Trap. = y^2 : \frac{(h^2-y^2).y^2}{h^2} = n^2h^2 : (1-n^2).n^2h^2.$$

$$Trap. : A = y^2 : \frac{h^2.y^2}{h^2-y^2} = n^2h^2 : \frac{n^2h^2}{1-n^2}.$$

$$a : Trap. = y^2 : h^2-y^2 = n^2h^2 : (1-n^2)\,h^2.$$

$$Trap. : a = y^2 : \frac{y^4}{h^2-y^2} = n^2h^2 : \frac{n^4.h^2}{1-n^2}.$$

Macht man aber y^2 zum vordersten Glied, so erhält man:

$$y^2 : A = a : \tfrac{1}{4}.b^2 = \tfrac{1}{2}bh.\,n^2 : \tfrac{1}{4}\,b^2$$

$$y^2 : A = Trap. : \tfrac{1}{4}.b^2.(h^2-y^2) = \tfrac{1}{2}bh.(1-n^2) : [\tfrac{1}{4}b^2.h^2.(1-n^2)]$$

$$y^2 : a = Trap. : \tfrac{1}{4}.b^2.\frac{h^2-y^2}{h^2} = \tfrac{1}{2}bh.(1-n^2) : [\tfrac{1}{4}b^2.(1-n^2)]$$

§. 36.

Es bedarf keiner besondern Deduction, um zu zeigen, daß ebenso alle bisher beleuchtete Areen, wie auch die Höhen, in den Ausdruk der Basis, b, die etwa als Zal gegeben ist, versezzt werden können: Gedenkt man sich, h, die Höhe, als ein aliquotes, oder aliquantes

Stükk von b; so läßt sich allgemein sezzen: $h = mb$. Daraus fließt die Gleichung für den Innhalt: $A = \frac{1}{2}\, hb = \frac{1}{2}\, m.\, b^2$. Weiter wird aus $y = n.h$ jezt: $y = n.mb$; und alsdenn heißt die so oft vorkommende Fundamental-Proportion (S. 45.) statt $h : y = b : (by : h)$ jezt: $mb : nmb = b : nb$, und mb ist der Werth der Linie MN.

Die Area des $\triangle$ BMN = a, mus dann heisen: $= \frac{1}{2}\, m.\, (b^2 n^2.)$ Die Area des Trapezions ACMN aber im gleichförmigem Ausdruk der Basis ist dann : $\frac{b^2.(1-n^2).\, m}{2} = \frac{1}{2}\, [\, m.\, b^2.\, (1-n^2)\,]$ ganz in der Gestalt, welche die Formel S. 49. hat. Es ist nur m einzuschieben, wo dort q steht, und b^2, wo dort h^2 steht.

Daher auch die dortige Proportion jezt sich blos in diese verwandelt:

$$\tfrac{1}{2}.\, m.\, b^2.\, n^2 : \tfrac{1}{2}.\, m.\, b^2.\, (1-n^2) = (nmb)^2 : m^2 b^2.\, (1-n^2).$$

Der Sinn ist schon oben S. 46. §. 30. mit Worten ausgedrükkt.

Weiter ist sicher auch nach §. 32. S. 51. jezt:

$$\triangle\ ABC : \text{Trap.} = (m.b)^2 : (m.b)^2.\, (1-n^2).$$

Folglich der Innhalt des $\triangle$ ABC, oder $A = [\, \text{Trap.} : (1-n^2).]$

Ferner für $\left(\frac{y}{h}\right)^2 = \left(\frac{nmb}{mb}\right)^2$ trit jezt schlechthin n^2 ein; also auch $n^2 = [1 + (\text{Trap.} : A)]$; und $\text{Trap.} = A - An^2$ auch $= A.(1-n^2)$. Man vergleiche §. 33. S. 52. Und endlich ($h^2 : y^2$) wird nunmehr zu ($1 : n^2$) $= [\, 1 + (\,\text{Trap.} : a\,)\,]$.

Daraus folgt das Aequiv. zum Trapezion auch auf diesem Weg, welches §. 33. S. 53. Lin. 8. auch S. 55. Lin. 10. bereits vorkam; Und das giebt eine bündige Probe von der Richtigkeit der Rechnung.

§. 37.

§. 37.

Zum Schluß will ich nur noch eine ähnliche Reihe von Proportionen beifügen, wie §. 35. S. 56. eine steht; nur daß ich jezt b^2 durchgehends zum dritten Glied annehme, und für y, wie oben, n h eintreten lasse, sodann aber weiter für b auch q h sezze:

$$A : a = b^2 : [(bn)^2] \quad \text{auch} = (qh)^2 : (qhn)^2$$
$$a : A = b^2 : [b^2 : n^2] \quad \text{auch} = (qh)^2 : [(qh)^2 : n^2]$$
$$A : \text{Trap.} = b^2 : [b^2.(1-n^2)] \quad \text{auch} = (qh)^2 : [(qh)^2 : (1-n^2)]$$
$$\text{Trap.} : A = b^2 : [b^2 : (1-n^2)] \quad \text{auch} = (qh)^2 : [(qh)^2 : (1-n^2)]$$
$$a : \text{Trap.} = b^2 : [b^2 : (1-n^2)] : n^2 \quad \text{auch} = (qh)^2 : [(qh)^2 : (1-n^2)] : n^2$$
$$\text{Trap.} : a = b^2 : [(bn)^2 : (1-n^2)] \quad \text{auch} = (qh)^2 : [(qhn)^2 : (1-n^2)]$$

Die lezten zwo Verhältnisse lassen sich noch auf manigfaltige Weise ausdrükken, wenn man Z. E. für n h wieder y eintreten läßt; wodurch die erste Proportion so erscheinen würde: $A : a = (qh)^2 : (qy)^2$.

Wird die Basis mit der Höhe verglichen, und werden ihre Quadrate in ein Verhältnis gesezzt, so zeichnen sich, wie mich dünkt, folgende Proportionen aus:

$$b^2 : h^2 = A : [h^3 : 2b] = A : [h^2 : 2q] = A : \tfrac{1}{2}m^3.b^2.$$
$$b^2 : h^2 = a : [h.y^2 : 2b] = a : [h^2.n^2 : 2q] = a : \tfrac{1}{2}m^3.b^2.n^2.$$
$$b^2 : h^2 = \text{Trap.} : [(h^2-y^2).h : 2b] = \text{Tr.} : [(h^2-y^2) : 2q] = \text{Tr.} : \tfrac{1}{2}m^3.b^2.(1-n^2).$$

Wo die vorlezte Verhältnisse, welche mit $A : (h^2 : 2q)$ beginnen, das lezte Glied im Ausdruk der Höhe, $qh = b$ geben; die hinterste aber ebendasselbe im Ausdruk der Basis, $mb = h$.

Nimmt man b^2 und h^2 zu den mittlern Gliedern, so erscheint:

$$A : b^2 = h^2 : [\,2b.\,h\,] = h^2 : [\,2q.\,h^2\,] = (m.b)^2 : 2m.b^2.$$

$$a : b^2 = h^2 : \left[2b.\frac{h^3}{y^2}\right] = h^2 : \left[2q.\frac{h^2}{n^2}\right] = (m.b)^2 : 2m.\frac{b^2}{n^2}.$$

$$\text{Trap.} : b^2 = h^2 : \left[2b.\frac{h^3}{h^2 - y^2}\right] = h^2 : \left[2q.\frac{h^2}{1 - n^2}\right] = (m.b)^2 : 2m.\frac{b^2}{1 - n^2}.$$

wo die Gesezlichkeit, die in den lezten Gliedern ersichtlich ist, allerdings schön ist, und, wie ich meine, so vorgestellt, sich sonderlich empfielt.

Dritter Abschnitt.

Ueber graphische Darstellung und Calkul durch Dichotomie.

§. 38.

Wenn ein Dreiekk, ABC, vorgelegt, und verlangt wird, ein ähnliches, welches halb = so gros, oder 1/6tel, 1/7tel mal so gros, als das vorgelegte wäre, anzugeben, und zwar etwa sogleich in das vorgelegte hineinzuzeichnen, so wäre der Aufgabe unverzüglich eine Genüge gethan, wenn man den Punct des Perpendikels in dem △ ABC wüßte, durch welchen eine Paralele mit der Basis AC zuziehen wäre, welche eben das verlangte kleinere ähnliche Dreiekk von sich selbst formirte.

Man

Man findet diesen Punkt auf PB, (auf dem Perpend.) niemals ganz genau durch fortgesezztes Halbiren der Höhe, wenn die Aufgabe nicht auf ein $\triangle = \frac{1}{2^n}$ geht. Dennoch aber will ich sogleich zeigen, daß man ihm eben doch blos durch Dichotomie so nahe kommen kann, als man nur will, so daß alle Differenz bei der wirklichen Anwendung verschwindet.

Man sehe einmal das $\triangle$ ABC an: Fig. 11. Es hat acht Paralelen, die Basis AC dazu gezält. Ein Blik auf §. 15. zurük geworfen, überzeugt von der Richtigkeit folgender Skale:

				Decimalen.
Das $\triangle$ mit der Basis cd ist =	1/64tel		=	0, 015625.
Das $\triangle$ mit der Basis iv ist =	4/64tel	= 1/16tel	=	0, 0625.
Das $\triangle$ mit der Basis fg ist =	9/64tel		=	0, 140625.
Das $\triangle$ mit der Basis mn ist =	16/64tel	= 1/4tel	=	0, 25.
Das $\triangle$ mit der Basis op ist =	25/64tel		=	0, 390625.
Das $\triangle$ mit der Basis qr ist =	36/64tel	= 9/16tel	=	0, 5625.
Das $\triangle$ mit der Basis st ist =	49/64tel		=	0, 765625.
Das $\triangle$ mit der Basis AC ist =	64/64tel	= 1	=	1, 00000.

Wird nun verlangt, ein $\triangle$, das einem vorgelegten ähnlich sei, aber nur 1/6tel seines Innhals betrage, in Zeichnung darzustellen, so formire man nur sogleich die Proportion: $6 : 1 = 64 : (10 + \frac{2}{3})$; und vergleiche das lezte Glied derselben, $10 + \frac{2}{3}$, mit zwei Zälern der Brüche aus der Skala, welchen es am nächsten kommt; so ersieht man sogleich, daß diese Gröse zwischen die Zäler 9 und 16 hineinfalle; und der Schluß ist dann gewiß leicht: Die Basis des verlangten ähnlichen Dreiekks mus zwischen die Correlata der 2 Brüche 9/64tel und 16/64tel, das heißt: zwischen die Linien fg, und mn, hinein fallen. Und zwar wird sie gewis näher noch gegen fg hin liegen, als gegen mn; weil ($10 + \frac{2}{3}$) viel näher gegen 9, als gegen 16 zu liegt.

Wem Decimalen geläufig sind, der hat nicht einmal das Geschäft nöthig, die geometr. Prop. auszusezzen, und das vierte Glied so heraus zu rechnen; Er weis: 1/6tel ist = 0, 166... und sieht dann nur in die Skale der Decimalen, wo 0, 140... und 0, 25 steht.

Ein anderes Beispiel sei folgendes: Wenn ein △ verlangt würde, ähnlich dem △ ABC, aber nur 4/7tel seiner Area haltend; so sezze man : $7 : 4 = 64 : (36 + \frac{4}{7}.)$ Dieses lezte Glied zeigt so gleich, daß die Basis des verlangten △ ziemlich nahe unter qr, wozu das Correlat ja 36/64tel heißt, fallen müsse. Auch beweisen dieß folgende Decimalen: 4/7tel ist = 0, 571... und die Decimalen zu dem △ Bqr sind: 0, 562... Also wird man sich in der Anwendung immer sehr bald zu helfen wissen. Aber, wenn grösere Schärfe verlangt wird? — Dazu ist auch Rath vorhanden!

§. 39.

Man denke sich in der Fig. II. zwischen jedem Paar Paralelen eine neue dazwischen gezogen, d. h. man denke sich ein Dreiekk, ABC, mit 16 Paralelen, so ersieht man sogleich 16 Dreiekke, von welchen das oberste und kleinste, (dem §. 16. gemäs) von dem ganzen Dreiekk, sicher = 1/256tel seyn mus, als 1/4tel Bcd.

Die folgende Skale ergiebt sich dann sehr leicht: (*)

					Decimalen.
Das oberste △ = 1/4tel Bcd		ist =	1/256tel		= 0,00390625.
Das 2te △ mit der Basis	cd	ist =	4/256tel =	1/64tel	= 0,015625.
Das 3te △ mit der Basis	cd + x	ist =	9/256tel		= 0,03515625.
Das 4te △ mit der Basis	iv	ist =	16/256tel =	1/16tel	= 0,0625.
Das 5te △ mit der Basis	iv + x	ist =	25/256tel		= 0,09765625.
Das 6te △ mit der Basis	fg	ist =	36/256tel =	9/64tel	= 0,140625.
Das 7te △ mit der Basis	fg + x	ist =	49/256tel		= 0,19140625.
Das 8te △ mit der Basis	mn	ist =	64/256tel =	1/4tel	= 0,25.
Das 9te △ mit der Basis	mn + x	ist =	81/256tel		= 0,31640625.
Das 10te △ mit der Basis	op	ist =	100/256tel =	25/64tel	= 0,390625.
Das 11te △ mit der Basis	op + x	ist =	121/256tel		= 0,47265625.
Das 12te △ mit der Basis	qr	ist =	144/256tel =	9/16tel	= 0,5625.
Das 13te △ mit der Basis	qr + x	ist =	169/256tel		= 0,66015625.
Das 14te △ mit der Basis	st	ist =	196/256tel =	49/64tel	= 0,765625.
Das 15te △ mit der Basis	st + x	ist =	225/256tel		= 0,87890625.
Das 16te △ mit der Basis	AC	ist =	256/256tel =	1	= 1,0000.

Diese

(*) Ich will keine besondre Figur deshalb in Zeichnung liefern. Man denke sich nur ganz oben zwischen cd und dem Scheitel noch eine Paralele, welche das △ = 1/4tel Bcd formiren würde; und jede der weiters fehlenden Paralelen durch (cd + x), (iv + x), (fg + x) u. s. f. ausgedrükkt; so wird keine Dunkelheit übrig bleiben.

Diese Tabelle wird nun freilich in weit mehreren Fällen hinlänglich-bestimmte Auskunft geben, welche die vorige noch nicht geben konnte. Die vorige Aufgabe: 1/6tel des △ A B C mit Beibehaltung der Aehnlichkeit zu zeichnen, würde jezt die Proportion veranlassen: $6 : 1 = 256 : (42 + \frac{2}{3})$; und ein Blikk in die neue Tabell würde mich überzeugen, daß die gesuchte Linie mit groser Sicherheit in die Mitte zwischen fg und fg + x eingezeichnet werden könne, weil $(42 + \frac{2}{3})$ äusserst nahe an der Mitte zwischen 36 und 49 (den Zälern der hieher gehörigen Brüche) liegt. Diese Bestimmung liese sich aus der vorigen nicht so unverzüglich ersehen. — — Auch die Decimalen geben diese nähere Auskunft jezt sogleich, wenn man 1/6tel = 0, 166... mit 0, 140... und 0, 191... vergleicht.

Als ein zweites Beispiel, will ich die Aufgabe wählen: In das △ ABC ein ähnliches, das = 6/7tel von ABC wäre, einzuzeichnen. Da sezzt man: $7 : 6 = 256 : (219 + \frac{3}{7})$; blikkt in die Tabelle, und ersieht notwendig, daß die Paralele nahe oberhalb st + x zu ziehen sei; weil 219 3/7tel nahe genug an 225/256tel liegt. Auch bezeugen dieß die Decimalen: 6/7tel ist = 0, 857... und bei st + x ersieht man 0, 878... als Decimalen des zugehörigen Dreiekks. Aus der ersten Tabelle würde man schwerlich mit einem Blikk übersehen haben, ob die einzuzeichnende Linie, zwischen AC und st, über der Mitte oder unter der Mitte (der Höhe) einzuzeichnen wäre?

§. 40.

Diese Tabelle, mit Fig. 11. zusammen genommen, kann auch eben so gut bei Problemen gebraucht werden, welche aufgeben, ein Dreiekk zu liefern, welches 6 mal, 7 mal, 11 mal, $1 + \frac{2}{3}$ gröser, als ein vorgelegtes, seyn soll.

Man

Man hat sich blos vorzustellen: Das oberste Dreiekkchen △ Bcd oder 1/4tel Bcd sei das *gegebene* oder vorgelegte Dreiekk; und dann abermal die Proportion, wie in den vorhandenen §. zu formiren. Z. B. es wird ein ähnliches Dreiekk, wie △ Bcd, verlangt, aber von 6mal so grosem Innhalt; so sezzt man abermals : $6 : 1 = 64 : (10 + \frac{2}{3})$; und weis denn sogleich, wie weit herunter die Höhe des △ Bcd zu ziehen sei; (dreimal und etwas drüber,) um das verlangte △ darzustellen. Natürlich wird auch hier viel grösere Schärfe erzielt, wenn man 1/256tel als oberstes Dreiekkchen, (= 1/4tel Bcd) annimmt. Ich sezze noch einige Beispiele: *Aufgabe*: Ein Dreiekk zu zeichnen, *ähnlich* einem gegebenen, etwa N genannt aber anderthalb mal so gros. Schreibe (da $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ist,) die Proportion $\frac{3}{2} : 1 = 256 : 170\frac{2}{3}$. Zuverlässig fällt die Linie gleich unter qr + x hin, weil in der Tabelle 169/256tel beim 13ten △ vorkommt. Also ist die Höhe, die in dem gegebenen bekannt oder meßbar ist, 13mal zu nehmen, und etwas sehr weniges noch drüber. Dieses *Wenige* kann nur in *dem* Fall von merklicher Bedeutung seyn, wenn die Zeichnung des vorgelegten Dreiekks sonderlich gros wäre. In Decimalen ist $(\frac{3}{3} : \frac{3}{2}) = \frac{2}{3} = 0,666...$ Zu $\frac{169}{256}$ aber heisen die Decimalen 0, 660...

Noch eine Aufgabe: Ein △ zu zeichnen, ähnlich dem vorgelegten, aber 3 3/8tel mal so gros. Schreibe: Da 3 3/8tel so viel, als 27/8tel ist: 27/8tel : 1 = 256 : 75 + 19/27tel; (wo man auch die zwei erste Glieder hätte sezzen können 27 : 8 =). Die gesuchte Basis fällt zwischen mn und mn + x etwas über die Mitte hinunter, wo die Zäler der Brüche 64 und 81 heisen. Die Höhe des △ N ist also 8 und ein halb mal wol zu nehmen.

Auch ist 8/27tel in Decimalen = 0, 296... womit in der Tabelle zu vergleichen sind, 0, 25. und 0, 316...

Es ist bei unächten Brüchen, wenn solche wie in den zwei vorhandenen Beispielen vorkommen, (3/2tel und 27/8tel) wol zu merken, daß man kurz Nenner und Zäler blos umkehre, wenn die Decimalen zu der vorliegenden Absicht verlangt werden. Das ist ein Compendium der Rechnung!

§. 41.

Es mag genug seyn, mit diesen Beispielen auf den weiten Umfang der Anwendung aufmerksam gemacht zu haben, zu welcher die gelieferte Tabellen geschikkt sind. Wer noch grösere Schärfe in einzelnen Fällen verlangt, wird sich füglich ein Dreiekk mit 32 Paralelen, als Muster, in Zeichnung entwerfen, und die darinn befindliche 32 Dreiekke nun leicht berechnen können. Das oberste Dreiekkchen würde, (dem §. 16. gemäs) seyn: 1/1024tel in Decimalen = 0, 0009765625. In sehr vielen Fällen würde aber die Mühe kaum belohnt werden, so sehr kleine Abtheilungen der Höhe zu suchen. Indessen darf man sich doch nicht mit der Befürchtung tragen, als ob man, der vorgezeigten Methode gemäs, bei jeder vorkommenden Aufgabe immer 8, oder 16, oder gar 32 Paralelen zu ziehen hätte, um zu finden, wo hinein die verlangte Linie einzuzeichnen sei. Das sei ferne! Man sticht blos auf der Höhe des △ den Punkt der Mitte ab; und sieht ja dann sogleich, wohin = zu (ober = oder unterhalb) die Linie ihren Plaz finden müsse; halbirt blos mit Punkten nochmals (eben dahin zu), und wird dann kaum 2 wirkliche Paralelen anzudeuten nöthig haben, um des Punktes gewiß zu seyn, durch welchen die Basis des neuen gesuchten △ laufen mus.

Ich

Ich weis wol, daß es mehrere Methoden giebt, dergleichen Aufgaben, auch noch viel zusammengesezztere, ganz rein aufzulösen, so daß das Verfaren nicht blos auf Approximation führt. Schon ältere Geometer haben das gelehrt, und namentlich hat Herr O. B. Schulze in seinem Taschenbuch. Th. 1. §. 442. sehr bündig gezeigt: " wie man ein jedes " gegebene △ in gleiche oder verhältnismäsige Theile so theilen könne, " daß die Theilungs-Linien mit einer bestimmten Seite des △, " (welche man beliebig nur verlangen mag) gleichlaufen." — Ich weis dieses, und bin auch weit entfernt, verächtlich von dieser Methode zu sprechen; vielmehr empfele ich sie jedem Liebhaber von Geom. gar sehr ernstlich. Aber meine Absicht geht hier einmal dahin, darzuthun, was sich durch Dichotomie ausrichten lasse, und zwar leicht und bequem ausrichten lasse; Und dann bin ich noch ausserdem überzeugt, daß doch die Vergleichungen, welche, wenn man meine Tabellen benüzzt, und nach den drei vorhandenen Paragraphen graphisch verfärt, sich notwendig wie von selbst aufdringen, bei keiner andern Methode eintreten, und daß dann auch nicht die interessante Combinationen weiterer Schlüsse auf anderem Weg veranlaßt werden können, auf welche eben meine vorgeschlagene Methode sicher führt. Ich könnte noch einiges anfüren, in wie mancherlei Fällen die andern Methoden, wegen mehrerer Hülfs-Linien, selbst die Gefar, sich in Zeichnung zu irren, mit sich führen; Aber ich will das eigenen Versuchen anheim geben, welche überhaupt hiebei jeden auf nicht unbedeutende fernere Phänomene führen werden, und daher thätig anzustellen sind. Die kleine Mühe weniger Zeichnungen hiebei belohnt sich gewiß jedem reichlich.

§. 42.

Einiges weitere Nachdenken über diese Vorstellungs-Art, sich bei graphischen Aufgaben so jedesmal durch Dichotomie zu helfen, leitete mich bald auf den Gedanken, dem Tringular-Calkul dürfte selbst im Ganzen durch einige Erweiterung solcher Betrachtungen über Dichotomie eine Erleichterung verschafft werden können, von welcher ich bisher noch nirgend etwas gelesen hatte. Ich dachte mir zuvörderst meine acht Dreiekke in dem △ ABC, in Fig. 11. mit den Zal-Gehalten der Tabelle, S. 61. und dachte mir sodann die Trapezien drunter, auch in ihren Zal Werthen, d. h. deren Areen, als Zalen, welche jedesmal die Ergänzung zum ganzen △ ABC = 1 ausmachten; und dachte noch dazu das Verhältnis der Höhe in jedem Trapezion zu der Höhe in dem drüber stehenden Dreiekkchen. Eben diesen Gedanken verfolgte ich bei der zweiten grösern Tabelle, wo ich jezt 15 Dreiekke, 15 Trapezien, und die zugehörigen Höhen zu vergleichen hatte. Ich schrieb den Brüchen und Decimalen für die Dreiekke die Brüche und Decimalen für die Trapezien zur Seite, (wie oben am Schluß des §. 14. schon eine kleine Probe von dieser Zusammenordnung gegeben ward.) Aber alsdann berechnete ich auch die Logarithmen zu jedem so ausgedrükkten Werth einer Dreiekks- oder Trapezions-Area; (Der Gebrauch wird bald gezeigt werden.) Und endlich fügte ich auch das Verhältnis der Höhen in einer besondern Columne noch bei. So entstand die Tafel, welche die folgende Seite enthalten; Man sehe sie durch!

Innhalt der Dreiekke.	Innhalt der Trapez. (drunter.)	Logarithmen zu beeden.		Verhältnis der Höhen.
$\frac{1}{256}$ = 0,00390625.	$\frac{255}{256}$ = 0,99609375.	0,5917600—3.	0,9983002—1.	1 : 15.
$\frac{4}{256}$ = 0,015625.	$\frac{252}{256}$ = 0,984375.	0,1938200—2.	0,9931605—1.	2 : 14 = 1 : 7.
$\frac{9}{256}$ = 0,03515625.	$\frac{247}{256}$ = 0,96484375.	0,5460025—2.	0,9844570—1.	3 : 13.
$\frac{16}{256}$ = 0,0625.	$\frac{240}{256}$ = 0,9375.	0,7958800—2.	0,9719713—1.	4 : 12 = 1 : 3.
$\frac{25}{256}$ = 0,09765625.	$\frac{231}{256}$ = 0,90234375.	0,9897000—2.	0,9553720—1.	5 : 11.
$\frac{36}{256}$ = 0,140625.	$\frac{220}{256}$ = 0,859375.	0,1480625—1.	0,9341827—1.	6 : 10 = 3 : 5.
$\frac{49}{256}$ = 0,19140625.	$\frac{207}{256}$ = 0,80859375.	0,2819561—1.	0,9077303—1.	7 : 9.
$\frac{64}{256}$ = 0,25.	$\frac{192}{256}$ = 0,75.	0,3979400—1.	0,8750613—1.	8 : 8 = 1 : 1.
$\frac{81}{256}$ = 0,31640625.	$\frac{175}{256}$ = 0,68359375.	0,5002450—1.	0,8347980—1.	9 : 7.
$\frac{100}{256}$ = 0,390625.	$\frac{156}{256}$ = 0,609375.	0,5917600—1.	0,7848846—1.	10 : 6 = 5 : 3.
$\frac{121}{256}$ = 0,47265625.	$\frac{135}{256}$ = 0,52734375.	0,6745454—1.	0,7220938—1.	11 : 5.
$\frac{144}{256}$ = 0,5625.	$\frac{112}{256}$ = 0,4375.	0,7501225—1.	0,6409781—1.	12 : 4 = 3 : 1.
$\frac{169}{256}$ = 0,66015625.	$\frac{87}{256}$ = 0,33984375.	0,8196467—1.	0,5312793—1.	13 : 3.
$\frac{196}{256}$ = 0,765625.	$\frac{60}{256}$ = 0,234375.	0,8840161—1.	0,3699113—1.	14 : 2 = 7 : 1.
$\frac{225}{256}$ = 0,87890625.	$\frac{31}{256}$ = 0,12109375.	0,9439425—1.	0,0831217—1.	15 : 1.

Die Höhen dieser berechneten Dreiekke sind: $\frac{1}{16}, \frac{2}{16}, \frac{3}{16}, \ldots \frac{15}{16}$. Die Quadrate dieser Zalen sind: $(\frac{1}{16})^2$, $(\frac{4}{16})^2$ $(\frac{9}{16})^2$ . . . $(\frac{15}{16})^2$, welches eben die Areen der Dreiekke selbst sind. Man blikke hier in einige der Gleichungen des §. 35. zurükk: Z. B. aus der Prop. $A : a = h^2 : n^2 h^2$, folgt $a = (A \,.\, n^2 h^2) : h^2 = A \,.\, n^2$. Nun ist aber $A = 1$, als der Innhalt des grosen Dreiekks; Dessen Höhe, h, ist auch $= 1$ angenommen; n ist ein aliquoter Theil von 1, also $\frac{3}{16} \,.\, 1 = \frac{3}{16} = n$; und $A \,.\, n^2 = 1 \,.\, (\frac{3}{16})^2$. d. i. $= \frac{9}{256}$, wie eben seyn soll. Demnach wenn man die Verhältnis-Zal der Höhe, n, weis, so kennt man da sogleich die Area des $\triangle$, als $= n^2$, Und das Trapezion noch darzu als $= 1 - n^2$. Denn man sezze nur die Proportion: $A : \text{Trap.} = h^2 : h^2(1 - n^2)$, also $\text{Trap.} = A \,.\, (1 - n^2)$; so folgt notwendig, da $A = 1$ im Zalen Calkul nichts in Mltc. ändert, daß $\text{Trap.} = 1 - n^2$ der ganz allgemeingültige Ausdrukk auch hier sei. Z. B. $1 - (\frac{3}{16})^2$ ist $= 1 - \frac{9}{256} = \frac{245}{256}$, der Innhalt des Trapezion von der Höhe $h - y = 1 - n$; d. i. von $1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$.
So leicht und einfach wird alles durch die Annahme des Innhalts $= 1$, und der Höhe $= 1$. Man vergl. auch §. 33.

§. 43.

Um nun aber auch den vorzüglichen Gebrauch dieser Tabelle näher kennen zu lernen, hat man folgendes notwendig zu erwägen.

Die Haupt-Voraussezzung ist bei dieser Tafel, und bei den vorhergehenden Erörterungen durchhin, die Area des $\triangle$ ABC sei $= 1$; (ein □ Fus, oder eine □ Ruthe). Aber es läßt sich doch gewiß auch eben so gut annehmen, sie sei $= 2$, oder $= 3$, oder $= a$, oder $= x$; oder jede nur denkbare, auch gebrochene, Zal. Die aliquoten Theile von 2, von 3, müssen natürlich ganz andere Grösen seyn, als die von 1.

Nehmen wir zum Beispiel an: der Innhalt des $\triangle$ ABC sei = 6; und dieses Dreiekk würde synthetisch gedacht als ein kleineres $\triangle$, und als ein Trapezion drunter, so daß die Höhe in dem kleinern $\triangle$ zu der Höhe des Trapezions sich verhielte wie 1 : 7. Den obigen Vorstellungen gemäs, würde der Innhalt des obersten Dreiekkchens, $= \frac{1}{64}$ ABC, hier $= \frac{1}{64} . 6$, d. i. $\frac{6}{64} = \frac{3}{32}$ seyn; Seine Basis wäre die 8te Paralele, von unten-auf gezält. Das Trapezion drunter aber wäre $= \frac{63}{64}$ ABC, hier $= \frac{63}{64} . 6 = \frac{63}{32} . 3 = \frac{189}{32} = 5 \frac{29}{32}$.

In Decimalen beträgt das $\triangle$ = 0,09375; und das Trap. = 5,90625. vollkommen. Werfen wir einen Blik in die Tabelle, und sehen, wo das Höhen-Verhältnis stehe 1 : 7; so werden wir sicher schliessen dürfen:

$$0,015625. : 0,984375. = 0,09375. : 5,90625.$$

weil $\frac{1}{64} : \frac{63}{64} = 6.(\frac{1}{64}) : 6. \frac{63}{64}$.

wo man sich statt der ersten 2 Brüche auch deren Aequival. denken kann: $\frac{4}{256} : \frac{252}{256}$.

Wenn mit den Decimalen, in dieser geometrischen Proportion, selbst multiplicirt und dividirt werden müßte, um etwa das vierte Glied aus den drei ersten zu erzielen, so wäre die Arbeit sehr beschwerlich; Aber, wenn wir die Logarithmen dieser 3 vordern Glieder kennen, so wird sie sehr leicht; wir addiren nur die mittlern und ziehen den Logar. des ersten Gliedes ab. Die Logar. der zwei ersten Glieder, stehen in der Tabelle. (S. 69.) Man schreibt sie daher nur heraus, und sezzt Logar. 0, 09375. zum dritten Glied ein, wie folgt:

$$0,1938200 - 2. : 0,9931605 - 1. = 0,9719713 - 2. : \text{zu} \ldots ?.$$

Das lezte Glied ist: 0, 7713108; wozu die absolut-Zal; 5, 90625. heißt.

Ich

Ich habe nur der Probe wegen ein so leichtes Beispiel gesezzt, um folgenden Schluß begründen, und deutlich darstellen zu können:

Wenn man den Innhalt eines △ nebst dessen Höhe kennt, und man verlangt den Innhalt eines drunter gedenkbaren Trapezions, von einer bestimmten Höhe, welche in der Tabelle vorkommt, zu wissen, so ergiebt sich dieser Innhalt als viertes Glied einer geometrischen Proportion vermittelst dieser Tabelle in jedem Fall; aber am leichtesten nach der Weise der erstgeführten Rechnung mit Logarithmen.

Demnach gäbe diese kleine Tabelle doch schon für eine beträchtliche Menge besondrer Fälle genügende Auskunft. Aber freilich müssen die Höhen des △ und des zugehörigen Trapezions Zalen seyn, welche entweder gerade zu unter den 15 der Höhen Columne vorkommen, oder sie müssen sich doch durch Zerfällung in Factoren darauf reduciren lassen. Z. B. Wenn die Höhe des △ = 20, und die des Trapezions 44. seyn sollte, so wäre der Schluß leicht: 20 : 44 = 5 : 11; und die leztere Zalen wären dann in der Höhen Columne selbst ersichtlich; demnach hätte da das angezeigte Verfaren ohne Anstand statt. — —

Allein ich höre schon die Einrede: „ Bei wirklichen Rechnungen „ wird das doch wol immer selten genug eintreffen, daß sich just die Höhen- „ Zalen vorfinden! “ —

Allerdings ist der Nuzzen dieser kleinen Tabelle noch zu beschränkkt, um nach allen Seiten hin die verlangte Aufschlüsse geben zu können. Für weit mehrere Fälle würde also wol eine Tabelle dienlich seyn, welche die Areen von 32 Dreiekken, nebst den Trapezien drunter enthielte. Da fiengen die Höhen mit 1 : 31 an, und schlössen mit 31 : 1. Das oberste Dreiekkchen wäre = $(1 : 2^{10})$ = 1/1024tel in Decimalen = 0,0009765625.

Genügte

Genügte aber auch diese Eintheilung noch nicht; so denke man sich ein △ mit 64 Paralelen, und also 63 Dreiekks-Areen, und eben so viel Trapezien, wo dann die Höhen mit 1 : 63 anfiengen. Das oberste Dreiekkchen würde seyn: $\frac{1}{2^{12}} = \frac{1}{4.(1024)} = \frac{1}{4096}$. In Decimalen: = 0, 000244140625.

Noch bessere Dienste würde ein △ mit 128 Paralelen leisten. Da wären 127 △ △, und eben so viele Trapezien vorhanden. Die Höhen begännen mit 1 : 127; Das oberste Dreiekkchen wäre: $= \frac{1}{4.(4096)} = \frac{1}{16384} = (1:2^{14})$ in Decimalen = 0,00006103515625.

Und so hoch habe ich die Abtheilungen der Höhen, und die Berechnung der Areen wirklich getrieben, und theile dann die desfalls gefertigte Tabelle am Schluß meines Buchs nebst den dazu gehörigen Logarithmen mit.

Man durchlaufe sie, und lese hierauf die nächstfolgende über ihre Einrichtung und ihren Gebrauch von mir aufgesezzte Bemerkungen:

§. 44.
Bemerkungen
über die am Schluß stehende grose Tabelle.

(1.) Die Höhe der Dreiekke ist kleiner, als die Höhe der zugehörigen Trapezien bis an die Verhältnis-Zalen, Zalen 63 : 65; wo des Dreiekks Area = 3969/16384tel ist; Alsdann kommt das Verhältnis der Höhen 64 : 64 = 1 : 1 wo des Dreiekks Area 1/4tel oder 0,25 = 4096/16384tel ist, des Trapezions, 3/4tel = 0, 75. Das nächste Höhen-Verhältnis ist 65 : 63;

wo schon ein Dreiekk vorkommt, dessen Höhe mehr beträgt, als die Höhe des zugehörigen Trapezions. Von da fangen dann die umgekehrten Verhältnisse an, eben dieselbe nur umgewandte Höhen-Zalen, und diese laufen fort bis 127 : 1, wo 127 das △ angeht, 1 das Trapezion.

(2.) Die Areen der Dreiekke halten weniger, als die der Trapezien, bis an das Höhen-Verhältnis 90 : 38. Da ist der Innhalt des Dreiekks noch 8100/16384tel; und der des zugehörigen Trapezions 8284/16384tel, also jener kleiner, als dieser. Das nächste Dreiekk darauf hat zum Gehalt 8281/16384tel, und das zugehörige Trapezion 8103/16384tel, wo also die Area des Dreiekks bereits mehr beträgt. Das Verhältnis der Höhen ist da 91 : 37. Also ist wol einzusehen, wohinein der Scheide-Punct fällt; Aber ganz völlig-genau ist er, wenn die Tabelle auch eine noch so grose Ausdehnung hätte, auf diesem Weg der Dichotomie doch nie zu finden. Man kann ihm aber so nahe kommen, als man will. Davon mag folgender Calkul schon zeugen:

Wenn die Tabelle mit 1/65536tel begänne; (der Nenner wäre da $= 2^{16}$, oder $4 \cdot 2^{14} = 4 \cdot 16384$.), so würden statt der zwo Höhen-Verhältnisse (90 : 38) und (91 : 37) drei solche Verhältnisse eintreten: (180 : 76), (181 : 75), und (182 : 74); und da würde

Das 1ste △ $\frac{(180)^2}{16384}$ seyn, $= \frac{32400}{65536}$;

Das 2te △ $\frac{(181)^2}{16384}$ seyn, $= \frac{32761}{65536}$;

Das 3te △ $\frac{(182)^2}{16384}$; seyn, $= \frac{33124}{65536}$;

Die drei hiezu gehörigen Trapezien finden sich leicht; sie heisen:

$\frac{33136}{65536}$; $\frac{32775}{65536}$; $\frac{32412}{65536}$.

Die

Die Area des mittlern Dreiekks ist also immer noch kleiner, als die des zugehörigen Trapezions; Aber der Unterschied ist schon sehr unbedeutend; Das ersieht man, wenn die Brüche in Decimal-Ausdrukk versezzt werden, am deutlichsten:

Decim. für das △	Decim. für das Trap.	wo erhellet, daß in den
0, 494384765625.	0, 505615234375.	meisten Rechnungen, (da
0, 49989...	0, 50010...	0,499... gewönlich schon
0, 50543212...	0, 4945678...	= 0, 5... geachtet wird,)

die Area des mittlern △ = 1/2tel, oder als dem zugehörigen Trapezion nahe-hin gleich angenommen werden dürfte.

Die Unrichtigkeit hätte nur in denen Fällen Einfluß, in welchen es Einfluß haben würde, statt 32768/65536tel zu sezzen 32761/65536tel. Der erste Bruch ist ganz = 1/2tel; der zweite von etwas geringerem Gehalt, weil sein Zäler mit... 61 schließt, da in dem andern... 68 steht.

(3.) In meiner gefertigten Tabelle kommen als Verhältnisse der Höhen vor:

1 : 3, 1 : 7, 1 : 15, 1 : 31, 1 : 63, 1 : 127.

Ausser diesen aber keine, in welchen das eine Glied 1 wäre.

Die dabei vorwaltende Gesezlichkeit läßt sich allgemein so ausdrükken:

Wenn das eine Verhältnis m : n ist, so ist das nächstfolgende: m : (2n + m). Z. B. 1 : 63 ist = 1 : (2. 31 + 1).

Eben dieses findet auch bei den folgenden Reihen statt:

Es treten nehmlich jezt ein:

3 : 5,	3 : 13,	3 : 29,	3 : 61,	3 : 125.	Jedes nächstfolgende horizontalhin = vorkommende Verhältnis zeigt sich in der Gesezlichkeit, daß das erste Glied immer bleibt, aber das zweite Glied des vorhergehenden Verhältnisses duplirt, und das erste dazugethan wird, um das lezte zu erhalten.
	5 : 11,	5 : 27,	5 : 59,	5 : 123.	
		7 : 25,	7 : 57,	7 : 121.	
		9 : 23,	9 : 55,	9 : 119.	
		11 : 21,	11 : 53,	11 : 117.	
			13 : 51,	13 : 115.	
			:: ::	:: ::	
			:: ::	:: ::	
			29 : 35,	29 : 99.	
			31 : 33,	31 : 97.	
			33 : 31,	33 : 95.	
			:: ::	:: ::	

Die Folge der verticalen Glieder, wo die Differenz durchgehends 2 ist, ist eben so leicht zu übersehen.

(4.) Es fehlen also die Höhen=Verhältnisse $1:2$, $1:4 \ldots 1:2^n$. Ferner $1:5$, $1:10 \ldots 1:5^n$, und $1:10^n$. Ferner $1:6 \ldots 1:6^n$; auch $1:8 \ldots 1:8^n$; u. s. f. noch viele folgende:

Aber ich will zeigen, daß dennoch durch Näherung sich diese Verhältnisse in der Tabelle, wie sie angegeben ist, bereits ziemlich genüglich finden lassen, noch weit schärfer aber freilich finden lassen würden, wenn wir eine Tabelle vollständig hätten, welche von 1/65536tel oder gar von 1/262144tel ausgienge: Dem Verhältnis 1 : 2 kommt sehr nahe 43 : 85; wenn die lezte Zal 86 hieße; so wäre volkommen 1 : 2 vorhanden. Die Decimalen des zugehörigen Dreiekks sind: 0, 1128... und des Trapezions drunter 0, 8871...

Die

Die Unrichtigkeit fängt erst in den Tausendtheilchen an, und zwar steht auf der einen Seite nur ein einziges Tausendtheilchen zu hoch, und auf der andern nur eines zu tief. (*) Das ist leicht zu erweisen: Man gedenke sich ein Dreiekk mit drei Paralelen, wie Fig. 9. so ist da das Höhen-Verhältnis BE : EP = 1 : 2 vollkommen; Das eine Perpendikel BE steht in dem △ Bmn, welches = 1/9tel ABC ist; das Perpendikel EP in dem Trapezion drunter, ACmn, welches 8/9tel ABC ist. (S.S.31. §.20.) Die Decimalen für die Area des △ sind dann: 0,1111... Die Decimalen für die des Trapeziens sind: 0, 888... Nun vergleiche man damit unsre Decimalen bei dem Höhen-Verhältnis 43 : 85; Und man wird meine Behauptung bestätiget finden.

Ein 2tes Beispiel sei dieses: Gesezt, man wüßte das Höhen-Verhältnis 2 : 3. Dasselbe findet sich in der Tabelle nicht. Da aber 51 : 77 darinn vorkommt, und 2 : 3 = 51 : 76 $\frac{1}{2}$ ist, so wird der Decimal-Ausdruk für die Area des zugehörigen Dreiekks mit 0, 1587... nahe hin richtig seyn. Ganz richtig ist der Innhalt = $\frac{4}{25}$ = 0, 160. wie aus einem andern Calkül erweislich ist. Hätten wir nun eine Tabelle, welche von 1/65536tel begänne, so würden die drei Höhen-Verhältnisse darinn vorkommen:

102 : 154, 103 : 153, 104 : 152.

und die Area des △, welcher 103 angehörte, (**) würde seyn:

(*) Auf die übrigen niedrigern Decimalen wollen wir hier nicht Rükficht nehmen.

(**) Nehmlich es ist 2 : 3 = 103 : [309 : 2] = 103 : 154$\frac{1}{2}$. Und weiter zu dem nächsten Beispiel: auf der folgend. Seite: 2 : 3 = 205 : [615 : 2] = 205 : 307$\frac{1}{2}$.

$[(103)^2 : 65536] = 0,\ 16187$ ... wo also erst in der Stelle der Tausendtheilchen ein einziges zu hoch vorkäme. (102 : 154 ist eben 51 : 77; und 104 : 152 ist 52 : 76.)

Um die Unrichtigkeit noch mehr zu vermindern, oder auf ein Minimum zu reduciren, nehmen wir an, wir hätten eine noch ausgedehntere Tabelle, welche mit 1/262144tel anfienge. Dadurch erhielten wir, statt 102 und 103, drei Höhen-Verhältnisse:

204 : 308, 205 : 307; 206 : 306.

und die Area des △, dem die Höhe 205 angehörte, (S. 77. die Note) wäre: $[(205) : 262144] = 0,\ 16031$ ... wo also noch in der Stelle der Tausendtheilchen vollkommene Richtigkeit vorhanden wäre, und erst bei den Zehentausendtheilchen zwei zu hoch stehende (meistens) unbedeutende Zifern vorkämen.

(5.) Man merke sich folgende beständige Logarithmen:

$$\text{Log.}\left(\tfrac{1}{16384}\right) = 0-4,2144199 = 0,7855801-5.$$

$$\text{Log.}\left(\tfrac{1}{65536}\right) = 0-4,8164799 = 0,1835201-5.$$

$$\text{Log.}\left(\tfrac{1}{262144}\right) = 0-5,4185399 = 0,5814601-6.$$

Jeder Logarithme meiner Tafel ist eine Summe, bestehend (Erstens) aus dem Logar. eines Zälers von einem der Brüche, welche nach der Reihe, als Ausdrükke der Areen, herunter laufen; und (Zweitens) aus dem Logar. zu 1/16384tel. Man stelle sich nur z. B. 9604/16384tel (bei dem Höhen-Verhältnis 98 : 30) als 2 Factoren vor: (9604 × 1/16384tel) so wird man, da bei Logar. Addition für Mltc. eintrit, sogleich einsehen, daß jeder Logar. meiner Tafel eine Summe sei, zusammengesezt, wie ich so eben angegeben habe.

Ebenso

Ebenso verhielte ich sichs dann, wenn man Logar. zu mehr erweiterten Tafeln zu verfertigen unternehmen würde. Die Zäler der Brüche, welche die Dreiekks-Areen angehen, sind durchaus Quadrat-Zalen.

(6.) Wo das Höhen-Verhältnis auf kleinere Zalen reducirt vorkommt, da lassen sich auch die Brüche, welche die Areen angehen, reduciren, Z. B. bei 40 : 88 steht angehängt = 19 : 45 (in der Höhen-Skale) also ist auch der Bruch 1444/16384tel zu reduciren auf 361/4096tel; und der Bruch des Trapezions von 14940/4096tel auf 3735/4096tel.

Ueberhaupt ist bei dem Gebrauch solcher Tafeln erforderlich, daß man die Kunst der Factoren-Zerfällung nicht nur überhaupt kenne, sondern auch wirklich darinn recht geübt sei.

(7.) In dieser Tabelle kommen die 15 Areen, und Höhen (für △ und Trapezien) wieder vor, welche schon die kleine Tabelle S. 69. geliefert hat; die Logarithmen sind dann auch die nehmlichen. Die übrigen 112 Logarithmen für die △ △, und 112 Logarithmen für die Trapezien sind dann ebenfalls von mir genau berechnet worden, und ich liefere sie vollständig.

(8.) Ueber ihren vielfältigen Gebrauch in der Anwendung will ich nur einiges anführen:

Wenn der Innhalt eines △ eine Zal ist, die nicht in der Tabelle vorkommt, Z. B. 113 Fus; (welches ich zufällig, etwa aus einem andern Calkül, aus bequemer Messung u. s. f. wissen kann,) und ich verlange das Trapezion drunter = y, (noch unbekannt) zu wissen, und zwar unter Voraussezzung eines gewissen Verhältnisses der Höhen des △ und des Trapezions, n : m, welches Zalen wären, die in der Höhen Skale ganz oder doch sehr nahe-hin

vor-

vorkämen, so ist der Calkül durch einen einzigen Proportions-Satz vollendet:

Ich sezze: $$\text{Log.}\left(\frac{n^2}{2^{14}}\right) : \left(1-\frac{n^2}{2^{14}}\right) = \text{Log.}\,113.:\text{Log.}\,y.$$

Die Decimalen für die zwei Brüche der vordern Verhältnis, d. h. die zwei ersten Glieder sind als Areen in meiner Tabelle befindlich; auch die Logarithmen, dazu; Also erhält man das vierte Glied, vermittelst einer einzigen Addition und Subtraction. Z. B. Wenn ich das Trapezion ABab in Fig. 95. der Wolfischen Geom. wissen möchte, und hätte vordersamst folgende Data:

(Erstens) Den Innhalt des Dreiekkchens abc; (Zweytens) Das Verhältnis der Höhe in dem Δ abc zu der Höhe in dem Trapezion ABab, n : m, etwa 7 : 12; so würde der Saz heissen:

$$\text{Log.}\,[7^2 : 2^{14}] : \text{Log.}[1-(7^2 : 14^2)] = \text{Log.}\,113 : \text{Log.}\,ABab.$$

$$0{,}4757762-3. : 0{,}9986992-1. = 2{,}0530784. : 4{,}5760014.$$

Die Absolut-Zal zu dem leztern Log. ist: 37670, 5...

So liesse sich die Tabelle dann (unter andern) jedesmal bequem gebrauchen, wenn Weiten zweier Oerter, zu deren einem man nur kommen kann, zu erforschen wären; auch wol wenn man zu beeden Enden nicht kommen kann, die Höhe aber durch gewisse Kunstgriffe sich etwa doch errathen läßt. Desgleichen, wenn die Basis gegeben ist, und die Höhe gesucht wird. Wol weis ich daß dazu längst-erprobte Mittel in jeder guten Geodäsie gelehrt werden; und bin auch weit entfernt, das meinige mit Verachtung andrer vorzuziehen; Aber daß eine solche Tabelle doch zu vielen Vergleichungen, auch zu Proben schon gefertigter Rechnungen, welche in das erwähnte Fach einschlagen, recht füglich dienen könne, wird doch auch gewiß nicht in Abrede zu stellen seyn.

Eine

Eine andre Anwendung wäre die: Gesezzt, es käme der Innhalt eines △ = 1040 (Ruthen) vor, und alsdenn brächte es ein gewisses Bedürfnis so mit sich, daß 455 von diesem Areen Gehalt abgezogen würde, so daß der Rest 585 noch der Gehalt eines dem Ganzen △ ähnlichen Dreiekkes seyn sollte, 455 aber der Gehalt des Trapezions drunter; und es träte nun die Frage über das Verhältnis der Höhen in dem △ und Trapezion ein, so findet sich dieses jederzeit leicht entweder ganz genau, oder doch nahe-hin, vermittelst unserer Tafel. Man vergleicht 585 : 455 mit den ersten Zifern von Decimalen, welche ohngefär eben das Verhältnis zu haben scheinen, z. B. mit 0, 5625 : 0, 4375; und rechnet dann blos dem Proportions-Saz durch: 585:455 = 0, 5625 : zu...? Mit Logarithmen zeigt sich dann: 2, 7671559 : 2, 6580114 = 0, 7501226 — 1 : 0, 6409781 — 1.

Nehmlich, die zwei ersten Glieder sind die Logar. zu 585 : 455, das dritte ist Logar. zu 0, 5625. (in der Tab.) Nun wird das erste von der Summe der mittlern abgezogen; und da zeigt sich, daß der Log. des vierten Glieds wirklich = Log. 0, 4375; sei; Folglich verhält sich die Höhe des △ zu der Höhe des Trapezions wie 96 : 32, d. h. wie 3 zu 1 nach der Tabelle.

In mehrern Fällen wird nun wol nicht immer alles so geschikkt eintreffen; Allein nahe-hin wird sich doch immer die Bestimmung des Höhen-Verhältnisses so heraus bringen lassen.

Ich habe diese Beispiele nur zu einiger Erläuterung in einzelnen Hinsichten angeführt. Die Anwendung der Tabelle erstrekkt sich aber wol viel weiter, welches Kenner von Stereometrie, und höherer Geometrie für sich ohne meine Belehrung einsehen werden. Meine Lage zwingt mich, hier kurz zu seyn. Ich werde zu einer andern Zeit etwas hierher gehöriges noch besonders liefern, wenn es meine Privat-Verhältnisse vergönnen. —

Vierter Abschnitt.
Ueber Trichotomie,
und darauf, wie auch auf noch tiefere Eintheilungen sich gründenden Calkül.

§. 45.

Damit es nicht scheinen möge, als wollte ich meine grose durch Dichotomie fortgeführte Tabelle, als ein unvergleichbares Unicum aufstellen, so will ich sofort auch die Entwürfe zu einigen andern Tafeln hiemit beifügen, bei welchen andere Eintheilungen zum Grund liegen, und welche mehrere Höhen=Verhältnisse bestimmt angeben, die in der dichotomischen nicht vorkommen können. Ich will mit Trichotomie anfangen. Man denke sich ein △ mit 27 Paralelen, (wie §. 22 und 23 ein solches erläutert worden.) Jeder wird einsehen, wie sich da die correspondirende Dreiekke und Trapezien zusammen=ordnen lassen: Das oberste Dreiekk ist in dem Fall $(1:3^6) = 1/729$tel, das Trapezion drunter ist $= 728/729$tel Die Höhe im △ verhält sich zu der Höhe des Trapezions, wie 1:26, Die weitere Folge wird nun in der Tabelle selbst, welche unmittelbar folgt; wol verständlich seyn: (*)

Inn=

(*) Die Decimalen für die Trapezien sind, des Raums wegen, nur bis auf 4 bis 5 Stellen angegeben. Da sie nur Ergänzungen der Zifern, welche bei den Areen der Dreiekke vorkommen, sind, (nehml. Erg. auf 9) so lassen sich die fehlende immer mit einem Blik errathen.

Innhalte der Dreiekke.	Innhalte der Trapezien.	Logarithmen der Areen: für die Dreiekke.	für die Trapezien.	Verhältnis der Höhen.
$\frac{1}{729}$ = 0,001371742112482..	$\frac{728}{729}$ = 0,998628..	0,1372725—3.	0,9994039—1.	1 : 26
$\frac{4}{729}$ = 0,0054869684499..	$\frac{725}{729}$ = 0,994513..	0,7393325—3.	0,9976105—1.	2 : 25
$\frac{9}{729}$ = 0,012345678901..	$\frac{720}{729}$ = 0,987654..	0,0915150—2.	0,9946050—1.	3:24 = 1:8
$\frac{16}{729}$ = 0,0219478737997..	$\frac{713}{729}$ = 0,978052..	0,3413925—2.	0,9903620—1.	4 : 23
$\frac{25}{729}$ = 0,0342935527009..	$\frac{704}{729}$ = 0,965706..	0,5352125—2.	0,9848452—1.	5 : 22
$\frac{36}{729}$ = 0,049382715604..	$\frac{693}{729}$ = 0,950617..	0,6935750—2.	0,97[illegible]0057—1.	6:21 = 2:7
$\frac{49}{729}$ = 0,067215363289..	$\frac{680}{729}$ = 0,932784..	0,8274686—2.	1,9697814—1.	7 : 20
$\frac{64}{729}$ = 0,08779149519..	$\frac{665}{729}$ = 0,912208..	0,9434525—2.	0,9600941—1.	8 : 19
$\frac{81}{729}$ = 0,11111..	$\frac{648}{729}$ = 0,88888..	0,0457575—1.	0,9488475—1.	9:18 = 1:2
$\frac{100}{729}$ = 0,137174211248..	$\frac{629}{729}$ = 0,862825..	0,1372725—1.	0,9359231—1.	10 : 17
$\frac{121}{729}$ = 0,1659807954..	$\frac{608}{729}$ = 0,834019..	0,2200579—1.	0,9211761—1.	11 : 16
$\frac{144}{729}$ = 0,197530864197..	$\frac{585}{729}$ = 0,802469..	0,2956350—1.	0,9044284—1.	12:15 = 4:5
$\frac{169}{729}$ = 0,231824416898..	$\frac{560}{729}$ = 0,768175..	0,3651592—1.	0,8854605—1.	13 : 14
$\frac{196}{729}$ = 0,26886145..	$\frac{533}{729}$ = 0,731138..	0,4295286—1.	0,8639997—1.	14 : 13
$\frac{225}{729}$ = 0,308641975308..	$\frac{504}{729}$ = 0,691358..	0,4894550—1.	0,8397030—1.	15:12 = 5:4
$\frac{256}{729}$ = 0,35116598079..	$\frac{473}{729}$ = 0,648834..	0,5455125—1.	0,8121336—1.	16 : 11
$\frac{289}{729}$ = 0,396433470507..	$\frac{440}{729}$ = 0,603566..	0,5981703—1.	0,7807252—1.	17 : 10
$\frac{324}{729}$ = 0,4444..	$\frac{405}{729}$ = 0,5555..	0,6478175—1.	0,7447275—1.	18 : 9 = 2:1
$\frac{361}{729}$ = 0,4951989021..	$\frac{368}{729}$ = 0,504801..	0,6947797—1.	0,7031203—1.	19 : 8
$\frac{400}{729}$ = 0,54869684497..	$\frac{329}{729}$ = 0,451303..	0,7393325—1.	0,6544684—1.	20 : 7
$\frac{441}{729}$ = 0,60493827156..	$\frac{288}{729}$ = 0,395061..	0,7817111—1.	0,5966650—1.	21 : 6 = 7:2
$\frac{484}{729}$ = 0,66392318..	$\frac{245}{729}$ = 0,336076..	0,8221179—1.	0,5264386—1.	22 : 5
$\frac{529}{729}$ = 0,725651577..	$\frac{200}{729}$ = 0,274348..	0,8607282—1.	0,4383025—1.	23 : 4
$\frac{576}{729}$ = 0,7901234567..	$\frac{153}{729}$ = 0,209876..	0,8976950—1.	0,3219639—1.	24 : 3 = 8:1
$\frac{625}{729}$ = 0,8573388201..	$\frac{104}{729}$ = 0,142661..	0,9331525—1.	0,1543058—1.	25 : 2
$\frac{676}{729}$ = 0,92729766803..	$\frac{53}{729}$ = 0,072702..	0,9672192—1.	0,8615484—2.	26 : 1

§. 46.

Bemerkungen
über diese Tabelle für trichotomischen Calkül.

(1.) Die leichteste und interessanteste Höhen=Verhältnisse darinn sind (1:2), (4:5), (1:8), (2:7); und deren Umkehrungen, welche jederzeit voraussezzen, daß der Innhalt der Trapezien gröser sei, als der der Dreiekke.

(2.) Es ist ersichtlich, daß durchaus die Decimalen unvollendet bleiben; und in dieser Hinsicht hat die dichotomische Tafel einen gewissen Vorzug. Da aber doch die Decimalen meistens bis an die zwölfte Stelle (auch bei dieser) fortlaufen, so ist für ausserordentlich grose Schärfe dennoch dabei gesorgt.

(3.) Besonders herausgemerkt zu werden verdienen diejenigen unendliche Decimal=Brüche, in welchen allemal in der zehnten Decimal=Stelle ebendieselbe Ziefer wieder zum Vorschein kommt. Dies Gesez hat bei den Areen von 7 Dreiekken, und von 7 Trapezien statt. Man sehe die Decimalen zu folgenden Brüchen, welche Correlata von Dreiekken sind:

$\frac{9}{729}$, $\frac{36}{729}$, $\frac{144}{729}$, $\frac{225}{729}$, $\frac{441}{729}$, $\frac{576}{729}$.

Da $729 = 9 \cdot 81$ ist, so lassen diese Brüche auf folgende reduciren:

$\frac{1}{81}$, $\frac{4}{81}$, $\frac{9}{81}$, $\frac{16}{81}$, $\frac{25}{81}$, $\frac{49}{81}$, $\frac{64}{81}$.

Eben dieses hat bei den zugehörigen Trapezien statt.

(4.) Eine **vollkomnere** Tafel, als die vorliegende, würde die seyn, welche mit $_{1}/_{6561}$tel, für das oberste △, anfienge. (Der Nenner ist $= 9 \cdot 729$.) Es kämen darinn die Werthe von 80 Dreiekken, und von 80 Trapezien vor. Die Decimalen für das oberste würden seyn, 0, 00015241579.... Der Logarithme hinzu aber: = 0, 1830300 — 4; welcher als **beständiger** für diese Tafel wol Aufmerksamkeit verdient.

Als=

Alsdann folgte ein △ = 0, 00060966316 . . . = 4/6561tel; und erst das Dritte wäre unser erstes in der gelieferten Tabelle; weil ja 9/6561tel = 1/729tel ist. Die Höhen-Verhältnisse würden mit 1 : 80 beginnen; das dritte 3 : 78 ist eben = 1 : 26, u. s. f.

Eine solche *erweiterte* Tabelle, mit Logarithmen versehen, und dann in unsre grose Dichotomische *eingerükkt*, würde wichtige Vergleichungen erleichtern, und eine (denke ich,) sehr verdienstliche Production seyn.

§. 47.

Wenn man sich ein △ mit 7 Paralelen denkt, so ist die Area des obersten △ = 1/49tel und das Trapezion drunter ist = 48/49tel. Die Höhe des Dreiekks verhält sich zu der Höhe des Trapezions wie: 1 : 6. Alsdenn kommt, dem bisherigen Verfaren gemäs, △ = 4/49tel; Trapez. = 45/49tel; und das Höhen-Verhältnis: 2 : 5. Demnach ergiebt sich folgende kleine Tabelle; in welcher durchgehends *Brüche* vorkommen die sich nicht auf kleinere reduciren lassen, und Decimalen, die nie ganz geendiget sind, noch vollendet gegeben werden können:

Innhalte der Dreiekke.	Innhalte der Trapezien.	Logarith. zu den △.	Logarith. zu den Trap.	Verh. der Höhen.
$\frac{1}{49}$ = 0, 0204081632 . . .	$\frac{48}{49}$ = 0, 97959183 67 . . .	0,3098039 — 2.	0,9910451 — 1.	1 : 6
$\frac{4}{49}$ = 0, 0816326528 . . .	$\frac{45}{49}$ = 0, 9183673471 . . .	0,9118639 — 2.	0,9630164 — 1.	2 : 5
$\frac{9}{49}$ = 0, 1836734688 . . .	$\frac{40}{49}$ = 0, 816326531 1 . . .	0,2640464 — 2.	0,9118639 — 1.	3 : 4
$\frac{16}{49}$ = 0, 326530611 . . .	$\frac{33}{49}$ = 0, 673469399 . . .	0,5139239 — 1.	0,8283178 — 1.	4 : 3
$\frac{25}{49}$ = 0, 51020407 . . .	$\frac{24}{49}$ = 0, 48979592 . . .	0,7077439 — 1.	0,6900151 — 1.	5 : 2
$\frac{36}{49}$ = 0, 734693872 . . .	$\frac{13}{49}$ = 0, 265306127 . . .	0,8661064 — 1.	0,4237472 — 1.	6 : 1

Es ist sehr wol begreiflich, daß das Dreiekk, dessen Area $\frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$ gedacht wird, sich abermals durch 7 Paralelen gleichförmig eintheilen lasse, so daß das oberste Dreiekk $= 1:(49)^2 = \frac{1}{2401}$ würde; $\left(= \frac{1}{7^4}\right)$. Das dazu gehörige Trapez. hielte = 2400/2401tel. Die Höhe dieses Dreiekks verhielte sich zu der Höhe des drunter befindlichen Trapez. wie 1 zu 48. Alsdann folgte ein Δ = 4/2401tel; und das dazu gehörige Trapezion würde seyn: = 2397/2401tel. Ich will auch die Decimalen für diese zwei erste Dreiekke herschreiben, wie auch für die zugehörige Trapezien, um einige Vergleichung mit der grösern Tafel auch hier zu erleichtern:

Δ = 0,0004164972 ... Trap. = 0,9995835027 ... Höhe: 1:48.
Δ = 0,001665988 ... Trap. = 0,998334011 ... Höhe: 2:47.

Der beständige Logar. zu 1/2401tel ist: 0,6196078 — 4, durch welchen sich dann die Decimalen zu den folgenden Gliedern durchhin sehr leicht und sicher, wenigstens bis auf die sechste Stelle finden lassen. (*)

§. 48.

(*) Ohne Beisezzung der Logarithmen ist keine der vorgelegten und vorgeschlagenen Tafeln, von sonderlich = weitem Gebrauch. — Leider! will aber das Studium der Mathematik in Deutschland noch nicht so weit sich ausdehnen, daß die kleine Kunst, mit Logarithmen umzugehen, gemeiner würde! Leider hält man ihre Bekantschaft noch immer für ein ausserwesentliches Nebenstükk mathematischer Liebhaberei! Es ist traurig, daß so manche grose Männer, seit 30. und mehr Jaren schon, unter uns vergebens gegen dieses Vorurtheil geeifert haben!

§. 48.

Das lezte Beispiel, daß ich noch geben will, sei, von einem Dreiekk hergenommen, welches mit dekadischer Eintheilung seiner Höhe gedacht werde. Ein Dreiekk mit zehn Paralelen, (die Basis dazu gerechnet,) giebt oben 1 Dreiekkchen = 1/100tel ABC, und 9 Trapezien; das Trapezion welches unter dem obersten gedachten Dreiekkchen als ein einziges bis auf die Basis herabreicht, ist natürlich = 99/100tel. Die Höhen verhalten sich wie 1 : 9. Die Tabelle für die übrige Dreiekke und Trapez. nach der Reihe ist dann folgende: (Sie ist die leichteste und simpelste unter den bisher gelieferten. Die Logarithmen dürfen nur mit richtiger Bemerkung der Charakteristik, aus den gewöhnlichen gemeinen Logar. Tafeln herausgeschrieben werden.)

Inn=

Es ist traurig, daß auf Schulen und Akademien so viele Tausende unüberzeugt bleiben, daß auch in Geschäfften und Rechnungen des gemeinen Lebens, (die gar Geometrie nichts angehen) durch Logarithmen Rath geschafft, und Aushülfe gewährt werde, wie gewiß auf keine andre Art je zu erwarten steht! — Wie reicher Stoff wäre nicht vorhanden, diese Jeremiade fortzusezzen. Aber ich will abbrechen! Es möchte mir sonst wol noch selbst das Asyntheton einfallen: daß sogar solche Geometer, welche mehr als einen ebenen Aker messen können, über die Entbehrlichkeit des logarithmischen Calküls, hie und da Fragen aufzuwerfen vermögen!

Innhalte der Dreiekke.	Innhalte der Trapezien.	Logarithmen zu den Dreiekken.	Logarithmen zu den Trapezien.	Verhältnis der Höhen.
$\frac{1}{100}$ = 0, 01.	$\frac{99}{100}$ = 0, 99.	0,0000000—2.	0,9956352—1.	1 : 9
$\frac{4}{100}$ = 0, 04.	$\frac{96}{100}$ = 0, 96.	0,6020600—2.	0,9822712—1.	2 : 8 = 1 : 4
$\frac{9}{100}$ = 0, 09.	$\frac{91}{100}$ = 0, 91.	0,9542425—2.	0,9590414—1.	3 : 7
$\frac{16}{100}$ = 0, 16.	$\frac{84}{100}$ = 0, 84.	0,2041200—1.	0,9242793—1.	4 : 6 = 2 : 3
$\frac{25}{100}$ = 0, 25.	$\frac{75}{100}$ = 0, 75.	0,3979400—1.	0,8750613—1.	5 : 5 = 1 : 1
$\frac{36}{100}$ = 0, 36.	$\frac{64}{100}$ = 0, 64.	0,5563025—1.	0,8061800—1.	6 : 4 = 3 : 2
$\frac{49}{100}$ = 0, 49.	$\frac{51}{100}$ = 0, 51.	0,6901961—1.	0,7075702—1.	7 : 3
$\frac{64}{100}$ = 0, 64.	$\frac{36}{100}$ = 0, 36.	0,8061800—1.	0,5563025—1.	8 : 2 = 4 : 1
$\frac{81}{100}$ = 0, 81.	$\frac{19}{100}$ = 0, 19.	0,9084850—1.	0,2787536—1.	9 : 1

Wenn man gleichförmig, wie bisher, progressiv verfährt, und sich demnächst ein Dreiekk mit 100 Paralelen denkt, (die Basis dazu gerechnet,) so ergeben sich notwendig 99 Dreiekke, und eben so viel Trapezien. Die Höhen = Verhältnisse fangen an: 1 : 99, 2 : 98, u. s. f. Die Area des obersten Dreiekkchens ist 1/10000tel = 0, 0001; Die des Zweiten: = 0,0004. Die Logarithmen sind: 0,0000000—4; 0,6020600—4. Daraus sieht wol schon jeder, wie leicht sich auch diese Tabelle construiren lasse.

Endlich würde das Non Plus Ultra des geschäftigen Fleises in diesem Fach eine Tabelle seyn, in welcher die Area des obersten ein Milliontheilchen des grosen Dreiekks, ABC, wäre. = 0, 0000001; (wozu der Logarithme: 0, 0000000—7 heisen würde,) unter welchem 999 Trapezien befindlich seyn müßten. (Das erste 1 Mill. — 1, im Innhalt.) Die Höhen = Verhältnisse wären: 1 : 999, 2 : 998 u. s. f.

Weiter

Weiter verfolge ich nun den bisher fest gehaltenen Gesichts-Punct nicht. Es leuchtet nunmehr gewiß von sich selbst ein, daß alle Prim-Zalen, von 11, 13 u. s. f. an, neuen Eintheilungen zum Grund gelegt, darnach Paralelen gezogen, und dann die erscheinende Dreiekke und Trapezien gleichförmig, wie bisher, berechnet werden können. Das gäbe immer neue Tabellen! Gewiß wäre es keine unnüzze, keine blos speculative Production, wenn wir eine Reihe solcher Tabellen von einem geübten Rechner erhielten, welchen die Prim-Zalen wenigstens in dem Umfang von 11 bis 50 zum Grunde lägen. Ich gedenke mir hierunter keine so weit ausgedehnte Tafeln, wie meine grose Dichotomische, sondern blos so einfache, wie S. 85. und S. 88. stehen. Die von 11 ausgienge, hätte 10 Dreiekke: $\frac{1}{121}$, $\frac{4}{121}$ . . . $\frac{100}{121}$. Die von 13 ausgienge, hätte 12 Dreiekke: $\frac{1}{169}$, $\frac{4}{169}$ . . . $\frac{144}{169}$. nebst den zugehörigen Trapezien.

Warscheinlich würde man mit unter, wenn diese Idee verfolgt würde, nach und nach noch auf Phänomene, und Entdekkungen gewisser Geseзlichkeiten im Zalen-System gerathen, welche, selbst bei der grosen Menge von interessanten Erforschungen in diesem Fach, sich noch wol über gewöhnliche Erwartung auszeichnen möchten!

Fünfter Abschnitt.

Trigonometrische Zusammenstellung interessanter Linien und Flächen im Kreis.

§. 49.

Man gedenke sich an den Bogen eines Quadranten eine Tangente, AG, und im Kreiß selbst den ihr correspondirenden Sinus, DE, wie z. B. in der Kästnerischen Trigon. Fig. 2. und Fig. 3. vorkommen; auch wie unter den angehängten Figuren am Ende meines Werkes in Fig. 12. und Fig. 13. ersichtlich sind. Die Gröse des Winkels am Mittel-Punct sei vor der Hand willkürlich angenommen, nicht gerade so bestimmt zu 30° oder 45°, wie in diesen beeden Figuren (einiger folgenden Belehrungen wegen) angesezzt. Der Radius heise AC, und der Cosimus, DE. So gilt die bekannte Analogie AG : DE = AC : CE, oder Tang : Sin. = r : Cos.

Wird nun der Radius = 1 gedacht, so ist unleugbar $\frac{DE}{AG} = \frac{Cos}{rad} = Cos.$

Oder der Exponent des Verhältnisses der Tangente zum Sinus ist jederzeit in Zalen der Cosinus selbst, wenn r = 1 gilt. Der Logarithme dieses Cosinus ist eine sehr interessante äusserst-brauchbare Gröse; ich will das so gleich zeigen.

Man

Man werfe einen Blikk in meine zwei lezte Figuren. AD ist die Chorde des Bogens, zu welchem die Tangente und der Sinus schon vorausgesezzt werden. Man denke sich eine Paralele dieser Chorde, EL, allgemein von E, dem Ende des Sinus Versus AE aus, gegen L gezogen. Von L herunter fälle man ein Perpendikel LP auf den Halbmesser also eine Paralele des Sinus DE. So verhält sich AG:DE = DE:LP; d. h. die Tangente zum Sinus, wie der Sinus zu diesem neuen Perpendikel. Der Exponent dieser zwei Verhältnisse, oder dieser stetigen Proportion ist (in Zal) der Cosinus EC. Eben derselbe ist es, wenn man fortfährt, und eine ähnlich-liegende Paralele mit LP, nehmlich Qp, als Perpendikel, zieht, so daß auch da die Proportion eintrit: DE : LP = LP : Qp. Nehmlich DE wird jezt als Tang. eines kleinern Kreises (mit dem Rad. EC) angesehen, LP, als der Sinus zu dem nehmlichen Centriwinkel, wie vorher, und Qp, als das neu-hinzugekommene Perpendikel. Da wäre jezt EP der Sin. Vers. PQ die Paralele mit der Chorde, EL, und von deren Ende, Q, aus, das neue Perpend. gleichförmig, (wie vorher LP) gefällt. So kan man graphisch ins unendliche fortfaren; also auf diese Weise unendlich-viele geom. Mittel-Proportional-Linien, die fort und fort abnehmen, und ebenso proportionirte immer kleinere Radien zu immer kleinern Kreisen finden.

Aber beinahe noch leichter ist die Berechnung dieser abnehmenden Linien, (deren Bestimmung in Zal-Calkül,) noch leichter, als ihre Zeichnung, die doch gewiß nicht schwer ist, wenn man Logarithmen versteht, und folgendes sich merkt:

In der allerersten Analogie AG : DE = DE : LP ist der Exponent = EC, (in Zal) = Cosin. ang. C. Man berechne den Logarithmus dieses Cosinus, oder schreibe sich ihn aus Tafeln heraus. Er wird der beständige Logarithme zu folgender Rechnung: Man darf ihn schlechthin nur zu dem Logarithmus der nächstgrösern Linie, (als Zal-Gröse betrachtet,) addiren, so erhält man den Logarithmus der verhältnismäsigen nächst-kleinern Linie. Z. B. wenn nach Fig. 12. der Winkel bei C = 30° gedacht wird, also Cosin. 30° = 0,9375306—1 ist, so erhält man, als Summe, Log. DE, u. s. f.

Log. Exp = 0,9375306—1.	Log. Exp = 0,9375306—1.	Log. Exp = 0,9375306—1.
Log. AG = 0,7614394—1.	Log. DE = 0,6989700—1.	Log. LP = 0,6365006—1.
Log. DE = 0,6989700—1.	Log. LP = 0,6365006—1.	Log. QP = 0,5740312—1.

Und so hat man dann die Logarithmen der Gröse von drei Linien, durch simple Addition (*) des beständigen Logar. für den gedachten Exponenten, (oder durch Log. Cos. 30°). Die Absolut-Zalen dieser drei Linien liefert die folgende Tabelle. S. 98. Wie spielend leicht die Fortsezzung des Geschäftes sei, leuchtet nun wol jedem ein.

Aber

(*) Der Grund dieser Einfachheit der Operation rührt daher: Die Geom. Proportion heißt, Z. B. DE : LP = LP : Qp. Da ist unser beständiger Logarith. schon das Aequivalent des Logar. [DE : Lq], giebt also schon den Logarithmus der zwei ersten Glieder, (des zweiten durch das erste dividirt.) Das dritte Glied ist dann immer, statt des Acts der Multiplication, bei Logarithmen nur zu addiren, um den Logarithmus des vierten zu erhalten.

Aber nicht nur so fort und fort abnehmende Paralelen mit der Tangente, AG, lassen sich durch den bemelten beständigen Logarithmen in Zal-Bestimmung angeben, (Perpendikel, oder Sinus in immer kleinern Kreisen,) sondern auch die correspondirenden Sinus-Versus, AE, EP, Pp ... und Chorden, AD, EL, PQ u. s. f. wie auch die Höhen in den gleichschenklichten spizwinklichten Dreiekken ADR, ELR, u. s. f. (welche je zwei und zwei, vertical entgegengesezt, gleichförmige Theile von ähnlichen Trapezien sind;) ich sage auch das Verhältnis solcher zwei Höhen, wie Rd : Re hat immer die Zal des Cosinus zum Exponenten.

Beispiele für diese drei Gattungen linearischer Grösen:

Log. Exp. $= 0,9375306 - 1.$		Log. Exp. $= 0,9375306 - 1.$
Log. AE $= 0,1270224 - 1.$		Log. EP $= 0,0645530 - 1.$
giebt Log. EP $= 0,0645530 - 1.$		giebt Log. Pp $= 0,0020836 - 1.$

So geben sich die folgende Sin. Versus fort und fort. Eben so die Chorden...

Log. Exp. $= 0,9375306 - 1.$		Log. Exp. $= 0,9375306 - 1.$
Log. Chord. Ad $= 0,7140262 - 1.$		Log. EL $= 0,6515568 - 1.$
giebt Log. EL $= 0,6515568 - 1.$		Log. PQ $= 0,5890874 - 1.$

Und endlich ist so Log. Exp. $= 0,9375306 - 1.$ + Log. Rd. $= 0,8410486 - 2.$ in der Summe $= 0,7785792 - 2.$ als Logar. der Lin. Re. Eben so giebt Log. Exp. + Log. Re den Log. km; u. s. f. Die Absolut-Zal dieses bis daher gebrauchten beständigen Logar. ist übrigens eine irrational Zal, oder ein unendlicher Decimal-Bruch $= 0,86602...$, die Quadrat-Wurzel aus $\frac{3}{4}$, oder die Helfte der Quadrat-Wurzel von $3 = \frac{1}{2}(\sqrt{3})$, d. i. ein Bruch, der um etwas sehr geringes weniger, als $\frac{13}{15}$ beträgt. Denn $\frac{13}{15}$ ist $= 0,8666...$

§. 50.

Es kostete mich nur geringes Nachdenken, um ausfindig zu machen, was für ein beständiger Logar. eines beständigen Exponenten eben solche Dienste im umgekehrten Fall leisten würde, wenn man nicht abnehmende immer kleinere Linien, (Perpendikel, Sinus und Chorden) sondern immer grösere, verhältnismäsig-wachsende Linien verlangte; und z. B. zu den Perpendikeln Qp, und LP, die dritte geometrische proportionirte Linie, DE, in Logarithmen schnell suchte. Da ist blos der Logarithme der Sekante CG, zu wissen nöthig.

Dessen Addition zu dem Logar. der nächst-kleinern verhältnismäsigen Linie giebt sogleich die nächst-grösere an.

Es ist aber Logarith. CG = Logarith. Sec. = 0, 0624694.
in unserm Beispiel; zu diesem add. Logarith. LP = 0, 6365006 — 1.

giebt den Logarith. der Lin. DE = 0, 6989700 — 1.
und eben so ist [Log. Sec. + Log. DE] = Log. AG.

Die nehmliche Beschaffenheit hat es mit den Chorden PQ, EL, AD, ... welche jezt in umgekehrter Ordnung vorkommen; desgleichen mit Pp, EP, AE. Der beständige Logar. ist immer jezt: 0, 0624694, und erzeugt durch seine Addition zum Logar. einer Linie, eine nächst-grösere, (in einem fixirten Verhältnis fort-hin.) Der Grund dieses Verfarens bezieht sich auf die immer-verstekkt liegende Proportion: Sin. : Tang. = r : Sec.; wo wenn r = 1 gilt jederzeit Sec. = Tang. div. per Sin. zu achten ist. In Logar. ist dann [Log. Tang. — Log. Sin.] = Log. Sec.

So

So viel sei genug von Erzeugung und Berechnung solcher ähnlich-liegenden Linien, welche sich alle als Mittel-Proportional betrachten, oder zu solchen sich machen lassen, progressiv und regressiv erwogen. (*) Ich gehe nun auf den Calkül der hiemit sich selbst formirenden Flächen, (Areen verschiedener Figuren) über.

§. 51.

Ohnleugbar verhält sich das Quadrat der Tangente zum Quadrat des Sinus, wie das □ des Radius zu dem □ des Cosinus. Oder $(AG)^2 : (DE)^2 = r^2 : (EC)^2$. Wenn $r = 1$ also auch $r^2 = 1$ gilt, ist sicher die Gröse $(EC)^2$ der Exponent der beeden Verhältnisse, d. h. $(EC)^2 = \frac{DE^2}{AG^2}$. In Logarithmen demnach das Duplum des Log. EC; oder 2. Log. Cosin. 30 = 0,8750612 — 1, in unserm bisher durchgeführten Beispiel. Diese Gröse ist der beständige zur Ausrechnung ähnlicher-Flächen ebenso dienliche, ebenso interessante Logarithme, als es der im §. 49. für die Ausrechnung der Linien war, welchen wir hinlänglich kennen gelernt haben. Nehmlich man denke sich nur ähnliche Stükke der angeführten ersten zwei Quadrate, gleichförmig-abgeschnittenen Frag-

(*) Bemerkung: Gedenkt man sich Kreise von immer abnehmenden Areen, mit den Halbmessern, AC, EC, FC, pC, u. s. f. so wird jederzeit der Sinus Versus in dem verhältnismäsig grösern Kreis die Differenz [Sec. — r] in dem verhältnismäsig nächst-kleinern seyn. So AE ist Sinus Versus beim Rad. AC, und ist = [Sec. — r] beim Rad. EC, da AE = DL sich zeigt.

Fragmente der 2 Grösen, AG^2 und DE^2; Z. B. Die zwei Dreiekke ADG und EDL; so wird auch bei diesen die Proportion noch eintreten: $\triangle ADG : \triangle EDL = r^2 : EC^2$ folglich der Exponent des Verhältnisses der zwei ersten Glieder abermals $(EC)^2$ seyn; und demnach mit Logarithmen sich ergeben:

Log. $EC^2 = 0,8750612 - 1.$	Log. $EC^2 = 0,8750612 - 1.$
Log. $\triangle ADG = 0,5874318 - 2.$	Log. $\triangle EDL = 0,4624930 - 2.$
Log. $\triangle EDL = 0,4624930 - 2.$	Log. $\triangle LPQ = 0,3375542 - 2.$

So ergiebt sich dann eine Reihe ähnlicher schiefwinklichter Dreiekke; so ergiebt sich eine rechtwinklichter Dreiekke AED, ELP, PQp, ... welche alle fort und fort ähnlich bleiben, und zum Exponenten ihres Verhältn. im Logarithmen $0,8750612 - 1$ haben, und in der Absolut-Zal $= 0,75$, oder $\frac{3}{4}$. Folglich ist das Verhältniß dieser Dreiekke durchgehends rational, und man braucht nur den Innhalt des ersten AED zu wissen, so findet man alle folgende spielend-leicht, eben vermittelst unsers beständigen Logarithmen. So giebt Z. B. [Log. $(CE)^2$ + Log. $\triangle$ AED] den Logar. des $\triangle$ ELP, d. h. den Log. der Zal seines Gehalts.

Vollkommen gleichförmig berechnet man ebenso die abnehmende Reihe der ähnlichen Trapezien AEDG, EDLP, LPQp, ... Jedes nächst-kleinere verhältsich gegen das nächst vorhergehende grösere rational, wie 3 zu 4. Man könnte diese sämmtlich Tangenten-Trapezien nennen, weil alle ihre Grundlinien sich als Tangenten betrachten lassen, im Gegensaz der Chorden-Trapezien, welche zunächst liegen, und da sind: AEDL, EPLQ, u. s. f. Auch diese sind rational, und der gemeinschaftliche Exponent in ihrer geometrischen Progression ist: $\frac{3}{4}$.

Die

Die auf der folgenden Seite angehängte Tabelle lehrt diese, wie auch noch mehrere hieher gehörige Flächen bestimmt kennen. Ich erwähne hier nur noch insonderheit des zusammengesezzten Trapezions ADPQ (der Summe zweier ähnl. Chorden Trapezien, (AEDL + ELPQ) dessen Innhalt rational gegen das □ des Radius $= \frac{7}{64}. r^2$; und rational gegen das grose gleichschenklichte Haupt-Dreiekk ADC $= \frac{7}{16}. \triangle$ ADC ist. Wenn wir einen einzigen Blik hiebei in die einfachen Erörterungen des §. 8. im ersten Abschnitt zurükwerfen, so werden wir uns überzeugen, (1.) daß das △ CPQ, unter welchem dieses Trapez. ADPQ liegt, $= \frac{9}{16} \triangle$ ADC betragen müsse; (weil $\frac{7}{16} + \frac{9}{16} = 1 = \triangle$ ADC ausmachen,) (2.) daß sich dieses Trapez. als das dritte in dem △ ADC betrachten lasse, und die zwei vorhergehende $\frac{3}{16}$ und $\frac{5}{16}$ des △ ADC betragen müßten, (3.) daß die Höhe, dm, in diesem unserm Trapez. ADPQ der vierte Theil der Höhe des △ ACD, oder $= \frac{1}{4}$ Cd vollkommen sei.

Auch Qp, die Höhe in dem △ CPQ ist insbesondre wol zu behalten, nicht nur weil diese Linie $= 0,375. = \frac{3}{8}. r$ (rein aus) ist, sondern auch das □ von Qp ganz dem Innhalt des △ CPQ gleich ist; $(Qp)^2 = \triangle CPQ = 0,140625$, oder $\frac{9}{64}. r^2$.

Die Gründe aller dieser Phänomene liegen für den, der die Säzze meines ersten Abschnitts gefaßt hat, gewiß nicht zu tief verstekkt.

Endlich begreift wol jeder von sich selbst, daß, um verhältnis-mäsig-grösere Flächen, Reihen wachsender Areen, gleichförmig zu erhalten, der Logar. des beständigen Exponenten, Log. $(Sec.)^2$ = Log. $(CG)^2$ seyn müsse. Derselbe ist in dem Beispiel, das Duplum von 0, 0624694; d. h. = 0, 1249388.

Man addire Z. B. ebendenselben zu Log. △ ELP = 0, 4000236 − 2.

so erhält man Log. △ AED = 0, 5249624 − 2.

und so in unzäligen andern Fällen.

§. 52.

Ich stelle jezt die in der Fig. 12. vorkommenden vorzüglichern Linien und Flächen mit ihren Absolut-Zalen und Logarithmen darneben, wie folgt, zusammen:

Decimalen der Linien.	Logarithmen dazu.	Decimalen der Flächen-Gehalte.	Logarithmen dazu.
Sec.: CG = 0,1547005..	0,0624694.	Δ ACG = 0,288675..	0,4604094-1.
Cd, = 0,9659258..	0,9849438-1.	Δ ACD = 0,25.	0,3979400-1.
EC, = 0,8660254..	0,9375306-1.	Δ ECD = 0,2165..	0,3354706-1.
Ce, (Ppd. in Δ) = 0,83651..	0,9224744-1.	Δ ECL = 0,1875.	0,2730012-1.
CP = CQ = 0,75.	0,8750613-1.	Δ CLP = 0,16238..	0,2105319-1.
Cm (Ppd. in Δ) = 0,72444..	0,8600051-1.	Δ CQP = 0,140625..	0,1480624-1.
AG, = 0,5773503..	0,7614394-1.	Trap. AGLP = 0,12629..	0,1013875-1.
AD, (Ch. 30°) = 0,51763..	0,7140262-1.	Δ CQp = 0,12178..	0,0855932-1.
DE, (Sin. 30°) = 0,5.	0,6989700-1.	Trap. APDQ = 0,109375.	0,0389100-1.
EL, = 0,44829..	0,6515568-1.	Trap. AEDG = 0,07216..	0,8583494-2.
LP, = 0,43301..	0,6365006-1.	Trap. AEDL = 0,0625.	0,7958800-2.
PQ, = 0,38822..	0,5890874-1	Trap. EPDL = 0,054126..	0,7334107-2.
Qp, = 0,375.	0,5740313-1.	Trap. ELPQ = 0,046875..	0,6709412-2.
AR, = 0,26794..	0,4280524-1	Trap. ELQp = 0,040594..	0,6084720-2.
AD, ($\frac{1}{2}$AD) = 0,25881..	0,4129962-1.	Δ AED = 0,03349..	0,5249624-2.
Ap, = 0,25.	0,3979400-1.	Δ EDL = 0,029006..	0,4624930-2.
dm, = 0,24148..	0,3828838-1.	Δ ELP = 0,025120..	0,4000236-2.
RE, = 0,23205..	0,3655830-1.	Δ LPQ = 0,021754..	0,3375542-2.
DG, = 0,1547..	0,1894918-1.	Δ QFp = 0,018840..	0,2750849-2.
AE, (Sin. Vers.) = 0,13397..	0,1270224-1.	Δ ADR = 0,017949..	0,2540448-2.
EP = ed = 0,11602..	0,0645530-1.	Δ AER = 0,015544..	0,1915754-2.
Pp, = 0,10048..	0,0020836-1.	Δ ELR = 0,01346..	0,1291060-2.
Rd, = 0,06935..	0,8410486-2.		
Re, = 0,060057..	0,7785792-2.		

§. 53.

§. 53.

Alle diese Vergleichungen und Combinationen lassen sich nun gleichförmig bei jedem Bogen eines willkürlich-gewählten Winkels, und dessen Tangente, Sinus und Chorde vornehmen.

Ich liefere nur zum Schluß noch zu Fig. 13. eine Reihe berechneter Linien, und Flächen, mit der Voraussezzung der Centri Winkel sei genau 45°; also Tang. = r = 1; wo bekantlich der Sinus dem Cosin. gleich ist. Der Raum beengt mich, so viele Combinationen zu liefern, als ich vorräthig habe. Ich gebe zuvörderst die an, wo die Zal der Linie auch die Zal einer berechneten Fläche selbst ist, welches Phänomen blos bei der Voraussezzung eines Bogens 45° in so gestellten Figuren, wie ich annehme, sich zeigt.

Nehmlich:

LP = 0, 5.	Linie.	△ ACG = $\frac{1}{2} r^2$	= 0, 5.	Fläche.
Qp = 0, 35355..	Linie.	△ ADC =	= 0, 3535..	Fläche.
f = 0, 25.	Linie.	△ EDC = ALC	= 0, 25.	Fläche.
g = 0, 2474..	Linie.	△ ECL	= 0, 2474..	Fläche.
h = 0, 125.	Linie.	△ CLP	= 0, 125.	Fläche.

Ferner will ich hiebei nur noch der Gesezzlichkeit erwähnen, nach welcher sowol die Chorden als die Perpendikel immer halbirt erscheinen: Z. B. Wenn AD die erste Chorde heißt, so ist PQ die dritte; sie ist als Länge = $\frac{1}{2}$ AD; die vierte pq aber ist die vierte, und ist = $\frac{1}{2}$ EL; Ebenso verhält sichs mit den übrigen ähnlich-liegenden Linien.

Nun folgt die versprochene Reihe der Linien, und Flächen, wie in §. 52.

Decimalen der Linien.		Logarithmen dazu.	Decimalen der Flächen-Gehalte.	Logarithmen dazu.
CG,	= 1,4142..	0,1505150.	△ ACG = 0, 5.	0,6989700—1.
Cd,	= 0,9238795.	0,9656153—1.	Trap. AGPL = 0,375.	0,5740313—1.
AD,	= 0,765366..	0,8838697—1.	△ ACD = 0,3535534..	0,5484550 -1.
DE,	= 0,70710..	0,8494850—1.	Trap. AGDE = 0,25.	0,3979400—1.
= EC, = AL, .	. . .		Eben so gros △ ACL = ECD = . . .	

Decimalen der Linien.	Logarithmen dazu.	Decimalen der Flächen-Gehalte.	Logarithmen dazu.
Ce, = 0,65328..	0,8151003—1.	△ ECL = 0,17677..	0,2474250—1.
EL, = 0,541198..	0,7333547—1.	= Trap. AEDL	. . . . .
LP, = EQ, = PC, = 0,5.	0,6989700—1.	△ ADG = 0,14644..	0,1656794—1.
GD, = 0,4142..	0,6172244—1.	△ CPL = 0,125.	0,0969100—1.
PQ, = $\frac{1}{2}$AD, = 0,38268..	0,5828397—1.	= Trap. EPDL	. . . . .
Qp, = 0,35355..	0,5484550—1.	△ ADE = 0,10355..	0,0151644—1.
AE, = RE, = 0,292..	0,4667094—1.	△ EDL = 0,07322..	0,8646494—2.
pq, = $\frac{1}{2}$EL, = 0,27059..	0,4333247—1.	= △ AEL	. . . . . .
ed, = 0,20710..	0,3161944—1.	△ ADR = 0,06066..	0,7829038—2.
Rd, = 0,15851..	0,2000641—1.	△ ELP = 0,051776..	0,7141344—2.
Rc, = 0,11208..	0,0495491—1.	= △ ELQ	. . . . . .
		△ AER = 0,04289..	0,6323888—2.
		△ ELR = 0,03033..	0,4818738—2.
		△ EPr = 0,021446..	0,3313588—2.
		△ PEQ = 0,010355..	0,0151644—2.

Ich mache hiebei auch noch auf die besondre Eigenschaft der Chorden-Trapezien in dieser Figur 13. aufmerksam, daß in ihnen die Höhen immer die Helfte ihrer kleinern Chorden-Paralele ist. Z. B., ed = $\frac{1}{2}$ EL; und so mit den übrigen.

Aus dem bekannten Saz, daß sich die Innhalte zweier Kreise, wie die Quadrate ihrer Radien verhalten, lassen sich nun noch eine Menge bedeutender Folgerungen vermittelst solcher berechneten Tafeln ziehen, auch wenn man ganz andre Winkel wählt, als die von mir gesezzte, welche leztere freilich eine Menge rationaler Linien und Flächen zu Correlaten haben, die bei Voraussezzung andrer (aus den trigonometrischen Tafeln rein-entlehnter) Winkel und deren Functionen, nicht rational erscheinen, dessen ohngeachtet aber durch die Näherungs-Methode zu Vergleichungen geschikkt gemacht werden können; welche meinem Bedünken nach zum wenigsten bisher meistens nicht genug geachtet und cultivirt worden sind.

Dicho-

Dichotomische Tabelle,

welche die Innhalte von 127. ähnlichen Dreiekken, und von eben so viel Trapezien, in Decimalen mit den Logarithmen dazu, wie auch die Verhältnisse der zugehörigen Höhen, neben an geschrieben, enthält.

Innhalte der Dreiekke.	Das Trapezion unter jedem Δ.	Logarithmen fürdieDreiekke.	fürdieTrapez.	Verhältnis der Höhen.
$\frac{1}{16384}$ = 0,00006103515625.	$\frac{16383}{16384}$ = 0,9999..	0,7855801—5.	0,9999735—1.	1 : 127.
$\frac{4}{16384}$ = 0,000244140625.	$\frac{16380}{16384}$ = 0,9997..	0,3876401—4.	0,9998940—1.	2:126 = 1:63.
$\frac{9}{16384}$ = 0,00054931649625.	$\frac{16375}{16384}$ = 0,9994..	0,7398226—4.	0,9997614—1.	3:125.
$\frac{16}{16384}$ = 0,0009765625.	$\frac{16368}{16384}$ = 0,9990..	0,9897001—4.	0,9995757—1.	4:124 = 1:31.
$\frac{25}{16384}$ = 0,00152587690625.	$\frac{16359}{16384}$ = 0,9984..	0,1835201—3.	0,9993369—1.	5:123.
$\frac{36}{16384}$ = 0,002197265625.	$\frac{16348}{16384}$ = 0,9978..	0,3418826—3.	0,9990447—1.	6:122 = 3:61.
$\frac{49}{16384}$ = 0,00299072265625.	$\frac{16335}{16384}$ = 0,9970..	0,4757762—3.	0,9986992—1.	7:121.
$\frac{64}{16384}$ = 0,00390625.	$\frac{16320}{16384}$ = 0,9960..	0,5917601—3.	0,9983003—1.	8:120 = 1:15.
$\frac{81}{16384}$ = 0,00494384765625.	$\frac{16303}{16384}$ = 0,9950..	0,6940651—3.	0,9978476—1.	9:119.
$\frac{100}{16384}$ = 0,006103515625.	$\frac{16284}{16384}$ = 0,9938..	0,7855801—3.	0,9973412—1.	10:118 = 5:59.

Innhalte der Dreiekke.	Das Trapezion unter jedem Δ.	Logarithmen für die Dreiekke.	für die Trapez.	Verhältnis der Höhen.
$\frac{121}{16384}=$ 0,0073852539062 5.	$\frac{16263}{16384}=$ 0,9926..	0,8683655—3.	0,9967808—1.	11:117.
$\frac{144}{16384}=$ 0,0087890625.	$\frac{16240}{16384}=$ 0,9912..	0,9439426—3.	0,9961661—1.	12:116=3:29.
$\frac{169}{16384}=$ 0,0103149414062 5.	$\frac{16215}{16384}=$ 0,9896..	0,0134668—2.	0,9954971—1.	13:115.
$\frac{196}{16384}=$ 0,011962890625.	$\frac{16188}{16384}=$ 0,9880..	0,0778362—2.	0,9947733—1.	14:114=7:57.
$\frac{225}{16384}=$ 0,0137329101562 5.	$\frac{16159}{16384}=$ 0,9862..	0,1377626—2.	0,9939946—1.	15:113.
$\frac{256}{16384}=$ 0,015625.	$\frac{16128}{16384}=$ 0,9840..	0,1938200—2.	0,9931606—1.	16:112=1:7.
$\frac{289}{16384}=$ 0,0176391601562 5.	$\frac{16095}{16384}=$ 0,9823..	0,2464779—2.	0,9922711—1.	17:111.
$\frac{324}{16384}=$ 0,019775390625.	$\frac{16060}{16384}=$ 0,9802..	0,2961250—2.	0,9913256—1.	18:110=9:55.
$\frac{361}{16384}=$ 0,0220336914062 5.	$\frac{16023}{16384}=$ 0,9779..	0,3430873—2.	0,9903239—1.	19:109.
$\frac{400}{16384}=$ 0,0244140625.	$\frac{15984}{16384}=$ 0,9755..	0,3876401—2.	0,9892656—1.	20:108=5:27.
$\frac{441}{16384}=$ 0,0269165039062 5.	$\frac{15943}{16384}=$ 0,9730..	0,4300187—2.	0,9881501—1.	21:107.
$\frac{484}{16384}=$ 0,0295410156 25.	$\frac{15900}{16384}=$ 0,9704..	0,4704255—2.	0,9869772—1.	22:106=11:53
$\frac{529}{16384}=$ 0,0322875976562 5.	$\frac{15855}{16384}=$ 0,9677..	0,5090358—2.	0,9857463—1.	23:105.
$\frac{576}{16384}=$ 0,03515625.	$\frac{15808}{16384}=$ 0,9648..	0,5460026—2.	0,9844570—1.	24:104=3:13.
$\frac{625}{16384}=$ 0,0381469726562 5.	$\frac{15759}{16384}=$ 0,9618..	0,5814611—2.	0,9831088—1.	25:103.
$\frac{676}{16384}=$ 0,0412597656 25.	$\frac{15708}{16384}=$ 0,9587..	0,6155268—2.	0,9817010—1.	26:102=13:51
$\frac{729}{16384}=$ 0,0444946289062 5.	$\frac{15655}{16384}=$ 0,9555..	0,6483076—2.	0,9802332—1.	27:101.
$\frac{784}{16384}=$ 0,0478515625.	$\frac{15600}{16384}=$ 0,9521..	0,6798962—2.	0,9787047—1.	28:100=7:25.
$\frac{841}{16384}=$ 0,0513305664062 5.	$\frac{15543}{16384}=$ 0,9486..	0,7103761—2.	0,9771149—1.	29:99.
$\frac{900}{16384}=$ 0,054931640625.	$\frac{15484}{16384}=$ 0,9450..	0,7398226—2.	0,9754633—1.	30:98=15:49.

Innhalte der Dreiekke.	Das Trapezion unter jedem △.	Logarithmen für die Dreiekke.	Logarithmen für die Trapez.	Verhältnis der Höhen.
$\frac{961}{16384}$ = 0,05865478515625.	$\frac{15423}{16384}$ = 0,9413..	0,7683035—2.	0,9737490—1.	31:97.
$\frac{1024}{16384}$ = 0,0625.	$\frac{15360}{16384}$ = 0,9375..	0,7958800—2.	0,9719713—1.	32:96 = 1:3.
$\frac{1089}{16384}$ = 0,06646728515625.	$\frac{15295}{16384}$ = 0,9335..	0,8226080—2.	0,9701296—1.	33:95.
$\frac{1156}{16384}$ = 0,070556640625.	$\frac{15228}{16384}$ = 0,9294..	0,8485379—2.	0,9682230—1.	34:94 = 17:47.
$\frac{1225}{16384}$ = 0,0747680664 0625.	$\frac{15159}{16384}$ = 0,9252..	0,8737162—2.	0,9662508—1.	35:93.
$\frac{1296}{16384}$ = 0,0791015625.	$\frac{15088}{16384}$ = 0,9208..	0,8981851—2.	0,9642118—1.	36:92 = 9:23.
$\frac{1369}{16384}$ = 0,08355712890625.	$\frac{15015}{16384}$ = 0,9164..	0,9219841—2.	0,9621054—1.	37:91.
$\frac{1444}{16384}$ = 0,0881347 65625.	$\frac{14940}{16384}$ = 0,9118..	0,9451473—2.	0,9599307—1.	38:90 = 19:45.
$\frac{1521}{16384}$ = 0,09283447265625.	$\frac{148[illegible]}{16384}$ = 0,9071..	0,9677093—2.	0,9576866—1.	39:89.
$\frac{1600}{16384}$ = 0,09765625.	$\frac{14784}{16384}$ = 0,9023..	0,9897001—2.	0,9553721—1.	40:88 = 5:11.
$\frac{1681}{16384}$ = 0,1026000976 5625.	$\frac{14703}{16384}$ = 0,8973..	0,0111478—1.	0,9529861—1.	41:87.
$\frac{1764}{16384}$ = 0,107666015625.	$\frac{14620}{16384}$ = 0,8923..	0,0328787—1.	0,9505275—1.	42:86 = 21:43.
$\frac{1849}{16384}$ = 0,11285400390625.	$\frac{14535}{16384}$ = 0,8871..	0,0525170—1.	0,9479951—1.	43:85.
$\frac{1936}{16384}$ = 0,1181640625.	$\frac{14448}{16384}$ = 0,8818..	0,0724855—1.	0,9453878—1.	44:84 = 11:21.
$\frac{2025}{16384}$ = 0,12359619140625.	$\frac{14359}{16384}$ = 0,8764..	0,0920051—1.	0,9427050—1.	45:83.
$\frac{2116}{16384}$ = 0,129150390625.	$\frac{14268}{16384}$ = 0,8708..	0,1110958—1.	0,9399432—1.	46:82 = 23:41.
$\frac{2209}{16384}$ = 0,13482666105625.	$\frac{14175}{16384}$ = 0,8651..	0,1297758—1.	0,9371032—1.	47:81.
$\frac{2304}{16384}$ = 0,140625.	$\frac{14080}{16384}$ = 0,8593..	0,1480626—1.	0,9341828—1.	48:80 = 3:5.
$\frac{2401}{16384}$ = 0,14654541015625.	$\frac{13983}{16384}$ = 0,8534..	0,1659723—1.	0,9311804—1.	49:79.
$\frac{2500}{16384}$ = 0,152587890625.	$\frac{13884}{16384}$ = 0,8474..	0,1835201—1.	0,9280947—1.	50:78 = 25:39.

Innhalte

Innhalte der Dreiekke.	Das Trapezion unter jedem Δ.	Logarithmen für die Dreiekke.	für die Trapez.	Verhältnis der Höhen.
$\frac{2601}{16384}$ = 0,15875244140625.	$\frac{13783}{16384}$ = 0,8412..	0,2007205 — 1.	0,9249239 — 1.	51:77.
$\frac{2704}{16384}$ = 0,1650390625.	$\frac{13680}{16384}$ = 0,8349..	0,2175868 — 1.	0,9216662 — 1.	52:76 = 13:19.
$\frac{2809}{16384}$ = 0,17144775390625.	$\frac{13575}{16384}$ = 0,8285..	0,2341318 — 1.	0,9183199 — 1.	53:75.
$\frac{2916}{16384}$ = 0,177978525625.	$\frac{13468}{16384}$ = 0,8220..	0,2503676 — 1.	0,9148832 — 1.	54:74 = 27:37.
$\frac{3025}{16384}$ = 0,18463234765625	$\frac{13359}{16384}$ = 0,8153..	0,2663055 — 1.	0,9113540 — 1.	55:73.
$\frac{3136}{16384}$ = 0,19140625.	$\frac{13248}{16384}$ = 0,8085..	0,2819562 — 1.	0,9077304 — 1.	56:72 = 7:9.
$\frac{3249}{16384}$ = 0,19830322265625.	$\frac{13135}{16384}$ = 0,8016..	0,2973298 — 1.	0,9040102 — 1.	57:71.
$\frac{3364}{16384}$ = 0,205322265625.	$\frac{13020}{16384}$ = 0,7946..	0,3124361 — 1.	0,9001911 — 1.	58:70 = 29:35.
$\frac{3481}{16384}$ = 0,21246337890625.	$\frac{12903}{16384}$ = 0,7875..	0,327284[illegible] — 1.	0,8962708 — 1.	59:69.
$\frac{3600}{16384}$ = 0,2197265625.	$\frac{12784}{16384}$ = 0,7802..	0,3418826 — 1.	0,8922469 — 1.	60:68 = 15:17.
$\frac{3721}{16384}$ = 0,22711181640625.	$\frac{12663}{16384}$ = 0,7728..	0,3562398 — 1.	0,8881167 — 1.	61:67.
$\frac{3844}{16384}$ = 0,234619140625.	$\frac{12540}{16384}$ = 0,7653..	0,3703635 — 1.	0,8838776 — 1.	62:66 = 31:33.
$\frac{3969}{16384}$ = 0,24224853515625.	$\frac{12415}{16384}$ = 0,7577..	0,3842612 — 1.	0,8795268 — 1.	63:65.
$\frac{4096}{16384}$ = 0,25.	$\frac{12308}{16384}$ = 0,75.	0,3979400 — 1.	0,8750613 — 1.	64:64 = 1:1.
$\frac{4225}{16384}$ = 0,25787353515625.	$\frac{12159}{16384}$ = 0,7421..	0,4114068 — 1.	0,8704780 — 1.	65:63.
$\frac{4356}{16384}$ = 0,265869140625.	$\frac{12028}{16384}$ = 0,7341..	0,4246680 — 1.	0,8657735 — 1.	66:62 = 33:31.
$\frac{4489}{16384}$ = 0,27398681640625.	$\frac{11895}{16384}$ = 0,7260..	0,4377291 — 1.	0,8609445 — 1.	67:61.
$\frac{4624}{16384}$ = 0,2822265625.	$\frac{11760}{16384}$ = 0,7177..	0,4505979 — 1.	0,8559874 — 1.	68:60 = 17:15.
$\frac{4761}{16384}$ = 0,29058837890625.	$\frac{11623}{16384}$ = 0,7094..	0,4632783 — 1.	0,8508983 — 1.	69:59.
$\frac{4900}{16384}$ = 0,299072265625.	$\frac{11484}{16384}$ = 0,7009..	0,4757762 — 1.	0,8456733 — 1.	70:58 = 35:29.

Innhalte der Dreiekke.	Das Trapezion unter jedem Δ.	Logarithmen für die Dreiekke.	für die Trapez.	Verhältnis der Höhen.
$\frac{5041}{16384}$ = 0,307678222265625.	$\frac{11343}{16384}$ = 0,6923..	0,4880968—1.	0,8403080—1.	71:57.
$\frac{5184}{16384}$ = 0,31640625.	$\frac{11200}{16384}$ = 0,6835..	0,5002451—1.	0,8347981—1.	72:56 = 9:7.
$\frac{5329}{16384}$ = 0,325256347765625.	$\frac{11055}{16384}$ = 0,6747..	0,5122258—1.	0,8291388—1.	73:55.
$\frac{5476}{16384}$ = 0,334228415625.	$\frac{10908}{16384}$ = 0,6657..	0,5240435—1.	0,8233252—1.	74:54 = 37:27.
$\frac{5625}{16384}$ = 0,34332275390625.	$\frac{10759}{16384}$ = 0,6566..	0,5357026—1.	0,8173520—1.	75:53.
$\frac{5776}{16384}$ = 0,3525389625.	$\frac{10608}{16384}$ = 0,6474..	0,5472073—1.	0,8112136—1.	76:52 = 19:13.
$\frac{5929}{16384}$ = 0,361877341140625.	$\frac{10455}{16384}$ = 0,6381..	0,5585615—1.	0,8049041—1.	77:51.
$\frac{6084}{16384}$ = 0,371337890625.	$\frac{10300}{16384}$ = 0,6286..	0,5697693—1.	0,7984173—1.	78:50 = 39:25.
$\frac{6241}{16384}$ = 0,380920410015625.	$\frac{10143}{16384}$ = 0,6190..	0,5808343—1.	0,7917465—1.	79:49.
$\frac{6400}{16384}$ = 0,390625.	$\frac{9984}{16384}$ = 0,6093..	0,5917601—1.	0,7848847—1.	80:48 = 5:3.
$\frac{6561}{16384}$ = 0,400451660015625.	$\frac{9823}{16384}$ = 0,5995..	0,5917601—1.	0,7778242—1.	81:47.
$\frac{6724}{16384}$ = 0,410400390625.	$\frac{9660}{16384}$ = 0,5895..	0,6025501—1.	0,7705572—1.	82:46 = 41:23.
$\frac{6889}{16384}$ = 0,420471191140625.	$\frac{9495}{16384}$ = 0,5795..	0,6132078—1.	0,7630751—1.	83:45.
$\frac{7056}{16384}$ = 0,4306640625.	$\frac{9328}{16384}$ = 0,5693..	0,6237363—1.	0,7553686—1.	84:44 = 21:11.
$\frac{7225}{16384}$ = 0,44097900390625.	$\frac{9159}{16384}$ = 0,5590..	0,6341387—1.	0,7474282—1.	85:43.
$\frac{7396}{16384}$ = 0,451415915625.	$\frac{8988}{16384}$ = 0,5485..	0,6444170—1.	0,7392432—1.	86:42 = 43:21.
$\frac{7569}{16384}$ = 0,461974997765625.	$\frac{8815}{16384}$ = 0,5380..	0,6545770—1.	0,7308024—1.	87:41.
$\frac{7744}{16384}$ = 0,47265625.	$\frac{8640}{16384}$ = 0,5273..	0,6646186—1.	0,7220938—1.	88:40 = 11:5.
$\frac{7921}{16384}$ = 0,483459472265625.	$\frac{8463}{16384}$ = 0,5165..	0,6745454—1.	0,7131044—1.	89:39.
$\frac{8100}{16384}$ = 0,494384765625.	$\frac{8284}{16384}$ = 0,5056..	0,6843601—1.	0,7038202—1.	90:38 = 45:19.

Innhalte der Dreiekke.	Das Trapezion unter jedem Δ.	Logarithmen fürdieDreiekke.	fürdieTrapez.	Verhältnis der Höhen.
$\frac{8281}{16384}$ = 0,50543212890625.	$\frac{8103}{16384}$ = 0,4945..	0,6940651—1.	0,6942259—1.	91:37.
$\frac{8464}{16384}$ = 0,5166015625.	$\frac{7920}{16384}$ = 0,4833..	0,7036629—1.	0,6843052—1.	92:36 = 23:9.
$\frac{8649}{16384}$ = 0,52789306640625.	$\frac{7735}{16384}$ = 0,4721..	0,7131558—1.	0,6740404—1.	93:35.
$\frac{8836}{16384}$ = 0,5393066640625.	$\frac{7548}{16384}$ = 0,4606..	0,7225460—1.	0,6634120—1.	94:34 = 47:17.
$\frac{9025}{16384}$ = 0,55084228515625.	$\frac{7359}{16384}$ = 0,4491..	0,7318358—1.	0,6523989—1.	95:33.
$\frac{9216}{16384}$ = 0,5625.	$\frac{7168}{16384}$ = 0,4375..	0,7501226—1.	0,6409781—1.	96:32 = 3:1.
$\frac{9409}{16384}$ = 0,57427978515625.	$\frac{6975}{16384}$ = 0,4257..	0,7591236—1.	0,6291243—1.	97:31.
$\frac{9604}{16384}$ = 0,586181640625.	$\frac{6780}{16384}$ = 0,4138..	0,7680323—1.	0,6168098—1.	98:30 = 49:15.
$\frac{9801}{16384}$ = 0,59820556640625.	$\frac{6583}{16384}$ = 0,4017..	0,7768505—1.	0,6040040—1.	99:29.
$\frac{10000}{16384}$ = 0,6103515625.	$\frac{6384}{16384}$ = 0,3896..	0,7855801—1.	0,5906730—1.	100:28 = 25:7.
$\frac{10201}{16384}$ = 0,62261962890625.	$\frac{6183}{16384}$ = 0,3773..	0,7942228—1.	0,5767793—1.	101:27.
$\frac{10404}{16384}$ = 0,635009765625.	$\frac{5980}{16384}$ = 0,3649..	0,8027804—1.	0,5622813—1.	102:26 = 51:13
$\frac{10609}{16384}$ = 0,64752197265625.	$\frac{5775}{16384}$ = 0,3524..	0,8112545—1.	0,5471321—1.	103:25.
$\frac{10816}{16384}$ = 0,66015625.	$\frac{5568}{16384}$ = 0,3398..	0,8196468—1.	0,5312793—1.	104:24 = 13:3.
$\frac{11025}{16384}$ = 0,67291259765625.	$\frac{5359}{16384}$ = 0,3270..	0,8279587—1.	0,5146639—1.	105:23.
$\frac{11236}{16384}$ = 0,6857910156 25.	$\frac{5148}{16384}$ = 0,3142..	0,8361918—1.	0,4972186—1.	106:22 = 53:11
$\frac{11449}{16384}$ = 0,69879150390625.	$\frac{4935}{16384}$ = 0,3012..	0,8443477—1.	0,4788673—1.	107:21.
$\frac{11664}{16384}$ = 0,7119140625.	$\frac{4720}{16384}$ = 0,2880..	0,8524276—1.	0,4595221—1.	108:20 = 27:5.
$\frac{11881}{16384}$ = 0,72515869140625.	$\frac{4503}{16384}$ = 0,2748..	0,8604331—1.	0,4390820—1.	109:19.
$\frac{12100}{16384}$ = 0,738525390625.	$\frac{4284}{16384}$ = 0,2614..	0,8683655—1.	0,4174296—1.	110:18 = 55:9.

Innhalte

Innhalte der Dreiekke.	Das Trapezion unter jedem Δ.	Logarithmen für die Dreiekke.	für die Trapez.	Verhältnis der Höhen.
$\frac{12321}{16384} =$ 0,75201416015625.	$\frac{4063}{16384} =$ 0,2479..	0,8762261—1.	0,3944269—1.	111:17.
$\frac{12544}{16384} =$ 0,765625.	$\frac{3840}{16384} =$ 0,2343..	0,8840161—1.	0,3699113—1.	112:16 = 7:1.
$\frac{12769}{16384} =$ 0,77935791015625.	$\frac{3615}{16384} =$ 0,2206..	0,8917370—1.	0,3436884—1.	113:15.
$\frac{12996}{16384} =$ 0,793212890625.	$\frac{3388}{16384} =$ 0,2067..	0,8993898—1.	0,3155235—1.	114:14 = 57:7.
$\frac{13225}{16384} =$ 0,80718994140625.	$\frac{3159}{16384} =$ 0,1928..	0,9069758—1.	0,2851297—1.	115:13.
$\frac{13456}{16384} =$ 0,8212890625.	$\frac{2928}{16384} =$ 0,1787..	0,9144961—1.	0,2521312—1.	116:12 = 29:3.
$\frac{13689}{16384} =$ 0,83551025890625.	$\frac{2695}{16384} =$ 0,1644..	0,9219518—1.	0,2161389—1.	117:11.
$\frac{13924}{16384} =$ 0,849853515625.	$\frac{2460}{16384} =$ 0,1501..	0,9293441—1.	0,1765152—1.	118:10 = 59:5.
$\frac{14161}{16384} =$ 0,86431884765625.	$\frac{2223}{16384} =$ 0,1356..	0,9366730—1.	0,1325196—1.	119:9.
$\frac{14400}{16384} =$ 0,87890625.	$\frac{1984}{16384} =$ 0,1210..	0,9439426—1.	0,0831218—1.	120:8 = 15:1.
$\frac{14641}{16384} =$ 0,89361572265625.	$\frac{1743}{16384} =$ 0,1063..	0,9511508—1.	0,0268775—1.	121:7.
$\frac{14884}{16384} =$ 0,908447265625.	$\frac{1500}{16384} =$ 0,0915..	0,9582998—1.	0,9616714—2.	122:6 = 61:3.
$\frac{15129}{16384} =$ 0,92340087890625.	$\frac{1255}{16384} =$ 0,0765..	0,9653903—1.	0,8842238—2.	123:5.
$\frac{15376}{16384} =$ 0,9384765625.	$\frac{1008}{16384} =$ 0,0615..	0,9724235—1.	0,7890406—2.	124:4 = 31:1.
$\frac{15625}{16384} =$ 0,95367431640625.	$\frac{759}{16384} =$ 0,0463..	0,9794001—1.	0,6658219—2.	125:3.
$\frac{15876}{16384} =$ 0,968994140625.	$\frac{508}{16384} =$ 0,0310..	0,9863212—1.	0,4914438—2.	126:2 = 63:1.
$\frac{16129}{16384} =$ 0,98443603515625.	$\frac{255}{16384} =$ 0,0155..	0,9931875—1.	0,1921203—2.	127 : 1.

Die Decimalen für die Gehalte der Trapezien gehen nur bis auf 4. Zifern. Die Ergänzung ist äusserst leicht. Siehe die Bemerkung zu §. 45. Man blikke nur in die Reihe der Decimalen für die Dreiekke darneben, und zäle von jeder Zifer daselbst bis auf 9. Z. B. 0,12359... hat zum Correlat 0,87640... und diese Zal giebt den Innhalt des zugehörigen Trapezions eben selbst an.

Uebrigens empfele ich allen, welche sowol diese als andre ähnliche Tafeln benüzzen wollen, nicht nur (was schon oben erinnert worden,) fleisige Uebung in Factoren-Zerfällung, sondern auch noch insbesondre folgendes:

Man fertige sich zu künftigem immerwährenden Gebrauch eine äusserst simple Decimal-Tabelle, die von 0,010..., beginne, und mit 0,999... schliese; in Columnen stünden darinn vertical fort laufend:

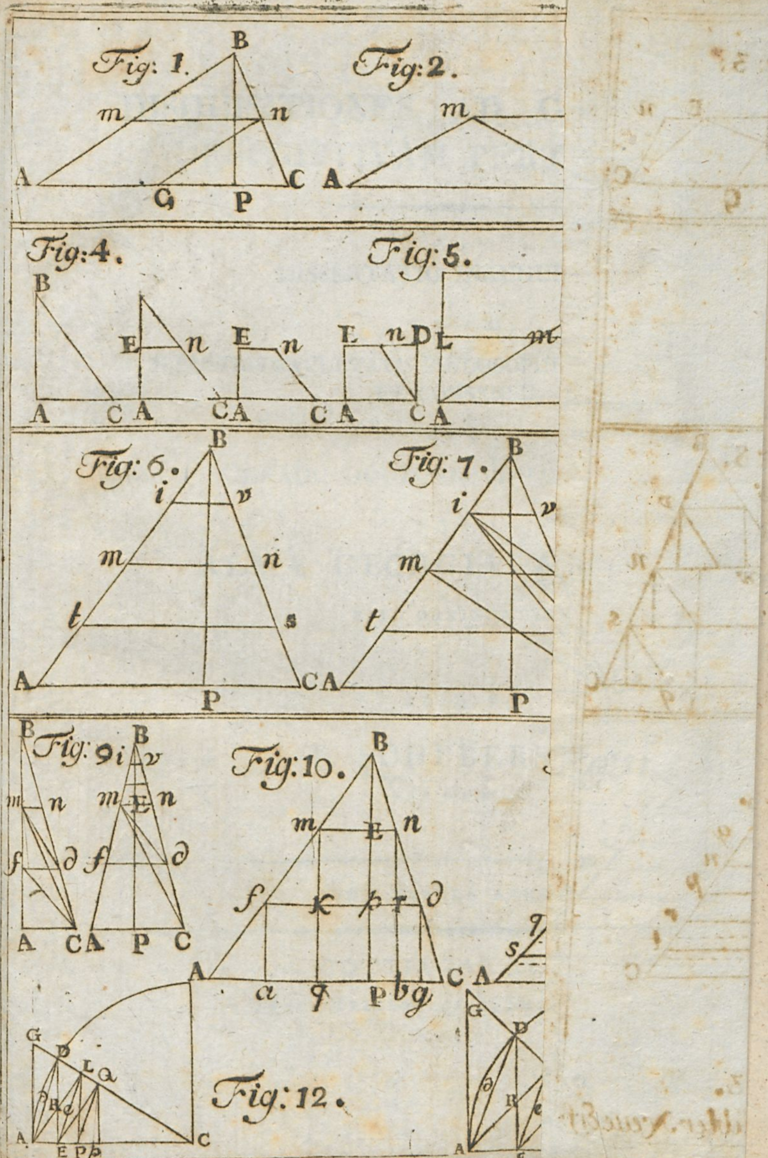
$\frac{1}{100}$	0,010..		$\frac{3}{25}$	0,120..
$\frac{1}{90}$	0,011..	weiter hin	$\frac{4}{33}$	0,121..
$\frac{1}{83}$	0,012..	wird dann		0,122..
$\frac{1}{76}$	0,013..	z. B. kommen:		:::::
			$\frac{1}{8}$	0,125.

Die Brüche werden nach und nach heben-angeschrieben; es seien aber nur solche, deren Nenner noch nicht 100. erreichen; In der Decimal-Columne mögen die Decimalen manchmal bis auf die vierte oder fünfte Stelle gehen. Auf sechs Quartblätter läßt sich die ganze Arbeit wol bringen. Die Mühe, welcher man sich bei Fertigung einer solchen Tabelle, unterzieht, belohnt sich reichlich in unzäligen Fällen, wenn man Mathematik treibt, durchs ganze Leben hindurch, nicht blos in Geometrie, und bei Untersuchungen, wie die meinigen in diesem Werke sind. Wer meinem Rath folgt, wird vielleicht an meine Worte denken! Es kann wol seyn, daß hie und da schon eine solche Tabelle sich gedrukkt vorfindet, ich habe keine erfragen können. —

Stellt man Vergleichungen zwischen den Zalen einer solchen Tabelle, und den Decimalen meiner Dichotomischen an, so zeigt sich, Z. B. daß 0,1914... = $\frac{9}{47}$ sei, und dieser kleine Bruch bis auf Hunderttausendtheilchen hin dem $\frac{3136}{16384}$ gleichzu achten sei.

So ist $\frac{63}{64}$ = 0, 9843... also äusserst nahe hin die Gröse des lezten Dreiekks in meiner Tafel, wo $\frac{16129}{16384}$ = 0, 9844... vorkommt.

Diese wenige Beispiele werden die Absicht und auch zum Theil schon den Werth meines Raths nachdenkenden Lesern, wie ich glaube, bereits sattsam zu übersehen geben.



8

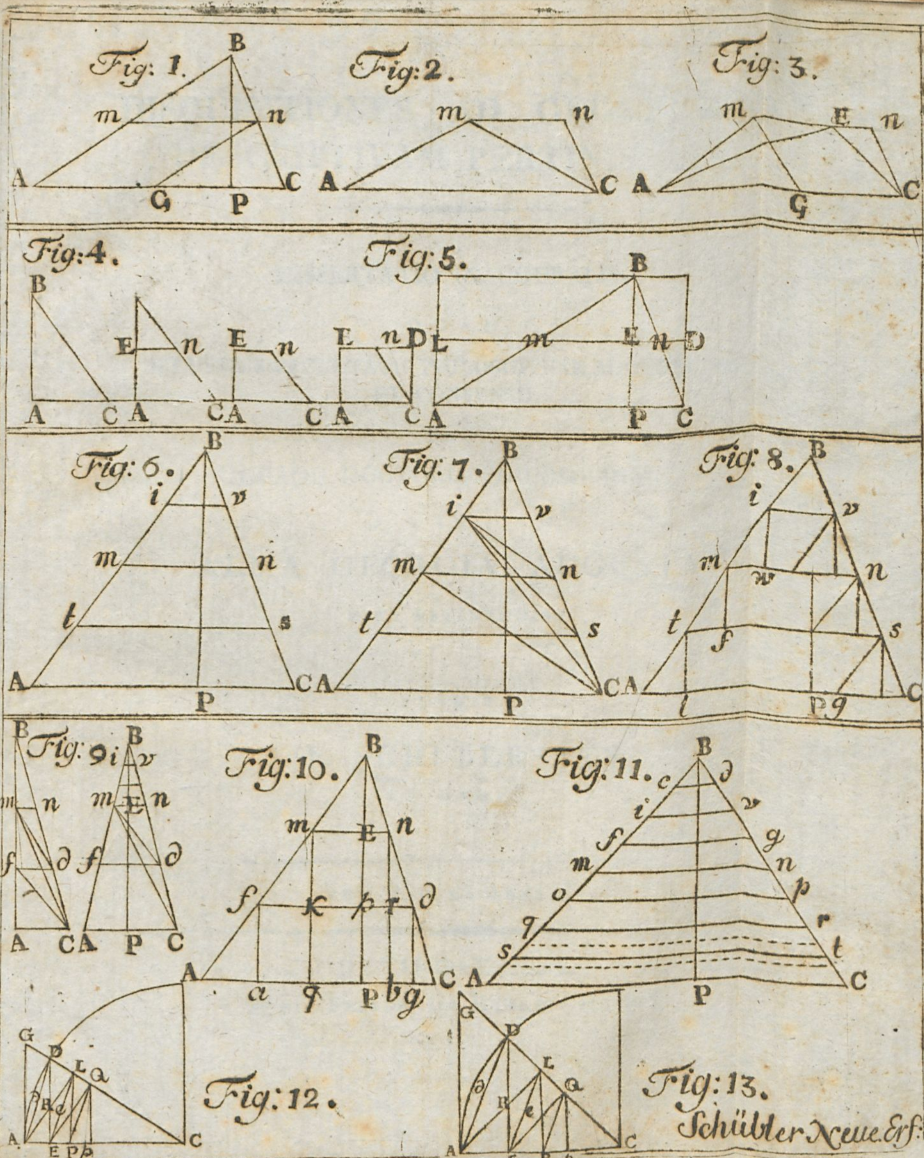


Fig: 1.
Fig: 2.
Fig: 3.
Fig: 4.
Fig: 5.
Fig: 6.
Fig: 7.
Fig: 8.
Fig: 9
Fig: 10.
Fig: 11.
Fig: 12.
Fig: 13.
Schübler Neue Erf.

Neue Erforschungen in Geometrie,

welche mit-unter verschiedene bisher noch nicht berechnete Tafeln mit Decimalen, und den Logarithmen dazu enthalten,

von

C. L. Schübler,

Mitglied des innern Raths zu Heilbronn.

Frankfurt und Leipzig

1790.