JOANNIS WILHELMI CHRISTIANI
KILONIENSIS

COMMENTATIO
QVA EXPLICANTVR
FVNDAMENTA CALCVLI
QVEM AB INFINITO NOMINAMVS
ET OSTENDITVR QVOMODO IIS QVAE TRADIDERVNT
EVCLIDES, ARCHIMEDES
APOLLONIVS PERGAEVS
INNITATVR CALCVLVS INFINITI.

IN CONCERTATIONE
CIVIVM
ACADEMIAE GEORGIAE AVGVSTAE
DIE IV. JVNII CIↄIↄCCLXXXXII.
PRAEMIO A REGE M. BRITANNIAE AVG.
CONSTITVTO
A PHILOSOPHORVM ORDINE
ORNATA.

Exemplaria graeca
Nocturna versate manu, versate diurna.

GOTTINGAE
TYPIS JOANN. CHRISTIAN. DIETERICH.

PRAEFATIVNCVLA.

§. 1.

Omnis omnium saeculorum aetas mathesin doctrinarum omnium subtilissimam aeque ac solidissimam eamque putauit, quae ad inuestigandum verum plurimum conferat. Inprimis autem, quod ad scientiam augendam attinet, insignem huic rei inuentio atque publicatio calculi, quem ab infinito nominamus, vtilitatem adtulit. Ille enim calculus praecipuam partem artis inueniendi, qualis hodie inter geometras viget, constituit. Igitur et ei prae omnibus doctrinis mathematicis eximiam laudem tribuere fas est. Equidem nondum inuento hoc calculo iam in summum fere fastigium mathesis euecta esse videbatur *a*). At viris, iam ante hanc inuentionem saeculi sui ornamentis, adhuc reliquum fuit hac re mathesin tantis et nouis et egregiis tam incrementis quam honoribus augere. *Leibnitzius* atque *Newtonus* fuerunt analyseos infinitorum auctores. Quae excogitata quaesitam iam antea admirabili de omni re mathematica bene merendi studio immortalitatem illis maxime adseruit. Quamdiu enim omnis rerum vniuersitas, tamdiu etiam hoc calculi genus superstes erit, quo nosmet ipsos superare videmur et posteri inuentorum nomina nunquam sine pietatis gratique animi sensu nominabunt.

§. 2.

Constat inter omnes quantam vtilitatem haec praecepta de quantitatibus infinitis adferant, ipsumque hoc calculi genus omnibus doctrinis mathematicis et commune et accommodatum, atque ita compara-

 tum

a) Celeberrimus *Wolffius* ait (*in Elementis matheseos vniuersae* Tomo V. Cap. IV. §. 143. p. 270 sq.). "Haec sane ratio est, cur inuenta Mathematicorum recentiorum longissimo interuallo post se relinquant inuenta veterum et quod vno seculo plura fuerint detecta, quam tot seculis inueniri potuerint, quibus Mathesis antea fuit exculta. Sane si *Archimedes* et *Apollonius* nostro aeuo reuiuiscerent, in stuporem raperentur, visis inuentis recentiorum, quae per Algebram fuerunt in apricum producta: neque enim vnquam sibi persuasissent, patere ad talia mortalibus aditum."

tum eſt, vt eodem carere plane non poſſimus. Igitur nihil opus eſt haec omnia pluribus verbis commemorare. Quae cum ita ſint ſpero fore vt mihi concedatur, adhuc pauca quaedam diſputare, de viris illis clariſſimis, *Newtono* atque *Leibnitzio*, et de celebri iſta, quae ad hanc quaeſtionem pertinet controuerſia: Quis verus atque primus inuentor ſit nouae huius analyſeos, quae praecepta de quantitatibus infinitis explicat? inter Germanos praecipue et Anglos agitata.

§. 3.

Quamquam olim ſaepiſſime modo *Newtonus*, modo *Leibnitzius* primus inuentor dictus ſit, hodie tamen veriſimile eſt, vtrumque horum auctorem eſſe earum rerum, quas mirabilis haec doctrina continet. Fieri tamen poteſt vt alter poſt alterum inuentor fuerit nobiliſſimae diſciplinae. Variae res ſunt, quae nos ita ſentire cogunt. Ita enim *Montucla*, qui *Newtonum* quidem primum auctorem calculi, quem ab infinito nominamus, fuiſſe putat, in libro ſuo, cuius index eſt: *Hiſtoire des mathematiques* T. II. p. 338, quo loco de hac controuerſia agitur, *Newtonum* haec de *Leibnitzio* ſcripſiſſe narrat: "Il y a dix ans, qu'étant en commerce de lettres, avec M. Leibnitz, et lui ayant donné avis que j'étois en poſſeſſion d'une méthode pour determiner les tangentes et pour les queſtions de maximis et minimis, méthode qui n'embaraſſoient point les irrationalités, et l'ayant cachée ſous des lettres tranſpoſées, il me repondit qu'il avoit rencontré une méthode ſemblable, et il me communiqua cette méthode qui ne differoit de la mienne que dans les termes et les ſignes, comme auſſi dans l'idée de la génération des grandeurs." Vterque eorum eadem animi ſagacitate, ex iisdem fontibus hauriebat; ambo ſtudioſe et veteres, et recentiores ſcriptores mathematicos legentes, facillime easdem prorſus res ſubinde detegere potuerunt *b*). Nec raro

b) Itaque haec verba *Montuclae* (l. c. p. 17.) quibus de *Keplero*, ingenio ſtudio atque doctrina praeſtantiſſimo, loquitur, maxime notatu digna ſunt. "Il oſa le premier introduire dans le langage ordinaire, le nom et l'idée de l'infini. Le cercle n'eſt, dit-il, que le compoſé d'une infinité de triangles, dont les ſommets ſont au centre, et les baſes forment la circonférence. Le cône eſt compoſé d'une infinité de pyramides appuyées ſur le triangles infinement petits de ſa baſe circulaire, et ayant leur ſommet commun avec celui du cône, tandis que le cylindre de même baſe et même hauteur, eſt formé d'un pareil nombre de petits priſmes ſur les mêmes baſes, et ayant même hauteur qu'elles."

raro historia talia commemorat *c*). Magis autem vnumquemque eorum suo iure inuentorem calculi dici posse e diuersis eiusdem calculi, quas proposuerunt, regulis, diuersaque, qua vsi sunt, methodo, perspicuum est. Diuersis enim viis optatam cursu metam contigerunt *d*).

§. 4.

Non possum quin adferam verba Ill. *Kaestneri*, quae exstant in elegantissimo eius elogio *Leibnitzii*, et ea, quae modo dicta sunt, probare videntur. *Newtonus*, ibidem auctor ait *e*), de noua sua inuentione *Leibnitzium* certiorem reddidit. *Leibnitzius* illi respondit, atque candide exposuit methodum, cuius ipse auctor erat, et quae, quod ipse fatebatur *Newtonus*, non nisi signorum notarumque formulis a Newtoniana methodo differt *f*). "*Braucht man*," sunt ipsa verba auctoris, "*mehr Beweiß, daß keiner seine Kunst von dem andern gelernt hat? Und wie leicht war nicht dieser Kunst erster Anfang aus dem herzuleiten, was schon Barrow in seinen* Lectionibus geometricis *g*) *gewiesen hat. Man vergleiche hiebey noch im Vorbeygehen Newton's anagrammatische Mißgunst mit der Offenherzigkeit des Deutschen, und, der Vergleichung ihre Vollkommenheit zu geben, setze man hinzu: daß Newton in den neuen Ausgaben dieses Scholion mit einem andern verwechselt hat, wo Leibnitz gar nicht erwähnt ist, und daß an der Stelle, wo es sich befindet, nur deswegen steht, weil Newton ein anderes Scholion statt des alten dahin setzen mußte h*). *Dieses Verfahren gehört mit Newtons*

A 3 Chrono-

c) Si enim *Iustus Byrgius* minus cunctatus esset, Germanorum populo eam laudem acquisiuisset, Logarithmos primo in Germania inuentos esse. V. *Kaestneri*, viri illustris *Fortsetzung der Rechenkunst VIII. Abschnitt.*

d) V. *Kästners Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen* §. 45. — *Montucla* l. c. p. 354. "Au reste, inquit, tout est de même dans le calcul différéntiel que dans celui des fluxions. *Ils ne différent que dans la notation, et dans la maniere dont leurs Auteurs ont envisagé leur principe fondamental.*"

e) V. p. 19 sq.

f) Newt. Princ. L. II. Sect. II. Lemm. 2. Schol.

g) E. G. Lect. X. pag. 81. "nomino, ait, [Fig. I.] MP = m; PT = t; MR = a; NR = e; — — — — — — regulas interim has obseruans. 1) Inter computandum omnes abiicio terminos in quibus ipsarum a, vel e potestas habetur, vel in quibus ipsae ducuntur in se (etenim isti termini nihil valebunt) etc."

h) Scholion prius idemque antiquius exstat in duabus editionibus prioribus, annorum 1697 et 1713. Vtrumque habet editio clarissimorum *le Seur* et *Iacquier*, T. II. p. 60. 61.

Chronologie, und seiner Erklärung prophetischer Schriften zu den Beweisen, daß er nur ein Mensch war."

§. 5.

Quamobrem, mea quidem sententia, a proposito haud quaquam alienum esse videtur, hoc loco primas calculi infinitorum lineas, et qualis sit tam fluxionum calculi quam calculi differentialis ratio quodam modo exponere.

Praecepta *Newtoni*, seu fluxionum regulae fundatae sunt legibus motus. Initio statim hanc definitionem realem seu geneticam lineae exhibet: Linea motu puncti describitur. Hoc punctum, inquit, velocitate aut aequabili, aut accelerata, aut retardata mouetur. Velocitas tam accelerata quam retardata et vniformis et non vniformis esse potest. Quam punctum quouis momento habet, velocitas, *fluxio* eius appellatur, et quantitas ab initio motus vsque ad fluxionem, *quantitas fluens*, ad eandem pertinens. Vt autem maiorem ex hac re caperet vtilitatem, et enuntiata sua pluribus rebus accommodata redderet, non in sola linea simplici subsistere, sed vlterius progredi debuit. Namque haec linea recta est, quia scientia motus seu mechanica edocti, curuam motu composito oriri, nouimus. Quibus rite perpensis ad notionem ducimur fluxionis rectanguli, quippe quod quasi factum ex duobus lateribus suis est, illud scilicet, cuius altitudo atque basis factores sunt. At enimuero calculus fluxionum demonstrat, si magnitudo rectanguli mutatione laterum suorum aut aucta, aut deminuta fuerit, semper esse lineam, quae in eadem qua rectangulum ratione mutatur. Si enim rectangulo cuius vtrumque latus variatur, perpetuo aequale sit aliud rectangulum altitudinis constantis, huius rectanguli basis, vnica est linea, quae mutatur in ratione rectanguli. Quamobrem magnitudo rectanguli in quouis temporis momento linea quadam exprimi potest. Exempli gratia punctum p [FIG. 2.] describat partes lineae AB, AC, quae sint vt quantitates variabiles rectanguli, et celeritas puncti p in quouis loco aequalis erit celeritati, qua rectangulum mutatur, hoc est fluxio rectanguli erit.

§. 6.

Facile nunc etiam explicari potest, qualis sit fluxio lineae curuae. Omnem enim lineam curuam e diuersis motibus genitam cogitare licet, quarum vna vel plures vel effectum vel directionem in minutissimo quouis temporis momento mutant. Sed natura cuiusuis curuae, ad ad quam regulae fluxionum accommodari ſolent, duabus quantitatibus variabilibus, abſciſſis et ordinatim applicatis, quarum altera alterius ſemper functio eſt, et quantitatibus conſtantibus definitur, quaeſita ex omnibus his quantitatibus aequatione, qua, quod reliquum eſt, colligitur. Itaque in diuerſis his lineis curuis, in fluxionum calculo, coordinatae conſiderantur velut lineae, quarum mutatio, etiam mutationis curuae, quae ad illas pertinet, cauſa eſt. Quamobrem celeritas ordinatae fluxio eius appellatur et ſimili modo celeritas abſciſſae, fluxio abſciſſae.

§. 7.

Quantitates variabiles perpetuo creſcunt aut decreſcunt partibus homogeneis. Itaque et ſuperficierum fluxiones ſuperficies ſunt, attamen infinite paruae, ſi comparantur quantitatibus, quarum fluxiones ſunt. Ita enim eſt e. g. in rectangulo hoc ABCD [FIG. 3.], ſi AB et BC quantitates mutabiles ſunt, et prima $= x$, altera $= y$ ponitur, $AE = \dot{x}$, et $CI = \dot{y}$, ſumta linea EF lineae AD, et linea HI lineae CD infinite propinqua. Igitur $AEFD = \dot{x}y$ et $CIHD = \dot{y}x$, inſuper $FDHG = \dot{y}\dot{x}$. Ergo fluxio totius rectanguli aequalis eſt duobus paruis rectangulis $\dot{x}y$ et $\dot{y}x$, et praeterea minori $\dot{x}\dot{y}$, quod autem comparatum reliquis nimis exiguum eſt, quam vt conſiderandum, aut ratio eius habenda eſſe videatur. In hac ſpecie et quantitas fluens et fluxio ſuperficies eſt. Eodem prorſus modo, quo fluxio rectanguli, inueniri etiam poteſt fluxio cuiusuis ſuperficiei. Quaeuis enim ſuperficies in rectangulum transformari poteſt. Simili modo fluxio corporis, ſi quantitas variabilis corpus eſt, explicatur.

§. 8.

Praecepta *Leibnitzii* nituntur differentiis quantitatum. Statuit enim omnem quantitatem augeri et minui poſſe. Partes autem, quibus quantitas vel augetur vel deminuitur, minores fieri poſſunt quanuis alia, quam ſit exigua, quantitate aſſignabili, et iſtiusmodi quantitates ſunt, quae infinite paruae nominantur, et quamquam quantitates ſint et maneant, tamen, quantitatibus finitis comparatae, nihilo ſeu nulli aequales ($= 0$) habentur. Atqui partes illas, quibus quantitates variabiles vel augentur vel minuuntur, *Leibnitzius* differentialia appellauit. Ita enim erat differentiale quantitatis $x = dx$, et differentiale facti e. c. $xy = (x + dx).(y + dy) - xy = xdy + ydx + dxdy$. Hic autem, *Leibnitzius* ait, illius $dxdy$ ratio non habe-

tur,

tur, quia euanefcit, aut ad nihilum feu nullum (o) infinite appropinquat, fi quantitates dx et dy quauis affignabili minores fiunt. Sed haec enunciata ad omnes quantitates variabiles, fiue numeri fint, fiue lineae, fiue fuperficies, fiue corpora, applicari poffunt, dummodo ratio dx : dy maneat. Sic etiam hoc calculi genus ad lineas curuas accommodatum nouimus. Nam *Leibnitzius* iam in primo tentamine anno 1684 oftendit, quomodo illud inueniendis non folum tangentibus, verum etiam maximis et minimis, imo et punctis inflexionum inferuiat *i*).

§. 9.

Scientiam augere cuiusuis hominis eft, igitur et geometrae. Meliori profecto modo hoc fieri nequit, quam fi des operam, vt verum incognitum inueftigare queas. Sed ad iftiusmodi inftitutum nulla fcientia tantum valet, aut eidem tam eft idonea, vt fupra iam diximus, quam mathefis. Quamobrem etiam incumbit cuique, qui illi fe dicauit, fcientiam nouis augere acceffionibus et incrementis. Eadem ex caufa ipfi tirones geometrae inquirere debent, quomodo enuntiata iam cognita olim inuenta fint *k*). Negari enim nequit infignem hoc cuique vtilitatem adferre, quia iftiusmodi inueftigationes ingenium acuunt, meditando excercent, et aptiores nos reddunt, fi in iisdem rebus verfamur, inueniendis rebus nouis, et generi humano adhuc ignotis, iisdemque prorfus egregiis. Mearum quoque hoc partium effe, neque vllam occafionem praetermittendam puto, qua data palam faciam, me libenter omnibus illis officiis fatisfacere, quae fcientia, cui me dicaui, a me poftulat, neque aliud magis eft mihi in optatis, quam vt qualiscunque opera mea, quam refpondendo ad quaeftionem hoc anno propofitam impendi, fummis viris, penes quos harum rerum arbitrium eft et ius et norma, haud difpliceat.

§. 10.

i) V. *Montucla* l. c. p. 354. "M. Leibnitz donna le premier effai public de fon nouveau calcul dans les Actes de Leipfick de l'année 1684; *et il montra l'ufage pour trouver les tangentes, les maxima et minima, et les points d'inflexion.*"

k) Quamobrem et *Kaeftnerus*, vir praeftantiffimus, methodum fyntheticam Anglorum vituperare videtur in praefatione libri fui, qui infcribitur: *Anfangsgründe der Analyfis des Unendlichen*, de fcriptoris Britanni *Mac-Laurins* libro, cuius index eft: Treatife of Fluxions fermonem inftituens. "*Aber bey einem Buche, daß uns den vortreflichften Theil der mathematifchen Erfindungskunft lehret, wäre wohl dienlich gewefen, felbft den Vortrag der Gründe fo einzurichten daß man fähe wie fie erfunden worden find.*"

§. 10.

Nunc autem mihi liceat, adhuc pauca praefari, quae ad quaestionem propositam pertinent, antequam ad ipsam responsionem venio. Graeci geometrae, *infiniti* vocabulo, eo sensu, quo nos illud in calculo adhibemus, omnino abstinuerunt, ipsa sunt verba programmatis quaestionis propositae. Igitur meum esse puto primo notionem eius, quod geometrae hodierni *infinitum* vocant, explicare, quo postea eo facilius notiones huic similes, quae scriptis *Euclidis*, *Archimedis* et *Apollonii Pergaei* insunt, et cognoscam et diducam.

§. 11.

Duplex est sensus vocabuli *infiniti*. Namque geometrae subinde dicere solent: haec est quantitas infinite parua, illa infinite magna. Commune atque necessarium attributum cuiuslibet quantitatis est, augeri et minui posse. Si itaque quantitatem, quae augetur, cogitas, tunc nihil aliud hoc sibi vult, quam si dicas, haec quantitas, si aliis quantitatibus, quod ad multitudinem partium eius attinet, comparatur, maior facta est, quam antea erat, seu partes plures adepta est. Sed hoc incrementum semper crescere potest, et cogitare licet, talem quantitatem etiam tot partibus adauctam esse, vt maior sit, qualibet quantitate assignabili seu finita, etiamsi haec in comparatione cum aliis maxima sit. Tunc quidem quantitas infinite magna appellatur. At enim vero notione quantitatis determinatae tum priuata est, id quod, mea quidem sententia, discrimen est quantitatum finitarum et infinitarum. Quaeuis enim finita accurate determinari potest, non autem infinite magna, quia semper adhuc quantitas finita cum infinita comparari potest, quae maior priori finita est, quam cum infinita comparamus. Ita enim ipse *Eulerus l*) quantitates constantes; determinatas, et variabiles; indeterminatas, nominauit. Et hae quidem posteriores sunt, quae infinitae fieri possunt, atque hoc respectu indeterminatae sunt.

§. 12.

Eodem modo infinite paruum se habet. Vt enim cogitare licet quamuis quantitatem semper crescere posse, ita etiam cogitare licet quamuis quantitatem semper decrescere posse. Si quis mihi obiiceret, subtractione quantitatem ita diminui posse, vt fiat aequalis nulli seu zero, et zerum aut zero quantitatem esse, quae diminui nequit, illi respon-

l) Introductio in Analysin infiniti.

responderem, omnino fieri posse, vt quantitas subtractione ita diminuatur, vt sit aequalis zero, attamen minorem adhuc fieri posse. Nam si zerum aut zero vera sit quantitas, illa, quoad subtractione decrescere potest, talis est quantitas, quam nec positiuam nec negatiuam dicere possumus, quamobrem etiam terminum constituit, qui positiuas atque negatiuas quantitates inuicem discernit, et quasi transitus est quantitatum positiuarum ad negatiuas. Sine dubio etiam zerum aut zero, quasi talis terminus sit et transitus, et verae quantitatis instar, contemplandum est. Nisi autem zerum seu zero quantitatem esse concedas, neque subtractione ita diminuere valeo quantitatem vt fiat $= 0$, sed tum potius totam quantitatem aufero. Si vero quantitatem diuisione diminuo, eam tam reddere possum exiguam, vt quotus siue quantitas, quae remanet, quantitas infinite parua sit, hoc est, vt quotus minor sit, qualibet quantitate assignabili seu data, hoc est, ad zerum seu zero infinite appropinquet, id est, vt differentia eius et zeri seu zero animaduerti aut assignari non possit.

§. 13.

Signum ∞ igitur quantitatem variabilem atque indeterminatam denotat, quae maior qualibet quantitate finita et determinata fieri potest. Signum autem $\frac{1}{\infty}$ eam, quae minor, qualibet finita quantitate, etiamsi sit minima, fieri potest, siue quae a zero quidem differt, ita tamen vt differentia intelligi aut assignari nequeat.

§. 14.

Quantum in me est operam dabo, vt semper extrema primis, antecedentia consequentibus respondeant, simul autem adsidue mihi in mentem reuocabo verba programmatis, quae sequuntur: "Vix est vt moneatur non postulari absolutum systema calculi, sed eruendas esse ex methodo et exemplis antiquorum notiones et propositiones, a quibus pendent praecepta, tum eius qui variationum euanescentium rationes inuestigat, cuius prima exempla tangentes praebent, tum alterius, qui ex variationum lege, quanta, quae variantur, colligit, vt: Superficierum et solidorum partes indefinitas."

ANALY-

ANALYSIS INFINITORVM.

Esse quantitates infinitas ostenditur ex enuntiationibus Euclidis.

§. 15.

Euclides priscus ille Graecus geometra est, qui elementa matheseos scripsit. Elementa eius posteris conseruata sunt, atque iisdem immortalem gloriam consecutus est. Profecto inter tres illos geometras Graecos, quorum iam antea mentionem fecimus (§. 10.), nemo esse videtur e cuius scriptis rectius meliusque primae notiones calculi seu analyseos infinitorum deduci possint, quam hic noster, qui ipse tam egregii elementorum matheseos operis auctor est.

§. 16.

Iam in primo *Euclidis* elementorum libro hoc est postulatum: "καὶ (scil. ἠτήσθω) πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβάλλειν." e quo quantitates infinitas, eo quidem, quo supra dixi, sensu, esse posse (§ 11. 12.), intelligitur. In primis libris elementorum *Euclides* de quantitatibus illis solum agit, quae geometricae nominantur. Inter has lineae natura primo exquiritur atque explicatur. Igitur mirum videri non potest, eum hoc attributum, quod scilicet crescere queat, solum de linea affirmare. Fac autem, vt hoc cuilibet quantitati tribuamus, et hoc fieri posse nemo negabit, tum idem est, ac si dixisset, *quaelibet quantitas augeri potest*, perinde vt linea, quae terminata est, et vtrinque producitur, etiam augetur. Omnis vero quantitas quae augeri potest, etiam infinita fieri potest, quod iam ex eo, quod supra (§. 11.) diximus, patet.

§. 17.

Esse quantitates infinite paruas magis adhuc apparet e prima *Euclidis* propositione libri X. Verba propositionis et demonstrationis haec sunt:

"Δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ἂν γίγνηται· λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔστιν ἔλασσον ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους.

Ἐστω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ ΑΒ, Γ, [FIG. 4.] ὧν μεῖζον τὸ ΑΒ· λέγω ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ ΑΒ ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ ἀπὸ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος ὅ ἐστιν ἔλασσον τοῦ Γ μεγέθους.

Τὸ γαρ Γ πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ ΑΒ μεγέθους μεῖζον. πεπολλαπλασιάσθω, καὶ ἔστω τὸ ΔΕ τοῦ μὲν Γ πολλαπλάσιον, τοῦ δὲ ΑΒ μεῖζον, καὶ διῃρήσθω τὸ ΔΕ εἰς τὰ τῷ Γ ἴσα τὰ ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ μὲν τοῦ ΑΒ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΒΘ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΑΘ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΘΚ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω ἕως ἂν αἱ ἐν τῷ ΑΒ διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς γένωνται ταῖς ἐν τῷ ΔΕ διαιρέσεσιν· ἔστωσαν οὖν αἱ ΑΚ, ΚΘ, ΘΒ διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς οὖσαι ταῖς ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ.

Καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΔΕ τοῦ ΑΒ, καὶ ἀφῄρηται ἀπὸ μὲν τοῦ ΔΕ ἔλασσον τοῦ ἡμίσεος τὸ ΕΗ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΑΒ μεῖζον τοῦ ἡμίσεος τὸ ΒΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΔ λοιποῦ τοῦ ΘΑ μεῖζόν ἐστι, καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΗΔ τοῦ ΘΑ, καὶ ἀφῄρηται τοῦ μὲν ΗΔ ἥμισυ τὸ ΗΖ, τοῦ δὲ ΘΑ μεῖζον τοῦ ἡμίσεος τὸ ΘΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΔΖ λοιποῦ τοῦ ΑΚ μεῖζόν ἐστιν. ἴσον δὲ τὸ ΔΖ τῷ Γ· καὶ τὸ Γ ἄρα τοῦ ΑΚ μεῖζόν ἐστιν. ἔλασσον ἄρα τὸ ΑΚ τοῦ Γ· καταλείπεται ἄρα ἀπὸ τοῦ ΑΒ μεγέθους τὸ ΑΚ μέγεθος ἔλασσον ὂν τοῦ ἐκκειμένου ἐλασσονος μεγέθους τοῦ Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ομοίως δὲ δειχθήσεται, κἂν ἡμίσεα ᾖ τὰ ἀφαιρούμενα."

Vt magis perſpicuum ſit, eſſe quantitates infinite paruas, pone paruam quantitatem Γ finitam eſſe, ita enim hoc in loco ſemper habenda eſt, et hanc ob rem etiam menſura determinari poſſe, ſeu menſurabilem eſſe. Apparet autem ex *Euclidis* demonſtratione quantitatem remanentem AK talem fieri, quae minor ſit quantitate Γ, quia dimidiam, ſeu partem dimidia maiorem ſemper ab illa AB aufers. Tum ponamus $\Gamma > AK$ minorem fieri debere, quam $\frac{1}{m} AK$. Quod eodem prorſus quo antea modo, diminuta denuo et aſſidue reliqua parte, ſeu dimidiatione continuata, effici poteſt. Littera vero m vnumquemque numerum, dummodo ſit integer, non fractus, ſignificare poteſt, oportet enim $AK > \frac{1}{m} AK$ eſſe. Maiori m ſemper reſpondet minor $\frac{1}{m} AK$, et minori $\frac{1}{m} AK$, minor Γ. Haec perpetuo continuari, ſiue m maior ſemper fieri poteſt, et hac ex cauſa $\frac{1}{m} AK$ minor fit, quam antea fuit. Igitur haec formula, $\frac{1}{m} AK$ omnibus, imo minimis quantitatibus communis eſt. Quare $\Gamma = \frac{1}{\infty}$ ponendum eſt (§. 13).

Rationes primae et vltimae.

§. 18.

Quaeritur hic an quantitates infinitas, non minus quam finitas computare possimus? Quantitates infinitae, siue sint infinite magnae, siue infinite paruae, semper indeterminatae sunt (§. 13.), illorumque termini nunquam constitui atque determinari possunt. Eodem itaque modo, quo finitas, infinitas tractare non licet. Nam, quae calculo reperiebamus, non satis certa aut determinata erunt, quoties computando etiam infinitis vsi sumus. Fortasse tamen quaedam ratio finita inueniri potest, quae inter plures quantitates infinitas, vel inter finitas et infinitas locum obtinet. Fieri hoc non solum potest, sed re vera etiam in calculo differentiali fit. Quaeritur enim hic ratio $dx : dy$ quaenam sit?

§. 19.

Rationes vt quantitates considerandae sunt. Differentia duarum quantitatum infinite parua fieri potest, hoc est, altera ad alteram magis magisque accedit seu appropinquat. Itaque et rationum altera ad alteram semper propius accedere seu infinite appropinquare potest. Altera vero ad alteram quauis quantitate data propius accedit, si differentia harum quantitatum siue rationum minor quauis quantitate assignabili fieri potest. Quamobrem altera alterius terminus esse dicitur. Ratio differentialis nihil aliud, nisi ratio prima atque vltima est. Sit enim ECG [Fig. 14.] curua quaedam et AF huius curuae tangens. E puncto contactus C ducatur recta CI rectae DB parallela. Si itaque FB semper propius ad CD accedit, ratio $FI : GI$ eodem modo propius ad rationem aequalitatis accedit, siue FG quauis quantitate data minor erit. Quare ratio $GI : DB$, $DB = CI$, a ratione $ce : Dd$ omnino non differt. Posterior vero ratio $ce : Dd$ est ratio differentialium ordinatae atque abscissae huius curuae, si ce et Dd pro infinite paruis habentur.

§. 20.

Euclides prima propositione libri VI:

"Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις"

ansam nobis dat, inueniendae meditando notionis eius, quod hodie rationem primam et vltimam vocant. Demonstratio haec est:

 "Εστω

"Εϛω τρίγωνα μὲν τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ [Fig. 5.], παραλληλόγραμμα δὲ τὰ ΕΓ, ΓΖ, ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, τὴν ἀπὸ τȣ͂ Α ἐπὶ τὴν ΑΔ κάθετον ἀγομένην· λέγω ὅτι ἐϛὶν ὡς ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν ȣ̔́τως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, καὶ τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ τὰ Θ, Λ σημεῖα, καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν ΒΓ βάσει ἴσαι ὁσαιδηποτȣ͂ν αἱ ΒΗ, ΗΘ, τῇ δὲ ΓΔ βάσει ἴσαι ὁσαιδηποτȣ͂ν αἱ ΔΚ, ΚΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΗ, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΓΒ, ΒΗ, ΗΘ ἀλλήλαις, ἴσα ἐϛὶ καὶ τὰ ΑΗΘ, ΑΗΒ, ΑΒΓ τρίγωνα ἀλλήλοις· ὁσαπλασίων ἄρα ἐϛὶν ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΒΓ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐϛι καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τȣ͂ ΑΒΓ τριγώνȣ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁσαπλασίων ἐϛὶν ἡ ΛΓ βάσις τῆς ΓΔ βάσεως, τοσαυταπλάσιον ἐϛι καὶ τὸ ΑΛΓ τρίγωνον τȣ͂ ΑΓΔ τριγώνȣ· καὶ εἰ ἴση ἐϛὶν ἡ ΘΓ βάσις τῇ ΓΛ βασει, ἴσον ἐϛὶ καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τῷ ΑΛΓ τριγώνῳ· καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΓΛ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τȣ͂ ΑΛΓ τριγώνȣ· καὶ εἰ ἐλάσσων, ἔλασσον. τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν βάσεων τῶν ΒΓ, ΓΔ δύο δὲ τριγώνων τῶν ΑΒΓ, ΑΓΔ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τῆς μὲν ΒΓ βάσεως καὶ τȣ͂ ΑΒΓ τριγώνȣ, ἥτε ΘΓ βάσις καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον· τῆς δὲ ΓΔ βάσεως καὶ τȣ͂ ΑΓΔ τριγώνȣ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια, ἥτε ΓΛ βάσις καὶ τὸ ΑΛΓ τρίγωνον· καὶ δέδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΓΛ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τȣ͂ ΑΛΓ τριγώνȣ· καὶ εἰ ἴση, ἴσον· καὶ εἰ ἐλάττων, ἔλαττον· ἔϛιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν ȣ̔́τως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον.

Καὶ ἐπεὶ τȣ͂ μὲν ΑΒΓ τριγώνȣ διπλάσιον ἐϛι τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον, τȣ͂ δὲ ΑΓΔ τριγώνȣ διπλάσιον ἐϛι τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τον αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔϛιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον ȣ̔́τως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ ȣ͂ν ἐδείχθη, ὡς ἡ μὲν ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ ȣ̔́τως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ, ὡς δὲ τὸ ΑΒΓ πρὸς τὸ ΑΓΔ ȣ̔́τως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον· Καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν ȣ̔́τως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ.

Τὰ ἄρα τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, πρὸς ἄλληλά ἐϛιν ὡς αἱ βάσεις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι."

Verum et euidens hoc eſſe nemo negabit, quoties de ratione rationali ſermo eſt. Sed fac, vt ſint baſes lineae incommenſurabiles, et ratio irrationalis. Igitur dimidiando ſeu bifariam ſecando quaere lineam paruam $\Theta H = a$, quae ducta ſeu multiplicata in n (n hoc loco denotet numerum integrum) factum ſeu productum exhibet $\Theta\Gamma$, ergo $\Theta\Gamma = n.a$. Ob rationem autem irrationalem quantitas a non metitur quantitatem $\Gamma\Lambda$. Si m alium numerum integrum denotat, non eſt $m.a = \Gamma\Lambda$, propter rationem irrationalem. Ponamus autem eſſe $\Gamma\Lambda > m.a$ et $< (m + 1).a$, eſt etiam $\Delta\, A\Gamma\Lambda > m.\Delta\, \Theta\Lambda H$ ſed $< (m + 1).\Delta\, \Theta\Lambda H$, ſicut $\Delta\, \Theta\Lambda\Gamma = n.\Delta\, \Theta\Lambda H$, eſt enim (Eucl. L.VI. prop. I.) $\Delta\, \Theta\Lambda H : \Delta\, \Theta\Lambda\Gamma = \Theta H : \Theta\Gamma = a : n.a$. $\Gamma\Lambda$ itaque inter $m.a$ et $m.a + a$, duobus quaſi limitibus ſeu terminis, continetur. Sequitur autem ex *Euclidis* libri decimi propoſitione prima (et §. 17.) quantitatem a minorem, qualibet quantitate data fieri poſſe. Quare differentia inter $m.a$ et $(m + 1).a$ minor fieri poteſt quauis adſignabili, hoc eſt, non indicari poteſt quo differant $(m + 1).a$ et $m.a$. Sed ſi ſtatuatur $(m + 1).a$ maius quam $m.a$, indicandum eſt quo differant. Ergo non ſtatui poteſt $(m + 1).a > m.a$, quod vero non poſſit eſſe $(m + 1).a < m.a$ per ſe patet. Ergo pro $(m + 1).a$ aliud quid ſtatui non poteſt quam pro $m.a$, ideoque $\Gamma\Lambda = m.a$. Quamobrem etiam ratio $\Theta\Gamma : \Gamma\Lambda$ perpetuo ad rationem $n : m$ propius accedit. Dum autem a ſemper deminuitur, ſiue infinite paruum fit, n ſemper creſcere, hoc eſt, infinite magnum fieri neceſſe eſt. Quod ex eo patet, quod $\Theta\Gamma = n.a$ eſſe debeat, et proinde factum hoc, e duobus his factoribus n et a ortum, numquam non ſibimet ipſi aequale erit, hinc creſcente vno factore n, alter factor a decreſcat, oportet. Ponamus a deminui, et quidem quantitate data e, neceſſe eſt, vt n creſcat, facto enim ex a, $a - e = b$, eſt $n.a = n.b$, ex hypotheſi, quod fieri nequit, niſi n auctum ſit. Tum hoc n fit $= \frac{n.a}{a-e}$. Nam $n.a = x.(a-e)$ et $x = \frac{n.a}{a-e} =$ aucto n. Igitur ſi ex a fit b erit $n = \frac{n.a}{a-e}$, et ſequens oritur ſeries productorum aequalium, ſi $b - e = c$, $c - e = d$, $d - e = f$ et ſic porro

$$na,\ \frac{nab}{a-e},\ \frac{nabc}{(a-e).(b-e)},\ \frac{nabcd}{(a-e).(b-e).(c-e)}\ \ldots\ .$$

ſeu ſemper erit $n = \frac{na}{a-me}$, ſi nimirum $a = a - me$, qua formula m denotet quemcunque velis numerum.

§. 21.

Sed maior adhuc similitudo est, inter calculum, cui hodie ab infinito nomen tribuimus, et methodum exhaustionis veterum. Haec enim fines determinat, quos excedere non licet, demonstrans, quantitatem, postulatis non respondentem, impossibilem esse. Audiamus igitur, quae vir beatus Cl. *Karstens*, insigne quondam Halae Saxonum decus et ornamentum, hac de re disserit *m*). " *Was so oft gesagt wird, und nie so bewiesen ist wie man es sagt, das unendlich kleine sei mit dem einerlei, was die Alten* omni dabili minus *nennen, und die Methode des unendlichen mit der Exhaustionsmethode der Alten, das ist schlechterdings nicht ganz richtig, nur soviel ist richtig, daß die Schlüsse welche die Neuern auf ihre Vorstellungsarten vom unendlich kleinen gründen, wenn man sie gehörig auseinandersetzt, auf die Exhaustionsmethode der Alten zurückgeführt werden können.*"

§. 22.

Primum exemplum huius methodi, cuius mentionem facere, et quam cum methodo calculi, quem ab infinito nominamus, comparare volumus, est prima propositio libri *Archimedis*, cuius index est *κύκλου μέτρησις*, circuli dimensio. Verba ita se habent: *n*)

"Πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ορθογωνίῳ *o*), τοῦ ἡ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ λοιπῇ *p*).

Εχέτω ὁ α β γ δ [FIG. 6.] κύκλος ὡς ὑπόκειται. Λέγω, ὅτι ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ τῷ ε. [FIG. 7.]

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω μείζων ὁ κύκλος. Καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα· καὶ ἔστων *q*) τὰ τμήματα ἤδη ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχαι ὁ κύκλος τοῦ τριγώνου· τὸ εὐθύγραμμον ἄρα ἔτι τοῦ τριγώνου ἐστὶ μεῖζον. Εἰληφθω κέντρον τὸ ν, καὶ καθετὸς ἡ ν ξ· ἐλασσων ἄρα ἡ ν ξ τῆς τοῦ τριγώνου πλευρᾶς· Εστι δὲ καὶ ἡ περίμετρος τοῦ εὐθυγράμμου τῆς λοιπῆς ἐλάττων, ἐπεὶ καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιμέτρου· Ελαττον ἄρα τὸ εὐθύγραμμον *r*) τοῦ ε τριγώνου. Οπερ ἄτοπον.

Εστω

m) *Mathematische Abhandlungen. Abh. I. Vom mathematisch unendlichen. §. 46.*

n) V. I. Wallis opp. math. Vol. III. p. 539.

o) Edit. Bas. ὀρθογονίῳ.

p) B. τῇ βασει.

q) B. ἔστω.

r) B. εὐθύγραμον.

Ἔστω δὲ ὁ κύκλος, εἰ δυνατὸν, ἐλάττων τοῦ ε τριγώνου. Καὶ περιγεγράφθω τὸ τετράγωνον· καὶ τετμήσθωσαν αἱ περιφέρειαι δίχα· καὶ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι διὰ τῶν σημείων. Ορθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ οαρ· ἡ ορ ἄρα τῆς μρ ἐστὶ μείζων· ἡ γὰρ ρμ τῇ ρα ἴση ἐστί. Καὶ τὸ ροπ τρίγωνον ἄρα τοῦ οζαμ σχήματος μεῖζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ. Λελείφθωσαν, οἱ τῷ πζα τομεῖς ὅμοιοι, ἐλάσσους τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ s) ὑπερέχει τὸ ε τρίγωνον τοῦ αβγδ κύκλου. Ἔστιν ἄρα τὸ περιγεγραμμένον εὐθύγραμμον ἔτι τοῦ ε ἔλασσον. Ὅπερ ἄτοπον. Ἔστι γὰρ μεῖζον ὅτι ἡ μὲν να ἴση ἐστὶ τῇ καθέτῳ τοῦ τριγώνου· ἡ δὲ περίμετρος μείζων ἐστὶ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου.

Ἴσος ἄρα ὁ κύκλος τῷ ε τριγώνῳ.

Si hanc propoſitionem ope quantitatum infinitarum demonſtrare mihi conceditur, his forſan argumentis firmanda eſt.

Fieri poteſt vt polygonum aut inſcriptum quoddam Q [FIG. 8.], aut circumſcriptum S, a circulo quantitate tantum minori quantitate e differat, quantumuis etiam exiguam e quantitatem denotet. Quod quidem augendo numerum, et minuendo longitudinem laterum efficitur. Tum ſimul rationes Cc : r et Cb : r magis magisque decreſcunt. Vel Cc dum adſidue augetur numerus laterum polygoni, ad r propius accedit, quaſi terminus valoris ſemidiametri minimae omnium polygonorum regularium circulo inſcriptorum eſſet, ſi polygonum inſcriptum eſt. Eodem modo etiam Cb ad r propius accedit, quaſi terminus valoris ſemidiametri maximae omnium polygonorum regularium circumſcriptorum eſſet, ſi polygonum circumſcriptum eſt. Si itaque differentia rationum Cc : r et Cb : r minor eſt qualibet data ſeu aſſignabili quantitate, haec differentia determinari non poteſt. Quantitates autem quarum differentia determinari nequit, ſine dubio pro aequalibus habendae ſunt. Igitur ſi Cc = Cb = r, etiam peripheria polygoni peripheriae circuli aequalis eſt. Quare circulus pro polygono habetur, quod infinitis et infinite paruis lateribus comprehenditur, quia differentia, quam e vocauimus, euaneſcit. Polygonum vero triangulo aequale eſſe, cuius baſis ſummae laterum omnium, ſiue toti peripheriae polygoni, altitudo autem ſemidiametro minimae aequalis eſt, antea iam demonſtrauimus. Iure ergo circulo etiam idem illud tribuimus. Sed re vera circulus terminus omnium polygonorum et inſcriptorum et circumſcriptorum eſt, et hac de cauſa iam pro polygono habetur, perinde vt zero, ſi hoc tranſitum numerorum

s) Edit. Baſ. ἢ.

rorum positiuorum ad negatiuos esse dicimus, ipsum pro numero habendum est (§. 12.) t).

§. 23.

Archimedes sua propositione probat, circulum triangulo aequalem esse, cuius basis peripheria circuli, et altitudo radius est, quia nec maior, nec minor tali triangulo est potest. Nihil hoc euidentius est. At antea iam demonstrauit polygonum regulare triangulo aequale esse, quod ita se habet, vt modo diximus. Quodam modo igitur dici potest, hoc circulo et polygono regulari commune attributum esse u). Viris autem, tali ingenio ornatis, quali *Newtonus* et *Leibnitzius* excelluerunt, hoc suffecit, ad eruenda praecepta tanti momenti calculi.

§. 24.

Celeberrimus *Wolfius* hanc propositionem demonstrans, notione quantitatis infinitae hoc loco vtitur.

"Concipiatur", ait, "peripheria circuli in partes numero infinitas inter se aequales, adeoque infinite paruas diuisa; arcus infinite exigui *ab* [Fig. 9.] supra chordam cognominem excessus erit quouis dato minor, seu inassignabilis, adeoque reuera nullus. Concipiantur porro ex centro *c* ad extrema arcus infinite parui *ab* ducti radii *cb* et *ca*; erit angulus *acb* infinite paruus, adeoque *a* et *b* non different a recto, consequenter si *ab* sumatur pro basi, radius *ac* erit trianguli *abc* altitudo. Cum adeo area circuli resoluatur in istiusmodi triangula numero infinita, quorum altitudo communis est radius *ac*, bases vero iunctim sumtae sunt peripheriae circuli aequales, per

t) Parum abfuit, quin *Tacquetus* (V. *Andr. Tacquet* Elementa Euclidea geometriae &c. edita a *Guilielmo Whistono* MDCCXLV T. I. p. 268 - 270 et p. 236.) praecepta calculi infiniti detexerit, quod perspicuum est e demonstrationibus propositionum I. II. III et V. in eiusdem theorematibus selectis ex *Archimede*, et hac definitione: "Magnitudines figurae alicui inscriptae, aut circumscriptae, siue figura minores vel maiores, in figuram *desinere* dicuntur, cum ab ea tandem differre possunt, quantitate minori quacumque data, seu quantumuis parua."

u) V. *Euclides* L. XII. prop. I et II. — V. *L'Huilier* exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs p. 8 sq. et p. 137. "Les polygones inscrits et circonscrits sont un moyen dont on se sert pour paruenir à déterminer ces propriétés du cercle, non pas en tant que ce dernier peut être pris pour les premiers, mais en tant qu'il peut en différer moins que d'aucune quantité assignée."

per demonſtrata; erit ille aequalis triangulo, cuius baſis peripheria, altitudo radius circuli. Q. e. d." *v*).

Porro §. 411.

"Hac demonſtrandi methodo primus vſus eſt *Keplerus* *w*). Eam exemplo eius excitatus *x*) ſub nomine *methodi indiuiſibilium* magis excoluit *Caualerius*. Demonſtrationem indirectam dedit *Archimedes* non contemnendam, quoniam ipſius demonſtrandi methodo principia methodi infiniteſimalis rigidantur."

§. 25.

Simili modo adpropinquatione, et certos quosdam terminos conſtituendo *Archimedes* in eodem libello rationem peripheriae circuli ad radium definit. In ſcriptis *Archimedis* nimirum plures adhuc huius generis propoſitiones inueniuntur. Verum haec iam ſufficiunt ad cognoſcenda fundamenta quibus, quem ab infinito nominamus, calculus nititur.

Tangentes.

§. 26.

Propoſitio XVI. elementorum *Euclidis* libri III. haec eſt:

"Η τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου· καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ περεμπεσεῖται· καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἁπάσης ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν· ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων."

Tres haec enuntiatio ſingulas comprehendit partes, quarum quamque argumentis firmare neceſſe eſt. De prima parte demonſtrationis nihil monendum eſt. Alteram: in locum, qui inter tangentem et arcum interiicitur, recta linea non cadet, *Euclides* hic ſimili modo probat, quo *Apollonius Pergaeus* propoſitiones XXXII et XXXIII. in conicorum libro I. Fortaſſe aliquis dicat haec ſufficiunt, dummodo de quantitatibus infinitis non ſit ſermo. Sed ſi conceditur, quantitatem infinite paruam fieri poſſe, ſupereſt, vt probemus, fieri non poſſe, vt linea recta ſit inter tangentem et arcum, ſi, HG in infinitum propius ad nullum (o) accedit, ſiue quauis quantitate data

 minor

v) V. Elementa geometriae §. 410.
w) In Noua Stereometria doliorum vinariorum part. 1. theor. 2. f. B. 2.
x) V. praefat. ad Geometriam indiuiſibilium continuorum noua ratione promotam p. b. 2.

minor ſit. Si ponamus rem ita comparatam eſſe, ſitus rectae AF [FIG. 10.] vel hoc, vel illo modo mutatur, ob angulum rectum in puncto G (Eucl. L. III. P. XVI.). Situs autem eius mutatur vel in puncto A, vel non. Si recta AF in iſto puncto non mutatur, infra arcum cadet, et eum ſecabit, contra hypotheſin. Si in eodem puncto A mutatur, nec porro inter tangentem et arcum cadet, quod quoque contra hypotheſin eſt. Atqui et hic fieri nequit, ergo omnino nullo modo fieri poteſt. Si tandem HG = o, FG tangens in puncto H erit. Duae autem tangentes ſecant ſe inuicem, et angulum faciunt, qui eſt complementum anguli HDA ad 2R.

§. 27.

Pars haec ſecunda in analyſi infinitorum ita forſan explicanda eſt.

Fiat AT [FIG. 11.] tangens curuae CME. Tangentem autem dicunt rectam, quae vnum modo punctum commune cum curua habet, et a quo puncto ambo arcus in vno rectae latere ſiti ſunt. Recta vero curuam ſecabit, ſi eam in partes dirimit cis et vltra ipſam ſitas. Recta MD perpendicularis ad tangentem normalis dicitur. Si fieri poteſt, vt recta linea interecta ſit inter tangentem et curuam CME, haec dicatur BM. Quia autem AT tangens eſt, hinc CME in puncto M contingit, MT cadet inter MF, hoc eſt inter productam BM et arcum ME. Angulus CME, quem chordae CM et EM comprehendunt, vt magis magisque augeatur atque excreſcat, et infinite propius ad 2R accedat, neceſſe eſt, ſi arcus CM et EM adſidue minuuntur. Si ex CM fiat HM et ex EM fiat GM, ex angulo CME fiet angulus GMH, maior angulo CME. Cum enim per puncta M, G et E, et eodem modo per C, H et M recta linea duci nequeat, non ſolum per M, G et E, ſed etiam per C, H et M triangulum conſtituere licet, quo facto anguli EMG et CMH, incrementa anguli CME, oriuntur. Iam vero ſi chordae perpetuo minuuntur, CME propius in infinitum ad 2R accedit. Si autem linea BM inter tangentem et arcum interiecta eſt, angulus CME maior fieri nequit angulo TMB < 2R id quod antecedentibus repugnat, quare BM linea duci non poteſt.

§. 28.

At tertiam iam accedo partem propoſitionis Euclideae. At enim vero haec ita comparata eſt, vt, in hac, quam tractamus, cauſſa eam magni momenti eſſe, nemo negare queat. Propoſitio XVI. libri tertii elementorum *Euclidis* celebrem illam controuerſiam inter *Clauium* olim

olim et *Peletarium* agitatam excitauit. *Clauius* enim ſtatuit, angulum contactus, quem vocant, non eſſe aequalem o, ſed potius in infinitum diuidi poſſe. Equidem lineis rectis hoc effici non poſſe, attamen arcubus circuli. Demonſtratio tertiae huius partis, quam exhibet *Euclides*, veritate ſecundae nititur. Sed hanc controuerſiam *Clauii* et *Peletarii* diiudicare non poſſumus, niſi antea definiamus, quid ſit angulus, ſi de lineis curuis ſermo eſt. *Euclides* definitionem anguli rectilinei etiam ad curuilineum applicat.

"Επίπεδος", ait enim, "δὲ γωνία ἐςὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ᾽ εὐθείας κειμένων, πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις" et ſic porro:

"Οταν δὲ αἱ περιέχȣσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία." *y*).

Ex altera definitione iam ſequitur, angulos curuilineos eſſe, ſecundum *Euclidis* ſententiam. Altera vero definitio omnibus et rectilineis et curuilineis angulis communis eſt.

§. 29.

Linea curua motu puncti eodem modo vt recta deſcribitur, ſed iſtud punctum, in quouis minimo temporis ſpatio directionem ſuam mutat, nunquam autem ſubito, ſed ſecundum legem continuitatis, alias linea interrupta oriretur. Quare angulus mixtilineus, vt CAD ſeu BAD [Fig. 12.], alio modo cum rectilineo comparari non poteſt, quam ſi dicas, iſte angulus linea recta BA vel AC et directione puncti ſecundi, ſiue elementi arcus AD determinatur. Vere autem hanc ob rem angulus BAD nihil aliud eſt, quam inclinatio directionis puncti ſecundi arcus AD ad primum eius punctum A, ſi A ſecundum directionem AB mouetur; angulus autem DAC ſimiliter inclinatio directionis puncti ſecundi ad primum A eſt, ſi A rectam AC deſcribit. Nunc vero neceſſe eſt, vt hanc directionem delineemus. Quod ita efficitur.

Si circulus diuiditur in elementa inter ſe aequalia, productum quoduis elementum ita ad alterum inclinatum eſt, vt qui inde oritur angulus, eandem magnitudinem habeat, quam angulus, qui cuiuis elemento in centro reſpondet. Angulus vero, quem elementum quoddam atque radius conſtituunt, a recto differt, dimidia parte anguli, de quo modo diximus *z*). Quoniam autem elementa infinite parua fieri

y) L. I. Def. 8 et 9.

z) V. *Kaeſtneri* viri illuſtr. *Anfangsgründe der Analyſis des Unendlichen.* §. 96. p. 61.

fieri possunt, istiusmodi etiam angulus cuiuis elemento in centro respondens infinite paruus erit. Angulus, quem tangens et radius faciunt, est rectus. Angulus D A C, quem arcus A D et radius faciunt, aequalis est recto demta dimidia parte anguli, quem diximus, elementi infinite parui, et maior quouis angulo acuto rectilineo. Quare B A D, complementum eius ad rectum, et dimidio angulo infinite paruo aequalis, minor quouis dato quantumuis paruo angulo rectilineo est, et pro nullo habetur, atque complementum eius ad rectum recto aequale esse ponitur.

Sed satis iam dictum est, de iis, quae ad controuersiam *Clauii* et *Peletarii* attinent. Qui autem pleniorem huius rei notitiam exoptat, huic suasor essem, vt quintam legat dissertationem libri, qui inscritur, *mathematische Abhandlungen*, cuius auctor beatus *Karstens*, vir clarissimus, Professor quondam Halensis *a*).

§. 30.

Ex hac propositione iam idea infiniti, et inprimis quantitatum infinite paruarum, ita quidem innotuit, vt omnino existimandum esse videatur, illam vna cum aliis causam fuisse, vt egregia hac inuentione auctores calculi infiniti mathesin auxerint. Nexus autem inter tertiam et reliquarum partium vtramque enunciati Euclidei ansam nobis praebet, vt analysin infinitorum nunc simul tangentium habito respectu, vti propositum est, contemplemur.

§. 31.

Si primum ea, quae apud *Apollonium Pergaeum* in primo conicorum libro inueniuntur, perlegimus, ibi, quomodo lineam parabolen, ellipsin et hyperbolen tangentem ducere debeamus, propositiones XXXIII et XXXIV. nos docent. In parabola si est $AE = ED$ [Fig. 13.], rectam A C F tunc sectionem contingere, eo modo hoc loco demonstratur, vt pateat, punctum F, quod est alicubi in recta producta A C F, semper extra sectionem, siue curuam E C G, cadere. Si itaque ponimus $CD = y$ et $FB = y + e$ esse, hoc e eo magis minuitur, quo propius F B ad C D accedit, in hoc autem loco est aequale zero, quod ex sequentibus perspicuum est. Quo maior abscissa, eo maior etiam ordinata est, semper enim, dicta parametro p, $px = y^2$. Si igitur x crescit, quoque, vt y noua incrementa capiat, necesse est. Pona-

a) V. etiam *Andr. Tacquet* Elementa Euclidea Geometriae etc. edita a *Guilielmo Whistono* MDCCXLV. p. 73 sqq.

Ponamus $ED = x$, $EB = 3x$, $Eb = 2x$, $fg = m$ et $FG = n$, ergo $m < n$ esse probandum est.

Est autem

$2x : y = 3x : \frac{3}{2}y$, et $\frac{3}{2}y = bf$. Item

$2x : y = 4x : 2y$, et $2y = BF$.

$bg = y\sqrt{2}$, $BG = y\sqrt{3}$, quia $2px = 2y^2$ et $3px = 3y^2$.

$bg < bf$ et $BG < BF$ vel

$y\sqrt{2} < \frac{3}{2}y$ quantitate $y \cdot 0{,}08578643 \ldots = m$

$y\sqrt{3} < 2y$ quantitate $y \cdot 0{,}2679492 \ldots = n$

ergo $n > m$ quantitate $y \cdot 0{,}1821628 \ldots\ldots$

In calculo differentiali tangentes ratione $dy : dx$ determinantur, in quauis enim sectione conica $\frac{dy}{dx} = $ tang. CAD, aut etiam subtangente quae $= \frac{y\,dx}{dy}$. Ex quo cognoscitur, lineam AE in parabola esse aequalem x, in ellipsi $= \frac{ax}{a - 2x}$, in hyperbola $= \frac{ax}{a + 2x}$.

§. 32.

Cum hanc propositionem: Si in parabola $AE = ED$ [Fig. 14.], AC tangens est, secundum leges calculi differentialis explicare animo proposuerimus, primo ducenda est linea HG, parabolen secans in punctis C et G. Quae linea producta in puncto H ab axe AB ita secabitur, vt sit $HE > AE$. Porro si ducitur recta CI super GB perpendicularis, est $CI : IG = HD : DC$. Tum si punctum G propius ad punctum C accedit, FG magis magisque minuitur (§. 31.). Tandem punctum G in c, quod puncto C infinite propinquum est, transferatur. Erit etiam, ducta linea cd, punctum d puncto D infinite propinquum, et $ce : Ce = CD : AD$ ergo $AD = \frac{CD.\ Ce}{ce}$. Cum vero $AE = ED$, est $AD = 2ED = \frac{CD.\ Ce}{ce}$. Rectae ED et CD eodem modo, vt supra (§. 31.), x et y appellentur. Aequatio parabolae est $bx = y^2$, hinc $b\,dx = 2y\,dy$ et $dx : dy = 2y : b$. Porro $2x : y = dx : dy$, ob $\frac{CD : Ce}{ce} = \frac{y\,dx}{dy}$, si nimirum hae lineae in calculo differentiali literis exprimuntur. Sed adhuc reliquum est, vt demonstremus esse $2x : y = 2y : b$. Quod facillime effici potest. Nam $bx = y^2$ et $b = y^2 : x$, his autem literis pro b in in formula $2y : b$ substitutis, efficitur, vt sit $dx : dy = 2xy : y^2 = 2x : y$ id est $AD : CD$. Siue: si in parabola tangens per punctum C ducitur, illa axem in puncto A ita secabit, vt puncti A distantia a vertice sectionis aequalis sit abscissae, quam ordinata ad tangentem pertinens determinat, id est, oportet vt AE sit $= x$.

Idem et sic atque calculo differentiali conuenienter explicatur: Sit ECG [FIG. 14.] parabola cuius parameter $= b$; coordinatae ad axem $ED = x$; $DC = y$; $DB = e$; $IG = f$ vt sit $EB = x + e$; $BG = y + f$. Iam ducta per GC recta, occurrat axi in H. Semper est $IG : IC = DC : DH$ seu $DH = \frac{e}{f} . y$. Porro ex natura parabolae $(y + f)^2 = b . (x + e)$ seu $2 . y . f + f^2 = b . e$; Hinc $\frac{e}{f} = \frac{2 . y}{b} + \frac{f}{b}$. Ergo semper $DH = \frac{2 . y^2}{b} + \frac{f . y}{b}$. Potest vero e, et adeo f decrescere quantumcunque velis. Si sit $f = 0$ valor ipsius DH abit in $\frac{2y^2}{b} = 2x$. Hic ergo valor est subtangentis DA *b*).

§. 33.

Sed sunt etiam plures lineae curuae transcendentes quarum natura ita comparata est, vt ordinatae omnes ex vno eodemque puncto, quasi ex centro describantur. Ex his mihi naturam spiralis Archimedeae perpendere licitum erit. *Archimedes* librum, in quo de spiralibus seu helicibus agitur, scripsit. Certe in *Conone*, vetusto quodam geometra, non mediocris mathematum fuit peritia, attamen tantam, qua *Archimedes* inclaruit, gloriam non assecutus est. *Conon* iste quidem spiralis, cui ab *Archimede* nomen tribuimus, inuentor fuit, at *Archimedes* eam excoluit, inquirendo in naturam eius, attributa, proprietates *c*). In libro suo de spiralibus seu helicibus primo ostendit quomodo linea talis oriatur, et hoc loco argumentis mechanicis vsus est. Statuit enim, si punctum rectam motu vniformi describit, eius rectae duas quasuis partes esse in ratione temporum in quibus descriptae sunt. Quae iis similia sunt, quibus *Newtonus* in suo fluxionum calculo vsus est.

§. 34.

b) V. *Kaestneri* viri illustr. *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen* §. 84. p 56.

c) V. *Montucla* hist. des Mathematiques T. I. p. 236.

§. 34.

Archimedes in propoſitione ſua XIII libri de ſpiralibus ſeu helicibus ait, recta, tangens lineam ſpiralem ABZ [Fig. 15.], in vno tantum puncto eam contingit, et hoc ita probat:

Tangat, ſi fieri poteſt duobus in punctis B et C. Connectatur BC, et angulum BAC recta AG biſecet, occurrens helici in D, tangenti in G. Quare eſt $AC - AD = AD - AB$, et $AC + AB = 2AD$, ſed $AC + AB > 2AG$ ergo $AG < AD$ et punctum G intra helicem cadit, ideoque BC ſpiralem non tangit.

§. 35.

Aequatio helicis eſt $py = rx$, p peripheriam circuli ZFHIKZ denotat, r radium, y ordinatas e puncto A ducendas, vt AB, AD, AC, AZ, et x abſciſſas, quae ſunt arcus circuli, qui initium capiunt in puncto Z et verſus F, H, I, K procedunt. In demonſtratione quod dicit *Archimedes* $AC - AD = AD - AB$, hoc idem eſt, ac ſi dixiſſet: partes, quae ſunt incrementa aut decrementa (quorum euaneſcentium ratio, appellatur ratio differentialium) ordinatarum, ſunt aequales inter ſe, ſi abſciſſarum differentialia inter ſe aequalia ſunt. Differentialia autem abſciſſarum inter ſe aequalia ſunt, ob ang. $BAD =$ ang. DAC, ſiquidem arcus horum angulorum pro infinite paruis, et ideo pro differentialibus habentur. Sed haec etiam ex aequatione $py = rx$ colliguntur. Eſt enim $pdy = rdx$, ergo $p : r = dx : dy$. Sed p et r quantitates conſtantes ſignificant, hinc ſi differentiale cuiusuis x differentiali alterius ſemper aequale eſt, eſt quoque differentiale cuiusuis y differentiali alterius y aequale. Cum ordinatae adſidue et quidem vniformiter augeantur, arcus BDC verſus ordinatas concauus eſt, quare tangens poſt punctum contactus magis magisque a linea curua diſcedit, et proinde eam in vno tantum puncto contingere poteſt.

§. 36.

Subtangens primae ſpiralis Archimedeae, cuius ordinata $\alpha\vartheta = y = r$, propoſitione XVIII huius libri definitur *d*).

"Εἴκα τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾶ πρώτα περιφορᾶ γεγραμμένας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύη, κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, ἀπὸ δὲ τȣ̃ σημείȣ, ὅ ἐςὶν ἐν ἀρχᾶ τᾶς ἕλικος ποτ᾽ ὀρθὰς ἀχθῆ τὶς τᾶ ἀρχᾶ τᾶς περιφορᾶς,

ά

d) V. Archimedis opera graece et latine ex edit. Hervagii, Baſileae 1544.

ἁ ἀχθεῖσα συμπεσεῖται τᾶ ἐπιψαυȣ́σα. ϗ ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τᾶς ἐπιψαυȣ́σας, ϗ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος, ἴσα ἐσσεῖται τᾶ τȣ̃ πρώτου κύκλου περιφορεία.

Εϛω [FIG. 16.] ἕλιξ ἁ αβγ̄δ. ἔϛω δὲ τὸ ᾱ σημεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος. ἁ δὲ θᾱ γραμμὰ ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς. ὁ δὲ θη̄κ κύκλος ὁ πρῶτος. ἐπιψαυέτω δὲ τις τᾶς ἕλικος κατὰ τὸ θ̄, ἁ θ̄ζ. καὶ ἀπὸ τοῦ ᾱ ἄχθω πρὸς ὀρθὰς τὰ θᾱ, ἁ ᾱζ. συμπεσεῖται δὴ αὐτᾶ ποτὶ τὰν θ̄ζ. ἐπεὶ αἱ ζθ̄, θᾱ ὀξεῖαν γωνίαν περιέχȣσιν. συμπιπτέτω κατὰ τὸ ζ. δεικτέον ὅτι ἁ ζᾱ ἴσα ἐϛὶ τᾶ τοῦ θκ̄η κύκλου περιφερείᾳ. εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι μείζων ἐϛιν, ἢ ἐλάσσων.

Εϛω πρότερον εἰ δυνατὸν, μείζων. ἔλαβον δὴ τινα εὐθεῖαν τὰν λᾱ, τᾶς μὲν ζᾱ εὐθείας ἐλάσσονα, τᾶς δὲ τȣ̃ θη̄κ κύκλου περιφερείας μείζονα. ἐϛὶ δὴ κύκλος τις ὁ θη̄κ. ϗ ἐν τῶ κύκλω γραμμὰ ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ θη̄. ϗ λόγος ὃν ἔχει ἁ θᾱ πρὸς ᾱλ, μείζων τȣ̃ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς κ̄θ, ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ ᾱ κάθετον ἐπ᾽ αὐτὰν ἀγμέναν. διότι ϗ τȣ̃ ὃν ἔχει ἁ θᾱ πρὸς ᾱζ. δυνατὸν ȣ̃ν ἐϛὶν, ἀπὸ τοῦ ᾱ ποτιλαβεῖν ποτὶ τὰν τᾶν ἐκβεβλημέναν τὰν ᾱν. ὥς τε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας ϗ τᾶς ἐκβεβλημένας τᾶν ν̄ρ, πρὸς θ̄ρ τὸν αὐτον ἔχει λόγον, ὃν ἁ θᾱ ποτὶ τὰν ᾱλ. ἕξει ȣ̃ν ἁ ν̄ρ, ποτὶ τὰν ρᾱ λόγον, ὃν ἁ θ̄ρ εὐθεῖα ποτὶ τὰν ᾱλ. ἁ δὲ θ̄ρ ποτὶ τὰν ᾱλ ἐλάσσονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ θ̄ρ περιφὲρεια ποτὶ τὰν τȣ̃ θη̄ κύκλου περιφὲρειαν ἁ μὲν γὰρ θ̄ρ εὐθεῖα ἐλάσσων ἐϛὶ τᾶς θ̄ρ περιφερείας. ἁ δὲ ᾱλ εὐθεῖα τᾶς τȣ̃ θη̄κ κύκλου περιφερείας μείζων. ἐλάσσονα ȣ̃ν λόγον ἕξει ϗ ἁ ν̄ρ πρὸς ρᾱ, ἢ ἁ θ̄ρ περιφέρεια ποτὶ τὰν τȣ̃ θη̄κ κύκλου περιφέρειαν. ϗ ὅλα οὖν ἁ νᾱ ποτὶ τὰν ᾱρ, ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἁ θ̄ρ περιφέρεια μεθ᾽ ὅλας τᾶς τȣ̃ κύκλου περιφερείας, ποτί τᾶν τȣ̃ θη̄κ κύκλου περιφὲρειαν. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ θ̄ρ περιφὲρεια μεθ᾽ ὅλας τᾶς τȣ̃ θη̄κ κύκλου περιφερείας, ποτὶ τὰν τȣ̃ θη̄κ κύκλου περιφέρειαν, τȣ̃τον ἔχει ἁ χᾱ ποτὶ τὸν ᾱθ. δὲδεικται γὰρ τȣ̃το. ἐλὰσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ νᾱ ποτὶ τὰν ᾱρ, ἤπερ ἁ χᾱ ποτὶ τὰν ᾱθ, ὅπερ ἀδύνατον. ἁ μὲν γὰρ νᾱ μείζων ἐϛὶ τᾶς ᾱχ. ἁ δὲ ᾱρ ἴσα ἐϛὶ τᾶ θᾱ. οὐκ ἄρα μείζων ἁ ζᾱ τᾶς τȣ̃ κύκλȣ περιφερείας, τȣ̃ θη̄κ.

Εϛω δὴ πάλιν, εἰ δυνατὸν, ἐλάσσων ἁ ζᾱ [FIG. 17.] τᾶς τȣ̃ θη̄κ κύκλου περιφερείας. ἔλαβον δὴ τινὰ εὐθεῖαν πάλιν τὴν ᾱλ, τᾶς μὲν ᾱζ μείζονα, τᾶς δὲ τοῦ θη̄κ κύκλου περιφερείας ἐλάσσονα. ϗ ἄγω ἀπὸ τȣ̃ θ̄ τὰν θ̄μ παράλληλον τᾶ ᾱζ. πάλιν οὖν κύκλος ἐϛὶν ὁ θη̄κ. ϗ ἐν αὐτῶ ἐλάτσων γραμμὰ τᾶς διαμὲτρȣ ἁ θη̄. ϗ ἄλλα ἐπιψαύȣσα τȣ̃ κύκλȣ κατὰ τὸ θ̄. ϗ λόγος ὃν ἔχει ἁ ᾱθ ποτὶ τὰν ᾱλ, ἐλάσσων τȣ̃ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς η̄θ, ποτὶ τὰν ἀπὸ τȣ̃ ᾱ κάθετον ἐπ᾽

αὐτὰν

αὐτὰν ἀγμέναν. ἐπειδὴ καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ θα πρὸς αζ, ἐλάσσων ἐστί. δυνατὸν οὖν ἐστὶν ἀπὸ τοῦ α ἀγαγεῖν τὰν απ ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν. ὥστε τὰν ρν τὰν μεταξὺ τας ἐν τῷ κύκλῳ εὐθείας, καὶ τᾶς περιφερείας ποτὶ τὰν θπ, ἀπολαφθεῖσαν ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ θα ποτὶ τὰν αλ. τεμεῖ δὴ ἁ απ τὸν μὲν κύκλον κατὰ τὸ ρ, τὰν δὲ ἕλικα κατὰ τὸ χ. καὶ ἕξει καὶ ἐναλλάξ τὸν αὐτόν λόγον ἁ νρ πρὸς ρα, ὃν ἁ θπ πρὸς αλ. ἁ δὲ θπ ποτὶ τὰν αλ μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ θρ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ θηκ κύκλου περιφέρειαν. ἁ μὲν γὰρ θπ εὐθεία μείζων ἐστὶ τᾶς θρ περιφερείας, ἁ δὲ αλ ἐλάσσων τᾶς τοῦ θηκ κύκλου περιφερείας. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ νρ ποτὶ τὰν αρ, ἢ ἁ θρ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ θηκ κύκλου περιφέρειαν. ὥστε καὶ ἁ ρα ποτὶ τὰν αν μείζονα λόγον ἔχει, ἢ ἁ τοῦ θηκ κύκλου περιφέρεια ποτὶ τὰν θκρ περιφέρειαν. ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ τοῦ θηκ κύκλου περιφέρεια ποτὶ τὰν θκρ περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ θα εὐθεῖα ποτὶ τὰν αχ. δὲδεικται γὰρ τοῦτο. μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ρα ποτὶ τὰν αν, ἢ ἁ αθ ποτὶ τὰν αχ. ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν, οὐδὲ ἐλάσσων ἁ ζα τᾶς τοῦ θηκ κύκλου περιφερείας. ἴση ἄρα."

Ope calculi differentialis haec propoſitio breuiter ita demonſtratur: $\pi y = r x$, ob $y = r$ eſt $\pi = x$, et ſubtangens quoque abſciſſae aequalis eſſe debet. Subtangens eius curuarum generis, cuius in natura eſt, vt ordinatae ex vno eodemque puncto, quaſi centro, deſcribantur, eſt $= \frac{y^2\,dx}{r\,dy}$. Igitur hoc loco $= \frac{y\,dx}{dy}$, perinde ac in iis lineis curuis, quarum ordinatae non ex vno eodemque puncto deſcribuntur. $\pi : r = x : y$ et $\pi\,dy = r\,dx$, atqui $\pi : r = dx : dy = x : y$. Ergo $x = \pi = \frac{y\,dx}{dy}$.

§. 37.

At enim vero ſi ſummum, qui inter enuntiata Archimedea et methodum calculi infinitorum eſt, conſenſum rite cognoſcere lubet, nulla alia re opus eſt, niſi vt lineas literis deſignemus π, r, x, y et earundem differentialibus. Sit itaque [FIG. 18.] $AZ = y = r$, $\pi =$ peripheriae circuli $= x$, arcus $ZG = dx$, $GB = dy$. Sit $AO > \pi$, recta OZ helicem intra punctum Z ſecat. Ducatur porro recta AE perpendicularis ad OZ, et AH ſecans OZ in H et peripheriam circuli in G, ſed ita, vt ſit GH: chord. $ZG = y : \pi$. Porro ſecet AH helicem in B. Quoniam $GH : dx < y : \pi$ erit permutando

GH : y $<$ dx : π et componendo y + GH : y $<$ y + dy : y, eſt enim dx : π = dy : y, ergo GH $<$ dy. Contra id, quod ſupra (§. 35.) demonſtratum eſt, neceſſe eſſe vt GH $>$ dy ſit. In altera parte propoſitionis eodem modo demonſtratur punctum H intra helicem cadere, ſi AQ $<$ π. Si ponamus rectam AQ creſcere, ita forſan, vt punctum Q ad R protrahatur, tum ſitus rectae QZ ita mutabitur, vt oriatur ſitus rectae RZ, atque GH minuetur, et quidem eo magis, quo magis AQ vel AR peripheriam circuli aequat. Si denique recta AQ in AP = x mutata erit, ZP tangens helicis eſt, tum enim GH $>$ dy. Nam ſupra etiam demonſtrauimus, ſi recta AP maior aut minor ſit quam π, punctum H, quod in tangente producta OZ eſſe debet, tunc intra helicem cadere. Simul etiam ex his omnibus patet, nexum inter tangentem curuae huius et circuli quadraturam nondum ſatis determinatam talem eſſe, vt cum alterutrum horum determinatur, etiam alterum determinatum ſit.

Aſymptoti.

§. 38.

In analyſi infinitorum aſymptoti, quaſi rectae eſſent curuam tangentes in puncto, cuius diſtantia a vertice ſectionis ſiue ab initio abſciſſarum pro infinita habetur, conſiderari ſolent, id quod ad determinationem earundem magnam vtilitatem affert. Ipſe *Apollonius Pergaeus* in ſecundo conicorum libro auctor nobis eſt, vt aſymptotos, quaſi tales tangentes eſſent, contemplemur. Ait enim in propoſitione XIV: Aſymptoti et ſectio ſi in infinitum productae ad ſeipſas propius accedunt, et ad interuallum perueniunt *minus quolibet dato interuallo.* Idem hoc eſt, ac ſi dixiſſet, aſymptoti et ſectio ſi in infinitum producuntur, perueniunt ad interuallum infinite paruum. Hoc vero interuallum aequale 0 ponendum eſt, quare dici poteſt, aſymptoton eſſe tangentem in puncto infinite remoto.

CALCV-

CALCVLVS INTEGRALIS.

§. 39.

Ad illam partem diſſertatiunculae huius nunc accedo, in qua de colligendis iis, quae ex variationum lege oriebantur, agitur. Res, quae hic in quaeſtione verſantur, plures ſunt, et ad eas, mea quidem ſententia, pertinent praecipue haec: colligere partes ſeu inuenire aream ſuperficierum, quarum termini lineae curuae ſunt, hoc eſt, inuenire quadraturam curuarum; et colligere partes ſolidorum, quae ſuperficiebus curuis, quaſi terminis incluſae ſunt. Ita enim verba programmatis: "Vt: Superficierum et ſolidorum partes *indefinitas*" explicanda eſſe puto. Primum vero ſtudium, partibus indefinitis iſtiusmodi ſuperficierum aut ſolidorum colligendis dicatum, quadraturis curuarum adhibendum eſſe videtur.

§. 40.

Supra iam (§. 22.), cum de methodo exhauſtionum veterum et eiusdem cum noua hac analyſi conſenſu et quaſi conſpiratione diximus, libri *Archimedis*, cuius index eſt κύκλου μέτρησις ſiue circuli dimenſio, propoſitionem: circulum aequalem eſſe triangulo, cuius altitudo ſit radius et baſis peripheria circuli, expoſuimus, quare, quae tum quidem diſputauimus, nunc in mentem reuocanda ſunt. Attamen vera quadratura circuli hac methodo nondum omnino peracta eſt, iſtud enim triangulum neque ratione geometrica exacte conſtituere, neque arithmetica computare poſſumus. Eſt potius quaedam quaſi methodus adpropinquationis, quia tantum hoc modo adhuc rectificationem circuli perfecimus. Si quis autem quadraturam quandam arithmeticam examinare vult, illi nihil aliud opus eſt, niſi vt eam conferat cum illo numero, quem *Ludolphus a Ceulen* aliique magno ſtudio atque labore computauerunt. In eodem etiam libro *Archimedes* peripheriam circuli ita definit, vt oſtendat illam minorem quam $3\frac{1}{7}$, maiorem autem quam $3\frac{10}{71}$ diametri eſſe. Quantus vero horum terminorum et numeri dicti conſenſus ſit ex ſequentibus apparet:

$$3\tfrac{1}{7} = 3{,}142\ \ldots\ldots\ldots$$
$$3\tfrac{10}{71} = 3{,}140\ \ldots\ldots\ldots$$

vero proprior numerus = 3,1415 . . . . *e*).

 §. 41.

e) Qui certior fieri vult de iis, quae attinent ad quadraturam arithmeticam circuli v. V. III. *Kaeſtneri Geometriſche Abhandlungen 2 Saml. 20.* p. 174 ſqq.

§. 41.

Sed ipſa haec poſterior numerorum ſeries, etiam in perpetuum continuata, numquam tamen ad euidentiam mathematicam peruenire, aut ſecundum indolem matheſeos exacta vocari poteſt. In omni enim natura fines nullius rei ita regere poſſumus, vt ſtatuere poſſimus vbi finis rei alterius, alteriusque initium ſit. Quae enim in natura fiunt mutationes, eae omnes ſenſim ſenſimque contingunt. Nam ſicut curuatura lineae motu continuo mutato gignitur, ita etiam natura magnam quandam et admirabilem vniuerſitatem praebet, quae ſecundum legem continuitatis connexa eſt. Mathematico autem ſufficit, vt pro lubitu fines perpetuo accuratius regere poſſit. Quaenam quaeſo alia, praeter matheſin, eſt doctrina, quae hoc efficere valeat?

Quadratura parabolae.

§. 42.

Primam atque veram quadraturam lineae curuae *Archimedes* inuenit, et eius quidem lineae, quam parabolam nominamus. Quamobrem etiam librum ſcripſit, in quo de quadratura parabolae agitur, cuius propoſitiones nunc vt explorem et ſimilitudinem, quae eſt inter methodum demonſtrationum earundem et methodum nouae analyſeos oſtendam, operam dabo. Duplici modo *Archimedes* quadraturam perfecit. Primo enim eam ex legibus aequilibrii deduxit, quae proinde methodo mechanica confecta eſt. Ex omnibus autem illis propoſitionibus, quae ad iſtiusmodi quadraturam parobalae ſpectant, vnam tantum commemoro. Eſt haec propoſitio XVI, et eam ob cauſam notatu digna eſt, quia ſecundum methodum exhauſtionum veterum demonſtratur. Tres enim haec enuntiatio habet ſpecies, quarum duas *Archimedes* oſtendit, fieri non poſſe, quare tertiam ſolam veram eſſe patet. Ipſa propoſitio docet, ſi ſuperficies z [FIG. 19.] tertia pars eſt trianguli BGD, illam ſegmento parabolae BKG, quod recta GD in puncto G contingit aequalem eſſe. Simul autem demonſtratur ſuperficiem Z neque maiorem ſegmento BKG eſſe, quare iure eidem aequalis habetur.

§. 43.

Sed, vt ad ſecundam partem huius libri, quae continet parabolae quadraturam geometricam, ſine mora progrediar, neceſſe eſt. Septem ſunt enuntiationes in *Archimedis* libro ad hanc parabolae quadraturam pertinentes, de quibus omnibus dicam, tametſi plurium argu-

argumentum tantum indicabo. Prima quae ad quadraturam geometricam ſpectat, eſt propoſitio XVIII huius libri. Vnum tantum, quod autem omnibus his enuntiationibus commune, hoc loco notandum eſt. *Archimedes* enim planum parabolicum nominauit, quod comprehenſum eſt ſub recta AC [FIG. 20.], hoc eſt, tota ordinata (vel dupla ſemiordinata) et curua ABC, id eſt parabola. Recentiores vero, ſi de quadratura parabolae loquuntur, dicunt, aream cuiusuis parabolae aequalem eſſe $\frac{2}{3}$ rectanguli coordinatarum, quo de dimidio tantum talis ſuperficiei $=$ ADB ſpatio ſermo eſt.

§. 44.

Sit [FIG. 21.] ordinata AD dupla ordinatae EG; *Archimedes* ait in propoſitione XIX huius libri $EF = DG$ eſſe $= 3.\ BG$.

Sunt enim ex natura parabolae quadrata ordinatarum vt abſciſſae. Ergo $AD^2 : EG^2 = BD : BG$; at ex hypotheſi $AD^2 : EG^2 = 4 : 1$, ergo $BD = 4.\ BG$, ergo GD vel $EF = 3.\ BG$.

Quae valent etiamſi ordinatae non pertineant ad axem, ſed ad diametrum quamuis.

§. 45.

Propoſitio XX docet, parabolae ſegmentum ABC [FIG. 21.] minus eſſe duplo trianguli rectilinei ABC cuius trianguli baſis AC eadem eſt ac ſegmenti, vertex B, idem qui diametri BD. Sed hoc corollarium notatu dignum eſt:

— — *δῆλον ὅτι ὡς ἐς τȣ̃το τὸ τμῆμα δυνατὸν ἐϛὶ πολύγωνον ἐγγράψαι. ὥς τε ἔιμεν τά περιλειπόμενα τμήματα παντὸς ἐλάσσονα, τοῦ προτεθέντος χωρίȣ. ἀφαιρȣμένȣ γὰρ ἀεὶ μείζονος τȣ̃ ἡμίσεȣς, διὰ τȣ̃το φανερὸν ὅτι ἐλασσοῦντες ἀεὶ τὰ λειπόμενα τμήματα, ποιησομεν ταῦτα ἐλάσσονα παντὸς τȣ̃ προτεθέντος χωρίȣ.*

Vis corollarii huc redit: Δ ABC maius eſt dimidio ſegmento parabolico ABC. Iam ſegmento parabolico BHC, rurſus inſcriptum Δ BHC maius eſt huius ſegmenti dimidio. Huius autem trianguli verticem H oportet eſſe verticem diametri H, biſſecantis *chordas* parabolae ſeu vt ab antiquis appellabantur *ordinatas* baſi ſegmenti BC parallelas.

§. 46.

Rationem triangulorum minorum ad maius ABC [FIG. 21.] propoſitio XXI definit. Si enim, vt in figura, in reliquis ſegmentis triangula, e. g. BHC, conſtituuntur, tum tale triangulum aequale eſt $\frac{1}{8}$ Δ ABC.

§. 47.

§. 47.

Propoſitio XXII docet, ſi tria ſpatia x, y et z ſunt in ratione quadrupla, et maximum $x = \Delta\,ABC$, ſegmentum parabolae, quo triangulum iſtud ABC inſcriptum eſt, maius eſſe omnibus his quantitatibus x, y, z. Quia $x = 4y = 16z$, eſt $\frac{1}{4}\Delta\,ABC = y = 4z$, atqui $\frac{1}{4}y = z$, ergo $x + y + z = \Delta\,ABC + \frac{1}{4}\Delta\,ABC + \frac{1}{16}\Delta\,ABC = 1\frac{5}{16}\Delta\,ABC$. Cum autem hae quantitates ſint in ratione triangulorum omnibus parabolae ſegmentis inſcriptorum, et triangula illa ſimul ſumta minora ſuperficie ſegmenti ſint, eſt etiam parabolae ſegmentum ABC $> 1\frac{5}{16}\Delta\,ABC$. Iam apparet quantopere *Archimedes* ad veritatem propius accedit.

§. 48.

Propoſitio XXIII quodammodo inuerſa prioris dici poteſt, nam in corollario ex eadem colligitur, figuras in ſuperficie inſcriptas minores eſſe, quam $\frac{4}{3}$ trianguli ABC. Praeterea hoc loco ſcholium, quod *Barrowius*, vir clariſſimus verſioni ſuae adiecit *f*), ſilentio praeterire non poſſumus. Scholium autem integrum huc apponimus, prima enim fundamenta calculi infinitorum continet, et ea probat, quae ſupra (§. 4.) diximus.

"Liquidius id deducatur ex hac vniuerſali propoſitione.

Sint quotcunque quanta proportionaliter decreſcentia in ratione α ad β; eorum ſit extremum ω, et ſumma dicatur z; erit $z = \frac{\alpha\alpha - \beta\omega}{\alpha - \beta}$.

Nam vt primum ad ſecundum, ita ſunt omnia antecedentia ad omnia conſequentia, hoc eſt $\alpha . \beta :: z - \omega . z - \alpha$; quare (extrema et media in ſe ducendo) eſt $\alpha z - \alpha\alpha = \beta z - \beta\omega$; et (tranſponendo) $\alpha z - \beta z = \alpha\alpha - \beta\omega$; et (diuidendo vtrinque per $\alpha - \beta$) eſt $z = \frac{\alpha\alpha - \beta\omega}{\alpha - \beta}$.

Hinc ſi $\alpha : \beta = 4 : 1$ erit $z = \frac{4\alpha - \omega}{\alpha}$; vt in hac prop. 23.

Adnotetur autem, quod ſi progreſſio continuetur ad infinitum, ſcilicet vt ω ſit $= 0$ nihil; tunc euaneſcente termino $\beta\omega$ liquet fore $z = \frac{\alpha\alpha}{\alpha - \beta}$.

Hinc ſi $\alpha . \beta :: 4 . 1$; erit $z = \frac{4}{3}\alpha$.

Hinc autem breuiſſime conſtat *Archimedea* quadratura; vnaque plures innumerae ſimiliter eliciuntur."

f) V. *Archimedis* opera per *Iſaacum Barrow*. Londini 1675. p. 132 ſq.

§. 49.

Vltima propoſitio huius libri, hoc eſt propoſitio XXIV propriam demonſtrationem exhibet: ſegmentum parabolae ABC aequale eſſe $\frac{4}{3}$ trianguli ABC. Eſt autem illa ad methodum exhauſtionum veterum accommodata, ſimili modo, vt ea propoſitio, quam antea allegauimus. Eius verba ita ſe habent:

"Παν τμῆμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ εὐθείας καὶ ὀρθογωνίου κώνου τομᾶς ἐπίτριτον ἐςὶ τριγώνου τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ, καὶ ὕψος ἴσον."

Liceat mihi hanc enuntiationem argumentis, quae in hac commentatione iam explicatis conſentanea ſunt, firmare.

Si parabolae ſegmentum, vt ABC [FIG. 20.], contemplamur et illi triangulum ABC inſcribimus, iam e definitione linearum et rectarum et curuarum patet, ſegmentum triangulo maius eſſe. In reliquis duobus ſegmentis etiam triangula AHB et BFC inſcribenda ſunt, et ſic porro in quouis ſegmento reſiduo. Sed ex antecedentibus iam conſtat, ſegmenta reſidua minora fieri, quauis quantitate data quantumuis exigua atque ad zero in infinitum propius accedere poſſe. Quare nihil opus eſt, niſi ſummam omnium triangulorum parabolae ſegmento inſcriptorum inuenire. Tali fortaſſe modo efficere hoc poſſumus.

Dimidii tantum talis ſegmenti parobolae rationem habeamus, nam perinde eſt an dimidium, an totum conſideremus. Facile nunc cognoſcitur ſegmentum parabolae AHBD [FIG. 22.] maius triangulo ABD, minus autem rectangulo AEBD eſſe. Si vero recta AD propius ad punctum B accedit et ex AD recta *ad* facta eſt, nihilominus eadem eſt ratio inter ſegmentum parabolae et rectangulum. Idem obtinet, ſi AD in *bc* mutata fuerit. Verum enimuero ſi recta AD puncto B infinite propinqua eſt, ſpatium ſub ſegmento parabolae comprehenſum infinite paruum erit, eo magis autem minus ſpatium fbB. Quare computando fbB pro nihilo habetur, et ideo ſuperficiem contemplamur, quaſi ſit factum ex quantitate finita bc in infinite paruam Bc, hinc factum ipſum ſeu productum infinite paruum eſt.

Prorſus hoc veritati reſpondet, ſi ponamus $bc = y$ et $Bc = dx$. Sunt enim y et dx quantitates variabiles. Atque ne tum quidem a recta via aberramus, ſi ponimus, ſegmentum parabolae eſſe quantitatem finitam. Nam tum factum ſiue productum hoc in quouis puncto parabolae verum erit. Litteras vſitatas retinendo quaerere oportet ydx quantitatibus finitis, aut ita ſaltim ſignis expreſſum, vt factum hoc quouis momento accurate indicare possimus. Iam quia $bx = y^2$ et $bdx = 2ydy$, erit $dx = \frac{2ydy}{b}$, ergo $ydx = \frac{2y^2dy}{b}$ et $\int ydx = \int \frac{2y^2dy}{b} = \frac{2}{3}y^3 : b$. Quia autem $b = y^2 : x$, erit $\frac{2}{3}y^3 : b = \frac{2}{3}xy = \Delta BAD$, ideoque $\Delta ABC = 2 . \Delta ABD = \frac{4}{3}xy$.

§. 50.

Saepissime iam in *Archimedis* scriptis argumenta inuenimus, quae mirum inter praecepta *Archimedis* et illa, quae noua analysis tradit, consensum ostendunt. Verum plura restant, quae idem prorsus commonstrare valent. Iam antea (§. 33.), cum de tangentibus sermo erat, silentio praeterire non potui librum eius de spiralibus seu helicibus. Eundem autem denuo hoc loco laudare fas est. E propositione XXI notio infinite parui, ea ratione, qua supra eandem explicauimus, perspicua est. Haec autem est corollarii verborum sententia e quibus ea, quae diximus, apparent:

"Ἐκ τούτου δὲ φανερὸν, ὅτι δυνατὸν ἐστὶ περὶ τὸ εἰρημένον χωρίον σχῆμα, οἷον εἴρηται, γράφειν. ὥς τε τὸ περιγεγραμμένον σχῆμα μεῖζον εἶναι τοῦ χωρίου ἔλασσον εἶμεν παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. καὶ πάλιν ἐγγράφειν, ὥς τε τὸ χωρίον ὁμοίως μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος, ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου."

§. 51.

Eandem notionem infinite parui exhibet propositio XXII. Igitur facere non potui quin duo haec corollaria, propositi causa maxime notatu digna, integra huc transcriberem.

"Δῆλον οὖν ὅτι δυνατὸν ἐστὶ καὶ τὸ περιγραφὲν σχῆμα τοῦ λαφθέντος χωρίου μεῖζον εἶμεν ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου. Καὶ παλιν τὸ λαφθὲν χωρίον μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφὲντος τοῦ προτεθὲντος χωριου."

"Διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου φανερὸν, διότι δυνατὸν λαβόντα τὸ χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν ὁποιαοῦν περιφορᾶ γεγραμμένας καὶ τὰς εὐθείας τᾶς ἐν τᾶ ἀρχᾶ τᾶς περιφορᾶς κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν λεγομένας περιγράψαι σχῆμα, οἷον εἴρηται ἐπίπεδον. ὥς τε τὸ περιγραφὲν σχῆμα, μεῖζον εἶμεν τοῦ λαφθέντος χωρίου ἐλάσσονι παντὸς τοῦ προτεθέντος χωρίου, καὶ πάλιν ἐγγράψαι, ὥς τε τὸ λαφθέν χωρίον μεῖζον εἶμεν τοῦ ἐγγραφέντος σχήματος ἐλασσονι παντός τοῦ προτεθέντος χωρίου."

§. 52.

Supra iam (§. 37.) dictum est, mirabilem esse nexum inter rationem determinandi tangentem helicis Archimedeae, et circuli quadratudraturam nondum omnino exactam. Eodem modo res ſe habet, ſi de ſpatio iſtiusmodi linea terminato ſermo eſt. Ita nimirum ſtatuit *Archimedes* in propoſitione XXIV:

"Το περιλαφθὲν χωρίον ὑπὸ τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας, καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς πρώτας τὰν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, τριτον μερος ἐςὶ τοῦ κύκλου τȣ πρώτȣ."

Demonſtrationem ille ante commemoratis propoſitionibus et corollariis firmat, probans figuram circumſcriptam $=$ R minorem tertia parte circuli $=$ C, inſcriptam $=$ Q maiorem tertia parte circuli C fieri non poſſe. Cum autem R et Q ab S quantitate, quae omni dabili minor fieri poteſt, hoc eſt infinite parua, differunt, S non poteſt non tertiae parti circuli C aequale eſſe.

De dimenſione ſolidorum curuis ſuperficiebus terminatorum.

§. 53.

Praecepta geometriae planae et ſtereometriae ita inter ſe cohaerent, vt, qui illius bene peritus eſt, ei haec non multum difficultatis creare poſſit. Geometra ſi de ſolidis loquitur, ſemper geometrica intelligit, hoc eſt ſolida, quorum partes omnino homogeneae et continuae ſunt, et, quicquid cuiuis ſolido proprium ſit, explorans, ſpatii tantum rationem habet, quod occupant, et ſuperficierum, quae, ſectis varia et multiplici ratione corporibus, oriuntur, quorſum ſpectant ſectiones conicae. Dimenſio ſolidorum, quae ſuperficiebus planis et rectilineis, quaſi finibus, includuntur, hoc loco prorſus praetermittenda eſt. Tantummodo de iis ſolidis dicendum eſt, quorum termini ſunt aut ſuperficies curuae, aut ſimul curuae et rectilineae.

§. 54.

Sed antequam ex variationum lege horum partes indefinitas colligam, paucae adhuc notiones communes, quae ad ſolida attinent, praemittendae ſunt. Geometras enim, nemo neſcit, geneſin ſolidorum eam cogitare, quae vel motu parallelo, vel rotatione plani abſoluitur. Et primo quidem originem ſolidorum ſuperficiebus aut planis tantum, aut planis ſimul et curuis terminatorum ita definire ſolent: Superficies quaedam, ſeu baſis, ſibi adſidue parallela ſurſum ducatur, ita quidem vt 1) numquam nec formam ſuam mutat nec magnitudinem, quo facto exempli gratia cylindrus, ſi circulus, et priſma, ſi polygonum baſis eſt, originem trahunt; 2) vt baſis manente ſimilitudine figurae perpetuo in eadem ratione minuatur, vnde conus et pyramis oriuntur. Enimuero cum cylindri atque coni baſes planae, latera curuae ſuperficies ſint, alio etiam modo eorum geneſis cogitari poteſt, eo nimirum, qui ad alterum genus originis corporum geometricorum pertinet. Cylindrum [FIG. 23.] enim rotatione parallelogrammi ABCD, circa latus CD, ſicut axem, formari ſtatuunt, quo etiam vocabulum graecum cylindrus ortum eſt. Geneſin autem coni explicantes pro parallelogrammo triangulum ponunt. Cum varia autem ſint et parallelogramma et triangula, varios quoque et cylindros et conos eſſe, neceſſe eſt. Sphaeram rotatione ſemicirculi circa diametrum originem trahere cenſent. Simili modo etiam originem ſolidorum, quae conoides et ſphaeroides nominantur, definiunt.

§. 55.

Ex his et antea dictis ſequitur dimenſionem cuiusuis cylindri nullam difficultatem adferre. Nam ſi eius baſis $= \frac{1}{2}\pi r$ (§. 22.), altitudo $= a$, eſt ſoliditas $= \frac{1}{2} a \pi r$, atque ſuperficies, baſibus non computatis, $= a\pi$, et baſibus computatis $= (a + r)\pi$. Coni ſoliditatem inuenire difficilius eſt. De quo genere mihi libitum eſt paulo plura dicere, ita quidem vt conum et cylindrum inter ſe comparem. Superficies genetrix cylindri ſi $= 2$ eſt, coni erit $= 1$. At hoc non indicat ſoliditatem coni aequalem eſſe dimidiae ſoliditati cylindri, qui eandem quam conus habet et baſin et altitudinem, perinde ac quadratum numeri 2 non eſt duplum quadratum numeri 1.

§. 56.

Euclides duodecimo elementorum libro, propoſitione X rationem, quam conus ad cylindrum habet, definit et demonſtrat:

"Πᾶς κῶνος, ait enim, κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον."

Demonſtratio hac potiſſimum enuntiatione nititur: *quae de priſmate et pyramide demonſtrata ſunt, etiam cuiuis cylindro et cono conveniunt.* Sed haec enuntiatio ex iis, quae antea (§. 22.) de dimenſione circuli diximus, colligitur.

Stereometria autem demonſtrat ſummam priſmatis aequalem eſſe facto ſeu producto ex eius altitudine in baſin; pyramidem vero ſemper diuidi poſſe in alias pyramides, quarum baſes triangula ſunt, atque talem pyramidem eſſe $= \frac{1}{3}$ priſmatis eiusdem altitudinis et baſis. Attamen etiam omni omiſſa diuiſione rigore geometrico demonſtrari poteſt: Quaeuis pyramis eſt tertia pars producti ex altitudine in baſin g).

§. 57.

g) V. V. Ill. *Kaeſtneri Geometriſche Abhandlungen.* 2 *Saml.* 7. 8. p. 60 ſqq.

§. 57.

Propositiones V, VI et XI eiusdem libri ea de causa notatu dignae sunt, quia ad illa pertinent, quae antea (§. 20) de ratione prima atque vltima commemorauimus, et quae hic in mentem reuocanda sunt, sed simul etiam monendum est, illic de superficiebus, hic de solidis sermonem esse *h*).

§. 58.

Archimedes varias rationes, quae sunt inter conum, cylindrum et sphaeram in duobus libris exposuit. Tantummodo e primo libro nonnullas enuntiationes nostro proposito accommodatas recensebimus.

Enuntiatio XVI libri primi de sphaera et cylindro superficiem cylindri recti definit. Affirmat enim, si $S =$ superficiei excepta basi, $r =$ radio basis et $l =$ lateri cylindri, S circulo aequalem esse, cuius radius $= \varrho$ est media proportionalis inter diametrum basis et latus cylindri, vel esse $2r : \varrho = \varrho : l$. Duplici modo *Archimedes* hoc probat. Primo ponit S maiorem, deinde S minorem esse circulo ita comparato, vt dictum est. Si $S >$ circulo, cuius radius $= \varrho$, huic circulo polygonum et inscribitur et circumscribitur, ita vero, vt sit circumscriptum ad inscriptum minus, quam S ad circulum. Tum basi cylindri polygonum $= P$ priori simile, et cuius peripheria $= p$ est, circumscribitur. Est $2r : \varrho = 2\varrho : 2l$ vel $r : \varrho = \varrho : 2l$ et $r^2 : \varrho^2 = \varrho r : 2l\varrho = r : 2l = \frac{1}{2}r : l = \frac{rp}{2} : lp$. Cum autem nemo ignoret esse $P = \frac{pr}{2}$, et P polygono circulo circumscripto $= \Pi$ simile, est etiam $P : \Pi = r^2 : \varrho^2 = r : 2l$ ergo $r : 2l = \frac{pr}{2} : \Pi$. Proinde $\Pi = lp$. Quia ratio lp ad polygonum circulo inscriptum minor est ratione S ad circulum, et porro lp : circulum $<$ lp : polygonum inscriptum, est eo magis adhuc lp : circulum $<$ S ad circulum, ex quo colligitur $S > lp$, id est, superficies prismatis cylindro circumscripti minor est, quam superficies cylindri, quod sibi repugnat, ergo enuntiatio e qua concluditur falsa est, id est, S non est maior circulo, cuius radius $= \varrho$. Eodem modo etiam ostenditur S circulo minorem esse non posse. Hoc autem idem est quod *Tacquetus i*) vocabulo *desinere* indicat. Fieri enim potest, vt cylindro prismata ita et inscribantur, et circumscribantur, vt differentia prismatis et cylindri omni dabili quantitate minor sit. Quod ex iis intelligi potest, quae de origine cylindri et de circuli quadratura commemorauimus.

 §. 59.

h) V. etiam *Andr. Tacquet* Selecta ex Archimede theoremata. Romae 1745. Prop. X. p. 282 sq.

i) l. c.

§. 59.

Propositio XXXI huius libri docet metiri superficiem curuam sphaerae, si peripheriam circuli rectificare possumus.

Gignitur sphaera si semicirculus circa diametrum, tanquam axem, vertitur. Periculum faciamus igitur, an aream totius superficiei hemisphaerii inuenire possimus? Initio iam intelligitur, eo magis plana parallela circulo maximo minui, quo magis a circulo maximo distant. Sit [FIG. 24.] AEDFB hemisphaerium; $DC = AC = CB$ eius radio. Diuidatur linea DC in duas partes aequales. Ex puncto G describatur circulus EF, circulo AB parallelus, et quaeratur ratio, quam alter ad alterum habet. Pone radium sphaerae $= r$. Nunc si ducitur EC est $EG = \sqrt{\frac{3}{4} r^2} = \frac{1}{2} r \sqrt{3}$, ergo circ. EF: circ. $AB = \frac{3}{4} r^2 : r^2 = \frac{3}{4} : 1 = 3 : 4$, vel generaliter si $GC = \frac{1}{n} r$ est $EG = \sqrt{\left(\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) r^2\right)}$, quare semper circ. EF: circ. $AB = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) : 1 = (n^2 - 1) : n^2$. Si $\frac{1}{n}$ infinite paruum fit, circulus EF ad circulum AB infinite propius accedit, et ambo circuli elementi solidi sphaerae termini sunt.

Eodem modo si ABM [FIG. 25.] est pars sphaerae est etiam pmMP elementum sphaerae superficiei, quoties pm *το* PM infinite propinquum est. Nunc nihil superest, nisi vt summam elementorum quaeramus, eo quidem consilio vt aream totius superficiei inueniamus. Pars sphaerae pmMP, quasi sit conus truncatus, consideranda est, ergo etiam superficies eius, quasi sit superficies coni truncati *k*). Haec autem est $= 2\pi y dx$, si $PM = y$, dx elementum lineae curuae, et π numerus, qui pro peripheria circuli ponitur dicta diametro $= 1$. Si $y = r$ est formula $2\pi y dx = 2\pi r dx$ ergo $\int 2\pi r dx = 2\pi r x$. Cum autem elementa infinite parua pm et PM sibi tam propinqua sint, et altitudo siue distantia alterius ab altero $= Pp = dx$ sit, etiam summa omnium $Pp = dx$ multiplicata in $2\pi r$, summa seu area totius superficiei erit, hoc est $2\pi r x = 2\pi r . AP$, vel $x = AP$ et $x = r$ si de hemisphaerio sermo est, quare totius sphaerae superficiei $= 4\pi r^2 =$ quadruplae superficiei circuli maximi.

§. 60.

Sed celebris illa enuntiatio, quam *Archimedes* dignam esse putauit, quae tumulum suum ornaret, et memoriam nominis apud posteros conseruaret, non praetermittenda est, praesertim cum eius argumentum ad ea pertineat, in quae hoc loco inquirendum est.

"Προ-

k) V. V. Ill. *Kaestneri Mathem. Anfangsgr. 1 Th. 1 Abth. Geom. 63 S. 4 Zus.* et *64 S.* p. 404 sqq. — Ei. *Anfangsgr. der Anal. des Unendl.* §. *606.* p. 559 sq.

"Προδεδειγμένων δὲ τούτων, φανερὸν ὅτι πᾶς κύλινδρος βάσιν μὲν ἔχων τὸν μέγιστον κύκλον τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ, ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας, ἡμιόλιος ἐστὶ τῆς σφαίρας."

Huic autem enuntiationi alia praemittitur, quae docet ſphaeram eſſe aequalem quatuor conis, quorum baſis circulo maximo, et altitudo radio aequalis eſt. Haec vero iterum ex ea colligitur, quae oſtendit ſuperficiem ſphaerae quadruplam eſſe ſuperficiei circuli maximi. Si ſphaera in quatuor partes inter ſe congruentes diuiditur, partes hae figuram ADEBC [FIG. 26.] habent, et tribus ſuperficiebus, duobus ſemicirculis et quarta parte ſuperficiei ſphaerae incluſae ſunt. Si iſtiusmodi pars ſphaerae in duas partes aequales diuiditur ſuperficie DEC, duae pyramides, quibus baſis curuilinea, ac quarum ſoliditas aequalis eſt octauae parti ſphaerae, oriuntur. Iam ſi laterum AEC et BEC, quae inter ſe congruunt, alterum alteri ſuperimponitur, pyramis dupla alterutrius prioris oritur. Cum autem ſoliditas coni cuiusuis pro ſumma omnium elementorum ſolidorum, quorum alterum alteri ſuperimpoſitum eſt, recte habeatur, illam tali modo metiri poſſumus. Pars quantacunque coni [FIG. 28.], contenta circulis diametrorum pm, PM, maior eſt cylindro altitudinis no, cuius baſis ſit circulus ſuperior, minor cylindro eiusdem altitudinis cuius baſis ſit circulus inferior, itaque cadit inter $no \cdot oP^2 \cdot \pi$ et $no \cdot np^2 \cdot \pi$. Enimuero ſi pm et PM in infinitum propius ad ſe accedunt, differentiale coni aequale eſt cylindro, cuius altitudo no et baſis circulus PM, ergo $= \pi y^2 dx$, ſi $no = dx$, $\pi =$ numero, qui peripheriam circuli indicat, et $y = Po$ *l*). Ex hoc autem ſequitur ſoliditatem coni ſummae omnium horum elementorum aequalem eſſe. Solidum vero 2 ADEC iure ex elementis compoſitum habetur *m*), quorum ſumma, id eſt altitudo ſolidi, aequalis eſt cono eiusdem altitudinis, et quia baſis ſolidi 2 ADEC circulo maximo ſphaerae aequalis, eſt ſumma eius ſoliditati coni aequalis, qui habet baſin ſphaerae circulo maximo aequalem, et eandem altitudinem. At conus $= \frac{1}{4}$ ſphaerae $= \frac{1}{6}$ cylindri et 6 ſphaerae $= 4$ cylindri, vel ſphaera $= \frac{2}{3}$ cylindri.

§. 61.

Liceat autem propoſitione XXIII libri *Archimedis*, qui inſcribitur, de conoidibus et ſphaeroidibus, finem huic commentationi imponere. *Montucla* in hanc propoſitionem animum aduertere iubet, dum de methodo loquitur, qua veteres in iis rebus vſi ſunt, in quibus recentiores analyſi infinitorum vtuntur.

"Του-

l) V. V. Ill. *Kaeſtnerum* l. c. 65. p. 410 ſq. et l. c. §. 609 p. 562.

m) Haec autem elementa habent ſuperficies curuas, perinde vt quantitas cuius ſunt elementa.

"Τούτων, ait, προγεγραμμένον ἀποδεικνύομες τὰ προβεβλημένα τῶν σχημάτων. πᾶν τμᾶμα ὀρθογωνίου κωνοειδέος ἀποτετμημένου ἐπιπέδω ὀρθῶ ποτὶ τὸν ἄξονα, ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὰν αὐτὰν τῷ τμάματι, καὶ ἄξονα."

Huic propoſitioni duae aliae praemittuntur, quibus oſtenditur, cuiuis ſolido figuras ſolidas inſcribi et circumſcribi poſſe, quae a ſolido quantitate omni dabili minori differunt. Elementa ſolidi, quorum ſumma dimenſio ſolidi nititur, in ſolidis rotundis ſemper pro cylindris habentur, et formula differentialis ad dimetiendum ſolida eius generis eſt $= \pi y^2 dx$, cuius integrale pro ſolido rotundo parabolico $= \frac{1}{2} \pi b x^2$. Quoniam $bx = y^2$, eſt $dx = \frac{2ydy}{b}$, ergo $\pi y^2 dx = \frac{2\pi y^3 dy}{b}$, et $\int \frac{2\pi y^3 dy}{b} = \frac{\pi y^4}{2b} = \frac{1}{2} \pi b x^2$.

§. 62.

Ita etiam ſummam elementorum ſphaerae reperire poſſumus, ſi ponamus, $y^2 = (b - x)\, x$ dicta b diametro circuli, quare $\pi\, (b - x)\, x dx = \pi y^2 dx$ et $\int (\pi b x dx - \pi x^2 dx) = \int \pi b x dx - \int \pi x^2 dx = \frac{1}{2} \pi b x^2 - \frac{1}{3} \pi x^3 = \frac{1}{6} \pi x^2 . (3b - 2x)$. Iam vero ponendo $x = a = b$ colligitur, ſphaeram eſſe $= \frac{1}{6} \pi a^3$. Quia autem a diameter ſphaerae eſt, talis cylindrus, qualis in figura 27, $= \frac{1}{4} \pi a^3$ eſt, atque etiam ex hoc perſpicuum eſt, ſphaeram et cylindrum eſſe in ratione $2 : 3$.

§. 63.

Coni ſoliditas eſt $= \frac{1}{3} x \pi y^2$. Eſt enim ſoliditas coni truncati $= \frac{1}{3} x \pi (R^2 + Rr + r^2)$. Hic R et r radios indicant circulorum, qui termini ſunt coni truncati. At hoc loco $r = 0$ et $R = y$. Cum autem $y^2 = bx$, $\frac{1}{3} \pi x y^2 = \frac{1}{3} \pi b x^2 =$ ſoliditati coni. Summam conoidis parabolici $= \frac{1}{2} \pi b x^2$, quare hoc ad illud vt $= \frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 3 : 2$. Itaque etiam hic optimus conſenſus analyſeos infinitorum cum praeceptis veterum.

ARGVMENTVM.

TAB. I.

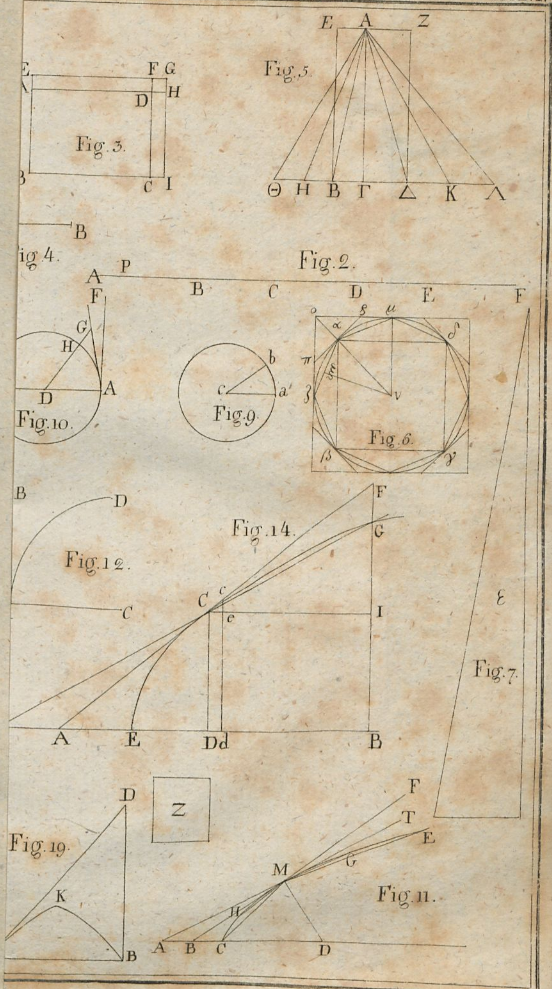


Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 14.
Fig. 19.
Z

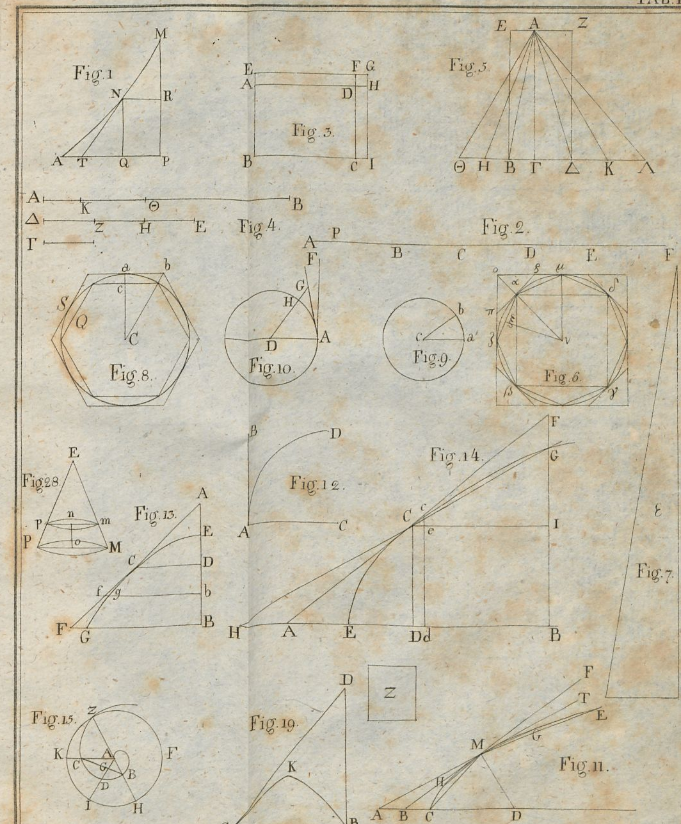
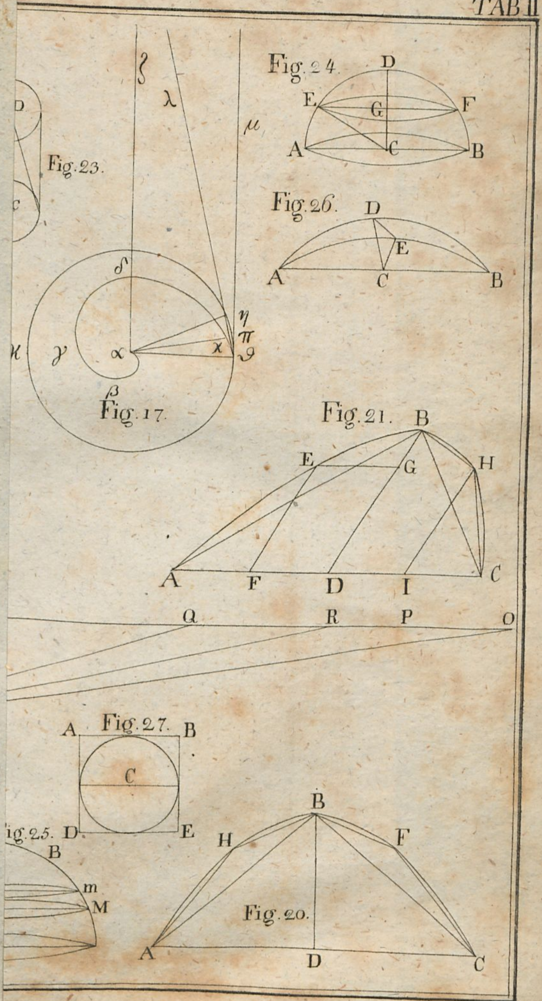


Fig. 1.
Fig. 3.
Fig. 5.
Fig. 4.
Fig. 2.
Fig. 8.
Fig. 10.
Fig. 9.
Fig. 6.
Fig. 28.
Fig. 13.
Fig. 12.
Fig. 14.
Fig. 7.
Fig. 15.
Fig. 19.
Fig. 11.
M. del.

TAB II



TAB II

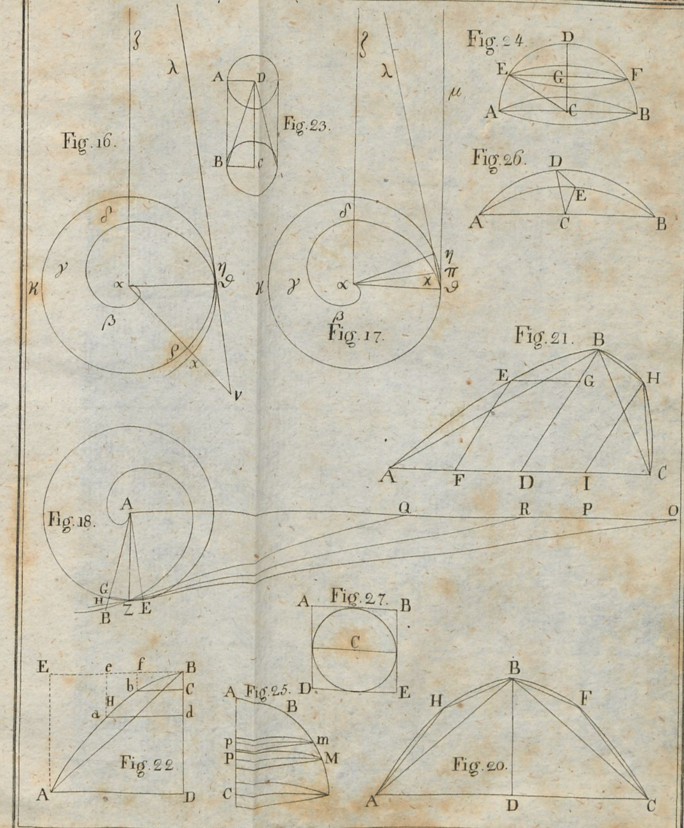


Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.

JOANNIS WILHELMI CHRISTIANI

KILONIENSIS

10

COMMENTATIO

QVA EXPLICANTVR

FVNDAMENTA CALCVLI

QVEM AB INFINITO NOMINAMVS

ET OSTENDITVR QVOMODO IIS QVAE TRADIDERVNT

EVCLIDES, ARCHIMEDES

APOLLONIVS PERGAEVS

INNITATVR CALCVLVS INFINITI.

IN CONCERTATIONE

CIVIVM

ACADEMIAE GEORGIAE AVGVSTAE

DIE IV. JVNII CIↃIↃCCLXXXXII.

PRAEMIO A REGE M. BRITANNIAE AVG.

CONSTITVTO

A PHILOSOPHORVM ORDINE

ORNATA.

10

Exemplaria graeca

Nocturna versate manu, versate diurna.

GOTTINGAE

TYPIS JOANN. CHRISTIAN. DIETERICH.

92