DE RESOLVTIONE AEQVATIONVM DIFFERENTIALIVM PER SERIES

AD

NEWT. METH. FLVX. PROB. II.

MEDITATA

PERMISSV

INCLYTAE

FACVLTATIS PHILOSOPHICAE LIPSIENSIS

SECVNDVM PRO LOCO

DISPVTABIT

ABR. GOTTHELF KAESTNER

LIPS. M. A. IVR. CAND.

A. D. XXII. SEPT. A. R. S. CIƆ IƆ CC XXXXV.

LIPSIAE

IMPRESSIT IOH. GOTTLOB IMMAN. BREITKOPF.

Paucula iam ſeries monſtrat primordia naſcens

Lege ſua partes haec ſine fine regunt:

Sic a vita hominis quam bis ſex luſtra coercent

Aeua tenent formam non numeranda ſuam.

ILLVSTRISSIMO
ATQVE EXCELLENTISSIMO
DOMINO
CHRISTIANO GOTTLIEB
SAC. ROM. IMP. COMITI
AB HOLZENDORF
BAERENSTEINII REL. DYNASTAE
POTENTISS. POLON. REGIS ELECT. SAXON.
ET IMP. ROM. HOC TEMPORE VICARII
CONSILIARIO INTIMO
SVPREMI CONSISTORII ET SENATVS
ECCLESIASTICI PRAESIDI
REGII CVBICVLI COMITI
AERARII PROVINCIALIS
QVAESTORI

COMES ILLVSTRISSIME
EXCELLENTISSIMEQVE

Cum de nouo ſplendore, qui TIBI ILLVSTRISSIMAEQVE TVAE GENTI acceſſit, laetantur boni omnes, praeprimis vero, qui TE tutelare ſuum numen ſuſpiciunt litterarum cultores; quod TE adire, ſcriptumque hoc TIBI conſecrare audeam, officio me magis adigi mihi videor, quam excuſatione indigere. Quotusquisque enim eſt eorum qui Saxoniae noſtrae bene cupiunt, qui, vt hoc decus felix fauſtumque TIBI ſit, vt de ſalu-

ſalute TVA incolumitateque, diu gaudere liceat patriae, non ex animo voueat? Quibus vt accedam, et publice etiam pietatem meam teſter, animum addit ſingularis TVA benignitas, quam omnes, quotquot eadem non penitus indigni exſiſtunt venerantur. Inter quos, cum hucuſque locus aliquis mihi conceſſus ſit, ſpero et inpoſterum ea me vſurum felicitate, vt fauore TVO patrocinioque frui poſſit

COMES ILLVSTRISSIME
EXCELLENTISSIMEQVE
TIBI

Dab. Lipſiae d. 22. Sept.
1745.

deuotiſſimus cliens
ABRAH. GOTTHELF KAESTNER.

PARALLELOGRAMMI NEWTONIANI *theoriam, quatenus eius ope algebraicae aequationes resoluuntur, explicare conatus sum in dissertatione de* resolutione Newtoniana aequationum speciosarum per series *hic loci anno* CIↃ IↃ CC XXXXIII. *defensa. Iam eiusdem inuentoris methodos resoluendi aequationes fluxionales adgredior quae partim ex parallelogrammo partim ex aliis principiis deduci queunt. Sequutus sum* Methodum fluxionum *cuius anglica versione a* COLSONO *cum commentario publicata vtor.* NEWTONI *scriptum ipsum, gallica versione, et nuperrime opera cel.* CASTILIONEI *in Opusculis Newtonianis, pluribus traditum est. Qui id cum labore meo conferre voluerit, facile animaduertet, me non descripsisse Newtoniana sed de illis clarius explicandis, rationibusque ac inuentionis fontibus relegendis, sollicitum fuisse; quod tantum abest vt inuentor ipse fecerit, vt potius eo saepe habitu regulas suas induerit, qui haec omnia adhibita quasi industria celet.* COLSONO *aliqua hic me debere, non tamen omnia, fateor. De seriebus, non nego me non ita magnifice sentire, vt prae iis egregia quibus alii calculum integralem illustrarunt inuenta contemnam. Quod ne quidem ab omnibus magni* NEWTONI *ciuibus fieri, persuadet mihi nouissimum exemplum cel.* MVR-

DOCH nouarum tabularum loxodromicarum *auctoris. Is cum in Anglica operis sui editione elementum aliquod per seriem integrasset, a summo Mathematico* COLIN MACLAVRIN *monitus, concinniorem summam formula finita exhibendam, gallicae versioni inseri curauit* *). *Neque me latet, indicante editore operum* IACOBI BERNOVLLII **) *vniuersaliorem methodum quam ea parallelogrammi est, a* NIC. BERNOVLLIO *esse inuentam, et spe huius methodi cognoscendae, opusculi editionem aliquantum distuli, sed quando summi etiam in Germania in Analysi viri, ea de caussa consulti, nihil de hac methodo sibi innotuisse responderunt, credo a lectoribus meae ignorantiae veniam me impetraturum. Plures vno casus quibus resoluendis non sufficiunt methodi Newtonianae in scripto ipso indicaui, potissimaque quae de iis dici possunt complexum me esse spero. Omnia exhaurire, si ingenii tenuitas permisisset, temporis mei ratio vetabat, cuius eam etiam partem quam mathesi consecrare licet, non satis vtiliter his solis speculationibus me impensurum iudicaui. Dixi quaedam apud alios mihi non lecta, sed non omnes qui serierum negocium persecuti sunt, euoluere licuit. Igitur an noui quid dixerim, aut an noui quid dicendo operae precium fecerim, mathematicorum iudicium esto. Hi si tanta beneuolentia scriptum hoc excipiant quanta priorem dissertationem eorum aliqui dignati sunt, ego, qui illis aliud quidquam, praeter insignem in haec studia adfectum, viresque ad ea promouenda multum superantem, probare non volui, summa votorum beatum me iudicabo.*

---

*) Nouvelles tables loxodromiques &c. par Mr. MVRDOCH. Trad. par Mr. BREMOND Paris 1742. 8. p. 104.

**) v. Opera IAC. BERN. n. CI. not. a.

PROP. I.

DATA aequatione fluxionali inter x & y reperire dy per feriem fluentis x.

SOL. POSITO $y = Ax^{m}$ et $dy = mAx^{m-1}dx$ atque $dx = 1$ reliquaperaguntur vt Prop. VII. Difput. I.

EX. DETVR $abdy + axdy - by - yx - aa = 0$ vbi in terminos quibus non ineft dy, ductum intelligitur $dx = 1$. Factis quae folutio iubet, et fubintellecto $dx = 1$ prodit

$mabAx^{m-1} + maAx^{m} - bAx^{m} - Ax^{m+1} - aa$, difpofitis vero exponentibus in laterculos oritur fchema

$*\ m+1$ Hic pro ferie adfcendente pono $m-1=0$ et $m=1$ atque va-
$0\ \ m$ lores laterculorum fubftituto $m=1$ fiunt $0, 1, 2$. ergo diffe-
$*\ m-1$ rentia indicum feu $\delta = 1$. Ergo $y = Ax + Bx^{2} + Cx^{3} \ldots + Mx^{n-1} + Nx^{n} + Ox^{n+1}$ cet. Quare

$$\left.\begin{array}{llllll}
abdy = & abA + & 2aBx + & 3abCx^{2} \ldots & +(n+1)\,abOx^{n} & \\
+axdy = & +aA & +2aB & - - - & +naN & \\
-by = & -bA & -bB & - - - & -bN & \text{cet.} \\
-xy = & & -A & - - - & -M & \\
-aa = & -aa & & & &
\end{array}\right\} ☾$$

Hic $A = a : b$, $B = (b-a)A : 2ab$ $C = (A + (b-2a)B) : 3ab$ et in genere $O = (M + (b-na)N) : (n+1)ab$

II. Pro ferie defcendente fac $m+1=0$ feu $m=-1$, prodeuntibus valoribus laterculorum $0, -1, -2$, adeoque $\delta = -1$ et hinc $y = Ax^{-1} + Bx^{-2} \ldots + Lx^{-n+2} + Mx^{-n+1} + Nx^{-n}$ Ergo

$$-aa = -aa$$

$$\left.\begin{array}{llr} -xy = -A - Bx^{-1} - Cx^{-2} \ldots - Nx^{-n+1} & & \\ -by = \quad -bA - bB \ldots - bM & \text{cet.} & \\ +axdy = \quad -abA - 2aB \ldots + (1-n)\, aM & & \\ +abdy = \quad\quad -abA \ldots + (2-n)\, abL & & \end{array}\right\} ☾$$

Vbi $A = -aa$, $B = -(b+ab)A$, $C = -(b+2a)\ B - abA$, $N = (2-n)\ abL + (1-n)\ aM - bM$. Quodſi y vnius ſaltim dimenſionis adſit, neque ductum in dy, facile plerumque vt ex exemplo patet lex progreſſus determinatur, ſed in aliis caſibus difficilius cum non poſſint eadem facilitate exhiberi generales termini ſerierum quae ex partibus aequationis vt hic ex xy, $abdy$, *cet.* oriuntur, licet hoc in genere poſſibile eſſe pateat ex formulis infinitinomium ad indefinitam poteſtatem eleuandi MOIVRAEANA et IAC. BERNOVLLII Op. T. II. n. CIII. art. I.

COR. I. SI hoc pacto ſubſtituendo ſeriem $y = Ax^m + Bx^{m+\delta} + Cx^{m+2\delta} \ldots + Rx^{m+r\delta}$ cet. quam vt in diſp. praec. feci vocabo ſeriem ⊙, transmutetur aequatio fluxionalis in ſeriem aliam quam voco ☾, ex parte quauis aequationis differentialis puta $x^{\kappa} y^{\varepsilon} dy$ fiet ſeries mihi ſignanda ♂, et in illa obueniet R primo loco ad exponentem $m(\varepsilon+1) + r\delta - 1 + \kappa$. Nam in ſerie $y^{\varepsilon} x^{\kappa}$ obuenit R primo loco ad expon. $m\varepsilon + r\delta + \kappa$ (Cor. 3. Pr. VI. diſp. I.) et in ſerie dy ad expon. $m + r\delta - 1$. Terminus ergo ſeriei $y^{\varepsilon} x^{\kappa}$ in quo R primo loco obuenit, ductus in primum ſeriei dy terminum nanciſcitur exponentem $m\varepsilon + r\delta + \kappa + m - 1$. Similiter terminus ſeriei dy in quo R primo loco obuenit, ductus in primum ſeriei $y^{\varepsilon} x^{\kappa}$ nanciſcitur exponentem $m + r\delta - 1 + m\varepsilon + \kappa$ qui duo exponentes iidem ſunt cum ante dicto, neque poteſt R prius in producto ♂ obuenire. E. g. Si ſeries ♂ ſit ea quae in exemplo praec. oritur ex parte $axdy$ in ſolutione I, erit $\varepsilon = 0$, $\kappa = 1$. Sit $R = B$ erit $r = 1$ et obuenit B primo loco ad exponentem $m.(0+1) + \delta - 1 + 1$ ſeu 2 ob $m = \delta = 1$.

COR. 2. SI ſit $m = 0$ obuenit R primo ad exp. $r\delta - 1 + \kappa$. Scilicet euaneſcente mAx^{m-1} ob $m = 0$ primus ſeriei dy terminus eſt $\delta Bx^{\delta-1}$ qui ductus in ſeriei $y^{\varepsilon} x^{\kappa}$ terminum eum qui primo contınet

net R nanciſcitur exponentem $r\delta+\kappa+\delta-1$ ſed primus ſeriei dy terminus habens R, gaudet exponente $r\delta-1$ ductusque in primum ſeriei $y^{\varepsilon}x^{\kappa}$ terminum dat exponentem $\delta r-1+\kappa$ ad quem ergo R primo loco obuenit.

COR. 3. IN ſerie $y^{\lambda}x^{\tau}dx$ quam vocabo ♃ obuenit R primo loco ad exponentem $m\lambda+r\delta+\tau$ ſeu $r\delta+\tau$ ſi $m=0$.

COR. 4. PONATVR alia ſeries vt ♂ *Cor.* 2. oriunda ex $x^{\nu}y^{\pi}dy$ quam appellabo ☿ atque incipiat ea ſeries non in ſeriei ☾ termino 1. ſed in ſequentibus, ſeries ♂ vero incipiat in primo. Si ſit δ quantitas poſitiua erit exponens initialis ſeriei ♂ numerus minor poſitiuus vel maior negatiuus exponente initiali ſeriei ☿. Hoc eſt erit $m.(\varepsilon+1)+\kappa-1 < m.(\pi+1)+\nu-1$. Er. addendo vtrinque $r\delta$ fit exponens ad quem obuenit R primo loco in ſerie ♂ minor ſimili exponente in ſerie ☿. Proinde quiuis coefficiens R iam definitus eſt antequam obueniat in ſerie ☿, et ſimiliter prius quam obuenit in ſerie ♃ ſi huius exponens initialis ſit maior initiali ſeriei ♂. Quodſi ſit δ numerus negatiuus idem patet, cogitando defectum exceſſus loco

COR. 5. SI δ ſit numerus negatiuus et $m+r\delta=0$ non erit R in ſerie dy. Sed in ſerie ♂ ob factum ex primo ſeriei dy in eum ſeriei $y^{\varepsilon}x^{\kappa}$ terminum qui primus continet R, erit R ad exponentem $m\varepsilon+m+r\delta-1+\kappa$ ſeu $m\varepsilon-1+\kappa$.

COR. 6. SI ad expon. $m.(\varepsilon+1)+r\delta-1+\kappa$ nullus adhuc eſt terminus ſerierum ♃ vel ☿ quae non ingrediuntur terminum 1. ſeriei ☾, et quas proinde ***non initiales*** vocare licet, erit $R=0$ (Cor. I. Pr. 6. Diſp. I.)

COR. 7. SI propter *Cor. 5.* diſpareat R in ſerie ***initiali*** orta ex termino aequationis dy continente, ad eum exponentem vbi primo loco comparere debebat, neque ſit aliqua ſeries ex parte aequationis dx continente oriunda, quae habeat R ad hunc exponentem, conſequens eſt, vt coefficiens ſeriei ☾ ad hunc expon. conſletur ex ſolis ſeriei ☉ coefficientibus antea definitis, quorum adgregatum niſi fortuito euaneſcat, non poterit coefficiens ille euaneſcere, adeoque non dabitur ſeries ☾.

EX. SIT $x^2dy-y-px^2-2x^3-rx=0$ et ex *Prop.* fit $mAx^{m+1}-Ax^m=px^2+2x^3-rx$ vnde oritur ſchema

$$\begin{array}{l} 3 \\ 2 \\ 1m+1 \\ \quad m \end{array}$$

Fiat $m+1=3$ ſeu $m=2$ et $y=Ax^2+Bx+C+Dx^{-1}$ cet.

$$\begin{array}{lllll} \text{ſit } x^2dy= & 2Ax^3 & +Bx^2 & * & -D \\ -y= & & -A & -Bx & -C \\ \text{cet.} & -2 & -p & -r & \end{array}$$

Hic $A=1$, $B=1+p$ et in tertio termino debet eſſe $1+p+r=0$, quod ſi fortuito contingat reſtat C vel D indefinitum et reliqua bene ſuccedunt. Haec ergo contingere poſſunt in ſeriebus quae habent δ negatiuum et $m+r\delta=0$.

COR. 8. SIT $R=A$ et adeo $r=0$ praetereaque $m=0$, ſeriei dy primus terminus realis erit non mAx^{m-1} ſed $\delta Bx^{\delta-1}$. Terminum primum ſeriei ☾ ingredientur ſeries oriundae *vel I.* ex partibus aequationis differentialis habentibus *ex* et aliis habentibus *dy*, *vel II.* ex partibus habentibus *dy* ſolis *vel III. dx* partibus *dx* continentibus ſolis. Caſu I. euidens eſt non definiri A ſed ex A pro lubitu ſumto definiri B, quippe quod ingreditur primum terminum ſeriei dy et adeo primum ſeriei ☾. Caſu II. definitur A, cum B contineatur in ſingulis partibus ex quibus terminus I. ſeriei ☾ componitur, adeoque coefficiens ad hoc ipſum B, hoc eſt ſumma quantitatum quae ſingulae in B ducuntur euaneſcere debeat, niſi ponere velimus $B=0$. ſit $ydy+dy+y^3x+x=0$ et $y=A+Bx+Cx^2$ cet. erit

$$\begin{array}{lll} ydy= & AB+ & BBx \\ & & +2AC \\ dy= & B & +2C \\ y^3x= & & AAA \\ x= & & 1 \end{array}$$

vbi vel $B=0$ vel $A=-1$

cet.

Caſu III. patet, A rurſus definiri, et ſi omnes partes aequationis differentialis, *dx* continentes, dent ſeries, primum ſeriei ☾ ingredientes, definietur A tale, quod pro y ſubſtitutum, euaneſcere faciat aequationem poſita $dy=0$ ſeu $y=A$. Qui valor, licetverus eſſe non poſſit cum y fluens deſideretur, tamen ex conditionibus methodi ſequitur.

COR. 9. R, vbi primo obuenit, habet dimenſionem vnicam, adeoque in duabus ſeriebus initialibus, obuenit ſimul et gaudens eadem vnica dimenſione. Quodſi er. eo in loco nondum adſint termini

mini ex feriebus non initialibus, vel fumma quantitatum quae in R ducuntur fortuito euanefcit, vel eft $R=o$. Sit $ayy+by+cx^2dy=o$ et fiat

$$\begin{array}{lll} by= & bA+bBx+bCx^2 & \\ ayy= & aAA+2aAB & +aBB \\ & & +2aAC \\ cxxdy= & & +cB \end{array}$$

Hic deberet effe $b+2aA$ hoc eft, $b+2a.-b:a=o$. Quod cum fieri non poffit eft $B=o$ et hinc C, *cet.* $=o$, et $y=A$ exacte. Scilicet eft hoc exemplum cafus indicati fub finem *Cor. praec.*

COR. 10. SERIEI ♂ fecundus terminus, coefficientem habet conflatum ex productis quae fingula continent B vnius dimenfionis, tertius ex productis quae fingula continent C vnius dimenfionis et praeterea ex aliis quae non continent C fed faltim A et B. Et in genere feriei ♂ terminus n tus conftat ex productis quae continent coefficientem n tum feriei $\odot$, dimenfione vnica, atque aliis quae ingrediuntur coefficientes praecedentes n tum feriei $\odot$.

EXEMPLVM 2. DETVR $(ay+bx^n+cx^{n-1}\ldots+hx^{n-l}\ldots+k)\,dx=dy$. Quaerendo feriem adfcendentem fit

$$\begin{array}{llllllll} ay= & aAx^n & +aBx^{n-1} & \ldots+aLx^{n-l} & \ldots+aQ & +aRx^{-1} & +aSx^{-2} \\ -dy= & & -nA & \ldots\ldots-(n-l+1)K & \ldots-P & * & -nR \\ \text{cet.}= & +b & +c & \text{------}+h & \text{------} & +k & \\ \hline \end{array}$$

Vnde $A=-b:a$, $B=(nA-c):a$ et in genere $L=((n-l+1)K-h):a$ intelligendo per K coeff. feriei $\odot$ proxime praecedentem, et hinc $Q=(P-k):a$ et $R=o$ hincque feries abrumpitur quae eft CEL. GOLDBACHII *Act. Petrop. T. I. p. 207.* Sed fumma haec eft incomplete vt monuit NIC. BERN. ib. *p. 200.* completam inueniendi methodum exhibens. Poteft vero et completa inueniri hoc modo: dicta $\odot$ ferie cui aequatur y, pone

$$\begin{array}{lll} ay= & a\odot dx & +audx \\ -dx= & -\mathit{flux}.\odot & -du \\ \text{cet}= & \text{cet.} & \end{array}$$

et cum per conftructionem, tres quantitates in columna prima fe deftruant, debet adhuc effe $audx=du$ vnde habetur $u=e^{ax+\alpha}$ fi fit α conftans arbitraria et $le=1$. Aequationis huius refoluendae fpecimen iam dedit IAC. BERN. *in Iulio act. Er. 1696. v. Opera* IAC. BERN. *T. II. n. LXXII. p. 733.* ibique notas CEL. CRAMERI.

 EXEM-

EXEMPLVM 3. DENTVR duae aequationes $dy=udx$ et $(x-u)\,dy=(y-u)\,dx$. Ex prima fit $y=c+\int udx$ ſumta $\int udx$ ſic vt euaneſcat ad $x=0$ vnde altera abit in $(x-u)$. $u=c+\int udx-u$. Ponatur $u=Ax^m$ et $\int udx=Ax^{m+1}:(m+1)$ et exponentes in laterculos diſpoſiti fient

$$\begin{array}{ccc} * & m+1 & * \\ 0 & m & 2m \end{array}$$

Fac $m=0=2m$, differentia indicum prodeunte $=+1$, fiet

$$\begin{array}{lccccc}
u= & A+Bx & +Cx^2 & +Dx^3 & +Ex^4 & \\
-\int udx= & -A & -\frac{1}{2}B & -\frac{1}{3}C & -\frac{1}{4}D & \\
-c=-c. & & & & & \\
-uu=-AA & -2AB & -BB & -2BC & -CC & \\
 & & & & 2BD & \\
 & & -2AC & -2AD & -2AE & \\
+ux= & +A & +B & +C & +D &
\end{array}$$

Igitur $A=\frac{1}{2}\pm\sqrt{}\,(\frac{1}{4}-c)$ et $B.\,(1-2A)=0$ Ergo vel $B=0$ vel $1=2A$. Si prius, patet fieri $C=0=D=E$ *cet.* et eſſe exacte $u=A$ vnde $y=c+Ax$ duplex ob duplicem ipſius A valorem: Sin $1=2A$ oportet vt ſit $\frac{1}{4}=c$. Hoc caſu ex coefficiente ſeriei ☾ ad x non definitur B. Sed in coefficiente qui ſequitur fit $C-2AC=0$ et adeo debet eſſe $\frac{1}{2}B-BB=0$ ſeu $B=\frac{1}{2}$. Rurſus in coeff. ad x^3 eſt $(1-2A)\,D=0$ et adeo $(-\frac{1}{3}-2B+1)\,C=0$. Iam huius producti factor alter eſt $-\frac{1}{3}$, ergo oportet vt ſit alter $C=0$. Quo poſito patet fore $D=E$ cet. $=0$ et $u=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x$ vnde ob $c=\frac{1}{4}$ fit $y=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}xx$; Duae hypotheſes $m+1=0$ et $m+1=2m$ fieri non poſſunt, quia deducerent ad terminum aliquem ipſius u habentem $1:x$ vnde $\int udx$ penderet a logarithmis qui in praeſenti negocio adhiberi non poſſunt. De his aequationibus v. CEL. CLAIRAVT in Commentar. Ac. Sc. Pariſ. Ann. 1734, in Schediaſmate inſcripto: *Solution de pluſieurs problemes ou il s'agit de trouver des conrbes, cet.* Probl. III. Schol. p. 289. ed. Bat. Contendit ibi integratione ex illis elici alterutram ſaltim linear. ſatisfacientium ſcil. rectam. Sed et qui aequationes has non rite tractauerit alio et oppoſito errore parabolam ſolam obtinebit. Nam ſi eliminato $dy:dx$ fiat $ux-uu=y-u$ differentiatio dabit $udx+xdu-2udu=udx-du$ ſcribendo udx pro dy. Quare $x+1=2u$ Vnde $dy==(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x)\,dx$ et $y=f+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}xx$. Vt ergo ſit $u=(y-u):(x-u)$

debe-

debebit esse $f=\frac{1}{4}$, prodibitque non recta, sed parabola. Cum autem viderem posita $dy=u\,dx$ sequi $y=c+\int u\,dx$ sed in aequ. $ux-uu=y-u$ abire c ex calculo neque adeo ingredi ipsius u et y determinat. hac methodo deductam, incidi in solutionem quam modo indicaui. Neque enim acutissimo mathematico, quantacunque sit, quam egregiis ingenii speciminibus sibi acquisiuit auctoritas, credere possum, non omnes curuas problemati alicui satisfacientes integrando reperiri. Eius contrarium hoc in exemplo ostendi, actumque esset de calculi integralis praestantia si hanc ei labem inuri pateremur.

EX. 4. SIT $ydy+x-r=0$. Factis quae prop. iubet habetur $y=Ax^{1:2}+Bx^{3:2}$ *cet.* prodeunte serie eadem quae exprimit ordinatam circuli pro quo est $yy=2rx-xx$. Hic vero circulus licet satisfaciat aequationi differentiali, tamen huius summa correcta est $yy-2rx+xx=q$ notante q constantem arbitrariam quae in nostro casu $=0$. Vt exhibeatur y etiam huic integrali respondens, fiat in aequ. diff. $y=a+bx^n$ vt ea abeat in $nabx^{n-1}+nbbx^{2n-1}+x-r$ vnde fit

$$\begin{array}{ccc} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ * & n-1 & 2n-1 \end{array}$$

Hic ponendo $n-1=0$ obtinetur $y=a+bx+$ $+cxx$ cet. et

$$\begin{array}{l} ydy=ab+bbx+3bcx^2 \\ \qquad\qquad\quad +2ac+3ac \\ \text{cet.}=-r+1 \end{array}$$

Vnde a indefinitum (cor. 8. cas. 1.) $b=r:a$, $c=-(1+bb):2a$, $e=-bc:a$ series eadem quae habetur ex $yy=2rx-xx+q$ definito saltim $a=\sqrt{q}$. Non vero in hac serie licet ponere $a=0$ cum alias coefficientes sequentes fierent infiniti, vnde hic casus separato calculo est inuestigandus.

EX. 5. DETVR $az+(\beta+\gamma x)dz-(\varepsilon+\Theta x)=0$. Quaerendo z immediate per x habetur series, abrumpens si $-\alpha:\gamma$ sit integer positiuus. Ponendo autem $\beta+\gamma x=u$ et faciendo substitutiones debitas habetur $azdu:\gamma+udz-\varepsilon du:\gamma-\Theta udu:\gamma\gamma+\Theta\beta du:\gamma\gamma=0$. Vbi quaerendo z per u reperitur

$$\begin{array}{lllll} \frac{\alpha}{\gamma}zdu = & \frac{\alpha}{\gamma}A & +\frac{\alpha}{\gamma}Bu & \ldots\ldots & +\frac{\alpha}{\gamma}Nu^n \\ udz = & & +B & & +nN \\ \text{cet.}\ \frac{\Theta\beta-\varepsilon\gamma}{\gamma\gamma} & -\Theta:\gamma\gamma & & & \end{array}$$

Vnde $A=(\varepsilon\gamma - \Theta\beta) : \alpha\gamma$, $B=\Theta : \overline{\alpha+\gamma} . \gamma$, $N=0$ vel N indefin. et $n=-\alpha : \gamma$ Si restituatur ipsius u valor et definiatur N sic vt x et z euanescant simul, peractis debitis reductionibus obtinetur formula IO. BERN. *Hydraul. P. I. art. XIIII. Op. T. IIII. n. CLXXXVI.* Videtur quidem addi adhuc posse variabilis vt in *ex.* 2. sed haec iam continetur sub termino $Nu^{-\alpha:\gamma}$.

EX. 6. SIT $yy + \frac{1}{2}x^3 y\,dy + \frac{1}{2}xy\,dy - \frac{1}{2}x^3\,dy - \frac{1}{2}x\,dy - xxy = 0$ prodibunt exponentes

$$\begin{array}{cc} m+2 & 2m+2 \\ * & * \\ m & 2m \end{array}$$

Vnde series indicum vel est $0, +2, +4$ vel $0, -2, -4$, sed priori casu A, B, C, cet. singuli euanescunt. Si vero singatur series indicum $-2, 0, +2$, cet. prodit A indefinitum, $B=A-1$ et sic porro. Vt perspiciamus hunc etiam casum in parallelogrammo contineri, cogitandum est, ex regula aequari laterculos extremos ea de caussa quia dant seriei ☾ exponentem initialem. Iam si in nostro casu $m=2m+2$ vnde $m=-2$, omittitur extremus $2m$ seu -4. Sed coefficiens seriei ☾ ad hunc exponentem, euanescit iam ex conditionibus coefficientium aequationis, constat enim ex initialibus serierum yy et $\frac{1}{2}xy\,dy$ qui in hypothesi $m=-2$ sunt AA et $-AA$. Igitur cum hic coefficiens seriei ☾ fortuito destruatur, poterit sequens ad exponentem $2m+2$ seu -2 pro initiali haberi et adeo dabitur series perinde ac si plane defuisset laterculus $2m$. Sed si non adfuisset, $\frac{1}{2}xy\,dy$ sed v. g. $\frac{1}{3}xy\,dy$ res non successisset. Non potest poni $A=0$ ne C, D, cet. fiant infiniti.

PROP. II.

Si tres exponentes $\lambda m+l$, $\varphi m+f$, $\tau m+t$, in laterculos parallelogrammi dispositi incidant in eamdem rectam, ex datis duobus reperire tertium.

SOL. SIT $\varphi=\lambda+\eta$ et $f=l-e$ et ponendo in *Prop. II. disp. I.* $\lambda m+l=A$, $\varphi m+f=C$ erit ex *Cor. 1. cit. Prop.* series exponentium in eamdem rectam cadentium quae sequitur: $\lambda m+l$, $(\lambda+\eta).m+l-e$, $(\lambda+2\eta)\,m+l-2e$ et sic porro. Vnde restitutis ipsorum η, e. valoribus est exponens quiuis $(\lambda+n.(\varphi-\lambda)).m+l-n.(l-f)$ Q. E I.

EX.

EX. SIT $-m+1=3$ eſt $\lambda=-1$ $l=5$, $\varphi=0$, $f=3$ Vnde quiuis in rectam per hos duos tranſeuntem incidens fit $(-1+n).\ m+5-2n$. Scribendo ſucceſſiue $0, 1, 2, 3$, *cet.* pro n fit ſeries illorum $-m+5, 3, m+1, 2m-1, 3m-3, 4m-5$ cet.

COR. I. CADANT omnes in eamdem horizontalem vt ſit $m=0$ erit $l=f$ (Sch. 2. Prop. II. Diſp. I.) Ergo formula illorum eſt $(\lambda+(\varphi-\lambda)\,n)\ m+l$.

COR. 2. INCIDANT in eamdem verticalem fiet $m=\infty$ et formula illorum $m\lambda+l-n.\ (l-f)$ ob $\lambda=\varphi$

COR. 3. IN partibus aequationis alicuius differentialis quas ingreditur dy, quas breuitatis cauſſa vocabo *partes dy* habeant y et x exponentes α, β, γ, cet. et a, b, c, *cet.* reſpectiue vt ſit $y^{\alpha} x^{a} dy$ et ſic porro: ſubſtituendo $y=Ax^{m}$ abibunt illi in $m.\ (\alpha+1)+a-1$, $m.\ (\beta+1)+b-1$, $m.\ (\gamma+1)+c-1$; Quare vt omnes in eamdem rectam incidant, debet quiuis eſſe $(\alpha+1+n.\ (\beta-\alpha))\ m+a-1-n.\ (a-b)$, faciendo in Prop. $\lambda=\alpha+1$, $l=a-1$, $\varphi=\beta+1$, $f=b-1$ Ergo $\gamma=\alpha+n.\ (\beta-\alpha)$ et $c=a-n.\ (a-b)$ atque ſeries exponentium ipſius y fit α, β, $2\beta-\alpha$, $3\beta-2\alpha$, *cet.* quibus ſingulis reſpondent ſinguli ipſius x exponentes a, b, $2b-a$, $3b-2a$ *cet.*

COR. 4. IN partibus dx ſint ipſius y exponentes $\pi.\ \varrho.\ \sigma$, quibus reſpondeant ipſius x exponentes p, r, $ſ$, vt ſit $y^{\pi} x^{p} dx$ *cet.* patet, ſubſtitutione facta eos abituros in $m\pi+p$, $m\varrho+r$, $m\sigma+ſ$, et oſtenditur ſimiliter $\sigma=(\pi+n.\ (\varrho-\pi))\ m$ atque $ſ=p-n.\ (p-r)$

COR. 5. PONENDO I.) $m.\ (\alpha+1)+a-1=m.\ (\beta+1)+b-1$ eſt $m=(b-a):(\alpha-\beta)$ II.) $m.\ (\alpha+1)+a-1=m\pi+p$ eſt $m=(p-a+1):(\alpha-\pi+1)$ III.) $m\pi+p=m\varrho+r$ eſt $m=(r-p):(\pi-\varrho)$.

COR. 6. IN eamdem rectam cadant $m.\ (\alpha+1)+a-1$, $m\ (\beta+1)+b-1$, $m\pi+p$, erit ex Prop. $\lambda=\alpha+1$, $l=a-1$, $\varphi=\beta+1$ $f=b-1$ Er. $\pi=\alpha+1+n.\ (\beta-\alpha)$ et $p=a-1-n.\ (a-b)$. Sit $y^{3}x^{2}dy$ et $y^{5}x^{7}dy$ eſt $\alpha=3$ $a=2$, $\beta=5$, $b=7$. Ergo $\pi=4+2n$ et $p=1+5n$ et in eamdem rectam cum his exponentibus incidunt exponentes ipſorum $y^{4}x$, $y^{6}x^{6}$, $y^{8}x^{11}$ cet. Si vero in eamdem rectam cadant $m\pi+p$, $m\varrho+r$, $m.\ (\alpha+1)+a-1$, erit $\alpha=\pi-1+(\varrho-\pi)\ n$ et $a=p+1-n.\ (\varrho-r)$.

COR. 7. IN casu *cor. 1.* erit $b=a$, $r=p$ (*Cor. 5*) et $a=p+1$. Hoc est ipsius x singuli exponentes ad partes dy, inter se aequantur et vnitate excedunt singulos ipsius x exponentes ad partes dx itidem inter se aequales.

COR. 8. IN casu cor. 2. est $\alpha=\beta$, $\pi=\varrho$ (Cor. 5.) et $\alpha=\pi-1$ (*Cor. 6.*)

COR. 9. SVBSTITVATVR series ⊙ *Prop. I.* in aequationem differentialem, et cadant omnes exponentes ex $y=Ax^m$ oriundi in eamdem rectam; dabitur m et A et adeo ipsius y valor absolutus. Praeterea vero seriem infinitam obtineri posse qua hic valor ipsius y augeatur, sic patet. In singulas aequationis differentialis partes substituendo seriem ⊙ prodeunt series vt ♂ et ♃ (*Prop. I. et eius Cor. 2*) quarum serierum singularum exponentes initiales omnes aequantur cum in eamdem rectam cadant, et adeo exponentes subsequentes etiam aequales sunt inter se, secundus vnius seriei secundis singularum reliquarum, tertius tertiis, et sic porro, qualecunque sit δ, cum exponens primus cuiusuis seriei, auctus quantitate δ abeat in secundum, et quantitate $2\,\delta$ in tertium, et sic porro (*Prop. IIII. disp. I.*) Ergo qualecunque sit δ, coefficientes secundi omnium serierum, spectant ad eumdem ipsius x exponentem, et iuncti efficiunt vnicum coefficientem seriei ☾. Similiter seriei ☾ tertius coefficiens conflatur ex tertiis singularum serierum praedictarum, et quartus ex quartis et sic porro. In his omnibus nihil adhuc est quod definitam postulet magnitudinem ipsius δ, ex Parallelogrammo ope *Prop. VII. disp. I.* iam neutiquam definiendi. Sed simul etiam ex *Cor. 10. Prop. I.* perspicitur, coefficientem seriei ☾ secundum conflari ex productis quae singula continent B vnius dimensionis, et adeo spectari posse tamquam productum ex duobus factoribus, quorum vnus est B. Igitur vt hic coefficiens euanescat debet esse vel B vel alter factor $=0$. Prior autem suppositio daret C et omnes sequentes seriei ⊙ coefficientes aequales 0, cum in nullo seriei ☾ coefficiente post primum obueniat A solum, sed ductum in B, C, *cet*; Ergo facienda est secunda. Haec autem fieri potest quia praeter A in seriei ☾ coefficiente secundo habetur δ, propter quantitates ab dy pendentes cum ingredientes; Ergo definitur δ per A et m, B vero restat indefinitum, C, D *cet.* definiuntur per quantitates antea datas, cum ad seriei

riei ☾ coeff. tertium, quartum *cet.* hoc ratiocinium applicari nequeat (Cor. 10. Pr. I.) Exemplum praebeant aequationes canonicae IO. BERNOVLLII *Actor. Petrop. Tom. I. p. 167. Opp.* IO. BERN. *Tom. III. n. CXXXVI. p. 116.* Sumamus aequationem illarum primam $(ax+by)\,dx+(cx+ey)\,dy=0$, quae substituto $y=Ax^{m}$ nanciscitur exponentes

$$\begin{array}{l} 1 \\ * \; m \\ * \; * \quad 2m-1 \end{array}$$

vnde $m=1$, ponatur iam $y= Ax+ Bx^{1+d}$ *cet.* erit

$$\begin{array}{l} ax=ax \\ by=bA+bBx^{1+d} \text{ cet.} \\ cx\,dy=cA+(1+d)\,cB \\ ey\,dy=eAA+e\,(2+d)\,AB \text{ cet.} \end{array}$$

Aequando ipsi 0 coefficientem primum datur A et simul valor aliquis ipsius y completus. Deinde in coefficiente secundo poni debet $b+(1+d)\,c+e.(2+d)\,A=0$ seu $d=(b+c+2Ae):(c+eA)$ quo valore ipsius d adhibito et relicto B indefinito continuabitur series.

SCHOL. AEQVATIONES hae possunt hac generali formula exprimi

$$(ax^{\varepsilon}+bx^{\varepsilon-1}y \ldots\ldots exy^{\varepsilon-1}+fy^{\varepsilon}).\,dx+(px^{\varepsilon}+qx^{\varepsilon-1}y \ldots\ldots sxy^{\varepsilon-1}+ty^{\varepsilon})\,dy$$

iam in illarum singulas partes substituendo seriem ⊙, partis alicuius vt $y^{n}x^{\varepsilon-n}dx$ exponentes fiunt $n.(m-1)+\varepsilon+$, $n.(m-1)+\varepsilon+\delta$ *cet.* atque partis vt $y^{r}x^{\varepsilon-r}dy$ euadunt $(r+1).(m-1)+\varepsilon.$ $(r+1).(m-1)+\varepsilon+\delta$, $(r+1)(m-1)+\varepsilon+2\delta$ cet. Hae exponentium series fiunt eaedem atque ab n plane non pendentes quando $m=1$ vt fit in parallelogrammo, et hic est casus hactenus examinatus. Praeterea vero fient hae series rursus eaedem, qualecunque sit m, si fuerit $r+1=n$. Hinc methodus deducitur, certis saltim in casibus ipsius y valorem aliis adhuc seriebus exhibendi. Sit enim *primo* $a=0$ et substituendo seriem ⊙ habetur

$$\begin{array}{ll} bx^{\varepsilon-1}y=bAx^{m+\varepsilon-1} & +bBx^{m+\varepsilon-1+\delta} \\ cx^{\varepsilon-2}y^{2}= & +cAAx^{2m+\varepsilon-2} \\ px^{\varepsilon}dy=mpA & +(m+\delta)\,pAx^{m+\varepsilon-1+\delta} \\ qx^{\varepsilon-1}y\,dy= & +mqAAx^{2m+\varepsilon-2} \end{array}$$

hic

hic ponatur $m = -\frac{b}{p}$ et $m + \varepsilon - 1 + \delta = 2m + \varepsilon - 2$ et habebitur forma ſeriei, definienturque coefficientes conſueto modo ſed A reſtat indefinitum. *Deinde* ſi ſit $t = 0$, ſeriei ☾ terminus initialis orietur ex initialibus $fy^{\varepsilon} dx$ et $sxy^{\varepsilon-1} dy$, reliqua peraguntur vt ante. Scilicet vt ſubſtituta ſerie ⊙ exponens $n.(m-1) + \varepsilon$ fiat ſeriei initialis, debet omnium ſimilium eſſe vel maximus vel minimus et adeo n maximum vel minimum quod in aequatione eſſe poteſt. Et hinc exponenti ex partibus dx oriundo aequabitur alius, proficiſcens a partibus dy ſed ſic vt $r + 1 = n$. Praeterea poſſet in operatione Cor. praec. poni $B = 0$ et elici δ ex termino ſeriei ☾ qui C continet. Sed in genere hic poſitis B, C, *cet.* omnibus $= 0$ vsque ad R *Prop. I.* excluſiue, vbi $m = 1$ obtinebitur pro exemplo cor. praec. $\delta = -(b + c + 2eA) : r.(c + eA)$ et adeo R ſpectat ad ipſius x potentiam $1 + rd$ ſeu $1 - (b + c + 2eA) : (c + eA))$ hoc eſt eam ad quam ſpectabat ipſum B. Praeterea in ſerie ex $eydy$ oriunda, obuenit R ſecundo loco ad exponentem $1 + 2rd$, adeoque ſeriei ⊙ omnes coefficientes ipſo R poſteriores vsque ad eum qui ſpectat ad exponentem $1 + 2rd$, euaneſcunt, quod patet ſimili modo ac Cor. 5. Pr. 1. Ergo proximus ſeriei ⊙ coefficiens poſt R ſpectat ad exponentem $1 + 2rd$ hoc eſt ad eum ad quem ſpectaſſet C in cor. praec. non poſito $B = 0$; Et ſic patet ex ſuppoſitione ſcholii huius eamdem prodituram ſeriem pro y quae proditura erat in Cor. praec.

COR. 10. SIT recta in quam omnes exponentes cadunt horizontalis, et, poſitis omnibus exponentibus in aequatione differentiali, integris, hos caſus complectitur haec formula (Cor. 7) $(a + by + cy^2 \ldots\ldots) dx - (p + qy + ry^2 \ldots\ldots) x dy = 0$ hic patet eſſe $\frac{dx}{x} = \frac{p + qy + ry^2 \ldots}{a + by + cy^2 \ldots} dy$, vbi reſoluendo partem dextram in ſeriem ope diuiſionis habetur lx per y, et ponendo $x = 1 + z$ cum detur $l(1 + z)$ per ſeriem logarithmicam, dabitur y in z ope reuerſionis ſerierum, ſed tamen non poterit exhiberi y in x. Si coefficientes $p, q, r,$ $a, b, c.$ *cet.* non progrediantur in infinitum dabitur ſeries vt in Cor. praec. ponendo $y = A + Bx^d$, *cet.* et hic ſimilibus in caſibus ac indicati ſunt

in

in Schol. praec. Similis quoque methodus alias adhuc ſeries inueniendi locum habet.

COR. II. CASVS *cor. 8.* ſimiliter continentur hac formula

$$(a+bx+cx^2\ldots)\,y-(p+qx+rx^2\ldots)\,dy=0$$

vnde rurſus vt ante dabitur ly, ſeu $l\,(1+z)$ ponendo $y=1+z$, per x, et proinde ex ſerie quae numerum ex logarithmo inuenire docet, dabitur $1+z$ ſeu y per x. Sed tunc in integratione prima qua reperitur ly. nulla poteſt adiici conſtans, vt proinde haec ſolutio aequationis differentialis propoſitae non ſit ſatis generalis: Ceterum ſi coeſſicientium $a, b, p, q,$ *cet.* ſeries non ſint infinitae, applicari etiam poterit interdum methodus *Schol. praec.* Caſus vero hactenus pertractati quomodo aliis methodis quae a ſeriebus non pendent ſolui poſſint, meum iam non eſt docere.

SCHOL, 2. FIERI poteſt vt hoc modo finitae ipſius y expreſſiones prodeant. Detur $ax^{\varepsilon}+by+cx\,dy=0$ et poſito $y=Ax^{m}$ ⊙ prodeunt exponentes ε *et* m. Ergo $m=\varepsilon$. Sit N coefficiens ſeriei ⊙ ad exponentem $m+(n-1)\,d$ et fiet

$$\begin{aligned} by &= bAx^{\varepsilon}\ldots\ldots+bNx^{m+(n-1)d} \\ cx\,dy &= m\varepsilon cA\ldots\ldots+(m+(n-1)\,d)\,cN \\ ax^{\varepsilon} &= a \end{aligned}$$

Vnde fit $A=-a:(b+\varepsilon c)$ et $N=0$ vel N indefinitum et $b+(m+(n-1)\,d)\,c=0$ hoc eſt $d=-(b+\varepsilon c):c.(n-1)$ proinde omnes ſeriei ⊙ coefficientes praeter N ſunt 0 et fit $y=-\dfrac{a}{b+\varepsilon c}x^{\varepsilon}+Nx^{-b:c}$.

Si plures fuerint in aequatione differentiali partes vt ax^{ε} patet adhuc ipſius y repertum iri valorem completum, dummodo x in his partibus tales habeat exponentes qui ab exponente ε differant quantitate d per integrum multiplicata, ſeu, qui locum habeant in ſerie arithmetica continente terminos ε et $-\dfrac{b}{c}$ tunc enim eiusmodi partes ſingulae ad ſerierum by, $cx\,dy$ terminos eorumdem exponentium accedentes, definient ſingulos ſeriei ⊙ coefficientes.

Si fuerit in aequatione ante expoſita $\varepsilon=-b:c$ fieret $A=\infty$ quod indicio eſt ſolutionem a logarithmis pendere. Scilicet reduci poteſt

 aequa-

aequatio ad hanc formam $\frac{b}{c} y x^{b:c-1} + x^{b:c} dy + a\,dx : c\,x = 0$ vnde elicitur $y\,x^{b:c} + \frac{a}{c} lx =$ Const.

COR. 12. IN OMNIBVS differentialibus quae duabus tantum partibus constant, cuiuscunque ceterum sint gradus, adsignari potest ipsius y valor completus. Exhiberi enim poterunt hae omnes, hac formula: $a x^{\varkappa} dx^{\pi - \varepsilon} d^{\varepsilon} y . dy^{\pi - \varepsilon} y^{n} =$ posito autem $y = A x^{m}$ et $dx = 1$ fit $d^{\varepsilon} y = m . m-1\, m-2 \ldots m-\varepsilon+1 . A x^{m-\varepsilon}$ et aequatio abit in $a x^{\varkappa} m^{\pi-\varepsilon} . m . m-1 \ldots m-\varepsilon+1 . A^{n+\pi-\varepsilon+1} . x^{(m-1).(\pi-\varepsilon)+m-\varepsilon+mn} = 0$ vbi $\varkappa = (m-1)(\pi-\varepsilon) + m - \varepsilon + mn$ seu $m = (\pi+\varkappa) : (\pi+1-\varepsilon+n)$ et $A^{n+\pi-\varepsilon+1} = a : m^{\pi-\varepsilon} . m . m-1 \ldots . m-\varepsilon+1$. Propter A et m datos dabitur $y = A x^{m}$. Si fuerit $\varepsilon = 2$ habetur reductio omnium aequationum huc spectantium gradus secundi, quam generalius persequuti sunt summi viri IO. BERNOVLLI *Oper. T. IIII. n. 162.* et EVLERVS *in Actis Petrop. Tomo III. p. 126.* Ipsissima methodus hic explicata exstat apud IOANN. BERN. *l. c. sub finem.* Si fuerit $n+\pi-\varepsilon+1 = 0$ fieri videtur $m = \infty$ tunc autem fit $\varkappa = m.(\pi-\varepsilon) - \pi + \varepsilon + m.(m+1) - \varepsilon$ Ergo vt methodus succedat debet esse $\varkappa = -\pi$, quo posito definitur m ex aequatione $a = m^{\pi-\varepsilon} m . m-1 \ldots . m-\varepsilon+1$. Dabitur vero etiam y per seriem ope methodi *Cor. 9.*

SCHOL. 3. CASVS tales vbi fit $m = \infty$ aut coefficiens aliquis $= \infty$ plerumque inde oriuntur quando y definiendum est simul per lx vel contra. Tunc enim notum est vulgares differentiandi et integrandi regulas quibus methodus haec serierum innititur locum non habere. Ita si detur $yx + x^{2} dy = n$ cuius summam patet esse $xy = a + n\,lx$, substituto $y = A x^{m}$ obtinebitur $m = -1$ et in primo seriei ☾ termino A se destruet restabitque n solum quod tamen solum non potest poni $= 0$,

COR. 13. SIT $aat^{2} ddz - cczdt^{2} + a^{2} ddz = 0$ aequatio ad quam reducitur problema *Eulerianum Act. Erud. Iun.* 1744, et substituto $z = A x^{m}$ positaque $dt = 1$ exponentes fiunt m, $m-2$, cadentes in eandem verticalem, vt ex parallelogrammo series non detur. Ponatur ergo $z = A t^{m} + B t^{m+\delta}$ *cet.* est

aadd

$$\begin{array}{lll} aaddztt = m.(m-1)\,aaAt^{m} & + (m+\delta).(m+\delta-1)\,aaBt^{m+\delta} \\ -ccz \quad = - \quad ccA & - \quad ccB \\ +aaddz = & + aa.\,m.(m-1)\,At^{m-2} \end{array}$$

Hic $m.(m-1)\,aa = cc$ vnde $m = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + c^2 : a^2}$ et $\delta = -2$.

Vel vt alia obtineatur ſeries, ponatur

$$\begin{array}{lll} aaddz = m.(m-1)\,aaAt^{m-2} & + (m+\delta).(m+\delta-1)\,aaBt^{m+\delta-2} \\ -ccz = & -ccAt^{m} \\ aattddz = & m.(m-1)\,aaAt^{m} \end{array}$$

Hic vt ſit primus terminus ſolus $=0$ eſt vel $m=0$ vel $m=1$ et vtroque caſu A indefinitum, atque $\delta=2$. Denique res etiam peragi poteſt ponendo initiales ſerierum $-ccz$ et $aattddz$ terminos ſub tertio ſeriei $aaddz$ cuius coefficiens eſt $(m+2\delta).(m+2\delta-1).\,aaC$ et exponens $m+2\delta-2$, quo facto fit $m+2\delta-2=m$ ſeu $\delta=1$ et in ſeriei $aaddz$ termino ſecundo reſtat coefficiens $(m+\delta)\,(m+\delta-1)\,aaB$ ſolus, nullis aliarum ſerierum accedentibus. Hic vero euaneſcet poſito $m=0$ et $\delta=1$, manebitque B indefinitum. Quare ſic oritur ſeries $z=A+Bt+Ct^2+Dt^3$ cet. vbi A et B ſunt indefinitae, quae ſeries ſi in aequationem ſubſtituatur, ſintque in ea ad ipſius t exponentes ε, $\varepsilon+1$, $\varepsilon+2$, reſpectiue coefficientes L, M, N. prodibit

$$\begin{array}{l} aaddz = 2aaC + 6aaDt + 12aaEt^2 \ldots\ldots\ldots + (\varepsilon+2).(\varepsilon+1)\,aaNt^{\varepsilon} \\ -ccz = -ccA - ccB - ccC \ldots\ldots\ldots - ccL \\ +aattddz = \ldots\ldots 2acC \text{ - - - - - - - - - - - - } + \varepsilon.(\varepsilon-1)\,aaL \end{array}$$

Patet, ſi ſit $L=0$ euaneſcere N, et adeo ſi ſtatuatur $A=0$ euaneſcere C, E, et omnes eoefficientes ad dimenſionis ipſius t pares, ſi vero ſtatuatur $B=0$, ad dimenſiones impares, vt hinc oriantur duae ſeries antea ex ſuppoſitione $m=1$ et $m=0$ deducendae, quarum quaeuis abrumpitur poſito coefficiente vno $=0$, ob $N=\frac{cc-\varepsilon.(\varepsilon-1)\,aa}{(\varepsilon+2)\,(\varepsilon+1)\,aa}L$. vbi $N=0$ ſi $L=0$. Sit I coefficiens ad exponentem $\varepsilon-2$ et erit $L=(cc-(\varepsilon-2).(\varepsilon-3)\,aa)\,I : \varepsilon.(\varepsilon-1)\,aa$. Proinde ſi non ſit $I=0$, requiritur $cc:aa=(\varepsilon-2).(\varepsilon-3)$ ad reddendum $L=0$, et ſeriem abrumpendam. Ceterum coefficiens quiuis niſi ſit 0 eſt poſitiuus cum quantitas $cc-(\varepsilon-2)\,(\varepsilon-3)\,aa$ demum incidat in negatiuum poſt tranſitum per 0 hoc ubi nulli ſunt amplius coefficientes.

PROP. III.

Datis A et m ex parallelogrammo in aequatione ſpecioſa fluxiones non inuoluente, reperire ſeriei y reliquum.

SOL. SVBSTITVATVR $Ax^m + p$ loco y, et ex theoremate binomiali manifeſtum eſt in tranſinutata aequatione quae hac ſubſtitutione prodit, fore inter alia, p vnius dimenſionis. Iam definitis A et m vt iubet parallelogrammum, ad ſiniſtram ſcribantur in columna verticali omnes partes aequationis p continentes, incipiendo ab ea in qua eſt p vnius dimenſionis et ſi talium plures adſint, ab ea in qua habet x ſimul dimenſionem minimam. Huic ſupremae parti e regione ſcribatur ſeries horizontalis partium reliquarum aequationis, p non continentium, incipiendo ab illa in qua eſt ipſius x dimenſio minima, et ordine pergendo per reliquas. Pro primo ipſius p termino eliciendo, ponatur columnae verticalis pars ſuprema aequalis ſiniſtimae ſeriei horizontalis, et diuiſione habebitur ipſius B pars prima. Haec ſubſtituatur in partes reliquas columnae verticalis et dabuntur ſerierum ex illis oriundarum initiales termini. Inter hos, illi, quorum exponens eſt proxime maior exponente primo ſeriei ſupremae horizontalis, colligantur in ſummam quae ſigno contrario inſeratur in ſeriem ſupremam horizontalem, dabitque, vel ſola, vel adiecta reſpondenti ſeriei horizontalis termino, partem ſecundam eius ſeriei quae ex ſupremo termino columnae verticalis oritur, vnde diuiſione elicietur alter ipſius p terminus, et ſic opus vrgendo reliqui.

EX. SIT $y^3 + aay + axy - 2aaa - x^3 = 0$ Ex parallelogrammo fit $m = 0$ et $A = a$. Subſtituto ergo $a + p = y$ omiſſisque quae ſe deſtruunt eſt $4aap + axp + aax + 3app + p^3 - x^3 = 0$. Schema operationis

$$
\begin{array}{llllll}
4aap = & -aax & * & +1.\ x^3 & & \\
 & & +\frac{1}{16}a.\ x^2 & +\frac{3}{128} & +\frac{509}{4096a}\ x^4 & \\
axp = & & -\frac{1}{4}a & +\frac{1}{64} & +\frac{131}{512a} & \\
3aapp = & & +\frac{3}{16}a & -\frac{3}{128} & -\frac{1569}{40963a} & \text{cet.} \\
p^3 = & & & -\frac{1}{64} & +\frac{3}{1024a} & \\
\hline
\end{array}
$$

$$p = -\tfrac{1}{4}x + \frac{x^2}{64a} + \frac{131}{512aa}x^3 + \frac{509}{16384aaa}x^4$$

Poſi-

Poſitis terminis p continentibus in columnam verticalem et reliquis in ſeriem horizontalem fit $4aap = -aax$ vnde $p = -\frac{1}{4}x$ et hoc valore ſubſtituto $axp = -\frac{1}{4}ax^2$ et $3app = +3ax^2 : 16$ et $p^3 = -x^3 : 64$. Termini quibus ineſt xx collecti dant ſummam $-axx : 16$ ſigno contrario inſerendam in ſeriem ſupremam. Vnde eſt $4aap = * + axx : 16$ (Stellula hic locum termini vnius praecedentis occupat.) Ergo $p = * + xx : 64a$ qua parte ipſius p, primae iuncta continuantur ſeries e columnae partibus oriundae et fit $axp = * + x^3 : 64$ et $3app = * - 3x^3 : 128 + 3x^4 : 64.64.a$ et $p^3 = * + 3x^4 : 1024a$ cet. Termini quibus ineſt cubus ipſius x collecti efficiunt ſummam $-3x^3 : 128$ ſigno contrario adiiciendam ad xxx iam in ſerie ſuprema reperiundum. Vnde erit $4aap = * * + 131x^3 : 128$ vnde $p = * * + 131x^3 : 512aa$ et hac ipſius p parte prioribus iuncta, rurſus eſt $axp = * * + 131x^4 : 512a$ et $3app = -1569x^4 : 4096a$ (addendo terminum huc ſpectantem ante iam repertum) et $p^3 = +3x^4 : 1024a$, vnde ſumma hac collecta et ſigno contrario relata in ſeriem ſupremam eſt $4aap = * * * + 509x^4 : 4096a$, dabiturque ipſius p terminus quartus et ſic porro.

DEM. PER conſtr. reperitur p tale, quod partes omnes aequationis, p continentes, iunctim aequales efficiat ſummae partium x ſolum continentium, ad alterum latus ſigni aequalitatis translatarum, et adeo quod euaneſcere efficiat totam aequationem ſi omnia ad vnum latus ponantur, terminis ſerierum ex partibus p continentibus oriundarum ſe deſtruentibus. Hic autem eſt ipſius p valor qui quaeritur. Q. E. D.

COR. I. SI ipſius p pars prima hac methodo inuenta non contineret x ſed eſſet quantitas conſtans, tales etiam fierent omnes termini initiales ſerierum oriundarum ex partibus columnae verticalis, nullum x ſed ſolas ipſius p potentias continentibus. Vnde hoc caſu, hoc eſt ſi aequatio inter x et p, habet terminum aliquem omnino conſtantem, methodus non procedit, niſi nullae plane adſint ipſius p potentiae purae in x non ductae. Sit $ap + px = aa$ fiet

$$ap = aa$$

$$-ax + 1x^2 - x^3 : a$$

xp

$$\begin{array}{llll} xp = & +a & & -1+\frac{1}{a} \\ \hline p = a & -x+\frac{x^2}{a} & & \frac{x^3}{aa} \quad \text{cet.} \end{array}$$

Hic ex $ap=aa$ fit $p=a$ et cum nullus terminus in aequatione adſit praeter xp fit $xp=ax$. Sed ſi loco xp fuiſſet pp, obtinuiſſem $pp=aa$ quod fuiſſet abſurdum cum methodus ſupponat ſeries omnes ex columnae partibus inferioribus oriundas exponentes initiales ipſius x habere maiores exponente primo ſeriei ſupremae horizontalis.

COR. I. SI diſpoſita aequatione y continente ipſa in parallelogrammum (Cor. 6. Pr. VII. diſp. I.) laterculi extremi ſint duo, vnus continens y, alter x, dabitur ſeries pro y immediate absque reductione ad p. Sit $y^3+y^2+y-x^3=0$. Fiet

$$\begin{array}{llllll} y= & x^3-1x^6 & +1 & * & & -4 \\ y^2= & +1 & -2x9 & +3 & x^{12} & -2x^{15} \text{ cet.} \\ y^3= & & +1 & -3 & & +6 \end{array}$$

Hic ex data $y=x^3$ formatur $y^2=x^6$ et $y^3=x^9$ deinde ipſius yy termino primo, ſigno contrario relato in ſecundum locum ſeriei y, habetur huius altera pars quae cum priore iuncta dat ſeriei yy partem alteram eiusdem exponentis cum prima ſeriei yyy, vtriusque ſumma ſigno contrario ſumta dat ſeriei y tertiam et ſic porro.

SCHOL. I. SIMILI modo obtinebitur ſeries deſcendens. In exemplo Cor. praec. pone

$$\begin{array}{llllll} y^3= & x^3-1 \;{}^2 & -\frac{1}{3} & +\frac{2}{3} & +\frac{7}{81} & \\ y^2= & +1^x & -\frac{2}{3}x & -\frac{1}{3}x^0 & +\frac{11}{81}x^{-1} & \\ y= & & +1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{9} & +\frac{7}{81}x^{-2}+\frac{5}{81}x^{-3} \text{ cet.} \end{array}$$

quia $y^3=x^3$ fit $y=x$ et $y^2=x^2$ vnde $y^3=*-x2$. Ergo ex duobus prioribus ſeriei ſupremae terminis extrahendo radicem cubicam fit $y=*-\frac{1}{3}x^0$ vnde $yy=*-\frac{2}{3}x$ quod additum primo ſeriei y termino efficit $+\frac{1}{3}x$ contrario ſigno ponendum in tertio loco ſeriei ſupremae horizontalis. Ex tribus primis ſeriei huius terminis extrahendo radicem habetur $y= * * -\frac{2}{9}x^{-1}$ et ſic porro. Sed operatio hic ob radices extrahendas paulo moleſtior eſt.

PROP. IIII.

PROP. IIII.

DATA AEQVATIONE fluxionali inter x et y reperire y per ſeriem adſcendentem fluentis x, ad modum Prop. III.

SOL. FIAT columna verticalis earum partium aequationis, quae continent y aut dy aut vtrumque, ſupremum locum occupante parte aliqua quae ſit dy ſolum, cui e regione ſcribantur partes reliqnae aequationis per x ſolum et dx datae, incipiendo a dimenſione infima. Iam pro ſeriei dy primo termino ſumatur o et adeo ſit $y=c$ notante c conſtantem in integratione adiici ſolitam; Hic valor ipſius dy et y ſubſtituatur in reliquas partes columnae ſiniſtrae, et operatio continuetur vt Prop. III. integrando ſaltim loco diuiſionis.

EX. DETVR $xdy+dy+y^2dx=x^2dx+dx$. Poſita $dx=1$ ſit

$$\begin{array}{lllll}
dy= & o+1 & \ast & & +x^2 \\
 & -cc & -(2c+1)Bx & -2C-BB-2cC & \\
+xdy= & & \ast & +B & +2C \\
+y^2= & & +cc & +2cB & +BB \\
 & & & & +2cC \\
\hline
\end{array}$$

$$y=c+(1-cc)x-\frac{(2c+1)B}{2}x^2+\frac{1-2C-2cC-BB}{3}x^3 \text{ cet.}$$

Propter $dy=o$ eſt $y=c$ vnde $xdy=o$ et $yy=cc$. Haec pars ſigno contrario adiecta ad ſupremae horizontalis ſeriei partem $+1$. dat $dy=\ast\, 1-cc$ vnde $y=\ast\,(1-cc)x$. Scribendo B pro hoc coefficiente, fit $xdy=Bx$ et $yy=2cBx$ vnde $dy=\ast\ast-(1+2c)Bx$ et $y=\ast\ast-\frac{(1+2c)B}{2}x^2$. Dicto C coefficiente hoc cum ſigno ſuo, continuatur operatio vt ſchema monſtrat.

COR, I. SIMILI methodo habetur ſeries deſcendens ſi adſit y vnius dimenſionis in aequatione, adhibendo operationem contrariam. ſcilicet capiendo fluxiones. Sit $ad^ny+ydx^n=bx^mdx^n$ erit poſita $dx=1$

$$\begin{array}{ll}
y= & bx^m-m.m-1\ldots.m-n+1.\,abx^{m-n}-m-n.m-n-1\ldots.m-2n+1.\,Bx^{m-2n} \\
ad^ny= & +m.m-1\ldots.m-n+1\,ab+m-n.m-n-1\ldots.m-2n+1.\,B \text{ cet.}
\end{array}$$

Hic

Hic poſita $y=bx^m$ fluxio eius gradus n eſt quae exhibetur in ſeriei horizontalis infimae initio, haec ſigno contrario translata in ſeriem ſuperiorem dat ſeriei y terminum II. cuius coefficiens cum ſigno ſuo ſi dicatur B, habetur fluxionis terminus ſecundus, et hinc ipſius y tertius et ſic porro. Patet huius formulae caſum eſſe examinatum exemplo II. Prop. I. Et hic ſeries abrumpitur ſi m et n ſunt integri poſitiui, addique poteſt rurſus variabilis logarithmica, poſita enim $y=\odot+u$ obtinebitur $dx^n=-ad\overset{n}{u}:u$ vnde ſequitur vt ſit $x=\text{Conſt.}+\overset{n}{r}(-a)\times lu$ vt facile oſtenditur.

SCHOL. NON opus eſſe iudico vt cum NEWTONO *Method. Flux. Prob. II.* §. 40 enumerem caſus, quibus conueniens eſt pro initiali ſeriei y termino conſtantem adſumere. Id enim non his ſolum caſibus ſed ſemper fieri decet niſi integrali incompleto contenti eſſe velimus.

COR. 2. SI eſt $y=c$ cet. oportet, vt in ſequentibus ſeriei y terminis habeat x dimenſiones plures quam in primo, et adeo poſitiuas. Vnde ſi aequatio talis ſit quae ad formam a prop. deſideratam reducta, habeat ipſius x dimenſiones negatiuas, vt etiam ſeries y tales accipiat, non erit primus ſeriei y terminus conſtans. Detur $x^2dy+xxy=x-1$, ſeu $dy+y=1:x-1:x^2$, et diſponetur aequatio in hunc modum

$$\begin{array}{lll} dy= & -x^{-2} & +x^{-1} \\ & & -x^{-1} \\ y= & & +x^{-1} \end{array}$$

ex $dy=-x^{-2}$ habetur $y=+x^{-1}$ quod ſigno contrario adiectum ſeriei ſupremae horiz. termino II. eum deſtruit vt ipſius dy valor completus ſit $dy=-x^{-2}$ et ipſius $y=+1:x$.

COR. 3. SI aequationi inſit aliquis terminus habens quamcunque ipſius y potentiam diuiſam per x vnius dimenſionis, non poterit poni $y=c$ quia hic terminus tunc daret differentiale logarithmicum. Hoc vt euitetur, loco x ſcribe $1+u$ et perage diuiſionem vt fiat $1:(1+u)$ ſeries per u adſcendens. Sit $dy+ny:x=2x$. Hic ſi poneretur $dy=0$ et adeo $y=c$ fieret $ny:x=nc:x$ et adeo $dy=*-ncdx:x$ et $y=nclx$ ſed cum deſideretur ſeries per ſolas ipſius x potentias adſcendens logarithmus eam ingredi nequit. Iam ſi ſtatueretur omiſſa c, $dy=2x$ et $y=x^2$ fieret $ny:x=nx$ locandum ſub

eodem

eodem $2x$ vnde primus terminus ſeriei y definitus eſt. Hoc vltimum incommodum patet ſemper accidere ſi pars illa aequationis de qua iam iam ſermo eſt, habeat y vnicae dimenſionis, non ſi ſit $y^2 : x$ aut $y^3 ; x$ cet. ſed vt in praeſenti caſu vtrumque euitetur, poſita $x = 1 + u$ abit aequatio in $dy + y - yu + yuu - yuuu$ cet. $= 2 + 2u$, vnde

$$\begin{array}{rccc} dy = & 0 + 2 & + 2\,u & \\ & -c & -2 + 2c & \\ y = & c & +2 - c & + cu^2 \\ -yu = & & --c & \end{array}$$

exhibetur hic y in ipſa ſerie horiz. II. Ob $dy = 0$ eſt $y = c$ vnde $-yu = -cu$ et ſeriei y primum terminum iungendo ſigno contrario primo reali ſeriei ſupremae, fit $dy = * \; 2 - c$ vnde $y = * \; (2-c)\,u$, ſerierumque y et $-yu$ terminis qui habent u relatis ſigno contrario ad reſpondentem ſupremae, fit $dy = * \; * \; (+2 - 2 + 2c)\,u$ vnde $y = * \; * + cu^2$ cet. Patet inueniri hoc pacto y per u, ſed non reſtitui poſſe $x - 1$ loco u ad inueniendum y per ſeriem cuius radix ſit x. Huius enim ſeriei coefficiens penderet ab infinitis coefficientibus ſeriei prioris, cuius radix eſt u. Reductio haec ab x ad u, ſi non placeat, inuenienda eſt y ope Prop. I. quo ipſe confugit NEWTONVS *Method. Flux. art.* 47.

COR. 4. SI aequatio habeat terminum $ndx : x$, efficiet ille, operando ſecundum hanc methodum differentiale logarithmicum et adeo non poterit ad hanc aequationem methodus applicari, niſi fortuito differentialia logarithmica ſe deſtruant. In exemplo *coroll.* 2. ſi loco y fuiſſet ny, prodiiſſet $dy = * \; (1-n)\; dx : x$, neque potuiſſet operatio continuari.

SCHOL. I. EX DICTIS facile perſpicitur regula NEWTONI *Method. Fl. Prob. III. art.* 33. quam exemplo ſtatim applicabo. Ponit vero NEWTONVS aequationem eo reductam eſſe, vt ab vna parte ſigni aequalitatis habeatur $dy : dx$ ab altera fractionis huius valor finitis quantitatibus expreſſus. Sit $dy : dx = 1 - 3x + y + xx + xy$. Iam ſchema operationis Newtonianae eſt ſequens

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 - & 3x & + xx & & & \\ \hline +y & * & + x & - xx & + \frac{1}{3}x^3 & - \frac{1}{6}x^4 & + \frac{1}{30}x^5 \\ +xy & * & * & + 1 & - 1 & + \frac{1}{3} & - \frac{1}{6} \\ \hline \textit{Summa} & 1 & - 2 & + 1 & - \frac{2}{3} & + \frac{1}{6} & - \frac{4}{30} \end{array}$$

 ſci-

Scilicet terminos ſolum x continentes diſponit in ſeriem horizontalem, et y continentes in ſeriem verticalem. Deinde pro ipſius y termino primo ſumit ſiniſtimum ſeriei horizontalis ductum in x et diuiſum per numerum dimenſionum quas habet x in eo, hoc eſt, vno verbo, huius termini primi integrale, quod hic eſt x. Hanc primam ipſius y partem ſubſtituit in columnam verticalem vt hinc obtineat $y=+x$ et $xy=+xx$. Prima ipſius y pars x, adiecta ad $-3x$ in ſuprema ſerie horizontali dat $-2x$ vnde obtinet integrando $y=* -xx$ et $xy=* -x^3$. Iam pars ſecunda ſeriei y deſtruitur a prima ſeriei xy eiusdem exponentis, et reſidua eſt ſola $+xx$ in termino tertio ſeriei ſupremae horizontalis, vnde integrando habetur $y=* \; * + \frac{1}{3}x^3$ et adeo $xy= * \; * + \frac{1}{3}x^4$. Terminor. quibus ineſt cubus ipſius x ſumma eſt $-\frac{2}{3}x^3$ vnde $y= * \; * \; * -\frac{1}{6}x^4$ et ſic porro. Patet NEWTONI operationem non niſi externa ſpecie aliquantum ab ea quam tradidi differre. Vtique operando ſecundum *ſol. Prop.* aequatio data ſic fuiſſet diſponenda, poſita $dx=1$, $dy-y-xy=1-3x+xx$ et termini ad ſiniſtram ſigni aequalitatis effeciſſent columnam verticalem. NEWTONVS in ſchemate ſuo omittit dy et reliquas columnae partes contrario ſigno ponit, eo ſcilicet quod habiturae ſingulae fuiſſent ad dextram ſigni aequalitatis, ad terminos x ſolum continentes, translatae. Ex prima vero ſupremae ſeriei horizontalis parte, initialem ipſius y terminum inuenit eodem modo ac inuentus fuiſſet ex *ſol. Prop.* neglecta additione conſtantis, ſed et quomodo illa poſſit adiici docet. Inde format ſerierum quae ex partibus columnae verticalis prodeunt terminos; hos autem addit ſuis quae ex operatione habent ſignis, non oppoſitis, ad reſpondentes ſeriei horizontalis, quoniam habent iam in eius calculo oppoſita ſigna illis quae haberent in calculo ſecundum *ſol. prop.* inſtituto, cum v. g. NEWTONO alter columnae verticalis terminus ſit $+xy$ qui ex praeceptis ante traditis futurus erat $-xy$. Itaque Regula in *ſol. Prop.* tradita aequipollet Newtonianae, mihi autem ita rectius enunciari videbatur quia ſic melius ratio eius in oculos incurrit.

COR. 5. POTEST ſimiliter obtineri ſeries deſcendens. Sit $dy-y: xx=2x+3-4: x+1: xx$. Operatio peragetur ſequentem in modum:

$dy=$

$$\begin{array}{lllll} dy = 2x & +3 & -4:x & +1:xx & \\ & +1 & +4 & +c & -(c+1):x^3 \\ -y:xx & =-1 & -4 & -c & +(c+1) \\ \hline y = xx & +4x+ & c & -(c+1):x & +(c+1):2xx \quad \text{cet.} \end{array}$$

Hoc exemplum quod a NEWTONO mutuo ſumſi ex eorum genere eſt quae indicaui *Cor. 3.* Niſi in aequatione haberetur pars $-4:x$ deſtruenda per reſpondentem ſeriei $-y:xx$, ingrederetur ſeriem dy elementum logarithmicum, quo progreſſus operationis impediretur.

SCHOL. 2. EST etiam vſus aliquis fluxionum primi et vlteriorum graduum in reſoluendis aequationibus algebraicis, indicatus a COLSONO ſub finem Commentarii ſui in NEWTONI methodum. Eum duobus exemplis illuſtrabo.

I. Quaeratur radix cubica ex a^3+x. Sit ea y, eſt $y^3=a^3+x$ Vnde 1.) $dy=1:3yy$ poſita $dx=1$. Iam ſumendo pro ſeriei y termino initiali, $y=a$ eſt $dy=1:3aa$ vnde $y=* + x:3aa$. Rurſus differentiando aequat. 1. eſt II.) $ddy=-2dy:3y^3=-2:9y^5$, ſubſtituendo ipſius dy valorem ex I. et ponendo rurſus $y=a$, eſt $ddy=-2dx^2:9a^5$ vnde ob dx conſtans $dy=*-2xdx:9a^5$ et $y=* \; * \; -x^2:9a^5$. Porro differentiando aequat. II. fit $dddy=10dy:9y^6=10dx^3:27y^8=10:27a^8$ vnde $ddy=*10x:27a^8$ et $dy=* \; * \; 5x^2:27a^8$ et $y=* \; * \; * \; 5x^3:81a^8$ et ſic opus vrgeri poteſt.

II. Sit $(a+x)^m=a^m+p$ et quaeratur p ſerie, abrumpente pro m integro negatiuo. Hoc vt perficiatur capiendo fluxiones, fit $m.(a+x)^{m-1}dx=dp$ hoc eſt poſita $dx=1$, $m\cdot\frac{(a+x)^m}{a+x}=dp$ ſeu $m.\frac{(b+p)}{a+x}=dp=\frac{mb}{a+x}+\frac{mp}{a+x}$ poſita $a^m=b$. Ex differentiandi vero regulis conſtat, poſitis duabus variabilibus t, q, eſſe $\int dt:q=t:q+\int tdq:qq$, et adeo ſi $t=x^n$ et $q=(a+x)^n$ fore $\int ncx^{n-1}:(a+x)^n=cx^n:(a+x)^n+\int ncx^n dx:(a+x)^{n+1}$. Iam ponatur $1:(a+x)=u$ et aequatio differentialis ante reperta reſoluitur ſequenti modo:

$$\begin{array}{llll}
dp = mbu & +\frac{m.m+1.}{1.}\,bxuu. & +\frac{m.\,m+1.\,m.+2}{1.\,2.}\,bx^2u^3 & \\
 & +\,m^2b & +\,m.\,m+1.\,b & \\
-mpu = & -m^2b & -\frac{m.^2\,m+1}{1.\,2.}\,b & \\
\hline
p = mbxu & +\frac{m.\,m+1}{1.\,2.}\,bx^2uu & +\frac{m.\,m+1\,m+2}{1.\;\;2.\;\;3.}\,bx^3u^3 & \text{cet.}
\end{array}$$

Ex lemmate praemiſſo ob $dp=mbdx:(a+x)$ eſt $p=mbx:(a+x)$ $+\int mbxdx:(a+x)^2$ vnde $dp=$ ✻ $mbxdx:(a+x)^2$ qui ſecundus ipſius dp terminus augetur acceſſione primi ſeriei $-mpu$ vt totus ſit $=(m+mm).\,bxdx:(a+x)^2$ vbi in lemmate ſit $n=2$, et $p=$ ✻ $\frac{m.\,m+1}{1.\,2.}\,bx^2:(a+x)^2+\int m.\,m+1\,bx^2dx:(a+x)^3$ vnde $dp=$ ✻ ✻ $+m.(m+1)\,bx^2:(a+x)^3$ augendum termino ſecundo ſeriei $-mpu$ qui fit $\frac{mm.\,m+1}{1.\,2.}\,bxx:(a+x)^3$ et additus efficit totum tertium terminum ſeriei $dp=$ ✻ ✻ $(m.\frac{m.m+1}{1.\,2.}+m.m+1)$ $bxx:(a+x)^3$ cuius vncia fit $(m.\,m.\,m+1+2.\,m.\,m.+1):1.2=$ $(m+2.\,m+1.\,m):1.2.$ et integratio peragitur rurſus ope lemmatis, et ſic porro. Lex progreſſus facile hoc modo generatim oſtenditur: Poſito aliquo ſeriei dp termino $=ncx^{n-1}:(a+x)^n$ conſtat ex lemmate inde orituram in ſerie $-mpu$ partem $-mcx^n:(a+x)^{n+1}$ et in ſerie dp partem $+ncx^n:(a+x)^{n+1}$ cui ſigno contrario adiicitur pars reſpondens ſeriei $-mpu$ vt coefficiens adgregati ſit $(m+n)$ c vnde oritur ſeriei p ſequens terminus $(m+n).\,cx^{n+1}:(n+1)$ $(a+x)^{n+1}+$ integrali aliquo. Iam ſit pro valore aliquo ipſius n particulari $nc=(m.\,m+1.\ldots.\,m+n-1):(1.\,2\ldots n-1)$, nanciſcetur ſeriei p ſequens terminus coefficientem $(m.\,m+1.\ldots\ldots m+n):$ $(1.\,2\ldots\ldots n+1)$ qui etiam prodit in praecedente ſeriei p termino ſcripto $n+1$ in locum ipſius n. Vnde manifeſtum eſt ſi quantitatis c adſumta lex vera ſit in aliquo valore particulari ipſius n, veram etiam fore pro termino proxime ſequente. Sed cum hypotheſeos veritas ex inſpectione priorum terminorum pateat, conſequentia erit neceſſaria. Hanc ſeriem alia methodo inuenire docet CEL. WALZIVS, ſub finem ſchediaſmatis: de methodo interpolandi Newtoniana inſerti Actis Erud. anni 1745. Mart. P. I. p. 143.

THESES.

I. MACVLARVM solarium naturam verosimillime explicat hypothesis B. HAVSENII in diss. de theoria motus solis circa axem. Neque eas vltra superficiem solis extollit ratiocinium a diutiori illarum mora in haemisphaerio solis auerso desumtum quod explicauit cel: KRAFT in *actis Acad. Imp. Petrop. Tom. VII.*

II. ATMOSPHAERA lunaris nostrae similis non ostensa est. Nam annuli lucidi phaenomenon in eclipsi solis 1706. vel deduci potest ab inflexione lucis vi experimentorum DE L'ISLII in *Monim. Acad. Paris* 1715. vel a lumine zodiacali, quae sententia est inter alios *Academicorum Montispessulani* in descriptione eclipseos huius. HEVELII autem obseruatio de diuersa apparentia macularum lunarium sub eodem lunae situ et iisdem atmosphaerae nostrae conditionibus, tam lubrica est, vt nec ipse summus astronomus ei satis fidisse videatur, dum eam in *Cometographia* commemoratam, *Selenographiae*, vbi propria eius sedes est, non inseruit. Id quod HALLEIVS et LOVVILLIVS in luna vidisse dicuntur, si reuera in luna fuit, mallem cum LIEFMANNO in *Annalib. Phys. Med. Vratislau. anni 1722. Nou. Class. IIII.* lunam perforatam credere, quam fulgura ibi ponere terricolis conspicua, sed et eius phaenomeni explicationem aliam dedit DE LA HIRE in *Monim. 1715.* Neque ex sole pallescente aut stellis figuram mutantibus dum luna eas occultatura ad ipsas accedit, aliquid inferri potest.

III. DEMONSTRATIO aequilibrii fluidorum in tubis communicantibus data a DAN. BERN. HYDRODYN. *S. II. §. 3.* satis euidens et rigorosa est.

IIII. FVLMINA ex nubibus exire, nisi omnium saeculorum experientiam infringere velimus negari nequit.

V. NON MAGIS concipimus motus genesin ex impulsu quam ex attractione. Ergo qui attractionem ex principio rationis sufficientis quod vocant, satis refutatam esse credunt, magnopere falluntur.

VI. IN CAVITATE thoracis, pleuram inter et pulmones, aerem interesse, experimentis animalium antliae pneumaticae ope occisorum, ab HALESIO in statica sanguinis, et ab HOADLEIO in *Praelect. de Org. Respir.* recensitis euincitur.

VII. METAPHYSICES in Physica nullus omnino est vsus, nisi ad metaphysicam referas effata quaedam, cuilibet homini ex sensu communi obuia.

VIII. DEI plenior certiorque cognitio ex naturae contemplatione hauritur, quam ex ea metaphysices parte quae Theologia naturalis nominatur.

VIIII. EVOLVTIONI foetus ex animalculis spermaticis, insigniter obstant quae monet P. LYONNET in notis ad gallicam *Insectotheologiae* LESSERIANAE versionem, L. I. c. 9. p. 220. Tomi I. Quod non omnino absurdum sit cum D. de MAVPERTVIS in scripto *occas. aethiopis albi* publicato, particulas seminales sumere, certis legibus viribusque se mutuo trahentes, videtur inferri posse ex figuris regularibus in crystallisatione, vegetatione minerali, et similibus, conspiciendis.

X. FIGVRA telluris sphaeroidica a priori definiri nequit, nisi sumendo hypotheses, quae, an CREATORIS naturae hypotheses fuerint, semper adhuc dubium est, quantumcunque necessario nexu cetera ex his fluant. Igitur qui Gallorum nuperrime in hanc rem collocatos labores eleuant, quod nihil noui, sed NEWTONI atque HVGENII adserta saltim nos docuerint, nec aeque satis de his conatibus, nec intelligenter iudicant.

XI. CONSISTIT pars aliqua stili poetici, in alio verborum ordine quam qui illis in pedestri sermone adsignari solet. Id dilucide de poesi gallica ostendit P. CERCEAV in libro: *Reflexions sur la poesie Francoise* cuius rationes non eneruauit P. BVFIER in *tractatus philosophici et practici de poesi cap. VIII.* In latinorum graecorumque poetarum exemplis res euidentissima est.

XII. POST auctoritatis praeiudicium, nihil magis philosophiae progressum impediit, quam terminorum philosophicorum multitudo. Sed tamen, cum nec possimus omnino carere terminis philosophicis, nec semel receptos, superfluos licet, reiicere, consultius est, antiquas scholasticorum voces retinere, et si opus fuerit, KEPLERI in Astronomicis exemplo, ad nouas notiones designandas paululum inflectere, quam multos recentiorum imitari, quorum singuli, vt reconditi quid sapere videantur, nouam quisque sibi linguam excogitant.

XIII. LOCVS imaginis falſo ponitur in ſpeculis curuis in catheto incidentiae. Erroris fontem ſatis bene retexit STEVINVS Op. ab Alb. Girard gallice verſorum P. V. lib. 2. p. 571. ſed ipſe in loci huius deſinitione fallitur, eſt enim in cauſtica, vt iam animaduertit BARROVIVS licet cauſticarum theoria deſtitutus. Conf. GREGOR. *Elem. Catoptr. Prop. VII.*

XIIII. AD euincendos ſpiritus, animabus noſtris perfectiores, vſi ſunt antiqui aliqui philoſophi inſigni illo diſcrimine, quod inter DEVM et nos intercedit, locumque dat multitudini ſpirituum nobis excellentiorum. Sed, quantacunque huic argumento inſit probabilitas, recte tamen ei oppoſuit FONTENELLIVS in *diſſertatione de oraculis*, infinitum ſemper diſtare ſpiritum quemuis creatum a CREATORE, vt hoc argumento aeque vti poſſit ſupremus in ſerie creatorum ſpiritus, ac infimus.

XV. QVOD cum veriſſimum ſit, mirari ſubit quomodo idem FONTENELLIVS, potuerit ſimili plane ratiocinio vti, in quantitatibus ſuis quas *indeſinitas* vocat in *Elem. Geom. infiniti* euincendis. Dum enim his tamquam pontibus vtitur quibus ex finito ad infinitum tranſeat, non perpendit, tranſitum ex finito ad hos pontes, aliis pontibus indigere.

XVI. AEQVINOCTII mentio facta in *epiſt. vlt. L. X.* CICERON. *ad* ATT. cum tempore datae epiſtolae optime conciliatur, ponendo faſtos ex rationibus politicis perturbatos. Id iam ante MIDDLETONVM *in vita* CICERONIS hoc monentem, obſeruauit IOANN. BEYER in *Vranometria*, *ad Capricornum.*

XVII. IN conciliandis numeris indictionum legg. 8. et 9. C. THEOD. *de indulgentiis debitor.* non opus eſt cum PETAVIO et SCALIGERO numeros indictionum corrigere, nec cum notis ad l. 8. nouae edit. huius Cod. diuerſa indictionum initia ponere. Nam docente ILL. *a* IORDAN in *Apparatus Chronolog. operi Originum Slauicar. ſubnexi* n. CCLIII. in l. 9. intelliguntur indictiones a die 1. Sept. incipientes annis CHRISTI 367. 406. adeoque currentes vsque ad diem 1 Sept. annor. 368. 407. in quos incidunt conſulatus VALENTINIANI et VALENTIS iter. conſ. atque HONORII VII et THEOD. Iun. it. coſſ. Sed in l. 8. indictiones XIIII. et IIII. erant

eae

eae quae exſpirauerant die 1 Sept. proxima ante conſulatos Honorii VII. et Theodoſii II. hoc eſt ante annos 387. 407.

XVIII. HISTORIAE ab initio ſatis idoneis argumentis munitae probabilitas, ſolo lapſu temporis, ſi nullae oſtendi poſſint contra eam ſuſpiciones, non decreſcit. Hoc ſolo argumento, neglectis aliis forte adhuc grauioribus, fundamentum deſtruitur omnis eius calculi, ridiculi magis quam periculoſi, quo durationem fidei Chriſtianae definire auſus eſt IO. CRAIG, in *principiis mathematicis Theologiae Chriſtianae.*

XVIIII. ANIMAE humanae immortalitas, aliter quam ex attributorum diuinorum quatenus nobis innoteſcunt conſideratione, a philoſopho probari nequit.

XX. HINC, etiamſi atheus, non quiduis ſibi licere, facile perſpicere poſſit, eius tamen ius naturae imperfectiſſimum eſt, dum futuri ſtatus cogitatio illud non ingreditur, vt recte monuit LEIBNITIVS in iudicio de PVFENDORFIO lato, quod contra BARBEYRACVM defendit BRANCHV in *Part. I. Obſ. Iur. Rom.*

XXI. EXTENSORVM ex non extenſis ortus, non ſatis declaratur, definiendo extenſionem: partium extra partes poſitionem. Negabit enim aduerſarius partes extra partes poni, tum plura non extenſa iunguntur, iureque ſuo ad ratiocinia prouocabit, quibus geometrae continuum e punctis componi non poſſe, euincunt. Haec non eneruantur dicendo, aliam eſſe puncti metaphyſici aliam mathematici conditionem, cum fluant ex ſolo defectu extenſionis, vtrique communi, quantumcunqne de reliquo, qualitatibus ſuis, ſimplex a puncto differat. Eſt vero alius modus extenſa e non extenſis componendi, huic obiectioni non obnoxius, quem nec defenſores nec aduerſarii ſententiae huius animaduerterunt, ex vtraque parte ſueti triumphum ante victoriam canere.

XXII. EXEMPLAR pandectarum Florentinum, Piſanos non Amalfi accepiſſe, a GVIDONE GRANDI et defenſore eius LVCCABERTO euictum eſt.

XXIII. VERE LEIBNITIVS adſeruit, iurisprudentiam veterum Romanorum ad mathematicam methodum accedere.

DE RESOLVTIONE AEQVATIONVM DIFFERENTIALIVM PER SERIES

AD

NEWT. METH. FLVX. PROB. II.

MEDITATA

PERMISSV

INCLYTAE

FACVLTATIS PHILOSOPHICAE LIPSIENSIS

SECVNDVM PRO LOCO

DISPVTABIT

ABR. GOTTHELF KAESTNER

LIPS. M. A. IVR. CAND.

A. D. XXII. SEPT. A. R. S. CIↃ IↃ CC XXXXV.

LIPSIAE

IMPRESSIT IOH. GOTTLOB IMMAN. BREITKOPF.

5

5