ANALYSIS TRIANGVLORVM RECTILINEORVM

CVIVS
PARTEM PRIMAM
RECTORE VNIVERSITATIS EBERHARDINÆ CAROLINÆ MAGNIFICENTISSIMO
SERENISSIMO AC POTENTISSIMO DVCE ET DOMINO
DOMINO
CAROLO
DVCE WIRTEMBERGIÆ ET TECCIÆ REGNANTE
REL. REL.

PRÆSIDE
CHRISTOPH. FRID. PFLEIDERER
VNIVERSITATIS ET COLLEGII ILLVSTRIS PROFESSORE PHYSICES ET MATHESEOS PVBL. ORD.
PRO RITE CONSEQVENDIS MAGISTERII PHILOSOPHICI HONORIBVS
D. AVG. MDCCLXXXIIII.
PVBLICE AD DISPVTANDVM PROPONVNT
CARL CHRISTIAN FERDINAND WECKHERLIN, SCHORNDORFENSIS.
IOHANN CHRISTIAN KOLB, KIRCHO-TECCENSIS.
IOHANNES HAAS, KIRCHO-TECCENSIS.
DAVID FRIEDRICH LEDERER, STVTTGARDIANVS.
CANDIDATI MAGISTERII PHILOSOPHICI IN ILLVSTRI STIPENDIO THEOLOGICO.

TVBINGÆ TYPIS SCHRAMMIANIS.

§. 1.

Datis trianguli rectilinei tribus elementis sufficientibus, quorum simplicissima sunt

1) tria ejus latera,

2) duo latera & angulus ipsis comprehensus,

3) duo latera & angulus alterutri oppositus, unà cum specie anguli qui alteri dato lateri opponitur,

4) duo anguli & latus ipsis interjacens,

5) duo anguli & latus alterutri oppositum;

describi potest triangulum priori omnimode æquale, vel simile: in quo si dimetiamur, quæ in proposito immediate metiri aut non licuit, aut volupe non fuit; horum quantitatem inde inferre poterimus. Exactam autem eam fore confidere non possumus: cum erroribus, quibus dimensio immediata datorum ipsorum obnoxia est, sic accedant ii, qui tam in construendo altero triangulo, quam in dimetiendis postmodum in hoc iis, quorum quantitas desideratur, possunt admitti; utpote a quibus ob limites perfectionis instrumentorum ipsiusque visus organi, summa licet cura & industria adhibitis, tuti esse nequimus. Cum praeterea spatii angustia plerumque proposito simile triangulum notabiliter minus describere cogat; errores constructionis ac dimensionum ipsius tanto plus momenti habebunt ad latera, altitudinem, aream trianguli propositi alteranda, cum hæc per conclusionem a minori ad majus inde inferantur. In longiori præsertim triangulorum invicem connexorum & a se mutuo dependentium serie facile fit, ut vitiorum constructionis geometricæ, quamvis initio insensibilium, eorundemque consequentiarum cumulus ultimo in errores prægrandes excrescat. Quare de methodis cogitatum fuit, ex datis trianguli tribus elementis sufficientibus, speciatim ex iis quæ supra fuere enumerata, ceteras, quæ ad triangulum pertinent, quantitates calculo solo deducendi: vel, si quidem fieri possit, rigorose exactas; vel veris ad minimum, quousque libuerit, aut datorum præcisio concedat & problematis conditio exigat, propinquas.

§. 2. Quanquam, si duo trianguli latera æqualia sunt, etiam anguli illis oppositi æquales sint; ac vicissim (EUCLID. Elem. I, 5. 6.): pariterque, si duo trianguli latera sunt inæqualia, anguli etiam oppositi inæquales sint, & nominatim major sit trianguli angulus, qui opponitur lateri majori; ac vicissim (Elem. I, 18. 19): in eadem tamen ratione geometrica non crescunt ac decrescunt anguli & latera opposita triangulorum. Facillime hoc edocemur triangulo rectangulo æquicruro: cujus angulus ad verticem, rectus (supp.), duplus est alterutrius anguli ad basin (Elem. I, 5. 32); basis autem seu hypotenusa, utpote duobus reliquis trianguli lateribus simul sumtis minor (El. I, 20.), duplo alterutrius cruris seu catheti minor est, & (El. I, 47.) rationem tantummodo ad alterutrum crus habet $= \sqrt{2} : 1$. Aliunde igitur, quam ex comparatione immediata laterum angulorumque oppositorum trianguli, vel arcuum circularium qui hos metiuntur iisdemque proportionales sunt (El. VI, 33.), repetendum est fundadamentum calculi trigonometrici; ad quod sequentibus similibusve ratiociniis auctores ejus deducti fuisse concipi possunt.

§. 3. Si circulus triangulo circumscribitur (El. IV, 5): quemlibet trianguli angulum, utpote ad circumferentiam seu in segmento, metitur dimidius arcus hujus circuli, cui insistit (El. III, 29. VI, 33); proinde quodlibet latus trianguli fit in hoc circulo chorda seu subtensa arcus dupli, qui angulum oppositum metitur.

Fig 1. Datis igitur latere trianguli AB, et angulis ipsi adjacentibus CAB, CBA, proindeque etiam (El. I, 32.) tertio angulo ACB; calculus reliquorum duorum trianguli laterum eo redit: ut ex numero graduum arcus AKB, dato per angulum ACB, & ex data longitudine chordæ AB hujus arcus, calculo eruatur diameter CD circuli triangulo circumscripti; indeque longitudo chordarum AC, BC, quæ in dato hoc circulo subtendunt arcus AFC, BEC, quorum numerus graduum seu ratio ad peripheriam datur per angulos CBA, CAB. Id quod quibusdam ad minimum in casibus ope descriptionis figurarum regularium effici potest.

§. 4. Sint ex. gr. anguli $BAC = 75°$, $ABC = 45°$; adeoque $ACB = 60°$. Diameter CD circuli triangulo circumscripti invenietur, supputando diametrum circuli, in quo chorda arcus 120° seu latus trianguli aequilateri inscripti AB datur: id quod efficietur per El. XIII, 12. ex qua $\overline{CD}^q = \frac{4}{3}\,\overline{AB}^q$.

Tum vero in hoc circulo AC est chorda 90°, seu latus quadrati inscripti; proinde (El. I, 47.) $\overline{AC}^q = \frac{1}{2}\,\overline{CD}^q = \frac{2}{3}\,\overline{AB}^q$.

In eodem circulo BC est chorda arcus 150°; adeoque BD chorda 30°, seu latus dodecagoni regularis inscripti. Facta autem chorda $DK = DB$; & ducta BK, quæ erit latus hexagoni regularis inscripti: est

$$\overline{BD}^q = CD \times DL \text{ (VI, 8. 17.)} = CD(GD - GL) = CD\left(\tfrac{1}{2}CD - \tfrac{1}{4}CD\sqrt{3}\right) \text{quia } BL = \tfrac{1}{2}BK = \tfrac{1}{2}GD \text{ (IV, 15.)}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\overline{CD}^q - \tfrac{1}{4}\,CD^q\sqrt{3}$$

adeoque

$$\overline{BC}^q = \overline{CD}^q - \overline{BD}^q \text{ (I, 47.)} = \tfrac{1}{2}\,\overline{CD}^q + \tfrac{1}{4}\,\overline{CD}^q\sqrt{3} = \tfrac{2}{3}\,\overline{AB}^q + \tfrac{1}{3}\,\overline{AB}^q\sqrt{3}$$

Fig. 2. §. 5. Sint rurſus anguli $ACB = 72°$, $BAC = 30°$; adeoque $ABC = 78°$: & latus $AB = 150$. ped.

Diameter AD circuli triangulo circumſcripti invenietur, ſupputando diametrum circuli, cujus chorda 144° longa ſit 150 ped. Cum arcus 144° non ſit pars aliquota peripheriæ; chorda 144° non eſt latus figuræ regularis: chorda autem BD ſupplementi arcus AB, utpote chorda 36°, eſt latus decagoni regularis circulo inſcripti. Si diameter AD, vel chorda BD daretur: facile ac directe ex utravis determinaretur altera, ope deſcriptionis geometricæ decagoni regularis in circulo vel ſuper latere dato; indeque inferretur AB, cujus quadratum $= \overline{AD}^q - \overline{BD}^q$ (El. III, 31. I, 47.) In præſens, ubi AB datur, indirecte per methodum, quam vocant falſæ poſitionis, expediri poſſe calculum ſuggerit obſervatio: quod, ſi in circulo diametro quacunque ad (fig. 3.) deſcripto inſcribatur decagonum regulare, cujus latus db, juncta chorda ab efficiat triangulum abd ſimile alteri ABD (VI, 4.); (fig. 2, 3.) adeoque ſit $ab : AB = ad : AD$. Sit igitur ex gr. diameter $ad = 100$ ped. Erit (XIII, 10. Schol.)

$$\overline{gh}^q = \overline{gf}^q = 5\,\overline{eg}^q = \tfrac{5}{16}\,\overline{ad}^q = 3125^{\text{ped. quadr.}} \;\&\; gh = 55,9017^{\text{ped.}}$$

$$\overline{bd}^q = \overline{eh}^q = \overline{gh}^q + \overline{ge}^q - 2\,ge \times gh \text{(II, 7. Schol.)} = 6\,\overline{ge}^q - 2\,ge \times gh = \tfrac{3}{8}\,\overline{ad}^q - \tfrac{1}{2}\,ad \times gh$$

$$\overline{ab}^q = \overline{ad}^q - \overline{bd}^q = \tfrac{5}{8}\,\overline{ad}^q + \tfrac{1}{2}\,ad \times gh = 9045,0850^{\text{ped. quadr.}} \;\&\; ab = 95,105^{\text{ped.}}$$

adeoque $95,105 : 150 = 100 : AD$. Unde $AD = 157,72^{\text{ped.}}$

Atqui in hoc circulo (fig. 2.) latus BC trianguli eſt chorda 60°, ſeu latus hexagoni regularis inſcripti. Igitur (IV, 15.)

$$BC = \tfrac{1}{2}\,AD = 78,86^{\text{ped.}}$$

In eodem circulo AC eſt chorda 156°; adeoque DC chorda 24°, ſeu latus pentedecagoni regularis inſcripti. Circulo igitur eiusdem diametri AD inſcriptis triangulo aequilatero FLS (fig. 4.) & pentagono regulari $FIMRK$; erit (fig. 2. 4.) $CD = LM$ (El. IV, 16.), & $\overline{AC}^q = \overline{AD}^q - \overline{LM}^q$ (III, 31. I, 47.)

Fig. 4.

Fig. 4. Atqui $\overline{GH}q = \overline{GF}q = \frac{5}{16}\overline{AD}q$ (XIII, 10. Schol.) $= 7773,5588$ p. q. & $GH = 88,1678$ ped.

$\overline{EH}q = \frac{3}{8}\overline{AD}q - \frac{1}{2}AD \times GH$ uti ſupra de $\overline{eh}q$ fuit oſtenſum

$\overline{MR}q = \overline{FH}q$ (XIII, 10. Schol.) $= \overline{EF}q + \overline{EH}q = \frac{5}{8}\overline{AD}q - \frac{1}{2}AD \times GH$

$\overline{PM}q = \frac{5}{32}\overline{AD}q - \frac{1}{8}AD \times GH = 2148,5588$ ped. quadr. & $PM = 46,3525$ ped.

$\overline{EP}q = \overline{EM}q - \overline{PM}q = \frac{3}{32}\overline{AD}q + \frac{1}{8}AD \times GH = 4070,2882$ p. q. & $EP = 63,7988$ ped.

Porro $\overline{LO}q = \frac{1}{4}\overline{LS}q = \frac{3}{16}\overline{AD}q$ (XIII, 12.) $= 4664,1353$ p. q. & $LO = 68,2944$ ped.

$EO = \frac{1}{4}AD$ (XIII, 12. Schol. 3.) $= 39,4298$ ped.

Hinc $LN = LO - PM \qquad = 21,9419$

$MN = EP - EO \qquad = 24,3690$

Fig. 3. 4. $\overline{CD}q$ ſeu $\overline{LM}q = \overline{LN}q + \overline{MN}q \qquad = 1075,2951$ ped. quadr.

Fig. 3. $\overline{AC}q \quad = \quad \overline{AD}q - \overline{CD}q \qquad = 23800,0930$ p. q. & $AC = 154,27$ ped.

§. 6. Exempla hæc, poſterius præſertim, abunde oſtendunt, quam prolixa & laborioſa foret hæc calculi inſtituendi ratio. Eadem, ob numerum ſatis limitatum figurarum regularium quæ geometrice deſcribi poſſunt (El. IV, 16. ſchol.), multitudinemque arcuum qui nec ipſi ſunt partes aliquotæ peripheriæ, nec eorum ſupplementa, ne illi quidem problematum claſſi, ad quam exempla §§. 4. 5. pertinent, generatim absque aliis ſubſidiis ſufficeret.

Uſus autem ejus fere penitus ceſſaret in reliquis problematum claſſibus; v. gr. quando tria trianguli latera dantur. Hoc caſu facile quidem aſſignaretur diameter CD (fig. 1.) circuli triangulo circumſcripti. Quippe perpendiculo ex vertice anguli C, e quo diameter educta eſt, demiſſo in latus oppoſitum AB, & chorda BD ducta; ob ang. $CAM = CDB$ (III, 25.) triangula rectangula CMA, CBD ſimilia ſunt, eſtque (VI, 4.)

$$CM : AC = BC : CD.$$

Ex datis autem tribus trianguli lateribus facile invenitur ipſius altitudo CM, methodis infra explicandis. Sed quæſtio de magnitudine angulorum trianguli, vel de numero graduum tribuendo arcubus circuli triangulo circumſcripti, quibus anguli ipſius ad circumferentiam inſi-

insistunt, tum ad hanc reducitur: data longitudine chordæ alicujus in circulo, cujus diameter datur, determinare rationem arcuum, quos chorda subtendit, ad peripheriam. Ad quam solvendam si descriptio figurarum regularium vellet adhiberi; inquirendum esset: utrum chorda data, vel chorda supplementi arcus qui datæ chordæ respondet, sit latus figuræ alicujus regularis circulo dato inscriptibilis; & quinam sit numerus laterum hujus figuræ: id quod, paucis quibusdam casibus singularibus exceptis, absque aliis subsidiis non nisi tentando detegi posset.

§. 7. Observatio, qua jam in calculo exempli §. 5. usi sumus, & quam generatim ad quævis triangula extensam sistit Elem. IV, 2. plerisque modo recensitis difficultatibus tollendis inservit. Nimirum per hanc IV, 2. circulo cuicunque inscribi potest triangulum abc, dato ABC (fig. 2. 3.) æquiangulum; proinde simile (VI, 4): quo facto est

$$AB : BC : AC = ab : bc : ac.$$

Atqui ab, bc, ac in circulo pro lubitu assumto sunt chordæ arcuum duplorum, qui metiuntur angulos $c = C$, $bac = BAC$, $abc = ABC$. Proinde generatim latera cujusvis trianguli sunt inter se uti arcuum duplorum, qui angulos trianguli oppositos metiuntur, chordæ in eodem quocunque circulo sumtæ.

Vi hujus propositionis calculus non amplius restringitur ad circulum ipsum triangulo dato circumscriptum: &

1) computandæ circuli diametro, quando anguli trianguli dantur, supersederi potest;

2) opus non est calculum chordarum arcuum duplorum, qui metiuntur hos angulos, speciatim instituere pro quolibet proposito triangulo, sed chordis his semel pro quacunque diametro computatis semper uti licet.

Quodsi

Quodſi ex. gr. conſtet: in circulo, cujus diameter ſit 20pedum, chordas arcuum, 150°, 90°, 120°, reſpective eſſe 19. 318516, 14. 142136, 17. 320508pedum: calculus exempli §. 4. (fig. 1.) expediretur duabus proportionibus ſequentibus:

$$17,320508 : \left\{\begin{matrix} 14,\ 142136 \\ 19,\ 320508 \end{matrix}\right\} = AB : \left\{\begin{matrix} AC \\ BC \end{matrix}\right.$$

§. 8. Planus itaque erit calculus laterum trianguli, cujus unum latus & anguli dantur; ſi pro diametro quacunque computatæ ſuppetant tabulæ chordarum arcuum, ab 0° per ſingulos gradus, aut, majoris exactitudinis gratia, per ſingula graduum minuta, ad 180° usque increſcentium. Chordæ arcuum 180° ſeu ſemicircumferentia majorum eo ipſo jam innoteſcent: cum chorda cujuslibet arcus ſemicircumferentia majoris eadem ſit, quæ arcum ſemicircumferentia minorem ſubtendit, qui prioris ad totam circumferenriam ſeu 360° eſt ſupplementum.

Canonem chordarum arcuum, ab 0° per ſingulos gradus dimidios ad 180° usque creſcentium, modumque eundem computandi exhibet *Ptolemaeus Almag.* Lib. I. Cap. 9. 10. Primus illorum pariter, ac Trigonometriæ tam planæ, quam ſphæricæ, auctor communiter cenſetur *Hipparchus*, jactis ſeculo ante C. N. ſecundo accuratioris Aſtronomiæ fundamentis celebris; quem nominatim *Tractatum de chordis arcuum circularium*, in XII. libros diviſum, ſcripſiſſe refert *Theon in Comment. in Almag.* I, 9. (*Montucla Hiſtor. des Mathemat.* T. I. p. 275.) Ante *Ptolemaeum*, ſub finem ſeculi poſt C. N. primi, *Menelaus Libros III. Sphaericorum*, qui adhuc exſtant, & *Libros VI. de ſubtenſis ſeu chordis* compoſuit (*Montucla* l. c. p. 285. *Heilbronneri Hiſt. Mathes.* p. 334.)

§ 9. Ejusdem canonis chordarum ope expedientur quoque difficultates, quibus calculus angulorum trianguli, cujus latera dantur, ſupra §. 6. premebatur. Cum enim chordæ *LM*, *lm* (fig. 5. 6.) quæ in duobus

circulis

circulis quibuscunque ſubtendunt arcus LIM, lim ſimiles, ſeu ejusdem numeri graduum, generatim inter ſe ſint uti radii EL, el, vel uti diametri MH, mh circulorum; ob triangula ELM, elm, vel HLM, hlm invicem ſimilia (El. VI, 33. 4.): ſi ad (fig. 2. 3.) repræſentet diametrum circuli, pro qua computatus ſit canon chordarum; ſitque abc triangulum circulo huic inſcriptum, ſimile dato ABC: valebunt proportiones

$$AD : ad = \begin{cases} AB : ab \\ BC : bc \\ AC : ac \end{cases}$$

Per quas, computata ex datis lateribus trianguli ABC diametro AD circuli circumſcripti juxta §. 6, inferentur chordæ ab, bc, ac; quæ in circulo, ad quem canon chordarum pertinere ſupponitur, ſubtendunt arcus akb, bdc, afc, arcubus AKB, BDC, AFC reſpective ſimiles. Proinde ſi chordæ iſtæ ab, bc, ac in canone quærantur; & notentur numeri graduum ac minutorum, qui ipſis reſpondent: eo ipſo innoteſcent numeri graduum ac minutorum arcuum AKB, BDC, AFC; quorum dimidii præbebunt menſuras angulorum ACB, BAC, ABC. Certe anguli duo acuti trianguli absque ambiguitate hac methodo innoteſcent.

§. 10. Cum dimidiæ quantitates eandem invicem habeant rationem, quam integræ (El. V, 4.); conſequitur (El. V, 11.): proportionibus §. 7. ſtabilitis $AB : BC : AC = ab : bc : ac$ ſeu propoſitioni: quod latera trianguli ſint inter ſe uti chordæ arcuum duplorum, qui metiuntur angulos oppoſitos trianguli; ſubſtitui poſſe proportiones $AB : BC : AC = \frac{1}{2}ab : \frac{1}{2}bc : \frac{1}{2}ac$ ſeu propoſitionem: quod latera trianguli ſint inter ſe uti dimidiæ chordæ arcuum duplorum, qui angulos triangulo oppoſitos metiuntur. Semiſſes hæ chordarum *ſinus* angulorum appellari conſueverunt. Unde propoſitio: latera cujusvis trianguli rectilinei eſſe inter ſe uti ſinus angulorum oppoſitorum.

§. 11.

§. 11. *Sinus* igitur anguli denotat semissem chordæ, in circulo dato aut pro lubitu assumto subtendentis arcum duplum ejus, qui angulum metitur: nominatim

sin. ACB	in circulo $AKBDCF$	est $\frac{1}{2}AB$;	in circulo $akbdcf$ autem,	$\frac{1}{2}ab$;
sin. BAC	- - -	$\frac{1}{2}BC$;	- - -	$\frac{1}{2}bc$;
sin. ABC	- - -	$\frac{1}{2}AC$;	- - -	$\frac{1}{2}ac$.

Si anguli a circumferentia ad centrum circuli transferuntur: perpendiculum EF, in crus CA anguli BCA (fig. 7.) demissum ab extremo E radii CE pro lubitu resecti ex altero anguli crure CB, sistit sinum anguli ACB pro hoc radio CE, seu in circulo hac semidiametro descripto. Quippe perpendiculo hoc EF producto, donec circumferentiam iterum secet in puncto G: radius CD, chordæ EG sic perpendicularis, tam chordam ipsam EG, quam ejus arcum EDG bifariam secat (El. III, 3. 26.): ita ut EF sit semissis chordæ EG, subtendentis arcum EDG, duplum arcus ED qui angulum ACB metitur.

Pariter ef ejusdem anguli ACB sinus est pro radio Ce.

Expressio igitur, *sinus anguli*, non involvit notionem determinatæ cujuspiam longitudinis; pariter ac numerus graduum arcus alicujus non definit ejus longitudinem. Sed cum triangula CEF, Cef similia sint (VI, 5.); est

$$EF : ef = CE : Ce \text{ vel alterne } EF : CE = ef : Ce$$

h. e. sinus diversi ejusdem anguli sunt inter se uti radii circulorum, ad quos pertinent; pariter ac chordæ (§. 9.): & pro eodem angulo ACB quilibet ejus sinus ad suum radium habet rationem eandem; EF eandem ad CE, quam ef ad Ce; pariter atque arcus diversorum circulorum, qui eundem angulum metiuntur, eandem habent rationem ad suas peripherias (El. VI, 33. Schol. 2). Eodem igitur modo, quo angulum metitur non longitudo arcus, ex vertice anguli inter crura ejus descripti, sed ratio arcus ad suam peripheriam, expressa numero graduum arcus; utpote quæ rationem anguli ad quatuor rectos assignat (VI, 33. Schol. 1.): pariter angulum non determinat longitudo sinus, sed ejus ratio ad radium suum: & vicissim.

§. 12. Ex propositione modo demonstrata, quod ejusdem anguli sinus sint inter se uti radii, ad quos pertinent; h. e. quod

Fig. 8. tam $EF : ef = CE : Ce = CD : Cd$
quam $LK : lk = CL : Cl = CD : Cd$

porro consequitur (El. V, 11.) esse

$$EF : ef = LK : lk \text{ vel alterne } EF : LK = ef : lk$$

h. e Sinus duorum angulorum ad eundem aliquem radium pertinentes esse inter se uti eorundem angulorum sinus pro eodem alio radio quocunque.

§. 13. Hinc cum in circulo, qui triangulo alicui circumscribitur, ipsorum laterum trianguli semisses sint sinus angulorum trianguli oppositorum; utpote semisses chordarum, subtendentium arcus duplos eorum, qui hos angulos metiuntur (§. 11.): rationes mutuæ semissium horum laterum generatim assignant rationes, quas invicem habent sinus angulorum trianguli oppositorum, relati ad eundem aliquem radium (§. 12.) Atqui semisses laterum sunt uti latera ipsa. Quare etiam rationes mutuæ laterum trianguli eædem semper sunt, quæ sinuum angulorum trianguli oppositorum pro eodem radio quocunque. Unde ex ipsorum sinuum consideratione constat propositum §. 10.

§. 14. Vero simile est, sinus in calculo trigonometrico chordis substitutos fuisse ab Mathematicis Arabibus; quos inter jam *Albategnius*, qui circa annum æræ Christ. 880. vixit, in libro *De motu Stellarum* Cap. III, (Norimb. 1537. pag 6. sqq.) usum et canonem eorum declarat. Praeter alia commoda illud inde enascebatur compendium, ut ut ſub quadrante comprehenderentur tabulæ, quæ in ſemicirculum antea debebant diffundi.

Sinus quippe anguli obtuſi æquatur ſinui ſupplementi ipſius ad duos rectos. Etenim juxta priorem ſinus notionem (§. 10. 11.) ſinus anguli 100° ex. gr. eſt ſemiſſis chordæ ſubtendentis arcum 200°. Atqui chorda 200° eadem eſt, quæ ſubtendit arcum 160°. Igitur ſin. ang. 100° eſt ſemiſſis chordæ 160°; quæ per eandem ſinus notionem quoque eſt ſinus anguli 80°, h. e. ſupplementi anguli 100°. Per alteram definitionem (§. 11.) ſinus anguli obtuſi *ACB*, (fig. 9.) pertinens ad radium pro arbitrio ſumtum *CE*, eſt perpendiculum *EF*, ab extremo *E* hujus radii ex crure *CB* reſecti demiſſum in crus alterum anguli *CA*, producendum hoc caſu verſus *H*. Per eandem vero definitionem idem perpendiculum *EF* pariter eſt ſinus anguli acuti *BCH*, qui cum obtuſo *ACB* ſimul valet duos rectos. Ex eadem figura, ſi compleatur circulus, perpendiculumque *EF* producatur, donec ei iterum occurrat, generatim infertur per definitionem priorem: *EF* eſſe ſinum anguli obtuſi *ACB*, utpote ſemiſſem chordæ *EG*, ſubtendentis arcum *EDG* duplum arcus *ED*, qui angulum *ACB* metitur; idemque perpendiculum *EF* pariter anguli *ECH*, priori deinceps poſiti, ſinum eſſe, tanquam ſemiſſem chordæ *EG*, ſubtendentis arcum *EHG* duplum arcus *EH*, qui hunc angulum *ECH* metitur.

§. 15. Ex utraque ſinus notione (§. 11.) porro patet: ſinum anguli recti ſeu 90° eſſe radium ipſum ſeu ſemidiametrum circuli, pro arbitrio ex anguli vertice tanquam centro deſcripti. Et cum diameter circuli ſit maxima ejus chorda (El. III, 15.): radius quoque ſeu ſemidiameter maxima eſt ſemiſſis chordæ; h. e. ſinus anguli recti major eſt ſinu alius cujuscunque anguli ad eundem radium pertinente.

§. 16. Sinus igitur angulorum obliquorum ut partes ſinus anguli recti, ſeu radii pro lubitu ſumti, ſpectari poſſunt: quare hic *ſinus totus* vulgo vocatur; atque ut unitas conſideratur, cujus partibus ſinus reliquorum per numeros fractos genuinos (uno autem excepto veris tantum intra certos limites propinquos) exprimuntur. Quo facto ſinus cujuslibet anguli eſt ad radium ſeu ſinum totum, uti numerator fractionis ſinum hunc deſignantis eſt ad ejus denominatorem; exacte, aut vero prope. Ita

ſin. $30° = \frac{1}{2}$ Chord. $60° = \frac{1}{2}$ rad. ſeu $\frac{1}{2}$ ſin. tot exacte;

ſin. $45° = \frac{1}{2}$ Chord. $90° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ rad. $= \frac{17}{24}$ rad. ſeu $\frac{17}{24}$ ſin. tot. fere.

Unde ſin. $30°$: rad. ſeu ſin. tot $= 1 : 2$ exacte;

ſin. $45°$: rad. ſeu ſin. tot $= 17 : 24$ fere.

Quodſi idem quicunque denominator tribuitur omnibus fractis, per quos ſingulorum ſinuum angulorum obliquorum ratio ad ſinum totum aſſignatur; h. e. ſi radius conſtanter in eundem aliquem numerum partium æqualium diviſus concipitur: ſinus præterea duorum quorumvis angulorum invicem erunt, uti numeratores fractionum, per quas exprimuntur. Sic ſin. $45°$: ſin. $30° = 17 : 12$ fere.

Veteres diametro 120, proinde radio 60 partes tribuebant; tum harum quamlibet, partitione ac denominatione ſimili ei, quæ in gradibus arcuum circularium uſurpatur, in 60 minuta prima, & horum ſingula in 60 minuta ſecunda dividebant; chordasque primum integras, dein dimidias, partibus, minutis & ſecundis radii exprimebant (*Ptolem.* & *Albategn.* locis ſupra cit.) Incommodam partium radii in ſcrupula ſexagena diviſionem proſcripſit celebris aſtronomiæ inſtaurator *Georg. Purbachius* circa medium ſeculi poſt C. N. xv^ti^; et ſinu toto 60000 partium aſſumto, novam adornavit ſinuum tabulam, per dena minuta procedentem: quam *Joh. Regiomontanus*, coeptorum *Purbachii* continuator alacer, per ſingula minuta expandit; ſinu toto, majoris certitudinis gratia, 6000000 particularum conſtituto (*Regiomontani de triangulis omnimodis Libri V.* Norimb. 1533. Præf. p. 6.) Hæc ſinuum ta-

tabula *Regiomontani*, pro ſinu toto 60000 partium, ejusdem *Tabulis directionum profectionumque* (Witebergæ, 1606.) ſubjuncta exſtat (pag. 235. ſeqq.) Perſpectis demum fractionum decimalium commodis, opus jam perfectum retexere, ſinu toto 1000000 partium aſſumto, haud piguit *Regiomontanum* (*Montucla Hiſt. des Mathemat.* T. I. p. 450). Ejus veſtigiis ſeculo ſequenti inſiſtentes *Georg. Joach. Rheticus* & *Valent. Otho* canonem ſinuum exactiſſimum pro minutis ſingulis graduum & denis primorum ſecundis ad radium 10000000000 partium elaborarunt; ita ut exquiſitæ veritatis gratia in calculo ipſo radium particularum 1000000000000000 aſſumerent; &, finita ſupputatione, de ſingulis ſinibus a dextra ſiniſtrorſum notas quinque abſcinderent (*Pitiſci Trigonometriae Libri V.* p. 35. *Weidleri Hiſt. Aſtron.* p. 356. *Wolfii Elem. Mathes.* T. V. p. 72.) Tabulæ noſtræ vulgares excerptum inde canonem ſinuum ad radium 10000000 partium, omiſſis ad ſiniſtram notis tribus, exhibent.

Fabricam ipſam canonis ſinuum, ſubſidiumque, quod mirifico logarithmorum canone *Neperi* calculo trigonometrico acceſſit, inſigne heic exponere limites ſcriptionis prohibent.

§. 17. Propoſitionis §. 10. 13. ſtabiliendae & canonis ſinuum computandi occaſio ſuperius declarata iam complectitur uſum utriusque ad reſolvenda *triangula, quorum unum latus & duo anguli*, proindeque etiam (Elem. I, 32.) tertius, *dantur:* qui *Caſus* igitur 4tum & 5tum §. 1. propoſitum comprehendit. Datis nempe trianguli (fig. 10. 11.) ABC angulis & latere AB; atque in hoc ex vertice anguli oppoſiti C demiſſo perpendiculo CD, ſi quidem neuter angulus, dato lateri adjacens, rectus eſt:

erunt $\text{ſin.}\,ACB : \text{ſin.}\,A = AB : BC$ Unde $BC = \dfrac{\text{ſin.}\,A}{\text{ſin.}\,ACB}\,AB$

$\text{ſin.}\,ACB : \text{ſin.}\,B = AB : AC$ $AC = \dfrac{\text{ſin.}\,B}{\text{ſin.}\,ACB}\,AB$

 ſin.

$$\text{ſin tot} : \left\{ \begin{array}{l} \text{ſin. } A = AC \\ \text{ſin. } B = BC \end{array} \right\} : CD$$

adeoque $\text{ſin. tot ſin. } ACB : \text{ſin } A \text{ ſin. } B = AB : CD$ Unde $CD = \frac{\text{ſin. } A \text{ ſin. } B}{\text{ſin. tot ſin. } ACB} AB$

& pariter $\text{ſin. tot ſin. } ACB : \text{ſin. } A \text{ ſin. } B = \frac{1}{2}\overline{AB}q : \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} AB \times CD \\ \text{Ar. } \Delta^{li} \end{array} \right.$ Area $\Delta^{li} = \frac{\text{ſin. } A \text{ ſin. } B}{2 \text{ ſin. tot ſin. } ACB} \overline{AB}^q$

Fig. 12. §. 18. Quando alteruter angulus A, dato lateri AB adiacens, rectus eſt; calculus abſolvitur proportionibus ſequentibus, tam ex conſideratione ipſius trianguli rectanguli, quam ex accommodatis ad hunc caſum proportionibus praecedentibus:

$$\text{ſin. } C : \text{ſin. tot} = AB : BC$$
$$\text{ſin. } C : \text{ſin. } B = AB : AC$$

pariterque $\text{ſin. } C : \text{ſin. } B = \frac{1}{2}\overline{AB}^q : \frac{1}{2} AB \times AC$ ſeu Ar. trianguli.

Fig. 10. §. 19. Quodſi trianguli duo anguli æquales ſunt; unus A adjacens lateri dato AB, alter ACB ei oppoſitus: tum immediate etiam datur latus $BC = AB$ (El. I, 6.); pro latere AC manet proportio §. 17; ſed ob $BC = AB$ fit

$$\text{ſin. tot} : \text{ſin. } B = \left\{ \begin{array}{l} AB : CD \\ \frac{1}{2}\overline{AB}^q : \frac{1}{2} AB \times CD \text{ ſeu Ar. } \Delta^{li}. \end{array} \right.$$

Fig. 13. §. 20. Quodſi autem trianguli duo anguli A & B, qui dato lateri AB adjacent, æquales ſunt: tum $AC = BC$ (El. I, 6.); & perpendiculum CD biſariam ſecat tam baſin AB, quam angulum ad verticem ACB (El. I, 26.) Proinde

$$\text{ſin. } \tfrac{1}{2} ACB : \text{ſin. tot} = \tfrac{1}{2} AB : AC \text{ ſeu } BC$$

$$\& \text{ ſin. } \tfrac{1}{2} ACB : \text{ſin. } A = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} AB : CD \\ \frac{1}{4}\overline{AB}^q : \frac{1}{2} AB \times CD \text{ ſeu Ar. trianguli.} \end{array} \right.$$

Fig.

Fig. 14. §. 21. Denique ſi trianguli tres anguli æquales ſunt, quilibet $= \frac{2}{3}$ recti $= 60°$: tum etiam latera $AC = BC = AB$ (El. I, 6. Schol.); &, ob baſin AB perpendiculo CD biſariam ſectam, $\overline{CD}^q = \frac{3}{4}\,\overline{AB}^q$ (El. I, 47.) ſeu $4 : 3 = \overline{AB}^q : \overline{CD}^q$

Unde $$2 : \sqrt{3} = \begin{cases} AB : CD \\ \frac{1}{2}\overline{AB}^q : \frac{1}{2} AB \times CD \text{ ſeu Ar. } \triangle^{li} \end{cases}$$

ſeu $$4 : \sqrt{3} = \overline{AB}^q : \text{Ar. trianguli.}$$

Fig. 10. 11. §. 22. Aeque expedita eſt ſolutio *Caſus*, quo *duo trianguli latera, AB, BC, & angulus CAB alterutri BC oppoſitus dantur*; dummodo ſimul ſpecies anguli ACB, qui alteri dato lateri AB opponitur, vel expreſſe indicetur, vel per ipſa tria elementa data determinetur. Poſterius obtinet, quando angulus datus CAB obtuſus eſt, vel rectus; vel quando generatim datum latus BC, dato angulo CAB oppoſitum, majus eſt altero latere dato AB: quippe tum ſemper acutus ſit, oportet, angulus ACB (Elem. I, 18. 32.). Erit autem

(§. 10. 13.) $$BC : AB = \text{ſin. } A : \text{ſin. } ACB$$

Unde, quia (ſupp.) ſpecies anguli ACB datur, ex ſinu ipſius per calculum invento habebitur ope tabularum ang. ACB; & tum quoque (El. I, 32.) tertius trianguli angulus B. Quo cognito erit

$$\text{ſin. } A : \text{ſin. } B = BC : AC$$

$$\text{ſin. tot} : \text{ſin. } B = \begin{cases} BC : CD \\ \frac{1}{2} AB \times BC : \frac{1}{2} AB \times CD \text{ ſeu Ar. trianguli.} \end{cases}$$

§. 23. Quando datus angulus CAB acutus, & latus datum BC ipſi oppoſitum minus eſt altero latere dato AB; nec ſimul ſpecies anguli ACB, qui huic lateri opponitur, cognita eſt: inventus per proportionem primam §. 22. ſin. ACB, ambiguum relinquit, utrum pro ang. ACB ſumendus ſit angulus acutus, qui ſinui invento in tabulis reſpondere deprehenditur; an obtuſus, ejus ſupplementum; quia idem ſinus ad utrumque pertinet (§. 14.). Verum hæc ambiguitas non eſt

vitium

vitium calculi trigonometrici: ſed ex problematis ipſius conditione, quod omnimode determinatum non eſt, conſequitur; & calculo cum conſtructione geometrica, per interſectionem circuli dati & rectæ poſitione datæ efficienda, communis eſt.

Fig. 12. §. 24. Quodſi in problemate præcedenti angulus datus CAB rectus eſt: tertium latus AC, indeque etiam area trianguli, immediate ex datis lateribus AB, BC inferuntur per Elem. I, 47.

Fig. 10. §. 25. Si in eodem caſu duo trianguli latera data AB, BC æqualia ſunt: ex dato angulo CAB immediate etiam innoteſcit ang. ACB ipſi æqualis (El. I, 5.); & problema redit ad caſum tractatum §. 19.

§. 26. Pergamus nunc ad *Caſum*, quo *trianguli tria latera dantur*. (Fig. 14.) Quæ ſi *primo* æqualia fuerint, ſeu triangulum *aequilaterum*: quilibet eius angulus erit $= \frac{1}{3}$ recti $= 60°$ (El. I, 5. Schol.); altitudo autem CD & area invenientur eodem modo, quo §. 21.

Fig. 13. §. 27. *Secundo* ſi duo trianguli data latera AC, BC æqualia ſunt, ſeu triangulum *iſosceles* eſt; proinde anguli ad baſin A & B æquales ſunt (El. I, 5.); & perpendiculum CD tam angulum ad verticem ACB, quam baſin AB bifariam ſecat (I, 26.): erit

$$\overline{CD}^q = \left\{\begin{matrix} \overline{AC}^q - \overline{AD}^q \text{ El. I, 47.} \\ (AC+AD)(AC-AD) \text{ II, 5.} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \overline{AC}^q - \frac{1}{4}\overline{AB}^q \\ (AC+\frac{1}{2}AB)(AC-\frac{1}{2}AB) \end{matrix}\right.$$

unde altitudo & area trianguli innoteſcent:

$$\& \quad AC : \left\{\begin{matrix} AD \\ \frac{1}{2}AB \end{matrix}\right\} = \text{ſin. tot} : \text{ſin. } \tfrac{1}{2} ACB$$

unde, cum ang. $\frac{1}{2} ACB$ neceſſario acutus ſit, innoteſcit hic angulus, adeoque etiam ejus duplus, ſeu ang. ipſe ad verticem ACB: quo a duobus rectis ſubtracto, reſtat ſumma angulorum ad baſin; cujus ſummæ dimidium exhibet utrumque hunc angulum.

§. 28.

§. 28. Iidem brevius inveniuntur, ſubtrahendo angulum $\frac{1}{2}$ ACB ab recto ſeu 90°. Etenim ob angulos ad D rectos, uterque angulus A, B cum ang. $\frac{1}{2}$ ACB pariter ſimul efficit rectum (El. I, 32.); quare angulorum A vel B & $\frac{1}{2}$ ACB unus alterius *complementum* vocatur. Hinc etiam ſinus ang. $\frac{1}{2}$ ACB dicitur ſinus complementi ang. A vel B: quod abbreviando ſcribitur ſin. $\frac{1}{2}$ ACB = Co. ſin. A vel B = Coſin. A vel B; & legitur: ſinus ang. $\frac{1}{2}$ ACB eſt *Coſinus* ang. A vel B. Viciſſim ſin. A vel ſin. B = Co. ſin. $\frac{1}{2}$ ACB = Coſin. $\frac{1}{2}$ ACB.

Coſinus igitur anguli acuti denotat ſinum complementi huius anguli ad rectum ſeu ad 90°. Proinde dati anguli acuti coſinus invenitur: menſuram anguli ſubtrahendo ab 90°, & quærendo ſinum anguli reſidui. Viciſſim coſinu anguli acuti dato, invenitur angulus: quærendo in tabulis angulum, cujus ſinus aequatur coſinui dato; & hunc angulum ſubtrahendo ab 90°. Ceterum modus, quo tabulæ ſinuum diſponuntur, ab ſubtractionum illarum a 90° labore liberat.

His poſitis, erit quoque (§. 27.) $\left.\begin{matrix} AC \\ BC \end{matrix}\right\} : \frac{1}{2} AB = \text{ſin. tot} : \left\{\begin{matrix} \text{Coſin. } A \\ \text{Coſin. } B \end{matrix}\right.$

§. 29. *Tertio* ſi data tria trianguli latera inæqualia ſunt, ſeu triangulum *ſcalenum* eſt: propoſitiones I, 47. II, 12. 13. Elem. earumque converſæ ſequentem primum offerunt methodum, altitudinem, aream angulosque trianguli calculo determinandi.

Comparando quadratum lateris maximi cum ſumma quadratorum reliquorum duorum laterum, inveſtigetur: cujus ſpeciei, ratione habita angulorum, ſit triangulum.

Nempe ſi quadratum maximi lateris æquatur ſummæ quadratorum reliquorum duorum laterum; h. e. ſi $\overline{BC}^q = \overline{AB}^q + \overline{AC}^q$; (fig. 12.) proindeque (El. I, 48.) triangulum ad A rectangulum eſt; erit area trianguli $= \frac{1}{2} AB \times AC$;

& $\quad BC : \left\{\begin{matrix} AB \\ AC \end{matrix}\right\} = \text{ſin. tot} : \left\{\begin{matrix} \text{ſin. } C \text{ vel Coſin. } B \\ \text{ſin. } B \text{ vel Coſin. } C \end{matrix}\right.$

§. 30. Si quadratum maximi lateris majus est summa quadratorum reliquorum duorum laterum; h. e. si $\overline{BC}^q > \overline{AB}^q + \overline{AC}^q$; (fig. 11.) adeoque triangulum ABC ad A obtusangulum: tum

$$2\,AB \times AD = \overline{BC}^q - (\overline{AB}^q + \overline{AC}^q) \text{ El. II, 12. \& } AD = \frac{\overline{BC}^q - (\overline{AB}^q + \overline{AC}^q)}{2\,AB}$$

Unde dein $\overline{CD}^q = \overline{AC}^q - \overline{AD}^q$ I, 47. $= (AC + AD)(AC - AD)$ II, 5. Schol. 1.

$$AC : AD = \text{sin. tot} : \text{sin. } ACD$$

$$\& \quad BC : \begin{cases} BD \\ AB + AD \end{cases} = \text{sin. tot} : \text{sin. } BCD \text{ seu Cosin. } B$$

posteaque ang. $CAB = D$ seu $90° + ACD$ (I, 32.)

& ang. $ACB = BCD - ACD$.

§. 31. Si quadratum lateris maximi minus est summa quadratorum duorum laterum reliquorum; h. e. si $\overline{BC}^q < \overline{AB}^q + \overline{AC}^q$; (fig. 10.) & proinde triangulum acutangulum: tunc

$$2\,AB \times AD = \overline{AB}^q + \overline{AC}^q - \overline{BC}^q \text{ (II, 13.) \& } AD = \frac{\overline{AB}^q + \overline{AC}^q - \overline{BC}^q}{2\,AB}$$

Unde rursus $\overline{CD}^q = \overline{AC}^q - \overline{AD}^q = (AC + AD)(AC - AD)$

$$AC : AD = \text{sin. tot} : \text{sin. } ACD \text{ seu Cosin. } A$$

$$BC : \begin{cases} BD \\ AB - AD \end{cases} = \text{sin. tot} : \text{sin. } BCD \text{ seu Cosin. } B$$

denique ang. $ACB = ACD + BCD$

Fig. 10. 11. §. 32. Angulo ACD determinato per proportionem $AC : AD =$ sin. tot: sin. ACD; indeque cognito angulo $BAC = 90° \pm ACD$ (§. 30. 31): reliquis duobus trianguli angulis determinandis etiam inserviunt proportiones sequentes

$$BC : \begin{cases} AC \\ AB \end{cases} = \text{sin. } A : \begin{cases} \text{sin. } B \\ \text{sin. } ACB \end{cases}$$

Sed methodus §. 30. 31. & commodior est & exactior. Quippe per proportiones modo indicatas determinatio angulorum B & ACB pendet ab angulo BAC, cujus magnitudo raro rigorose exacta habebitur; & quidem ab ejus sinu, ex tabulis demum promendo.

Ge-

Generatim quamlibet quantitatem quæſitam, quousque fieri poteſt, immediate ex ipſis elementis datis, vel ſaltim ex primis ſimpliciſſimisque eorum conſequentiis deducere convenit: ut tam calculus efficiatur facilior ac concinnior; nec præter neceſſitatem obnoxius reddatur influxui defectus præciſionis rigoroſæ, quo conſequentiæ præcedentes laborant: quam ut ſingulas quantitates incognitas ſeorſim & independenter ab reliquis determinare poſſimus, quando aliquam earum ſolam deſideramus; nec alias prius ſupputare neceſſe habeamus, quas noſſe in præſens haud intereſt.

Fig. 10. 11. Ex iisdem rationibus congruum non eſt §§. 27. 30. 31. uti proportionibus $\left.\begin{matrix} AC \\ BC \end{matrix}\right\} : CD = \text{ſin. tot} : \left\{\begin{matrix} \text{ſin. } A \\ \text{ſin. } B \end{matrix}\right.$ ſi altitudo trianguli CD modis ibidem indicatis determinatur; &, quod plerumque fit, lateribus trianguli incommenſurabilis eſt: præſertim ſi anguli ſoli, nec pariter area trianguli deſiderantur.

Fig. 15. §. 33. Ceterum, cujuscunque ſpeciei, ratione habita angulorum, ſit triangulum ſcalenum, cujus latera dantur: generatim calculus angulorum ejus inſtitui poterit methodo expoſita §. 31; dummodo perpendiculum ſeu altitudo AE in maximum illius latus BC tanquam baſin demittatur. Cum enim anguli B, C trianguli, qui maximo lateri BC adjacent, neceſſario acuti ſint: perpendiculum AE ſemper intra triangulum cadet; eruntque (El. II, 13.)

$$CE = \frac{\overline{BC}^q + \overline{AC}^q - \overline{AB}^q}{2\,BC} \;\&\; BE = BC - CE \text{ vel} = \frac{\overline{BC}^q + \overline{AB}^q - \overline{AC}^q}{2\,BC}$$

Unde dein $AC : CE = \text{ſin. tot} : \text{ſin. } CAE$ vel Coſin. C

$AB : BE = \text{ſin. tot} : \text{ſin. } BAE$ vel Coſin. B

& tandem ang. CAB, cujuscunque fuerit ſpeciei, $= CAE + BAE$.

§. 34. Quodſi ex vertice anguli A, qui lateri maximo BC opponitur, tanquam centro, & radio = lateri minimo AC, circulus de-

 ſcri-

scribitur; qui basin. BC ita in puncto F secabit, ut sit $FE = CE$ (El. III, 3.) adeoque BC, BE, BF sint in proportione arithmetica continua: ac porro latus BA producatur, donec circulum rursus secet in puncto G: fit

$$BC : \left\{\begin{matrix} BG \\ AB + AC \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} BL \\ AB - AC \end{matrix}\right\} : BF \text{(El. III, 36. Schol. 1. VI, 16.)}$$

h. e. maximum trianguli latus BC est ad summam reliquorum duorum laterum AB & AC, uti horum differentia ad rectam BF, tertiam arithmetice proportionalem lateri maximo seu basi BC ejusdemque a perpendiculo AE sectæ segmento majori BE.

Tum vero $BE = \frac{BC + BF}{2}$; & $CE = \frac{1}{2} CF = \frac{BC - BF}{2}$

Quo pacto quadrandis trianguli lateribus ad invenienda basis BC segmenta BE, CE potest supersederi.

§. 35. Juxta §. 33. anguli acuti C, B trianguli scaleni cujusvis ABC determinantur per proportiones sequentes

$$\left.\begin{array}{rl} & AC : CE \\ \text{vel (VI, 1.)} & 2BC \times AC : 2BC \times CE \\ \text{h. e. (II, 13.)} & 2BC \times AC : \overline{BC}^q + \overline{AC}^q - \overline{AB}^q \end{array}\right\} = \text{sin. tot} : \text{Cosin. } C$$

$$\left.\begin{array}{l} AB : BE \\ 2BC \times AB : 2BC \times BE \\ 2BC \times AB : \overline{BC}^q + \overline{AB}^q - \overline{AC}^q \end{array}\right\} = \text{sin. tot} : \text{Cosin. } B$$

(Fig. 10.) Pariter, si triangulum acutangulum est, angulus ejus A maximo lateri BC oppositus invenitur (§. 31.) per proportionem

$$\left.\begin{array}{l} AC : AD \\ 2AB \times AC : 2AB \times AD \\ 2AB \times AC : \overline{AB}^q + \overline{AC}^q - \overline{BC}^q \end{array}\right\} = \text{sin. tot} : \text{Cosin. } A$$

Proinde generatim in triangulo scaleno quocunque Cosinus cujuslibet anguli acuti est ad sinum totum; uti excessus, quo summa quadratorum laterum angulum comprehendentium superat quadratum lateris angulo oppo-

oppositi, est ad duplum rectangulum sub lateribus angulum comprehendentibus contentum. Qua regula generali calculus angulorum horum trianguli immediate ad ipsa elementa data, h. e. ad latera trianguli reducitur.

§. 36. Ceterum modus computandi, quem hæc regula præcipit, ipse simul edocet: utrum angulus trianguli, ad quem determinandum applicatur, re ipsa acutus sit, nec ne. Erit quippe acutus, quotiescunque summa quadratorum laterum, quæ angulum comprehendunt, major est quadrato lateris oppositi.

Quodsi summa quadratorum laterum, quæ angulum comprehendunt, æqualis est quadrato lateris oppositi: angulus rectus est (El. I, 48.); proinde ejus complementum & cosinus $= o$. Idem hoc casu consequitur ex regula §. 35; quia tunc $\overline{AB}^q + \overline{AC}^q - \overline{BC}^q = o$. (fig. 12.)

§. 37. Verum si summa quadratorum laterum, quæ angulum comprehendunt, minor est quadrato lateris oppositi; adeoque angulus obtusus: proprio ac stricto sensu (fig. 11.) $\overline{BC}^q$ subtrahi non potest ab $\overline{AB}^q + \overline{AC}^q$; neque angulo BAC tribui complementum ac cosinus. Hoc casu res concipitur modo sequenti; cujus applicatio frequentis est usus, ac momenti insignis cum ad alia, tum ad ambitum regularum absque omni limitatione ad omnes casus analogos extendendum, quod speciatim heic spectamus.

Si quispiam A habet 3500 fl; & debet 2400 fl; facultates ipsi propriæ sunt $3500 - 2400 = 1100$ fl. Generatim excessus possessionum super debita indicabit facultates personæ A proprias, si quas habet: habebit autem, quotiescunque possessiones debitis prævalent. Quodsi alius B pariter possidet 3500 fl; sed debet 3600 fl: hic solvendo impar est 100 fl; nec facultatibus tantum sibi propriis caret, sed 100 fl. plus debet quam possidet; vel omnibus, quæ possidet, ad solvenda debita impenſis, non ſolum nihil ipſi proprium reſtat, ſed adhucdum debet 100 fl. Hocque denotatur expreſſione: facultates proprias perſonæ *B* eſſe 3500 — 3600 = — 100 fl. Iisdem caſibus facultates propriæ perſonæ *A* dicuntur poſitivæ ſeu affirmativæ; h. e. re ipſa tales, ſeu ejus conditionis ac naturæ, quam quæſtio & regula illi ſolvendæ præſcripta ſupponebant: facultates autem propriæ perſonæ *B* vocantur negativæ ſeu ſubtractivæ; h. e. conditionis ac naturæ oppoſitæ ei, de qua quærebatur. Quodſi dein uterque *A* & *B* acquirant 800 fl: facultates propriæ prioris *A* jam erunt 800 + 1100 = 1900 fl; alterius autem *B* facultates propriæ erunt 800 — 100 = 700 fl. Contra ſi quæratur: quantum uterque acquirere debeat, ut propriæ ipſis facultates efficiant 1500 fl? reperitur *A* debere acquirere 1500 — 1100 = 400 fl; ſed *B* 1500 + 100 = 1600 fl.

Sic generatim, ſi quæſtio quæpiam exigit, ut ad eam reſpondeatur per exceſſum quantitatis alicujus *C* ſuper alteram *D*; & in caſu quodam particulari numerus, qui exprimit quantitatem *C*, minor prodit eo, qui quantitatem *D* exprimit: reſponſio ſubtractiva fit ſeu negativa; ſubtractio per regulam generalem præſcripta tota effici nequit, ſed aliquid adhuc ſubtrahendum reſtat; & reſiduum ſubtractionis actualis numeri minoris *C* a majori *D* conditionem obtinet denominationemque oppoſitam ei, quæ in quæſtione proponebatur: pars quippe eſt quantitatis *D*, & ejusdem cum hac nominis ac naturæ; non vero ejusdem cum quantitate *C*, quod quæſtio & regula ſupponebant. Idem in combinationibus ulterioribus, ubi regulæ generales addere jubent reſiduum prioris ſubtractionis, ſubtrahi debebit; contra addi, ubi regulæ generales exigunt reſidui poſitivi ſubtractionem.

Fig. 11. Quando igitur $\overline{BC}^q > \overline{AB}^q + \overline{AC}^q$; adeoque ang. BAC obtuſus: tum quantitas $\overline{AB}^q + \overline{AC}^q - \overline{BC}^q$ fit negativa; indeque etiam Coſin. BAC: vel tum eſt

$$\text{Coſin.}\,BAC = \frac{-(\overline{BC}^q - (\overline{AB}^q + \overline{AC}^q))\ \text{ſin. tot}}{2\,AB \times AC} \text{ ſeu } -\text{Coſin.}\,BAC = \frac{\overline{BC}^q - (\overline{AB}^q + \overline{AC}^q)}{2\,AB \times AC}\,\text{ſin. tot}$$

Quid

Quid hæ expressiones significent, facile colligitur ex solutione particulari hujus casus §. 30. Ex hac quippe constat esse

$$\text{sin. } ACD \text{ vel Cosin. } DAC = \frac{\overline{BC}^q - (\overline{AB}^q + \overline{AC}^q)}{2\,AB \times AC} \text{ sin. tot.}$$

Quare $-$ Cosin. $BAC =$ Cosin. DAC vel sin. ACD.

Expressio igitur negativa Cosinus alicujus anguli BAC primo obtusum esse angulum denotat; dein angulum, cui idem cosinus positive consideratus in tabulis respondere deprehenditur, exhibere angulum DAC, supplementum hujus obtusi BAC; vel angulum acutum, cujus sinus = cosinui isti positive sumto, æquari angulo ACD, quem ad rectum addere oportet, ut prodeat ang BAC, non ab recto subtrahere, quod §. 31. fig. 10. fieri debebat, ubi Cosin. BAC positivus prodit.

Prouti igitur duobus angulis, uni acuto, alteri obtuso, qui simul valent duos rectos, seu quorum unus alterius est ad duos rectos supplementum, idem respondet sinus (§. 14): sic idem quoque illis respondet cosinus; ea tamen cum discrepantia, ut cosinus anguli obtusi sit negativus. Pariter complementum anguli obtusi negativum est: h. e. nihil ei deficit ad rectum; contra eandem ab illo quantitatem demere oportet, quæ acuto, supplemento ipsius, addenda est, ut angulus rectus obtineatur.

§. 38. Hæc ulterius illustrantur considerationibus sequentibus. Sit (fig. 16.) ang. ACE acutus. Perpendiculum EF, ab extremo E radii CE in crus ipsius CA demissum, erit anguli hujus sinus ad radium CE (§. 11): pariter $CF = EK$ est sinus complementi ipsius $ECF = ECD$, pro eodem radio. Cosinum igitur anguli acuti, ut ACE, exhibet segmentum CF cruris ipsius seu radii CA, hinc vertice C anguli, inde sinu ejus EF terminatum, & ad easdem partes verticis seu centri C situm, ad quas crus seu radius CA inde protenditur. Crescente

ſcente angulo ACE: creſcit ejus ſinus EF, & vertici ſeu centro C propius admovetur; coſinus CF autem decreſcit. Quando angulus ad rectum ACD usque excreſcit: ſinus ipſius, ad maximum ſuum valorem provectus, cum radio CD coincidit; complementumque ac coſinus ejus evaneſcunt. Inde ſi angulus augeri pergit, atque obtuſus fit: ſinus ipſius iterum decreſcit; & in crus AC productum, ſed etiamnunc ad easdem rectæ AB partes cadit: complementum autem ejus in ſtatum oppoſitum migrat; nihil jam ad rectum ei deeſt, quod addi debeat, ſed exceſſus obtinet ſubtrahendus: atque coſinus, h. e. ſegmentum cruris ſeu radii CA, verticem ſeu centrum C inter & ſinum interjectum renaſcitur ad partes verticis ſeu centri C oppoſitas ſitui, quem in crure ſeu radio CA prius obtinebat; hæcque poſitio priori oppoſita in calculo denotatur ſigno (—), & denominatione quantitatis negativæ: quoniam re ipſa ſi a termino C, unde coſinus incipit, progrediaris verſus A, quo progreſſu diſtantia ad has partes a termino C, ſive coſinus creſcit; provectus autem ad punctum A usque, ubi maximum ſuum valorem obtinet coſinus, regrediaris inde verſus B: coſinus ſeu diſtantia a termino C magis magisque decreſcens ad easdem, ad quas prius, a termino C partes tantum jacet, quoad regreſſus ab A verſus B minor eſt longitudine AC: ulterius autem ſi ab A verſus B regrediaris; diſtantia a termino C ſeu coſinus jam cadit ad partes prioribus oppoſitas, ad quas, continuato regreſſu, magis magisque augetur. Et quando angulus obtuſus ACG tanto præciſe rectum excedit, quanto acutus ACE ab recto deficit; h. e. quando ang. $DCG = DCE$, adeoque etiam ang. $BCG = ACE$: tum $GH = EF$, pariterque $CH = CF$ (El. I, 26.); h. e. ſin. $ACG =$ ſin. ACE, eodem ſervato ſigno, quia ad easdem partes rectæ AB, nempe ſupra eam jacet utrumque perpendiculum GH, EF; ſed — Coſin. $ACG =$ Coſin. ACE, ſeu Coſin. $ACG = -$ Coſin. ACE, quia longitudine quidem æquantur, ſed in recta AB jacent ad partes oppoſitas termini C.

§. 39.

§. 39. Idem propositiones inter I, 47. II, 12. 13. Elem. quibus proposita §§. 29. seqq. nituntur, obtinet nexus. Quamdiu ang. BAC (fig. 10.) acutus est; proindeque segmentum AD basis AB perpendiculo CD rescinditur ab ipsa basi AB, seu ad easdem a termino A partes jacet, ad quas basis ipsa AB: est

$$\overline{BC}^q = \overline{AB}^q + \overline{AC}^q - 2\, AB \times AD \text{ (II, 13.)}$$

Crescente angulo acuto A, magis magisque decrescit segmentum AD & rectangulum $AB \times AD$. Quando ang. A abit in rectum: (fig. 12.) perpendiculum CD coincidit cum latere CA; segmentum AD, & rectangulum $AB \times AD$ evanescunt, fitque $\overline{BC}^q = \overline{AB}^q + \overline{AC}^q$ (I, 47.) Ulterius crescente ang BAC, (fig. 11.) & migrante in obtusum: segmentum AD rescinditur a basi AB producta ad partes oppositas termini A, & $\overline{BC}^q$ fit $= \overline{AB}^q + \overline{AC}^q + 2\, AB \times AD$ (II, 12.): h. e. segmentum AD & rectangulum $AB \times AD$ obtinent signum oppositum ei, quod ante habuerant; prius considerata ut positiva jam in negativa cum situ opposito segmenti AD transeunt.

§. 40. Eorum, quæ §§. 36. seqq. declarata fuere, subsidio omnimode generalis fit regula §. 35. & determinandis quibuslibet angulis trianguli scaleni cujusvis inservit. Generatim nempe est

Fig. 10. 11. 12. $2\,AB \times AC : \overline{AB}^q + \overline{AC}^q - \overline{BC}^q = \text{sin. tot} : \text{Cosin. } A$

seu $$\text{Cosin. } A = \frac{\overline{AB}^q + \overline{AC}^q - \overline{BC}^q}{2\, AB \times AC} \text{ sin. tot.}$$

Expressio hæc sub sequenti etiam forma sisti potest

$$\text{Cosin. } A = \left(\frac{AB}{AC} + \frac{AC}{AB} - \frac{\overline{BC}^q}{AB \times AC}\right) \frac{\text{sin. tot}}{2}:$$

quæ calculo subducendo commodior est, quando non ipsa trianguli latera, sed eorum logarithmi per anteriorem calculum immediate dantur. Pariter

$$\text{Cosin. } B = \frac{\overline{BC}^q + \overline{AB}^q - \overline{AC}^q}{2\, BC \times AB} \text{ sin. tot.} = \left(\frac{BC}{AB} + \frac{AB}{BC} - \frac{\overline{AC}^q}{BC \times AB}\right) \frac{\text{sin. tot}}{2}$$

$$\text{Cosin. } C = \frac{\overline{BC}^q + \overline{AC}^q - \overline{AB}^q}{2\, BC \times AC} \text{ sin. tot.} = \left(\frac{BC}{AC} + \frac{AC}{BC} - \frac{\overline{AB}^q}{BC \times AC}\right) \frac{\text{sin. tot}}{2}$$

§. 41. En aliam triangula scalena, quorum tria latera dantur, resolvendi methodum; quæ priori multis in casibus præstat, speciatim quando triangulum rectangulum aut commensurabile esse non præsumitur.

Fig. 17. Triangulo proposito ABC inscribatur circulus (El. IV, 4.) cujus centrum sit S; & cujus circumferentia tangat latera trianguli in punctis D, L, K. Ductis ex centro S rectis SA, SB, SC ad vertices angulorum trianguli; hoc dividetur in tria æque alta SAB, SBC, SAC super lateribus AB, BC, AC trianguli propositi (El. III, 18.) Unde consequitur: triangulum ABC æquari triangulo, cujus basis summæ laterum trianguli ABC seu ejus perimetro, altitudo autem radio SD circuli triangulo ABC inscripti æqualis sit (El. VI, 1.); proinde etiam (I, 41.) rectangulo contento sub dimidia ejus perimetro & sub radio SD circuli ei inscripti.

Productis duobus trianguli lateribus, ex gr. AB, AC, describatur alter circulus; qui latera hæc producta BI, CN, & tertium trianguli latus BC tangat in punctis F, H, M. Centrum hujus circuli erit punctum G, in quo recta bifariam secans angulum alterutrum CBI, BCN, secat rectam productam AS, quæ angulum BAC bifariam secat (Demonstr. IV, 4. El.)

$$\left.\begin{array}{lrcl} \text{Tum fit} & AF & = & AH \\ \& & AD & = & AK \end{array}\right\} \text{El. III, 36. Schol. 2. vel Demonstr. IV, 4.}$$

$$\text{Proinde} \quad \overline{DF = KH}$$

h. e.

h. e. $BD+BF = CK+CH$

ſeu $BL+BM = CL+CM$ per propoſitiones modo citatas Elem.

h. e. $2BM+LM = 2CL+LM$

adeoque $2BM = 2CL$ & pariter $\left.\begin{matrix}BM\\BF\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}CL\\CK\end{matrix}\right.$

$$\text{Porro } 2AF = \left\{\begin{matrix} AF + AH \\ AB + \begin{Bmatrix}BF\\BM\end{Bmatrix} + AC + \left\{\begin{matrix}CH\\CM\end{matrix}\right. \\ AB + AC + BC\end{matrix}\right.$$

$$AF = \frac{AB + AC + BC}{2} = \text{dimidiæ perimetro trianguli}$$

adeoque area trianguli $ABC = AF \times SD$.

Atqui $AD : SD = AF : GF$ (VI, 4.)

& hinc $AF \times AD : \begin{Bmatrix} AF \times SD \\ \Delta^{lum} ABC \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} AF \times SD \\ \Delta^{lum} ABC \end{Bmatrix} : GF \times SD$ (VI, 1.)

Sed in quadrilatero $FBMG$, cujus anguli F & M recti ſunt (III, 18.)
ſunt anguli $FGM + FBM = 2$ Rectis (I, 32. Schol. 6.)
Pariter anguli $ABC + FBM = 2$ Rectis (I, 13.)
Igitur Ang. $FGM = ABC$; & quoque $\frac{1}{2} FGM = \frac{1}{2} ABC$
h. e. ang. $FGB = DBS$.
Eodem modo oſtenditur, eſſe ang. $FBG = DSB$.
Triangula igitur FGB, BSD, ad F & D rectangula, ſimilia ſunt (VI, 4.); & $GF : BD = BF : SD$.
Proinde $GF \times SD = BD \times BF$ (VI, 16.)
atque $AF \times AD : \Delta^{lum} ABC = \Delta^{lum} ABC : BD \times BF$
ubi jam conſtat eſſe $AF = \frac{AB+AC+BC}{2} = \frac{1}{2}$ perimetro Δ^{li}

$$\text{Porro } 2AD = \left\{\begin{matrix} AD + AK \\ AB + AC - (BD + CK) \\ AB + AC - (BL + CL) \\ AB + AC - BC \end{matrix}\right.$$

$$2\,BD = \begin{cases} BD + BL \\ AB + BC - (AD + CL) \\ AB + BC - (AK + CK) \\ AB + BC - AC \end{cases}$$

$$2\,BF = \begin{cases} CL + CK \quad \text{per ſuperius demonſtrata} \\ BC + AC - (BL + AK) \\ BC + AC - (BD + AD) \\ BC + AC - AB \end{cases}$$

Igitur $AD = \dfrac{AB + AC - BC}{2}$

$$BD = \frac{AB + BC - AC}{2}$$

$$BF = \frac{BC + AC - AB}{2}$$

Vel $AD = \left\{ \begin{array}{l} AF - (BD + BF) \\ AF - (BL + CL) \\ AF - BC \end{array} \right\} = \tfrac{1}{2}\,\text{perimetro} - BC$

$$BD = \left\{ \begin{array}{l} AF - (AD + BF) \\ AF - (AK + CK) \\ AF - AC \end{array} \right\} = \tfrac{1}{2}\,\text{perimetro} - AC$$

& $BF = AF - AB \qquad = \tfrac{1}{2}\,\text{perimetro} - AB$

Area itaque trianguli media eſt geometrice proportionalis inter duo rectangula, quæ ſub dimidia trianguli perimetro & ſub dimidiis exceſſibus ſummæ binorum quorumvis trianguli laterum ſuper tertium; ſeu ſub dimidia trianguli perimetro & ſub exceſſibus ejusdem dimidiæ perimetri ſuper ſingula trianguli latera, continentur.

§. 42. Ope hujus propoſitionis computata trianguli area ſi per dimidium lateris maximi BC dividitur, prodit altitudo AE (fig. 15.) trianguli inſiſtens baſi BC; & tum $AB : AE = \text{ſin. tot} : \text{ſin. } B$

$$AC : AE = \text{ſin. tot} : \text{ſin. } C$$

Qui

Qui calculus integer per logarithmos commode, & absque interruptione per tranſitus a logarithmis ad numeros & ab his rurſus ad illos, abſolvetur. Et cum anguli B, C lateri maximo BC trianguli adjacentes neceſſario acuti ſint; determinatio eorum per ſuos ſinus nulla laborabit ambiguitate. Tandem maximus trianguli angulus $BAC = 180° - (B + C)$.

§. 43. Generatim poſita perimetro trianguli $= S$; ex §. 41. erit area triang. $ABC = \sqrt{\tfrac{1}{2}S(\tfrac{1}{2}S - BC)(\tfrac{1}{2}S - AC)(\tfrac{1}{2}S - AB)}$

$$\text{ſeu area trianguli} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{BC+AB+AC}{2} \times \dfrac{AB+AC-BC}{2} \times \dfrac{BC+AB-AC}{2} \times \dfrac{BC+AC-AB}{2}} \\[2ex] \tfrac{1}{4}\sqrt{(BC+AB+AC)(AB+AC-BC)(BC+AB-AC)(BC+AC-AB)} \end{cases}$$

$$\text{proinde altitudo}\quad AE = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\tfrac{1}{2}S(\tfrac{1}{2}S-BC)(\tfrac{1}{2}S-AC)(\tfrac{1}{2}S-AB)}}{\tfrac{1}{2}BC} \\[3ex] \dfrac{\sqrt{(BC+AB+AC)(AB+AC-BC)(BC+AB-AC)(BC+AC-AB)}}{2\,BC} \end{cases}$$

Quarum expreſſionum demonſtrationi ſyntheticæ præcedenti inveſtigationem earum analyticam ſubjungere haud abs re erit.

§. 44. $\overline{AE}^q = \overline{AB}^q - \overline{BE}^q$ (I, 47.) $= (AB+BE)(AB-BE)$ II, 5. Schol. 1.

Atqui ex §. 34. eſt $BE = \dfrac{BC + BF}{2}$

$$\& \quad BC : AB + AC = AB - AC : BF$$

Hinc $BF = \dfrac{(AB+AC)(AB-AC)}{BC} = \dfrac{\overline{AB}^q - \overline{AC}^q}{BC}$ (II, 5. Schol. 1.)

$$BE = \tfrac{1}{2}BC + \frac{\overline{AB}^q - \overline{AC}^q}{2\,BC} = \frac{\overline{BC}^q + \overline{AB}^q - \overline{AC}^q}{2\,BC}$$

$$AB + BE = \begin{cases} AB + \dfrac{\overline{BC}^q + \overline{AB}^q - \overline{AC}^q}{2\,BC} \\[2ex] \dfrac{2\,AB \times BC + \overline{BC}^q + \overline{AB}^q - \overline{AC}^q}{2\,BC} \\[2ex] \dfrac{(BC + AB)^q - \overline{AC}^q}{2\,BC} \quad \text{(II, 4.)} \\[2ex] \dfrac{(BC + AB + AC)\,(BC + AB - AC)}{2\,BC} \quad \text{(II, 5. Schol. 1.)} \end{cases}$$

$$AB - BE = \begin{cases} AB - \left(\dfrac{\overline{BC}^q + \overline{AB}^q - \overline{AC}^q}{2\,BC}\right) \\[2ex] \dfrac{2\,AB \times BC - \overline{BC}^q - \overline{AB}^q + \overline{AC}^q}{2\,BC} \\[2ex] \dfrac{\overline{AC}^q - (\overline{AB}^q + \overline{BC}^q - 2\,AB \times BC)}{2\,BC} \\[2ex] \dfrac{\overline{AC}^q - (BC - AB)^q}{2\,BC} \quad \text{(II, 7. Schol.)} \\[2ex] \dfrac{(AC + BC - AB)\,(AC - BC + AB)}{2\,BC} \quad \text{(II, 5. Schol. 1.)} \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} (AB+BE)(AB-AE) \\ \text{seu} \quad \overline{AE}^q \end{matrix}\right\} = \frac{(BC+AB+AC)\,(BC+AB-AC)\,(BC+AC-AB)\,(AB+AC-BC)}{4\,\overline{BC}^q}$$

$$AE = \frac{\sqrt{(BC+AB+AC)(BC+AB-AC)(BC+AC-AB)(AB+AC-BC)}}{2\,BC}$$

$$\overline{AE}^q \times \overline{BC}^q = \frac{(BC+AB+AC)\,(BC+AB-AC)\,(BC+AC-AB)\,(AB+AC-BC)}{4}$$

$$\tfrac{1}{4}\,\overline{AE}^q \times \overline{BC}^q = \begin{cases} \dfrac{(BC+AB+AC)\,(BC+AB-AC)\,(BC+AC-AB)\,(AB+AC-BC)}{16} \\[2ex] \dfrac{BC+AB+AC}{2} \times \dfrac{BC+AB-AC}{2} \times \dfrac{BC+AC-AB}{2} \times \dfrac{AB+AC-BC}{2} \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} \tfrac{1}{2}\,AE \times BC \\ \text{seu ar. triang. } ABC \end{matrix}\right\} = \begin{cases} \tfrac{1}{4}\sqrt{(BC+AB+AC)(BC+AB-AC)(BC+AC-AB)(AB+AC-BC)} \\[2ex] \sqrt{\dfrac{BC+AB+AC}{2} \times \dfrac{BC+AB-AC}{2} \times \dfrac{BC+AC-AB}{2} \times \dfrac{AB+AC-BC}{2}} \end{cases}$$

§. 45. Ceterum sponte patet, esse

$$\frac{BC+AB-AC}{2}=\frac{BC+AB+AC}{2}-AC=\tfrac{1}{2}S-AC$$

$$\frac{BC+AC-AB}{2}=\frac{BC+AC+AB}{2}-AB=\tfrac{1}{2}S-AB$$

$$\frac{AB+AC-BC}{2}=\frac{AB+AC+BC}{2}-BC=\tfrac{1}{2}S-BC$$

§. 46. Vi præcedentium sinus angulorum trianguli scaleni, cujus latera dantur, etiam independenter ab altitudine trianguli, quam calculus §. 43. indicatus supponit, statim per ejus aream, vel immediate per ipsa ejus latera data poterunt determinari.

Fig. 15. Scilicet ex § 43. adeoque etiam

$$\left.\begin{matrix} AB : AE \\ 2AB \times BC : 2AE \times BC \end{matrix}\right\} = \text{sin. tot} : \text{sin. } B$$

$$\left.\begin{matrix} AC : AE \\ 2AC \times BC : 2AE \times BC \end{matrix}\right\} = \text{sin. tot} : \text{sin. } C$$

pariterque pro angulo A, qui opponitur lateri maximo BC (fig. 10. 11.) trianguli,

$$\left.\begin{matrix} AC : CD \\ 2AB \times AC : 2AB \times CD \end{matrix}\right\} = \text{sin. tot} : \text{sin. } A$$

$$\text{Atqui tam } \left.\begin{matrix} 2AE \times BC \\ \text{quam } 2AB \times CD \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \text{4plæ areæ trianguli} \\ \sqrt{(BC+AB+AC)(AB+AC-BC)(BC+AB-AC)(BC+AC-AB)} \end{matrix}\right. \text{(§. 41. 44.)}$$

In quocunque igitur triangulo scaleno sinus cujuslibet anguli est ad sinum totum; uti quadrupla area trianguli, seu uti spatium medium geometrice proportionale inter duo rectangula, sub perimetro trianguli & sub excessibus binorum quorumvis ejus laterum super tertium contenta, est ad duplum rectangulum sub lateribus, quæ angulum comprehendunt.

Per se patet, inferri quoque posse

$$\tfrac{1}{2}AB \times BC : \tfrac{1}{2}AE \times BC = \text{sin. tot} : \text{sin. } B$$

$$\tfrac{1}{2}AC \times BC : \tfrac{1}{2}AE \times BC = \text{sin. tot} : \text{sin. } C$$

$$\tfrac{1}{2}AB \times AC : \tfrac{1}{2}AB \times CD = \text{sin. tot} : \text{sin. } A$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{ubi } \tfrac{1}{2} AE \times BC \\ \& \ \tfrac{1}{2} AB \times CD\end{array}\right\} = \text{areæ trianguli} = \sqrt{\tfrac{1}{2} S \left(\tfrac{1}{2} S - BC\right)\left(\tfrac{1}{2} S - AC\right)\left(\tfrac{1}{2} S - AB\right)}$$

Quare etiam erit ſinus cujuslibet anguli trianguli ſcaleni ad ſinum totum; uti area trianguli, ſeu uti ſpatium medium geometrice proportionale inter duo rectangula, contenta ſub dimidia trianguli perimetro & ſub dimidiis exceſſibus ejusdem dimidiæ perimetri ſuper ſingula trianguli latera, eſt ad dimidium rectanguli ſub lateribus, quæ angulum comprehendunt.

§. 47. Eadem conſequuntur ex methodo determinandi angulos trianguli, cujus tria latera dantur, indicata §§. 6. 9. Nempe per §. 6. diameter circuli triangulo circumſcripti eſt ad unum latus trianguli; uti aliud ejusdem latus eſt ad perpendiculum, ex vertice anguli, quem hæc latera comprehendunt, in tertium trianguli latus demiſſum: (fig. 1.) h. e. $CD : BC = AC : CM$
adeoque etiam $CD : BC = AB \times AC : AB \times CM$ ſeu $2 \triangle^{\text{lum}} ABC$

Igitur diameter CD circuli triangulo circumſcripti $= \dfrac{BC \times AB \times AC}{2 \triangle ABC}$

& hinc eadem diameter eſt ad unumquodque latus trianguli, uti rectangulum ſub reliquis duobus trianguli lateribus eſt ad duplam aream trianguli; h. e. pariter $CD : AB = BC \times AC : 2 \triangle ABC$

$$CD : AC = BC \times AB : 2 \triangle ABC$$

Atqui per §. 9. ac 10. ſeqq. eſt

(fig. 2. 3.) $AD : AB = ad : ab = \tfrac{1}{2}\, ad : \tfrac{1}{2}\, ab =$ ſin. tot : ſin. C

$AD : BC = ad : bc = \tfrac{1}{2}\, ad : \tfrac{1}{2}\, bc =$ ſin. tot : ſin. BAC

$AD : AC = ad : ac = \tfrac{1}{2}\, ad : \tfrac{1}{2}\, ac =$ ſin. tot : ſin. ABC

Igitur $BC \times AC : 2 \triangle ABC =$ ſin. tot : ſin. C

$AB \times AC : 2 \triangle ABC =$ ſin. tot : ſin. BAC

$BC \times AB : 2 \triangle ABC =$ ſin. tot : ſin. ABC

§. 48. Alias autem magis adhuc concinnas & commodas methodos angulos trianguli ſcaleni immediate ex datis ejus lateribus determinandi

nandi offert conſtructio explicata §. 41: quæ præcedenti, qua ſinus angulorum obtinentur, eo quoque præſtant, quod ambiguitati, cui hæc quoad ſpeciem anguli maximi obnoxia eſt (§. 14.), locum non relinquunt; cum ad dimidios trianguli angulos determinandos ſpectent, quos acutos eſſe dubium non eſt.

Fig. 17. Nempe tam $AS : DS = \text{ſin tot} : \text{ſin.}\ DAS$ ſeu $\text{ſin.}\ \frac{1}{2} BAC$

quam $AG : FG = \text{ſin. tot} : \text{ſin.}\ FAG$ ſeu $\text{ſin.}\ \frac{1}{2} BAC$

adeoque $AS \times AG : DS \times FG = \overline{\text{ſin. tot}}^2 : \overline{\text{ſin.}\ \tfrac{1}{2} BAC}^2$

Pariter tam $AS : AD = \text{ſin. tot} : \text{Coſin.}\ DAS$ ſeu $\text{Coſ.}\ \frac{1}{2} BAC$

quam $AG : AF = \text{ſin. tot} : \text{Coſin.}\ FAG$ ſeu $\text{Coſ.}\ \frac{1}{2} BAC$

adeoque $AS \times AG : AF \times AD = \overline{\text{ſin. tot}}^2 : \overline{\text{Coſin.}\ \tfrac{1}{2} BAC}^2$

Atqui per demonſtrata §. 41. eſt

$$DS \times FG = \begin{cases} BD \times BF = BL \times CL \\ \dfrac{AB + BC - AC}{2} \times \dfrac{BC + AC - AB}{2} = \dfrac{BC + AB - AC}{2} \times \dfrac{BC - (AB - AC)}{2} \\ (AF - AC)(AF - AB) = (\frac{1}{2} S - AC)(\frac{1}{2} S - AB) \end{cases}$$

&

$$AF \times AD = \begin{cases} \frac{1}{2} S \times \dfrac{AB + AC - BC}{2} \\ \frac{1}{2} S (\frac{1}{2} S - BC) \end{cases}$$

Itaque determinandum ſaltim reſtat $AS \times AG$.

Cum ſit ang. $FGM = ABC$, quippe uterque ſupplementum anguli FBM (§. 41.); etiam dimidii eorum æquales ſunt, h. e. $BGM = SBL$: & hinc

$BGM + BSL = SBL + BSL =$ ang. recto.

Pariter ang. $HGM = ACB$, quippe uterque ſupplementum anguli BCH: hinc & dimidii eorum æquales, h. e. $CGM = SCL$;

atque $CGM + CSL = SCL + CSL =$ ang. recto.

Proinde $\left.\begin{array}{l} BGM + CGM + BSL + CSL \\ \text{h. e.}\quad BGC + BSC \end{array}\right\} = 2$ rectis

Quadrilatero igitur $BGCS$ circumſcribi poteſt circulus (IV, 5. Schol. 2.)

& hinc ang. $SBC = CGS$ ut pote in eodem circuli ſegmento (III, 21.)

ſeu ang. $SBA = CGA$

Atqui

Atqui etiam ang. $BAS = CAG$ (per conſtruct.)

Igitur triang. $ABS \backsim AGC$; & $AS : AC = AB : AG$ (VI, 4.)

Unde (VI, 16.) $AS \times AG = AB \times AC$.

$$\text{Itaque } AB \times AC : \left\{ \begin{matrix} \dfrac{BC + AB - AC}{2} \times \dfrac{BC - (AB - AC)}{2} \\ (\tfrac{1}{2} S - AB)\ (\tfrac{1}{2} S - AC) \end{matrix} \right\} = \overline{\text{ſin.tot}}^2 : \overline{\text{ſin.}\tfrac{1}{2} BAC}^2$$

$$\& \quad AB \times AC : \left\{ \begin{matrix} \tfrac{1}{2} S \times \dfrac{AB + AC - BC}{2} \\ \tfrac{1}{2} S\ (\tfrac{1}{2} S - BC) \end{matrix} \right\} = \overline{\text{ſin.tot}}^2 : \overline{\text{Coſ.}\tfrac{1}{2} BAC}^2$$

Idem ratiocinium pariter utrique duorum reliquorum angulorum applicabitur: producendo crura anguli; & deſcribendo circulum, qui ſimul tangat hæc crura anguli producta & tertium trianguli latus, quod angulo iſti opponitur.

Generatim ergo quadratum ſinus dimidii cujuslibet anguli trianguli eſt ad quadratum ſinus totius; uti rectangulum ſub ſemiſumma lateris angulo oppoſiti ac differentiæ laterum ei adjacentium & ſub dimidio exceſſu lateris angulo oppoſiti ſuper eandem laterum adjacentium differentiam, eſt ad rectangulum ſub lateribus angulum comprehendentibus; ſeu uti rectangulum ſub exceſſibus dimidiæ perimetri trianguli ſuper latera ejus, quæ angulum comprehendunt, eſt ad rectangulum ſub iisdem lateribus angulum comprehendentibus.

Et quadratum Coſinus dimidii cujuslibet anguli trianguli eſt ad quadratum ſinus totius: uti rectangulum ſub dimidia trianguli perimetro & ſub dimidio exceſſu ſummæ laterum angulum comprehendentium ſuper latus ei oppoſitum, ſeu rectangulum ſub dimidia perimetro & ſub exceſſu dimidiæ perimetri ſuper latus angulo oppoſitum, eſt ad rectangulum ſub lateribus, quæ angulum comprehendunt.

THESES.

I.

Trigonometria rectilinea aptius immediate post geometriam planam, quam demum post stereometriam tractatur.

II. Ut divisio in fractiones decimales, omissa quae hactenus usu recepta est, peripheriae etiam circuli applicetur, jure desideratur (*Schulze Taschenbuch*, *IItes Heft*, *S. 268. ff.*)

III. Quantitates positivas et negativas rationem inter se habere, definitioni 4. Libri V. *Euclidis* repugnat.

IV. Plurimaque inde paradoxa et absurda consequuntur.

V. Gravitatem ab impulsu mechanico derivari non posse, demonstratum non est.

VI. Quamvis distincte haud cognoscamus modum, quo corpora in conflictu in se mutuo agunt; aliis tamen explicationibus phaenomenorum potiores jure censentur eae, quae ad leges hujus conflictus revocantur.

VII. Explicatio phaenomenorum magneticorum Cartesiana, ab *ill. Eulero* praesertim exculta, imaginationi potius quam phaenomenis satisfacit.

VIII.

VIII. Generatim ab cognitione sufficienti phaenomenorum magneticorum nimium adhuc absumus, ut de explicatione eorum tuto aliquid statuere possimus.

IX. Identitatem fulminis et ignis electrici primus asseruit ostenditque *Franklinus.*

X. Si fulminis conductor eo tantum fine adhibetur, ut fulminis impetum sine damno avertat; nihil interest, utrum acutus sit an obtusus.

XI. Wilsoni autem consilium, conductores obtusos intervallo aliquot pedum infra tectum adhibendi, periculosum est.

XII. Clar. *Weber in dem Unterricht von den Verwahrungsmitteln gegen die Gewitter* Dial. 5. vim objectionum Cl. *Fischer* (*Beweis, dass das Glokenläuten bey Gewittern mehr schädlich als nüzlich sey*) contra multitudinem acierum conductoribus applicandarum haud penitus infringit.

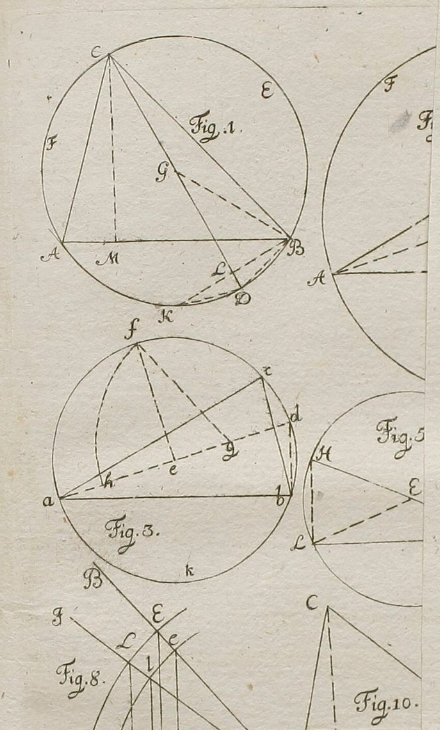
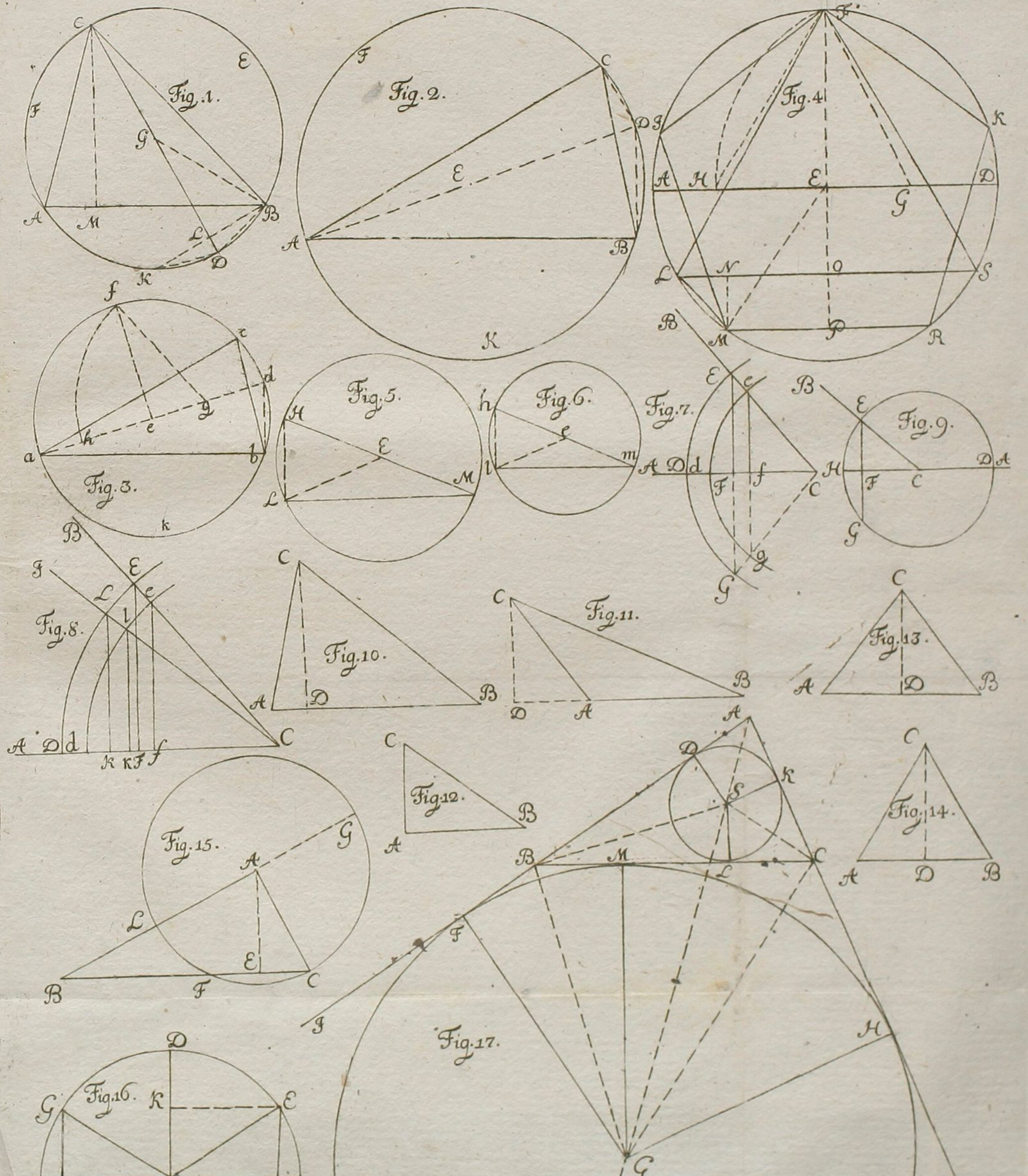


Fig. 1.
C
E
F
G
A
M
B
L
D
K
F
A
f
c
d
Fig. 5
g
H
E
a
h
e
b
Fig. 3.
L
k
B
g
E
L
e
l
Fig. 8.
C
Fig. 10.



fecit. C. G. Müller Tübingen.

Tübingen, Diss., 1783/88

ANALYSIS TRIANGVLORVM RECTILINEORVM

1784, 3,
1

CVIVS
PARTEM PRIMAM
RECTORE VNIVERSITATIS EBERHARDINÆ CAROLINÆ MAGNIFICENTISSIMO
SERENISSIMO AC POTENTISSIMO DVCE ET DOMINO
DOMINO

7

CAROLO

DVCE WIRTEMBERGIÆ ET TECCIÆ REGNANTE
REL. REL.

ÆSIDE
FRID. PFLEIDERER
I ILLVSTRIS PROFESSORE PHYSICES
ESEOS PVBL. ORD.
DIS MAGISTERII PHILOSOPHICI
NORIBVS
MDCCLXXXIIII.
PVTANDVM PROPONVNT
ND WECKHERLIN, SCHORNDORFENSIS.
KOLB, KIRCHO-TECCENSIS.
A S, KIRCHO-TECCENSIS.
H LEDERER, STVTTGARDIANVS.
LOSOPHICI IN ILLVSTRI STIPENDIO
EOLOGICO.

PIS SCHRAMMIANIS.

493.