85

RECHERCHES
SUR
LA RESISTANCE
DU MILIEU
DANS LEQUEL
[illegible] SE MEUVENT,
PAR
L. EULER
[illegible]
DE PRUSSE.

[illegible]

A BERLIN,
[illegible] Chretien Frideric Voss.
[illegible]

1.

RECHERCHES
SUR
LA RÉSISTANCE
DU MILIEU
DANS LEQUEL
LES PLANETES SE MEUVENT,

PAR

J. A. EULER,

DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES ET BELLES-LETTRES DE PRUSSE.

Hæc super imposuit liquidum, gravitate carentem,
Aethera, nec quicquam terrenæ fæcis habentem.

A' BERLIN,
Chez Chrêtien Fréderic Voss.
MDCCLXII.

Hl: Prof Karsten

AVERTISSEMENT.

Cet Ecrit a été composé pour répondre à la Question proposée par l'Académie Royale des Sciences de Paris pour l'année courante 1762. M. l'Abbé Bossût, Professeur Royal de Mathématiques de l'Ecole de Genie à Mezières, a remporté le Prix; & le premier *accessit* a été adjugé à la Pièce dont je me déclare l'Auteur en la publiant. L'Eloge avec lequel l'Académie a bien voulu en parler dans son Programme, justifie cette publication, & donne lieu d'espérer que les juges compétens lui feront un accueil favorable.

On avoit demandé;

Si les Planètes se meuvent dans un milieu dont la résistance produise quelque effet sensible sur leur mouvement?

Pour répondre à cette queſtion, il faut examiner trois choſes.

Premierement, il s'agit d'approfondir la nature du milieu dans lequel les Planètes ſe meuvent.

En ſecond lieu, de rechercher, ſi ce milieu eſt capable de produire quelque altération ſur le mouvement des Planetes? &

Enfin, de déterminer par un calcul exact les dérangemens qui en réſultent effectivement.

PREMIERE PARTIE.

SUR LA
NATURE DU MILIEU
DANS LEQUEL
LES PLANETES SE MEUVENT.

On ne sauroit soutenir que l'espace dans lequel les Planètes se meuvent soit un vuide parfait. Sans parler de plusieurs autres raisons, la lumière seule prouve suffisamment, que tout l'espace du Ciel est rempli de cette matière subtile dont les rayons de lumière sont formés.

Si les rayons de lumière étoient des émanations actuelles des corps lumineux, lancées avec cette prodigieuse vitesse qui leur fait parcourir l'espace immense du Soleil jusqu'à nous en moins de huit secondes de tems, ce seroient ces mêmes émanations lumineuses dont tout l'espace des Cieux seroit rempli, & qui le traverseroient en tout sens avec une égale rapidité.

Mais, quoique le grand Newton ait soutenu ce sentiment, il est assujetti à tant d'inconvéniens, que je crois devoir l'abandonner, & embrasser celui qui explique la propagation de la lumière d'une manière semblable à celle du son.

Sans parler de l'épuisement que les corps lumineux devroient souffrir suivant le sentiment de Newton, le seul phénomène de plusieurs rayons de lumière qui passent sans se troubler par le même point le detruit tout à fait.

Il est contre les principes les mieux établis de la Mécanique, que plusieurs particules, quelques subtiles qu'on les conçoive, passent à la fois par le même point & en tout sens, avec une vitesse aussi prodigieuse que celle de la lumière, sans se choquer & troubler le mouvement les unes des autres.

Or, dans l'autre systême, nous savons non seulement par l'expérience, que plusieurs sons traversent le même point sans se troubler, mais Mr. de la Grange a fait voir très clairement, dans les Mémoires de la Société de Turin, que ce phenomène est parfaitement d'accord avec les principes de la Mecanique, & qu'il en est même une suite nécessaire.

Je passe sous silence tant d'autres raisons, que les Philosophes les plus éclairés ont déjà alleguées, & qui ne laissent plus aucun doute, que la lumière ne soit produite par les corps lumineux de la même manière que le son est produit par les corps sonores, & que la propagation dans l'un & l'autre cas ne suive les mêmes loix.

Il faut donc que tout l'espace des Cieux soit rempli d'une matière propre à transmettre les petites impulsions, ou ébranlemens qui constituent la nature de la lumière, tout comme nous savons à présent par les heureuses recherches de Mr. de la Grange, que le son est transmis par l'air.

De là il s'ensuit que cette matière celèste doit être fluide & semblable à l'air, en joignant à un certain degré de densité un certain degré d'elasticité pour produire dans la propagation de la lumière la même vitesse que l'expérience nous donne à connoitre.

Or

Or, puisque la vitesse de la lumière est connue, étant environ 600 mille fois plus grande que celle du son, nous pouvons en inférer un rapport manifeste entre ce milieu du Ciel & notre air.

Sachant que la vitesse des ébranlemens transmis par un milieu élastique est comme la racine quarrée de l'elasticité divisée par la densité; si nous posons l'elasticité de ce milieu m fois plus grande, & sa densité n fois plus petite que celle de l'air, nous aurons

$$\sqrt{mn} = 600\,000 \text{ ou bien } mn = 360 \text{ mille millions.}$$

De sorte que, si nous savions l'élasticité de ce milieu, nous en pourrions conclure sa densité, & réciproquement; par exemple, si son élasticité étoit 600 mille fois plus grande que celle de l'air, sa densité seroit précisément autant de fois plus petite.

Qu'il me soit permis de conserver à ce milieu le nom *d'Ether*, quoique j'y attache des idées differentes de celles que les Philosophes anciens en ont eu.

L'Ether est donc d'abord, selon ce que je viens de remarquer, une matière fluide & élastique, semblable à l'air, mais qui en diffère tant par sa densité que par son élasticité; &, quoique nous ne puissions déterminer ni l'une ni l'autre séparément, nous connoissons que, posant l'élasticité de l'éther m fois plus grande, & sa densité n fois plus petite que celle de notre air, le produit de ces deux nombres mn doit être égal à 360 mille millions.

Il n'y a aucun doute que l'un & l'autre de ces deux nombres ne soit très grand; car, puisque l'air en montant devient de plus en plus rare jusqu'à ce qu'il se perde enfin dans l'ether, il faut bien que l'ether soit incomparablement plus rare que l'air; ensuite, si l'élasticité de l'ether est la cause de la cohésion, de la dureté, & du ressort des corps terrestres, comme cela paroit trés vraisemblable, il faut que son élasticité soit pour le moins mille fois plus grande que celle de l'air.

Or, supposant l'élasticité de l'ether mille fois plus grande que celle de l'air, sa densité seroit 360 millions fois plus petite que celle de l'air: & si l'on ne supposoit l'elasticité de l'ether que cent fois plus grande que celle de l'air, la densité deviendroit encore dix fois plus petite.

Puisque nous sommes assurés que les Planètes ne souffrent aucune résistance sensible dans leur mouvement, il s'ensuit nécessairement, que la matière ou l'ether dans lequel les Planètes se meuvent, est plusieurs milliers fois plus rare que l'air, ce qui s'accorde parfaitement bien avec ce que la vitesse de la lumiere nous vient de fournir.

Un pied cubique d'ether renfermeroit donc plusieurs mille fois moins de matiere qu'un pied cubique d'air, & puisque l'air est 800 fois plus leger que l'eau, & celle-cy 19 fois plus legère que l'or, si nous supposons l'ether 360 millions fois plus rare que l'air, un pied cubique d'éther contiendra 19. 800. 360 millions moins de matiere qu'un pied cubique d'or; ou bien un pied cubique d'or contiendra autant de matiere que 5472 mille millions pieds cubiques d'éther, ou encore qu'un cube d'êthèr dont le coté seroit 17500 pieds ou à peu près d'une lieue de France.

Ici se présente d'abord une question très intéressante: *s'il seroit possible de diviser & de subtiliser la matière d'un pied cubique d'or en sorte qu'elle remplisse une lieue cubique?*

Je sais bien que *Keill* a prétendu en avoir démontré la possibilité, ayant prouvé que les intervalles entre les particules pourroient devenir moindres qu'une quantité donnée, quelque petite qu'elle fût; mais l'elasticité semble absolument exiger, que les moindres particules se touchent tout-à fait, & qu'elles se trouvent dans une continuité, dont il s'en faut beaucoup que *Keill* ait demontré la possibilité, à moins qu'on ne veüille donner aux particules une figure linéaire prèsque géométrique, en sorte qu'elles ne se touchent que par les pointes: mais une telle structure seroit trop révoltante pour l'introduire dans la Physique.

Je crois plutôt qu'on peut hardiment nier qu'il fût possible de former une lieue cubique d'ether d'un pied cubique d'or par la subtilisation, quoique la quantité de matiere soit de part & d'autre la même.

Il y a ici une équivoque qui semble avoir trompé tous ceux qui ont écrit là dessus.

Pour mettre cette matière dans tout son jour, je commence par une remarque générale, savoir que dans tous les corps il faut bien distinguer *leur véritable étenduë*, de leur *masse*, ou de la *quantité de matiere* dont ils sont composés.

Or je nomme la *véritable étendue* d'un corps le volume, ou la solidité géometrique, qui resteroit, si l'on retranchoit de son volume apparent tous les pores dont il est rempli.

On

On ſait que l'or même eſt tout rempli de pores; donc la *véritable étendue* d'une maſſe d'or ſera toujours beaucoup plus petite que ſon volume apparent.

La *véritable étendue* de chaque corps eſt une quantité géometrique, & partant bien différente de la *quantité de matière*, ou de la *maſſe*, qui eſt une quantité mécanique, en vertu de laquelle les corps s'oppoſent au changement de leur état. C'eſt donc *l'Inertie*; & ces termes, *quantité de matière*, *maſſe* & *inertie* ſignifient la même choſe.

Les Expériences ſur la gravité prouvent ſuffiſamment que le poids de chaque corps eſt proportionel à ſa maſſe ou à ſon inertie. Donc, puisqu'un pied cubique d'or eſt 19 fois plus peſant qu'un pied cubique d'eau, il eſt certain que le premier contient 19 fois plus de matière que le ſecond; mais il ne s'enſuit pas que la *véritable étendue* de l'or ſoit 19 fois plus grande que la véritable étendue de l'eau; ou bien qu'il ſeroit poſſible de réduire une maſſe d'eau, en ôtant tous ſes pores, à un volume au delà de 19 fois plus petit.

Il n'eſt pas encore prouvé que deux corps, dont les maſſes ſont égales, ayent auſſi la même véritable étendue, & je ne vois nulle néceſſité pourquoi deux étenduës égales de matière auroient toujours la même inertie? ou bien, pourquoi la quantité mécanique ſuivroit toujours la quantité géometrique?

Cependant, quand nous rêflêchiſſons ſur la cauſe de la gravité, quoiqu'elle nous ſoit inconnue, il ſemble qu'on ne puiſſe la chercher que dans la preſſion d'un fluide extrèmement ſubtil, qui paſſe librement même à travers les plus petites pores des corps. Or une telle preſſion agit toujours en raiſon des volumes; & cela poſé, le poids de chaque corps ſeroit toujours proportionel à ſa véritable étendue. Donc, puisque le poids eſt auſſi proportionel à l'inertie, ou à la maſſe de chaque corps, il s'enſuivroit que la véritable étendue eſt toujours proportionelle à l'inertie, comme preſque tous les Philoſophes l'ont crû jusqu'ici.

Mais, quelque fort que puiſſe paroitre cet argument, il ne regarde que les corps terreſtres ſur lesquels la gravité agit, & par la même raiſon elle agit auſſi ſur tous les corps groſſiers dont les Planètes ſont formés, puisqu'elles ſont ſoumiſes à la méme loi de gravitation.

Or de là on ne sauroit encore rien conclure de certain sur les matières subtiles répandues par tout le monde, & qui ne sont pas apparemment assujetties à la gravitation, mais qui en contiennent plutôt la cause.

Il est pourtant fort remarquable que, bien que nous ne voyons aucune liaison entre *l'inertie & la vraye étendue* d'un corps, tous les corps grossiers & de la Terre & de toutes les autres Planètes ayent cette propriété, que dans tous l'inertie soit proportionelle à la vraye étendue. D'où il semble en effet qu'il y a entre l'inertie & la vraye étendue quelque liaison réelle, mais tout à fait inconnue; en vertu de laquelle une certaine étendue de matière ne sauroit exister sans qu'elle ait une certaine inertie ou masse.

Cela peut engager à soutenir que tous les corps grossiers, quelques differens qu'ils soient en eux-mêmes, sont composés d'une matière homogène. En prenant, par exemple, plusieurs morceaux de matières différentes, chaqu'un d'une livre, si nous les concevons privés de pores, ils auront tous la même étendue, & aussi la même inertie. Donc, n'ayant plus de pores, il seroit difficile de dire, en quoi tous ces morceaux de matières différeroient entr'eux.

Mais, quelque essentielle que puisse être cette liaison dans les corps grossiers, rien n'empèche que les matières subtiles ne soient d'une espèce differente, & qu'une certaine étendue vraye de ces matières n'ait beaucoup moins d'inertie qu'une égale étendue vraye des matières grossières.

Ce seroit alors une autre espèce de matière, & peut être y en a-t' il encore plusieures dont chaqu'une joint à la même étendue vraye une inertie plus petite que les précédentes. Le dernier dégré, savoir celui d'une étendue à laquelle ne conviendroit aucune inertie, seroit une étendue purement géometrique, & partant un vuide véritable.

Mais, sans admettre un tel vuide, pourvû qu'on accorde deux espèces de matière, dont l'une contienne sous la même étendue moins de masse que l'autre, on est en état de lever toutes les difficultés qu'on fait ordinairement contre le systême du plein.

Puisque dans les corps grossiers l'étendue vraye est le plus étroitement liée avec l'inertie, & que l'inertie d'un corps ne sauroit être changée par quelque cause que ce soit, il s'ensuit que la vraye étendue d'un corps grossier ne souffre aucun changement dans sa quantité.

Mai

Mais pour les matières ſubtiles, peut-être que leur nature eſt tout à fait différente à cet égard.

Il paroit bien néceſſaire que la même quantité conſerve toujours la même inertie; mais ne ſeroit-il pas poſſible que la vraye étendue, celle qui exclut tous les pores, devint tantôt plus grande, tantôt plus petite? Ne ſeroit-il pas encore poſſible qu'une telle matière ſoit douée d'une force de s'étendre continuellement davantage dans ſa propre ſubſtance, ſans y recevoir des pores ou des eſpaces vuides? Ne ſeroit-ce point là un aggrandiſſement réel? Il eſt bien vray que l'inertie, qui ſemble conſtituer l'eſſence des matières, y demeurant la même, un tel aggrandiſſement ne ſauroit être admis ſans un miracle.

Or dans ce cas on ne ſeroit plus embarraſſé de la cauſe de l'élaſticité de l'éther: mais je n'oſe m'enfoncer dans ces ſublimes recherches, elles ſont au deſſus de ma portée, & le ſujet préſent ne l'exige pas.

Je me contente d'avoir prouvé qu'il eſt poſſible que les eſpaces du Ciel, par leſquels les Planètes ſemblent ſe mouvoir librement, ſoyent remplis d'une matière fluide extrèmement ſubtile & très élaſtique, ſans les ſuppoſer preſque vuides, comme on eſt obligé de faire quand on joint partout à la même inertie la même étendue vraye de matière.

Non ſeulemeat un pareil vuide choque notre eſprit, mais il paroit auſſi incompatible avec cette grande élaſticité qu'on eſt obligé d'attribuer à l'éther, puisque c'eſt par l'éther que les rayons de lumière des corps lumineux ſont tranſmis jusqu'à nous avec la plus grande viteſſe que nous connoiſſions au monde.

A' préſent, quand on dit que l'éther eſt tant de mille fois plus rare que l'air, il ne faut pas entendre par là que l'étendue propre d'un certain volume d'éther ſoit autant de fois plus petite que celle d'un égal volume d'air, mais cette proportion regarde l'inertie renfermée en des volumes égaux.

SECONDE PARTIE.
SUR LA
RÉSISTANCE DE L'ETHER.

Il se présente la Question, s'il ne seroit pas possible que les Planètes se mûssent par l'éther sans souffrir la moindre résistance? Car, quoiqu'elles en soient poussées en arrière, ne pourroit-il pas arriver qu'elles en fussent poussées en avant avec une force égale? Tâchons de rendre cecy plus clair.

Lorsqu'un corps se meut dans l'éther, il en déplace continuellement une partie, & en lui imprimant un mouvement il en perd bien autant; mais, puisque l'éther derrière le corps est poussé par son élasticité dans les lieux que le corps quitte, il semble qu'il pourroit accélérer son mouvement autant qu'il aura été rétardé en avant.

Ce sentiment a été soutenu par de grands Géomètres, & ils l'ont crû conforme à la conservation des forces vives.

Ils tombent bien d'accord que, dès le premièr instant, le corps communique à l'éther une partie de sa force vive, pour y produire le mouvement dont l'éther chassé en avant va suivre le corps par un détour; mais, dés que ce mouvement est une fois engendré, ils prétendent qu'il suffit que l'éther accompagne le corps par tout son mouvement, sans que celui-cy ait besoin de souffrir une nouvelle perte. Il regardent enfin cette conservation comme l'effet de la parfaite élasticité de l'éther; si les planètes, disent-ils, perdoient continuellement de leur mouvement, cette force vive, ou périroit tout à fait, ou s'accumuleroit dans l'éther; or l'un & l'autre leur paroit également absurde.

Quelque fondé que puisse paroitre ce raisonnement, il est détruit par l'expérience. L'air étant un fluide assés parfaitement élastique, il devroit au moins participer à la même qualité, & causer une moindre résistance aux corps qui s'y meuvent, que s'il etoit destitué de toute élasticité.

ſticité. Or nous ſavons, que tous les corps qui ſe meuvent dans l'air, y ſouffrent une réſiſtance très conſiderable; & Mr. *Lulofs* prétend même avoir prouvé par la force que le vent exerce ſur les ailes des moulins à vent, que la réſiſtance de l'air eſt encore plus grande que celle qu'on trouve par les régles ordinaires de Mécanique.

Il eſt auſſi inconteſtable qu'un boulet de canon éprouve une plus grande réſiſtance que ſelon ces règles, parce qu'il laiſſe derrière lui un eſpace vuide que l'air ne ſauroit remplir aſſés rapidement. D'où il faut conclure que, quoique l'éther ſoit beaucoup plus élaſtique que l'air, cela n'empêche point qu'il n'oppoſe une réſiſtance très réelle au mouvement des Planètes.

Puisque les Planètes ſe meuvent incomparablement plus vite qu'un boulet de canon, on en pourroit conclure de même qu'en arrière l'éther doit être plus rare & en avant plus denſe & plus accumulé qu'ailleurs.

En appliquant ceci à la Terre, on verra que la plus grande rareté de l'éther répond aux lieux qui voyent le Soleil dans le Couchant, & la plus grande denſité aux lieux où le Solèil ſe lève. Donc, partout au ſoir l'athmoſphère ſera le moins chargée d'éther, & au matin le plus; & cette variation ne ſauroit manquer de produire des phenomènes bien ſinguliers.

Si l'électricité eſt cauſée par un dérangement dans l'etat d'équilibre de l'éther, & que l'électricité poſitive ait lieu, où l'éther ſe trouve en trop grande abondance, & la négative, où l'éther eſt trop rare, il s'enſuivroit que partout vers le ſoir il regne dans l'atmoſphère une électricité négative, & vers le matin une électricité poſitive. Il s'agit donc de conſulter l'expérience, pour ſavoir ſi une telle variation a lieu ou non? Mon but ne me permet pas d'entrer dans cette diſcuſſion.

Cependant, lorsqu'un corps ſe meut dans l'éther, on n'en peut pas déterminer la réſiſtance ſur le même pied que dans l'air ou dans l'eau, où toute la ſurface antérieure reçoit l'impulſion du fluide. L'éther étant une matèire extrémement ſubtile, il pénetre preſque librement tous les pores des corps; & il en eſt à peu près de même, que ſi un crible ſe mouvoit dans l'eau ou dans l'air, qui ſouffriroit ſans contredit une réſiſtance beaucoup plus petite qu'une ſurface ſolide.

Les Planètes ne rencontrent donc de résistance dans l'éther qu'entant que leurs parties solides empêchent que l'éther ne passe tout à fait librement à travers de leur masse.

D'où l'on voit que la résistance déterminée par la régle ordinaire doit être diminuée de la partie qui répond au libre passage de l'éther; ou bien, il ne faut considérer qu'une certaine partie de la surface de la Planète qui est exposée à la résistance, & selon toute apparence cette partie sera très petite à l'egard de toute la surface.

Outre cela, l'obliquité avec laquelle les particules solides sont choquées par l'éther, peut encore considérablement diminuer la résistance.

Concevons un corps sphérique dont la masse soit $= A$ le rayon $= a$, & qui se meut avec une vitesse égale à celle qu'un corps pesant sur la terre acquerroit s'il tomboit de la hauteur v. Soit la densité du corps n fois plus grande que celle de l'éther, &, selon la regle commune, la résistance du grand cercle sera exprimée par le poids d'un cylindre d'éther dont la base est $= a$, & la hauteur $= v$; & partant dont la solidité $= \pi aav$.

Or la solidité du globe étant $= \frac{4}{3}\pi a^3$, & sa masse $= A$; la masse du cylindre, s'il étoit de la même matière, seroit $= \frac{3Av}{4a}$, donc la masse du cylindre d'éther $= \frac{3Av}{4na}$; & réduisant la masse A au poids que ce même globe auroit sur la terre, l'expression trouvée $\frac{3Av}{4na}$ exprimeroit la résistance du grand cercle. Mais la résistance du globe étant d'abord deux fois plus petite, elle sera $= \frac{3Av}{8na}$; Ensuite il la faudra encore diminuer à cause de la pénétration de l'éther, & peut être aussi à cause d'une plus grande obliquité d'impulsion.

Comme nous devons nous contenter de savoir cette diminution en gros, & qu'il nous est impossible de la déterminer *à priori*, posons la véritable résistance du globe $= \frac{3Av}{8\lambda na}$; où selon toutes les apparences le nombre λ doit être assés considerable: or le nombre n est prodigieusement grand.

Si nous supposons la densité de l'éther 360 millions fois plus petite que celle de l'air, & que la densité du corps soit égale à celle de l'eau, le nombre n sera $800 \times 360\,000\,000$ c'est à dire 288 mille millions.

Ensuite la vraye étendue du corps étant pour le moins 19 fois plus petite que l'étendue apparente, à cause de sa nature spongieuse, le nombre λ pourroit bien surpasser 10; donc, posant pour abréger $\frac{3}{8\lambda n} = \mu$, la valeur de cette fraction seroit environ $\mu = \frac{1}{10\,000\,000\,000\,000}$ laquelle demeureroit à peu près la même, si le corps étoit plus ou moins dense.

Or, si nous supposions l'éther dix fois moins dense, nous aurions pour μ une fraction encore dix fois plus petite; ensuite, comme il est très possible que la valeur de λ soit considérablement plus grande que 10, la fraction μ pourroit même être encore plus petite que $\frac{1}{100\,000\,000\,000\,000}$. On verra dans la suite que la résistance qui en résulte pourra très bien subsister avec les observations.

Appliquons ceci au mouvement d'une Planète, qui se meuve autour du Soleil dans un cercle.

Puisque nous savons que l'effet de la résistance de l'éther est extrèmement petit, & que le mouvement de la Planète continuera pendant très longtems de se faire dans un cercle, cherchons la diminution de ce mouvement pour un tems quelconque.

Soit la distance de la Planète au Soleil c, sa vitesse düe à la hauteur v, & l'attraction du Soleil à la distance $c = \frac{ff}{cc}$: prenant pour l'unité la gravité sur la terre.

Ensuite, puisque le mouvement se fait dans un cercle, il faut que la force centrifugue exprimée par $\frac{2v}{c}$ soit $= \frac{ff}{cc}$, & partant $v = \frac{ff}{2c}$: donc la résistance de l'éther $\frac{\mu v}{a} = \frac{\mu ff}{2ac}$ pourra être regardée comme constante pendant un très long tems.

On

On aura donc, pendant que la Planète parcourt l'espace ds;

$$dv = -\frac{\mu ff}{2ac} ds \quad \text{\& par conséquent}$$

$$v = \frac{ff}{2c} - \frac{\mu ffs}{2ac} = \frac{ff}{2c}\left(1 - \frac{\mu s}{a}\right)$$

Pour mieux connoitre les élémens de cette expression, soit le tems périodique de la Planète $= \Theta$ secondes; la Planète achevant donc dans Θ secondes toute la circonférence d'un cercle dont le rayon est $= c$ ou bien $2\pi c$, elle parcourra dans une seconde l'espace $= \frac{2\pi c}{\Theta}$; sa vitesse étant comme cy-dessus düe à la hauteur v.

Or, posant g pour la hauteur par laquelle un corps grave tombe dans une seconde; l'espace que la Planète parcourt dans une seconde est aussi exprimé par $2\sqrt{gv}$; d'où l'on obtient

$$2\sqrt{gv} = \frac{2\pi c}{\Theta} : \text{ou}$$

$$\sqrt{\frac{gff}{2c}} = \frac{\pi c}{\Theta} \quad \text{par conséquent}$$

$$ff = \frac{2\pi\pi c^3}{g\Theta^2}$$

d'où l'on connoitra à chaque distance le rapport de la force accélératrice du Soleil à celle de la gravité naturelle sur la Terre.

Quoique le retardement du mouvement dérange d'abord le mouvement circulaire, avant que d'entreprendre les recherches requises pour déveloper cette question, je considérerai ici la chose comme si la Planète se mouvoit dans un canal circulaire qui l'empêchât d'en sortir. Ce cas, quoiqu'imaginaire, n'empêchera pas de faire connoitre en gros, après combien de tems l'effet de la résistance peut devenir sensible.

Comme pendant une révolution la Planète parcourt l'espace $= 2\pi c$ & pendant ν révolutions, ou dans le tems de $\nu\Theta$ secondes, l'espace $= 2\nu\pi c$, posant cette valeur pour s nous aurons pour la vitesse de la Planète après ce tems $v = \frac{ff}{2c}\left(1 - \frac{2\mu\nu\pi c}{a}\right)$

& la

& la vitesse même $\sqrt{v} = \left(1 - \frac{\mu\nu\pi c}{a}\right) \sqrt{\frac{ff}{2c}}$

d'où nous voyons que la diminution de la vitesse vaut la partie $\frac{\mu\nu\pi c}{a}$ de la vitesse initiale.

Qu'il nous soit permis de faire l'application de ces formules au mouvement de la Terre:

Ayant environ $c = 18\ 000 a$ & $\Theta = 31\ 556\ 930''$, cherchons après combien de tems la diminution de la vitesse pourroit devenir $\frac{1}{31\ 556\ 930}$ puisqu'un changement d'une seconde dans le tems périodique de la Terre seroit déjà remarquable:

Soit donc $\frac{\mu\nu\pi c}{a} = 18\ 000\ \mu\nu\pi = \frac{1}{31\ 556\ 930}$, & supposons que ceci arrive après ν ans & nous aurons $\nu = \frac{1}{18\ 000 \times 31\ 556\ 939\ \mu\pi}$

Donnons à μ la valeur marquée ci-dessus, & nous obtiendrons $\nu = \frac{10\ 000\ 000\ 000\ 000}{18\ 000 \times 31\ 556\ 930 \pi} = \frac{100}{18}$ à peu près. De là il suivroit qu'un tel effet pourroit être produit en 6 ans.

Or, quand même la valeur de μ seroit encore beaucoup plus petite, l'effet de la résistance de l'éther sur le mouvement des Planètes pourroit toutefois devenir très sensible après un assés grand nombre d'années.

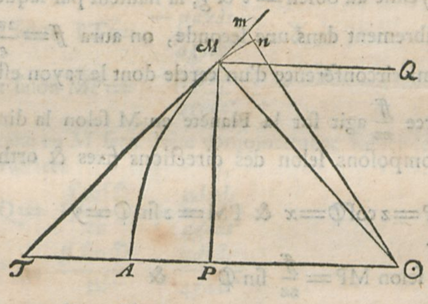
Mais il ne suit pas de la diminution de vitesse, que le tems périodique doit devenir plus long, il en doit plutôt résulter un effet entierement contraire. La Planète étant rallentie dans son mouvement s'approchera plus du Soleil, & décrira une orbite plus petite à laquelle répondra nécessairement un tems périodique plus court.

Par cette raiſon il s'en faut beaucoup, que la détermination précédente ſoit juſte, quand même le nombre μ ſeroit aſſés exact; auſſi n'étoit-elle que le dévelopement d'un cas imaginaire.

Le véritable dérangement que la réſiſtance de l'éther peut cauſer dans le mouvement des Planètes demande des recherches beaucoup plus profondes; elles feront le ſujet de ma troiſième partie.

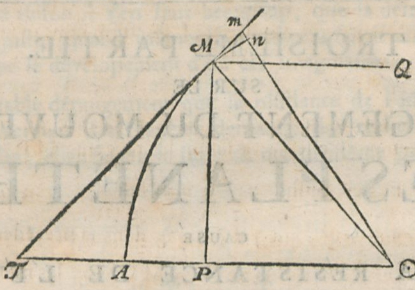
TROISIÈME PARTIE.

SUR LE DÉRANGEMENT DU MOUVEMENT DES PLANÈTES CAUSÉ PAR LA RÉSISTANCE DE L'ÉTHER.



Soit a le rayon d'une Planète quelconque, A sa masse, & AM une partie de la courbe, qu'elle décrit autour du Soleil qui soit en ⊙. On doit déterminer le dérangement que la résistance de l'éther est capable de produire dans son mouvement.

Que cette Planète soit parvenue au point M après un tems de t secondes. Posons l'angle au Soleil A⊙M $= \phi$, & la distance ⊙M $= z$. Soit la force accélératrice du Soleil $= \frac{ff}{zz}$, & j'ai fait voir dans la précédente partie que, si le tems périodique de la Terre est de Θ secondes,



sa distance moyenne au Soleil $= c$ & g, la hauteur par laquelle un corps grave tombe librement dans une seconde, on aura $ff = \frac{2\pi\pi c^3}{g\odot}$; où π marque la demi circonférence d'un cercle dont le rayon est $= 1$.

Cette force $\frac{ff}{zz}$ agit sur la Planète en M selon la direction $M\odot$, si nous la décomposons selon des directions fixes & orthogonales des coordonnées

$$\odot P = z \cos\phi = x \quad \& \quad PM = z \sin\phi = y$$

il en résultera.

I. Une force selon $MP = \frac{ff}{zz} \sin\phi$ &

II. Une force selon $MQ = \frac{ff}{zz} \cos\phi$

Pour connoitre la vitesse de la Planète, de laquelle dépend la résistance de l'éther, soit Mm l'élément d'espace parcouru dans le tems infiniment petit dt, & à cause de $Mn = zd\phi$ & $mn = dz$ nous aurons $Mm = \sqrt{(dz^2 + zzd\phi^2)}$ que je nommerai pour abréger ds.

Faisant donc $dt : ds = 1'' : \frac{ds}{dt}$, nous obtiendrons l'espace que la Planète parcourra dans une seconde $= \frac{ds}{dt}$.

Or,

Or, prenant v pour la hauteur duë à la vitesse de la Planète au point M, ce même espace sera aussi $= 2\sqrt{gv}$; d'où nous tirons la valeur de $v = \frac{ds^2}{4gdt^2}$.

Comme la force accélératrice de la résistance de l'éther est contraire au mouvement, elle agira selon la tangente MT, & sera suivant les principes établis ci-dessus $\frac{\mu v}{a} = \frac{\mu ds^2}{4gadt^2}$; Où μ est une fraction extrêmement petite que j'ai estimée dans la précédente partie.

Décomposons cette nouvelle force MT selon les mêmes directions fixes PT & MP & ayant MT : PT: MP $= ds : -dx : dy$ il en résultera

I. Une force selon PT $= \frac{-\mu dxds}{4gadt^2}$ &

II. Une force selon MP $= \frac{\mu dyds}{4gadt^2}$

La Planète en M sera donc conjointement sollicitée par ces deux forces accélératrices

I. Selon MQ $= \frac{ff\cos\Phi}{zz} + \frac{\mu dxds}{4gadt^2}$

II. Selon MP $= \frac{ff\sin\Phi}{zz} + \frac{\mu dyds}{4gadt^2}$

De là les Principes de la Mécanique nous fournissent ces deux équations

I. $ddx = \frac{-2gffdt^2\cos\Phi}{zz} - \frac{\mu dxds}{2a}$ &

II. $ddy = \frac{-2gffdt^2\sin\Phi}{zz} - \frac{\mu dyds}{2a}$

où il faut remarquer que soit

$x = z\cos\Phi$; $y = z\sin\Phi$, & partant

$dx = dz\cos\Phi - zd\Phi\sin\Phi$; $dy = dz\sin\Phi + zd\Phi\cos\Phi$

 ddz

$$ddx = ddz\cos\phi - 2dzd\phi\sin\phi - zd\phi^2\cos\phi - zdd\phi\sin\phi$$
$$ddy = ddz\sin\phi + 2dzd\phi\cos\phi - zd\phi^2\sin\phi + zdd\phi\cos\phi$$

ensuite $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dz^2 + zzd\phi^2)}$, & en combinant

$$ddx\sin\phi - ddy\cos\phi = -zdzd\phi - zdd\phi$$
$$ddx\cos\phi + ddy\sin\phi = ddz - zd\phi^2$$

D'où nous tirons pour le mouvement de la Planète ces deux équations.

$$\text{I. } 2dzd\phi + zdd\phi = -\frac{\mu zd\phi ds}{2a}.$$

$$\text{II. } ddz - zd\phi^2 = -\frac{2gffdt^2}{zz} - \frac{\mu dzds}{2a}$$

L'élément du tems dt est supposé constant, & comme $2gff = \frac{4\pi\pi c^3}{\Theta\Theta}$ la quantité g sort du calcul.

La première de ces deux équations étant divisée par $zd\phi$ donne,
$\frac{2dz}{z} + \frac{dd\phi}{d\phi} + \frac{\mu s}{2a} = 0$, dont l'intégrale est, $zzd\phi.\ e^{\frac{\mu s}{za}} = Cdt.$

Ensuite, puisque $ds\,dds = dzddz + zdzd\phi^2 + zzd\phi dd\phi$, nous aurons en multipliant la I^{ère} équation par $zd\phi$ & la II^{de} par dz

$$dzddz - zdzd\phi^2 = -\frac{2gffdt^2dz}{zz} - \frac{\mu dz^2ds}{2a}$$

$$2zdzd\phi^2 + zzd\phi dd\phi = \frac{-\mu zzd\phi^2ds}{2a} \quad \text{\& en les ajoutant}$$

$$dsdds = \frac{-2gffdt^2dz}{zz} - \frac{\mu ds}{2a}(dz^2 + zzd\phi^2) \quad \text{ou bien}$$

$$dsdds = -\frac{2gffdt^2dz}{zz} - \frac{\mu ds^3}{2a}$$

Or la première équation que nous venons d'intégrer, en y éliminant $d\phi$ par moyen de $zzd\phi^2 = ds^2 - dz^2$, donne

$$e^{\frac{\mu s}{a}} zz(ds^2 - dz^2) = CCdt^2$$

de

de ſorte que nous ayons deux équations entre les trois variables z, s, t.

Si nous multiplions celle-là par $\frac{2}{dt^2}$, l'intégration en fournira

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 4gff\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{b}\right) - \frac{\mu}{a}\int\frac{ds^3}{dt^2}$$

qui à cauſe de μ preſque evanouïſſant ſe réduit à

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 4gff\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{b}\right) - \frac{4\mu gff}{a}\int ds\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{b}\right)$$

Parce que nous ſavons que l'effet de la réſiſtance eſt extrèmement petit, négligeons d'abord les termes affectés par μ, & ayant alors ces deux équations

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 4gff\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{b}\right) \quad \& \quad CCdt^2 = zz\,(ds^2 - dz^2)$$

en éliminant dt^2 nous trouvons

$$ds^2 = \frac{4gff}{CC}\,zz\,(ds^2 - dz^2)\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{b}\right)$$

Poſons pour abréger $\frac{4gff}{CC} = \frac{8\pi\pi c^3}{CC\Theta\Theta} = \frac{1}{h}$ de manière que ſoit $C = \frac{2\pi c}{\Theta}\sqrt{2ch}$, & nous trouverons

$$ds = \frac{zdz\sqrt{\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{b}\right)}}{\sqrt{\left(zz\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{b}\right) - h\right)}} \quad \text{ou} \quad ds = \frac{dz}{\sqrt{\left(1 - \frac{bh}{z(z+b)}\right)}}$$

Cette valeur ſuffit pour être introduite dans les termes de nos équations qui ſont affectés par μ.

Soit

Soit donc pour abréger $\frac{dz}{\sqrt{\left(1-\frac{bh}{z(z+b)}\right)}} = d\sigma$, ou bien qu'on écrive dans tous les termes affectés par μ la lettre σ au lieu de s, & nous aurons les équations suivantes

$$\text{I}\quad e^{\frac{\mu\sigma}{a}}\, zz(ds^2 - dz^2) = CCdt^2 = \frac{8\pi\pi c^3 h}{\Theta\Theta}\, dt^2$$

$$\text{II.}\quad \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{8\pi\pi c^3}{\Theta\Theta}\left(\tfrac{1}{z}+\tfrac{1}{b} - \frac{\mu}{a}\int d\sigma\,(\tfrac{1}{z}+\tfrac{1}{b})\right) \quad \&$$

$$\text{III.}\quad e^{\frac{\mu\sigma}{2a}}\, zzd\Phi = \frac{2\pi c\sqrt{2ch}}{\Theta}\, dt$$

où σ est une fonction de z

Or, éliminant dt^2 des deux premières équations, nous obtiendrons

$$e^{\frac{\mu\sigma}{a}}\, zz(ds^2 - dz^2)\left(\tfrac{1}{z}+\tfrac{1}{b} - \frac{\mu}{a}\int d\sigma\,(\tfrac{1}{z}+\tfrac{1}{b})\right) = hds^2 \text{ \& delà}$$

$$ds = \frac{e^{\frac{\mu\sigma}{2a}}\, zdz\sqrt{\left(\tfrac{1}{z}+\tfrac{1}{b} - \frac{\mu}{a}\int d\sigma\,(\tfrac{1}{z}+\tfrac{1}{b})\right)}}{\sqrt{\left(e^{\frac{\mu\sigma}{a}}\, zz\left(\tfrac{1}{z}+\tfrac{1}{b} - \frac{\mu}{a}\int d\sigma\,(\tfrac{1}{z}+\tfrac{1}{b})\right) - h\right)}}$$

d'où l'on trouve s par z; ensuite on aura

$$\frac{2\pi c\sqrt{2c}}{\Theta}\, dt = \frac{e^{\frac{\mu\sigma}{2a}}\, zdz}{\sqrt{\left(e^{\frac{\mu\sigma}{a}}\, zz\left(\tfrac{1}{z}+\tfrac{1}{b} - \frac{\mu}{a}\int d\sigma\,(\tfrac{1}{z}+\tfrac{1}{b})\right) - h\right)}} \quad \&$$

$$d\Phi = \frac{dz\sqrt{h}}{z\sqrt{\left(e^{\frac{\mu\sigma}{a}}\, zz\left(\tfrac{1}{z}+\tfrac{1}{b} - \frac{\mu}{a}\int d\sigma\,(\tfrac{1}{z}+\tfrac{1}{b})\right) - h\right)}}$$

Pour

Pour profiter de ces équations, il faut tâcher d'en appliquer la ſolution à l'uſage de l'Aſtronomie.

Prenant pour cette raiſon $h = \frac{k}{2}$ & $b = \frac{-2k}{1-nn}$ on a pour le cas où la réſiſtance évanouit $z = \frac{k}{1+n\cos\omega}$ & $d\Phi = d\omega$ où k exprime le demi-parametre, n l'excentricité & ω l'anomalie vraye de l'orbite compté depuis le perihélie.

Cette expreſſion de z comme très approchante étant introduite, pour avoir la valeur de σ, on trouve

$$d\sigma = \frac{kd\omega\sqrt{(1+2n\cos\omega+nn)}}{(1+n\cos\omega)^2}$$

Laquelle valeur ſera toujours aſſés exacte pourvû qu'on ne ſuppoſe pas un tems écoulé de tant de ſiecles, que l'effet de la réſiſtance devienne enfin trop conſidérable.

Or, en n'étendant le calcul qu'à quelques peu de ſiecles pendant lesquels l'effet de la réſiſtance démeure presque inſenſible, on pourra enſuite répéter toujours le même calcul pour les ſiecles ſuivans.

Puisque dans le cas de nulle réſiſtance on a $z = \frac{k}{1+n\cos\omega}$ ſuppoſons qu'en tenant compte de la réſiſtance on ait

$$z = \frac{k}{1+n\cos\omega+\mu u}$$

& tâchons de déterminer u en ſorte qu'il demeure $d\Phi = d\omega$.

Ayant pour cet effet $\frac{1}{z} = \frac{1+n\cos\omega+\mu u}{k}$

la différentiation nous fournit $\frac{dz}{zz} = \frac{nd\omega\sin\omega - \mu du}{k}$

& il faut introduire cette valeur dans la derniere équation

$$d\Phi = \frac{dz\sqrt{h}}{z\sqrt{\left(e^{\frac{\mu\sigma}{a}}zz\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}-\frac{\mu}{a}\int d\sigma\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}\right)\right)-h\right)}}$$ qui à cauſe de

$d\Phi =$

$d\varphi = d\omega$ & $e^{\frac{\mu\sigma}{a}} = 1 + \frac{\mu\sigma}{a}$ se réduit d'abord à cette forme

$$d\omega = \frac{dz\sqrt{h}}{zz\sqrt{\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}-\frac{\mu}{a}\int d\sigma\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}\right)+\frac{\mu\sigma}{a}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}\right)-\frac{h}{zz}\right)}}$$

Ou bien à cause de $-\int d\sigma\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}\right)+\sigma\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}\right)=\int\sigma d.\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}\right)$

$$= -\int\sigma\frac{dz}{zz} = -\frac{n}{k}\int\sigma d\omega\sin\omega = -n\int d\omega\sin\omega\int\frac{d\omega\sqrt{(1+2n\cos\omega+nn)}}{(1+n\cos\omega)^2}$$

à celle-cy

$$d\omega = \frac{dz\sqrt{h}}{zz\sqrt{\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{b}-\frac{h}{zz}-\frac{\mu n}{a}\int d\omega\sin\omega\int\frac{d\omega\sqrt{(1+2n\cos\omega+nn)}}{(1+n\cos\omega)^2}\right)}}$$

Or $\frac{1}{b}$ étant $= \frac{-1+nn}{2k}$ nous aurons $\frac{1}{z}+\frac{1}{b} = \frac{1+2n\cos\omega+nn+2\mu u}{2k}$

& puisque $h = \frac{k}{2}$ nous obtiendrons $\frac{1}{z}+\frac{1}{b}-\frac{h}{zz} = \frac{nn\sin\omega^2 - 2\mu u.n\cos\omega}{2k}$

Par conséquent $d\omega = \frac{nd\omega\sin\omega - \mu du}{\sqrt{(nn\sin\omega^2 - 2\mu n u\cos\omega - \frac{2\mu n}{a}\int\sigma d\omega\sin\omega)}}$

d'où prenant les quarrés on trouve en négligeant les termes qui renfermeroient $\mu\mu$.

$$nud\omega\sin\omega^2 - 2\mu nud\omega\cos\omega - \frac{2\mu n}{a}d\omega\int\sigma d\omega\sin\omega = nnd\omega\sin\omega^2 - 2n\mu du\sin\omega$$

& partant $du\sin\omega - ud\omega\cos\omega = \frac{d\omega}{a}\int\sigma d\omega\sin\omega$

qui étant divisée par $\sin\omega^2$ & intégrée donne

$$\frac{u}{\sin\omega} = \frac{1}{a}\int\frac{d\omega}{\sin\omega^2}\int\sigma d\omega\sin\omega = \frac{-\cos\omega}{a\sin\omega}\int\sigma d\omega\sin\omega + \frac{1}{a}\int\sigma d\omega\cos\omega$$

ou

ou bien $u = \frac{1}{a}(\sin\omega \int \sigma d\omega \cos\omega - \cos\omega \int \sigma d\omega \sin\omega)$

$$\sigma \text{ étant } = k\int \frac{d\omega\sqrt{(1 + 2n\cos\omega + nn)}}{(1 + n\cos\omega)^2}$$

Pourvu que l'excentricité n soit moindre que 1, comme il arrive toujours si la Planète se meut dans une Ellipse, l'arc σ se réduit à une telle expression infinie

$$\sigma = k(A\omega + Bn\sin\omega + Cn^2\sin 2\omega + Dn^3\sin 3\omega + \&c.)$$

alors, pour trouver d'autant plus facilement la valeur de u, prenons le différentiel de l'équation $du\sin\omega - ud\omega\cos\omega = \frac{d\omega}{a}\int\sigma d\omega \sin\omega$ qui est

$$dd u\sin\omega + ud\omega^2\sin\omega = \frac{d\omega^2}{a}\sigma\sin\omega \quad \text{ou}$$

$$\frac{ddu}{d\omega^2} + u = \frac{\sigma}{a} = \frac{k}{a}(A\omega + Bn\sin\omega + Cn^2\sin 2\omega + Dn^3\sin 3\omega + \&c.)$$

Posons ensuite $u = \alpha\omega + \beta\sin\omega + \Delta\omega\cos\omega + \gamma\sin 2\omega + \delta\sin 3\omega + \&c.$

$$\text{puisque } \frac{du}{d\omega} = \alpha + \beta\cos\omega + \Delta\cos\omega + 2\gamma\cos 2\omega + 3\delta\cos 3\omega + \&c. \\ - \Delta\omega\sin\omega$$

$$\& \quad \frac{ddu}{d\omega^2} = -\beta\sin\omega - 2\Delta\sin\omega - 4\gamma\sin 2\omega - 9\delta\sin 3\omega - \&c. \\ - \Delta\omega\cos\omega$$

nous trouvons : $\frac{ddu}{d\omega^2} + u = \alpha\omega - 2\Delta\sin\omega - 3\gamma\sin 2\omega - 8\delta\sin 3\omega - \&c.$

d'où nous concluons qu'il-y-ait

$$\alpha = \frac{Ak}{a};\ \Delta = \frac{-Bnk}{2a};\ \gamma = -\frac{Cn^2k}{3a};\ \delta = -\frac{Dn^3k}{8a}\ \&c.$$

& par conséquent

$$u = \frac{k}{a}(A\omega + \beta\sin\omega - \frac{Bn}{2}\omega\cos\omega - \frac{Cn^2}{3}\sin 2\omega - \frac{Dn^3}{8}\sin 3\omega - \&c.)$$

où le coefficient β demeure indéterminé;

On le pourra même prendre $= 0$, car quelque valeur qu'on donnât à β, elle ne feroit que changer l'excentricité & le lieu de l'aphélie.

Posant donc $\int \frac{d\omega \sqrt{(1+2n\cos\omega+nn)}}{(1+n\cos\omega)^2} = A\omega + Bn\sin\omega + Cn^2\sin 2\omega + Dn^3\sin 3\omega + \&c.$

on aura, après que la Planète aura achevé l'angle $\phi=\omega$, pour sa distance au Soleil

$$z = \frac{k}{1+n\cos\omega + \frac{\mu k}{a}(A\omega - \frac{1}{2}Bn\omega\cos\omega - \frac{1}{3}Cn^2\sin 2\omega - \frac{1}{8}Dn^3\sin 3\omega \ \&c)}$$

Ensuite le tems t se trouvera déterminé par cette équation

$$\frac{2\pi c\sqrt{ck}}{\Theta}\, t = \int e^{\frac{\mu\sigma}{2a}} zz\, d\omega$$

qui à cause de $e^{\frac{\mu\sigma}{2a}} = 1 + \frac{\mu\sigma}{2a}$ &

$$z^2 = \frac{kk}{(1+n\cos\omega)^2} - \frac{2\mu k^3}{a(1+n\cos\omega)^3}\left(A\omega - \tfrac{1}{2}Bn\omega\cos\omega - \tfrac{1}{3}Cn^2\sin 2\omega - \tfrac{1}{8}Dn^3\sin 3\omega - \&c.\right)$$

$$\& \ 1 + \frac{\mu\sigma}{2a} = 1 + \frac{\mu k}{2a}(A\omega + Bn\sin\omega + Cn^2\sin 2\omega + Dn^3\sin 3\omega + \&c.)$$

se change en celle-cy

$$\frac{2\pi c\sqrt{c}}{\Theta k\sqrt{k}}\, t = + \int \frac{d\omega}{(1+n\cos\omega)^2}$$
$$- \frac{2\mu k}{a}\int \frac{d\omega(A\omega - \frac{1}{2}Bn\omega\cos\omega - \frac{1}{3}Cn^2\sin 2\omega - \frac{1}{8}Dn^3\sin 3\omega - \&c.)}{(1+n\cos\omega)^3}$$
$$+ \frac{\mu k}{2a}\int \frac{d\omega(A\omega + Bn\sin\omega + Cn^2\sin 2\omega + Dn^3\sin 3\omega + \&c.)}{(1+n\cos\omega)^2}$$

Ces formules suffisent pour déterminer tous les dérangemens que la résistance de l'éther peut causer dans le mouvement de toutes les Planètes; ce qui étant la question proposée par L'ILLUSTRE ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES, je m'en vai déveloper tous les phenomènes qui en doivent résulter dans le mouvement des Planètes.

On ne sera pas surpris, que je fasse ici abstraction des dérangemens, que les Planètes se causent par leur action mutuelle, parce qu'il est évident qu'il n'en influe rien sur l'effet de la résistance.

Je

Je conſidérérai donc trois cas, dont

Le premier ſera celui, où l'Orbite de la Planète n'a aucune excentricité.

Le ſecond, où l'excentricité eſt très petite, &

Le troiſième, où elle eſt mediocre.

PREMIER CAS.

L'Orbite de la Planète n'ayant aucune Excentricité.

Ayant dans ce cas $n=o$ il ſera $\sigma=k\omega$; $A=1$; $B=o$ $C=o$ & tous les ſuivans. Les formules générales ſe changeront donc en celles-cy

$$z=\frac{k}{1+\frac{\mu k\omega}{a}} \quad \& \quad \frac{2\pi c\sqrt{c}}{\Theta k\sqrt{k}}\, t=\omega-\frac{3\mu k}{4a}\omega^2$$

où k marque le rayon de l'orbite d'à préſent, a le rayon du corps de la Planète, & ω l'angle décrit autour du Soleil après le tems t. Je fais là deſſus les réflexions ſuivantes.

1ere) Après une révolution, ou bien en poſant $\omega=2\pi$, la diſtance de la Planète au Soleil ſera $z=\frac{k}{1+\frac{2\mu k}{a}\pi}$ & partant un tant ſoit peu plus petite qu'au commencement.

2de) Après m révolutions, ω étant $=2m\pi$, la diſtance de la Planète au Soleil ſera $z=\frac{k}{1+\frac{2m\mu k}{a}\pi}$ La Planète s'approchera donc de plus en plus du Soleil, mais ſi inſenſiblement, que pendant chaque révolution l'orbite ne différera pas d'un cercle.

3ème) Le

3ème) Le tems pendant lequel la Planète acheve m révolutions est
$t = \frac{k\sqrt{k}}{c\sqrt{c}}\ \Theta m (1 - \frac{3\mu k}{2a} \pi m)$ &

le tems pendant lequel elle acheve $m + 1$ révolutions est
$$t' = \frac{k\sqrt{k}}{c\sqrt{c}}\ \Theta(m+1)\left(1 - \frac{3\mu k}{2a}\ \pi(m+1)\right)$$

4ème) Donc, après m périodes, le tems d'une révolution sera
$t' - t = \frac{k\sqrt{k}}{c\sqrt{c}}\ \Theta\ (1 - \frac{3\mu k}{2a} \pi (2m+1)$. D'où l'on voit, que le tems périodique va en diminuant, le premier étant $\frac{k\sqrt{k}}{c\sqrt{c}}\ \Theta$.

5ème) La résistance de l'éther produira donc deux effets sur le mouvement des Planètes: le premier sera que la distance de la Planète au Soleil diminue, & le second consistera en ce que le tems périodique de la Planète devient plus court. Or le mouvement même demeure circulaire, sans qu'il en résulte une excentricité.

Supposons que l'excentricité de la Terre soit nulle, & appliquons les formules trouvées à ce cas:

Nous avons donc $k = c$ & $\Theta = 365^{j}\ 6^{h}\ 9'\ 36'' = 31\ 558\ 176''$ qui est le tems périodique par rapport aux étoiles fixes.

Posant ensuite la parallaxe horizontale du Soleil $= 12''$, nous aurons
$\frac{k}{a} = 17\,000$ & $\frac{3\pi k}{2a} = 77\,000$

Donc, après m révolutions, la diminution du tems périodique sera de $77000 \times 31\,558\,176 \times \mu\ (2m+1)$ secondes, ce qui fait en mettant pour μ le nombre donné cy-dessus par estime $\mu = 1 : 10\,000\,000\,000\,000$ environ $0,\ 24299\ 79552 \times (2m+1)$ secondes, ou bien $\frac{243}{1000}\ (2m+1)$ secondes.

Et partant après un siecle la diminution de l'année solaire seroit de $\frac{201 \times 243}{1000}$ c'est à dire de 49 secondes.

Comme

Comme cette diminution séculaire est évidemment trop grande, & qu'elle est même moindre que 5 secondes, il s'ensuit que la fraction μ est au moins 10 fois plus petite, que je ne l'ai supposée ici.

Il semble donc que le nombre λ employé cy-dessus doit surpasser 100, à moins qu'on ne veuïlle diminuer la densité de l'éther aux dépens de son élasticité. Or l'un & l'autre paroit également probable. *)

SECOND CAS.

L'Orbite de la Planète ayant une tres petite Excentricité.

Soit la fraction n qui exprime l'excentricité, si petite qu'on puisse dans le calcul négliger son quarré nn, & nous obtiendrons pour l'arc σ cette expression $\sigma = k\int d\omega(1+n\cos\omega)(1-2n\cos\omega) = k\int d\omega\,(1-n\cos\omega)$ delà $\sigma = k\,(\omega - n\sin\omega)$ & partant $A = 1$ & $B = -1$.

Lors donc que la Planète aura parcouru dans son orbite l'angle au Soleil ω, nous aurons sa distance du Soleil

$$z = \frac{k}{1+n\cos\omega+\frac{\mu k}{a}(\omega+\frac{1}{2}n\omega\cos\omega)} \quad \&$$

$2\pi c\sqrt{c}$

*) Si l'on supposoit la parallaxe horizontale du Soleil de 9 secondes, comme on vient de la conclurre par le dernier passage de Venus sur le disque du Soleil: on auroit $\frac{k}{a} = 22000$, & $\frac{3\pi k}{2a} = 100\,000$ environ, car comme on n'est pas encore trop sur de la parallaxe du Soleil, & qu'elle peut aussi bien être de 8 que de 9 secondes, il nous sera toujours permis de prendre pour $\frac{k}{a}$ & $\frac{3\pi k}{2a}$ des nombres ronds.

La diminution du tems périodique sera donc après m révolutions de $100\,000 \times 31\,558\,176 \times \mu\,(2m+1)$ secondes, ou posant $\mu = 1 : 10\,000\,000\,000\,000$ de $0,3155\,8176\,(2m+1)$ secondes, ou encore de $\frac{3155}{10000}\,(2m+1)$ secondes, & partant après un siecle de 63 seconde.

Comme cette diminution de l'année solaire est encore plus grande que celle qu'on a trouvé en supposant la parallaxe du Soleil de 12″, la fraction μ doit à plus forte raison être moindre qu' 1 : 10 billions, & même moindre qu' 1 : 100 billions.

$$\frac{2\pi c\sqrt{c}}{\Theta k\sqrt{k}}\,t = \int d\omega\,(1 - 2n\cos\omega) - \frac{2\mu k}{a}\int d\omega\,(1 - 3n\cos\omega)\,(\omega + \tfrac{1}{2}n\omega\cos\omega)$$

$$+ \frac{\mu k}{2a}\int d\omega\,(1 - 2n\cos\omega)\,(\omega - n\sin\omega)$$

ou

$$\frac{2\pi c\sqrt{c}}{\Theta k\sqrt{k}}\,t = \omega - 2n\sin\omega - \frac{\mu k}{2a}\int d\omega\,(3\omega - 8n\omega\cos\omega - n\sin\omega)$$

& prenant les intégrales

$$\frac{2\pi c\sqrt{c}}{\Theta k\sqrt{k}}\,t = \omega - 2n\sin\omega - \frac{\mu k}{2a}\,(\tfrac{3}{2}\omega^2 - 8n\omega\sin\omega - 9n\cos\omega)$$

où k marque le demi-paramètre, ou plutôt la distance moyenne de la Planète au Soleil.

Examinons d'abord l'orbite de la Planète, après qu'elle ait achevé m révolutions; posons pour cet effet $\omega = 2\pi m + \phi$, de sorte que ϕ marque l'angle parcouru dans la révolution suivante; & la distance de la Planète au Soleil sera exprimée de cette façon

$$z = \frac{k}{1 + n\cos\phi + \frac{\mu k}{a}\,(2\pi m + \phi)\,(1 + \frac{1}{2}n\cos\phi)}$$

Ici je remarque que cette distance n'est pas la plus petite ou $\phi = o$, comme il arriveroit s'il n'y-avoit point de résistance, mais là où $\phi = \frac{\mu k\,(1 + \frac{1}{2}n)}{n\,(a + \mu\pi mk)} = \frac{\mu k}{na}$, de sorte que pendant ce tems la ligne des absides est avancée de l'angle $\frac{\mu k\,(1 + \frac{1}{2}n)}{n\,(a + \mu\pi mk)}$

Posant donc $m = o$, la résistance de l'éther fait que, dès le premier mouvement, le périhelie réponde à l'angle $\frac{\mu k\,(1 + \frac{1}{2}n)}{na}$ & partant, après m révolutions, le perihélie aura reculé de $\frac{\mu\mu\pi mkk\,(1 + \frac{1}{2}n)}{na\,(a + \mu\pi mk)}$

ou

ou bien de $\frac{\mu\mu\pi m}{n} \cdot \frac{kk}{aa}$ ce qui eſt abſolument inſenſible; parceque, ſi n eſt extrémement petit, on ne pourra plus diſtinguer le perihélie.

Maintenant, pour trouver la plus petite diſtance de la Planète au Soleil, on n'a qu'à poſer $\Phi = \frac{\mu k}{na}$, & on l'aura exprimée en ſorte

$$z = \frac{k}{1 + n + \frac{\mu k}{na} \cdot 2\pi m(1 + \frac{1}{2}n)}$$

Or, poſant $\Phi = \pi + \frac{\mu k}{na}$, la plus grande diſtance de la Planète au Soleil ſera $z = \frac{k}{1 - n + \frac{\mu k}{a} \cdot \pi(2m+1)(1 - \frac{1}{2}u)}$.

Mais, puiſque l'excentricité n eſt extrèmement petite, & que l'effet ne devient ſenſible que lorſque le nombre m eſt aſſés grand, nous aurons la plus petite diſtance $= \frac{k}{1 + \frac{2\pi\mu mk}{a} + n(1 + \frac{\pi\mu mk}{a})}$, &

la plus grande diſtance $= \frac{k}{1 + \frac{2\pi\mu mk}{a} - n(1 + \frac{\pi\mu mk}{a})}$

Donc, après m révolutions de la Planète, nous trouvons le demi-paramètre de ſon Orbite $= \frac{ak}{a + 2\pi\mu mk} = k(1 - \frac{2\pi\mu mk}{a})$

& l'excentricité $= n \cdot \frac{a + \pi\mu mk}{a + 2\pi\mu mk} = n(1 - \frac{\pi\mu mk}{a})$

D'où nous voyons que la réſiſtance de l'éther diminue tant le paramètre que l'excentricité de l'orbite des Planètes.

Pour trouver le tems pendant lequel la Planète achève m révolutions autour du Soleil, on obtiendra en posant $\omega = 2\pi m$

$$t = \frac{\Theta k\sqrt{k}}{c\sqrt{c}} \left(m - \frac{3\pi\mu mmk}{2a} + \frac{g\mu mk}{4\pi a} \right)$$

Donc, le tems de $m+1$ révolutions étant

$$t = \frac{\Theta k\sqrt{k}}{c\sqrt{c}} \left(m+1 - \frac{3\pi m(m+1)^2 k}{2a} + \frac{9\mu mk}{4\pi a} \right)$$

après que la Planète aura achévé m révolutions, son tems périodique sera $\frac{k\sqrt{k}}{c\sqrt{c}} \Theta \left(1 - \frac{3\pi\mu k}{2a} (m+1) \right)$; tout comme nous l'avons trouvé dans le cas précédent.

Ainsi une éxcentricité très petite ne change rien dans la diminution du tems périodique, & le changement de l'excentricité même est si petit, qu'il sera presque impossible de s'en appercevoir même après le plus grand nombre de révolutions.

Si, par exemple, pour la Terre la valeur de $\frac{3\pi\mu k}{2a} \Theta$ est $\frac{243}{100000}$, savoir en prenant μ dix fois plus petit que je ne l'avois d'abord estimé, nous aurons à peu près $\frac{3\pi\mu k}{2a} = \frac{1}{41 \times 31\ 558\ 176}$

$$\frac{\pi\mu k}{a} = \frac{1}{862\ 000\ 000}$$

donc l'excentricité après m révolutions $n. \left(1 - \frac{m}{862\ 000.000} \right)$ d'où l'on voit que même après 100000 révolutions cette diminution ne deviendroit pas encore sensible.

Or le demi paramètre de l'orbite de la Terre sera encore après m révolutions $= c \left(1 - \frac{m}{431\ 000\ 000} \right)$

TROI-

TROISIEME CAS.

L'Orbite de la Planète étant considérablement excentrique.

Je supposerai ici l'excentricité n fois plus grande qu'auparavant, mais pourtant plus petite que l'unité; parceque $n = 1$ donneroit dejà une parabole pour l'orbite de la Planète, dont le dévelopement ne seroit d'aucune utilité.

Que les puissances de n deviennent donc de plus en plus petites, de manière qu'on puisse négliger les puissances plus hautes que le cube n^3, ou bien que le quarré-quarré n^4.

Dévelopons premièrement l'intégrale $\int \frac{d\omega V(1 + 2n \cos\omega + nn)}{(1 + n\cos\omega)^2}$ & comme la résolution en séries nous donne

$$V(1 + 2n\cos\omega + nn) = \begin{array}{l} 1 \\ + \frac{1}{2}n^2 \\ - \frac{1}{8}n^4 \end{array} \left.\begin{array}{l} + n \\ - \frac{1}{2}n^3 \end{array}\right\} \cos\omega \left.\begin{array}{l} - \frac{1}{2}n^2 \\ + \frac{3}{4}n^4 \end{array}\right\} \cos\omega^2 \begin{array}{l} + \frac{1}{2}n^3\cos\omega^3 \\ - \frac{5}{8}n^4\cos\omega^4 \end{array}$$

$$\frac{1}{(1 + n\cos\omega)^2} = 1 - 2n\cos\omega + 3n^2\cos\omega^2 \begin{array}{l} - 4n^3\cos\omega^3 \\ + 5n^4\cos\omega^4 \end{array}$$

nous en tirerons la valeur de la formule $\frac{V(1 + 2n\cos\omega + nn)}{(1 + n\cos\omega)^2} =$

$$\begin{array}{l} + 1 \\ + \frac{1}{2}n^2 \\ - \frac{1}{8}n^4 \end{array} \left.\begin{array}{l} - n \\ - \frac{3}{2}n^3 \end{array}\right\} \cos\omega \left.\begin{array}{l} + \frac{1}{2}n^2 \\ + \frac{13}{4}n^4 \end{array}\right\} \cos\omega^2 + \frac{1}{2}n^3\cos\omega^3 - \frac{17}{8}n^4\cos\omega^4$$

& à cause de $\cos\omega^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\omega$; $\cos\omega^3 = \frac{3}{4}\cos\omega + \frac{1}{4}\cos 3\omega$ $\cos\omega^4 = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\omega + \frac{1}{8}\cos 4\omega$ cette expression se réduit à

$$\begin{array}{l} + 1 \\ + \frac{3}{4}n^2 \\ + \frac{45}{64}n^4 \end{array} \left.\begin{array}{l} - n \\ - \frac{9}{8}n^3 \end{array}\right\} \cos\omega \left.\begin{array}{l} + \frac{1}{4}n^2 \\ + \frac{9}{16}n^4 \end{array}\right\} \cos 2\omega + \frac{1}{8}n^3\cos 3\omega - \frac{17}{64}n^4\cos 4\omega$$

d'où

d'où nous tirons l'intégrale $\int \frac{d\omega\sqrt{(1+2n\cos\omega+n^2)}}{(1+n\cos\omega)^2} =$

$$\left.\begin{matrix}+1\\+\frac{3}{4}n^2\\+\frac{45}{64}n^4\end{matrix}\right\}\omega \left.\begin{matrix}-n\\-\frac{9}{8}n^3\end{matrix}\right\}\sin\omega \left.\begin{matrix}+\frac{1}{8}n^2\\+\frac{9}{32}n^4\end{matrix}\right\}\sin 2\omega + \frac{1}{24}n^3\sin 3\omega - \frac{17}{256}n^4\sin 4\omega$$

& partant:
$$\begin{aligned} A &= 1 + \tfrac{3}{4}n^2 + \tfrac{45}{64}n^4 \\ B &= -1 - \tfrac{9}{8}n^2 \\ C &= \tfrac{1}{8} + \tfrac{9}{32}n^2 \\ D &= \tfrac{1}{24} \\ E &= -\tfrac{17}{256} \end{aligned}$$

Ensuite nous avons la distance de la Planète au Soleil

$$z = k : \left((1+n\cos\omega + \frac{\mu k}{a}\left\{\begin{matrix} A\omega - \frac{1}{2}Bn\omega\cos\omega - \frac{1}{3}Cn^2\sin 2\omega \\ -\frac{1}{8}Dn^3\sin 3\omega - \frac{1}{15}En^4\sin 4\omega\end{matrix}\right\}\right)$$

Enfin, pour l'expression du tems, nous avons d'abord

$$\int\frac{d\omega}{(1+n\cos\omega)^2} = \left.\begin{matrix}+1\\+\frac{3}{2}n^2\\+\frac{15}{8}n^4\end{matrix}\right\}\omega \left.\begin{matrix}-2n\\+3n^3\end{matrix}\right\}\sin\omega \left.\begin{matrix}+\frac{3}{4}n^2\\+\frac{5}{4}n^4\end{matrix}\right\}\sin 2\omega - \frac{1}{3}n^3\sin 3\omega + \frac{5}{32}n^4\sin 4\omega$$

& les deux autres formules se réunissent dans celle-cy

$$= \frac{\mu k}{2a}\int d\omega\left\{\begin{matrix} \left.\begin{matrix}-3\\-\frac{39}{4}n^2\\-\frac{1263}{64}n^4\end{matrix}\right\}\omega \left.\begin{matrix}+8n\\+\frac{93}{4}n^3\end{matrix}\right\}\omega\cos\omega \left.\begin{matrix}-\frac{15}{2}n^2\\-22n^4\end{matrix}\right\}\omega\cos 2\omega + 6n^3\omega\cos 3\omega - \frac{35}{8}n^4\omega\cos 4\omega \\ \left.\begin{matrix}-n\\-\frac{9}{4}n^3\end{matrix}\right\}\sin\omega \left.\begin{matrix}+\frac{31}{24}n^2\\+\frac{163}{48}n^4\end{matrix}\right\}\sin 2\omega - \frac{5}{18}n^3\sin 3\omega + \frac{879}{1280}n^4\sin 4\omega \end{matrix}\right.$$

d'où, pour le tems t, on trouve $\frac{2\pi c\sqrt{c}}{\Theta k\sqrt{k}}\, t =$

$$\left.\begin{matrix}+1\\+\frac{3}{2}n^2\\+\frac{15}{8}n^4\end{matrix}\right\}\omega \left.\begin{matrix}-2n\\-3n^3\end{matrix}\right\}\sin\omega \left.\begin{matrix}+\frac{3}{4}n\\+\frac{5}{4}n^4\end{matrix}\right\}\sin 2\omega - \frac{1}{3}n^3\sin 3\omega + \frac{5}{32}n^4\sin 4\omega$$

$+\mu k$

$$+\frac{\mu k}{2a}\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{39}{8}n^2 \\ -\frac{1263}{128}n^4 \end{bmatrix}\right\}\omega^2 \quad \left.\begin{matrix} +8n \\ +\frac{93}{4}n^3 \end{matrix}\right\}\omega\sin\omega \quad \left.\begin{matrix} -\frac{15}{4}n^2 \\ -11n^4 \end{matrix}\right\}\omega\sin 2\omega + 2n^3\omega\sin 3\omega \\ \hfill -\frac{35}{32}n^4\omega\sin 4\omega \\ \qquad\qquad \left.\begin{matrix} +9n \\ +\frac{51}{2}n^3 \end{matrix}\right\}\cos\omega \quad \left.\begin{matrix} -\frac{121}{48}n^2 \\ -\frac{691}{96}n^4 \end{matrix}\right\}\cos 2\omega + \frac{37}{48}n^3\cos 3\omega \\ \hfill -\frac{2279}{5120}n^4\cos 4\omega \end{array}\right.$$

Et si nous nommons le demi grand axe $= h$, parce que

$$h = \frac{k}{1 - nn};\; k\sqrt{k} = \left(1 - \tfrac{3}{2}n^2 + \tfrac{3}{8}n^4\right)h\sqrt{h}$$ nous aurons

$$\frac{2\pi c\sqrt{c}}{\Theta h\sqrt{h}}\, t =$$

$$\omega - 2n\sin\omega \left.\begin{matrix} +\frac{3}{4}n^2 \\ +\frac{1}{8}n^4 \end{matrix}\right\}\sin 2\omega - \tfrac{1}{3}n^3\sin 3\omega + \tfrac{5}{32}n^4\sin 4\omega$$

$$-\frac{\mu k}{a}\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{bmatrix} +\frac{3}{4} \\ +\frac{21}{16}n^2 \\ +\frac{399}{256}n^4 \end{bmatrix}\right\}\omega^2 \quad \left.\begin{matrix} -4n \\ -\frac{45}{8}n^3 \end{matrix}\right\}\omega\sin\omega \quad \left.\begin{matrix} +\frac{15}{8}n^2 \\ +\frac{43}{16}n^4 \end{matrix}\right\}\omega\sin 2\omega - n^3\omega\sin 3\omega \\ \hfill +\frac{35}{64}n^4\omega\sin 4\omega \\ \qquad\qquad \left.\begin{matrix} -\frac{9}{2}n \\ -6n^3 \end{matrix}\right\}\cos\omega \quad \left.\begin{matrix} +\frac{121}{96}n^2 \\ +\frac{41}{24}n^4 \end{matrix}\right\}\cos 2\omega - \frac{37}{96}n^3\cos 3\omega \\ \hfill +\frac{2279}{10240}n^4\cos 4\omega \end{array}\right.$$

Supposons que la Planète ait dejà achevé m révolutions, & pour celle qui suit posons $\omega = 2\pi m + \phi$.

Alors la distance de la Planète au Soleil sera $z =$

$$k \text{ divisé par } 1 + n\cos\phi +$$

$$\frac{\mu k}{a}\left.\begin{Bmatrix} 2\pi Am & -\pi Bmn \\ +A\phi & -\frac{1}{2}Bn\phi \end{Bmatrix}\right\}\cos\phi - \tfrac{1}{3}Cn^2\sin 2\phi - \tfrac{1}{8}Dn^3\sin 3\phi - \tfrac{1}{15}En^4\sin 4\phi$$

Et puisque les termes qui ne renferment pas le nombre m sont évanouïssans, l'orbite subira le même changement que dans le cas précédent. Elle se rétrécira tant soit peu, & l'excentricité deviendra plus petite, mais si peu qu'il est impossible de s'en apercevoir. Le lieu de l'aphélie ou du périhélie n'en souffrira de même aucun changement per-

perceptible. Or l'unique effet que la résistance de l'éther est capable de produire, & qui soit sensible, consiste dans la diminution du tems périodique; qu'il convient d'examiner plus soigneusement.

Détermination de la diminution du tems périodique causée par la résistance de l'éther.

Pendant que la Planète achève m révolutions, il s'ecoule un tems t, de sorte que, posant $\omega = 2\pi m$, il soit

$$\frac{c\sqrt{c}}{k\sqrt{k}} \cdot \frac{t}{\Theta} =$$

$$m - \frac{\mu k}{a}\left\{\begin{matrix} + \frac{3}{2} \\ + \frac{9}{8}n^2 \\ + \frac{399}{128}n^4 \end{matrix}\right\}\pi mm - \frac{9n}{4\pi} + \frac{121n^2}{192\pi} - \frac{613n^3}{292\pi} + \frac{59317n^4}{61440\pi}$$

de la même manière on aura aussi le tems de $m+1$ révolutions.

Donc, après que la Planète aura achevé m revolutions, le tems périodique de la révolution suivante sera

$$\frac{h\sqrt{h}}{c\sqrt{c}}\Theta\left(1 - \frac{3\pi\mu k}{2a}\left(1 + \frac{3}{4}n^2 + \frac{133}{64}n^4\right).(2m+1)\right) \text{ ou}$$

$$\frac{h\sqrt{h}}{c\sqrt{c}}\Theta\left(1 - \frac{3\pi\mu h}{2a}\left(1 - \frac{1}{4}n^2 + \frac{85}{64}n^4\right).(2m+1)\right)$$

Et alors le demi-paramètre qui étoit au commencement k sera

$$= k\left(1 - \frac{2\pi\mu mk}{a}\right) \text{ \& l'excentricité} = n\left(1 - \frac{\pi\mu mk}{a}\right)$$

$$\text{\& le demi grand axe} = \frac{k\left(1 - \frac{2\pi\mu mk}{a}\right)}{1 - nn\left(1 - \frac{2\pi\mu mk}{a}\right)} = h\left(1 - \frac{2\pi\mu mh}{a}\right)$$

Que

Que le tems périodique de la Planète ait été $= T$, s'il n'y avoit point eu de résistance: & parce que $T = \frac{h\sqrt{h}}{c\sqrt{c}}\,\Theta$: en négligeant l'excentricité le tems périodique sera après m révolutions $T\left(1 - \frac{3\pi\mu h}{2a}\,(2m+1)\right)$

Or le premier tems périodique ayant été à cause de la résistance

$$T\left(1 - \frac{3\pi\mu h}{2a}\right)$$

après m révolutions la diminution du tems périodique sera

$$\frac{3\pi\mu h}{a}\,m\,T$$

Quelque petite que soit cette diminution, l'effet en doit devenir très sensible au bout de plusieurs siecles.

Supposons que le tems périodique d'une Planète soit à présent $= T$; soit ensuite le tems périodique de la Terre autour du Soleil pour cette même époque $= \Theta$, & si nous posons que pendant m révolutions le tems périodique de la Planète diminue de la particule du tems $= m\,\theta$, nous aurons $\theta = \frac{3\pi\mu h}{a}\,T$, & partant $\frac{3\pi\mu h}{a} = \frac{\theta}{T}$.

Maintenant, qu'on calcule des Tables du moyen mouvement de cette Planète, selon la maniére ordinaire, comme si le tems périodique T demeuroit toujours le même: Et parce qu'au tems T répond le moyen mouvement 2π, on aura pour un an, ou pour le tems Θ, le moyen mouvement $\frac{2\pi\Theta}{T}$, & pour le tems de N années, ce moyen mouvement sera $\frac{2\pi N\Theta}{T}$: Or, à cause de la résistance de l'éther, le moyen mouvement de la Planète pour le même tems de N années sera différent.

Soit

Soit pour la trouver $t = N\Theta$, & l'angle ω, en omettant les termes qui renferment le sinus ou cosinus, donnera son mouvement moyen actuel.

Donc, parce que $\frac{c\sqrt{c}}{h\sqrt{h}} = \frac{\Theta}{T}$, nous aurons cette équation $\frac{2\pi N\Theta}{T}$ $= \omega - \frac{3\mu h}{4a}\omega^2 = \omega - \frac{\theta\omega^2}{4\pi T}$, d'où nous trouvons le mouvement moyen actuel $\omega = \frac{2\pi N\Theta}{T} + \frac{\theta\omega^2}{\pi T}$ ou bien $\omega = \frac{2\pi N\Theta}{T} + \frac{\pi N^2\Theta^2\theta}{T^3}$

Il faut donc ajouter au lieu moyen trouvé par les tables ordinaires du moyen mouvement, la particule $\frac{\Theta^2\theta}{T^3}\pi N^2$ ou $180°.\ N^2.\ \frac{\Theta^2\theta}{T^3}$

Cette même correction a lieu, soit que N marque un nombre positif ou négatif. Donc, si les tables des moyens mouvemens ont été dressées sur le tems périodique T d'une certaine époque, qui après m révolutions diminue de la particule $m\theta$; alors pour N ans, tant avant qu'après cette époque, il faudra ajouter à la longitude moyenne la particule $180°.\ N^2.\ \frac{\Theta^2}{T^2}.\ \frac{\theta}{T}$.

Si l'on fait $T : \theta = 360° : \delta$, ce petit arc δ exprimera le moyen mouvement de la Planète qui répond au tems θ, & notre correction de la longitude moyenne sera $\frac{1}{2}\delta N^2.\ \frac{\Theta^2}{T^2}$, où Θ marque le tems d'une année.

Si nous posons la distance moyenne du Soleil à la Terre $= c$ & à la Planète $= h$, à cause de $\frac{\Theta^2}{T^2} = \frac{c^3}{h^3}$, notre correction sera $=$ $\frac{1}{2}\delta N^2 \frac{c^3}{h^3}$: or cette fraction $\frac{c^3}{h^3}$ se tire aisément des tables.

Comme cette correction est proportionelle au quarré de l'intervalle du tems, quelque petite que soit la diminution δ d'une révolution

à la

à la ſuivante, elle doit devenir très conſidérable dans un intervalle de quelques milliers d'années.

Or, pour l'uſage de l'Aſtronomie, cet effet de la réſiſtance de l'éther ſur le tems périodique des Planètes ne ſauroit être réprésenté plus commodément que par une correction du moyen mouvement, & elle ſe fera de cette manière.

Ayant établi le moyen mouvement pour une certaine époque, & en ayant déduit une Table des longitudes moyennes pour tous les ans, tant avant qu'après cette époque; la longitude moyenne ne ſera juſte que pour cette époque même: pour tout autre tems qui en diffère de N ans, ſoit avant ou après cette époque, il faudra ajouter à la longitude moyenne tabulaire la particule $\frac{1}{2}\delta N^2 \frac{c^3}{h^3}$ ou $\frac{1}{2}\delta N^2 \frac{\Theta^2}{T^2}$ & partant après un an $\frac{1}{2}\delta \frac{\Theta^2}{T^2}$.

Soit cette correction d'un an $= \alpha$, & parce que $\delta = 2\alpha \frac{T^2}{\Theta^2}$ nous aurons $\theta = \frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{T^3}{\Theta^2}$ par conſéquent $\frac{3\pi\mu h}{a} = \frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{T^2}{\Theta^2}$ ou bien

$$\alpha = \frac{3\pi\pi\mu h}{a} \cdot \frac{\Theta^2}{T^2} = 3\pi\pi\mu . \frac{c^3}{ah^2}$$

de ſorte que pour un an la correction ſoit réciproquement proportionnelle au quarré de la diſtance moyenne de la Planète au Soleil multiplié par le demi-diamètre du corps de la Planète.

Il ſuffit donc d'avoir déterminé cette correction pour une Planète, & il ſera aiſé d'en déduire celle pour toutes les autres.

Il n'y a aucun doute que les obſervations du Soleil ne ſoient les plus propres pour nous fournir les éclairciſſemens néceſſaires ſur cet important article; & ſi l'on peut parvenir à déterminer la correction d'un an α pour le Soleil, on en déduira aiſément la valeur de la fraction μ réſultante de la réſiſtance de l'éther: car à cauſe de $h = c$ on aura $\mu = \frac{\alpha a}{3\pi^2 c}$

Or, quoique la correction d'un an α soit si petite qu'elle échaperoit aux plus grands soins des Astronomes, elle devient, comme je l'ai fait voir, très sensible pour un grand nombre d'années. Car cette correction étant pour un intervalle d' N années $= NN\alpha$, elle sera pour un siecle $= 10\,000\ \alpha$, & pour dix siecles $= 1000\,000\ \alpha$. En consultant donc les plus anciennes observations, il ne sera plus difficile d'en conclurre la véritable valeur de la correction annuelle.

Pour cet effet il faudroit conclurre la quantité d'une année solaire moyenne par les plus modernes observations, faites tout au plus dans l'espace d'un demi-siecle; de là on devroit dresser des Tables du moyen mouvement & de la longitude moyenne du Soleil pour les époques les plus reculées, où l'on trouve de bonnes observations.

Alors, pour une telle époque qui précede la présente d' N ans, on compareroit la longitude moyenne tirée de ces Tables avec celle qui conviendroit aux observations anciennes; & si l'on trouvoit que celle-cy surpassât celle-là de la quantité Q, on auroit $N^2\,\alpha = Q$, & partant

$$\alpha = \frac{Q}{N^2}$$

Mais il faudroit être bien assuré, que la Terre n'eût pendant ce tems souffert aucune altération dans son mouvement par l'action de quelque Comète. Pour l'action des autres Planètes, on en connoit assez l'effet pour pouvoir en tenir compte dans cette recherche. Toutefois il est fort à craindre que les Comètes ne la rendent entierement inutile.

La Méthode dont les Astronomes se servent pour déterminer la quantité de l'année solaire, nous fournit encore un autre moyen de nous assurer de la correction annuelle, α.

Supposons qu'en comparant les observations présentes avec celles qui ont été faites avant L ans, on conclue la quantité de l'année $= A$, & en les comparant avec des observations faites avant M ans, on la trouve $= B$.

Mais-

Maintenant, soit la quantité de l'année solaire $= \Theta$, & la diminution annuelle $= \theta$; donc le tems écoulé depuis L ans jusqu'à présent sera $= L\Theta + L^2\theta$ & le tems écoulé depuis M ans jusqu'à présent sera $= M\Theta + M^2\theta$. De là on aura $A = \Theta + L\theta$ & $B = \Theta + M\theta$

& par conséquent $\theta = \frac{B-A}{M-L}$ & $\Theta = A - L\theta$

d'où l'on connoitra la véritable année solaire Θ, qui convient à l'époque d'à présent, avec la diminution annuelle θ, & enfin la correction annuelle $\alpha = \frac{\pi\theta}{\Theta}$

Mais, outre les Comètes qui peuvent troubler cette détermination, on rencontre encore d'autres obstacles à peu près insurmontables du côté des observations mêmes, qu'on ne trouve pas, au moins dans les siècles passés, si exactes, que l'erreur dans la quantité de l'année ne puisse être de plusieurs secondes. Or, comme $B - A$ est un nombre de secondes fort peu considérable, l'erreur commise dans les quantités de l'année A & B le rend tout à fait incertain. Ensuite les plus anciennes observations n'ont pas seulement ce défaut qu'elles sont peu exactes, mais il semble aussi qu'on n'est pas trop sûr du tems dans lequel elles ont été faites. Surtout la réduction de l'Almanach Egyptcien, dont *Ptolemée* s'est servi, au Romain, ne paroit pas assés constatée, à cause des désordres aux quels l'Almanach Romain fût alors assujetti. Et quant aux corrections que *Riccioli* & d'autres Chronologistes ont tâché d'y apporter, elles sont ouvertement fondées sur la quantité de l'année, qu'ils ont supposée; ce qui est précisement la question.

Il se pourroit donc très bien, que les momens des observations marquées par *Ptolemée* dussent être reculés d'un ou de deux jours au delà du terme, qu'on suppose dans le calcul; & alors les anciennes observations comparées aux modernes donneroient incontestablement l'année plus longue que les Astronomes ne la supposent dans leurs tables.

En effet feu Mr. *Cassini*, après les plus scrupuleuses recherches qu'il a faites sur la quantité de l'année solaire moyenne, en prenant un milieu de tous ses résultats, la conclut de $365^j\,5^h\,48'\,47''$, qui convient

vient avec celle qu'il a déduite de ſes propres obſervations. Cependant, dans ſes Tables Aſtronomiques, il la ſuppoſe de $365^j\,5^h\,48'\,53''\,24'''$ & partant de $6''\,24'''$ plus grande. Il n'y a fait ce changement ſans doute que pour ſatisfaire aux anciennes obſervations, d'où il faut conclurre que celles-cy demandent une plus grande quantité de l'année; & c'eſt ce qui prouve l'effet de la réſiſtance de l'éther.

Auſſi ne ſauroit-on douter que les Obſervations d'*Hipparque*, comparées avec celles de *Ptolemée*, ne donnaſſent l'année au moins de quelques minutes plus longue: d'où l'on doit également conclurre que l'année ſolaire moyenne eſt à preſent plus courte qu'autre fois.

Si Mr. *Caſſini* dans ſes Tables avoit ſuppoſé l'année de $365^j\,5^h\,48'\,47''$, le mouvement moyen pour cent années Juliennes ſeroit devenu $0'\,0^\circ\,46'\,3''$, qui à préſent dans ſes Tables eſt de $0'\,0^\circ\,45'\,42''$, la différence étant de $21''$: Donc, pour 200 ans la différence ſera de $42''$, & partant ſi nous ſuppoſons que les Tables de Caſſini repréſentent bien la longitude du Soleil jusqu'à 200 ans en arrière, des Tables conſtruites ſur la quantité de l'année de $365^j\,5^h\,48'\,47''$ demanderont pour l'intervalle de deux ſiecles la correction de $42''$, & pour l'intervalle d'un ſiecle $10\frac{1}{2}''$.

Mais ſi nous ſuppoſions la véritable quantité de l'année de $365^j\,5^h\,48'\,46''$, on trouveroit pour l'intervalle d'un ſiecle la correction $= 12''$,

& partant $\alpha = \frac{1}{833}''$ donc $\frac{\theta}{\Theta} \times 180^\circ = \frac{\theta \times 60 \times 60 \times 180}{31\,558\,176} = \frac{1}{833}$ & enfin

$$\theta = \frac{31\,558\,176}{833 \times 60 \times 60 \times 180}'' = 0,058''$$

ce qui étant la diminution annuelle de l'an, la diminution ſéculaire ſera $= 5''\,48'''$.

Mr. l'Abbé *de la Caille* a ſuppoſé l'année dans ſes Tables de $365^j\,5^h\,48'\,49''$, & il l'a uniquement conclue des obſervations modernes, de ſorte que ce ſoit la juſte quantité de l'année pour le milieu de ce ſiecle, Dans ce cas le mouvement moyen pour cent années Juliennes ſeroit $0'\,0^\circ\,45'\,55''\frac{6}{10}$. Donc ſi pour ſatisfaire aux obſervations faites avant deux ſiecles

ſiecles, il falloit ſuppoſer le mouvement moyen ſéculaire de $0^s\,0^\circ\,45'\,42''$, on ſeroit obligé d'ajouter à la longitude moyenne trouvée par les Tables de Mr. *de la Caille* $27\frac{2}{10}''$, & comme cette correction doit égaler $40\,000\,\alpha$, on obtiendroit $\alpha = \frac{1}{1470}''$; d'où l'on concluroit $\theta = 0,033$, & la diminution ſéculaire de l'année $= 3''\,18'''$. De là il ſemble qu'on devroit ſuppoſer la fraction

$$\mu = \frac{1}{150\,000\,000\,000\,000}$$

ce qu'on pourroit encore aſſés bien accorder avec les principes établis cy-deſſus ſur la denſité de l'éther, & la manière dont il réſiſte au mouvement des corps.

Comme on ne ſauroit encore rien décider de précis la deſſus, poſons la diminution ſéculaire de l'année $= \nu''$, & à cauſe de $\theta = \frac{\nu}{100}$ nous aurons $\alpha = 180. \frac{\nu}{100 \times 31\,558\,176} = 0,000\,205\,\nu''$: donc l'augmentation de la longitude moyenne pour l'intervalle d'un ſiècle ſera de $2\frac{1}{20}\,\nu$ ſecondes, & pour l'intervalle de dix ſiècles ou de mille ans, elle ſera de $205\,\nu$ ſecondes: de là $\mu = \frac{\nu}{536\,000\,000\,000\,000}$.

Enfin, en tenant compte du demi-diamètre des autres Planètes, on aura l'augmentation de leur longitude moyenne pour l'intervalle de mille ans

pour Saturne $= 135\,\nu''$
pour Jupiter $= 62\,\nu$
pour Mars $= 254\,\nu$
pour la Terre $= 205\,\nu$
pour Venus $= 103\,\nu$
pour Mercure $= 135\,\nu$

ſavoir après avoir établi des Tables du moyen mouvement ſur le tems périodique qui convient à chaque Planète pour l'époque propoſée.

Ce que je viens d'exposer prouve suffisamment, que les Planètes éprouvent dans leur mouvement quelque résistance de l'éther, quoiqu'il me soit impossible d'en déterminer la vraye quantité par la seule Théorie. Nous connoissons seulement moyennant cette Théorie que la résistance doit être très petite; & rien n'empêche qu'elle ne soit encore considérablement plus petite que je ne l'ai estimée.

Non seulement la densité de l'éther pourroit être diminuée au delà que je ne l'ai supposée cy-dessus, en diminuant en même raison l'élasticité; mais l'obliquité dont les particules vrayement solides des Planètes reçoivent l'impulsion de l'éther, pourroit encore causer une plus grande diminution.

Cependant je doute fort qu'on puisse par ce moyen réduire la diminution de l'année solaire au dessous d'une seconde pendant un siecle: il me semble au contraire, qu'on la pourroit bien admettre de quelques secondes sans porter la moindre atteinte aux observations anciennes.

Il n'est pas encore suffisament prouvé, que les observations rapportées par *Ptolemée* ne doivent pas être reculées d'un jour au delà qu'on ne les suppose communément. *Riccioli* lui-même en marque les jours différemment dans son Almageste & son Astronomie réformée, à cause de l'incertitude de l'Almanach Romain. Et ceux qui ont voulu mieux régler ces tems, se sont ouvertement fondés sur l'hypothese de la quantité inaltérable de l'année.

Mais ici je rencontre un Antagoniste bien redoutable *) le savant Mr. le Professeur *Mayer* de Gœttingue, qui soutient positivement que l'année solaire n'a souffert aucune altération, quoiqu'il admette une petite altération dans le mouvement moyen de la Lune, ce qui paroitra dejà fort paradoxe.

Pour maintenir ce sentiment, il rejette les observations des équinoxes de *Ptolemée*, qui le renverseroient tout à fait; & ensuite il regarde le

*) Mr. *Mayer* vivoit encore lorsque ce Mémoire fût présenté à l'Academie.

le ſoupçon, qu'on auroit pû commettre une erreur d'un jour dans le calcul chronologique, comme très abſurde. Il dit que la différence d'un jour produiroit dans le moyen mouvement de la Lune une différence de 13 dégrés, qu'on ne ſauroit admettre en aucune façon.

Je réponds, qu'une telle différence de 13 degrés dans le moyen mouvement de la Lune ſuppoſe dejà un moyen mouvement bien établi & conſtant; & c'eſt ce qui eſt précisément de quoi on a raiſon de douter.

Enſuite, ſi en reculant d'un jour les époques de *Ptolemée*, on en change conformément le moyen mouvement du Soleil & de la Lune, on conſervera précisément les mêmes Eclipſes, & toujours le même rapport entre le Soleil & la Lune.

Outre cela, il n'eſt pas à craindre que cette augmentation du moyen mouvement ne ſoit plus d'accord avec les obſervations plus modernes; le mouvement moyen de ces derniers ſiecles n'en eſt point altéré, & en remontant aux ſiecles paſſés, il-y faut aporter une correction proportionelle au quarré du tems écoulé; d'où l'on voit que, quand même cette correction pour les tems de *Ptolemée* & *Hipparque* ſeroit très conſiderable, elle pourroit bien ſubſiſter avec les obſervations faites depuis quelques ſiecles, même en remontant jusqu'aux tems d'*Albategnius*.

Fautes à corriger.

Pag.	*lin.*	*lisez.*
11	20	Non ſeulement un
15	28	qui pourra être regardée
20	2	$ff = \frac{2\pi\pi c^3}{g\Theta^2}$
22	4	$-2dzd\phi - zdd\phi$
—	13	$+\frac{\mu ds}{2a} = 0$ *item* $zzd\phi.\ e^{\frac{\mu s}{2a}}$
26	12	$nnd\omega \sin\omega^2 -$
32	4	$+n\sin\omega$ *au lieu de* $-n\sin\omega$
34	3	$+\frac{9\mu nk}{4\pi a}$
—	16	$\frac{\pi\mu k}{a} = \frac{1}{2000\ 000\ 000}$
—	17	$n\left(1 - \frac{m}{2000\ 000\ 000}\right)$
—	21	$c\left(1 - \frac{m}{1000\ 000\ 000}\right)$
36	*à la dernière*	$\left.\begin{matrix} +\frac{3}{4}n^2 \\ +\frac{5}{4}n^4 \end{matrix}\right\} \sin 2\omega$
38	9	$-\frac{613\,n^3}{192\pi}$

RCHES

R

STANCE

LIEU

LEQUEL

SE MEUVENT,

R

ULER,

SCIENCES ET BELLES-LETTRES

RUSSE.

lum, gravitate carentem,

rrenæ fæcis habentem.

RLIN,

Fréderic Vofs.

LXII.

Hl. Prof Karsten