20

Neuverbesserte,

gründliche Theorie

der

Windmühlenflügel

von

Johann Friedrich Christian Werneburg,

Doctor der Philosophie.

Qui bene distinguit, bene docet.

Zu finden in der Joachimschen Buchhandlung in Leipzig.

1800.

19

Dem

Redacteur des kaiserl. priv. Reichs Anz.

Herrn Dr Hennicke

in Gotha

am 2/4/1860

vom

Verfasser

Stetes Gesetz sollte es nicht bloß für den eigentlichen Philosophen sein, gehörig sowohl von dem zu abstrahiren, was zur Ansicht und Betrachtung seiner Materie nicht gehört, als auch auf das zu reflectiren, was dazu erforderlich ist: — Auch der Mathematiker sollte solches nicht aus der Acht lassen, bei Anwendung der reinen Mathematik auf technische Geschäfte. Diese Regel würde früherhin und auch jezt manchem Mathematiker für falsche Theorien, die nicht mit der Praxis zusammen stimmen, geschützt und ihm mancher Spöttereien der Practiker überhoben haben. Diese Bemerkung hier vorauszuschicken, hielt ich nicht für so unnütz, eines Theils um eine richtigere oder schiefere Beurtheilung des Werthes dieser Abhandlung zu veranlassen, andern Theils bei andern den Trieb zu erwecken, ähnliche Abstractionen und Reflectionen über ihre zu bearbeitenden Materien vor und während der Bearbeitung anzustellen. Denn ich glaube hierdurch eine einfache und eben darum mit der Praxis übereinstimmendere Theorie der Windmühlenflügel gefunden und mithin überhaupt eine Vervollkommnung der Windmühlen begründet zu haben.

Ob also diese hier abgehandelte Materie der Aufmerksamkeit und Würdigung der Staatsmänner und der Practiker würdig sei, bedarf keiner weitern Erörterung. Die Sache spricht für sich selbst. —

Das **Widerstreben** ist gleich, ob eine Ebene gegen eine stillstehende Materie, oder ob diese gegen die stillstehende Ebene bewegt wird. Das erste nenne ich in Beziehung auf die Ebene **Widerstand**, das zweite **Stoß**; umgekehrt in Beziehung auf die bewegte oder bewegende Materie heiße ich das erste **Stoß**, das zweite **Widerstand**. Die Ursache des Widerstandes ist:

1) entweder die Luft, oder Dünste, oder das Wasser, oder mehrere Körper zugleich, je nach dem der Gegenstand ist: 2) Die Friction, welche durch die Bewegung der verschiedenen Theile einer Maschine in fester Materie und durch die zu überwindende Last entsteht. Diese Betrachtung zeigt den Weg wie und was alles als Ursache des Widerstandes in Rechnung zu bringen sei, um die Größe des leztern angeben zu können.

Die Ursache des Stoßes ist entweder das Wasser, oder der Dunst, oder der Wind, welcher wie z. B. bei unserm Gegenstande, dem Windmühlenflügel auf dessen an der Welle befestigten Ebene schief oder senk-

recht

recht stößt. In jedem Buche, welches sich über diesen Gegenstand mehr oder weniger umständlich verbreitet, wird geleugnet, daß man niemals den Windmühlenflügel eine solche Stellung auf der Axe der Welle geben könne, so daß der Windstoß senkrecht auf seine Ebene erfolge, und dagegen gelehrt, daß dieser beständig eine schiefe Richtung mit des Flügels Ebene machen müße. Der Grund, den man dafür anführt, ist, daß nämlich, bei einer parallelen Richtung mit der Axe der Welle, der Wind in einer senkrechten Richtung auf den untern sowohl als auch auf dem obern Flügel stossen, folglich einer dem andern das Gleichgewicht halten und keiner herumgehen würde. — Dieser Grund ist unwiderlegbar wahr und richtig. Wenn aber ferner behauptet wird, daß man die Windmühlenflügel nicht so gegen den Wind stellen könne, wie man eine Schaufel gegen das Wasser stellt, weil sonst der untere dem obern das Gleichgewicht halten und keiner herumgehen würde, so erinnere ich dagegen folgendes: Man darf ja nur die unteren dem Winde ausgesetzten Flügel oder den untern Quadranten, ganz durch einen bretern Verschlag oder durch sonst einen vom Winde undurchdringbaren Widerstande gegen den Windstoß schützen, so daß die oberen Flügel dem Winde bloß ausgesetzt sind und von ihm bloß gestossen werden können. Jezt wird Bewegung Statt finden. Freilich muß sich die Richtung dieses Widerstandes, beständig gerade der Richtung des Windstosses entgegen, der Wind mag aus einer

Gegend herkommen von wannen er will, wie sich diese verändert, zugleich verändern lassen. Doch ein mehreres hiervon zu einer andern Zeit. Bei Bestimmung der Stärke des Stosses muß man sehen 1) auf die Geschwindigkeit der bewegenden Materie; 2) auf den Winkel, welchen diese Ebene mit der Richtung des Stosses derselben macht; 3) auf die Größe nnd Gestalt der Fläche der Ebene, welche bewegt wird; 4) Auf die Dichtigkeit der stossenden oder bewegenden Materie (der Luft, der Dünste oder des Wassers.)

In dieser Abhandlung werde ich bloß, vor jezt mein Augenmerk richten, auf den vortheilhaftesten Stoß, auf die vortheilhafteste Stellung oder Richtung des Windmühlenflügels an der Axe und auf die Gestalt desselben. — Es ist also hier die

Aufgabe.

Den vortheilhaftesten Neigungswinkel, welchen die Ebene des Windmühlenflügels mit der Richtung des Windstosses macht, — den vortheilhaftesten Stoß — und die vortheilhafteste Gestalt des Windmühlenflügels zu finden. —

Zuvörderst will ich den Windstoß und seine vortheilhafteste Würkung im allgemeinen betrachten und allgemeine Ausdrücke oder Formeln aufsuchen, alsdann ist es ein leichtes zu den Windmühlenflügel überzugehen.

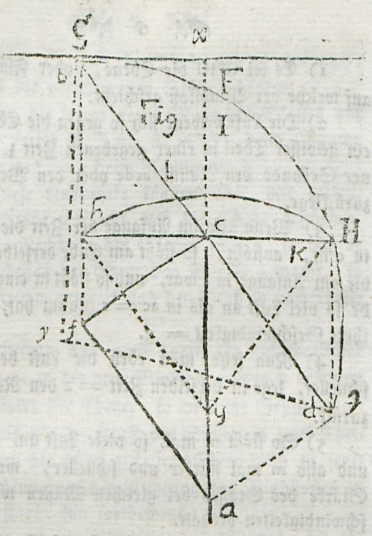

Fig. I

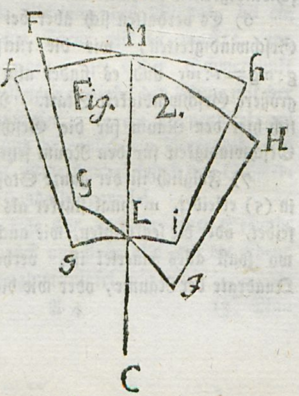

Fig. 2.

1) Es sei GFHI die Ebene, oder Fläche = A auf welche der Windstoß geschiebt.

2) Die Luft bewege sich so gegen die Ebene, daß ein gewisser Theil in einer gegebenen Zeit z. B. in einer Sekunde den Raum acde oder den Weg ac = r zurückliege.

3) Wenn also im Anfange der Zeit die Luft, die in c ist, anstößt, so stößt am Ende derselben die an, die am Anfange in a war, und so stößt in einer Sekunde so viel Luft an als in ac = r Raum hat, jede mit ihrer Geschwindigkeit = g.

4) Nun setze man eben die Luft bewege sich schneller, lege in derselben Zeit = z den Raum m · r zurück.

5) So stößt m mal, so viele Luft an, als in (3) und also m mal stärker und schneller, weil sich die Stärke des Stosses bei gleichen Maßen wie die Geschwindigkeiten verhält.

6) Es verhalten sich aber bei gleichen Zeiten die Geschwindigkeiten, wie die rücksichtlichen Räume $g : mg = r : mr$ und es findet also auch eine m mal größere Geschwindigkeit Statt. Man kann also füglich hier den Raum für die Geschwindigkeit und die Geschwindigkeit für den Raum setzen.

7) Folglich ist der ganze Stoß, den die Fläche A in (5) erleidet, m^2 mal stärker als der den sie in (3) leidet, oder die senkrechten, wie auch die schiefen Stöße, wo sonst alles einerlei ist, verhalten sich wie die Quadrate der Räume, oder wie die Quadrate der Geschwin-

schwindigkeiten $r^2 : m^2 r^2 = g^2 : m^2 g^2 = s : S$, wo s und S die verschiedenen Stösse bedeuten.

8) Also die jezige ganze Maße des Stosses auf der Fläche FGHI ist $S = A. m^2 r^2$ beim Raume $= mr$ und $Ar^2 = s$ beim Raume $= r$.

9) Diese Ausdrücke können aber nur gelten, wenn die Stöße senkrecht auf die Ebene geschehen. Ist aber die Richtung des Stoßes schief, so daß ac mit der Richtung der Ebene den Winkel α macht, so wird die Geschwindigkeit und der Stoß in zwei Theile zerlegt.

10) Würkt nun noch darzu ein unbeweglicher Widerstand xc in der dem Windstoß entgegen gesetzten Richtung hinter der Ebene, so wird die Geschwindigkeit abermals wie die Kraft des Stoßes in zwei Theile zerlegt und die schief gestossene Ebene wird in senkrechter Richtung auf der Richtung des Windstosses an dem Widerstande hin fortbewegt.

11) ac sei die Richtung des Windes, bd ein Schnitt, welchen die Ebene mit ax macht; wo ax und bd sich schneiden, sei c der Schwerpunkt der Ebene, α der Neigungswinkel der Ebene mit der Richtung des Windstosses; fc ein Perpendikel auf der Ebene durch c, und hc endlich ein Perpendikel auf ax der Richtung des Widerstandes durch den Schwerpunkt c dem Widerstande bx parallel.

12) Die Luft lege nun noch in einer Sekunde den Weg $ac = r$ zurück und stoße also auf die Ebene FGHI unter dem Neigungswinkel α.

13) Man kann also ihre Würkung in zwei Theile zerlegen, einen auf die Ebene senkrechten fc, den andern ihr parallel = af.

Der leztere thut der Ebene nichts, der erstere verhält sich zum Stoße, den diese Luft mit ihrer Geschwindigkeit senkrecht thäte, wie $\sin\alpha : 1$, wenn der Sinustotus $= 1$ gesetzt wird. (Aus der Zerlegung der Kräfte.)

14) Nun hat man ein Prisma dessen Grundfläche = A dessen Seiten mit ihr den Winkel α machen.

15) Also des Prisma's Höhe $fc = ac \cdot \sin\alpha$ $= r . \sin\alpha$. Und der Inhalt des Prisma's $= A . r . \sin\alpha$.

16) In einer Sekunde stößt also so viel Luft an, als dieser Inhalt anzeigt.

17) Es ist daher jezt ihr Stoß $= r . \sin\alpha$, gemäß ihrer Geschwindigkeit, durch die jeder senkrechte Stoß ausgedrückt wird.

18) Folglich wäre der ganze Stoß im Prisma (15) $= A . r.^2 \sin\alpha^2$ gleich dem Quadrate der jedesmaligen Geschwindigkeit in dem Flächeninhalt der Ebene multiplicirt.

19) Die Ebene FGHI sollte nun mit der Geschwindigkeit $fc = r . \sin\alpha$ durch den ganzen Stoß $= A . r.^2 \sin\alpha^2$ nach der Richtung fc senkrecht getrieben werden.

30) **Allein der Widerstand xc, welcher der Ebene schon in (13) von der Geschwindigkeit r den Theil $fa = r . \cos\alpha$ entriß und den ganzen**

Stoß

Stoß um $Ar^2 . \cos\alpha^2$ verringerte, hebt von der Geschwindigkeit fa annoch einen Theil fh auf und läßt ihr endlich nur hc übrig.

2) Die Würkung des Stosses wird also abermals in zwei Theile zerlegt, in einem mit dem Widerstande cx parallel laufenden und von diesem aufgehobenen Theil $fh = fc . \sin\alpha = r \sin\alpha^2$, und in einem gegen den Widerstande xc senkrecht würkenden $hc = fc . \cos\alpha = r . \sin\alpha . \cos\alpha$, welcher gleich ist der übrig bleibenden Geschwindigkeit, womit die Ebene FGHI nach der Richtung hc getrieben oder an bx hingeschoben wird.

22) Denn $\alpha + acf = 90°$ und $acf + fch = 90°$ also $fch = \alpha$. Folglich auch $1 : \cos\alpha = fc : hc$ und $1 : \sin\alpha = fc : fh$ also $hc = fc . \cos\alpha$, $fh = fc . \sin\alpha$.

Es ist aber $1 : ac = 1 : r = \sin\alpha : fc$, also $fc = r . \sin\alpha$, folglich $hc = r . \sin\alpha . \cos\alpha$ und $fh = r . \sin\alpha^2$

23) Nun verhält sich aber der ganze Stoß aller Luftmasse, wodurch die Ebene FGHI in der Richtung von h nach c fortbewegt wird im Prisma (15) wie das Quadrat der Geschwindigkeit, womit endlich die Ebene fortbewegt wird. Also endlich der ganze Stoß, welcher frei würkt $S = A r^2 . \sin\alpha^2 \cos\alpha^2 = A r^2 \sin\alpha^2 (1 - \sin\alpha^2) = A r^2 . \sin\alpha^2 - A . r.^2 \sin\alpha^4$. und der ganze Stoß der verlohren geht $= A r^2 \sin\alpha^4$.

 24) Bei

24) Bei einerlei Geschwindigkeit $g = r$ des Windes also wird der Theil von der Kraft seines Stoßes, der die Ebene in der Richtung von h nach c fortschiebt, größer oder kleiner, je nach dem $\sin\alpha^2 \cdot \cos\alpha^2 = \sin\alpha^2 - \sin\alpha^4$ größer oder kleiner ist.

25) Daß dieses Product nicht für jeden Werth von α einerlei sein kann, läßt sich schon auf folgende Art leicht einsehen. Wollte man α nahe an 90° nehmen, so würde zwar eine ansehnliche Menge von Wind auf die Ebene stossen, aber davon käme nur ein sehr kleiner Theil für die Richtung hc. Würde man dagegen hc beträchtlich groß haben wollen, so müßte α sehr spitzig sein. Dann würde aber auch die Windmaße, welche die Ebene träfe, überaus gerinae sein.

Was man also durch die größere Richtung hc gegen den ersten Fall wieder gut zu machen suchte, würde nun durch die geringere Windmaße wieder verlohren. Wenn also das obige Product ein Größtes werden sollte, so läßt sich schon errathen, daß $\alpha = 45°$ genommen werden müßte und daß diese Schätzung würklich richtig sei, werde ich sogleich durch meinen folgenden Kunstgriff erweißen. (Andere durch bekannte Kunstgriffe der unvollkommenen Differenzialrechnung.)

26) Es sei $\sin\alpha = u$, so ist $\sin\alpha^2 \cos\alpha^2 = \sin\alpha^2 - \sin\alpha^4 = u^2 - u^4$. Es wachse nun u um die Differenz du so wird $u + du$ aus u und aus $u^2 - u^4$ wird $u^2 + 2u\,du + du^2 - u^4 - 4u^3\,du - 6u^2\,du^2 - 4u\,du^3 - du^4$. Man

Man ziehe nun $u^2 - u^4$ ab, so bleibt

$$2u\,du + du^2 - 4u^3\,du - 6u^2\,du^2 - 4u\,du^3 - du^4$$

als um welchen Unterschied das Product $u^2\,(1 - u^2)$ gewachsen wäre. Jezt setze man, es habe zuvor schon sein Größtes erreicht gehabt und könne also nicht mehr gewachsen sein, so wird dieser ganze Unterschied $= 0$ also

$$0 = 2u\,du + du^2 - 4u^3\,du - 6u^2\,du^2 - 4u\,du^3 - du^4$$

$$2u\,du + du^2 = 4u^3\,du + 6u^2\,du^2 + 4u\,du^3 + du^4$$

$$2u + du = 4u^3 + 6u^2\,du + 4u\,du^2 + du^3$$

oder $2u\,(1 - 2u^2) = (6u^2 - 1)\,du + (4u + du)\,du^2$

Wenn aber u sein Größtes schon erreicht hatte, so ist sein Unterschied du um welchen er wachsen sollte $= 0$ und folglich sind auch alle Producte in denen du noch als Factor vorkömmt $= 0$, weil ein Größtes nicht mehr wachsen kann.

Also ist $2u\,(1 - 2u^2) = 0$ oder $2u^2 = 1$ und $u = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sin 45° = 0{,}7071068$ also $\alpha = 45°$.

27) Wenn folglich das Product $\sin\alpha^2\,(1 - \sin\alpha^2)$ sein Größtes erreichen soll, so muß $\sin\alpha^2 = \tfrac{1}{2}$ genommen werden und es wird dann $\sin\alpha^2\,(1 - \sin\alpha^2) = \tfrac{1}{4}$.

28) Hieraus ergiebt sich, das der vortheilhafteste Winkel der von 45° ist. Ferner, daß **die vortheilhafteste Geschwindigkeit** dann $r \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \tfrac{1}{2} r$, der **vortheilhafteste** Stoß $= \tfrac{1}{4} r^2$ **und der ganze Stoß** $\dfrac{A\,r^2}{4}$ ist.

29) Näm-

29) Nämlich unter der Bedingung, wann man nicht auf die Gestalt und den Flächeninhalt A der Ebene, auf welcher der Wind stößt, achtet. Im Gegentheil aber wenn nicht davon abgesehen, sondern darauf hingesehen, geachtet wird, so wird sich aus folgenden Untersuchungen ergeben, daß das Größte von α ein anderes und folglich auch der vortheilhafteste ganze Stoß ein anderer ist.

30) Die Ebene, auf welcher der Windstoß geschieht, muß, wie bekannt, wenn Bewegung an dem Widerstande bx hin Statt finden soll, einen Neigungswinkel $= \alpha$ mit der Richtung des Windstosses machen, indem der Wind dann unter diesen auf die Ebene FGHI stößt.

31) Soll aber eben die Menge Luft, welche auf eine gerade dem Windstosse entgegengesetzte Ebene wie z. B. hlk senkrecht stossen würde, auf einer andern schief gestellten Ebene FGHI unter einer schiefen Richtung oder unter dem Neigungswinkel α stossen; so muß diese größer sein als jene und zwar muß der Flächeninhalt von dieser sich zu dem von jener verhalten wie bc : hc.

32) Und wenn $bc = fa$ als Radius angesehen und $= 1$ gesetzt wird, auch weil aus (22) $fch = \alpha$ und $fcb = 90°$, so ist $fcb - fch = 90° - \alpha =$ $bch = bhc - hbc$, folglich $hbc = \alpha$ da $bhc = 90°$. Also $bc : hc = 1 : \sin \alpha$. Es müssen sich also die Flächeninhalte der Ebenen hlk und FGHI zu einander verhalten wie $\sin \alpha : 1$.

33) Nun

33) Nun sei der Flächeninhalt der schiefgestellten Ebene noch $= A$ und der gerade gestellten senkrecht gestossen werdenden Ebene Flächeninhalt $= B$, so ist $A : B = 1 : \sin\alpha$ und $A = \frac{B}{\sin\alpha}$.

Wenn beide von einer gleichen Menge von Wind, nur die eine in einer schiefen, die andere in einer senkrechten Richtung gestossen werden.

34) Wird nun dieser Werth von A in (23) in den Ausdruck für den ganzen Stoß $S = Ar^2 \sin\alpha^2 . (1 - \sin\alpha^2)$ gesetzt, so wird $S = Br^2 \sin\alpha . (1 - \sin\alpha^2)$. — —

35) Je nach dem nun $\sin\alpha$ größer oder kleiner wird, je nach dem ist auch $\sin\alpha - \sin\alpha^3$ größer oder kleiner, und da man den Factor Br^2 als beständig ansehen kann, so hat man nur, um den vortheilhaftesten Stoß zufinden, nach dem eben in (26) angewendeten Verfahren das Größte von $\sin\alpha$ zu suchen.

Es sei also $\sin\alpha = u$ und $d\sin\alpha = du$ dem Unterschiede um welchen u wächset, so ist $\sin\alpha - \sin\alpha^3 = u - u^3$ folglich wird, wenn u zu $u + du$ wird, dieses Product

$u - u^3$ zu $u - u^3 + du - 3u^2\,du - 3u\,du^2 - du^3$

Und der ganze Unterschied um welchen das Product gewachsen ist $= du - 3u^2\,du - 3u\,du^2 - du^3$. Er sei jezt $= 0$, indem u sein Größtes erreicht habe.

$0 = du - 3u^2\,du - 3u\,du^2 - du^3$

$(1 - 3u^2)\,du = (3u + du)\,du^2$

$1 - 3u^2 = (3u + du)\,du$ und da dann auch $du = 0$ ist

$1 =$

$1 = 3u^2$, $u^2 = \frac{1}{3}$ und $u = \sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{3}{3}}$.

Also $\sin\alpha = \frac{1}{3}\sqrt{3} = 0{,}5773503 \ldots$ und mithin $\alpha = 35^\circ\ 15' +$.

36) Folglich das vortheilhafteste Verhältniß des Flächeninhalts B der gerade gestellten Ebene zu dem Flächeninhalte A der schiefgestellten wie $\sqrt{\frac{1}{3}} : 1$ oder wie $1 : \sqrt{3}$ und also $A = B \cdot \sqrt{3}$.

Mithin der vortheilhafteste Stoß $S = Ar^2 \sin\alpha^2 . (1 - \sin\alpha^2) = Br^2 \frac{1}{3} . \frac{2}{3} . \sqrt{3} = \frac{2}{9} Br^2 \sqrt{3} = Br^2 . 0{,}3849002 \ldots$

37) Wolte man oben das oben in (26) gefundene Größte von $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ setzen in $A = \frac{B}{\sin\alpha}$ und in $S = Br^2 \frac{1}{2} . \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{Br^2 \sqrt{2}}{4} = Br^2 . 0{,}3535534 \ldots$

38) Es ist also der ganze Stoß in (36) größer als in (37) wo dagegen der Neigungswinkel α kleiner in (36) als in (37) ist.

Man sieht hieraus, wie nöthig es sei, auf alles zu reflectiren, worauf nur bei einem mathematisch technischen Gegenstande während der Untersuchung geachtet werden kann, und daß man auch hier nicht gleich glauben darf, es sei alles erschöpft, wenn davon ein Anschein da ist.

39) Würde man etwa gewähnt und zu finden geglaubt haben, es sei das Größte von $\sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$ und $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$, so wäre $A = \frac{B}{\sin\alpha} = \frac{B\sqrt{6}}{2}$ und

$S =$

$S = Ar^2 \sin\alpha^2 (1 - \sin\alpha^2) = \frac{Br^2 \sqrt{6}}{9}$ und gerade halb so groß als S in (36).

Anmerk. Hierbey pflegt man nun folgendes zu erwähnen. „Unter diesen Winkel $acd = \alpha$ soll „nach der gewöhnlichen Theorie der Flügel an „die Axe gesetzt werden; aber — wenn die „Bewegung des Flügels mit betrachtet wird, „muß $acd = \alpha$ noch größer sein. S. Colin „Mac Laurin Treatise on Fluxions art. 911.“ Das heißt deutlich und verständlich ausgedrückt: nach dieser gereinigtern Theorie müssen der Stoß hc^2 und die Geschwindigkeit hc verringert werden. — Denn wird α größer, so wächst zwar fc und die Menge des Windes; allein in eben dem Grade als dieses wächst, kommt auch nur ein kleiner Theil für die Richtung hc. —

40) Wäre die Figur der Ebene auf welcher die Windstösse senkrecht erfolgen würden z. B. ein Quadrat, dessen Seite gleich $2hc = 2\gamma$, so wird die Figur der schief gestellten Ebene, auf welcher die nämliche Menge von Luft stossen und unter dem Neigungswinkel α würken soll, ein Oblongum sein müssen, dessen eine kleinere Seite z. B. $= 2hc = 2\gamma$ gleich der Seite des Quadrats und die größere $= 2bc = 2\beta$.

41) Mithin $\beta = \frac{\gamma}{\sqrt{\sin\alpha}}$ laut (32), der Flächeninhalt B des Quadrats $= 4\gamma^2$, des Oblongums

Flä-

Flächeninhalt $A = 4\beta\gamma = \frac{4\gamma^2}{\sin\alpha}$ und da $\sin\alpha : 1 = 1 : \operatorname{cosec}\alpha$, so ist $\frac{1}{\sin\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha$ also $A = \gamma^2 . \operatorname{cosec}\alpha$ folglich $B : A = 4\gamma^2 : 4\gamma^2 \operatorname{cosec}\alpha = 1 : \operatorname{cosec}\alpha = \sin\alpha : 1$.

42) Denkt man sich nun jenes Quadrat als das Quadrat, des Durchmessers um seinen Zirkel und also auch um dessen Figur, und den Flächeninhalt des Zirkels als die Ebene, auf welcher die Masse des Windstosses senkrecht erfolgen sollte, so wäre die Figur der Ebene auf welcher die nämliche Menge von Wind wie auf dem Zirkel nur unter dem Neigungswinkel α stossen würde (eine gezogene runde Figur vom zweiten Range) d. i. eine Ellipse *) innerhalb jenes Oblongums, deren halbe kleine Axe $hc = \beta$ gleich dem Radius des Zirkels und alsdann die halbe große Axe $bc = \operatorname{cosec}\alpha$ wäre.

Denn auf den Zirkel stösse dann so viel Luft in einer Sekunde als ein Cylinder in sich faßt, dessen Höhe $ac = r$ und dessen Grundfläche $B = \gamma^2\pi$ ist; wo $\gamma = hc$ gleich dem Halbmesser. 43)

*) Einen scharfen Beweiß von diesen und einigen nachfolgenden hierauf gegründeten Sätzen von Zirkel und Ellipsen Ausschnitten läßt sich hier in der Kürze nicht liefern. Sie müssen als gewiß und bewiesen einstweilen anerkannt werden, bis ich sie zu seiner Zeit in einem neuen Systeme der reinen und höhern Meßwissenschaft, sonst uneigentlich Geometrie, Erdmeßkunst genannt, würklich evident führe, wo Ellipsen nicht als Kegelschnitte sondern viel anschaulicher und faßlicher auch für den Gebrauch bequemer als Cylinder Schnitte betrachtet werden.)

43) Es verhielte sich dann der Flächeninhalt des Zirkels zu dem der Ellipse wie das Quadrat vom Durchmesser zum Oblongum d. i. wie $4\gamma^2 : 4\beta\gamma = 4\gamma^2 : 4\gamma^2 . 4\gamma^2 \operatorname{cosec}\alpha = 1 : \operatorname{cosec}\alpha$ oder wie der Sinus des Neigungswinkels zum Halbmesser d. i. B : A.

44) Nun ist aber eines Zirkels, dessen Halbmesser $= \gamma$, Flächeninhalt gleich $\gamma^2\pi$, mithin da laut (33) einer rücksichtlichen Ellipse Flächeninhalt $A = \frac{B}{\sin\alpha}$,

$$A = \frac{\gamma^2\pi}{\sin\alpha} = \gamma.^2\pi.\operatorname{cosec}\alpha = \gamma\beta\pi \text{ nach (41).}$$

45) Weil sich gleiche rücksichtliche Theile zu einander verhalten, wie die rücksichtlichen Ganzen, so verhält sich der mte Theil des Zirkels zum mten Theil der Ellipse auch wie $\sin\alpha : 1$. Ist nun jener ein Zirkelausschnitt und dieser ein rücksichtlicher Ellipsenausschnitt, so verhält sich dieser zu jenem wie $1 : \sin\alpha$.

46) Jezt da wir nun zu einer größt möglichsten Gewißheit und Bestimmtheit im Ausdrucke angelangt sind, in unsern Untersuchungen über den Windstoß auf einer schief gestellten Ebene und deren Forttreibung oder Fortschiebung an einem unbeweglichen, dem Windstosse entgegen gesetzten Widerstande: jezt läßt sich nun auch mit Gewißheit von der vortheilhaftesten Stellung der Ebene des Windmühlenflügels, von dem vortheilhaftesten Stosse auf demselben, von dem vortheilhaftesten Flächeninhalt und der vortheilhaftesten Gestalt desselben handeln.

47) Denn

47) Denn der einzige Unterschied zwischen beiden Bewegungen ist derjenige, daß bei dem vorher gehenden Falle die schiefe Ebene an dem der geraden Richtung des Windstosses entgegen gesetzten Widerstande nicht befestigt, dieser aber fest und unbeweglich war; daß hergegen beim folgenden Falle die schiefe Ebene des Windmühlenflügels auf und an einer um ihre Axe beweglichen Welle, als dem Widerstande, befestigt ist und dieser die erhaltene Bewegung mittheilt. Dort war mit der Bewegung eine beständige Raumveränderung verknüpft, hier bleibt der Raum, in welchem sich der vom Wind gestossene Ebene bewegt, immer der nämliche.

48) Die Bewegung einer schiefen Ebene an einem unbeweglichen Widerstande, wie hier mehr erwähnte, benebst den gefundenen Ausdrücken würden ganz zu Begründung einer richtigen Theorie von einem guten **Windmesser** geschickt sein.

---

49) Wie bekannt soll aus den mehr erwähnten Gründen, daß keine Bewegung Statt finden würde, der Windmühlenflügel nicht die Stellung haben, daß die Luft auf die Ebene des Flügels und gegen die Axe der Welle senkrecht stosse, sondern jene soll einen spitzigen Winkel mit einer mit dieser parallelen Linie machen, welcher zugleich die Richtung des Windes anzeigt.

50) Es bedeute daher für jezt ax eine solche mit des Axe der Welle parallele Linie, bd sei ein Schnitt, wel-

welchen eine mit der Welle parallele Ebene mit der Ebene des Flügels FGHI macht. In c, wo ax die bd schneidet, sei der Schwerpunkt des Flügels, α der Neigungswinkel, welchen des Flügels Ebene mit der Welle macht; fc ein Perpendikel auf des Flügels Ebene durch c, und hc endlich ein Perpendikel auf ax durch den Punkt c.

51) Nun kann man wieder ac wie in (12) als den Raum ansehen, welchen der Wind in der Zeit z z. B. in einer Sekunde zurücklegt, also kann ac hier wieder als der Raum r angesehen werden, welchen der Wind in der Sekunde zurücklegt. Mithin kann wiederum der Raum r anstatt der Geschwindigkeit des Windes bei dem senkrechten Stoß angenommen werden.

52) Es stosse ebenfals der Wind auf den Flügel unter dem Neigungswinkel α, so würde ausgedrückt werden müssen durch $ac \,.\, \sin\alpha = fc$ die Geschwindigkeit, womit die Ebene des Flügels nebst dem Körper, an dem sie befestigt ist, in der Richtung von f nach c getrieben würde, wenn dieser so beweglich wie ein Schiff auf der See wäre. — Hier stünde dann der Flügel zu seinem Körper in gleicher Beziehung, wie die ausgespannten Segel zum Schiffe, wenn bei widrigem Winde lavirt wird.

53) Der ganze Stoß, welcher auf die Ebene ausgeübt wird und gleich dem Quadrate der Geschwindigkeit in die Fläche multiplicirt ist, wäre dann $S = Ar^2 \sin\alpha^2$.

54) Allein die Windmühle ist ja nicht ein so bewegliches Etwas wie das Schiff auf dem Meere. Sie bleibt auf festen Grund und Boden stehen und die senkrecht stehende Welle der Windmühle, wie z. B. bei den neuesten englischen horizontalen Windmühlen, ist nicht fest wie der Mastbaum auf dem Schiffe, sie ist bewegbar um ihre Pole.

55) Die Wellen der Windmühlen mögen nun horizontal liegen, oder senkrecht aufstehen und sich in Pfannen oder um ihre Stifte als Pole bewegen lassen, so hebt alle Male die Welle wiederum einen Theil der Geschwindigkeit und des Stosses in (52) auf.

Der Rest und der Verlust werden, durch die Zerlegung der Geschwindigkeit $r \,.\, \sin\alpha = fc$ in zwei Theile, bestimmt.

Der eine, welcher den Flügel gerade der Welle entgegen, oder mit ihr parallel von der Stelle zutreiben bemüht ist, giebt den Verlust $fh = fc \,.\, \sin\alpha = r \sin\alpha^2$, der andere als der Rest ist $hc = fc\cos\alpha = r \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos\alpha$.

Mit dieser Geschwindigkeit treibt nun die Luft frei und ungehindert den Flügel in einer auf seiner Welle senkrechten Richtung von h nach c um den Punkt c herum.

56) Der ganze Stoß womit dieses geschieht, verhält sich nun wie mehr erwähnter Maaßen, wie das Quadrat der Geschwindigkeit, mit welcher eine Fläche gestossen wird. Also ist der ganze Stoß oder die Kraft, welche den Windmühlenflügel umdreht, =

$= Ar^2 \sin\alpha^2 \cos\alpha^2 = Ar^2 \sin\alpha^2 - Ar^2 \sin\alpha^4$
wie in (23)

Anmerk. Hier an zu merken finde ich für nöthig, daß man zeither während dem Uebergange von der ersten Zerlegung der Kräfte zur zweiten, nämlich bei Entwickelung der Ausdrücke für die zweite Zerlegung des Stosses, die **Geschwindigkeit ganz verlohren** gehen läßt und bloß den Stoß für sich zu entwickeln nöthig erachtet; daß aber auch mit **diesem Verluste der Geschwindigkeit** der **Verlust** der Richtigkeit der Theorie und der Ausdrücke unwiderbringlich verbunden war (M. S. des sehr berühmten Herrn Hofrath Kästners Anfangsgr. d. angew. Math. 1 Abtheil. unter der Aufschrift von den Windmühlen S. 80 § 132 bis S. 94 § 142, auch Herr Hofrath Voigt in seinen Grundlehren d. angewandten Math. 1 Abtheil. von S. 117 § 170 bis S. 123 § 174.)

57) Würde man keinesweges darauf Rücksicht nehmen, daß die schief gestellte Ebene des Flügels von einer gewissen Menge Luft, welche auf einer dem Windstosse gerade entgegen gesetzten Ebene senkrecht stößt, unter dem vortheilhaftesten Neigungswinkel α gestossen werden sollte, so würde man das in (26) gefundene Größte von $\sin\alpha = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ in diesen Ausdruck zu setzen haben und man hätte dann hier bei den Windmühlenflügeln die nämlichen Ausdrücke für das Vortheilhafteste wie in (27).

58) Allein soll so wenig als möglich vom senkrechten Stoß und von der senkrechtstossenden Menge der Luft verlohren gehen und daher die schief gestellte und schief gestossene Ebene in der nämlichen Beziehung wie in (31) auf die senkrecht gestossene stehen, so wird sich der Flächeninhalt A von dieser zu B dem Flächeninhalte von jener ebensals wie in (33) verhalten d. i. wie $\sin\alpha : 1$ und $A = B : \sin\alpha$ gesetzt werden müssen.

59) Setzt man ebensals diesen Werth von A in dem Ausdrucke für den ganzen Stoß in (56) so erhält man den nämlichen wie in (34), nämlich der ganze Stoß $S = Br^2 \sin\alpha \,(1 - \sin\alpha^2)$. Mithin wenn $\sin\alpha\,(1 - \sin\alpha^2)$ sein Größtes erreicht $\sin\alpha = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$ und $S = \dfrac{Br^2\, 2 . \sqrt{3}}{9}$ (laut 35 und 36). Eben so gilt das, was in 37, 38, 39 gesagt worden ist, hier von dem Windmühlenflügel.

60) Ich gehe daher zur Bestimmung der vortheilhaftesten Gestalt eines Flügels über, indem ich solche aus dem vorhin gefundenen Verhältnisse der Flächeninhalte der schief und gerade dem Winde entgegen gestellten Ebenen zu bestimmen versuchen werde.

Von der vortheilhaftesten Gestalt der Windmühlenflügel.

61) Ein Ausschnitt wie Cgfmhi Fig. 2 aus einer runden Scheibe oder Zirkelebene, durch deren Mittelpunkt die Axe der Welle senkrecht hindurch ginge, würde ohnstreitig die beste Form für den Windmühlenflügel sein, auf welchem mit dieser parallel, senkrecht der Wind stieß. Weil die Luft leichter an abgerundeten als an eckigten Körpern abgleitet und, wie die Erfahrung hinlänglich lehret, abgerundete Körper eine gleichförmigere und unter diesen zirkelrunde die gleichförmigste Bewegung haben.

62) Des Gleichgewichtes und der Gleichförmigkeitwegen müßten aber mehrere solche Ausschnitte in gleichen Winkel Entfernungen von einander, doch alle um die Welle auf dem Mittelpunkte derselben senkrecht angebracht werden und — so würde dann keine Bewegung laut (49) möglich sein.

63) Gesetzt aber es wäre die gerade gestellte Ebene eines Windmühlenflügels, auf welchem die senkrechten Windstösse erfolgten, ein gleichschenklichter Triangel dessen Höhe = cy Fig. 1 und dessen Basis = hk = 2hc, mithin dessen Flächeninhalt = hc ; cy.

$= B$; so wäre die Ebene eines schiefgestellten Windmühlenflügels, auf welchem die nämliche Menge Wind als auf jenem nur unter dem Neigungswinkel α stieß, ebenfals ein gleichschenklichter Triangel, dessen Höhe auch cy, dessen Basis aber $= 2bc.\mathrm{cosec}\,\alpha = 2bc:\sin\alpha$ wäre gleich $2bc = bd$ und also dessen Flächeninhalt $= cy.bc = \frac{cy.bc.}{\sin\alpha}$

64) Uneigentlich läßt sich auch ein Zirkelausschnitt als einen gleichschenklichten Triangel ansehen, dessen Höhe gleich einem seiner Schenkel oder gleich dem Halbmesser und dessen Basis der Zirkelbogen ist. Dann wäre die rücksichtliche schiefgestellte, von gleicher Menge Luft gestossene Ebene ein gleichschenklichter Triangel, dessen Höhe annoch der Höhe des leztern Triangels gleich, dessen Basis aber ein mehr ausgedehnter größerer Bogen, als ein Zirkelbogen wäre.

65) Da nun nach (61), wenn Bewegung durch den senkrechten Windstoß auf eine gerade gestellte Ebene Statt finden könnte, ein Ausschnitt aus dem Mittelpunkte einer Zirkelscheibe die vortheilhafteste Gestalt für des Windmühlenflügels Ebene wäre; so ist gewiß bei dem schiefen Windstosse für dem Windmühlenflügel die vortheilhafteste Gestalt ein Ausschnitt aus jener Ellipse in (44) laut (45), dessen Flächeninhalt A sich zu dem des Zirkelausschnittes B verhält wie die Ellipse zum Zirkel d. i. $1 : \sin\alpha$.

66) Ist

66) Ist nun der Bogen des Zirkelausschnittes der mte Theil des Umkreißes also der Zirkelausschnitt selbst der mte Theil des Zirkels, so ist der Flächeninhalt des Ausschnittes $= r^2 \pi : m = B$ laut (44) und also der Flächeninhalt des rücksichtlichen Ellipsenausschnittes $A = \frac{r^2 \pi : \sin \alpha}{m}$ (44 u. 45).

67) Zuvörderst muß ich einigen Einwürfen begegnen, die ich mir so eben bei dieser Stelle entgegen rufen höre. Nämlich: „Wegen der Umdre„hung des Flügels um die Axe können nicht alle seine „Theile gleich geschwinde gehen und doch stößt der „Wind an alle Theile mit gleicher Geschwindigkeit „an. Der Flügel muß also eine solche Gestalt bekom„men, daß alle seine Theile dem Winde gleichförmig „ausweichen, d. i. er muß nach der Art des Schrau„benganges gewunden, oder wie man sich ausdrückt, windschief werden" und darf also keine Ebene, gleich einem Ellipsenausschnitte, sein.

68) Ich frage darauf: Besteht denn etwa die Ebene des Flügels aus einzelnen unendlich kleinen unzusammenhängenden Ebenchen von ungleicher Entfernung von der Axe der Welle?? — Allein dann würden sie auch nicht einen Flügel sondern mehrere Flügelchen ausmachen. Da glaube ich denn gerne, daß es scheine, aber auch nur scheine, daß das eine dieser näher liegendes Theilchen, oder Ebenchen, oder Flügelchen drohe gegen das andere von der Axe entfernter liegende geschwinder diese zu umlaufen.

69) Theile, die ein festes zusammenhängendes Ganze ausmachen, können sich ja nicht geschwinder bewegen als sich das Ganze selbst bewegt, weil sie sonst von einander gerissen würden. Mithin können und dürfen die verschiedenen Theile sich nicht ungleichförmig bewegen, sie müssen also gleichförmig gehen.

70) Was geschieht also, wenn verschiedenen Theilen eines unzertrennlichen Ganzen ungleiche Geschwindigkeit wegen ihrer Lage und Entfernung durch den Windstoß mitgetheilt würde? Die Ungleichförmigkeit der Geschwindigkeit vertheilt sich augenblicklich mit dem Anfange der Bewegung unter alle Theile des Ganzen gleichförmig. Der eine Theil welcher mehr Geschwindigkeit erhalten hatte, reißt den andern mit geringerer Geschwindigkeit bewegten vermöge des Zusammenhanges mit fort und ertheilt ihm die ihm mangelnde Geschwindigkeit.

71) Die Gestalt des Flügels mag sein wie sie will, seine Fläche sei elliptisch- zirkel- oder schraubenförmig (d. i. windschief) gewunden, oder gebogen, oder aus zwei Ebenen flach zusammen gesetzt, so ist der Windstoß doch nicht grösser als wie auf der Ebene, deren zwei Breiten den Diagonallinien oder den Chorden der krummen, eingedruckten, oder windschiefen Figur und deren Höhe der Höhe dieser gleich ist. —

72) Man erhält die ganze Figur der rücksichtlichen Ebene, welche der krummen oder windschiefen Fläche in der Stärke des erhaltenen Stosses entspricht, dadurch indem man die krummen oder windschiefe Flä-

Fläche auf eine Ebene stürzt und lauter senkrechte Linien auf diese von jedem Entpunkte von jener herabgefällt denkt.

73) Diese eben erhaltene Ebene bewegt sich mit der nämlichen Geschwindigkeit wie jene windschiefe um die Axe der Welle herum, denn der Stoß auf beiden ist gleich groß. Diese gerade und jene windschiefe Fläche bewegen sich gegen eine gleiche Menge Luft mit einerlei Geschwindigkeit, beide müssen diese aus ihrem Wege räumen und folglich ist der Widerstand bei beiden auch einerlei. Das Nachtheilige des windschiefen Flügels ist noch, daß er schwerer als der gerade ist und also auch mehr Friction verursacht, auch mehr Kraft erfordert ihn wieder in die Höhe zu treiben.

74) Freilich beschreiben Theile des Windmühlenflügels keine gleich großen Kreißbögen um die Axe desselben, sie durchlaufen also unterschiedene Kreißbögen, allein beständig von gleich vielen Graden des Umfanges in einerley Zeit und diese Geschwindigkeit pflegte man zeither Winkelgeschwindigkeit zu nennen.

75) Bei Bewegung von Theilen von verschiedener Entfernung vom Mittelpunkte in der Axe oder von der gemeinschaftlichen Axe sollte und müßte man ganz von der Ausdehnung der Bögen, oder von ihren verschiedenen Entfernungen vom Mittelpunkte in der Axe, oder von der gemeinschaftlichen Axe abstrahiren und nicht darnach ihre Geschwindigkeit beurtheilen wollen,

da

da sie gleichsam ein selbstständiges Ganzes unter sich ausmachen. Man wird hierdurch nur zu Fehlschlüssen verleitet.

76) Hergegen ist es eben so fehlerhaft dergleichen Reflectionen über die verschiedenen Entfernungen der Theile dieses um einen Mittelpunkt in der Axe oder um eine gemeinschaftliche Axe bewegbaren Ganzen zu unterlassen, wenn jeder dieser Theile in Beziehung auf verschiedene um ihre jedesmalige Axe bewegliche Körper gesetzt und gedacht wird.

77) Beide Unterlassungen sowohl jene unterlassene Abstraction, wo ein festes zusammenhängendes Ganze bloß mit sich und seinen Theilen zu vergleichen ist, als diese unterlassene Reflection über die verschiedenen Entfernungen der verschiedenen Theile in Beziehung auf andere bewegbare Körper; ich sage beide Unterlassungen sind eben in der Maschinenlehre die Quelle so vieler Unrichtigkeiten in den mancherlei Theorien und Ausdrücken.

78) Bei einer Polarbewegung einer festen zusammenhängenden Maße um einem gemeinschaftlichen Punkte, deren Theile sich dann in ungleichen Entfernungen von diesen befinden, wird zwar stets das Bestreben, aber auch nur das Bestreben, sich mit ungleicher Geschwindigkeit um den Mittelpunkt, oder um die gemeinschaftliche Axe zu bewegen Statt finden, allein niemals eine ungleichförmige Geschwindigkeit, sondern mit einerlei Winkelgeschwindigkeit.

79) Die

79) Die Geschwindigkeit des Schwerpunktes, in welchem man sich doch die Geschwindigkeit aller Theile d. i. der ganzen Maße und den Stoß auf dieselbe vereinigt vorstellet, ist immer ein und dieselbe und nöthiget alle Theile mit gleichförmiger sogenannter Winkelgeschwindigkeit sich zu bewegen. Erst, wenn die verschiedenen vereinigten Theile aufhören werden, ein festes zusammenhängendes Ganze auszumachen, dann wird sich jeder nach seiner ihm eigenthümlichen Geschwindigkeit, allein aber auch nicht mehr in einem Kreiße um dem Mittelpunkte in der Axe bewegen.

80) Mithin hot man bloß zu sehen bei Beweggungen einer festen zusammenhängenden Maße also auch einer Ebene auf die gemeinschaftliche Winkelgeschwindigkeit aller Theile als im Schwerpunkte vereinigt, welcher also alle Theile unterworfen sind und zweitens, wenn Beziehung auf andere bewegbare Körper Statt findet, auf die Entfernung dieses Schwerpunktes vom Mittelpunkte oder von der Axe. —

18) Wozu also jene höchst unnütze, ja höchst schädliche Verwerfung der Ebenen und geraden Flächen, — da bei windschiefen Flächen beständig eine große Menge Luft verlohren geht und also die Geschwindigkeit um vieles verringert wird, wenn der bestimmte Flächeninhalt der Fläche bei der ohnehin schiefen Stellung annoch unter der windschiefen Form dem Winde entgegen gestellt wird? —

Ich kehre daher jezt zur genaueren Bestimmung oder Verzeichnung der besten elliptischen Gestalt des Windmühlenflügels zurück.

82) Der vortheilhafteste, zu Windmühlenflügeln zu gebrauchende, unter den verschieden möglichen Ellipsen-Ausschnitten, ist derjenige, wo z. B. in Fig. 2 die Durchschnittslinie MC der Ebene GFHI dieses Ausschnittes mit der Ebene gfh des rücksichtlichen Zirkelausschnittes durch die Mitte MC beider Ausschnitte hindurch gehet und jeden von beiden in zwei gleiche Hälften GFML und MLHI dann gfML und MLhi zerlegt.

Diese Linie ist nun nach (42) die halbe kleine Axe γ, welche auf der Mitte des Ellipsen und Zirkelbogens zugleich senkrecht steht, einen gleichschenklichten Triangel gleichsam vorstellt, dessen Basis der elliptische Bogen, dessen Höhe die halbe kleine Axe ist.

83) Die eine Hälfte des Ellipsenausschnittes befindet sich dann hinter dem einen halben rücksichtlichen Zirkel-Ausschnitte, die andere Hälfte davon vor der andern Hälfte von diesem. Dieses alles stellt hoffentlich die perspectivische Zeichnung in Fig. 2 benebst den sich in Fig. 1 in dem Punkt c durchschneidenden Linien bd und hk, welche die sich durchschneidenden Ebenen GFHI und gfh Fig. 2 vorstellen sollen, noch anschaulicher dar.

84) Da in (66) der Zirkelausschnitt als der mte Theil des ganzen Zirkels angenommen worden ist, so ist auch sein größter Bogen der mte Theil des ganzen Um-

kreißes, und folglich $= \frac{360^\circ}{m}$, dessen Chorde der doppelte Sinus von $\frac{180^\circ}{m}$ ist. Mithin der $\sin \frac{180^\circ}{m}$ die Ordinate und $\cos \frac{180^\circ}{m}$ die Abscisse für jede Hälfte des größten Bogens des Zirkelausschnittes aus dem Mittelpunkte auf die Durchschnittslinie herausgetragen.

85) Folglich ist auch diese zugleich die Abscisse für jede der beiden Hälften des größten elliptischen Bogens und die dazu gehörige Ellipsen-Ordinate u ist gleich dem Producte der halben kleinen Axe γ, multiplicirt in den Sinus des $2m$ten Theils von der ganzen Peripherie, dividirt durch den Sinus des Neigungswinkel α d. i.

$$u = \frac{\gamma \cdot \sin \frac{360^\circ}{2m}}{\sin \alpha}, \quad u = \sin \frac{180^\circ}{m} \sqrt{3}, \text{ wenn } \gamma = 1$$

und $\sin \alpha = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$.

86) Folglich jede der beiden geraden Schenkel

$$y = \left(\left(\cos \frac{180^\circ}{m} \right)^2 + \frac{\left(\sin \frac{180^\circ}{m} \right)^2}{\sin \alpha^2} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left(\left(\sin \frac{180^\circ}{m} \right)^2 + \sin \alpha^2 - \sin \alpha^2 \cdot \left(\sin \frac{180^\circ}{m} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} :$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\left(\frac{\sin \alpha^2 + \cos \alpha^2 \cdot \left(\sin \frac{180^\circ}{m} \right)}{\sin \alpha^2} \right)^2} \text{ und}$$

y =

$y = \sqrt{\left(1 + 2\left(\sin\frac{180^\circ}{m}\right)^2\right)}$ die vortheilhafteste Größe nach (85).

87) Beide sich gleiche Abscißen jene für den Zirkel-, diese für den Ellipsen-Bogen werden mithin aus dem Mittelpunkt auf der halben kleinen Axe zugleich herausgetragen und auf dem Endpunkte werden die rücksichtlichen senkrechten Ordinaten beider zu beiden Seiten beschrieben.

88) Bringt man nun auf der Welle 'm solcher Windmühlenflügel an, so daß, wo der eine Schenkel des ersten Flügels vorn beginnt, eben der andere Schenkel des andern Flügels in einiger Entfernung darhinter aufhört; auch die rücksichtlichen Mittel- oder Durchschnittslinien und die rücksichtlichen Schenkel, von je zwei nächsten Flügeln stets um den Bogen von $\frac{1}{m}$ 360° von einander entfernt sind, so scheint die Zirkelscheibe wiederum vollkommen ganz zu sein.

Anmerk. Hier wird man einwerfen: wie kann man nur m Windmühlenflügel an der Welle anbringen wollen, da man gewöhnlich die vier windschiefen Windmühlenflügel am äussern Ende nicht völlig ausspannt, weil sonst die Gewalt des Windes dann den Flügel entzwei bricht? Ich frage bloß dagegen, lassen sich denn keine Widerstreben hinter dem Flügel auf der Welle und an dem Flügel befestigen, die das Brechen verhindern.

89) Die

89) Die Luft stößt dann auf jeden der m Windmühlenflügel unter dem Neigungswinkel α und diesen Stoß erhält jeder in jedweder Lage an der Axe, er mag senkrecht nach oben, oder nach unten gekehrt sein, oder zur Seite sich befinden, immer gleich stark und ununterbrochen. Die Luft strömt dann zwischen den zwei Ebenen zweier Flügel hindurch und nöthigt jeden nach der Richtnng hc um die Axe sich herum zu bewegen. —

90) Die Summe der ganzen Stösse, womit alle die an einer Welle befindlichen Windmühlenflügel, oder der vortheilhafteste ganze Stoß, womit sie alle und mit ihnen die Welle aus der Ruhe in die Bewegung gebracht werden, wäre daher $m.\frac{\pi\gamma^2 r^2.\frac{2}{9}\sqrt{3}}{m} = \pi\gamma^2 r^2.0{,}3849002\ldots$; da jeder ganze Stoß auf einem einzigen Windmühlenflügel laut (59 und 66) $S = Ar^2\frac{2}{9}$ hier $A = \frac{\gamma^2\pi}{m\sqrt{\frac{1}{3}}}$ also $S = \frac{\pi\gamma^2 r^2}{m}\frac{2}{9}\sqrt{3}$.

Allein dieser Stoß $S = \pi.\gamma^2 r^2 .\frac{2}{9}.\sqrt{3}$ bleibt bei *einerlei* Geschwindigkeit des Windes auch in der *Bewegung* der nämliche und gleichförmige, und nimmt nicht wie bei den Wasserschaufeln *ab*, noch auf irgend eine Art und Weise zu, weil die Windmühlenflügel hier gar nicht dem Windstosse *ausweichen*, sondern beständig unter *jeder* Richtung *unterworfen sind*.

Anmerk. Man rechne es mir ja nicht als eine Inconsequenz zu, daß ich mich hier in dieser Schrift

der

der unvollkommenen Dekadik und nicht meiner Teliosadik bedient habe. Blos und allein der Wunsch, diese meine Untersuchungen über diese, dem Staate keineswegs gleichgültige Materie auf das baldigste in den Händen aller patriotisch denkenden Staatsmänner und Practiker, bei denen ich nicht voraussetzen dürfte, daß sie jezt Kenntniß von einer Teliosadik haben würden und von ihnen angewandt zu sehen, bestimmten mich, so wie sie ein Mal ausgearbeitet waren, der Presse zu überliefern. Möchten doch die Resultate Eingang bei denen finden, deren Amt und Beruf es mit sich bringt, darauf zu achten! — Ich traue es ihnen auch zu, daß sie sich gewiß Kenntniß von meiner Teliosadik verschaffen werden, deren ich mich **hinführo** gewiß beständig bedienen werde.

(Ladenpreiß 4 Gr. sächsisch.)

20

Neuverbesserte,

gründliche Theorie

der

Windmühlenflügel

von

Johann Friedrich Christian Werneburg,

Doctor der Philosophie.

Qui bene distinguit, bene docet.

Zu finden in der Joachimschen Buchhandlung in Leipzig.

1800.

19