ÜBER DIE ABWEICHUNG GEWORFENER KÖRPER VON DER VERTICALEN RICHTUNGSEBENE.

EINE

ABHANDLUNG,

WELCHE

VON DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE

DER

WISSENSCHAFTEN

IM JAHR 1794 DEN PREIS ERHALTEN HAT.

Von

ROHDE,

Königl. Preussischem Lieutenant von der Armee.

Ea demum vera laus est, quæ a viris proficiscitur, qui ipsi in laude vixerunt.

Auf Veranstaltung der Königl. Akademie herausgegeben.

BERLIN, 1795.

GEDRUCKT IN DER KÖNIGLICHEN HOFBUCHDRUCKEREY.

Die Akademie erkennet, daſs die Aufgabe, welche zur gegenwärtigen (unter dem 12 Februar 1794 eingekommenen) Abhandlung Anlaſs gegeben hat, ſehr ſchwer aufzulöſen iſt. Auch ſind die aufgeworfenen Fragen bey weitem noch nicht völlig beantwortet. Die Erfahrung lehret, daſs bey Kugeln ohne Zünder ebenfalls eine beträchtliche Abweichung ſtatt findet. Indeſſen konnte die Akademie nicht unterlaſſen dieſe Schrift zu krönen, aus welcher viel Scharfſinn und tiefe Einſichten in die höhere Mathematik hervorleuchten, und durch welche die Bahn zu ferneren Unterſuchungen auf eine glückliche Art eröfnet worden.

§. I.

Die Königliche Akademie der Wissenschaften hat im November des verflossenen Jahres folgende Aufgabe vorgeschlagen: „Da die Erfahrung „lehrt, dass die in einem widerstehenden Mittel geworfenen Körper, „Bomben, zum Beyspiel, sich meistens mehr oder weniger von der lothrechten Ebene entfernen, in welcher sie geworfen werden; so verlangt „die Königliche Akademie zu wissen: I) Wie und aus welchen Ursachen „diese Abweichung statt findet? II) Wie ihre Quantität in jedem einzelen Falle, mittelst der anfänglichen Geschwindigkeit, des Elevations„winkels, der Gestalt des Körpers u. s. w. bestimmt werden kann."

Diese Frage zu beantworten, wenigstens so weit es die Natur des Gegenstandes zu verstatten mir schien, habe ich die gegenwärtige Abhandlung verfasst.

§. II.

Was alle bisher bekannte Ursachen dieser Abweichung betrifft, diese lassen sich in zwey Classen theilen. Die *erste* enthält diejenigen, welche sowohl in der Beschaffenheit des Geschützes selbst, in dessen anfänglichem Zustande, in dessen Zustande während der Abfeuerung; als auch in dem Zustande des Projectils, während es die Seele durchläuft, bestehen sollen. Die *zweyte Classe* enthält, wenn das Projectil kugelförmig ist, nur den Wind. Herr Lombard will, selbst bey der Kugelgestalt, eine neue gründlichere Ursache entdeckt haben, die bloss darin bestehen soll: dass während der Umdrehungsbewegung der Kugel, ihre vordere Seite von der verdichteten Luft einen stärkern Druck leide, als die hintere Seite. Man sehe *Nouveaux principes d'artillerie de Mr. Benjamin Robins &c. traduits de l'Allemand, avec des notes, par Mr. Lombard,* *Professeur royal aux Ecoles d'Artillerie à Auxonne, à Dijon 1783.* Seite 494. u. s. w.

§. III.

Die erste Classe der Ursachen hier erst aufzuzählen und auseinander zu setzen, wäre darum eine sehr überflüssige Arbeit, weil der berühmte Herr *d'Antoni* in seinem Werke *dell' uso delle armi da fuoco, Torino* 1780, in 8vo, welches man doch ohnehin, wegen *anderer vortreflichen Bemerkungen,* lesen muss, dieses schon vollständig geleistet hat.

Und der Wind? Da dieser uns bey den Mishelligkeiten der mit gröster Sorgfalt angestellten Versuche, leider gänzlich im Stiche läst; so wollen auch wir uns nicht bekümmern, *woher er kommt und wohin er bläset.*

Herrn *Lombard's* eigene Schlüsse und Versuche lassen sich nicht in wenigen Zeilen erschöpfen. Ich müste seine beyden langen Noten, die 45ste und 36ste, hier abschreiben; dadurch aber würde ich mir manche unauflösliche Zweifel des Geometers, des Physikers und des Artilleristen zuziehen. Der erste würde mich fragen, ob nicht dasjenige, welches Herr Lombard auf der 495. und 496. Seite behauptet, geradezu dem analytisch und geometrisch erwiesenen Satze von Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte, widerspreche. Der zweyte würde wohl recht herzlich wünschen zu wissen, wie es denn Herr Lombard nur angefangen habe, sein Linial von drey Zoll Breite und vier bis fünf Linien Dicke (Seite 451. ff.) in einer Entfernung von fünf Toisen, mit der Mündung des Geschützes *vollkommen parallel* zu stellen? Denn hätte er dieses wirklich nicht geleistet, wie er denn auch kein Wort davon erwähnt: so wäre ja anstatt eines vollkommen senkrechten Stosses, ein *schiefer* erfolgt, welcher begreiflich mehr Antheil an den Abweichungen seiner Kugeln haben könnte, als die Luft. Noch würde der Zweyte fragen, wie es denn Herr Lombard, (der bloss von der *Rotation der Kugel* spricht) angestellt habe, dass sein Linial die Eigenschaften unsers Holzes so sehr verloren hätte, dass es bey der Berührung der Kugel, nicht den mindesten Widerstand *der Rotation* entgegensetzte, und dass dagegen nur Luft einen Widerstand *der Rotation der Kugel* entgegensetzen konnte? Ferner, durch was für Lünetten ſich Herr Lombard überzeugt hätte, daſs das Loch in dieſem (4 bis 5 Linien dicken) Linial *nicht im mindeſten ſchief war?* da die geringſte Schiefe bey ſolchen Umſtänden, in einer Entfernung von 1800 Toiſen, gar leicht eine Abweichung von 100 Toiſen geben könnte.

Der Dritte, — wahr iſt es! — er ruft zwar zuweilen, wie Ajax: *gib uns Tag!* nie aber: *gib uns Nacht!*

§. IV.

Um ſich davon zu überzeugen, wie es überhaupt mit der Kenntniſs der Urſachen von der Abweichung der Projectilien, beſonders aber der Haubitzgrenaden und Bomben, bisher ſtehe; um vollkommen einzuſehen, wie wenig alle bisher bekannte Urſachen einen Calcül zulaſſen, braucht man nur dasjenige aufmerkſam zu leſen, was jener berühmte Mann, deſſen Kenntniſſe, Talente und Geiſt allgemein bekannt ſind, in dem zweyten Theile der Geſchichte des ſiebenjährigen Krieges geſagt hat. Auf der 67ſten Seite heiſst es: „Bey Haubitzen, die man doch gern zum „Rikoſchettiren nimmt, iſt man immer mehr der Gefahr ausgeſetzt, Feh„ler zu begehen, als bey Canonen. — Man findet daher bey aller Sorg„falt, die man anwendet, um keinen von den Umſtänden zu unterlaſſen, „die auf die Genauigkeit der Würfe einige Beziehung haben können, da„bey dennoch oft ſolche Unterſchiede, ſolche beträchtliche Abweichun„gen von der Linie, in der das Geſchütz gerichtet iſt, *daſs der Verſtand „dabey ſtille ſtehet.* Denn dreyſsig, vierzig, funfzig Schritte, ſind da„bey eine Kleinigkeit: ſie gehen zuweilen bis auf zwey, dreyhundert. „Dieſs ſind Erfahrungen; und man kann daraus urtheilen, was man von „dem Rikoſchettiren des Wallganges mit Haubitzen zu erwarten hat, und „ob nicht die mehrſten Grenaden ſo gut, als ins Waſſer geworfen ſind. „Wenn daher doch rikoſchettirt werden ſoll, ſo ſind Canonen allemal „beſſer.“ Und auf der 68ſten Seite: „Sodann, und dieſs iſt das wich„tigſte, hat der Artilleriſt das Wurfgeſchütz noch weniger in ſeiner Ge„walt, als die Canonen. Wenn man auch das genaue Richten der Mor-

„tiere bey Seite ſetzt, weil dieſs, in der That, bey Bewerfung der Facen „eines Baſtions, Enveloppe, Ravelins u. ſ. w. nicht immer nöthig iſt; ſo „ſollte man doch wenigſtens einen Raum von 40 bis 50 Schritt in der „Länge, und 15 bis 20 Schritt in der Breite, bey einer Entfernung von „800 bis 1000 Schritt, mit einiger Zuverläſsigkeit bewerfen können: „allein ſo weit iſt man in der Kunſt, Bomben zu werfen, noch nicht ge„kommen. Die Unterſchiede ſind bey dieſen Entfernungen meiſten„theils immer gröſser, ſo daſs unter zehn Bomben kaum Eine die ihrer „Beſtimmung angemeſſene Wirkung hervorbringt u. ſ. w."

Wer kann in den Worten: *hierbey ſtehet der menſchliche Verſtand ſtille,* den groſsen Character dieſes Mannes verkennen? So denkt auch Deutſchlands vortreflicher Naturforſcher, wenn er bey einer andern Gelegenheit ſaget: „Dieſs bricht ebenfalls die Unterſuchung ab, und heiſst, „ſobald es *Erklärung* ſeyn ſoll, eigentlich nur ſoviel: *wir wiſſen die Urſa„che nicht, wir glauben ſie aber zu wiſſen.* Was ich nicht weiſs, kann ich „noch lernen; was ich nicht weiſs, aber zu wiſſen *glaube,* lerne ich ent„weder nie, oder doch nie ohne unangenehme Demüthigung."

Bomben, vorzüglich Haubitzgrenaden, ſind es alſo, und nicht Canonenkugeln, *wobey der menſchliche Verſtand ſtille ſtehet.* In der That, wenn man Herrn d'Antoni mit Unbefangenheit lieſt, wenn man von einem *Geometer* hört, daſs vermöge der Erfahrung, die Bahn der Bomben und Grenaden, eine Linie von *doppelter, dreyfacher* Krümmung ſey: kann man wohl einen Augenblick anſtehen, alle bisher von dieſer Abweichung angegebenen Urſachen, in die Claſſe der *qualitatum occultarum* der Alten zu ſetzen? Bey der *Kugelgeſtalt* der Bomben und Grenaden, eine *doppelt, dreyfach gekrümmte* Bahn auf Rechnung des Widerſtandes der Luft zu ſetzen, dieſs konnte freylich keinem Geometer einleuchten. Und die übrigen angeblichen Urſachen beſchäftigen ſich bloſs mit dem Tadel der Gieſserey und der Geſchicklichkeit derjenigen, die das Wurfgeſchütz bedienen. So ſehr man nun auch davon überzeugt iſt, — und ich in der That es ſelbſt bey dieſer Abhandlung fühle, — daſs alles, was Menſchenhände treiben, nur unvollkommen ſeyn kann: ſo kann man doch, dünkt mich, den Versicherungen einsichtsvoller Männer trauen, die alle einstimmig behaupten, dass man es in der Kunst, Geschütz zu giessen und zu bohren, bereits ungemein weit gebracht hat. Diejenige Unvorsichtigkeit aber bey der Bedienung des Wurfgeschützes, welche allein eine doppelt, dreyfach gekrümmte Bahn zu Stande brächte, diese Ungeschicklichkeit müsste wohl mehr *den menschlichen Verstand zum Stillstand* bringen, als je die seltenste Geschicklichkeit selbst. Was würde man jetzt sagen, wenn man läse, (welches vor Galilæi zuverläsig sehr oft der Fall seyn mochte,) dass die Bogenschützen sich manchen Verdruss zuzogen, wenn sie ihren Bogen so nachläsig verfertigten und so unvorsichtig bedienten, dass ihre Pfeile sich unter das Ziel senkten?

§. V.

Jene merkwürdige Worte des Herrn Obristen von Tempelhoff haben mich auf einen Gedanken gebracht, den ich seit dem öffentlichen Aufruf der Königlichen Akademie der Wissenschaften, einer solchen Prüfung unterwarf, dass Geometrie und Calcül den Principien dieser Idee nicht commandirten, sondern erst alsdann ihnen zu Hülfe gerufen wurden, nachdem, wie mich dünkt, Physik und Chemie die Wahrheit dieser Principien anerkannten. Die Idee nun, die so einfach ist, dass sie vielleicht, eben wegen ihrer Simplicität, ein Pendant zu jener Geschichte seyn kann, wie Columbus ein Ey auf die Spitze stellte, — diese Idee, welche ich aus keinem Buche, aus keiner mündlichen oder schriftlichen Unterredung habe, gründet sich auf den *Zünder* oder die *Brandröhre*. Der Königlichen Akademie der Wissenschaften kommt es zu, über den Werth oder Unwerth dieses Gedankens zu entscheiden.

§. VI.

Die Bestandtheile der Brandröhrensätze sind zu bekannt, als dass ich sie hier erst aufzählen dürfte. Eine Bemerkung wird nicht überflüssig seyn: dass nämlich das Mehlpulver fur sich, im Gegensatz mit dem Kornpulver, eben nicht so sehr schwach sey, wie man gewöhnlich glaubet. Denn ein 30pfündiger Mortier wirft, nach Scharnhorst, unter 70 Grad mit 15 Loth Kornpulver seine Bombe 250 Schritt, und mit eben so viel Loth Mehlpulver 200 Schritt. Daraus aber, daſs durch die übrige Beymischung in dem Satze, die Wirkung des Mehlpulvers *geschwächt* wird, folgt gar nichr, daſs sie *gänzlich vernichtet* sey; zumal da unter den neu hinzukommenden Theilen wiederum Salpeter sich befindet, der allein schon, vermöge der Entwickelung seiner Luftart, neue Kräfte im brennenden Zünder erzeugen kann.

§. VII.

Alle Prüfungen der Brandröhren in Laboratorien sowohl, als auch in allen Artilleriebüchern, haben bloſs dieſs zur Absicht: vermittelst eines Pendels zu erfahren, ob der Zünder so geschlagen worden ist, daſs er *eben in der bestimmten Zeit abbrenne;* wobey er, dieser Absicht gemäſs, auf eine *unbewegliche* Unterlage gestellt wird. Aber zu prüfen, ob überhaupt in den Zündern, und insbesondere bey jeder Art der Brandröhrensätze, während Verbrennung derselben, nicht *beschleunigende Kräfte* erzeugt werden, von welchen die Grenade oder Bombe, während ihres Fluges, sollicitirt werden kann; ferner, *diese Kräfte zu messen,* und die Sätze *darnach einzurichten,* oder *deſswegen* ganz andere zu erfinden, — auf diesen Gedanken scheint man noch nicht gekommen zu seyn. Alle Artilleriebücher und die Versuche in Laboratorien sind hievon Beweise.

§. VIII.

Man braucht nicht erst auf des Herrn von Segner Wassermaschine, nicht auf das electrische Rad, und noch weniger auf den Recül des Geschützes zu verfallen, welcher gleichsam nur ein einziger Stoſs ist. Sondern man erwäge nur dasjenige, was an einem brennenden Feuerrade, in einer brennenden Rakete vorgeht, die jedermann bekannt sind. Ist es nicht die sich entwickelnde Luft, die auf den Boden ihrer Entstehung zurückwirkt, indem sie an die atmosphärische unaufhörlich stöſst, und dadurch, als eine *beschleunigende Kraft*, die Rakete in ihrer Bahn, und das Feuerrad bey seinem Umlauf ununterbrochen treibet? Daſs der Mond gegen die Erde nicht so stark, als unsere Projectilien gegen den Horizont, beſchleuniget wird; wer wird daraus folgern, daſs bey dem Monde die Gravitation *gar nicht* ſtatt findet? Geſetzt, ein Brandröhrenſatz ſey ſo ſchwach, (und wer wird dreiſt behaupten, daſs er nie ſtärker ſey, da man an Verſuche, die zu *dieſer* Abſicht dienen könnten, bisher nicht gedacht hat?) er ſey ſo ſchwach, daſs eine angezündete Brandröhre in Verbindung mit einer Grenade, wenn die Schwere in beide *nicht* wirkte, im Freyen von der Ruhe an in der erſten Secunde nur *drey Zoll* zurücklegte: ſo würde der in 20 Secunden zurückgelegte Weg ſchon an *hundert* Fuſs betragen. Nun erwäge man nur noch, daſs die Umdrehungsbewegung einer Grenade und Bombe ſchon vom Hauſe aus unvermeidlich iſt; und daſs in freyer Luft, bey dem merklich hervorragenden Brandröhrenkopfe, die wahre Umdrehungsaxe im Innern des Körpers und zugleich ihre Lage im Raume veränderlich iſt: ſo wird man mit einem Male alle Irregularitäten der Grenaden und Bomben nicht nur leicht begreifen, ſondern auch von der Nothwendigkeit dieſer Abweichungen ſo innig überzeugt ſeyn, daſs ſo oft als eine Grenade oder Bombe den verlangten Ort genau träfe, der menſchliche Verſtand ſtille ſtehen müſste.

§. IX.

Wie lieſsen ſich nun die Geſetze der Bewegung, welche von der Kraft des brennenden Satzes erzeugt wird, *beſtimmen?* Ehe man die Auflöſung dieſes Problems unternehmen kann, muſs man zuvor die abſolute Gröſse der Kraft im Zuſtande des Gleichgewichts, das heiſst, die *Stärke des Druckes* während des Gleichgewichts, *meſſen,* und zugleich erforſchen, ob dieſer Druck veränderlich oder unveränderlich iſt, und nach welchem Geſetze dieſer Druck ab- oder zunimmt. Doch auch vor dieſer Unterſuchung müſſen noch folgende Betrachtungen vorangehen.

1) Man ſtelle ſich unter einem luftleeren Recipienten eine verticale Welle mit einem darauf ſenkrechten Arm vor; an dieſem Arm ſey die Brandröhre horizontal und darauf ſenkrecht befeſtiget. Arm und Welle müſſen ſo ſchwach ſeyn, als es nur die Umſtände zulaſſen, damit die Summe aller Producte aus jedem Element der Maſſe in das Quadrat ihres Abſtandes von der Umdrehungsaxe, ſo klein als möglich werde; zu ge-

ſchweigen, daſs auch die Friction dadurch vermindert wird. Wäre nun die Luftpumpe eine doppelte, u. ſ. w. daſs man alſo auch dann, wenn der Zünder brennt, durch das Auspumpen einen ziemlich luftleeren Raum behalten könnte: ſo würde man dabey ſchon ſo viel ſehen, ob in der freyen Luft die oben erwähnte Stärke des Druckes *bloſs* von dem Widerſtande der atmoſphäriſchen Luft herrühre. Denn geſetzt, der Recipient bliebe beſtändig ziemlich luftleer, und der Zünder würde ſich, deſſen ungeachtet, im Kreiſe bewegen; ſo könnte nur Zweyerley die Urſache hievon ſeyn. *Erſtlich*, entweder müſste der Brandröhrenſatz mit dem Knallgolde *eine* gewiſſe Eigenſchaft, nur in einem viel geringeren Grade, gemein haben, vermöge welcher daſſelbe nach allen Seiten zu wirkt: oder *zweytens*, die Entwickelung der Luftart müſste merklich *ſchneller* vor ſich gehen, als ſich die eben entwickelte Luftmaſſe in den ganzen luftleeren Raum ausbreiten kann. Wäre dieſs letztere, ſo würde in jedem Augenblicke die eben entwickelte Luftmaſſe, der ſich in dem nächſtfolgenden Augenblicke entwickelnden Luft, in gewiſſem Grade dasjenige ſeyn, was überhaupt im Freyen die atmoſphäriſche Luft dem Zünder iſt.

2) Wenn man nachher, wie man bald ſehen ſoll, in der freyen Atmoſphäre die Stärke jenes Druckes ſuchet; ſo ſpielt hiebey nothwendig der Barometerſtand eine bedeutende Rolle. Denn ſelbſt dem Mariottiſchen Lehrſatze gemäſs, muſs ſich bey gleichen Umſtänden, die Elaſticität der entwickelten Luftmaſſe wie die zuſammendrückende Kraft verhalten. Geſetzt, bey einem Barometerſtand von 24 Zoll $= 1$, hätte man die Stärke jenes Drucks $= P$ gefunden; ſo wäre, bey einem Barometerſtande $= 1 + \frac{1}{12}$, und bey gleicher Temperatur der Atmoſphäre, nunmehr jener Druck wenigſtens $= P + \frac{1}{12} P$. Ich ſage *wenigſtens*, weil der zunehmende Druck der Atmoſphäre auch überdieſs noch die *Erhitzung* der entſtehenden Luftart, und eben daher auch die Elaſticität derſelben befördern wird; ſo wie er bekanntlich allen flüſsigen Maſſen (und höchſt wahrſcheinlich auch feſten Körpern) eine gröſsere Capacität ſenſibler Wärme mittheilt, wovon auch nur ſchon der Unterſchied

der Siedpuncte bey verſchiedenen Barometerſtänden, ein augenſcheinlicher Beweis iſt.

3) Hieraus iſt es klar, daſs wenn der brennende Zünder ſich mit dem Kopf *gegen die Luft* bewegt, jener Druck P mit der Geſchwindigkeit des Zünders wachſen müſſe.

4) Wenn zwey ungleich weite Brandröhren, von einerley Holz, mit einerley Satz auf gleiche Art gefüllt ſind; und man nennt f, f', die Queerſchnitte der innern Cylinder, welche aus dem Satze beſtehen; wenn ferner P bey der erſten Brandröhre, und P' bey der zweyten eine gleiche Bedeutung mit No. 2. haben: ſo wird $P : P' = f : f'$ ſeyn; oder die Stärke des Druckes in No. 2. wird ſich wie der Queerſchnitt des innern Satz-Cylinders verhalten. Denn P läſst ſich durch eine Waſſerſäule ausdrucken, deren Grundfläche $= f$, und deren Höhe $= h$ iſt. Wenn alſo n jede Zahl, folglich $\frac{1}{n} f = f'$ jeden beliebigen Theil der Grundfläche bedeutet; ſo iſt der Druck $= P'$ auf dieſen Theil, einer Waſſerſäule gleich, deren Grundfläche $\frac{1}{n} f$, deren Höhe aber *eben nur die vorige* h iſt. Daraus iſt alſo der Satz klar.

§. X.

Um nun die Stärke dieſes Drucks während des Gleichgewichts zu *meſſen,* und dabey zu beobachten, ob dieſer Druck veränderlich oder unveränderlich iſt, und nach welchem Geſetze er ab- oder zunimmt; ſo ſey (fig. 1.) $b\,c\,d$ ein eingetheilter Quadrant, $a\,b$ vertical, $a\,d$ folglich horizontal; $a\,e$ eine um a leicht bewegliche Stange, die für ſich ſo leicht als möglich, und dagegen lieber mit einem mäſsigen Körper n beſchwert ſey, der ſich längs der Stange $a\,e$ auf- und abſchieben läſst. Bey e ſey die Brandröhre in der Ebene $b\,a\,d$ und ſenkrecht auf die Stange $a\,e$ befeſtiget. Das Gewicht der Stange ſammt dem Körper n ſey $= G$, beider Schwerpunct irgendwo in f; das Gewicht der hölzernen Hülſe der Brandröhre $= k$, und ihres Satzes $= \lambda$; μ ſey ein Gewicht, das in e angebracht, mit der Friction im Gleichgewicht wäre; der Winkel bac

ſey ϕ: ſo iſt das ſtatiſche Moment der geſammten Maſſe, $= [af \cdot G + ae \cdot (\mu + k + \lambda)] \sin \phi$. Das Moment des Drucks P iſt aber $= ae. P$; folglich

$$P = \frac{af \cdot G + ae\,(\mu + k + \lambda)}{ae} \sin \phi,$$ für die erſten Paar Secunden, da λ noch wenig abgenommen; für die letzten Secunden aber, da λ verſchwindet, wird beynahe

$$P = \frac{af \cdot G + ae\,(\mu + k)}{ae} \sin \phi$$ ſeyn.

Bey dieſem Verſuche wird der Augenſchein lehren, wie ſich ϕ ändert; ob es wächſt, ungeachtet λ abnimmt? oder ob es abnimmt, und zwar in einem höheren Grade, als es bloſs wegen der Abnahme von λ geſchehen ſollte?

§. XI.

Jetzt wähle man Verſuche, die zur Auflöſung desjenigen Problems führen, welches am Anfang des IX. §. erwähnt worden iſt. Zuvor wird man ſich eines Satzes aus *d'Alembert Traité de Dynamique* §. 159, *2de Edit.*, oder aus *Euleri Theoria motus corporum rigidorum* §. 408 — 412. erinnern. Wenn ein Körper, deſſen Maſſe $= M$, ſich um eine feſte Axe drehet; und ϕ einen in der Zeit t, mit dem Halbmeſſer $= 1$, beſchriebenen Kreisbogen, mithin $\vartheta = \frac{d\phi}{dt}$ die Winkelgeſchwindigkeit am Ende der Zeit t, bedeutet; ferner, wenn dieſer Ausdruck $\int rr\,dM$ die Summe aller Producte aus jedem Element der Maſſe in das Quadrat ſeiner Entfernung, und g den freyen Fall in der erſten Secunde, bezeichnet; und alsdann eine Kraft $= V$, in der Entfernung $= f$ von der Axe, ſo angebracht iſt, daſs ihre Richtung in einer auf der Axe ſenkrechten Ebene bleibet: ſo iſt allemal

$$d\vartheta = \frac{2gVf}{\int rr\,dM}\,dt,$$

$$\vartheta\,d\vartheta = \frac{2gVf}{\int rr\,dM}\,d\phi,$$

$$dd\phi = \frac{2gVf}{\int rr\,dM}\,dt^2.$$

Nun sey in der 2ten Figur eh eine verticale Welle, der Arm nc darauf senkrecht befestiget; q ein Gewicht, das an dem Faden slq herabhängt, der um die kleine Rolle l gehet; der Halbmesser der Welle bey s sey $= \varrho$: so ist hier $nc = f$; und wenn μ eine in n angebrachte Kraft bedeutet, die der Friction das Gleichgewicht hält, so ist hier $V = P - \mu - \frac{\varrho}{f} q$. Setzt man nun die gesammte Masse der Welle, des Arms und der Brandröhre $= M$, und das sogenannte *Moment der Trägheit*, in Beziehung auf die Axe he, $= Mkk$; das Moment der Trägheit der Rolle l, $= o$, das Gewicht des Fadens auch $= o$: so ist hier $\int rrdM = Mkk + \varrho\varrho q$, mithin

$$d\vartheta = 2g \frac{f(P-\mu) - \varrho q}{kkM + \varrho\varrho q} dt,$$

$$\vartheta d\vartheta = 2g \frac{f(P-\mu) - \varrho q}{kkM + \varrho\varrho q} d\Phi,$$

$$dd\Phi = 2g \frac{f(P-\mu) - \varrho q}{kkM + \varrho\varrho q} dt;$$

Diese drey Gleichungen setzen uns in den Stand, die hieher gehörigen Probleme aufzulösen, und dabey, welches wohl zu merken, die Auflösungen durch so scharfe Versuche, als man nur wünscht, zu prüfen. Denn wenn diess letztere nicht die Absicht gewesen wäre; so hätte man ja auch, ohne Bedenken, den in der Zeit t zurückgelegten Weg $= x$, die Masse der Brandröhre sammt Grenade $= N$, und folglich $\frac{ddx}{dt^2} = \frac{2gP}{N}$ setzen, dabey zugleich, (vermuthlich nur der Kürze wegen) annehmen können, P sey weder eine Function der Geschwindigkeit, noch des zurückgelegten Weges oder der Zeit, mithin schlechtweg $x = \frac{gP}{N} tt$.

§. XII.

Wenn Welle und Arm so schwach, als möglich, sind; die Friction gering, und das Gewicht q nur so klein ist, dass es den Faden bey der Aufwickelung in s, während des Umlaufs der Brandröhre, vor einem unordentlichen Zusammenschrumpfen sichert, damit man am Ende die

Länge des aufgewickelten Fadens und die Zahl der Umläufe genau wisse: so wird die dritte Gleichung vorzüglich dienlich seyn. Denn offenbar gibt $\varrho\,\Phi$ die Länge des in der Zeit t aufgewickelten Fadens, und $f\Phi$ gibt den in der Zeit t von dem Zünder zurückgelegten Weg. Daraus folget, dass man den zurückgelegten Weg des Zünders findet, wenn man die Höhe, auf welche das Gewicht q in der Zeit t gestiegen ist, durch den Halbmesser der Welle dividirt und mit dem Arm cn multiplicirt. Nun nehme man P unveränderlich an, so gibt die dritte Gleichung

$$\Phi = \frac{f(P-\mu) - \varrho q}{kkM + \varrho\varrho q}\, gtt,$$

mithin die Höhe, auf welche das Gewicht q gestiegen,

$$= \varrho gtt \times \frac{f(P-\mu) - \varrho q}{kkM + \varrho\varrho q},$$

oder wenn ϱ sehr klein und q unbeträchtlich,

$$= gtt \times \frac{\varrho f(P-\mu)}{kkM}.$$ Gäbe nun der Versuch eine *ganz andere* Höhe an, auf welche das Gewicht q gestiegen ist: so wäre die Voraussetzung P = Constans unrichtig; wenn übrigens zuvor μ durch Versuche bekannt geworden ist; denn um kkM leicht und scharf zu finden, darf man nur zu Welle und Arm gut gearbeitete dünne Cylinder wählen, und das sechste Capitel in Herrn *Eulers theoria motus corpor. rigidor.* zu Rathe ziehen, wo die Resultate für die gewöhnlichsten Gestalten der Körper schon völlig da stehen.

Bey allen diesen Versuchen muss man noch den Widerstand, den die Luft der umlaufenden Brandröhre entgegensetzt, in Erwägung ziehen. Ist die Umlaufsgeschwindigkeit nicht gross, so kann man den Widerstand noch dadurch sehr vermindern, dass man bey dem zuletzt erwähnten Versuche das Ende b der Brandröhre stark zuspitzt, und überhaupt den Kopf der Brandröhre bey dieser Geschichte ganz abschneidet, und alsdann erst etwas Anfeuerung anbringt. Sonst läst sich allerdings auch dieser Widerstand leicht in Rechnung bringen, die ich aber, weil sie gar zu bekannt ist, hier übergehe.

§. XIII.

Vorzüglich interessant werden die Versuche seyn, wenn das Gewicht q von der Grösse angenommen wird, dass es durch sein Sinken den brennenden Zünder sogar zu einem Umlauf nöthiget, der beständig der Richtung seiner Kraft entgegengesetzt ist; das heisst, wenn der Zünder sich mit der brennenden Fläche *gegen* die Luft bewegen, und zwar ziemlich schnell bewegen muss. Alsdann wird man sehen, dem IX. §. No. 3. gemäss, um wieviel die Kraft P wirklich zunimmt. Alles dieses wird man aus den drey Gleichungen mit geringer Mühe herleiten, prüfen, berichtigen; zumal wenn noch ein Glied, wegen des Widerstandes der Luft, hinzukommt.

Wenn das Gewicht q die Ueberwucht hat, und Anfangs der Faden bey s nach dem Sinne aufgewickelt war, dass indem q sinkt, der Kopf des Zünders der Luft *ausweicht*: so setze man z. B. in der ersten Gleichung, $P =$ Constans; das gibt $\vartheta = 2gt \times \frac{f(P-\mu) - \varrho q}{kkM + \varrho\varrho q}$. Also wäre $2gt\varrho \times \frac{f(P-\mu)-\varrho q}{kkM + \varrho\varrho q}$ die *wahre Geschwindigkeit* der Masse q am Ende der Zeit t. Wenn aber diese Masse in eben der Zeit bey dem Versuche um die Höhe s gesunken ist; so muss bekanntlich am Ende der Zeit t ihre Geschwindigkeit $= \frac{2s}{t}$ seyn, *wofern* P unveränderlich war: dass also diese letztere Voraussetzung unrichtig seyn muss, wenn beide Werthe der Geschwindigkeit von einander sehr abweichen.

Umgekehrt, wofern man nur P nicht aus dem X. §., in die Versuche des XI., XII und XIII. §., eindränget: so wird es offenbar allemal verstattet seyn, P als eine *unveränderliche* Kraft anzusehen, und ihre Grösse aus den (§. XI.) beobachten t, $\varrho\vartheta$, $\varrho\Phi$; oder aus t, $f\vartheta$, $f\Phi$, zu bestimmen. Die auf diese Art gefundene *mittlere Kraft* P kann nachher bey der Rechnung über die Bahn der Grenaden und Bomben, (*einerley Zeit* vorausgesetzt,) als eine *unveränderliche* Kraft gebraucht werden.

§. XIV.

Der *zweyten* Forderung des I. §. gemäſs, ſollte nunmehr gewieſen werden, wie die Quantität jener Abweichung, in jedem einzelen Falle, vermittelſt der anfänglichen Geſchwindigkeit, des Elevationswinkels, der *Geſtalt des Körpers* u. ſ. w. beſtimmt werden kann.

Dieſe Quantität in jedem einzelen Falle von der *anfänglichen Geſchwindigkeit* und dem *Elevationswinkel abhängig zu machen*, hat wohl keine Schwierigkeit; weil dieſer Forderung, die Integrabilität der Gleichungen vorausgeſetzt, bloſs durch die Beſtimmung der Conſtanten am Ende der Integrationen vollkommen Genüge geſchehen kann. Ganz anders aber verhält es ſich mit der Unterſuchung dieſer Quantität in Beziehung auf die *Geſtalt des Körpers*, — ein unermeſsliches Feld!

Hat der Körper die *Kugelgeſtalt*; ſo mag der Mittelpunct ſeines Volumens mit dem Schwerpunct zuſammenfallen, oder nicht: *nie* wird der Widerſtand der Luft etwas dazu beytragen können, den Schwerpunct von der verticalen Richtungsebene abzulenken. Denn es ſey in der 3ten Figur, e der Mittelpunct, und der Schwerpunct c beſchreibe jede beliebige krumme Linie; zugleich pirouettire die Kugel um c, wie man nur wolle. Am Ende der Zeit t ſey cf eine Tangente des Elements der krummen Linie, das der Schwerpunct in der Zeit dt zurücklegt. Man lege durch den Mittelpunct e eine Ebene mn auf cf ſenkrecht: ſo ſtöſst in dieſem Augenblicke die Luft auf jedes Element p der vordern Fläche nach der Richtung hp parallel mit fc. Denn wenn ſich die Kugel, während des Zeittheilchens d t, *nicht* um c drehet; ſo iſt der Satz für ſich klar: drehet ſie ſich aber, ſo ſey der Winkel, den ph mit dem Elemente p am Ende der Zeit t macht, $= \phi$; wegen der Rotation während des Zeittheilchens dt, wird ſich ϕ in $\phi \pm d\phi$ verwandeln. Wenn man alſo vorhin ſin ϕ ſchrieb; ſo muſs man jetzt ſin $(\phi \pm d\phi)$ ſchreiben. Es iſt aber offenbar ſin $(\phi \pm d\phi) =$ ſin ϕ; und an den Stellen gegen m und n zu, wo ϕ unendlich klein iſt, wird ſin $(\phi \pm d\phi) = d\phi \pm d\phi$, und ſin $(\phi \pm d\phi)^2 = 2\, d\phi^2 \pm 2\, d\phi^2$, welches bekanntlich nachher bey der Summirung von ſelbſt wegfällt; daſs alſo die

Rotation während des Zeittheilchens dt, gar keinen Einfluſs auf die *Richtung* des Luftſtoſses hat. Die Kugel mag ſich alſo drehen, oder nicht; ſo geſchehen die Stöſse auf alle Elemente der vordern Fläche parallel mit cf. Die bisherigen Schlüſſe gelten offenbar nicht bloſs für die Kugelfläche, ſondern *für jede Geſtalt der Oberfläche.* Nur von nun an, wenn man ferner die aus allen Elementarkräften *reſultirende* Kraft des Widerſtandes und die *Richtung* dieſer Reſultante gehörig ſucht: da erhellet aus dem alten Satze von Zerlegung und Zuſammenſetzung der Kräfte, daſs bey der Kugelgeſtalt 1) die Reſultante durch einen Punct r gehen muſs, ſo daſs $rm = rn$; 2) daſs die *Richtung* dieſer Reſultante perpendiculär auf das Element r, und folglich durch e, parallel mit cf, gehen muſs; woraus alſo *keine* Seitenkraft entſtehen kann, die auf cf perpendiculär wäre. Alles alſo, was bey der Kugelgeſtalt, aus der Entfernung ke, in Beziehung auf den *Widerſtand der Luft,* entſtehen kann, beſtehet *bloſs in Aenderungen der Rotation um* c, *aber nicht in Ablenkung des Schwerpuncts* c *von ſeiner Bahn,* deren zweyte oder dritte Krümmung nur *andere* ſollicitirende Kräfte zu Stande bringen.

§. XV.

Wie verhält es ſich denn aber mit der Quantität jener Abweichung, wenn der geworfene Körper keine Kugelgeſtalt hat? Die Folge wird zeigen, wie ſehr man irren würde, wenn man glaubte, daſs die Auflöſung dieſes Problems für ein Sphäroïd ſo ſehr viel leichter ſey, als für andere Körper von willkührlicher Geſtalt. In der That, wer die Berechnung jener Quantität für einen Körper verlangt, welcher keine Kugelgeſtalt hat, der fordert nichts geringeres, als eine vollſtändige Auflöſung dieſes Problems: *Die Bahn zu finden, die ein geworfener Körper von jeder beliebigen Geſtalt in der Luft beſchreibet.* Um ſich mit den Schwierigkeiten dieſes Problems vorläufig bekannt zu machen, durchſuche man den zweyten Theil des unſterblichen Werkes, *Philoſophiæ naturalis principia,* welcher von dem Widerſtande handelt; ob da nicht alle Körper entweder als Puncte, oder als Kugeln, oder als Cylinder, das heiſst, überhaupt alle Körper nur als *Puncte* angenommen ſind. Wenn Newton in dem *Scolio* zu *Propos.* XVI. (Seite 160. 3te Auflage, der *PP. Le Seur* und *Jacquier*) ſaget: *Cæterum hæc propoſitio & ſuperiores quæ ad media inæqualiter denſa ſpectant, intelligendæ ſunt de motu corporum adeo parvorum, vt medii ex vno corporis latere major denſitas, quam ex altero, non conſideranda veniat:* ſo muſs man unſtreitig dieſes als ein *Scolium für alle drey Bände* anſehen.

Nachdem Herr d'Alembert, er der Erſte, bey Gelegenheit des Problems von dem Vorrücken der Nachtgleichen, die allgemeinen Grundſätze der Bewegung eines feſten Körpers von willkührlicher Geſtalt, erfunden, und in ſeinen *Opuſcules mathématiques* erweitert hatte: ſo hätte man nunmehr hoffen dürfen, daſs er die Auflöſung jenes Problems unternehmen würde; zumal, da es mit dem Widerſtande flüſsiger Materien, ſeinem Lieblingsgegenſtande, in der genaueſten Verbindung ſtand. Wer mit ſeinen Schriften bekannt iſt, wird wohl wiſſen, daſs dieſe Auflöſung unterblieben iſt. In der zweyten Auflage ſeines *Traité de l'Équilibre et du mouvement des fluides* vom Jahre 1770, am Ende des 310 §. ſaget er zwar: *enfin, je donnerai les loix du mouvement d'un corps de figure quelconque dans un fluide.* Wenn man aber die §. §. 361. bis 364, worauf er zielte, lieſet; ſo findet man, daſs er nicht einmal dasjenige, worauf es bey der Auflöſung dieſes Problems ankommt, gehörig angezeigt hat. Seine merkwürdigen Worte im 365. §. verdienen erwogen zu werden: *Il eſt évident que par les mêmes principes on trouvera le mouvement d'une figure quelconque qui paſſe d'un fluide dans un autre. Comme les calculs en ſont extrêmement compliqués, et que j'ai réduit la queſtion à une pure queſtion d'Analyſe* (*welches* und *wo* iſt denn dieſe *Queſtion d'Analyſe?*), *par les principes que je viens d'expoſer dans la ſolution des problèmes précédens, je crois qu'il eſt inutile de m'étendre ſur ce ſujet. On voit ſeulement que la ſolution eſt beaucoup plus compoſée, & dépend d'un nombre beaucoup plus grand d'Élémens, qu'on ne paraît l'avoir cru juſqu'à préſent.*

Auch Herr Leonhard Euler, der ſonſt hie und da, z. B. in ſeiner *Scientia nauali,* vortrefliche Bemerkungen über den Widerſtand gemacht hat, ſcheint ſich mit Auflöſung dieſes Problems nirgends befaſst zu haben. Von Herrn *de la Grange* iſt, wenigſtens mir, kein Verſuch hierüber bekannt. In den Werken der Herren *Bernoulli* wird man die Auflöſung vergebens ſuchen.

§. XVI.

Worin beſtehen denn alſo eigentlich die groſsen Schwierigkeiten, die da machen, daſs bisher Niemand eine Auflöſung dieſes Problems gegeben, nicht einmal verſucht; ja noch mehr, nicht einmal *die Schwierigkeiten deſſelben beſtimmt angezeigt hat?* Kann man etwa nicht die nöthige Anzahl von Gleichungen zuſammenbringen? Welche iſt die geringſte Anzahl der veränderlichen Gröſsen in dieſem Problem, und welche ſind dieſe veränderlichen Gröſsen? Kann man denn auch nicht beyläufig die Geſtalt aller hiezu nöthigen Gleichungen angeben, damit man doch endlich deutlich einſehe, woran es lieget?

Ungeachtet nun das Beyſpiel der gröſsten Geometer hiebey, in der That, abſchreckend iſt; zumal für mich, deſſen Kenntniſſe ſo gering ſind; ſo will ich doch einen Verſuch hierüber wagen, ſo gut nämlich, als es meine geringe Einſicht verſtattet. Da ich aber ohnehin noch den Einfluſs des Brandröhrenſatzes auf die Bahn der Grenaden und Bomben, welche bekanntlich die Kugelgeſtalt haben ſollen, deutlich anzugeben geſonnen bin: ſo will ich gleich Anfangs zu dem vorigen Probleme auch noch die Brandröhre hinzufügen.

§. XVII.

Die Geſtalt des Körpers ſey alſo jede beliebige. Er wird von drey Kräften ſollicitirt, der Schwere $= Q$, der Kraft des brennenden Satzes $= P$, dem Widerſtande $= R$.

Der Widerſtand R iſt *erſtlich* ſeiner Quantität nach veränderlich, und zwar 1) wegen der veränderlichen Geſchwindigkeit des Schwerpuncts, 2) wegen der veränderlichen Krümmung der Oberfläche, oder wegen der Unähnlichkeit ihrer Theile. *Zweytens,* wenn man ſich R, eine aus allen Elementarkräften des Widerſtandes reſultirende Kraft, *als* *eine Linie* vorſtellt: ſo fällt es ſogleich in die Augen, daſs die *Direction* dieſer Reſultante veränderlich iſt, oder, daſs die eben erwähnte Linie ſowohl *im Innern des Körpers*, als auch *im Raume ſelbſt ihre Lage beſtändig ändert*. Um dieſs vorläufig nur mit einem Beyſpiele zu erläutern, erinnere man ſich desjenigen, was im XIV. §. bey Gelegenheit der dritten Figur, geſagt worden iſt. Dort, bey der Kugelgeſtalt, war die *Reſultante* se in jedem Augenblick mit der Richtung des Schwerpuncts cf parallel, und eine daraus entſtehende auf cf perpendiculäre Seitenkraft war beſtändig $= 0$. Hier aber wird es in jedem Augenblick eine andere Lage gegen cf haben; ja nicht einmal (gewiſſe Augenblicke ausgenommen) durch den Mittelpunct e des Volumens gehen, wenn auch wirklich dieſer Punct mit dem Schwerpunct zuſammenfiele. Wenn man alſo hier die Reſultante es in zwey äuſsere Kräfte zerleget, wovon die eine parallel mit dem Elemente der Bahn des Schwerpuncts, die andere darauf ſenkrecht iſt: ſo wird ſelbſt dieſe ſenkrechte, ihrer Quantität nach, von einem Augenblick zum andern veränderlich ſeyn. Ueberhaupt aber werde ich noch weiter unten die Kraft R, auf welche alles ankommt, gründlich betrachten; jetzt geht es darum noch nicht an, weil ſie eine Function von *gewiſſen drey Winkeln* ſeyn muſs, und weil ſowohl die Eigenſchaften als auch die abſolute Nothwendigkeit dieſer drey Winkel, am beſten aus den Hauptgleichungen für die geſammte Bewegung des Körpers, erhellen wird. Dieſe Hauptgleichungen müſſen alſo voran gehen. Zuvor aber noch das Nöthige von der Kraft P des Brandröhrenſatzes.

§. XVIII.

Die Brandröhre mag durch den Schwerpunct des Körpers gehen, oder nicht: ſo iſt doch ihre Lage im Innern des Körpers feſt. Weil nun die Richtung der Kraft P beſtändig in der Axe der Brandröhre lieget: ſo kann man ſich *im Innern des Körpers eine feſte Linie* vorſtellen, längs welcher die Kraft P beſtändig wirkt. Da aber der Körper, während der progreſſiven Bewegung, zugleich um ſeinen Schwerpunct pirouettirt, (dieſer Punct könnte offenbar auch jeder andere ſeyn; er erleichtert nur die Rechnung, und ändert im Wesentlichen nicht das geringste) so ist zwar *im Innern des Körpers jene Linie der Kraft P fest*, aber *ihre Lage im Raume ist von einem Augenblick zum andern veränderlich.*

Wenn man also auch annähme, der Schwerpunct des ganzen Körpers liege in der Axe der Brandröhre; ferner, wenn man hiebey zugleich den Widerstand *R* völlig bey Seite setzte: so würde man doch nur erst alsdann im Stande seyn, die Bewegung des Schwerpuncts völlig zu bestimmen, wenn man für jede Zeit *t*, *die Lage der Brandröhre im Raume* genau angeben könnte. Nimmt man aber auf den Widerstand *R* zugleich Rücksicht: so ist es alsdann nicht mehr hinreichend, für jede Zeit *t*, bloss die Lage der Brandröhre im Raume zu kennen; sondern man muss schlechterdings, für jede Zeit *t*, auch *die Lage eines jeden Elements der Oberfläche*, oder welches auf eins hinausläuft, *die Lage eines jeden Elements des Körpers im Raume*, genau wissen.

§. XIX.

In dem grossen Werke *Méchanique analytique* (Seite 357.) erwähnt der berühmte Verfasser folgenden Satz, ohne Beweis: *quel que puisse être le changement de situation du corps autour de son centre* (jeder beliebige Punct im Körper,) *on peut démontrer qu'il y aura toujours une ligne droite passant par son centre laquelle conservera la même situation.* Der Erfinder dieses schönen Satzes war Herr Leonhard Euler, der ihn in den *Nouis Actis Acad. Imper. Petropol.* vorgetragen und gehörig bewiesen hat. Für eine unendlich kleine Umdrehung war dieser Satz an sich klar, und auch schon vorher bekannt. Herr *Euler* hat ihn aber *für jede endliche Umdrehungsbewegung* erwiesen, und ihm dadurch ein vorzügliches Interesse und Reichhaltigkeit verschaft. Eben durch diesen Satz könnte man in den Stand gesetzt werden, der Forderung am Ende des vorigen §. Genüge zu leisten. Man könnte, wie Herr *Euler* gethan, diejenigen unbekannten Winkel, α, β, γ, nennen, welche die erwähnte Linie sowohl im anfänglichen Zustande, als auch in dem Zustande des Körpers am Ende der Zeit *t*, mit den drey unbeweglichen

Axen der Coordinaten macht. Wüſste man alſo nur noch den Umdrehungswinkel Φ' des Körpers um dieſe Linie, (Φ' iſt bloſs ein Reſultat, welches der geſammten *Umdrehungsbewegung* äquivalent iſt, ungeachtet dieſe Linie gar nicht die wahre Umdrehungsaxe iſt, und noch vielweniger es die ganze Zeit t hindurch *bleiben* konnte:) ſo wäre die Lage eines jeden Elements des Körpers im Raume völlig bekannt, vorausgeſetzt, daſs man Φ', α, β, γ finden könnte. Weil bekanntlich allemal $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$ iſt; ſo laſſen ſich die drey Winkel α, β, γ auf zwey zurückbringen, daſs man alſo nur drey Winkel zu ſuchen brauchte. Man mag aber gleich Anfangs, oder erſt am Ende der Rechnungen einen von den drey Winkeln wegſchaffen; ſo wird man doch bey dieſer Methode ſehr groſse Hinderniſſe antreffen, auf welche Herr Euler ſelbſt bey dem leichteſten und einfachſten Falle gerathen iſt, da er am Ende annahm, der Körper würde von *keinen Kräften* ſollicitirt.

§. XX.

Die ſchon oben (§. XV.) erwähnte Methode des Herrn d'Alembert ganz zu umfaſſen, muſs man nicht bloſs mit dem zweyten Memoire im erſten Theile ſeiner *Opuſcules mathématiques*, ſondern auch mit dem XXII. *Mémoire* im IV. Theile, und mit einem *Supplément* im V. Theile Seite 489. &c. gut bekannt ſeyn. Und da man gleich Anfangs im zweyten *Mémoire* §. I, No. 2, 3 und 5, auf Sätze kommen wird, deren Gründe man doch wiſſen muſs; ſo darf man auch das XXI. *Mémoire* nicht vorbeygehen. Zum leichtern Nachleſen der *Grundlehren* in den erſten acht §. §. des IIten *Mémoire*, wird vielleicht die hier beygefügte 4te Figur dienlicher ſeyn, als Herrn *d'Alemberts* 16. Figur.

Da vermuthlich die *Méchanique analytique* des Herrn *de la Grange* in mehreren Händen iſt, als Herrn *d'Alemberts Opuſcules:* ſo wird es verſtattet ſeyn, der Kürze wegen, auf jenes Buch zu weiſen, wo auf der 373. Seite die ſechs Gleichungen ſtehen, von denen jetzt die Rede ſeyn wird.

§. XXI.

Man stelle sich durch den Schwerpunct eine Ebene vor, zum Beyspiel eine horizontale, die, indem sie dem Schwerpunct folget, sich immer parallel bleibet. Da man die Bewegung des Schwerpuncts absonderlich betrachten muſs; so wird es in *dieser* Rücksicht verstattet seyn, diese Ebene unbeweglich anzunehmen. Der Kürze wegen nenne man sie die Ebene der ξ und η. Ferner stelle man sich eine zweyte Ebene vor, die durch den Schwerpunct gehet, nenne sie die Ebene der a und b; diese Ebene mache mit der unbeweglichen der ξ und η, am Ende der Zeit t, einen Winkel $= \omega$. Die Ebene der a und b sey nämlich beständig im Innern des Körpers fest, aber mit dem Körper zugleich um den Schwerpunct beweglich.

Dreyerley rechtwinklichte Coordinaten werden bey dem Problem erforderlich seyn. Die *ersten* x, y, z, beziehen sich auf die Bewegung des Schwerpuncts; ihre drey Axen, die sich im Anfange der Coordinaten x schneiden, sind unbeweglich. Die *zweyten* ξ, η, ζ, welche von dem Schwerpuncte an gerechnet werden, beziehen sich auf jedes Element des Körpers; ihre drey Axen sind unbeweglich und parallel mit den Axen der Coordinaten x, y, z. ξ und η liegen in der unbeweglichen Ebene, die vorhin die Ebene der ξ und η genannt worden ist; auf diese Ebene ist die Axe der ζ, (welche durch den Schwerpunct gehet,) senkrecht. Diese drey Coordinaten ξ, η, ζ bestimmen also die Lage eines jeden Elements des Körpers *im Raume*. Die *dritten*, a, b, c, rechtwinklichten, beziehen sich auch auf jedes Element des Körpers; ihre drey Axen aber, die einander im Schwerpunct schneiden, und wovon zwey in der Ebene der a und b liegen, die dritte auf dieser Ebene senkrecht ist, diese drey Axen sind nur *im Innern des Körpers fest*, und dagegen mit demselben um den Schwerpunct *beweglich*, daſs also diese drey Axen auch in Beziehung auf die Axen der Coordinaten ξ, η, ζ, beweglich sind. Wenn also die drey Coordinaten a, b, c, den Ort jedes individuellen Elements des Körpers bezeichnen; so geschiehet dieſs nur in Beziehung auf die gemeinschaftliche Lage der übrigen Elemente gegen einander, keines Weges aber in Beziehung auf den Raum; dieſs letztere leiſten eigentlich die Coordinaten ξ, η, ζ; und da beiderley Coordinaten vom Schwerpuncte an gerechnet werden, und ſich auf daſſelbe Element des Körpers beziehen, ſo ſieht man wohl, daſs $a^2 + b^2 + c^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ ſeyn muſs. Hieraus, und aus der Natur eines feſten Körpers (vermöge welcher die gemeinſchaftliche Lage aller Elemente deſſelben gegen einander unveränderlich ſeyn muſs,) iſt alſo klar, daſs a, b, c nur in Beziehung auf die verſchiedenen Elemente des Körpers veränderlich, und in Beziehung auf die *Zeit*, beſtändige Gröſsen ſeyn müſſen. Dagegen ſind ξ, η, ζ in beiderley Rückſicht veränderlich.

§. XXII.

Herr *de la Grange* hat auf der 351. Seite No. 12, (auch Seite 340. No. 4; Seite 348. u. ſ. w.) vor ihm aber ſchon Herr *Euler* in den *Nouis Actis Acad. Imp. Petropol.* (entweder *pro Anno* 1775, oder *pro Anno* 1776.) bewieſen, daſs die Coordinaten ξ, η, ζ, allemal von dieſer Geſtalt ſind:

$$\xi = a\xi' + b\xi'' + c\xi''',$$
$$\eta = a\eta' + b\eta'' + c\eta''',$$
$$\zeta = a\zeta' + b\zeta'' + c\zeta''',$$

und daſs hiebey folgende Bedingungen ſtatt finden müſſen (*de la Grange* Seite 352, No. 13. und *Euler* am angeführten Orte):

I) $\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 1$, IV) $\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' = 0$,
II) $\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2 = 1$, V) $\xi'\xi''' + \eta'\eta''' + \zeta'\zeta''' = 0$,
III) $\xi'''^2 + \eta'''^2 + \zeta'''^2 = 1$, VI) $\xi''\xi''' + \eta''\eta''' + \zeta''\zeta''' = 0$,
dazu kommt noch $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

§. XXIII.

Es ſey, wie im XXI. §., ω derjenige Winkel, welchen die Ebene der a und b, mit der unbeweglichen Ebene der ξ und η macht; ferner ſey ψ derjenige Winkel, welchen die Durchſchnittslinie dieſer beiden Ebenen mit der Axe der ξ macht; und ϕ ſey derjenige Winkel, den die

Axe der a mit der genannten Durchschnittslinie macht: oder, welches im Grunde einerley ist, man nenne die Axe der c überhaupt die *Axe des Körpers*, (sie braucht deswegen nicht gleich die *wahre Umdrehungsaxe* zu seyn, welche, wie man weiss, von einem Augenblick zum andern veränderlich seyn wird,) und es sey allgemein ϕ derjenige Winkel, den der Körper beschreiben würde, wenn er sich um diese Axe drehete; $90^\circ - \omega$ sey der Neigungswinkel dieser Axe gegen die unbewegliche Ebene der Coordinaten ξ und η; wenn man sich auf dieser Ebene die Projection jener Axe vorstellt, so sey endlich $\psi - 90^\circ$ derjenige Winkel, den diese Projection mit der Axe der ξ macht. So hat Herr *de la Grange* (Seite 368, No. 30.) auf eine ungewöhnlich leichte Art, bloss vermittelst der bekanntesten Transformationen der Coordinaten, bewiesen, dass in den Ausdrücken für ξ, η und ζ, im XXII. §., die Werthe für ξ', η', ζ', ξ'', η'', u. s. w. folgende seyn werden, (welche zugleich den erwähnten *sechs Bedingungen* §. XXII, vollkommen Genüge leisten):

$$\xi' = \cos\phi \cos\psi - \sin\phi \sin\psi \cos\omega,$$
$$\xi'' = -\sin\phi \cos\psi - \cos\phi \sin\psi \cos\omega,$$
$$\xi''' = \sin\psi \sin\omega,$$
$$\eta' = \cos\phi \sin\psi + \sin\phi \cos\psi \cos\omega,$$
$$\eta'' = -\sin\phi \sin\psi + \cos\phi \cos\psi \cos\omega,$$
$$\eta''' = -\cos\psi \sin\omega,$$
$$\zeta' = \sin\phi \sin\omega,$$
$$\zeta'' = \cos\phi \sin\omega,$$
$$\zeta''' = \cos\omega.$$

Diese Werthe müssen nothwendig von den *Eulerschen* a. a. O. abweichen, weil Herr *Euler*, ausser drey Winkeln, noch den Winkel ϕ', der schon oben im XIX. §. erwähnt worden ist, in seine Gleichungen hineingebracht hat. Aber *drey Winkel in Allem* sind für das ganze Problem vollkommen hinreichend. Uebrigens kann man im Vorbeygehen, hiebey noch zweyerley bemerken, 1) die drey Winkel ω, ψ und ϕ, sind diejenigen, wie man weiter unten sehen wird, die im XVII. §. gemeynt wurden, als es hiess: die Kraft R würde eine *Function von gewissen drey*

Winkeln seyn müssen. 2) Was Herr *d'Alembert* in dem *II. Mémoire, axe du corps* nennt, ist einerley mit der gegenwärtigen Axe der c; sein Winkel $\xi + P$ ist hier ϕ, sein Π ist hier $90° - \omega$, sein e ist hier $\psi - 90°$. Die Hauptidee ist im Grunde sowohl bey Herrn Euler, als auch bey Herrn *de la Grange* doch immer nur die glückliche des Herrn *d'Alembert*; nur findet sich deswegen ein sehr merklicher Unterschied in der weiteren Ausführung, weil Herr *d'Alembert* anstatt der gegenwärtigen drey Coordinaten a, b, c, zwey *rayons vecteurs*, die bey ihm durch $a - b$ und f vorgestellt sind, (wenn ich $a - b$ so nennen darf, der nur seiner Grösse nach, aber nicht seiner Lage nach im Innern des Körpers veränderlich ist,) und einen Winkel, den er ξ nennt, gewählt hat. Man s. II. *Mémoire* Seite 77. Es scheint, als ob Herrn *d'Alembert* Methode, vor den später bekannt gewordenen, in manchen Fällen ihre ursprünglichen Vorzüge behielte.

§. XXIV.

Aus dem XXIII. §. erhellet, dass die Coordinaten ξ, η, ζ des XXII. §., nur Functionen von den drey unbestimmten Grössen ϕ, ψ, ω, sind. Um diese Winkel zu bestimmen, werden also nur drey Gleichungen nöthig seyn. Wegen der Bewegung des Schwerpuncts aber, muss man noch für die drey Coordinaten x, y, z, drey andere Gleichungen haben. Zur völligen Bestimmung der Bewegung des Körpers, sind also nur sechs Gleichungen nöthig.

Wenn g den freyen Fall in der ersten Secunde bedeutet: so wird man sich erinnern, dass Herr *de la Grange* allemal $2g = 1$ setzet; und unter einer beschleunigenden Kraft (*force accélératrice*,) versteht er allemal diejenige Kraft, welche jeden Punct des Körpers sollicitirt. Man kann, zumal wenn von Attraction nicht die Rede ist, des Herrn *de la Grange* beschleunigende Kraft durch den *d'Alembertschen* oder *Eulerschen* Sprachgebrauch kurz so darstellen: was bey den beiden letzteren *bewegende* oder *sollicitirende Kraft* heisst, dividire man durch die Masse welche davon sollicitirt wird, und setze Herrn Eulers oder *d'Alem-*

berts Factor $2g$, $(2a)$, $= 1$; ſo erhält man die beſchleunigende Kraft des Herrn *de la Grange.* Dieſs vorausgeſetzt, ſey m die ganze Maſſe des Körpers; und nachdem man die ſollicitirenden Kräfte P, Q, R, durch m dividirt hat, zerfälle man jede (hievon weiter unten mehreres) in drey andere längs den Axen der Coordinaten x, y, z, oder welches einerley, längs den Axen der Coordinaten ξ, η, ζ: ſo erhält man aus $\frac{P}{m}$ dieſe drey X', Y', Z'; aus $\frac{R}{m}$ dieſe X'', Y'', Z''; und aus $\frac{Q}{m}$ nur dieſe $Z''' = 1$.

Für die Bewegung des Schwerpuncts hat man alſo dieſe drey Gleichungen, (*Méchanique analyt.* Seite 373:)

$$\text{I)}\quad \frac{ddx}{dt^2} + X' + X'' = 0,$$

$$\text{II)}\quad \frac{ddy}{dt^2} + Y' + Y'' = 0,$$

$$\text{III)}\quad \frac{ddz}{dt^2} + 1 + Z' + Z'' = 0;$$

§. XXV.

Für die Umdrehungsbewegung, oder zur Beſtimmung der Winkel ϕ, ψ, ω, hat man folgende drey Gleichungen, (Herr *de la Grange* Seite 373. und Herr *d' Alembert II. Mémoire, art. VIII.*) weil die Schwere keinen Einfluſs auf die Umdrehungsbewegung hat,

$$\text{I)}\quad S\left(\xi\frac{dd\eta}{dt^2} - \eta\frac{dd\xi}{dt^2}\right)dm = S[\eta(X' + X'') - \xi(Y' + Y'')]\,dm,$$

$$\text{II)}\quad S\left(\xi\frac{dd\zeta}{ddt^2} - \zeta\frac{dd\xi}{dt^2}\right)dm = S[\zeta(X' + X'') - \xi(Z' + Z'')]\,dm,$$

$$\text{III)}\quad S\left(\eta\frac{dd\zeta}{dt^2} - \zeta\frac{dd\eta}{dt^2}\right)dm = S[\zeta(Y' + Y'') - \eta(Z' + Z'')]\,dm,$$

wobey das Zeichen S eine Integration in Beziehung auf die ganze Maſſe des Körpers bedeutet.

§. XXVI.

Da vermöge des XXI. §., die Coordinaten a, b, c, in Beziehung auf die Zeit, beständige Grösen sind; so wird im XXII. §.:

1) $dd\xi = a\,dd\xi' + b\,dd\xi'' + c\,dd\xi'''$,
$dd\eta = a\,dd\eta' + b\,dd\eta'' + c\,dd\eta'''$,
$dd\zeta = a\,dd\zeta' + b\,dd\zeta'' + c\,dd\zeta'''$; Also

2) $\xi\,dd\eta = aa\xi'\,dd\eta' + bb\xi''\,dd\eta'' + cc\xi'''\,dd\eta''' + ab \times (\xi'\,dd\eta'' + \xi''\,dd\eta') + ac\,(\xi'\,dd\eta''' + \xi'''\,dd\eta') + bc \times (\xi''\,dd\eta''' + \xi'''\,dd\eta'')$;

3) Eben so findet man:
$\eta\,dd\xi = aa\eta'\,dd\xi' + bb\eta''\,dd\xi'' + cc\eta'''\,dd\xi''' + ab \times (\eta'\,dd\xi'' + \eta''\,dd\xi') + ac\,(\eta'''\,dd\xi' + \eta'\,dd\xi''') + bc \times (\eta''\,dd\xi''' + \eta'''\,dd\xi'')$;

4) Herr *Leonhard Euler* war der Erste, der in den *Mém. de l'Acad. Roy. des Sc. de Berlin,* auch in seiner *Theoria motus corporum rigidorum* bewiesen hat, daſs man die drey Axen der Coordinaten a, b, c, *allemal* so wählen kann, damit $S\,ab\,dm = o$, $S\,ac\,dm = o$, und $S\,bc\,dm = o$ werde. Da man also diese Integration bey den Gleichungen im XXV. §. schon voraussieht: so kann man bey den übrigen Differenzirungen, alle Glieder, welche einen von diesen drey Factoren enthalten würden, gleich Anfangs weglassen. Diesem gemäſs hat man:

5) $\xi\,dd\eta - \eta\,dd\xi = aa\,(\xi'\,dd\eta' - \eta'\,dd\xi') + bb\,(\xi''\,dd\eta'' - \eta''\,dd\xi'') + cc\,(\xi'''\,dd\eta''' - \eta'''\,dd\xi''')$;
$\xi\,dd\zeta - \zeta\,dd\xi = aa\,(\xi'\,dd\zeta' - \zeta'\,dd\xi') + bb\,(\xi''\,dd\zeta'' - \zeta''\,dd\xi'') + cc\,(\xi'''\,dd\zeta''' - \zeta'''\,dd\xi''')$;
$\eta\,dd\zeta - \zeta\,dd\eta = aa\,(\eta'\,dd\zeta' - \zeta'\,dd\eta') + bb\,(\eta''\,dd\zeta'' - \zeta''\,dd\eta'') + cc\,(\eta''\,dd\zeta''' - \zeta'''\,dd\eta'')$;

6) Setzet man nun, was Herr *Euler momenta inertiæ* zu nennen pflegte, $S\,aa\,dm = Am$, $S\,bb\,dm = Bm$, $S\,cc\,dm = Cm$; so verwandeln sich die ersten Glieder der drey Gleichungen des XXV. §. in folgende:

$$7)\ S\left(\xi\frac{dd\eta}{dt^2} - \eta\frac{dd\xi}{dt^2}\right) dm = Am\frac{\xi' dd\eta' - \eta' dd\xi'}{dt^2}$$
$$+ Bm\frac{\xi'' dd\eta'' - \eta'' dd\xi''}{dt^2} + Cm\frac{\xi''' dd\eta''' - \eta''' dd\xi'''}{dt^2};$$
$$S\left(\xi\frac{dd\zeta}{dt^2} - \zeta\frac{dd\xi}{dt^2}\right) dm = Am\frac{\xi' dd\zeta' - \zeta' dd\xi'}{dt^2}$$
$$+ Bm\frac{\xi'' dd\zeta'' - \zeta'' dd\xi''}{dt^2} + Cm\frac{\xi''' dd\zeta''' - \zeta''' dd\xi'''}{dt^2};$$
$$S\left(\eta\frac{dd\zeta}{dt^2} - \zeta\frac{dd\eta}{dt^2}\right) dm = Am\frac{\eta' dd\zeta' - \zeta' dd\eta'}{dt^2}$$
$$+ Bm\frac{\eta'' dd\zeta'' - \zeta'' dd\eta''}{dt^2} + Cm\frac{\eta''' dd\zeta''' - \zeta''' dd\eta'''}{dt^2};$$

oder, weil $\xi' dd\eta' - \eta' dd\xi' = d(\xi' d\eta' - \eta' d\xi',)$ u. f. w.; so verwandeln sie sich in die folgenden:

$$8)\ S\left(\xi\frac{dd\eta}{dt^2} - \eta\frac{dd\xi}{dt^2}\right) dm = Am\frac{d(\xi' d\eta' - \eta' d\xi')}{dt^2}$$
$$+ Bm\frac{d(\xi'' d\eta'' - \eta'' d\xi'')}{dt^2} + Cm\frac{d(\xi''' d\eta''' - \eta''' d\xi''')}{dt^2};$$
$$S\left(\xi\frac{dd\zeta}{dt^2} - \zeta\frac{dd\xi}{dt^2}\right) dm = Am\frac{d(\xi' d\zeta' - \zeta' d\xi')}{dt^2}$$
$$+ Bm\frac{d(\xi'' d\zeta'' - \zeta'' d\xi'')}{dt^2} + Cm\frac{d(\xi''' d\zeta''' - \zeta''' d\xi''')}{dt^2};$$
$$S\left(\eta\frac{dd\zeta}{dt^2} - \zeta\frac{dd\eta}{dt^2}\right) dm = Am\frac{d(\eta' d\zeta' - \zeta' d\eta')}{dt^2}$$
$$+ Bm\frac{d(\eta'' d\zeta'' - \zeta'' d\eta'')}{dt^2} + Cm\frac{d(\eta''' d\zeta''' - \zeta''' d\eta''')}{dt^2}.$$

§. XXVII.

Betreffend die andern Glieder im XXV. §., welche die sogenannten *Summen aller Momente der sollicitirenden Kräfte, in Beziehung auf die drey unbeweglichen Axen der Coordinaten*, enthalten, (*Opuscules, II. Mém. article VII.* und *Méchanique analyt.* Seite 204.) setze man in dieselben die Werthe von ξ, η, ζ, aus dem XXII. §. so erhält man bey der ersten Gleichung

$$1)\ S[\eta(X' + X'') - \xi(Y' + Y'')]\, dm = SX'(a\eta' + b\eta''$$
$$+ c\eta''')\, dm - SY'(a\xi' + b\xi'' + c\xi''')\, dm + SX''(a\eta'$$
$$+ b\eta'' + c\eta''')\, dm - SY''(a\xi' + b\xi'' + c\xi''')\, dm;$$

2) bey der zweyten Gleichung bekommt man,

$$S[\zeta(X' + X'') - \xi(Z' + Z'')]\,dm = SX'(a\zeta' + b\zeta'' + c\zeta''')\,dm - SZ'(a\xi' + b\xi'' + c\xi''')\,dm + SX''(a\zeta' + b\zeta'' + c\zeta''')\,dm - SZ''(a\xi' + b\xi'' + c\xi''')\,dm;$$

3) und bey der dritten Gleichung hat man,

$$S[\zeta(Y' + Y'') - \eta(Z' + Z'')]\,dm = SY'(a\zeta' + b\zeta'' + c\zeta''')\,dm - SZ'(a\eta' + b\eta'' + c\eta''')\,dm + SY''(a\zeta' + b\zeta'' + c\zeta''')\,dm - SZ''(a\eta' + b\eta'' + c\eta''')\,dm.$$

4) Vorläufig wird nun hiebey die folgende Bemerkung nicht überflüſsig ſeyn, zumal da ſie bisher in keinem Werke von der Mechanik, mit der gehörigen Deutlichkeit gemacht worden iſt. Wenn nämlich die Coordinaten von dem Schwerpuncte an gerechnet werden, wie hier a, b, c: ſo heiſst es gewöhnlich, jedes dieſer drey Integrale $S a\,dm$, $S b\,dm$, $S c\,dm$ wäre null. Dieſer Satz aber iſt nur alsdann wahr, wenn jedes der erwähnten drey Integrale entweder *keine ſollicitirende Kraft*, als Factor, enthält; oder aber, wenn die ſollicitirenden Kräfte, als Factoren, ſo beſchaffen ſind, daſs *ihre Reſultante beſtändig durch den Schwerpunct gehet.* Das erſte iſt der Fall, wenn Herr *de la Grange* auf der 378. Seite geradezu $S a\,dm = o$, $S b\,dm = o$, $S c\,dm = o$ ſetzet; denn, wie aus ſeinen drey Gliedern auf der 377. Seite am Anfange des 36. Artikels erhellet, dort enthält keines von dieſen drey Integralien eine ſollicitirende Kraft zum Factor. Hier aber, in No. 1, 2, 3, findet offenbar keiner von den beiden Fällen ſtatt, obgleich die Coordinaten von dem Schwerpuncte an gerechnet werden. Denn, fürs erſte, ſoll ja der Schwerpunct des Körpers nicht in der Axe des Zünders liegen; und fürs zweyte iſt, wegen der willkührlichen Geſtalt des Körpers, die mittlere Richtung des Widerſtandes der Luft, äuſserſt veränderlich; das heiſst: die Reſultante $\sqrt{(X'^2 + Y'^2 + Z'^2)}$ geht nicht durch den Schwerpunct, und dieſe $\sqrt{(X''^2 + Y''^2 + Z''^2)}$ noch weit weniger, wenn man bey der letzteren nur gewiſſe Augenblicke ausnimmt. Dieſes wohl gefaſst, wird man auf der Stelle einſehen 1)

daſs dieſe drey Gröſsen, $Sadm$, $Sbdm$, $Scdm$, in den Fällen, wenn ſie entweder X', oder Y', oder Z', zum Factor haben, *Conſtanten* ſeyn müſſen, weil die Richtung der Kraft des Zünders im Innern des Körpers unveränderlich iſt; und daſs dagegen 2) eben jene drey Gröſsen, wenn ſie entweder X'', oder Y'', oder Z'' zum Factor haben, *veränderlich*, das heiſst, *Functionen der Zeit* bleiben müſſen, weil die Direction der Reſultante des Widerſtandes ſich von einem Augenblick zum andern ändert. Wenn alſo f, g, h, beſtändige Gröſsen bedeuten; ſo wird für den erſten Fall, $Sadm = fm$, $Sbdm = gm$, $Scdm = hm$. Für den zweyten Fall aber muſs $Sadm = a'm$, $Sbdm = b'm$, $Scdm = c'm$ ſeyn, und hiebey a', b', c' ſich mit der Zeit ändern. Setzet man dieſe ſechs Werthe in No. 1, 2, 3, an *ihre* Stelle; ſo findet man, nachdem man die Glieder gehörig geordnet hat,

$$5)\quad S[\eta(X'+X'')-\xi(Y'+Y'')]\,dm = m[(fX'+a'X'')\eta' + (gX'+b'X'')\eta'' + (hX'+c'X'')\eta''' - (fY'+a'Y'')\xi' - (gY'+b'Y'')\xi'' - (hY'+c'Y'')\xi'''];$$

$$S[\zeta(X'+X'')-\xi(Z'+Z'')]\,dm = m[(fX'+a'X'')\zeta' + (gX'+b'X'')\zeta'' + (hX'+c'X'')\zeta''' - (fZ'+a'Z'')\xi' - (gZ'+b'Z'')\xi'' - (hZ'+c'Z'')\xi'''];$$

$$S[\zeta(Y'+Y'')-\eta(Z'+Z'')]\,dm = m[(fY'+a'Y'')\zeta' + (gY'+b'Y'')\zeta'' + (hY'+c'Y'')\zeta''' - (fZ'+a'Z'')\eta' - (gZ'+b'Z'')\eta'' - (hZ'+c'Z'')\eta'''].$$

§. XXVIII.

Wenn man §. XXVII. No. 5. mit §. XXVI. No. 8. verbindet, und den freyen Fall in der erſten Secunde, $= k$ ſetzet (weil g ſchon eine andere Bedeutung hat): ſo verwandeln ſich die drey Gleichungen des XXV. §. in folgende:

$$\text{I)}\quad A\frac{d(\xi' d\eta' - \eta' d\xi')}{dt^2} + B\frac{d(\xi'' d\eta'' - \eta'' d\xi'')}{dt^2} + C\frac{d(\xi''' d\eta''' - \eta''' d\xi''')}{dt^2}$$
$$= 2k[(fX'+a'X'')\eta' + (gX'+b'X'')\eta'' + (hX'+c'X'')\eta''' - (fY'+a'Y'')\xi' - (gY'+b'Y'')\xi'' - (hY'+c'Y'')\xi'''];$$

$$\text{II)}\quad A\frac{d(\xi' d\zeta' - \zeta' d\xi')}{dt^2} + B\frac{d(\xi'' d\zeta'' - \zeta'' d\xi'')}{dt^2} + C\frac{d(\xi''' d\zeta''' - \zeta''' d\xi''')}{dt^2}$$
$$= 2k[(fX' + a'X'')\zeta' + (gX' + b'X'')\zeta'' + (hX' + c'X'')\zeta'''$$
$$- (fZ' + a'Z'')\xi' - (gZ' + b'Z'')\xi'' - (hZ' + c'Z'')\xi'''];$$

$$\text{III)}\quad A\frac{d(\eta' d\zeta' - \zeta' d\eta')}{dt^2} + B\frac{d(\eta'' d\zeta'' - \zeta'' d\eta'')}{dt^2} + C\frac{d(\eta''' d\zeta''' - \zeta''' d\eta''')}{dt^2}$$
$$= 2k[(fY' + a'Y'')\zeta' + (gY' + b'Y'')\zeta'' + (hY' + c'Y'')\zeta'''$$
$$- (fZ' + a'Z'')\eta' - (gZ' + b'Z'')\eta'' - (hZ' + c'Z'')\eta'''];$$

§. XXIX.

Ehe man noch zu einer genaueren Unterſuchung der Quantitäten X'', Y'', Z'', ſchreitet, iſt es nöthig, alle ſechs Gleichungen, frey von den Kräften eines brennenden Satzes, beyſammen darzuſtellen; und dieſes auch zugleich aus dem Grunde, damit man nicht etwa auf den Gedanken verfalle, daſs durch Beymiſchung dieſer Kräfte, die Auflöſung des aufgeſtellten Problems *ſo* ſchwer werde. Dieſem gemäſs, ſetze man in den drey Gleichungen des XXIV. §. $X' = o$, $Y' = o$, $Z' = o$, und den freyen Fall in der erſten Secunde, $= k$; in den drey Gleichungen des XXVIII. §. aber, iſt es auch ſchon hinreichend, $f = o$, $g = o$, $h = o$, das heiſst, den Schwerpunct des Körpers in der Axe der Brandröhre anzunehmen; welches letztere vollkommen mit dem bekannten Satze übereinſtimmt, daſs alle Kräfte, deren Reſultanten durch den Schwerpunct des Körpers gehen, auf die Umdrehungsbewegung keinen Einfluſs haben. Die ſechs Gleichungen für das aufgeſtellte Problem ſind demnach dieſe:

$$\text{I)}\quad \frac{ddx}{dt^2} + 2kX'' = o,$$

$$\text{II)}\quad \frac{ddy}{dt^2} + 2kY'' = o,$$

$$\text{III)}\quad \frac{ddz}{dt^2} + 2k(1 + Z'') = o,$$

$$\text{IV)}\quad A\frac{d(\xi' d\eta' - \eta' d\xi')}{dt^2} + B\frac{d(\xi'' d\eta'' - \eta'' d\xi'')}{dt^2} + C\frac{d(\xi''' d\eta''' - \eta''' d\xi''')}{dt^2}$$
$$= 2k[(a'\eta' + b'\eta'' + c'\eta''')X'' - (a'\xi' + b'\xi'' + c'\xi''')Y''];$$

$$\text{V)}\quad A\frac{d(\xi' d\zeta' - \zeta' d\xi')}{dt^2} + B\frac{d(\xi'' d\zeta'' - \zeta'' d\xi'')}{dt^2} + C\frac{d(\xi''' d\zeta''' - \zeta''' d\xi''')}{dt^2}$$
$$= 2k[(a'\zeta' + b'\zeta'' + c'\zeta''')X'' - (a'\xi' + b'\xi'' + c'\xi''')Z''];$$
$$\text{VI)}\quad A\frac{d(\eta' d\zeta' - \zeta' d\eta')}{dt^2} + B\frac{d(\eta'' d\zeta'' - \zeta'' d\eta'')}{dt^2} + C\frac{d(\eta''' d\zeta''' - \zeta''' d\eta''')}{dt^2}$$
$$= 2k[(a'\zeta' + b'\zeta'' + c'\zeta''')Y'' - (a'\eta' + b'\eta'' + c'\eta''')Z''].$$

§. XXX.

Bey der Unterſuchung der Quantitäten X'', Y'', Z'', wird es verſtattet ſeyn, dasjenige, was im XVII. §. von der Kraft R geſagt worden iſt, als bekannt vorauszuſetzen. Ich fahre demnach fort.

1) Um ſowohl die *abſolute Gröſse der Reſultante* R, als auch *ihre Richtung* am Ende der Zeit t, zu finden, muſs zweyerley bekannt ſeyn. *Erſtlich* muſs man am Ende der Zeit t, die Lage eines jeden Elements der geſtoſsenen Vorderfläche im Raume, wiſſen. *Zweytens* muſs man die Richtung kennen, nach welcher jedes Element von der Luft geſtoſsen wird. Da nun dieſe letztere Richtung einerley mit der Richtung des Schwerpuncts des Körpers iſt (§. XIV.); ſo ſey s der Bogen, den der Schwerpunct in der Zeit t zurückgelegt hat, folglich ds das Element, welches er in dem nächſtfolgenden Zeittheilchen dt beſchreibet: und man ſieht ein, daſs die zweyte Forderung darin beſteht, denjenigen Winkel zu finden, den die Tangente von ds mit Einem beſtimmten Elemente der Vorderfläche macht. Hier heiſst es abſichtlich: mit *Einem* Elemente der Vorderfläche. Denn wenn man ſich auf das Element ds eine ſenkrechte Ebene vorſtellt, die man der Kürze wegen, H nennen kann; ſo wird entweder dieſe Ebene ſelbſt, oder eine mit ihr parallele in ſchicklicher Entfernung, allemal eine Gränze für die geſtoſsene Vorderfläche ſeyn. Weiſs man alſo den Winkel, welchen eine auf H ſenkrechte Linie nur mit *Einem* Elemente der Vorderfläche macht; und weiſs man zugleich die Lage eines jeden Elements der Vorderfläche im Raume: ſo weiſs man auch, vermittelſt der gegebenen Gleichung für die Oberfläche des Körpers, den Winkel, welchen jedes Element der Vorderfläche mit der auf H ſenkrechten Linie macht.

2) Was den ersten Punct betrift, nämlich die Kenntniſs (am Ende der Zeit t) der Lage eines jeden Elements der Vorderfläche im Raume: so kommt alles nur darauf an, die Lage der Ebene der Coordinaten a und b, und die Lage aller Theile dieser Ebene im Raume, am Ende der Zeit t, zu wissen. Die drey Coordinaten x, y, z, für den Schwerpunct des Körpers, geben zugleich schon einen Punct dieser Ebene; und die beiden Winkel ω und ψ im XXIII. §. bestimmen die Lage dieser Ebene im Raume. Das ist aber noch bey weitem nicht hinreichend. Denn man stelle sich nur zum Beyspiel, einen schiefen Kegel von höherer Ordnung vor, für dessen Oberfläche die Gleichung gegeben sey; die Lage seiner Grundfläche, in Beziehung auf Horizont und Mittagslinie, sey durch zwey Winkel ω' und ψ' bestimmt, und der Kegel sey dem Windstoſse ausgesetzt, dessen Richtung man kenne: so fällt es in die Augen, daſs dieſs zur Bestimmung der Stärke des Stoſses noch nicht zureicht. Denn wenn man sich eine auf der Grundfläche senkrechte Linie vorstellet: so kann sich ja Kegel und Grundfläche noch um diese Linie drehen, ohne daſs dabey die Grundfläche ihre Lage ändert; und doch finden nunmehr unzähliche Unterschiede, sowohl in der *Stärke des Stoſses*, als auch in der *Direction der Resultante* statt. Wäre aber noch überdieſs, z. B. derjenige Winkel bekannt, welchen eine bestimmte Linie in der Grundfläche, mit der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie der Grundfläche und des Horizonts, macht; so wäre alsdann der Stoſs völlig bestimmt.

Hieraus ist es klar, daſs man zu der obigen Bestimmung von der Lage der Ebene der Coordinaten a und b, auch noch den Winkel ϕ aus dem XXIII. §. zu Hülfe nehmen muſs. Am vortheilhaftesten aber wird es seyn, wie die Folge lehren wird, denjenigen Winkel zu Hülfe zu nehmen, welchen die Axe der Coordinaten a mit einer von den drey Axen der Coordinaten ξ, η, ζ, macht; weil man ohnehin bey den folgenden Betrachtungen, die Lage der beweglichen Axen der Coordinaten a, b, c, gegen die unbeweglichen Axen der Coordinaten ξ, η, ζ, (für das Ende der Zeit t) wissen *muſs*. Es sey z. B., in der 5. Figur, le der gemeinschaftliche Durchschnitt der Ebene der ξ und η, und der Ebene der

a und b; ln ſey die Axe der ξ, la die Axe der a, mithin der Winkel $nea = \omega$, $nle = \psi$, $ale = \phi$; ſo iſt der Coſinus des Winkels, welchen die Axe der a mit der Axe der ξ macht, oder

$$\operatorname{cof} aln = \operatorname{cof}\omega \operatorname{ſin}\psi \operatorname{ſin}\phi + \operatorname{cof}\phi \operatorname{cof}\psi.$$

3) Um denjenigen Winkel zu finden, den ein Element der vordern Oberfläche mit ds macht, ſuche man zuvor den Winkel, welchen ds mit der Ebene der Coordinaten a und b macht, oder, welches einerley iſt, man ſuche denjenigen Winkel, welchen ds mit der Axe der Coordinaten c macht. Denn da dieſe Axe auf der Ebene der a und b ſenkrecht iſt; ſo iſt offenbar der erſtere Winkel das Complement des andern. Es ſey alſo in der 6. Figur, jede Seite des ſphäriſchen Dreyecks $\zeta\,\xi\,\eta$, ein Quadrant; durch den Punct ξ gehe die Axe der Coordinaten ξ, durch η die Axe der η, durch ζ die Axe der ζ. Ferner ſey c derjenige Punct (begreiflich kann er auch auſserhalb des genannten ſphäriſchen Dreyeckes, wo man nur will, liegen,) durch welchen die Axe der Coordinaten c gehet; durch den Punct Q (auch dieſer kann liegen, wo man will) komme die Tangente des Elements ds zum Vorſchein. $c\xi$, $c\eta$, $c\zeta$ ſind die Neigungen der beweglichen Axe der Coordinaten c, gegen die drey unbeweglichen Axen der Coordinaten ξ, η, ζ; und es iſt, wie man weiſs,

$$\operatorname{cof} \xi c = \operatorname{ſin}\omega \operatorname{ſin}\psi, \quad \operatorname{cof} \eta c = -\operatorname{ſin}\omega \operatorname{cof}\psi, \quad \operatorname{cof} \zeta c = \operatorname{cof}\omega;$$

wie auch $\operatorname{cof} \xi\zeta c = \operatorname{ſin}\psi$, und $\operatorname{ſin} \xi\zeta c = -\operatorname{cof}\psi$.

Es iſt ferner bekannt, daſs die Coſinuſſe derjenigen Winkel, welche das Element ds mit den drey unbeweglichen Axen macht; allemal folgende ſind, $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$; daher iſt in der 6. Figur, $\operatorname{cof} \xi Q = \frac{dx}{ds}$, $\operatorname{cof} Q\eta = \frac{dy}{ds}$, $\operatorname{cof} Q\zeta = \frac{dz}{ds}$.

Weil alſo in dem Dreyecke $\xi\zeta Q$ alle drey Seiten bekannt ſind, und überdieſs $\xi\zeta = 90°$; ſo iſt $\operatorname{cof} \xi\zeta Q = \frac{\operatorname{cof} \xi Q}{\operatorname{ſin} \zeta Q} = \frac{dx}{ds} \times \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{dz^2}{ds^2}\right)}}$ $= \frac{dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$, und $\operatorname{ſin} \xi\zeta Q = \frac{dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$. Ferner iſt in dem Dreyecke $Q\zeta c$, ſowohl $Q\zeta$, $c\zeta$, als auch $Q\zeta c = \xi\zeta c - \xi\zeta Q$

aus dem Vorhergehenden bekannt; daher hat man $\cos Qc = \cos Q\zeta c \times \sin \zeta c.\ \sin Q\zeta + \cos \zeta c \times \cos Q\zeta = \cos(\xi\zeta c - \xi\zeta Q) \times \sin\omega.\ \sqrt{(1 - \frac{dz^2}{ds^2})} + \cos\omega.\frac{dz}{ds}$. Da aber bekanntlich $\cos(\xi\zeta c - \xi\zeta Q) = \cos\xi\zeta c \times \cos\xi\zeta Q + \sin\xi\zeta c \times \sin\xi\zeta Q = \sin\psi \frac{dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} - \cos\psi \frac{dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$; so hat man endlich den Cosinus desjenigen Winkels, welchen ds mit der Axe der Coordinaten c (oder mit der *Axe des Körpers*, §. XXIII.), am Ende der Zeit t macht, oder

4) $\cos Qc = \frac{\sin\omega \sin\psi . dx - \sin\omega \cos\psi . dy + \cos\omega . dz}{ds}$, anstatt dessen man in der Folge, der Kürze wegen, $\cos\lambda$ schreiben kann. Vermittelst der in No. 3. deutlich auseinander gesetzten Methode, wird es nicht schwer seyn, auch noch die beiden andern Winkel zu finden, welche ds mit den beiden Axen der Coordinaten a und b macht. Für jetzt setze man noch diese beiden Winkel bey Seite, und suche vielmehr die nöthige Uebersicht des Ganzen.

5) Wegen der Coordinaten a, b, c, wird die Gleichung für die Oberfläche des Körpers diese seyn $dc + pda + qdb = o$, wobey nach der bekannten Bezeichnung der *différences partielles*, $p = \frac{dc}{da}$ und $q = \frac{dc}{db}$ ist. Wenn F entweder die ganze Oberfläche, oder auch nur einen aliquoten Theil derselben bedeutet: so ist allemal, wie man weiss, $ddF = dadb \sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$, wobey $\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$ die Secante desjenigen Winkels ist, welchen die Ordinate c mit dem Elemente dF macht, folglich ist der Sinus dieses Winkels, $= \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{1 + p^2 + q^2}}$; der Kürze wegen, soll in der Folge dieser Winkel α heissen.

Nun sey in der 7 Figur, g der Schwerpunkt des Körpers, $a\ b$ stelle die Ebene der Coordinaten a und b vor, welche die Ebene des Papiers unter einem gewissen Winkel schneide; gf sey die Tangente des Elements ds, die eben nicht in der Ebene des Papiers liegen muss, folglich fgb der Winkel $90° - \lambda$ in No. 4; lr ſtelle eine auf gf ſenkrechte Ebene vor; ferner ſey nm ein beliebiges Element der Oberfläche, wo man nur will, völlig auſser der Ebene des Papiers, und wn die zugehörige Ordinate c; kn ſey eine in n berührende Ebene. Wenn nun tn ſenkrecht auf das Element nm ſeyn ſoll; ſo weiſs man, daſs tn allemal in der Ebene knw liegen, und daſs folglich $tnv = 90° - knw = 90° - \alpha$ ſeyn muſs. Man ziehe nh mit gf parallel; ſo wird deſswegen nh nicht gleich in der Ebene $wnktv$ liegen: aber ſo viel iſt klar, daſs $vnh = 90° - fgb = \lambda$ ſeyn muſs. Wüſste man alſo nur die Neigung β der beiden Ebenen tnv und vnh gegen einander; ſo würde man aus dieſem Winkel β, und aus den zwey bekannten Winkeln $tnv = 90° - \alpha$ und $vnh = \lambda$, ſehr leicht den Winkel tnh herleiten können, welchen ich der Kürze wegen, γ nennen will. Durch γ aber hätte man ja auf der Stelle den ſenkrechten Stoſs auf das Element mn, ſo daſs alles übrige bloſs auf Integrationen ankäme. Es wäre nämlich

6) $\cos\gamma = \cos\beta . \cos\alpha \sin\lambda + \sin\alpha \cos\lambda$,

wobey $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ durch No. 5, und $\cos\lambda$ ſammt $\sin\lambda$ durch No. 4. gegeben ſind. Wenn nun δ die Dichtigkeit der Luft, und u die Geſchwindigkeit des Schwerpunkts am Ende der Zeit t, iſt; ſo iſt offenbar der ſenkrechte Stoſs gegen das Element mn, aus dieſem Ausdrucke $\frac{\delta uu}{4k} \times ddF . \cos\gamma^2$ gefunden: und dagegen dieſer Ausdruck $\frac{\delta uu}{4k} \times ddF \times \sin\gamma^2$ hat *gar keinen* Einfluſs auf die Bewegung des Schwerpunkts, ja ſogar auf die Umdrehungsbewegung iſt ſein Effect innerhalb zwanzig Secunden nur unbedeutend. Denn da dieſer letzte Ausdruck einen *mit dem Element der Fläche parallelen Stoſs* anzeigt, ſo giebt er bloſs das *Reiben* der Lufttheilchen an dieſem Elemente an, das heiſst, er giebt gar keinen Stoſs, und das Reiben an ſich kann hier als unbedeutend bey Seite geſetzt werden.

7) Alſo wäre, vermöge No. 6 und 5, der ſenkrechte Stoſs auf das Element der Fläche, $= \frac{\delta uu}{4k} \times dadb \sqrt{(1 + p^2 + q^2)} \times (\cos\beta \times$

$$\cos\alpha \sin\lambda + \sin\alpha \sin\lambda)^2 = \frac{\delta uu}{4k} \times \frac{da\,db \times (\cos\beta \sin\lambda + \cos\lambda \sqrt{(p^2 + q^2)})^2}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}},$$

wobey cos λ sammt sin λ durch No. 4 gegeben ist. Wegen der auf gf senkrechten Ebene lr (7 Figur), ist der Winkel $bgr = \lambda$ gegeben (No. 4); aus demselben und aus den Eigenschaften der Gleichung für die Oberfläche, läſst sich der *Anfang* und das *Ende des Integrals*, folglich die Quantität R, und alsdann lassen sich diejenigen Winkel, welche die Direction der Resultante mit den Axen der Coordinaten a, b, c, macht, mithin auch diejenigen Winkel, welche sie mit den Axen der Coordinaten ξ, η, ζ, macht, herleiten; aber die Producte aus den Cosinussen dieser drey letzteren Winkel in $\frac{R}{m}$, sind eben die gesuchten Quantitäten X'', Y'', Z''. Eben die zuletzt erwähnten drey Winkel werden auch dienen, die drey Gröſsen a', b', c', im XXIX. §., (man s. §. XXVII, No. 4) zu bestimmen.

Noch ist hiebey zu bemerken, daſs das Integral R sich bloſs auf die *Oberfläche* bezieht, welche in diesem Augenblicke gestoſsen wird; daſs folglich eben deſswegen bey dieser Integration sowohl ω, ψ, u, als auch dx, dy, dz, ds, nothwendig Constanten bleiben.

8) Vor der Integration käme also noch alles auf die Bestimmung des Winkels β in No. 7 an. Hiebey müſsten nun einige sphärische Dreyecke aufs neue aufgelöst werden. Man weiſs nämlich aus der Theorie von krummen Oberflächen, daſs die Projection einer auf das Element der Oberfläche senkrechten Linie, in der Ebene der Coordinaten a und b, allemal mit der Axe der Coordinaten a einen Winkel macht, dessen Cosinus $= \frac{p}{\sqrt{(p^2 + q^2)}}$ ist, woraus der Cosinus desjenigen Winkels unmittelbar folget, den dieselbe Projection mit der Axe der Coordinaten b macht. Ferner sind auch diejenigen Winkel, welche die drey beweglichen Axen der Coordinaten a, b, c, mit den drey unbeweglichen Axen der Coordinaten ξ, η, ζ, machen, nicht schwer zu finden (man s. No. 2, am Ende). Aus diesen Datis kann man, nach der in No. 3 deutlich gewiesenen Methode, allemal cos β finden. Es wird nun dieser Cosinus eine Function nicht bloſs von ψ und ω, sondern auch

von ϕ, ferner wird er eine Function von dx, dy, dz, seyn. Wenn man aber einen Blick auf den senkrechten Stoſs in No. 7, wirft, und sich dabey aus No. 4 erinnert, was $\cos\lambda$ und $\sin\lambda$ sey: so kann man es sich leicht vorstellen, wie artig das Product $\cos\beta\ \sin\lambda$ aussehen werde. Bey dieser ersten Integration nun, die sich bloſs auf die gestoſsene Oberfläche beziehet, vermehrt freylich weder der Factor $\cos\lambda$, noch das Product $\cos\beta\ \sin\lambda$ an sich so überaus sehr die Schwierigkeiten des Integrirens, weil dabey nicht bloſs ω, ψ, ϕ, u, sondern auch dx, dy, dz, ds, Constanten bleiben. Dagegen aber zeigen sich alsdann erst die unüberwindlichen Schwierigkeiten, wenn man die so gefundenen Quantitäten X'', Y'', Z'', in die sechs Gleichungen des XXIX. §. setzet: denn diese Quantitäten sind Functionen der Sinusse und Cosinusse der Winkel ϕ, ψ, ω, und ihrer Producte; ferner sind sie Functionen von dx, dy, dz, *und ihrer Producte,* wegen $\cos\beta\ \sin\lambda$; zu geschweigen, daſs zuvor auch noch das Radicale $\sin\lambda = \sqrt{(1 - \cos\lambda^2)}$ weggeschaft werden müſste; endlich sind jene Quantitäten auch Functionen solcher Producte, deren beide Factoren selbst die eben erwähnten Producte sind.

9) Sollte jemand den Vorwurf machen, daſs diese Functionen nur deswegen so abschreckend ausgefallen wären, weil man eben nicht die beste Methode gewählt hätte: so wird er wohl keine Antwort hierauf erwarten. Denn auch nur *wollen* darauf antworten, würde schon einen lächerlichen Eigendünkel verrathen, zumal bey mir, den es so wenig ziemen würde, sich der jetzt allgemein beliebten Ausdrücke: *dieſs oder jenes übersteige menschliche Kräfte,* oder *die Kräfte der Analysis* u. s. w., zu bedienen, da ich *meine,* — also nicht die Unzulänglichkeit dieser oder jener *Wissenschaft,* nicht die mangelhaften Kenntnisse der *Menschen,* — sondern *meine Unwissenheit* bey jeder Gelegenheit sehr lebhaft fühle. Eben dieses spornt aber auch stets meine Begierde zu lernen; so daſs ich auch bey Gelegenheit des erwähnten Vorwurfs, wo sicherlich was zu lernen seyn wird, mich schon zum voraus von ganzem Herzen auf die *bessere Methode* freue, die gewiſs nicht in solchen analytischen Ausdrücken für die Quantitäten X'', Y'', Z'', bestehen wird, daſs man von

ihnen ſagen könnte: ſie verhielten ſich zu dem *Quæſitum* des Problems, wie *Poſtichen* zu der ſchönen Realität. Bis nun dieſe vollkommenere, oder gar vollkommenſte Methode erſcheinen wird, wird es verſtattet ſeyn anzunehmen, was ſchon im XV. §. erinnert worden iſt, daſs die Auflöſung des Problems für einen nicht ſehr von der Kugelgeſtalt abweichenden Körper, faſt eben ſo ſchwer bleibt, als für einen Körper von jeder beliebigen Geſtalt; und bis dahin muſs nun auch leider die Berechnung derjenigen Quantität der Abweichung von der verticalen Richtungsebene, die in jedem einzelen Falle nach Beſchaffenheit der *Geſtalt* des Körpers ſtatt findet, hinausgeſetzt werden.

Ich bin Anfangs ſogar ſchon auf den Gedanken verfallen, dieſes Problem *als ein Problem von ſehr kleinen Oscillationen* zu behandeln, und die Methode nach und nach bis auf jede endliche Umdrehungsbewegung hinauf zu treiben. Ich habe aber bald die Hofnung aufgeben müſſen, weil die Umdrehungsbewegung des geworfenen Körpers, für jene Methode, viel zu groſs und zu ſchnell iſt; ſo daſs man es ſich dadurch eben nicht erleichtern würde.

10) Zum Glücke für die Artillerie! iſt die Berechnung jener Quantität der Abweichung von der verticalen Richtungsebene, die in jedem einzelen Falle, nach Beſchaffenheit der *Geſtalt* des Körpers, ſtatt findet, — für ſie ohne den mindeſten Nutzen. Denn die Artillerie wird ſich bekanntlich *nie* anderer Körper, als der kugelförmigen bedienen; und wenn ſich ja Körper, welche von dieſer Geſtalt abweichen, in ihre Kugel- oder Grenadenhaufen mit einſchlichen, ſo müſste doch offenbar dieſe letztere Abweichung nicht ſehr in die Sinne fallen. Und da, mit einem Worte, doch noch alle vollſtändigen Integrale, von dem anfänglichen Zuſtande des Körpers in der Seele abhängen *müſsten;* da überdieſs der Artilleriſt unmöglich wiſſen kann, *wie* die angeblich falſche Kugel, vor dem Abfeuern, in der Seele liegt, [denn die Abweichung von der Kugelgeſtalt fiel ja nicht in die Sinne]: ſo würden Tabellen, worin jene Quantitäten auch aufs ſchärfſte berechnet wären, für die Ausübung nichts mehr ſeyn, als was die *Mayerſchen* Mondstafeln für das balliſtiſche Problem ſind.

11) Bey dem jetzigen vortrefflichen Zustande der Artillerie, können, unter allen ersinnlichen Vorschlägen zur Verminderung der Abweichung der Grenaden und Bomben von der verticalen Richtungsebene, schwerlich andere, als diese beiden, von reellem Nutzen seyn.

Erstlich, jede Art des Brandröhrensatzes in *derjenigen Absicht* genau zu prüfen, von welcher oben gehandelt worden ist; und eben in derselben Absicht auch alle Brandröhrensätze so viel möglich zu schwächen, oder überhaupt eine solche Materie zur Füllung des Zünders zu wählen, welche, indem sie brennt, gar keine beschleunigende Kraft erzeugt. In der That, für den Herrn Director *Achard*, eine Kleinigkeit!

Zweytens, den Brandröhrenkopf nicht so, wie bisher, hervorragen zu lassen. Denn (1^{mo}) oft rührt gewiss die Abweichung der Haubitzgrenade von der verticalen Richtungsebene, grösstentheils von einem *Stoss* des Brandröhrenkopfs an die rechte oder linke Seite der Seele; zumal da Grenaden und Bomben keine Spiegel, und noch weniger solche haben, wodurch die Umdrehungsbewegung *in der Seele* verhindert werden könnte. An sich hat freylich die Rotation einer Kugel keinen Einfluss auf jene Abweichung; nur der hervorragende Brandröhrenkopf ist es, welcher macht, dass die Rotation schon in der Seele nachtheilig werden muss. Dass hier der Stoss des Kopfes an die Seele, nicht aus der Luft gegriffen wird, ist daraus klar, dass sich der Kopf, wie die Erfahrung lehret, zuweilen *wirklich abstösst*, und die Grenade nachher nicht zerspringt. Bey dieser Gelegenheit wird auch eine Bemerkung über die Kanonkugeln nicht unnütz seyn. Sie werden mit einem starken eisernen Draht, der sich vorne *kreuzt*, oder mit einem Blechkreuze an den Spiegel befestiget. Das kann wohl schwerlich das dienlichste Mittel seyn. Denn so viel ist klar, dass alles, was einen *Stoss* (im eigentlichen Sinne des Wortes) in der Seele verursachen kann, mithin alles was dem Gesetze der Stetigkeit zuwider ist, sorgfältig vermieden werden muss. Wenn aber der Draht oder das Blechkreuz noch innerhalb der Seele etwas los wird, oder eine unrechte Lage bekommt: was alsdann gleich erfolgen müsse, sieht jeder ein. Wer steht aber dafür, dass die

Ablöſung des Bandes allemal nur in freyer Luft beginnet? Könnte man nicht die Kugel mit grober Leinwand an den Spiegel eben ſo befeſtigen, wie man den Spiegel mit der Cartuſche zu verbinden pflegt?

(2^do^) Selbſt die Betrachtung des Widerſtandes der Luft muſs unmittelbar davon abrathen, den Brandröhrenkopf merklich hervorragen zu laſſen. Warum wollte man mit Fleiſs von der Kugelgeſtalt abweichen, wenn man ſie eben ſo leicht behalten kann? Muſs denn der Napf ſo unbeholfen, die Zündſchnüre ſo dick und lang ſeyn? Könnte man nicht ſchon beym Guſs der Bombe, noch eine concentriſche Vertiefung um die Oefnung zu Stande bringen, daſs nachher von einem ſchicklichen Napfe nichts daraus hervorragte? Hiedurch würde man ja eben dasjenige, was man öfters beſorget, nämlich das *Abſtoſsen des Kopfes*, auf die leichteſte und *ſicherſte* Art vermeiden. Wie wird man aber alsdann die Anfeuerung in dem nicht hervorragenden Napfe, durch einen Verband, vor Zufällen verwahren können, da man jetzt den hervorragenden Kopf mit Papier umwickelt und zubindet? Die Antwort iſt ſehr leicht. Man ſchneide Stücke von Papier, oder, welches noch beſſer wäre, von einem Stoffe, der nicht leicht die Näſſe durchläſst, ſchneide man runde Stücke, die etwas gröſser ſind, als der Napf; hieran nähe oder leime man ein Band gehörig an, deſſen Ende, oder auch zwey Ende, von 3 bis 4 Zoll ſeyn können; beſtreiche mit Leim nur den zunächſt an den Napf angränzenden Theil der Oberfläche der Bombe, und lege darauf jenes runde Stück. Beym wirklichen Gebrauch der Grenade oder Bombe kann man, vermittelſt des erwähnten Bändchens, jenes runde Stück wenigſtens eben ſo ſchnell abreiſsen, als man jetzt das Papier von dem hervorragenden Kopfe los macht.

§. XXXI.

Dem Verſprechen des XVI. §. gemäſs, muſs noch die Wirkung der Kraft eines Brandröhrenſatzes auf die Bahn der Bomben und Haubitzgrenaden insbeſondere gewieſen werden. Unſtreitig wird man hiebey zuförderſt die *Wirkung dieſer Kraft allein, bey der Umdrehungsbewegung,*

wiſſen

wiſſen wollen, ohne Rückſicht auf andere Kräfte, von denen der Körper ſollicitirt oder verzögert wird. Z. B. gibt es wohl Fälle, und welche wären ſie, in denen die Wirkung jener Kraft durch die Umdrehungsbewegung gänzlich aufgehoben würde? u. d. gl.

Bey dieſer ganzen Unterſuchung kann man, nach dem Beyſpiele jeder aufgeklärten Artillerie, die Kugelgeſtalt, wie auch den Schwerpunct im Mittelpuncte des ganzen Volumens und zugleich in der Axe der Brandröhre vorausſetzen. Unter dieſen Umſtänden iſt die Quantität R nicht mehr wegen der Geſtalt des Körpers, ſondern bloſs wegen der Geſchwindigkeit des Schwerpuncts veränderlich, und die Direction dieſer Reſultante geht nicht nur beſtändig durch den Schwerpunct, ſondern ſie iſt auch in jedem Augenblick mit der Richtung des Schwerpuncts parallel (§. XIV.). Was R unter dieſen Umſtänden ſeyn muſs, weiſs jeder; und eben ſo iſt es bekannt, wenn s den in der Zeit t von dem Schwerpuncte beſchriebenen Bogen bedeutet, daſs alsdann in den drey Gleichungen des XXIV. §., die Quantitäten $X'' = \frac{R}{m} \cdot \frac{dx}{ds}$, $Y'' = \frac{R}{m} \cdot \frac{dy}{ds}$, $Z'' = \frac{R}{m} \cdot \frac{dz}{ds}$ ſeyn müſſen. Was werden nun aber die Quantitäten X', Y', Z' ſeyn? Es ſey die Axe des Zünders zugleich die Axe der Coordinaten c, oder wie ſie im XXIII. §. hieſs, die *Axe des Körpers*, keineswegs aber deswegen gleich die wahre Umdrehungsaxe. Weil nun die Kraft P des Brandröhrenſatzes beſtändig längs der Axe der Coordinaten c wirken wird, und weil dieſe Axe um den Schwerpunct gar vielerley Umdrehungsbewegungen haben kann: ſo käme es fürs erſte nur darauf an, die Poſition dieſer Axe des Körpers in dem Raume am Ende der Zeit t zu wiſſen; alsdann lieſse ſich die Wirkung der Kraft P längs den Axen der Coordinaten ξ, η, ζ, das heiſst, längs den Axen der Coordinaten x, y, z, leicht beſtimmen. Man weiſs aber ſchon aus dem XXX §. No. 3, daſs am Ende der Zeit t, die Axe der Coordinaten c mit den Axen der Coordinaten ξ, η, ζ, ſolche Winkel macht, deren Coſinuſſe dieſe ſind, $\sin\omega \sin\psi$, $-\sin\omega \cos\psi$, und $\cos\omega$.

Daher iſt $X' = \frac{p}{m} . \sin\omega \sin\psi$, $Y' = \frac{p}{m} \times - \sin\omega \cos\psi$, $Z' = \frac{p}{m} \cos\omega$. Man ſiehet aber ſogleich, daſs dieſer Schritt noch ſehr unbedeutend iſt, weil man weder ψ noch ω kennt. An Eliminationen iſt darum fürs erſte nicht zu denken, weil man im XXIV. §. nur drey Gleichungen, und doch, auſser t, noch fünferley unbekannte Gröſsen hat. Zweytens würde auch nach der Elimination, die einzige übrige Gleichung Quadrate von Differenzialien der zweyten Ordnung enthalten, wegen derjenigen Wurzelzeichen, welche durch die Verwandlung der Sinuſſe in Coſinuſſe, eingeführt würden. Daher müſste man noch zu den drey Gleichungen des XXVIII. §. Zuflucht nehmen. Wegen der jetzigen Geſtalt des Körpers, wäre dort $A = B = C$, ferner $a' = 0$, $b' = 0$, $c' = 0$, auch $f = 0$, $g = 0$, $h = 0$. Alſo würden überhaupt die Glieder, welche den Factor $2k$ enthalten, verſchwinden; und die erſte Integration gäbe auf der Stelle, wenn F, G, H, drey Conſtanten bedeuten,

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \xi' d\eta' - \eta' d\xi' + \xi'' d\eta'' - \eta'' d\xi'' + \xi''' d\eta''' - \eta''' d\xi''' = F dt, \\ 2)\ \xi' d\zeta' - \zeta' d\xi' + \xi'' d\zeta'' - \zeta'' d\xi'' + \xi''' d\zeta''' - \zeta''' d\xi''' = G dt, \\ 3)\ \eta' d\zeta - \zeta' d\eta' + \eta'' d\zeta'' - \zeta'' d\eta'' + \eta''' d\zeta''' - \zeta''' d\eta''' = H dt; \end{array}\right\} (K).$$

Bey dieſen drey Gleichungen könnte man zuvor noch die neuen Bedingungen zu Rathe ziehen, welche bey Herrn *de la Grange* auf der 354 Seite (5te Zeile) ſtehen, $\xi'\eta' + \xi''\eta'' + \xi'''\eta''' = 0$; $\xi'\zeta' + \xi''\zeta'' + \xi'''\zeta''' = 0$; $\eta'\zeta' + \eta''\zeta'' + \eta'''\zeta''' = 0$, und welche eine unmittelbare Folge der ſechs Bedingungen des obigen XXII. §. ſind. Differenzirt man die eben erwähnten drey Gleichungen, ſo verwandeln ſich dadurch die drey Gleichungen (K) in die folgenden:

$$\begin{array}{l} 1)\ F dt = -2(\eta' d\xi' + \eta'' d\xi'' + \eta''' d\xi'''), \\ 2)\ G dt = -2(\zeta' d\xi' + \zeta'' d\xi'' + \zeta''' d\xi'''), \\ 3)\ H dt = -2(\zeta' d\eta' + \zeta'' d\eta'' + \zeta''' d\eta'''). \end{array}$$

Nun müſste man ſich an die Werthe für ξ', ξ'', ξ''', η', η'' u. ſ. w., in dem XXIII. §., wenden. Dieſer Weg aber, die Werthe von ω und ψ

zu bestimmen, bliebe doch noch immer sehr mühsam; zu geschweigen, dass er zu einer vollständigen und völlig einleuchtenden Bestimmung aller Constanten, ein ziemlich umständliches Raisonnement erfordern würde.

Die elegante Methode, vermittelst welcher Herr *de la Grange* die beiden Hauptgleichungen für die Umdrehungsbewegung eines *freyen* Körpers, der von keinen Kräften sollicitirt wird (denn die Schwere hat bekanntlich hierauf keinen Einfluss), am Ende der 412 Seite gefunden hat, ist allerdings der Form nach, von der bisherigen sehr unterschieden; die Hauptgründe aber, worauf beide gebaut sind, sind dieselben. Daher könnte man unmittelbar aus den eben erwähnten zwey Gleichungen des Herrn *de la Grange* ψ und ω, als Functionen von t, suchen. Seine Werthe von A, C, B findet man auf der 379 Seite am Ende von No. 36, und man wird leicht bemerken, dass für die Kugel, seine Producte $B(C - A)$ und $A(B - C)$ verschwinden, und dass die genannten Gleichungen sich in die beiden folgenden verwandeln:

$$n\,dt - A\,d\psi = \frac{A\,d\omega}{\sin\omega}\sqrt{-1},$$

$$\text{und } n\,dt - A\,d\psi = -\frac{A\,d\omega}{\sin\omega}\sqrt{-1}.$$

Nimmt man ihre Summe und Differenz; so erhält man diese beiden Gleichungen: $A\,d\psi = n\,dt$, und $\frac{A\,d\omega}{\sin\omega}\sqrt{-1} = 0$; oder $d\psi = N\,dt$, und $\frac{d\omega}{\sin\omega} = 0$; woraus $\psi = Nt$, und $\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}\omega = \text{Constans}$ folget. Sollte aber, was doch unmittelbar aus den beiden Gleichungen folget, $\omega = \text{Constans}$ seyn; so würde dieses eine solche wahre Umdrehungsaxe voraussetzen, welche beständig mit der Axe der Coordinaten ζ parallel bliebe; das heisst, wenn die letzte Axe vertical wäre, so würde die Auflösung unsers Problems auf die einseitige Voraussetzung gebauet werden müssen: *Dass die wahre Umdrehungsaxe der Bombe, nie eine andere, als eine verticale seyn kann.* Aus diesem Grunde ist es nicht verstattet, unserm Probleme unmittelbar, vermittelst der beiden letzten Gleichungen, zu Hülfe zu kommen. Wollte man ſich aber auch der *d'Alembertſchen* Gleichungen aus dem vierten Theile ſeiner *Opuſcules*, Seite 37, No. 15. &c., zu dieſer Abſicht bedienen: ſo würde doch noch die für unſer Problem erforderliche Beſtimmung der Conſtanten am Ende der Integration, ein ſo umſtändliches Raiſonnement erfordern, daſs dieſes allein zureichen würde, jenes Problem directe und auf die einleuchtendſte Art aufzulöſen; welches nunmehr folgen ſoll. Ich überreiche dieſen *Verſuch* aus doppeltem Grunde: *erſtlich*, weil er unmittelbar mit der Aufgabe der Königl. Akademie der Wiſſenſchaften, in der genaueſten Verbindung ſtehet; *zweytens*, weil er für die Mechanik zwar nur ein *ſehr kleiner*, aber doch *neuer Zuſatz* zu ſeyn *ſcheint*. Man weiſs, daſs nächſt Herrn *d'Alembert*, Niemand mit einem ſo weit umfaſſenden Geiſte die Auflöſung aller erſinnlichen Probleme der Mechanik auf einen Punct zurück gebracht hat, als der Mann, welchen unſer Jahrhundert, in ſo vielen Rückſichten, als eine ſeiner vorzüglichſten Zierden aufſtellen wird. In dem unermeſslichen Reichthum ſeiner *Méchanique analytique* iſt zuverläſsig auch die Auflöſung dieſer Aufgabe enthalten, und die Schuld liegt gewiſs bloſs an mir, daſs ich ſie nicht darin finden kann. Jede Belehrung hierin wird mir von ganzem Herzen willkommen ſeyn. Herr *de la Grange* betrachtet, wie man weiſs, alle ſollicitirenden Kräfte, als ſolche, die nach beſtimmten Puncten hinſtreben, und dieſe Puncte (*centres des forces*) entweder als unbewegliche, oder als bewegliche. Unſtreitig läſst ſich die Kraft eines brennenden Satzes als eine ſolche betrachten, die den Schwerpunct der Bombe in der Richtung der Axe des Zünders nach einem gewiſſen Puncte (*centre des forces*) hin ſollicitirt. Daſs jenes Centrum der Kraft um den Schwerpunct des Körpers beweglich ſey, iſt auch klar, wie auch dieſes, daſs, wenn man die unveränderliche Kraft P, als eine *Function der Diſtanz* des Mittelpuncts der Kraft von dem Schwerpuncte, betrachtet, dieſe Diſtanz, ſie mag übrigens ſeyn welche man will, unveränderlich bleiben müſſe. Könnte man alſo nur die Bahn des um den Schwerpunct pirouettirenden Mittelpuncts der Kraft, bey unſerm Problem beſtimmen; ſo wäre allerdings die Bahn des Schwerpuncts selbst bekannt. Allein eben dieser Umstand, dass die Bahn des Schwerpuncts in allen ihren Krümmungen beständig parallel mit den gleichnahmigen Theilen der Bahn des Mittelpuncts der Kraft bleiben muss, macht, dass man durch die Betrachtung der Bahn des letzteren Punctes, nicht den geringsten Vortheil gewinnt. Man nenne den Kopf der Brandröhre den Nordpol der Bombe; da man bey dieser unveränderlichen Kraft [wäre sie veränderlich, so wäre auch das Problem noch weit schwerer], das Centrum derselben in jeder Distanz von dem Schwerpunct annehmen kann; so nehme man es, nur zum Beyspiel, an dem Südpole der Kugel an: und man wird sogleich fühlen, dass schlechterdings eben dieselben Schwierigkeiten bleiben, man mag die Bahn des Südpols oder des Schwerpuncts suchen.

Ich habe ungefähr den Weg in *Méchanique analytique* Seite 280 &c. No. 25, eingeschlagen, indem ich dort die Kraft $Q = 0$ setzte, nur die dortige Kraft R behielt; und ich hoffte das nöthige Licht über die Bewegung dieses Mittelpuncts der Kraft dadurch zu bekommen, dass ich die drey Glieder auf der 282 Seite, zu den drey Gleichungen am Ende der 262sten und am Anfang der 263sten Seite, gehörig addirte. Bald fühlte ich aber die Wahrheit davon, was Herr *de la Grange* auf der 282sten Seite sagt: *dans tous les autres cas ces termes rendront les Équations du mouvement du corps plus compliquées & plus difficiles à intégrer.* Ich sah mich also genöthigt den folgenden Weg zu wählen.

§. XXXII.

Das Problem ist also zuvörderst dieses: die Bahn des Schwerpuncts einer freyen Kugel zu bestimmen, wenn dieser bloss von der Kraft eines brennenden Satzes, nach einer *im Innern des Körpers unveränderlichen* Richtung, sollicitirt wird, und wenn die Kugel Anfangs nur die Umdrehungsbewegung um einen willkührlichen Durchmesser, der Schwerpunct aber keine Geschwindigkeit bekommen hat.

1) Aus dem XXIV. §. hat man, vermöge desjenigen, was am Anfang des XXXI. §. gesagt worden ist, folgende drey Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{ddx}{dt^2} + \frac{2kP}{m} \sin\omega \sin\psi = 0; \\ \frac{ddy}{dt^2} - \frac{2kP}{m} \sin\omega \cos\psi = 0; \\ \frac{ddz}{dt^2} + \frac{2kP}{m} \cos\omega = 0; \end{array}\right\} (A)$$

Es wird vielleicht den Lesern der *Méchanique analytique* nicht unangenehm seyn, wenn ich im Vorbeygehn anmerke, dass ich auch eben auf diese Gleichungen gekommen bin, als ich bey dem zu Ende des XXXI §. erwähnten Verfahren so schloss: da die Distanz des Mittelpuncts der Kraft von dem Schwerpuncte, oder r, so ganz willkührlich, und doch zugleich auch, wegen der unveränderlichen Kraft P, eine Constante ist; so kann man ja wohl $r = 0$, das heisst, den Mittelpunct der Kraft in den Schwerpunct selbst setzen. Dadurch fallen nun alle Glieder der drey Gleichungen am Ende der 262sten Seite, welche r und ddr enthalten, von selbst weg; und die zu addirenden Glieder auf der 282sten Seite, liefern unmittelbar die Gleichungen für die Bewegung des Schwerpuncts selbst, welche also, nachdem man die erste und zweyte mit r dividirt hat, folgende sind:

$$-\frac{ddX}{dt^2}\sin\psi\cos\phi - \frac{ddY}{dt^2}\sin\psi\sin\phi + \frac{ddZ}{dt^2}\cos\psi = 0; \quad (L)$$

$$-\frac{ddX}{dt^2}\sin\phi + \frac{ddY}{dt^2}\cos\phi = 0; \quad (M)$$

$$\frac{ddX}{dt^2}\cos\psi\cos\phi + \frac{ddY}{dt^2}\cos\psi\sin\phi + \frac{ddZ}{dt^2}\sin\psi + R = 0; \quad (N)$$

Multiplicirt man (L) mit $\cos\psi$, und (N) mit $\sin\psi$, so ist die Summe von beiden

$$\frac{ddZ}{dt^2} + R\sin\psi = 0, \quad (T).$$

Wenn man (L) mit $\sin\phi$, und (M) mit $\cos\phi \sin\psi$ multiplicirt, so ist beider Differenz

$$\frac{ddY}{dt^2} \sin\psi - \frac{ddZ}{dt^2} \cos\psi \sin\phi = 0, \quad (U).$$

Wenn man (T) mit $\cos\psi \sin\phi$ multiplicirt und zu (U) addirt, ſo erhält man

$$\frac{ddY}{dt^2} + R \cos\psi \sin\phi = 0, \quad (V).$$

Wenn man endlich (V) mit $\cos\phi$ multiplicirt und (M) davon abzieht, ſo bekommt man

$$\frac{ddX}{dt^2} + R \cos\psi \cos\phi = 0, \quad (W).$$

Die drey Gleichungen (T), (V) und (W) ſind nun vollkommen einerley mit denen in (A), wenn man ſich nur erinnert, daſs bey Herrn *de la Grange* X, Y, Z, hier x, y, z; ſein ψ, hier $90° - \omega$; ſein ϕ, hier $\psi - 90°$; ſein R (Seite 263, 1ſte Zeile), hier $\frac{p}{m}$ iſt, und daſs er $2k$ allemahl $= 1$ ſetzet. Allein, dieſe Gleichungen ſamt denen (A) ſind für das gegenwärtige Problem noch gänzlich unzureichend; man ſehe unten §. XXXVI.

2) Man drucke alſo in den drey Gleichungen (A) alle Gröſsen, welche ſich auf die Lage der Brandröhre im Raume beziehen, durch ſolche Gröſsen aus, welche die Poſition der wahren Umdrehungsaxe im Raume beſtimmen. Zu dieſer Abſicht, und um alle Radicalien zu vermeiden, ſeyen in der 8 Figur, ξ, η, ζ, diejenigen Puncte, wodurch die drey unbeweglichen Axen gehen. Man wird ſich aus dem bisherigen erinnern, daſs die Axen der Coordinaten ξ, η, ζ, mit den Axen der Coordinaten x, y, z, parallel ſind; und jetzt ſchneiden ſich alle in einem und demſelben Puncte. Durch c gehe die Axe der Brandröhre, durch O aber die Umdrehungsaxe. Es wird nicht nöthig ſeyn zu erinnern, daſs die Puncte c und O auch auſserhalb des ſphäriſchen Dreyecks, wo man nur will, liegen können. Es ſey $c\zeta = \omega$ der Winkel, welchen der Zünder mit der Axe der Coordinaten z macht; ſeine Projection in der Ebene der Coordinaten x und y, mache mit der Axe der Coordinaten x, wie bisher, den Winkel $\psi - 90°$. Der-

jenige Winkel, den die wahre Umdrehungsaxe mit der Axe der Coordinaten z macht, oder ζO ſey $= W$; ihre Projection in der Ebene der Coordinaten x und y, mache mit der Axe der x den Winkel $p - 90^\circ$; der Winkel, den die Umdrehungsaxe mit dem Zünder macht, oder $c\,O$ ſey $= \Pi$; der Winkel $c\,O\,\zeta$, das heiſst, der ganze Umdrehungswinkel der Bombe in der Zeit t, ſey $= \Phi'$. So fällt es bey dieſem Problem in die Augen, daſs Φ' der Zeit proportional, daher $\Phi' = \vartheta t$ iſt, wenn man die unveränderliche Winkelgeſchwindigkeit $= \vartheta$, und am Anfange $\Phi' = 0$ ſetzet; ferner bemerkt man, daſs W ſowohl als p und Π beſtändige Gröſsen ſind; denn wenn der Zünder aus c in z kommt, ſo muſs allemahl $z\,O = c\,O$ bleiben. Dagegen bleiben nun ψ und ω, alſo auch der Winkel $c\,\zeta\,O = p - \psi$ veränderlich. In dem Dreyecke $c\,\zeta\,O$ hat man aus den beiden Seiten $c\,\zeta$, $\zeta\,O$, und dem eingeſchloſſenen Winkel, $\cos\Pi = \cos(p-\psi)\sin\omega\sin W + \cos\omega \times \cos W$, alſo

3) $\cos\Pi = \sin\psi\sin\omega \times \sin p\sin W + \cos\psi\sin\omega \times \cos p\cos W + \cos\omega \times \cos W$.

4) Weil bekanntlich auch $\sin\Phi' = \frac{\sin\omega\sin(p-\psi)}{\sin\Pi}$, ſo hat man auch

5) $\sin\Phi'\sin\Pi = -\sin\omega\sin\psi \times \cos p + \sin\omega\cos\psi \times \sin p$.

6) Weiter hat man in demſelben Dreyecke, aus denſelben Datis,

$$\operatorname{tang}\Phi' = \frac{\sin\omega\sin(p-\psi)}{\cos\omega\sin W - \cos(p-\psi)\cos W\sin\omega};$$

wenn man in dieſer Gleichung alles gehörig entwickelt und ordnet, ſo erhält man

7) $\sin\omega\sin\psi \times (\cos p - \operatorname{tang}\Phi'\cos W\sin p) - \sin\omega\cos\psi \times (\sin p + \operatorname{tang}\Phi'\cos W\cos p) + \cos\omega \times \operatorname{tang}\Phi'\sin W = 0$;

8) Auch hat man noch in demſelben Dreyecke

$$\cos\omega = \sin\Pi\sin W\cos\Phi' + \cos W\cos\Pi;$$

9) Vermittelſt der Gleichungen in No. 3, 5, 7, 8, wird man nach Belieben, die nöthigen Subſtitutionen in den drey Gleichungen (A) in No. 1. unternehmen können, ohne auf Radicalien zu verfallen. Wenn

man

man in (A) die erste Gleichung mit $\cos p - \operatorname{tang}\Phi' \cos W \sin p$, die zweyte mit $\sin p + \operatorname{tang}\Phi' \cos W \cos p$, die dritte mit $\operatorname{tang}\Phi' \sin W$ multiplicirt, alle dreye addirt, und dabey die Bedingung in No. 7. gehörig bemerkt: so bekommt man

$$\frac{ddx}{dt^2} \times (\cos p - \operatorname{tang}\Phi' \cos W \sin p)$$
$$+ \frac{ddy}{dt^2} \times (\sin p + \operatorname{tang}\Phi' \cos W \cos p)$$
$$+ \frac{ddz}{dt^2} \times \operatorname{tang}\Phi' \sin W = 0,$$

worin p und W Constanten, und $\Phi' = \delta t$.

10) Wenn man in No. 1, (A), die erste Gleichung mit $\cos p$, die zweyte mit $\sin p$ multiplicirt, beide addirt, und die Bedingung in No. 5. beobachtet; so erhält man

$$\frac{ddx}{dt^2} \times \cos p + \frac{ddy}{dt^2} \times \sin p - \frac{2kP\sin\Pi}{m} \times \sin\Phi' = 0,$$

welche sich auf der Stelle integriren läſst; denn p und Π sind Constanten, Φ' ist $= \delta t$, und man weiſs, daſs $\int dt \sin(\delta t) = \frac{1-\cos(\delta t)}{\delta}$ ist, so genommen, daſs Zeit und Bogen zugleich verschwinden. Eben so findet man $\int dt \int dt \sin(\delta t) = \frac{\delta t - \sin(\delta t)}{\delta\delta}$, das Integral so genommen, daſs es mit t verschwindet.

11) In No. 10. giebt die erste Integration:

$$\frac{dx}{dt} \times \cos p + \frac{dy}{dt} \times \sin p - \frac{2kP\sin\Pi}{m} \times \frac{1-\cos(\delta t)}{\delta} = 0,$$

wozu keine Constante kommt, weil die anfängliche Geschwindigkeit $= 0$ angenommen ward. Daher hat man ferner

12) $$x\cos p + y\sin p = \frac{2kP\sin\Pi}{m} \times \frac{\delta t - \sin(\delta t)}{\delta\delta},$$

so genommen, daſs x, y und t zugleich verschwinden.

13) Setzt man in die dritte Gleichung (A) in No. 1, den Werth von $\cos\omega$ aus No. 8; so erhält man

$$\frac{ddz}{dt^2} = -\frac{2kP}{m} \times (\cos W \cos\Pi + \sin\Pi \sin W \times \cos\Phi').$$

Da auch hier W, Π, Conſtanten ſind, und $\Phi' = 8t$ iſt; ſo giebt die erſte Integration

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{2kP}{m} \times \left(\cos W \cos \Pi \times t + \sin \Pi \sin W \times \frac{\sin (8t)}{8}\right),$$

wozu wiederum keine Conſtante nöthig iſt. Eine zweyte Integration giebt

$$14)\quad z = -\frac{2kP}{m} \times \left[\cos W \cos \Pi \times tt + \sin \Pi \sin W \times \frac{1 - \cos (8t)}{88}\right].$$

15) Wenn man in der Gleichung (No. 9.) anſtatt der beiden Glieder $\frac{ddx}{dt^2} \cos p + \frac{ddy}{dt^2} \sin p$, ihren Werth $\frac{2kP \sin \Pi}{m} \times \sin \Phi'$ aus No. 10. ſubſtituirt, und alsdann alles mit $\cos W \tan \Phi'$ dividirt: ſo erhält man

$$-\frac{ddx}{dt^2} \sin p + \frac{ddy}{dt^2} \cos p + \frac{ddz}{dt^2} \tan W$$
$$+ \frac{2kP \sin \Pi}{m \cos W} \times \cos \Phi' = 0,$$

woraus dieſe Integralgleichung entſtehet, (wenn man in der Folge allemal $8t$ unter Φ' verſtehet),

$$16)\quad -x \sin p + y \cos p + z \tan W = -\frac{2kP \sin \Pi}{m \cos W} \times \frac{1 - \cos \Phi'}{88}.$$

Wenn man dieſe Gleichung mit $\cos p$, die in No. 12. mit $\sin p$ multiplicirt, ſo iſt ihre Summe

$$17)\quad y + z \times \cos p \tan W = \frac{2kP \sin \Pi}{m \cos W}$$
$$\times \frac{(\Phi' - \sin \Phi') \cos W \sin p - (1 - \cos \Phi') \cos p}{88}.$$

Wenn man die Gleichung in No. 14. mit $\cos p \tan W$ multiplicirt, und ſie von der gegenwärtigen abzieht, ſo erhält man nach gehörigen Reductionen,

$$18)\quad y = \frac{2kP \sin W \cos \Pi \cos p}{m} \times tt$$
$$+ \frac{2kP \sin \Pi}{m} \times \frac{(\Phi' - \sin \Phi') \sin p + (1 - \cos \Phi') \cos W \cos p}{88};$$

wenn man diese Gleichung mit $\sin p$ multiplicirt und sie von der in No. 12. abzieht, so erhält man, vermittelst der gewöhnlichen Reduction der Sinus und Cosinus,

$$19)\quad x = -\frac{2kP\sin W\cos\Pi\sin p}{m}\times tt + \frac{2kP\sin\Pi}{m}\times\frac{(\phi'-\sin\phi')\cos p+(1-\cos\phi')\cos W\sin p}{\varepsilon\varepsilon}.$$

§. XXXIII.

Es wird dienlich seyn, die Hauptgleichungen, welche man für die vollständige Auflösung des zu Anfang §. XXXII. erwähnten Problems, gefunden hat, hier beysammen darzustellen; sie sind im vorigen §, No. 14, 18, 19, enthalten:

$$\mathrm{I})\quad x = \frac{2kP}{m}\times\left[-\sin W\cos\Pi\sin p\times tt+\cos p\sin\Pi\times\frac{t}{\varepsilon} + \frac{(1-\cos\phi')\cos W\sin p-\sin\phi'\cos p}{\varepsilon\varepsilon}\times\sin\Pi\right];$$

$$\mathrm{II})\quad y = \frac{2kP}{m}\times\left[\sin W\cos\Pi\cos p\times tt+\sin p\sin\Pi\times\frac{t}{\varepsilon} - \frac{(1-\cos\phi')\cos W\cos p+\sin\phi'\sin p}{\varepsilon\varepsilon}\times\sin\Pi\right];$$

$$\mathrm{III})\quad z = -\frac{2kP}{m}\times\left[\cos W\cos\Pi\times tt+\sin\Pi\sin W\times\frac{1-\cos\phi'}{\varepsilon\varepsilon}\right];$$

worin $\phi' = \varepsilon t$ ist.

§. XXXIV.

Man nehme auf einen Augenblick an, die Winkelgeschwindigkeit ε sey sogar unendlich, und t werde, z. B., nur 20 Secunden: so verwandeln sich die vorigen Gleichungen in folgende:

$$1)\quad x = -\frac{2kP\sin W\cos\Pi\sin p}{m}\times tt,$$

$$2)\quad y = \frac{2kP\sin W\cos\Pi\cos p}{m}\times tt,$$

$$3)\quad z = -\frac{2kP\cos W\cos\Pi}{m}\times tt,$$

und sie beweisen augenscheinlich, wie wenig man berechtiget sey anzunehmen: *eine schnelle Umdrehungsbewegung hebe die Wirkung dieser Kraft auf.* Wenn man *auf Distancen* die Umdrehungsbewegung der Bomben und Haubitzgrenaden im niedersteigenden Bogen beobachtet hat: so wird man die Voraussetzung einer *sehr grossen Winkelgeschwindigkeit* gänzlich ungegründet finden. Bey den grossen Bomben kann man zuweilen auf zwey Secunden kaum *eine* Umdrehung rechnen. Man ist also nicht berechtiget, in den Werthen für x und y, (§. XXXIII.), dasjenige Glied, welches den Factor $\frac{t}{g}$ enthält, wegzulassen.

§. XXXV.

Man setze, die wahre Umdrehungsaxe liege im Aequator, [am Ende des XXXI §. hiess nämlich der Brandröhrenkopf der *nördliche Pol*], und sie sey mit der Axe der Coordinaten y parallel: so ist in (§. XXXII, No. 2.), $p = 180°$, $\Pi = 90°$, $W = 90°$; mithin hat man aus dem XXXIII. §.,

$$1)\ x = -\frac{2kP}{m} \times \left(\frac{t}{g} + \frac{\sin\Phi'}{gg}\right),$$

$$2)\ y = 0,$$

$$3)\ z = -\frac{2kP}{m} \times \frac{1 - \cos\Phi'}{gg};$$

das ist aber, unter den unzähligen Fällen, auch nur der *einzige*, da die Kraft eines Brandröhrensatzes keinen Einfluss auf die *Abweichung des Schwerpuncts von der verticalen Richtungsebene* hat. Sachkundige, die da wissen, dass der Brandröhrenkopf hervorraget, werden einmüthig sagen, dass die gegenwärtige Voraussetzung, vermöge welcher die Brandröhre, während der ganzen Bewegung, sich nie gegen die verticale Richtungsebene neigen soll, den Beobachtungen im niedersteigenden Bogen widerspricht.

Uebrigens bemerkt man hier (1^{mo}) dass x und z beständig negativ bleiben. Denn sin Φ' ist bekanntlich allemal kleiner als Φ', oder ſin (ϑt) iſt kleiner als ϑt, alſo bleibet $\frac{\sin \Phi'}{\vartheta\vartheta}$ kleiner als $\frac{\vartheta t}{\vartheta\vartheta}$; das heiſst, $\frac{\sin \Phi'}{\vartheta\vartheta}$ bleibet beſtändig kleiner als $\frac{t}{\vartheta}$. Daſs z beſtändig negativ bleibe, iſt für ſich klar. Alles beruht aber auf dem anfänglichen Zuſtande des Körpers (*ſtatus initialis*); ſo daſs alſo auch der gegenwärtige Fall ſchon aus §. XXXII. No. 2. und aus der Integration in No. 10. klar iſt. In No. 2. ward nämlich Φ' für den Anfang $= 0$ geſetzt. Eben deswegen aber fiel der Punct c Anfangs in den Bogen ζO (Fig. 8.) gegen ζ zu, weil man den *poſitiven* Winkel Φ' in dieſem Sinne angenommen hat. In dem gegenwärtigen Falle fällt nun der Punct O, wodurch die Umdrehungsaxe geht, in den Punct η, und c fällt in die Axe der Coordinaten z. Schon hieraus ſieht man, daſs *wenigſtens Anfangs* die *negative* Abſciſſe x wachſen muſs.

(2^do) Beide Gleichungen zeigen, daſs die negative Abſciſſe x nur mit t verſchwindet, und mit t ohne Gränze wächſt; daſs ferner z erſtlich für $t = 0$, alſo für $\Phi' = 0$; zweytens für Φ' oder $\vartheta t = 2\pi$; drittens für $\vartheta t = 4\pi$, u. ſ. w., verſchwindet. Weiter ſieht man, daſs alle *gröſsten* Ordinaten z, welche beſtändig negativ ſind, einander gleich ſind. Hieraus allein läſst ſich ſchon auf eine Art der *Cycloide* ſchlieſsen, welche Unterſuchung ich aber jetzt bey Seite ſetze; zumal da die zu Anfang dieſes §. angenommene Vorausſezzung ohnehin den Erfahrungen widerſpricht, ſo erleidlich ſie auch noch ſonſt für die übrige Bewegung des Schwerpuncts eines geworfenen Körpers ſeyn möchte.

§. XXXVI.

Wenn $n = 0$, das heiſst, wenn die *Axe der Brandröhre zugleich die Umdrehungsaxe* der Bombe iſt; ſo hat man aus dem XXXIII. §., bey jeder Lage der Brandröhre im Raume,

$$1)\quad x = -\frac{2kP \sin W \sin p}{m} \times tt,$$

$$2)\quad y = +\frac{2kP \sin W \cos p}{m} \times tt,$$

$$3)\quad z = -\frac{2kP \cos W}{m} \times tt;$$

daſs alſo in dieſem Falle, wie dieſs ohnehin klar war, die Umdrehungsbewegung keinen Einfluſs auf die progreſſive Bewegung des Schwerpuncts hat. Der gegenwärtige Fall und der im XXXV. §., dieſe beiden Fälle ſind es allein, in welchen auch die drey Gleichungen (A) des XXXII. §. No. 1, brauchbar wären; in allen übrigen Fällen ſind ſie gänzlich ſtumm. Zum Beyſpiel, die Umdrehungsaxe ſtehe vom Pol um 30° ab, und mache mit der Axe der Coordinaten z einen rechten Winkel; ihre Projection mache mit der Axe der Coordinaten x auch einen rechten Winkel: ſo iſt im XXXII. §. No. 2, $\pi = 30°$, $W = 90°$, $p = 180°$. Demnach hat man im XXXIII. §.

$$1)\quad x = -\frac{kP}{m} \times \left(\frac{t}{g} - \frac{\sin \varphi'}{gg}\right),$$

$$2)\quad y = -\frac{kP}{m} \times 1{,}732\ tt,$$

$$3)\quad z = -\frac{kP}{m} \times \frac{1 - \cos \varphi'}{gg};$$

man ſieht, daſs der Schwerpunct ſich auf einer Cylinderfläche bewegt, welches ich aber jetzt bey Seite ſetze.

§. XXXVII.

Wenn man den letzten Fall in dem vorigen §. erwäget, die Kraft P ſehr gering in Anſchlag bringt, mithin $\frac{P}{m}$ auch nur $= \frac{1}{100}$ ſetzet, und t zwanzig Secunden annimmt: ſo wird

$$y = -\frac{kP}{m} \times 1{,}732\ tt = -0{,}15625 \times 1{,}732 \times 400,$$

alſo

alſo die Abweichung von der verticalen Richtungsebene ſchon 108 Fuſs. Hoffentlich wird niemand auf den Gedanken verfallen, als ob dieſer Fall ein ſeltner, und nur mühſam unter tauſend andern möglichen Fällen, ergrübelt wäre. Um ſich von dem Gegentheile, nämlich davon zu überzeugen, *daſs es unzählige Fälle für die Umdrehungsbewegung giebt, in welchen immer, vermöge einer geringen Kraft des Brandröhrenſatzes, eine ſehr merkliche Abweichung von der verticalen Richtungsebene ſtatt finden muſs,* um ſich hievon vollkommen zu überzeugen, braucht man nur zu erwägen, daſs derjenige Fall, da die Umdrehungsaxe allemal in dem Aequator und mit der Axe der Coordinaten y parallel ſeyn ſoll, daſs dieſer Fall ſchon wegen des hervorragenden Brandröhrenkopfes, und wegen des anfänglichen Zuſtandes der Bombe oder Haubitzgrenade in der Seele, äuſserſt ſelten, vielleicht nie gänzlich ſtatt findet (§. XXXV.); daſs, wenn derjenige Punct der Mündung der Seele, welchen die Bombe beym herausfahren berührt, *nicht der tiefſte jener Mündung* iſt, wenn er nur *ein wenig* davon abſtehet, daſs alsdann auf der Stelle die Umdrehungsaxe unmöglich in dem Aequator liegen kann, und daſs nun dagegen alle die unzähligen Fälle ſtatt finden, da die in der Brandröhre liegenden Pole, *Parallelkreiſe* beſchreiben müſſen, deren *Breite,* nach Umſtänden des vorhin erwähnten Berührungspunctes und des Brandröhrenkopfes, gröſser oder kleiner iſt.

§. XXXVIII.

Es wird wohl nicht nöthig ſeyn, erſt die Gründe anzuführen, warum dieſer Abhandlung *keine Reſultate von Verſuchen* beygefügt ſind. Bey geringem Nachdenken wird man ſie, auch ohne meine Winke, ſelbſt finden, wenn man ſich nur erinnert, daſs jedes Laboratorium in Europa *ſeine* Feuerwerksſätze für ſich behält. Keine andern aber, als nur *legitimirte* Sätze, können die Leſer dieſer Abhandlung intereſſiren.

Eben ſo wird vielleicht die folgende Verſicherung am Schluſſe durch dieſe Abhandlung ſelbſt überflüſsig gemacht ſeyn. Wenn es auch nicht wahr wäre, daſs jeder Menſchenkopf zuweilen einen Funken von einem Brandröhrenſatze fängt: ſo habe ich doch, aus nöthiger Vorſorge, um bey Verfaſſung dieſer Abhandlung den meinigen vor allen Brandröhrenſätzen zu verwahren, in den letzten ſechs Wochen viel Waſſer getrunken. Ob mich aber nicht von der andern Seite, *Horazens* bekannter Vorwurf trift, den er Waſſertrinkern macht; ob....: Genug! Die Richter werden ausſprechen.

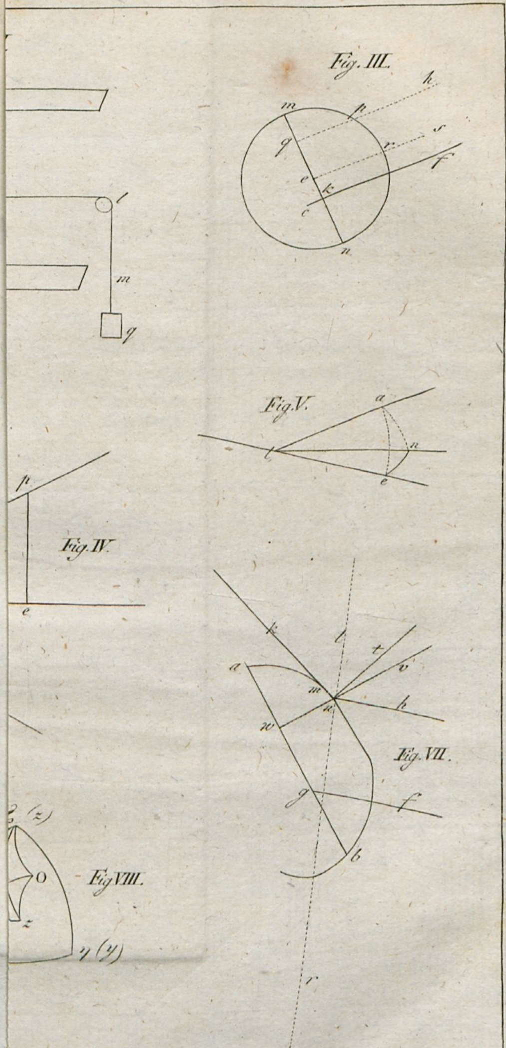
Fig. III.
Fig. V.
Fig. IV.
Fig. VII.
Fig. VIII.

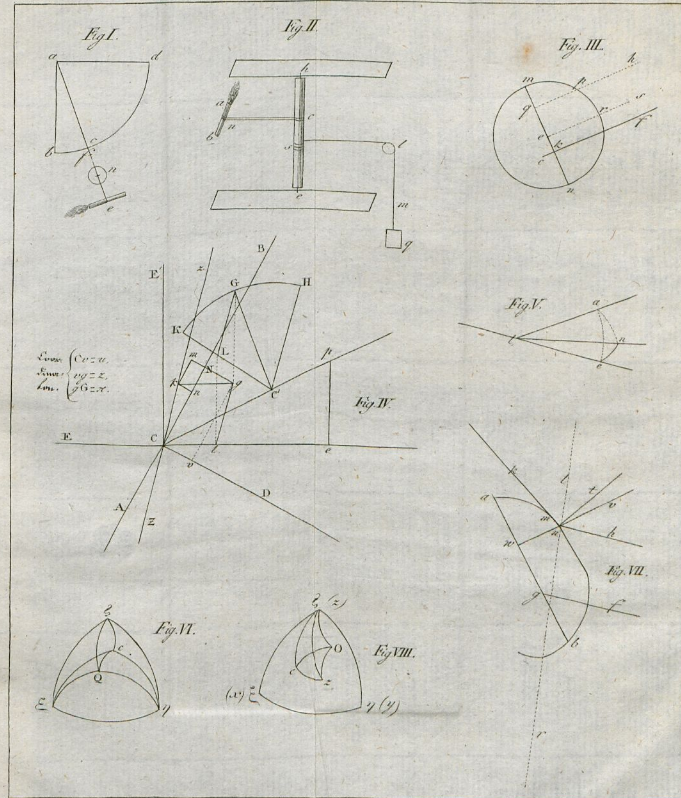
Fig. I.
Fig. II.
Fig. III.
Fig. IV.
Fig. V.
Fig. VI.
Fig. VII.
Fig. VIII.

ÜBER DIE

ABWEICHUNG GEWORFENER KÖRPER

VON DER

VERTICALEN RICHTUNGSEBENE.

EINE

ABHANDLUNG,

WELCHE

VON DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE

DER

WISSENSCHAFTEN

IM JAHR 1794 DEN PREIS ERHALTEN HAT.

Von

ROHDE,

Königl. Preufsischem Lieutenant von der Armee.

Ea demum vera laus est, quæ a viris proficiscitur, qui ipsi in laude vixerunt.

Auf Veranstaltung der Königl. Akademie herausgegeben.

BERLIN, 1795.

GEDRUCKT IN DER KÖNIGLICHEN HOFBUCHDRUCKEREY.