Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-686390-p0001-7

K. 803
496.

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-686390-p0002-3

Martin Müllers
Ingenieurs, Landmessers und Visirers zu Gröningen
Versuch
den
Inhalt der Fässer
durch
Anwendung der Muschellinie
zu finden.

Goertz

Jn.

C. R. J. ~~Sprengel.~~
~~d. [illegible] b.~~
~~1784.~~

Aus dem Holländischen.

Mit einem Kupfer.

Leipzig,
bei Christian Gottlieb Hilscher,
1784.

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-686390-p0003-8

KOEN. BIBL.
DER
UNIVERS.
HALLE.

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-686390-p0004-4

Vorrede
des Uebersezers.

Dise Schrift, deren Original zu Gröningen im Jahr 1780 herausgekommen ist, enthält eine neue Anwendung einiger Leren aus der höhern Geometrie, auf das bürgerliche Leben. Der Verfasser derselben sucht nämlich aus den Eigenschaften, der, vor ungefähr 2000 Jaren erfundenen Muschellinie des Nikomedes, eine neue Metode herzuleiten, nach welcher man den Inhalt der Fässer genauer als bisher möglich gewesen ist, berechnen könnte.

Diser neue Versuch, eine so bekante Aufgabe zu lösen, verdient gewis in Deutschland bekant gemacht zu werden, und ich halte es daher nicht für überflüßig durch eine Uebersezung zu mererer Verbreitung derselben etwas beizutragen.

Die Aufgabe den Inhalt der Fässer zu finden, ist schon oft von verschiednen Meskundigen behandelt worden, und die Namen eines **Wallis**, **Camus**, **Lambert**, **Lulofs** ff. könten in der Taht vermuten lassen, daß alles nüzliche, was darüber gesagt werden könte, beinahe erschöpft sein müsse. Aber demohngeachtet felet, wie bekant, noch viel daran, daß die Regeln welche dise Männer vorgeschriben haben, um den Inhalt der Fässer darnach zu berechnen, volkommen und in allen Fällen anwendbar sein solten; vielmehr zeigt die Erfahrung, daß der berechnete Inhalt fast immer zu viel von dem warrn abweicht, als daß man jenen one Nachteil für disen annemen könte.

Durch dise Erfarung ist der Verfasser diser Schrift, der sich sehr mit der Pitometrie beschäftiget, auch seit einigen

Jaren das Amt eines Visirers zu Gröningen bekleidet, bewogen worden, einen ganz neuen Weg zu versuchen, um zu sehen, ob man auf disem zu einer angemessnern Formel, für die Berechnung des Inhalts der Fässer gelangen könte. Durch genauere Betrachtung der Fässer hat er beobachtet, daß die Dauben derselben, zwar in der Mitte bei dem Spundloch sehr gekrümt sind, daß aber dise Krümmung nach den Enden des Fasses zu immer abneme *), und daß so gar das starke Andringen der Reifen, und überdis der Umstand, daß die Bötcher die Dauben an den Enden schief abzuschneiden pflegen, verursache, daß die Dauben hier beinahe auf die entgegengesezte Seite gebogen werden. Dise Beobachtung hat ihn gelehrt, daß die Krümmung der Dauben nicht so gut mit einem Bogen, von einem Kreis, einer Ellipse, oder einer Parabel, wie bisher geschehen, verglichen werden könte. Allein die Aenlichkeit, die sich zwischen der oben beschriebnen Krümmung, und der Gestalt einer

*) Auf dise Beobachtung haben schon vorher andre ire Berechnungsarten gebaut, z. B. Camus.

äussern Muschellinie findet, hat ihn vermuten lassen, daß man vileicht mit Vorteil die Dauben eines Fasses, als Bogen einer äussern Muschellinie ansehen, und unter diser Voraussezung den Inhalt der Fässer berechnen könte. Die weitete Ausfürung diser Gedanken, und die Folgen davon sind in diser Schrift enthalten.

An dem Ende diser Abhandlung findet man die Versuche, welche der Verfasser mit drei unter einander sehr verschiednen Fässern angestelt hat, und da er merere Berechnungen mit einander verglichen hat, so siht man, daß der Inhalt, nach diser neuen Metode berechnet, viel weniger von dem waren Inhalt abweicht, als wenn derselbe nach einer von andern Gelehrten vorher angegebnen Formel berechnet würde. Zulezt hat er noch einen vierten Versuch hinzugefügt, worin dise Formel zwar nicht auf das genaueste zutrift, doch durch eine weiter angebrachte Korrekzion hat er den Unterschied so sehr vermindert, daß er nicht mehr $\frac{1}{500}$ des ganzen Inhalts beträgt. — Ob indessen dise neue Metode, die der Verfasser hier angegeben hat, auf alle Gattungen von

von Fässern, die Dauben derselben mögen noch so verschiden gekrümt sein, anwendbar sei, müsten merere hierüber angestelte genaue Versuche beweisen. — In der lateinischeu Abhandlung des Verfassers, die in der gegenwärtigen Schrift mehrmahls angeführt wird, sind einige Versuche erzählt, in welchen der Inhalt verschiedner Fässer nach ältern Formeln berechnet worden ist, und wenn man den Inhalt jener Fässer, nach der hier vorgeschlagenen Formel berechnet, so scheinet der berechnete Inhalt weiter von dem waren abzuweichen als man erwarten solte. Wenn indessen einige, die Zeit und Gelegenheit haben dergleichen Versuche anzustellen, dise Sache irer Aufmerksamkeit würdig finden, so kan es nicht felen, daß in kurzer Zeit der ware Wehrt diser neuen Berechnungsart entschiden werden mus.

Der Original hat Her A. Brugmans, öffentlicher Lerer der Weltweisheit und Meskunst zu Gröningen, eine Vorrede vorgesezt, da sie sich aber beinahe allein auf den Ort und Provinz bezihte, in welcher sie geschriben worden, so habe ich sie unübersezt gelassen. — Uebrigens

hab'

hab' ich wegen diser deutschen Ausgabe, nichts mehr hinzuzusezen, als daß ich, ausser verschiednen Drukfelern, die verbessert, und einigen, in den Rechnungen vileicht zu weit übersprungnen Säzen, die ergänzt worden sind, das holländische Kroesmaas, in leipziger Kannen verwandelt, und eine, unter dem Namen der lambertischen bekante nnd bei uns manchmahl gebrauchte Formel, mit den andern in Vergleichung gebracht habe.

Eine

Eine neue Metode den Inhalt der Fässer zu berechnen aus den Eigenschaften der Muschellinie hergeleitet.

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-686390-p0011-3

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-686390-p0012-8

Vor einigen Jaren habe ich eine akademische Abhandlung *), über die beste Metode den Inhalt der Fässer zu berechnen, bekant gemacht. In diser Schrift, die als ein Beweis der Fortschritte, welche ich an diser hohen Schule (Gröningen) in der Meskunst im algemeinen, und ins besondre, in dem Teil derselben, den man die Visirkunst nent, gemacht hatte, von mir herausgegeben wurde, findet man eine kurze Erzälung der Bemühungen, die gelehrte Männer, in vorigen Zeiten, und in disem Jahrhundert, angewendet haben, um disen, für die menschliche Geselschaft, so nüzlichen Teil der Größenlere zur Volkommenheit zu bringen. Und einige Versuche, in welchen ich, nach den von jenen Gelehrten angegebenen Formeln, den Inhalt verschiedner Fässer berechnet, und die Resultate beigesezt habe, zeigen, wie es mit allen disen Berechnungsarten, in

 Anse-

*) Specimen mathematicum, de optima methodo inuestigandi capacitatem doliorum. Groningae. 1775.

Ansehung des waren Inhalts der Fässer beschaffen ist. Sie weichen alle, eine mehr als die andre, so viel von dem waren Inhalt ab, daß ein Versuch, disen Teil der Geometrie genauer zu bestimmen, nicht überflüßig scheinen kan.

Die größte Schwirigkeit, welche man in diser Untersuchung antrift, findet man bei der Aufgabe, von der Krümmung der Dauben, das ist, bei der Bestimmung der krummen Linie, die entweder genau, oder doch nächstens die Gestalt der Dauben ausdrükt, aus welchen ein Fas gemacht wird. Das erste scheint nicht wohl möglich, weil sich kein Bötcher, überal, und in allen Fällen, einer bestimten Regel bedient, um die Dauben darnach abzuhobeln, und zu krümmen.

Man mus sich also begnügen, die Krümmung des Fasses mit derjenigen krummen Linie zu vergleichen, die am nächsten mit der Gestalt der Dauben übereinkömt. Die krummen Linien, die am meisten bekant sind, und dem ersten Anschein nach, die Gestalt der Dauben beinahe auszudrükken scheinen, sind die Kegelschnitte. Auch haben alle, so viel mir bekant ist, die Krümmung der Dauben, mit einem Bogen, von einem oder dem andern Kegelschnit verglichen, und die Früchte diser Bemühungen, sind, in der so eben angeführten Abhandlung, von mir angezeigt, und nach der Erfahrung geprüft worden.

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-686390-p0014-0

Der Unterricht in den Beschaffenheiten verschiedner Gattungen von krummen Linien, den mir mein Lerer Her Professor **Brugmans** erteilte, gab mir den ersten Anlas, auf eine andre Linie, als man durch einen Kegelschnit erhält, zu denken, welche vileicht die geschikteste von allen wär, um die Figur der Dauben mit ihr zu vergleichen. — Dise Linie ist die Kondhoide, oder Muschellinie des **Nikomedes**, eines berühmten Meskünstlers der Griechen, der wahrscheinlich im zweiten Jahrhundert vor unsrer Zeitrechnung geblüht hat.

An dem Ende jener Abhandlung hab' ich schon die Vermutung geäussert, daß man vileicht aus der Betrachtung diser Linie eine neue und genauere Berechnungsart der Fässer herleiten könte; allein ich hatte damahls noch zu wenig hierüber nachgedacht, um etwas gewisses davon bestimmen zu können. Doch auf die Ermunterung meines Lerers und des Hern **Klinkenberg**, dises Stük auf das genaueste zu untersuchen, hab' ich mit Verwunderung den großen Nuzen gesehen, den man aus diser krummen Linie, bei der Berechnung des Inhalts der Fässer, zihen kan. — Her **Klinkenberg** hat vor disem in den Abhandlungen der holländischen Geselschaft der Wissenschaften eine scharfsinnige und kurze Metode angegeben, wie man den Inhalt der Fässer, unter der Voraussezung, daß die Krümmung der Dauben durch einen para-

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-686390-p0015-5

rabolischen Bogen ausgedrükt werde, berechnen könte. Demohngeachtet aber ist er so edelmütig gewesen, mir zu erkennen zu geben, wie viel man nach seinem Urteil, in diser Wissenschaft, von der Muschellinie zu erwarten hätte, und wie sehr er wünschte, daß dises auch nach der Erfarung genau durch mich untersucht würde.

Doch ich wil mich nicht länger bei der Einleitung aufhalten, sondern nun zur Sache selbst übergehen, und

Erstlich. Die Natur der Konchoide oder Muschellinie durch eine Gleichung ausdrükken.

Zweitens. Zeigen, wie der Inhalt der Fässer gefunden wird, von welchen die Dauben, nach der Krümmung einer Muschellinie gebogen sind.

Drittens. Durch Versuche beweisen, daß der ware Inhalt der Fässer genauer nach diser als nach einer andern Metode gefunden wird.

Ich werde also jezt zuerst die Konchoide bekant machen, die Natur diser Linie durch eine Gleichung ausdrükken, und einige Eigenschaften derselben daraus herleiten.

Wenn sich zwei gerade Linien AB und IR (Fig. 1.) in den Punkt C unter rechten Winkel durchschneiden, so neme man AC und CB von einer

einer gewissen Länge, als gegeben an. Ferner zihe man aus dem Punkt B, welcher der Pol genant wird, die geraden Linien BN, BQ, BG, BF, BM ff. und mache TN, SQ, HG, LF, UM ff. alle = AC; so wird man durch die Punkte N, Q, A, G, F, M, ff eine krumme Liuie NAM zihen können; die wegen irer Gestalt, von dem Erfinder Konchois genant worden ist; und man hat dise hier beschribene Linie, die **äussere** Konchoide genant, um sie von der **innern** zu unterscheiden, welche entsteht, wenn man unter der Linie IR, von BT, BS, BE, BU, ff. Stükken abschneidet, die alle = CA = aC sind, und durch die, auf dise Art bestimten Punkte, n, a, m, ff. eine Linie ziht. Von diser innern Muschellinie werde ich hier nicht handeln, da sie zu meiner Absicht nicht dient, indem ich mich ganz allein auf die erstere einschränke, die man nicht nur durch eine unendliche Reihe von Punkten zihen, sondern auch durch eine stätige Bewegung beschreiben kan, zu welchem Endzwek schon der Erfinder ein einfaches Werkzeug ausgedacht hat, von welchen man in des Freihern von Wolf *) und andrer Schriften Nachricht findet.

Die Absicht, zu welcher der griechische Meskünstler dise krumme Linie gebraucht hat ist sehr bekant, und der Ruhm den er sich durch dise

 Erfin-

*) Elementa Mathes. Tom. I. Anal. fin.

Erfindung erworben, sehr verdient. Der Hr. **Montucla** redet in seiner Geschichte der Meskunst *) hiervon folgendermaßen: „Das ein„zige Denkmahl das uns von den Arbeiten des „**Nikomedes** übrig ist, ist die Erfindung sei„ner Konchoide, und der sinreiche Gebrauch den „er davon, bei der Auflösung der Aufgabe, von „der Verdoppelung des Würfels gemacht hat. „Wir haben schon dise krumme Linie, und die „Art wie sie ihr Erfinder, auf jene Aufgabe an„wendete, bekant gemacht; durch sie allein kön„nen wir uns einen sehr vorteilhaften Begrif von „disem alten Geometer machen. Denn nur „durch widerhohlte Anwendung der höhern Ana„lysis, konte er, um das Problem von zwei mit„lern Proporzionallinien aufzulösen, auf die Kon„strukzion kommen, die er davon gibt. Man sicht „leicht den Endzwek, den sich **Nikomedes** hierbei „vorsezte; es war one Zweifel diser, die beiden „berühmten Aufgaben, von der Verdoppelung „des Würfels **), und der Teilung des Win„kels

*) Histoire des Mathemat. Tom. I. p. 267.

**) Die Aufgabe von der Verdoppelung des Würfels war in dem Altertuhm sehr berühmt, so wie auch die Gelegenheit zu demselben, in der Taht sehr sonderbar ist. Um die Pest, die große Verwüstungen in Griechenland anrichtete, abzuhalten, wurden, (so erzählt man) von dem Volk Gesanten nach Delos geschikt, um von dem Orakel die Mittel zu erfaren, wodurch man dem Zorn der Götter abwenden könte.

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-686390-p0018-2

„kels in drei Teile, auf eine Konstrukzion zu
„bringen. Dise Anwendung der Konchoide
A 5 „auf

könte. Das Orakel verlangte nichts anders, als die Verdoppelung des Altars, worauf geopfert wurde. Nichts schien leichter, als disem geringen Befehl Genüge zu leisten; die Gestalt des Altars, war die eines Würfels, und wenn man die Seiten desselben noch einmahl so groß machte, als sie zuvor waren, so glaubte man das Gebot des Orakels völlig erfült zu haben. Demohngeachtet hielt die Pest an, und das Volk erneuerte seine Klagen bei dem Got, es wurde aber abgewisen, weil der Altar jezt nicht verdoppelt, sondern achtmahl so groß als vorher gemacht worden war. Nun fing man an zu begreifen, daß diser Saz, (der unter dem Namen des delischen Problems sehr bekant geworden ist) mehr Schwirigkeit hätte, als es anfangs schien. Man fragte die größten Matematiker, und vornämlich Plato, den berühmtesten diser Zeit um Raht. Man sagt, daß das Haupt der akademischen Sekte erblast sei, als man ihm disen Saz vorgetragen, indem er so gleich die Schwirigkeit, der die Auflösung unterworfen ist, begriffen, und die Abgesanten an den Euklides gewisen habe. Doch wie es auch eigentlich mit diser Geschichte beschaffen sei, so viel ist gewis, daß die Auflösung dem Plato viel Mühe verursacht, ob er schon endlich eine davon gefunden hat. Andre haben dasselbe getahn, und unter disen ist Nikomedes, der die Konchoide ausdachte und gebrauchte, um zwischen zwei gegebenen Linien, zwei andre mitlere Proporzionallinien zu finden, wovon wie bekant ist, die Auflösung des

deli-

„auf die höhern Aufgaben, ist von Newton „sehr gebilliget worden, der auf eine änliche „Weise, alle Gleichungen des dritten und vierten „Grades konstruirt hat.“

Eine Linie, die man so leicht beschreiben kan, und die unter den Alten so berümt war, konte der Aufmerksamkeit der folgenden Geometer nicht entgehen. Auch findet man bei allen, welche die ganze Größenlere abgehandelt haben, die algemeinen und bekantesten Eigenschaften der Muschellinie. Insbesondre haben von derselben gehandelt Amontons *) und Euler **).

Doch wir wollen jezt sehen welche Gleichung die Natur diser krummen Linie ausdrükt. Man seze also

$$AC = UM = a, \quad CB = b, \quad PC = x, \quad PM, = y.$$

So ist

$$PC : MU = CB : BU$$

$$x : a = b : \frac{ab}{x}$$

Ferner

delischen Problems abhängt. Denn sezt man $a : x = x : y$ und $x : y = y : 2a$, oder sucht man zwischen a und $2a$ zwei mitlere Progorzionalzalen, so ist die erste davon die Seite eines Würfels, der noch einmal so groß ist als a^3, oder $x^3 = 2a^3$ und $x = a\sqrt[3]{2}$.

*) Memoir de l'Acad. de Paris, 1708.

**) Introduct. in Anal. Infin.

Ferner

$$MB = MU + UB = \frac{ab}{x} + a = \frac{ab + ax}{x}$$

Allein es ist auch

$$MB^2 = BP^2 + PM^2$$

$$\frac{(ab + ax)^2}{x^2} = (b + x)^2 + y^2$$

Das ist

$$\frac{a^2 b^2 + 2a^2 bx + a^2 x^2}{xx} = bb + 2bx + xx + yy$$

Und hieraus erhält man die Gleichung für Muschellinie

$$x^4 + 2bx^3 + bbxx + yyxx = aabb + 2aabx + aaxx$$

Dises ist eine Gleichung von dem vierten Grad, daß also die Konchoide zu den krummen Linien der dritten Ordnung gehöhrt.

Wenn man in der Gleichung

$$\frac{(ab + ax)^2}{x^2} = (b + x)^2 + y^2$$

$x = a$ sezt, so verändert sie sich in dise

$$(b + a)^2 = (b + a)^2 + y^2$$

daß also $y = 0$ wird, und der Anfang der Ordinaten bei dem Punkt A ist. Sezt man hinge-

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-686390-p0021-8

hingegen $x = o$, so bekömt man $\frac{ab + ax}{x} = \infty$, und also auch $b + y = \infty$. Weil aber b eine beständige Größe ist, so mus $y = \infty$ sein, das ist, die krumme Linie kan unendlich fortgezogen werden, one daß sie auf die Linie IR trift, ob sie sich schon derselben beständig nähert. Die Linie IR ist also die Asimptote der Muschellinie.

Ich würde noch mehr Folgerungen, aus der so eben gefundnen Gleichung herleiten können, ich gehe sie aber alle mit Stilschweigen vorbei, da sie zu meiner Absicht nicht dinen. Doch mus ich mich noch etwas bei der Gestalt diser krummen Linie aufhalten, welche in der Mitte bei A, der Asimptote die hole Seite, doch von M an, derselben die erhabene zuwendet, wodurch sie daselbst einen **Wendungspunkt** erlangt, der bei der Figur der Fässer gewis in Betrachtung gezogen zu werden verdient; denn die Dauben sind in der Mitte, bei dem Spundloch sehr gekrümt, und keren ire hole Seite der Axe des Fasses zu, aber gegen das Ende, oder bei den Böden, wenden sie sich einigermaßen, welches durch das starke Andringen der Reifen nahe bei den Enden verursacht wird. Hierzu kömt noch, daß die Dauben an der inwendigen Seite schief abgeschnitten und verdünt werden, wodurch die Gestalt der Dauben noch mehr mit dem Lauf einer krummen Linie nach dem Wendungspunkt übereinkömt.

Es

Es wird daher nicht unschiklich sein, hier noch zu zeigen, wie der Wendungspunkr in einer Muschellinie bestimmt wird. Man seze deswegen so wie vorhin

$$AC = UM = a,\ BC = b,\quad CP = x,\ PM = y$$

so ist $PC : UM = BC : BU$

$$x : a = b : \frac{ab}{x}$$

also $CU = \sqrt{(BU^2 - BC^2)} = \sqrt{\left(\frac{a^2b^2}{x^2} - b^2\right)} =$

$$\frac{b}{x}\sqrt{(a^2 - x^2)}$$

Ferner ist $BC : CU = BP : PM$

$$b : \frac{b}{x}\sqrt{(aa - xx)} = b + x : y$$

folglich $y = \dfrac{(b + x)\sqrt{(a^2 - x^2)}}{x}$

dises differenziert, kömt

$$dy = \frac{-x^3dx - aabdx}{xx\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

Multiplicato enim divisore per diff. dividendi, et facto subtrahatur factum dividendo et diff. divisoris; differentia dividatur per □ divisoris.

ferner

$$ddy = \frac{(2a^4b - a^2x^3 - 3a^2bx^2)\,dx^2}{(a^2x^3 - x^5)\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

Sezt

Sezt man dises $= 0$, wie geschehen mus, wenn der Wendungspunkt bestimt werden sol, so erhält man alsbald

$$2a^4 b - a^2 x^3 - 3a^2 bx^2 = 0$$

und hieraus

$$2a^2 b - x^3 - 3bx^2 = x^3 + 3bx^2 - 2a^2 b = 0.$$

Eine von den Wurzeln diser Gleichung, wird die Länge der Abszisse PC $= x$ bestimmen, auf welche man die Ordinate PM $= y$ zihen muß, welche den gesuchten Punkt M der krummen Linie anzeigen wird.

Sezt man $a = b$, wie ich zu mererem Ge-Gebrauch der Konchoide in der Folge annemen werde, so wird aus jener Gleichung dise

$$x^3 + 3ax^2 - 2a^3 = 0$$

Dise Gleichung läßt sich durch $x + a$ dividiren, verrichtet man die Division, so erhält man folgende qvadratische Gleichung

$$x^2 + 2ax - 2a^2 = 0$$

Die Wurzel hiervon $x = -a + \sqrt{3aa}$, ist die gesuchte Länge der Abszisse CP $= x$, und es ist also der Punkt M bestimt. — Ich konstruire dise Gleichung auf folgende Weise.

Aus C (Fig. 2.) beschreibe man mit dem Halbmesser CA oder CB $= a$, den Halbkreis ADB,

ADB, ferner mache man $AD = AC = a$, und zihe BD. Dan beschreibe man aus B, mit dem Halbmesser BD, einen Bogen, der den Durchmesser BA in dem gesuchten Punkt P schneiden wird. Dises ist der Punkt aus welchem die halbe Ordinate PM gezogen werden mus, welche die Muschellinie in dem Wendungspunkt M schneidet. — Denn da $BA = 2a$, und $AD = a$, so ist $PD = \sqrt{(4aa - aa)} = \sqrt{3aa} = PB$, und $CP = BP - BC = \sqrt{3aa} - a$.

Da ich nun die Eigenschaften der Konchoide, so viel mir hier nötig schien, bekant gemacht und dadurch das erste Stük diser Schrift abgehandelt habe, so wende ich mich jezt zu dem zweiten, in welchem ich zeigen werde, wie der Inhalt der Fässer gefunden wird, von welchen die Dauben nach der Krümmung einer Muschellinie gebogen sind. — Ich kan nicht leugnen, daß mir diser Teil mehr Mühe gekost hat, als der erste, weil ich bei keinem Schriftsteller etwas gefunden habe, was auf den Inhalt eines konchoidischen Körpers, von einer solchen Gestalt, als bei diser Untersuchung vorkömt, eine Bezihung hätte.

Eigentlich sol in disem Abschnit die Auflösung folgender Aufgabe enthalten sein. Man sucht den Inhalt eines Körpers, der durch Umdrehung des Bogens der Konchoide MAN, um die Asimptote TU, oder vielmehr, durch die Umdre-

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-686390-p0025-1

Umdrehung der Figur NAMUT um die Linie UT erzeugt wird. Ein solcher Körper hat volkommen die Gestalt eines Fasses, dessen Inhalt hier gesucht werden sol.

Die Asimptote TU ist also die Axe des Fasses, und $BC = AC = a$.

Um dise Aufgabe mit der wenigsten Mühe zu lösen, mus man sich das Fas in zwei Teile geteilt vorstellen.

1) In einem Zilinder, von welchem der Durchmesser der Grundfläche MO oder NL, und dessen Länge NM, oder TU ist.

2) In einen Ring, der aussen um disen Zilinder läuft, und an welchem NAMPN der Durchschnit ist.

Der Inhalt des ersten Stüks wird sehr leicht gefunden, allein die Berechnung des zweiten ist viel müsamer; doch kan man den Inhalt desselben **durch Näherung** finden, wenn man sich der Regel des bekanten Jesuiten **Paul Guldin** bedient, welche in Berechnungen diser Art einen ausgebreiteten Nuzen hat. Die Regel ist dise, **jeder Körper der durch Umdrehung einer Fläche entsteht, ist gleich dem Inhalt diser Fläche, multipliziert in den Weg oder Kreis, den der Mittelpunkt der Schwere derselben Fläche, beschreibt.**

Man

Man mus deswegen erst die Grundfläche, und dan den Mittelpunkt der Schwere des Profils oder des Durchschnits von dem Ring bestimmen.

Sezt man nun $AP = x$, und wie vorhin $PM = y$, so ist die Grundfläche $2\int ydx$; und in den Anfangsgründen der Statik, findet man für Ap, den Abstand des Mittelpunkts der Schwere p, von dem Scheitel A, $\frac{\int yxdx}{\int ydx}$, folglich

$$Cp = CA - Ap = a - \frac{\int yxdx}{\int ydx}$$

$$= \frac{a.\int ydx - \int yxdx}{\int ydx}$$

Dises ist der Halbmesser des Kreises, welchen der Mittelpunkt der Schwere von der Grundfläche beschreibt, indem der Ring durch die Umdrehung derselben Fläche erzeugt wird.

Sezt man nun ferner das Verhältnis des Durchmessers zum Umkreis wie $1 : \pi$, so ist der Kreis der beschriben wird

$$\frac{2\pi(a.\int ydx - \int yxdx)}{\int ydx}$$

aber der Inhalt der beschreibenden Fläche ist, wie ich oben gesagt habe $= 2\int ydx$, folglich der Inhalt des Rings

$$\frac{2\pi(a.\int ydx - \int yxdx)}{\int ydx}.2\int ydx$$

$$= 4\pi(a.\int ydx - \int yxdx)$$

Um nun dise Größe, auf welche es hier vornämlich ankömt, integriren zu können, mus erst der Wehrt von y durch x ausgedrükt werden. Ich würde mich hierzu der oben gefundnen Gleichung bedinen können, doch der Kürze wegen wil ich nun einen andern Weg einschlagen, und den Wehrt von y gleich aus der Natur der Konchoide suchen.

Weil $AP = x$, $PN = y$ (Fig. 2.)

Ferner $BP : PN = RF : RN$

$$2a - x : y = a - x : \frac{ay - xy}{2a - x}$$

und $RN^2 = \left(\frac{ay - xy}{2a - x}\right)^2 = \frac{y^2(a-x)^2}{(2a-x)^2}$

da nun $FN^2 = RF^2 + NR^2$

so ist $aa = \frac{y^2.(a-x)^2}{(2a-x)^2} + (a-x)^2$

Hieraus erhält man

$$yy = \frac{(a^2 - (a-x)^2)(2a-x)^2}{(a-x)^2}$$

und

$$\text{und } y = \frac{(2a-x)\sqrt{(a^2(a-x)^2)}}{a-x}$$

$$= \frac{(2a-x)\sqrt{(2ax-x^2)}}{a-x}$$

Diser Wehrt von y durch x ausgedrükt, mus in der oben gefundnen Größe, welche den Inhalt des Rings bestimt, statt x werden, diser wird also sein

$$2\pi \frac{(a.\int.(2a-x)dx\sqrt{(2ax-xx)}}{a-x}$$

$$-\frac{\int.(2a-x)xdx\sqrt{(2ax-xx))}}{a-x}$$

Die Teile diser Größe müssen jeder besonders integriert werden.

$$\sqrt{(2ax-x^2)} = \sqrt{x}.\sqrt{(2a-x)} = x^{\frac{1}{2}}.(2a-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{aber } (2a-x)^{\frac{1}{2}} = (2a)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}(2a)^{\frac{1}{2}-1}x$$

$$+\frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}-1}{1.2}(2a)^{\frac{1}{2}-2}x^2 - \frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}-1.\frac{1}{2}-2}{1.2.3.}(2a)^{\frac{1}{2}-3}x^3$$

$$+\frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}-1.\frac{1}{2}-2.\frac{1}{2}-3}{1.2.3.4.}(2a)^{\frac{1}{2}-4}x^4$$

$$-\frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}-1.\frac{1}{2}-2\,\frac{1}{2}-3\,\frac{1}{2}-4}{1.2.3.4.5.}(2a)^{\frac{1}{2}-5}x^5 \text{ ff}$$

$$= (2a)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(2a)^{-\frac{1}{2}}x - \frac{1}{8}(2a)^{-\frac{3}{2}}x^2 - \frac{1}{16}(2a)^{-\frac{5}{2}}x^3 - \frac{5}{128}(2a)^{-\frac{7}{2}}x^4 - \frac{35}{1280}(2a)^{-\frac{9}{2}}x^5 \text{ ff.}$$

multiplizirt man dises mit $x^{\frac{1}{2}}$, so bekömt man

$$x^{\frac{1}{2}}.(2a - x)^{\frac{1}{2}} = (2a)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(2a)^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}(2a)^{-\frac{3}{2}}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}(2a)^{-\frac{5}{2}}x^{\frac{7}{2}} - \frac{5}{128}(2a)^{-\frac{7}{2}}x^{\frac{9}{2}} - \frac{35}{1280}(2a)^{-\frac{9}{2}}x^{\frac{11}{2}} \text{ ff.}$$

Dises mus man ferner multipliziren $2a - x$ so ist

$$(2a - x).x^{\frac{1}{2}}.(2a - x)^{\frac{1}{2}} = (2a)^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(2a)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{8}(2a)^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{16}(2a)^{-\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{128}(2a)^{-\frac{5}{2}}x^{\frac{9}{2}} \text{ ff.}$$

Dises mus man noch mit $a - x$ dividiren, der Quotus ist

2(2a)

$$2(2a)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + 4(2a)^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + 8(2a)^{-\frac{3}{2}}x^{\frac{5}{2}} + 16(2a)^{-\frac{5}{2}}x^{\frac{7}{2}} + 32(2a)^{-\frac{7}{2}}x^{\frac{9}{2}} \text{ ff.}$$

$$- \tfrac{3}{2}\,2(2a)^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{3}{2}\,4(2a)^{-\frac{3}{2}}x^{\frac{5}{2}} - \tfrac{3}{2}\,8(2a)^{-\frac{5}{2}}x^{\frac{7}{2}} - \tfrac{3}{2}\,16(2a)^{-\frac{7}{2}}x^{\frac{9}{2}} \ldots$$

$$+ \tfrac{3}{8}\,2(2a)^{-\frac{3}{2}}x^{\frac{5}{2}} + \tfrac{3}{8}\,4(2a)^{-\frac{5}{2}}x^{\frac{7}{2}} + \tfrac{3}{8}\,8(2a)^{-\frac{7}{2}}x^{\frac{9}{2}} \ldots$$

$$+ \tfrac{1}{16}\,2(2a)^{-\frac{5}{2}}x^{\frac{7}{2}} + \tfrac{1}{16}\,4(2a)^{-\frac{7}{2}}x^{\frac{9}{2}} \ldots$$

$$+ \tfrac{3}{128}\,2(2a)^{-\frac{7}{2}}x^{\frac{9}{2}} \ldots$$

$$2(2a)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + (2a)^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + 1\tfrac{1}{4}(2a)^{-\frac{3}{2}}x^{\frac{5}{2}} + 4\tfrac{5}{8}(2a)^{-\frac{5}{2}}x^{\frac{7}{2}} + 7\tfrac{23}{64}(2a)^{-\frac{7}{2}}x^{\frac{9}{2}} \ldots$$

dises ist $= \frac{(2a - x)\sqrt{(2ax - xx)}}{a - x} = y$, also

$$ydx = 2\,(2a)^{\frac{1}{2}}\,x^{\frac{1}{2}}\,dx + (2a)^{-\frac{1}{2}}\,x^{\frac{3}{2}}\,dx$$
$$+ \frac{1\;1}{4}(2a)^{-\frac{3}{2}}x^{\frac{5}{2}}dx + \frac{4\;5}{8}(2a)^{-\frac{5}{2}}x^{\frac{7}{2}}dx$$
$$+ \frac{7\;2\;3}{6\;4}(2a)^{-\frac{7}{2}}x^{\frac{9}{2}}dx \ldots$$

folglich $\int ydx = \frac{2}{3}2(2a)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}(2a)^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}$
$$+ \frac{1\;1}{4}\cdot\frac{2}{7}(2a)^{-\frac{9}{2}}x^{\frac{7}{2}} + \frac{4\;5}{8}\cdot\frac{2}{9}(2a)^{-\frac{5}{2}}x^{\frac{9}{2}}$$
$$+ \frac{7\;2\;4}{6\;4}\cdot\frac{2}{11}(2a)^{-\frac{7}{2}}x^{\frac{11}{2}} \ldots$$

und $a\int ydx = \frac{2}{3}(2a)(2a)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}a(2a)^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}$
$$+ \frac{1\;1}{4}\cdot\frac{2}{7}a(2a)^{-\frac{3}{2}}x^{\frac{7}{2}} + \frac{4\;5}{8}\cdot\frac{2}{9}a(2a)^{-\frac{5}{2}}x^{\frac{9}{2}}$$
$$+ \frac{7\;2\;3}{6\;4}\cdot\frac{2}{11}a(2a)^{-\frac{7}{2}}x^{\frac{11}{2}} \ldots$$

$$= \frac{2}{3}\,2ax\,\sqrt{(2ax)} + \frac{1}{5}\,x^2\,\sqrt{(2ax)}$$
$$+ \frac{1}{5}\frac{1}{6}\,\frac{x^3\sqrt{(2ax)}}{a} + \frac{5}{3\;2}\frac{x^4\sqrt{(2ax)}}{aa}$$
$$+ \frac{7\;2\;3}{5\;6\;3\;2}\,\frac{x^5\sqrt{(2ax)}}{a^3} \ldots$$

$$= \left(\frac{4}{3}a + \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}\frac{1}{6}x^2 : a + x^2 : a + \frac{5}{3\;2}x^3 : aa\right.$$
$$\left. + \frac{7\;2\;3}{5\;6\;3\;2}x^4 : a^3 \ldots\right) x\sqrt{(2ax)}$$

Auf dise Art ist der erste Teil, nämlich $a\int ydx$ integrirt; der zweite $\int yxdx$ wird durch den ersten gefunden; wenn man die oben gefundne Größe, die ydx gleich war, mit x multiplipliziert, so erhält man

xydx

$$xydx = 2(2a)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}dx + (2a)^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}dx$$
$$+ \tfrac{11}{4}(2a)^{-\frac{3}{2}}x^{\frac{7}{2}}dx + \tfrac{45}{8}(2a)^{-\frac{5}{2}}x^{\frac{9}{2}}dx$$
$$+ \tfrac{723}{64}(2a)^{-\frac{7}{2}}x^{\frac{11}{2}}dx \ldots .$$

und hieraus findet man one viel Mühe

$$\int yxdx = \tfrac{2}{5}\,2\,(2a)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}} + \tfrac{2}{7}(2a)^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{7}{2}}$$
$$+ \tfrac{11}{4}\cdot\tfrac{2}{9}(2a)^{-\frac{3}{2}}x^{\frac{9}{2}} + \tfrac{45}{8}\cdot\tfrac{2}{11}(2a)^{-\frac{5}{2}}x^{\frac{11}{2}}$$
$$+ \tfrac{723}{64}\cdot\tfrac{2}{13}(2a)^{-\frac{7}{2}}x^{\frac{13}{2}} \ldots .$$
$$= \tfrac{4}{5}x^2\surd(2ax) + \tfrac{1}{7}\frac{x^3\surd(2ax)}{a} + \tfrac{11}{72}\frac{x^4\surd(2ax)}{aa}$$
$$+ \tfrac{45}{352}\frac{x^5\surd(2ax)}{a^3} \ldots$$
$$= (\tfrac{4}{5}x + \tfrac{1}{7}x^2 : a + \tfrac{11}{72}x^3 : aa + \tfrac{45}{352}x^4 : a^3)$$
$$\times\ x\surd(2ax)$$

Wenn man nun von dem oben gefundenen

$$a\int ydx = (\tfrac{4}{3}a + \tfrac{1}{5}x + \tfrac{11}{56}x^2 : a + \tfrac{5}{32}x^3 : aa)$$
$$\times\ x\surd(2ax)$$

das jezt gefundene

$$\int yxdx = (\tfrac{4}{5}x + \tfrac{1}{7}x^2 : a + \tfrac{11}{72}x^3\,aa)$$
$$\times\ x\surd(2ax)$$

abziht, so erhält man

$$a\int ydx - \int yxdx = (\tfrac{4}{3}a - \tfrac{3}{5}x + \tfrac{3}{56}x^2 : a$$
$$+ \tfrac{1}{288}x^3 : aa)\ x\surd(2ax)$$

und also ist der Inhalt des Rings

$$= 4\pi\,(a\int y\,dx - \int yx\,dx)$$

$$= ((\tfrac{4}{3}a - \tfrac{7}{5}x + \tfrac{3}{56}x^2 : a + \tfrac{1}{288}x^3 : aa) \times x\sqrt{(2ax)})\,4\pi$$

Disen Inhalt hätte man auch auf einem kürzern Wege finden können. Der Ring ist

$$= 4\pi\,(a\int y\,dx - \int yx\,dx)$$

also das Differenzial hiervon

$$= 4\pi\,(ay\,dx - yx\,dx) = 4\pi\,(a - x)\,y\,dx$$

aber nach der Natur der Konchoide ist

$$y = \frac{(2a - x)\sqrt{(2ax - xx)}}{a - x}$$

also $4\pi\,(a - x)\,y\,dx$

$$= 4\pi\,\frac{(a - x)(2a - x)\sqrt{(2ax - xx)}}{a - x}\,dx$$

$$= 4\pi\,(2a - x)\sqrt{(2ax - xx)}\,dx$$

$$= 4\pi\,x^{\frac{1}{2}}(2a - x)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

Dises ist das Differenzial des Ringes, also dessen Inhalt

$$= 4\pi\,(a\int y\,dx - \int yx\,dx)$$

$$= 4\pi\,.\int x^{\frac{1}{2}}(2a - x)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

Da

Da nun $(2a - x)^{\frac{3}{2}}$ wider nach dem newtonischen Lehrsaz, in eine unendliche Reihe verwandelt wird, so findet man

$$(2a - x)^{\frac{3}{2}} = (2a)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{3}{2}(2a)^{\frac{3}{2}-1} x$$
$$+ \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}-1}{1\cdot 2}(2a)^{\frac{3}{2}-2} x^2$$
$$- \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}-1\cdot\frac{3}{2}-2}{1\cdot 2\cdot 3}(2a)^{\frac{3}{2}-3} x^3 \ldots$$

$$= (2a)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{3}{2}(2a)^{\frac{1}{2}} x + \tfrac{3}{8}(2a)^{-\frac{1}{2}} x^2$$
$$+ \tfrac{1}{16}(2a)^{-\frac{3}{2}} x^3 \ldots$$

Dises multipliziert mit $x^{\frac{1}{2}}$, so ist das Produkt

$$(2a - x)^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} = (2a)^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} - \tfrac{3}{2}(2a)^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}$$
$$+ \tfrac{3}{8}(2a)^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}} + \tfrac{1}{16}(2a)^{-\frac{3}{2}} x^{\frac{7}{2}} \ldots$$

ferner

$$(2a - x)^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx = (2a)^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx - \tfrac{3}{2}(2a)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} dx$$
$$+ \tfrac{3}{8}(2a)^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}} + \tfrac{1}{16}(2a)^{-\frac{3}{2}} x^{\frac{7}{2}} dx \ldots$$

wird dises integrirt, so erhält man

$$\int (2a - x)^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx = \tfrac{2}{3}(2a)^{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{2}{5}(2a)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{7}{2}}$$
$$+ \tfrac{3}{8}\cdot\tfrac{2}{7}(2a)^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{7}{1}} + \tfrac{1}{16}\cdot\tfrac{2}{9}(2a)^{-\frac{3}{2}} x^{\frac{9}{2}} \ldots$$

$$= \tfrac{2}{3}(2ax)(2ax)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{3}{5}x^2(2ax)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{3}{56}\frac{x^3(2ax)^{\frac{1}{2}}}{a}$$
$$+ \tfrac{1}{288}\frac{x^4(2ax)^{\frac{1}{2}}}{aa} \ldots$$

 $= (\tfrac{4}{3} a$

$$= (\tfrac{4}{3}a - \tfrac{3}{5}x + \tfrac{3}{56}x^2 : a \ldots) \times \sqrt{(2ax)}$$

daß also der Inhalt des Ringes wider gefunden wird wie oben

$$= (\tfrac{4}{3}a - \tfrac{3}{5}x + \tfrac{3}{56}x^2 : a) \times \sqrt{(2ax)}\, 4\pi.$$

Ich neme nur drei Glider von diser unendlichen Reihe, weil der Wehrt der folgenden, wenn er in Zalen ausgedrükt worden, in disem Fal sehr gering ist, so daß man ihn, one Veränderung von Wichtigkeit in der Berechnung befürchten zu dürfen, weglassen kan.

Da man nun auf dise Art den Inhalt des Rings gefunden, so ist nur noch übrig den Zilinder zu berechnen, von welchem das Rektangel MNLO ein Durchschnit ist.

Man neme also 2l für MN, die Länge des Fasses, von welchem der Halbmesser des Bodens NL $= a - x$ ist; ferner nenne man den Umkreis des Zirkels $= \pi$, und das Verhältnis des Durchmessers zum Umkreis $= 1 : \pi$, so ist die Fläche des Bodens $= \pi\,(a - x)^2$, und der gesuchte Inhalt des Zilinders $= 2l\pi\,(a - x)^2$.

Der ganze Inhalt des Fasses wird also sein

$$= 2l\pi(a - x)^2 + (\tfrac{4}{3}a - \tfrac{3}{5}x + \tfrac{3}{56}x^2 : a) \times \sqrt{(2ax)}\, 4\pi$$

$$= \left(\frac{l(a - x)^2}{2} + \left(\tfrac{3}{4}a - \tfrac{3}{5}x + \tfrac{3}{56}x^2 : a\right) \right)$$

$$\times \sqrt{(2ax)}\ 4\pi$$

Dises ist die Formel, welche durch Versuche geprüft werden mus, damit man von irem Wehrt in der Anwendung urteilen könne.

Ich gehe also nun zu den dritten Teil diser Abhandlung über, in welchem ich durch Versuche zeigen werde, daß der Inhalt der Fässer, nach meiner Metode, viel genauer gefunden werde, als bisher geschehen ist.

Zu disen Versuchen hab' ich mich sehr verschiedner Gattungen von Fässern bedient; weil es auf dise Art am besten untersucht werden konte, ob die vorgeschlagene Metode, nur bei einigen Gattungen von Fässern brauchbar sei, oder ob sie in allen Fällen angewendet werden könte.

Um an der Genauigkeit diser Versuche nichts felen zu lassen, hab' ich die Fässer, ehe sie zu den Versuchen gebraucht wurden, ganz mit Wasser gefült einige Tage stehen lassen, damit sich nicht dan, wenn ich den Inhalt der Fässer erforschen wolte, einiges Wasser in das trokne Holz zihen könte. Darnach hab' ich sie auslaufen lassen, und wider gefült mit einem Maas, das man hier **Kroes** nent, dessen Inhalt ich, schon vor einigen Jaren, bei Gelegenheit einiger Versuche, die in der oft angeführten Abhandlung er-

zehlt

zehlt sind, sehr genau untersucht und 75,60385 reinländische Kubikzol befunden habe *).

Mit disem Maas wurde erst ein irdenes Gefäß, welches oben nicht alzuweit war, und mit disem das Fas gefült. Den auf dise Art in sehr verschiednen Fässern gefundnen Inhalt werde ich nun mit der oben angegebenen Formel vergleichen.

Erster Versuch.

Zu dem ersten Versuch hab' ich das bekanteste, und am meisten vorkommende Fas, einen **Orhoft** genommen. So bald ich dis mit Wasser gefült hatte, fand ich dessen waren Inhalt = 248 Kannen.

Hier-

*) da das Kroesmaas hier nicht bekant ist, so hab' ich in den folgenden Versuchen, allemahl den Inhalt der Fässer, der im Original, in Kroesen ausgedrükt war, in leipziger Kannen verwandelt. — Das leipziger Kannenmaas ist ein Zilinder, dessen Durchmesser 4 Zol leipz. und die Höhe 5,73" beträgt, dessen Inhalt findet sich also = 71,9688 leipz. Kubikzol; und da das Verhältnis des leipz. Fußes zum reinländischen, wie bekant = 12510 : 13913 ist; so hat eine leipziger Kanne = 52,318325 reinländische Kubikzol. — Ein Kroes enthält = 75,60385 reinl. Kubikzol, daher ist eine leipziger Kanne = 0,692006 eines Kroeses, (also über $\frac{2}{3}$) und ein Kroes = $\frac{1}{0,692006}$ = 1,445074 Kannen.

d. U.

Hiermit mus nun der Inhalt, wie er nach meiner algebraischen Formel gefunden wird, verglichen werden.

Nach diser ist der Inhalt

$$= 4\pi\left(\frac{l(a-x)^2}{2} + \left(\tfrac{4}{3}a - \tfrac{3}{5}x + \tfrac{3}{56}x^2 : a\right) \times x\sqrt{(2ax)}\right)$$

Durch genaue Messung fand ich

den Durchmesser des Bauches	$= 2a$	$= 25$ reinl. Zol
den Durchmesser des Bodens	$= 2(a-x)$	$= 22{,}5$ „ „
folglich der Unterschied	$= 2x$	$= 2{,}5$ „ „
die Länge des Fasses	$= 2l$	$= 30{,}25$ „ „

das Verhältnis des Durchchmessers zum Umkreis $1 : \pi$ ist $= 1 : 3{,}14$

Also $\frac{4}{3}a$	$= 16{,}6666$	reinl. Zol
$\frac{3}{56}x^2 : a$	$= 0{,}0066$	„ „
$-\frac{3}{5}x$	$= -\ 0{,}75$	„ „
$x\sqrt{(2ax)}$	$= 6{,}9875$	„ „
$\frac{l(a-x)^2}{2}$	$= 957{,}1289$	„ „
4π	$= 12{,}56$	„ „

Dise

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-686390-p0039-2

Dise Zalen mus man in die angegebene Formel bringen, und also erhält man

$$\left(\frac{l(a-x)^2}{2}+(\tfrac{3}{4}a-\tfrac{3}{5}x+\tfrac{3}{5}\tfrac{3}{6}x^2:a)x\sqrt{(2ax)}\right)4\pi$$

$$=12,56\,(957,1289+(15,9232)\,(6,9875))$$

$$=13419,0067856 \text{ reinl. Kubikzol.}$$

Dises beträgt 252 Kannen, und da der ware Inhalt, wie wir oben gesehen 248 Kannen ist; so beträgt der Unterschied des waren und berechneten Inhalts bei einem Oxthoft nur 4 Kannen.

Zweiter Versuch.

Bei dem zweiten Versuch hab' ich mich eines sogenanten spanischen Boots bedient. Es ist dises ein großes Fas, dessen Inhalt nach der oben beschriebnen Weise = 504 Kannen gefunden wurde; es enthielt also mehr als noch einmahl so viel als das vorige enthalten hatte. — Indem ich die nohtwendigen Messungen bei disem Fas vornahm, fand ich

den Durchmesser des Bauches	$= 2a$	$= 30$	reinl. Zol
den Durchmesser des Bodens	$= 2(a-x)$	$= 26$	. .
folglich der Unterschied	$= 2x$	$= 4$	. .
die Länge des Fasses	$= 2l$	$= 43,75$	. .

folg.

folglich $\frac{3}{4}a = 20$ reinl. Zol

$$\frac{3}{56}x2 : a = 0{,}0142 \quad „ \quad „$$

$$-\frac{3}{6}x = -1{,}2 \quad „ \quad „$$

$$x\sqrt{(2ax)} = 15{,}48 \quad „ \quad „$$

$$\frac{l(a-x)^2}{2} = 1848{,}4375 \quad „ \quad „$$

$$4\pi = 12{,}56 \quad „ \quad „$$

daher ist

$$4\pi\left(\frac{l(a-x)^2}{2} + \left(\frac{3}{4}a - \frac{3}{5}x + \frac{3}{56}x^2 : a\right)x\sqrt{2ax}\right)$$

$$= 12{,}56\,(1848{,}4375 + (18{,}3142)\,(15{,}48))$$

Dises beträgt 26874,29732896 reinländ. Kubikzol = 511 Kannen; oder der Inhalt betrug 504 Kannen, also weicht der berechnete von den waren Inhalt nicht mehr als 7 Kannen ab.

Dritter Versuch.

Das Fas mit welchem ich disen Versuch anstelte, war noch größer als das vorhergehende, und nachdem ich es mit dem oben beschribenen Maas gefült hatte, betrug der ware Inhalt 651 Kannen.

Ferner fand ich bei der Ausmessung den Durchmesser des Bauches $= 2a = 34$ reinl. Zol

den

den Durchmesser

des Bodens	$=2(a-x)$	$=29$	reinl. Zol
den Unterschied	$=2x$	$=5$	. .
die Länge	$=2l$	$=43,5$	. .

folglich $\frac{4}{3}a = 22,6666$ reinl. Zol

$\frac{3}{56}x^2 : a = 0,0196$ . .

$-\frac{3}{5}x = 1,5$ . .

$x\sqrt{(2ax)} = - 23,025$ . .

$\frac{l(a-x)^2}{2} = 2286,46875$ . .

$4\pi = 12,56$ . .

Bringt man dises in die Formel

$$4\pi\left(\frac{l(a-x)^2}{2} + (\tfrac{4}{3}a - \tfrac{3}{5}x + \tfrac{3}{56}x^2 : a)x\sqrt{(2ax)}\right)$$

so entstehet daraus

$12,56\ (2286,47875 + (21,1862)\ (23,025))$

woraus man den Inhalt bekömt $=$ $= 34844,9694228$ reinländische Kubikzol, welche 660 Kannen betragen.

Der ware Inhalt war $= 651$ Kannen, der Unterschied beträgt also in disem Fal 9 Kannen, oder noch nicht völlig $\frac{1}{72}$ des ganzen Inhalts. — In der Taht ein sehr geringer Feler, wenn man die Größe des Fasses bedenkt, und auf die merklichern Abweichungen Achtung gibt, auf welche alle andre Metoden leiten, wie wir gleich sehen werden.

One

One mich dabei aufzuhalten, was in den vorigen Zeiten, da die höhere Meskunst, gleichsam noch in der Wige war, in diser Wissenschaft geschehen ist, oder die Arbeiten großer Männer des verflosnen Jahrhundert hier anzufüren, da ich von inen schon in der gedachten Abhandlung geredet, und ire Bemühungen nach Versuchen geprüft habe; werd' ich mich bloß auf die Vorschriften einschränken, welche neuere Gelehrte, von denen einige noch am Leben sind, zur Berechnung des Inhalts der Fässer gegeben haben.

Ausser Holland haben sich in disem Stük, die Herren **Camus** *) und **Lambert** **), Mitglider der Akademien zu Paris und Berlin, viel Mühe gegeben.

Her **Camus** teilt die Länge des Fasses in vier Teile, und nimt die zwei mittelsten für parabolische Bogen, die äussersten, für derselben Tangenten an. Er nent ferner den Durchmesser des Bauches $= 2a$, den Durchmesser des Bodens $= 2b$, die Länge $= 2l$, das Verhältnis des Durchmessers zum Umkreis $= 1 : \pi$ und

*) Memoir. de l'Academ. royal. de Scienc. à Paris. 1741.

**) Memoir. de Berol. Auch Diction. Encyclop. unter dem Artikel Jauger, nach der Ausgabe von Yverdon.

und findet nach disen Voraussezungen für den den Inhalt des Fasses folgende Formel

$$\frac{2\pi l}{135}(64aa + 37ad + 34bb)$$

Her **Lambert** nimt die Krümmungen der Dauben für Zirkelbogen, und sezt die halbe Länge des Fasses $= x$, den halben Durchmesmesses des Bauches $= b$, den Unterschied zwischen dem Halbmesser des Bauches und dem Halbmesser des Bodens $= c$, und findet den halben Inhalt des Fasses

$$= \pi x (bb - \tfrac{2}{3} bc + \tfrac{2}{9} cc)$$

also ist nach diser Formel *) der ganze Inhalt

$$= 2\pi x (bb - \tfrac{2}{3} bc + \tfrac{2}{9} cc)$$

Hier

*) Man hat noch eine andre Formel, die unter dem Namen der lambertischen bekant ist. Nämlich wenn wie oben der Durchmesser des Bauches $= 2a$, der Durchmesser des Bodens $= 2b$, die Länge $= 2l$, und das Verhältnis des Durchmessers zum Umkreis $= 1 : \pi$ ist; so ist der Inhalt des Fasses $= \frac{2\pi l}{3}(2a^2 + b^2)$. Der Inhalt nach diser Formel berechnet, weicht nicht viel von dem ab, den man durch die oben angegebene Formel erhält. — Ich werde weiter unten den erstern mit angeben, damit man ihn mit den andern vergleichen kan. —

d. II.

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-686390-p0044-6

Hier in Holland hat sich Her **Lulofs**, ehemaliger Lerer an der hohen Schule zu Leiden, in Bearbeitung diser Wissenschaft, so wie in allen Teilen der Größenlere und Sternkunde, die er behandelte, ausgezeichnet. Nachdem er alles, was je in diser Wissenschaft getahn worden, durchgesehen, genau geprüft, und das felerhafte angemerkt hat, gibt er folgende Regel, nach welcher der Inhalt eines Fasses, wie er behauptet, richtig gefunden wird: **Der Durchmesser eines Zilinders, welcher so groß als das Fas ist, und desselben Länge hat, besteht aus der Summe des Durchmessers des Bodens, und $\frac{6}{10}$ der Differenz zwischen den Durchmessern des Bauches und des Bodens.** Wenn also 2a der Durchmesser des Bauches, 2b der Durchmesser des Bodens, und l die Länge ist, so wird der Inhalt des Fasses sein $= \frac{l\pi(6a + 4b)^2}{100}$. Dise Regel findet man in seiner Schrift *), die er auf Befehl der kommittirten Staten von Holland herausgegeben. Er hat aber keine Versuche beigefügt.

Vor dem Hern **Lulofs** hat schon Her **Klinkenberg**, einer der größten Matematiker und Astronomen unsres Landes, und Korrespondent der königlichen Akademie zu Paris, eine kurze

C 2 Abhand-

*) Grondbeginzelen der Wynroei-en Peil-kunde §. 29.

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-686390-p0045-2

Abhandlung, über die beste Metode den Inhalt der Fässer zu finden, der holländischen Gesellschaft der Wissenschaften übergeben *); in diser Abhandlung findet sich folgende Regel. **Man neme zwei Dritteile des Durchmessers des Bauches und den Durchmesser des Bodens zusammen, dise Summe multiplizire man mit der Differenz der beiden genanten Durchmesser, und seze hierzu noch $1\frac{1}{4}$ mahl das Qvadrat des Boden-Durchmessers; und endlich multiplizire man alles dises mit $\frac{71}{113}$ der Länge des Fasses;** Wenn dises geschehen, so erhält man den verlangten Inhalt. Wenn der Durchmesser des Bauches $= 2a$, der Bodendurchmesser $= 2b$, und die Länge $= 2l$ ist, so ist der Inhalt der Fasses

$$= \frac{71}{113} 2l (1\tfrac{1}{4} . 4bb + (2a - 2b)(\tfrac{2}{3} 2a + 2b))$$

$$= \frac{142}{339} l (8aa + 4ab + 3bb)$$

Endlich folgt hier noch die Metode, nach welcher Her **Tideman**, der das Amt eines Weinvisirers mehr denn funfzig Jahr bei uns verwaltet hat, dises Stük zu erläutern pflegte. Er hat mir in besondern Gesprächen seine Gedanken hierüber eröfnet; Folgendes ist das Vornehmste davon. — Man stelle sich vor FDBGE (Fig. 3.) sei der halbe Durchschnit eines halben

*) Verhand. der Holl. Maatschapp. der Wetenschappen. Derde Deel.

ben Fasses, so ist DF, die halbe Krümmung der Dauben bei dem Spundloch, ein Kreisbogen, von welchem EF der halbe Durchmesser des Bauches, der Radius ist. Von D an laufen die Dauben DB, als Tangenten des Bogens FD, an den Punkt D, nach dem Boden BG herunter. — Dise Tangente wird aus den gegebenen Linien BG, EG, und EF sehr leicht bestimt.

Denn wenn man BG, den Halbmesser des Bodens $= b$, EG die halbe Länge des Fasses $= l$, und DE oder FE, den Halbmesser des Bauches $= a$ sezt, so ist

$$BE = \sqrt{}(BG^2 + EG^2) = \sqrt{}(bb + ll)$$

Und weil die Tangente mit dem Radius einen rechten Winkel macht, so ist

$$BD = \sqrt{}(EB^2 - ED^2 = \sqrt{}(bb + ll - aa)$$

Der Inhalt des Fasses wird auf folgende Weise gefunden. Erst sucht man den Inhalt von dem Kugelstük, das durch Umdrehung der Figur CDFE um die Seite EC entsteht, dan den Inhalt des abgekürzten Kegels, der durch Umdrehung des Trapeziums BDCG um die Seite CG erzeugt wird. Die Summe diser beiden Inhalte ist das halbe Fas, wenn man dise also doppelt nimt, so hat man den Inhalt ganzen Fasses.

Obgleich dise Metode dem ersten Ansehen nach sehr einfach zu sein scheint, so kan man sie doch, so wie die vorhergehende, one Hilfe der höhern Matematik nicht wohl verstehen. Her **Tideman** war hierin sehr erfaren, er war in den Anfangsgründen von seinem Vater unterrichtet worden, der, als **Johannes Bernoulli**, zu Ende des vorigen, und Anfang dises Jahrhunderts, das Lehramt der Meskunst, an der hohen Schule zu Gröningen bekleidete, ein Lehrling dises großen Mannes gewesen war.

Inzwischen war unsrer lezt verstorbenen Visirer glücklicher in dem ausübenden, als in dem erklärenden Teil seiner Wissenschaft. Denn wir werden bald sehen, daß der Inhalt der Fässer nach seiner Vorschrift, die ich eben angegeben habe, nicht allezeit sehr genau gefunden wird; ob er es gleich durch eine lange Uebung dahin gebracht hatte, daß er, one vorhergegangne Messung, bloß durch das Augenmaas, in sehr vilen Fällen den Inhalt der Fässer bestimmen konte. Und wenn auch seine Metode nicht mit Sicherheit angewendet werden kan, so fand er doch selbst den Inhalt der Fässer so genau, daß sein Name, bei dem erfarensten Teil unsrer Bürger, noch lange in größter Achtung bleiben wird.

Dise kleine Ausschweifung war ich dem Andenken des Hern Tideman schuldig, dessen Freundschaft ich gesucht, und auch genossen habe,

so

so viel sein Vorsaz, sichere, durch lange Uebung erlangte Wahrnemungen bei sich zu behalten, und mit sich in das Grab zu nemen, solches zulies.

Die Vorschriften welche berühmte Männer zur Berechnung der Fässer gegeben haben, und welche durch mich mitgeteilt worden sind hab' ich, sowohl als die, welche ich angegeben habe, durch Versuche geprüft. Ich werde nun das Resultat davon vorlegen, wie es nach den vorhin angeführten Regeln, jener Meskundigen, die dises Stük behandelt haben, durch genaue Rechnung gefunden wird. Und die Abweichung des berechneten Inhalts von dem waren, wird es von selbst zu erkennen geben, wessen Berechnungsart der Wahrheit am nächsten kömt.

Erster Versuch.

Mit einem Oxthoft.

Der ware Inhalt war = 248 Kannen.

Der berechnete war

	Kubikzol	Kan.	Untersch.
nach Camus	=13724,453	=161	13 K.
" Lambert *)	=13884,96	=265	17 "

nach

*) Nach der in der vorigen Anmerkung gedachdachten lambertischen Formel, ist der Inhalt = 13901,4505... Kubikzol = $265\frac{1}{2}$, und weicht

	Kubikzol	Kan. Untersch.	
nach Lulofs	=13677,84	=261	13 K.
» Klinkenberg	=13831,652549	=26½	14½ »
» Tideman	=13451,39814	=258	10 »
» Müller	=13419,0067856	=352	4 »

Zweiter Versuch.

Mit einem spanischen Boot.

Der ware Inhalt war = 504 Kannen.

Der berechnete war

	Kubikzol	Kan. Untersch.	
nach Camus	=27842,35	=531½	27½ K.
» Lambert *)	=28283,7517	=541	37 »
» Lulofs	=27700,295	=528	24½ »
» Klinkenberg	=28286,11	=540	36 »
» Tideman	=37838,7351	=531⅓	27½ »
» Müller	=26874,3973	=511	7 »

weicht also von dem waren Inhalt um 17½ Kannen ab.

d. U.

*) Nach der andern Formel ist der Inhalt = 28345,0416.. Kubikzol = 542 Kannen, und der Unterschied = 38 Kannen.

d. U.

Dritter Versuch.

Mit einem Stükfas.

Der ware Inhalt war = 651 Kannen.

Der berechnete

	Kubikzol	Kan.	Untersch.
nach Camus	=35174,45	=671½	20½ K.
" Lambert *)	=35794,16	=684	33 "
" Lulofs	=34967,04	=669	18 "
" Klinkenberg	=35793,255	=683	32 "
" Tideman	=35261,35	=673	22 "
" Müller	=34844,969	=660	9 "

Dise Vorstellung der verschiednen Resultate, welche so sehr unterschiedne Formeln geben, überhebt mich einer weitern Anpreisung der Vorteile, welche meine Metode, das Fas als einen konchoidischen Körper anzusehen, über alle andre Metoden hat, ich wil nur noch dise sehr wichtige Anmerkung hinzufügen: Nämlich, daß der berechnete Inhalt, welche Metode oder Formel man auch wäle, allezeit größer sei als der ware, daß aber **diser Unterschied des waren und des berechneten Inhalts, bloß** bei-

*) Nach der vorhingedachten Formel ist der Gehalt = 35889, 0225 reinländische Kubikzol = 685 Kannen, er weicht also von dem waren um 34 Kannen ab.

bei meiner Metode in einem bestimten Verhältnis mit dem waren Inhalt stehe; ein Verhältnis, durch welches man in allen Fällen die Abweichung des berechneten Inhaltes von dem waren, so viel vermindern kan, daß sie nicht mehr in Betrachtung gezogen werden darf; und daß also der berechnete Inhalt, wenn man den gefundenen Unterschied davon abgezogen hat, als wahr angesehen werden kan.

Es wird die Mühe lonen dise Regel durch einige Beispile zu erläutern.

Bei dem ersten Versuch mit einem Oxthoft war

der berechnete Inhalt	=	252 Kannen
der Unterschied	=	4 Kannen
der ware Inhalt	=	248 Kanner.

Bei dem zweitem Versuch mit einem spanischen Boot, war

der berechnete Inhalt	=	511 Kannen
der Unterschied	=	7 Kannen
der ware Inhalt	=	504 Kannen.

In dem dritten Versuch mit einen Stükfas war

der berechnete Inhalt	=	660 Kannen
der Unterschied	=	9 Kannen
der ware Inhalt	=	661 Kannen.

Man

Man siht aus dem ersten Versuch, daß ein Inhalt eines Fasses von 252 Kannen, welcher durch Rechnung nach meiner Formel gefunden wird, einen Unterschied von dem waren Inhalt von 4 Kannen gibt, und dasselbe findet man auch ungefehr bei den andern Versuchen. Wenn man also den Unterschied des waren und berechneten Inhalts, in disen und andern Fällen sehr nahe zu wissen verlangt, so hat man nichts weiter nötig, als die vierte Proporzional-Zahl zu 252 ; 4, und dem Inhalt, der durch die Formel in dem vorkommenden Fal gefunden worden, zu suchen. — Dise vierte Proporzional-Zahl wird beinahe den gesuchten Unterschied geben, das ist eine Zahl, welche man von dem durch Rechnung gefundnen Inhalt abzihen mus, um dadurch den waren Inhalt sehr nahe zu erhalten. Z. B. Man nenne die gesuchte Zahl, oder den Unterschied $= z$, so ist

$$252 : 4 = 511 : z$$

$$\text{also } z = \frac{4 \cdot 511}{252} = 8$$

$$\text{folglich der Inhalt} = 511 - 8 = 503$$

Der auf dise Art gefundne Inhalt weicht also jezt nur um eine Kanne von dem waren Inhalt, der 504 Kannen betrug, ab.

Ferner, nach dem dritten Versuch

$$252 : 4 = 660 : z$$

$$\text{und } z = \frac{4 \cdot 660}{252} = 10$$

folglich der Inhalt $= 660 - 10 = 650$.

Der ware Inhalt war $= 651$ Kannen, also beträgt nun der Unterschied des berechneten Inhalts von dem waren eine Kanne; ein Unterschied, der, so wie der vorige, bei Fässern von so ansehnlichem Inhalt gar nicht in Betrachtung kommen kan.

Da ich meine Regel in den nur erzählten Versuchen so glüklich angewendet hatte, so wolte ich sie überdis noch in einem andern Fal prüfen, hierzu bestimte ich folgenden Versuch.

Vierter Versuch.

Das Fas, dessen ich mich zu disem Versuch bediente, war ein Trom, und nachdem ich dises Fas auf die oben gemeldete Art mit Wasser gefült hatte fand ich dessen waren Inhalt $= 300\frac{1}{2}$ Kanneu.

Ferner fand ich nach genauen Messungen

der Durchmesser
des Bauches $= 2a = 29$ reinl. Zol
den Durchmesser
des Bodens $= 2(a-x) = 25,5$ „ „

folg-

folglich der Unterschied	=	$2x$	= 3,5 reinl. Zol.
die Länge des Fasses	=	$2l$	= 26,75 = =

Nachdem ich nun dise Größen in die oben angegebene Formel gebracht, und den Inhalt genau ausgerechnet hatte, so fand sich derselbe

nach Camus	= 306	=	=	$5\frac{1}{2}$	Kannen
= Lambert *)	= $310\frac{1}{2}$	=	=	10	=
= Lulofs	= $304\frac{1}{2}$	=	=	4	=
= Klinkenberg	= $310\frac{1}{2}$	=	=	10	=
= Tideman	= 302	=	=	$1\frac{1}{2}$	=
= Müller	= 306	=	=	$5\frac{1}{2}$	=

Ich habe den Unterschied des waren und des berechneten Inhalts, in disem so wie in den vorhergehenden Versuchen, dabei gesezt, weil der ware Inhalt durch vorhergehende Messung mit Wasser bekant war, aber man bedine sich der

*) Nach der oben gedachten lambertischen Formel $\frac{2\pi l}{3}(2a^2 + b^2)$ beträgt der Inhalt 16324,778229 . . . reinländische Kubikzol = 312 Kannen, der Inhalt nach diser Formel weicht also von dem waren um $11\frac{1}{2}$ Kannen ab. — Uebrigens siht man, daß der Inhalt nach diser so genanten lambertischen Formel, von dem, nach der Formel welche Lambert selbst angegeben hat, wenig abweicht, der Unterschied beträgt hier nur $1\frac{1}{2}$ Kanne.

der von mir angegebenen Regel, und man wird disen Unterschied, und dadurch den Inhalt sehr wenig von den waren unterschiden finden.

Man seze also

$$252 : 4 = 306 : z$$

$$\text{uud } z = \frac{4 \cdot 306}{252} = 4{,}85$$

also der Inhalt $= 306 - 4{,}85. = 301{,}15$. welcher nun nicht mehr als 0,65 einer Kanne von dem waren Inhalt $= 300\frac{1}{2}$ Kannen unterschiden ist, welches bei einem solchen großen Fasse gewis unbeträchtlich ist.

Auch trift die Rechnung nach der Metode des Hern Tideman in disem Fal sehr genau zu, und weicht von dem waren Inhalt nur um $1\frac{1}{2}$ Kanne ab, welches bei einem Fas von $300\frac{1}{2}$ Kannen unmerklich ist. Könte man die Metode, die er vorgeschlagen hat, überal so glüklich anwenden, gewis man hätte nicht Ursache gehabt, auf eine andre zu denken; wir haben aber in den drei vorhergehenden Versuchen gesehen, wie viel dise und andre von dem waren Inhalt abweichen, und wie sehr dadurch meine Bemühung gerechtfertigt wird, daß ich aus den Eigenschaften der Konchoide eine bessere Metode herzuleiten gesucht habe.

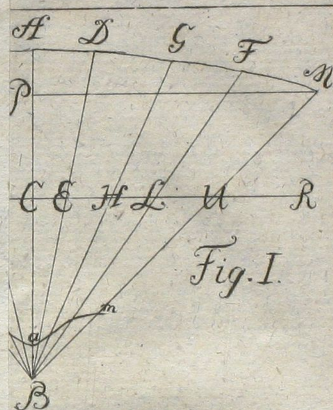

Fig. I.

II.

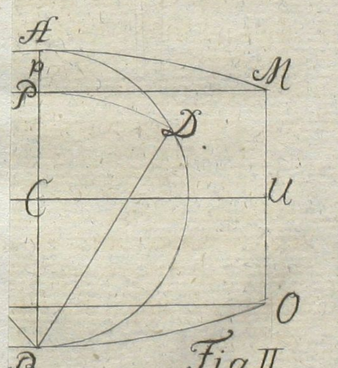

Fig. II.

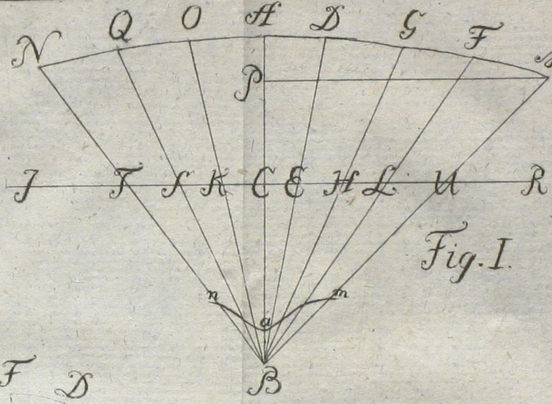

Fig. I.

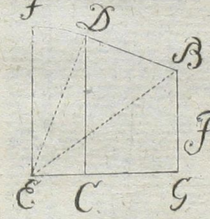

Fig. III.

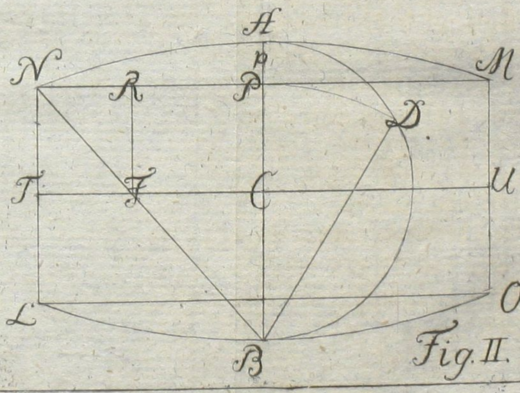

Fig. II.

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-686390-p0058-4

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-686390-p0059-3

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-686390-p0060-5

Pe 160

ULB Halle 3
006 526 306

VD18

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-686390-p0062-6

Martin Müllers

Ingenieurs, Landmessers und Visirers
zu Gröningen

Versuch

den

Inhalt der Fässer

durch

Anwendung der Muschellinie

zu finden.

Aus dem Holländischen.

Mit einem Kupfer.

Leipzig,
bei Christian Gottlieb Hilscher,
1784.

Universitäts- und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt
urn:nbn:de:gbv:3:1-686390-p0063-2