Inhalt.

DISSERTATIO INAVGVRALIS MATHEMATICA
DE
SERIEBVS DIFFERENTIALIBVS
QVAE
EX POTENTIIS NVMERORVM IN SERIE NATVRALI PROGREDIENTIVM SVBTRAHENDO ELICI POSSVNT;

QVAM
CONSENTIENTE ILLVSTRI PHILOSOPHORVM ORDINE
PRO
SVMMIS IN PHILOSOPHIA HONORIBVS
PVBLICE DEFENDET

AVCTOR
IOANNES NICOLAVS MÜLLER
BIPONTINVS

D. XXIV. APRILIS CIƆ IƆ CCLXXXIV.

GOETTINGAE
LITTERIS FRIDERICI ANDREAE ROSENBVSCH.

VIRIS

ILLVSTRI, EXCELLENTISSIMIS, AMPLISSIMIS,

CELEBERRIMISQVE

M. ABRAHAM GOTTHELF KAESTNER

REGI A CONSIL. AVL.

MATH. ET PHYS. P. P. O. SOCIET. REG. SCIENT.

SODALI, SOC. REG. THEOTISCAE SENIORI.

NEC NON

M. GEORGIO CHRISTOPHORO LICHTENBERG

PROF. PHILOS. PVBLICO ORDINARIO,

SOCIETATIS REGIAE SCIENT. GOETTINGENSIS

SODALI.

PRAECEPTORIBVS SVIS OPTIMIS,

OMNI PIETATE HOCCE SPECIMEN SACRAT

DEDITISSIMVS AVCTOR.

RATIO INSTITVTI.

§. I.

Multas quidem tam ex Mathesi pura quam applicata, quas pertractarem, res eligere potuissem; omnibus tamen rite perpensis, illis potissimum explicandis explanandisque operam meam navare statui, quae in illis difficillimis sane atque quam maxime implicitis ex Illustris *Kaestneri* Analysi finiti propositionibus versarentur. Quum enim jam per plures annos secundum excellentissimum hocce compendium Algebra et Analysi finiti instruxerim juvenes, necessarium mihi visum est, rerum ex illo difficillimarum expositionem plagulis perscriptam cum ipsis cummunicare. At vero illud minime hoc obtinere potui instituto, quod quidem ut assequendi mihi potestas sit, nec ullae parcens operae, nitebar, ut algebrae scilicet cuivis Matheseos perdiscendi studioso utilissimae propositiones tam vulgares, perspicuae, cognituque faciles inde redderentur, quam in tanta hujus doctrinae difficultate ullo modo exspectari posset. Quantum igitur pro viribus meis ac qua animum meum imbuere maximis quaesivi viribus, eruditione, mihi licet, problemata quaedam theoremataque ad Algebram pertinentia, quibus quidem tirones maxime offenduntur succisivis horis magis magisque explanare et ad eorum captum faciliora reddere institui. Illud igitur cum mihi instet tempus, quo singulare illorum, quos studiis

 meis

meis fecerim progressuum, specimen a me exhiberi, desideratur, de differentiarum seriebus praecipue agere volui, quae ex potentiis numerorum inserie naturali progredientium subtrahendo elici possunt. Antequam autem ad ipsum meum progrediar institutum, algebraicas quasdam expressiones ut exponam necesse est.

Si numerus par algebraice exprimi debet, scribitur $2n$ vel $2m$; si numerus impar, ponitur $2m+1$ et $2n+1$, qui cunque numerus integer sub litteris m et n intelligatur. Porro si 1 significat numerum imparem primum, erunt in formulis $2m+1$ et $2n+1$ litterae m et $n = 0$. Significent igitur litterae m et n in continuum omnes numeros naturales, sequentes expressiones $2.0+1=1$; $2.1+1=3$; $2.2+1=5$; $2.3+1=7$; $2.4+1=9$; $2.5+1=11$; $2.6+1=13$; $2.7+1=15$; $2.8+1=17$. exhibebunt primum, secundum, tertium, quartum, quintum, sextum, septimum, octavum, nonum, numerum imparem. Sic $2.6+1=13$ est numero septimo impari aequalis, et $2.7+1=15$ est aequalis numero impari octavo. Itaque expressio universalis $2m+1$ vel $2n+1$ significat numerum imparem $(m+1)^{\text{mum}}$ vel $(n+1)^{\text{mum}}$.

Scholion. Numeri impares his etiam formulis $2m-1$ et $2n-1$ exprimi possunt, sed illae ad nostrum propositum non sunt necessariae.

§. II.

Si numeri m et $m+1$, qui unitate tantum differunt, ad dignitatem secundam evehantur, vel eorum quadrata constentur, sequentes obtinentur expressiones, m^2; $m^2+2m+1=(m+1)^2$. Detracto quadrato numeri m nempe m^2 a quadrato numeri $m+1$ scilicet a $m^2+2.m+1$, erit differentia $2.m+1$ aequalis numero impari $(m+1)^{\text{mo}}$. Sit igitur

$m=0$,

$m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ cet; ſequitur $m+1 = 0+1 = 1$; $1+1=2$; $2+1=3$; $3+1=4$; $4+1=5$; $5+1=6$; $6+1=7$; $7+1=8$; $8+1=9$; $9+1=10$ cet; et $2m+1 = 2.0+1=1$; $2.1+1=3$; $2.2+1=5$; $2.3+1=7$; $2.4+1=9$; $2.5+1=11$; $2.6+1=13$; $2.7+1=15$; $2.8+1=17$; $2.9+1=19$. Quorum numerorum nexus ut eo melius perſpiciatur, hoc illi modo collocari poſſunt:

Numeri		Quadrata		differentia = numero impari	
m	$m+1$	m^2	$(m+1)^2 = m^2+2m+1$	$2m+1$ = num. impari	$(m+1)^{mo}$
0	$0+1=1$	0	$0^2+2.0+1=1^2 = 1.$	$2.0+1=1 =$	primo.
1	$1+1=2$	1	$1^2+2.1+1=2^2 = 4.$	$2.1+1=3 =$	ſecundo.
2	$2+1=3$	4	$2^2+2.1+1=3^2 = 9.$	$2\ 2+1=5 =$	tertio.
3	$3+1=4$	9	$3^2+2.3+1=4^2 = 16.$	$2.3+1=7 =$	quarto.
4	$4+1=5$	16	$4^2+2.4+1=5^2 = 25.$	$2.4+1=9 =$	quinto.
5	$5+1=6$	25	$5^2+2.5+1=6^2 = 36.$	$2.5+1=11 =$	ſexto.
6	$6+1=7$	36	$6^2+2.6+1=7^2 = 49.$	$2.6+1=13 =$	ſeptimo.
7	$7+1=8$	49	$7^2+2.7+1=8^2 = 64.$	$2.7+1=15 =$	octavo.
8	$8+1=9$	64	$8^2+2.8+1=9^2 = 81.$	$2.8+1=17 =$	nono.
9	$9+1=10$	81	$9^2+2.9+1=10^2 = 100.$	$2.9+1=19 =$	decimo.

Formula $2m+1$ exprimit univerſaliter quamcunque indeterminatam duorum quadratorum differentiam, quorum radices m et $m+1$ unitate tantum differunt. Vel $2m+1$ eſt terminus generalis primus in ſerie prima differentiarum, qui igitur conſiſtit ex ſumma radicum ambarum m et $m+1$, ſeu qui aequalis eſt duplo radicis minoris unitate aucto. Poſito in formula $2m+1$ loco m nunc $m+1$, ſequitur $2(m+1)+1 = 2m+2+1 = 2m+3$; quae expreſſio refert in ſerie prima differentiarum terminum generalem secundum. Demto termino primo generali $2m+1$ a termino secundo $2m+3$, erit differentia $= 2$. Ex quo patet, omnes in serie differentiali secunda terminos inter se esse aequales et quemcunque $= 2 = 2 . 1 =$ numero constanti.

Inde constat, numerorum naturalium quadrata non nisi duas differentiarum series exhibere, quarum prima continet in continuum numeros impares, secunda vero in singulo termino numerum 2. Si in formula $2m+1$ loco $+m$ ponatur $-m$, abit $2m+1$ in $-2m+1$. Porro si in $-2m+1$ loco $-m$ sumatur $-m-1$; obtinebitur haec expressio $2(-m-1)+1 = -2m-2+1 = -2m-1 = -(2m+1)$; quod manifeste ostendit, numerorum naturalium negative sumtorum quadrata a se detracta, eosdem ut antea numeros impares, sed tantum negativos exhibere. Quae res tabula sequente satis illustratur.

Numeri	Quadrata	diff. I.	diff. II.
− 9	+ 81.	− 17.	+ 2.
− 8	+ 64.	− 15.	+ 2.
− 7	+ 49.	− 13.	+ 2.
− 6	+ 36.	− 11.	+ 2.
− 5	+ 25.	− 9.	+ 2.
− 4	+ 16.	− 7.	+ 2.
− 3	+ 9.	− 5.	+ 2.
− 2	+ 4.	− 3.	+ 2.
− 1	+ 1.	− 1.	+ 2.
0	+ 0.	+ 1.	+ 2.
+ 1	+ 1.	+ 3.	+ 2.
+ 2	+ 4.	+ 5.	+ 2.
+ 3	+ 9.	+ 7.	+ 2.
+ 4	+ 16.	+ 9.	+ 2.
+ 5	+ 25.	+ 11.	+ 2.
+ 6	+ 36.	+ 13.	+ 2.
+ 7	+ 49.	+ 15.	+ 2.
+ 8	+ 64.	+ 17.	+ 2.
+ 9	+ 81.		

Ex tabula praecedente facile intelligitur, quomodo numerorum reliquorum quadrata haud difficile addendo fieri possint. E. g. ad conflandum numeri 10 quadratum, tantum opus est, ut primum numerus 2 numero 17 addatur, qui simul sumti aequales sunt numero 19, cui deinde iterum additur 81, quorum summa evadit aequalis $19+81 = 100 = 10^2$ = quadrato numeri 10. Etiam ope formulae $2m+1$, quae est differentia duorum quadratorum m^2 et m^2+2m+1 non magno opere numerorum quadrata componi possunt. Si v. g. quadratum numeri 10 cognitum habetur, quadratum numeri 11 facile obtinetur; quia tum $m = 10$; $m+1 = 11$ et quadratum $(m+1)^2 = m^2+2m+1 = (10+1)^2 = 10^2+2.10+1$; sequitur; ut quadrato numeri 10 modo addi debent $2.10+1$ vel numerus impar undecimus, ad componendum quadratum numeri 11. Ex consideratione formulae $2m+1$ alia etiam est in promtu methodus quadrata numerorum faciendi addendo tot numeros impares, si ab unitate incipiatur, quot unitatibus constat is numerus, cujus quadratum quaeritur. Si e. g. quadratum numeri 4 quaeras, tantummodo quatuor primos numeros imparas 1, 3, 5, 7 simul sumas necesse est. Est enim $1+3+5+7 = 16 = 4^2$.

§. III.

Sint numeri quicunque integri m et $m+1$ indeterminati dati, qui unitate tantum se excednnt, et quorum cubi $m^3 = (m)^3$ atque $m^3+3m^2+3m+1 = (m+1)^3$, erit terminus differentiae primae universalis $3m^2+3m+1 = (m+1)^3 - m^3$. Quibus factis si in residuo $3m^2+3m+1$ ponatur $m+1$ loco m, evadit expressio $3(m+1)^2+3(m+1)+1 = 3(m^2+2m+1)+3(m+1)+1 = 3m^2+6m+3+3m+3+1 = 3m^2+9m+7$ i. e. aequalis termino differentiae primae secundo universali. Demto porro $3m^2+3m+1$ a $3m^2+9m+7$ residuum erit $6m+6$, quod terminum differentiae secundae primum indefinitum refert.

refert. Posito iterum in $6m+6$, $m+1$ loco m, redundabit expressio $6(m+1)+6 = 6m+6+6 = 6m+12$ aequalis termino differentiae secundae cuicunque generali; a quo si detrahas $6m+6$ proveniet terminus differentiae tertiae vel ultimae $6 = 3.\ 2.\ 1.$ i. e. aequalis producto ex tribus numeris naturalibus prioribus ab unitate incipientibus. In tabula sequente primo quasi intuitu calculus perspicitur.

Numeri		Cubi.	
m	$m+1$	m^3	$m^3+3m^2+3m+1=(m+1)^3$.
0	$0+1=1.$	$0^3=0.$	$0^3+3.\ 0^2+3.\ 0+1=1.$
1	$1+1=2.$	$1^3=1.$	$1^3+3.\ 1^2+3.\ 1+1=8.$
2	$2+1=3.$	$2^3=8.$	$2^3+3.\ 2^2+3.\ 2+1=27.$
3	$3+1=4.$	$3^3=27.$	$3^3+3.\ 3^2+3.\ 3+1=64.$
4	$4+1=5.$	$4^3=64.$	$4^3+3.\ 4^2+3.\ 4+1=125.$
5	$5+1=6.$	$5^3=125.$	$5^3+3.\ 5^2+3.\ 5+1=216.$
6	$6+1=7.$	$6^3=216.$	$6^3+3.\ 6^2+3.\ 6+1=343.$
7	$7+1=8.$	$7^3=343.$	$7^3+3.\ 7^2+3.\ 7+1=512.$
8	$8+1=9.$	$8^3=512.$	$8^3+3.\ 8^2+3.\ 8+1=729.$
9	$9+1=10.$	$9^3=729.$	$9^3+3.\ 9^2+3.\ 9+1=1000.$

Diff. I.	Diff. II.	Diff. III.
$3m^2+3m+1.$	$6m+6$	6
$3.\ 0^2+3.\ 0+1=1.$	$6.\ 0+6=6.$	$6=3.\ 2.\ 1.$
$3.\ 1^2+3.\ 1+1=7.$	$6.\ 1+6=12.$	$6=3.\ 2.\ 1.$
$3.\ 2^2+3.\ 2+1=19.$	$6.\ 2+6=18.$	$6=3.\ 2.\ 1.$
$3.\ 3^2+3.\ 3+1=37.$	$6.\ 3+6=24.$	$6=3.\ 2.\ 1.$
$3.\ 4^2+3.\ 4+1=61.$	$6.\ 4+6=30.$	$6=3.\ 2.\ 1.$
$3.\ 5^2+3.\ 5+1=91.$	$6.\ 5+6=36.$	$6=3.\ 2.\ 1.$
$3.\ 6^2+3.\ 6+1=127.$	$6.\ 6+6=42.$	$6=3.\ 2.\ 1.$
$3.\ 7^2+3.\ 7+1=169.$	$6.\ 7+6=48.$	$6=3.\ 2.\ 1.$
$3.\ 8^2+3.\ 8+1=217.$	$6.\ 8+6=54.$	$6=3.\ 2.\ 1.$
$3.\ 9^2+3.\ 9+1=271$	$6.\ 9+6=60.$	$6=3.\ 2.\ 1.$

Id quod modo diximus de potentia ſecunda et tertia numerorum naturalium manifeſte declarat, in utraque differentiae ultimae terminum eſſe aequalem producto ex prioribus numeris naturalibus ab unitate incipientibus usque ad numerum dignitatis gradum deſignantem hoc incluſo. Porro apparet, ex poteſtate ſecunda et tertia numerorum tot ſeries differentiarum deduci poſſe, quod unitatibus conſtat exponens dignitatis gradum determinans, ex ſecunda ſcilicet duas § 2, ex tertia tres § 3. Quod mox univerſaliter demonſtraturi ſumus. (Vid. §§ 39 - 45. pag. 20. ſeqq. Analyſ. finiti Illuſt. Kaeſt.)

§ IV.

Problema.

Si numeri quicunque indeterminati x et x+e, qui quantitate e ſe excedunt, ad dignitatem cuiuscunque gradus eleventur, determinare differentiarum ſeries, quae inde elici poſſint, factoresque, ex quibus terminus in ultima differentiarum ſerie unusquisque compoſitus ſit. (Vid. §. 310. pag. 158. Analyſ. Finiti Illuſt. Kaeſt.)

Reſolutio et demonſtratio.

I.

Perſpicuitatis gratia incipiam ab exemplo potentiae 6. Sit igitur exponens dignitatis gradum exhibens aequalis numero 6, vel x et x+e ad dignitatem ſexti gradus evehantur, prodeunt x^6 et $(x+e)^6 = x^6 + 6ex^5 + 15e^2x^4 + 20e^3x^3 + 15e^4x^2 + 6e^5x + e^6$. Demta potentia x^6 ab illa $(x+e)^6$ erit reſiduum aequale $(x+e)^6 - x^6 = 6ex^5 + 15e^2x^4 + 20e^3x^3 + 15e^4x^2 + 6e^5x + e^6 = A^{I}$, hoc eſt aequale termino ſeriei differentialis primae primo. Qui quidem terminus ipſe, eo ſenſu generalis eſt, quod x poſſit numerum quemvis deſignare.

Itaque

Itaque si hic pro integro indeterminato accipiatur, series numeros integros continens inchoari cogitatur ab x; et ita primae seriei diffentialis terminus primus est $(x+e)^6 - x^6$.

2.

In hoc termino primae differentialis $x+e$ loco x posito, habebimus terminum seriei differentialis primae secundum, aequalem $A^{II} = 6e\,(x+e)^5 + 15\,e^2\,(x+e)^4 + 20e^3\,(x+e)^3 + 15\,e^4\,(x+e)^2 + 6e^5\,(x+e) + e^6$; vel evolutis potentiis, ad quas $x+e$ evectum est, prodibit

A^{II}

$$+ 6e\,(x+e)^5 = 6e\,(x^5 + 5ex^4 + 10e^2x^3 + 10e^3x^2 + 5e^4x + e^5) =$$
$$6ex^5 + 30e^2x^4 + 60e^3x^3 + 60e^4x^2 + 30e^5x + 6e^6.$$

$$+ 15e^2(x+e)^4 = 15e^2.\,(x^4 + 4ex^3 + 6e^2x^2 + 4e^3x + e^4) =$$
$$15e^2x^4 + 60e^3x^3 + 90e^4x^2 + 60e^5x + 15e^6.$$

$$+ 20e^3\,(x+e)^3 = 20e^3.\,(x^3 + 3ex^2 + 3e^2x + e^3) =$$
$$20e^3x^3 + 60e^4x^2 + 60e^5x + 20e^6.$$

$$+ 15\,e^4\,(x^2+e)^2 = 15e^4\,(x^2 + 2ex + e^2) = 15\,e^4x^2 + 30\,e^5x + 15e^6.$$

$$+ 6e^5\,(x+e) = 6e^5\,(x+e) = 6e^5x + 6e^6.$$

$$+ e^6 = e^6 = e^6.$$

3.

Ex quo apparet, tot in A^{II} series obtentas esse, quod in termino A^{I} generali ad fuerunt dignitates, ad quas x elevantum venit, in exemplo nostro scilicet quinque. Quarum serierum in A^{II} quaevis pars prima ma x ad dignitatem maximi gradus evectum continens aequalis est parti in A^{I} cuivis x ad dignitatem ejusdem gradus elevatum continenti.

4.

Si igitur omnes partes in A^{I} ab omnibus singulis partibus initialibus, quibus nempe series apud A^{II} incipiunt, quaeque iis in A^{I} contentis aequales sunt, detrahantur; tunc omnes partes singulae initiales in A^{II} delentur ab iisdem in A^{I} aequalibus.

5.

Reliquae vero partes in A^{II}, quae x ad eandem potentiam evectum habent, si addantur, tunc prosilit nova series B^{I}, quae terminum quemcunque differentiae secundae generalem primum refert. Erit enim ille $B^{I} = 30\,e^2 x^4 + 120\,e^3 x^3 + 210\,e^4 x^2 + 180\,e^5 x + 62\,e^6$. In quo rursus $x+e$ Loco x posito sequitur series $B^{II} = 30\,e^2\,(x+e)^4 + 120\,e^3\,(x+e)^3 + 210\,e^4\,(x+e)^2 + 180\,e^5\,(x+e) + 62\,e^6$, quae terminum quemcunque differentiae secundae universalem secundum repraesentat.

6.

Explicatis igitur partibus in B^{II}, quae $x+e$ ad dignitatem aliquam elevatum continent, evadit series $B^{II} =$

$$+ 30\,e^2\,(x+e)^4 = 30\,e^2\,(x^4 + 4\,e\,x^3 + 6\,e^2 x^2 + 4\,e^3 x + e^4) = 30\,e^2 x^4 + 120\,e^3 x^3 + 180\,e^4 x^2 + 120\,e^5 x + 30\,e^6.$$

$$+ 120\,e^3\,(x+e)^3 = 120\,e^3.\,(x^3 + 3\,e\,x^2 + 3\,e^2 x + e^3) = 120\,e^3 x^3 + 360\,e^4 x^2 + 360\,e^5 x + 120^6.$$

$$+ 210\,e^4\,(x+e)^2 = 210\,e^4\,(x^2 + 2\,e\,x + e^2) = 210\,e^4 x^2 + 420\,e^5 x + 210\,e^6.$$

 + 180

$+ 180\, e^5 (x+e) = e^5 (x+e) = 180\, e^5 x + 180\, e^6.$
$+ 62\, e^6 = 62\, e^6 = 62\, e^6.$

7.

Subtractis porro partibus in B^I ab iis in B^{II}, quae illis in B^I contentis aequales sunt, tum omnes partes initiales in B^{II} delentur ab iisdem aequalibus in B^I. Quae igitur adhuc restant partes in B^{II}, quaeque x ad dignitatem ejusdem gradus evectum continent, si addantur, illarum summa determinat terminum quemcunque differentiae tertiae indefinitum primum C^I, qui aequalis est $120\, e^3 x^3 + 540\, e^4 x^2 + 900\, e^5 x + 540\, e^6$. In quo si denuo $x+e$ loco x ponatur, abibit inde C^I in C^{II}, id est, in terminum scilicet quemcunque differentiae tertiae generalem secundum, qui aequalis est sequenti expressioni $C^{II} = 120\, e^3 (x+e)^3 + 540\, e^4 (x+e)^2 + 900\, e^5 (x+e) + 540\, e^6$.

8.

Evolutis partibus in C^{II}, inquibus $(x+e)$ ad potentiam alicujus gradus elevatum venit, tunc C^{II} in hanc formulam abibit

C^{II}

$+ 120\, e^3 (x+e)^3 = 120\, e^3. (x^3 + 3\, e x^2 + 3\, e^2 x + e^3) =$
$120\, e^3 x^3 + 360\, e^4 x^2 + + 360\, e^5 x + 120\, e^6.$
$+ 540\, e^4 (x+e)^2 = 540\, e^4 (x^2 + 2\, e x + e^2) = 540\, e^4 x^2 +$
$1080\, e^5 x + 540\, e^6.$
$+ 900\, e^5 (x+e) = 900\, e^5 (x+e) = 900\, e^5 x + 900\, e^6.$
$+ 540\, e^6 = 540\, e^6 = 540\, e^6.$

9.

Ab omnibus partibus initialibus in C^{II} si detrahantur partes in C^I eae, quae illis aequales sunt, deinde reliquae partes in C^{II} x ad eandem potestatem

tem elevatum continentes simul sumantur, tunc nova eruitur series D^{I}, quae terminum quemcunque differentiae quartae indeterminatum primum refert, quaeque aequalis est $360\,e^4\,x^2 + 1440\,e^5\,x + 1560\,e^6$.

10.

Qua in formula $x + e$ loco x posito, exhibetur expressio D^{II} aequalis $360\,e^4\,(x+e)^2 + 1440\,e^5\,(x+e) + 1560\,e^6$. Qua iterum exposita obtinebitur D^{II}

$$+ 360\,e^4\,(x+e)^2 = 360\,e^4\,(x^2 + 2ex + e^2) = 360\,e^4\,x^2 + 720\,e^5\,x + 360\,e^6.$$

$$+ 1440\,e^5\,(x+e) = 1440\,e^5\,(x+e) = 1440\,e^5\,x + 1440\,e^6.$$

$$+ 1560\,e^6 = 1560\,e^6 = 1560\,e^6.$$

11.

Omnibus partibus in D^{I} contentis, demtis ab illis, quae in D^{II} obviae conspiciuntur, quaeque quantitatem x ad eandem habent dignitatem evectum; deinde reliquae in D^{II} partes contentae x ad potestatem ejusdem gradus elevatum habentes, si addantur, prodibit terminus differentiae quintae primus universalis E^{I} aequalis $720\,e^5\,x + 1800\,e^6$.

12.

Denique etiam hic $x + e$ loco x posito, obtinetur terminus E^{II} aequalis $720\,e^5\,(x+e) + 1800\,e^6 = 720\,e^5\,x + 720\,e^6 + 1800\,e^6$, qui terminus differentiae quintae secundus generalis datur. Detractis denuo partibus illis in E^{I} contentis ab iis, quae in E^{II} initiales prostant, sequitur F^{I} $720\,e^6$, quae expressio terminum differentiae sextae constantem et immutabilem repraesentat.

13.

Quibus factis manifeſtum eſt, ſi numeri quicunque tantum quantitate e inter ſe differentes ad dignitatem ſexti gradus eleventer, tunc tot ſeries obtineri differentiarum, quot unitatibus conſtat exponens dignitatis gradum indicans. Porro apparet, terminos in ſerie differentiarum ultima omnes inter ſe aequales eſſe, et unumquemque aequalem producto, quod ex ſex prioribus numeris naturalibus ab unitate incipientibus usque ad numerum illum 6, dignitatis gradum determinantem, hoc incluſo, atque ex e^6 vel ex quantitate e ad dignitatem ſexti gradus elevata, conflatur.

§ V.

Id quod in § praecedente eruebatur, etiam alia ſequente methodo elici poteſt:

1.

$$x^6 = x^6$$

$$(x+e)^6 = x^6 + 6ex^5 + 15e^2x^4 + 20e^3x^3 + 15e^4x^2 + 6e^5x + e^6.$$

$$(x+2e)^6 = x^6 + 12ex^5 + 60e^2x^4 + 160e^3x^3 + 240e^4x^2 + 192e^5x + 64e^6.$$

$$(x+3e)^6 = x^6 + 18ex^5 + 135e^2x^4 + 540e^3x^3 + 1215e^4x^2 + 1458e^5x + 729e^6.$$

$$(x+4e)^6 = x^6 + 24ex^5 + 240e^2x^4 + 1280e^3x^3 + 3840e^4x^2 + 6144e^5x + 4096e^6.$$

$$(x+5e)^6 = x^6 + 30ex^5 + 375e^2x^4 + 2500e^3x^3 + 9375e^4x^2 + 18750e^5x + 15625e^6.$$

$$(x+6e)^6 = x^6 + 36ex^5 + 540e^2x^4 + 4320e^3x^3 + 19440e^4x^2 + 46656e^5x + 46656e^6.$$

2.

Ex quo facile invenitur.

$$(x+e)^6 - x^6 = A^{I} = 6ex^5 + 15e^2x^4 + 20e^3x^3 + 15e^4x^2 + 6e^5x + e^6.$$

$$(x+2e)^6 - (x+e)^6 = A^{II} = 6ex^5 + 45e^2x^4 + 140e^3x^3 + 225e^4x^2 + 186e^5x + 63e^6.$$

$$(x+3e)^6 - (x+2e)^6 = A^{III} = 6ex^5 + 75e^2x^4 + 380e^3x^3 + 975e^4x^2 + 1266e^5x + 665e^6.$$

$$(x+4e)^6 - (x+3e)^6 = A^{IV} = 6ex^5 + 105e^2x^4 + 740e^3x^3 + 2625e^4x^2 + 4686e^5x + 3367e^6.$$

$$(x+5e)^6 - (x+4e)^6 = A^{V} = 6ex^5 + 135e^2x^4 + 1220e^3x^3 + 5535e^4x^2 + 12606e^5x + 11529e^6.$$

$$(x+6e)^6 - (x+5e)^6 = A^{VI} = 6ex^5 + 165e^2x^4 + 1820e^3x^3 + 10065e^4x^2 + 27906e^5x + 31031e^6.$$

3.

Ex quo tum sequitur.

$$A^{II} - A^{I} = B^{I} = 30e^2x^4 + 120e^3x^3 + 210e^4x^2 + 180e^5x + 62e^6.$$

$$A^{III} - A^{II} = B^{II} = 30e^2x^4 + 240e^3x^3 + 750e^4x^2 + 1080e^5x + 602e^6.$$

$$A^{IV} - A^{III} = B^{III} = 30e^2x^4 + 360e^3x^3 + 1650e^4x^2 + 3420e^5x + 2702e^6.$$

$$A^{V} - A^{IV} = B^{IV} = 30e^2x^4 + 480e^3x^3 + 2910e^4x^2 + 7920e^5x + 8162e^6.$$

$$A^{VI} - A^{V} = B^{V} = 30e^2x^4 + 600e^3x^3 + 4530e^4x^2 + 15300e^5x + 19502e^6.$$

4.

Ex quo deinde elicitur.

$B^{II} - B^{I} = C^{I} = 120\,e^3 x^3 + 540\,e^4 x^2 + 900\,e^5 x + 540\,e^6.$

$B^{III} - B^{II} = C^{II} = 120\,e^3 x^3 + 900\,e^4 x^2 + 2340\,e^5 x + 2100\,e^6.$

$B^{IV} - B^{III} = C^{III} = 120\,e^3 x^3 + 1260\,e^4 x^2 + 4500\,e^5 x + 5460\,e^6.$

$B^{V} - B^{IV} = C^{IV} = 120\,e^3 x^3 + 1620\,e^4 x^2 + 7380\,e^5 x + 11340\,e^6$

5.

Porro ex his determinatur.

$C^{II} - C^{I} = D^{I} = 360\,e^4 x^2 + 1440\,e^5 x + 1560\,e^6.$

$C^{III} - C^{II} = D^{II} = 360\,e^4 x^2 + 2160\,e^5 x + 3360\,e^6.$

$C^{IV} - C^{III} = D^{III} = 360\,e^4 x^2 + 2880\,e^5 x + 5880\,e^6.$

6.

Ex quibus postea eruitur.

$D^{II} - D^{I} = E^{I} = 720\,e^5 x + 1800\,e^6.$

$D^{III} - D^{II} = E^{II} = 720\,e^5 x + 2520\,e^6.$

7.

Tandem ex his sequitur.

$E^{II} - E^{I} = F^{I} = 720\,e^6 = 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ e^6$ vel posito $e = 1$, evadit $F^{I} = 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6. = 720.$

8.

Ex his satis constat, tot series differentiales evadere, quot unitatibus compositus est numerus 6, qui dignitatis gradum indicat. Porro inde apparet, terminum in serie ultima esse aequalem producto seu facto, ex prioribus numeris naturalibus ab unitate incipientibus usque ad nume-

rum

rum eum, qui exponentem potentiae quantitatem x et $x+e$ refert, hoc incluſo, atque ex quantitate e ad dignitatem ejusdem gradus evecta, conflato. Poſito igitur $e=1$ erit etiam $e^6=1$ et terminus ultimus abit ex $720\,e^6$ in numerum 720 conſtantem ex factoribus modo antea nominatis, veluti exemplum noſtrum praeclare demonſtrat.

§. VI.

Cum ea quae paulo antea docuimus, exemplo in meris numeris dato, magis illuſtrentur, quam litteris, a tironibus interdum plane non captis et intellectis, fieri poteſt, adjungamus id, quod decem habet priores numeros naturales ab unitate incipientes ad potentiam ſextam elevatos. Erunt itaque quantitates x et e ſingulatim aequales unitati. Poſita igitur loco x et e, unitate prodibit.

$$x^6 = 1^6 = 1.$$
$$(x + e)^6 = 2^6 = 64.$$
$$(x + 2e)^6 = 3^6 = 729.$$
$$(x + 3e)^6 = 4^6 = 4096.$$
$$(x + 4e)^6 = 5^6 = 15625.$$
$$(x + 5e)^6 = 6^6 = 46656.$$
$$(x + 6e)^6 = 7^6 = 117649.$$
$$(x + 7e)^6 = 8^6 = 262144.$$
$$(x + 8e)^6 = 9^6 = 531441.$$
$$(x + 9e)^6 = 10^6 = 1000000.$$

diff. I. S.	diff. II. S.	diff. III. S.	diff. IV. S.	diff. V. S.	diff. VI. S.
63.					
665.	602.				
3367.	2702.	2100.			
11529.	8162.	5460.	3360.		
31031.	19502.	11340.	5880.	2520.	
70993.	39962.	20460.	9120.	3240.	720 = 1. 2. 3. 4. 5. 6.
144495.	73502.	33540.	13080.	3960.	720 = 1. 2. 3. 4. 5. 6.
269297.	124802.	51300.	17760.	4680.	720 = 1. 2. 3. 4. 5. 6.
468559.	199262.	74460.	23160.	5400.	720 = 1. 2. 3. 4. 5. 6.

Ex quo facile perspicitur, decem priores numeros naturales ad dignitatem sexti gradus evectos, tot series differentiales exhibere, quot habet exponens potentiae unitates, in nostro casu scilicet sex. Simili modo haud difficile cognoscitur, terminum in serie ultima conflatum esse ex prioribus sex numeris naturalibus ab unitate incipientibus, tanquam factoribus, nempe 1. 2. 3. 4. 5. 6; quod productum aequale est numero 720. Cujus rei causa est, quia numerus dignitatis gradum determinans sex constat unitatibus.

§. VII.

§. VII.

Licet satis multa hactenus proposita sint, quae ad illustrationem propositionis nostrae pertinere possunt, tamen non inutile reor quaedam generaliora adjicere, quibus problema hocce paulo universalius, quam supra factum est, demonstretur.

Ex §. 4. constat partem in A^{I} quamliebet sequentem uno gradu inferiorem esse proxima antecedente. Atque posita in quavis parte $x + e$ loco x, prodeunt tot series, quot in A^{I} continentur partes quantitatem x ad dignitatis gradum aliquem habentes evectam. Quarum partes initiales eaedem sunt cum iis in A^{I} contentis. Si igitur eae partes altissimae vocentur, quae in qualibet serie quantitatem x ad potentiam altissimam habent elevatam; sequitur, ut pars initialis seriei cujuscunque sequentis uno gradu inferior sit parte initiali praecedentis seriei. Porro patet, cum in quavis serie pars sequens uno gradu inferior sit quam pars antecedens ejusdem seriei, partem primae seriei secundam esse altissimam omnium illarum quae adhuc tam in prima serie quam in reliquis restant partes, si partes initiales in A^{II} subtrahendo destruantur ab iis in A^{I} contentis. Atque sic res se habet in omnibus ceteris seriebus differentialibus.

Quae omnia exemplo quam maxime dilucido exposita sunt in §§. 4 et 5; jam vero generaliori quadam ratione erunt exponenda. Sint igitur quantitates x et $x + e$ lege formulae binomialis ad dignitatem indeterminati gradus m elevatae; prodibunt x^m et $(x+e)^m = x^m + mex^{m-1}$

$$+ \frac{m.(m-1)}{1.\ 2.} e^2 x^{m-2} + \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.\ 2.\ \ 3.} e^3 x^{m-3} \ldots$$

I.

.... Ergo $(x+e)^m - x^m = A^{I} = mex^{m-1} + \frac{m.(m-1)}{1.\ 2.} e^2 x^{m-2}$ $+ \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.\ 2.\ \ 3.} e^3 x^{m-3} \ldots\ldots\ldots$ in quo si $x + e$ pro x substituatur,

ſtituatur, proſilit $A^{II} = m\,e\,(x+e)^{m-1} + \frac{m.\,(m-1)}{1.\ \ 2.}\,e^2\,(x+e)^{m-2} + \frac{m.\,(m-1).\,(m-2)}{1.\ \ 2.\ \ \ 3.}\,e^3.\,(x+e)^{m-3}$ . . . . quod manifeſte declarat, tot ſeries in A^{II} proſilire, quot partes in A^{I} adſint, quae quantitatem x continent.

Explicatis ſcilicet partibus, erit terminus A^{II} aequalis

$$+ m\,e\,(x+e)^{m-1} = m\,e.\,(x^{m-1} + (m-1)\,e\,x^{m-2} + \frac{(m-1).\,(m-2).}{1.\ \ \ 2.}\,e^2\,x^{m-3} \ldots\ldots)$$

$$\ldots\ldots\ldots = m\,e\,x^{m-1} + m.\,(m-1)\,e^2\,x^{m-2} + \frac{m.\,(m-1).}{1.}\,\frac{(m-2)}{2.}\,e^3\,x^{m-3} \ldots\ldots$$

$$+ \frac{m.\,(m-1)}{1.\ \ 2.}\,e^2\,(x+e)^{m-2} = \frac{m.\,(m-1)}{1.\ \ 2.}\,e^2.\,(x^{m-2} + (m-2)\,e\,x^{m-3} + \frac{(m-2).\,(m-3)}{1.\ \ \ 2.}\,e^2\,x^{m-4} \ldots\ldots)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{m.\,(m-1)}{1.\ \ 2.}\,e^2\,x^{m-2} + \frac{m.\,(m-1).\,(m-2)}{1.\ \ \ 2.}\,e^3\,x^{m-3} + \frac{m.\,(m-1).\,(m-2).\,(m-3)}{1.\ \ 2.\ \ 1.\ \ 2.}\,e^4\,x^{m-4} \ldots$$

2.

Hinc ſequitur

$$A^{II} - A^{I} = B^{I} = m.\,(m-1)\,e^2\,x^{m-2} + \frac{m.\,(m-1).\,(m-2)}{1.\ \ \ 2.}\,e^3\,x^{m-3} \ldots + \frac{m.\,(m-1).\,(m-2)}{1.\ \ \ 2.}\,e^3\,x^{m-3} \ldots$$

In quo ſi iterum $x+e$ loco x collocetur, tunc invenitur

$$B^{II} = m.\,(m-1)\,e^2\,(x+e)^{m-2} + \frac{m.\,(m-1).\,(m-2)}{1.\ \ \ 2.}\,e^3\,(x+e)^{m-3} \ldots + \frac{m.\,(m-1).\,(m-2)}{1.\ \ \ 2.}\,e^3\,(x+e)^{m-3} \ldots$$

Vel

Vel explicatis potentiis quantitatis $(x+e)$, eliciuntur denuo tot series, quot partes in B^{I} contentae quantitatem x habent, nempe $B^{II} =$

$$+ m.(m-1)\, e^2 (x+e)^{m-2} = m.(m-1).\, e^2 \Big(x^{m-2} + (m-2)\, e x^{m-3} + \frac{(m-2).(m-3)}{1.\quad 2.}\, e^3\, x^{m-4} \,.....\Big)$$

$$.........: = m.(m-1)\, e^2\, x^{m-2} + m\,(m-1).(m-2)\, e^3\, x^{m-3} + \frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)}{1.\quad 2.}\, e^4\, x^{m-4} \,...$$

$$+ \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.\quad 2.}\, e^3 (x+e)^{m-3} = \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.\quad 2.}\, e^3 \Big(x^{m-3} + (m-3)\, e\, x^{m-4} \,......\Big)$$

$$............ = \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.\quad 2.}\, e^3\, x^{m-3} + \frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)}{1.\quad 2.\quad 3.}\, e^4\, x^{m-4} \,.......$$

Ex quo consequitur.

$$B^{II} - B^{I} = C^{I} = m.(m-1).(m-2)\, e^3\, x^{m-3} + \frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)}{1.\quad 2.}\, e^4\, x^{m-4} \,.... + \frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)}{1.\quad 2.}\, e^4\, x^{m-4} \,....$$

In quo pro x collocato $(x+e)$, prosilit

$$C^{II} = m.(m-1).(m-2)\, e^3 (x+e)^{m-3} + \frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)}{1.\quad 2.}\, e^4 (x+e)^{m-4} \,..... + \frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)}{1.\quad 2.}\, e^4 (x+e)^{m-4} \,.....$$

Expositis iterum potentiis quantitatis $x+e$, eruuntur sequentes series, quarum numerus aequalis est numero partes in C^{I} contentas quantitatem x habentes, determinanti. Prodibit scilicet C^{II}

$$+ \, m.(m-1).(m-2)\, e^3 \, (x+e)^{m-3} = m.(m-1).(m-2)\, e^3.\, (x^{m-3} + (m-3)\, e\, x^{m-4} \, .\, .\, .\, .\,)$$

$$.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. = m.(m-1).(m-2)\, e^3\, x^{m-3} + m.(m-1).(m-2).(m-3)\, e^4\, x^{m-4} \, .\,.\,.\,.$$

$$+ \, \frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)}{1.\;\;2.}\, e^4 \, (x+e)^{m-4} = \frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)}{1.\;\;2.}\, e^4.\, (x^{m-4} + (m-4)\, e\, x^{m-5} \, .\,.\,.\,.\,)$$

$$.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. = \frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)}{1.\;\;2.}\, e^4\, x^{m-4} + \frac{m.(m-1).(m-2).(m-3).(m-4)}{1.\;\;2.}\, e^5\, x^{m-5} \, .\,.\,.$$

$$+ \, \frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)}{1.\;\;2.}\, e^4 \, (x+e)^{m-4} = \frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)}{1.\;\;2.}\, e^4\, (x^{m-4} + (m-4)\, e\, x^{m-5} \, .\,.\,.\,.\,.\,)$$

$$.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. = \frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)}{1.\;\;2.}\, e^4\, x^{m-4} \, .\,.\,.\,.\,.\,.\,.$$

Vnde obtinetur.

4.

$$C^{II} - C^{I} = D^{I} = m.(m-1).(m-2).(m-3)\, e^4\, x^{m-4} \, .\,.\,.\,.$$

Quibus factis manifesto constat partes altissimas quatuor primarum serierum differentialium, A^{I}; B^{I}; C^{I}; D^{I} hac lege formari, $m\, e\, x^{m-1}$; $m.(m-1)\, e^2\, x^{m-2}$; $m.(m-1).(m-2)\, e^3\, x^{m-3}$; $m.(m-1).(m-2)(m-3)\, e^4\, x^{m-4}$; . . . . . Qaelibet pars est productum ex tribus factoribus; primus ipse oritur ex numeris naturali serie decrescentibus, tot quot unitates continet numerus indicans quanta sit series differentialis, maximo illorum exsistente exponente potentiae; secundas est quantitatas e elevata ad potentiam, cujus index est ille seriei differentialis quem dixi numerus; tertius x elevata ad potentiam cujus index est m, imminutum eodem numero.

5.

Assumamus igitur $E^{I} = \alpha x^{m-n} + \beta x^{m-n-1} \ldots\ldots\ldots$ designare seriem differentialem $(n)^{tam}$, tunc $x+e$ loco x collocato prodibit
$E^{II} = \alpha (x+e)^{m-n} + \beta (x+e)^{m-n-1} \ldots\ldots$
vel partibus explicatis, erit $E^{II} =$

$$+ \alpha (x+e)^{m-n} = \alpha (x^{m-n} + (m-n) e x^{m-n-1} \ldots\ldots)$$
$$\ldots\ldots = \alpha x^{m-n} + \alpha (m-n) e x^{m-n-1} \ldots\ldots$$
$$+ \beta (x+e)^{m-n-1} = \beta (x^{m-n-1} + (m-n-1) e x^{m-n-2} \ldots\ldots)$$
$$\ldots\ldots = \beta x^{m-n-1} + \beta (m-n-1) e x^{m-n-2} \ldots\ldots$$

Ergo $E^{II} - E^{I} = F^{I} = \alpha (m-n) e x^{m-n-1} \ldots\ldots$
$$+ \beta (m-n-1) e x^{m-n-2} \ldots$$

6.

Quod praeclare ostendit, si lex paulo ante commemorata vera sit in E^{I}, etiam veram esse in F^{I}, hoc est, si α in quacunque serie $(n)^{ta}$ praecedente significet productum $m.(m-1).(m-2)\ldots(m-n+1)$; in proxima etiam sequente serie $(n+1)^{ta}$ expressionem $\alpha (m-n)$ aequalem esse $m.(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1).(m-n)$;

Porro si in serie $(n)^{ta}$ pars altissima habet x ad dignitatis gradum $(m-n)$ elevatum, proveniet in serie $(n+1)^{ta}$ quoque x ad dignitatis gradum $m-n-1$ evectum. Sed assumta lex vera est in tertia serie differentiali, ergo etiam vera est in quarta et sic porro in quinta. Apparet itaque in serie $(m)^{ta}$ vel ultima altissimam esse partem aequalem $m.(m-1).(m-2)\ldots 3.\,2.\,1.\, e^{m} x^{m-m} =$
$m.(m-1).(m-2)\ldots 3.\,2.\,1.\, e^{m}$, quae simul est constans, quia quantitate x caret. Vel $e=1$ posito, erit terminus constans $m.(m-1).(m-2)\ldots 3.\,2.\,1.$ Cui cum eo quod in §§ 4 et 5. demonstravimus, perfecte convenit.

THE-

THESES.

I.

Corpora physica non sunt in infinitum divisibilia.

II.

Unius materiae electricae suppositio explicandis phaenominis non sufficit.

III.

Corpora atmosphaeris electricorum immersa, contraria indui Electricitate, merito tanquam palmaria hujus doctrinae propositio consideratur.

IV.

Hominum et Animalium quorundam insigne robur non tam in musculorum vigore, quam ossium conformatione situm esse videtur.

V.

Praeclarum illud phaenomenon opticum a Celeberrimo BÜSCHIO *primum observatum, et in libro cui tit. Tractatus duo optici Argumenti, Hamburgi 1783 descriptum, sicut et lucis diffractiones et inflectiones multo facilius ex Theoria lucis* NEWTONIANA *quam Euleriana explicantur.*

VI.

Microscopia simplicia longe praestant compositis.

VII.

Methodo mathematicae etiam extra mathesin locus est.

VIII.

Calculorum Analyseos finiti et infiniti, item Geometriae sublimioris, usus indispensa ilis est, in plurimis physicae capitibus, et artibus ad commoda vitae humanae facientibus.

IX.

Lignum specifice grauius est aqua.

DISSERTATIO INAVGVRALIS MATHEMATICA

DE

SERIEBVS DIFFERENTIALIBVS

QVAE

EX POTENTIIS NVMERORVM IN SERIE NATVRALI PROGREDIENTIVM SVBTRAHENDO ELICI POSSVNT;

QVAM

CONSENTIENTE ILLVSTRI PHILOSOPHORVM ORDINE

PRO

SVMMIS IN PHILOSOPHIA HONORIBVS

PVBLICE DEFENDET

AVCTOR

IOANNES NICOLAVS MÜLLER

BIPONTINVS

D. XXIV. APRILIS CIↃ IↃ CCLXXXIV.

GOETTINGAE

LITTERIS FRIDERICI ANDREAE ROSENBVSCH.