

K. 799.

507

In Le

1

E i n l e i t u n g
in die
G e o m e t r i e
oder
Entwicklung des Begriffs Raum.

Ein Werk, das geschickt ist, die ersten Schritte der jungen Leute, die sich der Geometrie widmen wollen, zu leiten, indem es ihnen die ersten Begriffe entwickelt, die, weil sie bisher nicht in ihrem gehdrigen Lichte dargestellt waren, den Verstand abschreckten, oder ihn wenigstens nicht befriedigen konnten, und die bisher viele, und selbst sehr berhmte Leute gegen die Grndlichkeit und die Reize dieser Wissenschaft eingenommen haben.

Aus dem Franzsischen des Verfassers des
Buchs der Wahrheiten.

G t t i n g e n , 1797,
bey Johann Christian Dieterich.

Est modus in rebus, sunt certi denique
fines,
Quos ultra citraque nescit consistere
rectum

Hor.

Die Dinge haben ihre Bestimmungen, es gibt
gewisse Grenzen, diesseits und jenseits welcher der
Verstand sich nur verirren kann.



V o r b e r i c h t

des Uebersetzers.

Dem würdigen Verfasser zu Gefallen übernahm ich die Uebersetzung dieses kleinen, gewiß sehr schätzbaren, Buchs. Treue und Deutlichkeit waren hauptsächlich von mir zu beobachten; und der Leser wird beurtheilen, ob ich diesen beiden Bedingungen ein Genüge gethan habe. Während der Uebersetzung fiel es mir ein, zugleich zu versuchen, wie weit es mir möglich sey, fremde Wörter, denen man jetzt so sehr den Krieg angekündigt hat, daraus zu verbannen. Diejenigen Stellen, wo mir dieses gelang und nicht gelang, mußten mich nothwendig auf allgemeine Regeln bringen, denen ich vielleicht hier ihre Stelle gegeben haben würde, wenn dadurch die Herausgabe des Buchs nicht verzögert worden

A 2

den

den wäre. Im allgemeinen mußte mir mein Vorhaben, als bey einem philosophischen Gegenstande, glücken. Denn, da die Philosophie es meistens nur mit Gattungsbegriffen und mit Bestimmungen der Seele, die allen Völkern gemein sind, und wozu sie folglich das Wort nicht erst aus der Fremde zu hohlen brauchen, zu thun hat: so bedarf es nur eines bestimmten Begriffes des Wortes, dessen man sich bedient, um es gewiß eben so gut in unserer Sprache zu geben: auch glaube ich in dem eigentlich wissenschaftlichen Theile dieses Buchs nie ein fremdes Wort gebraucht zu haben. Wo also dergleichen noch stehen geblieben sind, da geschah es mit Fleiß, weil, nach meiner jetzigen Ueberzeugung, das fremde, und kein deutsches Wort an dieser Stelle gebraucht werden mußte. Ueberhaupt scheinen mir unsere neueren Sprachbereicherungen in dem nähmlichen Falle mit allen andern Dingen zu seyn, die man gebrauchen und mißbrauchen kann.

An

An die jungen Geometer.

Dieses kleine Werk, meine lieben Leser, wird ein helles Licht über die ersten Grundsätze der Geometrie *) verbreiten und Grundbegriffe anschaulich machen, deren Entwicklung sich auf immer den tiefsten Nachforschungen zu entziehen schien. Im Getümmel der Läger und an einem Orte **) empfangen, der den täglichen Streifereyen der neuen Republikaner ausgesetzt war,

A 3

ist

*) Der Verfasser hat sich nicht bloß auf jene zärtliche Vorliebe verlassen, die jeder gewöhnlich für seine eignen Werke zu fühlen pflegt, eine Empfindung, die derjenigen sehr ähnlich ist, die ein Vater für seine Kinder hat, und wozu dieser auch vielmehr berechtigt ist. Er suchte, bevor er seine Gedanken öffentlich bekannt machte, sich erst der Stimme der unterrichtesten Männer, ja selbst des Beifalls solcher jungen Leute, die in den strengern Wissenschaften hinlänglich bewandert waren, zu versichern.

**) Auf einem Dorfe auf der Grenze des Herzogthums Luxemburg, nicht weit von Arlon.

ist es, so wie mehr als ein Mensch sein Leben einem bloßen Donnerstrahl verdankt, sein Daseyn gewissermaßen der französischen Revolution schuldig.

Erlaubt mir, meine lieben Leser, mich bey dieser Gelegenheit etwas von meinem Gegenstande zu entfernen, und euch einen Augenblick mein Herz über einen für das öffentliche Glück so verderblichen Zeitpunkt auszuschütten.

Was man, sey es zwischen den Thieren der Erde, oder den Bewohnern der Luft und des Wassers, sich zutragen sieht, wo der Stärkere ohne Unterlaß den Schwächern zu verschlingen droht, ist meines Bedünkens ein nur zu treues Bild desjenigen, was sich damahls begab, als die Großen es ihrer Würde gemäß hielten, die Kleinen zu erdrücken, ja selbst desjenigen, was man im gegenwärtigen Augenblicke sieht, wo, durch eine neue Ordnung der Dinge, der Listigste, oder vielmehr der Schurkischste den Dummern zu seiner Beute erliest. Wenn in den Wäldern, in der Luft, im Wasser, die körperliche Stärke, und zwar allein, den Herren dieser Dörter und Elemente ihre Herrschaft zusichert; so verdankt unter uns hingegen die Oberherrschaft ihr Daseyn der Arglist, der Grausamkeit, ja selbst dem bloßen Strome der Gewohnheit zusammengenommen.

Eine

Eine Reihe barbarischer Handlungen, die leider unter den Menschen mit der Begründung eines jeden Reichs verknüpft sind, gewöhnte diese allmählig daran, die Oberherrschaft als ein Erbstück derjenigen anzusehn, die durch das Recht der Verwandtschaft, oder durch irgend eine Wahlform dem ersten Begründer des Throns folgten. Die meisten Völker schienen dem zufolge bis auf unsere Tage sich blindlings ihren Regenten hinzugeben, und sich eben so sehr über das Glück einer guten Regierung zu freuen, als geduldig, oder vielmehr stumpfsinnig, die abschaulichste Tyrannen zu ertragen. Gegenwärtig aber, wo die Unterthanen sich nicht mehr als die Sklaven ihrer Fürsten anzusehn anfangen, glauben sie nie Recht zu haben, von demjenigen, den sie mit der Krone schmückten, zu verlangen, daß er sie als Vater beherrsche, und so durch seine Weisheit und Wachsamkeit sie in Zukunft vor der Gefahr bewahre, ein Spiel der Unerfahrenheit, der Schwäche, der Leidenschaft, oder endlich der Willkür desjenigen, der nur zu ihrem Glücke ihnen vorgelegt ward, zu werden. Wo nicht, sehen wir sie bereit, selbst auf Gefahr aus einem Elende ins andere zu fallen, den Bienenstock umzustürzen, und sich eine andere gesellschaftliche Gestalt zu geben, die, gut oder schlecht berechnet, ihnen wenigstens die schmeichelhafte Täuschung einer besseren Zukunft läßt.

Diese Erschütterungen und Ausbrüche, die schon so manche Reiche umgestürzt, und die vor unsern Augen mehr als ein Land von Europa um und umgeschmissen haben, scheinen noch weiter ihre Verheerungen über die benachbarten Gegenden verbreiten zu wollen; diese zerstörenden Geißeln der Ruhe, des Glücks, ja selbst des Lebens so vieler Tausende von Menschen, diese schrecklichen Begebenheiten, sag ich, würden uns vielleicht unbekannt, oder würden wenigstens gewiß sehr selten geblieben seyn, wenn die Fürsten, besser von ihren Pflichten unterrichtet oder überzeugt, mehr auf den süßen Namen Vater, als auf den eines Eroberers oder auf ihr Vergnügen gesehen hätten.

Der größte Theil der Großen alsdann, die wegen ihres Bestrebens nach der Gunst ihres Herrn sich unwiderleglich zur Nachahmung desselben hingerissen fühlen, würden ihre Hoffart und ihren Stolz abgelegt, und sich auf immer überzeugt haben, daß in Ermangelung von Tugenden ihre Pergamene, und der Glanz ihres Goldes nur schlecht ihre traurige Blöße bedeckten.

Mögen sie einmahl wissen, daß es die äußerste Ungeheuerheit verräth, sich ohne Noth Feinde zu machen: daß der Wallfisch, der Löwe und alle diese stolzen Großen ihrer Gattung oft in dem Augenblicke umkommen, wo sie sich dessen am wenigstens versahen; und zwar durch die elendesten

besten Geschöpfe, durch Gemüth, durch Insecten u. s. w. die die Natur nicht ohne List ließ.

Ach, wie wenig verstehn sie doch ihren Vortheil! Wollen sie aber durchaus einen so erstaunenden Unterschied zwischen Menschen und Menschen haben, so sey es wenigstens dadurch, daß sie sich gewissermaßen zu Dienern der Gottheit durch die Wohlthaten, die sie zu verbreiten vermögen, machen. Wie wenig würde es ihnen doch kosten, sich beliebt zu machen! „Das Vorurtheil des Volks zu Gunsten der Großen ist so groß, sagt La Bruyere, und die Bewunderung ihres Anstandes, ihres Gesichtes, ihrer Stimme und ihrer Manieren so allgemein, daß man, wenn sie nur gut seyn wollten, sie vergöttern würde.“ *)

U 5

Wenn

*) Der Theil, auf den dieses Bezug hat, wird nicht unterlassen bey diesen Aeußerungen einzuwerfen, daß der Verfasser ein Bürgerlicher sey, und sich durch diese leere Gegenbeschuldigung hinlänglich gerechtfertigt glauben. Was den Verfasser betrifft, so würde er sich durch diesen Stand gewiß eben so sehr, als durch einen höhern Rang geehrt halten; um indeß seine Unbefangenheit zu zeigen, und um nicht für einen elenden Neider der Vorzüge der Großen gehalten zu werden, sieht er sich genöthigt (gewiß ohne Eitelkeit und ohne Kummer) hier zu erklären, daß er in Frankreich ein artiges

Wenn ich mich, meine Lieben Leser, so lange Betrachtungen überließ, die meinem eigentlichen Zwecke so fremd sind, so geschah dieses deshalb, weil sie, ungerechnet, daß sie philosophisch sind, und folglich vor euch gehören, in naher Verbindung mit dem Zustande von Gährung, worin sich die Köpfe in den aufgeklärtesten Theilen von Europa befinden, stehen, einem Zustande, der, wenn er sich verschlimmerte, die Wissenschaften und Künste bald in ein Chaos zurückstürzen würde, das vielleicht ärger als dasjenige seyn würde, woraus wir sie erst mit so vieler Mühe herausgezogen haben.

Eine Einleitung in die Geometrie? — Stoffs genug zur Verwunderung für so manche eingeschränkte Köpfe! allein, wie sehr wird nicht erst ihre Verwunderung zunehmen über ihr Verstummen bey der Frage: Was ist die Ausdehnung?

Da indeß die Ausdehnung, wie jeder weiß, der einzige Gegenstand der Geometrie ist, ist es da

artiges Vermögen besaß, und in seinem Geschlechte Gesandte, Staatsminister, Generäle, Ritter des blauen Bandes u. s. w. zählte. Auch brauchte er nur, wenn er sich noch überdem seiner Vorfahren rühmen wollte, einen zu nennen, der zu erst in Burgogne dem Anhang des Mayenne widerstand, die weiße Fahne erhob, und eine Stadt und sein Schloß in die Hände seines Königs übergab.

da nicht zu bewundern, daß diese Wissenschaft, trotz der Anschaulichkeit ihrer Beweise, noch nicht einmahl zu einer Erläuterung des Worts, das ihre Grundlage ausmacht, hat gelangen können; und kann man einer andern Ursache als dieser Lücke die Dunkelheit der Begriffe zuschreiben, die noch in eben dieser Wissenschaft mit den Worten Punct, Linie, Unendliches u. s. w. verknüpft ist? *)

Man irrt folglich, wenn man glaubt, daß schon Alles gedeckt, Alles gesagt ist. Es fehlen überdem der stolzen Kette der geometrischen Sätze noch wesentliche Ringe. Die Tonkunst selbst ist eben solcher genauen, einfachen und überzeugenden Erörterungen fähig, als die Geometrie; dieß gilt ebenfalls von den ersten Begriffen der reinen

- *) So bald der Begriff von Raum einmahl gehörig bestimmt seyn, und folglich Punct, Linie und geometrische Oberfläche ein selbstständiges Daseyn haben werden, so bald wird die Geometrie auch, sonst die unbeschränkte Königin aller Wissenschaften, was die Gewißheit, Anschaulichkeit und Verbindung ihrer andern Grundsätze anlangt, weit entfernt hinsübro Verächter zu haben, ohne Verzug sich die Liebe, Verehrung und Hochschätzung aller derjenigen zusiehen, denen es daran gelegen ist, ihren Verstand zu bilden, und die allenthalben mit gleichem Eifer alles, was wahr und gründlich ist, aufsuchen.

reinen Naturlehre, ja selbst von der Electricität. Verschiedene Entdeckungen dieser Art, die jetzt mein wahrhaftes und wesentliches Glück ausmachen, verdanke ich eben so sehr der lebhaften Leidenschaft für die Erforschung der Wahrheit, als einem zwanzigjährigen unermüdeten Nachforschen.

Uebrigens werden diejenigen, die aufrichtig und wißbegierig genug sind, um unverhohlen zu gestehen, wie wenig deutliche Begriffe Meister und Schüler von den ersten Begriffen, wie z. E. vom Raume haben, folgenden geschichtlichen Zug gerne von mir hören.

„Der König Ptolomäus wollte beym Euklid lernen.“ Allein, durch die ersten Schwierigkeiten abgeschreckt, fragte er ihn: Ob es keinen leichtern Weg zur Erlernung der Geometrie gäbe? Nein, antwortete Euklid, es giebt keinen besondern für die Könige.

• Junge Zöglinge, liebenswürdige Freunde der Wissenschaften, ich nehme den Ekel zum Zeugen, den ihr noch kürzlich empfanDET, als man euch so trocken weg von Punct, von Linie und Oberfläche sprach, sagt, war die Frage des Königs nicht viel gescheiter, als die Antwort des Lehrers?

Ich habe, bevor ich mich entschloß diese Einleitung bekannt zu machen, die gleichsam die
Vorhalle

Vorhalle eines stolzen Gebäudes seyn wird, dessen Eingang nur noch ausgeschmückt werden mußte, eure Stimme nicht verschmähen wollen: so sehr bin ich mit Diderot und Dalemberot überzeugt, „daß die jungen Leute, die man gewöhnlich für schlechte Richter hält, vielleicht die besten bey philosophischen und vielen andern Gegenständen sind, weil ihnen Alles gleich fremd ist, und nichts daher sie hindert, gut zu wählen. — Die jungen Leute in der That sind es, die so wohl in Frankreich, als im Auslande (setzen diese beiden trefflichen Richter hinzu) das Schicksal der beiden Arten von Philosophie bestimmt haben. Die alte ist so außer der Mode u. s. w. Vorrede zur alten Encycl. von Paris.,,

Wenn dieses Werk euch vorzüglich bestimmt zu seyn scheint, so seht doch, ich bitte euch recht sehr darum, diese vorläufige Unterredung für keine Art von Widmung an. Zu eifersüchtig auf meine Ruhe und auf die Art von Unabhängigkeit, die ich besitze, um mit Eifer mich um die Gunst der Fürsten, oder um den Schutz der Großen, ja selbst in gewisser Rücksicht um den öffentlichen Beyfall zu bemühen, habe ich mir ein für alle Mal diese Art von Ehrensbezeugung untersagt.

Einmahl indeß, ich gestehe es, ward ich heftig versucht, diese Art von Achtung einem Fürsten zu bewelsen; und dieser Beweis, der
nichts

nichts als die Folge eines Gefühls von Bewund-
derung und Hochachtung gewesen wäre, würde
mich eben deswegen meinen Grundsätzen nicht
untreu gemacht haben. Ich meine den Neffen
und Zögling Friedrichs, Denjenigen, der,
wenn auch nicht der Erbe seines Throns, doch
der Erbe seiner kriegerischen Eigenschaften ist;
Denjenigen, der eben so wohl durch eine unbe-
grenzte Zärtlichkeit, als durch einen unermüde-
ten Eifer sich immer als Vater und Freund
seiner Unterthanen, von denen er stets geliebt
ward, und noch geliebt wird, bewiesen hat;
Denjenigen endlich, der, eben so wohl durch die
Milde seiner Regierung, als durch die Weisheit
und Standhaftigkeit seiner Maßregeln, nur
Glückliche um sich macht, und der, um ihre
Anzahl zu vermehren, seine Wohlthaten über
weitere Provinzen verbreiten mußte.

Einleit

Einleitung

in die

Geometrie.

Allgemeine Uebersicht der Ausdehnung.

Unsere Sinne lehren uns, daß es Körper außer uns gibt. Diesen Grundsatz vermag keine Spitzfindigkeit zu erschüttern.

So bald die Körper uns von ihrer Gegenwart benachrichtigen, so bekommt oder bildet sich die Seele Vorstellungen von ihnen, die dasjenige darstellen, was sie enthalten. „Alles, was an einem Körper fähig ist, auf eine gewisse Art auf einen von unsern Sinnen zu wirken, heißt Eigenschaft dieses Körpers. Fassen wir nun alles, was wir auf diese Art an den Körpern bemerkt haben, zusammen, so finden wir gewisse Eigenschaften, die allen Körpern gemein sind; andere aber, die nur gewissen Körpern gehören. Die ersten nennen wir gemeinschaftliche Eigenschaften, die andern Eigenschaften schlechtweg.

„Unter

„Unter den gemeinschaftlichen Eigenschaften giebt es einige, die man zu allen Zeiten und an allen Körpern außer uns findet, und die stets dieselben bleiben. Andere hingegen, ob man sie gleich stets an den Körpern findet, leiden einen Grad von Vermehrung oder Verminderung. Zur ersten Art gehören die Ausdehnung, die Undurchdringlichkeit, die Kraft der Trägheit *), die Beweglichkeit, die Ruhe, die Bildsamkeit u. s. w. Zur andern Art gehören die Schwere oder das Gewicht, und die anziehende Kraft, **).

„Man hat, nach Muschenbröck, bisher noch keinen Körper gefunden, der, groß oder klein, flüssig oder trocken, diese Eigenschaften nicht an sich gehabt hätte. Ja man ist nicht einmahl im Stande gewesen, durch irgend ein künstliches Mittel eine von diesen Eigenschaften, die wir daher gemeinschaftliche Eigenschaften nennen, zu vernichten oder zu entfernen. Einige Naturforscher

*) Kraft der Trägheit; so nennt man den Widerstand, den jeder Körper seiner Natur nach leistet, daß er sich bewegen soll, wenn er in Ruhe ist; seys daß man die Bewegung; worin er sich befindet, vermehren oder vermindern will.

**) Anziehung; Kraft, wodurch nach Newton, die Weltkörper, und selbst die kleinsten Körperbestandtheile eins zum andern hinstreben, und sich wechselseitig anziehen.

forscher rechnen indeß die letztere nicht hierher, ich meine die anziehende Kraft.

Die andern Eigenschaften der Körper sind die Durchsichtigkeit, die Undurchsichtigkeit, die Flüssigkeit, die Festigkeit, die Farbe, die Hitze, die Kälte, der Geschmack, die Geschmacklosigkeit, der Geruch, der Ton, die Härte, die Federkraft, die Schlaffheit, die Herbe, die Süßigkeit u. s. w., Encyclopädie oder beurtheilendes Wörterbuch der Wissenschaften Art. Körper.

Die Ausdehnung eines Körpers wird empfunden, gesehen, gefast. Man kann sich bald von der Ausdehnung eines Körpers überzeugen, ja man lernt selbst seine verschiedenen Maße *) beurtheilen und kennen, wenn man nur das Auge oder die Hand nach und nach, und ohne Zwischenraum auf der Oberfläche eines Körpers hin und hergehen läßt; dieses gilt selbst von seinen inneren Theilen, wenn der Körper flüssig oder durchsichtig ist.

Welcher lassen uns unsere Sinne deutlich drey Arten von Ausdehnung bemerken, und nicht mehr. Die Fläche hat ihrer Natur nach Eine Ausdehnung weniger als der Körper, die Linie Eine weniger als die Fläche, und der Punct gar keine

*) Maß, ein allgemeiner Name, den man den Seiten, wornach ein Körper gemessen wird, gibt.

keine Ausdehnung. „Um sich davon zu überzeugen, sagt der Verfasser der Einleitung in die Geometrie *), laßt uns ein Stück Glas oder einen Spiegel nehmen: wir können nur seine Oberfläche berühren, seine Dicke liegt unten oder hinten: die Oberfläche eines Körpers hat also keine Dicke oder, was auf Eins herauströmmt, die Dicke ist keine Eigenschaft einer Oberfläche; diese hat nur Länge und Breite. Wir bringen nun unsere Hand an den äußersten Rand dieses Glases, wir können ihn berühren, wir laufen z. B. an demselben seiner ganzen Länge nach herunter: können wir nun die Grenze einer Oberfläche ohne ihre Breite berühren, so gibt es auch Längen ohne Breite; diese Längen ohne Breite haben wieder ihre Grenzen, die Punkte heißen, und folglich ohne alle Ausdehnung sind: oder man messe einmahl die äußerste Grenze einer Länge? „ Geometrie B. I. K. I.

Die Ausdehnung ist aber nicht bloß eine gemeinschaftliche Eigenschaft aller körperlichen, sondern auch der meisten andern Gegenstände, die in unsere Sinne fallen: ich meyne, des Leeren wie des Vollen, des Lichts wie des Schattens, der Farbe u. s. w. Denn man kann es sich nicht verhehlen, daß beide der Sinn des Gesichts und des Gefühls, die den Rand oder die allgemeinen Grenzen eines Körpers zu durchlaufen vermö-

*) La Chapelle.

vermögen, eben so gut die Grenzen eines leeren Raums oder eines Platzes, der eben so groß als der Körper, der ihn einnimmt, ist, umschreiben können; daß Licht, Schatten, Farbe eben so wohl ihre Grenzen, und folglich zwischen diesen Grenzen Zwischenräume haben, die das Auge oder das Gefühl mit einem Mahle oder theilweise zu fassen im Stande ist, vorausgesetzt, daß solche groß genug sind, um von unsern Sinnen gefaßt werden zu können. *) Dem zufolge würde, der Raum als der allgemeine Platz aller Sinnenwesen betrachtet, die Ausdehnung eines Gegenstandes eben das seyn, was die Ausdehnung eines bloßen Raumes wäre, der genau dieselbe Gestalt und dieselben Grenzen hätte, daß er den Gegenstand genau in sich aufnehmen könnte.

B 2

Die.

*) Man weiß, daß das Gesicht, als eine Art von Gefühl, gewöhnlich die Dinge unter keinem geringeren Winkel, als dem einer Minute, erblicken kann. Wenn also ein Zwischenraum beides weder von unserm Gefühle, noch von unserm Gesichte bemerkt werden kann, so muß er um so viel mehr für uns verschwinden. Dieses ist eben der Grund, warum der Punct sich unterhalb eines gewissen Winkels unsern Sinnen entzieht; warum in eben diesem Falle die Länge einer Linie, die Breite einer Oberfläche, endlich der Umfang eines Körpers weder unterschieden, noch folglich auf irgend eine Art bestimmt gemessen werden kann.

Die Ausdehnung also, als gemeinschaftliche Eigenschaft aller körperlichen und der meisten unkörperlichen Gegenstände, — letztere freylich nur in so fern sie an Körpern haften oder zu ihnen gehören, — ist entweder eine bloße Anschauung, oder eine abgezogene Idee, das heißt, ein solcher Begriff, den man nur dann bekömmt, wenn man im Geiste auf alle körperliche Gegenstände Verzicht thut.

Als Anschauung also ist der Raum eine bloße Wirkung eines gewissen Eindrucks auf unsere Sinne; als abgezogener Begriff aber das Werk des Verstandes, der eine Anschauung verallgemeinert und daraus ein metaphysisches oder bloßes Verstandeswesen dadurch gemacht hat, daß er alle bloß anschauliche und wirkliche Eigenschaften wegnahm, die der Ausdehnung an den körperlichen Gegenständen zukommen.

Alles dieses, wie man leicht bemerkt, gibe uns noch keinen klaren und deutlichen Begriff vom Raume an sich, und wir haben noch nicht gefunden, wie die Natur uns die ursprüngliche Idee von dieser Eigenschaft eines jeden Körpers gab. Kein Schriftsteller in der That hat noch eine Abhandlung über die Geometrie mit der Erklärung dieses allgemeinen Wortes angefangen, dessen Entwickelung gleichwohl den wahren Grundstein dieser Wissenschaft ausmacht. Hierin liegt der Grund, warum eine Wissenschaft, die man doch

doch für so deutlich hält, allen Anfängern gleichwohl so trocken und langweilig vorkömmt; warum der Verstand der meisten jungen Leute, selbst nach völligem Durcharbeiten aller mathematischen Lehren, so wenig überzeugt und folglich befriedigt ist; warum endlich die Mathematik so viele berühmte Verächter gehabt hat! Kann man in der That sich in einer Wissenschaft selbst verstehen, und folglich um so mehr sich anderen verständlich machen, ohne zum wenigstens genau den Sinn der Worte, die man dabey braucht, zu kennen oder sich zu erklären?

Will man dem Abschnitte Ausdehnung in dem beurtheilenden Wörterbuche der Wissenschaften trauen, so kann die Anschauung Raum eben deswegen nicht erklärt werden, weil sie eine Anschauung ist: „denn, heißt es darin, es gehört zum Wesen der Vorstellungen, die wir unmittelbar durch die Sinne bekommen, so wie zum Wesen der allgemeinsten Ideen, die wir durch den Verstand bilden, daß sie die äußersten Grenzen aller Erörterungen, und die letzten Bestandtheile, worin sie sich auflösen, sind.“

Locke und Clarke und die meisten von unsern heutigen Metaphysikern sind eben dieser Meinung, daß der Raum keiner Erklärung fähig ist. Ihnen zufolge lassen sich nur die zusammengesetzten Begriffe erklären, dadurch, daß man sie in natürlicher Ordnung in diejenigen einfachen

Begriffe zerlegt, die zusammengenommen sie ausmachen. Da ihnen nun der Begriff von Raum so einfach und Urbegriff zu seyn scheint, daß ihn zerlegen wollen, ihn vernichten zu wollen hieße, so schließen sie daraus, daß keine Umschreibung diese Sache besser zu bezeichnen vermag, als das einzige Wort, welches sie ausdrückt. Heißt das nicht aber eher den Knoten zerschneiden, als ihn auflösen?

Weiß man nicht, daß Euklid selbst, der Vater der Geometrie, gewisse Grundsätze *) für ausgemacht angenommen hat, nicht als wären es eben so viele Grundwahrheiten gewesen, die daher keiner Erklärung fähig gewesen wären, sondern weil sein Gang sonst zu sehr aufgehalten, vielleicht selbst gänzlich gehemmt worden wäre, wenn er zu seinen Folgerungen erst nach einer genauen Erörterung seiner Grundsätze hätte gelangen wollen. Wirklich hat er seinen Nachfolgern die Mühe überlassen, diese Grundsätze selbst zu erörtern, die, ob sie gleich durch die Erfahrung hinlänglich bewährt sind, doch in dieser Art von Gegenständen dem Verstande nicht völlig Genüge leisten. Apollonius, Proclus und andere haben sich vergebliche Mühe gegeben, einige Lehrsätze Euklids zu beweisen; nur durch die Entwicke-

*) Axiom heißt eine Wahrheit, die so anschaulich ist, daß sie nur vorgelegt zu werden braucht, um so gleich verstanden zu werden.

Entwicklung des Wortes Raum kann man hoffen, sie zu einem Grade von überzeugender und unumstößlicher Gewißheit zu bringen.

Da unser Verstand immer überzeugt seyn will, so ist es gewiß, daß jede Idee, die nicht auf deutlichen und bestimmten Begriffen beruht, oder, was auf Eins hinausläuft, alles, was wir eben sowohl dem mangelhaften Zeugnisse unserer Sinne, als unseres Nachforschens zu danken haben, unsern Geist nicht befriedigen kann.

Die Mathematik würde gewiß nicht so berühmte Verächter, wie Epikur, Zeno, ja Pascal selbst, *) gehabt haben, wenn ihre Grundsätze bey aller Fruchtbarkeit nicht gewissermaßen wegen des tiefen Stillschweigens, welches sie in Ansehung des Begriffes beobachten, den man bestimmter mit dem Worte Raum, und dann mit den Worten Oberfläche, Linie, Punct u. s. w. zu verbinden hat, etwas Eingebildetes behalten hätten. Denn es ist immer Folge des mangelnden richtigen Begriffs eines Wortes, welches über eine gewisse Gattung von Begriffen sich verbreiten soll, wenn der Verstand jeden Augenblick Gefahr läuft, sich vom wahren Sinne

B 4

der

*) Man weiß, daß Pascal, nachdem er die Mathematik mit dem glücklichsten Erfolge betrieben hatte, sie nachher eben so sehr verachtete, als er sie anfangs geschätzt hatte.

der Aufgabe, wovon er sich sonst überzeugen könnte, zu entfernen.

Darf man sich nun wundern, daß es sonst aufgeklärte Leute gibt, die mit einer gewissen Hartnäckigkeit selbst dasjenige, was sie sehen und fühlen, läugnen, und die um so mehr nur Träumereien in den Folgerungen der Geometer erblicken, die sonderbar genug eine Oberfläche ohne Dicke, Linien ohne Breite und Punkte ohne alle Ausdehnung annehmen? Vergeblich würde man ihnen einwerfen, daß, wenn gleich eine Oberfläche auch nothwendig eine Dicke haben müsse, man gleichwohl unmöglich an seiner Oberfläche etwas anders als ihre Länge und Breite berühren könne: daß zu einer Oberfläche gehören und keine Dicke haben übrigens zwey ganz verschiedene Begriffe sind: und daß, wenn gleich z. E. die Farbe eines Körpers und seine Oberfläche immer zusammen gehören, man gleichwohl ohne Mühe den Begriff von Oberfläche, und den von schwarz, weiß oder roth in Gedanken von einander trennen kann u. s. w. Sollten sie dann noch weiter darauf bestehen, daß der Raum im Allgemeinen nicht ohne drey Arten von Ausdehnung bestehen kann, so kann man sie nur fragen: ob die Oberfläche eines Wassers sehr tief; ob die Entfernung von Turin nach Rom sehr breit ist; wie viele Klafter, Füße, Daumen u. s. w. der Rand einer Linle hat? Nie, ich wieder-

wiederhole es, werdet ihr sie überzeugen, wenn ihr ihnen keinen unläugbaren Begriff von Raum und seinen verschiedenen Gattungen gebt.

Es sind folglich noch Hindernisse zu übersteigen übrig, um die Mathematik zu dem Grade von Gewißheit zu bringen, der nöthig ist, um allgemein den Verstand zu überzeugen, und ihn hinführo vor dieser Art von peinlicher Empfindung zu sichern, den undeutliche Begriffe beim Anfange einer übrigens so bestimmten Wissenschaft erregen.

Dies ist der wünschenswerthe Endzweck meines Versuchs. Sollte er zu verwegem scheinen, so läßt mich wenigstens die Art meines Unternehmens hoffen, daß man meine Absicht nicht verkennen wird, gesetzt auch mein tiefes Nachforschen ließe endlich auf nichts als auf das leichte Verdienst der Neuheit hinaus.

Genauer und ursprünglicher Begriff der Ausdehnung.

Grundbegriff. Zwen Körper, zwey erste Bestandtheile von Stoff, kurz, zwey Gegenstände von irgend einer Art (unter Gegenstand alles, was gefühlt oder gesehen werden kann, verstanden) können nicht beide einer in dem andern enthalten seyn;

B 5

Denn,

Denn, wenn dieses nicht wäre, so müßte ein Ding ein anderes zugleich enthalten und darin enthalten seyn: folglich das Enthaltende und der Inhalt gleich, oder, was auf Eins hinausläuft, das Ganze dem Theile gleich seyn. Unläugbar also hat, da ein Theil immer keiner als sein Ganzes ist, nur die Einheit, als ein einfaches und untheilbares Wesen, die Eigenschaft, zugleich das Enthaltende und der Inhalt, sein Ganzes und sein Theil zu seyn. Zwey Gegenstände von irgend einer Art können folglich sich nicht wechselseitig einer in dem andern befinden.

Ueberhaupt also 1. bestehen zwey Gegenstände immer nothwendiger Weise außer einander oder, welches das nähmliche ist, zwey Gegenstände bestehen immer auf eine wesentlich verschiedene Weise und ohne sich wesentlich zu vermischen.

2. Zwey Gegenstände sind immer wesentlich von einander getrennt: denn sonst würden sie nicht einer außer dem andern bestehen, oder, welches Eins ist, sie würden aufhören, jeder für sich zu bestehen, und würden folglich nur Einen und denselben Gegenstand ausmachen.

Da die Trennung augenscheinlich nur in der Berührung oder Entfernung der verschiedenen Theile oder der mehreren Ganzen besteht, so ist genau genommen die Berührung weiter nichts, als der mindeste Grad von Entfernung.

Es

Es ist offenbar ein Gesetz der Natur, oder der ausdrückliche Wille des Schöpfers, welches die Sinnenwesen und ihre verschiedenen Theile zwang, eines außerhalb dem andern zu bestehen, das heißt, jedes für sich und von dem andern getrennt dazuseyn. Diese allen natürlichen Wesen gemeinschaftliche Art zu bestehen, wir mögen diese Wesen im Ganzen oder in ihren Theilen, als vereinigt und in einander gefügt, oder als bloß sich berührend, oder endlich als getrennt und abgefordert betrachten, ist es nun, was ich mit der neuen und unumgänglichen Benennung Abgesondertheit des Daseyns bezeichne.

Weiter fällt es leicht in die Augen, daß jedesmal, wenn unser Gefühl oder Gesicht einen Gegenstand unterscheidet, dieses nur dadurch geschieht, daß wir die allgemeinen oder besonderen Grenzen, die den Gegenstand von allen Seiten einschließen und ihm seine Gestalt geben, das heißt, seine wirklichen und eigenthümlichen Einfassungen und Schranken bemerken, die wegen der Abgesondertheit des Daseyns immer nothwendig getrennt sind und sich nicht vermischen können.

Raum also, in seiner eigentlichen Bedeutung, heißt nichts anders, als Absonderung der Grenzen Eines und des nähmlichen Gegenstandes unter sich, oder mehrerer vereinter und getrennter Gegenstände unter einander. Sind mehrere

mehrere Gegenstände ganz und gar getrennt, das heißt, berühren sie sich gar nicht, so heißt die jedesmahlige Entfernung, die sich zwischen ihren entgegengesetzten Grenzen befindet, ein Zwischenraum.

Es gibt also Raum entweder außerhalb der Körper, in so fern sie wechselseitig von einander getrennt sind; oder an den verschiedenen äußern und sichtbaren Theilen der Körper selbst, in so fern die verschiedenen Theile, die seine Grenzen bilden, in einem gewissen äußeren Abstände von einander stehen, das heißt, in so fern sie sich in einer Entfernung befinden, wie man sie zwischen zwei Grenzpunkten eines Körpers jedesmahl bemerken, oder sich wenigstens denken kann; oder endlich, innerhalb der Körper selbst, in so fern die mannigfaltigen in verschiedener Richtung gegen einander stehenden Grenzen und Ränder in verschiedenen inneren Entfernungen von einander stehen.

Der Weltraum ist dem zufolge nichts anders, als die Vereinigung oder unmittelbare Folge theils aller Zwischenräume, welche die verschiedenen Körper, die ihn bilden, unter sich machen, theils derjenigen, die sich insbesondere zwischen den eigenthümlichen verschiedentlich entgegengesetzten Grenzen eines jeden Körpers befinden. Betrachtet man nun diesen unendlichen Raum an sich allein, das heißt ohne Rücksicht auf die verschiede-

schiedenen Körper, die ihn einnehmen, oder als einen Inbegriff von bestimmten, gleichen und unzertrennlichen Theilen, so hat man den eigentlichen Raum in allgemeiner Bedeutung, oder, bestimmter gesprochen, den unbedingten Raum, wovon ein Theil, ein Körper mag ihn einnehmen oder nicht, ein Ort heißt.

So, indem man entweder den Weltraum unabhängig von allen mit ihm bestehenden Körpern, oder, indem man irgend einen Körper als einen Schatten oder als ein bloßes Stück von Raum, der von allen Seiten genau so begrenzt und gebildet wie der Körper ist, betrachtet, gewöhnt man allmählig den Geist daran, den jedesmahligen Raum, den die Körper einnehmen, gewissermaßen für die Körper selbst zu nehmen, das heißt, sie selbst als durchdringliche, theilbare und gestaltete Raumsheile anzusehen: der geometrische Körper ist folglich nichts weiter als ein Stück Raum, das auf allen Seiten gestaltet und begrenzt ist: und eben deswegen ist die Geometrie die Wissenschaft der Eigenschaften des Raums.

Unvollkommen und dunkel in ihrem Ursprunge, wie alle andere Wissenschaften, mußte die Geometrie anfangs gewissermaßen im Dunkeln herumtappen und mit rohen Untersuchungen beginnen. Ihr Name selbst, der aus den griechischen Wörtern Erde und Maß besteht, zeigt

es

30 Von den verschiedenen Arten

es schon genug, daß diese Wissenschaft sich anfangs darauf beschränkte, die Erde und ihre verschiedenen Theile zu messen und aufzunehmen, bevor sie zu dem Grade von Genauigkeit und zu der Größe gelangte, die sie jetzt hat.

Die Mahler stellen die Geometrie unter der Gestalt eines blossen Frauenzimmers mit einem Schleyer mit silbernem Rande, und mit einem kleinen Stabe in der Hand vor.

§. 1.

Von den verschiedenen Arten von Grenzen.
Von der Sterigkeit, Begrenzung und Berührung.

Da ich unter dem Worte Grenze nichts anders als die verschiedenen Ränder eines Gegenstandes verstehe, welche, indem sie ihn von allen Seiten umschließen, ihm seine Gestalt geben, und ihn dadurch von jedem andern Gegenstande unterscheiden lassen; so ist es klar, daß Licht, Schatten, der Körper, das Leere u. s. w. kurz alle Gegenstände, die in unsere Sinne fallen, jedes seine besondere Grenze hat.

Da überhaupt jedes Wesen, jedes Ding in der Natur (wie ich schon bemerkt habe) sich nicht anders durch das Gesicht oder durch das Gefühl als

als dadurch unterscheiden läßt, daß man seine eigenthümlichen Grenzen gewahr wird; so ist es wesentlich nothwendig, die Grenzen in allen ihren Verhältnissen zu betrachten, um von den verschiedenen Bestimmungen urtheilen zu können, die der allgemeine Begriff von Raum, den wir uns eben gemacht haben, von ihnen erhalten kann.

Nun kann man die Grenzen betrachten, entweder in Rücksicht auf ihre Beschaffenheit, oder in Rücksicht auf ihre verschiedenen Lagen gegen einander, oder aber in beiden Rücksichten zusammengenommen.

1. In Rücksicht auf ihre Beschaffenheit sind die Grenzen entweder gleichartig, oder ungleichartig; sie sind gleichartig, wenn sie insgesammt einander vollkommen gleich sind; ungleichartig, wenn sie sich nicht einander vollkommen gleichen.

2. In Rücksicht auf ihre Lage sind die Grenzen regelmäßig oder unregelmäßig; regelmäßig sind sie, wenn sie eine gleiche; unregelmäßig, wenn sie eine verschiedene Lage unter einander haben.

3. Grenzen, die zugleich gleichartig und regelmäßig sind, heißen unbestimmt, ununterscheidbar, gleichförmig, weil man wegen der vollkommenen Aehnlichkeit ihrer Gestalt sie nicht bestimmte und fest von einander unterscheiden kann.

So

So z. E. würde, wenn man eine elfenbernerne Kugel als völlig rund, vollkommen geschliffen und weiß, und beynabe auf allen Seiten gleich erleuchtet annähme, die gesammten Ränder dieser Kugel, oder, welches eins ist, ihre verschiedenen Grenzen durchaus gleichförmig seyn.

Erleuchtete man nun diese Kugel auf Einer Seite merklich mehr als auf der Andern, so würde sie offenbar zwar noch gleichförmig für den Sinn des Gefühls; für den Sinn des Gesichts aber ungleichförmig seyn: denn die erleuchteten Grenzen würden leicht zu unterscheiden und folglich gewissermaßen denjenigen unähnlich seyn, die sich im Schatten befänden.

Hätte endlich diese Kugel, obgleich weiß und ohne merklichen Schatten, an ihren Rändern kleine Unebenheiten, etwa wie an einer Orange; so würden ihre Grenzen offenbar unregelmäßig seyn, denn sie würden sich in einer verschiedenen Lage gegen einander befinden.

Wir nennen überhaupt Stetigkeit diejenige Beschaffenheit eines Gegenstandes, da seine Theile nirgends von einander getrennt sind, und sich allenthalben unmittelbar begrenzen und genau berühren: so ist der Schatten ein Stetiges, wenn nämlich seine Theile von keinem Lichtstrahle irgendwo durchschnitten sind.

Eben so würde ein Gefäß mit Wasser, eine Pflanze, ein Thier u. s. w., wenn man keine
Rücksicht

Rücksicht auf die verschiedenen kleinen Oeffnungen dieser Körper nähme, uns den Begriff von einem Stetigem geben.

Die Stetigkeit ist einförmig oder mannigfaltig.

Sie ist einförmig, wenn die Grenzen des Gegenstandes gleichförmig sind. Bey dieser Art von Fortsetzung also darf man nicht die verschiedenen Grenzen des ganzen Körpers oder des Inbegriffes seiner Theile gewahr werden, weil diese Grenzen auf keine bestimmte und feste Art von einander abgesondert sind.

So ist z. E. die Fläche eines Spiegels eine einförmige Stetigkeit, wenn man nirgends darauf eine rauhe Stelle, Fleck oder Riß, der seine Stetigkeit unterbricht, findet.

Die Stetigkeit ist mannigfaltig, wenn die Grenzen des Gegenstandes ungleichartig, oder unregelmäßig sind: bey dieser zweyten Art von Stetigkeit kann man also immer gewisse Theile des Stetigen unterscheiden; weil alsdann dieses Ganze immer Theile hat, deren Grenzen sich von einander unterscheiden lassen.

So sind eine Pflanze, ein halbgeschliffener und halbroher Marmor u. s. w. lauter mannigfaltige Stetigkeiten; weil man leicht die Zweige der Pflanze von ihrem Stengel, und an dem
E Marmor

Marmor leicht die geschliffenen und ungeschliffenen Theile von einander unterscheiden kann.

Die Begrenzung ist diejenige Eigenschaft eines Körpers, wo seine mehreren Theile zwar unmittelbar an einander grenzen und sich überhaupt ziemlich berühren; doch aber noch etwas abgesondert bleiben, indem sie sich nicht so wie bey der Stetigkeit, allenthalben genau berühren; woraus fließt, daß die Grenzen eines jeden Gegenstandes, wovon einige Theile sich bloß begrenzen, bestimmbar und zu unterscheiden sind.

Nehmen wir z. E. ein Stück Glas, das ohne Splitter in zwey Stücke gebrochen ist, so wird doch noch immer (wegen des stets wesentlichen, obgleich kaum bemerklichen Verlustes von Stoff am Rande der Spalte) man mag auch noch so genau die Bruchstücke an einander passen, und sie auch noch so fest beide an einander drücken, um sie in ihre ursprüngliche Lage zurück zubringen, so wird, sage ich, doch noch immer eine Riß und Art von Absonderung da, wo sich die beiden Stücke einander berühren, übrig bleiben; die Theile werden folglich unterschieden werden können, und daher sich bloß begrenzen.

Was ich eben Begrenzung genannt habe, in Beziehung der Nähe derjenigen Theile, die sich berühren ohne stetig zu seyn, scheint bestimmter den Nahmen von Berührung annehmen zu müssen,

fen, wenn man die Beziehung oder Nähe mehrerer Ganzen oder verschiedener Gegenstände, die sich berühren, bezeichnen will.

Aus alle diesem fließt 1. daß beides die Fortsetzung und die Begrenzung in nichts anderm, als in dem allgemeinen Zusammenreffen der Theile, die sich in Einem Ganzen unmittelbar begrenzen, besteht; daß bey der Sterigkeit aber die Berührung der Theile, die unmittelbar an einander stoßen, allgemeiner, und folglich genauer, als bey der Begrenzung ist.

2. Daß die einförmige Sterigkeit in nichts von der mannigfaltigen, oder von der Begrenzung, als darin verschieden ist, daß die Grenzen der begrenzenden Theile oder des mannigfaltigen Sterigen immer zu unterscheiden sind; während daß die Grenzen der verschiedenen Theile des einförmigen Sterigen unbestimmt und völlig willkürlich sind. In der That lassen sie sich wegen ihrer völligen Gleichheit nur in Gedanken, oder bestimmter, durch einen farbigen Strich oder durch ein ähnliches in die Sinne fallendes Zeichen unterscheiden.

3. Daß der Begriff sowohl der Sterigkeit, als der Begrenzung, so wie der Berührung, nothwendig den Begriff der wesentlichen Trennung der Theile oder des Ganzen mit sich führt: denn es ist klar, daß, da die Berührung überhaupt,

haupt, wie schon gesagt ist, an sich nichts als eine vollkommene Annäherung ist, zwey Theile oder zwey Ganze, die sich berühren, im Grunde von allen Seiten eben so mit Grenzen umschlossen sind, als wenn sie gänzlich von einander getrennt wären; daß folglich Theile oder Ganze, die sich berühren, in der That von einander getrennt sind, in sofern ihre verschiedenen Grenzen jedesmahl an dem Orte ihrer Berührung, selbst durch die bloße Eigenschaft, daß sie unterschieden werden können, oder, was daselbige ist, durch die Abgesondertheit des Daseyns niemals verwechselt werden können.

Ueberhaupt also ist sowohl bey der Stetigkeit, als bey der Begrenzung, und bey der Berührung die unmittelbare Nähe der Theile und des Ganzen, das heißt ihre wechselseitige Berührung nichts anders als der geringste Grad oder ein minimum von Trennung, oder, wie ich es schon genannt habe, der möglichst geringste Grad von Entfernung.

§. 2.

Von den verschiedenen Arten von Ausdehnung,
und von ihren Ausmessungen.

Da die Ausdehnung im Allgemeinen nichts als eine bloße Trennung der Grenzen ist; und da die Grenzen eines Körpers, obgleich unter sich selbst verglichen, sich gleichwohl unter zwey verschiedenen Gesichtspuncten betrachten lassen, nämlich 1. in Rücksicht auf ihre äußeren Entfernungen, das heißt, auf diejenigen Entfernungen, die sich auf dem äußeren Umschlage der Körper befinden, und die durch eine Fortsetzung der äußern Theile entstehen. 2. In Rücksicht ihrer inneren Entfernungen, das heißt, derjenigen Entfernungen, die sich innerhalb der Körper befinden und die wegen des Dazwischenstehens ihrer innern Theile sich gewöhnlich unsern Sinnen entziehen; so ist es klar, daß jeder Körper innere und äußere Ausdehnung besitzt.

Die innere Ausdehnung eines Körpers oder diejenige, die sich innerhalb zwischen den verschiedenen Grenzen, die den Körper bilden, und uns so alle seine Einfassungen darstellen, befindet, ist es, was eigentlich den Körper oder das geometrische Solidum, welches ich hinführo mit dem bloßen Nahmen Solidum bezeichnen will, ausmacht.

Die äußere Ausdehnung eines Körpers, das heißt, diejenige Ausdehnung, die durch jene Reihe von Begrenzungen entstanden ist, die, indem sie den Körper allenthalben bilden und umgeben, unmittelbar in unsere Sinne fallen, und dem Solido gleichsam zu seinem Umschlage dienen, ist es, was die Oberfläche macht: woraus man sieht, daß die Oberfläche nichts anders als die Grenze des Solidums ist.

Weiter, da selbst dann, wenn eine Oberfläche, wie die einer gleichartigen, vollkommen geschliffenen und runden Kugel, ganz völlig gleiche Grenzen hat, es noch immer möglich ist, seine Stetigkeit zu unterbrechen; und da allenthalben, wo diese Stetigkeit unterbrochen zu seyn scheint, die Oberfläche alsobald von sehr bestimmten Grenzen umgeben ist, die dasjenige, was man gewöhnlich seinen Rand nennt, bilden; so haben wir offenbar noch eine dritte Art von Ausdehnung, die von den vorigen durch den Rahmen Linie unterschieden wird. Die Linie ist also nichts als eine Grenze des Solidums.

Man kann sich auch außerdem leicht davon überzeugen, daß die Linie, weit entfernt ein bloßes Gedankending zu seyn, wirklich in der Natur da ist, und daß sie eben sowohl ein Gegenstand der Sinne als die Oberfläche ist: denn der Rand eines Spiegels, die verschiedenen Flächen eines Würfels, einer Stange, einer
Pflanze,

Pflanze, eines Tisches u. s. w. sind eben so viele wirkliche Grenzen von Oberflächen, die daher eben so viele wirkliche Linien vorstellen.

Endlich, gesetzt auch, daß eine Linie z. E. der äußere oder innere Rand eines Gefäßes, gar keine bestimmte Grenzen hätte, so würde man sich gleichwohl seine einförmige Stetigkeit irgendwo unterbrochen denken können oder sie wirklich unterbrechen. Nun wird es nothwendig da, wo dieser Rand unterbrochen ist, eine Absonderung der Grenzen geben müssen; diese Grenzen aber werden offenbar nichts anders, als die zwey Begrenzungen einer Linie seyn, denen wir den Nahmen von Puncten geben wollen: woraus sich ergibt, daß der Punct für nichts anders als für die Grenze einer Linie anzusehen ist.

Es gibt folglich eben so gewiß einen Punct als eine Linie: denn es ist unlängbar, daß eine Linie oder ein Theil von einer Linie sich nicht innerhalb gewisser, wegen der Einzelheit des Daseyns immer unterscheidbarer, Grenzen befinden kann, wenn die Grenzen dieser Linie oder dieses Stückes von Linie nicht eben so gut ein Daseyn für sich, wie die Linien selbst oder ihr Stück, haben.

Da der Punct hier nur die Begrenzung einer Linie bedeuten soll, und da unser Verstand unter diesen einzelnen Grenzen nichts anders als diese Grenzen selbst erblicken, und folglich gar

keine andere untergeordnete Grenze, und noch viel weniger irgend eine Trennung von Grenzen daran bemerken kann, so ist es klar,

1. Daß der Punct als unbedingte und letzte Grenze gar keine Art von Ausdehnung hat; und daß er eben deswegen als untheilbar anzusehen ist.

2. Daß folglich die Linie die möglichst einfachste Ausdehnung, das heißt der letzte Bestandtheil der Ausdehnung in jeder Rücksicht genommen ist.

Anmerkung. Obgleich der Punct gar keine Ausdehnung hat, weil man an ihm keine Art von Trennung der Grenzen erblickt oder sich denken kann, so würde es doch sehr sonderbar seyn, wenn man den Punct für durchaus nichts ausgeben, und folglich sein ganzes Daseyn ablängen wollte. Der Punct, es ist wahr, ist nichts in Rücksicht auf die Ausdehnung, so wie das Licht, der Schatten, die Farbe, die Gestalt u. s. w. nichts in Rücksicht auf die Schwere der Körper sind: sind deshalb aber diese letzten Eigenschaften der Körper weniger wirklich vorhanden? Kann man nun dieses nicht läugnen, wie kann man denn ohne die Unaufrichtigkeit aufs Höchste zu treiben der Grenze einer Linie ihr Daseyn abspreden? Ich frage weiter, kann man wohl läugnen, daß der Punct die Ausdehnung

nung einer Linie zu durchlaufen oder zu beschreiben vermag? man braucht ja dazu nur eine Linie, die ihre bestimmten Grenzen hat, weiter fortzuziehen: welches weitere Fortziehen nicht geschehen kann ohne ihre Grenzen fortzurücken, und folglich ohne sie eine neue Linie beschreiben zu lassen. Ich beschränke mich daher bloß darauf, daß ich mit dem schon angeführten Verfasser der Einleitung in die Geometrie bemerke, „daß die gewöhnlichen Ausdrücke im Allgemeinen wenig Bestimmtheit haben; statt, daß in der Mathematik alles genau bestimmt ist.... Das Ende oder die Grenze einer positiven Größe ist es, was die Mathematiker das Nichts dieser Größe nennen, und was sie durch Null ausdrücken. *) Es ist gewiß, daß die Grenze einer Linie, einer Oberfläche, eines Körpers, irgend einer Größe wirklich da ist: in der Sprache der Mathematiker folglich kann bedeuten und bedeutet auch wirklich Nichts die Grenze irgend einer Sache.,, Anm. am Ende der Algebra Theil I.

C 5

Aus

*) Da jede Zahl sich eben so gut als den Unterschied, als wie den Inbegriff zweyer Größen denken läßt, und da jeder Unterschied im Allgemeinen entweder ein Ueberschuß, oder ein Mangel, oder endlich Nichts ist; so sieht man, daß Null das wahre Mittel zwischen Ueberschuß und Mangel hält, und daß sie in eben dieser Rücksicht als eine Art Mittelthing zwischen positiven und negativen Größen anzusehen ist.

Aus allem Besagten fließt, daß es nur drey Arten von Ausdehnung geben kann, nämlich das Solidum, die Oberfläche und die Linie; und da jede Ausdehnung ausgemessen werden oder wenigstens als ausmeßbar gedacht werden kann, so gibt man daher den verschiedenen Arten, wie man wieder in dieser Rücksicht die Ausdehnung betrachten kann, den Nahmen von Maß.

Man lasse z. E. sein Auge auf dem Einen Rande eines Wegs, eines Grabens, eines Flusses u. s. w. der Länge nach hingehen. Da diese Art von Ausdehnung sich nur auf Eine Art ausmessen läßt, weil man sie nur auf Eine Weise genau durchlaufen kann, so ist es augenscheinlich, daß die Linie nur Eine Ausmessung hat, welche Länge heißt.

Wirft man das Auge auf die ganze daliegende Fläche einer Terrasse oder einer Allee, so kann man diese Art von Ausdehnung auf zwey Arten anmessen, nämlich in Ansehung der Länge des einen der beiden entgegengesetzten Ränder der Terrasse oder der Allee, (vorausgesetzt, daß diese Ränder gerade sind) und in Ansehung der verschiedenen Entfernung eben dieser Ränder von einander; woraus man sieht, daß eine Oberfläche nothwendig zwey Ausmessungen hat, wovon die größere den Nahmen Länge behält; die zweyete aber Breite genannt wird.

Endlich,

Endlich, wenn man eine Tafel ansieht, in der Absicht von ihrer Solidität zu urtheilen, so ist es offenbar, daß man außer ihrer Länge und Breite noch ihren Rand betrachten oder die Entfernung der obern Fläche von der untern beurtheilen muß; woraus fließt, daß ein Solidum nothwendig drey Ausmessungen hat, wovon die erste und zweyte den Nahmen Länge und Breite behalten, und die dritte Dicke heißt. Letztere heißt auch Höhe, *) oder Tiefe; und diese verschiedenen Nahmen, die im Grunde das Nähmliche ausdrücken, dürfen gleichwohl nicht gleichgültig einer für den andern genommen werden: denn Tiefe kommt dem Meere, Dicke einem Gewölbe, Höhe einer Schwelle oder Stufe u. s. w. zu.

Man sieht hieraus 1. daß die Ausdehnung im Allgemeinen nicht weniger als Eine, und nicht mehr als drey Ausmessungen haben kann; 2. daß die Linie Eine Ausmessung; die Oberfläche **) zwey, und das Solidum drey Ausmessungen hat.

Klafter,

*) Man braucht auch noch das Wort Höhe, wenn man von einer Erhöhung über den Gesichtskreis sprechen will.

**) Der griechische Nahme der Oberfläche gibt den richtigsten Begriff von dieser Art von Ausdehnung; denn er bedeutet eigentlich, bey den undurchsichtigen Körpern: Was erscheint oder was man an einem Solidum überhaupt erblickt. Der Nahme
Linie

Klafter, Fuß, Daum, Elle u. s. w. sind bestimmte und festgesetzte Größen, in Beziehung auf die Ausmessung der Körper, die man dazu gebraucht, daß man sie als Maß auf die Körper legt, dessen Ausdehnung man bestimmen will: welches messen heißt.

Linie hätte demnach in dieser Sprache heißen müssen: Was am Rande einer Oberfläche erscheint; der Punct: Was am Rande einer Linie erscheint.

§. 3.

Von den ersten Bestandtheilen der drey Arten von Ausdehnung.

Da die Erfahrung uns jeden Augenblick lehrt, 1. daß, wenn man ein Solidum in beliebige Scheiben oder Stücke schneidet, jeder dieser Abschnitte stets neue Oberflächen darbietet; 2. daß in so viele Streifen oder Theile man auch eine Oberfläche theilt, jeder dieser Theile wieder neue Ränder, das heißt, neue Grenzen hervorbringt; 3. daß wenn man auf eben die Art beständig eine Linie theilt, jeder Theil immer zwey Grenzen oder Puncte zeigt: so haben einige neuere Geometer, indem sie sich diese Eintheilung bis an die äußersten Grenzen dieser drey Arten von Ausdehnung vorgesetzt dachten, berechtigt zu seyn

seyn geglaubt, die Linie als eine fortgesetzte Reihe von Puncten; die Oberfläche als eine fortgesetzte Reihe von Linien, die unmittelbar und ununterbrochen ihrer ganzen Länge nach auf einander lägen; das Solidum endlich als eine fortgesetzte Reihe von Oberflächen, die genau auf einander gepaßt wären, anzusehen. Diese unendlichen Kleinheiten nun, wie die Geometer sie nennen, oder diese ersten Bestandtheile, worin jedes Solidum, jede Oberfläche sich folglich am Ende einer unendlichen Theilung zerlegen zu müssen scheint, haben, wegen der Eigenschaft, die man ihnen zuschreibt, den Nahmen von Untheilbarkeiten erhalten.

Dieser Gedanke hat viel Glück gemacht, weil man auf diese Art die geometrischen Erklärungen um vieles verkürzt; allein, ununterstützt von einem genauen und bestimmten Begriffe von Ausdehnung, (Begriff, ohne den man, wie man weiter unten sehen wird, niemahls die Verirrungen der Einbildungskraft in Ansehung der unbegrenzten Theilbarkeit, des Unendlichen u. s. w. in ihrer Quelle wird ersticken können) fand er sich bald zu schwach um den Angriffen seiner Gegner widerstehen zu können.

„In der That, sagten diejenigen, die sich zu erst gegen diese Art von Untheilbarkeiten erhoben, der einzige Weg, wie man sich denken könnte, wie Oberflächen ein Solidum ausmachen könnten,

könnten, würde der seyn, wenn man sie unmittelbar eine auf die andere legte: nun ist es aber unmöglich hierzu mehr als zwey Oberflächen zu gebrauchen. Man nehme einmahl drey, und lege Eine von ihnen zwischen die beiden anderen, so wird die mittelfte die unterste oben, und die oberste unten berühren; sie wird folglich aus zwey Oberflächen bestehen, die zwischen sich einen Zwischenraum haben; zwey Oberflächen aber, die an einander befestigt sind und einen Zwischenraum haben, machen ein wirkliches Solidum aus, wenn man diese Oberflächen und den Zwischenraum, der sie trennt, als Ein Ganzes ansieht. Man hat also etwas unmögliches angenommen, wenn man verlangt, daß man eine Oberfläche unmittelbar zwischen zwey Oberflächen lege: kann man nun aber eine Oberfläche nicht unmittelbar zwischen zwey Oberflächen legen, so kann man auch daraus kein Solidum machen, welches, nach der Meinung der Anhänger der Untheilbarkeiten, aus einer Zusammensetzung von Oberflächen, die unmittelbar eine auf die andere gesetzt sind, besteht. Einleitung in die Geometrie Th. 2.

Wie kann, hätte man ihm ferner einwerfen können, da der Punct an sich selbst gar keine Ausmessung, die Linie keine Breite, und die Oberfläche keine Dicke besitzt, wie kann der Punct eine Linie oder Länge bilden? Wie können
Linien

Linien eine Oberfläche oder Breite bilden? Wie endlich können Oberflächen zusammen eine Dicke oder ein Solidum ausmachen? Diese Schwierigkeit hätte man ihnen eigentlich aufzulösen geben müssen.

Die Anhänger der Untheilbarkeiten indeß, nachdem sie die Ungereimtheit der Folgerungen bemerkten, die aus ihrer Voraussetzung flossen, und da sie gleichwohl nicht gern ihre Meinung aufgeben wollten, kamen nun auf den Gedanken, anstatt der Lagen von Oberflächen unendlich dünne solide Streifen anzunehmen; eine neue Erfindung, die, wie sie meyneten, völlig befriedigend seyn sollte, da Theile von Solidis ja nach und nach ein Solidum bilden können. Es scheint auch wirklich, daß die Indivisibilisten nach dieser Art von Nachgeben von ihrer Seite, da die Untheilbarkeiten aus diesem neuen Gesichtspuncte betrachtet auf Folgerungen herauskommen, die nach aller Strenge und auf eine unwiderlegliche Art bewiesen sind, und da sie noch überdem eine um Vieles weniger verwickelte Beweisart als die alte enthalten, es scheint wirklich, sage ich, daß sie nach ihrer neuen Hypothese, ungeachtet des noch immer Unbestimmten und Dunkeln ihrer unendlich dünnen Streifen, viel weniger Widersacher zu bestreiten gehabt haben.

Der

Der angeführte Verfasser indeß, ohne im Grunde die Beweisart der Indivisibilisten anzufechten, die an und für sich einer guten philosophischen Entwicklung wohl fähig ist, und nur weniger unbestimmt seyn müßte, verlegt den Indivisibilisten durch folgende kurze Erörterung doch einen neuen Schlag. „Diejenigen also, die dieser Lehrart folgen, begehen einen Zirkel *), oder einen Fehlschluß **), wenn sie annehmen, daß die kleinen ursprünglichen Streifen, die auf einander liegen, wie z. E. die Streifen zweyer Spitzsäulen ***) von gleicher Grundfläche und Höhe, aber von verschiedenen Winkeln, eine gleiche Sollicität hätten, welches doch eigentlich zu beweisen wäre; denn wollte man, nachdem man die Gleichheit der Oberflächen, die diese Streifen von oben und unten begrenzen, bewie-

*) *Petitio principii* oder Zirkel ist, wenn man seine Forderungen auf vorgebliche Grundsätze stützt, die noch gar nicht eingeräumt sind.

**) *Paralogismus* oder Fehlschluß heißt, ein falsches Urtheil, oder ein Fehler im Beweise begangen; wenn nämlich die Folge aus Grundsätzen gezogen wird, die falsch oder noch nicht erwiesen sind; oder wenn man über einen Satz wegwischt, der noch hätte bewiesen werden müssen.

***) Die Pyramide oder Spitzsäule ist ein Körper, der sich in eine Spitze, wie ein Zuckerhut endet; die Basis einer Pyramide ist die seiner Spitze entgegengesetzte Fläche.

sen hätte, daraus die Gleichheit der kleinen Soliden folgern, so würde man einen erstaunenden Fehlschluß begehen: man schloße von der Gleichheit einiger Theile der Oberfläche auf die gänzliche Gleichheit des Solidum.,, Einl. in die Geometrie Th. 2.

Da nun die Anhänger der Untheilbarkeit nicht im Stande sind diese Einwürfe zu widerlegen, so ist ihr Lehrgebäude nothwendig mangelhaft, und die Beweisart der Untheilbarkeiten, oder, was auf Eins hinausläuft, die Untersuchung der ersten Bestandtheile jeder Art von Ausdehnung muß folglich anders geschehen. Folgende Art scheint mir die einfachste zu seyn.

Denken wir uns zwey Spiegel ABCDEF GH, abcdefgh (Fig. 1) von gleicher Dicke, völlig flach und geschliffen, woron jeder vier gleiche Seiten hat; legen wir nachher in Gedanken diese Spiegel mit ihren vollkommen gleichen Flächen EFGH, efg h unmittelbar, vornämlich aber so genau auf einander, daß die vier Ränder des Einen mit der größten Genauigkeit die vier Ränder des Andern decken, dergestalt, daß man die Verbindung dieser Flächen gar nicht bemerkt, und beide Spiegel nur gleichsam Ein fortgesetztes Ganze auszumachen scheinen; so würden

1. Die Begrenzungen E und e der auf einander liegenden Ränder EF, ef der zwey Spiegel

D

gel

gel ABCDEFGH, abcdefgh durch ihre wechselseitige Berührung die wirkliche Linie Ee machen;

2. Die verbundenen Ränder EF und ef ebenfalls durch ihre unmittelbare Berührung die wirkliche Oberfläche EFef, und

3. Die Oberflächen EFGH, efgh durch ihre unmittelbare Berührung das wirkliche Solidum EFGHefgh machen;

4. Die kleine Linie Ee aber ein wahrer erster Bestandtheil der Linie Aa; und, bloß in Betracht derjenigen Arten von Ausmessungen, die der Oberfläche und dem Solidum zukommen, die kleine Oberfläche EFef ein wahrer erster Bestandtheil der Oberfläche ABba, und das kleine Solidum EFGHefgh ein wahrer erster Bestandtheil des Solidums ABCDabcd seyr.

In der That erstlich, da die Grenzen E und e, die wir als sonstgelezt annehmen, sich bloß berühren, und folglich eben dadurch wirklich von einander getrennt sind, so macht die Trennung dieser Grenzen schon eine Ausdehnung (§. 1.): weiter, da diese Ausdehnung von zwey Puncten begrenzt wird, indem die Grenzen E und e, die Eine als die Grenze von EF, die Andere als die Grenze von ef betrachtet, an sich nichts als Grenzen von Linien sind; so folgte daraus, daß die Fortsetzung Ee der Grenzen E und e eine wirkliche Linie bildet.

Zwey-

Zweytens, eben so machen durch ihre unmittelbare Berührung die auf einander liegenden Ränder EF und ef eine wahre Ausdehnung aus, in so fern nämlich die Grenze EF der Oberfläche EFGH wirklich von der Grenze ef der an ihr liegenden Oberfläche efg h getrennt ist: außerdem ist diese Ausdehnung von allen Seiten durch die fortlaufende Reihe von vier Linien Ee, ef, fF, FE begrenzt: die fortgesetzten Ränder EF, ef machen also die wirkliche Oberfläche EFfe aus; nicht weniger bilden

Drittens die beiden Oberflächen EFGH und efg h, wovon die eine genau auf die andere gelegt ist, durch ihre unmittelbare Berührung eine wirkliche Ausdehnung, indem nämlich die Grenze EFGH des Körpers ABCDE u. s. w. wesentlich von der gegenüberliegenden Grenze efg h des Körpers abcde u. s. w. getrennt ist. Ueberdem ist diese letzte Ausdehnung von allen Seiten durch das Zusammenkommen der sechs fortgesetzten Oberflächen EFfe, FGgf, GHhg, HEeh, efg h, EFGH begrenzt: die fortgesetzten Oberflächen EFGH, efg h bilden folglich ein wahres Solidum EFGHefgh.

Viertens endlich, da die Linie Ee augenscheinlich nicht in zwey Theile getheilt oder zu einem Puncte werden kann, ohne aufzuhören Linie zu seyn; da die Oberfläche EFfe nicht in zwey Theile zerlegt werden kann, ohne aufzuhö-

ren Oberfläche zu seyn; und da der Körper EFGH efg h eben so wenig in zwey Oberflächen aufgelöst werden kann ohne aufzuhören Körper zu seyn; so ist es klar, daß die Linie Ee eigentlich nichts anders als die letzte Grenze oder Art von Ausmessung, die man Länge nennt, ist; die Oberfläche EFfe die letzte Grenze der Art von Ausmessung, die man Breite, und der Körper EFGH efg h die letzte Grenze der Art von Ausmessung, die man Dicke nennt, ist.

Allein die kleine Linie Ee macht wirklich einen Theil der Linie Aa aus; die kleine Oberfläche EFfe ebenfalls einen Theil der Oberfläche AB, ba; und der kleine Körper EFGH efg h einen Theil des durch die Vereinigung der beiden Spiegel ABCD, abcd gebildeten Körpers ABCDabcd aus; überdem kann man auch nur Sachen von Einer Art mit einander vergleichen.

Woraus sich also mit der größten Gewißheit ergibt:

1. Daß die Linie Ee als Grenze der Theilung der Länge Aa den möglichst kleinsten Theil oder einen bloßen Grundbestandtheil der Linie Aa ausmacht.

2. Daß die Oberfläche EFef als Grenze der Theilung der Breite ABba die allerkleinste Streife ist, in welche die ganze Fläche ABba zerlegt werden kann, und daß sie folglich, bloß in
Rücksicht

Rücksicht auf ihre Breite, als ein wahrer Grundbestandtheil dieser Oberfläche anzusehen ist.

3. Daß der Körper EFGH efgh als Grenze der Theilung der Dicke ABCDabcd die dünnste Streife ist, in welche der ganze Körper ABCDabcd zerlegt werden kann, und daß er folglich als ein wahrer Grundbestandtheil eben dieses Körpers, bloß in Rücksicht auf seine Dicke, anzusehen ist.

Man sieht hieraus, daß die eben gedachten Grundbestandtheile in gewisser Rücksicht als Untheilbarkeiten anzusehen sind. Denn es ist klar, 1. daß die Ausdehnung der Linie Ee untheilbar ist; denn wollte man diese kleine Linie, die nur aus zwey Puncten besteht, auf Einen Punct zurückbringen, so würde man zugleich den ganzen Begriff von Trennung der Grenzen, und mit ihm den von Ausdehnung vernichten; 2. daß die Ausdehnung der Oberfläche EFfe in Rücksicht auf ihre Breite untheilbar ist; denn da diese kleine Oberfläche bloß durch die unmittelbare Belegung zweyer Linien einer auf die andere gebildet ist, so würde man offenbar, wenn man sie bloß auf Eine von diesen Linien zurückbringen wollte, zugleich auch den Begriff von Trennung der Grenzen einer Oberfläche, und folglich auch den von Ausdehnung der Oberfläche aufheben; 3. daß die Ausdehnung des Körpers EFGH efgh nicht minder untheilbar ist;

D 3

denn,

denn, da dieser kleine Körper nur durch die Belegung von zwey Oberflächen einer auf die andere entsprungen ist, so wird man ihn nicht auf Eine von diesen Oberflächen zurückbringen können, ohne zugleich Zeit den Begriff von Trennung der Grenzen eines Körpers, und folglich der Ausdehnung eines Körpers zu vernichten.

Man sieht indeß, daß dieses noch nicht die Grundbegriffe und die ersten nothwendigen Bestandtheile der Ausdehnung, die nothwendig untheilbar in jeder Rücksicht seyn müßten, sind; es ist daher nothwendig zu untersuchen, worin das Wesen der unbedingt ersten Bestandtheile der Ausdehnung oder die wahren Untheilbarkeiten bestehen.

§. 4.

Von den wahren Untheilbarkeiten.

So bald man bedenkt, daß die oberflächliche Streife $EFfe$, und die körperliche Streife $EFGHefgh$, die ich eben, die Eine in Rücksicht auf ihre Länge, die Andere in Rücksicht auf ihre Breite, als Untheilbarkeiten betrachtet habe, gleichwohl in Rücksicht auf ihre übrigen Ausdehnungen sich noch immer theilen lassen, ohne darum aufzuhören Oberflächen oder Körper zu seyn; so sieht man auch leicht, daß weder diese oberfläch-

oberflächlichen, noch diese körperlichen Streifen sich als unbedingte erste Bestandtheile der Ausdehnung, daß heißt, als Theile von Ausdehnung ansehen lassen, die in jeder Rücksicht auf ihre möglichst kleinsten Ausmessungen zurückgebracht, und folglich durchaus untheilbar sind.

Um nun die Beschaffenheit dieser unmittelbaren ersten Bestandtheile genau bestimmen zu können, müssen wir nothwendig den Begriff, den wir uns eben von der Art von Untheilbarkeit der obgedachten oberflächlichen und körperlichen Streifen gemacht haben, verallgemeinern, und dem zufolge sämmtliche, sowohl Oberfläche als körperliche Grundbestandtheile, auf Linienbestandtheile oder auf eigentliche untheilbare Linien, das heißt, auf die möglichst kleinste Größe von Linien zurückbringen.

So 1. wenn man sich zwey untheilbare Linien oder zwey erste Linienbestandtheile AB und ab , (Fig. 2) die genau eine auf der andern liegen, denkt, so hat man die kleine Oberfläche $ABab$, die, da sie auf keine Art geheilt werden kann ohne in eine Linie aufgelöst zu werden, oder, welches dasselbige ist, ohne aufzuhören Oberfläche zu seyn, folglich ein wahres erstes Flächenbestandtheil, das heißt, eine Oberfläche, die unmöglich in zwey Oberflächen geheilt werden kann, bildet.

2. Nicht minder, wenn man sich zwey durchaus untheilbare Oberflächen oder zwey wahre erste Flächenbestandtheile ABCD, abcd (Fig. 3) denkt, wovon die eine genau auf der anderen ruht, so hat man einen kleinen Körper, der, da er auf keine Art getheilt werden kann, ohne in eine Oberfläche zu verschwinden, oder, welches auf Eins hinausläuft, ohne aufzuhören Körper zu seyn, folglich einen wahren ersten Körperbestandtheil, das heißt, einen Körper macht, der durchaus nicht in zwey Körper getheilt werden kann.

Worauf unlängbar folgt, daß wenn, wegen seines gänzlichen Mangels an Ausdehnung, der Punct durchaus untheilbar ist *), nicht minder

I. Der

*) Gesezt ein Körper erschiene uns plötzlich millionenmahl größer oder kleiner als er jetzt ist, so würden uns seine verschiedenen Seiten darum noch keine Dicke, und die Ränder dieser Seiten noch keine Breiten zeigen; sondern jede Seite des Körpers nur mehr oder weniger in die Länge und Breite ausgedehnt, und die Grenzen dieser Flächen, die Linien nämlich, bloß mehr oder weniger in der Länge ausgedehnt erscheinen. Die Grenzen dieser Linien würden also genau genommen nur millionenmahl näher oder entfernter als vorher dem Anscheine nach unter einander liegen, ohne darum eine neue Ausmessung, noch folglich eine

1. Der Grundbestandtheil A a (Fig. 1) als letzter denkbarer Theil der Linienausdehnung ein vollkommenes Untheilbares in Rücksicht auf die Linien;

2. Der Grundbestandtheil ABba (Fig. 2) als letztmöglicher Theil der Oberflächenausdehnung nach allen ihren Seiten betrachtet, ein völliges Untheilbares in Rücksicht auf die Oberflächen;

3. Der durch die unmittelbare Berührung des Flächenbestandtheils a b c d auf die unterliegende Fläche ABCD entstandene Körper als minimum oder möglichst kleinster Theil der Körperausdehnung nach allen ihren Ausmessungen ein wahres Untheilbares in Rücksicht auf die Körper ausmacht.

Endlich, wenn nichts uns hindert, sowohl in Rücksicht auf ihre äußerste Kleinheit, als auf ihre Untheilbarkeit, die ersten Linien = Oberflächen = und Körperbestandtheile als Arten von Puncten anzusehen; so scheint uns auch nichts zu verbieten, so wie wir den wahren Punct oder die Grenzen einer Linie einen mathematischen Punct oder einen Punct schlechweg heißen: Linienpunct, die ersten Linienbestandtheile: Oberflächenpunct, die ersten Oberflächenbestandtheile

D 5

oder

eine neue Art von Ausdehnung zu erhalten. Eigentlich untheilbar ist also nur der Punct als Grenze der Linie, oder der mathematische Punct.

oder die möglichst kleinste Oberfläche: und geometrischer Körperpunct oder Körperpunct schlechweg, die ersten Körperbestandtheile oder die möglichst kleinsten Körper zu nennen *).

- *) Man wird nicht leicht den Begriff des mathematischen Punctes, des Oberflächen- und Körper- oder geometrischen Punctes mit dem körperlichen oder physischen Puncte verwechseln können: da man unter ersterem nur die bloßen ersten Bestandtheile vom Raum oder den ersten Anfang der Ausdehnung; unter letzterem hingegen die ersten Bestandtheile des Stoffs, das heißt, den Urstoff der materiellen und physischen Körper versteht.

§. 5.

Von der Entstehungsart der Ausdehnung; von ihren verschiedenen Verhältnissen, von ihrem Zunehmen und Abnehmen.

Da die Ausdehnung nichts als Trennung der Grenzen ist, so bedarf man zwey letzter Grenzen, um die einfachste Ausdehnung zu erhalten: und dieser einzige Grund schon läßt uns fühlen, daß, wenn gleich der Punct gar keine Größe hat, er doch bloß durch seine Stellung gegen eine andere ähnliche Grenze eine wirkliche Linie bilden kann.

Mit

Mit den beiden andern Arten von Ausdehnung verhält es sich offenbar eben so: denn, wenn gleich die Linie keine Breite, und die Oberfläche keine Dicke hat; so bildet doch wiederum die Stellung mehrerer Linien und Oberflächen gegen einander eine wirkliche Oberfläche und Körper.

Wenn man sich auf einer Fläche $ABDC$ (Fig. 4) die man viel länger als breit annimmt, einen Einschnitt *), der schräg auf der Grundlage CD dieser nämlichen Fläche heruntergeht, und durch die Linie AD bezeichnet ist, denkt, so bemerkt man gleich, daß die Grenzen A und D dieser Linie AD weit mehr von einander entfernt sind, als die Grenzen A und C der geraden, nicht herabgehenden Linie AC : so daß, wenn man sich nun die Fläche $ABDC$ in erste Bestandtheile oder in kleine Streifen zerschnitten denkt, die alle von eben der Länge als diese Fläche, die aber zugleich Zeit aufs minimum ihrer Breite zurückgebracht sind, so würden die ersten Bestandtheile der Linie AD in jeder von dieser letzten Streifen begriffen, merklich länger als die entgegengesetzten ersten Bestandtheile von AC seyn, die, da sie noch unserer Annahme die Dicke jeder kleinsten Streife bezeichnen, jede
noth-

*) *Secatio* oder Einschnitt: dieses Wort kömmt vom lateinischen Worte *secare* schneiden. So heißt man den Ort, wo Linien, Oberflächen u. s. w. von andern Linien, Oberflächen u. s. w. durchschnitten sind.

nothwendig durch zwey sich berührende Punkte begrenzt seyn müssen, das heißt, wenn man sich den ersten Linienbestandtheil AC als aus zwey Punkten bestehend denkt, die gar keinen Zwischenraum zwischen sich lassen, so muß der entgegengesetzte erste Bestandtheil AD sich ebenfalls in zwey Punkte zerteilen lassen, die aber, statt einander zu berühren, nothwendig einen leeren Platz oder Zwischenraum, nach Verhältniß des Winkels des Einschnittes AD, unter sich lassen müssen.

Dies ist der Grund, warum man in der Geometrie beweiset, daß zwey Spisssäulen von gleichen Grundflächen und von gleicher Höhe nichts desto weniger, wenn sie verschiedene Winkel machen, in Ansehung der Oberflächen verschieden seyn können; die Länge der verschiedenen Flächen dieser Körper muß nämlich bey gleicher Breite nach Verschiedenheit ihrer Winkel nothwendig steigen *).

Endlich ist es klar, daß durch ihr Aneinanderliegen der Körperbestand der Spiegel ABC DEFGH, abcdefgh um den ganzen ersten Bestand-

*) Aus eben diesem Grunde sind die Zwischenräume eines schräg geschnittenen Stück Holzes oder eines andern Körpers viel breiter, als wenn es nicht so, sondern senkrecht, den Streifen des Körpers nach, zerschnitten wäre.

Bestandtheil der Streife EFGH efg h zunimmt; durch ihre Trennung aber der Körper ABCD abcd um eben so viel abnimmt.

Woraus man sieht, daß, um mit vollkommener Genauigkeit einen Körper, eine Fläche, oder eine Linie auszumessen, man jedesmahl den Anfang des neuen Maßes auf das Ende des vorhergehenden Maßes legen muß, oder, was eben das ist, daß die Grenzen der auf einander folgenden Ausmessungen sich vollkommen decken müssen; ohne welches man jedesmahl einen wirklichen obgleich sehr kleinen Theil der Ausdehnung, wovon man sich das genaue Maß verschaffen will, auslassen würde.

Dies ist die Ursache warum, wenn man zwey oder mehrere Theile einer Ausdehnung die einen zum andern hinzusetzt oder davon wegnimmt, man sich zur Sicherheit des Verfahrens so leicht angewöhnt, die Grenze des einen Theils für die Grenze des andern darauf folgenden Theils anzusehen, das heißt, das Ende des einen Theils als den Anfang des andern zu betrachten.

Aus dieser Ursache endlich theilen die Mathematiker die Größen in stetige und getrennte. Stetige Größen sind die Linien-Flächen- und Körperausdehnung: sie sind folglich ein Gegenstand der Geometrie; getrennte Größen werden durch Zahlen ausgedrückt und gehören in die

Arith.

Arithmetik. Die Ausdehnung ist in der That eine stetige Größe, weil man keinen Zwischenraum an ihren Theilen bemerkt, und man sich zwischen zwey stetigen Theilen der nämlichen Ausdehnung keinen dritten denken kann; die Zahlen hingegen sind unterschiedene oder nicht stetige Größen, weil es keine noch so wenig von einander entfernte Zahl gibt, wozwischen man sich nicht eine größere als die kleinere, oder eine kleinere als die größere von den beiden gegebenen Zahlen denken kann.

§. 6.

Vom Unendlichen.

Wenn man mit dem Worte Unendlich, immer den Begriff desjenigen, was keine Grenzen hat verknüpft, so muß man gestehen, daß die Ausdrücke Unendliches, Unendliches des Unendlichen, Unendliches des Unendlichen des Unendlichen u. s. w. unendlich Großes, unendlich Kleines, eben so viele Redensarten sind, die auf die geometrische Ausdehnung gar keine Beziehung haben *). Kann man in der That,
ohne

*) Ich sage geometrische Ausdehnung, um dieselbe von der Ausdehnung der Zeit zu unterscheiden, die ebenfalls eine Gattung des Raums, die aber, unbedingt und in Beziehung auf die Ewigkeit betrach-

ohne die Vernunft zu beleidigen, von einer Linie sagen, daß sie unendlich ist? Da die Linie nichts als

Betrachtet, das heißt, in Rücksicht auf die Fortdauer des Ewigen, weder Anfang noch Ende, und folglich keine Größe hat. Wie können nun die Geometer von der Ausdehnung in ihrem Sinne genommen als Grundsatz festsetzen, daß es unendliche, von allen Seiten begrenzte Größen gäbe? Wo ist hier die Deutlichkeit, die sie bey einem solchen Ausspruche zu finden glauben? Kann auch das Endliche mit dem Unendlichen verglichen werden? und das Unendliche bleibt es dann auch noch Unendlich, wenn es begrenzt werden kann?

In der That, wenn gleich das geträumte Unendliche der Geometer aus einer unendlichen Vermehrung oder Verminderung zu folgen scheint; so folgt doch daraus nicht, daß es durchaus und nothwendig ohne Grenzen seyn müsse, weil es nicht widersprechend ist, daß es welche hat. Ungeachtet es in einem beständigen thätigen Zunehmen oder Abnehmen ist, so endigt es doch wirklich jeden Augenblick eben da, wo sich die Möglichkeit seiner Vermehrung oder Verminderung erneuert, und sein Mangel an Grenzen kömmt bloß daher, daß man, ungeachtet man es könnte, sie ihm nicht fest. Es ist folglich widersinnig, ein Unendliches eine Reihe von Zahlen zu nennen, denen man keine Grenze setzen will. Ueberhaupt kann man eine Größe, die man sich als aus einem be-

ständi-

als der Rand oder die Grenze einer Oberfläche,
die Oberfläche aber nothwendig von allen Seiten
umschloß

ständig hinzusetzen entsprungen denken kann, oder, was auf Eins hinausläuft, die Größe des Zusammengehäuften kein Unendliches seyn: man kann die Reihe wo man will unterbrechen; und, gesetzt auch, man unterbräche sie nicht, so bleibt doch diese seynsollende unendliche Größe immer Etwas sich Beziehendes, welches man nach andern Größen abmessen und damit vergleichen kann. Nun aber ist Alles Meßbare endlich: denn, so ist die so genannte unendliche Fortschreitung der natürlichen Zahlen $1 * 2 * 3$ nichts als die Hälfte der Zahlenfortschreitung $2 * 4 * 6$ u. s. w. Ein Unendliches folglich, welches die Hälfte eines andern seyn kann, ist nicht ohne Grenzen und eine augenscheinliche Abgeschmacktheit.

Weiter, da die Linie von den Umrissen der Oberflächen, die Oberflächen von dem Umschlage der Körper herkommen, und jeder Körper, da er durchaus eine Gestalt haben muß, nothwendig endlich ist; so kann es offenbar in der Natur weder gerade noch krumme Linien, die unendlich wären, und folglich auch keine Hyperbeln und noch weniger Asymptoten ohne Ende geben.

Ueberhaupt ist eine Zahl, eine Linie, eine Oberfläche, ein Körper ohne Ende etwas eben so widersprechendes, als ein dreneckiges Viereck, aus dem einzigen Grunde, weil jede Zahl, Linie u. s. w.
schon

umschlossen ist; so gibt es folglich in der Natur keine Linie, die nicht eine geschlossene Krümme oder gemischte *) wäre, und, jede Linie anders betrachtet, ist eigentlich nichts weiter, als ein Theil von Linie.

Sollte es also die Oberfläche seyn, die unendlich wäre? Allein da die Oberfläche an sich nichts als die Begrenzung eines Körpers ist; so ist es offenbar, daß sie nicht unendlich seyn kann, wenn der Körper selbst es nicht ist.

Ein unendlicher Körper ist also wohl etwas anderes als eine bloße Vorstellung? Denn, um sich einen Körper zu denken, muß man ihm wenigstens eine Gestalt beylegen, die entweder eine Sphäre **), ein Würfel, oder eine Pyramide u. s. w. seyn wird. Diese Gestalten sind aber noch

schon ihrer Natur nach einer Vermehrung fähig, und folglich endlich in dem nämlichen Augenblicke ist, der vor ihrer Vermehrung voraus geht.

*) Gemischte nennt man eine Linie, die zum Theil gerade, zum Theil krumm ist.

***) Die Gestalt einer Sphäre erblickt man an einer bloßen Kugel; den Kubus in einem Spielwürfel; die Pyramide in einem Obelisk oder an dem Dache eines vier- oder vieleckigen Lusthäuschen; den Kegel (oder die Pyramide mit runder Grundfläche) an einem Zuckerbute.

nothwendig geschlossen, weil sonst die Körper selbst aufhören würden Gestalten zu haben. Kein Körper kann folglich unendlich seyn.

Keine Ausdehnung kann folglich unendlich seyn.

In Rücksicht auf die Ausdehnung folglich sind ein unendlich Großes, ein unendlich Kleines, ein Unendliches, oder wie man es sonst nennen mag, bloße Wesen der Einbildung; und man darf sich nicht mehr wundern, daß diese Ausdrücke so viele gründliche und gerade Köpfe von der Verreibung der Geometrie abgeschreckt haben.

Wie soll man aber, wird man nun fragen, alle diese verschiedenen Grade von Ausdehnung bezeichnen, die über und unter unsere Sinne sind z. E. die Ausdehnung eines ersten Bestandtheiles von Stoff, oder die Ausdehnung des Weltalls?

Ich antworte hierauf, daß, um sich einen rechten Begriff von diesen Arten von Ausdehnung zu machen, man nur Ausdrücke zu gebrauchen hat, die mehr der Beschaffenheit der Sache angemessen sind. So würde ich, indem ich gestünde, daß ich eben so wenig die Größe des Weltalls, als die ersten Bestandtheile des Stoffes angeben, und folglich auch nicht genau bestimmen könnte, diese Größen überhaupt unbestimmbar nennen.

Als

Als Größe, die jede bestimmbare Größe übertrifft, würde ich die erste ein oberes Unbestimmbares, und als Größe, die unter jeder bestimmbaren Größe steht, würde ich die letzte ein unteres Unbestimmbares, oder, wenn man lieber will, das eine ein unbestimmbares Großes, das andere ein unbestimmbares Kleines nennen. Diese Benennungen sind, dünkt mich, leicht zu begreifen, und die Geometer werden sich ihrer eben so gut bey ihren Rechnungen bedienen können *).

E 2

Da

- *) Es ist z. E. keineswegs nothwendig, bis zu den ersten nothwendigen Bestandtheilen der Ausdehnung hinabzugehen, um sich einen bestimmten Begriff vom unendlich Kleinen zu machen. Denn, wenn man mit einem Körper, wie z. E. mit dem ganzen Bestande eines beträchtlichen Berges, einen andern Körper vergleiche, der so klein wäre, daß er fast unsern Sinnen entwischt, z. E. den Umfang des kleinsten Stoffes, des Staubes; so fällt es in die Augen, daß, gesetzt auch dieses Stofftheil brächte als Zahl, die man immer zu sich selbst hinzuhäte, betrachtet, durch seine beständige Wiederholung oder durch seine Anhäufung keinen Körper, der genau dem Berge gleich käme hervor, dieser Mangel oder Ueberschuß doch wenigstens so unmerklich und folglich so unbestimmbare, in Verhältniß mit der ungeheuren Größe des Berges seyn würde, daß man nichts desto weniger sich

Da die Zahleneinheit nur das darstellende Zeichen einer einzelnen Größe oder eines besondern Ganzen, bloß entweder als Inbegriff seiner ersten nothwendigen Bestandtheile, oder als einen von diesen ersten Bestandtheilen selbst betrachtet, ist; so sieht man wiederum, daß es muthwillig sich täuschen heißt, wenn man diese Art von Größe als bis ins Unendliche theilbar ansieht. Denn würden wir, wenn nur unser Auge hellsehend und unser Gefühl fein genug wäre, um die Ausdehnung der wirklich ersten Bestandtheile eines Gegenstandes zu unterscheiden und folglich ihre Anzahl angeben zu können, noch einen Augenblick daran zweifeln, daß, diese Anzahl durch 12, und die Größe des Gegenstandes durch 1 ausgedrückt, der Bruch $\frac{1}{12}$ der wahre Ausdruck des letzten Bestandtheils sey, worin diese

sich letzteren als eine zusammengesetzte Anzahl kleiner Stofftheile denken könnte, die alle jenem kleinsten Stoffe, Staub, vollkommen gleichen, oder die durch die beständige und einförmige Wiederholung dieser Stofftheile genau hervorgebracht wäre. Die Untheilbarkeiten dieser Art haben also immer ihre Verhältnisse, die eine Art von Rechnung zulassen, die die meisten von den Rechnungen in der Mathematik außerordentlich verkürzen, und wovon wir die Erfindung, die wegen gewisser dabey üblichen Ausdrücke eine Erdichtung zu seyn scheint, einem Cavarelli, Leibniz und Newton verdanken.

diese Größe sich auflösen könne, und daß es weiter hinab nichts, oder, deutlicher gesprochen, keine Größe mehr gäbe?

Wenn also gleich die wahren ersten Grundbestandtheile einer Größe sich unsern Sinnen entziehen, und in sofern wahre unbestimmbare Größe für uns sind, so läßt sich doch leicht einsehen, daß, wenn man durch $\frac{1}{2}$ einen willkürlich gedachten ersten Raumbestandtheil ausdrückt, es alsdann ein ganz unbestimmter Ausdruck wird, den man aber nach Belieben durch eine ganze, größere oder kleinere, Zahl ausdrücken kann, nachdem man mehr oder weniger genau sich dem ersten Bestandtheil, den es vorstellt, nähern will; daß aber, da man nachher eben diese Zahl als den Nenner eines Bruchs, der die Einheit zum Zähler hat, betrachtet, dieser letzte Ausdruck die Eigenschaft eines wirklichen Untheilbaren hat, oder, was Eins ist, zunächst an Null grenzt.

Jede wegen ihrer Kleinheit unbestimmbare Ausdehnung pflegt man gewöhnlich für Null anzunehmen: so hat die Eintheilung der Masse ihre gewisse Grenzen z. E. Linie, Punct, unterhalb welcher man dasjenige; was übrig bleibt, vernachlässiget und es ansieht als wenn es nicht da wäre.

§. 7.

Von dem wahren Sinne, den man mit den Worten Größe und Anzahl zu verbinden hat.

Größe. „Dies ist eines von den Worten, sagt Dalembert, wovon jeder einen genauen Begriff zu haben glaubt, und wovon es doch so schwer ist, eine genaue Erklärung zu geben *).,, Aeltere Encyclopädie von Paris, Abschn. Größe.

Dies bey Seite gesetzt, pflegen die Mathematiker gewöhnlich die Größe als dasjenige zu beschreiben, was aus Theilen zusammengesetzt ist; oder auch, was einer Vermehrung und Verminderung fähig ist; oder endlich, was einer Vermehrung oder Verminderung fähig ist.

Nun

*) Dalembert gibt nachher zu verstehen, daß diese Schwierigkeit daher komme, weil der Begriff, den das Wort Ausdehnung einschließe, einfacher als irgend ein Begriff sey, wodurch man es zu erklären gedenkt. Auf die Art haben so viele berühmte Metaphysiker auf eine feine Art die Schwierigkeiten zu umgehen gewußt, und wissen sie noch immer zu umgehen, die bisher mit der Erklärung der ersten Begriffe verknüpft waren.

Nun 1. bedeutet genau genommen, was aus Theilen zusammengesetzt ist, die Vereinigung oder die Summe dieser Theile, das heißt, ein Ganzes. Diese Erklärung kommt also eigentlich nur dem Ganzen zu.

2. Würde nach dem Begriffe von Größe, als desjenigen, das einer Vermehrung und Verminderung fähig ist, nach Dalembert selbst, das Unendliche eben so wenig eine Größe, als es die Null ist, seyn: indem das Unendliche eben so wenig einer Vermehrung, als die Null einer Verminderung fähig ist; nun würde man aber, sagt eben dieser Geometer, offenbar den Sprachgebrauch beleidigen, wenn man sagen wollte, daß das Unendliche keine Größe sey, da es doch allgemein angenommen ist, von einer unendlichen Größe zu reden *). Auch würde,

E 4

wenn

*) Unendliche Größe, Unendliches u. s. w. sind ganz unschickliche Benennungen, wie wir solches im vorigen § gesehen haben. Das Unendliche, wovon man sich einen nur sehr schwachen Begriff machen kann, weil man es sich nur durch sein Entgegengesetztes, das Endliche, das heißt, auf eine Art, die der Natur des Menschen und seinem Geistesvermögen schnurstracks entgegengesetzt ist, vorstellen kann; das Unendliche, sage ich, wird immer etwas Unbegreifliches für uns bleiben, weil es eine Eigenschaft des höchsten Wesens ist, und weil

wenn man alles, was einer Vermehrung und Verminderung fähig ist, eine Größe nennen wollte, das Licht ebenfalls eine Größe seyn, indem

weil das Wesen der Gottheit ein Abgrund ist, den der menschliche Verstand nicht erforschen kann, und über welchen nur die Verwegenheit selbst abzusprechen magt. Die durch eine vernünftige Philosophie erleuchtete Weisheit lehrt uns als das Ende aller Untersuchungen, die göttlichen Eigenschaften so von den Eigenschaften auch der vollkommensten Geschöpfe zu trennen, daß wir in Zukunft nicht mehr verleitet werden können, die Natur Gottes oder seine Rathschlüsse auf eine Art erklären zu wollen, die uns ihn mit Unvollkommenheiten, abhängig und veränderlich darstellt, Eigenschaften, die niemahls das Erbtheil des ewigen, unbegrenzten, freien, unabhängigen, unveränderlichen, seligsten und glücklichsten Wesens seyn können. Seys, daß dieses Wesen dasjenige, was noch nicht war, hervorbringt, oder dasjenige, was schon da war, vernichtet, sey, daß es bloß den Zustand der Dinge verändert, indem es unter den Geschöpfen eine Veränderung auf die andere folgen läßt; so befindet sich der unmittelbare Grund der kleinsten Veränderung, die sich in der Natur zuträgt, in ihm selbst und verliert sich in ihm; und von dem Menschen, der an die Erdscholle gefesselt ist, bis zum Philosophen oder aufgeklärtesten Priester werden den schwachen Sterblichen seine Rathschlüsse immer verborgen bleiben.

dem es auch vermehrt und vermindert werden kann; und doch würde es sehr unpassend seyn, das Licht eine Größe zu nennen.

3. Die Größe so erklären wollen: Was einer Vermehrung oder Verminderung fähig ist, hieße offenbar die Null ebenfalls für eine Größe erklären; denn, wenn Null gleich keiner Verminderung fähig ist, so läßt sie sich doch vermehren.

Wenn wir aber, nach unserer Erklärung von Ausdehnung, und nach dem genauen Sinne des Wortes Werth, welches hier nichts anders bedeuten soll, als: eine Sache innerhalb gewisser Grenzen betrachtet; diese Grenzen mögen nun wirklich, oder willkürlich bestimmt, oder endlich bloß eingebildet seyn; wenn wir, sag ich, Größe alles dasjenige nennen, welches, ohne es im mindesten mit sich oder mit andern zu vergleichen, irgend eine Ausdehnung oder Werth hat; so ist es klar, daß diese einfache Erklärung uns den deutlichsten Begriff von der Mathematik überhaupt und in ihren verschiedenen Theilen betrachtet gibt.

In diesem Sinne eigentlich heißt die Mathematik die Wissenschaft der Größen: weil sie zu ihrem eigentlichen Gegenstände die Eigenschaften der Größe hat, in sofern letztere sich berechnen oder ausmessen läßt.

Auf eine ähnliche Art heißt die Arithmetik die Wissenschaft der Größen durch Zahlen ausgedrückt; in sofern dieser Theil der Mathematik die Eigenschaften der Zahlen betrachtet, in so weit sie sich berechnen lassen.

Die Algebra ist die Wissenschaft der Größen, durch Zeichen, die auf alle mögliche Arten von Größen anwendbar sind, ausgedrückt; in sofern sie nämlich im eigentlichen Sinne die Art und Weise ist, auf unbestimmte Art alle mögliche Größen zu berechnen, indem man sie durch allgemeine Zeichen, wie z. E. die Buchstaben des Alphabets sind, ausdrückt, denen man ihres allgemeinen Gebrauchs wegen, und weil sie leichter und bequemer als irgend eine andere Art von Zeichen sind, den Vorzug gegeben hat.

Die Geometrie endlich kann man die Wissenschaft der Größen durch Linien ausgedrückt nennen; weil sie insbesondere die Eigenschaften der Linien betrachtet, in sofern diese letzteren Zeichen dazu dienen, die Ausdehnung zu bilden und auszumessen.

Was das Wort Anzahl betrifft, so fühlt jeder, daß, ungeachtet der größte Theil der Mathematiker es für ein gleichbedeutendes Wort mit Größe und Ausdehnung nimmt, Größe und Anzahl gleichwohl nicht einen völlig gleichen Sinn haben; in sofern das eine eine absolute, unbedingte;

mit den Worten Größe und Anzahl ic. 75

bedingte; das andere aber eine relative, bedingte Grenze andeutet; oder, um mich deutlicher zu erklären, weil das eine etwas allgemeines unbestimmtes, das andere aber immer eine besondere Größe zu bezeichnen scheint.

Um sich also den rechten Begriff von Anzahl zu machen, muß man sie nothwendig so erklären: Alles, was groß oder klein, gleich oder ungleich in Rücksicht auf die Ausdehnung oder den Werth einer andern Sache, die ihm zum Vergleichungsdinge dient, ist.

§. 8.

Vom Raume, vom Orte und von der Lage.

Raum im Allgemeinen bedeutet eine ungewisse, unbestimmte, auf keinen sinnlichen Gegenstand angewandte Ausdehnung: er ist bedingt oder unbedingt.

Der unbedingte Raum ist, wie ich schon bey der Entwicklung der Natur der Ausdehnung bemerkt habe, diese große Ausdehnung des Weltalls an sich selbst, oder ohne Rücksicht auf die einzelne Ausdehnung irgend eines Sinnenwesens, und auf die jedesmahlige Lage dieser Wesen zu nehmen, das heißt, als ein Zusammengesetztes von bestimmten gleichartigen Theilen betrachtet.

Der

Der bedingte Raum, noch mehr unter dem bloßen Nahmen Raum bekannt, ist jeder Theil des unbedingten Raums in Rücksicht auf mehrere Sinnenwesen betrachtet, und folglich eben so veränderlich, wie die jedesmahlige Lage dieser Wesen.

Der Ort überhaupt ist eine bestimmte Ausdehnung oder ein gewisses Stück Raum eingenommen oder nicht durch sinnliche Gegenstände. Er ist bedingt oder nicht nach der Natur des Raums, worin er gedacht wird.

Das Wort Lage gehört zu den noch unerklärten Wörtern; auch pflegen die Metaphysiker insbesondere nicht zu ermangeln, als Ursache davon anzugeben: daß der mit diesem Ausdrucke verknüpfte Begriff zu einfach sey, um einer Zergliederung fähig zu seyn. Wir wollen indeß versuchen, diesen Begriff zu entwickeln, und die Lage als die Art und Weise der Stellung eines Gegenstandes im Raume, oder noch genauer so erklären: der Ort, den ein Gegenstand in dem nähmlichen Augenblicke, wo man ihn betrachtet, einnimmt, und der Anblick, den er zu gleicher Zeit in Rücksicht auf verschiedene merklich bestimmte Punkte der Ausdehnung darbietet. Ist es nun nicht klar, daß die verschiedene Stellung der Dinge, das heißt, der Ort und wechselseitige Anblick der Dinge, bloß unter einander oder im bedingten Raume betrachtet, ihre bedingte Lage; und daß der Ort und jedes-

jedesmalige Anblick der Dinge in Rücksicht auf zwey oder mehrere merklich bestimmte Punkte des unbedingten Raums, als wie auf eben so viele Fixsterne oder Punkte der Weltgegend, ihre wirkliche und unbedingte Lage bilden.

Das Wort Lage war also allerdings einer Zergliederung fähig, und die Erörterung, die ich eben von dem Begriffe dieses Ausdrucks gegeben habe, kann mit Recht auf eine Stelle unter den Grundbegriffen Anspruch machen.

Es ist hier selbst nicht am unrechten Orte, das Licht zu betrachten, den ein Grundbegriff, gut erörtert, auf einen andern, der ihn unmittelbar folgt, zu werfen im Stande ist. Die Lage z. E. gut erklärt, gibt sie nicht schon von selbst den Begriff des Wortes Bewegung: Veränderung der Lage, oder bestimmter; Veränderung des Orts, oder des Anblicks, oder beider zusammengenommen? Ist dieser Begriff nicht äußerst deutlich? Denn es ist nicht allein einleuchtend, daß diese Erklärung beide Arten von Bewegung in sich begreift, die fortschreitende oder versetzende sowohl, als die kreisförmige *); sondern auch, daß die gebräuchliche

Erklä-

*) Kreisbewegung; ein Mühlstein z. E., der, ohne seinen Ort zu verändern, sich nur um seine Achse herumdreht, hat eine bloße Kreisbewegung. Umsonst würde man einwerfen, daß diese Art von

Bewe-

Erklärung von Bewegung: Versetzung eines Körpers von einem Orte nach einem andern, äußerst ungereimte ist; in sofern die Versetzung oder Verrückung eines Körpers nichts anders, als die Wirkung seiner fortschreitenden Bewegung ist.

So führt ein genauer Begriff von Ausdehnung von sich selbst auf den von Raum; der Begriff von Raum auf den von Ort; der von Ort auf den von Lage, und dieser auf den der Bewegung u. s. w. Mit einem Worte, alle Grundwahrheiten berühren sich und machen zusammen eine ununterbrochene Kette aus.

Bewegung im Grunde auf die versetzende Bewegung hinausläuft, in sofern die sämtlichen Punkte des Mühlsteins beständig ihren Ort verändern; denn, der bewegliche Körper im ganzen oder als Einheit genommen, ist darum eben so wenig von einem Orte zum andern versetzt, und verändert daher eben so wenig seine Stelle als die Axe seiner Bewegung (so nennt man die Linie, die man sich durch die Punkte hindurch denkt, um welche ein Körper, der sich um sich selbst dreht, seine Umwälzungen zu machen scheint.)

§. 9.

Von den geometrischen Bildern und Zeichen.

Obgleich das Wort Bild eigentlich nur die bedingte Lage der allgemeinen Grenzen oder verschiedenen äußerlichen Theile eines Gegenstandes bedeutet, so dehnen doch die Geometer die Bedeutung dieses Worts auf Alles dasjenige aus, was auf dem Papiere die verschiedenen Arten von Ausdehnung, und das Verhältniß der Lage ihrer verschiedenen Grenzen zu einander bezeichnet; und pflegen so, ungeachtet es äußerst einleuchtend ist, daß der Anblick eines einzelnen Punctes nicht für ein Bild im eigentlichen Verstande genommen werden kann, gleichwohl diesem kleinen Zeichen, wodurch sie die letzte Grenze der Ausdehnung darstellen, diesen Nahmen beizulegen *).

Dieses

*) Was liegt auch endlich daran, ob man sagt: einen Punct bilden, und ob man ihn wirklich bildet; besonders da der Sprachgebrauch es mit sich bringt, jedes Zeichen oder Darstellung, ja selbst den Ausdruck unserer eigenen Ideen ein Bild zu nennen? Wer kennt nicht Bredeus's allertliebste Verse über die Schrift, dieses stumme Zeichen unserer Gedanken, welches er so angenehm beschreibt:

Die

Dieses vorausgeschickt, wird der Punct als Grenze der Linie oder als letzte unbedingte Grenze der Ausdehnung auf dem Papiere durch den kleinsten Eindruck der Feder oder Zirkelspitze so bezeichnet, daß das Auge weder Länge, Breite noch Dicke an ihm bemerken kann. Die Linie als Grenze der Oberfläche, oder als die erste Art der Ausdehnung, wird durch einen Zug ausgedrückt, der fein genug ist, um bloß eine Länge an sich bemerken zu lassen. Die Oberfläche als Grenze eines Körpers, oder als Ausdehnung der zweyten Art, wird durch einen Raum, der von eben so feinen Linien eingeschlossen ist, die seine Grenzen bezeichnen und ihn von allen Seiten bilden helfen, dargestellt. Der Körper endlich als Ausdehnung der dritten Art, oder von drey Ausmessungen, wird durch einen Raum gebildet, der von allen Seiten von Oberflächen begrenzt ist, die man sich als durchscheinend und in der Entfernung, übrigens aber so, wie ich eben gesagt habe, gezeichnet denkt.

Da der Punct als Grenze der Linie gar keine Ausdehnung haben kann, so ist es klar, daß man sein Bild, gesetzt auch man machte es viel sinnlicher, als wie oben gesagt ist, gleichwohl als keine Ausdehnung habend sich vorstellen muß.

Eben

Die schöne Kunst der Redemahlerey, der Sprache für das Auge: wo der Gedanke durch verschiedene Züge, Bilder, Farbe und Körper erhält.

Eben so muß der einfache Zug, der eine Linie vorstellen soll, wenn er etwas zu dick ausfallen sollte, immer noch als bloß eine Länge oder eine Ausmessung habend angenommen werden. Da überdem die Grenzen einer Linie nothwendig von einer Art sind, und sich folglich genau ähnlich seyn müssen; so müssen die Punkte, die sie begrenzen, sehr sorgfältig auf einerley Art eingedrückt werden.

Was die Zeichen, die man in der Geometrie gebraucht, betrifft,

I. so bedeutet das Zeichen $+$ plus, und das Zeichen $-$ minus: es sind ganz verschiedene und völlig entgegengesetzte Zeichen; so, daß, wenn das eine die Addition anzeigt, das andere die Subtraction angibt; wenn das eine eine Richtung nach der rechten Hand oder hinauf, das andere eine Richtung nach der linken Hand oder hinunter andeutet u. s. w. Ueberhaupt versteht man jedesmahl, wenn kein Zeichen dabey steht, das Zeichen $+$.

Da das Zeichen $+$ auch ein positives Zeichen heißt, und das Zeichen $-$ ein negatives Zeichen; so heißt auch die Größe, die das Zeichen $+$ hat, eine positive Größe, und diejenige, die das Zeichen $-$ hat, eine negative Größe.

§

Wenn

Wenn eine Größe, die ganz allein steht, das Zeichen — hat, so muß man diese negative Größe als eine Richtung nach der linken Hand oder hinunter, oder aber als dasjenige sich denken, was einer Größe mangelt um einer andern Größe gleichzukommen: so würde, wenn von zwey Leuten, die ihr Alter mit einander verglichen, und wovon der eine 3 Jahre älter als der andere wäre, der ältere seinen Unterschied an Jahren durch $+3$ ausdrückte, der andere den seinen durch -3 ausdrücken können. Denn überhaupt muß bey jedem Unterschiede dasjenige, was der eine mehr hat, der andre weniger besitzen.

2. Das Zeichen \times bedeutet multiplicirt durch, und ist das Zeichen der Multiplication.

3. Ein wagerechter Zug, der zwischen zwey Größen sich befindet, wovon die eine oben, die andre unten steht, bedeutet die Division, und zeigt an, daß die obere Größe durch die untere dividirt wird. Z. E. $\frac{7}{4}$ heißt, daß 7 durch 4 dividirt ist; und $\frac{7+5}{4-2}$ bedeutet, daß die Summe von 7 und 4 durch die Differenz von 4 und 2, d. h., 12 durch 2 dividirt ist.

N. B. Wenn eine einzelne Größe mehrere andere multipliciren soll, so pflegt man alle zu multiplicirende Größen zwischen zwey Klammern

mern zu fassen, oder sie durch einen Strich überher zu verbinden: so bedeutet $(5-2)+4$ oder $5+2+4$ beides, daß $5-2$ oder 3 durch 4 multiplicirt ist; eben so zeigt $(5-2)+(6+3)$ oder $5-2+6+3$, daß $5-2$ durch $6+3$ oder 9 multiplicirt ist.

4. Das Zeichen $=$ ist das Zeichen der Gleichheit und bedeutet gleich.

5. Die beiden Zeichen $>$ und $<$ zeigen die Ungleichheit an; das erste bedeutet größer als, und das zweyte kleiner als.

6. AB^2 AB^3 bedeutet das Quadrat oder den Kubus einer Linie AB .

7. $\sqrt{\quad}$ heißt Wurzelzeichen und bedeutet Wurzel von: $\sqrt{8}$ z. E. bedeutet Wurzel von 8 , oder daß man die Wurzel von 8 ausziehen soll. Die Zahl über den Wurzelzeichen heißt der Exponent des Wurzelzeichens, und zeigt den Grad der Wurzel an; so bezeichnet man die zweyte oder Quadratwurzel durch $\sqrt{\quad}$; die dritte oder Kubikwurzel durch $\sqrt[3]{\quad}$. $\sqrt{\quad}$ aber ohne Exponent bedeutet immer $\sqrt[2]{\quad}$ oder Quadratwurzel.

8. L oder \log bedeutet Logarithmus von: z. E. L_{25} oder \log_{25} bedeutet Logarithmus dieser Zahl.

9. Das Zeichen $::$ wird bloß bey geometrischen Verhältnissen gebraucht, und bedeutet wie. Das Zeichen $:$ wird gewöhnlich sowohl bey arithmetischen als geometrischen Verhältnissen gebraucht, und bedeutet im ersten Falle verhält sich, im andern wie.

Das Zeichen $..$ ist den geometrischen Verhältnissen insbesondere eigen, und heißt verhält sich. $\ddot{::}$ und $\dot{\div}$ heißt ebenfalls wie, und wird gebraucht; wo man ein oder das andere von den Zeichen, die man zur Bezeichnung dieses Worts zu gebrauchen pflegt, wiederhohlen muß.

Dies ist die Frucht meiner Bemühungen und meines Nachforschens über die Begriffe, die der Geometrie vorausgehen müssen, wenn Anfänger und Eingeweihte selbst den Gegenstand ihrer Bemühungen verstehen wollen *). Sollte dieser Vorsatz den gewünschten Erfolg haben, so würde ich nicht säumen, die Grundsätze der Geometrie, oder alle geometrische Wahrheiten bekannt zu machen; gewisse Sätze selbst,

*) Der Finsterniß, die bisher die Grundbegriffe der Geometrie bedeckte, verdanken wir es, daß alle unsere Metaphysiker noch immer wollen, daß die Geometrie, eben so wie die Theologie ihre Glaubenssätze haben soll, und daß man selbst noch heute zwanzig Physiker auf Einen Geometer findet.

selbst, die noch unbekannt und nicht weniger wichtig als die andern sind, sollten von mir verallgemeint und in ihrer natürlichen Verkettung eben so streng als einfach dargestellt werden. Ich sage, eben so streng als einfach; denn es ist ein Irrthum, selbst nach Dalambert, zu glauben, daß eine von diesen Bedingungen notwendig die andere ausschließen müsse.

Nachricht

N a c h r i c h t

der ursprünglichen französischen Ausgabe.

Es sind nur 300 Abdrücke von diesem Werke gemacht worden, die man auf bloße Bitte und Empfehlung der Herren Professoren der Mathematik an junge Beflissene auf den verschiedenen hohen Schulen und Akademien, deren Vermögensumstände wirklich beschränkt sind, umsonst zu vertheilen gewillet ist. Man bittet bloß die Herren Professoren, ihre Forderungen dem guten Willen des Verfassers gemäß einzurichten, und ihre Briefe, unter der Aufschrift: An den Herrn Postrath Henneberg zu Braunschweig, frey zu überschieken.

Nachricht

Nachricht an den Buchbinder.

Das kleine Kupfer, welches das Werk nothwendig gemacht hat, muß ans Ende des Buchs gebunden werden, so daß man es beyrn Lesen bequem fürs Auge aufschlagen kann.

Ständes der von ...

Das hier ...
...
...



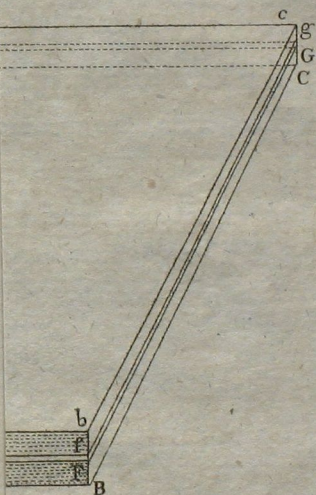
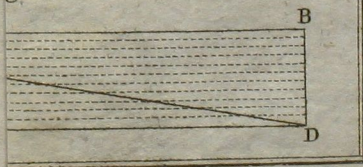


Fig. 3^e

$$\left. \begin{array}{l} A \equiv B \\ C \equiv D \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \equiv b \\ c \equiv d \end{array}$$

g. 4^e



Einleitung in die Geometrie

Introd. à la Géométrie.

Fig. 1.^{ere}

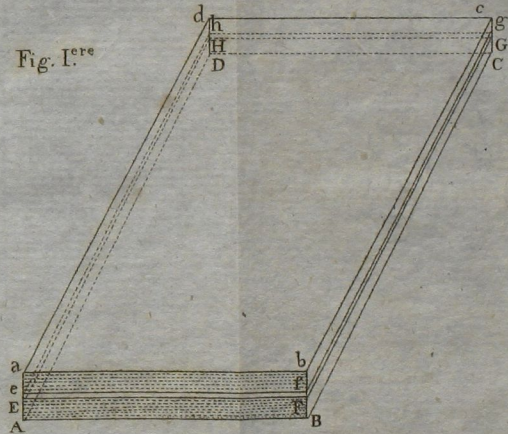


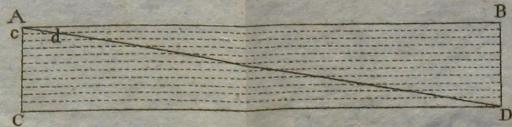
Fig. 2.^e

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$$

Fig. 3.^e

$$\frac{A}{C} = \frac{B}{D} \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

Fig. 4.^e



Pe 2158

VD18

ULB Halle

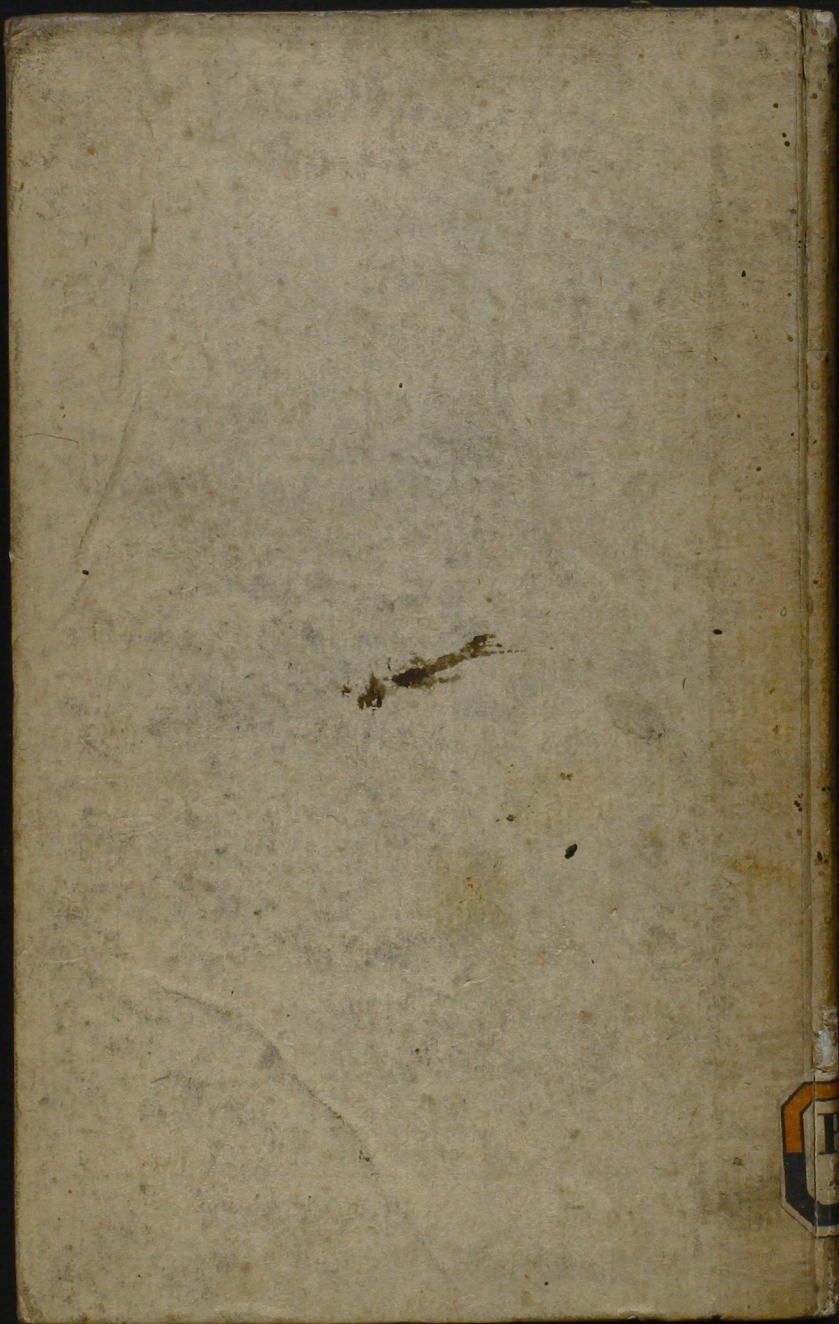
3

006 550 142



17







B.I.G.

Farbkarte #13

Black
3/Color
White
Magenta
Red
Yellow
Green
Cyan
Blue

Einleitung
in die
G e o m e t r i e
oder
Entwicklung des Begriffs Raum.

Ein Werk, das geschickt ist, die ersten Schritte der jungen Leute, die sich der Geometrie widmen wollen, zu leiten, indem es ihnen die ersten Begriffe entwickelt, die, weil sie bisher nicht in ihrem gehörigen Lichte dargestellt waren, den Verstand abschreckten, oder ihn wenigstens nicht befriedigen konnten, und die bisher viele, und selbst sehr berühmte Leute gegen die Gründlichkeit und die Reize dieser Wissenschaft eingenommen haben.

Aus dem Französischen des Verfassers des
Buchs der Wahrheiten.

Göttingen, 1797,
bey Johann Christian Dieterich.