
Freiherr v. Ende-Altjessnitz

33.

26

Q. D. B. V.

DISSERTATIO
DE
TRIPLICI
ALGEBRÆ CARTESIANÆ ALGORITHMO,

Quam

RECTORE MAGNIFICENTISSIMO
SERENISSIMO PRINCIPE AC DOMINO,
DN. FRIDERICO WILHELMO,
MARCHIONE BRANDENBURGICO, ET ELECTORATUS HEREDE, AC RELIQVA,

IN ILLUSTRI FRIDERICIANA
Benevolo Amplissimæ Facultatis Philosophicæ consensu,
Censuræ Eruditorum publicæ submittunt

PRÆSES
M. LUCAS BESELIN,
EJUSDEM FACULT. ADJUNCTUS,
ET RESPONDENS
HERMANN. ALBERTUS SCHUCKMAN,
MEGAPOL. GUSTROV. LL. St.

Ad diem Januarii A. C. MDCCI.

HALÆ MAGDEBURG.
Typis Johannis Jacobi Krebsii, Acad. Typogr.

DEO,
PATRI, PATRIÆ.

PRÆFATIO.

QUamvis omnes & singulæ Matheseos partes laudibus sint cumulatissimæ, in nullam tamen plures & majores congesserunt laudes Mathematici, quam in eam, quæ ALGEBRA nuncupari consvevit. Cardano (in Lib. de Prop.) *Ars omnem humanam subtilitatem, omnis ingenii mortalis claritatem superans*, appellatur; Renaldino (in Præfatione Artis Analyticæ) dicitur: *Clavis, in cœlesti quadam officina, communis mortalium utilitatis gratia elaborata, quæ universæ Matheseos ditissimum Thesaurum, etiam reluctante natura, possit aperire*; Weigelio (Analys. Aristot. Euclid. Sect. II. Cap. 3.) nuncupatur: *Alphabetum quasi potestativum, quo scire nostrum, quod ab Alphabeto figurativo primum inchoatur, tandem terminamus*; Sturmio (in Præf. Mathes. Enucl. & Anal. Spec.) *Universæ Matheseos culmen, Scientiarum scientia, humanæ rationis fastigium, & Artificium stupendum* audit. Aliorum elogia prætermitto. Nec immerito summis extollitur laudibus, ad latentem enim veritatem indagandam eo progreditur, quo reliquæ Matheseos partes pertingere nequeunt. Numerorum miracula, tam abstrusa & recondita, ut facultas illa eruendi omnem captum humanum superare videatur, non citra mortalium admirationem, summa felicitate & facilitate recludit. Hæc inventa aliorum ad Lydium lapidem appendens, quo pacto ea adinvenerint, quid in iis omiserint, & quid ad summam eorum perfectionem illis desit, docet, atque exponit. Hæc de Natura, celebriora mysteria avare occultante, quasi victoriam reportans & triumphans, jure ac merito potest gloriari. Inter omnes ergo Matheseos partes caput suum altius exserit,

Quantum lenta solent inter viburna Cupressi.

Apud Veteres magno in honore, summoque pretio extitit hæc

Scientia, qui arcana ejus introſpicientes, omnes ingenii nervos in eam, numeris tamen tractatam, intendebant, omnino perſvaſi, hac ſcientia, tanquam optima veritatem inveniendi methodo, deſtitutum, in reliquis ſcientiis Mathematicis feliciter progredi non poſſe, nec tam ad uſum, quem negotiis humanis præbet, quam ad veritatem, in naturæ gremio latentem, inveſtigandam, reſpexerunt, qua nihil homini ſvavius, nihil amœnius, & nihil jucundius, qua animus humanus tanquam dulciſſimo Sapientiæ Divinæ nectare, mirifice recreatur, & veluti præſtantiſſimo pabulo reficitur. *Antiqua* tamen hac Algebra jure merito præſtantior habetur *Specioſa*, & quidem *Carteſiana*, nihil in illius laudibus tam excelſum reperitur, quod in hac longe ſublimius non ſit. Hæc cedro & æternitate digna, reliquorum Mathematicorum inventa longiſſimo poſt ſe intervallo relinquit. Hujus ope varia Problemata intricatiſſima ubique terrarum pro inſolubilibus & impoſſibilibus habita, ad unius cujusque ſtuporem ſunt reſoluta, quorum agmen ducit arduum illud Problema, quod neque Euclides, ſummus Geometriæ dictator, neque Apollonius, cognomine Magnus Geometra, neque quisquam alius reſolvere potuit, ſed novæ hujus Algebræ beneficio, a Carteſio felicisſime eſt reſolutum. *Geom. ſuæ Lib. I. pag. 13. & ſeqq.* Inſigne quoque edidit ſpecimen Ulmæ, cum celebrem ejus loci Mathematicum, Joh. Faulhaberum ſalutaſſet, huic enim tam difficilia, ope Algebræ ſuæ, enodavit Problemata, ut ipſe confeſſus fuerit, ſe non credidiſſe, tale ingenium eſſe ſub ſole dabile, quod tanta præſtare poſſet. vid. *Lipſtorpii Specim. Phil. Carteſ. Parte II. pag. 78.* Minime ergo operam nos luſuros eſſe arbitrati ſumus, ſi admirandæ hujus Methodi principia, tribus Algorithmis comprehenſa, ea, qua fieri poteſt, brevitate & perſpicuitate, proponeremus. Cœpta Vnitas infinita ſecundet!

CA-

CAPUT I.
PRÆLIMINARE.
DE ALGEBRA IN GENERE.

§. 1.

ALGEBRA est ſcientia, quæ inter quantitates notas & ignotas æqualitatem conſtituens, ignotum invenit, Theoremata ſubtiliſſima explicat, ac Problemata difficillima ſolvit & demonſtrat.

§. 2. Circa Etymologiam hujus vocis non conveniunt Algebriſtæ, alii enim a *Gebro*, natione Arabo, tanquam ſcientiæ hujus inventore, Algebræ nomen deducunt; alii a vocabulo Arabico, *Algiabr*, quod *reſtaurationem* ſignificat, illud derivare malunt, cum Algebra paſſim reſtauratione utatur. Adhuc alii ex particula Arabica אַל (quam ſemper præponunt, ut Græci articulos ὁ, ἡ, &c.) & גְבוּרָה *fortitudine*, illud originem traxiſſe credunt, ut adeo *Algebra* idem ſit ac *Ars validiſſima & efficaciſſima*.

§. 3. Quod attinet ad Algebræ Synonymiam, conſtat, eam aliis *Artem Analyticam* nuncupari, quod methodo Analytica procedat, & Propoſitionem aliquam ad priorem, a qua dependet, reducat. Italis *Coſſica*, (& poſtea corrupto a Germanis vocabulo, die Regel Coß) nominata eſt, quia juxta Algebram Antiquam operationis initium fieri ſolet ab hoc charactere *V* qui denotat *Radicem, Rem, Cauſam*, (Italis *Coſam*) adhuc involutam. Keckermannus tamen in Syſtem. Compend. Matheſ. pag. 46. appellationem *Regulæ Cos*, non a voce Italica *Coſa*, ſed potius & verius ab Arabico כּוּז quod eſt ab Hebræo כָּסַס, id eſt *Numerare*, deſcendiſſe cenſet, ut *Regula Cos* ipſi vi vocis ſit: *Ars excellentiſſimæ cujusdam numerationis. Cum enim apud Italos*, pergit, *Coſa ſignificet rem quamcunque in genere, ita, ut potius hæc vox Metaphyſicæ convenire poſſit, ubi de re in genere agitur, non poteſt ab ea voce, tam longe lateque ab hac arte diſtante & diſcrepante, Regula Cos nomen accepiſſe.*

§. 4. Diſtinguitur in *Numeroſam*, & *Specioſam*. Illa Veterum, hæc Recentiorum Algebra audit. Illa circa numeros abſolutos, hæc circa Species, id eſt Alphabeti literas, non tantum numerorum, ſed & cujusvis quantitatis loco aſſumtas, occupata eſt. Quibus effecerunt, ut latissime nunc, non solum in Arithmetica & Geometria ejus pateat usus, sed etiam uno Problemate resoluto, generalis habeatur Regula, secundum quam omnia similia Problemata possint resolvi, licet infinitis modis data varientur. Ab hac ergo specierum utili, jucunda, ac speciosa designatione, *Algebra* vocatur *Speciosa*.

§. 5. Hæc iterum distinguitur in *Vietæam*, quam Vieta Anno Christi 1590. introduxit, & *Cartesianam*; quæ postea a Cartesio & Harriotto multum est locupletata, & nunc certatim a Mathematicis, ornatur & amplificatur. Vieta loco numerorum datorum sive notorum assumsit consonantes, & loco ignotorum vocales; Cartesius vero loco numerorum datorum adhibuit ptiores Alphabeti literas, & loco ignotorum posteriores. Vieta quoque usus est literis Alphabeti majusculis, ac retinuit signa potestatum antiqua; Cartesius vero adhibuit literas minores, ac potestates numeris expressit.

§. 6. Numerosæ autem Algebræ primus inventor quisnam extiterit, in certum est, dum alii inventionem ejus Gebro, Philosopho Arabico, qui Alexandri M. tempore vixisse dicitur, alii Diophanto Alexandrino tribuant, alii ex India scientiam hanc ortam esse, Diophantum autem eam saltim in ordinem magis redegisse, autumant.

CAPUT II
De
SPECIERUM INTEGRARUM RATIONALIUM ALGORITHMO.

§. I.

Species, sive *Symbola speciosa* nobis nihil aliud sunt, quam literæ, loco numerorum eum in finem assumtæ, ut eo facilius quæstiones propositæ solvi possint.

§. 2, Distinguuntur autem in *simplices*, quæ nullo signo algebraico copulatæ sunt, & *Compositas*, quæ aliquo signo junguntur, Species utræque sunt vel *Rationales*, quarum valor numeris exprimi porest; vel *Irrationales*, seu *Surda*, quarum valor nullis numeris, (neque integris, neque fractis, neque ex integro & fracto mixtis) exprimi, adeoque nec audiri, nec ulla ratione determinari potest, ut: *Va*,

V(3)

$V(3)b$, si a denotaret numerum non-quadratum, & b numerum non-cubicum. Nonnullis dicuntur *Species Radicales*, quia in fronte gerunt signum radicale, & nihil aliud sunt, quam Radices illarum Potestatum, quarum Analysis fieri nequit.

§. 3. *Algorithmus*, est numerorum tractatio complectens vulgatas illas operationes, vulgo *Species* dictas, nimirum: *Notationem, Additionem, Subtractionem, Multiplicationem, Divisionem, & Radicum extractionem.*

DE NOTATIONE.

Reg. 1. Numeri ante species positi, notant species per illos numeros esse multiplicandas. Si vero nullus speciei præfixus sit numerus, unitatem tamen præfixam esse, cogitandum est.

Reg. 2. Post species positi numeri indicant dimensiones, sive toties speciem in se ducendam esse.

Reg. 3. Signum æqualitatis sive æquipollentiæ est æ, & notat species esse æquales, sive æqui pollentes.

Reg. 4. Signum hoc (†) significat *plus*, ideoque vocatur *affirmans*, & indicat, species, inter quas ponitur esse addendas. Illis etiam speciebus, quæ signo hoc præfixo carent, intelligitur hoc signum affirmans esse præfixum.

Reg. 5. Signum hoc (-) significat *minus*, ideoque dicitur signum *negans*, & notat, speciem, cui præponitur, ab antecedente subtrahendam esse.

Reg. 6. Signum Multiplicationis est X vel * quamvis rarissime usupentur, plerumque enim species multiplicandæ sine signo conjunguntur. Aliis in usu est factores sibi invicem apponere, ita tamen, ut duo intercedant commata, & cuivis factori virgula incumbat. Ex. gr.

$\overline{a}\,{,}{,}\,\overline{d} \qquad \overline{cc + e}$

Reg. 7. Signum Divisionis est lineola inter species interjecta, & significat superiorem per inferiorem dividendam esse.

DE ADDITIONE.

Reg. 1. Si eædem species eadem habeant signa, species datæ adduntur præfixo eodem signo.

Exem-

Exempla

Adde	a	a † b - c	3 x † d	2 ab - 5 x
	4a	2a † 3 b - c	4 x † 6d	3 ab - x
Summa	5a	3a † 4 b - 2c	7 x † 7d	5 ab - 6 x.

Reg. 2. Si eædem ſpecies diverſa gerant ſigna, ſubtrahatur minor ſpecies a majori, & reſiduo præfigatur ſignum ſpecici majoris.

Exempla.

Adde	2b	3b † 9c	da - 3 x	ab - 3a † 5c
	-b	b - 4c	- 2da † 4x	3ab † 4a - 7c
Summa	b	4b † 5c	- da † x	4ab † a - 2c

Reg. 3. Si eædem ſpecies, diverſa ſigna habentes, æquales inter ſe fuerint, ſumma erit o.

Exempla

Adde	3 a - b	a x - e - 2c	ac
	b - 3a	2c † e - ax	- ac
Summa	0	0	0

Reg. 4. Diverſæ ſpecies, ſive iisdem, ſive diverſis ſignis affectæ, adduntur præfixo ſigno, quod antea habebant.

Exempla.

Adde	a - c	ac † ee	x † 3e
	b † d	x - e	a - b
Summa	a - c † b † d	ac † ee † x - e	x † a † 3e - b

DE SUBTRACTIONE.

Reg. 1. Si ſpecies eædem & æquales eadem habeant ſigna, reſiduum eſt o.

Exempla

Ex	ac	ac † aa	bc - 2x
Subtr.	ac	ac † aa	bc - 2x
Reſid.	0	0	0

Reg. 2. Si ſpecierum earundem eadem ſigna habentium, inferior ſeu ſubtrahenda minor ſit ſuperiori, ſubtractio vulgari modo perficitur, manente eodem ſigno.

Exem-

Exempla

Ex	7 b	5c†4a-3d	9x-4f†3d
Subtr.	4 b	c†2a-d	4x-3f†d
Resid.	3 b	4c†2a-2d	5x-f†2d

Reg. 3. Si vero ſpecierum earundem, eadem ſigna habentium inferior, ſeu ſubtrahenda, major ſit ſuperiori, inverſe ſubtrahendum eſt, & reſiduo apponatur ſignum contrarium.

Exempla

Ex	2 ba	c-fe	a-b†4bb	dx†y-e
Subtr.	5 ba	2c-6fe	3a-2b†7bb	4dx†3y-5e
Reſid.	-3ba	-c†5fe	-2a†b-3bb	-3dx-2y†4e

Reg. 4. Si ſpecies eædem diverſa gerunt ſigna, ſubtractio mutatur in additionem, ac ſummæ apponitur ſignum ſuperioris ſpeciei, a qua ſubtractio fieri debebat, licet inferior ſeu ſubtrahenda, major ſit ſuperiori, ſeu minuenda.

Exempla

Ex	2x	3b-5x	4a-2bc†3f	y-yd†c
Subtr.	-x	-5b†4x	-3a†5bc-2f	y†4yd-5c
Reſid.	3x	8b-9x	7a-7bc†5f	-5ya†6c

Reg. 5. Species diverſæ, ſive eadem, ſive diverſa habeant ſigna, ita ſubtrahuntur, ut ſpecies ſuperiores una cum ſigno ſuo appoſito locentur tanquam reſiduum, ſpecies autem inferiores, ſeu ſubtrahendæ, prioribus copulentur mediante ſigno ſuo contrario.

Exempla

Ex	be	aa†4c	xd-2c†ee
Subtr.	c	b-2e	bd†ef
Reſid.	be-c	aa†4c-b†2e	xd-2c†ee-bd-ef

DE MULTIPLICATIONE.

Reg. 1. Species, ſive eædem, ſive diverſæ extiterint, ſi non habent appoſitos numeros, immediate copulantur.

Exempla

Multipl.	eb	axx	ab	ay
per	c	xe	bd	ey
Product.	ebc	aex^3	$abbd$	$aeyy$

Reg. 2. Si ſpecies numeros appoſitos habent, hi, ſi ante ſpecies poſiti fuerint, inter ſe multiplicantur, & productum literis ſibi invicem copulatis præfigitur; ſi vero poſt ſpecies poſiti fuerint, adduntur.

Exempla.

Multipl.	$3b$	$5ac$	$2b^3$	$6ac^3$	$4xx$
per	$4b$	$3c$	$4b$	$2ac^3$	$4x^4$
Product.	$12bb$	$15acc$	$8b^4$	$12ac^6$	$16x^6$

Reg. 3. Eadem ſigna ponunt ſignum †, diverſa ſignum -

Exempla.

Multipl.	$a+b$	$a+b$	$xx-xc+cc$
per	$a-b$	$a+b$	$x+c$
	$-ab-bb$	$ab+bb$	$+xxc \quad -xcc+c^3$
	$aa+ab$	$aa+ab$	$x^3-xxc \quad +xcc$
Prod.	$aa-bb$	$aa+2ab+bb$	$x^3- \quad c^3$

DE DIVISIONE.

Reg. 1. Si ſpecies numeros præfixos non habent, ex ſpecie dividenda auferatur id, quod diviſori ſimile eſt.

Exempla.

Divid. acb	(ab Quotus.	$dacc$ (ac Q.	$efxx$ (ef Quotus.
per c		dc	xx

Reg. 2. Si vero numeros præfixos habent, oportet facta ſpecierum diviſione, etiam numeros dividere, & hunc numerorum quotum, ſpecierum quoto præfigere. Si poſt ſpecies poſiti fuerint numeri, ſubtrahuntur.

Exempla.

Divid. $6bed$	($3ed$ Quotus.	$9ax^4$ ($3ax^2$ Q.	$8ab^5$ ($4ab^3$ Q.
per $2b$		$3x^2$	$2b^2$

Reg. 3.

Reg. 3. Si divisor in specie dividenda non reperitur, interjecta inter divisorem & dividendum lineola, constituatur fractio.

Exempla.

Divid. $ef \left(\frac{ef}{a} \right.$ Quotus. $cx3 \left(\frac{cx3}{ab} \right.$ Quotus. $dy \left(\frac{dy}{ae} \right.$ Quotus
per a $\quad$ ab $\quad$ ae

Reg. 4. In Divisione quoque eadem signa ponunt signum †, & diversa -.

Exempla.

Divid. $b3 \dagger c3 \; (bb - bc \dagger cc$ Quotus.
per $b \dagger c$
$b3 \dagger bbc$
Resid. $c3 - bbc$
$b \dagger c$
$-bbc - bcc$
Resid. $c3 \dagger bcc$
$c \dagger b$
$c3 \dagger bcc$
Resid. 0

$6aa \dagger ab - 12bb \; (3a - 4b$ Quot.
$2a \dagger 3b$
$6aa \dagger 9ab$
Res. $-8ab - 12bb$
$2a \dagger 3b$
$-8ab - 12bb$
Resid. 0

Reg. 5. Quando species dividenda a divisore non exacte exhauritur, abjectis speciebus similibus, dissimiles in modum fractionis collocantur.

Exempla.

Divid. $\left\{ \begin{matrix} acde \\ adfx \end{matrix} \right. \left(\frac{ce}{dx} \right.$ Quotus
per

$\frac{2ab}{bc} \dagger \frac{ac}{bc} - \frac{xce}{bc} \left(\frac{2a}{c} \dagger \frac{a}{b} - \frac{xe}{b} \right.$ Quotus.

DE RADICUM EXTRACTIONE.

Reg. 1. Post species simplices positus binarius, indicat speciem quadratam, & ternarius, cubicam (idem est si eædem species bis aut ter ponantur) quarum Radices sunt illæ ipsæ species.

Exempla.

Quadr. $\left\{ \begin{matrix} a2e2 & xxc2 \\ ae & xc \end{matrix} \right.$ Cubus $\left\{ \begin{matrix} b3d3 & z3a3 & f3x3y3 \\ bd & za & fxy \end{matrix} \right.$
Radix Quadr. $\quad$ Radix

Reg. 2. Species composita, si est Quadratum, constare debet ex duobus quadratis, & duobus Rectangulis; vel ex tribus quadratis &

sex Rectangulis; vel ex quatuor quadratis & duodecim Rectangulis, a quadratorum lateribus factis, & sic porro. Si ergo latera quadratorum addantur, summa constituet speciei compositæ radicem optatam.

Exempla.

Quadr. $aa \dagger 2ab \dagger bb$ $\quad$ $aa \dagger 2ab \dagger bb - 2ac - 2bc \dagger cc$
Radix $a \dagger b$ $\quad$ Radix $a \dagger b - c$

Reg. 3. Species composita Cubica constare debet vel ex duobus cubis, & sex parallelepipedis, ex cuborum horum hedris & lateribus alternatim compositis, vel ex tribus cubis & 18 parallelepipedis, quæ alternatim ex cuborum horum hedris & lateribus producta sunt, & insuper ex sex aliis parallelepipedis, quorum dimensiones sunt ipsa cuborum latera, & sic porro. Si tunc cuborum latera adduntur, habebis Radicem quæsitam.

Exempla.

Cubus $a3 - 3a^2b \dagger 3ab^2 - b3$
Radix C. $a - b$

Cubus $a3 - 3aad \dagger 3aae \dagger 3add$
$\dagger 3eea - d3 \quad \dagger 3edd$
$- 3eed \dagger e3 \quad - 6ade$

Rad. Cub. $a - d \dagger e$

Reg. 4. Speciernm Radices eo quoque modo, quo in Arithmetica vulgari id fieri solet, inveniri possunt; licet Species Algebraicæ istis Arithmeticorum Regulis non indigeant, sed potius harum Regularum norma existant.

Exempla.

Quadr. $bb - 2be \dagger ee$ ($b - e$ Rad. Quadr.
Dupl. $2b \quad - e$
$2be \dagger ee$

Res. 0

Cub. $c3 \dagger 3c2b \dagger 3cb2 \dagger b3$ ($c \dagger b$ Rad. C.
Tipl. $3c$
Divis. $3cc$

$3ccb$
$3cbb$ Quadr.
$b3$ Cub.

Subtr. $3ccb \dagger 3cbb \dagger b3$

Reg. 5. Sed si species datæ non habent radicem quadratam aut cubi-

cubicam, signum quæsitæ radicis datis speciebus præfigitur; compositis præterea lineola apponitur.

Exempla.

Quadr.	aee	$\overline{2aa + bc}$	Cub. $ac3$	$\overline{xe - zae}$
Radix	$\sqrt{aee}$	$\sqrt{2aa + bc}$	Rad. $\sqrt{(3)}\, ac3$	$\sqrt{(3)}\, xe - zae$

Reg. 6 Ex quadratis negativis radix, (quæ imaginaria dicitur) aliter extrahi nequit, quam præfixo signo radicali, licet species sit exacte quadrata.

Exempla.

Quadr.	$-aa$	$-xxzz$	$-b^2f2$	$-yy$
Radix	$\sqrt{-aa}$	$\sqrt{-xxzz}$	$\sqrt{-b2f2}$	$\sqrt{-yy}$

Reg. 7. Ad Potestatum altiorum Radices inveniendas, inserviunt Regulæ inferiorum Potestatum, quarum exponentes sunt factores exponentis Potestatis resolvendæ. Ex Potestate ergo data extrahatur radix, quam unus factorum indicat, & ex inventa radice denuo alia, quam alter extrahendam monet, & sic porro, si plures sint factores exponentis dati; radix ultimo proveniens est quantitas quæsita.

Exempla.

Si radix Quadr. Cubica extrahenda sit ex a^3b^3 primum extraho Radicem Cubicam, quæ est ab, & ex hac quantitate iterum Radicem quadratam, eritque $\sqrt{ab}$ Radix quæsita. Exponentes enim 3. & 2 constituunt 5, seu dimensiones potestatis datæ.

Sic ex $p3 - 3p^2b + 3pb^2 - b3$ extracta Radix Quadr. Quadr. Cubica, vel juxta Arabes, Sursolida 2da, est: $\sqrt{\sqrt{p-b}}$

DEMONSTRATIO.

Algorithmi operationes, vulgo *Species* dictæ, se mutuo probant, & a posteriori demonstrant: sic Additio probatur per Subtractionem, Subtractio per Additionem, Multiplicatio per Divisionem, Divisio per Multiplicationem, & Radicum extractio per Potestatis suæ productionem, seu involutionem. A priori etiam Algorithmus demonstratur per Definitiones, Axiomata, & Postulata Arithmetica, ex. gr. *Additio est quantitatum in unam summam collectio. Subtractio est, quando minor quantitas aufertur a majori. Privativi additio est rei abla-*

tio. *Privativi subtractio est rei additio. Idem in totum & omnes illius partes sensim ductum, dat facta, seu producta aequalia*, &c. Quod autem in Multiplicatione & Divisione eadem signa producant † diversa - demonstratum invenies apud Sturmium, *Mathes. Enucl, Lib. I. Sect. II. Prop. 4 & 5. pag. 90. 91. & 92.* Sed Radicum Quadratarum extractio in specie demonstratur *per IV. Lib. II. Euclidis*, quam repraesentat *Fig. I.* ex qua patet, speciem compositam, si sit quadratum, ad minimum constare debere duobus quadratis, hic *aa* & *bb*, & duobus Rectangulis, a quadratorum lateribus factis, hic *ab*. Sed *Fig. II.* indicat speciem sex membrorum, quae non potest esse quadrata, nisi constet tribus quadratis, hic *aa, dd, cc* & sex Rectangulis, hic *2ad, 2ac* & *2dc*. Inde quoque manifestum est juxta *Fig. III.* quod species composita cubica esse nequeat, nisi ad minimum constet duobus cubis hic *a3* & *b3*, & sex parallelepipedis, ex Cuborum horum lateribus & hedris alternatim factis, hic *3aab* & *3bba*. Hinc Regulas Arithmeticorum pro Extractionibus Radicum quadratarum & cubicarum ortas esse, consideranti patet, ut pluribus id explicare opus non sit. Quod autem Quadratum negativum non agnoscat Radicem realem, id est talem speciem, quae signum † aut - praefixum habeat, atque in se ducta, quadratum negativum producat, inde clarum est, quod signa similia semper producant †.

CAPUT III.

De

SPECIERUM FRACTARUM RATIONALIUM ALGORITHMO.

§. 1.

Species Algebraicae interjecta lineola a se invicem distinctae, fractiones appellantur, quarum superiores *Numeratoris*, inferiores vero *Denominatoris* vice funguntur.

§. 2. Circa *Notationem* specierum fractarum nihil occurrit a praecedentis Algorithmi Notatione diversum, nisi quod species dividenda supra lineolam scribatur, & sub ea divisor, unde fractio, ex. gr. $\frac{a}{b}$ enuncianda est: *a divisum per b.*

§. 3. Non-

§. 3. Nondum tamen ad reliquas Algorithmi hujus Species commode progredi licebit, sed nonnullis in antecessum præparamentis opus est, quæ quatuor sequentibus Problematibus comprehenduntur.

PROBLEMA I.

Speciem integram in fractionis formam transponere.

Si fractio præscriptum Denominatorem non requirat, subscribatur integro lineolâ cum unitate. Sic integra, $a - b$ & d ad fractiones reducta, sunt: $\frac{a-b}{1}$ & $\frac{d}{1}$ Si vero Species integra in fractionem datæ denominationis sit convertenda, datus denominator cum data specie multiplicetur, & producto denominator datus subscribatur v. g. sit integra species $a - b$ in fractionis formam transponenda, cujus denominator sit e, multiplicato igitur integro per e, erit $\frac{ae-be}{e}$ fractio quæsita. Item si integra species d in fractionis forma desideretur, cujus denominator sit $f-c$, erit ea: $\frac{fd-cd}{f-c}$

DEMONSTRATIO

Patet ex conceptu fractionis, quæ ad unitatem eandem rationem habet quam numerator ad denominatorem; & porro *ex* 17. VII. *Euclid.*

PROBLEMA II.

Speciem fractam majorem ad minores terminos æquivalentes reducere.

Si in Numeratore & Denominatore una, vel plures reperiantur species similes, deleantur istæ. Sive fractio per communem mensuram maximam ut in Arithmetica vulgari dividatur, habebisque fractionem minorem, priori æquivalentem.

Exem-

Exempla.

$\frac{ab^3}{cab}$ (ab	ad minores terminos redactæ, sunt:	$\frac{bb}{c}$
$\frac{ab+bb}{2abb+2b^3}$ (ab + bb		$\frac{1}{2b}$
$\frac{ac+bc}{aa+2ab+bb}$ (ac + bc		$\frac{1}{a+b} \Big| \frac{c}{a+b}$ $\frac{\;}{c}$

DEMONSTRATIO.

Speciei ad minores terminos reductæ Numerator, erit ad Denominatorem, ut fractionis datæ Numerator ad suum Denominatorem *per 17. VII. Euclid.* Ergo *per Demonstr. 8. Clavii post Lib. IX. Euclid.* hæ duæ fractiones erunt æquales. Q. E. D.

PROBLEMA III.

Specierum datarum communem dividuam minimam invenire.

Operare ut in numeris vulgaribus, advertendo nimirum (1) Num una, sive plures species, tanquam partes aliquotæ contineantur in altera majori, eritque hæc species major communis dividua minima, quæ cum speciebus reliquis, (si plures adsint) comparetur; (2) Num species datæ sint inter se compositæ, num vero primæ, si illud, per earum communem mensuram maximam alterutram divide, & quotum in alteram multiplica; si hoc, datas species in se multiplica, habebisque specierum datarum communem dividuam minimam, sive quantitatem minimam, quæ per quantitates datas, sine reliquo, dividi possit. Sic quatuor specierum $2a$, a, $ab - ac$ & d, Communis dividua minima est $2abd - 2acd$. Item trium specierum $aa + 2ab + bb$, $a^3 - abb$, & $aa - bb$ comm. divid. min. est $a^4 + a^3b - aabb - ab^3$.

DE-

DEMONSTRATIO

Evidens est *ex 36. Lib.* VII. *Euclid.*

PROBLEMA IV.

Species fractas diversarum denominationum, ad alias ejusdem denominationis, illis æquales, reducere.

Inveniatur per Probl. proxime præcedens Denominatorum datorum species communis dividua minima, quæ tanquam communis Denominator per Denominatores datos dividatur, & quotiens per Numeratores datos multiplicetur, productum dabit novos Numeratores.

Exempla.

$(2bdaf)$	
$\frac{a}{b}$	$2daaf$
$\frac{a}{2d}$	$baaf$
$d \,\vert\, \frac{c}{da}$	$2bfc$
$2 \,\vert\, \frac{d}{2b}$	$ddaf$
$\frac{e}{f}$	$2bdae$

$(4cb \cdot 4cd)$	
$\frac{ad}{2c}$	$2abd - 2add$
$c \,\vert\, \frac{a}{cb - cd}$	$4aa$
$\frac{d}{4c}$	$bd - dd$
$\frac{a}{4c}$	$ba - da$

DEMONSTRATIO.

Cum *per 17.* VII. *Euclid.* duo numeri per eundem numerum multiplicati, eandem inter se rationem habeant quam geniti, ratio inter fractionis datæ numeratorem & denominatorem erit æqualis rationi inter fractionis genitæ, numeratorem & denominatorem: & propterea erunt æquales, *per Demonstr.* 8. *Clavii post Lib.* 9. *Euclid.* Q.E.D.

DE ADDITIONE.

Reg. 1. Si species ejusdem denominationis sint, Numeratores addantur, summæque Denominator datus subscribatur.

Exempla.

$$\text{Add:}\left\{\begin{array}{c}\dfrac{2b}{ea}\\[2mm] \dfrac{c}{ea}\\[2mm] \dfrac{3b}{ea}\end{array}\right\}\dfrac{5b \dagger c}{ea}\ \text{Summa.}\qquad \left.\begin{array}{c}\dfrac{xc}{2e - a}\\[2mm] \dfrac{6xc}{2e - a}\\[2mm] \dfrac{yf}{2e - a}\end{array}\right\}\dfrac{7xc \dagger yf}{2e - a}\ \text{Summa.}$$

Reg. 2. Si vero species datæ diversarum denominationum extiterint, prius ad eandem denominationem *per Probl. præc.* IV, reducantur, deinde Numeratores ut antea in unam summam collige, & summæ denominatorem communem subscribe.

Exempla.

$$\begin{array}{c|c|c} & \multicolumn{2}{c}{(dab \dagger add)} \\ & \dfrac{d^2a - c}{db \dagger dd} & \dfrac{d^2aa - ae}{} \\ b \dagger d & \dfrac{2ccd}{ab \dagger ad} & \dfrac{2ccdd}{} \\ & \dfrac{ab \dagger ad}{d} & a^2b^2 \dagger a^2 d^2 \end{array}$$

$$\text{Summa}\ \frac{2d^2a^2 - ac \dagger 2c^2d^2 \dagger a^2b^2}{dab \dagger add}$$

$$\begin{array}{c|c|c} & \multicolumn{2}{c}{(4ae)} \\ 2e & \dfrac{xx}{2e} & \dfrac{2axx}{} \\ & \dfrac{xe}{} & \dfrac{4eex}{} \\ & \dfrac{a}{x} & \dfrac{4x}{} \\ a & \dfrac{ea}{} & \\ & \dfrac{xe}{4a} & \dfrac{xee}{} \end{array}$$

$$\text{Summa.}\ \frac{5eex \dagger aaxx \dagger 4x}{4ae}$$

DE SUBTACTIONE.

Reg. 1. Si species eandem denominationem habuerint, subtrahe Numeratores, & residuo subscribatur Denominator datus.

Ex-

Exempla.

Ex $\frac{3ax}{a+b}$ $\qquad$ $\frac{2b+cd}{3e}$

Subtr. $\frac{d-ax}{a+b}$ $\qquad$ $\frac{cd-b}{3e}$

Resid. $\frac{4ax-d}{a+b}$ $\qquad$ Resid. $\frac{3b}{3e}$

*Reg.*2. Si autem diversi nominis fuerint, ad eandem prius denominationem reducantur, & deinde juxta Reg. 1. operatio instituatur.

Exempla.

(bd) $\qquad$ $(cad \quad -2cd)$

Ex $\frac{a}{b}$ | $\frac{ad}{\;}$ $\qquad$ $\frac{ax}{\;}$ | $\frac{dax}{\;}$

$a-2$ | $\frac{ac-2c}{b}$

Subtr. $\frac{c}{d}$ | $\frac{cb}{\;}$ $\qquad$ $\frac{\;}{ad-2d}$ | $\frac{cb}{\;}$

| $\frac{ad-cb}{bd}$ Resid. $\qquad$ | $\frac{dax-eb}{dca-2cd}$ Resid.

DE MULTIPLICATIONE.

*Reg.*1. Multiplica Numeratores, pro Numeratore producti, & Denominatores, pro Denominatore producti, habebisque novam fractionem, quæ erit productum quæsitum.

Exempla.

Multipl. $\frac{a}{2b}$ per $\frac{c}{d}$ Prod. $\frac{ac}{2bd}$ Item $\frac{da}{xx}$ per $\frac{a}{x}$ Prod. $\frac{da^2}{x^3}$

*Reg.*2. Si species aliqua fracta per Denominatorem multiplicanda veniat, Denominator delendus est, ut solus relinquatur Numerator, qui erit productum quæsitum.

Exempla.

Multipl. $\frac{aa+b}{c-d}$ per $c-d$ Prod. $aa+b$. Item $\frac{ed}{3b}$ per $3b$ Prod. ed

Reg. 3. Compendiose multiplicatio instituitur abbreviatione

per

per crucem, quando nimirum ſpecies per crucem oppoſitæ communem menſuram admittunt.

Exempla

$$\text{Multipl. } \frac{ac}{dd} \text{ per } \frac{e}{ab} \text{ Prod. } \frac{ec}{bdd} \text{ Item } \frac{4x}{a-b} \text{ per } \frac{ac-bc}{xx} \text{ Prod. } \frac{4c}{x}$$

DE DIVISIONE.

Reg. 1. Si fractiones eandem habeant denominationem, Numeratores inter ſe dividuntur, & in quoto Denominator omittitur.

Exempla

$$\text{Divid. } \frac{2aab}{dc} \text{ per } \frac{ab}{dc} \Big| \; 2a \text{ Quotus.} \qquad \frac{a+b}{2cy} \Big/ \frac{2a-c}{2cy} \Big| \; \frac{a+b}{2a-c} \text{ Quotus.}$$

Reg. 2. Si vero diverſarum denominationum extiterint, ad eandem prius denominationem *per Probl. præced.* IV. revocandæ ſunt, & poſtea Numeratores inter ſe dividantur.

Exempla.

$$\text{Divid. } \frac{4ab}{dd} \text{ per } \frac{2ca}{ed} \; (edd \Big| \; \frac{4abe}{2cdd} \Big| \; \frac{2be}{dc} \text{ Quotus.} \qquad (baa-aa) \; \frac{xx}{ba-a} \Big/ \frac{xe}{aa} \Big| \; \frac{axx}{bxe-xe} \Big| \; \frac{ax}{be-e} \text{ Quotus.}$$

Regul. 3. Quando fractio per integrum eſt dividenda, integrum autem eſt pars aliquota Numeratoris, divide Numeratorem per integrum, & Quotus erit fractionis inveniendæ Numerator, cui ſubſcribatur Denominator fractionis datæ.

Exempla.

$$\text{Divid. } \frac{bc}{x} \text{ Per } b \Big| \; \frac{c}{x} \text{ Quotus.} \qquad \frac{ae+be}{4d-a} \text{ per } e \Big| \; \frac{a+b}{4d-a} \text{ Quotus.}$$

DE

DE RADICUM EXTRACTIONE.

Reg. 1. Extrahe ſeorſim radicem, tam ex Numeratore, quam Denominatore; hæ per modum fractionis iterum conjunctæ dabunt Radicem optatam.

Exempla.

Quadr. $\frac{ccbb}{aa - 2ad + dd}$ Cubus. $\frac{a^3}{b^3 + 3bbe + 3eeb + e^3}$

Radix. $\frac{cb}{a - b}$ Rad.Cub. $\frac{a}{b + e}$

Reg. 2. Si vero Radix exacte inveniri nequeat, præfigatur ſignum radicale juxta naturam quæſitæ radicis.

Exempla.

Quadr. $\frac{ab}{cd}$ Radix $\sqrt{\frac{ab}{cd}}$ Cub. $\frac{ae}{b-f}$ Rad. $\sqrt[3]{\frac{ae}{b-f}}$ Item $\frac{x^3}{ce}$ Rad. $\frac{x}{\sqrt[3]{ce}}$

DEMONSTRATIO.

Hujus Algorithmi operatio demonſtratur ut Algorithmus ſpecierum integrarum, & præterea ex Probl. præcedentibus.

§. 4. Algorithmus ſpecierum ex integro & fracto mixtarum haud abſimilis eſt Algorithmo fractarum purarum, ut hic multa de Algorithmo ſpecierum mixtarum verba facere, ſupervacaneum duxerim, qui enim præcedentes duos Algarithmos intellexerit, is facili quoque negotio cum ſpeciebus mixtis operari poterit, notando quod ſpecies mixta ad fractionem puram non aliter, quam in Arithmetica vulgari fieri ſolet, reducatur, ſi nimirum integrum per datum Denominatorem multiplicetur, & producto Numerator addatur. Quam tamen reductionem non ad omnes Species Arithmeticas, ſed ad Diviſionem & Radicum extractionem tantum neceſſariam eſſe cenſemus.

CAPUT IV.

DE SPECIERUM IRRATIONALIUM ALGORITHMO.

§. 1.

QVemadmodum ex diviſione minus exacta fractiones oriuntur, ita quoque Radicum extractio imperfecta, ſpeciebus ſurdis, seu irrationalibus dat originem; quarum descriptionem jam supra *Cap.* II. §.1. tradidimus.

§. 2. Potestas nihil aliud est, quam analyseos suscipiendæ indicatio, graduum distinctione limitata, qui licet infiniti sint, hac tamen progressione, ut naturali ordine se comitantur, & notantur.

ABACUS
VALORUM FIGURALIUM.

Species.	Potestates.	Exponentes.	Progredientes.	Nomina Arabum.	Nomina Recentiorum.
a	0	1	2.	*Radix.*	*Radix.*
aa	1	2	4	*Zensus.*	*Quadratum.*
a^3	2	3	8	*Cubus.*	*Cubus.*
a^4	3	4	16	*Zensi-Zensus.*	*Quadrato-Quadratum.*
a^5	4	5	32	*Sursolidus* 1.	*Quadrato-Cubus.*
a^6	5	6	64	*Zensi-Cubus.*	*Cubo-Cubus.*
a^7	6	7	128	*Sursolidus* 2.	*Quadr. Quadr. Cubus.*
a^8	7	8	256	*Zensi-Zen-Zensus.*	*Cubo-Cubi Quadratum.*
a^9	8	9	512	*Cubi-Cubus.*	*Tri-Cubus.*

§. 3. Diversa hæc Potestatum denominatio inde oritur, quod Arabes Nomina Potestatum altiorum deduxerint ex Potestatibus illis, quarum exponentes in se ductæ, constituunt exponentem Potestatis quæsitæ; sed quarum exponentes ex multiplicatione duarum potestatum procreari nequeunt, illas *Sursolidorum*, vel etiam *Relato-*

rum

rum donarunt nomine. Recentiores autem fere omnes, (& ex Antiquis etiam Diophantus Alexandrinus) omiſſis Surſolidorum nominibus, ſolis *Radicis*, *Quadrati*, & *Cubi* nominibus contenti fuere, reſpiciendo in nominum impoſitione ad illas Poteſtates, quarum Exponentes per additionem componunt Exponentem Poteſtatis propoſitæ. Quæ Nominum confuſio facile per dimenſionum numerum evitari poterit.

DE NOTATIONE.

Reg. 1. Signum hoc: $\sqrt{\ }$ *Radicale ſignum* dicitur, quod in genere omnibus ſpeciebus, quarum valor numeris exprimi nequit, præfigitur; cum hoc tamen diſcrimine, quod ſolitarie poſitum indicet Radicem quadratam, cum ternario, ſive litera C ($\sqrt{(3)}$ $\sqrt{C}$) Radicem Cubicam, cum quaternario $\sqrt{(4)}$ Radicem Quadr. Quadratam, ſeu Biquadratam, & ſic porro.

Reg. 2. Speciei compoſitæ non tantum ſignum radicale præfigitur, ſed etiam lineola aliqua ſuper inducitur, quæ indicet, ad omnes ſpecies, quibus lineola incumbit, hoc ſignum pertinere. Ex. gr. $\sqrt{\overline{a \dagger 2c - e}}$. Nonnulli etiam ſpeciei ſimplici lineam hanc adſcribunt. Ex. gr. $\sqrt{\overline{deeb}}$.

Reg. 3. Si ſpecies diverſorum graduum, aut rationale cum irrationali affirmationis ſigno jungatur, *Binomium* dicitur, ut: $dd \dagger c \dagger \sqrt{ab}$; ſi vero ſpecies e binis nominibus negationis ſigno junctis, componatur, *Reſiduum*, ſive *Apotome* audit, ut: $aa - \sqrt{4bc}$. Illæ oriuntur ex imperfecta additione, hæ ex imperfecta ſubtractione, quando nimirum, ob aſymmetriam earum, aliter, quam per ſignum † & − addi & ſubtrahi nequeunt.

§. 4. Ad reliquas Algorithmi hujus Species eo diſtinctius proponendas, quatuor Problemata præmittere conducet. Sit ergo

PROBLEMA I.

Species irrationales, diverſa ſigna radicalia habentes, ad idem ſignum radicale revocare.

Divide communem dividuum minimum Exponentium, ſive numerorum, a quibus Radices denominantur, per Radicum numeros, & quotus indicabit, quoties ſpecies datæ in ſe ducendæ ſint. Quod-nam autem signum radicale producto præfigatur, & qualis ex hac multiplicatione orta sit potestas, ex Tab. Præced. valorum figuralium patet, Ex. gr. si ad idem radicale signum reducendæ essent $V\,ac$ & $V(3)\,bde$, divido 6, tanquam communem dividuum minimum Exponentium 2 & 3, per radicum numeros, sive ipsos Exponentes 2 & 3. habebisque quotos 3. & 2, unde ac cubice in se multiplicandum erit, & bde quadrate, additisque Exponentibus, ut in Progressionibus Geometricis fieri solet, fient sub eodem signo radicali $V(6)\,a^3c^3$ & $V(6)\,bbddee$. Item $V\,a$ & $V(4)\,b$, ad idem signum radicale reductæ sunt $V(4)\,aa$ & $V(4)\,b$. Huc pertinet reductio speciei rationalis ad idem signum radicale cum specie irrationali: multiplicando nimirum speciem rationalem pro diversitate signi, quod irrationali præfixum est. Ex. gr. ab & $V(3)\,\overline{a-c}$ sub eodem signo radicali sunt $V(3)\,a^3b^3$, & $V(3)\,\overline{a-c}$.

DEMONSTRATIO

Ex natura Potestatum cum suis Exponentibus clara est. Licet enim numerus quicunque aliquoties in se ducatur, inde tamen non fit major, si producto adjungatur signum radicale cum Exponente sibi conveniente. Sic binarius est $\infty\, V\,4$. item $V(3)\,8$. nec non $V(4)\,16$. $V(5)\,32$. &c. Idem de speciebus intelligendum est.

PROBLEMA II.

Species irrationales majores ad simpliciores, sive ad minimos irrationalitatis terminos reducere.

Divide speciem sub eodem signo radicali comprehensam per aliquod Quadratum, vel per aliquem Cubum &c. & quidem per Potestatam illam, quæ speciem irrationalem metitur, seu quæ in quotientem (qui signo radicali tantum notatur) ducta, speciem irrationalem reddit, Potestatis hujus radix quotienti juncta, constituit speciem simpliciorem. Sit Ex. gr. data hæc species irrationalis $V\,32\,aa$ ad simpliciorem reducenda, quæ erit: $4\,aV2$ sive $2\,aV8$, quia quadratum $16\,aa$, sive $4\,aa$, in quotientem 2 sive 8 sub signo radicali, ductum, iterum producit $V\,32\,aa$. Sic $V\,\overline{18\,aa}$ reducitur ad $3a\,V2$ & $V\,\overline{54}\,a^3$ ad $3a\,V(3)\,2$ Eadem ratione pro $V\,a^3 \dagger a^2 b$ scribi poterit $aV\,a \dagger b$ & pro

V

$\overline{V(3)\, xa^3 - 3aacx + 3ac^2 x - c^3 x}$ hæc ſimplicior $a - c\, V(3)\, x$. Item pro $V(3)\, a^3 b^3 e$ hæc minor: $ab\, V(3)\, e$.

DEMONSTRATIO.

Ducatur ſpecies ſub ſigno radicali contenta, in ſpeciem a ſigno radicali liberatam, ut integræ iterum ſpeciei radicale ſignum præfigi poſſit. Si hac operatione data ſpecies irrationalis iterum redit, recte ad ſimpliciorem reducta eſt. Sic $4a$ ductum in $V2$, vel $2a$ in $V8$, producit iterum $V32aa$. Et ſic de cæteris.

§. 6. Ad expeditam autem hujusmodi Quadrati, vel Cubi, vel alterius Poteſtatis (inprimis in exemplis prolixis) inventionem, conducit partium omnium aliquotarum inveſtigatio, in Probl. ſeq. propterea tradenda, quæ, ſi non continet ejusmodi poteſtatem, qua ſpecies irrationalis metitur, hoc eſt, ſine reliquo dividitur, data ſpecies ſigno ſuo radicali liberari nequit, niſi in fractionis formam eam tranſponere velis. Ut ſi data eſſet hæc ſpecies irrationalis $V15bb$, ad ſimpliciorem per Probl. prox. præced. reduci nequit, quia excepta unitate, nullum inter partes ejus aliquotas agnoſcit Quadratum, aut Cubum, poterit tamen cum annexa fractione reduci ad $2b\, V\frac{15}{4}$ vel ad $3b\, V\frac{5}{3}$ vel ad $4b\, V\frac{15}{16}$ vel ad $2b\, VC\frac{15}{8}$ &c. Dividendo nimirum ſpeciem datam per Poteſtatem aliquam, quæ ſit ejus pars aliquanta, & ponendo hanc Poteſtatem loco Denominatoris, ſpeciem irrationalem autem loco Numeratoris.

PROBLEMA III.

Datæ ſpeciei omnes partes aliquotas invenire.

Divide ſpeciem datam per aliquam ſpeciem primitivam (quæ non, niſi per unitatem aut ſe ipſam dividi poteſt,) & rurſus quotientem per hanc eandem, vel aliam primam, diviſoribus reſervatis, idque tamdiu continuetur, donec quotus erit ſpecies primitiva per ſe ipſam dividenda: quomodo vero ex reſervatis hiſce diviſoribus omnes datæ ſpeciei partes aliquotæ ſeu diviſores inveniantur, ſequentia manifeſtabunt Exempla: Sit data ſpecies $a^2 x c^2$ ad cujus omnes partes aliquotas inveniendas, primum diviſio modo prædicto inſtituitur:

a^2xc^2	axc^2	xc^2	xc	x	1. Quoti.
a	a	c	c	x	1. Divisores.

Divisores hi collocantur, ac inter se multiplicantur, ut in Arithmetica vulgari, Ex. gr.

1

a a

aa

c, ac, aac,

c, cc, acc, $aacc$,

x, xa, xaa, xc, xac, $xaac$, xcc, $xacc$, xa^2c^2

Atque ita partes aliquotæ omnes erunt, 1, a, aa, c, ac, aac, cc, acc, $aacc$, x, xa, xaa, xc, xac, $xaac$, xcc, & $xacc$.
Eodem modo speciei compositæ bc^2-bbc partes aliquotæ omnes erunt: 1, b, c, bc, $c-b$, $bc-bb$, & $cc-bc$.

DEMONSTRATIO

Patet ex Definit. partium aliquotarum, quæ nimirum aliquoties repetitæ magnitudinem metiuntur, *juxta Def.* 1. V. *Euclid.*

PROBLEMA IV.

Num duæ species irrationales symmetræ, sive communicantes sint, nec ne, explorare.

Divide species datas, (ad idem tamen signum radicale, si diversa extiterint, *per Probl. hujus Cap.* I. in antecessum reductas) inter se, quotiens si fuerit rationalis, species datæ erunt symmetræ, seu communicantes, id est: ejusmodi species irrationales, quæ ex ejusdem radicis multiplicatione in quantitates rationales ortæ sunt, proportionemque inter se habebunt, quam quotiens ad unitatem, vel, si quotiens est fractio, quam Numerator ad Denominatorem, vel, quam illæ speies, ex quarum ductu in communem radicem gignuntur. Sed si quotiens sit irrationalis, asymmetræ seu Non-communicantes dicuntur, proportionemque habebunt irrationalem, Sic Ex. gr. species irrationales $\sqrt{48aa}$ & $\sqrt{27aa}$ sunt symmetræ, quia ex earum divisione fione gignitur quotus rationalis $\sqrt{1\tfrac{7}{9}}$ five $\sqrt{\tfrac{16}{9}}$ id eft: $\tfrac{4}{3}$. Habent igitur proportionem inter ſe, ut numerus (4) ad numerum (3) Vel etiam, ut $4a$ ad $3a$, ex quorum ſcilicet ductu in $\sqrt{3}$ ſpecies datæ ortæ ſunt. Symetræ quoque erunt $\sqrt{d^2cc+c^4}$ & $\sqrt{d^4+ddcc}$, diviſa enim una per alteram quotus $\sqrt{\frac{dd}{cc}}$ five $\frac{d}{c}$ eſt rationalis, & habent inter ſe rationem, ut d ad c Contra vero aſymmetræ erunt: $\sqrt{18aa}$ & $\sqrt{6aa}$, ex diviſione enim oritur quotus $\sqrt{3}$, qui eſt certiſſimum incommenſurabilitatis indicium Similiter: $\sqrt{a^2+b}$, & $\sqrt{a}$, ſunt ſpecies aſymmetræ, quia diviſione facta, quotiens earum $\sqrt{a+\frac{b}{a}}$ eſt irrationalis. Vel juxta modum Wallifii, Mathematici Anglicani celeberrimi, ſymmetria aut aſymmetria per reductionem ad minimos irrationalitatis terminos facile indagari poteſt, cujus verba ex Algebræ ipſius Cap. XXV. hic apponere non pigrabimur. *Malim ego*, inquit, *ſurdas quantitates ad minimam quam poſſum, irrationalitatem reducere, eximendo ex liga quod rationale eſt, quippe tum ſtatim patebit, num commenſurabiles ſint, nec ne, (quippe ſi ſic, pars ſurda componens, eadem erit) ſimulque quæ ſit earum ſumma aut differentia.*

DEMONSTRATIO.

Cum diviſio numeri per numerum, ſit inventio numeri, qui ad unitatem eandem rationem habet, quam numerus diviſus ad dividentem, ut annotavit *Clavius ad Defin.* 15. VI. *Euclid.* ſequitur, ſpecies irrationales, quarum quotus eſt rationalis, rationem inter ſe habere, quam numerus ad numerum, atque ita communicantes ſeu commenſurabiles eſſe, *per* 6. X *Euclid.* reliquas autem, quarum quotiens eſt $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, &c. eſſe incommenſurabiles, *per* 8. X *Euclid. Conf. Sturmii Matheſ. Enucl. Conſ.* 3. *Def.* 30. *p.* 78.

DE ADDITIONE ET SUBTRACTIONE.

Reg. I. Si ſpecies datæ addendæ vel ſubtrahendæ, diverſa gerantſigna radicalia, prius ad idem ſignum radicale, *per Probl. hujus Cap.* I. reducantur, reductas *per Probl. præced.* IV examina, num ſint ſymmetræ, ſive aſymmetræ; ſi ſymmetræ fuerint, ſpecies extra ſignum

 radi-

radicale positas adde vel subtrahe, & summæ vel residuo speciem alteram sub signo radicali annecte.

Exempla Additionis.

$$\begin{array}{llllll} \text{Add.} & \begin{cases} \sqrt{24aa} \\ \sqrt{6aa} \end{cases} & \begin{cases} \sqrt{aab} \\ \sqrt{9aab} \end{cases} & \begin{cases} \sqrt{aabbc} \\ \sqrt{a^2b^2c + 2abdc + d^2c} \end{cases} & \begin{cases} \sqrt{27aa} \\ \sqrt{12aa} \end{cases} \\ \text{id est:} & \begin{cases} 2a\sqrt{6} \\ a\sqrt{6} \end{cases} & \begin{cases} a\sqrt{b} \\ 3a\sqrt{b} \end{cases} & \begin{cases} ab\sqrt{c} \\ ab + d\sqrt{c} \end{cases} & \begin{cases} 3a\sqrt{3} \\ 2a\sqrt{3} \end{cases} \\ \text{Summa} & 3a\sqrt{6} & 4a\sqrt{b} & 2ab + d\sqrt{c} & 5a\sqrt{3} \end{array}$$

$$\text{Add.}\ \frac{\sqrt{3aa}}{\sqrt{ddb}}\ \&\ \frac{\sqrt{12aa}}{\sqrt{ddb}}\quad \text{Item}\ \frac{\sqrt{7bb}}{\sqrt{2ab}}\ \&\ \frac{\sqrt{28bb}}{\sqrt{2ab}}$$

$$\text{Summa}\ \frac{3a\sqrt{3}}{d\sqrt{b}}\qquad \text{Summa}\ \frac{3b\sqrt{7}}{\sqrt{2ab}}$$

Exempla Subtractionis.

$$\begin{array}{lllll} \text{Ex} \\ \text{Subtr.} & \begin{cases} \sqrt{54aa} \\ 2a\sqrt{6} \end{cases} & \begin{cases} c + d\sqrt{e-d} \\ c\sqrt{e-d} \end{cases} & \begin{cases} \sqrt{16aab} \\ \sqrt{9aab} \end{cases} & \begin{cases} \sqrt{75aa} \\ \sqrt{12aa} \end{cases} \\ \text{Resid.} & a\sqrt{6} & d\sqrt{e-d} & a\sqrt{b} & 3a\sqrt{3} \end{array}$$

$$\text{Ex}\ \frac{\sqrt{27aa}}{\sqrt{bc}}\ \text{subtrahe}\ \frac{\sqrt{3aa}}{\sqrt{bc}}\quad \text{Ex}\ \frac{\sqrt{4aabbc}}{\sqrt{dee}}\ \text{subtr.}\ \frac{\sqrt{64c}}{\sqrt{dee}}$$

$$\text{Resid.}\ \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{bc}}.\qquad \text{Resid.}\ \frac{2ab - 8\sqrt{c}}{\sqrt{dee}}$$

Reg. 2. At si species datæ extiterint asymmetræ, addendæ sunt interpositione signi additorum † & subtrahendæ, interpositione signi subtractorum -

Exempla Additionis.

$$\begin{array}{llll} \text{Add.} & \begin{cases} \sqrt{8aa} \\ \sqrt{3aa} \end{cases} & \begin{cases} \sqrt{a+b} \\ \sqrt{c-a} \end{cases} & \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\sqrt{3a}}{\sqrt{bc}} \\ \dfrac{\sqrt{de}}{\sqrt{bc}} \end{array} \right\} \dfrac{\sqrt{3a} + \sqrt{de}}{\sqrt{bc}}\ \text{Summa.} \\ \text{Summa} & \sqrt{8aa} + \sqrt{3aa} & \sqrt{a+b} + \sqrt{c-a} & \end{array}$$

Exem-

Exempla Subtractionis.

$$
\begin{array}{llll}
\text{Ex.} & \left\{\begin{array}{l}\sqrt{a-2b}\\ \sqrt{4ea}\end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l}\sqrt{11a}\\ -\sqrt{5a}\end{array}\right. & \left\{\begin{array}{c}\dfrac{\sqrt{bc}}{\sqrt{de}}\\[2ex] \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{de}}\end{array}\right\} \\
\text{Subtr.} & & & \\
\text{Reſid.} & \sqrt{a-2b}-2\sqrt{ea} & \sqrt{11a}+\sqrt{5a} & \dfrac{\sqrt{bc}-\sqrt{a}}{\sqrt{de}}\ \text{Reſid.}
\end{array}
$$

DEMONSTRATIO.

Additio *ex* 4, & Subtractio *ex* 7. II. *Euclidis* defluxit. Illam per *Fig.* IV, hanc per *Fig.* V. ſequenti demonſtramus modo: In *Fig.* IV. duæ ſpecies addendæ ſunt $3a\sqrt{b}$ & $a\sqrt{b}$, quæ repræſentantur per duo lateris quadrati ſegmenta, AB & BC, ſive DE & EF, unde quadratum ſegmenti majoris DH erit $9aab$, & minoris aab: cum autem complementa HF & HA ſint media proportionalia inter hæc duo quadrata, ſive diagonalia, *juxta Lemma Prop.* 55. *Lib. X. Euclid.* complementum quodvis continebit $3aab$, quæ in unam ſummam collecta, conſtituunt $16aab$, ſive quadratum integræ lineæ A C, *per* 4. II. *Euclid.* cujus radix quadrata, ſive latus A C eſt: $4a\sqrt{b}$, ſumma quæſita.

In *Fig.* V. ſubtrahendum eſt H I $a\sqrt{3}$ ab I K $3a\sqrt{3}$, dico: reſiduum eſſe $2a\sqrt{3}$, quod ita demonſtrabimus: fiant I L. & I M ∝ I H, ut parallelogramma L O & I P, item M K & I Q æqualia ſint, *juxta* 36. I. *Euclid.* deinde multiplica quadratum N I, (cujus Area eſt $3aa$) per quadratum I R, (cujus area eſt $27aa$) & ex producto $81a^4$ extrahe Radicem quadratam, quæ erit $9aa$, cui æquale eſt parallelogrammum I Q, id eſt M K per conſtr. Sed hujus parallelogrammi duplum $18aa$, una cum quadrato R S, erit æquale quadratis R I & I N, (quorum ſumma facit $30aa$) *juxta* 7. II. *Euclid.* Si ergo ab hac ſumma $30aa$, ſubtrahatur parallelogrammi M K duplum $18aa$, reſtabit $12aa$, pro Quadrato R S, cujus latus T S eſt $\sqrt{12aa}$, ſive $2a\sqrt{3}$, reſiduum optatum. Hinc Antiquorum quoque proceſſus addendi & ſubtrahendi numeros ſurdos evidens eſt, prout reperitur apud *Ludolphum a Ceulen. Fundam. Arith. & Geom. Cap.* II. & III. C. *Dibvadium ad Propoſ.* 4. & 7. II. *Euclid. Arduſerum Geometriæ ſuæ Lib. III. Propoſ.* 16, alioſque.

DE MULTIPLICATIONE.

Reg. 1. Species datæ, ad idem ſignum radicale, ſi diverſa extiterint, sint, reductæ, si fuerint communicantes, duc quantitates extra signum radicale constitutas in se invicem, & productum in speciem sub signo radicali contentam, habebisque productum rationale.

Exempla.

$$\text{Multipl.}\begin{cases}\sqrt{18aa}\\ \sqrt{2aa}\end{cases}\quad \begin{cases}\sqrt{25aae}\\ \sqrt{9aae}\end{cases}\quad \begin{cases}\sqrt{b^4+ccbb}\\ \sqrt{c^4+ccbb}\end{cases}\quad \begin{cases}\sqrt{4yybe}\\ \sqrt{9zzbe}\end{cases}$$

$$\text{id est:}\begin{cases}3a\sqrt{2}\\ a\sqrt{2}\end{cases}\quad \begin{cases}5a\sqrt{e}\\ 3a\sqrt{e}\end{cases}\quad \begin{cases}b\sqrt{bb+cc}\\ c\sqrt{cc+bb}\end{cases}\quad \begin{cases}2y\sqrt{be}\\ 3z\sqrt{be}\end{cases}$$

$$\text{Productum}\quad 6aa \qquad 15aae \qquad c^3b+cb^3 \qquad 6yzbe$$

$$\text{Multipl.}\ \frac{a\sqrt{b}}{2\sqrt{c}}\ \text{per}\ \frac{c\sqrt{b}}{4d\sqrt{c}}\qquad \text{Item}\ \frac{5a\sqrt{d}}{bc\sqrt{f}}\ \text{per}\ \frac{3c\sqrt{d}}{2a\sqrt{f}}$$

$$\text{Product.}\ \frac{ab}{8d}\qquad\qquad \text{Product.}\ \frac{15d}{2bf}$$

Reg. 2. Sed si species datæ fuerint Non-communicantes, multiplica eas inter se, & producto commune signum radicale præfige.

$$\text{Multipl.}\begin{cases}\sqrt{9aa}\\ \sqrt{6aa}\end{cases}\quad \begin{cases}\sqrt{a+3b}\\ \sqrt{4ac}\end{cases}\quad \begin{cases}\sqrt{3ef}\\ \sqrt{x-d}\end{cases}$$

$$\text{Prod.}\ \sqrt{54a^4}\qquad \sqrt{4aac+12acb}\qquad \sqrt{3efx-3efd}$$

$$\text{Multipl.}\ \frac{\sqrt{de-b}}{\sqrt{aa+cb}}\ \text{per}\ \frac{\sqrt{4d}}{\sqrt{2a}}\ \text{Prod.}\ \frac{\sqrt{4dde-4db}}{\sqrt{2a^3+2acb}}$$

Reg. 3. Si species irrationales sint prorsus similes, & toties multiplicandæ, quoties ab Exponente id indicatur, signum radicale tantum deleatur.

Exempla.

$$\text{Multipl.}\begin{cases}\sqrt{aa-bb}\\ \sqrt{aa-bb}\end{cases}\quad \begin{cases}\sqrt{C5xz}\\ \sqrt{C5xz}\end{cases}\quad \text{Item Cub.}\ \frac{\sqrt{(4)4c}}{\sqrt{(4)ab}}\ \text{per}\ \frac{\sqrt{(4)4c}}{\sqrt{(4)ab}}\ \text{Prod.}\ \frac{4c}{ab}\ \text{Qq.}$$

$$\text{Product.}\ aa-bb \qquad 5xz$$

Reg. 4. Interdum multiplicationem mediante signo multiplitionis absolvere expedit.

Si sit $\dfrac{x}{\sqrt{(3)\,c+p}} = \sqrt{ab+pp}$ Erit per Isomœriam $x = \sqrt{ab+pp} \times \sqrt{(3)\,c+pp}$

It. si sit: $\dfrac{x}{\sqrt{ae-qq}} = ad-f$. Erit per Isomœr. $x = ad-f \times \sqrt{ae-qq}$.

DEMONSTRATIO.

Sit in *Fig.* VI. $a\sqrt{c} =$ F W multiplicandum per $b\sqrt{c} =$ F X, dico productum esse speciem rationalem abc. Nam quadratum F Y erit aac, & quadratum F Z bbc, Ergo Rectangulum XW, tanquam medium proportionale inter hæc duo quadrata, ut antea jam ostendimus, esset abc, quod est productum quæsitum.

DE DIVISIONE.

Reg. 1. Si species fuerint symmetræ, divide tantum species ex liga exemptas, & quotiens erit rationalis.

Exempla.

Divid.	$\sqrt{49aab}$	$\sqrt{8xx-8xc+2cc}$	$\sqrt{12aa}$
per	$\sqrt{9\ aab}$	$\sqrt{2xxaa}$	$\sqrt{3aa}$
id est	$7a\sqrt{b}$	$2x - c\sqrt{2}$	$2a\sqrt{3}$
	$3a\sqrt{b}$	$xa\sqrt{2}$	$a\sqrt{3}$
Quotus	$2\frac{1}{3}$	$\dfrac{2}{a} - \dfrac{c}{xa}$	2

Divide $\dfrac{a\sqrt{bc}}{\sqrt{de}}$ per $\dfrac{\sqrt{bc}}{\sqrt{de}}$ Quotus a

Reg. 2. Si species eadem signa radicalia habentes, extiterint asymmetræ, quadrata earum dividantur inter se, & quoto commune signum radicale præfigatur.

Exempla.

Divid.	$\sqrt{b^3c-bc^3}$	$\sqrt{6aa}$	$\sqrt{xa-xfg}$	$bb-dc$
per	$\sqrt{b^2-c^2}$	$\sqrt{3a}$	$\sqrt{xa}$	$b+\sqrt{dc}$
Quotus	$\sqrt{bc}$	$\sqrt{2a}$	$\sqrt{1-\dfrac{fg}{a}}$	$b-\sqrt{dc}$

Divid. $\dfrac{\sqrt{ac+cc}}{\sqrt{be}}$ per $\dfrac{\sqrt{a+c}}{\sqrt{be}}$ Quotus $\sqrt{c}$

Reg. 3.

Reg.3. Si ſpecies ſub ſigno radicali comprehenſæ dividi nequeunt, diviſor in modum fractionis ſpeciei datæ ſubſcribatur.

Exempla.

$$\text{Divide } \sqrt{ab} \text{ per } \sqrt{2c} \Big\} \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{2c}} \text{ Quotus.} \qquad \text{Divid. } \sqrt{4c} \text{ per } \sqrt{a-b} \Big\} \frac{\sqrt{4c}}{\sqrt{a-b}} \text{ Quotus.}$$

Reg. 4. Si Quadratum dividatur per latus, vel Cubus per Quadratum, ipſum oritur latus, diviſo autem Cubo per latus, Quotus erit Quadratum.

Exempla.

Divid.	$a+bb$	yyp	a^3c+b	xx
per	$\sqrt{a+bb}$	$\sqrt[3]{yyp}$	$\sqrt[3]{a^6cc+2a^3cb+bb}$	$\sqrt[3]{xx}$
Quotus	$\sqrt{a+bb}$	$\sqrt[3]{y^4pp}$	$\sqrt[3]{a^3c+b}$	$\sqrt[3]{x^4}$

DEMONSTRATIO.

Eſto in *Fig.* VII. $ab\sqrt{c}$, ſive D B Dividendus, & $a\sqrt{c}$ ſive BE, Diviſor, dico: Quotum fore ſpeciem rationalem b. Nam Quadratum A B eſſet aac, & Quadratum B C $aabbc$, hæc inter ſe multiplicata faciunt $a^4b^2c^2$, cujus radix Quadrata $aabc$ erit Rectangulum B G; Sed *juxta 1. Sexti Euclid.* erit Quadratum A B ad Rectangulum B G, ut E B ad B D; diviſo autem Rectangulo $aabc$ per Quadratum aac, Quotus eſt b. Ergo quoque ſi BD, id eſt: $ab\sqrt{c}$, dividatur per B E, id eſt: $a\sqrt{c}$ Quotus erit b. Q. E. D. Quod autem in ſpeciebus aſymmetris quadrata inter ſe dividenda ſint, & ex Quoto deinde Radix quadrata extrahi debeat, *juxta Reg. noſtram 2*, hoc inde oritur, quod Quadrata A B & B C inter ſe habeant duplicatam rationem ejus rationis, quæ eſt inter Quadr. A B & Rectangulum B G. *juxta Defin. 10 V. Euclid.* unde rationis inter hæc duo quadrata, Radix quadr. (b) æqualis erit rationi inter A B & B G, ſive Quoto deſiderato.

DE RADICUM EXTRACTIONE.

Reg. 1. Quando ex ſpecie irrationali extrahenda eſt Radix ſecundum aliquem datum Exponentem, productum Exponentium erit numerus, a quo radix denominatur, qui cum ſigno radicali datæ ſpeciei præfixus, exhibebit radicem optatam.

Exempla.

Ex $\sqrt{a}$ extracta Radix Cubica eſt: $\sqrt[6]{a}$

Ex $\sqrt[3]{p-x}$ extracta Rad. Quadr. Quadrata est: $\sqrt[12]{p-x}$

Ex $\sqrt{bc+d}$ extracta Rad. Quadrata est: $\sqrt{\sqrt{bc+d}}$ id est $\sqrt[4]{bc+d}$

Reg. 2. Ex Binomiis aut Residuis extrahitur radix Quadrata, si subductis Quadratis partium dati Binomii aut Residui a se invicem, Radix quadrata reliqui ad partem majorem addatur, & ab eadem subtrahatur, tunc Radices quadratæ ex semisse summæ, & differentiæ, per signum † vel - dati Binomii connexæ, erunt binæ partes radicis quæsitæ.

Exempla.

Sit $aa+b+2a\sqrt{b}$	Binomium datum.		
$a^4+2aab+bb$	Quadr. partis majoris.		
$4aab$	Quadr. partis minoris subtr.		
$a^4-2aab+bb$	Reliquum.		
$aa-b$	Ejus Radix quadr. add. & subtrah. parti maj.		
$2aa$	Summa.	aa semiss.	a Radix.
$2b$	Differ.	b semiss.	$\sqrt{b}$ Radix.

Ergo Binomii dati Rad. Quadr. est - - - - $a+\sqrt{b}$

Sit $a+b-2\sqrt{ab}$	Residuum, sive Apotome, cujus Radix quæritur.		
$aa+2ab+bb$	Quadr. partis majoris.		
$4ab$	Quadr. partis minoris subtrah.		
$aa-2ab+bb$	Reliquum.		
$a-b$	Ejus Rad. Quadr. add. & subtr. parti maj.		
$2a$	Summa.	a Semiss.	$\sqrt{a}$ Radix.
$2b$	Differ.	b semiss.	$\sqrt{b}$ Radix.

Ergo Apotomæ datæ Rad. Quadr. est: - - - - $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

Sic Binomii $3a+2a\sqrt{2}$ Rad. Quadrata est: $\sqrt{2a}+\sqrt{a}$

Et Apotomæ $6x-2x\sqrt{5}$ Rad. Quadr. est: $\sqrt{5x}-\sqrt{x}$

Reg. 3. Si subductis a se invicem Quadratis partium dati Binomii aut Residui, reliqui Radix quadrata non sit rationalis, aut cum majore Binomii parte incommensurabilis, satius erit signum radicale universale speciei datæ præfigere; quod etiam speciebus aliis, sive simplicibus, sive compositis, quæ radicem non habent, accidit.

Exempla.

Quadr. $a + \sqrt{bc-d}$ Rad. est: $\sqrt{a + \sqrt{bc-d}}$.
Quadr. $c\sqrt{ab}$ Rad. est: $\sqrt{\sqrt{ccab}}$

DEMONSTRATIO.

Regula prima ex natura Potestatum earumque Exponentium manifesta est, & præterea ex productione ejus Potestatis, cujus est Radix: atque ita $\sqrt[6]{a}$, si cubice in se ducatur, producit iterum $\sqrt{a}$. Nam Quadratum ejus est $\sqrt[6]{aa}$, quod iterum in Radicem ductum, gignit Cubum, $\sqrt[6]{a^3}$, cui æquipollet $\sqrt{a}$. Et sic reliquæ quoque duæ Regulæ facile a posteriori demonstrari poterunt. Quo etiam a priori eas demonstrare possimus, formemus (ad intelligendam naturam & constitutionem alicujus Binomii) per multiplicationem alicujus radicis in se, aliquod Binomium, nimirum: - - - - -

$$\begin{array}{r} a + \sqrt{b} \\ a + \sqrt{b} \\ \hline a\sqrt{b} + b \\ aa + a\sqrt{b} \\ \hline aa + b + 2a\sqrt{b} \end{array}$$

Ex quo apparet, Binomii partem majorem esse compositam ex utraque partium radicis quadrato, minorem vero ex Rectangulo illarum partium, bis sumto. Atque ita extractionem radicis quadratæ ex Binomio vel Residuo nihil esse aliud, quam inventionem duarum specierum, quarum quadratorum summa constituat partem majorem, (h. loco $aa + b$) & quarum productum (h. l. $a\sqrt{b}$) faciat dimidium partis minoris. Cumque tres quantitates aa, $a\sqrt{b}$, & b, sint continue proportionales, per 17. VI. *Euclid.* ponendum esset juxta *Fig.* VIII. A E ∞ quadrato aa, & E B ∞ Quadrato b, inter quas media proportionalis est E D ∞ $a\sqrt{b}$ per 13. VI. *Euclid.* Cæterum cum minor Binomii pars sit duplo major, nimirum $2a\sqrt{b}$, etiam A C, sive C D ad servandam proportionem, duplo major assumenda est, nimirum: $aa + b$ (est enim totius diametri A B longitudo) ex cujus quadrato $a^4 + 2ab + bb$ si subtrahatur quadratum partis minoris E D $4aab$, relinquitur quadratum C E F $a^4 - 2aab + bb$, cujus Radix est

CE

CE ∞ $aa-b$. Hæc addita ad partem majorem AC sive CD, facit $2aa$ ∞ AE & subducta a parte majori BC, relinquit BE ∞ $2b$. Cum autem hæ lineæ in dupla longitudine assumtæ fuerint, earum semisses iterum accipiendæ sunt, nimirum aa & b, quarum Radices a & $\sqrt{b}$ (quoniam antea loco quadratorum assumebantur lineæ AE & EB) constituunt Binomii radicem optatam
$a+\sqrt{b}$. Q.E.D.

COROLLARIA.

I.

In Algebra multa proponuntur, quæ nemo capere potest.

II.

Verum Geometriæ, (vel si mavis Megethometriæ aut Megethicæ) objectum, extra mentem Mathematicorum non datur.

III

Geometria Theoretica propriam suam dignitatem & utilitatem habet, per se æstimandam, quæ a rerum humanarum necessaria suppeditatione sese quam longissime solet abducere, earumque rerum, quibus usus vitæ necessarius contineri solet, nullam cognitionem aut curam appetit; per accidens tamen aliquot ejus veritates ad res Physicas applicatæ sunt, unde Geometria Practica *(quam Mathematici recentiores propterea* Geometriam Applicatam *vocare malunt) originem traxit.*

IV.

Accuratissimus Geometra, quando instrumentis etiam accuratissimis rerum altitudines, aut distantias horizontales in campo metitur, *situr, nihil ſatis accurati aut Geometrici ſibi ſpondere poteſt, ſed pro inveſtiganda longitudine lineæ majoris, aliquot perticarum, lineæ vero mediocris, aliquot pedum, & lineæ minoris, aliquot digitorum errore contentus eſſe debet; facilior autem ſi evaſerit, id non induſtriæ Menſoris, ſed fortunæ potius imputandum cenſemus. Quod inter alia quoque adducitur ad* Geometriæ Theoreticæ *præ* Applicata *(vulgo* Practica *dicta) præſtantiam probandam.*

V.

Longe plus errant illi Menſores, qui neglecta Trigonometria, omnia in papyro per ſcalam geometricam, Transportatorium, Circinum, & Regulam operoſe abſolvunt. Quam methodum ab inſigni quodam Mathematico viam Sartoriam *appellatam fuiſſe memini.*

VI.

Qui nihil aliud ex Geometria didicerunt, quam modos menſurandi rerum altitudines, diſtantias horizontales, cum Agrimenſoria, Stereometria, & Arte Viſoria (Germ. die Viſier-Kunſt/) *illi vix milleſimam Geometriæ partem intelligunt.*

VII.

Mechanicis omnes magnitudines ſunt commenſurabiles.

VIII.

Vere & eleganter Plato, Lib. XIII. Theæteto de Scientia, *Philoſophiam appellavit:* ὁμοίωσιν τῷ Θεῷ, κατὰ τὸ δυνατὸν ἀνθρώπῳ, *id eſt: Aſſimilationem (imitationem) DEI, quatenus homini eſt poſſibilis.*

IX.

Bis tria *ſunt* ſeptem, bis ſex *tantummodo* ſex *ſunt*,
Hæc *bene ſi numeres* quatuor, *dant* milliaquinque.

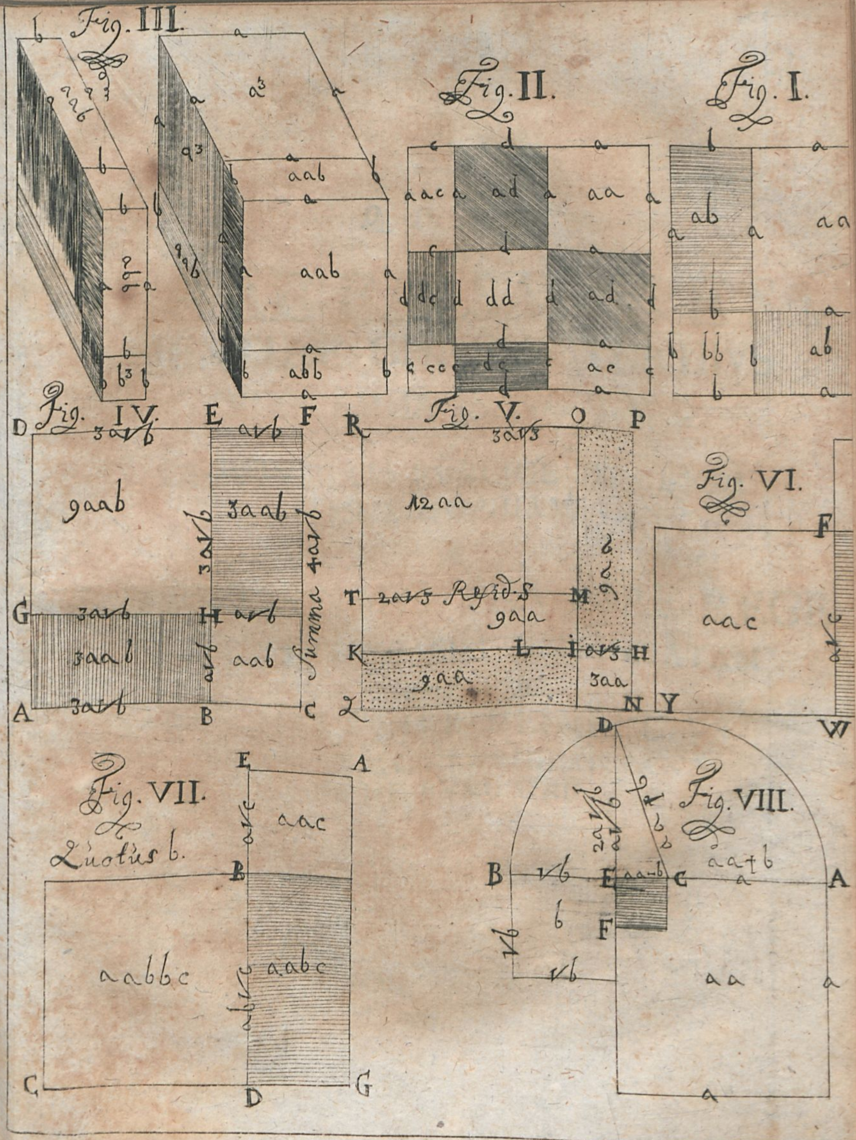
Fig. III.
Fig. II.
Fig. I.
a³
aab
aab
abb
b³
aa
ab
bb
ab
ad
dd
ad
Fig. IV.
D E F
9aab
3aab
G H
3aab
aab
A B C
Summa
Fig. V.
R O P
12aa
T M
Resids
9aa
K L I H
9aa
3aa
Z N Y
Fig. VI.
F
aac
W
Fig. VII.
E A
aac
Quotus b.
B
aabbc
aabc
C D G
D
Fig. VIII.
B E C A
F
aa

33.

26

Q. D. B. V.

DISSERTATIO
DE
TRIPLICI ALGEBRÆ CARTESIANÆ ALGORITHMO,

Quam

RECTORE MAGNIFICENTISSIMO
SERENISSIMO PRINCIPE AC DOMINO,
DN. FRIDERICO WILHELMO,
MARCHIONE BRANDENBURGICO, ET ELECTORATUS HEREDE, AC RELIQVA,

IN ILLUSTRI FRIDERICIANA
Benevolo Amplissimæ Facultatis Philosophicæ consensu,
Censuræ Eruditorum publicæ submittunt

PRÆSES
M. LUCAS BESELIN,
EJUSDEM FACULT. ADJUNCTUS,
ET RESPONDENS
HERMANN. ALBERTUS SCHUCKMAN,
MEGAPOL. GUSTROV. LL. St.

Ad diem Januarii A. C. M DCCI.

HALÆ MAGDEBURG.
Typis Johannis Jacobi Krebsii, Acad. Typogr.