Ueber das Höhen-Messen
vermittelst des
Barometers und Manometers
eine Streitschrifft
welche
in höchster Gegenwart
Seiner Herzoglichen Durchlaucht
des
Regierenden Herrn Herzogs
zu Würtemberg und Tek 2c. 2c.

Für die Erlangung der Würde eines Professors öffentlich vertheidigen wird,

Der Verfasser

Christoph Friderich Kausler.

Stuttgart
in der Druckerey der Herzoglichen Hohen Karls-Schule.

§. 1.

Ueber das Höhen-Messen

vermittelst des Barometers und Manometers.

Die allgemein bekannte und sehr wichtige Eigenschafft der Lufft sich in einen engern Raum pressen zu lassen und wieder auszudehnen, so bald die zusammendrükende Gewalt vermindert wird, mußte ganz natürlich auf den Gedanken führen, daß diese ausdehnende Krafft der natürlich zusammengepreßten Lufft mit ihrer Höhe über der Oberfläche der Erde, oder vielmehr mit ihrer Entfernung

 vom

vom Mittelpunkt derselben in einem gewiesen Verhältnuß stehe, und also eines aus dem andern gefunden werden könne. Allein eben diese elastische Krafft hängt noch von mehreren Umständen ab; z. B. von der Wärme, von der sich beständig in der Athmosphäre aufhaltenden größern oder geringern Menge von Dünsten; überdiß ist die Schwere eine Function der Entfernung vom Mittelpunkt der Erde, und weil sich diese um ihre Axe drebt, so würkt noch überdiß eine Krafft auf jedes Körper-Element der man den Namen der Centrifugal-Krafft gegeben hat. Alle diese Umstände nun zusammen genommen, machen daß diese dem Anschein nach so einfache Lehre sehr verwickelt und weitläufig wird, wenn man alles in gehöriger Schärffe nehmen will.

§. 2.

Je allgemeiner man aber die Sache betrachtet, d. i. auf je mehr von diesen besondern Ursachen man Rüksicht nimmt, desto größer ist alsdann die erhaltene Schärffe; und dieses stuffenweise hinnähern an die Warheit, ist der Grund warum die verschiedene Schrifftsteller so viele und so sehrv on einander abweichende Regeln zum Gebrauch der Höhen-Messungen herausgebracht haben. Meistens hatte jeder derselben seine eigene Hypothese auf die er seine Schlüsse baute, und man müßte in dieser Materie sehr wenig bewandert seyn, um nicht zu wissen, daß es beynahe eben so viel Methoden, als herausgebrachte Regeln giebt.

§. 3.

Die Hauptabsicht dieser Abhandlung geht also dahin, zu zeigen, daß alle bisher gegebene, und aus theoretischen Untersuchungen hergeleitete Formeln, das Höhen = Messen vermittelst des Barometers betreffend und noch weit mehrere, deren bisher noch nirgends gedacht worden ist, aus einer einzigen allgemeinen, und die Grundbedingungen des Gleichgewichts flüssiger Wesen ausdrükenden hergeleitet werden können. Inzwischen erinnere ich hier ein für allemal, daß ich niemalen im Sinn hatte, eine vollständige Theorie des Höhen = Messens zu liefern: sondern nur Zusäze die aber vielleicht nicht ganz und gar zu verwerfen.

§. 4.

So weit von dem Hauptzwek dieser Abhandlung, bey deren Durchlesung man auch noch einige Neben = Absichten die doch wegen dem ganzen wichtig waren, erkennen wird, und von denen ich nur eine anführen werde. Die Folge wird nämlich ergeben, daß das Manometer beym Höhen = Messen sehr grosse Dienste leisten kann, und in manchem Betracht dem Barometer vorzuziehen ist. So wie ich es aber überall beschrieben gefunden, schien es mir mit einigen Unbequemlichkeiten behafftet zu seyn, und deswegen glaube ich wird eine verbesserte Einrichtung desselben hier an ihrem wahren Ort seyn.

§. 5.

Unter dem Namen Manometer verstehe ich ein Werkzeug vermittelst dessen man das Gewicht eines bestimmten und zugänglichen Raums voll Luft zu jeder Zeit anzugeben im Stand ist, ohne ein wirkliches Abwägen vorzunehmen. In diesem Verstand nun ist für sich selbst klar, daß nur das Guerikische Manometer diesen Namen verdiene. Und weil man seine einfache Einrichtung in den meisten physikalischen Lehrbüchern beschrieben finden kann, so halte ich mich hiebey nicht auf, sondern zeige sogleich die Gründe an, so mich bewogen, seine ursprüngliche Einrichtung in etwas zu verändern.

§. 6.

Einmal zeigt es nur überhaupt die Veränderungen in der Dichtigkeit der äussern Luft, nicht aber die Grösse dieser Veränderungen an, wenigstens würde man in beschwerliche Weitläuffigkeiten verfallen, wenn man die von einigen Schrifftstellern angezeigte Methode wirklich anwenden wollte. Alsdann ist eben so gewis, daß das Gegen = Gewicht, so klein man es auch immer annimmt, doch noch gros genug ist, als daß die Voraussezung es behalte in allen Umständen und an jedem Ort, einerley Gewicht nicht zu manchen Felern Anlas geben könnte, die, wenn sie leicht vermieden werden können, doch immer zu vermeiden sind. Endlich ist nicht zu zweiffeln, daß nicht eine römische Waage hier ungleich bessere Dienste leiste, als eine gleicharmigte in dem sie empfindlicher ist, und also geringere Veränderungen anzeigt.

§. 7.

Der Körper A nehme also einen grössern Raum ein, als B, beede hängen auf verschiedenen Seiten einer ungleich armigten Waage. B sey noch überdiß ganz in eine unelastische flüssige Materie eingetaucht. A befinde sich in freier Luft in einer größern Entfernung vom Unterstüzungs = Punkt als B. Wann nun die Dichtigkeit der Lufft sich verändert und alle übrige Umstände gleich bleiben, so ist begreiflich, daß das Gleichgewicht zwischen A und B gestört werden müsse, und nur durch eine Verrückung von A wieder hergestellt werden könne. Es sey also vor der geschehenen Veränderung:

Das Gewicht des Körpers in der flüssigen Materie $=$ p seine beständige Entfernung vom Unterstüzungs=Punkt $=$ a die veränderliche Entfernung von A $=$ z.

Gesezt nun, man habe nach der schon längst bekannten Methode, das Gewicht einer gegebenen Menge Luft zu messen, gefunden, daß diejenige so den Raum A ausfüllen könnte D wäge, so wird das absolute Gewicht von A oder das was er im leeren Raum wiegt, seyn

$$\frac{pa + zD}{z}$$

§. 8.

Wann nun nach der vorgegangenen Veränderung A in die Entfernung e gehängt werden muß, um mit B das Gleich-Gewicht zu halten, so findet sich das Gewicht einer Menge Lufft, die den Raum A ausfüllen könnte

$$= \frac{pa + zD}{z} - \frac{pa}{e} = \frac{e\,zD + pa(e - z)}{ez}$$

folglich verhält sich die Dichtigkeit derjenigen Lufft die nach der obigen Vorschrifft abgewogen worden zur gegenwärtigen

$$= eDz : eDz + pa(e - z)$$

Allein p ist selbst eine veränderliche von der Wärme abhängige Größe. Es wäre zwar leicht vermittelst eines Thermometers und einiger kleinen Rechnungen den wahren Werth davon zu bestimmen. Da es aber doch Weitläuftigkeiten sind, so scheint mir folgende Einrichtung bequemer.

---

§. 9.

§. 9.

Man seze nämlich es befinde sich auf der Seite von A ein Gewicht C, dessen Raum so gros als der von B, seine Entfernung vom Unterstüzungs-Punkt sey ebenfalls b, und es hange in eben der flüssigen Materie worinn B hängt. Es sey überdiß die specivische Schwehre dieser leztern $= x$, die der Lufft $= y$ das absolute Gewicht von A sey $= P$, das von B $= p$, und von C $= p'$ und es verhalten sich die Räume von B oder C zu dem von A $= r : v$ so folgt, wofern a und b die Entfernungen von A, B, C vom Unterstüzungs-Punkt sind,

daß $(p - x)\, b = (p' - x)\, b + (P - v\, y)\, a$
woraus

$$v\, y = \frac{P\, a - b\,(p - p')}{a}$$

Da nun x in diesem Ausdruck nicht vorkommt, so können wir auch annehmen, alle drey Körper hangen in freyer Lufft, und auf diese Art wird das Manometer einfacher, als es nach der vorigen Einrichtung war.

§. 10.

Da nur a veränderlich ist, so folgt, daß wann a' aus a und $v\, y'$ aus $v\, y$ wird, seyn werde

$$v\,y' = \frac{P\,a' - (p - p')\,b}{a'}$$ folglich

$$v\,y : v\,y' = \frac{P\,a - (p - p')\,b}{a} : \frac{P\,a' - (p - p')\,b}{a'}$$

Da es nun nicht die geringste Schwürigkeit hat, die Werthe von P p, und p′ durch eine einzige Erfahrung zu bestimmen, so kommt es mir vor, als ob in Absicht auf diesen Punkt bey dem Manometer nichts mehr zu verändern sey. Was noch einige andere mechanische Verbesserungen desselben anbelangt, so übergebe ich sie hier um mich zum Haupt-Zwek selbst zu wenden, und zu gleich auch bey Gelegenheit den Nuzen dieses so wichtigen Werkzeugs, das so gut als das Barometer verdiente, bekannt zu seyn, in einigen Anwendungen wenigstens einiger massen zu zeigen.

§. 11.

Ich habe schon oben bemerkt, daß die verschiedene Voraussezungen der Schriftsteller in Absicht auf das Höhen-Messen eine sehr große Anzahl Methoden, und daraus hergeleitete Regeln erzeugt haben. Deswegen ist die Frage ganz natürlich, ob sich die Grund-Geseze des Gleichgewichts flüssiger Wesen

sen nicht durch eine Formel ausdrucken lassen, aus welcher so dann jene verschiedene Regeln als besondere Fälle weit weniger mühsam hergeleitet werden könnten? Mit diesen Gedanken war ich beschäftigt zu eben der Zeit, als ich die vortreffliche Abhandlung des berühmten Eulers (principes généraux de l'equilibre des fluides. Mem: de l'acad. Berlin. 1755.) durchlas und worinnen ich dann unvermuthet fand, was ich schon so lange vergebens gesucht hatte. Man wird also das folgende als eine Ausführung derselbigen ansehn und ich behalte mir nichts bevor, als das geringe Verdienst erwiesen zu haben, daß alle Theorien, die man über das Höhen-Messen mit dem Barometer vor und nach dem Euler gegeben hat, und vielleicht noch weiter geben wird, nichts als Folge-Säze einer der schönsten von diesem grossen Manne entdekten Wahrheiten sind.

§. 12.

In einer flüssigen Materie also, sie sey nun elastisch oder nicht betrachtet Euler einen unendlich kleinen Theil derselben, dem er die Gestalt einer Parallellepipedi gibt. Alle Kräfte aber welche auf dasselbige würcken können auf drey reducirt werden, die man durch eben so viel Axen vorstellen kann, und wovon immer eine auf den beeden übrigen senkrecht ist. Durch eine sehr einfache Art zu schliessen findet der berühmte Verfasser folgende Bedingung des Gleich-Gewichts. Man multiplicire jede beschleunigende Krafft, so auf ein Theilchen würkt durch das differentiale ihrer Entfernung von einem gewissen fixen Punkt auf derselbigen; so erhält man drey Produkte; dieser Summe werde noch mit der Dichtigkeit des flüssigen Wesens multiplicirt, so ist das Produkt das Differentiale derjenigen Größe die die Stärke der Zusammenpressung desselben Theilchens ausdrukt. Um nun die Eulerische Benennungen beizubehalten, so seyen P, Q und V die drey Kräffte, ihre Entfernung von dem fixen Punkt auf ihrer Richtung x, y und z, q die Dichtigkeit der flüssigen Materie p aber die Höhe einer Säule von einem homogenen flüssigen Wesen, das die Zusammenpressung an demselben Ort mißt und dessen Dichtigkeit 1. ist; so folgt nach dem eben erklärten Gesez, daß

$$dp = q(Pdx + Qdy + Vdz)$$

Anm. Damit diejenige, welche sich diese Streitschrifft zu lesen die Mühe nehmen, hier nicht aufgehalten werden, so werde ich statt den Eulerischen Beweis abzuschreiben einen hier geben, welcher ganz von demselben verschieden ist, übrigens aber die Sache, wie es mir vorkommt, nicht weniger kurz und deutlich darstellt. Man stelle sich also in der flüssigen Materie, deren Geseze des Gleichgewichts man untersuchen will, einen unendlich dünnen Canal ABCD vor. Die Richtungen der Kräffte nun, welche auf ein Theilchen M desselben würcken, seyen durch SQ, QP, PM vorgestellt, die nach SQ heiße P, Nach QP, Q und die nach PM heiße V; ferner sey m unendlich nahe bey m, und N m auf M m an m senkrecht M N aber $\# SQ$ stellt nun M N, die Krafft P vor, so bedeutet M n den Theil derselben welcher längs M n würkt. Fällt man überdiß von m auf M N die senkrechte Linie m d so ist Δ M m d $\backsim$ M m N also M m: M d = M N: M n oder M m: M d = P: $\frac{P \cdot Md}{Mm}$ aber

M d = d x also ist diese lezte Krafft $\frac{P\,dx}{Mm}$. Ist nun die Dichtigkeit des flüssigen Wesens q, so ist die Summe aller Kräffte welche längs M m, drucken und zwischen M und m enthalten sind P q d x. Zerlegt man die Krafft so nach der Richtung Q P, und die ich Q heiße, auf eine ähnliche Art, so findet sich, daß die Summe aller Drükungen nach M m = Q q d y und so die welche von V herrühren = V q d z. folglich ist die ganze Gewalt die das flüssige Wesen zwischen M und m anwendet sich nach der Richtung M m zu bewegen = q(Pdx + Qdy + Vdz) aber diese Gewalt ist auch d p, wann die Dichtigkeit der Homogenen flüssiger Materie, womit man die Zusammenpressung mißt, = 1. ist und p die Höhe einer Säule derselben, die mit der Summe der Drükungen nach M m eines in sich selbst zurükgebenden Canals im Gleichgewicht wäre.

Dieser Beweiß hat noch überdiß den Vortheil, daß er auf eine beliebige Anzahl von Kräfften sie mögen nun wirken nach welchen Richtungen sie wollen, angewendet werden kann.

Diß ist also die allgemeine Formel die ich bei allen folgenden Untersuchungen zum Grund legen werde.

Es steht aber die Elasticität der Lufft in zusammengesezter Verhältnuß ihrer Dichtigkeit und Wärme wann also unten an einem Ort A die Barometer-Höhe h, die Dichtigkeit g und der Grad der Wärme c ist, und in der Höhe z diese Größen sich in p, q und r verwandlen, so ist

$$q = \frac{g\,c\,p}{h\,r}$$

so weit geht das was ich aus der schon einigemal angeführten Abhandlung gezogen; Laßt uns nun auf die Anwendung dieser Grundsäze selbst kommen.

§. 13.

Man nehme also mit Mariotte an es würcke keine andere Krafft auf die Körper als die der Schwehre, welche noch ausserdem als beständig angesehen werden soll, und die Wärme sey noch überdiß gleichförmig durch die

die Athmosphäre verbreitet, so wird $P = Q = o$, $V = 1$; und $r = c$. Daher $\text{Log. nat} \frac{h}{p} = \frac{g\,z}{h}$. eben so vor ein ander z' und p'

ist $\text{Log. nat} \frac{h}{p'} = \frac{g\,z'}{h}$. folglich

$z : z' = \text{Log.} \frac{h}{p} : \text{Log.} \frac{h}{p'}$; wo $\text{Log.} \frac{h}{p}$ den briggischen

Log. von $\frac{h}{p}$ bedeuten kann, welches ich wegen der Folge hier ein für allemal werde erinnert haben.

Diß ist aber eben die Formel, die Mariotte würde gefunden haben, wann er die Berechnung weniger mühsam angestellt hätte als er es wirklich gethan. Wie aus ihr sich diejenige von Halley, Scheuchzer, Bouqueur und Mayer herleiten lassen, findet sich in Kästners Abhandlung über das Höhenmessen also halte ich mich hiebey nicht auf.

§. 14.

Fontana sieht die Schwehre als veränderlich an, und sezt sie stehe an jedem Ort im umgekehrten Verhältniß des Quadrats der Entfernung vom Mittelpunkt der Erde, behält aber sonst die übrige Voraussezungen des Mariotte bey. Wenn sie also in $A = - 1.$ ist, und der Halbmesser der Erde φ heißt, so ist $V = - \frac{\varphi^2}{(\varphi + z)^2}$

daher $dp = - \frac{p g \varphi^2 d z}{h (\varphi + z)^2}$ woraus

$$\text{Log. nat } p = \frac{\varphi^2}{\varphi + z} \cdot \frac{g}{h} + C.$$

aber vor $z = 0$, ist $p = h$, also $C = \text{Log. nat } h - \frac{g \varphi}{h}$

Daher $\text{Log. nat } \frac{h}{p} = \frac{g}{h} \cdot \frac{\varphi \cdot z}{\varphi + z}$ eben so

$$\text{Log. nat } \frac{h}{p'} = \frac{g}{h} \cdot \frac{\varphi z'}{\varphi + z'}.$$ daher

Log.

$$\text{Log.}\,\frac{h}{p} : \text{Log.}\,\frac{h}{p'} = \frac{z}{\varphi + z} : \frac{z'}{\varphi + z'}$$

folglich
$$z' = \frac{\varphi\; z.\; \text{Log}\,\frac{h}{p'}}{(\varphi + z)\,\text{Log}\,\frac{h}{p} - z\,\log\,\frac{h}{p'}}.$$

Diese Formel stimmt völlig mit der des Fontana überein, wenn er sich schon einer ganz andern Methode bediente. Sezt man φ gegen z unendlich gros so erhält man wiederum die obige Mariottische

$$z' = \frac{z\;\text{Log.}\,\frac{h}{p'}}{\text{Log.}\,\frac{h}{p}}$$

§. 15.

Cassini nimmt wie Mariotte, V und r beständig an, geht aber darinn von ihm ab, daß er voraussezt, die Dichtigkeiten der Lufft verhalten

sich

sich wie die Quadrate der Elasticitäten, daher wird dieser Voraussezung gemäs

$$d\,p = -\frac{g\,p^2\,d\,z}{h^2}$$ und also

$$\frac{1}{p} = \frac{g\,z}{h^2} + C$$ aber $C = \frac{1}{h}$ also

$$z = \frac{h}{g} \cdot \left(\frac{h - p}{p}\right).$$ Eben so

$$z = \frac{h}{g} \cdot \left(\frac{h - p'}{p'}\right)$$ Folglich

$$z' = z \cdot \frac{p}{p'} \cdot \left(\frac{h - p'}{h - p}\right).$$

Nimmt

Nimmt man nun an es sey $h = 336'''$, $p = 335'''$ und $z = 63$. (nach neueren Versuchen ist $z = 78$.) und $336 - p' = y =$ derjenigen Größe, um die das Barometer während der Erhebung gefallen, so kommt

$$z = \frac{22365.\ y}{336 - y} \text{ oder beinahe } \frac{22000\ y}{336 - y}$$

Diese Formel kommt völlig mit derjenigen überein, auf welche D. Bernoulli durch ganz andere Betrachtungen geleitet worden. Sollte man also aus der Cassinischen Voraussezung den Grad der Wahrscheinlichkeit der Bernoullischen Hypothese nicht einigermassen bestimmen können?

Wollte man bey den vorigen Voraussezungen noch auf die Veränderlichkeit der Schwehre sehen so würde man erhalten haben

$$z' = z \left(\frac{h - p'}{h - p}\right) \cdot \left(\frac{g\, p\, \varphi - h\,(h - p)}{g\, p'\, \varphi - h\,(h - p')}\right)$$

und diese Formel hätte Cassini statt der obigen bey sehr hohen Gebürgen gebrauchen sollen.

§. 15.

Das wahre Verhältnuß zwischen der Dichtigkeit und Feder-Krafft der Lufft ist noch unbekannt, nur bey Dichtigkeiten, die nicht viel von derjenigen verschieden sind, welche sie nahe an der Oberfläche des Meers hat, kann man ohne merklichen Fehler annehmen, sie verhalten sich (mit Beiseitsezung des Einflusses der Wärme,) wie die Elasticitäten. Folglich sind die obigen Fälle, bei denen diß Verhältnuß auch bey stark verdünnter Lufft angenommen worden, auch in dieser Rüksicht, nicht die richtigsten. Es hat aber der berühmte Euler in der Abhandlung Tentamen explicationis phaenomenorum aëris, eine Hypothese aufgestellt, die zwar nicht mathematisch erwiesen werden kann, und auch manchem nicht wahrscheinlich vorkommen möchte, die aber dessen ungeachtet so beschaffen ist, daß die dardurch herausgebrachte Formel mit der Erfahrung besser als jede andere, übereinstimmt. In so fern wird es mir also erlaubt seyn das von ihm entdekte Gesez in die obige Gleichung zu substituiren, um vielleicht dardurch einige wichtige Wahrheiten zu entdecken. Er fand nämlich, daß wann q diejenige Größe bedeutet, mit der man die Dichtigkeit der natürlichen Lufft multipliciren muß um den Ausdruck der grösten Dichtigkeit zu erhalten, sich die Elasticität der natürlichen (an der Oberfläche des Meeres befindlichen) deren Dichtigkeit wir von nun an g sezen wollen zur Elasticität derjenigen erhalten, deren Dichtigkeit $m\,g$ ist, wie

$$1 : \frac{\sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{(q-m)^2}}{\sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{(q-1)^2}}.$$

Da

Da aber im gegenwärtigen Fall m gegen q sehr klein ist, so läßt sich diß Verhältnuß auf

$$1 : m + \frac{m(m-1)}{6q}$$

reduciren, folglich wird

$$p = \left[m + \frac{m(m-1)}{6q} \right] h.$$

Man nehme nun V so wol als r beständig an, so kommt

$$h\,dm.\left[1 + \frac{m+m-1}{6q}\right] = -mg\,dz.$$

daher nach gehöriger Integration und Hinzusezung der beständigen Grösse

$$\left(1 - \frac{1}{6q}\right) \operatorname{Log nat} m + \frac{2(m-1)}{6q} = -\frac{gz}{h}.$$

 eben

eben so

$$\left[1 - \frac{1}{6\,q}\right] \text{Log nat}\, m' + \frac{2\,(m' - 1)}{6\,q} = - \frac{g\,z'}{h}.$$

folglich

$$z : z' = (6\,q - 1)\,\text{L. nat}\, m + 2\,(m - 1) : (6\,q - 1)\,\text{L. nat}\, m' + 2\,(m' - 1)$$

und also

$$z' = z. \frac{(6\,q - 1)\,\text{Log nat}\, m' + 2\,(m' - 1)}{(6\,q - 1)\,\text{Log nat}\, m + 2\,(m - 1)}$$

Dieser Ausdruk bey dem man sich des Manometers bedienen muß, ist noch ziemlich einfach und läßt sich also in der Ausübung noch mit Vortheil gebrauchen.

§. 16.

Man kann sich aber auch desselben bedienen, um vermittelst zwoer Erfahrungen die gröste Dichtigkeit der Lufft zu finden, dann wann man in der vorigen Proportion außer q alle übrige Grössen als bekannt ansiehet, so findet sich

$$q = \frac{2\,z\,(m' - 1) - 2\,z'\,(m - 1)}{6\,(z' \operatorname{Log\,nat} m - z \operatorname{Log\,nat} m')} + \frac{1}{6}.$$

Da aber die Erfahrungen, so zu dieser Bestimmung nöthig sind, zu einer Zeit müssen angestellt seyn, wo die Lufft von Dünsten so viel als möglich befreyet und die Wärme in der Athmosphäre so gleichförmig als es nur seyn kann, ausgetheilt gewesen, so werde ich weiter von derselben keinen Gebrauch machen.

§. 17.

Um inzwischen aber doch den obigen Ausdruk vor z' auf einen besondern Fall anzuwenden, werde ich mit einigen Schriftstellern $q = 800$ sezen; und dann verwandelt sich die obige Formel in

$$z' = z \,.\, \left\{ \frac{4799 \operatorname{Log\,nat} m' + 2\,(m' - 1)}{4799 \operatorname{Log\,nat} m + 2\,(m - 1)} \right\}$$

und wenn schon in derselben sowol V als r beständig angenommen worden, so ist sie doch sehr geschikt uns einen Begriff von der Höhe der Athmosphäre zu geben. Wann nämlich einer Erfahrung des Mariotte zu trauen, so kann sich die Lufft von dem Raum, den sie an der Oberfläche der Erde, einnimmt, in einem viertausendmal eben so grossen ausbreiten, ehe ihre elastische Krafft als verschwindend betrachtet werden kann, folglich ist $m' = \frac{1}{4000}$ ferner $h = 336'''$, $p = 335'''$ und nach neueren Erfahrungen $z = 13$. Toisen. Ueberdiß kann man ohne merklichen Fehler $m = \frac{335}{336}$ sezen, folglich wird

$$z' = 13 \cdot \left(\frac{\text{Log nat } 4000 + 0{,}000\ 4166}{\text{Log nat } 336 - \text{Log nat } 335} \right)$$

oder $z' = 35012$ Toisen; das ist, ungefähr fünfzehen französische Meilen, die Meile zu 2283 Toisen gerechnet; welches sehr wol mit demjenigen übereinstimmt was Halley und de la Hire aus der Länge der Dümmerung gefunden haben; dem seye nun wie ihm wolle, so kann man sich des eben gefundenen Ausdrucks immer bedienen, um die Dichtigkeit der Lufft vor jede gegebene und sehr beträchtliche Höhe auf eine leichte Art zu bestimmen.

§. 18.

§. 18.

Alle bisher erklärte Methoden hatten den gemeinschaftlichen Fehler, daß bey denselben angenommen worden, die Wärme sey durch die ganze Athmosphäre gleichförmig verbreitet, welcher Saz aber durch die einfachste Erfahrung widerlegt werden kann. Es ist nämlich bekannt, daß je mehr man sich von der Oberfläche der Erde entfernet, desto mehr auch die Wärme abnehme. Und auf hohen Gebürgen ist der Unterschied auch ohne Thermometer sehr merklich. Da nun die Elasticität der Lufft eine Function von ihrer Dichtigkeit und Wärme zugleich ist, so muß diese leztere, wie oben schon bemerkt worden, nothwendig auch mit in Rechnung gebracht werden. Wenn man aber auf der andern Seite auf die verschiedene Umstände Rüksicht nimmt, von denen die Erwärmung einer gewissen Lufft Masse abhängt, so wird man leicht einsehen, daß die Aufgabe „**das Gesez der Abnahme der Wärme in der Athmosphäre nach denen verschiedenen Entfernungen von der Erd-Oberfläche aus theoretischen Untersuchungen zu finden,**“ eine der verwickeltsten Auflösungen haben werde, wann es je einem gelingen sollte etwas in dieser Materie zu leisten. Da aber doch die Auflösung unseres Problems auf der Berichtigung dieses so wichtigen Punkts beruhet, so scheint mir das beste, hier, wie in so vielen andern Fällen, eine Näherung anzubringen, die, wofern sie nur etwas erträglich ist, doch immer bessere Dienste leisten wird, als die ganz falsche Voraussezung die Wärme seye beständig. Man muß also ein gewieses Gesez annehmen, und die darinn unbestimmte Grössen durch einige zum Grund gelegte Erfahrungen, oder durch Mittel von Erfahrungen, zu bestimmen suchen.

§. 19.

§. 19.

Alles aber, was sich hierüber mit Gewisheit sagen läßt, beruht auf folgendem: die Wärme wird immer geringer, je höher man sich in der Athmosphäre erhebt, endlich wenn man bis auf eine gewisse Höhe k welche einige 6000 pariser Fuß annehmen, gekommen, so ist es daselbst kälter, als in jeder untern Gegend und eben so kalt als in jeder höhern; das ist in jeder Höhe $H > k$ ist die Wärme beständig; wofern aber $z < k$. so ist die Wärme daselbst eine solche Function davon, daß, wofern die $k = f$, die in z aber $= r$ ist, seyn werde, $r : f = k^m : z^m$; wo m die unbekannte Größe ist, welche wir so gleich bestimmen werden.

§. 20.

Aus den bisherigen Betrachtungen folgt, daß wann die Höhe eines gewisen Orts vermittelst des Barometers gemessen werden soll, man so gleich zween Fälle unterscheiden müsse. Entweder ist nämlich die mit dem Thermometer daselbst beobachtete Wärme $> f$ oder $= f$, im ersten Fall ist die gesuchte Höhe gewis $< k$ und man muß sich in diesem Fall nach der Vorschrifft richten, welche in den folgenden § erklärt werden soll. Ist aber die beobachtete Wärme $= f$, so weißt man daß das was gesucht wird, aus zween Theilen bestehe, deren erster $= k$, der andere aber diejenige Höhe ist, welche man nach den obigen Grund-

Grundsäzen findet würde, wann man annähme, der niedrigste Barometer-Stand sey derjenige, so in der Höhe k beobachtet worden, der höchste p' und die Wärme sey unveränderlich. So oft also die Höhe eines Orts $> k$, so oft können obige Regeln ihre Anwendung finden, bey geringern Höhen aber muß das Gesez der Abnahme der Wärme mit in Rechnung gezogen werden.

§. 21.

Wann man nun alle obige § angenommene Bedingungen beybehält, und statt r seinen Werth sezt, so kommt

$$\frac{dp}{p} = -\frac{gc}{h} \cdot \frac{z^m\, dz}{f k^m} \text{, also}$$

$$\text{Log nat } p = -\frac{gc}{f k^m} \cdot \frac{z^{m+1}}{m+1} + C.$$

oder endlich nach Hinzusezung des Werths von C.

$$\mathrm{Log\,nat}\,\frac{h}{p} = \frac{g\,c}{(m+1)\,f\,k} \cdot z^{\frac{m+1}{m}}$$ eben so

$$\mathrm{Log\,nat}\,\frac{h}{p'} = \frac{g\,c}{(m+1)\,f\,k} \cdot z^{\frac{m+1}{m}}$$ folglich

$$\left(\frac{Z}{z}\right)^{m+1} = \frac{\mathrm{Log}\ h - \mathrm{Log}\ p'}{\mathrm{Log}\ h - \mathrm{Log}\ p}.$$

woraus

$$\mathrm{Log}\ Z = \mathrm{Log}\ z + \frac{\mathrm{Log}\left(\dfrac{\mathrm{Log}\ h - \mathrm{Log}\ p'}{\mathrm{Log}\ h - \mathrm{Log}\ p}\right)}{m+1}.$$

§. 22.

Die obige Mariottische Regel hat gegeben,

$$\frac{Z}{z} = \frac{\mathrm{Log}\ h - \mathrm{Log}\ p'}{\mathrm{Log}\ h - \mathrm{Lng}\ p}.$$

Da

Da nur m nicht = o seyn kann, so folgt, daß die vermittelst derselben berechneten Höhen zu gros ausfallen; welches sich auch wirklich so verhält. Dieser Ueberschuß der wahren und mariottischen Höhen ist aber nie so beträchtich, als daß der Exponent m eine ganze Zahl seyn sollte. Es wird derselbe vielmehr ein Bruch seyn, wie das folgende ergeben wird.

Bestimmung des Exponenten m, aus Erfahrungen, welche man mit dem Barometer auf einigen Gebürgen in der Provence, im Languedoc und in der Dauphiné angestellt hat.

Auf dem Berg la Courlande war die Barometer Höhe 278‴ an der Oberfläche des Meeres aber 336‴ und die geometrisch gemessene Höhe des Bergs war 801. Toisen. Wir haben

$$h = 336'''$$

also $p = 335'''$. ferner $\left.\begin{array}{l} z = 13 \\ z' = 801. \end{array}\right\}$ Toisen.

$$p' = 278'''$$

Es ist aber $\text{Log}\,\dfrac{h}{p'} = 0,0822945.$

und

und $\text{Log}\,\frac{h}{p} = 0,0012945.$ folglich

$$\frac{\text{Log}\,h - \text{Log}\,p'}{\text{Log}\,h - \text{Log}\,p} = \frac{822945.}{12945.}$$

Hievon ist der Log $= 1,8032688.$ welcher mit $\text{Log}\,\frac{z'}{z}$

oder $1,7896892$ getheilt, gibt $1,0075.$ Daher $m = 0,0075.$

Auf dem Rupeyroux stund das Barometer auf $301,5'''$ seine senkrecht gemessene Höhe über der Meeresfläche war 446 Toisen. Daher

$$\left.\begin{array}{l} h = 336'''. \\ p = 335'''. \\ p, = 301{,}5'''. \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} z = 13 \\ z = 446 \end{array}\right\} \text{Toisen.}$$

also $\frac{\text{Log}\,h - \text{Log}\,p'}{\text{Log}\,h - \text{Log}\,p} = \frac{646907}{12945}$ woraus $-| - 1 = 1,0163$

und

und daher $m = 0,0163$. welcher Werth nur um $\frac{88}{10000}$ grösser ist als der vorige.

Auf dem Massane war die Barometer-Höhe $304, 7'''$. und $z' = 408$ Toisen; wann daher die obige Grössen ihren Werth beibehalten, so findet sich nach gehörig angestellter Rechnung $m = 0,0128$.

Auf dem Bugarac war $p' = 289, 5'''$, $z' = 628$. woraus $m = 0,0098$.

Die durch diese vier Erfahrungen bestimmte Werthe von m sind also $0,0075, 0,0098, 0,0163 \; 0,0128$. und so wie ich schon bemerkt, beträgt der Unterschied zwischen dem grösten und kleinsten nur $\frac{88}{10000}$; das Mittel aus denselben ist $0,0116$. und diesen Werth werde ich als der Wahrheit so ziemlich nahe kommend gebrauchen. Ich erinnere aber zugleich daß wann man mehrere Erfahrungen von Bergen deren Höhe kleiner als 6000 Fuß, hätte, der vermittelst derselben bestimmte Ausdruck vor m noch ungleich genauer ausfallen würde als der den ich so eben gefunden.

§. 32.

Inzwischen werde ich aber doch das bisher gefundene auf einige besondere Fälle anwenden.

Auf einem andern der ebengedachten Gebürge dem Mont d'or war die Barometer-Höhe 264, 5. folglich ist

$$\frac{Z^{1,0116}}{z'^{1,0116}} = \frac{\text{Log. } h - \text{Log. } p'}{\text{Log. } h - \text{Log. } p} \text{ oder}$$

$$z^{1,0116} = 13^{1,0116} \; \frac{1039136}{12945} \text{ woraus}$$

$$\text{Log } Z. = \frac{\text{Log } 13 + \text{Log } 1039136 - \text{Log } 12946}{1,0116}$$

Nach gehörig angestellter Rechnung findet sich nun $Z = 992$. Die wahre Höhe des Bergs aber war 1001 Toisen, daher der Unterschied

kaum

kaum 9 Toisen beträgt; und wann man die unten vorkommende Betrachtungen hier anwendet noch mehr verringert werden kann.

Auf dem Clairet war die Barometer-Höhe 314, 5''' folglich

$$Z^{1,0116} = 13^{1,0116} \frac{\text{Log } 336 - \text{Log } \frac{3146}{10}}{\text{Log } 336 - \text{Log } 336}$$

also

$$\text{Log } Z = \text{Log } 13 + \frac{\text{Log } 287187 - \text{Log } 12945}{1,0116}$$

woraus $Z = 278$ die wahre Höhe aber war 277

§. 24.

Mehrere auf diese Art berechnete Beispiele haben mir gezeigt, daß diese Methode bey Höhen, welche kleiner als 6000 Fuß sind, mit vielem Vortheil angewendet werden kann. Was nun solche betrift, die diese Gränze überschreiten, so habe ich schon oben gesagt, daß man dieselbe als aus zween Theilen

zusam-

zusammengesezt ansehen müße, davon der eine 1000 Toisen, der andere aber diejenige Höhe ist, die man finden würde, wann man annähme die untere Barometer-Höhe sey 264, $5'''$ die obere $= p'$ und $z = 16, 5$ Toisen. Inzwischen muß ich gestehen, daß die meiste auf diese Art berechnete Höhen noch um etwas beträchtliches kleiner sind, als sie seyn sollten wann sie gleich der Wahrheit näher kommen, als diejenige, so man nach den Vorschrifften der Maraldi, Mariotte, Scheuchzer, Horrebow, Halley, Cassini und D. Bernoulli, finden würde.

§. 25.

Um dieses mit einem Beispiel zu erläutern, und zugleich auf einige sehr wichtige Folgen zu kommen, werde ich aus Condamines peruvianischen Reisen folgenden Fall anführen. Auf dem Caraçon war die Barometer-Höhe $190'''$ und seine geometrisch gemessene Höhe über der Meeresfläche 2470 Toisen (ob die Wirkungen der Strahlenbrechung hier abgerechnet sind, wie bey den vorigen Bergen, kann ich nicht sagen). Sieht man nun diese Höhe aus zwey Theilen zusammengesezt an, davon der eine 1000 Toisen, der andere aber x ist, und sezt $p' = 190'''$, $f = 264,5'''$. $p = 263,5'''$

so wird $$Z = \frac{33}{2}\left(\frac{\text{Log. } 264,5 - \text{Log } 190}{\text{Log } 264,5 - \text{Log } 263,5}\right)$$

oder

oder 1441. also die ganze Höhe 2441. Toisen oder 14646 Fuß. Hätte man aber diese Höhe so gleich als eine einzige Größe, nach der Formel

$$\frac{Z}{z} = \frac{\text{Log } h - \text{Log } p'}{\text{Log } h - \text{Log } p}.$$

berechnet so würde man erhalten haben $Z = 12049$ Fuß, und also bey weitem weniger. V. Kästners Abhandlungen über das Hohen-Messen, wo man auch verschiedene andere Werthe vor Z nach andern Voraussezungen berechnet finden wird. Unter allen kommt der nach Mayers Methode der Wahrheit am nächsten; denn dieser, welchen ich so eben gefunden.

§. 26.

Die allzugeringe Höhen, welche die vorige Methode gibt, verleiteten mich auf den Gedanken als ob die Wärme vielleicht unter oder über 1000 Toisen Höhe, anfange beständig zu werden. Ich nahm also aus Lamberts Beiträgen zum Gebrauch der Mathematik die Erfahrung, so auf dem Berg la Courlande angestellt worden ist, und sezte $f = 278'''$, welches die auf der Spitze desselben beobachtete Barometer-Höhe war, ferner $p = 277'''$, und $z = \frac{94}{6}$ Toisen. Die Höhe k ist hier also gleich der Höhe des Bergs, d. i. 801. Toisen. Wenn man nun nach obigen Vorschrifften die Höhe des Coraçon über die Meeresfläche berechnet, so findet sich der zweyte Theil 1654 also die ganze Höhe = 2455 und folglich nur um fünfzehen Toisen weniger als sie seyn sollte; also doch der Wahrheit bey weitem näher, als nach der vorhergehenden Rechnung. Eben so, wenn man die Höhe des Carabourou eines Gebirges in Perou nach der ersten Art berechnet und also $p' = \frac{1019}{4}$ sezt, die übrige dort vorkommende Größen aber beybehält, so erhält man vor den zweyten Theil 163 so daß seine ganze Höhe 1163 Toisen betragen sollte, sie war aber 1213 vom Horizont $336'''$ an gerechnet.

Wendet man aber die im vorigen §. angenommene Voraussezung auf den gegenwärtigen Fall an, so wird der zweyte Theil 379 also die ganze Höhe 1180 welcher Werth obgleich vom Wahren noch weit entfernt, doch demselben ungleich näher ist als der vorige.

Anm. Sulzer gab in den Memoires de l'academie des sciences de Berlin de l'annee 1753. auch eine aber nicht viel bedeutende Methode die

Höhen

Höhen der Berge zu messen, und es wäre ein leichtes auch seine allgemeine Formel aus der obigen herzuleiten, wann es sich der Mühe lohnte. Er wendet sie aber auf die Berechnung eines Bergs an, wo $p' = 189'''$. berechnet man nun diesen Fall ebenfalls nach der leztern Vorschrifft so findet sich der zweyte der Höhe dieses Bergs 10065 Fuß, also die ganze Höhe 14871, die wahre betrug 14856. so daß hier nur um 15 Fuß gefehlt ist da nach der Sulzerischen Methode der Fehler sich auf 400 Fuß belauffen kann.

§. 27.

Indessen bin ich noch weit entfernt diese Methode als vollkommen auszuheben. Wie man aus dem bisherigen gesehen so ist der Ort, wo die Wärme anfangt beständig zu seyn noch gar nicht bestimmt; und so lange diß nicht geschehen, darf man hierinn keine Vollkommenheit hoffen. Die mir nothwendig vorgeschriebene Gränzen und der Zwek der gegenwärtigen Abhandlung erlaubten mir nicht diejenige Auswahl von Erfahrungen zu machen, wordurch dieser so wichtige Punkt hätte berichtiget werden können. Ich behalte mir es also auf eine andere Gelegenheit bevor wo meine Arbeit nimmer von der Zeit abhängt, sondern ich so viel darauf verwenden kann, als es die Wichtigkeit der Sache erfordert.

§. 28.

Bey allen bisher erklärten Methoden nahm man an, es würcke keine andere Kraft auf die Lufftheilchen als die der Schwehre. Allein jedermann sieht leicht ein, daß noch ausser derselben die durch die drehende Bewegung der Erde entstehende Centrifugal-Krafft noch müsse mit in Rechnung gezogen und ihr Einfluß bestimmt werden, welches im folgenden noch kürzlich geschehen soll. Es seyen also e und i die beede Pole der Erde, c derselben Mittelpunkt; und die auf dem Punkt C von ei senkrecht stehende h c der Halbmesser des Erd-Aequators, ferner sey f e h b k i ein Theil der, die halbe Erdkugel umgebenden Lufft. Von c ziehe man überdiß an irgend einen Punkt g im Umfang des halben Mittags-Creißes den Halbmesser g C und verlängere ihn bis in a; von diesem Punkt a fälle man alsdann auf ei oder C f die senkrechte Linie ad welche dem Umfang des Mittags-Creises e h i in m begegnen wird. Endlich sey noch gn $\#$ ad

Diß vorausgesezt, bedeute P diejenige beschleunigende Krafft welche auf die Körper die sich nahe an der Oberfläche der Erde befinden, würken würde, wenn diese keine drehende Bewegung hätte, das ist: diejenige, welche bei den Polen auf die Körper wirkt, und Q sey die Centrifugal-Krafft am Aequator. Sezt man nun noch ad $=$ x so wird diejenige, welche auf die Theilchen zwischen

a

a und g nach der Richtung da wirkt seyn $\frac{Q\,x}{r}$ folglich nach dem obig erwiesenen Lehrsaz

$$dp = q\left\{\frac{Q\,x\,dx}{r} - P\,dz\right\}$$

sezen wir nun der Kürze halber den Einfluß der Wärme beiseit, so kommt nach dem von q sein Werth $\frac{g\,p}{h}$ gesezt und gehörig integrirt worden:

$$\text{Log nat } p = \frac{g}{h}\left\{\frac{Q.\,ad^2}{2\,r} - P\,z\right\} + C.$$

aber wann $ac = gc = r$, so wird $ad = gn = \text{Cos}\,\varphi$ wo φ die Breite des Orts g ist, und $\text{Log nat } p = \text{Log nat } h$. folglich

$$\text{Log nat } p = \frac{g}{h}\left\{\frac{Q\,(ad^2 - \text{Cos}^2\varphi)}{2\,r} - P\,z\right\} + \text{Log nat } h.$$

aber $ad : Cos. \phi = r + z : r$. also $ad^2 : Cos^2 \phi = r^2 + 2rz : r^2$

folglich $ad^2 - Cos^2 \phi : Cos^2 \phi = 2z : r$. und daher

$$\text{Log nat} \frac{h}{p} = \frac{g}{h} \left(P - \frac{Q \, Cos.^2 \phi}{r^2} \right) z. \text{ eben so vor eben den Horizont } h.$$

$$\text{Log nat} \frac{h}{p'} = \frac{g}{h} \left(P - \frac{Q \, Cos.^2 \vartheta}{r^2} \right) z'. \quad \text{folglich}$$

$$Z' = z. \left(\frac{\text{Log } h - \text{Log } p'}{\text{Log } h - \text{Log } p} \right) . \left(\frac{P - \frac{Q \, Cos^2 \phi}{r^2}}{P - \frac{Q \, Cos^2 \vartheta}{r^2}} \right)$$

§. 28.

Es sey $\phi = 0$, und $\vartheta = 90°$; so ist

$$Z' = z \left(\frac{\text{Log } h - \text{Log } p'}{\text{Log } h - \text{Log } p} \right) . \left(\frac{P - Q}{P} \right)$$

Nimmt

Nimmt man noch überdiß $p = p'$, so erhält man

$$Z' : z = P - Q : P.$$

Das ist, eine gewisse Höhe (die ich mir der Kürze halber als eine gerade Linie vorstelle,) bey den Polen, verhält sich zu einer am Aequator an deren beeden Enden das Barometer auf eben der Höhe steht, wie an den respektiven Enden des erstern Orts $= P - Q : P$. folglich muß man sich bey dem Aequator vor eben den Horizont höher als bey den Polen erheben, damit das Barometer um eine gegebene Tieffe falle. Was ich hier von Pol und Aequator gesagt habe läßt sich auch auf andere Theile der Erd-Oberfläche anwenden.

§. 30.

Nach Maupertuis Theorie de la figure des astres ist $P = 289\,Q$ folglich verwandelt sich obiger Ausdruck in

$$Z' \quad z \quad \left(\frac{\text{Log } h - \text{Log } p'}{\text{Log } h - \text{Log } p}\right))(\left(\frac{289 - \dfrac{\text{Cos}^2 \varphi}{r^2}}{289 - \dfrac{\text{Cos}^2 \vartheta}{r^2}}\right)$$

Es

Es beziehen sich aber die Werthe $h = 336'''$, $p = 335'''$ und $Z = 13$ Toisen nur auf solche Oerter deren Breite ungefähr $45°$ ist; in diesem Fall wird $289 - \frac{\text{Cos}^2 \varphi}{r^2} = 289 - \frac{1}{2} = \frac{577}{2}$, also

$$\left\{\frac{\text{Log}\, h - \text{Log}\, p'}{\text{Log}\, h - \text{Log}\, p}\right\} \cdot \left\{\frac{577}{578 - \frac{2\,\text{Cos}^2 \vartheta}{r^2}}\right\}$$

Nach diesen Grundsäzen läßt sich nun die oben berechnete Höhe des Coraçon sehr leicht verbessern, Dann da derselbe unter dem Aequator ligt, so ist $\text{Cos}\, \vartheta = r$, also muß der berechnete zweyte Theil der Höhe desselben noch um $\frac{1}{567}$ vermehrt; und aus eben dem Grund auch statt 801 Toisen nun 802, gesezt werden, so daß seine ganze Höhe seyn wird 2459, welches nur 11 Toisen weniger ist, als die wirkliche Ausmessung gab. Was die Berechnung des Einflusses der Dünste nebst noch andern hieher gehörigen Untersuchungen betrifft, so erlauben mir die Gränzen dieser Streitschrift nicht hievon zu handlen. Ich behalte mir aber die Sache auf eine andere Gelegenheit bevor.

Stuttgart, Diss., 1775/92

Ueber das Höhen-Messen
vermittelst des
Barometers und Manometers
eine Streitschrifft
welche
in höchster Gegenwart
Seiner Herzoglichen Durchlaucht
des
Regierenden Herrn Herzogs
zu Würtemberg und Tek 2c. 2c.
Für die Erlangung der Würde eines Professors öffentlich vertheidigen wird,
Der Verfasser
Christoph Friderich Kausler.

7

1785, 1

Stuttgart
in der Druckerey der Herzoglichen Hohen Karls-Schule.